



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Teoría de Ramsey: elementos y álgebra

Autor/es

VÍCTOR MANUEL LÓPEZ ANTÓN

Director/es

MARÍA DEL PILAR BENITO CLAVIJO

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



Teoría de Ramsey: elementos y álgebra, de VÍCTOR MANUEL LÓPEZ ANTÓN (publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.



**UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA**

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

**TEORÍA DE RAMSEY: ELEMENTOS
Y ÁLGEBRA**

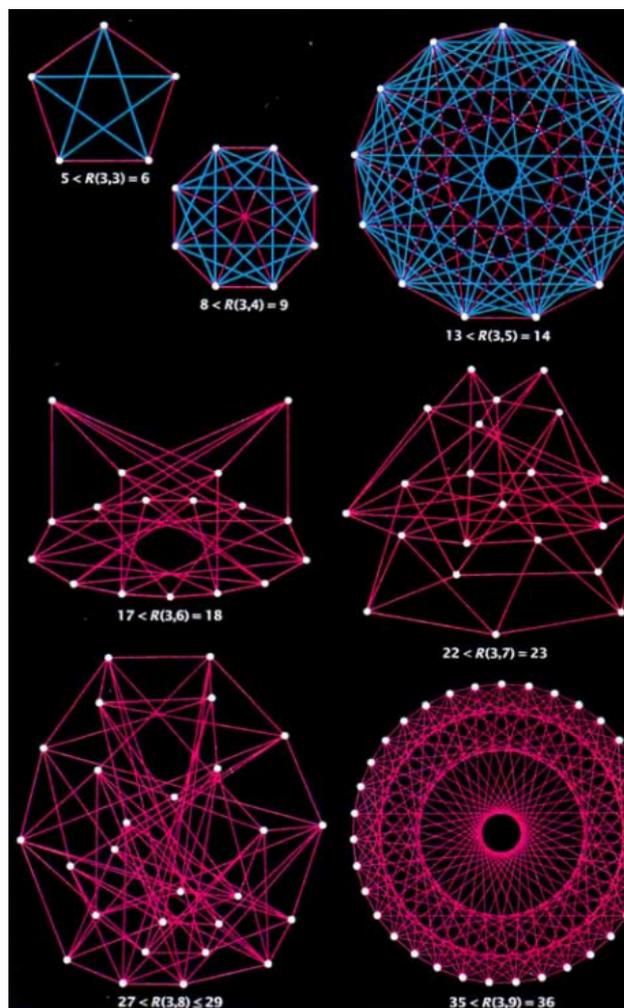
Realizado por: Víctor Manuel López Antón

Tutelado por: María del Pilar Benito Clavijo

Curso 2019-2020

TEORÍA DE RAMSEY: ELEMENTOS Y ÁLGEBRA

El desorden completo es imposible



Víctor Manuel López Antón

Resumen

Verdadero o falso: en cualquier reunión de seis personas, o bien hay tres que se conocen entre sí o tres que son completos desconocidos. La respuesta a esta pregunta y otras en las que aparece la idea de partición es el objeto central de la llamada Teoría de Ramsey, cuyo principio fundamental afirma que el desorden total es imposible. En este trabajo fin de grado, presentamos la versión finita de los teoremas clásicos de Ramsey y sus elementos básicos. Describiremos la historia de la teoría y la ilustraremos con múltiples ejemplos. Los resultados centrales que se han incluido, exponen de forma detallada los contenidos del artículo de 1955, firmado por Greenwood y Gleason, y los obtenidos por Kalbfleisch y Stanton en 1978. Los dos primeros autores, proporcionan técnicas de coloración basadas en el uso de particiones libres de sumas de restos de potencias sobre cuerpos finitos. Los dos últimos, nos van a enseñar a 3-colorear salvo isomorfismos el grafo completo de 16 vértices que denotamos por K_{16} . Para la exposición de resultados, seguimos el hilo de los trabajos [6] y [15] .

Abstract

True or false: in any meeting of six people, there are three knowing each other or there are three completely unknown. The answer to this question and other ones in which the concept of partition appears is the main idea in Ramsey Theory, it's fundamental principle asserting that complete disorder is impossible. In this end of degree project, we present the finite version of the classical Ramsey's theorems and their basic elements. We will describe the theory's history with multiple examples. The main results included, expose in detail the contents of the 1955 article, signed by Greenwood and Gleason, and the obtained by Kalbfleisch and Stanton in 1978. The two first authors, provide coloring techniques based in the use of sum-free partitions of power rests over finite fields. The two last ones, show us how to 3-colour, except isomorphism, the complete graph of 16 vertices, that we will denote K_{16} . For the results exposure, we follow the ideas of the papers [6] and [15].

Introducción

A lo largo de este trabajo, expondremos las ideas básicas de la Teoría de Ramsey, que establece que, en cualquier conjunto suficientemente grande, siempre es posible encontrar subconjuntos que siguen un determinado patrón. Entre otras cosas, contaremos la historia de esta teoría, describiremos técnicas de obtención de cotas para los denominados números de Ramsey, hablaremos sobre coloraciones para el grafo completo de 16 vértices (K_{16}) y mostraremos la relación de la teoría con el Principio del Palomar.

El trabajo está organizado en tres capítulos. En el primero de ellos, daremos numerosos ejemplos que abren camino a las ideas de Ramsey, en las que el concepto de coloración es muy importante. Definiremos r -coloraciones de k -subconjuntos para llegar a la noción de función de Ramsey. En la última sección del capítulo describimos, en breve, los elementos de estructuras matemáticas (grafos, grupos, cuerpos finitos y restos de potencias) necesarios para entender los contenidos explicados.

En el Capítulo 2, trataremos la versión finita de la Teoría de Ramsey. Para ello, introduciremos la noción de número de Ramsey haciendo uso de la buena definición de la función de Ramsey. Esta noción es básica en la teoría. Estableceremos propiedades y cotas para estos números y, utilizando técnicas algebraicas que usan la estructura de los cuerpos finitos, podremos dar el valor exacto de algunos (pocos y pequeños) de los llamados números de Ramsey bicolor y del tricolor $R(3, 3, 3)$. El capítulo se centrará después en mostrar cuántas coloraciones con 3 colores, 3-coloraciones, de las aristas de K_{16} sin triángulos monocromáticos existen salvo isomorfismo. El capítulo termina con la formulación general de la versión finita del Teorema de Ramsey finita, para la que, el concepto de coloración de hipergrafos es fundamental.

El tercer y último capítulo se centra en las aplicaciones de esta vasta teoría, desde problemas de naturaleza matemática, pasando por la demostración de resultados dados por matemáticos de renombre, hasta aplicaciones que se alejan de la clásica formulación en términos matemático y se acercan, por ejemplo, al terreno informático.

Índice general

1. Preliminares	4
1.1. Ejemplos	4
1.2. Función de Ramsey y coloraciones	10
1.3. Hipergrafos, cuerpos finitos y restos	13
A: Notas históricas	16
2. Teoría de Ramsey Finita	18
2.1. Números, técnicas y cotas	19
2.2. Coloraciones de K_{16}	29
2.3. Principio de Ramsey general	38
B: Método probabilístico y computación	41
3. Aplicaciones	43
3.1. Problemas <i>a la Ramsey</i>	43
3.2. Geometría, Progresiones y Ecuaciones	46
3.3. Otras aplicaciones	48
C: Otros horizontes	54
Anexos	56
A1: Nociones básicas de estructuras	56
A2: Números de Ramsey actualizados	61
A3: Tablas de Coloreado	63
A4: Solución Oficial Problema IMO 1978	64

Capítulo 1

Preliminares

“Of three ordinary people, two have the same sex”
D.J. Kleitman (1934- ?)

Parafraseando a Graham, Rothschild y Spencer en el preámbulo de [19], la visión romántica de las matemáticas es que sus resultados surgen en repentinas explosiones de visiones brillantes. Esto es lo que se puede decir de las tres gemas matemáticas que se presentan en este capítulo. La primera de ellas, el llamado *Principio del Palomar*, en su versión más simple afirma que: “Si $n + 1$ palomas ocupan n nidos entonces en un nido habrá al menos dos palomas”. Desde esta afirmación, el enunciado del profesor del MIT D. J. Kleitman es claro tomando los adecuados $n=2$ nidos.

Junto con el Principio del Palomar, presentaremos otros dos resultados establecidos en 1916 por Issai Schur [24] y en 1927 por Bartel Leendert van der Waerden. Además de estos tres resultados, ilustrados mediante ejemplos en la sección 1.1, este capítulo introduce en la sección 1.2 las nociones y herramientas claves que nos van a permitir dibujar la esencia de la Teoría de Ramsey. Para la elaboración de los contenidos, se han usado las referencias [1, 19] y la información proporcionada por la enciclopedia libre Wikipedia. La organización de la primera sección está inspirada en los contenidos iniciales y la presentación que se hace en [6, 15].

1.1. Ejemplos

El Principio del Palomar es un resultado muy natural que, usado con habilidad, es un instrumento eficaz en la resolución de problemas. Aunque este principio aparece ya en el texto *Selectæ Propositiones in Tota Sparsim Mathematica Pulcherrimæ*, (Gasparem Bernardum, 1622) del jesuíta, astrónomo y matemático Jean Leucheron, la primera formulación formal del mismo se le

atribuye al matemático alemán Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) y por ello es conocido como Principio (de las cajas) de Dirichlet. Una formulación más general de este principio, a la que haremos referencia con frecuencia a lo largo del trabajo es:

Principio del Palomar 1.1. *Sean p, q y n enteros positivos, tales que $p > nq$. Si queremos ordenar p objetos en n cajas, alguna caja debe contener al menos $q + 1$ objetos.*

El problema lógico que enunciamos a continuación fue propuesto en la 13th William Lowell Putnam Mathematical Competition¹ celebrada en marzo de 1953:

Problema 1 (Problema A2, Putnam Math. Competition, 1953). *Se toman seis puntos arbitrarios en el espacio de modo que no hay tres alineados ni cuatro coplanarios. Los quince segmentos que los unen por parejas se pintan, unos de color rojo y otros de azul. Probar que hay algún triángulo que tiene todos sus lados del mismo color.*

A pie de página reproducimos la solución oficial² de este problema. En ella, el uso del Principio del Palomar es evidente y crucial: desde un punto cualquiera A nacen 5 segmentos (objetos) y tenemos 2 colores (cajas); como $5 > 2 \cdot 2$, al menos $3 = 2 + 1$ segmentos tienen el mismo color. Al considerar los extremos de tales segmentos, una simple observación conduce a la solución. Observamos que la solución propone colorear las aristas del grafo completo (la definición se puede ver sección 1.3 de este capítulo) de seis vértices, K_6 , usando dos colores y buscar triángulos con aristas pintadas con el mismo color, a los que llamaremos *monocromáticos*. Como un triángulo es un K_3 , esto es, un grafo completo de 3 vértices, el Problema 1 lo podemos enunciar en términos de Teoría de Grafos y añadir un grado de dificultad [14]:

Problema 2. *Si las aristas de K_6 se colorean de rojo y azul, probar que el grafo coloreado resultante contiene dos distintas, si bien no necesariamente disjuntas, copias monocromáticas de K_3 . ¿Es cierto el resultado si coloremos K_5 de la misma forma?*

Solución: Por el Problema 1, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el triángulo ABC es de color rojo. Si el vértice D se uniese a dos de los

¹La Putnam Mathematical Competition es una competición matemática anual que convoca a universitarios de Estados Unidos y Canadá desde 1938.

²Take any point A . It has 5 edges, so at least 3 of them must be the same color, w.l.o.g. it is red. So we have B, C, D with AB, AC, AD all red. Now if any of the three edges BC, CD, DB is red, then that gives us a red triangle. But if they are all blue, then BCD is a blue triangle.

vértices de ABC por aristas de color rojo, entonces tendríamos un segundo triángulo de color rojo. Supongamos, por lo tanto, que esto no ocurre, es decir, que se une por aristas de color azul a, al menos, dos de los vértices de ABC . Este razonamiento también es válido para los vértices E y F . Notamos que, forzosamente, D y E se deben unir por arista de color azul a un vértice común. Por lo tanto, para evitar triángulos de color azul, necesariamente DE debe ser de color rojo. Esto se aplica, análogamente, a EF y FD , luego DEF es un triángulo de color rojo. La respuesta a la pregunta final es negativa, como muestra una de las dos coloraciones de K_5 en la Figura 1.1. \square

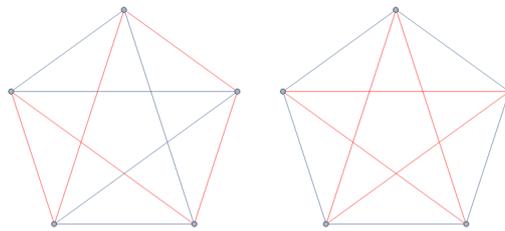


Figura 1.1: Coloraciones sin triángulos monocromáticos

Nos aventuramos ahora con un enunciado más informal. Cuando nos invitan a una fiesta, nos preguntamos si conoceremos a alguien o todos los asistentes son perfectos desconocidos para nosotros. Para cualquier anfitrión sería interesante disponer de alguna información sobre esta pregunta para dar una respuesta adecuada tanto a los posibles invitados con dificultades para hacer relaciones, como a los que siempre están dispuestos a conocer nueva gente. La respuesta a la siguiente pregunta puede dar luz sobre tal información:

¿Cuál es el número de personas que debe haber en cualquier fiesta de modo que siempre haya al menos tres que se conocen entre sí o tres que son completos desconocidos?

Si N es el número de asistentes, representando cada persona por un punto en el plano y dibujando un segmento de color rojo entre dos personas si se conocen y azul si no se conocen, usando el Problema 1 sabemos que, si $N = 6$, la respuesta es afirmativa; por tanto también lo es para cualquier $N > 6$ (simple razonamiento lógico). Para $N = 5$, de acuerdo con la solución del Problema 2, la respuesta es negativa. De este modo, la respuesta es un corolario de los Problemas 1 y 2. Sin embargo, un *astuto anfitrión*, debería formular una pregunta más general:

Problema 3 (Party Problem). *¿Cuál es el número de personas que debe haber en cualquier fiesta de modo que siempre haya al menos p personas que se conocen entre sí o q que son completos desconocidos?*

Solución.: El número mágico $R(p, q)^3$ es la solución. □

En 1926, el matemático holandés Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996) quedó atrapado por el siguiente enunciado:

Problema 4. *Si cada número entero desde 1 hasta 9 se imprime en una página en dos colores, siempre podemos encontrar tres números monocromáticos en progresión aritmética.*

Solución.: Supongamos en primer lugar que los números 4 y 6 son del mismo color, digamos rojo. Si 5 es de color rojo, entonces ya tendríamos la progresión aritmética. Supongamos por lo tanto que es de color azul. Por argumentos similares, 2 y 8 deben ser de color rojo, pero entonces la progresión aritmética 2-5-8 es de color rojo.

Supongamos ahora que 4 es de color rojo y 6 de color azul. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que 5 es rojo. Si 3 es rojo, entonces 3-4-5 es de color rojo. Supongamos que, entonces, es de color azul. Por un argumento análogo, suponemos que 9 es de color rojo. Por reiteración de ideas, llegamos a la secuencia **1 2 3 4 5 6 7 8 9**, donde 1-5-9 es roja. □

Este problema es un caso particular de una conjetura⁴ que el matemático ruso Issai Schur (1875-1941) había establecido unos años antes, cuando estaba trabajando en la distribución de residuos cuadráticos en el anillo de enteros modulares \mathbb{Z}_p , p primo. Enunciamos la conjetura en modo problema⁵:

Problema 5 (I. Schur, P.J.H. Baudet). *Para cualquier entero positivo k , existe un entero n de modo que si el conjunto $\{1, \dots, n\}$ se divide en dos subconjuntos disjuntos, al menos uno de los subconjuntos contiene una progresión aritmética de longitud k .*

El propio van der Waerden cuenta que, comentando este problema con sus colegas Emil Artin y Otto Schreier, resolvió una situación más general:

³Este número es un *número de Ramsey bicolor*. Se definirán en el Capítulo 2.

⁴A. Soifer en [1, secciones 33 y 34] cuenta la historia de la conjetura y la forma en que van der Waerden llegó a la demostración de su resultado. La conjetura ha sido también atribuida en la literatura a un alumno alemán de Schur llamado Pierre Joseph Henry Baudet (1891-1921). Para evitar disputas, Soifer se refiere a la conjetura y resultado posterior como Baudet–Schur–Van der Waerden Theorem.

⁵El motivo de esto es puramente mantener el estilo del trabajo, no proponer la conjetura de Schur como problema al lector.

After lunch we went into Artin's office in the Mathematics Department of the University of Hamburg, and tried to find a proof. We drew some diagrams on the blackboard. We had what the Germans call "Einfälle": sudden ideas that flash into one's mind. Several times such new ideas gave the discussion a new turn, and one of the ideas finally led to the solution.

Teorema de progresiones aritméticas 1.1 (B.L. van der Waerden, 1927). *Dados k y r enteros positivos, existe un entero n de modo que si los números 1 a n se colorean con r colores, siempre podemos encontrar un subconjunto monocromático de números que forman una progresión aritmética de k términos.*

Solución: El número mágico $n = W(k, r)$ ⁶ es la respuesta. □

El resultado de van der Waerden es considerado como una de las "perlas" de las matemáticas. Junto con el llamado Teorema de Schur sobre colocación de sumas, este teorema es una de las semillas de la teoría en la que se centra el trabajo fin de grado.

Teorema de sumas de enteros 1.1 (I. Schur, 1916). *Dado un entero m , existe un entero $S(m)$ tal que si $N \geq S(m)$ y coloreamos el conjunto $\{1, \dots, N\}$ con m colores, existirán tres números $x, y, z \in \{1, \dots, N\}$ con el mismo color y tales que $x + y = z$.* □

En 1933, la matemática húngara Esther Klein (1910-2005), conocida también como como Esther Szekeres, plantea y resuelve el siguiente problema:

Problema 6 (E. Klein, 1933). *Dados 5 puntos en el plano, tres a tres no colineales, alguno de sus subconjuntos de cuatro elementos forma un 4-gon convexo⁷.*

Solución: Tomamos tres de los puntos A, B y C y, como son no colineales, forman el triángulo ABC . Si los otros dos puntos, D, E están dentro de ABC , consideramos la recta CD que cortará a ABC en dos dos de sus lados (recordemos que no hay tres puntos colineales), quedando 2 vértices de ABC en el mismo semiplano en que la recta CD divide al plano. Esos 4 puntos forman un cuadrilátero convexo. Si uno de los puntos, pongamos D está fuera del triángulo entonces $ABCD$ es el cuadrilátero que buscamos. □

La propia Esther propuso la siguiente generalización del Problema 6:

⁶No entraremos en la discusión de los llamado números de van de Waerden $W(k, r)$. Para su definición ver [19].

⁷Un conjunto de puntos del plano se dice **convexo** si para cada par de puntos, el segmento que los une está contenido en el conjunto.

Problema 7 (The Happy End Problem). *Dado un entero cualquiera t , ¿existe algún número $N(t)$ que cumpla que para cualquier conjunto de al menos $N(t)$ puntos en posición general ⁸, hay algún subconjunto de t puntos que formen un t -gon convexo?*

Solución: El número mágico $R(5, t; 4)$ ⁹ es la respuesta. □

El Problema 7 lo resuelven y publican en 1935 los matemáticos húngaros Paul Erdős (1913-1996) y George Szekeres (1911-2005) [16]. La idea que conduce a la solución consiste en colorear los 4-subconjuntos (subconjuntos de cuatro elementos) del conjunto $\{1, \dots, N(t)\}$ mediante dos colores (uno de los colores si los 4 puntos están en posición convexa y el otro en caso contrario). Paul Erdős bautizó este resultado como *The Happy End Problem* debido a que condujo a Esther Klein a su matrimonio con George Szekeres en 1937.¹⁰

Todos estos problemas sirven de presentación a las matemáticas del color y a la colorida vida de sus creadores. El principio del Palomar y The Happy End Problem nos introducen en los llamados números de Ramsey y, junto con el Teorema de Schur, el teorema de van der Waerden y un resultado preliminar dado por David Hilbert [4], son la puerta que da acceso a la Teoría de Ramsey.

De acuerdo con A. Soifer [1, sección 31], el primer resultado *tipo Ramsey* se establece en 1892 y hace referencia a la existencia de cubos afines n -dimensionales: un conjunto $Q_n(a, x_1, \dots, x_n)$ de enteros se dice **cubo afín n -dimensional**, si existen $n + 1$ enteros positivos, a, x_1, \dots, x_n tales que:

$$Q_n(a, x_1, \dots, x_n) = \left\{ a + \sum_{i \in F} x_i, \emptyset \neq F \subseteq \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (1.1)$$

Este teorema, en términos de coloraciones, establece lo siguiente:

Teorema de n-cubos 1.1 (D. Hilbert, 1892). *Para cada par de enteros positivos r y n , existe un entero positivo mínimo $H(r, n)$ de modo que cualquier r -coloración del conjunto $\{1, \dots, H(r, n)\}$ contiene un cubo afín n -dimensional monocromático.* □

Más adelante, con el apoyo de la Teoría de Ramsey, daremos solución a algunos de los ejemplos vistos en esta sección.

⁸Tres a tres no colineales.

⁹El número $R(5, t; 4)$ (y sus formas más generales) aparecerá definido en el Capítulo 2. En el Problema 6 el número mágico es $R(5, 4; 4) = 5$

¹⁰Esther y su marido George compartieron vida y trabajo. Murieron en Adelaida, Australia, el 25 de agosto de 2005 con una hora de diferencia.

1.2. Función de Ramsey y coloraciones

En lo que sigue, usaremos las siguientes notaciones:

- $[n]$ denotará el conjunto (segmento) de enteros positivos $\{1, \dots, n\}$;
- $[n]^k$, $k \geq 1$, representará el conjunto de subconjuntos de k elementos del segmento $[n]$, un total de $\binom{n}{k}$ subconjuntos.

Por extensión, si S es un conjunto finito, $[S]^k$ representará el conjunto de subconjuntos de k elementos de S , a los que nos llamaremos **k-subconjuntos** de S . También nos referiremos a los conjuntos de n elementos como **n-conjuntos**. En la Sección 1.1, la palabra coloración aparece un número considerable de veces, haciendo referencia a coloraciones de números. Vamos a formalizar esta noción para cualquier conjunto S .

Para cada $r \geq 1$, llamaremos **r-coloración** de un conjunto S arbitrario a cualquier aplicación

$$\chi : S \rightarrow \{1, \dots, r\} = [r].$$

Para cada $s \in S$, diremos que $\chi(s)$ es el **color** de s . Un subconjunto **monocromático** T de S , es un subconjunto para el que la aplicación χ restringida a T , χ_T , es constante (esto es, todos los elementos de T tienen el mismo color).

Observamos que, para cualquier conjunto S , una r -coloración χ proporciona una **m-partición** de S (descomposición de S en m subconjuntos disjuntos) monocromáticos, donde m es el número de elementos del conjunto imagen $\text{Im } \chi$:

$$S = \cup_{i \in \text{Im } \chi} S_i, \quad S_i = \chi^{-1}(i),$$

esto es, los elementos de cada S_i son todos los elementos de S de color i . Recíprocamente, cualquier m -partición de $S = \cup_{i=1}^m S_i$, define una coloración de S : basta con definir $\chi(s) = i$ si $s \in S_i$. Por tanto, *colorear equivale a dividir un conjunto dado en un número finito de subconjuntos disjuntos*.

Ejemplo 1.1. *Para el grafo completo de cinco vértices K_5 , consideramos el conjunto S de aristas, con un total de $\binom{5}{2}$ elementos (S es un 10-conjunto). La Figura 1.1 muestra dos 2-coloraciones (azul y rojo) del conjunto S . En los dos grafos hay un 5-conjunto monocromático azul y otro rojo. En ninguna de las dos coloraciones aparecen triángulos monocromáticos, esto es, ambas coloraciones de K_5 carecen de subgrafos completos monocromáticos de 3 vértices.*

Para introducir la llamada *función de Ramsey*, tal y como se hace en [19, Capítulo 1], necesitamos una última definición acompañada de una notación estándar. La expresión,

$$\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r), \quad (1.2)$$

donde n , y l_1, \dots, l_r son enteros positivos ≥ 2 , establece que:

Dada cualquier r -coloración de $[n]^2$, existe un $1 \leq i \leq r$ y un l_i -subconjunto $T \subseteq [n]$, de forma que todos los elementos de $[T]^2$ son de color i .

La definición asociada a la notación $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r)$ nos dice que para cualquier coloración $\chi : [n]^2 \rightarrow [r]$ existe un l_i -subconjunto T de $[n]$ de modo que el $\binom{l_i}{2}$ -subconjunto $[T]^2$ de $[n]^2$ es monocromático. Por contra, escribiremos $\mathbf{n} \nrightarrow (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r)$ si la afirmación anterior es falsa. Pensando muy poco, queda claro que $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{n})$, que $\mathbf{m} \rightarrow (\mathbf{2}, \mathbf{m})$ y que $\mathbf{m} \rightarrow (\mathbf{m}, \mathbf{2})$. Veamos otros ejemplos:

Ejemplo 1.2. *Tenemos que $\mathbf{5} \nrightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{3})$ ya que cualquiera de los grafos K_5 de la Figura 1.1 nos permite construir una 2-coloración del conjunto $[5]^2$ etiquetando los vértices del pentágono con los números de 1 a 5 y coloreando el 2-conjunto $\{i, j\} \subseteq [5]^2$ de acuerdo con el color de la arista ij del grafo completo K_5 . Esta coloración de $[5]^2$ no tiene 3-subconjuntos $\{i, j, k\}$ de $[5]$ cuyo conjunto de 2-subconjuntos, $\{\{i, j\}, \{i, k\}, \{j, k\}\}$, sea monocromático, ya que esto equivale a que el grafo K_5 coloreado tenga triángulos monocromáticos. Sin embargo, $\mathbf{6} \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{3})$: esta afirmación es consecuencia inmediata del Problema 2 de la Sección 1.1, ya que (siguiendo el hilo del razonamiento anterior) las coloraciones de K_6 son equivalentes a las coloraciones de $[6]^2$ por identificación de aristas y 2-subconjuntos. La afirmación también es equivalente a lo que se enuncia en el Problema 3 (Party Problem) con $p = q = 3$: “En cualquier reunión de 6 personas hay tres que se conocen entre sí o tres que son completos desconocidos”.*

Del ejemplo anterior, se deduce una **idea clave**: pintar aristas de grafos completos K_n con dos colores y hacer 2-coloraciones de 2-subconjuntos de $[n]$ es lo mismo. Además, las dos últimas líneas del ejemplo nos conducen a que la afirmación $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ es equivalente a decir que, en cualquier reunión de n personas, hay p que se conocen entre sí o q que son completos desconocidos. Tres formas distintas de expresar exactamente lo mismo y que dan solución a los Problemas 1, 2 y 3. Pensando en “modo fiesta”, tenemos también que si $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, entonces $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $\mathbf{m} \rightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para todo $m \geq n$. Estas propiedades, aparecen generalizadas (sin prueba porque se consideran triviales) en [19, Capítulo 1, sección 1.1]. Vamos a establecer su forma general y dar una demostración de las mismas:

Proposición 1.1. *Para cualesquiera enteros positivos, n, m y l_1, \dots, l_r y k_1, \dots, k_r , mayores o iguales que 2, tenemos que:*

- (a) *Si se cumple que $k_i \leq l_i$ y se cumple que $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$, entonces $n \rightarrow (k_1, \dots, k_r)$.*
- (b) *Si $m \geq n$ y se cumple que $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$, entonces $m \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$.*
- (c) *Si σ es una permutación de $\{1, \dots, r\}$, entonces $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ y $n \rightarrow (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(r)})$ son equivalentes.*
- (d) *$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ y $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r, 2)$ son equivalentes. En particular tenemos que $l_1 \rightarrow (l_1, 2)$.*

Demostración. Comenzamos probando la afirmación (a): por definición, tenemos que dada cualquier r -coloración de $[n]^2$, existe un $1 \leq i \leq r$ y un l_i -subconjunto $T \subseteq [n]$ tal que todos los subconjuntos de dos elementos de T son de color i . Como $k_i \leq l_i$, existe un subconjunto de T de k_i elementos, de forma que todos sus subconjuntos de dos elementos son de color i . La afirmación (b) se sigue de que, si $m \geq n$, una r -coloración cualquiera χ de $[m]^2$ induce la aplicación, $\chi_{[n]^2}$, que es una r -coloración de $[n]^2$ ya que $[n]^2 \subseteq [m]^2$. Para probar (c) observamos que basta probar una de las implicaciones dado que σ^{-1} es permutación. Si χ es una r -coloración cualquiera de $[n]^2$, la aplicación $\chi_\sigma := \sigma \circ \chi$ proporciona otra $(\chi_\sigma(\{a, b\}))$ de color i sii $\chi(\{a, b\})$ de color $\sigma^{-1}(i)$. La definición de $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$ aplicada a la coloración χ_σ devuelve la existencia de un l_i -subconjunto T de $[n]$ cuyos 2-subconjuntos son de color i , lo que equivale a que los 2-subconjuntos de T sean de color $\sigma^{-1}(i)$ para χ . Ahora de $l_{\sigma(i)} = m_j$ con $j = \sigma^{-1}(i)$, se sigue el resultado. En la afirmación (d) observamos que una $(r+1)$ -coloración no usan el color $r+1$ son exactamente las r -coloraciones. Así, si χ es una $(r+1)$ -coloración y $r+1 \notin Im \chi$, el resultado es claro por hipótesis. En otro caso, existe algún subconjunto de dos elementos $\{a, b\}$ de color $r+1$ y el resultado es trivialmente cierto. \square

Esta noción de coloración usando 2-subconjuntos, se puede generalizar a k -subconjuntos con k cualquier entero positivo. Así, dados enteros positivos $k \geq 1$ y $l_1, \dots, l_r \geq k$, utilizaremos la expresión:

$$\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r)^{\mathbf{k}}, \quad (1.3)$$

para denotar que:

Dada cualquier r -coloración de $[n]^k$, existen $1 \leq i \leq r$ y un l_i -subconjunto $T \subseteq [n]$ de forma que todos los elementos de $[T]^k$ son de color i .

Con esto, podemos dar la definición de **función de Ramsey generalizada**, como el menor entero positivo n tal que $\mathbf{n} \rightarrow (\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_r)^k$. En el caso particular $k = 2$, la llamaremos **función de Ramsey**). Esta idea de minimalidad en la definición de esta función es el centro de esta Teoría de Ramsey y, por tanto, de este trabajo.

1.3. Hipergrafos, cuerpos finitos y restos

En esta sección introducimos con brevedad algunas nociones y resultados que usaremos a lo largo del trabajo. Una versión ampliada y más detallada del contenido la misma se puede consultar el Anexo A1.

Un **grafo**¹¹ G es un par (V, E) formado por un conjunto no vacío V y un conjunto (que puede ser vacío) de 2-subconjuntos de V . Usando la notación $[V]^2$ de la sección 1.2, tenemos que $E \subseteq [V]^2$. Recordamos que, si V tiene n elementos, el número total de elementos de $[V]^2$ es $\binom{n}{2}$. Diremos que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo de G** si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. Diremos que un grafo de n vértices es el **n -ésimo grafo completo K_n** , si es un grafo regular, de forma que cada vértice tiene grado $n - 1$. Así, K_n es un grafo simple en el que cada dos vértices distintos están conectados. El grafo K_n tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas. La siguiente definición permite construir nuevos grafos usando grafos más simples:

Definición 1.1. *El **producto normal** de dos grafos, $G = (V_G, E_G)$ y $H = (V_H, E_H)$, es el grafo $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = (V, E)$, cuyo conjunto de vértices es $V = V_G \times V_H$ y cuyo conjunto de aristas se establece en la forma $\{(a, b), (c, d)\} \in E$ sii se cumple una de estas tres condiciones:*

- $\{a, c\} \in E_G$ y $\{b, d\} \in E_H$.
- $a = c$ y $\{b, d\} \in E_H$.
- $\{a, c\} \in E_G$ y $b = d$.

Un ejemplo de producto normal de grafos: $K_9 = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_3$.

Dado un grafo $G = (V, E)$, a cualquier aplicación $\chi : E \rightarrow [r]$ se le dice **r -coloración** de las aristas de G . Para una coloración de aristas χ de G , un subgrafo G' de G se dice **monocromático** si $\chi_{G'}$ es la identidad. Enumerando los vértices del grafo completo K_n con las etiquetas $\{1, \dots, n\}$, el conjunto de aristas de K_n es $[n]^2$. Por tanto, las r -coloraciones de aristas de K_n son exactamente las del conjunto $[n]^2$.

¹¹Por la forma en que hemos definido las aristas, el concepto de grafo dado es el de grafo simple (sin aristas múltiples ni lazos) y no dirigido.

Definición 1.2. Dos r -coloraciones de las aristas de K_n de esquemas coloreados \mathcal{G} y \mathcal{H} se dicen **isomorfas** si existe una biyección σ de los vértices del esquema \mathcal{G} en los vértices del esquema \mathcal{H} tal que, para todo par de vértices x, y de \mathcal{G} , si la arista $\{x, y\}$ tiene color $i = 1, 2, \dots, r$, la arista $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ de \mathcal{H} tiene color $\tau(i)$, siendo τ una permutación de $\{1, \dots, r\}$.

Cada 2-coloración de K_5 produce o bien un 3-ciclo monocromático o un 5-ciclo monocromático¹². La Figura 1.1, proporciona dos 2-coloraciones de K_5 con 5-ciclos (la de la izquierda en rojo y la de la derecha en azul). Ambas coloraciones son isomorfas¹³ ya que:

Proposición 1.2. *Salvo isomorfismo, solo hay una 2-coloración de K_5 sin triángulos monocromáticos.*

Demostración. Supongamos que los vértices vienen nombrados como $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, y los colores $\{r, a\}$. Supongamos que, sin pérdida de generalidad, de un vértice v parten tres aristas de color r , a v_1, v_2 y v_3 . Para evitar triángulos monocromáticos de color r , $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$ y $\{v_1, v_3\}$ deben ser de color a , absurdo, pues tenemos un triángulo monocromático de color a . Luego de cualquier vértice parten dos aristas de cada color (el grafo tiene 5 aristas de color r y 5 de color a). Fijado un vértice v_{i_1} , podemos encontrar otros dos v_{i_2}, v_{i_3} de modo que $\{v_{i_1}, v_{i_2}\}$ y $\{v_{i_1}, v_{i_3}\}$ son de color r , luego $\{v_{i_2}, v_{i_3}\}$ debe ser de color a . Los dos vértices restantes se deben unir a v_{i_2} con aristas $\{v_{i_2}, v_{i_4}\}$ y $\{v_{i_2}, v_{i_5}\}$ de color r y a respectivamente. De aquí, al no haber triángulos monocromáticos, es fácil concluir que $\{v_{i_3}, v_{i_5}\}$ y $\{v_{i_4}, v_{i_5}\}$ son de color r . Así, la ordenación $v_{i_1} - v_{i_2} - v_{i_4} - v_{i_5} - v_{i_3}$ produce un pentágono rojo con todas las aristas interiores azules. \square

Un hipergrafo es la generalización de un grafo en la que, en vez de tomar 2-subconjuntos de vértices para definir aristas, se consideran subconjuntos arbitrarios de vértices.

Definición 1.3. Un **hipergrafo** es un par (V, F) formado por un conjunto no vacío de vértices V y el conjunto de **hiperaristas** $F \subseteq P(V) - \{\emptyset\}$. El hipergrafo (V, F) se dice **k -uniforme** si todas sus hiperaristas están formadas por k vértices, esto es, son k -subconjuntos de V .

¹²Daniel Jonhston, sección 4.3 de “Edge Colorings of Graphs and Their Applications” (2015), PhD Western Michigan University.

¹³La demostración de la Proposición 1.2 es constructiva. Siguiendo las indicaciones, el par (σ, τ) , donde $\sigma = (1)(2435)$ y $\tau = (r\ a)$, proporciona un isomorfismo entre ambas coloraciones.

De la definición previa, tenemos que los grafos son exactamente los hipergrafos 2-uniformes. Los planos proyectivos sobre cuerpos finitos de q elementos son hipergrafos $(q + 1)$ -uniformes con $q^2 + q + 1$ vértices e igual número de aristas. La Figura 3.3 representa el hipergrafo asociado al llamado **plano de Fano**, plano proyectivo asociado al cuerpo $GF(2) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

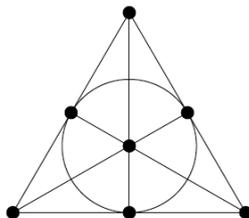


Figura 1.2: Plano de Fano

En la sección 1.2 contamos que r -colorear un conjunto equivale a realizar una partición del conjunto en r subconjuntos. Más adelante, aprenderemos a colorear grafos usando la estructura aditiva y multiplicativa de cuerpos finitos, que son grupos abelianos, y subconjuntos de restos de potencias que son subgrupos y que permiten generar particiones usando clases a derecha.

Los grupos abelianos finitos son suma directa de grupos aditivos cíclicos de *enteros modulares* $(\mathbb{Z}_n, +)$, con $n \geq 2$. Por ejemplo, salvo isomorfismos, solamente hay un grupo abeliano de orden 6 que es $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y exactamente tres grupos abelianos de orden 8: \mathbb{Z}_8 , $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Entre los grupos abelianos destacamos los grupos aditivos $(K, +)$ y los multiplicativos (K^*, \cdot) , $K^* = K - \{0\}$, siendo K un cuerpo arbitrario con operaciones suma $(a + b)$ y producto $(a \cdot b)$; los elementos neutros los denotamos como 0 (grupo aditivo) y 1 (grupo multiplicativo); los opuestos de elementos y los inversos en la forma $-a$ y a^{-1} . Si el cuerpo K es finito con exactamente q elementos, tenemos que $q = p^k$ donde $p > 0$ es la característica de K , un número primo. Salvo isomorfismos, para cada p primo y $k \geq 1$, existe un único cuerpo finito de p^k elementos y se denota como $GF(p^k)$. El grupo aditivo $(GF(p^k), +)$ es isomorfo a una suma directa finita de k copias de \mathbb{Z}_p , luego si $k \geq 2$, este grupo aditivo no es cíclico. Por contra, el grupo multiplicativo $GF(p^k)^*$ es cíclico de orden $p^k - 1$. Acabamos introduciendo los subgrupos de restos potenciales asociados a cuerpos finitos:

Definición 1.4. Dado $m \geq 2$, un elemento b del grupo multiplicativo del cuerpo finito $GF(p^k)$ se dice resto de potencia m ¹⁴ si existe un elemento $g \in GF(p^k)^*$ tal que $b = g^m$.

¹⁴Los restos con $m = 2, 3$ se dicen cuadráticos y cúbicos.

Observamos que, si a es un generador $GF(p^k)^*$, el conjunto de los restos de potencia m se puede expresar en la forma,

$$H_m(p^k) = \{g^m : g \in GF(p^k)^*\} = \{(a^k)^m : k \in \mathbb{Z}\} = \langle a^m \rangle. \quad (1.4)$$

Esto es, $H_m(p^k)$ es el subgrupo de $GF(p^k)^*$ generado por el elemento a^m y tenemos:

Proposición 1.3. *Para cualquier cuerpo finito de $q = p^k$ elementos, el conjunto $H_m(q)$ de todos los restos de potencia m es un subgrupo del grupo multiplicativo $GF(p^k)^*$ generado por a^m , donde a es cualquier generador de $GF(p^k)^*$. En particular:*

(a) $|H_m(q)| = \frac{q-1}{m.c.d.(m, q-1)}$

(b) $[G : H_m(q)] = m.c.d.(m, q-1)$

(c) Si $p = 2$ o p primo impar y $2m \mid q-1$, entonces $-1 \in H$.

(d) Si $m = aq + r$, con $0 \leq r < q$, entonces $H_m(q) = H_r(q)$. □

Las clases a derecha de los subgrupos H_m proporcionan $[G : H_m(q)]$ -particiones de $GF(p^k)^*$ que usaremos para definir coloraciones de grafos completos.

A: Notas históricas

Los orígenes de la Teoría de Ramsey son difusos. En el marco de esta teoría, podemos diferenciar una “prehistoria”, una “historia” y una “posthistoria”. La “prehistoria” ha sido ampliamente ilustrada con muchos ejemplos en la sección 1.1. **En breve:** En 1892, aparece el que es considerado como el primer resultado tipo Ramsey, lo enuncia Hilbert que plantea buscar n -cubos monocromáticos en coloraciones del segmento $[n]$. En 1916, Issai Schur continúa con las coloraciones y los patrones monocromáticos en $[n]$ al establecer su Teorema de sumas de enteros. La joya de la corona aparece en 1927 cuando van der Waerden enuncia y prueba su teorema de coloración de progresiones aritméticas. Estos resultados, con muchos puntos en común, presentan ideas que se unifican con los resultados establecidos por Frank Plumpton Ramsey.

Nacido el 22 de febrero de 1903 en Cambridge, Frank Plumpton Ramsey acabaría siendo una personalidad de renombre, sobre todo, en el ámbito de la Economía y de la Lógica. En Economía, escribió tan solo dos artículos:

A Contribution to the Theorem of Taxation (1927) y *A Mathematical Theory of Savings* (1928). Y, pese a ello, el economista británico John Maynard Keynes diría: “It is one of the most remarkable contributions to mathematical economics ever made”.

En el campo de las matemáticas su única aportación, a los 24 años, es el artículo de 1928 *On a Problem of Formal Logic*. En esta obra, presenta los dos principios (versiones finita e infinita), pilares en la Teoría que lleva su apellido, y cuestiones sobre procedimientos de decisión de sistemas lógicos, que era la verdadera pasión de Ramsey. Dos años más tarde, en 1930, Ramsey, tristemente, fallece a consecuencia de una complicación causada por una hepatitis. Sus resultados quedan en el limbo del olvido (...).

En la “posthistoria” de la Teoría de Ramsey el húngaro Paul Erdős, uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, es clave. Su nombre va ligado al del matrimonio Szekeres, Esther y George. En 1935 estos tres personajes enuncian y resuelven el conocido como *The Happy end Problem*, que es, finalmente, el resultado que da visibilidad a los enunciados de Frank P. Ramsey y que hace popular esta vasta teoría.

Si bien Erdős es crucial en la “posthistoria” de la Teoría de Ramsey, no lo son menos otros autores de décadas posteriores, cuyos resultados han cohesionado y generalizado los de Hilbert, Schur y van der Waerden y proporcionado un reconocido lugar en el análisis combinatorio a esta teoría. Entre ellos destacar a Rado y su teorema para sistemas de ecuaciones, su alumno Deuver y Leeb y otros muchos han proporcionado sutiles definiciones y afinadas puntualizaciones. Por último, hacer mención a los matemáticos Hales y Jewett, quienes en 1963 dan teorema un sobre coloración de segmentos para búsquedas de n-cubos, que recuerda al de Hilbert, y que se aplica como estrategia en el juego del tres en raya (tanto en dos como en más dimensiones) y también al trío Graham, Leeb y Rothscild, quienes, en 1972, dan un teorema de coloración de cuerpos finitos, que sería generalizado a versión infinita en 1984. En definitiva, es una teoría que sigue activa y que tiene muchas posibilidades.

Capítulo 2

Teoría de Ramsey Finita

“Complete disorder is an impossibility. Any structure will necessarily contain an orderly substructure ”

T.S. Motzkin (1908-1970)

Los *Party Problems* son un caso particular de un teorema probado por Frank P. Ramsey en 1928 y que es la piedra angular de la Teoría de Ramsey. La idea básica que transmite el resultado de F. P. Ramsey es que en cualquier sistema suficientemente grande, siempre es posible encontrar subsistemas que siguen un cierto patrón. El Teorema de Ramsey (hay dos versiones, una infinita y otra finita), también conocido como *Principio de Ramsey*¹ tiene distintas formulaciones e importantes extensiones en teoría de conjuntos, combinatoria extrema, teoría de grafos e incluso análisis. En este capítulo vamos a establecer una versión (combinatoria) finita del Principio de Ramsey.

En la primera sección del capítulo, tras introducir la noción de *número de Ramsey* asociado a coloraciones del conjunto de 2-subconjuntos de un conjunto finito, ilustraremos algunas técnicas de aproximación y cálculo de los mismos. La relación de este tipo de números y las coloraciones de grafos completos nos permitirá, en la segunda sección, presentar las coloraciones de K_{16} y su conexión con el número $R(3, 3, 3)$ usando el álgebra como herramienta. La tercera y última sección establece la definición general de los números de Ramsey. Los contenidos fundamentales del capítulo presentan los resultados originales de [18] y [13], aprovechando el hilo de la clara exposición de los mismos dada en [6], y de [7].

¹Ver [1, sección 28.1]. En las páginas 263-264 de este libro, tras establecer una versión infinita del Teorema de Ramsey, el autor defiende el término “Principio” frente al de “Teorema” usando como argumento principal la frase de Theodore S. Motzkin, alumno de Issai Schur, que introduce este capítulo.

2.1. Números, técnicas y cotas

Para introducir los números de Ramsey seguimos [19, Capítulo 1]. La noción está basada en la llamada función de Ramsey dada en (1.2). Su “buena definición” es consecuencia de lo que vamos a establecer, siguiendo la recomendación de Alexander Soifer, como Principio de Ramsey Reducido.

Definición 2.1. Sean l_1, \dots, l_r enteros positivos, $r \geq 1$. Si $1 \notin \{l_1, \dots, l_r\}$, llamaremos **número de Ramsey r -color**, y lo denotaremos en la forma $R(l_1, \dots, l_r)$, al mínimo entero n tal que $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$. En otro caso, establecemos que $R(l_1, \dots, l_r) = 1$.

Los números $R(l_1, \dots, l_r)$ son conocidos como *números de Ramsey multicolor*². Es inmediato que $R(l) = l$ y los bicolors cumplen las siguientes propiedades básicas:

Proposición 2.1. Para $p, q \geq 1$, tenemos que:

- (a) $R(p, q) = R(q, p)$
- (b) $R(2, q) = q$

Demostración. Empecemos demostrando (a). Por definición, $R(p, q) \rightarrow (p, q)$, luego, usando (c) de la Proposición 1.1, $R(p, q) \rightarrow (q, p)$. Por minimalidad del número de Ramsey, $R(q, p) \leq R(p, q)$. Análogamente, obtenemos $R(p, q) \leq R(q, p)$, lo que prueba la igualdad. Para demostrar (b), observamos que $q \rightarrow (2, q)$ gracias al apartado (d) de la Proposición 1.1. Veamos que $q - 1$ no lo cumple. Si tenemos $q - 1$ elementos, no podemos escoger q elementos del conjunto. Por lo tanto, coloreando todos los 2-subconjuntos de color 2, tenemos que no existe ningún 2-subconjunto de $\{1, \dots, q - 1\}$ monocromático de color 1 (no se ha utilizado este color), ni un q -subconjunto con todos sus 2-subconjuntos de color 2 (no hay tantos elementos). \square

Principio de Ramsey Reducido 2.1 (Teorema 1, Capítulo 1 de [19]).
*Dados unos enteros positivos cualesquiera l_1, \dots, l_r , existe $R(l_1, \dots, l_r)$.*³

²Para distinguirlos de su forma más general relacionada con el concepto de hipergrafo y que introduciremos en la última sección de este capítulo.

³En [19], los autores dan dos pruebas de este teorema (caso $r = 2$). El enunciado y prueba originales de la versión infinita del Teorema de Ramsey dados en [8], se establecen en [19, Teorema A, sección 1.7, Capítulo 1]. La versión finita análoga (parafraseada en el lenguaje moderno de 2-coloraciones) y su demostración, es el Teorema 7 de [19, sección 1.7, Capítulo 1]. Este teorema es el que enuncian y prueban Erdős y Szekeres en 1935 en [16]. Los autores describen el teorema como “a slightly different form” del resultado establecido por F.P. Ramsey. Esto populariza y hace visibles los resultados dados por Ramsey en 1928 y es el punto de partida de la Teoría de Ramsey.

El resultado que acabamos de enunciar recoge el caso de las r -coloraciones de 2-subconjuntos, área de trabajo de especial interés dentro de la teoría general de Ramsey. Como ya explicamos en la sección 1.2 del Capítulo 1, los 2-subconjuntos de un conjunto de n elementos se pueden ver como las aristas del grafo completo K_n . Esta equivalencia permite establecer el Principio de Ramsey Reducido en términos de coloraciones de grafos completos:

Teorema 2.1. *Si $r \geq 2$, para cualquier colección de enteros positivos l_1, \dots, l_r tales que $l_i \geq 2$, existe un mínimo entero N tal que para todo $n \geq N$, cualquier r -coloración del grafo completo K_n contiene al menos un subgrafo monocromático K_{l_i} .*

El cálculo de números de Ramsey no es una tarea sencilla. De hecho se conocen muy pocos valores exactos de tales números⁴. Las investigaciones en esta dirección se centran en la acotación de su valor. El cálculo exacto pasa por utilizar ingeniosos argumentos, complicadas cuentas y técnicas basadas en recurrencias y construcción de coloraciones. En lo que sigue ilustraremos algunas de estas técnicas que permiten obtener famosas acotaciones y los valores exactos de unos pocos números.

La siguiente cota⁵ es una desigualdad de recurrencia dada en [16]. En 1955, Greenwood y Gleason [18, Sección 2, Teoremas 2 y 3] dan una nueva prueba, la que presentamos, y mejoran la cota bajo condiciones de paridad. Notar que el resultado no presupone cierto el *Principio de Ramsey Reducido*.

Proposición 2.2 (Erdős y Szekeres, 1935). *Sean $m, l \geq 2$ números enteros, de forma que $R(m-1, l)$ y $R(m, l-1)$ son finitos. Entonces*

$$R(m, l) \leq R(m-1, l) + R(m, l-1).$$

Demostración. Escribimos $n = R(m-1, l) + R(m, l-1)$ y fijamos una 2-coloración arbitraria de aristas para K_n . Elegimos un vértice cualquiera, que llamamos v_0 . Agrupamos en T_1 todos los vértices que se unen a v_0 por una arista de color 1, y en T_2 los que se unen a v_0 por una arista de color 2 y, como los conjuntos son disjuntos, $|T_1| + |T_2| + 1 = n$. Si $|T_1| < R(m-1, l)$, entonces $|T_2| \geq R(m, l-1)$. Por lo tanto, en T_2 , o hay un subgrafo

⁴La web <https://doi.org/10.37236/21> permite consultar y descargar el archivo *Small Ramsey numbers* (versión 15). Su autor, Stanislaw Radziszowski, revisa (y actualiza cada cierto tiempo) los valores exactos y las cotas de los números de Ramsey multicolor conocidos. El documento recoge los datos desde febrero de 1993 hasta marzo de 2017.

⁵Erdős y Szekeres utilizan esta cota para demostrar, por un proceso de doble inducción, el Principio de Ramsey para 2-coloraciones, que difiere de otras pruebas anteriores. De las dos pruebas dadas en [19] para el caso $r = 2$ de este principio, una usa la desigualdad y la otra es una prueba directa que ilustra la técnica de coloración.

completo K_m monocromático de color 1, o bien hay un subgrafo completo K_{l-1} monocromático de color 2. En el primer caso, habríamos acabado. Si se da el segundo caso, como v_0 se une a todos los vértices de T_2 por aristas de color 2, tenemos que hay un subgrafo completo K_l monocromático de color 2. En otro caso, $|T_1| \geq R(m-1, l)$, lo que implica que $|T_2| < R(m, l-1)$ y, argumentando como antes, obtenemos el resultado. \square

Corolario 2.1 (Greenwood y Gleason, 1955). *Sean $m, l \geq 2$ números enteros, de forma que $R(m-1, l)$ y $R(m, l-1)$ son finitos y pares. Entonces:*

$$R(m, l) \leq R(m-1, l) + R(m, l-1) - 1.$$

Demostración. Si $R(m-1, l) = 2p$, $R(m, l-1) = 2q$ y $n = 2p + 2q - 1$, basta probar que $n \rightarrow (m, l)$. Fijamos una coloración de K_n y un vértice v_0 del que salen n_1 aristas de color 1 y n_2 aristas de color 2. Si $n_1 \geq 2p$ (análogo si $n_2 \geq 2q$), entonces, o bien existe K_l monocromático de color 2, o bien existe K_{m-1} monocromático de color 1. Como v_0 se une a cada uno de los $m-1$ vértices por una arista de color 1, tenemos un K_m monocromático de color 1. Luego $n < R(m-1, l) + R(m, l-1)$. Supongamos pues que $n_1 < 2p$ y $n_2 < 2q$. En este caso, la única posibilidad es $n_1 = 2p - 1$ y $n_2 = 2q - 1$ ya que $n = n_1 + n_2 - 1$. Estos valores los hemos obtenido al fijar v_0 . Si al fijar cualquier otro vértice, ocurriese una de las dos primeras opciones, habríamos acabado, luego queda por estudiar el caso en que, da igual el vértice que fijemos, siempre se une a $2p - 1$ vértices por aristas de color 1 y a $2q - 1$ vértices por aristas de color 2. Pero esto es absurdo, ya que habría $(2p + 2q - 1)(2p - 1)$ vértices que son extremos de aristas de color 1, que debería ser un número par, pero es impar. Luego este caso no se da. \square

La cota dada depende de números de Ramsey previos e invita a la inducción. Con poco esfuerzo, podemos obtener una cota superior que aparece en [16, 18]. Aunque menos fina, es independiente de números previos. La demostración que proponemos está sacada de [15, página 17].

Corolario 2.2 (Erdős y Szekeres, 1935). *Dados dos enteros positivos $p, q \geq 1$, se tiene que:*

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$$

Demostración. Usando que $R(1, m) = 1 = R(m, 1) = \binom{m-1}{0} = \binom{m-1}{m-1}$ (por definición), que $R(2, m) = R(m, 2) = m = \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1}$ (usando Proposición 2.1) y que $R(3, 3) = 6 = \binom{4}{2}$ (ver Ejemplo 1.2), hemos comprobado que la desigualdad es cierta, de hecho se cumple la igualdad. Procedemos por

inducción sobre $n = p + q$ suponiendo el resultado válido hasta $n - 1$ (los casos anteriores son la base de la misma). La desigualdad se sigue usando el Corolario 2.1, la hipótesis de inducción:

$$R(p, q) \leq R(-1, q) + R(p, q - 1) \leq \binom{p + q - 3}{p - 2} + \binom{p + q - 3}{p - 1},$$

y aplicando finalmente la igualdad $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$. \square

El cálculo exacto de los valores de los números de Ramsey pasa por el establecimiento de cotas del tipo dado y el uso de métodos de coloración. Vamos a ilustrar este último procedimiento para calcular el valor de los primeros números bicolors, $R(p, q)$ con $p, q = 3, 4$ y $R(3, 5)$, y el tricolor $R(3, 3, 3)$. Las técnicas de coloración que presentamos están basadas en la estructura básica de grupos, cuerpos finitos y restos m -icos y el concepto **libre de sumas**⁶ y fueron introducidas en 1955 por Robert E. Greenwood (1911-1993) y Andrew M. Gleason (1921-2008) en [18].

El Ejemplo 1.2 nos proporciona el valor exacto $R(3, 3)$ usando la definición de número de Ramsey y buscando coloraciones sin triángulos monocromáticos de K_5 (en formato idea feliz). Vamos a recalcular este número usando cotas y un procedimiento general de coloración que, en este caso, utiliza el cuerpo de 5 elementos, restos cuadráticos y el concepto libre de sumas.

Ejemplo 2.1. *Aplicando la Proposición 2.2, $R(3, 3) \leq R(2, 3) + R(3, 2) = 3 + 3 = 6$. Falta probar que $R(3, 3) > 5$. Para ello, etiquetamos los vértices de K_5 con los elementos del cuerpo $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} = GF(5)$ y consideramos el subgrupo de restos cuadráticos H_2 del grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_5^* = \langle 2 \rangle$. Como 2 divide a 4, H_2 es de orden 2, luego $H_2 = \langle 2^2 = 4 \rangle = \{1, 4\}$, $-1 \equiv 4 \in H_2$ y este conjunto es libre de sumas (inmediato). Las clases a derecha proporcionan la 2-partición libre de sumas ⁷ $\mathbb{Z}_5^* = H_2 \sqcup 2H_2$, cuyos subconjuntos son cerrados por opuestos. Ahora, dados dos vértices $x, y \in \mathbb{Z}_5$, los colorearemos de color **a** si $x - y \in H_2$ y de color **r** en caso contrario; la coloración está bien definida gracias a que $-1 \in H_2$ y no contiene triángulos monocromáticos. En otro caso, habría tres vértices, x, y, z , de forma que $y - x, z - x, y - z \in A$, con $A \in \{H_2, 2H_2\}$. Pero entonces $z - x + y - z = y - x \in A$, lo que es absurdo, puesto que A es libre de sumas. \square*

⁶Un subconjunto S de un grupo aditivo $(G, +)$ se dice *libre de sumas* si S no contiene elementos x, y, z tales que $x + y = z$. Una **r -partición libre se sumas** de $G^* = G \setminus \{0\}$ es una partición de G^* en r subconjuntos cada uno de los cuales es libre de sumas.

⁷Si H es un subgrupo del grupo multiplicativo de un cuerpo \mathbb{F}^* tal que $-1 \in H$ y H es un subconjunto libre se sumas del grupo aditivo $(\mathbb{F}, +)$, las clases a derecha módulo H , aH con $a \in \mathbb{F}^*$ son libres de sumas por serlo H y conjuntos cerrados por opuestos gracias a que $-1 \in H$.

La coloración dada en el Ejemplo 2.1 es la coloración de K_5 que aparece en la parte derecha en la Figura 1.1. Procedemos al cálculo de los números bicolor indicados. Primero acotamos:

Corolario 2.3. $R(3, 4) \leq 9$, $R(3, 5) \leq 14$ y $R(4, 4) \leq 18$.

Demostración. Usando Proposición 2.2 y que $R(3, 3) = 6$, tenemos que $R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10$, $R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) \leq 5 + 9 = 14$ y $R(4, 4) \leq R(3, 4) + R(4, 3) = 2R(3, 4) \leq 18$. Como $R(2, 4) = 4$ y $R(3, 3)$ son pares, tenemos que $R(3, 4) < 10$ aplicando el Corolario 2.1. \square

Finalmente aplicamos técnicas de coloración con argumentos y herramientas del tipo usado en el Ejemplo 2.1 tal y como se hace [18, sección 3]. Para $R(3, 5)$ damos una demostración propia distinta que, si bien es más larga, permite trabajar el concepto libre de sumas en coloraciones. La prueba para $R(4, 4)$ es la dada [18] con pequeñas modificaciones y explicaciones ampliadas.

Proposición 2.3 (Greenwood y Gleason, 1955). $R(3, 5) = 14$ y $R(3, 4) = 9$.

Demostración. Empecemos demostrando que $R(3, 5) = 14$. Para ello, basta con ver que existe una 2-coloración de las aristas de K_{13} que no verifica que haya un subgrafo K_3 monocromático de color 1 ni un subgrafo K_5 monocromático de color 2. Etiquetamos los vértices de K_{13} con los elementos de $\mathbb{Z}_{13} = \{0, 1, \dots, 12\}$ y calculamos los restos cúbicos H_3 en $\mathbb{Z}_{13}^* = \langle 2 \rangle$. Como 3 divide a 12 y es el subgrupo de \mathbb{Z}_{13}^* de orden 4, entonces $H_3 = \langle 2^3 \rangle = \{1, 5, 8, 12\}$. Tenemos que $-1 \equiv 12 \in H_3$ y una simple comprobación nos dice que este conjunto es libre de sumas. El complementario de H_3 en \mathbb{Z}_{13} es: $H_3^c = \{0\} \sqcup 2H_3 \sqcup 4H_3$ y es cerrado por opuestos (ver observaciones en Ejemplo 2.1). Ahora coloreamos las aristas, con la regla: la arista que une los vértices x y y es de color 1 si $x - y \in H_3$, y de color 2 en caso contrario. La coloración está bien definida puesto que $-1 \in H_3$. Veamos que no hay triángulos de color 1 monocromáticos: en otro caso, existirían $x, y, z \in \mathbb{Z}_{13}$ tales que $y - x, z - x, y - z \in H_3$. Pero entonces, $z - x + y - z \in H_3$, que es imposible puesto que H_3 es libre de sumas.

Veamos ahora que no hay subgrafos completos de 5 vértices monocromáticos de color 2. Empecemos suponiendo que se pueden encontrar 5 vértices con estas características: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 . Por definición, la resta de cualesquiera dos vértices está en $H_3^c = \{0, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$ y, como los vértices son distintos, ninguna resta puede dar 0.

Supongamos que v_1 es el mayor de los vértices (más grande de entre los enteros tomados como representantes), y centrémonos en las restas siguientes: $v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4$ y $v_1 - v_5$. Dos de estas restas no pueden ser iguales, pues

implicaría que los vértices que se restan a v_1 son iguales. Además, si $v_1 - v_i = a$ y $v_1 - v_j = -a$ (es posible puesto que H_3^c es cerrado por opuestos), entonces $v_j - v_i = 2a$, por lo que se puede descartar el caso $a = 4$ y $a = 6$ (suponemos desigualdad de enteros positivos $a < -a$), ya que la resta debe estar en H_3^c . Esto implica que no pueden aparecer a la vez las restas 4 y 9 ni las restas 6 y 7. Además ninguna resta puede dar 11: en otro caso podemos suponer $v_1 - v_2 = 11$ y las únicas posibilidades son $(v_1, v_2) = (12, 1), (11, 0)$. En el primer caso, como 12 es vértice, se descartan los vértices $\{0, 4, 5, 7, 11\}$, ya que la resta no está en H_3^c . Análogamente, como 1 es vértice, se descartan los vértices $\{1, 6, 9\}$. Los vértices restantes son $\{3, 5, 8, 10\}$ pero como $10 - 5 = 8 - 3 = 5 \notin H_3^c$ esta posibilidad no se da. Por tanto $(v_1, v_2) = (11, 0)$. Las opciones en este caso son $\{2, 4, 7, 9\}$, que de nuevo dan combinaciones incompatibles. Por un argumento análogo, ninguna resta puede dar 10. Luego las únicas opciones para las restas son: $\{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Luego, por lo ya visto, una resta debe dar 2 y otra resta debe dar 3. Supongamos que $v_1 - v_2 = 2$ y $v_1 - v_3 = 3$. Pero entonces $v_2 - v_3 = 1$, lo que es imposible. Por lo tanto, $R(3, 5) = 14$. Finalmente, de los valores $R(3, 5) = 14$ y $R(2, 5) = 5$ y la Proposición 2.2, tenemos que $R(3, 5) = 14 \leq R(2, 5) + R(3, 4)$, luego $9 \leq R(3, 4)$ y la igualdad se sigue del Corolario 2.3. \square

Proposición 2.4 (Greenwood y Gleason, 1955). $R(4, 4) = 18$.

Demostración. Identificamos los vértices de K_{17} con los elementos de \mathbb{Z}_{17} , de forma que la arista entre dos vértices x e y será de color 1 si $x - y \in H_2$, donde H_2 es la clase de los restos cuadráticos de $\mathbb{Z}_{17}^* = \langle 3 \rangle$. Es subgrupo de orden $8 = \frac{16}{2}$, luego $H_3 = \langle 3^2 \rangle = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ y $\mathbb{Z}_{17}^* = H_2 \sqcup 3H_2$ es la descomposición en clases a derecha. La arista se coloreará de color 2 si la resta no está en H_2 . Veamos que esta coloración no tiene subgrafos K_4 monocromáticos. En caso contrario, podríamos encontrar vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 de un K_4 monocromático de color 1, luego todas las restas $v_i - v_j$ están en H_2 . Esto implica que la cuaterna de vértices $\{0, v_1 - v_2, v_1 - v_3, v_1 - v_4\}$, todos diferentes entre sí, también forman un K_4 monocromático de color 1. Por lo tanto y sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\{0, a, b, c\}$ como vértices del K_4 monocromático, con $a, b, c \in H_2$. Así tenemos que $\{a, b, c, b - a, c - a, c - b\} \subseteq H_2$. Como estamos en \mathbb{Z}_{17} , podemos multiplicar por el inverso de a y, como H_2 es subgrupo multiplicativo, $\{1, ba^{-1}, ca^{-1}, ba^{-1} - 1, ca^{-1} - 1, ca^{-1} - ba^{-1}\} \subseteq H_2$. Denotamos $B = ba^{-1}$ y $C = ca^{-1}$ observando que $B, C, B - 1, C - 1$ están en H_2 . Notamos que B y C no pueden ser 1 (a, b y c distintos), y que deben ser distintos (la multiplicación a derecha por a^{-1} es biyectiva). Es fácil ver que las únicas opciones son $B = 9$ y $C = 16$ (si alguno fuera 2, por ejemplo B , entonces $B - 1 = 1$, lo que es absurdo, pues no queremos vértices repetidos). Pero $16 - 9 = 7 \notin H_2$.

Luego no hay un K_4 monocromático de color 1. El caso color 2 es análogo ($3H_2 \cup \{0\} = \{0, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$). Como la resta de dos elementos debe seguir estando en $3H_2$, solo podemos escoger como vértices un elemento de $\{5, 6, 7\}$ y lo mismo con $\{10, 11, 12\}$. Veamos que 3 no puede ser vértice. Supongamos que lo es y que aparece un vértice del conjunto $\{5, 6, 7\}$; este vértice debe ser el 6, lo que impide que se pueda tomar el 14 como vértice. Ahora, no hay ningún $a \in \{10, 11, 12\}$ tal que $a - 3 \in 3H_2$ y $a - 6 \in 3H_2$. Por tanto, si 3 es vértice, no puede haber vértice del conjunto $\{5, 6, 7\}$ y, por tanto, 14 es vértice. Pero no hay ningún $a \in \{10, 11, 12\}$ tal que $a - 3 \in 3H_2$ y $14 - a \in 3H_2$. Como 3 no es vértice, tiene que serlo 14. Compatibles con el vértice 14, en ambos conjuntos de tres vértices, están solo el 11 y el 7. Pero $11 - 7 = 4 \in H_2$. \square

Terminamos esta sección presentando algunos resultados para números de Ramsey de la forma $R(3^r)$ donde r indica el número de veces que aparece 3 (equivalentemente, r es el número de colores). Empezamos primero con una cota superior que aparece en [18, Sección 5, Teorema 6]. La demostración que damos aparece en [3, Página 440, Proposición 1].

Proposición 2.5 (Greenwood y Gleason, 1955). *Para todo $r \geq 2$, se tiene que $R(3^r) \leq 1 + \lfloor r!e \rfloor$.*

Demostración. Empecemos denotando $n(r) = R(3^r) - 1$. Por definición de número de Ramsey, podemos encontrar una r -coloración de $K_{n(r)}$, sin triángulos monocromáticos. Tomemos un vértice cualquiera, v_0 , y el conjunto A_i , de todos los vértices del grafo que se unen a v_0 por una arista de color i . Como no hay triángulos monocromáticos, ningún par de vértices de A_i se puede unir por una arista de color i . Así tenemos una $(r - 1)$ -coloración en K_{A_i} sin triángulos monocromáticos, luego $|A_i| < R(3^{r-1})$, de donde $|A_i| \leq n(r - 1)$. Como esto ocurre para los r colores distintos, podemos obtener conjuntos A_1, \dots, A_r disjuntos. Por tanto, $n(r) - 1 \leq r \cdot n(r - 1)$, equivalentemente, $n(r) \leq r \cdot n(r - 1) + 1$. Usando la desigualdad y que $n(1) = 2$, pues $R(3) = 3$:

$$\begin{aligned} n(1) &\leq 1 + 1, n(2) \leq 2 \cdot n(1) + 1, \dots, n(r - 1) \leq (r - 1) \cdot n(r - 2) + 1, \\ n(r) &\leq r \cdot n(r - 1) + 1. \end{aligned}$$

Por sustitución regresiva en las desigualdades previas, llegamos a $n(r) \leq 1 + r + r(r - 1) + \dots + r! + r! = r! \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} = \lfloor r!e \rfloor$. \square

Hemos dado una cota superior para los números de Ramsey $R(3^r)$ independiente de otros números de Ramsey. Vamos ahora a dar una cota inferior que proporciona una desigualdad de recurrencia con números de este tipo. El resultado aparece en [7, Sección 3], donde se demuestra el caso $r = 3$ y

se deja indicada la demostración para del caso general que es la que damos. En el desarrollo de la prueba, se definen coloraciones mediante las llamadas matrices de incidencia.

Dada una r -coloración χ cualquiera del grafo completo K_n con vértices etiquetados como $1, \dots, n$ mediante colores x_1, \dots, x_r , llamaremos **matriz de incidencia**⁸ asociada a χ a la matriz $n \times n$, $T_\chi(x_0, x_1, \dots, x_r) = (a_{ij})$ cuyas entradas a_{ij} (elemento en fila i y columna j) se definen en la forma:

- Entradas en diagonal principal: $a_{ii} = x_0$.
- Entradas fuera de diagonal principal con $i < j$: $a_{ij} = a_{ji} = x_k$ si la arista que une los vértices i y j es de color x_k .

Las matrices de incidencia son una herramienta eficaz para dar isomorfismos de coloraciones: dos matrices de incidencia (color i denotado por x_i), con etiquetado de vértices $1, 2, \dots, r$, proporcionan coloraciones isomorfas.

Proposición 2.6 (Chung, 1973). *Para $r \geq 3$, se tiene la siguiente desigualdad de recurrencia:*

$$3R(3^r) + R(3^{r-2}) - 3 \leq R(3^{r+1}).$$

Demostración. Denotemos $n_r = R(3^r) - 1$. Por definición de número de Ramsey, existe una r -coloración χ_r de K_{n_r} sin triángulos monocromáticos con matriz de incidencia $T_r(x_0, x_1, \dots, x_r)$ asociada (omitimos χ en la notación). Usaremos esta matriz para construir una $(r+1)$ -coloración de $K_{3n_r+n_{r-2}}$ sin triángulos monocromáticos lo que implicará la desigualdad ya que: $R(3^{r+1}) > 3n_r + n_{r-2} = 3(R(3^r) - 1) + R(3^{r-2}) - 1 = 3R(3^r) + R(3^{r-2}) - 4$.

Construimos por bloques la matriz de incidencia $T_{r+1}(0, 1, \dots, r + 1)$, cuyas entradas denotaremos t_{ij} , de una $(r + 1)$ -coloración $K_{3n_r+n_{r-2}}$ usando las coloraciones χ_r y χ_{r-2} en la forma siguiente:

A			
D	B		
E	F	C	
1 ... 1	2 ... 2	3 ... 3	G
⋮	⋮	⋮	
1 ... 1	2 ... 2	3 ... 3	

⁸Las matrices de incidencia son simétricas. Una coloración, salvo cambio de nombre (o tipo) de color, está determinada de forma única por su matriz de incidencia. Las entradas de este tipo de matrices no tienen por qué ser numéricas (pueden ser iniciales de colores). La diagonal principal no proporciona información alguna y puede, por tanto, usarse como entrada cualquier símbolo x_0 . Es habitual enumerar los colores en la forma $1, \dots, r$, en lugar de con símbolos x_i y establecer $x_0 = 0$. De esta forma, obtenemos una matriz de incidencia $T_\chi(0, 1, \dots, r) = (a_{ij})$ con entradas numéricas $a_{ii} = 0$ y si $i < j$, $a_{ij} \in \{1, \dots, r\}$.

donde tenemos que:

$$\begin{aligned}
A &= T_r(0, 2, 3, 4, \dots, r+1) & E &= T_r(2, 1, 3, 4, \dots, r+1) \\
B &= T_r(0, 3, 1, 4, \dots, r+1) & F &= T_r(1, 3, 2, 4, \dots, r+1) \\
C &= T_r(0, 1, 2, 4, \dots, r+1) & G &= T_{r-2}(0, 4, 5, \dots, r+1) \\
D &= T_r(3, 2, 1, 4, \dots, r+1)
\end{aligned}$$

Veamos que hemos generado una coloración sin triángulos monocromáticos. Si hubiese uno, entonces existen tres vértices, i, j, k , de forma que $t_{ji} = t_{kj} = t_{ki} = m$. Tomamos, sin pérdida de generalidad, $i < j < k$ (entradas bajo diagonal principal). Observamos que las tres entradas no pueden estar en ninguna de las submatrices A, B, C, D, E, F, G dado que son matrices asociadas a coloraciones sin triángulos monocromáticos; en particular no pueden estar en G , luego $i \leq 3n_r$. Comprobamos que cualquiera de los posibles valores de m llevan a contradicción:

- Si $m \in \{4, \dots, r+1\}$: Para este caso notemos que para $p, p', q, q' \leq 3n_r$ con $t_{pq} = m$, si $p \equiv p' \pmod{n_r}$ y $q \equiv q' \pmod{n_r}$, tenemos que $t_{p'q'} = m$. Por lo tanto, si $i, j, k \leq 3n_r$ podemos encontrar $1 \leq i', j', k' \leq n_r$, tales que $t_{j'i'} = t_{k'j'} = t_{k'i'} = m$, pero es absurdo, las entradas estarían en A , imposible. Luego alguno de los tres vértices es mayor que $3n_r$ y, como $m \geq 4$, todos lo son y todas las entradas estarían en G , absurdo.
- Si $m = 1, 2, 3$. **Suponemos $m = 1$** (las otras posibilidades se razonan de forma similar) observando que $j \leq n_r$ y $j > 3n_r$ no se pueden dar pues no hay entrada 1 ni en A ni en G . Contemplamos varios casos dependiendo de las posiciones i, j con $i \leq 3n_r$ y $n_r < j \leq 3n_r$:
 - Caso 1: $1 \leq i \leq n_r$ y $n_r < j \leq 2n_r$, luego $t_{ji} \in D$. La entrada t_{ki} no puede estar en la submatriz formada solo por unos puesto que, si eso ocurre, la entrada t_{kj} estaría en la submatriz de doses, imposible pues su valor es 1. Por tanto la entrada t_{ki} debe estar D ó en E . La primera posibilidad lleva a que $t_{kj} \in B$. Pero sabemos que, por la colocación de los colores, $t_{kj} = t_{k(j-n_r)}$. Luego $t_{ji} = t_{k(j-n_r)} = t_{ki} = 1$, lo que es absurdo. Si $t_{ki} \in E$, entonces $t_{kj} \in F$. Ahora bien, sabemos que solo los elementos de la diagonal de F son de color 1, luego $k = j + n_r$ y $t_{ji} = t_{(j+n_r)j} = t_{(j+n_r)i} = 1$. Pero si $t_{ji} = 1$, como es entrada de D entonces $t_{(j+n_r)i} = 3$, por ser entrada de E por lo que llegamos a contradicción.
 - Caso 2: $1 \leq i \leq n_r$ y $2n_r < j \leq 3n_r$. Entonces $t_{ji} = 1$ es entrada de E y t_{ki} no puede estar en la submatriz de unos ya que, si esto ocurre, t_{kj} estaría en la de treses siendo su valor 1. La única

posibilidad es que t_{ki} sea entrada en E , luego t_{kj} lo es de C . Esto nos lleva a que $t_{kj} = t_{k(j-2n_r)}$ (por posición de color 1) y $t_{k(j-2n_r)}$ es entrada de E , que no es posible porque entonces habría un triángulo monocromático en E .

- Caso 3: $n_r < i \leq 2n_r$ y $n_r < j \leq 2n_r$, la entrada t_{ji} está B . Si t_{ki} está B , también lo está t_{kj} , lo cual no es posible. Como $t_{ki} = 1$ solamente puede ocurrir que sea entrada de la submatriz F , luego $t_{kj} = 1$ también es entrada de F . Lo cual es absurdo, porque solo hay una entrada de color 1 por fila en F .
- Caso 4: $n_r < i \leq 2n_r$ y $2n_r < j \leq 3n_r$. Entonces $t_{ji} \in F$. Entonces la única opción es que $t_{ki} \in F$. Pero esto es absurdo, pues solo hay una entrada 1 por columna.
- Caso 5: $2n_r < i \leq 3n_r$ y $2n_r < j \leq 3n_r$, luego $t_{ji} = 1$ es entrada de C . Como $t_{ki} = t_{kj} = 1$, la única posibilidad es que las tres entradas están en C , imposible.

Por tanto la coloración construída no tiene triángulos monocromáticos. \square

Para poder usar el resultado previo, necesitamos conocer el valor exacto de $R(3, 3, 3)$. Este resultado lo establece el Teorema 4 de [18, Sección 4]. Reproducimos la demostración en su forma original, salvo un argumento para conjuntos libres de sumas, y que ya hemos usado previamente.

Teorema 2.2 (Greenwood y Gleason, 1955). $R(3, 3, 3) = 17$.

Demostración. Por la Proposición 2.5, tenemos que $R(3, 3, 3) \leq 17$. Para probar la igualdad, basta dar una 3-coloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos. Para constuirla etiquetamos los vértices de K_{16} con los elementos de $GF(16)$, cuerpo finito de $16 = 2^3$ elementos y característica 2. Este cuerpo contiene todas las raíces del polinomio $x^4 + x + 1$. Tomamos una de ellas, α , y tenemos que $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ es una \mathbb{Z}_2 -base de $GF(16)$ ⁹. El orden multiplicativo de α es 15, luego $GF(16)^* = \langle \alpha \rangle$ y la reducción de potencias $\alpha^4 = \alpha + 1$ relaciona las estructura multiplicativa y aditiva en $GF(16)$. Los restos cúbicos de $GF^*(16)$ forman el subgrupo $H_3 = \langle \alpha^3 \rangle = \{1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}\}$. Como $\alpha H_3 = \{\alpha, \alpha^4, \alpha^7, \alpha^{10}, \alpha^{13}\}$ y $\alpha^2 H_3 = \{\alpha^2, \alpha^5, \alpha^8, \alpha^{11}, \alpha^{14}\}$, llegamos a que $GF^*(16) = H_3 \sqcup \alpha H_3 \sqcup \alpha^2 H_3$ es la descomposición en clases a derecha módulo H_3 . Observamos que $-1 \equiv 1 \in H_3$ y que H_3 es libre de suma (simple comprobación), luego tenemos una 3-partición libre de sumas de $GF^*(16)$.

⁹Observamos que el grupo aditivo del cuerpo $GF(16)$ es isomorfo al grupo aditivo abeliano finito $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Como $\alpha^3 \neq 1$, $\alpha^4 = \alpha + 1$, $\alpha^5 = \alpha^2 + \alpha \neq 1$ y $\alpha^{15} = (\alpha^5)^3 = (\alpha^2 + \alpha)^3 = 1$, concluimos que el orden multiplicativo de α es 15.

Ahora, 3-colorearemos K_{16} estableciendo que la arista que une los vértices x e y es de color 1 si $x - y \in H_3$, de color 2 si $x - y \in \alpha H_3$ y de color 3 si $x - y \in \alpha^2 H_3$. La 3-coloración está bien definida ya que las clases son cerradas por opuestos ($-1 \in H_3$) y no tiene triángulos monocromáticos. Supongamos que hay un triángulo, de cualquier color. Entonces, dados tres vértices x, y, z , tenemos que $x - y, x - z, y - z \in A$, con $A \in \{H_3, \alpha H_3, \alpha^2 H_3\}$. Pero entonces $(x - y) + (y - z) \notin A$, lo que es absurdo, pues $(x - y) + (y - z) = x - z \in A$. \square

Nota. De los valores $R(3, 3, 3) = 17$ y $R(3) = 3$, usando la desigualdad de la Proposición 2.6, llegamos a $51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 66$, acotación que mejora considerablemente la cota inferior 42 dada por Greenwood y Gleason en 1955 [18, Sección 4, Teorema 5].

2.2. Coloraciones de K_{16}

Los resultados de esta sección aparecen en [5, 11, 13]. La exposición de los mismos que se hace en [6] ha sido importante para su elaboración.

En 1968, Kalbfleisch y Stanton [13] prueban que, salvo isomorfismos, solamente hay dos 3-coloraciones del grafo completo de 16 vértices sin triángulos monocromáticos. Una de ellas, basada en residuos cúbicos, es la que dan Greenwood y Gleason en 1955 y aparece en la demostración del Teorema 2.2. La otra la construye Kalbfleisch en 1966 utilizando un programa de búsqueda escrito para un ordenador IBM 7040 por un estudiante llamado Lee James. En 1971 y 1984 se dan otras dos 3-coloraciones (más sencillas en definición y cuentas) basadas en 3-particiones libres de sumas de los grupos abelianos (no isomorfos) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \cong (GF(16), +)$ y $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. La primera de ellas es isomorfa a la de Greenwood-Gleason y la segunda a la de Kalbfleisch-James. Probar la unicidad de ambas coloraciones es el objetivo de la sección.

Coloreando K_{16} : La 3-coloración dada en 1984 por Sun y Cohen [11], está asociada a una 3-partición libre de sumas de $G - \{0\}$ donde G es el grupo $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Como $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, las 4-tuplas de G se pueden escribir como cifras binarias de longitud 4 ($(0, 1, 0, 1) \equiv 0101$), que se suman atendiendo a la posición y teniendo en cuenta que $1 + 1 = 0$ ($0111 + 1010 = 1101$). De este modo, los autores describen el grupo en la forma $G = \{0000, 0001, 0010, 0011, \dots, 1111\}$, y proporcionan la 3-partición libre de sumas $G \setminus \{0000\} = G_1 \sqcup G_2 \sqcup G_3$, donde $G_1 = \{1100, 0011, 1001, 1110, 1000\}$, $G_2 = \{1010, 0101, 0110, 1101, 0100\}$ y $G_3 = \{0001, 0010, 0111, 1011, 1111\}$. Ahora, dados dos elementos $x, y \in G$, colorearemos la arista que los une de color i si $x + y \in G_i$ ($x + y = x - y$ ya que $y = -y$ en G). Para comprobar que no hay triángulos monocromáticos, procedemos como en demostraciones

previas con particiones libres sumas: si tres vértices x, y, z dan lugar a un triángulo monocromático de color i , entonces $x + y, x + z, y + z \in G_i$. Como G_i es libre de sumas, $(x + y) + (y + z) = x + 2y + z = x + z \notin G_i$, absurdo.

Siguiendo [6, página 13]¹⁰, la coloración de Greenwood-Gleason¹¹ viene dada por la matriz de incidencia $T(0, r, v, a)$ reflejada en la Tabla 3.1, si enumeramos los vértices en la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & \alpha^9 & \alpha^3 & \alpha^{12} & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{13} & \alpha^7 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^{14} & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^{11} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de incidencia $T(0, v, a, r)$ de la coloración Sun-Cohen es la mostrada en la Tabla 3.1 al enumerar los vértices como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1111 & 0001 & 0010 & 1011 & 0111 & 1001 & 1100 & 1000 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1110 & 0011 & 0110 & 1101 & 1010 & 0101 & 0100 & 0000 \end{pmatrix}.$$

Esto prueba que ambas coloraciones son isomorfas.

La 3-coloración de Kalbfleisch-James [13] es la dada por la matriz de incidencia $T(0, r, v, a)$ asociada a la Tabla 3.2. En 1971 Whitehead [5]¹² da una otra 3-coloración utilizando una 3-partición libre de sumas del grupo $H = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. Si representamos las 2-tuplas de este grupo como palabras de longitud 2 usando los elementos de \mathbb{Z}_4 , llegamos a $H = \{ab : a, b \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ (suma en la forma $ab + cd = (a + c)(b + d)$). Whitehead introduce la partición $H \setminus \{0000\} = H_r \sqcup H_v \sqcup H_a$, donde $H_r = \{22, 32, 23, 21, 12\}$, $H_v = \{02, 33, 30, 10, 11\}$, $H_a = \{20, 01, 13, 31, 03\}$ y define la coloración en la forma: $v_i v_j$ es de color k si $v_i - v_j \in H_k$ (los subconjuntos son cerrados por opuestos, luego la definición es correcta). Como la 3-partición es libre de sumas, la coloración no tiene triángulos monocromáticos. Ahora basta con hacer la asignación de vértices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 22 & 32 & 23 & 21 & 12 & 02 & 33 & 30 & 10 & 11 & 20 & 01 & 13 & 31 & 03 & 00 \end{pmatrix}$$

¹⁰Los resultados que presentan resumen los dados en la sección 2, páginas 38-42, del artículo de 1976, de los autores Street y Wallis, *Sum-free sets, coloured graphs and designs*.

¹¹De la demostración del Teorema 2.2: $GF(16)^* = \langle \alpha \rangle$, $\alpha^4 = \alpha + 1$ y H_3 subgrupo de restos cúbicos. La coloración: $\{i, j\}$ de color r si $i - j \in H$, de color v si $i - j \in \alpha H$ y de color a si $i - j \in \alpha^2 H$.

¹²En 1975, Whitehead prueba en el artículo *Difference sets and sum-free sets in groups of order 16*, que la coloración de Kalbfleisch-James se puede obtener también mediante una 3-partición libre de sumas del producto directo de grupos $\mathbb{Z}_2 \times D_4$, con D_4 grupo diédrico de orden 8.

para comprobar que la matriz de incidencia es la dada por la Tabla 3.2, luego isomorfa a la de Kalbfleisch-Stanton. \square

Para llegar al resultado de que las coloraciones Greenwood-Gleason y Kalbfleisch-James son las únicas de K_{16} sin triángulos monocromáticos. seguimos los pasos de Kalbfleisch y Stanton en [13]. Primero establecemos un lema auxiliar, no especificado de forma explícita en [13], pero que se utiliza en la prueba del resultado central que buscamos.

Lema 2.1. *En cualquier 3-coloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, de cada vértice salen 5 aristas de color 1, 5 de color 2 y otras 5 de color 3.*

Demostración. Sea v_0 un vértice cualquiera de K_{16} . Supongamos que está unido a 6 vértices por aristas de color 1. Llamemos a este conjunto de vértices A . Para evitar la formación de triángulos monocromáticos de color 1, ninguna arista de K_A puede ser de color 1. Por lo tanto, tenemos una 2-coloración de K_A . Pero, como $R(3, 3) = 6$, la coloración tiene al menos un triángulo monocromático, lo que es absurdo. Por tanto, de v_0 parten, como máximo, 5 aristas de color i para $i = 1, 2, 3$. Ahora bien, si hubiese cuatro de color 1, entonces habría 11 a repartir entre los colores 2 y 3, por lo que al menos 6 aristas serían del mismo color, lo que es absurdo. \square

El lema previo indica que las 3-coloraciones de K_{16} sin triángulos monocromáticos presentan simetrías. Los dos siguientes resultados que aparecen en [13, Lemas 1 y 2] lo ratifican.

Lema 2.2 (Kalbfleisch y Stanton, 1968). *En cualquier 3-coloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, si v_0 y v_1 son vértices unidos por una arista de color $i \in \{1, 2, 3\}$, como mucho hay dos vértices unidos a ambos por un color $j \neq i$.*

Demostración. Denotamos los vértices como v_0 y v_1 y los colores $(1, 2, 3) = (a, r, v)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la arista entre v_0 y v_1 es de color a y comprobar que como mucho pueden haber dos vértices unidos a v_0 y a v_1 por aristas de color r . Para ello, supongamos primero que hay al menos 4 vértices, v_2, v_3, v_4 y v_5 , unidos a v_0 y a v_1 por aristas de color r . Por el Lema 2.1, v_0 está unido a 4 vértices más, v_6, v_7, v_8 y v_9 , por aristas de color a . Como no hay triángulos monocromáticos de color a , las aristas $\{v_1, v_6\}, \{v_1, v_7\}, \{v_1, v_8\}, \{v_1, v_9\}$ no son de color a . Además, como mucho una de ellas puede ser de color r (Lema 2.1), luego al menos tres de ellas son de color v , supongamos $\{v_1, v_7\}, \{v_1, v_8\}$ y $\{v_1, v_9\}$. Para evitar triángulos monocromáticos de color a o v , se necesita que el triángulo $\{v_7, v_8, v_9\}$ sea de color r , lo que es absurdo.

Supongamos ahora que hay exactamente tres vértices, v_2, v_3 y v_4 , unidos a v_0 y a v_1 por aristas de color **r**. Usando Lema 2.1, existen cuatro vértices distintos de forma que $\{v_0, v_5\}, \{v_0, v_6\}, \{v_1, v_7\}, \{v_1, v_8\}$ son de color **r**. Como en el caso anterior, si tres de los vértices restantes estuviesen unidos por aristas de color **a** a v_0 , entonces tendrían que estar unidos por aristas de color **v** a v_1 , generando un triángulo monocromático de color **r**. Por lo tanto, dos de los vértices $\{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$ están unidos a v_1 por aristas de color **a**. Esto implica que las aristas $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_7\}, \{v_0, v_8\}, \{v_0, v_9\}$ y $\{v_0, v_{10}\}$ son de color **a**, sin pérdida de generalidad. Por un razonamiento análogo, $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_1, v_{14}\}$ y $\{v_1, v_{15}\}$, sin pérdida de generalidad, son de color **a**. El resto de aristas que parten de v_0 y v_1 son de color **v**. Ahora, para evitar triángulos monocromáticos, $\{v_5, v_6\}$ y $\{v_7, v_8\}$ deben ser de color **g**. Además, sabemos que $\{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}, \{v_0, v_5\}$ y $\{v_0, v_6\}$ son de color **r**, por lo que, para evitar triángulos monocromáticos, hacemos una 2-coloración del K_5 formado por los vértices $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, con **a** y **v**, en la que se puede suponer que las aristas de color **v** forman el pentágono externo, por la Proposición 1.2. Por simetría, podemos suponer que las aristas **v** son $\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}$ y $\{v_6, v_2\}$, y el resto de color **a**. Se puede emplear un argumento similiar con el conjunto de vértices $\{v_2, v_3, v_4, v_7, v_8\}$, de forma que $\{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_8\}, \{v_7, v_8\}$ y $\{v_7, v_2\}$ son de color **v**, y el resto de color **a**. Como $\{v_4, v_5\}$ y $\{v_4, v_8\}$ son de color **v**, entonces $\{v_5, v_8\}$ no puede ser de ese color. Como $\{v_5, v_3\}$ y $\{v_3, v_8\}$ son de color **a**, entonces $\{v_5, v_8\}$ debe ser de color **r**. Por un argumento similar, $\{v_6, v_7\}$ es **r**.

Nos fijamos ahora en el conjunto de vértices que se unen a v_3 por aristas de color **a**. Está claro que, para evitar triángulos monocromáticos, debemos hacer una 2-coloración de este K_5 con **r** y **v**. Las aristas **r** forman un pentágono y, como $\{v_6, v_7\}$ y $\{v_5, v_8\}$ son de este color, entonces solo una de las aristas $\{v_6, v_8\}$ o $\{v_5, v_7\}$ puede ser de color **r**. Supongamos, por simetría (basta cambiar v_5 con v_6 , v_7 con v_8 y v_2 con v_4), podemos suponer que $\{v_6, v_8\}$ es **r** y $\{v_5, v_7\}$ es **v**. Para los vértices restantes, podemos repetir los argumentos, pero con los colores **r** y **v** intercambiados, con la siguiente asignación¹³: $(v_5, v_6, v_2, v_3, v_4, v_8, v_7) \leftrightarrow (v_{14}, v_{15}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{10}, v_9)$. Nos centramos pues en las aristas uniendo los vértices $\{v_2, \dots, v_8\}$ con los vértices $\{v_9, \dots, v_{15}\}$.

Los vértices v_1, v_7, v_8, v_9 y v_{10} se unen a v_0 por aristas de color **a**, por lo que el K_5 formado por esos 5 vértices debe estar coloreado de **v** y **r**. Como $\{v_1, v_7\}, \{v_1, v_8\}$ y $\{v_9, v_{10}\}$ son de color **r**, entonces $\{v_7, v_{10}\}$ y $\{v_8, v_9\}$ son ambas o bien de color **r** o de color **v**; si aplicamos simetría respecto al eje $\{v_0, v_1\}$ y cambiamos **r** por **v**, ambos casos se ven isomorfos. Luego nos

¹³En los argumentos previos, basta sustituir el vértice en cuestión por el respectivo en la asignación.

centramos en el primero. Ahora, $\{v_8, v_9\}$ y $\{v_9, v_{14}\}$ son de color **r** y $\{v_8, v_{10}\}$ y $\{v_{10}, v_{14}\}$ son de color **v**, luego $\{v_8, v_{14}\}$ es de color **a**. Por lo tanto, los vértices v_8, v_1, v_{14} y v_{15} , junto con otro vértice que llamaremos x , se unen a v_{10} por aristas de color **v**. Hacemos una 2-coloración del K_5 formado por estos vértices mediante los colores **r** y **a**, por lo que cada vértice se une a otros dos mediante aristas de cada color. Como $\{v_8, v_{14}\}$ y $\{v_1, v_{14}\}$ son **a**, luego $\{x, v_{14}\}$ es **r**. Por argumentos similares, $\{x, v_1\}$ es **r**. Por lo tanto, $\{x, v_8\}$ y $\{x, v_{15}\}$ son **a**, luego $\{v_8, v_{15}\}$ es **r**. Esto implica que:

- Como $\{v_8, v_5\}$ y $\{v_6, v_8\}$ son **r** y $\{v_1, v_5\}$ y $\{v_6, v_1\}$ son **a**, entonces $\{v_5, v_6\}$ es **v**.
- Como $\{v_8, v_5\}$ y $\{v_{15}, v_8\}$ son **r** y $\{v_1, v_5\}$ y $\{v_{15}, v_1\}$ son **a**, entonces $\{v_5, v_{15}\}$ es **v**.
- Como $\{v_8, v_{15}\}$ y $\{v_6, v_8\}$ son **r** y $\{v_1, v_{15}\}$ y $\{v_6, v_1\}$ son **a**, entonces $\{v_6, v_{15}\}$ es **v**.

Acabamos de formar un triángulo monocromático y llegado a un absurdo. \square

Lema 2.3 (Kalbfleisch y Stanton, 1968). *En toda 3-coloración de K_{16} sin triángulos monocromáticos, el subgrafo formado por los 16 vértices y las aristas de un color, es isomorfo al grafo de la Figura 2.1.*

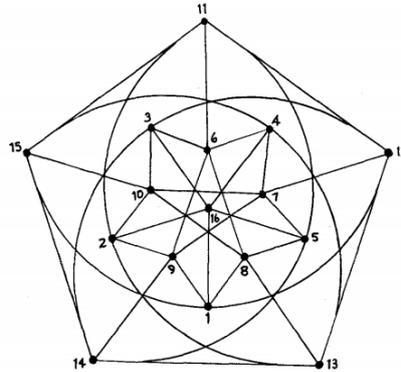


Figura 2.1: Subgrafo de 3-coloración de K_{16} con aristas monocromáticas

Demostración. Denotamos los vértices como $\{v_1, \dots, v_{16}\}$ y usamos colores $\{r, a, v\}$. Por el Lema 2.1, podemos suponer que v_{16} se une a $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ por aristas de color **r**, a $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ de color **v** y a $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$ de color **a**. La Proposición 1.2, permite elegir $\{v_{11}, v_{12}\}$, $\{v_{12}, v_{13}\}$, $\{v_{13}, v_{14}\}$, $\{v_{14}, v_{15}\}$, $\{v_{11}, v_{15}\}$, $\{v_6, v_8\}$, $\{v_8, v_{10}\}$, $\{v_{10}, v_7\}$, $\{v_7, v_9\}$ y $\{v_9, v_6\}$ de color

r. Por tanto, las aristas $\{v_{11}, v_{13}\}, \{v_{13}, v_{15}\}, \{v_{15}, v_{12}\}, \{v_{12}, v_{14}\}$ y $\{v_{14}, v_{11}\}$ son de color **v**, y $\{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}, \{v_8, v_9\}, \{v_9, v_{10}\}$ y $\{v_{10}, v_6\}$ de color **a**.

Nos centramos ahora en las otras cuatro aristas de color **r** que salen de v_1 . Para evitar triángulos monocromáticos, deben llegar dos a $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ y dos a $\{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$. De hecho puede unirse a v_6 y v_7 , o a v_7 y v_8 o a v_8 y v_9 o a v_9 y v_{10} o a v_{10} y v_6 , del primer grupo de vértices. En el segundo grupo, se puede unir a v_{11} y v_{13} , o a v_{12} y v_{14} o a v_{13} y v_{15} o a v_{14} y v_{11} o a v_{15} y v_{12} . Pero estas restricciones se aplican a las aristas de color **r** que salen de los vértices v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 , y si dos de ellos, digamos v_1 y v_2 , llegan a la misma pareja de vértices, entonces habría tres vértices (incluyendo v_{16}) que se unen a v_1 y a v_2 por aristas de color **r**, lo que contradice el Lema 2.2. Por simetría en v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 , vamos a suponer que las aristas de color **r** son $\{v_1, v_8\}, \{v_1, v_9\}, \{v_2, v_9\}, \{v_2, v_{10}\}, \{v_3, v_{10}\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_5, v_7\}$ y $\{v_5, v_8\}$. Por simetría en $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$ y v_{15} , podemos suponer que $\{v_1, v_{15}\}$ y $\{v_1, v_{12}\}$ son de color **r**. Ahora, si $\{v_2, v_{15}\}$ o $\{v_2, v_{12}\}$ fuesen de color **r**, entonces habría tres vértices unidos a v_1 y v_2 por aristas de color **r**, contradiciendo el Lema 2.2. Como $\{v_2, v_{13}\}$ y $\{v_2, v_{14}\}$ no pueden ser de color **r** a la vez, tenemos que $\{v_2, v_{11}\}$ es **r** y, por simetría, podemos suponer que $\{v_2, v_{13}\}$ también lo es. Análogamente, $\{v_5, v_{11}\}$ es **r**. Si $\{v_5, v_{13}\}$ fuese **r**, entonces los vértices v_{13}, v_{16}, v_{11} se unirían a v_2 y a v_5 por aristas **r**, contradiciendo el Lema 2.2. Luego $\{v_5, v_{14}\}$ es **r**. Por argumentos similares, $\{v_3, v_{12}\}, \{v_3, v_{14}\}, \{v_4, v_{13}\}$ y $\{v_4, v_{15}\}$ son **r**. Notamos que $\{v_3, v_6\}, \{v_3, v_{12}\}, \{v_6, v_4\}, \{v_4, v_{13}\}, \{v_4, v_{15}\}, \{v_3, v_{14}\}$ son **r**, luego $\{v_6, v_{12}\}, \{v_6, v_{13}\}, \{v_6, v_{14}\}, \{v_6, v_{15}\}$ no pueden ser de color **r**. La única opción restante es $\{v_6, v_{11}\}$. Por argumentos similares, se obtiene que $\{v_7, v_{12}\}, \{v_8, v_{13}\}, \{v_9, v_{14}\}$ y $\{v_{10}, v_{15}\}$ son de color **r**. Así, se ha obtenido una configuración como la de la Figura 2.1. Argumentos parecidos, llevan a que la configuración de los otros dos colores es isomorfa a la de la figura. \square

Con todos estos resultados, Kalbfleisch y Stanton acotan el número de 3-coloraciones de K_{16} sin triángulos monocromáticos.

Teorema 2.3 (Kalbfleisch y Stanton, 1968). *Salvo isomorfismo, como máximo hay dos 3-coloraciones distintas de K_{16} sin triángulos monocromáticos.*

Demostración. La construcción dada por el Lema 2.3 viene reflejada en la siguiente matriz de incidencia (los huecos tienen etiquetas **v** o **a**):

1																
2																
3																
4			I													
5																
6			r	r												
7				r	r	a										
8	r				r	r	a									
9	r	r	II			r	r	a								
10		r	r			a	r	r	a							
11		r			r	r										
12	r		r			r				r						
13		r		r			r				r					
14			r		r			r			r					
15	r		III	r			IV		r		r	v	v	r		
16	r	r	r	r	r	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Aplicando el Lema 2.3 a las aristas de color v , tenemos que, como los vértices v_6, v_7, v_8, v_9 y v_{10} se unen por aristas de color v a v_{16} , son los equivalentes a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 en la Figura 2.1. Ahora, v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 pueden ser v_6, v_7, v_8, v_9 y v_{10} o $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$ y v_{15} . Por lo tanto, cada vértice de v_6, v_7, v_8, v_9 y v_{10} se une por aristas v a dos vértices de v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 . Es decir, habrá dos símbolos v en cada fila y columna de II (por argumentos similares, tenemos que hay dos símbolos v en cada fila y columna de IV, dos símbolos a en cada fila y columna de III y dos símbolos a en cada fila y columna de IV). La submatriz I se refiere a las aristas del K_5 formado por v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 . Por simetría en los vértices, solo hay 4 posibles formas de coloración:

- 1- Las aristas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}$ y $\{v_5, v_1\}$ de color v y el resto de color a . Entonces dos de las aristas $\{v_1, v_6\}, \{v_2, v_6\}, \{v_5, v_6\}$ deben ser de color v , pero como $\{v_1, v_5\}$ y $\{v_1, v_2\}$ son v , si $\{v_1, v_6\}$ fuese del mismo color, entonces o bien el triángulo $\{v_1, v_2, v_6\}$ o el triángulo $\{v_1, v_5, v_6\}$ sería monocromático de color v . Por lo tanto, $\{v_2, v_6\}$ y $\{v_5, v_6\}$ son de color v . Por argumentos similares, $\{v_1, v_7\}, \{v_3, v_7\}, \{v_2, v_8\}, \{v_4, v_8\}, \{v_3, v_9\}, \{v_5, v_9\}, \{v_1, v_{10}\}$ y $\{v_4, v_{10}\}$ son de color v . El resto de las aristas de II serán de color a . Análogamente, obtenemos que $\{v_3, v_{11}\}, \{v_4, v_{11}\}, \{v_4, v_{12}\}, \{v_5, v_{12}\}, \{v_1, v_{13}\}, \{v_5, v_{13}\}, \{v_1, v_{14}\}, \{v_2, v_{14}\}, \{v_2, v_{15}\}$ y $\{v_3, v_{15}\}$ son de color a , y el resto de las aristas de III son de color v . Finalmente, completamos las entradas de IV. Como $\{v_1, v_{11}\}, \{v_1, v_{10}\}$ y $\{v_1, v_7\}$ son de color v , necesariamente $\{v_7, v_{11}\}$ y $\{v_{10}, v_{11}\}$ deben ser de color a . Por argumentos similares, tenemos que $\{v_6, v_{12}\}, \{v_8, v_{12}\}, \{v_7, v_{13}\}, \{v_9, v_{13}\}, \{v_8, v_{14}\}, \{v_{10}, v_{14}\}, \{v_6, v_{15}\}, \{v_9, v_{15}\}$ son de color a , y el resto de IV son de color v .

- 2- Las aristas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_5, v_1\}$ de color **v** y el resto de color **a**. Razonando de forma análoga al caso previo, podemos completar las celdas restantes de la matriz, sin generar ningún triángulo monocromáticos.
- 3- Las aristas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_5, v_1\}$ de color **a** y el resto de color **g**. Aquí, $\{v_1, v_3\}$ y $\{v_2, v_3\}$ son de color **v**, por lo que $\{v_7, v_3\}$ es **a** y $\{v_1, v_7\}$, $\{v_2, v_7\}$ son **v**. De esta manera, tenemos que $\{v_3, v_8\}$, $\{v_3, v_9\}$, $\{v_4, v_8\}$ y $\{v_4, v_9\}$ son de color **v**. Es decir, $\{v_8, v_9\}$ es **a**, y los vértices v_3 , v_4 y v_{16} se unen por aristas de color **v** a dichos vértices, lo que contradice el Lema 2.2, por lo que habrá triángulos monocromáticos. Es decir, esta coloración no es válida.
- 4- Las aristas $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$ y $\{v_5, v_1\}$ de color **a** y el resto de color **v**. En este caso, como $\{v_2, v_5\}$ es **v**, entonces $\{v_2, v_6\}$ y $\{v_5, v_6\}$ no pueden ser **v** a la vez, por lo que una es **a**, lo que implica que $\{v_1, v_6\}$ es **v**. Por argumentos similares, $\{v_1, v_{11}\}$, $\{v_2, v_{12}\}$, $\{v_3, v_{13}\}$, $\{v_4, v_{14}\}$ y $\{v_5, v_{15}\}$ son de color **a** y $\{v_2, v_7\}$, $\{v_3, v_8\}$, $\{v_4, v_9\}$ y $\{v_5, v_{10}\}$ son de color **v**. Tenemos dos opciones:
- Si $\{v_3, v_7\}$ es de color **v**, entonces $\{v_3, v_9\}$ es **a**. Si $\{v_3, v_{11}\}$ es **v**, entonces, para evitar triángulos monocromáticos, $\{v_7, v_{11}\}$ y $\{v_8, v_{11}\}$ deben ser de color **a**. Pero entonces $\{v_7, v_8, v_{11}\}$ es un triángulo monocromático de color **a**. Si $\{v_3, v_{11}\}$ es **a**, entonces $\{v_3, v_{15}\}$ debe ser **v**. Como los triángulos $\{v_3, v_7, v_{15}\}$ y $\{v_3, v_8, v_{15}\}$ no pueden ser monocromáticos, $\{v_7, v_{15}\}$ y $\{v_8, v_{15}\}$ deben ser de color **a**. Pero entonces el triángulo $\{v_7, v_8, v_{15}\}$ es monocromático de color azul. Esta opción no es válida.
 - Si $\{v_3, v_7\}$ es de color **a**, entonces $\{v_3, v_9\}$ es **v**. Si $\{v_3, v_{11}\}$ es de color **v**, para evitar que $\{v_3, v_9, v_{11}\}$ y $\{v_3, v_8, v_{11}\}$ sean monocromáticos de color **v**, las aristas $\{v_9, v_{11}\}$ y $\{v_8, v_{11}\}$ deben ser de color **a**. Pero entonces el triángulo $\{v_8, v_9, v_{11}\}$ es monocromático de color **a**. Si por el contrario $\{v_3, v_{11}\}$ es **a**, entonces $\{v_3, v_{15}\}$ es **v**. Como $\{v_3, v_8, v_{15}\}$ y $\{v_3, v_9, v_{15}\}$ no pueden ser monocromáticos de color **v**, $\{v_8, v_{15}\}$ y $\{v_9, v_{15}\}$ deben ser de color **a**. Pero entonces el triángulo $\{v_8, v_9, v_{15}\}$ es monocromático. Esta coloración tampoco es válida.

La matriz de incidencia del primer caso es la de la Tabla 3.1. La del segundo la de la Tabla 3.2, coloración isomorfa a la de Whitehead (visto en el apartado *Coloreando K_{16}*). Ambas coloraciones sin triángulos monocromáticos. \square

Hemos demostrado, por lo tanto, que a lo más hay dos 3-coloraciones de K_{16} sin triángulos monocromáticos. Probaremos ahora que exactamente hay dos¹⁴, las asociadas a las Tablas 3.1 y 3.2 (en la demostración no haremos todos los cálculos detallados).

Teorema 2.4 (Kalbfleisch y Stanton, 1968). *Las 3-coloraciones Greenwood-Gleason (GG) y Kalbfleisch-James (KJ) son no isomorfas. En particular, salvo isomorfismos, hay exactamente dos 3-coloraciones de K_{16} sin triángulos monocromáticos.*

Demostración. Vamos a probar que ambas coloraciones no pueden ser isomorfas. En primer lugar, describimos tres permutaciones del conjunto de vértices V_{GG} en la coloración (GG) (en lo que sigue, $a, b, c, d \in V_{GG}$):

- $\sigma_{ab} : V_{GG} \rightarrow V_{GG}$, dada por $c \mapsto c + (b - a)$. Es inmediato que σ_{ab} es permutación y que lleva el vértice a al vértice b . Además, mantiene igual el color de las aristas ya que, dado un otro vértice d , $((b - a) + c) - ((b - a) + d) = c - d$.
- $r_\alpha : V_{GG} \rightarrow V_{GG}$, dada por $a \mapsto \alpha a$. Se trata de multiplicación a izquierda por el elemento α . Es claro que es permutación que lleva $0 \mapsto 0$, $H_3 \mapsto \alpha H_3$, $\alpha H_3 \mapsto \alpha^2 H_3$ y $\alpha^2 H_3 \mapsto \alpha^3 H_3 = H_3$ ($\alpha^3 \in H_3$). Por tanto, r_α produce la permutación de colores $(r \ v \ a)$.
- La tercera permutación σ la describimos en la forma matricial inferior; una simple comprobación nos permite ver que produce la permutación de colores $(r)(v \ a)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha^9 & \alpha^3 & \alpha^{12} & \alpha^6 & \alpha^{10} & \alpha^4 & \alpha^{13} & \alpha^7 & \alpha & \alpha^5 & \alpha^{14} & \alpha^8 & \alpha^2 & \alpha^{11} & 0 \\ \alpha^9 & \alpha^{12} & 1 & \alpha^3 & \alpha^6 & \alpha^{14} & \alpha^2 & \alpha^5 & \alpha^8 & \alpha^{11} & \alpha^4 & \alpha^7 & \alpha^{10} & \alpha^{13} & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el grupo simétrico $S_3 = \langle (r \ v \ a), (v \ a) \rangle$, usando r_α y σ podemos reenumerar los vértices $\{1, 2, \dots, 16\}$ para obtener cualquier permutación de colores en (GG). Recordamos que, por los Lemas 2.1 y 2.3, en ambas coloraciones tenemos que de cada vértice salen 5 aristas de cada color y que los subgrafos asociados a cada color son los que aparecen en la Figura 2.1.

Supongamos entonces que existe un isomorfismo f entre ambas coloraciones. Por permutación de colores en (GG), podemos asumir que cada arista de (GG) va a una arista de (KJ) del mismo color. Además, por simetría de vértices (usando σ_{ab}), podemos suponer que el vértice 16 de (GG) va a parar

¹⁴La prueba que damos es la incluida en [13]. En 1988 por C. Laywine y J.P. Mayberry [2] dan otra demostración del resultado cuyas líneas generales son las que se explican en [6, Páginas 15–17] para dar la demostración del mismo resultado.

al vértice 16 de (KJ) y lo denotamos en la forma $16(GG) \mapsto 16(KJ)$. Como las aristas de color azul en (GG) pasan a aristas de color azul en (KJ), tenemos que $\{11, 12, 13, 14, 15\}(GG) \mapsto \{11, 12, 13, 14, 15\}(KJ)$. De nuevo, por simetría de vértices, podemos asumir que $11(GG) \mapsto 11(KJ)$. En ambas coloraciones, el vértice 11 está unido por aristas rojas al 12 y al 15, luego $\{12, 15\}(GG) \mapsto \{12, 15\}(KJ)$. De nuevo, por simetría de vértices, podemos suponer que $12(GG) \mapsto 12(KJ)$ y que $15(GG) \mapsto 15(KJ)$. Ahora la arista de (GG) y de (KJ) que une 12 y 13 es **r**, mientras que la que une 12 y 14 es **v**, por lo que $14(GG) \mapsto 14(KJ)$ y $13(GG) \mapsto 13(KJ)$. De manera similar, tenemos que $\{1, 2, 3, 4, 5\}(GG) \mapsto \{1, 2, 3, 4, 5\}(KJ)$ y que $\{6, 7, 8, 9, 10\}(GG) \mapsto \{6, 7, 8, 9, 10\}(KJ)$. Como en ambas coloraciones el vértice 15 se une a 1 y a 4 por aristas rojas, entonces $\{1, 4\}(GG) \mapsto \{1, 4\}(KJ)$ y, como el vértice 12 se une a 1 y a 3 por aristas rojas, $\{1, 3\}(GG) \mapsto \{1, 3\}(KJ)$. Es decir, el isomorfismo f satisface que $f(1) = 1, f(2) = 2$ y $f(3) = 3$. Análogos argumentos, nos llevan a que $f(i) = i$ para cualquier vértice de (GG), esto es, todo vértice en (GG) va al vértice del mismo número en (KJ), absurdo ya que las matrices de incidencia, para la misma enumeración de vértices, son distintas en ambas coloraciones. \square

2.3. Principio de Ramsey general

Los contenidos de esta sección se han elaborado usando [12, 15, 19] y [23]. La sección 1.2 del Capítulo 1 introduce la noción de función de Ramsey generalizada en (1.3). La buena definición de esta función es consecuencia de un teorema, establecido y probado en [19, Teorema 2, Capítulo 1]. Este teorema es enunciado como **Teorema de Ramsey** y en este trabajo, por coherencia, lo llamaremos *Principio de Ramsey General*.

Definición 2.2. Sean $k, l_1, \dots, l_r \geq 1$, enteros positivos, $r \geq 1$. Si $k \geq \min \{l_1, \dots, l_r\}$, llamaremos **número Ramsey**, y lo denotaremos en la forma $R(l_1, \dots, l_r; k)$, al mínimo entero n tal que $n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k$. En otro caso, establecemos que $R(l_1, \dots, l_r; k) = \min \{l_1, \dots, l_r\}$.

Principio de Ramsey General 2.1 (Teorema 2, Capítulo 2 de [19]). *Dados unos enteros positivos cualesquiera $k, l_1, \dots, l_r \geq k$, existe $R(l_1, \dots, l_r; k)$.*

Desde la Definición 2.2, es trivial que $R(l; k) = l$ y que $R(l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(r)}; k) = R(l_1, \dots, l_r; k)$ para cualquier σ permutación de $\{1, \dots, r\}$. También queda claro que, el caso $k = 2$, proporciona los números de Ramsey multicolor. El caso $k = 1$ es muy particular por su relación con el *Principio del Palomar*. Observemos el significado de $R(l_1, \dots, l_r; 1) = n$:

Para cualquier entero $m \geq n$, toda r -coloración de un m -conjunto S , tiene algún l_i -subconjunto de S monocromático de color i . Además, la afirmación es falsa para cualquier $m < n$.

Proposición 2.7. Para cualesquier enteros positivos, l_1, \dots, l_r , tenemos que $R(l_1, \dots, l_r; 1) = l_1 + \dots + l_r - (r - 1)$.

Demostración. Empecemos viendo que $R(l_1, \dots, l_r; 1) \leq l_1 + \dots + l_r - (r - 1)$. Para ello, supongamos que tenemos un $l_1 + \dots + l_r - (r - 1)$ -conjunto S , al que realizamos una r -coloración de los 1-subconjuntos (coloreamos elementos). A lo sumo, para evitar monocromáticos, podríamos pintar $l_1 - 1$ de color 1, $l_2 - 1$ de color 2, \dots , $l_r - 1$ de color r . Pero entonces, habríamos pintado $l_1 + l_2 + \dots + l_r - r$ elementos, quedando uno por pintar. Por lo tanto, habrá algún l_i -subconjunto monocromático. Si tenemos $\leq l_1 + \dots + l_r - r$ elementos, por la coloración previa, no se generarán subconjuntos monocromáticos, lo que prueba la igualdad. \square

Consecuencias inmediatas de este resultado son:

Corolario 2.4. Para cualesquier par de enteros positivos, l y m , tenemos que $R(m, l; 1) = m + l - 1$. \square

Corolario 2.5. Para todo $t \geq 1$, $R(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_r; 1) = r + 1$. \square

Corolario 2.6. Para todo $t \geq 1$, $R(\underbrace{t + 1, t + 1, \dots, t + 1}_r; 1) = tr + 1$. \square

Desde el Principio del Palomar (1622) hasta el de Ramsey (1928): Iniciamos este trabajo con el enunciado básico del Principio del Palomar: “Si $r + 1$ palomas ocupan r nidos, en un nido al menos habrá dos palomas”. Si pensamos en los r nidos como si fueran colores y coloreamos $r + 1$ palomas, que es un $(r + 1)$ -conjunto, usando el Corolario 2.5, concluimos que al menos dos palomas tienen el mismo color, esto es, anidan en el mismo nido. El Principio del Palomar básico¹⁵ es, por tanto, consecuencia del Corolario 2.5. Por otro lado, un enunciado más general del Principio del Palomar establece:

“Si $tr + 1$ palomas ocupan r nidos, en un nido al menos nido habrá $t + 1$ palomas.”

¹⁵De hecho, por minimalidad en definición de número de Ramsey, siempre que el número de palomas n sea mayor que el de nidos ($n > r$), al menos dos palomas seguirán anidando en el mismo nido. Por tanto, ambos resultados son equivalentes.

La argumentación previa (nidos sinónimo de colores) nos lleva a que el Principio del Palomar generalizado se sigue (es equivalente a) del Corolario 2.6. Aún podemos establecer un tercer Principio del Palomar al que nos referiremos como *alterado*:

“Si tenemos $m+l-1$ objetos y los distribuimos en dos cajas, o bien una contiene al menos m objetos o bien la otra contiene al menos l objetos.”

No es difícil concluir que, pensando en las cajas como si fueran los dos colores con los que coloreamos un $m+l-1$ -conjunto, este enunciado es consecuencia del Corolario 2.4. \square

Desde la noción de hipergrafo k -uniforme (Definición 1.3), observamos que las hiperaristas de esta estructura son k -subconjuntos de su conjunto de vértices. Esta idea nos permite enunciar el Principio de Ramsey General en términos de coloraciones de hipergrafos de forma análoga a como hicimos con el Principio de Ramsey Reducido usando grafos. En este caso, la noción de grafo completo debe ser sustituida por la de **hipergrafo k -uniforme completo**. El hipergrafo k -uniforme completo de n vértices, que denotaremos como $K_n^{(k)} = ([n], \binom{[n]}{k})$ es el grafo cuyos vértices son los elementos del segmento $[n]$ y sus aristas son todos los k -subconjuntos del conjunto $[n]$. De este modo llegamos a:

Teorema 2.5. *Si $r \geq 2$ para cualquier colección de enteros k, l_1, \dots, l_r tales que $k \geq 1$ y $l_1, \dots, l_r \geq k$, existe un mínimo entero N tal que para todo $n \geq N$, cualquier r -coloración de las aristas del hipergrafo k -uniforme completo $K_n^{(k)}$ contiene al menos un subhipergrafo monocromático $K_{l_i}^{(k)}$.*

Terminamos esta sección y los contenidos principales de este Capítulo 2 enunciando la desigualdad de recurrencia¹⁶, establecida y probada por Erdős y Szekeres [16]. Una demostración de la misma puede verse en [12].

Proposición 2.8 (Erdős y Szekeres, 1935). *Para cualesquier enteros $s, t \geq k \geq 1$, se tiene que*

$$R(s, t; k) \leq R(R(s-1, t; k), R(s, t-1; k); k-1) + 1.$$

Demostración. Tomamos $n = R(R(s-1, t; k), R(s, t-1; k); k-1) + 1$ y S un n -conjunto, en el que realizamos una 2-coloración arbitraria $[S]^k$. Fijamos un elemento $x_0 \in S$ de forma que generamos un $(n-1)$ -subconjunto S_1 de S ,

¹⁶La analogía para $k = 2$ es el Teorema 2.2, cuya demostración vimos en la primera sección de este capítulo. Usando esta desigualdad de recurrencia, en [23] se dan dos demostraciones del Principio de Ramsey General en el caso $r = 2$.

en el que realizamos una 2-coloración de los $[S_1]^{k-1}$ atendiendo a la siguiente regla ($i = 1, 2$): el $(k-1)$ -subconjunto H_1 será de color i si $H_1 \cup \{x_0\}$ es de color i . Como $n-1 = R(R(s-1, t; k), R(s, t-1; k); k-1)$, o bien hay un $R(s-1, t; k)$ -subconjunto todos cuyos $(k-1)$ -subconjuntos son de color 1 o bien hay un $R(s, t-1; k)$ -subconjunto con todos sus $(k-1)$ -subconjuntos son de color 2. En el primer caso, si denotamos el $R(s-1, t; k)$ -subconjunto por A_1 , tendremos que o bien hay un $(s-1)$ -subconjunto cuyos k -subconjuntos son de color 1, o bien hay un t -subconjunto cuyos k -subconjuntos son de color 2. En el segundo caso, ya tendríamos probado lo que queríamos. En el primer caso, notamos que el $(s-1)$ -subconjunto, junto con $\{x_0\}$, forman un s -subconjunto con todos sus k -subconjuntos son de color 1. El segundo caso es análogo. \square

Como consecuencia de la Proposición 2.8, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.7. *Para cualesquiera enteros positivos s y t , tenemos:*

(a) $R(s, t; 2) \leq 2^{s+t-3}$.

(b) $R(s, t; 3) \leq 2^{2^{\cdot^{\cdot^2}}}$, donde la torre de doses tiene una altura de $t+s-3$.

B: Método probabilístico y computación

No podemos finalizar este capítulo sin hablar, aunque sea brevemente, del método probabilístico dentro de la Teoría de Ramsey, ya que genera las mejores cotas inferiores alcanzadas hasta la fecha.

La idea básica es pintar de forma arbitraria el grafo completo deseado, y llegar a la conclusión de que, por probabilidad, existe alguna coloración de dicho grafo con subgrafos monocromáticos. Es decir, el objetivo es obtener que dicha probabilidad es mayor que 0 (recíprocamente, que la probabilidad de que no ocurra es menor que 1). Con este método por ejemplo, se puede llegar al siguiente resultado probado por Paul Erdős:

$$"R(k, k) > n \text{ si } k \text{ y } n \text{ enteros positivos tales que } \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1."$$

La cota anterior no deja contento al autor quien, en 1947, establece la ya clásica cota inferior dada en la ecuación (2.1). Los argumentos dados por Erdős en la prueba, fundamentan el llamado método probabilístico¹⁷:

¹⁷En la primera dirección electrónica se da una prueba de la cota inferior usando el método probabilístico. La cota superior en la cadena de desigualdades (2.1) se puede obtener desde la acotación binomial dada en el Corolario 2.2. En el caso $n = 10$, la acotación (2.1) queda $101 \leq R(10, 10) \leq 48620$, lo que indica una gran diferencia entre ambas cotas. Los factores exponenciales no han sido mejorados hasta la fecha.

Ver https://en.wikibooks.org/wiki/Combinatorics/Bounds_for_Ramsey_numbers
y https://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey%27s_theorem#cite_note-McKay-5

$$\frac{n2^{\frac{n}{2}}}{e\sqrt{2}} < R(n, n) \leq [1 + o(1)] \frac{4^{n-1}}{\sqrt{5\pi}}. \quad (2.1)$$

A la vista de esta (y otras cotas) y de los métodos de trabajo que hemos mostrado para calcular $R(3, 3, 3)$ y los bicolores pequeños $R(p, q)$ con $p \leq q \leq 4$, queda claro que los cálculos de valores exactos e incluso cotas finas de números de Ramsey son una tarea compleja¹⁸. Para expresar la dificultad en el cálculo de números de Ramsey, Paul Erdős cuenta la siguiente anécdota que aparece en [20]:

Suppose aliens invade the earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value. If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack.

Es aquí donde la computación y, más concretamente, la programación, aparecen como herramientas casi imprescindibles para dar cotas cercanas a los valores exactos. En el Anexo A3, hemos incluido una serie de tablas que muestran la actualidad de los números de Ramsey.

¹⁸Los valores exactos de $R(5, 5)$ y $R(6, 6)$ no se conocen. Las mejores cotas hasta la fecha son $42 \leq R(5, 5) \leq 48$ y $102 \leq R(6, 6) \leq 165$. El valor exacto $R(3, 6) = 18$ fue obtenido en 1964 por G. Kéry, pero hasta 2007 no se da una prueba elemental autocontenida.

Capítulo 3

Aplicaciones

“The charm of Ramsey theory is derived in part from the simplicity with which the problems can be stated”

Ronald L. Graham (1935-2020) & Joel H. Spencer (1946-??)

En el primer capítulo, enunciamos una serie de problemas y resultados estrechamente relacionados con la Teoría de Ramsey. El objetivo de este capítulo final es aplicar los Principios de Ramsey que hemos explicado en el Capítulo 2 en la resolución de enunciados, de apariencia muy distinta, pero que comparten la *esencia Ramsey*.

De este modo, en las secciones 3.1 y 3.2, solucionaremos, usando números de Ramsey, desde problemas propuestos en olimpiadas internacionales a los conocidos como The Happy End Problem (Erdős y Szekeres, 1935) y Teorema de las sumas de enteros (Schur, 1966), entre otros. Así, con grafos y coloraciones mostraremos que se pueden resolver desde enunciados geométricos, hasta problemas de progresiones y ecuaciones. El capítulo termina en la sección 3.3, que ilustra las aplicaciones de esta colorida teoría en entornos menos matemáticos y, de este modo, marcando nuevos horizontes de extensión. Las referencias básicas usadas en la elaboración de contenidos son [15] y [9].

3.1. Problemas *a la Ramsey*

Los enunciados de los cuatro problemas propuestos en esta sección han sido elaborados usando un par de ejercicios que aparecen en [15] y los enunciados y soluciones oficiales de la International Mathematical Olympiad (IMO).¹ Las soluciones propuestas ilustran el potencial de la Teoría de Ramsey fini-

¹Las soluciones oficiales de los dos Problemas IMO propuestos se pueden encontrar en el Anexo A4.

ta con independencia de que se conozcan o no los valores exactos de sus números. La mayor dificultad, dar con la coloración adecuada.

Problema 8 (Problema 4 de 6th IMO, Moscú 1964). *Cada uno de los estudiantes de un grupo de 17 habla con cada uno de los demás. Todos ellos hablan de tres temas diferentes. Cada pareja de estudiantes habla entre sí de uno solo de los temas. Probar que hay tres estudiantes que hablan entre ellos del mismo tema.* ²

Solución “a la Ramsey”. Asociando cada vértice de un K_{17} a uno de los estudiantes, y coloreando las aristas en función de los temas que hablan, obtenemos una 3-coloración de las aristas de K_{17} . Como $R(3, 3, 3) = 17$, debe haber algún triángulo monocromático, es decir, debe haber algún grupo de 3 estudiantes que hablan del mismo tema. \square

Problema 9 (Problema 6 de 20th IMO, Bucarest 1978). *Los miembros de una sociedad internacional son de seis países. La lista de miembros contiene 1978 nombres, numerados 1, 2, . . . , 1978. Probar que hay al menos un miembro cuyo número es la suma de los números de dos, no necesariamente distintos, de sus compatriotas.* ³

Solución “a la Ramsey”. Consideramos el grafo completo K_{1978} y hacemos una 6-partición de los miembros de la sociedad en conjuntos S_i dependiendo del país del miembro. Ahora 6-coloreamos el grafo K_{1978} atendiendo a la regla: arista $\{i, j\}$ ($i < j$) de color i si $j - i \in S_i$. Si la coloración tiene triángulos monocromáticos, existirán vértices $x < y < z$ tales que $z - y, y - x, z - x$ son del mismo color y como $(z - y) + (y - x) = z - x$, los miembros $a = z - y$, $b = (y - x)$ y $c = z - x$ son solución. La acotación de la Proposición 2.5 nos dice que $R(3, 3, 3, 3, 3, 3) \leq 1 + \lfloor 6!e \rfloor = 1958 < 1978$, luego la coloración tiene triángulos monocromáticos. \square

Problema 10. *Todo semigrupo⁴ finito debe tener un elemento idempotente.*

²El problema de la 6th IMO es una versión más general de los Party Problems donde las soluciones son números bicolores. En el Anexo A4, hay una solución basada en el valor de $R(3, 3)$.

³El lector no tardará en darse cuenta de que se trata de una versión reducida del Teorema de suma de enteros presentado en la sección 1.1 del primer capítulo. En la solución oficial el truco está en usar el Principio del Palomar y diferencias hasta 6 veces. La idea de usar diferencias aparece en la 6-coloración, si bien la solución usando la Teoría de Ramsey es mucho más rápida. La dificultad está en descubrir qué coloración hay que usar.

⁴Un **semigrupo finito** es un conjunto finito (S, \cdot) con una operación binaria \cdot asociativa. Un elemento $e \in S$ se dice **idempotente** si cumple la identidad $e \cdot e = e$.

Solución “a la Ramsey”. Enumeramos desde 1 hasta n los elementos del semigrupo, y fijamos un elemento a cualquiera. El grafo K_N lo n -coloreamos con la regla: la arista $\{i, j\}$ ($i < j$) de color k si $k = a^{j-i}$. Si aparecen triángulos monocromáticos, existirán vértices $x < y < z$, tales que $a^{z-x} = a^{z-y} = a^{y-x}$ y el elemento $b = a^{z-x}$ cumple que $b^2 = a^{z-y} \cdot a^{y-x} = a^{z-x} = b$ es idempotente. tomando $N > R(3^n)$, el problema queda resuelto. \square

Problema 11. *Sea m un entero positivo arbitrario. Cualquier matriz cuadrada A cuyos elementos sean 0's y 1's de orden n suficientemente grande contiene una submatriz principal⁵ $m \times m$ de uno de los siguientes tipos:*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & * \end{pmatrix}$$

Solución “a la Ramsey”. Ahora, si tomamos $n > R(m, m, m, m)$ y observar que podemos 4-colorear las aristas de K_n atendiendo a la regla:

- Colorearemos la arista ij ($i < j$) de color **r** si $A_{ij} = 1$ y $A_{ji} = 1$.
- Colorearemos la arista ij ($i < j$) de color **a** si $A_{ij} = 1$ y $A_{ji} = 0$.
- Colorearemos la arista ij ($i < j$) de color **g** si $A_{ij} = 0$ y $A_{ji} = 1$.
- Colorearemos la arista ij ($i < j$) de color **p** si $A_{ij} = 0$ y $A_{ji} = 0$.

Por definicion de número de Ramsey, hay un subgrafo K_m monocromático. Esto equivale a que hay submatriz principal de alguno de los cuatro tipos. \square

⁵Una matriz cuadrada de orden n , una submatriz de orden $m < n$ es **principal** si se obtiene de la original borrando $n - m$ filas y las mismas $n - m$ columnas.

3.2. Geometría, Progresiones y Ecuaciones

En esta sección, aplicamos la Teoría de Ramsey para dar **solución a la Ramsey**, entre otros, al Problema 7, conocido como *The Happy End Problem* (Erdős y Szekeres, 1935) y demostrar el *Teorema de sumas de enteros* (Schur, 1916) que propusimos en la sección 1.1 del Capítulo 1. Para elaborar esta apartado hemos usado [15].

Necesitamos la noción **conjunto convexo**, ya introducida en el Capítulo 1, y la de **envolvente convexa** de un conjunto de puntos T , que establecemos como la intersección de todos los convexos que contienen a T . También usaremos el siguiente resultado:

Lema 3.1. *Un n -gon convexo si todos sus cuadriláteros lo son.*

Demostración. Supongamos que los n puntos no dan lugar a un n -gon convexo. Entonces alguno de los puntos estaría en el interior de la envolvente convexa de los n puntos. Pero entonces, existirán tres puntos para los que ese vértice esté en su envolvente convexa, dando lugar así a un cuadrilátero no convexo, lo que es absurdo. \square

Para resolver el Problema 7 basta probar que $N(t)$ ⁶ es finito, y así es:

Teorema 3.1. $N(t) \leq R(5, t; 4)$.

Demostración. Tomamos un total de $R(5, t; 4)$ puntos en el plano en posición general (sin triples colineales), y hacemos una 2-coloración de los 4-subconjuntos, con la regla: **r** si no forman un polígono convexo y **a** en caso contrario. Por la Teoría de Ramsey, tenemos que o bien hay un 5-subconjunto con todos los 4-subconjuntos de color **r** o bien hay t -subconjuntos cuyos 4-subconjuntos son de color **a**. El primer caso no se da, por el Problema 6 y, en el segundo tenemos un t -gon convexo, por el Lema 3.1. \square

En lo que sigue daremos solución a la *Ramsey* algunos teoremas sobre progresiones y ecuaciones.

Lema 3.2 (Erdős y Szekeres, $n = 5$). *Dada una lista ordenada de 5 números reales distintos, al menos tres de ellos (en el mismo orden) forman una sucesión monótona, creciente o decreciente.*⁸

⁶Problema 7 (The Happy End Problem): Dado un entero cualquiera t , ¿existe algún número $N(t)$ que cumpla que para cualquier conjunto de al menos $N(t)$ puntos en posición general ⁷, hay algún subconjunto de t puntos que formen un t -gon convexo?.

⁸El resultado general dado por Erdős y Szekeres dice que, en cualquier conjunto de $n^2 + 1$ números reales, podemos encontrar un $(n + 1)$ -subconjunto de números que forman una sucesión monótona.

Demostración. Supongamos que los 5 números son $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_2 \geq x_1$. Ahora, si $x_3 \geq x_2$, ya tendríamos el resultado. Si no, tenemos dos casos posibles: que $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ o que $x_3 \leq x_1 \leq x_2$. En el primer caso, con x_4 ya tendríamos el resultado probado, ya que las cuatro opciones: $x_4 \leq x_1 \leq x_3 \leq x_2$, $x_1 \leq x_4 \leq x_3 \leq x_2$, $x_1 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_2$ y $x_1 \leq x_3 \leq x_2 \leq x_4$ lo cumplen. En el segundo, los casos $x_4 \leq x_3 \leq x_1 \leq x_2$ y $x_3 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_4$ verifican el resultado. Los otros dos casos son: $x_3 \leq x_4 \leq x_1 \leq x_2$ y $x_3 \leq x_1 \leq x_4 \leq x_2$, y no es difícil observar que x_5 generará la sucesión deseada. \square

Más general: para cada n , existe un número $M(n)$ tal que dada una sucesión de $M(n)$ números reales, podemos encontrar una subsucesión monótona de longitud n .

Teorema 3.2. $M(n) \leq R(n, n, n, n; 3)$ si $n \geq 5$.

Demostración. Tomemos una sucesión de $R(n, n, n, n; 3)$ números reales, y realicemos una 4-coloración de los 3-subconjuntos atendiendo a la regla: **r** si forman una sucesión creciente; **a** si forman una sucesión decreciente; **v** si $x_1 \leq x_2$ y $x_2 \geq x_3$ y **p** si $x_1 \geq x_2$ y $x_2 \leq x_3$. Por la teoría de Ramsey, se tiene que hay n números reales para los que los 3-subconjuntos son monocromáticos. Si lo son de color **r** o **a** ya estaría y, por el Lema 3.2, no se pueden dar los otros dos casos. \square

Para acabar esta sección, vamos a probar el *Teorema de Schur de sumas de enteros* que dejamos pendiente en el Capítulo 1. Este resultado es clave en la demostración que damos del Teorema de Schur de ecuaciones en sumas de potencias en \mathbb{Z}_p .

Lema 3.3 (Teorema de suma de enteros, Schur 1916). *Dado m entero, existe un entero $S(m)$ tal que si $N \geq S(m)$ y χ es una m -coloración de conjunto $\{1, \dots, N\}$, existirán tres números $x, y, z \in \{1, \dots, N\}$ con el mismo color y tales que $x + y = z$.*

Demostración. Basta tomar $S(m) = R(3^m)$. En K_{N+1} , de vértices $0, 1, \dots, N$, definimos la m -coloración: la arista $\{i, j\}$, con $i < j$ será del color de $j - i$ en la coloración χ (la coloración está bien definida ya que $j - i \in \{1, 2, \dots, N\}$). Por la Teoría de Ramsey, como $N \geq S(m)$, existe un triángulo monocromático, es decir, hay tres números $i < j < k$, tales que $j - i = k - i = k - j$. Así, $x = k - j$, $y = j - i$, $z = k - i$ es una posible solución. \square

Teorema 3.3 (Schur, 1916). *Dado un entero m , podemos encontrar un entero $Sc(m)$ tal que, si $p \geq Sc(m)$, la ecuación $x^m + y^m = z^m$ tiene solución no trivial en \mathbb{Z}_p .*⁹

Demostración. Basta con tomar $Sc(m) = R(3^m)$. En el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \dots, p-1\}$, consideramos el subgrupo de restos de potencia m , $H_m = \{a^m | a = 1, 2, \dots, p-1\}$ y sus clases a derecha¹⁰ $jH_m = \{jh | h \in H_m\}$ con $j \in \mathbb{Z}_p^*$. Por la Proposición 1.3, tenemos una d -partición de \mathbb{Z}_p^* en clases con $d = m.c.d.(m, p-1) \leq m$. Usamos la partición para d -colorear $\{1, \dots, p-1\}$ ¹¹ y aplicamos el Lema 3.3. Así, existe algún j y $x, y, z \in jH_m$ tal que $x+y = z$, es decir $ja^m + jb^n = jc^m$, lo que prueba el resultado al simplificar la ecuación por $j \neq 0$. \square

3.3. Otras aplicaciones

En esta sección, vamos a hablar de ciertas aplicaciones, no directas, de la teoría de Ramsey, fuera del entorno matemático en el que hemos centrado el trabajo. La información ha sido extraída del artículo de 1983 de Fred S. Roberts [9], ahondando en ciertos contenidos, a partir de sus propias referencias.

3.3.2. GRAFOS DE CONFUSIÓN: La primera de las aplicaciones que vamos a ver será en el terreno de la teoría de la comunicación, donde la teoría de Ramsey ayuda a dar cotas superiores para determinar la fiabilidad de un alfabeto dentro de un canal con ruido.

Cuando hay ruido en un canal, es posible que el mensaje quede distorsionado al existir la posibilidad de que determinados elementos se confundan con otros. Esta idea da lugar a la noción de **grafo de confusión** para un alfabeto T en un canal con ruido. Los vértices de dicho grafo son los distintos elementos de T , y habrá una arista entre dos vértices cualesquiera si y solo si hay riesgo de que dichos elementos se confundan al enviar el mensaje. Por ejemplo, si $T = \{a, b, c, d, e\}$ y se pueden confundir los elementos $\{a, b\}$,

⁹Parafraseando a los autores de [15], este resultado viene a decir que el Teorema de Fermat es falso en \mathbb{Z}_p . El uso de propiedades elementales de clases a derecha simplifica la prueba dada en [15].

¹⁰Las propiedades elementales de clases a derecha, dicen que jH_m tiene los mismos elementos que H_m , un total de $\frac{p-1}{m.c.d.(m, p-1)}$ de acuerdo con la Proposición 1.3, que dos clases o son disjuntas o coinciden y que la unión de todas es el grupo total. Además, el número de clases distinta es el índice del subgrupo en el grupo, en este caso $[\mathbb{Z}_p^* : H_m] = d$.

¹¹Notamos que $R(3^j) < R(3^m), \forall j < m$, así que da igual si hay menos de m conjuntos disjuntos, por que el resultado del lema seguirá siendo válido.

$\{b, c\}$, $\{c, d\}$, $\{d, e\}$ y $\{d, a\}$, entonces tendríamos un pentágono como grafo de confusión:

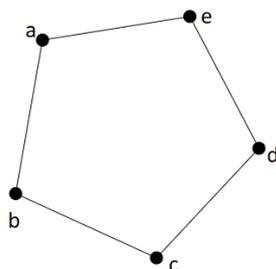


Figura 3.1: Ejemplo de Grafo de Confusión

El objetivo es encontrar un subconjunto de T de forma que no haya riesgo de confusión, es decir, de forma que no haya aristas entre los vértices. En el ejemplo, valdría toma el subalfabeto $\{a, c\}$. La pregunta ahora es inmediata, ¿cuál es el mayor tamaño que puede tener dicho subalfabeto? Denotaremos este valor como $\alpha(G_T)$, donde G_T es el grafo de confusión asociado a T .

Una manera de aumentar dicho valor, es tomar 2-tuplas de dos elementos del alfabeto, esto significa trabajar con el alfabeto TT de palabras de longitud 2 sobre el alfabeto t . Así por ejemplo, el conjunto de elementos $\{aa, ac, ca, cc\}$ no tendría riesgo de confusión. Ahora pensemos en el grafo de confusión asociado a TT . Los vértices serán $G_T \times G_T$, el producto cartesiano de los vértices de G_T , y, entre dos vértices, xz y uv , habrá una arista si y solo si se cumple una de las siguientes afirmaciones:

- x se puede confundir con u y z se puede confundir con v .
- $x = u$ y z se puede confundir con v .
- $z = v$ y x se puede confundir con u .

De acuerdo con la Definición 3.2, $G_{TT} = G_T \cdot G_T$ es el producto normal de G_T consigo mismo. Y precisamente para este producto, es donde encontramos la cota que nos da la teoría de Ramsey mediante números bicolores:

Teorema 3.4. *Si G y H son grafos cualesquiera, entonces*

$$\alpha(G \cdot H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$$

Demostración. Supongamos que $\alpha(G \cdot H) \geq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$. Si tuviésemos un conjunto de $R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$ vértices I de $G \cdot H$ sin aristas, entonces, dados dos vértices ab y cd distintos, se tiene que cumplir o que

$a \neq c$ y $\{a, c\}$ no es una arista de G o bien que $b \neq d$ y $\{b, d\}$ no es una arista de H .¹² Sea ahora $N = R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$ y construyamos K_N , donde los vértices serán los N elementos de I . En este grafo, hacemos una dos coloración de las aristas atendiendo a la siguiente regla: **r** si se cumple que $a \neq c$ y $\{a, c\}$ no es una arista de G y **a** en otro caso. La Teoría de Ramsey, da dos posibles opciones y ninguna es válida: o bien hay un subgrafo $K_{\alpha(G)+1}$ monocromático de color **r** o hay un subgrafo monocromático $K_{\alpha(H)+1}$ de color **a**. En el primer caso, el conjunto de vértices $\{a \mid a \text{ es un vértice de } G \text{ y, para algún } b, ab \in K_{\alpha(G)+1}\}$ es un conjunto de $\alpha(G) + 1$ vértices de G sin aristas, lo que es absurdo por maximalidad de $\alpha(G)$. Un razonamiento análogo, descarta la segunda opción. \square

Con este resultado, tenemos que si G es el grafo que hemos mostrado, entonces $\alpha(G \cdot G) \leq R(3, 3) - 1 = 5$. Además, en este caso se alcanza, porque el conjunto de vértices $\{aa, bc, ce, db, ed\}$ no da lugar a equivocación.

3.3.2. DISEÑO DE REDES DE CONMUTACIÓN DE PAQUETES: Para estudiar esta aplicación, vamos a tener que dar una segunda generalización de los números de Ramsey:

Definición 3.1. Sean G_1, \dots, G_n grafos. Entonces el **número de Ramsey** $R(G_1, \dots, G_n)$ es el menor entero positivo N que verifica que en toda n -coloración de las aristas de K_N , existe $1 \leq i \leq n$ tal que hay un subgrafo en K_N , monocromático de color i que es isomorfo a G_i .

Esta rama de la Teoría de Ramsey, tiene muchos resultados, por lo que no vamos a entrar a estudiarla en profundidad. Sin embargo, vamos a probar un pequeño enunciado, que aparece en [10] y en [17],¹³ que nos va a servir para ilustrar esta aplicación:

Proposición 3.1. $R(C_4, C_4) = 6$, si el grafo C_4 es un ciclo de 4 vértices.

Demostración. Por la coloración que hemos visto de K_5 , ya sabemos que $R(C_4, C_4) > 5$. Realicemos ahora una 2-coloración de las aristas de K_6 , con los colores **r** y **a**. Sea v_0 un vértice cualquiera de K_6 :

- Supongamos que las aristas $\{v_0, v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0, v_3\}, \{v_0, v_4\}$ son de color **r**. Consideremos ahora el K_4 formado por los vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

¹²Claramente pueden ocurrir las dos cosas a la vez, pero no hace falta tenerlo en cuenta.

¹³En 1975, Chung y Graham prueban en el trabajo *On Multicolor Ramsey Numbers for Complete Bipartite Graphs* que, si $p-1$ es potencia de número primo, entonces $R(\underbrace{C_4, \dots, C_4}_p) > p^2 - p + 1$, por lo que tenemos que $R(C_4, C_4, C_4) \geq 8$.

Si en algún par de aristas \mathbf{r} se comparte algún vértice, entonces se obtiene un C_4 de color \mathbf{r} (por ejemplo, si $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_2, v_3\}$ son de color \mathbf{r} , entonces está el C_4 dado por $\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$). Entonces hay como mucho dos aristas de este K_4 que pueden ser \mathbf{r} . Por simetría, supongamos que son $\{v_1, v_2\}$ y $\{v_3, v_4\}$, Pero entonces las aristas $\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_2\}$, $\{v_2, v_4\}$ y $\{v_4, v_1\}$ son de color \mathbf{a} , formando un C_4 .

- Supongamos que las aristas $\{v_0, v_1\}$, $\{v_0, v_2\}$ y $\{v_0, v_3\}$ son de color \mathbf{r} y que las aristas $\{v_0, v_4\}$ y $\{v_0, v_5\}$ son de color \mathbf{a} . Estudiamos ahora las aristas $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$. Notemos que si dos de las aristas que tienen a v_4 o a v_5 son de color \mathbf{r} , obtenemos un C_4 de este color. Análogamente, si las dos aristas que tienen a v_1, v_2 o a v_3 son de color \mathbf{a} , entonces se genera un C_4 de este color. Supongamos entonces que $\{v_1, v_4\}$ es de color \mathbf{r} y $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$ son de color \mathbf{a} . Pero entonces, para evitar el caso arriba mencionado, $\{v_2, v_5\}$ y $\{v_3, v_5\}$ deberían ser de color \mathbf{r} , pero entonces se genera un C_4 de este color, por lo ya mencionado. Pero, si $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$ son de color \mathbf{a} , por simetría de colores, tenemos que estamos en la situación del caso previo. Luego habrá algún C_4 .

Por simetría de colores, se completa la prueba. □

Supongamos ahora que queremos modelizar una red mediante un grafo. Para ello, los distintos equipos serán los vértices del grafo, y los vínculos vendrán dados por las aristas. En algunas aplicaciones, los vértices están emparejados, de forma que hay dos vértices para representar el mismo equipo. Supongamos que estamos trabajando con un grafo completo.

Para realizar la comunicación se requerirán instalaciones intermedias, pero en ellas pueden ocurrir fallos. Por lo tanto, si alguna instalación falla, ciertas comunicaciones se perderán, lo que se traduce en la eliminación de ciertas aristas del grafo. En función de las comunicaciones que se ven afectadas por la caída de cada una de las k instalaciones intermedias, hacemos una k -coloración de las aristas. Lo que buscamos ahora es que, si ocurre algún problema en una de las instalaciones intermedias, no deje de haber comunicación entre las parejas de vértices. Por ejemplo, en la siguiente figura, los vértices $\{x_1, x - 2\}$, $\{y_1, y_2\}$ y $\{z_1, z_2\}$ están emparejados y, si se cae la instalación que proporciona el color rojo, las parejas $\{x_1, x_2\}$ y $\{z_1, z_2\}$ quedan incomunicadas. Notemos que, precisamente, quedarán incomunicadas porque los cuatro vértices forman un C_4 .

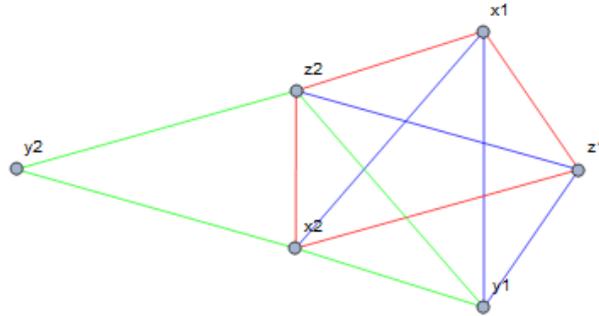


Figura 3.2: Ejemplo de Red

Buscamos pues saber cuántos equipos e instalaciones intermedias podemos poner sin que haya un C_4 monocromático. Por la Proposición 3.1, $R(C_4, C_4) = 6$, luego si hay dos instalaciones intermedias, se podrán poner, como mucho, 5 vértices en el grafo para que no haya C_4 monocromáticos. Equivalentemente, como $R(C_4, C_4, C_4) \geq 8$, se podrán poner 7 vértices.

Haciendo la pregunta al revés: si tenemos un grafo de n vértices, ¿cuál es el número mínimo de instalaciones intermedias que podemos poner para que no haya C_4 monocromáticos? Si tenemos 6 vértices, necesitaremos 3 instalaciones intermedias.

3.3.3. RECUPERACIÓN DE INFORMACIÓN: Supongamos que tenemos un **espacio de claves** $M = \{1, 2, \dots, m\}$, donde cada uno de los elementos recibe el nombre de **clave**. La idea es encontrar una manera de almacenar todos los n -subconjuntos de M en una tabla de forma que sea fácil saber si un elemento concreto está en un subconjunto concreto. Esto nos llevará a la generación de una estructura de **(m,n)-tabla**. Hay dos tipos básicos de (m,n)-tablas dependiendo de cómo se ordenen los n -subconjuntos:

- **Ordenada:** Si están ordenados de forma creciente.
- **Permutada:** Si están ordenados siguiendo alguna permutación de S_n .

Sin embargo, hay otras formas de crear (m,n)-tablas, que pueden ser más eficientes. Por ejemplo, si queremos crear (3,2)-tablas, podríamos crear, a parte de las arriba mencionadas, otra cíclica, en la que el primer elemento de la fila implique el segundo:

$$\{1, 2\} \rightarrow (1, 2); \{2, 3\} \rightarrow (2, 3); \{1, 3\} \rightarrow (3, 1).$$

De esta manera, para saber si un elemento está en algún subconjunto S , bastaría con preguntar cuál es el primer elemento de la fila. En cambio, en la tabla ordenada, habría que hacer dos preguntas, una por cada elemento (si el elemento 1 está en S):

$$\{1, 2\} \rightarrow (1, 2); \{2, 3\} \rightarrow (2, 3); \{1, 3\} \rightarrow (1, 3)$$

La complejidad computacional dependerá, por tanto, del tipo de tabla elegida y del tipo de preguntas formulada y vendrá dada por la cantidad de preguntas que hay que formular en el peor de los casos. Para las tablas ordenadas, la complejidad computacional es $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ si se realiza una búsqueda de árbol binario.

Denotaremos $f(m, n)$ a la menor complejidad de todas las concebibles para una (m, n) -tabla. Para ciertos casos, vamos a poder dar el valor exacto, pero para ello necesitaremos dos lemas previos:

Lema 3.4. *Dado n entero positivo, existe otro entero positivo $Y(n)$ tal que si $m \geq Y(n)$ y tenemos una (m, n) -tabla, entonces hay un conjunto K de $2n-1$ claves tal que las tablas correspondientes a los subconjuntos de n elementos de K forman una estructura de tabla permutada.*

Demostración. Tomemos $Y(n) = R(\overbrace{2n-1, \dots, 2n-1}^{n!}; n)$. Supongamos que $m \geq Y(n)$ y $n!$ -coloreamos los n -subconjuntos, en función de la permutación que se ha utilizado para guardarlos. Por la Teoría de Ramsey, habrá un $(2n-1)$ -subconjunto de M para el que todos los subconjuntos de n elementos estén guardados con la misma permutación en la tabla. \square

El valor para $Y(n)$ puede ser mejorado en algunos casos. Por ejemplo, si $n = 2$, entonces $Y(n) = 4$, como se puede comprobar fácilmente por el Principio del Palomar (observar que $R(3, 3) = 6$ es mayor).

Lema 3.5 (Chi-Chih Yao, 1979). *Si $m \geq 2n - 1$ y $n \geq 2$, entonces en una tabla de orden permutado se necesitan, a lo sumo $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ preguntas para saber si un elemento está en un subconjunto.*¹⁴

Teorema 3.5. *Para todo n , existe un número $Y(n)$ tal que, para todo $m \geq Y(n)$, $f(n, m) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$.*

Demostración. Para cualquier (m, n) -tabla, y cualquier modo de búsqueda, con $m \geq Y(n)$, sabemos que podemos encontrar un subconjunto K de M tal que está almacenado en forma de tabla permutada. Usando el Lema 3.5 recién expresado, en el peor de los casos, en este subconjunto, una búsqueda requerirá $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ preguntas. Por tanto, $f(n, m) \geq \lceil \log_2(n+1) \rceil$. Sin embargo, sabemos que si utilizamos una búsqueda de árbol binario en una tabla ordenada, entonces se necesitarán, a lo sumo $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ preguntas, lo que da la igualdad. \square

¹⁴La demostración se puede ver en el artículo *Should tables be sorted?*, de julio de 1979.

C: Otros horizontes

La teoría iniciada en 1928 por Frank P. Ramsey comienza estableciendo una versión infinita del Principio de Ramsey. Los resultados sobre progresiones que hemos visto en la sección 3.2 se pueden considerar versiones finitas, cuantitativas a la vista del enunciado de Erdős y Szekeres, del teorema de Bolzano, que afirma que en toda sucesión infinita de números reales existe una subsucesión monótona infinita. De hecho, el Teorema de Bolzano responde al contexto general de la llamada Teoría infinita de Ramsey [15, páginas 19-20] que hemos dejado sin tocar. Por otro lado, la Teoría de Ramsey finita, no se reduce al cálculo de cotas y números. La diversidad de formulaciones matemáticas de los Teoremas de tipo Ramsey, proporcionan múltiples aplicaciones que incluyen resultados en Teoría de Números, Topología, Teoría de Conjuntos, Lógica, Teoría de la Información y Computación Teórica. La llamada Teoría de Ramsey para grafos arranca con la Definición 3.1 que nos ha permitido ilustrar el diseño de redes de conmutación de paquetes. Los primeros capítulos de [19], tratan resultados centrales clásicos; los finales exploran la influencia que la Teoría de Ramsey tiene en otras disciplinas. En estas páginas tan solo hemos dado unas breves pinceladas que están lejos de abarcar el potencial de esta teoría.

Conclusiones

A lo largo de estas páginas, hemos podido vislumbrar unas breves notas sobre la Teoría de Ramsey, una teoría que, antes de iniciar este trabajo, me era completamente desconocida, pero que, tras la finalización del mismo, he de confesar que me ha cautivado. Por una parte, esto se debe a que se puede estudiar desde muchas ramas de las Matemáticas, como el Análisis, la Estadística, el Álgebra, la Combinatoria, la Matemática Discreta... y gracias a esto, al realizar el trabajo, he podido utilizar, y recordar, numerosos conceptos de cuerpos finitos, teoría de grafos, Estadística...

Pero lo que realmente me ha cautivado, y considero que es lo que hace esta teoría tan bella, es que aunque es bastante compleja, da soluciones elegantes y sencillas a problemas sencillos. El primer problema presentado, el “Party Problem”, o “Problema de la Fiesta” en español, es un simple ejercicio que se puede resolver por el Principio del Palomar en unas pocas líneas, pero que con la artillería de la Teoría de Ramsey se puede resolver en una sola línea: “ $R(3, 3) = 6$ ”. Y hablando del Principio del Palomar, el hecho de que aparezca como un corolario de esta teoría me parece sumamente elegante.

En definitiva, me parece que la Teoría de Ramsey es una teoría sumamente potente, que aún requiere mucho trabajo, sobre todo en el ámbito de los números de Ramsey, que puede simplificar problemas de manera elegante y sutil.

Anexos

A1: Nociones básicas de estructuras

Recordamos brevemente el concepto de grafo y nomenclatura básica e introducimos su generalización, el concepto de hipergrafo.

Un **grafo**¹⁵ G es un par (V, E) formado por un conjunto no vacío V y un conjunto (que puede ser vacío) de 2-subconjuntos de V . Usando la notación $[V]^2$ de la sección 1.2, tenemos que $E \subseteq [V]^2$. Recordamos que, si V tiene n elementos, el número total de elementos de $[V]^2$ es $\binom{n}{2}$.

Para un grafo dado $G = (V, E)$, los elementos de V se dicen **vértices** y los de E **aristas**. Dos vértices u y v (aristas e y f) se dicen **adyacentes** si el 2-conjunto $\{u, v\}$ es una arista (si $e \cap f \neq \emptyset$). El **grado de un vértice** es el número de vértices adyacentes con él. Un grafo se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.

Diremos que un grafo de n vértices es el **n -ésimo grafo completo** K_n , si es un grafo regular, de forma que cada vértice tiene grado $n - 1$. Así, K_n es un grafo simple en el que cada dos vértices distintos están conectados. El grafo K_n tiene exactamente $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Diremos que $G' = (V', E')$ es un **subgrafo de G** si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. La siguiente definición permite construir nuevos grafos usando grafos más simples:

Definición 3.2. *El **producto normal** de dos grafos, $G = (V_G, E_G)$ y $H = (V_H, E_H)$, es el grafo $\mathbf{G} \cdot \mathbf{H} = (V, E)$, cuyo conjunto de vértices es $V = V_G \times V_H$ y cuyo conjunto de aristas se establece en la forma $\{(a, b), (c, d)\} \in E$ si se cumple una de estas tres condiciones:*

- $\{a, c\} \in E_G$ y $\{b, d\} \in E_H$.
- $a = c$ y $\{b, d\} \in E_H$.

¹⁵Por la forma en que hemos definido las aristas, el concepto de grafo dado es el de grafo simple (sin aristas múltiples ni lazos) y no dirigido.

- $\{a, c\} \in E_G$ y $b = d$.

Un ejemplo de producto normal de grafos: $K_9 = \mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{K}_3$. De forma más general, $K_{n \cdot m} = \mathbf{K}_n \cdot \mathbf{K}_m$.

Dado un grafo $G = (V, E)$, a cualquier aplicación $\chi : E \rightarrow [r]$ se le dice **r -coloración** de las aristas de G . Para una coloración de aristas χ de G , un subgrafo G' de G se dice **monocromático** si $\chi_{G'}$ es la identidad. Enumerando los vértices del grafo completo K_n con las etiquetas $\{1, \dots, n\}$, el conjunto de aristas de K_n es $[n]^2$. Por tanto, las r -coloraciones de aristas de K_n son exactamente las del conjunto $[n]^2$.

Definición 3.3. *Dos r -coloraciones de las aristas de K_n de esquemas coloreados \mathcal{G} y \mathcal{H} se dicen **isomorfas** si existe una biyección f de los vértices del esquema \mathcal{G} en los vértices del esquema \mathcal{H} tal que, para todo par de vértices c, y de \mathcal{G} , si la arista $\{x, y\}$ tiene color $i=1, 2, \dots, r$, la arista $\{f(x), f(y)\}$ de \mathcal{H} tiene color $\sigma(i)$, siendo σ una permutación de $\{1, \dots, r\}$.*

Un hipergrafo es la generalización de un grafo en la que, en vez de tomar 2-subconjuntos de vértices para definir aristas, se consideran subconjuntos arbitrarios de vértices.

Definición 3.4. *un **hipergrafo** es un par (V, F) formado por un conjunto no vacío de vértices V y el conjunto de **hiperaristas** $F \subseteq P(V) - \{\emptyset\}$. El hipergrafo (V, F) se dice **k -uniforme** si todas sus hiperaristas están formadas por k vértices, esto es, son k -subconjuntos de V .*

De la definición previa, tenemos que los grafos son exactamente los hipergrafos 2-uniformes. Veamos ahora otros ejemplos.

Ejemplo 3.1. *Para cualquier cuerpo \mathbb{F} , el plano proyectivo $\mathbb{P}^2\mathbb{F}$ se define como el plano cuyos puntos son los subespacios 1-dimensionales del espacio vectorial F^3 y en el que las rectas son los subespacios 2-dimensionales. Si \mathbb{F}_q es un cuerpo finito de q elementos, el número de puntos y de rectas del plano proyectivo¹⁶ es $q^2 + q + 1$ y cada recta está formada exactamente por $q + 1$ puntos. Si tomamos el cuerpo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, llegamos al llamado **plano de Fano** $\mathbb{P}^2\mathbb{F}_2$. La representación gráfica de sus 7 puntos y 7 rectas proporcionan el 3-hipergrafo de 7 hiperaristas que aparece en la Figura 3.3.*

¹⁶Cada subespacio 1-dimensional está determinado de forma única por un vector del siguiente tipo: $(1, b, c)$, $(a, 1, c)$ ó $(a, b, 1)$.

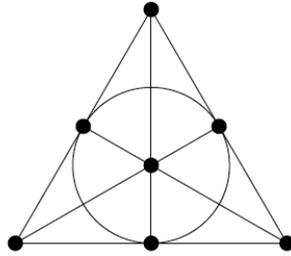


Figura 3.3: Plano de Fano

Un **grupo** G es un conjunto con un elemento distinguido e , llamado elemento neutro, en el que hay definida una operación binaria $a \star b$ (para todo $a, b, c \in G$), que es asociativa, luego

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c).$$

Además \star debe cumplir que $a \star e = a = e \star a$ y que para cada a existe un $x \in G$ tal que $a \star x = e = x \star a$, x se dice \star -inverso de a . Un **subgrupo** H de G es un subconjunto tal que $e \in H$, $a \star b \in H$ si $a, b \in H$ y que contiene a los \star -inversos de sus elementos.

Dado un grupo G y un subgrupo H , los conjuntos de la forma

$$a \star H = \{a \star y : y \in H\}, \tag{3.1}$$

se dicen **clases a derecha módulo H** .

Propiedades clases a derecha 3.1. *Las clases a derecha módulo un subgrupo H satisfacen las siguientes propiedades:*

- $a \star H$ y H tienen el mismo cardinal.
- Dos clases o son iguales o son disjuntas.
- Las clases proporcionan una partición de G , luego $G = \cup_{a \in G} a \star H$.

Demostración. La primera propiedad es inmediata ya que $b \mapsto a \star b$ define una biyección de H en $a \star H$. La segunda y tercera son consecuencia de que $a \sim b$ sii $a \in b \star H$ define una relación de equivalencia en G . \square

El número de clases distintas se conoce como **índice del subgrupo H** en el grupo G y se denota en la forma $[G : H]$. Si G es un grupo finito, el *Teorema de Lagrange* establece que:

$$|G| = [G : H] \cdot |H| \tag{3.2}$$

Por tanto índice y orden de un subgrupo son divisores del orden del grupo.

Un grupo G se dice **cíclico** si todos sus elementos son potencia de uno dado llamado **generador**. En este caso, denotando $a^k = a \star \cdots \star a$ k -veces si $k \geq 1$, $a^0 = e$ y si $k < 0$, $a^k = x^{-k}$ siendo x el inverso de a , tenemos que:

$$G = \langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

El grupo aditivo de los enteros $(\mathbb{Z}, +)$ es, salvo isomorfismos, el unico grupo cíclico no finito. Si G es cíclico finito con exactamente n elementos, G se dice **cíclico de orden** n , y lo escribiremos en la forma C_n . Este grupo es isomorfo al grupo aditivo de enteros módulo n , $(\mathbb{Z}_n, +)$ ¹⁷, generado por $\bar{1}$ (la asignación $a^k \mapsto k\bar{1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ es un isomorfismo). Del isomorfismo tenemos que:

$$C_n = \langle a \rangle = \{a^0 = e = a^n, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}.$$

Observamos que $a^n = e$ y que $a^i \neq a^j$ si $0 \leq i < j \leq n-1$ y n se dice **orden del elemento** a y se denota como $o(a)$ ¹⁸. Los subgrupos de C_n son cíclicos y hay exactamente uno por cada divisor de n . El único subgrupo de orden d , si d divide a n es:

$$H(d) = \langle a^{\frac{n}{d}} \rangle = \{e, a^{\frac{n}{d}}, a^{\frac{2n}{d}}, \dots, a^{\frac{(d-1)n}{d}}\}. \quad (3.3)$$

Los grupos abelianos finitos son suma directa de grupos aditivos cíclicos de *enteros modulares* $(\mathbb{Z}_n, +)$, con $n \geq 2$. Por ejemplo, salvo isomorfismos, solamente hay un grupo abeliano de orden 6 que es $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ y exactamente tres grupos abelianos de orden 8: \mathbb{Z}_8 , $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Entre los grupos abelianos destacamos los grupos aditivos $(K, +)$ y los multiplicativos (K^*, \cdot) , $K^* = K - \{0\}$, siendo K un cuerpo arbitrario con operaciones suma $(a+b)$ y producto $(a \cdot b)$; los elementos neutros los denotemos como 0 (grupo aditivo) y 1 (grupo multiplicativo).

Si el cuerpo K es finito con exactamente q elementos, lo denotaremos en la forma \mathbb{F}_q . Observamos que $k \cdot 1 \in \mathbb{F}_q$ para toda $k \in \mathbb{Z}$, luego $k \cdot 1 = 0$ para algun entero positivo k dado que el cuerpo es finito. Esto nos dice que la característica de \mathbb{F}_q es positiva. De hecho es un primo $p \geq 2$ y $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{F}_q$, siendo \mathbb{Z}_p el cuerpo primo (menor subcuerpo) de \mathbb{F}_q . Este último contenido permite definir una estructura natural de \mathbb{Z}_p -espacio vectorial en \mathbb{F}_q . De hecho, \mathbb{F}_q es \mathbb{Z}_p -isomorfo al \mathbb{Z}_p -espacio vectorial \mathbb{Z}_p^k , de donde el número de elementos del cuerpo es exactamente $q = p^k$. Salvo isomorfismos, para cada p primo y $k \geq$

¹⁷La operación binaria \star es la suma, el neutro es $e = \bar{0}$ y los inversos $-a$ se dicen opuestos. Además, a^k es la suma k veces del elemento a se representa como ka .

¹⁸Menor natural $n \geq 1$ de modo que $a^n = e$. Si $o(a) = n$, entonces $o(a^m) = \frac{n}{m.c.d.(n,m)}$.

1 existe un único cuerpo finito de p^k elementos. Este cuerpo aparece tomando cualquier polinomio irreducible $q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ de grado k y construyendo el anillo cociente $\mathbb{Z}_p/\langle q(x) \rangle$ ¹⁹.

Si $k \geq 2$, el grupo aditivo $(\mathbb{F}_q, +)$ no es cíclico. Por contra, el grupo multiplicativo \mathbb{F}_q^* es cíclico de orden $p^k - 1$, luego $a^{p^k-1} = 1$ para todo $0 \neq a \in \mathbb{F}_q$. Por tanto todo elemento de \mathbb{F}_q satisface la ecuación $a^{p^k} = a$, esto es, los elementos son raíces del polinomio $x^{p^k} - x$, todas cuyas raíces son simples. De hecho, \mathbb{F}_q es exactamente el conjunto de las p^k raíces de $x^{p^k} - x$. Se puede probar además que este cuerpo contiene²⁰ a las raíces de cualquier polinomio irreducible sobre $\mathbb{Z}_p[x]$ de grado d divisor de k .

Para cualquier irreducible mónico $q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ grado k , si tomamos a una cualquiera de sus raíces (todas están en \mathbb{F}_q), tenemos que el conjunto $\{1, a, \dots, a^{k-1}\}$ es una \mathbb{Z}_p -base de \mathbb{F}_q , luego

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}_p(a) = \{t_0 \cdot 1 + t_1 \cdot a + \dots + t_{k-1} \cdot a^{k-1} : t_i \in \mathbb{Z}_p\}.$$

El polinomio $q(x)$ se dice **polinomio mínimo** de a y se tiene que $q(x)$ divide a $x^{p^k-1} - 1$. El elemento a se dice **elemento primitivo** de \mathbb{F}_q . Si $q(x)$ cumple que el menor natural n tal que $q(x)$ divide divide a $x^n - 1$ es $n = p^k - 1$, el polinomio $q(x)$ se dice **polinomio primitivo** y cualquier raíz a de $q(x)$ cumple que $a^r \neq 1$ para todo $r < p^k - 1$. Así, las raíces de los polinomios primitivos son generadores del grupo multiplicativo ya que su orden es exactamente igual a $p^k - 1$, el número de elementos de \mathbb{F}_q^* .

En la sección 1.2 hicimos notar que colorear un conjunto con r colores es equivalente a realizar una partición del conjunto en r subconjuntos. Veamos cómo colorear grafos usando cuerpos finitos y ciertos subconjuntos de restos de potencias.

Definición 3.5. Dado $m \geq 2$, un elemento b del grupo multiplicativo del cuerpo finito $\mathbb{F}_{p^k} = GF(p^k)$ se dice resto de potencia²¹ m , si existe un elemento $g \in GF^*(p^k)$ tal que $b = g^m$.

Observamos que, si a es un generador $\mathbb{F}_{p^k}^*$, el conjunto de los restos de potencia m se puede expresar en la forma,

$$H_m(p^k) = \{g^m : g \in \mathbb{F}_{p^k}^*\} = \{(a^k)^m : k \in \mathbb{Z}\} = \langle a^m \rangle. \quad (3.4)$$

Esto es, $H_m(p^k)$ es el subgrupo de $\mathbb{F}_{p^k}^*$ generado por el elemento a^m y tenemos:

¹⁹El cuerpo finito de p^k elementos se conoce como **cuerpo de Galois** y suele denotarse como $GF(p^k)$.

²⁰De hecho, el polinomio $x^{p^k} - x$ factoriza como producto de todos los polinomios mónicos e irreducibles sobre $\mathbb{Z}_p[x]$ cuyo grado sea un divisor de k .

²¹Los restos con $m = 2, 3$ se dicen cuadráticos y cúbicos.

Proposición 3.2. Para cualquier cuerpo finito, \mathbb{F}_q , $q = p^k$, el conjunto $H_m(q)$ de todos los restos de potencia m es un subgrupo del grupo multiplicativo \mathbb{F}_q^* generado por a^m , donde a es cualquier generador de \mathbb{F}_q^* . En particular:

$$(a) |H_m(q)| = \frac{q-1}{m.c.d.(m, q-1)}$$

$$(b) [G : H_m(q)] = m.c.d.(m, q-1)$$

(c) Si $p = 2$ o p primo impar y $2m \mid q-1$, entonces $-1 \in H$.

(d) Si $m = aq + r$, con $0 \leq r < q$, entonces $H_m(q) = H_r(q)$. □

Demostración. Las afirmaciones (a) y (b) se siguen de la descripción previa del subgrupo. La afirmación (c) para p primo impar con $2m \mid q$ nos dice que $x^{2m} - 1$ divide a $x^q - 1$ que divide a $x^{p^k} - x$ y como \mathbb{F}_q es exactamente el conjunto formado por todas las raíces de $x^{p^k} - x$ y $x^{2m} - 1 = (x^m - 1)(x^m + 1)$, $x^m + 1$ tiene todas sus raíces en el cuerpo, lo que prueba la afirmación. El caso $p = 2$ es inmediato pues $-1 = 1$. Psra probar (d), basta con aplicar la definición. □

A2: Números de Ramsey actualizados

Las siguientes tablas aparecen en [22, versión 15]. En cada celda, si hay un único valor, hará referencia al valor exacto del número de Ramsey, sin embargo, si hay dos valores, el superior se deberá a la cota mayor y el inferior a la pequeña. En primer lugar, damos una tabla para los números de Ramsey bicolor $R(k,l)$.

k	1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3		6	9	14	18	23	28	36	42	50	59	68	77	87
									40	47	53	60	67	74
4			18	25	41	61	84	115	149	191	238	291	349	417
					36	49	59	73	92	102	128	138	147	155
5				48	87	143	216	316	442	633	848	1138	1461	1878
				43	58	80	101	133	149	183	203	233	267	269
6					165	298	495	780	1171	1804	2566	3703	5033	6911
					102	115	134	183	204	256	294	347	—	401
7						540	1031	1713	2826	4553	6954	10578	15263	22112
						205	217	252	292	405	417	511	—	—
8							1870	3583	6090	10630	16944	27485	41525	63609
							282	329	343	—	—	817	—	865
9								6588	12677	22325	38832	64864		
								565	581	—	—	—		
10									23556	45881	81123			—
									798	—	—			1265

Para conocer cómo se han obtenido las diversas cotas, redirigimos al lector a [22]. Vamos a dar una segunda, con los valores y cotas de los números de la forma $R(m^r)$ (El único valor conocido es el de $R(3,3,3)$, para el resto damos cotas inferiores):

m	3	4	5	6	7	8	9
r							
3	17	128	417	1070	3214	6079	13761
4	51	634	3049	15202	62017		
5	162	3416	26912				
6	538						
7	1682						

A3: Tablas de Coloreado

1																
2	v															
3	a	v														
4	a	a	v													
5	v	a	a	v												
6	a	v	r	r	v											
7	v	a	v	r	r	a										
8	r	v	a	v	r	r	a									
9	r	r	v	a	v	r	r	a								
10	v	r	r	v	a	a	r	r	a							
11	v	r	a	a	r	r	a	v	v	a						
12	r	v	r	a	a	a	r	a	v	v	r					
13	a	r	v	r	a	v	a	r	a	v	v	r				
14	a	a	r	v	r	v	v	a	r	a	v	v	r			
15	r	a	a	r	v	a	v	v	a	r	r	v	v	r		
16	r	r	r	r	r	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Tabla 3.1: Coloración Greenwood-Gleason y Sun-Cohen

1																
2	v															
3	a	a														
4	a	v	v													
5	v	a	v	a												
6	a	v	r	r	v											
7	v	a	v	r	r	a										
8	r	v	v	a	r	r	a									
9	r	r	a	v	v	r	r	a								
10	v	r	r	v	a	a	r	r	a							
11	v	r	a	a	r	r	a	v	v	a						
12	r	a	r	a	v	a	r	v	a	v	r					
13	a	r	v	r	a	v	a	r	a	v	v	r				
14	a	a	r	v	r	v	v	a	r	a	v	v	r			
15	r	v	a	r	a	a	v	a	v	r	r	v	v	r		
16	r	r	r	r	r	v	v	v	v	v	a	a	a	a	a	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Tabla 3.2: Coloración de Kalbfleissch-James y Whitehead

A4: Solución Oficial Problemas IMO

Presentamos los enunciados originales y soluciones no “a la Ramsey” de los Problemas de olimpiadas resueltos en la sección 3.1. La del segundo problema es la oficial.

1964/4: Seventeen people correspond by mail with one another - each one with all the rest. In their letters only three different topics are discussed. Each pair of correspondents deals with only one of these topics. Prove that there are at least three people who write to each other about the same topic.

Para resolverlo, en primer lugar se da el siguiente lema:

Consider a complete graph with 6 vertices colored with 2 colors. There exists a monochromatic triangle.

Cuya demostración viene dada de la siguiente manera:

Consider one vertex and all connections leading out from it. Call it V_1 . It has 5 edges coming out from it. By the Pigeonhole Principle, there are at least 3 of the same color. Call this color red. Call those vertices V_2 , V_3 and V_4 . If any of the segments V_2V_3 , V_2V_4 , or V_3V_4 are red, then we have a monochromatic triangle with vertices V_1 and the other two that are also red. If they are all the other color, then we have a monochromatic triangle with vertices V_2, V_3 , and V_4 .

Una vez probado el lema, podemos resolver el problema:

Represent these people as vertices on a connected graph with 17 vertices and colored with 3 colors, one corresponding with each topic. So this problem is reduced to showing that on a connected graph with 17 vertices and colored with three colors, there exists some monochromatic triangle. Look at an arbitrary vertex. Call it V_1 . Look at the 16 other vertices that it is connected to. By the Pigeonhole Principle, there are at least 6 vertices connected to V_1 that are all one color. Call this color 1. If any of the connections inbetween these six vertices are in color 1, then we are done. If none of them are color 1, we know that that there are only 2 colors in those 6 vertices. By Lemma 1, we know that there is a monochromatic triangle in those 6 vertices. So we are done.

1978/6: An international society has its members from six different countries. The list of members contains 1978 names, numbered 1, 2, ..., 1978. Prove that there is at least one member whose number is the sum of the numbers of two members from his own country, or twice as large as the number of one member from his own country.

La solución, basada en diferencias, es la siguiente:

The trick is to use differences. At least $6 \cdot 329 = 1974$, so at least 330 members come from the same country, call it C1. Let their numbers be $a_1 < a_2 < \dots < a_{330}$. Now take the 329 differences $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_{330} - a_1$. If any of them are in C1, then we are home, so suppose they are all in the other five countries. At least 66 must come from the same country, call it C2. Write the 66 as $b_1 < b_2 < \dots < b_{66}$. Now form the 65 differences $b_2 - b_1, b_3 - b_1, \dots, b_{66} - b_1$. If any of them are in C2, then we are home. But each difference equals the difference of two of the original is, so if it is in C1 we are also home. So suppose they are all in the other four countries. At least 17 must come from the same country, call it C3. Write the 17 as $c_1 < c_2 < \dots < c_{17}$. Now form the 16 differences $c_2 - c_1, c_3 - c_1, \dots, c_{17} - c_1$. If any of them are in C3, we are home. Each difference equals the difference of two bis, so if any of them are in C2 we are home. [For example, consider $c_i - c_1$. Suppose $c_i = b_n - b_1$ and $c_1 = b_m - b_1$, then $c_i - c_1 = b_n - b_m$, as claimed.] Each difference also equals the difference of two ais, so if any of them are in C1, we are also home. [For example, consider $c_i - c_1$, as before. Suppose $b_n = a_j - a_1, b_m = a_k - a_1$, then $c_i - c_1 = b_n - b_m = a_j - a_k$, as claimed.] So suppose they are all in the other three countries. At least 6 must come from the same country, call it C4. We look at the 5 differences and conclude in the same way that at least 3 must come from C5. Now the 2 differences must both be in C6 and their difference must be in one of the C1, ..., C6 giving us the required sum.

Bibliografía

- [1] Alexander Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.
- [2] C. Laywine and John Penn Mayberry, *A simple construction giving the two non-isomorphic triangle-free 3-colored K_{16} 's*, Journal of Combinatorial Theory (1988), 120–124.
- [3] Claude Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, Vol. 6, Elsevier, 1973.
- [4] David Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen mit ganzzahligen Coefficienten*, J. Reine Angew. Math. **110** (1892), 104–129.
- [5] Earl Glen Whitehead Jr., *Algebraic structure of chromatic graphs associated with the Ramsey number $N(3,3,3;2)$* , Discrete Mathematics (1971), 113–114.
- [6] Emilio Fernández Moral and Luz Roncal Gómez, *Los números de Ramsey y el álgebra*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **15** (2012), no. 4, 651–674.
- [7] Fan Rong King Chung, *On the Ramsey number $N(3,3,\dots;2)$* , Discrete Mathematics **5** (1973), 317–321.
- [8] Frank Plumpton Ramsey, *On a Problem of Formal Logic*, Proceedings of the London Mathematical Society (1930), 264–286.
- [9] Fred Stephen Roberts, *Applications of Ramsey theory*, Discrete Applied Mathematics, North-Holland **9** (1984), 251–261.
- [10] Gary Chartrand and Seymour Schuster, *On the Existence of Specified Cycles in Complementary Graphs* (1971).
- [11] Hugo S. Sun and M. E. Cohen, *An easy proof of the Greenwood-Gleason evaluation of the Ramsey number $R(3,3,3)$* , Fibonacci Quarterly **22** (1984), 235–238.
- [12] Jacob Fox, *Lecture 6: Ramsey theory: continued* (2009), 1–3.
- [13] James G. Kalbfleisch and Ralph Gordon Stanton, *On the Maximal Triangle-free Edge-Chromatic Graphs in Three Colors*, Journal of Combinatorial Theory (1968), 9–20.
- [14] Norman Do, *Party problems and Ramsey theory*, Austral. Math. Soc. Gaz. **33** (2006), no. 5, 306–312.
- [15] Pablo Fernández Gallardo and José Luis Fernández Pérez, *“El desorden absoluto es imposible”: la Teoría de Ramsey*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **2** (1999), 263–289.

- [16] Paul Erdős and George Szekeres, *A combinatorial problem in geometry*, *Compositio Mathematica* **2** (1935), 463–470.
- [17] Ralph J. Faudree and Richard H. Schelp, *All Ramsey Numbers for Cycles in Graphs* (1973).
- [18] Robert E. Greenwood and Andrew Mattei Gleason, *Combinatorial relations and chromatic graphs*, *Canadian Journal of Mathematics* **7** (1955), 1–7.
- [19] Ronald Lewis Graham, Bruce Lee Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, 1990.
- [20] Ronald Lewis Graham and Joel H. Spencer, *Ramsey Theory*, *Scientific American* (1990), 112–117.
- [21] Sriraman Sridharan and R. Balakrishnan, *Foundations of discrete mathematics with algorithms and programming*, CRC Press, 2019.
- [22] Stanislaw P. Radziszowski, *Small Ramsey Numbers*, 1994.
- [23] Tibor Szabó, *Hypergraph Ramsey Theory* (2018), 1–7.
- [24] Von Issai Schur, *Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m \pmod{p}$* , *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (1916), 114–117.

La bibliografía principal para este trabajo, viene dada por [1, 5–7, 9, 11, 13, 15, 18, 19]. Algunos resultados han sido extraídos de [2, 3, 10, 12, 14, 17, 20, 23]. El resto de la bibliografía se fundamentan en mostrar las obras originales, o de apoyo en determinados temas.