



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Cálculo estocástico

Autor/es

JOSÉ ANTONIO SANTO ARGAIZ

Director/es

JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ JIMÉNEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20



Cálculo estocástico, de JOSÉ ANTONIO SANTO ARGAIZ
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los
titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Cálculo estocástico

Realizado por:

José Antonio Santo Argaiz

Tutelado por:

José Manuel Gutiérrez Jiménez

9 de septiembre de 2020

Resumen

En este trabajo quiero plasmar mi interés por la matemática financiera y buscar conceptos y conocimientos matemáticos que pueden ser útiles para profundizar y utilizar en las finanzas.

Para ello, se estudiarán nociones y técnicas básicas para comprender y manejar modelos estocásticos. Se analizarán el movimiento browniano, los procesos de Wiener y sus aplicaciones que estarán presentes a lo largo del trabajo.

A su vez, ampliaremos y profundizaremos sobre martingalas, fórmulas de Itô o integrales estocásticas para poder conocer y analizar el modelo de Black-Scholes, muy útil en matemática financiera. El objetivo es contruir herramientas y propiedades para tanto a lo largo del trabajo como en el último capítulo ver sus aplicaciones en las finanzas e incluso otras materias.

Así, a partir de una base donde la probabilidad y la teoría de la medida juegan un papel fundamental, se alcanzan los conocimientos teóricos y prácticos que permiten entender las aplicaciones de dichos modelos a la matemática financiera y a otras ramas de las matemáticas.

Abstract

In this work I want to capture my interest in financial mathematics and look for mathematical concepts and knowledge that can be useful to deepen and use in finance.

To do this, basic notions and techniques will be studied to understand and handle stochastic models. For instance, Brownian motion, Wiener processes and their applications will be present throughout the work and they will be analyzed.

At the same time, we will expand and deepen on martingales, Itô formulas, stochastic integrals to be able to understand and analyze in depth the Black-Scholes model, very useful in Financial Mathematics. The objective is to build tools and properties for both throughout the work and in the last chapter to see their applications in finance and even other subjects.

Thus, starting from a base where Probability and the Measure Theory play a fundamental role, theoretical and practical knowledge is reached that allows us to understand the applications of these models to Financial Mathematics and other branches of Mathematics.

Introducción

Cualquier persona que piensa en las finanzas, le viene a la cabeza que es un conjunto de actividades que tienen relación con el dinero, economía, empresas... Pero la verdad es que muchos modelos matemáticos son utilizados en ella y cada vez hay más matemáticos que son buscados en ese mundo. Algunos campos de las matemáticas que son utilizados en las finanzas son: elementos de probabilidad, estadística, análisis y los que vamos a profundizar en este trabajo, **los modelos estocásticos**.

El interés por el cálculo estocástico ha ido cambiando su público a lo largo de estos últimos años. Cada vez se ha visto que es más importante los conocimientos matemáticos en este ámbito para un profundo desarrollo y aplicación en la vida real de éste.

Lo primero que vamos a hacer es familiarizarnos con elementos que son útiles para el análisis y comprensión de los **procesos estocásticos**. En cada capítulo estudiaremos diferentes nociones que nos ayudarán y nos pondrán en contexto para utilizarlas en capítulos posteriores. De esta forma aprenderemos de forma progresiva donde lo anterior nos sea valioso para poder aplicar lo estudiado con ejemplos que nos muestren la utilidad de cada capítulo. Todo ello para llegar al último capítulo donde buscaremos aplicaciones financieras a los conocimientos adquiridos en los anteriores.

En el capítulo 1 introducimos nociones de probabilidad que nos darán la base de los procesos estocásticos y poder construir su definición y clasificarlos de forma correcta. También se deja claro el carácter aleatorio de éstos, lo cual se encuentra presente a lo largo del trabajo y es, bajo mi punto de vista, lo que los hace interesantes e impredecibles. Además es donde las matemáticas, a partir de grandes estudiosos a lo largo de la historia, han logrado regir algunos de esos procesos.

En el capítulo 2, introduciremos y construiremos de forma explícita el movimiento Browniano o proceso de Wiener que tendrá gran importancia a lo largo del trabajo. También comenzamos a dejarnos ver el interés por las finanzas y la economía y simulando estos procesos tanto con *Wolfram Mathematica* como con *MATLAB*. A partir de ahí, todas las simulaciones las he ido haciendo en *MATLAB* debido a que me he querido interesar por otros lenguajes no introducidos en la carrera.

En el capítulo 3 estudiamos a fondo las Martingalas, viendo que son ricas en propiedades

y poniendo algún ejemplo sobre ellas. En el capítulo 4 conseguimos introducir cómo realizar cálculos con estos procesos a través de la integral de Itô, la fórmula de Itô y las ecuaciones diferenciales estocásticas. Todos estos conceptos serán claves en el mundo bursátil y su conocimiento es muy importante en el último capítulo, donde expondremos unos pocos ejemplos financieros relevantes en los que se pone de manifiesto lo aprendido en los capítulos anteriores.

Este trabajo puede ser complementado o extendido en cada capítulo ya que este campo es inmenso y existen numerosas leyes, teoremas, definiciones o propiedades que no se han enunciado pero que pueden venirnos de gran ayuda si queremos profundizar en este tema. He elegido las más relevantes para conseguir un trabajo útil, productivo y valiosos, con fundamento matemático en las finanzas. De todas formas, existe una amplia Bibliografía donde cualquier curioso sobre la materia puede aprender y analizar muchos conocimientos más en cualquiera de los libros.

Por último, me gustaría dar las gracias a mi tutor José Manuel Gutiérrez, por darme la oportunidad de quitarme el “gusanillo” sobre asuntos de este tema que para mí siempre han sido de gran interés, además de estar siempre ahí apoyándome y dándome consejos.

Índice general

1. Nociones de probabilidad y procesos estocásticos	1
1.1. Experimento aleatorio y definiciones	1
1.2. Probabilidad y sus propiedades	3
1.3. Variable Aleatoria	5
1.4. Introducción de los Procesos Estocásticos	7
1.5. Clasificación de Procesos Estocásticos	8
1.6. Ejemplos de procesos estocásticos	12
2. Movimiento browniano y aplicaciones	15
2.1. Introducción al proceso de Wiener	16
2.2. Construcción del proceso de Wiener	19
2.3. Medida de Wiener	24
2.4. Movimiento Browniano en economía y teoría de la ruina	26
2.5. Simulación del proceso de Wiener	28
3. Martingalas	35
3.1. Introducción a martingalas	35
3.2. Propiedades y resultados de las martingalas	39
3.3. Ejemplos de Martingalas	46
4. Cálculo estocástico: teoría de Itô	51
4.1. Integral de Itô	51
4.2. Fórmula de Itô	56
4.3. El Teorema de Girsanov	59
4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas	60
5. Aplicaciones a las finanzas	63
5.1. El modelo Black-Scholes	63
5.2. Movimiento Browniano Geométrico	66
5.3. Ejemplos del Teorema de Girsanov	70

Capítulo 1

Nociones de probabilidad y procesos estocásticos

El hecho de haber cursado diferentes asignaturas en la carrera de matemáticas en la Universidad de La Rioja de diferentes campos, ha hecho que me causara interés investigar sobre estas nociones. Todo las asignaturas relacionadas con probabilidad, estadística, modelos y análisis han causado en mí intriga por el hecho de poder conseguir resultados que sean capaces de predecir un comportamiento.

En este capítulo vamos a dejar claro qué es un proceso estocástico y cómo se construye. Vamos a descubrir su naturaleza aleatoria, lo que nos va a llevar a tener que definir diferentes conceptos probabilísticos que nos ayudarán a comprender de una forma más simple en qué consisten estos procesos. A su vez, también entenderemos por qué la probabilidad juega un papel importante ya que se necesita un espacio de probabilidad para poder hablar de procesos estocásticos. Para este tema me he basado principalmente en [6], [14],[22] y [27].

1.1. Experimento aleatorio y definiciones

Al preguntarnos cuánto mide la hipotenusa de un cuadrado rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros, sabemos responder gracias al *teorema de Pitágoras*, va a medir 5 centímetros. Sin embargo, si nos preguntan en un casino cuál es el próximo número que va a salir en la ruleta, ahí no sabremos responder de forma tan contundente. Esto es debido a que nos encontramos ante dos sucesos muy diferentes.

- El suceso de la hipotenusa es **determinista**, es decir, la relación causa-efecto se conoce en su totalidad. Esto es debido a que conocemos la relación $h^2 = c_1^2 + c_2^2$, en nuestro ejemplo deducimos que, $5^2 = 4^2 + 3^2$.

- Por otra parte, el número de la ruleta es un suceso **aleatorio**, esto es así porque a pesar de repetir el experimento con las mismas condiciones iniciales no garantizamos el mismo resultado, el número de la ruleta puede variar.

Sucesos semejantes al primero son los que a partir de experimentos o demostraciones obtenemos una ecuación, los denominamos *modelos matemáticos*. La Teoría de la Probabilidad estudia la obtención de *modelos aleatorios o estocásticos* mediante los cuales podremos definir, en términos de probabilidad, el comportamiento de los sucesos aleatorios como nuestro segundo caso.

Al hablar de **aleatoriedad** nos viene a la cabeza experimentos donde un determinado suceso ocurre un número determinado de veces, donde su naturaleza aleatoria no nos permite conocer con qué *frecuencia* ocurrirá dicho suceso. Algunos experimentos que nos vienen a la cabeza son: el resultado de tirar un dado, apostar al ganador de una carrera de coches o la variación del precio de una acción... Estos experimentos se rigen al estudiar y construir *modelos probabilísticos*, de donde podemos sacar en común un conjunto de definiciones que nos van a ser útiles:

Definición 1.1 (Experimento). *Procedimiento que nos proporciona un conjunto de resultados posibles. Un experimento aleatorio se trata de repetir un fenómeno con carácter aleatorio con el fin de extraer conclusiones de su comportamiento.*

Definición 1.2 (Espacio muestral). *El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, se denota por Ω . Un resultado particular se suele denotar por ω .*

Definición 1.3 (Suceso). *Es un subconjunto del espacio muestral Ω . Existen diferentes tipos de sucesos. Uno de ellos es el subconjunto Ω que recibe el nombre de **suceso seguro** y su complementario $\Omega^c = \emptyset$ que recibe el nombre de **suceso imposible**.*

Definición 1.4 (σ -álgebra de conjuntos). *Una familia de conjuntos \mathcal{F} definida sobre Ω se llama σ -álgebra, si satisface:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$

La σ -álgebra de conjuntos más grande es la familia de las partes de Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$ que como vemos cumple con las condiciones de la definición.

Ahora vamos a mostrar un experimento a modo de ejemplo para ver qué es en cada caso.

Ejemplo 1.1. *El experimento consiste en obtener el número al lanzar un dado. El espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. De aquí podemos tener múltiples sucesos:*

$$A = \text{“Sacar par”} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A^c = \text{“Sacar impar”} = \{1, 3, 5\}$$

Vemos que $A \cup A^c = \Omega$, ambos son sucesos complementarios y su unión forman el suceso seguro. Un suceso elemental puede ser $B = \{1\}$.

Otro ejemplo más acorde a la temática que queremos llegar en nuestro trabajo es jugar en bolsa donde $\Omega = \{G, P\}$, $G = \text{“Ganar dinero”}$ y $P = \text{“Perder dinero”}$.

1.2. Probabilidad y sus propiedades

La noción de probabilidad desde sus orígenes ha estado ligado con los juegos de azar, es por ello, por lo que la probabilidad ha aparecido a lo largo de la historia. Desde tiempos remotos, se han hecho numerosos intentos para formalizarla y conseguir la definición de probabilidad. El interés de estas definiciones permitió y concluyó con la definitiva definición axiomática de Kolmogorov en 1933. Algunas otras que han tenido bastante relevancia durante el tiempo son:

- **Clásica (Fórmula de Laplace):** la más antigua, se basa en el juego de azar. La probabilidad se define como el cociente entre los casos favorables y los casos posibles. Es decir, si tenemos un espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ con n casos posibles igual de probables, la probabilidad de un suceso A con m de estos resultados es de la forma:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Esta fórmula es llamada *fórmula de Laplace*, fue propuesta a finales del siglo XVIII. Inconveniente: ¿Qué pasa si todos los resultados de un experimento aleatorio no son equiprobables o Ω es infinito?

- **Frecuencialista o empírica:** La probabilidad de un suceso se define como el límite de la frecuencia relativa de ocurrencias del suceso. Ocurre cuando el experimento es capaz de repetirse en las mismas condiciones infinitas veces. Inconveniente: ¿Qué pasa con los experimentos que solo se pueden repetir en las mismas condiciones una vez o varias veces? ¿Cuál es el número de veces que hay que repetir un experimento?

- **Axiomática:** Engloba a los anteriores y se soslayan los problemas que antes hemos mencionado. Es la que vamos a utilizar y la debemos a Kolmogorov.

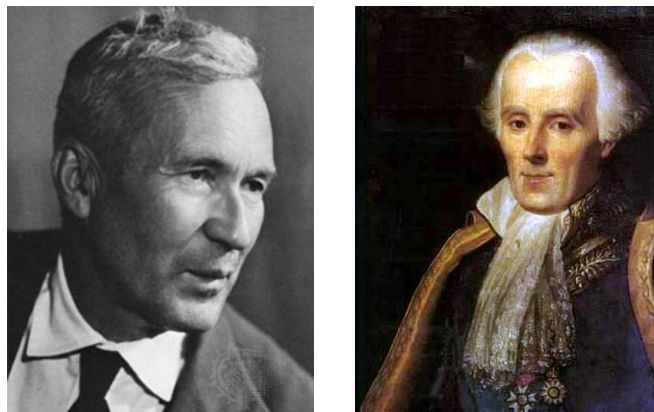


Figura 1.1: Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) y Pierre-Simon Laplace (1749-1897).

Ya hemos visto que la naturaleza aleatoria de los experimentos nos hace difícil pronosticar el resultado al llevarlos a cabo. Sin embargo, nos gustaría vaticinar cada vez que se realiza el experimento si el resultado se encuentra en cada suceso o no. Es por eso que, la Probabilidad se pregunta, ¿cuál es la posibilidad de que tenga lugar cada uno de los sucesos? Para ello, necesitamos un elemento nuevo, una función de conjunto, P . Esta función asigna a cada suceso un valor numérico que expresa si existe una *probabilidad o posibilidad* menor o mayor de que ocurra al producirse el experimento.

Definición 1.5 (Medida de Probabilidad o Probabilidad). *Decimos que una función de conjunto, P , definida sobre la σ -álgebra \mathcal{F} es una medida de probabilidad, es decir:*

$$\begin{aligned} P: \mathcal{F} &\rightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto P(A) \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Si satisface los **axiomas de probabilidad de Kolmogorov**:*

1. $P(\Omega) = 1$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ para cualquier suceso $A \in \mathcal{F}$.
3. (Axioma de aditividad numerable): $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, disjuntos dos a dos, es decir, $(A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j)$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Definición 1.6 (Espacio medible). *Al par (E, \mathcal{F}) se le llama espacio medible, donde E , es un conjunto y \mathcal{F} es un σ -álgebra de subconjuntos de E . A los elementos de \mathcal{F} se les llama conjuntos medibles de E .*

Definición 1.7 (Espacio de probabilidad). *Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) , donde:*

- Ω es un conjunto distinto de vacío que se llama **espacio muestral**.
- \mathcal{F} es una **σ -álgebra** de subconjuntos de Ω (es decir, (Ω, \mathcal{F}) es un espacio medible).
- P es una **medida de probabilidad** sobre \mathcal{F} .

Ya hemos llegado donde queríamos, a la definición de espacio de probabilidad que nos va a ser útil para definir los procesos estocásticos.

A su vez, el mundo de la probabilidad es muy amplio, existen muchas definiciones, teoremas, propiedades... De lo comentado podemos deducir un conjunto de propiedades que pueden ser muy útiles.

Propiedades útiles de la probabilidad

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Sean A_1, A_2, \dots, A_n elementos disjuntos dos a dos de la σ -álgebra \mathcal{F} , gracias a la propiedad de aditividad numerable que hemos comentado, se cumple que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
5. Tenemos que si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces se cumple $P(B - A) = P(B) - P(A)$, de aquí podemos deducir que $P(A) \leq P(B)$.

6. Principio de inclusión-exclusión

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

7. (*Desigualdad de Boole, Subaditividad*) Dados los sucesos $A_1, \dots, A_n \subset \mathcal{F}$ se cumple que,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

8. (*Continuidad de la probabilidad*) Dado $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos donde $A_n \subset A_{n+1}$, y sea A su límite. Entonces se cumple que:

$$P(A) = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n).$$

1.3. Variable Aleatoria

Normalmente aunque podamos pensar que lo que nos interesa en un experimento aleatorio es algún resultado particular ω de nuestro espacio muestral Ω , lo que nos interesa realmente son las características numéricas que dependen de ω . Esto se puede ver claramente en las apuestas, nos interesa más saber si vamos a ganar o perder que el resultado particular en sí. Esto conlleva a cambiar nuestra forma de pensar, asignando un número a $X(\omega)$ a cada resultado particular. Lo que nos interesa es la probabilidad de que $X(\omega)$ muestre valores en diversos subconjuntos de \mathbb{R} (intervalos). Nuestro objetivo pasa de Ω a \mathbb{R} o \mathbb{R}^k . Este cambio es debido a que el *espacio de probabilidad* es un espacio abstracto, sin embargo \mathbb{R} o \mathbb{R}^k son espacios mucho más conocidos con los que sabemos tratar. Esto nos lleva a desplazar información del espacio de probabilidad a \mathbb{R} (intervalos), y la singular forma de cambiar

espacios es mediante una *aplicación*. Además, las características numéricas nos permiten un desarrollo de abstracción matemático con las que podemos formar un *modelo probabilístico* útil para poder aplicarlo a otros espacios muestrales que compartan dichas características. También necesitamos cambiar la noción de suceso, para ello necesitamos una infraestructura donde traslademos a un espacio destinatario similar a la σ -álgebra que incluye a los sucesos. Como estamos en \mathbb{R} , sabemos que la σ -álgebra más pequeña que contiene a los intervalos, es la σ -álgebra de Borel, $\beta = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por lo que es la más idónea para transformar a \mathbb{R} en un espacio medible (probalizable). Una vez comentado todo lo que necesitamos estamos en condiciones de definir:

Definición 1.8 (Variable aleatoria). *Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Tenemos dos espacios medibles (probalizables), (Ω, \mathcal{F}) y (E, β) Entonces podemos decir que una **variable aleatoria** es una aplicación, $X: \Omega \rightarrow E$, que cumple:*

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \forall A \in \beta.$$

Si $E = \mathbb{R}$ entonces es una variable aleatoria real. El hecho de la existencia de una variable aleatoria hace que dispongamos de un espacio de probabilidad.

Dado X una variable aleatoria con valores en el espacio medible (E, β) . Es fácil ver que la función μ_x definida en β como:

$$\mu_x(A) = P(X^{-1}(A)).$$

La variable aleatoria proporciona datos probabilísticos de importante aplicación. Pasamos de Ω a E mediante la *probabilidad inducida* que se denomina como *ley de probabilidad de X o distribución de probabilidad de X* . Es decir, la imagen de P a través de X . Esta distribución es la que nos permite fijar a cada suceso la probabilidad de que ocurra.

También me gustaría anotar la definición de función de densidad ya que juega un papel importante tanto en la probabilidad como en los procesos estocásticos.

Definición 1.9. *La función de densidad caracteriza el comportamiento probable de una variable aleatoria continua X proporcionándonos el valor de la distribución en x . Una variable aleatoria X tiene densidad f , con f una función no negativa integrable de Lebesgue si:*

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx.$$

Por lo que la función de distribución acumulativa F de X , será:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du.$$

1.4. Introducción de los Procesos Estocásticos

De momento hemos visto diferentes características de experimentos aleatorios y probabilidad hasta llegar a la definición de variable aleatoria, concepto que nos va a ser muy útil a partir de ahora. Hemos considerado que estas características aleatorias de los experimentos y probabilidades se mantienen constantes a lo largo del tiempo en las variables. Pero eso no es siempre así, tenemos que tener muy en cuenta que las variables aleatorias pueden cambiar a lo largo del **tiempo**. Por lo tanto, la variable aleatoria va a depender del experimento probabilístico y del tiempo. Esto hace que cualquier característica que se atribuye a una variable aleatoria como son los espacios medibles, las σ -álgebras, la función de densidad... van a depender también del tiempo.

La teoría de los **procesos estocásticos** se centra en analizar y construir un modelo que nos permita aclarar la estructura y prever la evolución de una variable (de carácter aleatorio) a lo largo del tiempo.

Una forma de describir esta evolución es mediante una colección o sucesión de variables aleatorias. Por lo tanto, una forma de poder determinar un proceso estocástico es mediante una sucesión de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ donde el subíndice señala el instante de tiempo o espacio determinados. Una definición más concreta es:

Definición 1.10 (Proceso Estocástico). *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$ definidas sobre un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) e indexadas por un parámetro t donde t varía en el conjunto T . El parámetro t generalmente juega el papel del tiempo.*

Ejemplo 1.2. *Existen procesos estocásticos en cualquier ámbito de nuestro entorno, las variables aleatorias observadas en los procesos pueden ser económicas, sociales, físicas, químicas... Algunos ejemplos son:*

- $X(t)$: cantidad total de ventas de un supermercado en un día t del mes.
- $X(t)$: precio de cualquier valor de un mercado bursátil en un instante t del día.
- $X(t)$: número de accidentes automovilísticos en una capital en un mes t .
- $X(t)$: temperatura de un proceso en un instante t .

A continuación, voy a escribir otra definición alternativa más técnica, donde podríamos analizar lo que es un proceso estocástico más a fondo. Esto nos permitiría conocer definiciones como procesos *equivalentes, modificaciones o versiones, indistinguibles, progresivamente medibles, teoremas de continuidad y existencia de Kolmogorov...* Lo hago para incitar a alguna persona a ver la importancia y el mundo que es este de los procesos estocásticos y porque me ayuda a ver otra perspectiva de ellos e intuir aspectos futuros en el trabajo. Una fuente que nos ayude a ello puede ser [3], además de las comentadas al principio del capítulo.

Definición 1.11 (Proceso Estocástico). *Un proceso estocástico es un objeto de la forma:*

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, (X_t)_{t \in T}, P).$$

- (Ω, \mathcal{F}, P) es un espacio de probabilidad.
- T (el tiempo) es un subconjunto de \mathbb{R}^+ .
- $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ es una filtración, es decir, un conjunto totalmente ordenado de sub- σ -álgebras de \mathcal{F} : $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para cualquier $s \leq t$.
- $(X_t)_{t \in T}$ es una familia de variables aleatorias en (Ω, \mathcal{F}) tomando valores en un espacio medible (E, \mathcal{E}) tal que, para cada t , X_t es \mathcal{F}_t -medible. Este hecho es también expresado diciendo que $(X_t)_t$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_t$.

1.5. Clasificación de Procesos Estocásticos

Una primera forma de clasificar los procesos estocásticos puede ser mediante el tipo de valores que toma la variable aleatoria y el tipo de valores del índice. Para ello nos va a ser útil conocer las siguientes definiciones:

Definición 1.12 (Conjunto de estados). *Al conjunto de posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias $\{X_t, t \in T\}$, se le denomina **conjunto de estados** E .*

Definición 1.13 (Conjunto paramétrico). *Al conjunto $T \subset \mathbb{R}$ de subíndices se le denomina **conjunto paramétrico** y puede ser continuo o numerable.*

Nota 1.1. *Comúnmente, y en nuestro caso, el subíndice t indica el tiempo y X_t indica el estado o posición del proceso estocástico en el instante t .*

Clasificación según el conjunto paramétrico y de estados

- Diremos que X_t es un proceso estocástico de *parámetro continuo* si el conjunto T es continuo (\mathbb{R}^+).
- Diremos que X_t es un proceso estocástico de *parámetro discreto* si el conjunto T es discreto (\mathbb{N}).
- Diremos que el proceso estocástico es de *estado continuo* si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo continuo.
- Diremos que el proceso estocástico es de *estado discreto* si para cada instante t la variable aleatoria X_t es de tipo discreto.

Por lo tanto, según esta clasificación tenemos cuatro tipos que dependerá si son procesos estocásticos de parámetro continuo o discreto y de estado continuo o discreto. Cada cual recibe un nombre determinado que ilustraremos en la tabla (1.1).

Estas clasificaciones se pueden hacer de forma sencilla y nos permiten separarlos para estudiar y analizar de cada uno sus propias características. Como hemos dicho en la introducción “la variable aleatoria va a depender del experimento probabilístico y del tiempo”.

	t Discreto	t Continuo
X Discreta	<i>Proceso de tiempo discreto y estado discreto (CADENA) (Infectados de COVID-19 cada día)</i>	<i>Proceso de tiempo continuo y estado discreto (Proc. SALTOS PUROS)(Mascarillas producidas hasta el instante t)</i>
X Continua	<i>Proceso de tiempo discreto y estado continuo (SUC. de V. A.) (Precio de un valor bursátil cada día)</i>	<i>Proceso de tiempo continuo y estado continuo (PROCESO CONTINUO) (Velocidad de un automovil en el instante t)</i>

Tabla 1.1: Clasificación de los procesos estocásticos según parámetro y estado.

Por lo que no solo influye el tiempo, también influye la probabilidad. Esto nos lleva a otro tipo de clasificación también muy útil.

Clasificación según las características probabilísticas de las variables aleatorias

Al representar para cada t la función de densidad correspondiente a una variable aleatoria de X_t las funciones de densidad pueden ser variables. Por consiguiente, las propiedades probabilísticas de una variable aleatoria son fundamentales a la hora de reconocer y clasificar un proceso estocástico. De ahí, la importancia de la probabilidad. Esto hace que según estos términos podamos clasificar un proceso estocástico de las siguientes formas.

1. Procesos Estacionarios

Como hemos dicho, las características probabilísticas pueden cambiar a lo largo del tiempo. Sin embargo, los **procesos estacionarios** son de gran interés, ya que se caracterizan por ser aquellos procesos cuyo comportamiento se mantiene constante a lo largo de t . Esto nos va a ayudar en lo que estamos interesados, que es predecir el comportamiento futuro del proceso. La representación gráfica será constante y con pautas estables de oscilación.

Definición 1.14 (Proceso estacionario en sentido estricto). *Un proceso es estacionario en sentido **estricto** si cualquier distribución conjunta finita (finito-dimensionales) de cualquiera de sus v.a. medidas en instantes t_1, t_2, \dots, t_r , permanece constante al realizar un mismo desplazamiento de tiempo ϵ .*

$$F(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_r)) = F(X(t_1+\epsilon), X(t_2+\epsilon), \dots, X(t_r+\epsilon)).$$

para todo conjuntos de índices (t_1, t_2, \dots, t_r) y $\forall \epsilon$.

Esta es una condición muy fuerte, ya que implica estudiar numerosas distribuciones de densidad conjunta.

Definición 1.15 (Proceso estacionario en sentido débil). *Un proceso es estacionario en sentido **débil** si es estable para todo t en media, en varianza y en autocovarianza. Esto es:*

1. $\mu_t = \mu$
2. $\sigma_t^2 = \sigma^2$
3. $Cov(t, t + \epsilon) = Cov(s, s + \epsilon) = \gamma_\epsilon$

Comentar que Proceso estacionario estricto \Rightarrow Proceso estacionario débil, pero no al contrario.

2. Procesos Markovianos

Decimos que un proceso es Markoviano (se llama así por el matemático ruso *Andréi Márkov*), cuando un fenómeno aleatorio dependiente del tiempo t cumple la **propiedad de Márkov**. La característica principal de estos procesos se comprende diciendo que el estado *futuro* del proceso, depende del estado *presente*, pero no de los estados pasados del proceso. De ahí que estos procesos sean muy importantes en finanzas, física, química...

Definición 1.16 (Proceso Markoviano). *Un proceso estocástico es un proceso markoviano cuando la evolución del proceso depende exclusivamente del pasado inmediato, dados los tiempos $t_1 < t_2 < \dots < t_n$,*

$$P(X_{t_n} \in B | X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} | X_{t_{n-1}})$$

siendo B un conjunto de Borel (suceso) en \mathbb{R} .

Esta propiedad se puede expresar con funciones de densidad o de probabilidad, dependiendo la naturaleza de las variables del proceso. Por eso a nosotros nos interesa en el caso discreto con probabilidades, donde será importante la propiedad.

Definición 1.17 (Propiedad de Márkov). *Se cumple la propiedad de Márkov cuando la evolución pasada del proceso depende de la situación actual que ocupa el proceso para poder calcular la probabilidad de cambiar a otro estado, esto es,*

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Cuando el conjunto de posibles estados es numerable(discreto), el proceso se llama **cadena de Márkov**. Por otro lado, cuando todas las posibles ejecuciones del proceso son funciones continuas del tiempo el proceso se llama **proceso de difusión**.

Para los procesos Markovianos las probabilidades $P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$ se denominan **probabilidades de transición**. Una forma más interesante de representar las probabilidades de transición es:

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}(n).$$

Un aspecto interesante puede ser cuando las probabilidades $p_{ij}(n)$ no dependen de n , esto indica que las probabilidades de cambiar de estado son iguales en cualquier instante. En este caso se dice que las probabilidades de transición son estacionarias. En el caso de las cadenas de Markov es posible definir una **matriz de probabilidades de transición**. Esta matriz es de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}.$$

Indica la probabilidad condicionada de que un proceso esté en el estado s_j habiendo estado en el estado s_i . La componente de fila i y columna j representa la probabilidad de transición de un paso, esto es, $p_{ij} = P(X_n = s_j | X_{n-1} = s_i)$. Esta matriz es muy eficiente para buscar las probabilidades de transición de más de un paso. Ya que las matrices $P^2, P^3, P^4, \dots, P^m$ determinan las probabilidades de transición en $2, 3, 4, \dots, m$ pasos. Esta matriz P^m recibe el nombre de **matriz de transición en m pasos**. Consiguiendo uno de los objetivos que buscamos y tienen los procesos estocásticos, conocer las probabilidades de lo que va a pasar en el futuro. Un ejemplo de proceso markoviano es el **movimiento browniano** del que hablaremos más adelante, que intenta conocer la actividad aleatoria de las partículas en un fluido.

3. Procesos de incrementos independientes (ortogonales)

Definición 1.18 (Procesos de incrementos independientes). *Sea $\{X_t, t \in T\}$ un proceso estocástico. Se dice que ese proceso es de incrementos independientes si $\forall n \in \mathbb{N}$ cualquiera que sean $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.*

Como vemos de nuevo afecta la probabilidad ya que la independencia es un concepto probabilístico. Ligados a estos también podemos definir los procesos de *incrementos estacionarios* estos son cuando la distribución, fijado t , de $X_{s+t} - X_s$ es la misma para todo s , con tal que $s + t \in T$.

Existen procesos de incrementos estacionarios y independientes como los **procesos de Lévy**, en ellos se encuentran dos procesos de interés y que veremos más adelante como son el *movimiento browniano* y los *procesos de Poisson*. Por último comentar una proposición donde podemos ver la importancia de los procesos markovianos.

Proposición 1.1. *Todo proceso de incrementos ortogonales es un proceso markoviano.*

Lo que nos hace pensar que los procesos ortogonales son muy utilizados ya que los procesos markovianos tienen características muy importantes que le hacen aparecer en una gran cantidad de procesos.

1.6. Ejemplos de procesos estocásticos

Como los procesos markovianos son de uso común ya que se encuentran en muchas áreas de conocimiento y los hemos estudiado en diferentes materias, voy a introducir un pequeño ejemplo donde poder ver el uso de lo comentado en este trabajo sobre estos procesos.

Ejemplo 1.3. *Se sabe lo que ocurre con el tiempo atmosférico en una determinada región: un día se llama soleado (S) si el sol luce más de la mitad del día y se llama nublado (N) si hace menos. Se ha llegado a un análisis donde por experiencia sabemos que si hay un día nublado es igual de probable que el día siguiente sea también nublado. Si el día es soleado hay una probabilidad de $2/3$ de que sea también soleado.*

- a) *Construiremos la matriz de transición T .*
- b) *Si hoy está nublado ¿cuál es la probabilidad de que dentro de tres días esté también nublado? ¿y de que esté soleado?*
- c) *Calculemos T^5 y T^{10} . Descubrir el comportamiento de T^n cuando $n \rightarrow \infty$ y como se comporta la probabilidad $p^{(n)}$ cuando $n \rightarrow \infty$. ¿Depende el límite de $p^{(0)}$?*

Solución a) Vemos que el proceso es markoviano ya que el tiempo solo depende del día anterior. En este caso tenemos una cadena de Markov con dos estados $D_1 \equiv$ Día nublado N , $D_2 \equiv$ Día soleado S . Por lo tanto, la matriz de transición T será:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Solución b) Si empezamos los pasos a partir del día actual, tenemos que:

$$p^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí podemos obtener la probabilidad con la que estará nublado o soleado dentro de tres días, esto es:

$$\begin{aligned} p^{(3)} &= p^{(0)}T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^3 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \\ \frac{43}{108} & \frac{65}{108} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.403 & 0.597 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que la probabilidad de que tengamos un día nublado es $p_1^{(3)} = \frac{29}{72}$ y la de que exista un día soleado es $p_1^{(3)} = \frac{29}{72}$.

Solución c) Ahora vamos a calcular las matrices de transición T^5 y T^{10} que son:

$$T^5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0.40008 & 0.59992 \\ 0.39995 & 0.60005 \end{pmatrix}$$

$$T^{10} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.60000 \\ 0.40000 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Estos cálculos han sido realizados con *MATLAB* que es una gran herramienta en estos casos. De esta forma calculamos:

$$T^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = Q$$

por lo que,

$$p^{(n)} = p^{(0)}T^n = \begin{pmatrix} p_1^{(0)} & p_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} =$$

$$= \left((p_1^{(0)} + p_2^{(0)}) 0.4 \quad (p_1^{(0)} + p_2^{(0)}) 0.6 \right) = (0.4 \quad 0.6),$$

ya que $p_1^{(0)} + p_2^{(0)} = 1$. Se puede observar claramente que cuando $n \rightarrow \infty$ entonces $p^{(n)}$ no depende del valor inicial $p^{(0)}$. Este ejemplo está sacado de [26], en él existen muchos otros ejemplos donde podemos profundizar y ver cómo funcionan los *autovalores y autovectores*.

A continuación, a modo de ejemplo voy a introducir un tipo de procesos estocásticos que salen constantemente en cualquier fuente de la bibliografía debido a su importancia y su uso. Son los **procesos de Poisson**. Los voy a definir ya que quiero enunciar un ejemplo sobre ello.

Definición 1.19 (Proceso de Poisson). *Un proceso de Poisson con intensidad(o parámetro) λ es un procesos $\{N_t, n \geq 0\}$ caracterizado por las siguientes propiedades.*

1. $N_0 = 0$.
2. Sean n instantes $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ entonces los incrementos $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, \dots, N_{t_2} - N_{t_1}$, son variables aleatorias independientes.
3. Si $s < t$ entonces el incremento $N_t - N_s$ tiene una ley de Poisson de parámetro $\lambda(t-s)$, esto es

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}.$$

Podemos contruir un proceso de Poisson de la siguiente forma. Si tenemos una sucesión $\{X_n, n \geq 1\}$ de variables aleatorias independientes y con ley geométrica de parámetro λ . Esto es que,

$$P(X_n \geq x) = e^{-\lambda x}.$$

Si ponemos $T_0 = 0$ y para $n \geq 1$ formamos,

$$T_n = Y_1 + \cdots + Y_n.$$

Entonces el proceso $N_t = n$ si $T_n \leq t \leq T_{n+1}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ . A continuación, voy a poner un ejemplo donde vamos a mezclar conocimientos de las cadenas de Markov y del proceso de Poisson.

Ejemplo 1.4. *Sea N_t con $t \geq 0$ un proceso de Poisson con parámetro λ y sea Y_n una cadena de Markov discreta con probabilidad de transición $u(i, j)$. Y sabemos entonces que el proceso definido como $X_t = Y_{N_t}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo. De forma más explícita esto indica que X_t realiza un salto según $u(i, j)$ en cada llegada de N_t .*

Si $X_n = i$ y es independiente de lo que ocurriese en el pasado, entonces irá al estado j con probabilidad $u(i, j)$.

Aquí en lugar de tener la matriz de transición vamos a tener la probabilidad de transición para $t > 0$ siendo de la forma:

$$p_t(i, j) = P(X_t = j | X_0 = i)$$

que como en el ejemplo, como N_t se distribuye como una Poisson con media λt , la forma de lo anterior es:

$$p_t(i, j) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} u^n(i, j)$$

siendo $u^n(i, j)$ la potencia n -ésima de la probabilidad de transición $u(i, j)$. Lo que quiere decir es que la probabilidad de estar en j en el tiempo t es igual a que aparezcan n llegadas de N_t por la probabilidad de transición en $N_t = n$ etapas: $u^n(i, j)$.

Además, si queremos conocer más, vemos que cumple una ecuación muy importante en los procesos estocásticos como es la ecuación de Chapman-Kolmogorov:

$$\sum_k p_s(i, k) p_t(k, j) = p_{s+t}(i, j).$$

Esto es muy importante ya que para ir de i a j en el tiempo $s + t$, tenemos que estar en algún estado k en el tiempo s y por la propiedad markoviana las dos partes del recorrido son independientes entre sí. Por lo que si conocemos la probabilidad de transición para $t < t_0$ para cualquier $t_0 > 0$, entonces sabremos para todo t .

Este es un claro ejemplo sacado de [29] donde podemos ver que conocer diferentes procesos y propiedades nos ayudan a resolver y analizar mejor cualquier situación modelada por un proceso. También vemos que la probabilidad juega un papel fundamental para sacar resultados y conclusiones en las soluciones de cualquier ejemplo. Existen una gran cantidad de ejemplos de procesos estocásticos en cualquier libro de la bibliografía o cualquier libro relacionado con el tema.

Capítulo 2

Movimiento browniano y aplicaciones

El botánico y biólogo escocés *Robert Brown* (1773-1858) estudió, a través de un microscopio, que en el agua existían pequeñas partículas de polen suspendidas que realizaban un movimiento particularmente irregular. Más tarde, él mismo descubrió que otras partículas de varios minerales seguían el mismo movimiento. Este fenómeno, recibe el nombre de movimiento browniano gracias a él. El **movimiento browniano** es el movimiento aleatorio que podemos examinar en las partículas que se encuentran en un medio fluido debido a choques entre las partículas del mismo fluido.

Estos estudios siguieron siendo estudiados por personajes ilustres de diferentes campos como por ejemplo *Louis Bachelier* en 1900 para modelar las fluctuaciones de la bolsa parisina. A su vez, *Albert Einstein* (1905) publicó una explicación del fenómeno. *Norbert Wiener* (1894-1964) analizó y consiguió dar un modelo estocástico para las trayectorias irregulares de las partículas como funciones continuas y no diferenciables en ningún punto. A partir de entonces hasta la actualidad, las contribuciones teóricas y aplicaciones a diferentes áreas de la ciencia no han cesado.



Figura 2.1: Robert Brown (1773-1858) y Norbert Wiener (1894-1964).

2.1. Introducción al proceso de Wiener

La formulación matemática concisa del movimiento browniano fue dada por Norbert Wiener en 1918. Es por eso que en el ámbito matemático se le otorgue el nombre de movimiento browniano o **proceso de Wiener**. Está incluido como uno de los procesos de *Lévy* (procesos estocásticos continuos en probabilidad y con incrementos estacionarios e independientes) más importantes. Su aportación a la matemática pura (estudio de martingalas) como a la aplicada (ecuación de Black-Scholes) son enormes. En este capítulo he utilizado principalmente [20], [16] y [11].

Sabemos que el proceso de Wiener es un caso particular del *proceso gaussiano*. Por lo tanto, tenemos que conocer de qué trata un proceso gaussiano para poder adentrarnos en ellos. Los procesos gaussianos se precisan como una distribución de probabilidad sobre funciones aleatorias. De hecho, la distribución gaussiana es la más conocida y más empleada en la probabilidad. Los procesos gaussianos son sobre colecciones infinitas de variables (funciones), donde cualquier subconjunto de variables aleatorias finita tiene una distribución gaussiana multivariable. Son procesos estocásticos $\{X_t, t \in T\}$ donde para todo n y todo t_1, t_2, \dots, t_n se cumple que la distribución conjunta de las n variables aleatorias $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}$ es una normal n -variada. Una definición más formal es la siguiente.

Nota 2.1. Recordemos que X es gaussiana o normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ cuando su distribución de probabilidad es :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Definición 2.1 (Proceso Gaussiano). *Un proceso estocástico $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso gaussiano o normal si sus variables $X_t \sim N(\mu(t), \sigma^2(t))$ y sus distribuciones finito-dimensionales son gaussianas o normales multivariantes, esto es,*

$$F(X_{t_1}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1(n-1)} & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2(n-1)} & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{1(n-1)} & \sigma_{2(n-1)} & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & \sigma_{(n-1)n} \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_{(n-1)n} & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Σ es la matriz de covarianzas del vector de variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ y μ es el vector de medias. Además, nos sirve tanto para tiempos continuos como discretos.

Estas matrices de nuevo nos pueden dar mucha información, por ejemplo, si $\mu_i = 0, \forall i$, $\sigma_i^2 = \sigma^2, \forall i$ y $\sigma_{ij} = 0, i \neq j$, entonces nos encontramos ante un caso particular que se llama *ruido blanco*. Las propiedades heredadas de la distribución gaussiana o normal le hacen al proceso gaussiano de tremenda importancia. Una de ellas es que con los momentos de primer y segundo orden (μ y Σ) las distribuciones finito-dimensionales ya las tenemos determinadas de forma visual en una matriz y otra por ejemplo puede ser que como vemos son matrices y la transformación lineal de cada proceso da lugar otro nuevo proceso gaussiano.

Esto hace que abundantes procesos relacionados con *señal y ruido* se modelizan de una forma clara con un proceso Gaussiano.

Definición 2.2 (Definición alternativa). *Un proceso se dice gaussiano si para un conjunto finito de índices t_1, t_2, \dots, t_k del conjunto T , siendo $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ un vector evaluado en una variable aleatoria gaussiana. Mediante la función característica de variables aleatorias podemos decir que: $\{X_t, t \in T\}$ es un proceso gaussiano si y solo si para un conjunto finito de índices t_1, t_2, \dots, t_k existen valores reales positivos para σ_{l_j} y μ_j tal que:*

$$\mathbb{E}[e^{i \sum_{l=1}^k t_l X_{t_l}}] = e^{-\frac{1}{2} \sum_{l,j} \sigma_{l_j} t_l t_j + i \sum_l \mu_l t_l}$$

donde $\mathbb{E}(\cdot)$ es la esperanza matemática y σ_{l_j} y μ_j son la covarianza y media del proceso.

Como bien veníamos comentando el proceso de Wiener es un proceso de Lévy, por lo tanto va a ser de utilidad conocer sus características.

Definición 2.3 (Proceso de Lévy). *Sea $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un proceso decimos que es de Lévy en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) si,*

1. $X_0 = 0$, por lo tanto, parte desde el origen.
2. X tiene trayectorias continuas con límite a la izquierda.
3. Tiene incrementos independientes, dados los instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ las variables aleatorias

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

4. Sus incrementos $X_t - X_s$ son homogéneos en el tiempo, solo dependen de la diferencia $t - s$, esto es, $X_t - X_s \sim X_{t-s}$.

Una herramienta para el estudio de estos procesos es la fórmula de **Lévy - Kintchine**, ésta calcula la función característica de las variables X_t de la forma:

$$E(e^{zX_t}) = e^{t\psi(z)}$$

donde la función ψ se llama *exponente característico* y se establece como:

$$\psi(z) = bz + \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy\mathbf{1}_{\{|y|<1\}}) \Pi(dy)$$

donde:

- b y $\sigma \geq 0$ son constantes reales. Y la función $\mathbf{1}_{\{|y|<1\}}$ indica la **función indicadora** del conjunto oportuno dado.

- Π es la medida de Lévy, una medida positiva en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\int (1 \wedge y^2) \Pi(dy) < \infty$.

Es importante comentar que esta función ψ se define en valores imaginarios puros z y consigue determinar completamente la distribución de probabilidades de nuestro proceso. Un proceso de Lévy se determina mediante: un arrastre lineal, un movimiento browniano y una superposición de procesos de Poisson centrados e independientes con distintos tamaños promedio de salto. Esto es, podemos identificar cada distribución de un proceso de Lévy con una tripleta (b, σ, Π) .

Una vez que conocemos un poco la base y propiedades de tipos de procesos de donde viene el movimiento browniano o proceso de Wiener podemos definirlo.

Definición 2.4 (Proceso de Wiener o movimiento browniano). *Decimos que un proceso estocástico $\{W_t, t \geq 0\}$ en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es **proceso de Wiener** o **movimiento browniano** si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $W_0 = 0$ y $P(W_0 = 0) = 1$
2. W_t tiene trayectorias continuas.
3. Tiene incrementos independientes, dados los instantes $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ entonces

$$W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

son variables aleatorias independientes.

4. Para $t > s$, $W_t - W_s$ es una variable gaussiana, con una distribución normal de media 0 y varianza $t - s$, es decir

$$W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t - s)).$$

Cuando $\sigma^2 = 1$ se dice que es un proceso de Wiener unidimensional estándar.

Consecuencias de la definición

- $N(\mu, \sigma^2)$ denota la distribución normal con el valor esperado μ y la varianza σ^2 . Luego su función de probabilidad se rige a partir de la *Nota 2.1*.

- W no es un proceso estacionario.

- Para todo t_1, t_2, t_3, t_4 se cumple que:

$$\mathbb{E}[(W_{t_2} - W_{t_1})(W_{t_4} - W_{t_3})] = 0$$

- Como bien sabemos es un proceso gaussiano.
- La función de densidad $f(t, x)$ cumple la función de difusión, es decir,

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}$$

para $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

- El incremento ΔW del proceso, es $N(0, \Delta t)$, al examinar la variable $(\Delta W)^2$. Se cumple que:

$$\mathbb{E}((\Delta W)^2) = \Delta t, \quad \mathbb{V}((\Delta W)^2) = 2(\Delta t).$$

Esto es, si hacemos tender Δt a cero, tenemos que la varianza va a ser menor que la esperanza, por lo que la variable se aproxima a su valor esperado, es decir,

$$(\Delta W)^2 \sim \Delta t, \Rightarrow (dW)^2 = dt.$$

- Se cumple que:

$$\mathbb{E}\left(\frac{W_{t+h} - W_t}{h}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{|h|}.$$

De aquí me gustaría comentar que una caracterización del proceso de Wiener es lo que se conoce como *caracterización de Lévy*, que nos dice que casi seguramente el proceso de Wiener estará en una **martingala** (lo veremos en el próximo capítulo) continua con W_0 y variación cuadrática $[W_t, W_t] = t$. El proceso de Wiener es valioso en la teoría matemática de las finanzas y en concreto es esencial para determinar la **ecuación de Black-Scholes** que establece el precio de determinados activos bursátiles y que veremos más adelante en este trabajo.

2.2. Construcción del proceso de Wiener

Una vez que ya sabemos su definición, vamos a construirlo. El proceso de Wiener se puede construir de diferentes formas. Como un proceso gaussiano con una función de covarianzas $K(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$, una construcción a partir de esquemas de Kolmogorov, la construcción de Lévy-Ciesielski... Pero la más común es mediante el caso límite de una serie de procesos estocásticos llamados paseos aleatorios o caminos aleatorios. Es lo que se conoce como *teorema de Donsker*. Para imaginárnoslo de una forma más visual, imaginamos una partícula colocada en el punto (x_0, y_0) , donde en cada instante t_1, t_2, \dots, t_n recorre en una dirección al azar una distancia fija D , esto es lo que se llama un paseo aleatorio bidimensional. Estos paseos tienen *trayectorias*, imaginemos a un inversor en bolsa que tiene una cantidad de dinero inicial B_0 y

cada vez que invierte tiene una probabilidad p de ganar y $1-p$ de perder, al invertir $1, 2, \dots, n$ veces su cantidad de dinero será B_1, B_2, \dots, B_n . Al graficar las cantidades de dinero en función del tiempo obtenemos una *trayectoria*. Además las cantidades son variables aleatorias, con características de un proceso estocástico markoviano y un paseo aleatorio unidimensional. Vamos a considerar que en cada instante de tiempo se toma una dirección determinada. Si hacemos tender el tiempo entre dos cambios de dirección a cero, hará que la distancia también tenderá a cero. El proceso de Wiener W_t es el proceso resultante de este experimento. Para realizar esta construcción, lo primero que tenemos que conocer es qué es un camino aleatorio, todo ello está muy explícitamente expuesto en [14] de donde nos vamos a basar debido a su buena aportación matemática para el trabajo.

Camino aleatorio

Se dice de un proceso estocástico que especifica el desplazamiento aleatorio de un móvil en \mathbb{R}^n . Debido a que es más sencillo e ilustra lo que realmente queremos definir nos vamos a basar en el caso unidimensional. Por ejemplo, nuestro móvil se desplaza mediante saltos unitarios e independientes por la recta real, lo hace con probabilidad p hacia la derecha y con probabilidad $1-p$ hacia la izquierda. Una vez realizados n desplazamientos, la posición del móvil será $S_n = D_1 + D_2 + \dots + D_n$, donde D_k considera una función de probabilidad de la forma,

$$f_k(x) = \begin{cases} 1-p, & \text{si } x = -1; \\ p, & \text{si } x = 1; \\ 0, & \text{en resto.} \end{cases}$$

Al realizar n desplazamientos, si k han sido hacia la derecha y $n-k$ hacia la izquierda, la posición final será $S_n = k - (n-k) = 2k - n$ esto hace que su función de probabilidad sea,

$$f_{S_n}(2k-n) = P(S_n = 2k-n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ahora voy a expresar la media, la varianza y la función autocovarianza y de autocorrelación que como he dicho en el Capítulo 1 sus definiciones son de ámbito conocido y que podemos extraer de cualquier libro de probabilidad. En este caso son:

$$\mu(n) = E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(D_k) = n(2p-1),$$

y

$$\sigma_n^2 = \text{var}(S_n) = \sum_{k=1}^n \text{var}(D_k) = 4np(1-p).$$

Siendo la función de autocovarianza y la de autocorrelación de la forma,

$$\text{Cov}(n_1, n_2) = \text{mín}(n_1, n_2)4p(1-p),$$

$$R(n_1, n_2) = Cov(n_1, n_2) + \mu(n_1)\mu(n_2) = \min(n_1, n_2)4p(1-p) + n_1n_2(2p-1)^2.$$

Ahora que ya los conocemos procedamos a la construcción del proceso de Wiener. En el caso anterior eran saltos unitarios hacia la derecha o izquierda en cada intervalo unitario de tiempo. Pero ahora pensemos que cualesquiera que sean los desplazamientos pequeños de longitud Δ también tendremos unos intervalos de tiempo de longitud τ . Al hacer tender a cero el desplazamiento y el tiempo vamos a obtener un proceso donde sus ejecuciones serán funciones continuas en el tiempo. Vamos a descubrir en qué condiciones van a tender a cero. Para ello imaginamos una partícula colocada en el origen. La cual en cada intervalo de tiempo τ se desplaza una cantidad aleatoria Z de tal forma que:

$$P(Z = +\Delta) = p, \quad P(Z = -\Delta) = 1 - p = q,$$

con la condición de ser los desplazamientos independientes.

Nota 2.2. *Nos encontramos ante una variable dicotómica. Esto es, un tipo especial de variable cualitativa, que solo puede adoptar dos valores. Por ejemplo, la variable “resultado que se obtiene al lanzar una moneda”. Toda variable continua puede ser dicotomizada como la variable “altura”, se puede dividir en altos y bajos. Las características y nociones probabilísticas de este tipo de variable se pueden ver en cualquier libro matemático de probabilidad.*

En este caso tenemos que la media y la varianza son,

$$\mu_Z = (p - q)\Delta, \quad \sigma_Z^2 = 4pq\Delta^2,$$

donde su función característica vale

$$\varphi_Z(u; \Delta) = E(e^{iuZ}) = pe^{iu\Delta} + qe^{-iu\Delta}.$$

Sabemos que en el tiempo t se han realizado $n = \lfloor t/\tau \rfloor$ desplazamientos, donde X_t es la posición final de la partícula. Esta posición será la suma $X_t = \sum_{i=1}^n Z_i$ donde las Z_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por lo que la función característica de X_t será:

$$\varphi_{X_t}(u; \tau, \Delta) = E(e^{iuX_t}) = (pe^{iu\Delta} + qe^{-iu\Delta})^n = (pe^{iu\Delta} + qe^{-iu\Delta})^{\lfloor t/\tau \rfloor}. \quad (2.1)$$

De las fórmulas anteriores, podemos obtener fácilmente la media y la varianza de X_t .

$$\mu_{X_t} = \lfloor t/\tau \rfloor (p - q)\Delta, \quad \sigma_{X_t}^2 = \lfloor t/\tau \rfloor 4pq\Delta^2.$$

Como hemos dicho al principio lo que queremos hacer es tender a cero tanto a Δ como τ para obtener un resultado comprensible. Por comprensible entendemos por ejemplo qué media y

qué varianza de X_t , para $t = 1$, sean finitas e iguales a μ y σ^2 . Esto es, Δ y τ tienen que tener a cero para que:

$$\frac{(p-q)\Delta}{\tau} \rightarrow \mu \quad \frac{4pq\Delta^2}{\tau} \rightarrow \sigma^2.$$

Para que se resuelva nuestras pretensiones tiene que ocurrir que,

$$\Delta = \sigma\sqrt{\tau}, \quad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\sqrt{\tau}}{\sigma}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{\tau}}{\sigma}\right). \quad (2.2)$$

Esto hace que p y q tengan que tener valores muy próximos a $1/2$ para prevenir degeneraciones del proceso límite y que Δ sea de un orden de magnitud mucho mayor que τ ya que como hemos visto como infinitésimo $\Delta = O(\tau^{1/2})$.

Estamos en condiciones de obtener la distribución de probabilidad límite de las X_t , para ello nos basamos en las ecuaciones (2.1) y (2.2) mediante el comportamiento límite de la función característica.

$$\varphi_{X_t}(u; \tau) = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)e^{iu\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu\sqrt{\tau}}{\sigma}\right)e^{-iu\sigma\sqrt{\tau}} \right]^{t/\tau}.$$

Al desarrollar en potencias de τ y hacerle tender a cero, $\tau \rightarrow 0$, entonces tenemos,

$$\varphi_{X_t}(u) = \exp\left(\mu tu - \frac{1}{2}\sigma^2 tu\right),$$

que justamente coincide con la función característica de una $N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Como el proceso formado por las variables X_t está generado por caminos aleatorios, hereda sus propiedades. En realidad, lo que hemos estado haciendo es aplicar el *Teorema Central del Límite* a la suma de variables dicotómicas que definen X_t . Una de esas propiedades más importantes es la de *incrementos estacionarios e independientes*. Esto es, si $t_1 < t_2$, $X_{t_2} - X_{t_1} \sim N(\mu(t_2 - t_1), \sigma^2(t_2 - t_1))$. El proceso límite del que hemos hablado es un proceso Gaussiano con incrementos independientes.

El **proceso de Wiener** es un proceso límite como el que hemos desarrollado anteriormente con $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{1}/2$.

Otra forma de construir el movimiento browniano con bastante interés matemático para poder investigar en él, es la que podemos encontrar en [7]. Se denomina la construcción de *Lévy-Ciesielski*.

Para ello, necesitamos proporcionar las notaciones

$$D_0 = \{1\}, \quad D_n = \{k/2^n : k = 1, 3, 5, \dots, 2n-1\} (n = 1, 2, \dots)$$

y $D = \bigcup D_n$. Los puntos de D son conocidos como racionales diádicos del intervalo $(0, 1]$ y racionales diádicos de índice n a los de D_n . Para comenzar, vamos a asociar a cada racional de D una función de tal forma que $H_1(t) = 1$ ($0 < t \leq 1$) y a cualquier r en D_n , $n \geq 1$,

$$H_r(t) = 2^{(n-1)/2} \operatorname{sgn}(r-t) \mathbf{1}_{\{|r-t| < 2^{-n}\}}.$$

Este tipo de funciones toma el nombre de **funciones de Haar**. Son necesarias para poder definir el tipo de integrales que necesitamos que son de la forma,

$$S_r(T) = \int_0^T H_r(t)dt = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{t < T\}} H_r(t)dt.$$

Estas integrales son las denominadas **funciones de Schauder**. Analizando vemos que son coeficientes de Fourier de funciones indicatrices de intervalos y al aplicar la igualdad de Parseval a este caso resulta,

$$s \wedge t = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\tau < s\}} \mathbf{1}_{\{\tau < t\}} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} S_r(s) S_r(t).$$

Teorema 2.1 (Construcción del proceso de Wiener de Lévy-Ciesielski). *La serie $w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r \in D_n} Z_r(s) S_r(t)$ donde $\{Z_r : r \in D\}$ es una familia de variables aleatorias independientes, con distribución gaussiana típica, converge uniformemente en $0 \leq t \leq 1$ con probabilidad uno, y la suma es un proceso de Wiener.*

Pudiendo verificar que los incrementos $v(t) = w(T+t) - w(T)$ a partir de un tiempo determinado T , tienen la distribución de un nuevo proceso de Wiener independiente de la trayectoria $\{w(s) : s \leq T\}$. Este tipo de construcción es el más aplicado para analizar las trayectorias del movimiento Browniano de hecho esta construcción nos da la continuidad de las trayectorias del movimiento Browniano, que podemos ver perfectamente analizado en [11].

A nivel de fundamento matemático, existen tres maneras principales de construir el movimiento browniano las dos primeras son la construcción como límite del camino aleatorio y la construcción de Lévy-Ciesielski las cuáles hemos introducido anteriormente. La que nos queda es la llamada *construcción de Kolmogorov*.

Esta última se basa en demostrar que el movimiento browniano es un proceso estocástico real $(W_t)_{t \geq 0}$ gaussiano tal que la media del proceso es igual a 0, $\forall t \geq 0$ y con función de covarianzas,

$$K(s, t) = \sigma^2 \min(s, t), \quad s, t \geq 0.$$

Consiste en probar que K es de verdad una función de covarianzas y sabiendo que coincide con la función de covarianzas del proceso de Poisson de promedio σ^2 . De aquí podemos deducir que dos procesos estocásticos pueden tener la misma función de covarianzas mientras que sus distribuciones finito-dimensionales son muy distintas. Esto se puede demostrar mediante la construcción por el teorema de extensión de Kolmogorov y calculando su función de covarianzas, pero para profundizar en esto requeriríamos de numerosas suposiciones, conceptos y resultados auxiliares que en este trabajo no tenemos tiempo de analizar.

Con todo esto me gustaría resaltar la importancia de los procesos estocásticos. Ya que como hemos visto de un solo proceso, como es el proceso de Wiener, podemos obtener numerosos conceptos matemáticos útiles no solo para este aspecto sino para diferentes ramas de las matemáticas y de la sociedad.

2.3. Medida de Wiener

Como hemos visto, el proceso de Wiener se puede ver como el límite de una suma de variables aleatorias siendo semejante a la forma que utilizamos para integrar una función continua, ya que sumamos una gran cantidad de variables de varianzas pequeñas. Podemos conocer la distribución límite de estas variables, pero no sabemos si pertenecen a algún espacio de probabilidad con su σ -álgebra de conjuntos medibles correspondiente. La forma de construir el proceso y la pequeña escala para agregar las variables independientes, consiguen que cualquier *muestra* del proceso de Wiener sea una función continua en sentido probabilístico. De hecho, Wiener asumió la continuidad como un postulado más en su trabajo original.

La medida de Wiener es una medida de probabilidad W en el espacio de funciones continuas inducidas por el proceso de Wiener. Cualquier integral que use la medida de Wiener la llamaremos integral de Wiener. La construcción de esta medida especifica la distribución de probabilidad de un camino aleatorio realizado por una partícula en movimiento browniano. Para la construcción de esta medida nos vamos a basar claramente en [11], pero me gustaría remarcar una construcción complementaria mucho más compleja y larga pero alternativa e interesante, que podemos observar en [20].

Construcción de la medida de Wiener

Para esta construcción nos vamos a basar en la acción de que la familia de variables W_t está incorporada de forma natural dentro del conjunto de funciones reales definidas en la semirrecta real positiva. Esto quiere decir que una muestra de nuestro proceso límite significa asignar un valor real a cada $t > 0$. Vamos a considerar como muestras posibles al conjunto Ω de funciones continuas $w : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, tales que $w(0) = 0$. La demostración de este hecho nos llevaría a cuestiones técnicas de teoría de la medida, pero la podemos encontrar en [4].

Pensemos ahora en que dada una muestra $w \in \Omega$, la variable $W_t : w \mapsto \mathbb{R}$ nos devuelva el valor de la función continua w en t :

$$W_t(w) = w(t).$$

De esta forma conseguimos lo que queremos, ya que a partir de la distribución de probabilidad de W_t podemos calcular la probabilidad de encontrar esa variable en un intervalo real concreto. En este tipo de construcción y en la mayoría de los libros, esta distribución nos va a permitir definir la medida en unos subconjuntos de Ω muy singulares y definamos la medida de los w que pasan por el intervalo $[a, b]$ en t :

$$P(a \leq W_t \leq b).$$

En el conjunto singular denominado *conjunto cilíndrico o ventana*:

$$C_{[a,b];t} := \{w \in \Omega : a \leq w(t) \leq b\}.$$

Su medida de probabilidad usando la distribución de la variable W_t la cual es normal de media cero y varianza t , la vamos a definir de la forma:

$$P(C_{[a,b];t}) := \int_a^b \phi(x, t) dx, \quad \phi(x, t) := \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}.$$

Si queremos conocer la probabilidad de la intersección de dos conjuntos cilíndricos $C_{[a_1, b_1]; t_1}$ y $C_{[a_2, b_2]; t_2}$ tendremos que considerar la distribución conjunta de las variables W_{t_1} y W_{t_2} con $t_1 < t_2$ que como sabemos tenemos la independencia del incremento $\Delta W_{t_1} := W_{t_2} - W_{t_1}$ respecto de W_{t_1} , lo que queremos medir con la intersección es la probabilidad de las funciones continuas que pasan en t_1 por el intervalo $[a_1, b_1]$ y en t_2 por el intervalo $[a_2, b_2]$. Esto es,

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq W_{t_1} \leq b_1, a_2 \leq W_{t_2} \leq b_2) &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) p(x_1, t_1) dx_1 dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} p(x_1, t_1) \left(\int_{a_2}^{b_2} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Para la igualdad primera hemos utilizado la densidad de la distribución conjunta, es decir:

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2 = P(x_1 \leq W_{t_1} \leq x_1 + dx_1, x_2 \leq W_{t_2} \leq x_2 + dx_2).$$

De la independencia de los incrementos podemos obtener:

$$\begin{aligned} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 &= P(x_2 \leq W_{t_2} \leq x_2 + dx_2 | W_{t_1} = x_1) \\ &= P(x_2 - x_1 \leq \Delta W_{t_2 - t_1} \leq x_2 - x_1 + dx_2) = \phi(x_2 - x_1, t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Ademas podemos sustituir $\Delta W_{t_2 - t_1} := W_{t_2} - W_{t_1}$. Por lo que, por último podemos decir que:

$$P(C_{[a_1, b_1]; t_1} \cap C_{[a_2, b_2]; t_2}) := \int_{a_1}^{b_1} \phi(x_1, t_1) \left(\int_{a_2}^{b_2} \phi(x_2 - x_1, t_2 - t_1) dx_2 \right) dx_1.$$

Como ya tenemos la probabilidad de la intersección ya podemos conocer la probabilidad de la unión:

$$P(C_{[a_1, b_1]; t_1} \cup C_{[a_2, b_2]; t_2}) = P(C_{[a_1, b_1]; t_1}) + P(C_{[a_2, b_2]; t_2}) - P(C_{[a_1, b_1]; t_1} \cap C_{[a_2, b_2]; t_2}).$$

Una vez conocidos este tipo de cuestiones podemos definir una medida en el álgebra generada por los conjuntos cilíndricos \mathcal{F}_0 (uniones e intersecciones finitas de estos conjuntos). Y con ello podremos definir la σ -álgebra \mathcal{F} siendo la mínima que contiene a \mathcal{F}_0 pudiendo extender la medida a todos ellos. Para poder ver detalles más rigurosos como comprobar que la medida está bien definida, lo podemos encontrar en [4] y [5].

Al definir esta medida gracias a Wiener podremos conseguir integrar funcionales definidos en Ω . Si conseguimos probar que el funcional tiene unas características determinadas para

este tipo de medida como por ejemplo que es medible, podremos hacer la integral de un funcional $F(w)$:

$$\int_{\Omega} F(w) dP_w = \int_{\Omega} F(w) dW$$

como el valor esperado del funcional F cuando w recorre las funciones continuas en un intervalo dado.

Igual que el proceso en sí, existen numerosas formas de definir o contruir la medida de Wiener, he elegido ésta porque es la más representativa ya que parte como base de la forma más común de definir el proceso de Wiener. Pero incluso en el mismo libro en el que nos hemos basado para esta construcción existe otra forma de construirla buscando un funcional \mathbb{L} con unas determinadas características y utilizando teoremas matemáticos importante como el de Stone-Weierstrass.

2.4. Movimiento Browniano en economía y teoría de la ruina

Lo que quiero transmitir en esta sección es que los procesos estocásticos no solo se utilizan en el ámbito de la matemática pura, sino también en otros ámbitos o ciencias de una forma no solo teórica, también práctica. Como todo lo que se va a hablar en este trabajo es muy útil y utilizado en la economía o en las finanzas, me gustaría dar pequeñas pinceladas al trabajo también del aspecto económico. Como bien hemos dicho el movimiento browniano desde su hallazgo ha sido estudiado a lo largo del tiempo por numerosas personas. Pues bien, en 1900, *Louis Bachelier* publicó en su tesis "*Théorie de la Spéculation*", supervisada por *Henri Poincaré* (por lo que nos imaginamos que tendría un gran trasfondo y fundamento matemático). En ella había modelado el comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la bolsa parisina. Descubrió que el movimiento Browniano actúa como el límite de paseos al azar simples (como bien sabemos nosotros) y que la ley $(\Delta W)^2 = \Delta t$ correspondía con la evolución espacio-temporal con los precios de las acciones en la bolsa de París. Bachelier propuso que las acciones con riesgo $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ evolucionan como:

$$L_t = L_0 + \sigma W_t + \nu t.$$

Donde W_t es un movimiento Browniano, σ y ν son constantes y L_t el precio de la acción en el instante t . Notemos que como W_t es una variable gaussiana, el precio de la acción puede tener valores negativos.

Más tarde, en 1965, *P. Samuelson* introdujo el siguiente modelo

$$G_t = G_0 e^{\sigma W_t + \nu t},$$

expresando de nuevo los precios de la acción para un tiempo t . Pero para desarrollar este modelo necesitamos conocimientos de la *fórmula de Itô* y el *modelo de Black-Scholes* que

profundizaremos en capítulos próximos. A este modelo se le llama **movimiento Browniano económico o geométrico**.

Nota 2.3. Como ya conocemos lo que es un proceso de Lévy, me gustaría notar que el modelo introducido por Bachelier es un proceso de Lévy con tripleta $(a, \sigma, 0)$. Véase en [16].

Una situación económica estudiada donde claramente aplicamos el movimiento browniano y nos puede ser valioso en el mundo empresarial es la *teoría de la ruina*.

Teoría de la ruina

En el mismo año que Bachelier, Filip Lundberg actuario y matemático sueco formuló el fundamento teórico de la teoría de la ruina. En él, modela la evolución en el tiempo de una compañía de seguros a partir de un proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ llamado *proceso de riesgo*. El problema se basa en dado una reserva inicial $X_0 = x$ y siendo X_t el capital de la compañía en el tiempo t , queremos saber la **probabilidad de ruina** final, esto es:

$$\varphi(x) = P(\exists t \geq 0 : x + X_t < 0).$$

Para ello nos ponemos en situación, la compañía de seguros como hemos dicho tiene un capital inicial x , llegan reclamaciones en tiempos aleatorios W_1, W_2, \dots, W_n que se rigen por un proceso de Poisson homogéneo $\{N(t) : t > 0\}$ de intensidad $\lambda > 0$. De aquí podemos saber que estos tiempos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. A su vez, estas reclamaciones Y_1, Y_2, \dots, Y_n también son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Cuya distribución común F es $F(0) = 0$ y media $E(Y_i) = \mu > 0$. Pero no todo son reclamaciones, también recibe una prima constante $a > 0$ por unidad de tiempo. Con todo esto, ya podemos definir X_t mediante:

$$X_t = x + at - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i.$$

Sabemos que $\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = 0$ y $N(t)$ representa el número de reclamaciones que llegan a la compañía en un intervalo de tiempo de $(0, t]$. Tenemos que X_t es el modelo de riesgo clásico o modelo de **Cramer-Lundberg**.

Decimos que una empresa está *en ruina* cuando existe algún $t \geq 0$ y X_t es menor que cero. Podemos saber también cual es la *probabilidad de no ruina o supervivencia*, expresada mediante $\phi(x) = 1 - \varphi(x)$.

Suponiendo algunos casos podemos sacar conclusiones muy interesantes que nos pueden ayudar para otros casos. Por ejemplo si $x = 0$, como sabemos que $N(t)$ e Y_1, Y_2, \dots, Y_n son independientes, podemos conocer:

$$E[X_t] = t(a - \lambda\mu) \geq 0.$$

Esto implica que $a > \lambda\mu$. Si no ocurre esto tenemos que $\varphi(x) = 1$, es decir, la ruina asegurada. Y esto es algo lógico ya que vemos que indica que la prima que recibimos por unidad de tiempo

a tiene que ser mayor que el número de reclamos por unidad de tiempo multiplicado por el valor esperado de cada uno.

Me gustaría resaltar una definición gracias al resultado anterior que es una condición para garantizar la solvencia de una compañía.

Definición 2.5 (Carga de seguridad). *La carga de seguridad de una compañía, denotada por ρ , se define como:*

$$\rho = \frac{a - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0.$$

Quiero comentar que para este modelo no existen salvo en pocos casos, expresiones explícitas que nos digan la **probabilidad** de ruina exacta. Es por ello que se han hecho numerosos estudios para encontrar fórmulas aproximadas. Como podemos ver con bastante profundidad y claridad en nuestra fuente utilizada para este tema [12]. Existen aproximaciones de diferentes estudiosos en la materia como son *la aproximación de Cramer-Lundberg, cálculo exacto de la probabilidad de ruina vía transformadas de Laplace* y la más utilizada *fórmula de Pollaczek-Kintchine*. Esta fórmula determina la probabilidad de la forma:

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{a}\right)^n (1 - F_l^{*n}(x)),$$

donde para $x > 0$ la transformada de la distribución de la cola de F , es:

$$F_l^s(y) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - F(y)) dy.$$

Cuando los tamaños de reclamación son distribuidos de forma exponencial, lo que ocurre en numerosas ocasiones, se simplifica de la forma:

$$\varphi(x) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{a}\right)x}.$$

Un hecho como la solvencia de una empresa o la probabilidad de caer en ruina de una compañía, son de gran importancia en nuestro día a día. Todo empresario o nuevo empresario quiere conocer cómo va su empresa, cuál es su solvencia, qué posibilidades hay de fracasar... Pues con estas fórmulas que nos proporcionan estudiosos que han investigado sobre modelos estocásticos como es en este caso, podemos conocerlas. Todo ese transcurso matemático que hay detrás es lo que estamos viendo, pero sin dejar de lado la aplicación a la vida real.

2.5. Simulación del proceso de Wiener con Mathematica y Matlab

Para esta sección resulta muy ventajoso los conocimientos adquiridos en asignaturas impartidas durante la carrera, como son Métodos Numéricos, Métodos Algorítmicos en Matemáticas, Modelización y Optimización, Probabilidad y Estadística... donde hemos utilizado

programas como *Wolfram Mathematica* o el *software libre R*. Estos conocimientos han resultado bastante valiosos para poder hacer uso del lenguaje de programación *Mathematica* en el trabajo.

De hecho, podemos ver la importancia de este proceso ya que el propio programa *Wolfram Mathematica* tiene instrucciones propias para poder desarrollarlo. He aquí un ejemplo donde dibujamos un proceso de Wiener con $\mu = 0.3$ y $\sigma = 0.5$. Además voy a representar mediante funciones específicas del programa para la media, la varianza y la covarianza. Esto se puede ver de forma visual en la Figura 2.2. Este código se ha basado en la página web de *Wolfram Mathematica* [28] donde también podemos averiguar código para otros tipos de procesos que se generan a partir del movimiento Browniano como son el puente Browniano y el geométrico. Estos últimos los representaré en *Matlab*.

```
data = RandomFunction[WienerProcess[.3, .5], {0, 1, 0.01}]
ListLinePlot[%, Filling -> Axis]
Mean[WienerProcess[\[Mu], \[Sigma]][t]]
Variance[WienerProcess[\[Mu], \[Sigma]][t]]
CovarianceFunction[WienerProcess[\[Mu], \[Sigma]], s, t]
CovarianceFunction[WienerProcess[], s, t]
Plot3D[CovarianceFunction[WienerProcess[], s, t], {s, 0, 5}, {t, 0,
  5}, ColorFunction -> "Rainbow"]
```

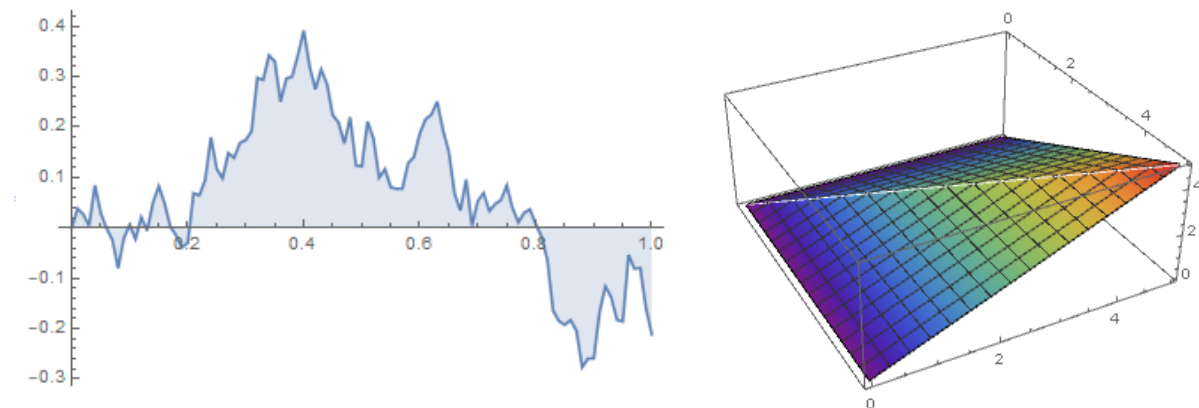


Figura 2.2: Representación proceso de Wiener $\mu = 0.3$ y $\sigma = 0.5$ y su función covarianza.

Además he querido indagar en otros sistemas de cómputo numérico como es *Matlab*. Esta decisión fue gracias a que en mi mundo laboral lo he utilizado con frecuencia y que no tiene funciones propias predeterminadas y en el código se ve más el desarrollo. Para los códigos en *Matlab* me he basado en [23] y [30]. El primero que voy a representar es una trayectoria de una caminata aleatoria, es interesante ya que es con lo que se construye el proceso de Wiener como bien sabemos.

```

clear x
p=0.5;
deltax=1;
T=10000;

x(1)=0;
for i=2:T
    if (rand < p)
        x(i)=x(i-1)+deltax;
    else
        x(i)=x(i-1)-deltax;
    end
end

plot(1:T,x)
grid on
xlabel('n');
ylabel('x_n');

```

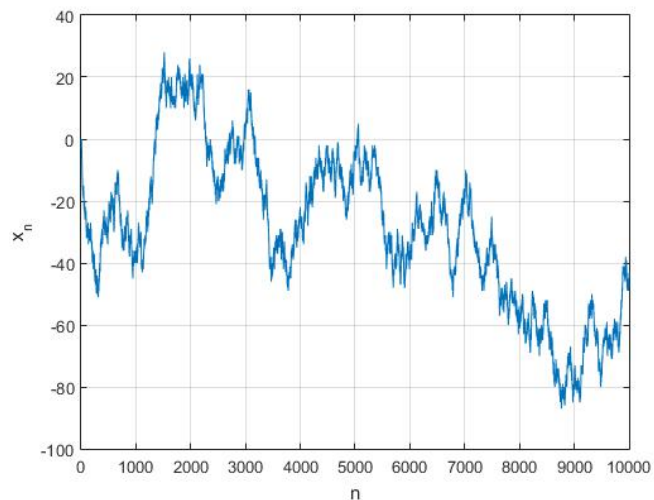


Figura 2.3: Representación de una caminata aleatoria con $p = 0.5$ y $\Delta x = 1$.

El proceso de Wiener como bien he dicho también lo representaré en Matlab, pero no solo de una dimensión como aparece en Mathematica, me parece sugerente representarlo en 2 y 3 dimensiones para conocer que no solo existe de una dimensión y poder sacar conclusiones.

```

%Simulación en dimensión 1
%Valores para los parámetros
T=1; N=500;

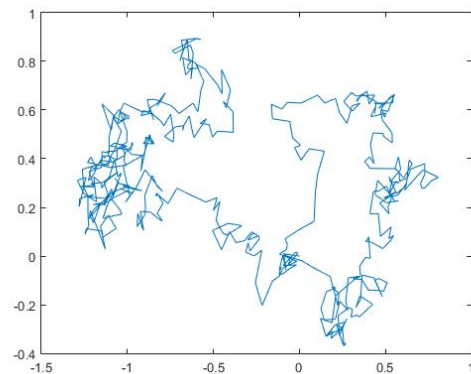
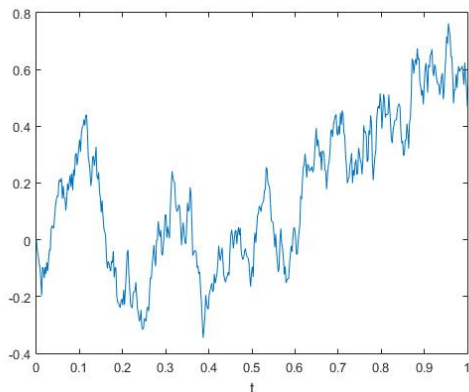
```



```

%Simulación de la trayectoria
B=[]; t=[]; dt=T/(N-1);
t=[0:dt:T]; %Vector de tiempos [0, T]
B(1)=0; %B_{0}=0
for i=1:N-1
    B(i+1)=B(i)+sqrt(dt)*randn; %B(i)=B(t(i))
end
figure
plot(t, B)
xlabel('t')
%Simulación en dimensión 2 y 3
T=1; N=500; dt=T/(N-1); d=3; %dimension
B=zeros(N, d); %B(0)=0
for j=1:d
    for i=1:N-1
        B(i+1, j)=B(i, j)+sqrt(dt)*randn;
    end
end
figure
plot(B(:, 1), B(:, 2))
figure
plot3(B(:, 1), B(:, 2), B(:, 3))

```



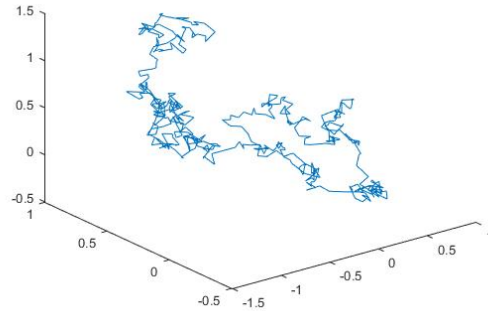


Figura 2.4: Simulación de una trayectoria de un movimiento Browniano unidimensional, en dos y tres dimensiones.

Además también voy a representar diferentes procesos continuos obtenidos a partir del proceso de Wiener que no hemos estudiado en este trabajo pero que son de bastante interés como son el *punteo Browniano* y el *movimiento Browniano Geométrico* utilizado con mucha frecuencia en las finanzas y que desarrollaremos en el capítulo 5.

```
%Se simula una trayectoria de un movimiento Browniano
T=1; N=500; B=[]; dt=T/(N-1); t=0:dt:T; B(1)=0;% B_{0}=0
for i=1:N-1
    B(i+1)=B(i)+sqrt(dt)*randn;
end
%Punteo Browniano
a=0;b=1; P=a+B-t*(B(N)-b+a); C=(b-a)*t+a; %para verificar
figure(1); plot(t, P, t, C); xlabel('t')
```

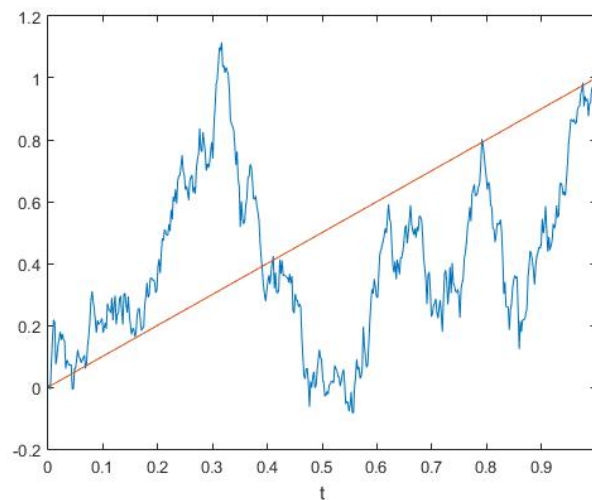


Figura 2.5: Simulación de una trayectoria de un puente Browniano el cual inicia en 0 y termina en 1, esto es, $X(0) = 0$, $X(1) = 1$.

¿Qué es? El **punte Browniano** P es un proceso que se puede definir directamente a partir de un movimiento Browniano estándar W de esta forma:

$$P_t = W_t - tW_1.$$

O como también se puede encontrar: $P_t = a + W_t - t(W_1 - b + a)$ para $t \in [0, 1]$ donde $P_0 = a$ y $P_1 = b$ siendo $a, b \in \mathbb{R}$. Para la cual la media y covarianza son:

$$E[X(t)] = a + t(b - a)cov(s, t) = s \wedge t - st.$$

En nuestro caso hemos dibujado la trayectoria del puente Browniano donde $a = 0$ y $b = 1$.

Este tipo de procesos que se construyen a partir de un proceso de Wiener, se realizan para situaciones determinadas o concretas donde podemos aprovecharnos de sus propiedades específicas para llegar a conclusiones mejores o más fácilmente. La simulación de este tipo de procesos nos ayudan de forma visual a ello.

Capítulo 3

Martingalas

Martingalas son procesos estocásticos que gozan de muchas propiedades importantes, a veces sorprendentes. Es por ello, que cuando estudiamos un proceso X siempre es una buena idea buscar martingalas “asociadas” a X , para poder aprovechar estas propiedades. Además, son muy utilizadas en el ámbito de las finanzas y del *trading*. Un buen análisis y conocimiento de ellas nos pueden hacer ganar mucho dinero o perderlo si nuestro dominio es bajo. Ahora que está muy de moda el mundo de las apuestas puede ser interesante. Pues bien, aquí es conocida la *estrategia martingala*, de esta estrategia podemos oír que se puede ganar siempre, pero no es así, si cogemos una racha de perder necesitaríamos cantidades enormes de dinero para poder apostar y sacar beneficio. Con esto quiero decir, que conocerlas y estudiarlas nos puede venir muy bien para que no nos engañen y a su vez si algún matemático quiere indagar en las finanzas poder tener un control mayor incluso que algún economista. Esta relación de los dos campos matemáticas-finanzas hace que existan conceptos como la *medida martingala* o el *método martingala* aplicados a riesgos, mercados bursátiles o valores de una acción. Pero para poder profundizar en ello nos llevaría una gran cantidad de trabajos como éste, sin embargo, si alguien quiere averiguar más sobre ello existen capítulos muy interesantes en [8] y [17]. Nosotros en este trabajo vamos a conocer más el fundamento matemático de una martingala para conocer sus propiedades y poder aplicar esta base matemática con rigor a otras áreas como es las finanzas. Para ello tomaremos como pauta los libros siguientes [3], [22] y [19].

3.1. Introducción a martingalas

En matemáticas, las martingalas son una categoría de procesos estocásticos cuyo estudio y análisis fue causado al intentar modelar juegos de azar justos. Todo viene de la *estrategia martingala*, en ella un jugador va apostando en un juego de azar, cuando ocurre una pérdida, el jugador tiene la posibilidad de recobrar la pérdida y puede parecer seguro, pero esta vez deberá apostar una cantidad más alta. El problema surge cuando el jugador tiene numerosas

pérdidas seguidas. En ese caso, las cantidades de apuesta para poder recobrar lo perdido son muy elevadas, crecen exponencialmente. Esto hace que si el jugador tiene una racha grande de pérdidas, el jugador puede quedar arruinado al no tener una cantidad suficiente para apostar por el total de sus pérdidas. Es por esto, que en la actualidad los casinos y las casas de apuestas ponen límites máximos de apuestas, para no poder aplicar esta técnica.

La noción de martingala fue incorporado a la teoría de las probabilidades por el ya conocido en este trabajo *Paul Lévy*, pero buena parte de su desarrollo inicial fue realizado por *Joseph Doob*. Lo que lo motivó fue comprobar lo ficticio de estrategias de juegos seguros. Pero este desarrollo de la teoría de martingalas ha hecho que se estudie en otras áreas que no son los juegos de azar justos, consiguiendo grandes aplicaciones. A grandes rasgos el concepto **martingala** hace referencia a una clase de proceso estocástico donde se cumple $E(X_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n) = x_n$. Esto es, que el valor promedio del proceso en un tiempo futuro $n + 1$ es el valor en el último momento observado, x_n . Como vemos aparece la esperanza condicional, la cuál es importante conocer para martingalas.

La esperanza condicional

El operador *esperanza condicional* va a ser de gran ayuda para martingalas. La esperanza condicional es una herramienta clave para el estudio de los procesos estocásticos y trata el problema de predecir los valores de una variable aleatoria sin tener información completa de la misma. Por ello, es importante para desarrollar la intuición necesaria que hay detrás de martingalas. Por lo tanto debemos conocer su definición y algunas de sus propiedades.

Lo primero de todo me gustaría indicar una definición importante tanto para la esperanza condicional como para martingalas.

Definición 3.1. *Una variable aleatoria $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es **integrable** si:*

$$E(|X|) = \int_{\Omega} |X| dP < \infty.$$

*También podemos decir que una variable aleatoria $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es **cuadrado integrable** si:*

$$E(|X|^2) = \int_{\Omega} |X|^2 dP < \infty.$$

A toda la familia de variables aleatorias integrables se expresan mediante $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o L^1 . Lo mismo para la familia de cuadrado integrable $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o L^2 .

A partir de aquí podemos decir que existen diferentes esperanzas aleatorias dependiendo de qué información o qué se ha dado con anterioridad. Me gustaría recalcar que dado el contexto de nuestro trabajo las definiciones de esperanza condicional dadas son siempre en un espacio de probabilidad (X, \mathcal{F}, P) utilizado constantemente en el trabajo. También va a depender si es una variable aleatoria discreta o continua, lo mismo que martingalas.

- **Esperanza condicional de una variable aleatoria dado un evento.**

Definición 3.2. La esperanza condicional de una variable aleatoria integrable X dado un evento $B \in \mathcal{F}$ tal que $P(B) \neq 0$ es:

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

• **Esperanza condicional de una variable aleatoria discreta dada una variable aleatoria discreta**

Definición 3.3. Sean X e Y variables aleatorias discretas definidas en el mismo espacio de probabilidad con función de probabilidad condicional $f_{X|Y}$. La esperanza condicional de X dado $Y = y$ se define como:

$$E[X|Y = y] := \sum_x x f_{X|Y}(x|y)$$

donde,

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{P[Y = y, X = x]}{f_Y(y)} \quad f_Y(y) = \sum_x f(x, y) \quad f(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Y la que vamos a definir nosotros como más importante ya que es en la que vamos a utilizar para la definición de martingalas es la siguiente.

• **Esperanza condicional de una variable aleatoria dada una σ -álgebra**

Definición 3.4. Dada X una variable aleatoria integrable en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y sea \mathcal{G} una σ -álgebra contenida en \mathcal{F} . Decimos que la esperanza condicional de X dada \mathcal{G} se define como la variable aleatoria $E(X|\mathcal{G})$ donde:

1. $E(X|\mathcal{G})$ es \mathcal{G} -medible.
2. Para cada $A \in \mathcal{H}$

$$\int_A E(X|\mathcal{G}) dP = \int_A X dP.$$

Pero como todo concepto matemático tiene sus propiedades. Algunas propiedades son las que nos van a ayudar para aplicarlas en martingalas y en el desarrollo de sus propiedades.

Propiedades de la esperanza condicional

Sea X, Y variables aleatorias independientes, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ y a, b números reales entonces:

1. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.
2. $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.
3. $E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G})$ si X es \mathcal{G} -medible.
4. $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$ si X es independiente de \mathcal{G} .

5. $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$ si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$.
6. Si $X \geq 0$, entonces $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ casi seguramente.
7. Si $X \in \mathcal{G}$ entonces $E(X|\mathcal{G}) = X$ casi seguramente.
8. Si $X \leq Y$ casi seguramente $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$ casi seguramente.
9. $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X|\mathcal{G})$.

Ahora que ya conocemos un poco más sobre la esperanza condicional antes de concluir esta sección con la definición formal de *martingala*. Voy a definir varios conceptos que se encuentran intrínsecos en la definición de ésta.

Definición 3.5 (Filtración). *Una sucesión $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ de sub σ -álgebras es una filtración si es una sucesión creciente en Ω , es decir,*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}.$$

Si interpretamos n como el tiempo, \mathcal{F}_n contiene la información disponible al tiempo n . Esto es, \mathcal{F}_n contiene a todos los eventos A , tal que al tiempo n es posible decir si el evento A ha ocurrido o no.

En particular la filtración natural o canónica de un proceso X_n es aquella sucesión de σ -álgebras definidas por $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\}, n \geq 0$.

Definición 3.6 (Sucesión adaptada). *Una sucesión $\{X_n, n \geq 0\}$ de variables aleatorias es adaptada a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ si $X_n \in \mathcal{F}_n$ para todo n , o lo que es lo mismo es \mathcal{F}_n -medible. Si $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \dots, X_n\}$ decimos que la sucesión es adaptada y llamamos a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ la filtración natural.*

Definición 3.7 (Sucesión previsible). *Una sucesión $\{X_n, n \geq 0\}$ de variables aleatorias es previsible a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ si X_n es \mathcal{F}_{n-1} -medible para cada $n = 1, 2, \dots, n$.*

Una vez conocido estas definiciones previas ya estamos en condiciones para conocer la definición formal de martingala.

Definición 3.8. *Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \geq 0\}$ es llamada **martingala** con respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ si:*

1. $\{X_n, n \geq 0\}$ es integrable. Es decir $E(|X_n|) < \infty$ para todo $n \geq 0$.
2. $\{X_n, n \geq 0\}$ es adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.
3. Para cualesquiera $n \leq m$,

$$E(X_m|\mathcal{F}_n) = X_n. \tag{3.1}$$

Cuando en lugar de (3.1) se cumple la desigualdad $E(X_m|\mathcal{F}_n) \geq X_n$ entonces el proceso es una **submartingala** y si se cumple $E(X_m|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ entonces es una **supermartingala**.

Decimos además que es una L^p -martingala si además $E|X_n|^p < \infty$ para todo n . Y diremos que es L^p -acotada si además $\sup_n E|X_n|^p < \infty$.

Me gustaría comentar que esta definición es para una martingala a tiempo continuo, para tiempo discreto es muy similar lo que cambia es que en lugar para $n \geq 0$ es para $n \in \mathbb{N}$ esto hace que en la tercera condición tendría que ser: para $n = 1, 2, \dots$, se tiene que $E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ y lo correspondiente en las desigualdades de submartingala y supermartingala. Es importante tener claro la diferencia del concepto discreto y continuo como tal para ser capaces de saber qué utilizar en cada momento y poder extrapolar definiciones o ejemplos de una a otra.

Como hemos comentado antes las martingalas tienen su interpretación en término de juegos justos. Si X_n es el capital de un jugador en el tiempo n , tenemos que la desigualdad $E(X_m|\mathcal{F}_n) \geq X_n$, propio a la definición de submartingala, es equiparable a un juego favorable al jugador. Siendo la desigualdad contraria, correspondiente a la de supermartingala, equivale a un juego desfavorable para el jugador.

3.2. Propiedades y resultados de las martingalas

Como hemos dicho al principio del capítulo una de las cualidades de las martingalas es que tienen diferentes propiedades y resultados útiles. En esta sección vamos a comentar algunas de ellas que he considerado más representativas y con más aplicación. El libro en el que nos vamos a basar y que considero con rigor es [19].

En la mayoría de juegos de azar podemos retirarnos en cualquier momento. En este caso el número de rondas que se juegan antes de retirarle la denotaremos por τ . Esta decisión normalmente se toma después de cada ronda, dependiendo del conocimiento previo de nuestras rondas anteriores. Esto indica que τ es una variable aleatoria donde durante cada paso n determinamos si seguir jugando o no, es decir $\tau = n$. Lo que quiere decir que el evento $\{\tau = n\}$ va a estar en la σ -álgebra \mathcal{F}_n que como hemos dicho ilustra nuestro conocimiento hasta el tiempo n . De este hecho podemos obtener un teorema muy interesante.

Definición 3.9 (Tiempo de paro). *Una variable aleatoria τ con valores en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ se denomina **tiempo de paro** con respecto a una filtración si para cada $n = 1, 2, \dots$*

$$\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Tenemos una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ y τ un tiempo de paro. Si en n rondas de juego, X_n representa nuestras ganancias o pérdidas y decidimos retirarnos después de τ rondas. Entonces nuestras ganancias después

de n rondas será el proceso $X_{n \wedge \tau}$ con $n \wedge \tau = \min(\tau, n)$. A este tipo de procesos se les denomina **procesos detenidos**.

Teorema 3.1 (Teorema de paro). *Sea τ un tiempo de paro:*

1. Si $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una martingala, entonces $X_{n \wedge \tau}$ también es una martingala.
2. Si $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una submartingala, entonces $X_{n \wedge \tau}$ también es una submartingala.
3. Si $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una supermartingala, entonces $X_{n \wedge \tau}$ también es una supermartingala.

Demostración. Para ello tenemos que ver que se cumple cada una de las tres condiciones de la definición de martingala. Antes de todo tenemos que para todo $n \geq 0$ $X_{n \wedge \tau}$ es integrable ya que $X_{n \wedge \tau} = X_\tau 1_{(\tau < n)} + X_n 1_{(\tau \geq n)}$. Además, el evento $\{\tau \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ pues su complemento corresponde al evento $\{\tau < n\}$. Como estamos con tiempos de paro ya sabemos que es adaptada a una filtración. Y por último, para $n \geq 0$ se cumple:

$$\begin{aligned} E(X_{(n+1) \wedge \tau} | \mathcal{F}_n) &= E(X_\tau 1_{(\tau < (n+1))} + X_{(n+1)} 1_{(\tau \geq (n+1))} | \mathcal{F}_n) \\ &= X_\tau 1_{(\tau < (n+1))} + 1_{(\tau \geq (n+1))} E(X_{(n+1)} | \mathcal{F}_n) = X_\tau 1_{(\tau < (n+1))} + 1_{(\tau \geq (n+1))} X_n \\ &= X_\tau 1_{(\tau < n)} + X_n 1_{(\tau = n)} + 1_{(\tau \geq n)} X_n - X_n 1_{(\tau = n)} = X_\tau 1_{(\tau < n)} + 1_{(\tau \geq n)} X_n = X_{n \wedge \tau}. \end{aligned}$$

Este es para el caso martingala, para los casos de submartingalas y supermartingalas se demuestra de forma similar. □

He querido tratar este teorema porque de lo que nos informa es que es imposible convertir un juego justo en un juego no justo; un juego desfavorable en uno favorable o un juego favorable en uno desfavorable independientemente del juicio con el que se haya decidido parar de jugar.

Una aplicación: Estrategias de juego

Vamos a examinar la sucesión de variables aleatorias independientemente distribuidas $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ y $P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ y con la filtración natural $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Donde la suma $S_n = X_1 + \dots + X_n$ siendo S_n una martingala que muestra el total de ganancias en una serie de n apuestas justas de una unidad monetaria. Para generalizar, vamos a imaginarnos que el monto de cada apuesta no es uno, sino una cantidad a_n para la n -ésima apuesta. Vamos a pensar que esta cantidad a_n es una variable aleatoria que determina el jugador dependiendo de las $n - 1$ apuestas anteriores. Como hemos visto en una definición anterior es \mathcal{F}_{n-1} -medible, es decir, es un proceso previsible. A esta colección de variables aleatorias $\{a_n\}$ se le denomina una **estrategia de juego**.

Con ellas podemos determinar el capital del jugador $A_n = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ tras la n -ésima apuesta, siendo \mathcal{F}_n -medible. Además sabemos que la estrategia de juego consta de

variables acotadas ya que hay límites de apuesta, esto hace que se cumple que el proceso $\{A_n\}$ sea integrable y cumple la propiedad (3.1) de la definición de martingala:

$$\begin{aligned} E(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(A_n + a_{n+1}X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = A_n + a_{n+1}E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= A_n + a_{n+1}E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = A_n + a_{n+1}(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n) = A_n. \end{aligned}$$

Como siempre quiero mostrar aplicaciones de utilidad no solo matemática, sino para la vida real. Lo que quiero decir con esta aplicación es que bajo cualquier estrategia de juego, el proceso de ganancias $\{A_n\}$ es una martingala siempre y cuando el proceso original S_n lo sea. Para un apostador le advierte que no existe una estrategia de juego que convierta un juego justo en un juego favorable o desfavorable. El resultado es el mismo para submartingalas y supermartingalas. En la fuente donde hemos sacado esta información [22] se analiza el caso particular de una estrategia muy conocida de doblar cada apuesta fallada, llegando a la conclusión de que necesitaríamos un capital promedio infinito.

Martingalas respecto a Cadenas de Markov

Como hemos dicho al principio del capítulo, el hecho de que un proceso estocástico sea una martingala nos puede llevar a conseguir conclusiones y resultados interesantes. No obstante, la mayoría de los procesos importantes carecen de esta propiedad.

Lo que buscamos es conseguir una transformación de estos procesos para convertirlos en martingalas y poder obtener esos resultados y conclusiones del proceso original. Es decir, lo que buscamos es que si $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un proceso estocástico, queremos encontrar una función g donde el proceso $\{g(X_n), n \in \mathbb{N}\}$ sea una martingala.

Pero la existencia de dicha función que transforma a martingalas solo se puede asegurar para las *cadenas de Markov*. Para ello, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2. *Sea $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}$ una cadena de Markov homogénea en el tiempo con probabilidades de transición p_{xy} con $x, y \in \{0, 1, \dots\}$, y sea g una función del estado x tal que:*

$$g(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}g(y). \quad (3.2)$$

Entonces el proceso $\{M_n, n \in \mathbb{N}$ tal que $M_n := g(X_n)\}$, es una martingala respecto a X .

Demostración. Para ello nos basamos en la propiedad de Markov, esto es:

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] &= E[h(X_{n+1})|X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0] \\ &= E[h(X_{n+1})|X_n = x] = \sum_{y=0}^{\infty} p_{xy}g(y) = g(x). \end{aligned}$$

De donde se concluye que es una martingala ya que:

$$E[M_{n+1}|X_n, X_{n+1}, \dots, X_0] = h(X_n) = M_n.$$

□

Ejemplo 3.1. Sea $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ procesos independientes, donde $P(X_i = 1) = p$ y $P(X_i = -1) = 1 - p$, $0 < p < 1$, $i \in \mathbb{N}$. Se tiene:

$$S_{n+1} = S_0 + \sum_{i=1}^{n+1} X_i = S_n + X_{n+1} \quad n = 0, 1, \dots$$

Tal como se demuestra en el Ejemplo 1.28 de [9], se tiene que S_n es una cadena de Markov con probabilidad de transición:

$$p_{xy} = P[X_1 = y - x]. \quad (3.3)$$

Tomamos la función

$$g(x) = \left(\frac{1-p}{p} \right)^x$$

donde $p = P[X_n = 1]$, $n \in \mathbb{N}$ y aplicando (3.3) se cumple que:

$$\begin{aligned} \sum_y p_{xy} \left(\frac{1-p}{p} \right)^y &= \sum_y P[X_1 = y - x] \left(\frac{1-p}{p} \right)^y \\ &= p \left(\frac{1-p}{p} \right)^{x+1} + (1-p) \left(\frac{1-p}{p} \right)^{x-1} = \left(\frac{1-p}{p} \right)^x. \end{aligned}$$

Por lo que podemos decir que la función g cumple la ecuación (3.2) y tenemos que el proceso $\left\{ \left(\frac{1-p}{p} \right)^{S_n} : n = 0, 1, \dots \right\}$ es una martingala respecto a S_n .

Las cadenas de Markov son de los procesos estocásticos más recurrentes en nuestro día a día y tener proposiciones como ésta nos garantiza conseguir buenos resultados para poder llegar a buenas conclusiones.

Teorema de paro opcional y aplicaciones

A continuación voy a enunciar un resultado clásico en la teoría de martingalas como es el *Teorema de Paro Opcional*. Como bien sabéis las martingalas se aplican en inversiones, en juegos de azar, en trading y en todas ellas es importante saber cuándo hay que vender, cuándo hay que retirarse o cuándo hay que parar. Por esto la importancia de este teorema en el que voy a manifestar dos versiones.

Teorema 3.3 (Teorema de paro opcional para martingalas acotadas). Sean $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ una martingala respecto a $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ y τ un tiempo de paro respecto a $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ sabiendo que $P[\tau < \infty] = 1$. Si existe una constante C tal que $|Y_{n \wedge \tau}| \leq C$ casi seguramente (c.s) para todo n , se cumple

$$E[Y_\tau] = E[Y_0].$$

Demostración. Como bien hemos dicho en este trabajo $\{Y_{n \wedge \tau}, n = 0, 1, \dots\}$ es una martingala y según [9] se cumple para todo n que

$$E[Y_{n \wedge \tau}] = E[Y_0].$$

Con la condición de $|Y_{n \wedge \tau}| \leq C$ c.s. para todo n se tiene que $|Y_\tau| \leq C$ c.s. por lo tanto

$$\begin{aligned} |E[Y_0] - E[Y_\tau]| &= |E[Y_{n \wedge \tau}] - E[Y_\tau]| \\ &\leq |E[(Y_{n \wedge \tau} - Y_\tau)1_{(\tau > n)}]| + |E[(Y_{n \wedge \tau} - Y_\tau)1_{(\tau \leq n)}]| \leq 2CP[\tau > n]. \end{aligned}$$

Si tomamos límite para $n \rightarrow \infty$ y usamos la hipótesis del teorema $P[\tau < \infty] = 1$, tenemos que $|E[Y_0] - E[Y_\tau]| = 0$, luego se cumple que $E[Y_\tau] = E[Y_0]$. □

He querido enunciar esta versión del teorema de paro opcional porque nos hace pensar sobre que a pesar de que una martingala modele un juego justo, nuestro capital no se verá incrementado de forma importante durante el juego, indistintivamente del criterio que utilicemos para dejar de invertir, apostar o jugar. Además esta versión también tiene su importancia en el contexto del movimiento browniano. Sin embargo, el teorema de paro opcional es el siguiente.

Teorema 3.4 (Teorema de paro opcional). *Sea $\{X_n\}$ una martingala y sea τ un tiempo de paro finito, ambos respecto a una filtración $\{\mathcal{F}_n\}$, donde*

1. X_τ es integrable.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n 1_{(\tau > n)}) = 0$.

Se cumple que $E(X_\tau) = E(X_n)$, para cualquier $n \geq 1$.

Demostración. Véase [22].

Otra aplicación de este teorema puede ser el cálculo de los tiempos medios de arribo en caminatas aleatorias, esto es por ejemplo el tiempo que demora una señal de radio en viajar desde un transmisor a un solo receptor remoto. Ejemplos de ello podemos verlo en la misma fuente que la demostración.

Teorema de convergencia de Martingalas

Para este apartado voy a definir algunas desigualdades clásicas en martingalas como son las *desigualdades de Doob*. Algunos conceptos como el *cruzamiento* también característico de las martingalas y el *Lema de Fatou*. Es decir voy a poner en contexto la convergencia enunciando todo lo que necesito para llegar al *Teorema de convergencia de Doob para Martingalas*.

Proposición 3.5 (Desigualdad maximal de Doob). *Sea X_n una submartingala no negativa con respecto a la filtración \mathcal{F}_n y definimos $X_n^* = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Entonces para cualquier $\lambda > 0$,*

$$\lambda P(X_n^* \geq \lambda) \leq E(X_n 1_{(X_n^* \geq \lambda)}).$$

Donde 1_A es la función indicadora del conjunto A .

Demostración. Para cada n natural definimos el tiempo de paro como

$$\tau = n \wedge \min\{1 \leq k \leq n : X_k \geq \lambda\}.$$

Por lo tanto, τ es el primer momento hasta n en el que el proceso alcanza el valor λ . Si nunca ocurre este evento, tenemos $\tau = n$. Además, X_n es una submartingala y tenemos que $1 \leq \tau \leq n$, luego $E(X_n) \geq E(X_\tau)$. Notemos que si ocurre que $(X_n^* \geq \lambda)$, entonces $X_\tau \geq \lambda$, y si $(X_n^* < \lambda)$, entonces $\tau = n$. Por lo que

$$E(X_n) \geq E(X_\tau) = E(X_\tau 1_{(X_n^* \geq \lambda)}) + E(X_\tau 1_{(X_n^* < \lambda)}) \geq \lambda P(X_n^* \geq \lambda) \leq E(X_n 1_{(X_n^* < \lambda)}).$$

Esto es,

$$\lambda P(X_n^* \geq \lambda) \leq E(X_n) - E(X_n 1_{(X_n^* < \lambda)}) = E(X_n 1_{(X_n^* \geq \lambda)}).$$

□

Proposición 3.6 (Desigualdad maximal de Doob en L^2). *Sea X_n una submartingala no negativa y cuadrado integrable. Donde $X_n^* = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ se cumple que*

$$E(|X_n^*|^2) \leq 4E(X_n^2).$$

Demostración. Y también para conocer definición de cuadrado intregable, véase [22].

Lema 3.7 (Lema de Fatou). *Si $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ es una sucesión de variables aleatorias tales que $Y_n \geq Y$ c.s. para todo n y alguna variable aleatoria Y tal que $E[|Y|] < \infty$, entonces*

$$E[\liminf Y_n] \leq \liminf E[Y_n].$$

Ahora para poder comenzar la demostración del teorema de convergencia necesitamos la noción de **cruzamiento**. Esto tiene una gran estudio detrás, pero a grandes rasgos es lo que dentro de la *estrategia de cruzamiento* si en un intervalo $[a, b]$ para cada $k = 1, 2, \dots$ ocurre que $\alpha_k = 1$ y $\alpha_{k+1} = 0$ entonces se produce un cruzamiento. Los cruzamientos son una suceión de la forma $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. Pues el número de cruzamientos ocurridos hasta el tiempo n , es decir, el mayor k donde $d_k \leq n$ lo llamaremos por $D_n[a, b]$, siendo $D_n[a, b] = 0$ si no tenemos tal k .

Proposición 3.8 (Desigualdad de cruzamiento). Si X_n es una martingala y $a < b$ entonces

$$(b - a)E(D_n[a, b]) \leq E((X_n - a)^-).$$

Por x^- llamamos a la parte negativa de un número real x , esto es

$$x^- = \max\{0, -x\}.$$

Por lo tanto, ya estamos en condiciones enunciar y demostrar el teorema de convergencia nombrado.

Teorema 3.9 (Teorema de convergencia de Doob para Martingalas). Sea $\{X_n\}$ una supermartingala con respecto a la filtración \mathcal{F}_n tal $\sup_n E|X_n| < \infty$. Entonces existe una variable aleatoria integrable X tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad c.s.$$

Demostración. De la Proposición 3.8 podemos deducir una desigualdad conocida en martingalas

$$E(D_n[a, b]) \leq \frac{E((X_n - a)^-)}{(b - a)} \leq \frac{M + |a|}{b - a} < \infty$$

donde

$$M = \sup_n E(|X_n|).$$

Tal y como hemos visto $D_n[a, b]$ es una sucesión no decreciente entonces

$$E\left(\lim_{n \rightarrow \infty} D_n[a, b]\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(D_n[a, b]) \leq \frac{M + |a|}{b - a} < \infty.$$

Como el conjunto de número racionales es numerable esto implica que para todo racional $a < b$.

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} D_n[a, b] < \infty\right\} = 1. \quad (3.4)$$

A continuación, afirmemos que la sucesión X_n converge a X c.s. suponiendo que

$$\liminf_n X_n < \limsup_n X_n.$$

Entonces si

$$D_n[a, b] \rightarrow \infty \quad \text{si} \quad \liminf_n X_n < a < b < \limsup_n X_n$$

Ya que a, b pueden ser elegidos números racionales entonces se contradice (3.4), lo que prueba la afirmación. Luego solo nos queda ver que el límite X es una variable aleatoria integrable, donde nos será útil en la primera desigualdad utilizar el Lema de Fatou

$$E(|X|) = E\left(\liminf_n |X_n|\right) \leq \liminf_n E(|X_n|) < \sup_n E(|X_n|) < \infty.$$

□

Para esta demostración nos hemos basado en [19]. También podemos encontrar una demostración sobre la convergencia de submartingalas tal y como fue la prueba original de Doob en 1940 en [22]. Voy a comentar un par de notas importantes de la demostración.

Nota 3.1. *El teorema es válido para martingalas ya que toda martingala es una supermartingala. Y como si $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una submartingala si y solo si $\{-X_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una supermartingala. También es válido para submartingalas.*

Nota 3.2. *Hemos visto que las variables aleatorias X_n y el límite X son integrables, afirmamos que X_n converge a X c.s. pero no garantizamos la convergencia en L^1 .*

He querido demostrar este teorema porque la convergencia es una propiedad matemática muy fuerte que nos puede ayudar o aclarar en muchas ocasiones. Sin embargo, la cantidad de propiedades interesantes que tienen martingalas le hacen ser muy utilizadas. Me hubiera gustado poder comentar alguna más, pero la duración de este trabajo no lo permite. Algunas de estas características no nombradas son el teorema del muestro opcional, su comportamiento asintótico, la desigualdad de Azuma, su representación, desigualdad de Jensen... Pero si se quiere conocer más sobre ello, en cualquier fuente que he ido citando durante el capítulo encontrará buena información.

3.3. Ejemplos de Martingalas

Para desarrollar un poco a modo de ejemplo las martingalas he decidido poner uno de [23]. Mi elección se ha debido a que es un ejemplo típico sobre martingalas, en el cual tocamos bastantes conceptos tratados en este trabajo como son una caminata aleatoria, un movimiento browniano discreto unidimensional, adaptación a un juego de apuestas, representación en Matlab...

Ejemplo 3.2. *Vamos a considerar un juego de apuestas donde el jugador al principio tiene una cantidad x de unidades monetarias. Las reglas del juego son, en cada apuesta se debe apostar una unidad y tenemos dos posibilidades perderla o ganarla, vamos a suponer que en todo momento se puede realizar la apuesta.*

Con este ejemplo podemos ver la relación de las caminatas aleatorias con los juegos de apuestas, siendo una partícula con posición inicial x , se puede desplazar hacia la derecha o la izquierda en cada tiempo t . Esto es, sean Y_i variables aleatorias independientes donde se pueden tomar solo los valores $+1$ o -1 con probabilidad $P[Y_i = +1] = p$ y $P[Y_i = -1] = 1-p$, para $0 < p < 1$. Sea $X_0 = x$ la cantidad inicial, definimos la variable X_n como:

$$X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

la cual expresa la cantidad de unidades que tiene el jugador en la apuesta n . Como la cantidad de unidades que se obtendrá en la apuesta $n + 1$ depende exclusivamente de la cantidad de unidades que se tiene al finalizar la apuesta n estamos ante un proceso X_n que es una cadena de Markov. Por lo tanto, aplicando una de los teoremas de la sección anterior podríamos

encontrar una función que lo convierta martingala. La probabilidad de transición es de la forma:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = k) = \begin{cases} p & \text{si } j = k + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = k - 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para $k = 0, 1, \dots$. Se puede verificar que $E[X_n] = x + n(2p - 1)$, ya que $E[Y_1] = 2p - 1$. Veremos que para distintos valores de p obtendremos una submartingala, martingala o supermartingala. Pero primero vamos a comprobar que se verifican las tres condiciones de la definición de martingala:

- $E[|X_n|] \leq |x| + \sum_{i=1}^n E[|Y_i|] = |x| + nE[|Y_1|] < \infty$ luego es integrable.
- Por la propia definición sabemos que X_n es \mathcal{F}_n -medible.
- La tercera es la que nos va a determinar el tipo en función de p

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1} | X_n] = E[X_n + Y_{n+1} | X_n] = X_n + E[Y_{n+1}] = X_n + 2p - 1.$$

Esto es debido a que X_n es un proceso de Markov, la hipótesis sobre las Y_i y la linealidad de la esperanza condicional. Entonces, si tomamos $p = 1/2$ tendremos una martingala ya que se cumple que $2p - 1 = 0$ y que $E[X_n] = E[X_0]$ debido a las propiedades de la esperanza condicional. Del mismo modo si tomamos $p > 1/2$ entonces $2p - 1 > 0$ y tendremos una submartingala con $E[X_n] \geq E[X_0]$; si tomamos $p < 1/2$ entonces $2p - 1 < 0$ y tendremos una supermartingala con $E[X_n] \leq E[X_0]$.

A continuación voy a representar en Matlab las tres situaciones donde lo único que modificaré será p mediante una función de la forma:

```
%Simulación con valores concretos
X0=10;
N=100;
p=0.5;
X=X0*ones(N+1, 1); t=0:1:N;

for i=1:N
    num_ale=unifrnd(0, 1);
    if num_ale<p
        z=-1;
    else
        z=1;
    end
    X(i+1)=X(i)+z;
end
plot(t, X)
```

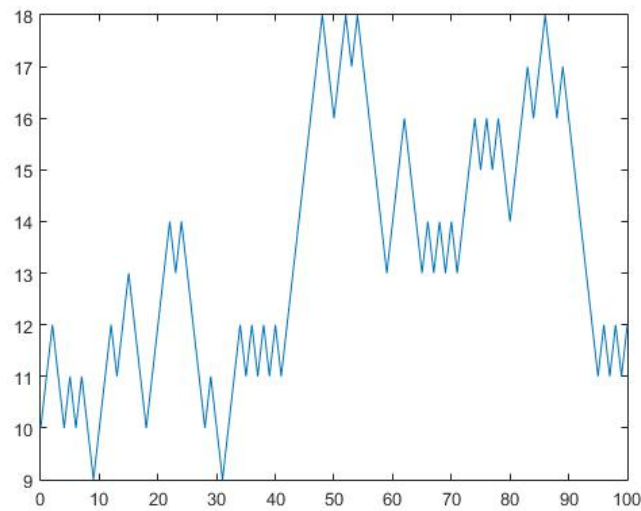


Figura 3.1: Simulación con $X_0 = 10$ y $N = 100$ pasos de una trayectoria de una martingala a partir de una caminata aleatoria con probabilidad $p = 1/2$.

Para la representación de la submartingala y supermartingala no cambiaré ni X_0 ni N , pero tendré que cambiar la probabilidad, siendo $p = 0.3$ para supermartingala y $p = 0.8$ para submartingala. En la representación se puede ver claramente como la supermartingala decrece debido a como sabemos es un juego desfavorable para el jugador y la submartingala crece debido a que es un juego favorable.

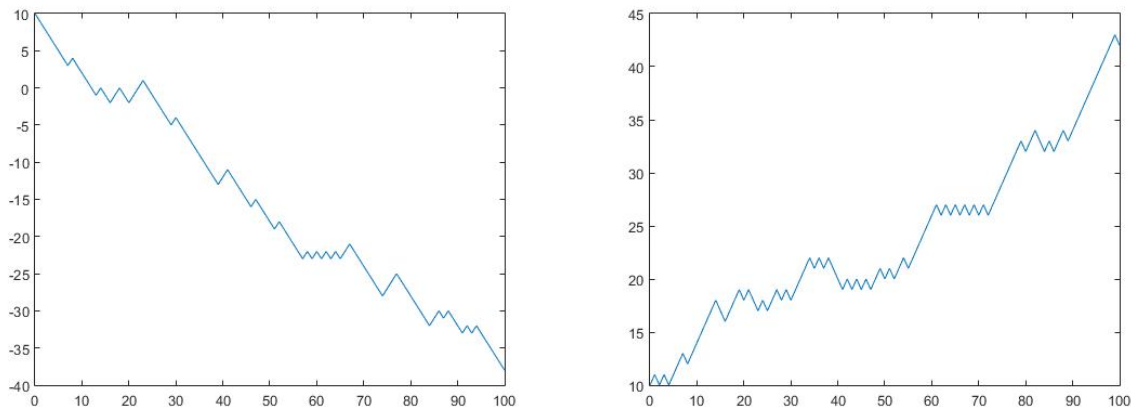


Figura 3.2: Simulación con $X_0 = 10$ y $N = 100$ pasos de una trayectoria de una supermartingala y submartingala a partir de una caminata aleatoria con probabilidades $p = 0.3$ y $p = 0.8$.

Me gustaría acabar este capítulo con el ejemplo más simbólico de procesos estocásticos de tipo martingala que es el *movimiento browniano* y que además hemos dedicado un capítulo en este trabajo. Es por ello que lo voy a demostrar y hablar un poco de la relación que tiene con martingalas.

Proposición 3.10. *El movimiento Browniano B_t es una martingala.*

Demostración. Está claro que cada variable aleatoria del proceso es integrable y que el movimiento Browniano es adaptado a su filtración natural. Además, para cualesquiera que sean los tiempos s y t tal que $0 \leq s \leq t$, se cumple

$$\begin{aligned} E(B_t | \mathcal{F}_s) &= E(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = E(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + E(B_s | \mathcal{F}_s) \\ &= E(B_t - B_s) + B_s = B_s. \end{aligned}$$

Dado que B_s es conocido cuando se condiciona por \mathcal{F}_s y el incremento $B_t - B_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y tiene media cero. Luego cumple las propiedades de martingalas. Además $E(B_t^2)^{1/2} = t^{1/2}$, luego podemos decir que es una L^2 -martingala. □

Sin embargo, no solo el movimiento Browniano es una martingala sino que sus propiedades hacen que se puedan obtener procesos martingalas a partir del movimiento browniano. He aquí su importancia también en este capítulo

Proposición 3.11. *Dado un movimiento Browniano B_t entonces tenemos que:*

1. $B_t^2 - t$ es una martingala.
2. Para cualquier σ , $e^{\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ es una martingala.
3. $\frac{1}{a} B_{a^2 t}$ es una martingala.
4. $B_{t+s} - B_s$ es una martingala.

El porqué he querido resaltar estos casos es debido a que por ejemplo el primero proporciona la caracterización de Lévy del movimiento browniano que nos dice si es movimiento browniano o no lo es. El segundo se llama movimiento browniano exponencial o martingala exponencial y se utiliza en el establecimiento de las propiedades de distribución del movimiento browniano. Los dos últimos se utilizan para obtener un resultado respecto a la no diferenciabilidad del movimiento browniano. Las demostraciones de estos procesos e incluso algún proceso martingala que viene del movimiento browniano los podemos encontrar en [23] y [21].

Vemos claramente la unión que existe entre el movimiento Browniano y martingalas. Ambos son procesos estocásticos ricos en propiedades y presentes en numerosos campos de la ciencia y de la vida real. De ahí la utilidad de su estudio, su conocimiento y su análisis.

Podríamos anotar en este trabajo un montón más de ejemplos de procesos estocásticos que son martingalas, algunos de ellos como la martingala de Casanova, martingala del proceso de Poisson centrado, martingala de la urna de Polya... Pero espero haber causado interés sobre el tema y que el lector investigue en cualquiera de las fuentes proporcionadas en la bibliografía estos ejemplos de gran curiosidad.

Capítulo 4

Cálculo estocástico: teoría de Itô

En este capítulo presentaré una introducción al cálculo estocástico de Itô. El objetivo de este capítulo es estudiar la integral estocástica de Itô que fue definida por *K. Itô* en 1944 y sus propiedades. Expondré el uso y la aplicación de la fórmula de Itô, resolviendo algunos modelos de ecuaciones estocásticas. De esta forma pondré de manifiesto que también existe un cálculo estocástico y que tiene su importancia como cualquier otro tipo de cálculo no solo a nivel teórico sino como hemos visto el término estocástico está presente en nuestro día a día que es en lo que se centra este trabajo. Para ello me basaré principalmente en las fuentes [22] y [21]. Existen muchas otras fuentes interesantes donde poder profundizar, sin embargo en éstas se encuentra de una forma más clara para el lector.

4.1. Integral de Itô

La integración en el caso estocástico debe ser tratada de una forma especial, ya que como hemos visto, se consideran funciones de carácter aleatorio, esto hace que falle la integración de *Riemann-Stieltjes*. Surgen problemas como la convergencia ya que se encuentran procesos con trayectorias que no son de variación acotada o finita como por ejemplo el movimiento Browniano. Esta necesidad inspiró a Itô para construir una teoría de integración estocástica, que fue motivada originalmente debido a la necesidad de construir procesos de difusión como soluciones a ecuaciones diferenciales estocásticas. Como sabemos, no existe una única manera de definir una integral, sin embargo, en este ámbito solo dos enfoques tienen aceptación: el de **Itô** y el de **Stratonovich**. Cada uno se dirige más a un tipo determinado de procesos de difusión. Pero sí que es cierto que Itô se utiliza más en aplicaciones financieras, además la integral de Itô es un tipo especial de proceso estocástico llamado martingalas, que como bien sabemos posee propiedades interesantes. Es por ello que me he decantado más para profundizar en este primer enfoque. El objetivo de esta sección es enunciar la definición de integral de Itô de un proceso estocástico respecto del movimiento browniano. Por lo tanto, sea B_t un movimiento Browniano \mathcal{F}_t -medible, definido en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P)

asociado a una filtración natural y con incrementos independientes ($B_t - B_s$ es independiente de \mathcal{F}_s). Nuestro objetivo es la definición de una integral de la forma

$$\int_0^T X_t dB_t.$$

Sabemos que la integral de Riemann-Stieljes $\int_0^T f dg$ existe si la función f es continua y la función g tiene variación total acotada, esto es:

$$\sup_{\tau} \sum_i |\Delta g_i| < \infty.$$

Pero en nuestro caso, el movimiento browniano tiene variación total infinita, por lo que no podemos usar Riemann-Stieljes. Sin embargo, si las trayectorias del proceso X fueran diferenciables con derivadas acotadas, entonces podríamos resolver la integral por partes:

$$\int_0^T X_t dB_t = X_T B_T - \int_0^T X'_t B_t dt.$$

Así, presentaré el procedimiento que realizó K. Itô para construir la integral $\int_0^T X_t dB_t$ mediante un procedimiento global de tipo probabilístico. Lo primero de todo designaré una serie de procesos que cumplen unas propiedades para poder integrar.

Definición 4.1. Designaremos por $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ al conjunto de procesos estocásticos $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ tales que cumplen:

1. Para cada $t \in [0, T]$, la aplicación $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ definida en $[0, t] \times \Omega$ es medible respecto la σ -álgebra producto $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}_t$, es decir, es $\mathcal{B}_{[0, t]} \times \mathcal{F}$ -medible.
2. X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$.
3. $\int_0^T E(X_t^2) dt < \infty$.

Al cumplir la primera condición decimos que es un proceso *progresivamente medible*, requiere la medibilidad de la restricción del proceso X a cada conjunto $[0, t] \times \Omega$. Con esta propiedad ya podríamos decir que X es adaptado como dice la segunda condición. Y la tercera condición nos dice que el proceso X como función de dos variables (t, ω) pertenece al espacio $L^2([0, T] \times \Omega)$.

Para poder construir la integral estocástica de Itô, el argumento que propuso está dividido en tres partes. Lo he querido hacer cómo lo hizo Itô ya que se aprecia como se las arregló para llegar hasta ella. Primero construiremos la integral estocástica para procesos escalonados en $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$. Segundo, diremos un resultado útil para llegar al tercer paso construyendo la integral estocástica para procesos estocásticos generales en $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$.

Primer paso. Vamos a asumir X como un proceso estocástico escalonado en $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ donde \mathcal{E}_{k-1} es $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -medible y $E(\mathcal{E}_{k-1}^2) < \infty$. Entonces construimos el término muy importante:

$$I(X) = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_{k-1} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}). \quad (4.1)$$

Lema 4.1. Sea $I(X)$ la ecuación definida en (4.1). Entonces se cumple

$$E(I(X)) = 0 \quad E(|I(X)|^2) = \int_0^T E(|X_t|^2) dt.$$

Demostración. Véase [21].

Segundo paso. Ahora vamos a mostrar un lema clave para construir la integral estocástica a partir de (4.1) para procesos generales en $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$.

Lema 4.2. Dado $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ y dada una sucesión $\{X_{t_n}, n \geq 1\}$ de procesos estocásticos escalonados se satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T E(|X_t - X_{t_n}|^2) dt = 0. \quad (4.2)$$

Tercer paso. Por último, mediante los resultados del primer y segundo paso construimos la integral para $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ siendo de la forma

$$\int_0^T X_t dB_t.$$

Sea $\{X_{t_n}, n \geq 1\}$ una sucesión de procesos estocásticos escalonados adaptados de manera que la expresión (4.2) se cumple. Entonces, por el Lema 4.1 y como hemos definido $I(X_n)$ en el primer paso tenemos

$$E(|I(X_n) - I(X_m)|^2) = \int_0^T E(|X_{t_n} - X_{t_m}|^2) dt \rightarrow 0.$$

Cuando $n, m \rightarrow \infty$. Esto hace que la sucesión $\{I(X_n)\}$ sea una sucesión de Cauchy en $L^2(\Omega)$ teniendo buenas propiedades para la integración y el cálculo estocástico. Ya estamos en condiciones de definir la integral de Itô.

Definición 4.2 (Integral estocástica de Itô). El límite $I(X)$ definido como

$$I(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(X_n) \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

es llamado *integral estocástica de Itô* y se denota por

$$I(X) = \int_0^T X_t dB_t.$$

Notar que la integral de Itô $I(X)$ es definida en $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ y para cada $a, b \in \mathbb{R}$ y cualesquiera dos procesos estocásticos $X, Y \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$, I es claramente lineal. Esto es

$$I(aX + bY) = aI(X) + bI(Y).$$

Integral de Itô como sumas de Riemann

La integral de Itô también puede entenderse en términos de sumas de Riemann evaluando el integrando en los puntos finales izquierdos de los intervalos de la partición correspondiente. Me parece interesante el siguiente teorema ya que es hacer algo nuevo pero más como lo solemos hacer, por ello lo voy a enunciar.

Teorema 4.3. Dado $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$ y dado $E(X_t X_s)$ una función continua de t y s . Entonces tenemos

$$\int_0^T X_t dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

donde $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T\}$ es una partición de $[0, T]$ y $\|\Delta_n\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$.

Demostración. Véase [21]. Es una gran demostración para comprender sumas de Riemann.

A modo de ejemplo vamos a calcular algunos procesos estocásticos con el fin de mostrar que la integral estocástica de Itô nos permite calcular algunas integrales estocásticas.

Ejemplo 4.1. Tenemos el proceso estocástico

$$\int_0^t B_t dB_t.$$

Utilizando la ecuación del teorema

$$\int_0^t B_t dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

Teniendo en cuenta que la variación cuadrática del movimiento browniano es igual a t y otras características del movimiento browniano

$$a(b - a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - (b - a)^2),$$

y

$$\sum_{k=1}^n (B_{t_k}^2 - B_{t_{k-1}}^2) = B_{t_n}^2 - B_{t_0}^2.$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t B_t dB_t &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n B_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (B_{t_k}^2 - B_{t_{k-1}}^2 - (B_{t_{k-1}} - B_{t_k})^2) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2. Tenemos el proceso estocástico

$$\int_0^t t dB_t.$$

Utilizando la ecuación del teorema

$$\int_0^t t dB_t = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n t_{k-1} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}).$$

Consideramos

$$c(b - a) = db - ca - b(d - c).$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^t dB_t &= \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n t_{k-1} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \\ &= \sum_{k=1}^n (t_k B_{t_k} - t_{k-1} B_{t_{k-1}}) - \sum_{k=1}^n B_{t_k} (t_k - t_{k-1}) = tB_t - \sum_{k=1}^n B_{t_k} (t_k - t_{k-1}) = tB_t - \int_0^t B_t dt. \end{aligned}$$

Propiedades de la integral estocástica de Itô

La integral de Itô tiene una gran cantidad de propiedades, de hecho se puede ver como una martingala. Todo ello hace que sea muy utilizada en el cálculo estocástico. De todas ellas he elegido tres propiedades que son fundamentales en el análisis estocástico. Estas tres propiedades son: *la propiedad de media cero, la propiedad de Martingala y la isometría de Itô.*

Propiedad de media cero

Teorema 4.4 (Propiedad de media cero). *Dado $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$. La esperanza de la integral de Itô de X_t es cero, es decir, se cumple*

$$E \left(\int_0^T X_t dB_t \right) = 0.$$

Demostración. Dada la definición de integral de Itô, tenemos

$$E \left(\int_0^T X_t dB_t \right) = E \left(\lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) \right) = \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n E(X_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})).$$

Para demostrarlo, utilizamos las propiedades de la esperanza condicional que ya hemos estudiado en este trabajo.

$$E(X_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})) = E(E(X_{t_{k-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) | \mathcal{F}_{t_{k-1}})) = E(X_{t_{k-1}} E(B_{t_k} - B_{t_{k-1}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}))$$

$$E(X_{t_{k-1}} E(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})) = E(X_{t_{k-1}}) E(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) = 0.$$

□

Propiedad de Martingala

Con esta propiedad lo que queremos ver es que la integral de Itô es una martingala y por lo tanto aprovechamos de sus propiedades además de las suyas propias. De hecho, también nos ayuda a demostrar la continuidad del proceso estocástico en cuestión, esto es, que todas las trayectorias de la integral estocástica son funciones continuas en ese intervalo.

Teorema 4.5 (Propiedad de Martingala). *Sea $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$. Entonces el proceso estocástico*

$$X_t = \int_a^T X_s dB_s, \quad a \leq t \leq T,$$

es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t, a \leq t \leq T\}$.

Demostración. Es muy extensa pero se ve claramente lo que queremos observar con esta propiedad, véase [21].

Isometría de Itô

Esta aclaración es bastante importante en el análisis estocástico. Lo que se hace es calcular el segundo momento de la integral de Itô para conseguir su varianza.

Teorema 4.6 (Isometría de Itô). *Dado $X \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$. La siguiente isometría dice*

$$E \left(\left(\int_0^T X_t dB_t \right)^2 \right) = E \left(\int_0^T X_t^2 dt \right).$$

Demostración. Véase [21].

Las propiedades en el cálculo son muy importantes porque son las que nos aportan un manejo a la hora de trabajar en él. Pues lo mismo ocurre en el cálculo estocástico, cuanto más propiedades conozcamos y las sepamos utilizar de una forma fluida mejor seremos en la materia. Existen muchas más propiedades como la de *localidad* por ejemplo, si queremos conocer más sobre estas propiedades [22].

4.2. Fórmula de Itô

Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores y muchos otros no presentados en este trabajo la evaluación de integrales estocásticas puede ser un ejercicio bastante complejo. Pero esto no solo ocurre solamente en este caso, normalmente una integral de Riemann no se calcula a partir de la definición, sino que existen fórmulas bien conocidas para calcular integrales. Esto también ocurre por ejemplo en el cálculo de *Newton-Leibniz*, donde el Teorema Fundamental del Cálculo nos proporciona un método para evaluar integrales definidas, lo que simplifica notoriamente el cálculo. Pues lo mismo ocurre en las integrales estocásticas, en muy pocos casos se calculan estas a partir de su definición. La famosa fórmula de Itô es la **herramienta** fundamental para este tipo de integrales. Su aplicación tiene una gran importancia cuando se estudia una determinada *ecuación diferencial estocástica* dando una solución de ella o incluso determinando la ley de probabilidad que ésta sigue...

En realidad es un método fundamental que generaliza la conocida regla de la cadena pero en el cálculo clásico para las integrales estocásticas. Vamos a recordar como era la regla de la cadena para funciones integrables f y g .

$$\frac{df}{dt}(g(t)) = f'(g(t))g'(t).$$

Para poder definir la fórmula de Itô, primero voy a introducir la definición de proceso de Itô, que solo está restringido a los procesos en $L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$.

Definición 4.3 (Proceso de Itô). *El proceso estocástico X_t es un proceso de Itô si*

$$X_t = X_a + \int_a^t f(s)dB_s + \int_a^t g(s)ds \quad a \leq t \leq T. \quad (4.3)$$

Siendo en forma diferencial

$$dX_t = f(t)dB_t + g(t)dt$$

donde X_a es una variable aleatoria \mathcal{F}_a -medible y $f, g \in L^2_{aT}([0, T] \times \Omega)$.

Dada la ecuación (4.3) vamos a establecer un nuevo teorema de la fórmula de Itô. La demostración es bastante larga, pero sugiero leer la encontrada en [10].

Teorema 4.7 (Fórmula de Itô). *Sea X_t un proceso de Itô dado por la ecuación (4.3) y sea $\theta(t, x)$ una función continua con derivadas parciales continuas $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$. Entonces tenemos que:*

$$\begin{aligned} \theta(t, X_t) &= \theta(a, X_a) + \int_a^t \frac{\partial\theta}{\partial x}(s, X_s)f(s)dB_s \\ &+ \int_a^t \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}(s, X_s) + \frac{\partial\theta}{\partial x}g(s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(s, X_s)f(s)^2 \right) ds. \end{aligned}$$

En forma diferencial,

$$d\theta(t, X_t) = \frac{\partial\theta}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial t}(t, X_t)dt.$$

Si la fórmula de Itô no es suficientemente útil, en ocasiones se utiliza la *tabla de Itô*. Podemos conocer más información, ver como se utiliza e incluso algún ejemplo en [21].

Me gustaría enunciar este resultado con una versión más simple. Para ello tenemos que saber que una función es de *clase C^2* si es dos veces diferenciable y su segunda derivada es una función continua.

Teorema 4.8 (Fórmula de Itô II). *Sea $f(x)$ una función de clase C^2 . Entonces se verifica*

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)ds.$$

Podemos encontrar una forma de obtener este resultado usando el Teorema de Taylor en [22]. Me parece una forma sencilla y elegante de obtener el resultado.

Para ver cómo se aplica la fórmula de Itô, vamos a utilizar el Ejemplo 4.1 y el Ejemplo 4.2, intentado observar cómo se aplica y sus ventajas, con el fin de obtener el mismo resultado.

Ejemplo 4.3. *Considerar los procesos estocásticos introducidos en el Ejemplo 4.1*

$$X_t = \int_0^t B_t dB_t.$$

Aplicando el Teorema 4.8, consideramos la función $\theta(t, x)$, tal que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) = x.$$

Por lo tanto tomamos $\theta(t, x) = x^2/2$ cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = x \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 1.$$

Entonces con ello conseguimos

$$d(B_t^2/2) = B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.$$

Integrando en ambos lados de la igualdad de 0 a t , se tiene

$$\int_0^t d(B_t^2/2) = \int_0^t B_t dB_t + \int_0^t \frac{1}{2}dt.$$

De aquí, obtenemos el mismo resultado que coincide con el Ejemplo 4.1, esto es

$$\int_0^t B_t dB_t = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

Ejemplo 4.4. Vamos a considerar los procesos estocásticos introducidos en el Ejemplo 4.2

$$X_t = \int_0^t t dB_t$$

Aplicando el Teorema 4.8, consideramos la función $\theta(t, x)$, tal que

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(t, x) = t.$$

Por lo tanto tomamos $\theta(t, x) = tx$ cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = x, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = t \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0.$$

Entonces con ello conseguimos

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t.$$

Integrando en ambos lados de la igualdad de 0 a t , se tiene

$$\int_0^t d(tB_t) = \int_0^t B_t dt + \int_0^t t dB_t.$$

De aquí, obtenemos el mismo resultado que coincide con el Ejemplo 4.2, esto es

$$\int_0^t t dB_t = tB_t - \int_0^t B_t dt.$$

Hemos visto que con cálculos más sencillos y más cotidianos aplicando la Fórmula de Itô, hemos obtenido los mismos resultados que con su definición. De ahí, la importancia de esta fórmula ya que nos da facilidades para el cálculo estocástico. Existen muchos otros ejemplos donde poder aplicar la fórmula de Itô y ver la gran herramienta que es, una fuente donde comprobarlo es [22].

4.3. El Teorema de Girsanov

Me gustaría presentar en este capítulo este teorema que juega un papel importante en la teoría de procesos estocásticos. Ya que como he dicho y se ha visto durante el trabajo, el término estocástico tiene mucha finalidad en las finanzas. Este teorema establece que al cambiar el coeficiente de deriva (último sumando de la ecuación (4.3)) de un proceso Itô dado, la ley del proceso no cambiará drásticamente. Es decir, construye de forma clara una medida de probabilidad que permite transformar un movimiento browniano con tendencia o deriva en un movimiento browniano sin tendencia, siendo este último definido en un espacio de probabilidad equivalente.

Teorema 4.9 (Teorema de Girsanov). *El movimiento browniano con deriva q en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P)*

$$\bar{W}_t = W_t + qt,$$

es un movimiento browniano normalizado en el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, Q) .

Demostración. Se puede probar por la caracterización de Lévy. Pero, esta demostración es altamente extensa, la podemos encontrar en [10].

A continuación, voy a explicar un poco de una forma más práctica este teorema, para luego poder ver un ejemplo aplicado a las finanzas en el Capítulo 5.

Lo que vamos a hacer es un cambio de probabilidad. Sea un proceso de Wiener W en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , existe una medida de probabilidad Q donde el proceso

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t = W_t + qt,$$

el cuál es un proceso de Wiener. Incluso, P y Q son equivalentes, y su densidad de Radon Nykodim (véase [21]) es de la forma

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-qT - \frac{1}{2}q^2W_T}.$$

Esto nos insinúa el modelo

$$\frac{dB}{B} = rdt, \quad \frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW^*$$

en el nuevo espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, Q) , donde W^* es un proceso de Wiener. De aquí podemos analizar que en Q el rendimiento esperado de ambos activos coincide, siendo r . Si lo estudiamos y resolvemos podemos ver que las soluciones de estas ecuaciones son

$$B_t = e^{rt}, \quad S_t = S_0 e^{\sigma W_t^* + (r - \sigma^2/2)t}.$$

De aquí sacamos que

$$\frac{S_t}{B_t} = S_0 e^{\sigma W_t^* - \sigma^2/2 t}.$$

Por lo tanto, las conclusiones de este teorema son: cambiamos P por Q , μ por r y W por W^* , y que los activos B y S tienen igual rendimiento en Q .

¿Cuál es la significación de Q ? Para esto vamos a utilizar algunas de las propiedades de la integral estocástica:

- $\left(\int_0^t b_t dW_t^*\right)_{t \geq 0}$ es una Q -martingala.
- Si $dX_t = a_t dt + b_t dW_t^*$ entonces X es Q -martingala si y solo si $a_t = 0$.

Esta forma de verlo más hacia activos financieros esta cogida de [16]. Por último, quería comentar que este teorema no acaba aquí, tiene muchas aplicaciones en modelos financieros, por ejemplo cada vez que se necesita derivar un activo o una dinámica de tasas bajo una nueva medida de probabilidad, como sucede en *Black-Scholes*, en el modelo de *Liber Market...*

4.4. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Por último, voy a hacer una breve introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas, que cómo hemos dicho antes la fórmula de Itô es una herramienta para poder resolverlas. Pero el mundo de las ecuaciones diferenciales estocásticas es enorme y de gran utilidad, aquí solo voy a introducirlas para poder ver en el siguiente capítulo una aplicación a las finanzas como es el modelo Black-Scholes. De hecho, a menudo los precios de los activos financieros siguen ecuaciones diferenciales estocásticas.

Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, y sea $\{B_t\}$ un movimiento browniano adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$.

Definición 4.4 (Ecuación diferencial estocástica). Sean $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ dos funciones de $[0, T] \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} . Entonces llamamos una ecuación diferencial estocástica a una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad (4.4)$$

definida para valores de t en el intervalo $[0, T]$ y con una variable aleatoria de condición inicial X_0 que es \mathcal{F}_0 -medible e independiente del movimiento Browniano. Además podemos interpretar la ecuación (4.4) como una ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Como podemos observar la primera es una integral de Riemann, así como la segunda es una integral estocástica de Itô. Como bien podíamos deducir a X_t se le denomina proceso de Itô.

De esta definición podemos decir varias cosas. A $b(t, X_t)$ se le llama *coeficiente de deriva* o *de tendencia* y al coeficiente $\sigma(t, X_t)$ se le llama *coeficiente de difusión*. Si el coeficiente de difusión es nulo, entonces tendremos una ecuación diferencial ordinaria de las que hemos visto en la carrera como se resuelve si conocemos la condición inicial X_0 :

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t).$$

La solución de la ecuación será un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ con trayectorias continuas adaptadas a la filtración browniana. Este proceso se puede explicar como el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista, esto es la deriva, pero que es alterado por un ruido aditivo que es la parte de la difusión. De hecho, los procesos solución se llaman *procesos de difusión*.

Bueno pero tal y como ocurre con las ecuaciones diferenciales deterministas dadas en varias asignaturas de la carrera existen teoremas básicos de existencia y unicidad. Son teoremas muy potentes ya que el hecho de saber que una ecuación tiene solución y es única, puede ahorrarnos muchos intentos de resolverla. Pues lo mismo ocurre con las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema 4.10 (Teorema de existencia y unicidad). *Si los coeficientes $b(t, x)$ y $\sigma(t, x)$ de la ecuación (4.4) satisfacen la condición de Lipschitz en la variable x ,*

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2,$$

y la condición de crecimiento en x ,

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

siendo $K > 0$ una constante. En estas condiciones podemos decir que existe un proceso estocástico $\{X_t\}$ que es solución de (4.4) que es adaptado a la filtración, tiene trayectorias continuas y es uniformemente acotado en $L^2(P)$, esto es, $\sup_{0 \leq t \leq T} E(X_t^2) < \infty$ e incluso es único.

En el libro en el cual me he basado en esta sección [22] no aparece la demostración de este importante teorema. Sin embargo, en [13] aparece una demostración muy extensa, rica en bastante contenido matemático.

Este teorema estará considerado de los más importantes de las ecuaciones diferenciales estocásticas, por lo que no podía introducir el tema sin enunciarlo. Además esta sección nos ha puesto en contexto para el siguiente capítulo donde aparece Black-Scholes. Llegados a este punto en el trabajo, ya conocemos suficientes herramientas de los modelos estocásticos para poder aplicarlas, concretamente en aplicaciones financieras.

Capítulo 5

Aplicaciones a las finanzas

En este capítulo voy a recoger las semillas sobre modelos estocásticos que he ido dejando a lo largo del trabajo en los capítulos anteriores, para poder aplicarlo a ejemplos o situaciones de la vida real. Debido a que el tema del trabajo es muy utilizado en las finanzas le voy a dar un enfoque más financiero. De las aplicaciones más importantes que he elegido debido a que concuerdan con lo estudiado en este trabajo son *el modelo de Black-Scholes*, *el movimiento Browniano Económico o Geométrico* (ya comentado con anterioridad) y algún ejemplo del *Teorema de Girsanov*. Para ello, me voy a basar principalmente en [15], [18] y [22].

5.1. El modelo Black-Scholes

Este modelo fue a causa de la gran expansión de los mercados de derivados que tuvo lugar en los años 70 del siglo XX, lo que provocó que *Black, Scholes y Merton* dieran un modelo muy verosímil que detallaba con bastante exactitud los precios de las opciones sobre acciones (que es el derivado no trivial más usado en la actualidad). Además una aplicación de la fórmula de Itô, estudiada en el capítulo anterior, es la fórmula de Black-Scholes. Lo primero de todo vamos a ponernos en contexto sobre el modelo de Black-Scholes.

El modelo de Black-Scholes es de tiempo continuo $t \in [0, T]$ y posee dos activos:

1. $B = (B_t)_{t \in [0, T]}$ éste evoluciona de una manera determinista, regido por:

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt, \quad B_0 = 1,$$

en el cual B representa a un bono y r es la tasa de interés por unidad de tiempo.

2. El precio de la acción $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$, que éste sí que es de evolución aleatoria (proceso estocástico), que se basa en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW, \quad S_0 = x,$$

donde μ es el *retorno medio*, σ es la *volatilidad* y W es un *movimiento Browniano*. Pues lo que se hace es dar sentido práctico a la la expresión dW .

En su versión original supone que los precios de las acciones siguen un movimiento browniano geométrico, algo que ejemplificaremos más adelante, esto es

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Siendo W_t un movimiento Browniano sobre un espacio de probabilidad filtrado (Ω, \mathcal{F}, P) y la filtración \mathcal{F}_t .

Con todo esta información y una vez que utilizamos la fórmula de Itô y consideraciones relacionadas con la teoría de derivados financieros como son la construcción de un portafolio o la valuación de opciones se llega a la ecuación en derivadas parciales que dictamina el precio de los derivados. Si el valor de la acción a tiempo t es $f(t, X_t)$ y r es la tasa de interés entonces

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + r S_t \frac{\partial f}{\partial X_t} = r f \quad \text{con } f = f(t, X_t).$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de **Black-Scholes**. Para sacar la solución de la forma que utilizan los economistas y quitarnos los diferenciales voy a expresar la misma ecuación pero de otra manera

$$H_t(x, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x, t) + r x H_x(x, t) = r H(x, t) \quad \text{con } H(x, T) = f(x).$$

Ahora vamos intentar resolver esta ecuación para poder conseguir el precio de una opción. La solución a la ecuación anterior con Φ la función distribución de $N(0, 1)$ vista en nuestra fuente es:

$$H(x, t) = x\Phi(x_+(x, t)) - e^{-rT} K\Phi(x_-(x, t))$$

con

$$x_+(x, t) = \left(\log \frac{x e^{r(T-t)}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) / (\sigma\sqrt{T-t})$$

$$x_-(x, t) = \left(\log \frac{x e^{r(T-t)}}{K} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right) / (\sigma\sqrt{T-t})$$

Donde el valor de la opción de compra con $t = 0$ es:

$$V(S_0, T) = S_0\Phi(x_+) - e^{-rT} K\Phi(x_-)$$

con

$$x_{\pm} = \left(\log \frac{S_0 e^{rT}}{K} + \frac{1}{2}\sigma^2 T \right) / (\sigma\sqrt{T})$$

Me gustaría expresar una solución a esta ecuación de forma más explícita encontrada en la página 12 de [25] para luego mostrar un breve ejemplo que determina el precio de las opciones de compra.

$$C(S, t, K) = S\Phi(\omega) - K e^{rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t}) \quad (5.1)$$

con

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2 t/2 - \log K/S}{\sigma\sqrt{t}}$$

Ejemplo 5.1. *El precio actual de una acción es de 30€ y tiene una volatilidad estimada de 0.2€. Si el interés nominal del dinero es del cuatro por ciento anual, una opción de compra que expira dentro de 3 meses con un precio de ejercicio de 35€, debe costar:*

Como $t = 0.25$ años, $r = 0.04$, $\sigma = 0.2$, $S = 30$ y $K = 35$ sustituyendo en la ecuación

$$\omega = \frac{(0.25)(0.4) + (0.2^2)(0.25/2) - \log(35/30)}{(0.2)(\sqrt{0.25})} \approx -1.3915 \quad \text{y} \quad \omega - \sigma\sqrt{t} = -1.4915.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.1), obtenemos que

$$C(S, t, K) = 30\Phi(-1.3915) - 35e^{(-0.04)(0.25)}\Phi(-1.4915) \approx 0.1077€.$$

¿Pero por qué es tan importante el modelo de Black-Scholes? Como vemos la solución no depende de μ que es el rendimiento del activo subyacente de la opción. Los parámetros de los que depende son r y σ que son más fáciles de calcular y conocer. Además, al aparecer r y no μ , se puede transformar en:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW = r dt + \sigma d\left(W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t\right).$$

Donde al designar como

$$W_t^* = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t,$$

que como hemos visto en el capítulo anterior es la ecuación del Teorema de Girsanov. Por lo tanto, vemos cómo está todo ligado, tanto Itô, como Black-Scholes, como el movimiento browniano geométrico, como Girsanov. Es lo bueno de este trabajo que está todo fuertemente cohesionado.

A continuación, voy a graficar en MATLAB un ejemplo muy interesante donde podemos ver este hecho de forma visual encontrado en [15]. Se trata de la simulación del comportamiento del precio de las acciones de una empresa industrial australiana durante un período de cinco años. El código es el siguiente:

```
%programa que simula el crecimiento del precio de las acciones
%de una empresa.
randn('state',100)
mu=0.00447;sigma=0.244; %valores de los parametros de la EDE
T=5;N=1000;deltat=T/N;
X=zeros(5,N);
X(:,1)=5.77;%condición inicial
for i=1:5
for j=1:N
X(i,j+1)=X(i,j)+mu*X(i,j)*deltat+sigma*X(i,j)*normrnd(0,deltat);
end
```

```

end
plot([0:deltat:T],X(1,:), 'b-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(2,:), 'r-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(3,:), 'y-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(4,:), 'g-'),hold on
plot([0:deltat:T],X(5,:), 'c-'),hold on
plot([0:deltat:T],sum(X)/5, 'k-'),hold off
xlabel('Tiempo(años)', 'FontSize', 12)
ylabel('Precio', 'FontSize', 16, 'Rotation', 0, 'HorizontalAlignment', 'right')
%se muestran 5 simulaciones asi como su valor medio.

```



Figura 5.1: Simulación del precio de acciones de una empresa por Black-Scholes.

Gracias a este tipo de ilustraciones realizadas por una empresa o por un agente financiero, se puede ver de forma muy visual que por ejemplo la acción negra no experimenta grandes cambios, siendo en el tercer año su valor más alto. A su vez existen acciones como la azul oscuro que tiene un gran crecimiento, pero que es contrarrestada con la roja que tiene un gran decrecimiento. De esta forma, mediante conocimiento de Black-Scholes podemos programar algo así que nos proporciona de una forma sencilla cómo va nuestra empresa en el mundo bursátil.

5.2. Movimiento Browniano Geométrico

Como ya adelantaba en el capítulo 2, para poder hablar del Movimiento Browniano Geométrico necesitaba conocer cálculo estocástico, Itô y aspectos relacionados con Black-Scholes, ya que este movimiento es de amplio uso en finanzas y nos ayuda a representar el precio de

algunos bienes que van fluctuando siguiendo el movimiento financiero. En concreto el movimiento Browniano Geométrico consigue obtener una relación entre el precio actual de un activo con sus posibles precios futuros. Además a más alto nivel de lo que vamos a introducir en este trabajo, nos informa de que los pagos futuros de un activo podemos verlos normalmente distribuidos y que la desviación típica de esta distribución se puede estimarse con los datos del pasado. Como ya conocemos la aplicación de este proceso, lo que voy a realizar en esta sección es ver como podemos obtener el movimiento Browniano Geométrico de dos maneras distintas: la que en 1965 P. Samuelson propuso y la otra aplicando el cálculo de Itô, para comprobar que lo dado anteriormente es aplicable.

-Forma de P. Samuelson

Samuelson propuso que los precios de una acción G se regían mediante

$$G_t = G_0 e^{(\sigma W_t + \nu t)},$$

donde W_t es un movimiento Browniano. A G se le denominó movimiento Browniano Geométrico o Económico. Si conociéramos la fórmula del activo con riesgo S de Black-Scholes, la podemos verificar, que es lo que vamos a hacer, y ya que es función de W , podemos aplicar Itô. De la forma

$$f(x, t) = G_0 e^{(\sigma x + \nu t)}$$

tenemos que

$$G_t = f(W_t, t).$$

Cuyas derivadas parciales son:

$$f_x(x, t) = \sigma f(x, t), \quad f_{xx}(x, t) = \sigma^2 f(x, t), \quad f_t(x, t) = \nu f(x, t),$$

y aplicando Itô

$$dG_t = df(W_t, t) = \sigma G_t dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 G_t dt + \nu G_t dt.$$

Si dividimos todo por G_t obtenemos

$$\frac{dG_t}{G_t} = \left(\nu + \frac{1}{2} \sigma^2\right) dt + \sigma dW_t = \mu dt + \sigma dW_t,$$

en la cual $\mu = \nu + \frac{1}{2} \sigma^2$. Por lo que podemos afirmar que el movimiento browniano económico cumple la definición del activo con riesgo en Black-Scholes. Además como $\mu = \nu + \frac{1}{2} \sigma^2$, la fórmula para S es

$$S_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right) t\right]$$

Vemos que el término $\frac{1}{2} \sigma^2 t$ se asemeja al de la fórmula de Itô.

Samuelson, en su forma de describir el movimiento, vio que el Movimiento Browniano Geométrico es la generalización natural de añadir ruido a la evolución de un activo sin riesgo.

Ahora vamos a ver la otra forma, donde aplicar cálculo de Itô, buscando que la solución sea la misma.

-Solución del Modelo Browniano Geométrico aplicando el Cálculo de Itô.

Para ello, vamos a resolver la ecuación diferencial estocástica que es conocido que define el movimiento browniano geométrico y es de tipo Itô con condición inicial:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 = s_0. \quad (5.2)$$

Siendo B_t un movimiento Browniano. Para resolverla vamos a aplicar el *Lema de Itô* que enunciamos a continuación.

Lema 5.1 (Lema de Itô). *Sea X_t un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista x_0 :*

$$dX_t = f(t, x_t)dt + g(t, x_t)dB_t, \quad t \geq 0 \quad y \quad X_0 = x_0.$$

Y sea $F(t, x)$ una función $F : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ donde las derivadas parciales existen y son continuas entonces:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

Una vez conocido este lema proseguimos y escribimos la ecuación (5.2) en forma integral, esto es:

$$\int_0^t dS_r = \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r.$$

O lo que es lo mismo

$$S_t - S_0 = \int_0^t \mu S_r dr + \int_0^t \sigma S_r dB_r.$$

Ahora tenemos que aplicar el Lema de Itô que hemos introducido con la siguiente identificación:

$$X_t = S_t, \quad f(t, x_t) = f(t, S_t) = \mu S_t, \quad g(t, x_t) = g(t, S_t) = \sigma S_t$$

con

$$F(t, x) = \log(x).$$

Y como queremos aplicar el Lema de Itô, necesitamos calcular una serie de derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x) = 0, \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x) = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Por lo que

$$\log(S_t) - \log(s_0) = \int_0^t \left(\mu S_r \frac{1}{S_r} + \frac{1}{2} (\sigma S_r)^2 \left(\frac{-1}{(S_r)^2} \right) \right) dr + \int_0^t \sigma S_r \frac{1}{S_r} dB_r.$$

Si seguimos simplificando obtenemos:

$$\log\left(\frac{S_t}{s_0}\right) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dr + \int_0^t \sigma dB_r.$$

$$\log\left(\frac{S_t}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(B_t - B_0).$$

Si nos fijamos en la definición de movimiento Browniano tenemos que $B_0 = 0$ con probabilidad 1, es lo que hace que tengamos:

$$\log\left(\frac{S_t}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(B_t),$$

$$\frac{S_t}{s_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t},$$

$$S_t = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Esta última ecuación es el proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica y se denomina Movimiento Browniano Geométrico. Como podemos apreciar coincide con la solución que obtuvimos en la primera forma. Lo que quiero destacar es que gracias a los conocimientos previos hemos podido resolver o entender este movimiento que como hemos dicho es muy valioso en las finanzas.

Para acabar esta sección me gustaría ilustrar de forma visual como se describe la dinámica del Movimientos Browniano Geométrico que como sabemos la determina la ecuación diferencial estocástica (5.2) y utilizaré la solución que hemos obtenido para graficar rutas o caminos que puede llevar a cabo el movimiento. Lo haré mediante MATLAB como en anteriores ocasiones con unos datos prefijados que tomaré, cuyo código es:

```

mu      = 0.08/250;
sigma   = 0.25/sqrt(250);
dt      = 1/250;
npaths  = 100;
nsteps  = 250;
S0      = 23.2;
% BM
epsilon = randn(nsteps, npaths);
W        = [zeros(1,npaths); sqrt(dt)*cumsum(epsilon)];

% GBM
t = (0:nsteps)'+dt;
Y = bsxfun(@plus, (mu-0.5*sigma.^2)*t, sigma*W);
Y = S0*exp(Y);
plot(Y)

```

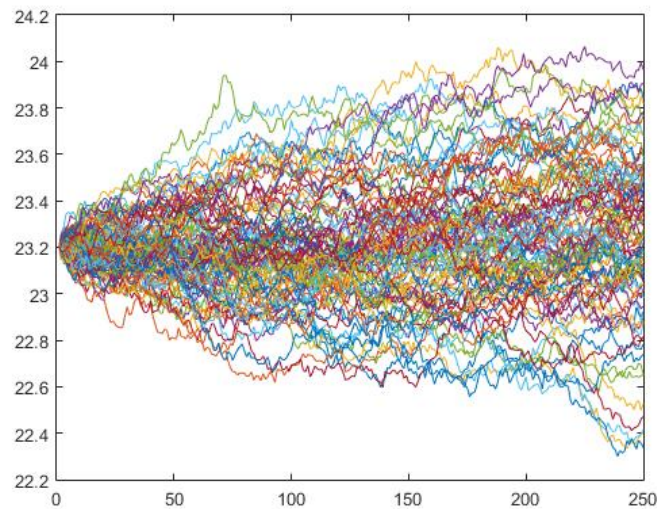


Figura 5.2: Caminos generados a partir del Movimiento Browniano Geométrico.

He elegido esperar a analizar el movimiento Browniano Geométrico hasta este capítulo debido a su importancia ya que en el capítulo 2 no teníamos con conceptos necesarios para poder entender su solución y su utilidad. En la Figura 5.2 podemos ver diferentes caminos que puede tomar el movimiento Browniano Geométrico, esto llevado al mundo de las acciones, puede ser las diferentes progresiones o trayectorias que puede tener la acción. Esto, junto a otras propiedades de modelos estocásticos nos pueden ayudar a saber que progresión elegirá dicha acción con una determinada probabilidad.

5.3. Ejemplos del Teorema de Girsanov

Como bien hemos adelantado en el Capítulo 4, el Teorema de Girsanov también se aplica en las finanzas. Además haciendo una pequeña transformación en Black-Scholes podemos llegar a ecuaciones que explica el Teorema de Girsanov. Sobre su utilidad en el mundo económico hay mucho donde podemos sacar información y ver diferentes ejemplos donde es productivo aplicarlo. Pero a modo de resumen, la utilidad de este teorema consiste en generar ambientes de neutralidad a un riesgo que puedan tener los activos derivados, dicho de otro modo, conseguir situaciones donde el precio derivado de un activo no dependa de los agentes que provocan el riesgo, por ello es necesario cambiar la tendencia del proceso. Por lo tanto, estamos ante un teorema que nos ayuda cuando existe riesgo financiero. Podemos encontrar numerosos ejemplos de ello en [1]. Además comentar que existen una gran cantidad de teoremas que son variantes del Teorema de Girsanov. A continuación, voy a escribir un par de ejemplos introductorios, para que veamos donde se utiliza.

Ejemplo 5.2. *Suponemos que el proceso de precios de un activo se escribe como*

$$dS = S(\mu dt + \sigma dW).$$

O como hemos visto es equivalente

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Si convertimos esta ecuación a un proceso que se llama de precios descontados tenemos

$$\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t = S_0 e^{((\mu - r) \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}.$$

Y para que posea propiedades este proceso lo convertimos en una martingala, que eso se puede hacer si y solo si $\mu - r = 0$, esto es, $\mu = r$. Por esto para poder valorar pasamos al proceso $dS = S(rdt + \sigma dW)$.

Lo que se está haciendo en este ejemplo es modificar la medida consiguiendo que el proceso \widetilde{S}_t se convierta en una martingala y poder aprovecharnos de sus propiedades productivas en economía. Pues bien, para poder demostrar esto se requiere del Teorema de Girsanov.

Ejemplo 5.3. De nuevo un ejemplo donde hay que conocer conceptos económicos pero que vemos la utilidad del Teorema. Hay que verificar que el valor del portafolio descontado es una Q -martingala, esto es

$$\frac{H(S_t, t)}{B_t} \text{ es } Q\text{-martingala.}$$

En economía se sabe que $H/B = e^{-rT} H$. Aplicamos Itô y obtenemos

$$d(e^{-rT} H) = e^{-rT} (-rHdt + dH).$$

Y se sabe que $dH = rHdt + bS\sigma dW^*$, que si sustituimos tenemos

$$d\left(\frac{H(S_t, t)}{B_t}\right) = bS_t\sigma dW_t^*.$$

Si volvemos al capítulo 2 donde enuncié el teorema, se verifica que la tendencia es nula y como dice una de las propiedades si ocurre esto es un Q -martingala. Y como las martingalas como bien sabemos conservan el valor esperado, podemos decir que para el precio de la opción con pago $f(S_T)$

$$V(x, T) = H(S_0, 0) = E_Q(e^{-rT} H(S_T, T)) = e^{-rT} E_Q(f(S_T))$$

debido a la condición final $H(x, T) = f(x)$.

Vemos que hacen falta conceptos económicos para realizar este ejercicio, pero lo que quiero transmitir son ejemplos donde el Teorema es una herramienta para resolver problemas financieros. La conclusión que se obtiene de este ejercicio es que el precio de la opción según Black-Scholes es el valor esperado del pago f en la medida Q , esta probabilidad se denomina de *riesgo-neutral*. De nuevo, en este ejercicio hemos tenido que saber de conceptos tratados en este trabajo como es aplicar Itô y Black-Scholes.

Para acabar este capítulo me gustaría decir que en la mayoría de fuentes de la bibliografía podemos encontrar ejemplos donde los procesos estocásticos y el cálculo estocástico se utiliza con carácter económico o financiero. Es por ello que cada vez buscan más matemáticos en ese mundo, ya que la base de lo que se utiliza son Matemáticas y conocer toda esta cantidad de teoremas, definiciones y propiedades comprendiéndolas como hemos visto y hecho nosotros, nos ayudan a poder aplicarlo en ejemplos reales.

Conclusiones

En este trabajo hemos conseguido introducirnos en el campo de los procesos estocásticos, descubriendo que es un mundo muy amplio donde se ha estudiado y se sigue estudiando y analizando mucha teoría sobre ello. Gracias a dicha teoría se puede modelar y predecir una gran cantidad de procesos y situaciones, siempre con un carácter de aleatoriedad. De ahí, que tenga tanta importancia en el ámbito financiero y en los mercados bursátiles. Lo hemos estado viendo y dejando ejemplos a lo largo del trabajo, culminando con un último capítulo dedicado a resultados que se utilizan en el día a día en las finanzas, como son por ejemplo el teorema de Black-Scholes o el Movimiento Browniano Geométrico.

No es casualidad que cada vez se busquen más matemáticos en las bolsas europeas, en los bancos, en consultorías, como analistas financieros,... Hemos visto la importancia de estos modelos y procesos, y saber y conocer el fundamento matemático que hay detrás de ellos es muy importante. Siempre saber el por qué de las cosas, cómo funcionan, sus propiedades, de dónde vienen nos puede dar una ventaja con nuestro competidor. Y trabajos como éste ayudan a ver una utilidad matemática y a crear una curiosidad matemática-financiera no vista durante la carrera, pero que puede ser una gran herramienta en el mundo laboral.

También me gustaría resaltar la importancia del movimiento Browniano o proceso de Wiener ya que desde que aparece en el capítulo 2, se encuentra presente hasta el final del trabajo. Esto implica que el movimiento Browniano, sin lugar a dudas es un pilar importante en este tema y está implícita o explícitamente en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo en ambientes estocásticos.

Aparte del movimiento Browniano que se encuentra muy presente, llama la atención cómo ha ido evolucionando el trabajo ya que lo que dábamos en el capítulo anterior lo necesitábamos en el posterior. Por ejemplo, la probabilidad para los procesos estocásticos, éstos para explicar el movimiento Browniano, este movimiento lo necesitábamos para martingalas, martingalas para la fórmula de Itô y todo ello junto en el último capítulo, donde se pueden ver unas pocas de las muchas aplicaciones que tienen. Por eso considero que es un tema y un trabajo muy cohesionado y esta cohesión la da las Matemáticas.

Durante mi propia investigación de las fuentes del trabajo me ha llamado la atención la gran cantidad de ejemplos de uso corriente sobre cualquier materia o ciencia, que se pueden

modelar con procesos estocásticos. Esto se ha visto también en el trabajo, con ejemplos en todos los capítulos queriendo siempre ver las aplicaciones de lo estudiado. Quiero darle importancia a las simulaciones gráficas realizadas en MATLAB, que nos ayudan a obtener conclusiones y resultados de una forma más visual. Además han conseguido que conozca y aprenda otro lenguaje computacional numérico distinto a los que he visto en la carrera como *Wolfram Mathematica*, *Sage* o *R*. Pudiendo afirmar que MATLAB es una herramienta bastante potente y eficaz para este tipo de acciones.

Por último, concluyo que ésta es una pequeña introducción a un campo del conocimiento que no para de explorarse y que las Matemáticas ayudan en gran medida a no solo aplicar sino a darle una solidez a los argumentos y a analizar más sobre ello, lo que la hace que sea útil no solo en las finanzas sino en muchas áreas de conocimiento.

Bibliografía

- [1] B. H. ARREDONDO: *Un modelo estocástico para los precios de futuros del petróleo*. Tesis Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, 2012.
- [2] J. R. BUCHANAN: *An undergraduate introduction to financial mathematics*. World Scientific Publishing, Nueva York, 2008.
- [3] P. BALDI: *Stochastic Calculus. An Introduction Through Theory and Exercises*. Springer, Cham, Suiza 2017.
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-62226-2.pdf>
- [4] L. BREIMA: *Probability*. Addison-Wesley Series in Statistics, 1968.
- [5] J. L. DOOB: *Stochastic Processes*. John Wiley and Sons, 1953.
- [6] J. CÁRCAMO: *Espacios de probabilidad*. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid.
- [7] E. M. CABAÑA: *El proceso de Wiener y el Teorema del Límite Central*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. IX, No. 2, 2002.
- [8] R. J. ELLIOT Y P. E. KOPP: *Mathematics of Financial Markets*. Springer, Nueva York, 2005.
<http://link.springer.com/book/10.1007%2Fb97681>
- [9] R. G. HERNÁNDEZ: *Una introducción a la Teoría de Martingalas*. Universidad de Sonora, División de Ciencias exactas y naturales. Departamento de Matemáticas, 2002.
- [10] H.H. KUO: *Introduction to Stochastic Integration*. Springer-Verlag, Nueva York, 2006.
- [11] F. MACIÀ Y G. OLEAGA: *Procesos estocásticos y ecuaciones diferenciales: una introducción*. Universidad Politécnica de Madrid, 2005.
<http://dca.in.etsin.upm.es/fabricio/Docencia.html>
- [12] A. D. MALDONADO: *Probabilidad de ruina con el momento clásico de Cramer-Lundberg para distribuciones de cola ligera*. Tesis Universidad tecnológica de la Mixteca, 2011.
- [13] O. MIRONES: *Ecuaciones diferenciales estocásticas y aplicaciones*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de Cantabria, 2019.

- [14] F. MONTES SUAY: *Procesos Estocásticos para Ingenieros: Teoría y aplicaciones*. Departament d'Estadística i Investigació Operativa, Universitat de València, 2007.
- [15] E. MORDECKI: *Modelos estocásticos en finanzas*. Univesidad de la República, Montevideo, Uruguay, 2010.
- [16] E. MORDECKI: *Procesos de Lévy en matemática financiera y actuarial*. Centro de Matemática, Montevideo, Uruguay, 2000.
<http://kolmogorov.cmat.edu.uy/~mordecki/cursos/utem/>
- [17] A. PASCUCCI Y W. J. RUNGALDIER: *Financial Mathematics: Theory and Problems for Multi-period Models*. Springer, Milán, 2012.
<http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-88-470-2538-7>
- [18] D. PÉREZ: *Cálculo estocástico en finanzas: Aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción del activo subyacente FCC.MC en el IBEX-35*. Universidad Politécnica de Valencia <http://cotizacion.imn.upv.es/Dani>
- [19] L. PÉREZ: *Procesos auto-recursivos de orden uno, su relación con las martingalas y su aplicación en la predicción de ciclones en México*. Tesis para obtener el título, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- [20] M. PITARCH: *El movimiento browniano como límite del paseo aleatorio: el teorema de Donsker*. Trabajo final de grado, Grado en Matemáticas, Facultad de Matemáticas e Informática - Universidad de Barcelona, 2019.
- [21] S. RANILLA: *Anticipating Stochastic Integration*. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2019.
- [22] L. RINCÓN: *Introducción a los procesos estocásticos*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM, 2011.
<http://www.matematicas.unam.mx/lars>
- [23] J. R. ROJAS: *La fórmula de Itô en la resolución de procesos de difusión con aplicaciones en física*. Escuela Politécnica Nacional, Quito 2016.
- [24] G. SERNA: *Modelos estocásticos en las finanzas*. Trabajo Fin de Grado, Universidad de La Rioja, 2013.
- [25] R. VÉLEZ: *Introducción a la valoración de opciones*. Departamento de Estadística e Investigación Operativa UNED.
- [26] PÁGINA WEB DE CADENAS DE MARKOV: <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf>
- [27] PÁGINA WEB SOBRE PROCESOS ESTOCÁSTICOS: <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema2pe.pdf>

- [28] PÁGINA WEB DE WOLFRAM MATHEMATICA: <https://reference.wolfram.com/language/ref/WienerProcess.html>
- [29] PÁGINA WEB DE EJEMPLOS DE PROCESOS: <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema5pe.pdf>
- [30] PÁGINA WEB SOBRE CAMINATAS ALEATORIAS MATLAB: http://users.df.uba.ar/gsolovey/fisica2/Matlab_RW/random_walk.html
- [31] PÁGINA WEB SOBRE MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO MATLAB:
<https://riptutorial.com/es/matlab/example/3891>

