UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Conceptos para el estudio de estrategias ganadoras en juegos combinatorios

Autor/es

IGNACIO AMAT PÉREZ

Director/es

EDUARDO SÁENZ DE CABEZÓN IRIGARAY

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20

publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Conceptos para el estudio de estrategias ganadoras en juegos combinatorios

Realizado por:

Ignacio Amat Pérez

Tutelado por:

Eduardo Sáenz de Cabezón Irigaray

Logroño, febrero de 2020

Resumen

En este trabajo se tratan los juegos combinatorios, esto es, aquellos juegos en los que hay dos jugadores, que poseen toda la información del mismo (información perfecta) y donde no existe el azar. En primer lugar, empezaremos introduciendo algunas nociones que permitirán entender mejor este concepto de juego combinatorio, así como aquellas teorías matemáticas que se han centrado en su estudio, como son la Teoría de Ramsey o la Teoría de Juegos Combinatorios. También, vemos cómo es posible analizar la complejidad y las estrategias que pueden existir en este tipo de juegos. Por último, se realizan diferentes estudios de juegos combinatorios, algunos de los cuales ya han sido estudiados y resueltos como el juego de Chomp o el juego de Nim; y otros que aún no han sido estudiados como es el juego de la Chascona.

Abstract

In this paper we deal with combinatorial games, that is, those games in which there are two players, who have all the information of the game (perfect information) and where there is no chance. Firstly, we will begin by introducing some concepts that will allow a better understanding of this idea of combinatorial games, as well as those mathematical theories that have been centred on their study, such as Ramsey's Theory or the Combinatorial Game Theory. Also, we see how it is possible to analyze the complexity and the strategies that can exist in this type of games. Finally, we carry out different studies of some combinatorial games, some of which have already been studied and solved like Chomp's game or Nim's game; and others that have not been studied yet like Chascona's game.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Nociones previas

Como matemáticos el estudio de los juegos es de gran interés, por todo lo que ello representa. Esto se debe a que el estudio de estrategias ganadoras, la interacción entre los diferentes jugadores, los diversos estados del juego o las reglas a seguir, se pueden modelizar y generalizar aplicándolo a los problemas de la vida real. Con esto nos referimos a que el estudio teórico de los juegos puede ser extrapolado a los conflictos reales, de tal forma que aplicando estrategias similares o explorando procedimientos parecidos a los aplicados en el desarrollo del juego, se podrá buscar una solución al problema real.

En este sentido, desde el punto de vista matemático podemos diferenciar dos definiciones de la palabra juego. La primera de ellas se refiere a los juegos sociales donde un número de individuos debe tomar decisiones al mismo tiempo y donde la recompensa para cada uno de ellos es una función basada en las elecciones de todos los individuos. Cada individuo posee su propia función de recompensas, y por tanto surge la pregunta de cómo tomar decisiones para maximizar dichas recompensas. Estos han sido de gran importancia en el estudios de economía o ciencias sociales, en particular los conocidos como juegos de dos jugadores de suma cero no cooperativos. Un ejemplo de ellos es el conocido Dilema del Prisionero. La segunda definición se refiere a los juegos combinatorios, estos son los modelos matemáticos de los juegos de tablero, que la gente encuentra divertidos e interesantes. Por lo general, los juegos utilizados para el entretenimiento conllevan un elemento de azar, pero estos juegos combinatorios por definición no contienen esta posibilidad; es más, a veces se les denomina también juegos sin azar. Ejemplos de juegos pertenecientes a esta categoría son por ejemplo el ajedrez, el tres en raya, el juego de Nim o el Go.

1.1. Elementos de un juego

La idea más general que uno tiene en mente sobre el concepto de juego puede definirse como una situación en la que dos o más individuos, sometiéndose a unas reglas preestablecidas deben tomar decisiones que, consideradas conjuntamente, conducen a un resultado.

Ahora parece obvio introducir el concepto que se tiene de cada uno de los elementos que lo constituyen. Así, un juego se compone de varios elementos como son los jugadores, las acciones, las recompensas y la información del juego. Este último elemento es conocido como las reglas del juego cuyo objetivo es describir qué pasará en cada momento del mismo. Con el objetivo de maximizar los beneficios durante sus respectivos turnos, los jugadores establecerán planes de actuación, es decir, las estrategias que deben tomar según la información disponible en cada momento del juego. Estas estrategias serán llevadas a cabo hasta que, según establezcan las reglas, se obtenga un resultado que especificará las diferentes recompensas obtenidas por cada uno de los jugadores.

Esta forma de describir un juego ayuda tanto al creador como a los participantes. Por un lado, los términos empleados aseguran al creador que los detalles importantes del juego se han especificado correctamente, y por otro lado, esta especificación facilita a los participantes la comprensión del mismo.

De este modo, podemos definir con más detalle los elementos que componen un juego:

- Jugadores: Participantes que toman decisiones en el juego. Se necesita al menos un jugador para poder desarrollar un juego y, por lo general, existirán dos jugadores.

- Estrategias: Lista con opciones óptimas para cada jugador en cualquier momento del juego. Cada jugador tiene al menos dos estrategias, ya que tener una sola no sería una estrategia. Éstas están caracterizadas por contener elementos de incertidumbre que provocan que el jugador asigne probabilidades a los diferentes resultados del juego.

- Pago/recompensa: Resultado del juego para cada jugador, pueden ser medidos en términos de utilidad o bienestar. En general se supone que cada jugador puede ordenar los pagos de mayor a menor y de esta forma seleccionar la o las estrategias que le permitan obtener el pago máximo.

La idea de juego que se abordará a lo largo de este trabajo salvo que se diga lo contrario, será el concepto de juego combinatorio. Intuitivamente vamos a ver que un juego combinatorio tiene las siguientes propiedades tal y como se describe en el libro *Winning Ways for your Mathematical Plays* [9]:

- El juego tiene dos jugadores, que de ahora en adelante llamaremos Izquierda y Derecha a los que denotaremos por I y D respectivamente, que mueven alternativamente.
- Ambos jugadores poseen información completa sobre el juego, por lo que no existen los movimientos de azar.
- Existe un conjunto de reglas que especifican los movimientos de cada jugador dada una posición determinada.
- El juego posee una posición inicial particular, existe un número finito de movimientos y el juego también termina tras un número finito de jugadores.
- Las reglas del juego provocan que el juego tenga 3 posibles finales: El jugador I gana, el jugador I pierde o el juego termina en empate.

Teniendo en cuenta estos conceptos previamente mencionados, podemos dar una definición más formal de concepto de juego.

Definición 1.1.1 (Juego)**.** Denotemos un juego particular G entre dos jugadores A y B por $G[S_A, S_B, U_A(a,b), U_B(a,b)]$ donde S_A, S_B representa el conjunto de estrategias disponibles de los jugadores A y B, $U_A(a,b)$ y $U_B(a,b)$ representan las utilidades o pagos obtenidos cuando un jugador toma una estrategia particular ($a \in S_A$, $b \in S_B$).

A la hora de estudiar y analizar los diferentes juegos que existen, es importante también la forma en que éstos pueden ser representados. Ahora bien, como se verá más adelante en este trabajo, habrá formas de representar los juegos que sean más idóneas que otras a la hora de realizar su estudio. De este modo, será posible representar los juegos mediante dos formas, la forma normal y la forma extendida.

Decimos que un juego está en forma normal, cuando la lista de todos los posibles resultados de cada jugador, con las posibles combinaciones de sus estrategias, viene dada para cualquier secuencia de decisiones en el juego. Este tipo de juegos no depende de la elección de estrategia por parte del jugador. Mediante esta representación, se muestran los jugadores, las estrategias y las recompensas en una matriz; en donde, cada jugador tiene diversas estrategias especificadas por el número de filas y de columnas, mostrándose en el interior de dicha matriz las diferentes recompensas que obtiene cada uno de ellos. En este tipo de juegos se asume que los jugadores actúan simultáneamente o sin saber la elección que toma el otro. Ejemplos típicos de esta forma de representar los juegos son algunos como el Dilema del Prisionero, que aunque por sus características no serán objeto de estudio de este trabajo, sí que son de interés con propósitos ilustrativos para este tipo de representación de los juegos.

Ejemplo 1.1.1. *La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a ocho años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor [2].*

Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado, este juego puede mostrarse en forma de matriz. Tal y como se puede observar en la figura 1.1 las recompensas obtenidas del juego corresponden con las decisiones que tomen los jugadores, y puesto que estas son decisiones que se toman al mismo tiempo o sin conocimiento previo de la decisión del oponente, el hecho de estar representada en forma de matriz no añade ningún factor de orden o prioridad en la decisión tomada, pero sí que muestra el resultado obtenido tras la toma de ambas decisiones por parte de los jugadores.

		PRISIONERO 2	
		Confesar	Mentir
PRISIONERO 1	Confesar	-8 , -8	0 , -10
	Mentir	-10 , 0	-1 , -1

Figura 1.1: Matriz de resultados del juego Dilema del prisionero [2].

Por otro lado, aquellos juegos que poseen algún orden a considerar se representan de forma extendida. Estos se representan como árboles en los que cada vértice o nodo representa un instante en que el jugador ha de tomar una decisión. El jugador se especifica junto a cada vértice, las líneas que parten del vértice corresponden a las diferentes acciones que puede tomar el jugador y las recompensas se especifican en las terminaciones de las ramas. Los juegos que serán de interés para el estudio de este trabajo son aquellos que por lo general se representan en su forma extendida. Ejemplos típicos de este tipo de representaciones son juegos tales como el ajedrez, las damas o la batalla de sexos.

Ejemplo 1.1.2. *Una pareja ha acordado quedar por la noche para asistir a un evento pero no logran acordarse a qué evento habían decidido ir, si a un partido de fútbol o a un espectáculo de ópera, por lo que deben ponerse de acuerdo. El marido preferiría ir a ver el partido de fútbol, mientras que la mujer preferiría ir a ver el espectáculo de ópera. Ambos preferirían ir al mismo sitio juntos antes que a sitios distintos [1].*

Así, en cuanto un miembro de la pareja se pronuncie en su elección de asistencia para el espectáculo nocturno, el otro sabrá qué es lo que deberá escoger para que ambos puedan disfrutar al máximo de la velada. Estas posibles decisiones vienen representadas por la figura 1.2, en donde puede comprobarse que si los miembros de la pareja toman decisiones contrarias su recompensa (en este caso su satisfacción) será nula puesto que prefieren asistir con su pareja al evento. Sin embargo según la elección del primer miembro de la pareja, debido a sus intereses, habrá uno de ellos que salga beneficiado por la elección tomada.

1.2. Teorías matemáticas

En lo que sigue de sección, entraremos en contacto con algunas de las diferentes teorías matemáticas que abordan el estudio de los juegos.

La primera de ellas parece evidente y necesaria para el estudio de juegos, la Teoría de Juegos, de gran relevancia en el ámbito de la economía y otros ámbitos como la política o la biología. Permite el análisis de diferentes modelos de juego, de cara a estudiar patrones y comportamientos, así como las estrategias a llevar a cabo para obtener los beneficios y resultados buscados. Sin embargo, para el objetivo de este trabajo no posee tanta relevancia y por ello no sera objeto de estudio. Este lugar lo ocupará la Teoría de Ramsey con el estudio de grafos y las formas o métodos de encontrar estructuras

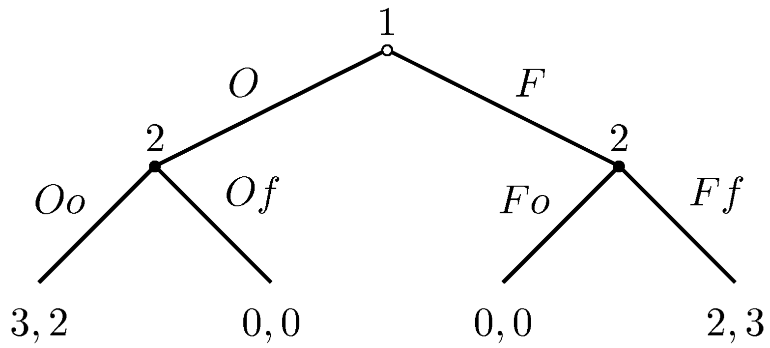

Figura 1.2: Árbol de resultados de la batalla de sexos, donde la elección O (Ópera) o F (Fútbol) corresponde a la primera decisión tomada por un miembro de la pareja y o (Ópera) o f (Fútbol) a la decisión tomada por el segundo miembro de la pareja [1].

ordenadas que cumplan unas propiedades dentro de estructuras más complejas y la Teoría de Juegos Combinatorios, que aunque bastante relacionada con la Teoría de Juegos y el análisis de los mismos, veremos que ésta se centra únicamente en los juegos secuenciales con información perfecta. No solo veremos el interés que puede tener el estudio de estos juegos, sino que también procederemos a su análisis viendo su complejidad y las estrategias a seguir para salir victorioso, así como también su aplicación a algunos juegos tradicionales.

1.2.1. Teoría de Juegos

La Teoría de Juegos es un área de la matemática aplicada que emplea modelos para estudiar interacciones en estructuras formalizadas de incentivos (los "juegos"). Esta teoría se centran en el estudio de estrategias óptimas así como también el comportamiento observado y previsto de los individuos que interactúan en ellos. Se formalizó a partir de los trabajos de John von Neumann y Oskar Morgenstern, antes y durante la Guerra Fría por cuestiones de estrategia militar a causa del concepto de destrucción mutua.

La teoría clasifica a los diferentes tipos de juegos en diversas categorías en función del número de jugadores implicados, la simetría del juego, la cooperación entre los jugadores o el método que hay que aplicar para resolverlos. Esta clasificación será de gran utilidad posteriormente cuando se introduzca la Teoría de Juegos Combinatorios.

1.2.2. Teoría de Ramsey

Para poder desarrollar y comprender esta teoría es necesario presentar ciertos conceptos básicos previamente sobre la Teoría de Grafos y Combinatoria siguiendo los estudios de Bollobás [10], Cirre [14] y Merayo [23]. En primer lugar, estará la noción de grafo y subgrafo que permitirán representar relaciones binarias entre los elementos de un conjunto.

Definición 1.2.1. Se denomina grafo a todo par $G = (V, A)$, donde V es un conjunto finito no vacío y A es un conjunto formado por 2-subconjuntos de elementos distintos de V. Los elementos de V se llaman vértices o nodos del grafo G y los elementos de A son las aristas de G. También puede denotarse como $V = V(G)$ y $A = A(G)$.

De esta forma, al hablar de grafo entendemos que tenemos un conjunto de elementos (los vértices) y una cierta propiedad binaria que cada par de objetos podrá o no satisfacer. Cuando esta propiedad se satisface se dice que la arista a está formada por los vértices v_1 y v_2, escribiremos entonces $a = v_1v_2$ y diremos que la arista a está en el grafo.

Definición 1.2.2. Se denomina subgrafo de $G = (V, A)$ a otro grafo $G' = (V', A')$ tal que se cumple que $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$.

Veamos ahora la definición de grafo completo, que será uno de los objetos de estudio principales de esta teoría, siendo necesario su uso para poder hablar de los teoremas de Ramsey o los números de Ramsey, conceptos que serán vistos con posterioridad.

Definición 1.2.3. Se denomina grafo completo de orden n y se representa por K_n a todo grafo en el cual cada vértice es adyacente, o está conectado por una arista a todos los otros vértices en G.

El principal objeto de estudio de la teoría de Ramsey se basa en la coloración de grafos, más en concreto en la coloración de aristas cumpliendo ciertas restricciones.

Definición 1.2.4. Sea $G = (V, A)$ un grafo. Una coloración de aristas o n-coloración de aristas de G es una aplicación $C : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$. Se dice que G es n-coloreable si G admite una n-coloración.

Diremos a partir de este momento que un grafo G estará coloreado si se ha definido sobre el mismo una n-coloración de sus aristas. Si en un grafo un cierto conjunto de sus arista presentan una misma coloración, podremos hablar de subgrafo monocromático.

Definición 1.2.5. Se denomina subgrafo monocromático de $G = (V, A)$ a otro grafo $G' = (V', A')$ tal que se cumple que $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$ el cual está coloreado por un solo color.

La Teoría de Ramsey, así llamada en honor al filósofo y matemático británico Frank P. Ramsey, es una rama de las matemáticas que contempla el estudio de una serie de condiciones bajo la cual se cumple una propiedad dada, es decir, busca estructuras ordenadas dentro de otras más grandes y complejas desordenadas. Esta teoría se fundamenta en el teorema de Ramsey el cual a su vez puede considerarse como una generalización nada trivial del conocido Principio de Palomar, también llamado de Dirichlet.

Teorema 1.2.1. *(Principio de Palomar) Si tenemos n nidos y $n+1$ palomas, entonces hay un nido en el que duermen al menos dos palomas.*

Este sencillo hecho puede ser de gran utilidad a la hora de poder resolver problemas que posean una complejidad aparente mayor. Asimismo, este principio puede generalizarse:

Teorema 1.2.2. *(Principio de Palomar generalizado) Si tenemos m palomas y n nidos tal que $m > n$, al colocar las palomas en los nidos, entonces, existirá al menos un nido que contiene como mínimo $\lceil m/n \rceil$ palomas. Existirá otro nido que contendrá un máximo de palomas igual a $\lfloor m/n \rfloor$ donde $\lfloor m/n \rfloor$ es la parte entera de m/n y $\lceil m/n \rceil = \lfloor m/n \rfloor + 1$.*

La teoría pretende dar soluciones a los problemas a cerca del tipo de propiedades que debe tener un cierto conjunto para que se cumpla una determinada condición, o el tamaño que debe un conjunto dado para asegurarnos encontrar subestructuras dentro del mismo de tal forma que estas cumplas unas propiedades.

Pese a su temprana muerte a los 26 años de edad, una de las mayores contribuciones de Ramsey fue el teorema que lleva su nombre. Este teorema tiene una diversa variedad de definiciones dependiendo del contexto en que el teorema quiera ser usado, pero para el propósito de este trabajo, la definición de éste estará basada en la coloración de grafos completos según describe Barton en su trabajo [7].

Teorema 1.2.3 (Ramsey (versión 2-color)[6])**.** *Sea $r \in \mathbb{N}$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que cualquier grafo K_n 2-coloreado contiene un subgrafo monocromático K_r de K_n.*

Teorema 1.2.4 (Ramsey, versión t-color)**.** *Dados unos enteros $p_1, \ldots, p_t$, existe un entero N tal que si un conjunto tiene al menos ese número de elementos y coloreamos los subconjuntos de dos elementos de ese conjunto con t colores, entonces existe un i y un p_i-subconjunto tal que todos sus subconjuntos de dos elementos tienen color i.*

Tal y como muestra en su trabajo Graham [25], de la idea que subyace de este teorema y del interés que mostraba Ramsey por encontrar subestructuras ordenadas, entonces deben existir estructuras 2-coloreadas más grandes en las que esta subestructura ordenada existe. De este hecho, podemos introducir el concepto de los números de Ramsey para grafos 2-coloreados.

Definición 1.2.6 (Número de Ramsey (versión 2-color) [12])**.** Un número de Ramsey, escrito como $n = R(r, v)$, es el entero n más pequeño tal que el grafo 2-coloreado K_n, usando los colores rojo y verde para las aristas, implica que existe un subgrafo rojo monocromático K_r o un subgrafo verde monocromático K_v.

Se ha de notar en esta definición que se están tratando los números 2-coloreados, esto se debe al hecho que este tipo de grafos (2-coloreados) es más fácil de analizar y los estudios existentes sobre la misma son mucho más extensos, pero tanto la teoría de Ramsey como los números de Ramsey hacen referencia a coloraciones utilizando más de dos colores. De todas formas, por motivos académicos relacionados con este trabajo las versiones generales, no solo para grafos sino también para hipergrafos, serán presentadas a continuación.

Teorema 1.2.5 (Ramsey, versión general)**.** *Dados unos enteros $p_1, \ldots, p_t, r$, existe un entero $R(p_1, \ldots, p_t; r$ tal que si un conjunto tiene al menos ese número de elementos y coloreamos los subconjuntos de r elementos de ese conjunto con t colores, entonces existen un i y un p_i-subconjunto tal que todos sus subconjuntos de r elementos tienen color i.*

Definición 1.2.7 (Número de Ramsey (versión general))**.** Un número de Ramsey, escrito como $n = R(p_1, \ldots, p_t; r)$, es el entero n más pequeño tal que el hipergrafo t-coloreado K_n, usando los colores $p_1, \ldots, p_t$, se puede encontrar un subgrafo monocromático K_{p_i} de color i.

Actualmente no se conoce mucho sobre los números de Ramsey, solo unos pocos valores han sido calculados y de otros simplemente se tiene una estimación. Dado que este no va a ser uno de los principales puntos del trabajo, estos resultados no serán abordados en el presente estudio. Esta tarea queda a disposición del lector. Sin embargo, con propósitos ilustrativos, se mostrará un breve ejemplo para poder ver la utilidad que tiene el cálculo de estos números de Ramsey.

Ejemplo 1.2.6. *En cualquier reunión de* 6 *personas, o bien* 3 *de ellas se conocen entre sí, o bien* 3 *de ellas no se conocen entre sí.*

Este ejemplo es el que se conoce como el ”*Problema de la Fiesta.*einvolucra uno de los números de Ramsey más conocidos, $R(3,3) = 6$, cuya demostración se encuentra en [7].

Teorema 1.2.7. $R(3,3) = 6$.

Demostración 1.2.8. Para demostrar este hecho veremos por doble desigualdad que efectivamente el valor exacto del número de Ramsey $R(3,3)$ es igual a 6, para ello se mostrará que $5 < R(3,3) \leq 6$.

En primer lugar, veamos que $R(3,3) \neq 5$ con la ayuda de la siguiente coloración de aristas de K_5 (ver la Figura 1.3).

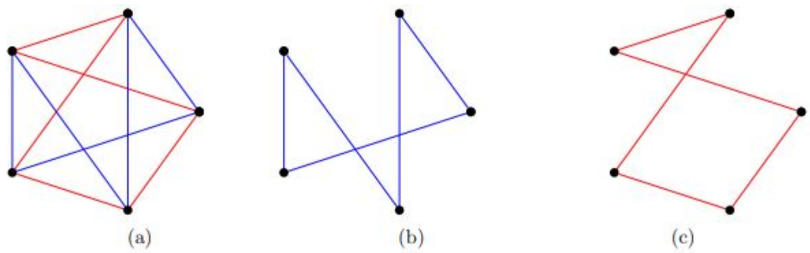

Figura 1.3: Un grafo K_5 (a) sin un subgrafo monocromático K_3. En (b) y en (c) se muestran las coloraciones de las aristas que ayudan a probar este hecho.

Se ha de notar que ninguno de los 10 triángulos formados en esta configuración es monocromático y por lo tanto se tiene que $R(3,3)$ debe ser mayor que 5. Así que ahora se debe considerar que $R(3,3) = 6$. En primer lugar, puede observarse que para cualquier vértice v en K_6, debe haber al menos tres vértices adyacentes que posean el mismo color. Sin pérdida de generalidad, asumiremos que hay tres aristas de color rojo (Figura 1.4a). A continuación, consideramos los tres vértices adyacentes a v a través de las aristas de color rojo (Figura 1.4b). Si cualquier arista entre dos cuales quiera de estos tres vértices fuese de color rojo, entonces existe un triángulo monocromático rojo. Si por el contrario, ninguna de las aristas entre estos tres vértices es roja, entonces hay tres aristas azules y por lo tanto un triángulo monocromático azul (Figura 1.4c).

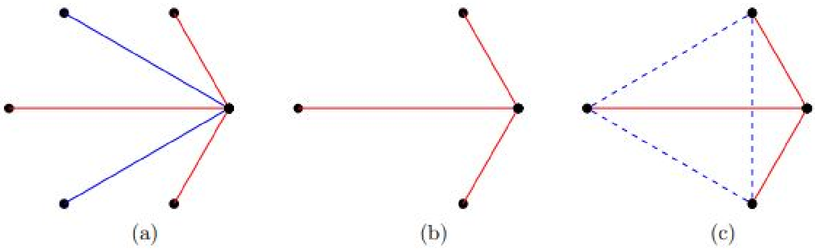

Figura 1.4: Proceso visual paso a paso de que K_6 tiene un subgrafo K_3 monocromático.

En otras palabras, se asegura la existencia de un triángulo monocromático azul o rojo. Esta lógica también se aplica a situaciones en donde v tiene cuatro o cinco aristas de un mismo color, ya que basta con tomar tres vértices cualesquiera que sean adyacentes por una arista del mismo color y aplicar el mismo razonamiento. Por lo tanto, $R(3,3) \leq 6$ y $R(3,3) > 5$, así que $R(3,3) = 6$. $\square$

Veamos que este resultado permite probar que en juegos como Sim, siempre habrá un ganador. Se ha de notar que las condiciones del juego sean las adecuadas y que permitan representar subgrafos del tamaño correspondiente a los números de Ramsey de los cuales se conoce su tamaño y que por lo tanto el tamaño del tablero de juego sea dicho número. Esto quedará más claro con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.9 (Juego de Sim)**.** *Dos jugadores, Rojo y Verde, compiten en un tablero compuesto por 6 vértices y todos las* $\binom{6}{2} = 15$ *posibles aristas entre estos vértices. Los jugadores se van alternando los turnos coloreando en cada movimiento una de las aristas no coloreadas con color, con la restricción de que construir un subgrafo completo con tres vértices y cuyas aristas sean del mismo color (un triángulo monocromático) no está permitido. El juego termina cuando alguno de los jugadores se ve fordado a rendirse puesto que no quedan movimientos legales en el juego para poder jugar o cuando ha construido un triángulo por error.*

Como puede observarse en la figura 1.5, ambos jugadores comienzan coloreando las diferentes aristas disponibles del juego hasta que el jugador Rojo se ve forzado a rendirse puesto que pese a tener dos aristas disponibles, cualquiera de ellas provocaría la creación de un triángulo de color rojo. Por lo tanto, el jugador Rojo pierde la partida. Esto se debe a que en un grafo completo K_6 existe al menos un subgrafo monocrómico K_3, por lo tanto, en este juego siempre habrá un ganador y un perdedor.

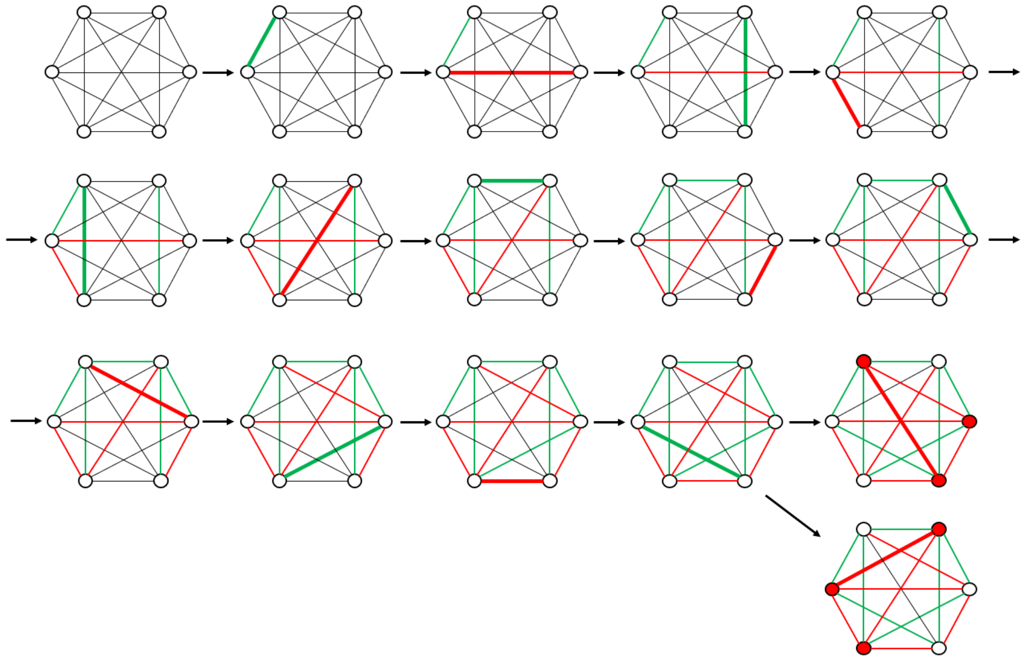

Figura 1.5: Ejemplo del desarrollo de una partida de Sim. El jugador Verde comienza coloreando una arista, a continuación el jugador Rojo colorea otra, etc.

Los resultados que proporciona la teoría, por una parte son lo que se conoce como no constructivos, esto es, permite conocer qué estructuras en las que estamos interesados existen, sin embargo no proporciona los métodos para poder hallarlas; y por otra parte el hecho de saber que mediante elementos de gran tamaño podemos encontrar ciertos resultados deseados, a veces la forma de probar esto requiere emplear estructuras de tamaño mucho mayor, de forma que las cotas de estos cálculos son difíciles de conocer.

Como ya se ha dicho previamente, aunque esta teoría no es el objeto de estudio de este trabajo, y el hecho de que se centre principalmente en el estudio de grafos; en cierta manera si que será de interés y en ocasiones será importante tenerla en cuenta a la hora de representar la estructura de los juegos en forma de árbol. Esto se debe a que podemos emplear ciertos resultados propuestos por la teoría con el objetivo de encontrar estrategias ganadoras o métodos de actuación que nos permitan, por ejemplo, encontrar la forma en que generar una determinada situación en el juego.

1.2.3. Teoría de Juegos Combinatorios

Tal y como hemos mencionado con anterioridad, la Teoría de Juegos Combinatorios (TJC) se centra en el estudio de los juegos de dos jugadores con información perfecta, a diferencia de la Teoría de Juegos clásica, que por lo general analiza problemas de la vida real de muy diversos ámbitos (política, economía, conflictos...) buscando estrategias de equilibrio de una forma más práctica. Los juegos combinatorios tienen muchas más estrategias que provocan que las técnicas empleadas en la Teoría de Juegos clásica sean menos adecuadas.

Retomando el concepto de juego combinatorio que se introdujo al principio de este trabajo, un juego combinatorio es llevado a cabo por dos jugadores (Derecha e Izquiera) que se van alternando el turno de jugada, ambos poseen información completa sobre el juego siguiendo las reglas que especifican sus movimientos y que establecen el final del juego.

Para entender mejor este concepto de juego, pongamos un ejemplo que a su vez cumpla estas propiedades. Supongamos que hay dos jugadores, Alberto y Beatriz (en lo que sigue A y B, respectivamente) junto con una pila de piedras, de tal modo que deben ir quitando una o dos piedras del montón hasta que no quede ninguna. Aquel que quite la última piedra será el ganador de la partida.

Observamos que se verifican las condiciones propuestas con anterioridad de cara a poder clasificar este juego como uno de tipo combinatorio. En primer lugar existe una configuración inicial y un número finito de movimientos (no más del número de piedras presentes en el juego), en que participan dos jugadores A y B que se van turnando alternativamente cogiendo piedras. Ambos saben cuantas piedras ha cogido su oponente y las disponibles sobre la mesa sin que entre en juego el azar. Por último se da una posición final, en que el último jugador que juegue gana.

Formalmente, definimos un juego combinatorio de acuerdo con Nowakowski en su libro *Lessons in Play* [27] como sigue:

Definición 1.2.8. Las opciones de un juego J son el conjunto de todas los movimientos que un jugador puede realizar y están denotados por:

$J^I = \{$Todas las jugadas que el jugador Izquierda puede realizar en J$\}$

$J^D = \{$Todas las jugadas que el jugador Derecha puede realizar en J$\}$

Un juego J se define como $\{J^I | J^D\}$, donde J^I y J^D son las opciones de Izquierda y Derecha respectivamente.

Notemos que si el conjunto J^I o J^D es vacío, esto es, el jugador I o D no tiene movimientos disponibles; entonces representaremos a un juego J con estas condiciones como $\{\cdot\,|J^D\}$ o $\{J^I|\cdot\}$ respectivamente. Con esto vemos que representamos el conjunto vacío de opciones mediante el símbolo $\cdot$ en lugar del símbolo $\emptyset$. De igual modo, representamos el conjunto de opciones de los jugadores mediante la notación J^I o J^D en lugar de representar todas y cada una de las opciones explícitamente $J^I = \{\alpha, \beta, \gamma \ldots\}$ o $J^D = \{\chi, \psi, \omega \ldots\}$, representando un juego J como $\{\alpha, \beta, \gamma \ldots | \chi, \psi, \omega \ldots\}$.

Según el desarrollo de un juego combinatorio, y teniendo en cuenta las propiedades mencionadas con anterioridad que éstos deben cumplir, estableceremos dos categorías diferentes de juego.

Definición 1.2.9 (Juegos imparciales)**.** Categoría de juegos combinatorios fundamentada en que los movimientos o jugadas que estén disponibles para llevar a cabo en un determinado momento de la partida dependerán únicamente de la situación planteada en el juego y no de qué jugador debe realizar la jugada.

Dentro de la categoría de este tipo de juegos podemos encontrar por ejemplo los de tipo Nim, Cram, Normal Kayles... Veamos un ejemplo de una situación puntual a lo largo de una partida del juego de Normal Kayles, en este se puede observar cómo se trata de un juego imparcial puesto que los roles de los jugadores pueden ser intercambiados y sin embargo, todos los movimientos posibles estarán disponibles para cada uno de ellos sin importar quién sea el primer o segundo jugador.

Ejemplo 1.2.10. *Un conjunto de fichas son ordenadas en filas separadas. Un movimiento legal consiste en eliminar una o dos fichas de la misma fila. Esto puede hacer que la fila se rompa y se convierta en dos filas más pequeñas. El jugador que elimine la última ficha es el ganador.*

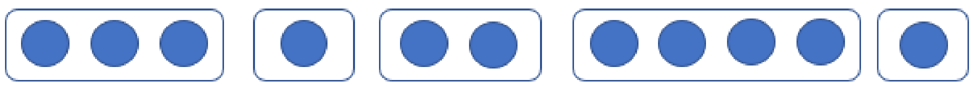

Figura 1.6: Ejemplo del juego Normal Kayles en progreso.

Como puede observarse en este ejemplo 1.6, ahora sería el turno del primer jugador, pero si cambiamos los roles de los jugadores, el segundo jugador podría realizar la misma jugada u otra distinta que la que podría hacer el primer jugador. En cambio esto no pasa con los juegos clasificados como partidistas.

Definición 1.2.10 (Juegos partidistas)**.** Un juego partidista es aquel que no es imparcial; o, dicho de otro modo, es un tipo de juego en que solamente algunos movimientos están permitidos para un jugador y no para el otro.

Dentro de esta categoría se encuentran la mayoría de juegos combinatorios que conocemos; entre ellos se encuentra el ajedrez (en donde solo un jugador puede mover las piezas blancas y el otro las negras), el 3 en raya (donde solo un jugador puede utilizar las cruces y el otro los círculos) o el Go (de modo similar al ajedrez, solamente uno puede mover las fichas blancas y el otro las negras).

A continuación, veremos un ejemplo de juego partidista, en este caso el Domineering.

Ejemplo 1.2.11. *El juego de Domineering es jugado por dos jugadores con fichas de dominó y un tablero cuadrado, por lo general de 8×8. Los jugadores se van alternando el turno poniendo las fichas de dominó en el tablero de forma que ocupen exactamente dos cuadrados adyacentes sin que exista superposicionamiento con el borde del tablero u otras fichas que ya estén colocadas en el tablero. Cuando un jugador no pueda colocar una ficha de dominó de acuerdo con estas reglas, perderá. El jugador Izquierda únicamente podrá jugar las fichas verticalmente mientras que el jugador Derecha únicamente podrá hacerlo horizontalmente.*

Como puede comprobarse, los jugadores Derecha e Izquierda no tienen las mismas opciones de juego si intercambiamos los roles, cosa que sí pasaba en el ejemplo anterior, con los juegos imparciales. En este caso, el jugador Derecha se ve forzado a utilizar únicamente piezas horizontales y el jugador Izquierda piezas verticales, de modo que en ningún momento a lo largo de la partida los jugadores podrán tener las mismas opciones de juego que su rival.

Tal y como hemos definido las propiedades que tienen los juegos combinatorios, sabemos que existen 3 posibles finales diferentes. Según esto, presentamos a continuación dos definiciones en que se presenta al ganador del juego según quién realice el último movimiento:

Definición 1.2.11 (Juego normal)**.** En TJC se entiende como juego normal, aquel en que el último jugador capaz de llevar a cabo una jugada es el ganador. Dicho de otro modo, el primero que no pueda jugar llevando acabo un movimiento, pierde.

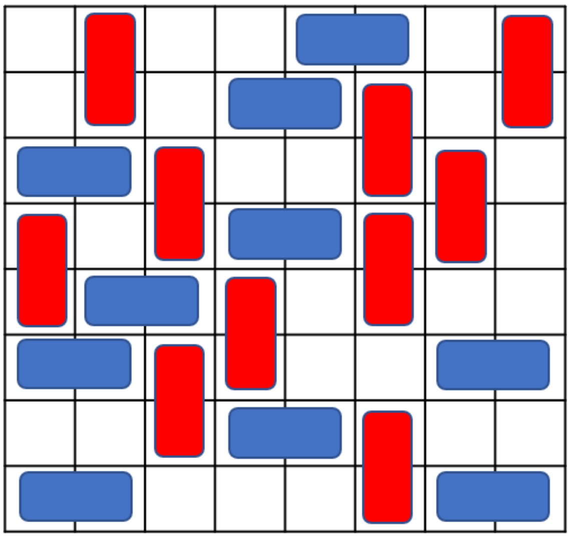

Figura 1.7: Ejemplo del juego Domineering en progreso. El jugador Izquierda colocando las fichas verticales rojas y el jugador Derecha colocando la fichas horizontales azules.

Definición 1.2.12 (Juego pobre)**.** En TJC el concepto de juego pobre se basa en la idea contraria a la de juego normal, en donde gana el primer jugador que no sea capaz de jugar.

Por lo general, la convención de juego pobre haría que el estudio realizado sea diferente. Además no existe aún una teoría tan desarrollada sobre este tipo de juegos, por lo que simplemente en este trabajo se mencionará para un mejor conocimiento del lector, pero nunca se considerará esta convención de juego, salvo que se indique lo contrario.

Definición 1.2.13 (Juego de puntuación)**.** En TJC un juego de puntuación consiste en acumular puntos a lo largo de la partida, de tal forma que aquel jugador que logre más puntos durante el mismo será el ganador.

Al igual que con la convención de juego pobre, este tipo de juegos no será objeto de estudio salvo que se indique expresamente, pero es digno de mención por su interés en la TJC.

La teoría que se desarrollará en el resto de este capítulo ha sido tomada de los trabajos de Berlekamp [9], Conway [15] y Grossman [26].

Siguiendo en esta misma línea, y teniendo presentes las dos definiciones enunciadas previamente sobre los juegos normales y pobres; introduzcamos las clases de resultado que van a indicar quién es el ganador puesto que se trata de juegos combinatorios en donde no existe el azar y son juegos de información completa, por lo que siempre es posible determinarlo antes de realizar cualquier movimiento. Así, vemos que dos de estas clases ya fueron definidas y las denotaremos como $\mathcal{A}$ que significa "el jugador Anterior gana", idea asociada con los juegos normales y $\mathcal{S}$ expresando el hecho "el Siguiente jugador gana", relativo a la idea de juegos pobres. Además definimos las otras dos clases de resultado que nos faltaba; $\mathcal{I}$ como "el jugador Izquierda ganaꞔ $\mathcal{D}$ como "el jugador Derecha gana". Así definimos formalmente estas cuatro clases como sigue:

Definición 1.2.14 (Clases de resultado)**.** Las clases de resultado de un juego vienen definidas según el jugador que gana la partida:

- $\mathcal{A} = \{G|$ El segundo jugador que mueve gana en $G\}$
- $\mathcal{S} = \{G|$ El primer jugador que mueve gana en $G\}$
- $\mathcal{I} = \{G|$ El jugador Izquierda gana juegue en primer o segundo lugar en $G\}$
- $\mathcal{D} = \{G|$ El jugador Derecha gana juegue en primer o segundo lugar en $G\}$

Definición 1.2.15. (Juego combinatorio corto) Un juego combinatorio corto es un juego combinatorio partidista que posee un número finito de posiciones.

Teorema 1.2.12 (Teorema Fundamental de la Teoría de Juegos Combinatorios)**.** *Sea J un juego combinatorio corto, bajo las reglas de juego normal. Tanto Izquierda puede forzar una victoria jugando primero en J como Derecha jugando en segundo lugar, pero no ambos.*

Demostración 1.2.13. Considerando el conjunto de jugadas de Izquierda, J^I, dado que J es corto, entonces el conjunto J^I tiene menos posiciones que J. Así, asumiremos por inducción que tanto Derecha puede forzar la victoria jugando en primer lugar en J^I como Izquierda jugando segundo.

Si Derecha puede ganar todas las jugadas en J^I jugando primero, entonces puede ganar J jugando en segundo lugar cualquiera sea el movimiento de Izquierda. En cambio, si Izquierda puede ganar alguna de las jugadas de J^I jugando el segundo, entonces puede ganar J efectuando dicho movimiento. Por lo tanto, una de las dos posibilidades debe cumplirse. □

Veamos ahora un teorema que será de gran utilidad a la hora de estudiar el árbol de jugadas de un juego, y cómo actuar en consecuencia conociendo las opciones posibles. Para entender mejor este teorema demos primero una definición de lo que es un grafo bien fundado o libre de bucles tal y como introdujo Johnson en su trabajo [31].

Definición 1.2.16. Un árbol de jugadas está bien fundado o libre de bucles si no existen secuencias infinitas de posiciones $a_1, a_2, \dots$ tal que

$$a_1 \to a_2 \to a_3 \dots \tag{1.1}$$

Donde el símbolo $\to$ representa la acción llevada a cabo por parte de uno de los jugadores para pasar del estado a_n al estado a_{n+1}. También podemos decir que un grafo de este tipo satisface una condición de final.

Retomando la notación empleada a la hora de definir un juego combinatorio y teniendo en cuenta las características que cada posición del juego conlleva en la toma de decisiones y en el desarrollo del juego; veamos alguna definición formal sobre alguna de estas características dadas por Fraser en su estudio [30].

Definición 1.2.17. El árbol jugadas de un determinado juego $J = \{J^I | J^D\}$ es un grafo de árbol que posee un nodo raíz. Además, cada nodo tiene dos posibles nodos herederos, ya sea Izquierda o Derecha, de tal forma que existe una opción I (Izquierda) y una opción D (Derecha) en J.

Definición 1.2.18. La profundidad de un árbol de jugadas, es la longitud del recorrido descendiente más largo.

Definición 1.2.19. Un juego corto, es un juego cuya profundidad del árbol de jugadas está acotada.

Ahora estamos en condiciones de poder enunciar el teorema que enunció Johnson en su trabajo [31] a cerca de los 4 tipos de clases de resultado que existen en el juego.

Teorema 1.2.14. *Sea G el conjunto de todas las posiciones de un grafo de jugadas bien fundado. Entonces cada posición de G lleva a una de las cuatro clases de resultado.*

Demostración 1.2.15. Sea I_1 el conjunto de posiciones ganadoras para el jugador Izquierda cuando mueve primero, sea I_2 el conjunto de posiciones ganadoras cuando Izquierda mueve en segundo lugar, y sean D_1 y D_2 las posiciones del jugador Derecha cuando mueve en primer y segundo lugar respectivamente.

Es fácil ver que una posición a está en

- I_1 sii alguna opción izquierda está en I_2
- R_1 sii alguna opción derecha está en R_2
- I_2 sii toda opción derecha está en I_1
- R_2 sii toda opción izquierda está en R_1

Si Izquierda mueve primero dada una posición x, queremos ver que tanto Izquierda como Derecha tienen una estrategia ganadora, o en otras palabras que $x \in I_1$ o $x \in D_2$. De modo similar, queremos ver que cada posición está en D_1 o en I_2. Sea P el conjunto de posiciones por el que x está exactamente en I_1 o D_2 y en exactamente D_1 o I_2. Por el principio de inducción, basta con ver que cuando todas las opciones de x están en P, entonces x está en P. Así que suponiendo que todas las opciones de x están en P, las siguientes son equivalentes:

- $x \in I_1$
- alguna opción de x está en I_2
- alguna opción de x no está en D_1
- no toda opción de x está en D_1
- $x \notin D_2$

Aquí, la equivalencia entre la segunda y la tercera propiedad siguen de la hipótesis de inducción, y el resto quedan como ejercicio para el lector. Así, x está exactamente en I_1 o en D_2. Un argumento similar puede aplicarse para ver que x está exactamente en D_1 o en I_2. Por tanto, por inducción cada posición está en P.

Así, toda posición está en I_1 o D_2, y en D_1 o I_2. Esto genera cuatro posibilidades, que corresponden con las cuatro clases de resultado:

- $I_1 \cap D_1 = \mathcal{S}$
- $D_2 \cap D_1 = \mathcal{D}$
- $I_1 \cap I_2 = \mathcal{I}$
- $D_2 \cap I_2 = \mathcal{A}$

□

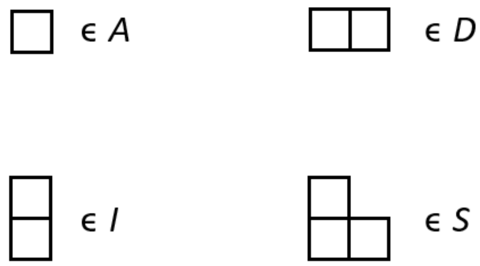

Figura 1.8: Posiciones del Domineering para cada una de las clases de resultado.

De esta forma, queda claro que cada juego debe tener pertenecer a una de estas clases según su resultado. Para ver esto con más claridad, veamos como en el ejemplo básico del Domineering existen estas cuatro clases de resultado y el juego solo pertenece a una de ellas mostradas en la Figura 1.8:

Así mismo, en este mismo ejemplo, en la Figura 1.9, podemos ver algunos árboles de jugadas básicos para cada una de las clases de resultados.

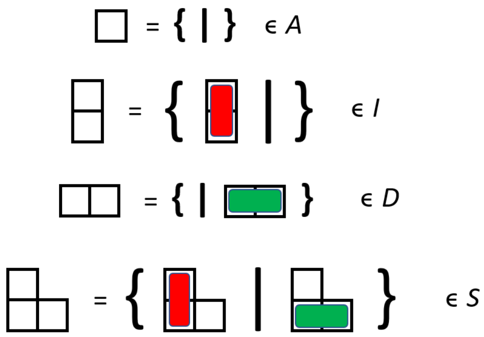

Figura 1.9: Valores del Domineering para cada una de las clases de resultado.

Capítulo 2

Juegos Combinatorios

2.1. Complejidad

A la hora de abordar un juego combinatorio cualquiera una de las primeras cuestiones que surge es: *¿qué dificultad tiene el juego?*. Entonces uno puede comenzar a buscar respuesta a esta pregunta analizando el grafo del árbol de juego del mismo y de este modo obtener de forma exacta el número de casos favorables, desfavorables o neutros (empate), de forma que dada una posición cualquiera sea fácil establecer la complejidad del mismo teniendo en cuenta las jugadas posibles. Esto, a primera vista, parece una opción factible en el proceso de búsqueda de la dificultad de un juego, pero por desgracia, no es así.

Veamos por ejemplo el 3 en raya jugado sobre un tablero de 3x3, teniendo en cuenta que cada una de las 9 casillas del tablero puede encontrarse en 3 estados diferentes, sean cruz, círculo o en blanco, se tiene que existen 3^9 situaciones diferentes. Sin embargo, hay que tener presente que muchos de estos estados son imposibles o incongruentes dada la naturaleza del juego; además, por las características del tablero y las simetrías del mismo, el número de estados posibles es mucho menor. Parece obvio que analizar todos estos estados, es un tarea ardua y que al mismo tiempo llevaría un tiempo calcularlas todas. Ahora bien, no todos los juegos poseen la misma estructura, tampoco el mismo número de posiciones legales diferentes; y, por consiguiente, el tiempo y dificultad para calcular las mismas no será el mismo. Por lo tanto, surge ahora la pregunta: *¿es posible calcular todos y cada uno de los estados de un juego?*, y en caso de que esto sea posible, *¿cuánto tiempo llevaría calcularlos?*, *¿de qué forma se podrían calcular?*, *¿sería esta forma de calcularlos similar para todos?*, y en el caso de que no se puedan calcular, *¿se pueden establecer límites para acotar su posible valor?*.

A lo largo de este capítulo se tratará de responder a las cuestiones planteadas con anterioridad para poder comprender más fácilmente las propiedades de un juego. Por desgracia, solo unos pocos juegos han logrado ser resueltos por completo, siendo posible conocer todas las diferentes posiciones del juego. Para otros muchos se conocen ciertas propiedades como el tamaño del árbol de decisión o a qué clase de complejidad computacional pertenece y otros para los que no se conoce con exactitud. Sobre este último concepto trabajaremos más en profundidad en este capítulo, por ser de gran interés a la hora de poder ver la clase de complejidad a la que pertenece un juego, y de esta forma poder tener conocimiento del tiempo que requerirá realizar los cálculos.

Entrando un poco más en contexto, la complejidad computacional es un tema de estudio muy importante para los matemáticos, hasta tal punto que en el año 2000 el *Clay Mathematics Institute* ofrece un millón de dólares para aquel que consiga resolver el problema **P** vs **NP**. Aquí no se demostrará dicha cuestión, pero se estudiarán distintas clases de complejidad y la relación existente entre ellas.

Sin más preámbulos, veamos ahora diferentes formas de medir y clasificar la complejidad de un juego cualquiera.

2.1.1. Medidas de Complejidad

En la Teoría de Juegos Combinatorios, a la hora de poder estudiar los juegos en profundidad y más en concreto propiedades relacionadas con su complejidad, se han establecido diferentes tipos de medidas para catalogar esta complejidad y clasificar así los mismos.

En primer lugar, veremos la complejidad del estado-espacio que estudiará el número de posiciones posibles desde la posición inicial; después se estudiará todo lo relacionado con el árbol de juego, esto es, ya sea su tamaño, la complejidad de su árbol de decisión o de su árbol de jugadas. Por último, se analizará la complejidad computacional y la pertenencia de un juego a los diferentes tipos de clases de complejidad, ya sea en el tiempo o en el espacio.

En el momento en que se deseen buscar las diferentes medidas de complejidad del juego, se emplearán diferentes algoritmos de búsqueda para encontrar, dada una disposición inicial, el coste de llegar a una posición determinada. Siguiendo con las ideas del trabajo de Chiang [13], estos algoritmos de búsqueda poseen a su vez diferentes propiedades como saber si es un método de búsqueda es completo o su complejidad en espacio y tiempo.

Definición 2.1.1. Se dice que un algoritmo de búsqueda en un grafo de un juego J es completo si en el momento en que existe una posición determinada, éste algoritmo garantiza encontrarla en una cantidad finita de tiempo.

Definición 2.1.2. La complejidad-tiempo de un algoritmo de búsqueda en un grafo de un juego J es la cantidad de tiempo que lleva ejecutarlo en el peor de los casos posibles. Éste se expresa en términos del camino de mayor longitud (m) y del mayor factor de ramificación de sus nodos (h).

Definición 2.1.3. La complejidad-espacio de un algoritmo de búsqueda en un grafo de un juego J es la cantidad de memoria que se utiliza para ejecutarlo en el peor de los casos posibles. Éste se expresa en términos del camino de mayor longitud (m) y del mayor factor de ramificación de sus nodos (h).

2.1.1.1. Estado-Espacio

No todos los juegos poseen el mismo número de estados posibles diferentes, existiendo algunos que a priori por las reglas del juego y su descripción parezcan complejos en cuanto al número de posiciones diferentes que pueden existir, pero que en realidad debido a ciertas propiedades como simetrías o estados incongruentes, este número sea mucho menor del esperado. En otros casos, este hecho puede darse de forma inversa; es decir, juegos que en un principio puedan parecer simples, pero que en realidad no sea así.

A lo largo de esta sección entenderemos mejor el concepto de estado-espacio, el cual hace referencia a las posiciones que es posible alcanzar a lo largo de una partida, junto con algunas de sus propiedades. Ahora, demos una definición más formal sobre este concepto de complejidad estado-espacio:

Definición 2.1.4 (Complejidad estado-espacio)**.** El término complejidad del estado-espacio de un juego combinatorio J se define como el cardinal del conjunto de todas las posiciones permitidas y accesibles a partir de la configuración inicial.

Tal y como se puede apreciar en la definición, se trata del número de posiciones distintas que se pueden alcanzar en un juego. Por ello hay que tener en cuenta que al calcular el total de las posiciones, no todas ellas son válidas ya que el juego puede presentar simetrías, lo que produciría estados repetidos, o también situaciones imposibles o estados ilegales que no cumplan con las reglas del juego.

Ejemplo 2.1.1. *Teniendo en cuenta las reglas de un simple juego como el famoso 3 en raya, tal y como se mencionó con anterioridad, existen 3 estados* *diferentes posibles para cada una de las casillas (cruz, círculo o en blanco), lo que supone un total de* $3^9 = 19683$ *posiciones. Sin embargo, en éstos cálculos se han tenido en cuenta casos repetidos, puesto que si tomamos por ejemplo, el caso en que un jugador haya colocado una cruz en el centro y el otro, un círculo en una de las esquinas; por simetría del tablero se tiene que no importa en cuál de ellas lo ha puesto, ya que la situación actual del juego sigue siendo la misma. Como entre las posibilidades calculadas, hay casos repetidos, éstos deben ser descartados de las cuentas realizadas.*

Además, si se considera que en dichos cálculos se han añadido posiciones ilegales del juego, como puede ser que un jugador haya colocado 5 veces y el otro ninguna, o que ambos jugadores posean 3 en raya. Como es obvio, estos casos también deben ser descartados puesto que no cumplen las reglas del juego y por ello son escenarios imposibles en el desarrollo de una partida. De esta forma, los posibles estados diferentes de este juego se reducen a 765*, algunos de los cuales se muestran en la Figura 2.1.*

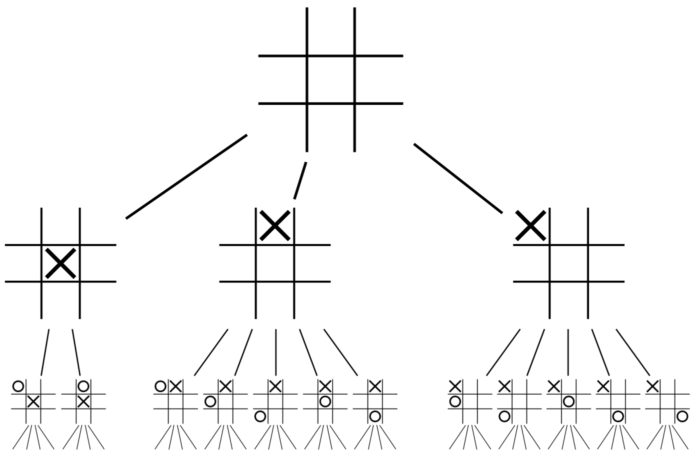

Figura 2.1: Árbol de juego del 3 en raya [4].

Si bien es fácil comprender qué casos deben ser rechazados y cuáles deben ser tenidos en cuenta a la hora de estudiar el estado-espacio de un juego, la tarea de calcular exactamente cuál será dicho número no será fácil puesto que en ciertas ocasiones los cálculos se vuelven demasiado complejos y aún no han podido ser estudiados por completo. Ante estos casos en que no se sabe cómo obtener dicho número exacto de estados o no sea posible calcularlo con los procedimientos actuales, se procederá a establecer límites con la finalidad de acotar dicho número y poder tener un conocimiento estimado de la complejidad del juego.

A la hora de abordar este problema, Poole y Mackworth [34] definieron algunos algoritmos de búsqueda que se caracterizan por ser métodos de búsqueda estado-espacio no informados, considerados así porque no consideran ninguna información sobre los diferentes estados ni los objetivos para decidir qué camino explorar en primer lugar, son por lo tanto algoritmos genéricos que no tienen en cuenta los intereses del problema. Los más importantes son:

Definición 2.1.5 (Algoritmo de búsqueda profunda (ABP))**.** Método para recorrer y buscar ciertas estructuras en un grafo. Para ello se toma un nodo como inicio (normalmente el nodo raíz, salvo interés en otro nodo particular) y se recorren sus ramas tan lejos como sea posible antes de retroceder al nodo previo y tomar otra rama continuando con el procedimiento.

Definición 2.1.6 (Algoritmo de búsqueda en anchura (ABA))**.** Método para recorrer y buscar estructuras en un grafo. Se toma un nodo inicial (normalmente el nodo raíz, salvo interés en otro nodo particular) y a continuación se recorren todos los nodos inmediatamente inferiores antes de proceder con la búsqueda en el siguiente nivel.

De esta forma Poole y Mackworth [34] muestran que ABP es completo cuando el grafo no posee bucles y es finito, su complejidad tiempo es $O(h^m)$ y su complejidad-espacio es $O(hm)$. ABA es completo (salvo ramificación infinita de algún nodo), su complejidad-tiempo es $O(h^m)$ y su complejidad-espacio también es $O(h^m)$. Esta notación $O()$ será definida con posterioridad.

2.1.1.2. Árbol de jugadas

Retomando la definición 1.2.17 del árbol de jugadas de un juego J, a la hora de jugar sobre el grafo del juego, se moverá alternativamente del nodo a una de sus hojas, de forma que el jugador Izquierda siga sus correspondientes ramas asociadas a los posibles movimientos disponibles dado el estado actual del juego, y respectivamente para el jugador Derecha. Así, en la Figura 2.2 se ve un ejemplo de cómo resulta el árbol de jugadas del Domineering con cierta posición inicial dada como nodo raíz del grafo.

Este concepto de árbol de jugadas caracteriza a la mayoría de juegos combinatorios conocidos, sin embargo podemos destacar algunos en que esta idea de árbol no es del todo útil puesto que existen situaciones en que algunos estados pueden visitarse varias veces, como es el caso del ajedrez o las damas, y otros como el Go u Othello, en los cuales el ganador se determina por la

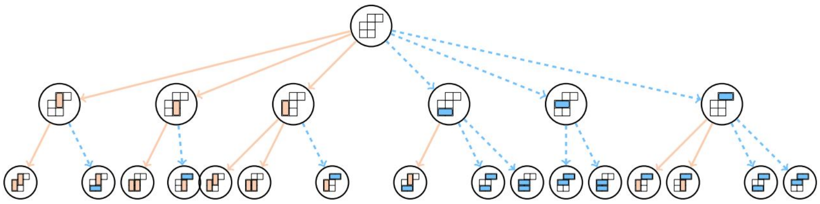

Figura 2.2: Árbol de jugadas de una posición del Domineering [17].

puntuación total y no por quién ha sido el último en mover. Surge así una nuevo concepto de grafos con bucles y por tanto la idea de juegos infinitos que McNaughton [36] y Siegel [41] definen en sus trabajos.

Definición 2.1.7 (Grafo finito)**.** Un juego J tiene un *grafo de juego finito* si tiene un grafo directo bipartido finito cuyo conjunto de nodos (estados del juego) Q está dividido en dos conjuntos. Por un lado el conjunto de los nodos para los que el jugador Izquierda puede mover (J^I) y por otro, el conjunto para los que el jugador Derecha puede dirigirse (J^D)

Definición 2.1.8 (Juego con bucles)**.** Un juego imparcial con bucles es un par $G = (H, x)$ donde H es un grafo dirigido y x es un vértice de H. Se tiene que G es finito si H es finito. Las opciones de G son juegos de la forma $G' = (H, x')$, donde existe un arco directo entre x y x'.

A simple vista puede parecer que el tamaño de un árbol de jugadas corresponde con el tamaño del estado-espacio del juego; es decir, el número de nodos corresponde al número total de estados diferentes del juego J. Este no es el caso, es mucho más complicado que eso, las posiciones o estados diferentes accesibles a lo largo del juego sí que se contemplarán; sin embargo, el acceso a algunos de estos estados puede darse de formas diferentes, lo que incrementa el número de nodos y así el tamaño del árbol de juego.

Véase esto con un simple ejemplo, como es el Domineering. según el orden con el que los jugadores vayan colocando sus fichas, es posible que a lo largo de diferentes partidas se obtenga la misma configuración del tablero pese a que la forma de llegar a dicha configuración sea totalmente distinta. Como se puede ver en la Figura 2.3, cada una de las tres partidas (a), (b) y (c) comienzan de forma distinta, pero sin embargo, a lo largo del desarrollo del juego se ha obtenido en las tres la misma distribución de las fichas en el tablero. Así, se puede ver fácilmente que es posible alcanzar un estado de más de una forma diferente, sobre todo cuantas más piezas haya sobre el tablero. Por lo tanto, el árbol de jugadas es más complejo que el de estado-espacio.

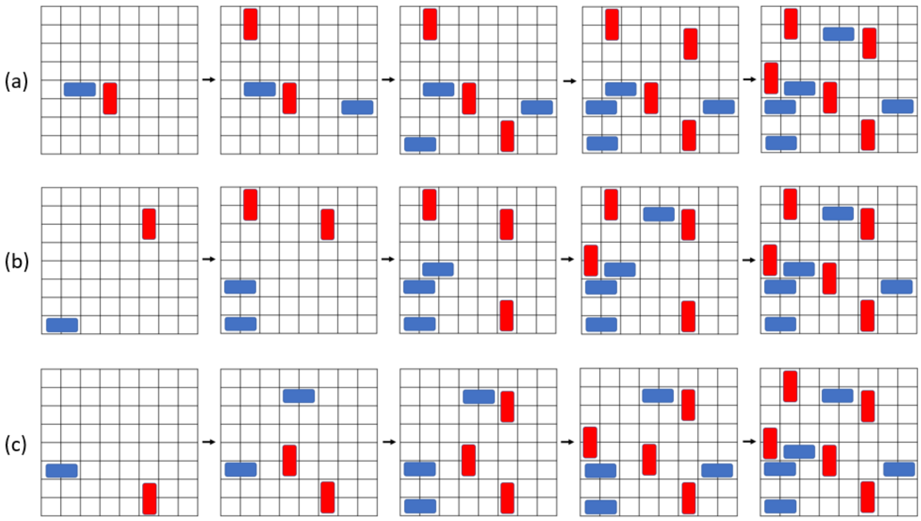

Figura 2.3: Tres ejemplos de partidas del Domineering que alcanzan el mismo estado del tablero

Para algunos de estos juegos no siempre es posible obtener el número exacto de estados, por ello se han establecido formas para obtener un límite superior que acote este número. Sin embargo, en otro tipo de juegos el tamaño del árbol de jugadas puede ser infinito debido a la repetición de estados por tener un número de movimientos ilimitado, como en el ajedrez o las damas.

2.1.1.3. Complejidad computacional

En el momento en que uno se plantea las cuestiones *¿cómo de complejo es un juego?* o *¿qué dificultad tiene?*, surge a su vez la pregunta de *¿cómo se puede medir esta complejidad?* Sabiendo que cada juego es a priori diferente del resto, ya sea por el tamaño, su forma del tablero, por sus reglas o por el número de piezas que intervienen; trataremos de agrupar algunos de ellos en diferentes clases de complejidad y entenderlas un poco más.

Para ello, es necesario estudiar estas complejidades teniendo en cuenta el concepto de *máquina de Turing* ideada por Alan Turing en 1936 [42], que es un modelo abstracto de computación a través del cual parece posible recrear todos los diferentes modelos y estados con la mayor eficiencia, es decir, con el menor gasto posible.

Al hablar del concepto de eficiencia computacional aparece también el término de la O grande, que se emplea para medir la eficiencia de un algoritmo o método mediante el número de operaciones básicas que éste es capaz de efectuar como función de su tamaño de entrada. Dicho de otra forma, la eficiencia de un algoritmo puede ser medida con una función $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $T(N)$ es el máximo de operaciones básicas que el algoritmo es capaz de realizar con datos de tamaño n.

Veamos más formalmente estos conceptos analizados en los trabajos de McNaughton [36], Turing [42], Uiterwijk [43] y Hastad [29] para proseguir con el estudio de algunos de los distintos tipos de clases de complejidad existentes:

Definición 2.1.9 (Notación $O()$)**.** Sean $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ entonces decimos que:

1. $f = O(g)$ si existe una constante c tal que $f(n) \leq c \cdot g(n)$ para cada n lo suficientemente grande.
2. $f = \Omega(g)$ si $g = O(f)$.
3. $f = \Theta(g)$ si $f = O(g)$ y $g = O(f)$.
4. $f = o(g)$ si para cada $\epsilon > 0$, $f(n) \leq \epsilon \cdot g(n)$ para todo n suficientemente grande.
5. $f = \omega(g)$ si $g = o(f)$.

Definición 2.1.10 (Máquina de Turing)**.** Una cinta de una máquina de Turing es una 7-tupla $M =< \mathcal{Q}, \Gamma, b, \Sigma, \delta, q_0, F >$ donde;

- $\mathcal{Q}$ es un conjunto finito no vacío de estados.
- Γ es un conjunto finito no vacío de símbolos.
- $b \in \Gamma$ es el símbolo del vacío.
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{b\}$ es el conjunto de símbolos de entrada.
- $q_0 \in \mathcal{Q}$ es el estado inicial.
- $F \subseteq \mathcal{Q}$ es el conjunto final o estados aceptados.
- $\delta : \mathcal{Q} \setminus F \times \Gamma \leftrightarrow \mathcal{Q} \times \Gamma \times \{I, D\}$ es una función de transición, donde I es un desplazamiento a izquierda y D un desplazamiento a derecha.

Definición 2.1.11 (Cómputo de una función y tiempo de ejecución)**.** Sea $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ y sea $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ algunas funciones, y sea M una máquina de Turing. Decimos que *M computa f en T(n)-tiempo* si para todo $x \in \{0,1\}^*$, si M inicializa a la configuración del principio de la entrada x, entonces después de al menos $T(|x|)$ pasos se detiene con $f(x)$ en la cinta de salida.

Decimos que *M computa f* si computa f en un tiempo $T(n)$ para alguna función $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Teorema 2.1.2 (Jerarquía de espacios)**.** *Para cada función de un espacio construible $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, entonces existe un lenguaje l que es determinable en un espacio $O(f(n))$ pero no en un espacio $o(f(n))$.*

Definición 2.1.12 (Máquina de Turing no determinista)**.** Una máquina de Turing no determinista solo puede computar valores de funciones que tomen valores 0 y 1. La máquina toma el valor 1 con un valor de entrada x sii es posible alguna computación para la entrada x que tiene como salida 1. Si no existe ninguna computación que de como salida 1, la máquina devuelve valor 0.

Definición 2.1.13. Una máquina de Turing no determinista M se ejecuta en un tiempo $T(n)$ si para cada dato de entrada de longitud n, cada computación de M se procesa con $T(n)$ pasos.

Definición 2.1.14. Una máquina de Turing no determinista M se ejecuta en un espacio $T(n)$ si para cada dato de entrada de longitud n, cada computación de M visita como mucho $S(n)$ regiones de la cinta de trabajo.

Además, al ver la naturaleza de los juegos y al intentar entenderlos, uno acaba preguntándose *¿qué hace que un juego sea más difícil que otro?* responder a esta pregunta puede ser algo complicado, en un primer momento parece evidente fijarse en el tamaño del tablero, que efectivamente será una de las razones, pero no la única. Así, Fraenkel [20] sugería tener presentes ciertos criterios a la hora de comparar la dificultad de un juego:

- El factor de ramificación medio (el número medio de movimientos posibles desde cada posición).
- El número total de posiciones del juego.
- La existencia de ciclos.
- El imparcialidad o parcialidad del juego.

- La división en sumas de juegos independientes más pequeños.
- El número de posiciones finales.

Ahora sí que estamos en condiciones de poder presentar las diferentes clases de complejidad y comprender mejor de ésta forma cómo categorizar los juegos combinatorios según su dificultad para encontrar todas las soluciones. Ésta clasificación se realiza teniendo en cuenta dos aspectos diferentes; por un lado si se tiene en cuenta el tiempo de ejecución del algoritmo entonces se hablará de complejidad-tiempo, por otro lado, si se tiene en cuenta el espacio ocupado en memoria durante la ejecución del algoritmo se hablará de complejidad-espacio.

Clases complejidad-tiempo

De acuerdo con el trabajo de Walter Dean [16], suponiendo que $t(n)$ es una función construible en tiempo y que $\mathfrak{T}$ es el modelo de las clases de las máquinas de Turing, se tiene que la clase $TIME(t(n))$ es como sigue:

$$TIME(t(n)) = \{X \subseteq \{0,1\}^* : \exists N \in \mathfrak{T}\, \forall n\ (time_N(n) \leq t(n))\ y\ N\ decide\ X\}$$

Siguiendo con los trabajos de Scott [40] y Hartmanis [28] enunciamos las siguientes definiciones:

Definición 2.1.15. DTIME($f(n)$) es el conjunto de problemas de decisión que pueden se resueltos por una máquina de Turing determinista usando un tiempo $O(f(n))$.

Definición 2.1.16. NTIME($f(n)$) es el conjunto de problemas de decisión que pueden se resueltos por una máquina de Turing no determinista usando un tiempo $O(f(n))$.

Teorema 2.1.3 (Teorema de jerarquía de tiempo)**.** *Si $f(n)$ es construible en el tiempo, entonces: $DTIME(o(\frac{f(n)}{log\ f(n)})) \subsetneq DTIME(f(n))$*

Hay que notar que DTIME(t) $\subseteq$ NTIME(t) puesto que las máquinas de Turing no deterministas son capaces de ejecutar a su vez operaciones deterministas.

Véanse ahora las clases de complejidad computacional más estudiadas en cuanto a la complejidad-tiempo se refiere y que Hastad explicaba en su estudio [29].

Definición 2.1.17. Dado un conjunto A, decimos que $A \in P$ sii hay una máquina de Turing determinista que acepta a A y se ejecuta en un tiempo $O(n^k)$ para alguna constante k.

Definición 2.1.18. Dado un conjunto A, decimos que $A \in NP$ sii hay una máquina de Turing no determinista que acepta a A y se ejecuta en un tiempo $O(n^k)$ para alguna constante k.

Definición 2.1.19. Dado un conjunto A, decimos que $A \in EXPTIME$ sii hay una máquina de Turing determinista que acepta a A y se ejecuta en un tiempo $O(2^{n^k})$ para alguna constante k.

Clases complejidad-espacio

En lo que a complejidad-espacio se refiere, veamos a continuación algunos de los conceptos más importantes que han de destacarse puesto que serán de utilidad para comprender porqué algunos de los juegos combinatorios clásicos pertenecen a una clase u a otra y que introdujeron Scott [40] y Savitch [37] en sus respectivos trabajos.

Definición 2.1.20. DSPACE($f(n)$) es el conjunto de problemas de decisión que pueden se resueltos por una máquina de Turing determinista usando un espacio $O(f(n))$.

Definición 2.1.21. NSPACE($f(n)$) es el conjunto de problemas de decisión que pueden se resueltos por una máquina de Turing no determinista usando un espacio $O(f(n))$.

Definición 2.1.22. LOGSPACE($f(n)$) es el conjunto de problemas de decisión que pueden se resueltos por una máquina de Turing determinista usando un espacio $O(log(f(n)))$.

Esta última definición se puede obtener de la definición de DSPACE, basta usar un espacio $O(\log n)$, por lo que LOGSPACE($O(f(n))$) = DSPACE($O(log(f(n)))$).

Teorema 2.1.4 (Teorema de Savitch)**.** *Para cualquier función $s(n) \geq log(n)$, entonces NSPACE($s(n)$) $\subseteq$ DSPACE($s(n)^2$).*

Del teorema anterior se deduce el siguiente corolario.

Corolario 2.1.5. *PSPACE = NPSPACE*

Esto sigue del hecho que el cuadrado de una función polinómica $s(n)$ sigue siendo una función polinómica.

Así, siguiendo las ideas de Hastad [29], un juego pertenecerá a una clase un otra si el conjunto de posibles jugadas del mismo pertenece a dicha clase.

Definición 2.1.23. Dado un conjunto A, decimos que $A \in PSPACE$ sii hay una máquina de Turing determinista para alguna constante k que computa la función característica de A en un espacio $O(n^k)$.

Definición 2.1.24. Dado un conjunto A, decimos que $A \in NPSPACE$ sii hay una máquina de Turing no determinista para alguna constante k que computa la función característica de A en un espacio $O(n^k)$.

Definición 2.1.25. Dado un conjunto A, decimos que $A \in EXPSPACE$ sii hay una máquina de Turing determinista para alguna constante k que computa la función característica de A en un espacio $O(2^{n^k})$.

La complejidad de los juegos combinatorios, como ya se ha comentado, está relacionada con la complejidad de dar respuesta a preguntas que pueden surgir a la hora de abordar un juego, como *¿qué resultado tendrá el juego?*, *¿quién será el ganador?* o *¿cómo puedo realizar un movimiento ganador a partir de una posición del juego determinada?*. Eso se debe a que basta con analizar el árbol de juego para poder dar una respuesta a estas preguntas. Sin embargo, como también se ha dicho, conocer el tamaño del árbol de juego puede ser un problema. Por este motivo, el estudio de algunos juegos no se ha limitado a su estudio particular, sino a sus versiones generalizadas, los cuales dependen de alguno parámetros como el tamaño del tablero.

Clases de solución

Analizar la complejidad de un juego no es fácil y encontrar su solución aún menos, pero si por lo general estudiar la complejidad computacional de gran variedad de juegos es muy alta, no tiene sentido considerar juegos que tengan un tamaño de tablero constante. Este tipo de juegos es el caso de algunos de los juegos combinatorios más conocidos como el ajedrez, con un tablero de 8×8 o el Go, con un tablero de 19×19. A menudo, resolver este tipo de juegos es más una cuestión de rendimiento computacional y optimización de algoritmos del árbol de juego.

De esta forma, la generalización de estos juegos puede ser clasificada según el nivel de su solución. En este sentido, tal y como definió Allis en su tesis [5], presentamos los siguientes tres conceptos:

Definición 2.1.26 (Ultra-débilmente resuelto)**.** El valor teórico del juego de la posición inicial ha sido obtenido posiblemente mediante una prueba no constructiva, por lo que no da ninguna estrategia para alcanzar dicho valor.

Definición 2.1.27 (Débilmente resuelto)**.** El valor teórico del juego de la posición inicial es conocido, y también se tiene la estrategia para conseguirlo.

Definición 2.1.28 (Fuertemente resuelto)**.** Se conoce una estrategia que alcanza el valor teórico del juego empezando de cualquier estado que pueda ser alcanzado desde la posición inicial. Esto permite que el juego pueda ser jugado de forma perfecta incluso si los jugadores cometen errores.

De acuerdo con estas definiciones, se puede ver que algunos de los juegos combinatorios más conocidos estás clasificados según el estado actual de su solución según Duchene [17]. Así la Tabla 2.1 muestra algunos de ellos.

Juego	Tamaño del tablero	Estado de la solución
3 en raya	3 x 3	Fuerte
Connect Four	6 x 7	Fuerte
Damas	8 x 8	Débil
Hex	11 x 11	Ultra-débil
Go	19 x 19	Desconocida
Ajedrez	8 x 8	Desconocida
Othello	8 x 8	Desconocida

Tabla 2.1: Estado de la solución de algunos de los juegos más conocidos.

Teniendo en cuenta estos conceptos, es posible hacer una división en cuatro categorías distintas según sea la complejidad estado-espacio y la complejidad del árbol de jugadas. En la Tabla 2.2 se muestra dicha clasificación.

<table>
<tr><td rowspan="2">Complejidad del estado-espacio</td><td>Categoría 3
si es resoluble,
lo es por métodos basados en el conocimiento</td><td>Categoría 4
irresoluble por cualquier método</td></tr>
<tr><td>Categoría 1
resoluble por cualquier método</td><td>Categoría 2
si es resoluble,
lo es por métodos de fuerza bruta</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Complejidad del árbol de juego</td></tr>
</table>

Tabla 2.2: Clasificación categórica de un juego teniendo en cuenta su complejidad estado-espacio y su árbol de jugadas.

En la siguiente sección se verán algunos de los conceptos vistos en esta sección aplicados al estudio de algunos juegos.

2.1.2. Ejemplos ilustrativos de complejidad

Como se viene diciendo, estudiar la complejidad de ciertos juegos no es tarea fácil, y dar respuesta a las preguntas que se han planteado con anterioridad tampoco. Sin embargo, algunos de estos juegos han sido objeto de estudio y se ha conseguido obtener algunas respuestas.

La Tabla 2.3 muestra la clasificación de complejidad para juegos tan conocidos como el 3 en raya o el ajedrez de acuerdo con los trabajos de Bonnet [11] y Schaeffer [32].

Juego	Complejidad
3 en raya	PSPACE-completo
Hex	PSPACE-completo
Othello	PSPACE-completo
Gomoku	PSPACE-completo
Amazonas	PSPACE-completo
Damas	EXPTIME-completo
Shogi	EXPTIME-completo
Ajedrez	EXPTIME-completo
Go	EXPTIME-completo

Tabla 2.3: Complejidad de algunos de los juegos más conocidos.

Además de estos juegos tan conocidos, otros, como el que se propuso en el capítulo anterior sobre el juego de Kayles se ha probado que es polinomial. Veamos ahora cómo los conceptos explicados a lo largo del presente capítulo son de utilidad para poder realizar un estudio de la complejidad de un juego determinado.

2.1.2.1. Kayles

Así, para demostrar que la complejidad del juego de Kayles es PSPACE-completo, veremos la prueba que dio Schaefer [38]. Para entender esta demostración, veremos previamente las siguientes definiciones:

Definición 2.1.29. Sea G un juego general, se denota por $Inp(G)$ al conjunto de datos iniciales de G.

Definición 2.1.30. Se define $L(G)$ como en conjunto de datos iniciales de G donde el primer jugador tiene una estrategia ganadora.

$$L(G) = \{A \in Inp(G) : \textit{ el primer jugador tiene una estrategia ganadora para } G \textit{ con datos iniciales } A\}.$$

De modo análogo se define el conjunto $\overline{L}(G)$ como el conjunto de datos iniciales de G donde el segundo jugador tiene una estrategia ganadora.

$$\overline{L}(G) = Inp(G) - L(G)$$

Definición 2.1.31. Los juegos generales tendrán nombres de la forma $G_{\#}(X)$, donde X es una clase de fórmulas y # es un descriptor de subíndices. Para este tipo de juegos, escribiremos $L_{\#}(X)$ en lugar de $L(G_{\#}(X))$, y $G_{\#}(A)$ denota el juego específico consistente en un juego general $G_{\#}(X)$ con la fórmula de datos iniciales A.

Demostración 2.1.6. Se tiene que $L(Kayles) \in PSPACE$, la prueba de este hecho puede encontrarse en el trabajo de Schaefer [38]. Por lo tanto, basta probar que $L_w(CNF) \leq L(Kayles)$, siendo CNF las siglas en inglés para referirse a la Fórmula Normal Conjuntiva. Sea $A \in Inp(G_w(CNF))$ dado. Asumimos sin pérdida de generalidad que $A = (\exists x_n)(\forall x_{n-1}) \cdots (\exists x_1)(B_1 \wedge \cdots \wedge B_m)$, donde cada B_i es una disyunción de literales, n es impar, y $B_1 = x_1 \vee \neg x_1$. Asumir esto último es posible puesto que dicho conjunto puede se añadido a cualquier fórmula A sin afectar al resultado de $G_w(A)$. Defínase el grafo $G = (V, E)$ por

$$V = \bigcup_{0 \leq i \leq n} X_i,$$

$$X_0 = \{x_{0,k} : 1 \leq k \leq m\},$$

$$X_i = \{x_i, \overline{x_i}\} \cup \{y_{i,j} : 0 \leq j \leq i-1\} \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$E = \bigcup_{0 \leq i \leq n} [X_i]^2 \cup D \cup \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i-1}} C_{i,j}, \quad donde \quad [X]^2 = \{\{x, y\} : x, y, \in X, x \neq y\},$$

$$D = \{\{x_i, x_{0,k}\} : x_i \ ocurre\ sin\ negar\ en\ B_k\} \cup \{\{\overline{x_i}, x_{0,k}\} : x_i \ ocurre \ negado\ en\ B_k,$$

$$C_{i,j} = \{\{y_{i,j}, w\} \in \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq i \\ k \neq j}} X_k\}, \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 0, \ldots, i-1.$$

Un ejemplo de esta construcción puede observarse en la figura 2.4. Para evitar confusiones provocadas por el gran número de conexiones, esta figura usa ciertas convenciones para mostrarlas. Los grupos de nodos están indicados por los conjuntos rodeados. Una conexión que se muestra terminando en el borde de un conjunto representa múltiples conexiones a cada uno de los nodos del conjunto. Además, todos los nodos de un mismo conjunto están conectados pero estas conexiones no se muestran.

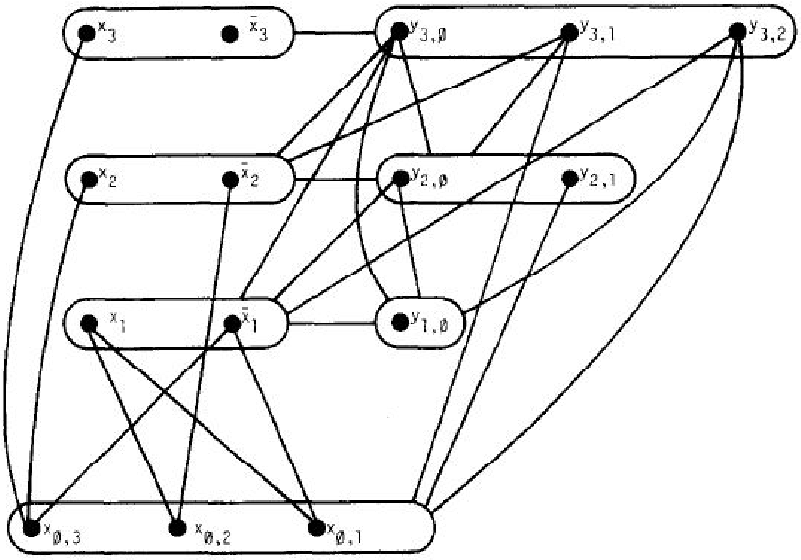

Figura 2.4: Ejemplo de construcción del grafo G.

Es directo probar que hay un algoritmo log-space que computa a G con los datos A.

Se dice que un juego de Kayles en G es jugado legítimamente si para $i = 1, 2, \ldots, n$, el nodo jugado en el movimiento i es x_{n-i+1} o $\overline{x}_{n-i+1}$. El grafo ha sido construido de forma que obligue a jugar a los jugadores de forma legítima: Si en cualquiera de los primeros n movimientos un jugador no juega legítimamente, cuando todos los movimientos previos eran legítimos, entonces ese jugador está predestinado a una derrota inmediata.

Para mostrar esto, fijamos un entero i, $1 \leq i \leq n$, y ahora suponemos que los primeros $n - i$ movimientos han sido realizados legítimamente. Por lo tanto, los nodos jugados hasta el momento pertenecen a cada par $\{x_n, \overline{x}_n\}, \ldots, \{x_{i+1}, \overline{x}_{i+1}\}$. En cada conjunto X_k, dos nodos cualesquiera son adyacentes; por lo que, al menos un nodo puede ser jugado en cada X_k. Así, todos los nodos de $X_n \cup X_{n-1} \cup \cdots \cup X_{i+1}$ pueden jugarse.

Supongamos que el jugador en el movimiento $n - i + 1$ juega ilegítimamente, esto es, juega un nodo de $X_i \cup X_{i-1} \cup \cdots \cup X_0$ distinto de x_i o $\overline{x}_i$. Si juega un nodo en X_k para algún $k < i$, entonces su oponente puede ganar jugando $y_{i,k}$; esto no deja ningún nodo que pueda ser jugado, puesto que todo nodo de X_k es adyacente al nodo jugado ilegítimamente, y todo nodo de $(X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_i) - X_k$ es adyacente a $y_{i,k}$. Por otra parte, si el movimiento ilegítimo está en X_i, este debe ser $y_{i,k}$ para algún $k < i$. En este caso, el oponente puede ganar jugando x_k si $k > 0$ o $x_{0,1}$ si $k = 0$. De nuevo, el segundo gana puesto que no quedan nodos que jugar. Por lo tanto, cualquier movimiento ilegítimo por el jugador en el movimiento i lleva a una derrota inmediata.

La prueba se completa mostrando que el jugador que intenta hacer cierta la fórmula A (a partir de ahora será el jugador T) puede ganar $G_w(A)$ sii el primer jugador puede ganar Kayles en G.

Supongamos que el jugador T tiene una estrategia ganadora para $G_w(A)$. Entonces el primer jugador puede ganar Kayles en G como sigue: En los primeros n movimientos del juego, el primer jugador juega legítimamente mientras el segundo lo haga, y use la estrategia ganadora de T para $G_w(A)$, mediante la evidente correspondencia en donde establecer x_i a 0 o a 1 en $G_w(A)$ corresponde a jugar $\overline{x}_i$ o x_i, respectivamente, en Kayles de G. Si el segundo jugador juega ilegítimamente en cualquiera de estos movimientos, entonces el primer jugador gana al instante como se ha explicado anteriormente. Si el segundo jugador juega legítimamente todo el tiempo, entonces tras el n-ésimo movimiento no quedarán nodos que jugar: Ningún nodo de $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ puede ser jugado, puesto que un nodo de X_i ha sido jugado para cada $i > 0$; y dado que el primer jugador ha llevado a cabo la estrategia ganadora de T, es evidente que todo nodo $x_{0,k}$ de X_0 es adyacente a algunos de los nodos jugados. Por lo tanto, el primer jugador puede ganar Kayles en G.

De forma análoga, puede probarse que si el jugador que intenta hacer la fórmula A falsa (a partir de ahora se considerará como jugador F) tiene una estrategia ganadora para $G_w(A)$, entonces el segundo jugador puede ganar Kayles en G. Mientras el primer jugador juegue legítimamente, el segundo lo hará también y usará la estrategia ganadora del jugador F. Si el primer jugador juega legítimamente todo el rato, entonces en el movimiento $n + 1$ el segundo jugador puede jugar $x_{0,k}$, donde A_k es un conjunto de A que no está satisfecho. Después de esto, no quedan nodos que poder jugar y así, el segundo jugador gana. $\square$

En este capítulo no se aplicarán los conceptos vistos para probar la complejidad del juego Domineering puesto que esta es aún una pregunta que está sin resolver.

2.2. Estrategias ganadoras

Uno de los principales objetivos de la Teoría de Juegos general y de la Teoría de Juegos Combinatorios es el estudio del problema de la(s) estrategia(s) a seguir. Esto es, busca dar respuesta a algunas preguntas del estilo: *¿qué jugador tiene una estrategia ganadora?*, *¿cuál es una estrategia óptima?*, *¿qué jugada llevar a cabo para evitar una derrota segura?...* Estas son algunas de las cuestiones a las que se intentará responder en este capítulo.

En primer lugar, debemos entender mejor el concepto de estrategia aplicado a un juego combinatorio. Este término se refiere al proceso de asunción por parte de cualquiera de los jugadores, el cual, en lugar de realizar un movimiento aleatorio de una posición dada del juego a otra posición, éste analiza previamente las posibles consecuencias que tendrá dicho movimiento para el desarrollo del juego actuando en consecuencia. Es decir, una estrategia es una planificación de las jugadas que un jugador realizará en cada uno de los diferentes estados del juego.

Estos conceptos más bien teóricos, ya que si fuésemos capaces de, a cada estado, calcular todos uno no perdería nunca; sin embargo esto no es así. Por lo general cuando decidimos jugar a un juego cualquiera, lo que uno puede pensar que está llevando a cabo, una serie de pasos que considera adecuados, no es una estrategia propiamente dicha. Uno se limita a ganar la jugada actual, a no dejar que el oponente en su siguiente turno termina la partida llevándose la victoria sino hacer todo lo posible para ser uno mismo quien lo consiga, o en su defecto terminar en empate.

Para dar una definición formal de estrategia, se debe presentar antes la noción de juego posicional. Estos conceptos los trata Beck en su libro *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory* [8].

Definición 2.2.1 (Juego Posicional)**.** Sea $(V, \mathcal{F})$ un hipergrafo finito arbitrario. Un hipergrafo finito es un conjunto arbitrario finito V, denominado tablero del juego y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos arbitraria de V que representa la familia de conjuntos ganadores. Los dos jugadores, ocupan alternadamente las posiciones del tablero V que permanecen libres. El jugador que primero ocupe todos los elementos de un conjunto ganador $A \in \mathcal{F}$ gana, de otro modo el juego termina en empate.

Notar que un juego posicional puede definirse también solo a través de su familia $\mathcal{F}$ de conjuntos ganadores, puesto que el tablero V será la unión $\cup_{A \in \mathcal{F}}$ de todos los conjuntos ganadores.

Definición 2.2.2 (Estrategia)**.** Sea un juego posicional en un hipergrafo finito $(V, \mathcal{F})$. Una estrategia para el primer (resp. segundo) jugador es una función *Str* cuyo dominio es un conjunto subsecuencias de longitud par (resp. impar) de diferentes elementos del tablero V, y su rango es V. Si denotamos como $x_1, x_2, x_3, \ldots$ los movimientos del primer jugador y como $y_1, y_2, y_3, \ldots$ los del segundo, entonces el i-ésimo movimiento x_i (resp. y_i) está determinado por *Str* como sigue

$$x_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}) \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}\}$$

$$(resp. \quad y_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i) \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i\})$$

define el i-ésimo movimiento del primer (segundo) jugador.

Definición 2.2.3 (Estrategia ganadora (o de empate))**.** Una estrategia ganadora (o de empate) *Str* para el primer jugador significa que de todas las formas posibles en que el primer jugador siga la estrategia *Str* para elegir su próximo movimiento es una victoria (o empate) para él. Formalmente, cada jugada

$$x_1 = Str(\emptyset), \forall y_1, x_2 = Str(x_1, y_1), \forall y_2, x_3 = Str(x_1, y_1, x_2, y_2), \forall y_3, \ldots, \forall y_{N/2} \tag{2.1}$$

si $N =\mid V \mid$ es par, y

$$x_1 = Str(\emptyset), \forall y_1, \ldots, \forall y_{(N-1)/2}, x_{(N+1)/2} = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{(N-1)/2}) \tag{2.2}$$

si N es impar, es una victoria (o empate) para el primer jugador.

De modo similar, una estrategia ganadora (o de empate) para el segundo jugador significa que de todas las formas posibles en que emplee su estrategia *Str* para encontrar su próximo movimiento es una victoria (o empate) para él. Formalmente, cada jugada

$$\forall x_1, y_1 = Str(x_1), \ldots, \forall x_{(N/2)}, y_{N/2} = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{N/2}) \tag{2.3}$$

si N es par, y

$$\forall x_1, y_1 = Str(x_1), \forall x_2, y_2 = Str(x_1, y_1, x_2), \forall x_3, \ldots, \forall x_{(N+1)/2} \tag{2.4}$$

si N es impar, es una victoria (o empate) para el segundo jugador.

En ambos casos

$$x_i \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}\} \quad y \quad y_i \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i\} \tag{2.5}$$

se cumple para todo $i \geq 1$.

Como ya se mencionó con anterioridad, otro de los conceptos importantes que trata la Teoría de Juegos es el de estrategias de juego óptimas. Se entiende por estrategia óptima a las estrategias ganadoras y a las estrategias de empate (cuando no existe estrategia ganadora). Ahora bien, tal y como se se vio en el apartado de Complejidad a la hora de calcular los diferentes estados del juego o el tamaño del árbol de jugadas, por lo general se establecían límites para acotar el número exacto. Calcular el número total de estrategias óptimas no va a ser una excepción, esta tarea es ardua y complicada, es más fácil establecer el número total de estrategias que el de estrategias óptimas.

Véase como estas ideas pueden aplicarse al estudio de algunos juegos, como puede serlo el clásico tres en raya. Teniendo en cuenta la convención de juego completo (en donde los jugadores continúan jugando hasta completar todas las casillas del tablero, pese a que ya se conozca el ganador), el total de estrategias se puede acotar superiormente por $N^{eN!}$ tal y como se observa en el trabajo de Beck [8]. Sin embargo, es posible dar un resultado exacto del número total de estrategias.

Sea un juego tal que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ las casillas ocupadas por el primer jugador y $y_1, y_2, y_3, \ldots$ las ocupadas por el segundo jugador,con un esquema de jugadas $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$.

Sea *Str* una estrategia del segundo jugador, que viene definida de forma que el i-ésimo movimiento y_i depende de los anteriores,

$$y_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i\}.$$

Así, dado el primer movimiento del primer jugador x_1, la función *Str* determina únicamente $y_1(\neq x_1)$, el primer movimiento del segundo jugador. De igual forma, dados x_1, x_2, *Str* determina únicamente $y_2(\notin \{x_1, y_1, x_2\})$, y así sucesivamente. Se puede escribir que

$$y_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, y_{i-1}, x_i) = Str_i(x_1, x_2, \ldots, x_i)$$

ya que los $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ vienen determinados por los $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$. Por tanto, *Str* puede considerarse como un vector $Str = (Str_1, Str_2, Str_3, \ldots)$ de cada i-ésima componente Str_i de la estrategia *Str*. El número total de componentes Str_1 es por definición $(N-1)^N$, el de Str_2 es $(N-3)^{N(N-2)}$, el de Str_3 es $(N-5)^{N(N-2)(N-4)}$, y así sucesivamente. Se sigue que el total de estrategias de un juego es el producto

$$\begin{aligned} &(N-1)^N \cdot (N-3)^{N(N-2)} \cdot (N-5)^{N(N-2)(N-4)} \cdots \\ &= \prod_{i=0}^{\lfloor N/2 \rfloor - 1} (N-1-2i)^{\prod_{j=0}^{i}(N-2j)} = e^{e^{N \log N/2 + O(N)}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Veamos ahora con el siguiente ejemplo los diferentes números de jugadas, posiciones y estrategias que existen en el juego.

Ejemplo 2.2.1. *Calcular para el juego del 3-en-raya teniendo en cuenta el número de posibles jugadas, el número de jugadas parciales, el número total de posiciones del juego y el número de estrategias.*

Por ejemplo, aplicando esto al conocido "tres en raya", se tiene que en un tablero de tamaño 3^2 el número de posibles jugadas es

$$9! \approx 3{,}6 \cdot 10^5.$$

El número total de jugadas parciales es

$$e \cdot 9! \approx 10^6.$$

El número total de posiciones posibles del juego es

$$\sum_{i=0}^{9} \binom{9}{i} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} \approx 7 \cdot 10^3.$$

Y por último, el número de estrategias es

$$8^9 \cdot 6^{9 \cdot 7} \cdot 4^{9 \cdot 7 \cdot 5} \cdot 2^{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \approx 10^{500}.$$

Ahora bien, si uno se pone a pensar detenidamente, el total de estrategias de un juego cualquiera puede ser una cantidad demasiado grande como para poder probar cada una de ellas y determinar así cuales son las estrategias óptimas, es por ello que nos conformamos con calcular el total de estrategias del juego, lo que supondrá una cota superior para el número de estrategias óptimas.

Sin embargo, todas esas estrategias van a conducir a solamente 3 resultados posibles, sean estos victoria, derrote o empate. Por ello, suele decirse que los juegos posicionales están determinados. Siguiendo las ideas del teorema de Zermelo [39], los siguientes teoremas son un caso particular analizado por Beck en su libro [8].

Teorema 2.2.2 (Teorema de estrategia)**.** *Sea $(V, \mathcal{F})$ un hipergrafo finito arbitrario y considérese un juego posicional en dicho hipergrafo. Entonces existen únicamente tres alternativas diferentes: el primer jugador tiene una estrategia ganadora, o el segundo jugador tiene una estrategia ganadora, o ambos tienen una estrategia de empate.*

Demostración 2.2.3. No se incluirá en este trabajo esta demostración, pero si el lector está interesado, esta puede encontrarse en la página 683 del libro *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory* [8].

Teorema 2.2.4 (Robo de estrategia)**.** *Sea* $(V, \mathcal{F})$ *un hipergrafo finito arbitrario. Entonces jugando un juego posicional en* $(V, \mathcal{F})$*, el primer jugador puede forzar al menos un empate (empate o posiblemente la victoria).*

Demostración 2.2.5. La prueba de este teorema no se verá tampoco en este trabajo, esta puede encontrarse en la página 683 del libro *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory* [8].

Puesto que la Teoría de Juegos Combinatorios (y la Teoría de Juegos general también) buscan resolver y encontrar la solución a los diferentes juegos, las estrategias óptimas en cada estancia del juego requieren de jugadores perfectos que puedan llevar a cabo dichas estrategias. El hecho de que sean perfectos se refiere a que conocen cuáles son dichas estrategias óptimas y que no cometan errores al llevarla a cabo. Sin embargo, en la práctica esto no ocurre, ya que ambos jugadores no conocen su estrategia óptima y por tanto cometen errores que el rival aprovechará para tomar ventaja.

El concepto de robo de estrategia revela quién será el ganador del juego, pero no la forma con la que encontrar la estrategia ganadora o de empate. Dado que este resultado no dice nada sobre cómo conocer la estrategia a seguir, ésta deberá obtenerse estudiando cada caso. Pero, en general, eso es algo que ni los ordenadores más potentes podrían hacer dado el gran número de estrategias diferentes que existen, un ejemplo sería el ajedrez, que aún no se es capaz de saber todas las estrategias óptimas para cada estado del juego debido a su complejidad y número de estados diferentes. Por ello, en lugar de examinar caso a caso cada una de las estrategias a seguir, se estudian las diferentes posiciones del juego, una cantidad notablemente inferior.

La búsqueda de las estrategias a través de las diferentes posiciones del juego se lleva a cabo sobre su árbol de jugadas, y la manera de proceder para encontrarlas es mediante inducción regresiva, esto es, analizando en primer lugar las diferentes situaciones finales del juego y a continuación ir remontando en el árbol de jugadas para conocer los estados por los que se debe pasar y así los movimientos a ejecutar para conseguir la posición final deseada. Retomando los conceptos previos a cerca de árboles vistos en el anteriormente, podemos dar otra definición dada por Beck [8] sobre el concepto de estrategia en base a los subárboles del árbol de jugadas.

Definición 2.2.4 (Estrategia)**.** Una estrategia para el primer (resp. segundo) jugador es un subárbol G' del árbol de jugadas G tal que:

(1) la raíz de G está en G'

(2) en G' cada vértice de distancia par (distancia impar) tiene un grado de salida 1

(3) en G' cada vértice de distancia impar (distancia par) tiene el mismo grado de salida que en todo el árbol de juego G.

Una estrategia de empate o de victoria para el primer (segundo) jugador es un subárbol G' del árbol de jugadas G que satisface (1)-(2)-(3) y cada hoja de G' corresponde a una situación de empate o victoria para el primero, o solo victoria para el primero (situación de empate o victoria para el segundo, o solo victoria para el segundo).

2.2.1. Tipos de victorias, derrotas y empates

En el primer capítulo de este trabajo se vieron los posibles resultados que tiene un juego, ya sega una victoria para el primer o segundo jugador o para el jugador Izquierda o Derecha. Sin embargo, a la hora de analizar las estrategias ganadoras de un juego, es posible establecer 6 clases diferentes en que clasificar los tipos de estrategias. Para entender mejor los conceptos mostrados en estas clases, veremos previamente tres definiciones [8].

Definición 2.2.5 (Victoria débil)**.** Se dice que un juego tiene una victoria débil cuando un jugador puede ocupar por completo un conjunto ganador, pero no necesariamente primero.

Definición 2.2.6 (Empate fuerte)**.** Se dice que un juego tiene un empate fuerte cuando un jugador, normalmente el segundo, puede ocupar al menos un punto de cada conjunto ganador.

Definición 2.2.7 (Empate emparejado)**.** Se dice que un juego tiene un empate emparejado si tiene una descomposición del tablero (o subconjuntos) en parejas tal que cada conjunto ganador contiene a una pareja.

Así, veamos ahora cómo según los diferentes tipos de estrategias, podemos categorizar los juegos en diferentes clases.

Definición 2.2.8. Sea $\mathcal{F}$ un hipergrafo arbitrario finito, y considerando el juego posicional en $\mathcal{F}$; el hipergrafo $\mathcal{F}$ pertenece a una de las siguientes clases:

- **Clase 0 ("Victoria trivial")**: Contiene al conjunto de hipergrafos $\mathcal{F}$ para los cuales cualquier jugada es una victoria para el primer jugador. Esta es una clase que puede ser caracterizada como: Sea n el tamaño mínimo del hiperborde en $\mathcal{F}$ y sea V el tablero; entonces $|V| \geq 2n-1$ y todo subconjunto de n elementos de V debe ser un hiperborde en $\mathcal{F}$.

- **Clase 1 ("Empate es imposible: victoria forzada")**: En esta clase cualquier jugada tiene un ganador; en otras palabras, un empate nunca puede ocurrir.
- **Clase 2 ("Victoria forzada pero existe posición de empate: victoria delicada")**: Contiene los hipergrafos $\mathcal{F}$ que tienen una posición de empate, pero el primer jugador puede forzar una victoria.
- **Clase 3 ("Empate delicado")**: Contiene los hipergrafos $\mathcal{F}$ para los cuales el juego posicional es un empate pero el primer jugador puede forzar una victoria débil.
- **Clase 4 ("Empate fuerte")**: Contiene los hipergrafos $\mathcal{F}$ para los cuales el segundo jugador tiene un empate fuerte, pero no hay empate de estrategia de emparejamiento.
- **Clase 5 ("Empate de estrategia de emparejamiento")**: Contiene los hipergrafos $\mathcal{F}$ para los cuales el segundo jugador tiene una estrategia de empate emparejada.

Ejemplo 2.2.6. *Ver que para tanto el juego de 3 en raya en un tablero de* 4×4 *como en el de* $8 \times 8 \times 8$*, el segundo jugador puede forzar un empate fuerte.*

Para poder resolver este problema de forma directa, sin tener que hacer un estudio de casos, basta con presentar el teorema de Erdös-Selfridge que resaltó el énfasis por la teoría de Ramsey. Además, este teorema es un criterio global. La prueba de este teorema se encuentra en el libro *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory* [8].

Teorema 2.2.7 (Erdös-Selfridge)**.** *Sea* $\mathcal{F}$ *un hipergrafo n-uniforme, y asumiendo que* $|\mathcal{F}| + MaxDeg(\mathcal{F}) < 2^n$*, donde* $MaxDeg(\mathcal{F})$ *denota el máximo grado del hipergrafo* $\mathcal{F}$*. Entonces, jugando al juego posicional en* $\mathcal{F}$*, el segundo jugador puede forzar un empate fuerte.*

Así, aplicando el resultado del teorema, para el juego del 4×4 existen 10 líneas ganadoras, y el máximo grado es 3. Dado que $3 + 10 < 2^4 = 16$, el teorema anterior se cumple y por lo tanto el segundo jugador puede obtener un empate fuerte. Del mismo modo, en el juego tridimensional del $8 \times 8 \times 8$ hay $(10^3 - 8^3/2 = 244$ líneas ganadoras, y el máximo grado es $2^3 - 1 = 7$. Por tanto, dado que $244 + 7 < 2^8 = 256$, se aplica el teorema y al igual que en el caso anterior, el segundo jugador puede provocar un empate fuerte. Teniendo en cuenta la clasificación que se ha visto a lo largo de este capítulo sobre las clases según las estrategias seguidas, estos dos ejemplos corresponden a la Clase 4.

2.2.2. Ejemplos ilustrativos de estrategias

Al igual que en el capítulo anterior, en esta sección veremos cómo aplicar algunos de los resultados y propiedades que se han visto a lo largo de este capítulo a la hora de encontrar las estrategias ganadoras de un juego determinado.

Tal y como estableció Uiterwijk [43] veremos algunos resultados que han sido probados del juego Domineering. En primer lugar, ha de notarse que para obtener una estrategia ganadora que garantice una victoria, deberá existir un movimiento ganador tras cada turno del oponente, y esto es solo aplicable para tableros de forma rectangular ya que las reglas se aplican solamente a estas posiciones. A continuación, se ha de notar que, por analogía al ajedrez, podremos encontrar una fase de apertura, una fase intermedia, y una fase de cierre.

En la primera, los jugadores solo juegan movimientos que eliminen el doble de movimientos reales del oponente. El ganador se asegura de utilizar tantos movimientos que aumenten el número de futuros movimientos seguros propios como sea posible. Solo cuando es posible y provechoso hacer un movimiento que elimine los movimientos en que el adversario pueda reducir por 2 los movimientos reales de juego, el ganador lo usará en el último momento posible. Cuando los movimientos que eliminen doblemente el número de movimientos reales del oponente se acaben, comienza la fase intermedia.

En esta etapa, siempre se asume que se realizan movimientos que eliminan un movimiento del jugador ganador, mientras que el jugador ganador no lo hace. Durante esta fase, el único requisito es que el jugador ganador haga movimientos que al menos disminuyan el poder de los movimientos del rival. Cuando al ganador solo le quedan movimientos seguros, comienza la última fase.

Esta última fase del juego es trivial puesto que significa realizar movimientos arbitrarios hasta que el oponente se quede sin posibilidades de juego.

Veamos ahora algunas conclusiones que hizo Uiterwijk en su trabajo a cerca de las soluciones de algunos tamaños del Dommineering.

Teorema 2.2.8. *Todo tablero* $m \times 3$ $(m > 1)$ *es una victoria para el Vertical.*

Demostración 2.2.9. Para $m \leq 5$ los resultados son los triviales puesto que basta con que Vertical empiece la partida colocando en la columna central del tablero, de forma que impida a Horizontal poner sus fichas.

Para un tablero de $m \times 3$ con $m \geq 6$ se tiene lo siguiente. Suponemos que Vertical juega su primer movimiento en la segunda columna, creando dos movimientos seguros. Ahora el número máximo de movimientos que el rival puede hacer es $m-2$. El mejor caso para Horizontal es cuando $m-2$ es una cuádrupla $+3$, ya que entonces Horizontal tiene 1 movimiento (que reduzca por 2 el número de movimientos reales del oponente) más que Vertical, más una fila adicional, siendo el turno de Horizontal.

Así que supongamos que $m-2 = 4k+3$ para $k \geq 1$. Entonces el número máximo de movimientos que el rival puede hacer es $4k+3$. Dado que cada par de filas vacías ya sea Vertical u Horizontal tendrán 1 movimiento que le permita reducir el número de movimientos posibles de su oponente por 2, todo grupo de 4 filas implica una iteración, en donde Horizontal y Vertical ambos jugarán un movimiento que reduzca los movimientos de su rival por 2, disminuyendo el número de movimientos reales de ambos lados a 3.

Así que tras k iteraciones, el número máximo de movimientos que el rival pueda hacer es $k+3$. Dado que todo movimiento que reduce a la mitad los movimientos posibles del oponente llevado a cabo por Vertical crea 2 movimientos seguros adicionales, el número total de movimientos seguros de Vertical tras k iteraciones se habrá incrementado en $2k+2$. Puesto que $2k+2 \geq k+3$ para todo $k \geq 1$, se sigue que Vertical tiene al menos tantos movimientos seguros como movimientos totales tiene Horizontal, por lo que Vertical siempre ganará. □

A continuación se enuncian tres teoremas, el primero de ellos será otro resultado que otorgará la victoria a Vertical cuando se juega en tableros de tamaño $2k \times n$ con $n = 3, 5, 7, 9$ y 11, y los análogos para la disposición horizontal del tablero donde será Horizontal quien obtenga la victoria. La demostración de estos teoremas se encuentra en la misma sección del trabajo de Uiterwijk que la otra demostración ya vista con anterioridad y que no se verán en este trabajo.

Teorema 2.2.10. *Todo tablero* $m{\times}3$ $(m > 1)$ *es una victoria para el Vertical.*

Teorema 2.2.11. *Todo tablero* $3{\times}n$ $(n > 3)$ *es una victoria para Horizontal.*

Teorema 2.2.12. *Todo tablero* $m \times 2k$ *para* $m = 5$ *y* 9*, y todo tablero* $m \times 4k$ *para* $m = 3, 7,$ *y* 11 *son una victoria para Horizontal.*

Gracias a los resultados que proporcionan estos teoremas y junto con el trabajo realizado por Lachmann, Moore y Rapaport [35], es posible dar respuesta a la pregunta *¿quién será el ganador de la partida?* para ciertos tipos de tamaño de tablero. Esto, obviamente, considerando que ambos jugadores juegan perfectamente y de manera óptima. Así, en la Figura 2.5 podemos ver todos los resultados sobre los cuales se tiene conocimiento exacto para tamaños del tablero $m \times n$ con $m, n = 1, \ldots, 33$ del juego del Domineering.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
1	2	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
2	V	1	1	H	V	1	1	H	V	1	1	H	2	1	1	H	H	1	1	H	H	H	1	H	H	H	1	H	H	H	H	H	H
3	V	1	1	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
4	V	V	V	1	V	1	V	H	V	H	V	H	V	H	H	H	H	H	1h	H	1h	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
5	V	H	V	H	2	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
6	V	1	V	1	V	1	V	H	V	1	1	H	V	1h		H		1h	1h	H		1h	1h	H		1h	1h	H		1h	1h	H	
7	V	1	V	H	V	H	1	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
8	V	V	V	V	V	V	V	1	V		V		V			2h								1h								2h	
9	V	H	V	H	V	H	V	H	1	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
10	V	1	V	V	V	1	V		V	12	1v		V							2h		1h				1h				−v			
11	V	1	V	H	V	1	V	H	1v	1h	12	H	−v	1h	1h	H	1h	1h	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h
12	V	V	V	V	V	V	V		V		V	12	V											2h									
13	V	2	V	H	V	H	V	H	1v	H	−h	H	12	H	−v	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h	H	1h
14	V	1	V	V	V	1v	V		V		1v		V	12														2h		1h			
15	V	1	V	V	V		V		1v		1v		−h		12															2h		1h	
16	V	V	V	V	V	V	V	2v	V		V		V			12																2h	
17	V	V	V	V	V		V		1v		1v		1v				12															
18	V	1	V	V	V	1v	V		V		1v		V					12														
19	V	1	V	1v	V	1v	V		1v		1v		1v						12													
20	V	V	V	V	V	V	V		V	2v	V		V							12												
21	V	V	V	1v	V		V		1v		1v		1v								12											
22	V	V	V	V	V	1v	V		V	1v	V		V									12										
23	V	1	V	V	V	1v	V		V		1v		1v										12									
24	V	V	V	V	V	V	V	1v	V		V	2v	V											12								
25	V	V	V	V	V		V		V		1v		1v												12							
26	V	V	V	V	V	1v	V		V	1v	V		V													12						
27	V	1	V	V	V	1v	V		V		1v		1v														12					
28	V	V	V	V	V	V	V		V		V		V	2v														12				
29	V	V	V	V	V		V		V		1v		1v																12			
30	V	V	V	V	V	1v	V		V	−h	V		V	1v	2v														12		
31	V	V	V	V	V	1v	V		V		1v		1v																		12	
32	V	V	V	V	V	V	V	2v	V		V		V		1v	2v																12	
33	V	V	V	V	V		V		V		1v		1v																			12

Figura 2.5: Resultados conocidos de las victorias del Domineering sobre tableros rectangulares. 1, 2, H y V hacen referencia al primer jugador, segundo jugador, al jugador que pone las fichas Horizontales y al jugador que pone las fichas Verticales respectivamente. Resultados como “1h” significa que el ganador es el primer jugador o H y resultados como “-v” significa que V no obtiene la victoria siempre. Los valores que están resaltados en negrita son aquellos que han sido obtenidos mediante búsqueda o por otros métodos; el resto se han obtenido a través de los primeros siguiendo las reglas que los autores definieron en su trabajo [35] o mediante simetrías.

Capítulo 3

Estudios de muestra

A lo largo del presente capítulo, se procederá a ilustrar con más detalle y en mayor profundidad el estudio de algunos juegos combinatorios. Estos han sido elegidos de forma que sea posible mostrar no solamente cómo resolverlos, sino también cómo aplicar algunos de los conceptos y nociones que se han tratado a lo largo de este trabajo.

Así, que sin más dilación, veremos en primer lugar un estudio sencillo sobre un juego como es Chomp; a continuación, un estudio completo del famoso juego de Nim y por último un estudio de un juego tradicional canario como lo es la Chascona.

3.1. Estudio ligero del juego de Chomp

3.1.1. Introducción

En este apartado, como ya se ha dicho se pretenderá analizar de forma simple el juego de Chomp.

El juego de Chomp es un juego combinatorio, donde dos jugadores juegan en un casillero rectangular, o como más comúnmente se le conoce, con una tableta de chocolate en donde la onza inferior izquierda está envenenada. El casillero o tableta de chocolate puede tener tantas filas y columnas como se desee. Los dos jugadores se irán alternando el turno cogiendo diferentes casillas u onzas, de modo que todas aquellas que se encuentren por encima y a la derecha deberán ser también tomadas o comidas (*chomp* del inglés).

El origen de este juego se debe a David Gale [21] [22] quien reinventó el juego de los divisores que propuso originalmente Fred. Schuh en 1952 [39], el cual consiste en conjunto parcialmente ordenado de todos lo divisores de un número fijo N, con x debajo de y cuando $y|x$. Así, en esta nueva versión del juego trata de una tableta de chocolate de tamaño m por n, donde la onza inferior izquierda está envenenada. De este modo, según el juego de Schuh, se trata del equivalente al juego $N = p^{m-1}\ q^{n-1}$ para dos primos p y q. Más tarde, fue Martin Gardner quién escribió sobre el mismo en una columna de la revista Scientific American [24] y le otorgó su nombre actual, *Chomp*.

3.1.2. Reglas

El juego de Chomp es jugado por dos jugadores sobre un casillero rectangular, en donde el tamaño del mismo es elegido por los jugadores.

Durante cada turno, cada jugador debe elegir una casilla de tal forma que dicha casilla y todas aquellas casillas que se encuentren por encima y a la derecha de la misma serán eliminadas. La casilla inferior izquierda estará infectada, por lo que aquel jugador que durante su turno elija o elimine dicha casilla perderá la partida. Por consiguiente, mientras haya casillas disponibles en el juego, cualquier jugador podrá realizar su turno y elegir una casilla.

3.1.3. Ejemplo

A continuación, se considerará el siguiente ejemplo con propósitos ilustrativos de forma que se entienda el juego y se aclaren las dudas que pueda haber a cerca del mismo. Para este ejemplo tomaremos un casillero de tamaño 5×9 (ver Figura 3.1).

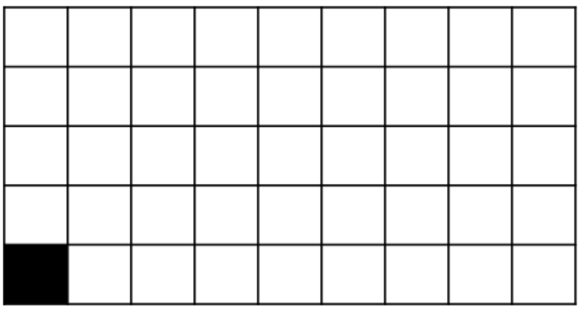

Figura 3.1: Disposición inicial del tablero de Chomp 5×9 con la casilla inferior izquierda envenenada.

Tal y como se viene haciendo hasta ahora, el jugador Izquierda comenzará la partida realizando su primer turno tal y como se observa en la Figura 3.2, en donde la casilla de color azul representa la casilla elegida y aquellas que se encuentran sombreadas, son aquellas que, siguiendo las reglas del juego, son también retiradas del mismo.

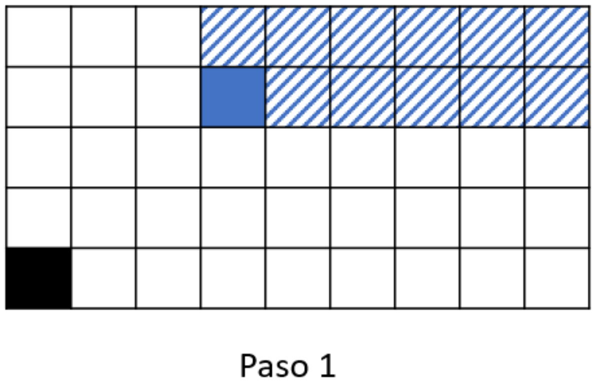

Figura 3.2: Primera jugada del juego de Chomp por parte del jugador Izquierda, con la casilla sombreada siendo la que éste ha elegido y las que se encuentran con un sombreado rayado, las que por las reglas del juego también son eliminadas.

Ahora es el turno del jugador Derecha, quien decide tomar la casilla ubicada en la tercera fila y quinta columna, tal y como se muestra en la Figura 3.3.

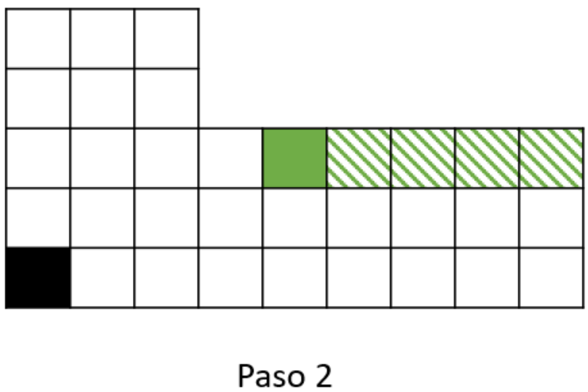

Figura 3.3: Primera jugada del jugador Derecha en el juego de Chomp.

Así, observando las jugadas llevadas a cabo por cada uno de los jugadores en la Figura 3.4, podemos ver cómo debido a que el último jugador en elegir casilla ha sido el jugador Derecha y esta casilla es la que está envenenada, éste pierde la partida. Esta situación ya se anticipaba tras el Paso 7, ya que el jugador Derecha si tomaba la casilla envenenada perdía y para evitarlo ha tomado otra de las disponibles en el Paso 8, dejando únicamente la casilla envenenada y otra libre para el jugador Izquierda. Este, al no querer perder la partida, toma en el Paso 9 aquella que queda libre obligando a tomar al jugador Derecha en el Paso 10 la única casilla que queda, la envenenada, perdiendo así la partida.

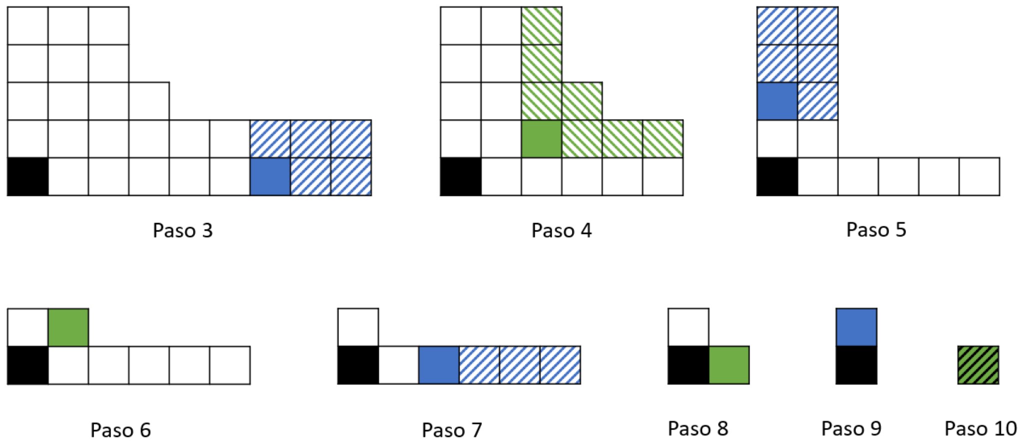

Figura 3.4: Resto de jugadas de la partida de Chomp.

3.1.4. Estrategia

El hecho de que uno de los dos jugadores pueda tener una estrategia ganadora no significa que se conozca cual sea y por lo tanto dicho jugador se haga con la victoria. En primer lugar, gracias al trabajo de Eva Elduque [18] probaremos que el segundo jugador no tiene una estrategia ganadora para un tamaño de casillero rectangular superior a 1×1.

Proposición 3.1.1. *El segundo jugador no posee estrategia ganadora para cualquier tamaño del casillero rectangular mayor que* 1×1.

Demostración 3.1.2. Para demostrar este hecho se realizará por contradicción, suponiendo que en realidad el segundo jugador si que tiene una estrategia ganadora, pero tras analizar este hecho se llega a una situación imposible, lo que muestra que la suposición era errónea.

Así, suponiendo que el segundo jugador tiene una estrategia ganadora para el juego de Chomp en un casillero con m filas y n columnas, donde m y n

no son ambos 1. Si el primer jugador toma una casilla en la esquina superior derecha, entonces el segundo jugador puede llevar a cabo su estrategia ganadora y tomar otra casilla C, de tal forma que las restantes casillas quedan en forma de L.

Dado que el segundo jugador ha llevado a cabo su jugada ganadora para dichas condiciones del juego, se concluye que el segundo jugador posee una estrategia ganadora para un juego de Chomp con forma L. Ahora, imaginemos que el primer jugador toma la casilla S en su primer turno. Entonces, antes del turno del segundo jugador, el casillero posee una forma de L. Esta es la misma situación que se tenía con anterioridad, pero el orden de los jugadores ha sido alternado tras haber llegado al estado formado por el casillero en forma de L. Por lo que si el segundo jugador tenía una estrategia ganadora, se tiene ahora que el primer jugador tiene una estrategia ganadora bajo las mismas condiciones.

Se obtiene así, una situación imposible donde ambos jugadores tienen una estrategia ganadora y esto es imposible. Por tanto, la suposición inicial es falsa. □

Se ha de notar, que el razonamiento seguido para la demostración de esta proposición se basa en un concepto que ya se introdujo con anterioridad en el apartado de estrategias ganadoras. Este concepto se basa en la idea de robo de estrategia.

Dado que, como acaba de verse, el segundo jugador no tiene una estrategia ganadora en el juego de Chomp, es lícito pensar que sea entonces el primer jugador quien la tenga. En efecto, veremos ahora que es el primer jugador quien tiene una estrategia ganadora [18].

Proposición 3.1.3. *El primer jugador tiene una estrategia ganadora para cualquier tamaño de casillero mayor que* 1×1.

Demostración 3.1.4. Puesto que como se ha visto en la proposición anterior, el segundo jugador no tiene una estrategia ganadora, entonces existe un movimiento que puede realizar el primer jugador de modo que no exista un movimiento para el segundo jugador que le permita asegurarse la victoria. Suponiendo que le primer jugador realiza este primer movimiento, tras el movimiento del segundo jugador, queda un juego de Chomp (posiblemente no rectangular) en el cual el segundo jugador no tiene una estrategia ganadora además de que hay menos casillas disponibles.

Ahora, repetimos esta idea para encontrar un movimiento que permita al primer jugador dejar una posición del juego en que el segundo jugador no tenga una victoria. Se ha de notar que este movimiento dependerá de lo que haya realizado con anterioridad el segundo jugador en su turno correspondiente. Tras el turno del segundo jugador, queda un casillero con aún menos casillas en donde el primer jugador tiene un movimiento que impida que el segundo jugador gane. Repitiendo esta idea, no quedarán más casillas disponibles en el juego, y puesto que el segundo jugador no puede asegurarse la victoria, el primer jugador acaba ganando sin importar lo que haga el segundo.

Esto prueba que, efectivamente, el primer jugador tiene una estrategia ganadora. □

3.2. Estudio del juego de Nim

3.2.1. Introducción

En este apartado se realizará un análisis completo de un juego combinatorio que ya haya sido resuelto, que ya haya sido estudiado. Dentro de este grupo se encuentran gran cantidad de juegos como Nim, tres en raya, Domineering... Se ha decidido detallar al completo el estudio del juego de Nim.

Nim es un juego combinatorio, donde dos jugadores se van alternando el turno de juego y durante el mismo toman objetos de diferentes filas o grupos. La única regla es que cada jugador tenga que tomar al menos un objeto durante su turno, pero se puede coger más de un objeto siempre y cuando éstos estén dentro de la misma fila o grupo.

Se dice que el juego es originario de China, pero múltiples variantes del juego de Nim existen desde la antigüedad y las primeras referencias del juego en Europa datan del siglo XVI. Pero fue Charles L. Bouton de la Universidad de Harvard quien le dio el nombre al juego tal y como lo conocemos hoy en día y también quien desarrolló una teoría completa del juego en 1901 [33].

El juego de Nim es el ejemplo más conocido de juego imparcial y el cuál es el elemento fundamental para el desarrollo de la teoría de este tipo de juegos y se utiliza para el estudio de otro tipo de juegos más complejos. Además, tal como se verá a lo largo de este capítulo, el juego está completamente resuelto, por lo que existe una estrategia ganadora sea cual sea la combinación inicial del juego.

3.2.2. Reglas

El juego tradicional de Nim es jugado por dos jugadores con un número de monedas apiladas, donde el número de monedas y montones es elegido por los jugadores. Estas monedas pueden ser cualquier tipo de objeto, pero de aquí en adelante las consideraremos *fichas* y a los montones, *pilas*.

Durante cada turno, cada jugador debe coger al menos una ficha, pero éste podrá coger más siempre y cuando todas ellas pertenezcan a la misma pila. Las pilas pueden quedar vacías, en efecto, cuando se elimina la última ficha de la pila ésta queda vacía y por lo tanto se elimina del juego. En el momento en que un jugador no pueda mover, el juego termina. Por consiguiente, mientras haya fichas en el juego, cualquier jugador puede realizar su turno y coger fichas. De este modo, se puede reformular la condición de terminación del juego, el juego de Nim termina cuando no quedan fichas.

Según la convención de *juego pobre* de Nim, aquel jugador incapaz de realizar un movimiento gana; esto equivale a que el jugador que toma la última ficha es el perdedor del juego. Según la convención de *juego normal* de Nim, el perdedor es el jugador que no puede llevar a cabo su movimiento.

3.2.3. Ejemplo ilustrativo

Considérese el siguiente ejemplo a modo de ilustración para el consecuente estudio del juego. Se tienen 3 pilas, inicialmente con 4, 2 y 4 fichas respectivamente. A y B son los jugadores, comienza la partida el jugador A. El juego se desarrolla como muestra la tabla 3.1:

Pila 1	Pila 2	Pila 3	Jugada
4	2	4	Punto de partida
4	0	4	1) A toma 2 fichas de la pila 2
3	0	4	2) B toma 1 ficha de la pila 1
3	0	3	3) A toma 1 ficha de la pila 3
1	0	3	4) B toma 2 fichas de la pila 1
1	0	1	5) A toma 2 fichas de la pila 3
1	0	0	6) B toma 1 ficha de la pila 3
0	0	0	7) A toma 1ficha de la pila 1

Tabla 3.1: Ejemplo ilustrativo del desarrollo de una partida del juego de Nim.

En un juego normal, el jugador A gana, puesto que este ha tomado la última ficha dejando al jugador sin ningún movimiento posible. En un juego pobre sería el jugador A quien perdería, pero si en la jugada 5 hubiese tomado 3 fichas de la pila 3, le habría dejado al jugador B una distribución de fichas 1, 0, 0, forzándolo a tomar la última ficha.

En este ejemplo, el jugador A ha jugado de forma perfecta, no dejando nunca al jugador B la posibilidad de remontar el juego y tomar la delantera. Esta forma de jugar puede generalizarse en una teoría general para cualquier número de pilas y cantidad de fichas.

3.2.4. Estrategia

Como ya se había dicho con anterioridad, el juego de Nim está matemáticamente resuelto [3] para cualquiera sea el número inicial de fichas y pilas. Además, existe una forma simple para calcular, según el estado actual del juego, quién será el jugador que vaya a ganar y los movimientos que debe seguir para obtener la victoria. Esto es, calcular las estrategias de juego ganadoras que pueden emplear los jugadores para finalizar la partida con la victoria de su lado.

La clave principal a la hora de poder encontrar esta estrategia o estrategias ganadoras reside en la suma de números binarios o lo que de aquí en adelante se conocerá como la *suma-nim*.

Definición 3.2.1. La suma-nim de dos enteros a y b positivos representa la suma de al y b en forma de potencias en base 2 cancelando las apariciones dobles y añadiendo el resto.

Ejemplo 3.2.1. *Para calcular el valor de* $5 \oplus 7$ *basta con seguir la definición de la suma-nim. Se tiene que* $5 = 2^2 + 2^0$ *y* $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$*. Cancelando las potencias* 2^2 *y* 2^0 *por aparecer dos veces, y sumando el resto de potencias se obtiene* $5 \oplus 7 = 2^1 = 2$.

Ahora, dada la posición de un juego normal de Nim (el tamaño de las pilas) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, el jugador que mueve gana si $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n \neq 0$; se puede encontrar un movimiento ganador determinando la pila $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y un número $b_i \in \{0, 1, \ldots, a_i - 1$ tal que $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_{i-1} \oplus b_i \oplus a_{i+1} \oplus a_{i+2} \oplus \ldots a_n = 0$, y tomando algunas fichas de la pila i de forma que queden b_i fichas. Si $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, entonces el jugador que mueve que mueve pierde.

En un juego pobre de Nim, la estrategia es casi idéntica. Siempre y cuando tras el movimiento a realizar haya al menos una pila de tamaño igual o superior a 2, se seguirá la misma estrategia que para el juego normal de Nim. Sin embargo, si tras el movimiento que desea realizar, no quedara ninguna pila de tamaño 2 o superior, deberá realizar una jugada diferente:

- Si el movimiento implica dejar una pila con tamaño 1, se deberá hacer que tenga tamaño 0 en su lugar, o

- Si el movimiento hace que la pila tenga 0 fichas, tendrá que hacer que tenga 1 en su lugar.

Dicho de otra forma, el movimiento estratégico es dejar un número impar de pilas de tamaño 1. En un juego normal de Nim, debería haber un número par de pilas de tamaño 1 para hacer que la suma-nim sea cero.

Teorema 3.2.2. *El jugador que lleve a cabo su jugada en un juego normal de Nim gana si y solo si la suma-nim del tamaño de las pilas no es cero.*

Demostración 3.2.3. Para realizar la demostración de este teorema se procederá con el caso trivial, que el tamaño de todas las pilas sea cero. De esta forma, el jugador que tenga que llevar a cabo su jugada pierde y la suma-nim del juego es cero. A partir de aquí, supongamos que no todas las pilas tienen tamaño cero.

Primero, obsérvese que la suma-nim cumple las siguientes propiedades para tres enteros no negativos a, b, c:

- Asociativa: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Conmutativa: $a \oplus b = b \oplus a$
- Elemento neutro: $0 \oplus a = a$
- Auto-inverso: $a \oplus a = 0$
- Cálculo de la unión de sumas-nim: Se escriben todos los números en suma de potencias de dos, se toman las potencias de dos que aparecen un número impar de veces y se suman las potencias que aparezcan una única vez.

  Ejemplo 3.2.4. *La suma-nim de* 1, 3 *y* 5 *puede hallarse como:*

  $$1 \oplus 3 \oplus 5 = (2^0) \oplus (2^0 + 2^1) \oplus (2^0 + 2^1 + 2^2) = 2^0 + 2^2 = 5.$$

Supongamos ahora que el tamaño de las pilas antes de realizar un movimiento es $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y después de realizarlo es $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Supongamos que el movimiento se hace en la pila k; entonces $\forall i \neq k$, $a_i = b_i$. Sea $s = a_1 \oplus a_2 \oplus$

$\cdots \oplus a_n$ y $t = b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n$. Se tiene por propiedades:

$$\begin{aligned} t &= 0 \oplus t \\ &= (s \oplus s) \oplus t \\ &= s \oplus (s \oplus t) \\ &= s \oplus ((a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n) \oplus (b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_n)) \\ &= s \oplus ((a_1 \oplus b_1) \oplus (a_2 \oplus b_2) \oplus \cdots \oplus (a_n \oplus b_n)) \\ &= s \oplus (0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus (a_k \oplus b_k) \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \oplus 0) \\ &= s \oplus (a_k \oplus b_k). \end{aligned}$$

Ahora se van a probar dos resultados:
Resultado 1: Si $s = 0$, entonces $t \neq 0$. Si la suma-nim de los tamaños originales es cero, entonces el jugador que debe mover pierde (tiene que hacer la suma-nim distinta de cero).

Véase que $a_k \oplus b_k \neq 0$. De hecho, si suponemos que se cumple la igualdad, entonces

$$\begin{aligned} a_k &= a_k \oplus 0 \\ &= a_k \oplus (a_k \oplus b_k) \\ &= (a_k \oplus a_k) \oplus b_k \\ &= b_k. \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_k = b_k$. Pero esto es absurdo y contradice el hecho de que un jugador realice un movimiento a una pila b_k, lo cual debe hacer el tamaño de la pila diferente.

Así, dado que $a_k \oplus b_k \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} t &= s \oplus (a_k \oplus a_k) \\ &= 0 \oplus (a_k \oplus b_k) \\ &= a_k \oplus b_k \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Resultado 2: Si $s \neq 0$, es posible hacer que $t = 0$. Si la suma-nim de los tamaños iniciales no es cero, el jugador que mueve es el ganador (puede hacer que la suma-nim sea cero).

Considerando la mayor potencia de 2, 2^k, no mayor que s. Existe al menos un a_i que también contiene 2^k, sino la potencia 2^k no aparecería en s. Ahora, se toma $b_i = s \oplus a_i$. El valor de b_i se reduce en 2^k, e incrementa como mucho en $2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots 2^0 = 2^k - 1$, así $b_i \leq a_i$. Además,

$$\begin{aligned} t &= s \oplus (a_i \oplus b_i) \\ &= s \oplus (a_i \oplus (s \oplus a_i)) \\ &= (s \oplus s) \oplus (a_i \oplus a_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Con esto queda probado el teorema. □

Teorema 3.2.5. *La estrategia antes dada para un juego pobre de Nim es cierta: se ha de seguir la estrategia de un juego normal de Nim, excepto que cuando el jugador que va a realizar su jugada para dejar el tamaño de las pilas menor que 2 fichas, este debe hacer que el número de pilas de 1 ficha sea impar.*

Demostración 3.2.6. El único cambio reside en que cuando el jugador que debe llevar a cabo turno, necesita reducir la única pila que tenga tamaño 2 o más a un tamaño inferior a 2 (otras pilas tienen como mucho tamaño 1).

Suponiendo que las pilas son $a_1, a_2, \ldots, a_n$, donde $a_1 \geq 2$ y $a_2, a_3, \ldots, a_n \leq 1$. Entonces $a_2 \oplus a_3 \oplus \cdots \oplus a_n = 0 \vee 1$. Si $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0$, esto implicaría que $a_1 = 0 \vee 1$, lo cual es una contradicción. Así que el jugador que mueve es el ganador. También es claro que el jugador que mueve puede hacer que la primera pila tenga tamaño 1 o 0, puesto que inicialmente tiene al menos 2 fichas.

Una vez el jugador decide cual será su movimiento, el resto del juego es forzado; con un número impar de pilas de tamaño 1 y siendo el turno del oponente, el oponente terminará cogiendo la última piedra, y por la convención del juego pobre, perderá.

Con esto queda completa la prueba. □

3.2.5. Complejidad

Para demostrar la complejidad del juego de Nim, será necesario introducir previamente algunos conceptos para entender dicha prueba. Para ello empleamos la siguiente definición:

Definición 3.2.2. Asumiendo que una disposición del juego $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ está ordenada en una matriz con filas $a_1, \ldots, a_k$ y la codificación de bit menos significativa primero. Esta disposición es conocida como **disposición balanceada** si toda columna contiene un número par de 1s. Por consiguiente, si alguna columna tiene un número impar de 1s, entonces se denomina que es una **disposición desbalanceada**.

Ahora, se van a enunciar un par de lemas, que están también relacionados con las estrategias a seguir a la hora de resolver el juego de Nim. Estos lemas no serán probados puesto que no es objeto de estudio de esta sección, pero se dará por demostrados. La prueba de estos lemas puede encontrarse en las notas de Meyer [hacer ref].

Lema 3.2.7. *Sea* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = S$ *una disposición del juego.*

- *Si* S *es una disposición desbalanceada, existe un movimiento que lleva a una disposición balanceada.*
- *Si* S *es una disposición balanceada, cualquier movimiento lleva a una disposición desbalanceada.*

Lema 3.2.8. *El jugador A tiene una estrategia ganadora si y solo si la disposición inicial del juego es desbalanceada.*

Teniendo en cuenta las implicaciones de estos dos lemas, la complejidad computacional del juego de Nim queda determinada gracias al siguiente teorema.

Teorema 3.2.9. *El juego de Nim* $\subset$ *LOGSPACE.*

Demostración 3.2.10. Puesto que el juego de Nim se reduce a comprobar si la disposición inicial del juego $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$ es balanceada o no, esto puede determinarse fácilmente en un espacio determinista logarítmico, dado que solo es necesario intercambiar bits de cualquier columna. □

3.3. Estudio de la Chascona

3.3.1. Introducción

Lo que se verá a lo largo de este capítulo, será un análisis o, por lo menos, un inicio en el estudio de un juego combinatorio tradicional que por el momento aún no ha sido objeto de estudio.

El juego en cuestión es un juego tradicional canario, la *Chascona*, el cuál consiste en un tablero compuesto por tres cuadrados colocados uno dentro de otro, de tal forma que comparten el mismo centro, son concéntricos. A su vez, estos cuadrados están unidos entre sí por una mediana en cada uno de

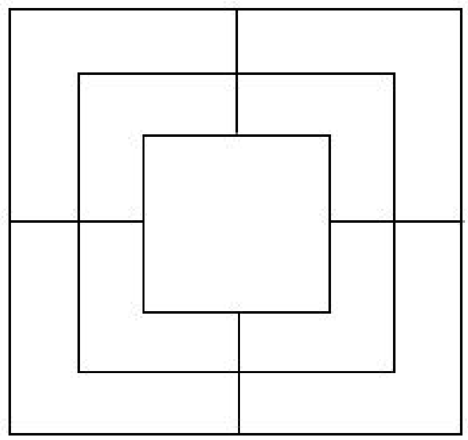

Figura 3.5: Tablero de juego de la Chascona.

sus lados. En la figura 3.5 se puede observar la disposición del tablero. Así, el tablero de juego consta de 24 vértices o intersecciones de líneas cruzadas.

La disposición que tiene el tablero de juego no se considera original de estas islas, puesto que existen numerosos yacimientos en el Antiguo Egipto donde ya están presentes algunos tableros con esta disposición. Por lo tanto, se considera que es uno de los tablero de juego más antiguos conocidos y que existen en la actualidad. Aun así, pese a que el tablero pueda ser el mismo o similar, cada pueblo utiliza unas reglas particulares, lo que le otorga una identidad propia al juego, estas reglas pueden variar en función de las tradiciones de cada zona en que se desarrolle el juego y de su cultura.

Tal y como se menciona en el libro de José Manuel y Francisco [19], en este caso, la Chascona proviene de diferentes localidades y yacimientos situados en la isla de Fuerteventura.

3.3.2. Reglas

Para poder comprender mejor la forma en que poder jugar correctamente a la Chascona, es necesario establecer una serie de reglas. Así, siguiendo las reglas establecidas en [19] podemos introducir las siguientes reglas para el juego:

- Se trata de un juego para dos personas, muy arraigado en la isla de Fuerteventura, aunque también se conoce en otras islas. Las piezas, o fichas que se emplean, son nueve, indistintamente de su color, textura o forma, pues incluso aunque se utilizaran piedras del mismo color, los jugadores (que tradicionalmente son pastores) saben distinguirlas sin ningún problema ya que al igual que ocurre con las cabras, cada uno conoce a las suyas. En cualquier caso, otras personas emplean fichas de distinto color o naturaleza, a fin de mejorar su identificación, facilitando así su percepción del conjunto durante el desarrollo del juego.

- Inicialmente se sortea para ver qué jugador inicia la partida. Se comienza por colocar las fichas una por una, alternativamente, por cada uno de los jugadores. De tal manera que se intente impedir que el contrario realice un "pinto" situando tres piezas seguidas o alineadas (*tres en raya*).
- Si alguno de los jugadores consigue, durante la colocación de las fichas en el tablero, situar tres en raya, tiene derecho a quitarle una ficha al contrario.
- Una vez colocadas en el tablero las nueve fichas de las que dispone cada jugador, los jugadores comienzan a mover, siguiendo el trazado lineal del tablero, de tal manera que se trata de impedir que el contrario consiga realizar alineaciones de tres piezas en forma de tres en raya.
- En esta *Chascona* de nueve fichas, el "*tres en raya*" se forma en cada uno de los lados de los tres cuadrados concéntricos y en las líneas medianas que los unen.
- Cada vez que cualquiera de los jugadores consiga situar tres fichas en raya se come una pieza del contrario, de tal forma que intenta captura aquella que más le interese para entorpecer el juego de su oponente. En cualquier caso, jamás podrá quitarle del tablero aquellas fichas que el contrario tiene ya situadas en posición "*tres en raya*".
- El jugador que tiene situadas piezas o fichas en posición de "*tres en raya*" puede deshacerlas y rehacerlas, para comer piezas o fichas del contrario, según le convenga.
- Gana la partida aquel jugador que consigue capturar siete fichas del adversario o también el que logre cerrarle toda posibilidad de movimiento ("*el que tranque*").

3.3.3. Ejemplo ilustrativo

Considérese el siguiente ejemplo a modo de ilustración para el consecuente estudio del juego. Inicialmente se tiene el tablero vacío y los jugadores van colocando sus nueve fichas en las intersecciones de las líneas que conforman el tablero. Así, A y B son los jugadores, comenzando a colocar sus fichas el jugador A. En este ejemplo, el jugador A jugará con las fichas de color verde mientras que el jugador B lo hará con las de color azul.

La disposición inicial de las fichas en el tablero, hasta el momento en que los jugadores ya no pueden poner ninguna ficha más en el tablero puesto que ya han colocado las 9 que tenían, puede observarse en la figura 3.6. Ha de notarse que cada representación del tablero de juego hace referencia a la disposición final del mismo una vez que ha pasado el turno de ambos jugadores, es decir, una vez ambos jugadores han puesto una nueva ficha en el tablero.

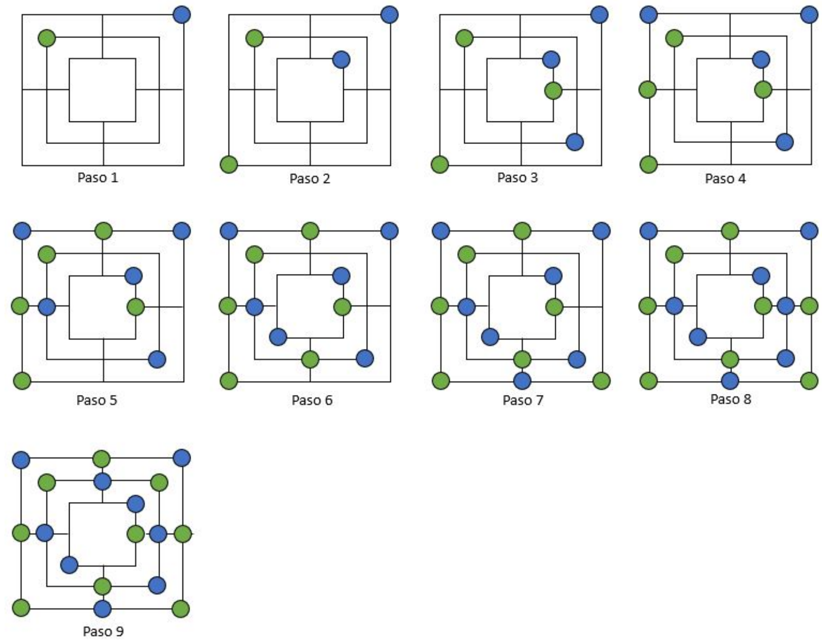

Figura 3.6: Disposición inicial creada por los jugadores A (verde) y B (azul) en un juego de la Chascona.

Durante esta primera fase de colocación de las fichas en el tablero pueden darse situaciones como la que se da en el cuarto paso, en donde el jugador B, una vez que el jugador ha colocado dos de sus fichas en línea, se ha visto forzado a colocar su ficha en el hueco restante de la línea para evitar que A hiciese "*tres en raya*" y que éste le quitase una ficha.

Una vez colocadas todas las fichas en el tablero, los jugadores continúan con la partida desplazando convenientemente sus fichas a los huecos directamente adyacentes a su posición inicial. De esta forma, aquel jugador que consiga obtener una combinación de "*tres en raya*" tendrá el derecho a quitarle una ficha al rival, de forma que ésta no forme parte de una combinación de "*tres en raya*". En la Figura 3.7 se muestra un posible desarrollo completo del juego. Los círculos huecos hacen referencia a la posición original que ocupaba la ficha antes de comenzar su turno y la flecha hace referencia a la dirección en la que el jugador correspondiente ha desplazado dicha ficha ocupando su lugar actual.

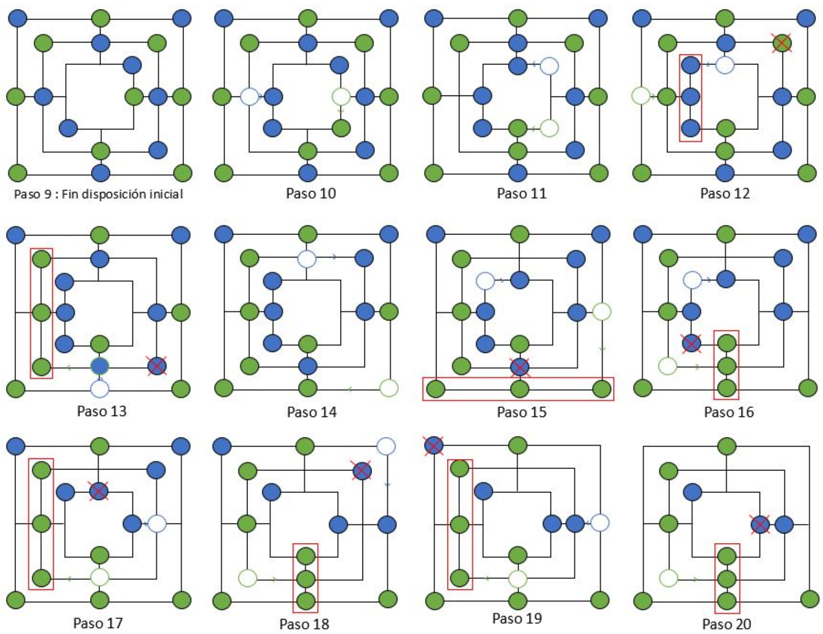

Figura 3.7: Disposición del desarrollo de juego de la Chascona.

Se puede destacar en este desarrollo del juego que en el Paso 12, el jugador B, con sus fichas azules ha conseguido obtener una posición de "*tres en raya*", teniendo así el derecho de quitarle al jugador A una de sus fichas. Como puede comprobarse posteriormente, su elección de la ficha del jugador A no ha sido acertada, puesto que en su turno, el jugador A ha conseguido formar un "*tres en raya*". Ahora, es el jugador A quien tiene derecho a eliminar una ficha del tablero del jugador B. Siguiendo el desarrollo del juego, se observa que la posibilidad que tenía B de eliminar una ficha de A del tablero ha sido crucial para el resultado final, ya que A ha conseguido llevarse la victoria gracias a este fallo. Esto se debe, a que el jugador A ha encontrado una posición en donde tiene un "*tres en raya*" disponible en cada turno sin permitir al jugador B arrebatársela.

3.3.4. Estrategia

Como se viene diciendo a lo largo de este trabajo, encontrar lo más rápido posible una estrategia ganadora permitirá tomar una ventaja importante, que podrá desencadenar con el hacerse con la victoria. Sin embargo, se ha de tener en cuenta que, en primer lugar, el hecho de saber que un jugador pueda tener una estrategia que le permita ganar no significa que este la conozca, y además de esto deberá llevarla a cabo durante el transcurso de toda la partida. Este segundo hecho es aún más complicado sobretodo si no se conoce a la perfección esta estrategia puesto que si en uno de los movimientos, un jugador comete un error, es posible que el jugador rival aproveche este fallo y le de la vuelta a la partida tomando ventaja si ha sido capaz de llevar a cabo este movimiento de gracia para entablar su estrategia. Además, como también se ha dicho, en ocasiones el estudio de las estrategias ganadoras en algunos juegos combinatorios se ha realizado mediante un estudio de casos. Este será también el caso para el estudio de la Chascona, estudiar algunos casos para comprender cuál es la mejor estrategia que puede seguirse en determinadas ocasiones.

Veremos que en el juego de la Chascona, la parte más importante y que será de vital importancia para el resto del desarrollo de la partida será la primera parte, la fase de inicio. Esto se debe a que ambos jugadores son capaces de disponer sus fichas libremente en aquellos lugares que no estén ocupados por otra ficha, de modo que intentando seguir una estrategia, sean capaces de, al final de esta fase, dejar el tablero lo más adecuado posible para poder crear situaciones de "*tres en raya*" con más facilidad y rapidez que el rival, teniendo así más probabilidades de ganar.

Pues bien, puesto que estamos diciendo que esta primera parte puede resultar la más importante del juego de cara a la colocación de las fichas, a priori, parece que pueda ser el primer jugador quien pueda tener cierta ventaja colocando sus fichas. Este razonamiento se asemeja en cierta medida al razonamiento seguido en el 3-en-raya original, donde se ha visto que el primer jugador puede forzar el empate si no es la victoria.

En la Figura 3.8 se muestra la fase de inicio de un juego de la Chascona salvo la colocación de la última ficha de cada jugador, este paso se verá más adelante. Así pues, el jugador Azul comienza colocando y a continuación lo hará el jugador Verde tal y como se muestra en la figura. Se ha de notar que la estrategia que va a intentar seguir el jugador Azul será la de forzar al jugador Verde a colocar sus en la posición en que el jugador Azul desee, puesto que en todo momento éste intentará plantear una situación de "tres en raya", lo cual obligará al jugador Verde a colocar su siguiente ficha en el

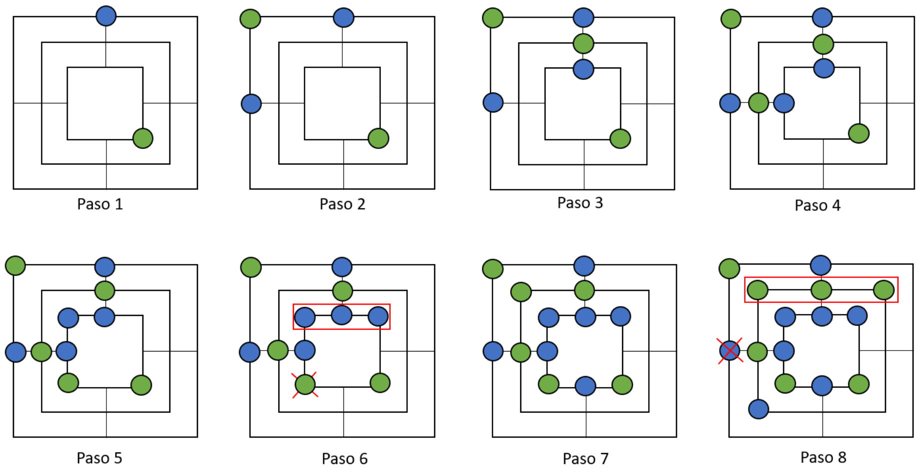

Figura 3.8: Colocación de las primeras 8 fichas en el juego de la Chascona donde el jugador Azul plantea una estrategia de colocación forzosa de fichas a su rival.

lugar que queda libre para evitar este hecho.

Vemos que desde el Paso 2 el jugador Verde se ve obligado a seguir el ritmo de juego del jugador Azul quien intenta a toda costa provocar el “tres en raya”. Gracias a la estrategia que este ha seguido, Azul consigue en el Paso 5 plantear una situación de doble amenaza, de forma que Verde solo va a ser capaz de poder colocar una ficha para impedirlo permitiendo en el siguiente turno que Azul realice una alineación de “tres en raya”. Así, en el Paso 6, Azul decide eliminar la ficha que Verde había colocado en el paso anterior, la cual bloqueaba su segunda amenaza, pero en su turno, Verde vuelve a colocar una ficha en dicho lugar.

El problema de la estrategia seguida por Azul desde el principio de la partida no se hace presente hasta el Paso 7. Debido a las características del juego y del tablero, el hecho de intentar obligar al jugador Verde de forzar sus movimientos creando situaciones de posible “tres en raya” cada vez, ha resultado en que, sin quererlo, la situación se ha visto volteada y es ahora Verde quien tiene la oportunidad de crear esta doble amenaza. De esta forma, la ventaja que tenía Azul al poseer una ficha más, se verá anulada cuando en el Paso 8 Verde forme su “tres en raya” y elimine una ficha del jugador Azul.

Ahora bien, puesto que la estrategia que ha intentado seguir en este caso el jugador Azul no ha sido tan satisfactoria como el creía en un primer momento, veremos ahora como la colocación de su última ficha en esta primera fase de la partida influirá en el resultado de la misma. Así, veamos a continuación cuatro posibles colocaciones de la última ficha disponible de cada jugador.

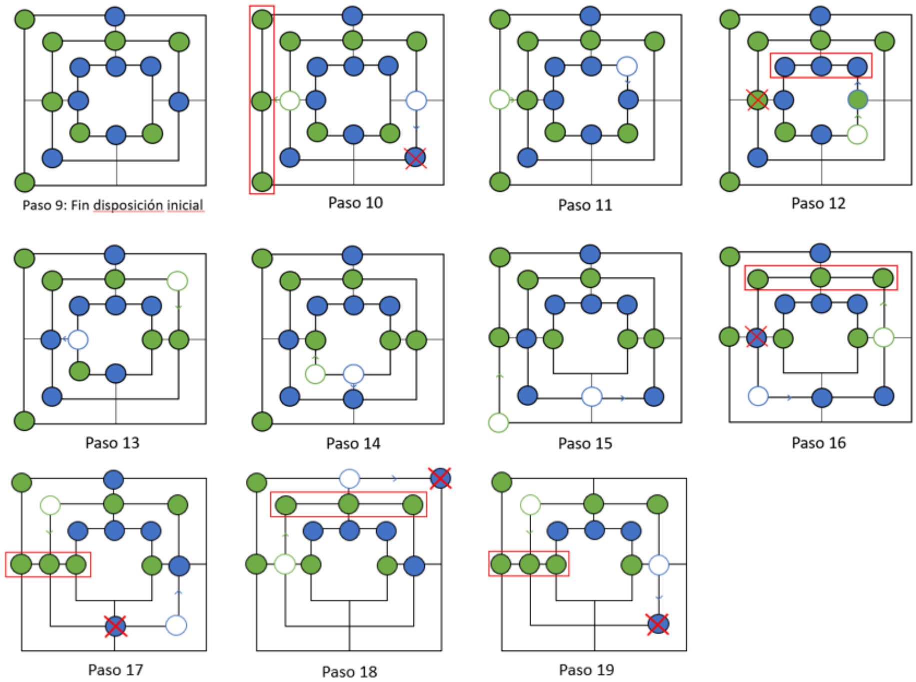

Figura 3.9: Primera posible colocación de la última ficha de cada jugador en el juego de la Chascona.

En el primer caso, cuyo desarrollo de la partida queda reflejado en la Figura 3.9, ante la pérdida de ventaja provocada por el intento de llevar a cabo una estrategia forzosa, Azul a decidido cambiar de estrategia y como puede verse su colocación de ficha no ha sido la mejor. Pese a que este ha podido intuir que el jugador Verde podría tener dos posibles candidatos a “tres en raya” tras la colocación de su última ficha teniendo en cuenta su ficha en la esquina superior izquierda del cuadrado exterior o su ficha superior derecha en el cuadrado intermedio, su elección se ha decantado por el lado erróneo, ya que como se ve en el Paso 10, el jugador Verde ha conseguido formar un “tres en raya” tomando así ventaja en la partida. Esta ventaja, sin embargo, se ve anulada con la siguiente jugada por parte de Azul, quien en el Paso 11 prepara su ficha superior derecha del cuadrado interior deshaciendo su tres en raya para en el siguiente turno ser capaz de volver a formarlo ya que Verde no tiene opción de impedírselo. De esta forma en el Paso 12 Azul forma un “tres en raya” e iguala la partida. Ahora, en el Paso 13 Verde crea otra situación de amenaza de “tres en raya”, y puesto que Azul no puede impedírselo, decide esperar un par de turnos mientras Azul intenta formar otro “tres en raya” mientras que Verde aprovecha para preparar más futuras amenazas, así como limitar los movimientos de Azul y forzarle a mover ciertas fichas. Finalmente, en el Paso 16 la partida queda ya sentenciada con una victoria para Verde puesto que en cada turno de ahí en adelante, será capaz de formar un “tres en raya” haga lo que haga Azul. Finalmente la partida termina en el Paso 19 cuando el jugador Azul únicamente tiene 3 fichas disponibles pero el jugador Verde ha conseguido bloquearle toda oportunidad de movimiento ganando así la partida el jugador Verde.

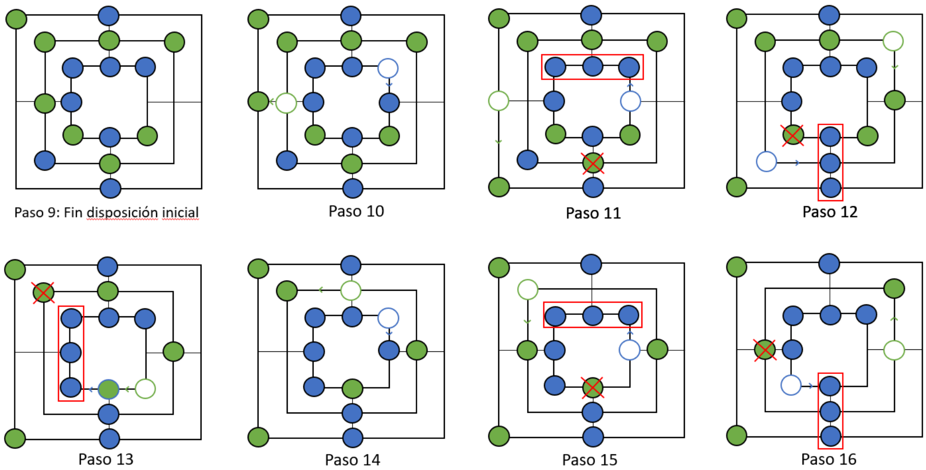

Figura 3.10: Segunda posible colocación de la última ficha de cada jugador en el juego de la Chascona.

En el segundo caso, cuyo desarrollo de la partida queda reflejado en la Figura 3.10, el jugador Azul ha mantenido su idea de intentar crear amenazas al final de cada uno de sus turnos y decide crear una última antes de iniciar la segunda fase, forzando así de nuevo al jugador Verde a poner su ficha donde Azul tenía previsto. De esta forma, en el siguiente turno, en el Paso 10, Azul vuelve a crear otra amenaza de “tres en raya”. En este paso Verde podría haber hecho lo mismo deshaciendo su “tres en raya” para crear otra amenaza, pero como Azul es el primero en mover en el siguiente turno, éste volvería a formar su “tres en raya” y eliminaría así la amenaza de Verde, es por esto que en el Paso 10 no ha intentado crear una amenaza. Así, en el Paso 11, Azul elimina la última ficha colocada por Verde en la fase de inicio la cual bloqueaba su última amenaza de “tres en raya” teniendo ahora vía libre para poder formarlo ya que Verde no es capaz de contrarrestarlo. De nuevo, Azul forma un “tres en raya” en el Paso 12 y elimina la ficha de Verde que de nuevo le impedía formar otro “tres en raya”, teniendo otra oportunidad de formarlo sin que Verde pueda impedirlo. Continuando con esta estrategia, Azul es capaz de generar amenazas en casi todos los turnos posteriores eliminando todas las fichas de Verde de forma que éste no pueda crear nuevas amenazas y consiguiendo por lo tanto la victoria de la partida. Se ha de notar que la partida no termina en el Paso 16, sino en el siguiente turno del jugador Azul en donde movería su ficha centrar inferior del cuadrado interior hacia la izquierda formando otro “tres en raya” y eliminando una ficha del rival dejándolo únicamente con 2.

En el tercer caso, cuyo desarrollo de la partida queda reflejado en la Figura 3.11, Azul decide mantener su táctica intentando crear a toda costa amenazas de “tres en raya” forzando a su oponente a bloquearle sin tener opción de elegir la colocación de su última ficha. Del mismo modo que en el caso anterior, Azul decide deshacer su “tres en raya” para crear una nueva oportunidad para el siguiente turno, sin posibilidad de que el jugador Verde lo impida, por lo que este decide a su vez de crear una amenaza esperando que en el siguiente turno el jugador Azul, cuando lleve a cabo su estrategia, no la anule. Como era de esperar, en el Paso 11, ante la nueva amenaza de Verde, se ve forzado a formar su “tres en raya” y sabiamente elimina una de las fichas que pertenecían a esta formación de amenaza. Ante esto, Verde responde con un movimiento de su ficha inferior derecha del cuadrado interior bloqueando esta técnica, por lo que Azul no será capaz de llevar a cabo esta misma idea. Sin embargo, en el Paso 12, éste genera otra nueva amenaza, y ante la imposibilidad de Verde de bloquearla en su turno correspondiente puesto que no tenía fichas en el lugar correcto, finalmente en el Paso 13 Azul tras realizar otro “tres en raya” elimina la ficha que le impedía llevar a cabo su estrategia anterior. De nuevo, en los Pasos 14 y 15, Azul vuelve a realizar otro “tres en raya” y elimina otra ficha de Verde. Sin embargo, ahora Verde ha sido capaz de crear una amenaza en el Paso 16, lo cual bloquea al jugador Azul quien tiene bloqueadas 6 de sus 8 fichas, las cuales están en formación de “tres en raya” ya que sino en el siguiente turno Verde podrá eliminarle una de estas. Se ha de notar que entre el Paso 17 y el 18, se podría haber entrado en un bucle en donde Azul no movería ninguna de estas 6 fichas en formación con tal de no perderlas, ante lo cual, Verde simplemente seguiría a la espera de formar su “tres en raya”. Por este motivo se asume que Azul en el Paso 18 decide sacrificar uno de sus “tres en raya” creando una nueva amenaza, de forma que en su turno Verde la elimine formando su “tres en raya”. Pese a esto, en el Paso 19 Azul es capaz de crear una nueva amenaza sin que Verde pueda hacer nada, haciendo así en el Paso 20 un nuevo “tres en raya” en su correspondiente turno, mientras que Verde

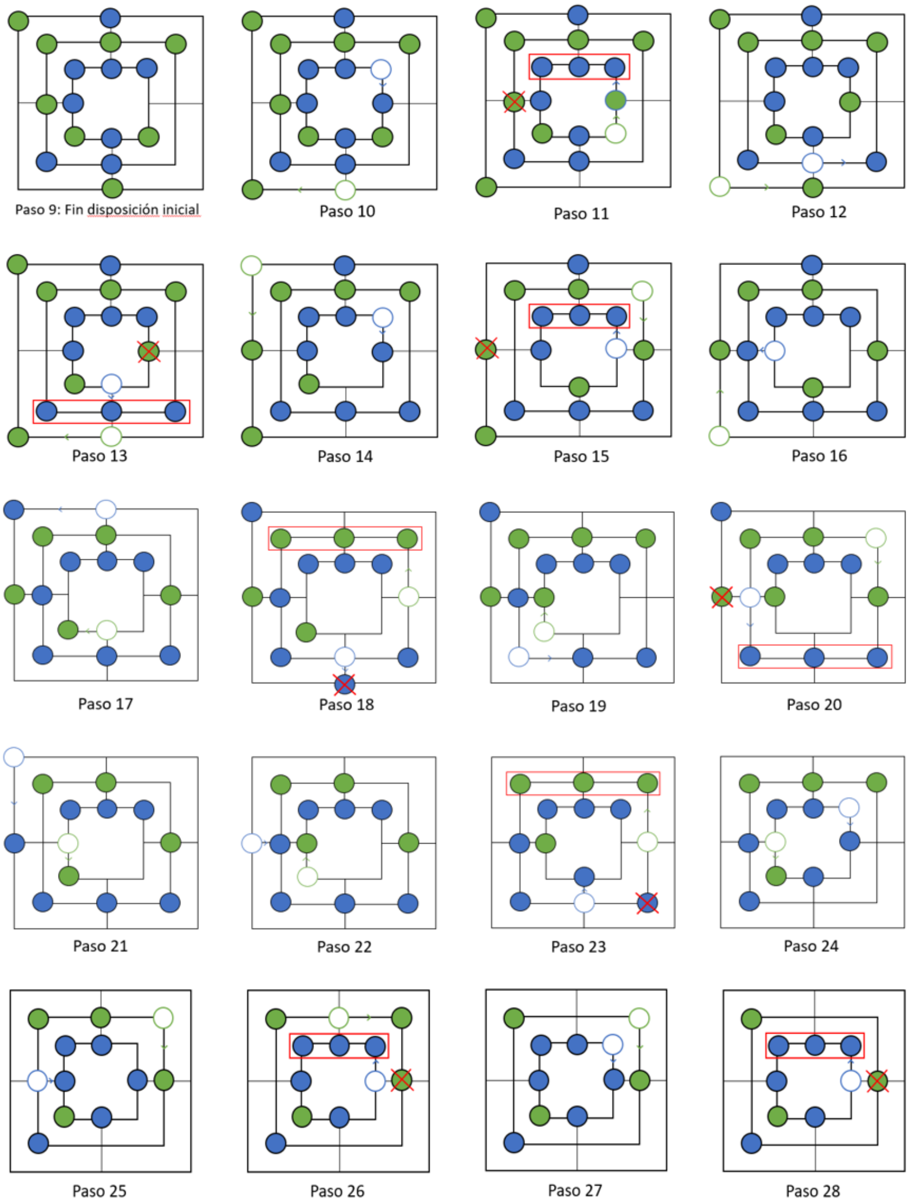

Figura 3.11: Tercera posible colocación de la última ficha de cada jugador en el juego de la Chascona.

aprovecha este momento para crear una nueva amenaza dejando a Azul sin opciones de contrarrestarlo. De nuevo, nótese que entre el Paso 21 y 22 la partida podría eternizarse a la espera de que Azul deshaga uno de sus “tres en raya”. De esta forma, sacrificando de nuevo una de sus formaciones en el Paso 23, Verde elimina la nueva amenaza creada por Azul. Sin embargo, Azul vuelve a tener ventaja gracias a que el juega primero creando una amenaza, ante lo cual en el Paso 24 Verde mueve la única ficha que le queda que no pertenece a una alineación de tres. Azul, consigue bloquear esta ficha en su turno correspondiente pero manteniendo a su vez su amenaza, por lo que Verde se ve forzado a romper su alineación y en el Paso 26 le elimina otra ficha. Ahora, ante la imposibilidad de Verde de crear otra alineación e intentar remontar la partida, Azul consigue hacerse con la victoria.

Como ha podido comprobarse con estos ejemplos y junto con un estudio en mayor profundidad con diferentes simulaciones de partidas, pese a que el jugador Azul toma la delantera al inicio de la partida provocando situaciones forzosas a Verde, este es capaz de recuperarse de la desventaja. Tras analizar estos casos, se puede llegar a la conclusión de que, por lo general, seguir desde el inicio de la partida una estrategia forzosa después de cada movimiento implica una mala disposición de las fichas con respecto al rival y en consecuencia el rival, gracias a un robo de estrategia, es capaz de llevar a cabo su estrategia forzosa y acabar llevándose la victoria.

3.3.5. Complejidad

Para poder analizar la complejidad del juego de la Chascona, será necesario realizar un análisis del tablero, de forma que sea posible establecer, si no es el tamaño exacto del árbol de estados, al menos una aproximación que permita hacerse una idea del tamaño y su complejidad.

Considerando la forma del tablero de juego, existen 24 posiciones en las que se pueden colocar las fichas. Además, cada uno de estos puntos puede estar en tres estados diferentes, a saber, del color de las fichas del primer jugador, del color de las fichas del segundo jugador o vacío. De esta forma, se obtiene una cota superior del tamaño del estado-espacio del juego cuyo valor es 3^{24}, que es aproximadamente $2{,}8 \times 10^{11}$ estados.

Como es de esperar, esta aproximación no es muy acertada, puesto que a demás de dar un valor muy alto, se están considerando situaciones imposibles que nunca pueden darse durante el transcurso de una partida, como por ejemplo que el tablero esté completamente ocupado, lo que significará que al menos uno de los jugadores tiene más de 11 fichas, que solo haya fichas de un color o que no haya más de dos fichas de igual color, lo cuál es imposible puesto que las reglas establecen que cada jugador tendrá a lo sumo 9 fichas y como mínimo 3.

Por lo tanto, se ha de observar lo siguiente: si tenemos en cuenta que los jugadores tendrán a lo sumo 9 fichas en juego (cada uno) y como poco tendrán 3, existen estados ilegales que nunca podrán alcanzarse pero que se han tenido en cuenta en el cálculo realizado con anterioridad y también que debido a las características del tablero, este es simétrico, por lo hay ciertos estados que tras una rotación o simetría se obtiene otro estado, que ya se había tenido en cuenta.

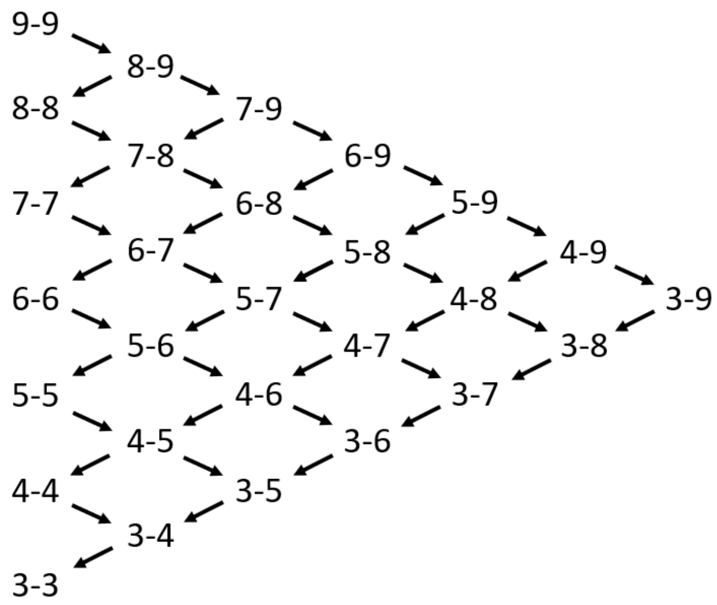

Figura 3.12: Diagrama de las relaciones entre los 28 subestados existentes en el juego de la Chascona.

Así, la primera observación, de acuerdo a las reglas del juego, permitirá hacer una división de los estados del juego en 28 subestados diferentes, tal y como puede observarse en la Figura 3.12. En esta figura pueden observarse las dependencias entre los diferentes estados del juego, con sus posibles estados futuros según avance el juego. El hecho de representar los subespacios de esta forma no indica que el segundo jugador siempre tenga ventaja y sea quien elimine las fichas de su rival, sino que esta forma de representarlo será por motivos de notación. Por ejemplo, desde el estado $6-9$ se podrá acceder al estado $5-9$ si el jugador que posee 9 fichas hace un "tres en raya" y le come una ficha al otro jugador, o al estado $6-8$ en el caso contrario. Mientras no se haya eliminado ninguna ficha el juego permanece en el mismo subestado, con la excepción de que alguno de los jugadores se quede sin movimientos en cuyo caso la partida, siguiendo con las reglas del juego, se termina.

Sin embargo, aun considerando todos estos subestados del juego, se siguen dando situaciones imposibles como las que se muestran en la Figura 3.13. Con meros propósitos ilustrativos, supondremos en este caso que ha sido el jugador Azul quien ha iniciado la partida y ha comenzado poniendo sus fichas en el tablero.

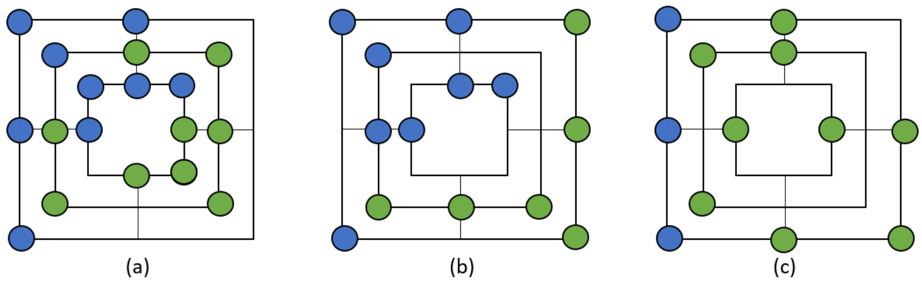

Figura 3.13: Algunas de las posiciones ilegales de la Chascona dentro de los 28 subespacios existentes.

En el caso (a), se trata del final de la fase inicial, donde los jugadores han acabado de poner cada una de sus nueve fichas en el tablero de juego. Puede observarse que durante esta fase el jugador Azul ha sido capaz de realizar dos "*tres en raya*", por lo que debería haber eliminado dos de las fichas del jugador Verde y del mismo modo, el jugador Verde ha sido capaz de formar un "*tres en raya*", teniendo derecho a eliminar una de las fichas del rival que no estén en posición de "*tres en raya*". Sin embargo, este no es el caso, ya que tras finalizar esta primera fase ambos jugadores (tanto Azul como Verde) siguen conservando sus 9 fichas iniciales, lo cual va en contra de las reglas, por lo que se trata de una situación ilegal del juego.

En el caso (b) se contempla un caso similar al anterior, sin embargo este pertenece a la fase intermedia, en donde pese a que el jugador Verde ha perdido alguna de sus fichas, ha sido capaz de formar dos "*tres en raya*" diferentes, teniendo así derecho a eliminar dos fichas de su rival Azul. Pero como puede comprobarse, el jugador Azul sigue manteniendo sus 9 fichas, por lo que esta posición es ilegal y no puede darse nunca en el transcurso de una partida.

En el caso (c) ocurre exactamente lo mismo, el jugador Azul ha formado un "*tres en raya*" y el jugador Verde sigue conservando todas sus fichas, lo cual va en contra de las reglas.

En segundo lugar, puede observarse en la Figura 3.14 cómo el tablero de la Chascona presenta 5 ejes de simetría. Un eje horizontal, un eje vertical, un eje oblicuo descendente y un eje oblicuo ascendente (son los mismo ejes de simetría que en el tablero del 3-en-raya clásico); todos estos ejes pasan por el centro del tablero y en cada uno de ellos se encuentran 6 posibles posiciones en donde colocar ficha. El último eje de simetría corresponde con el cuadrado intermedio del tablero, el cuál posee 8 posibles posiciones donde colocar ficha.

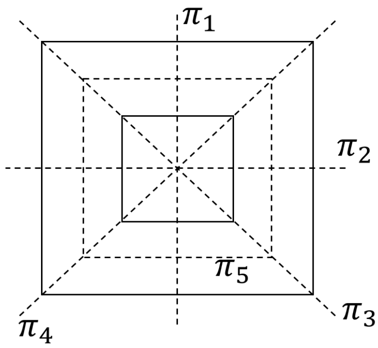

Figura 3.14: Ejes de simetría presentes en el tablero de la Chascona.

De esta forma, el conjunto de posibles estados del juego puede reducirse, ya que gracias a a los diferentes ejes de simetría presentes en el tablero, algunas posiciones han podido ser tenidas en cuenta varias veces, mientras que por simetría o rotación, se trata de la misma. En la Figura 3.15 puede observarse cómo algunas de las posiciones del tablero, aplicándole la simetría correspondiente se transforma en una posición del tablero simétrica o rotada.

Por lo tanto, teniendo estos motivos en cuenta, es posible reducir el número total de estados diferentes que se pueden alcanzar en este juego de la Chascona que son aproximadamente $8 \cdot 10^9$.

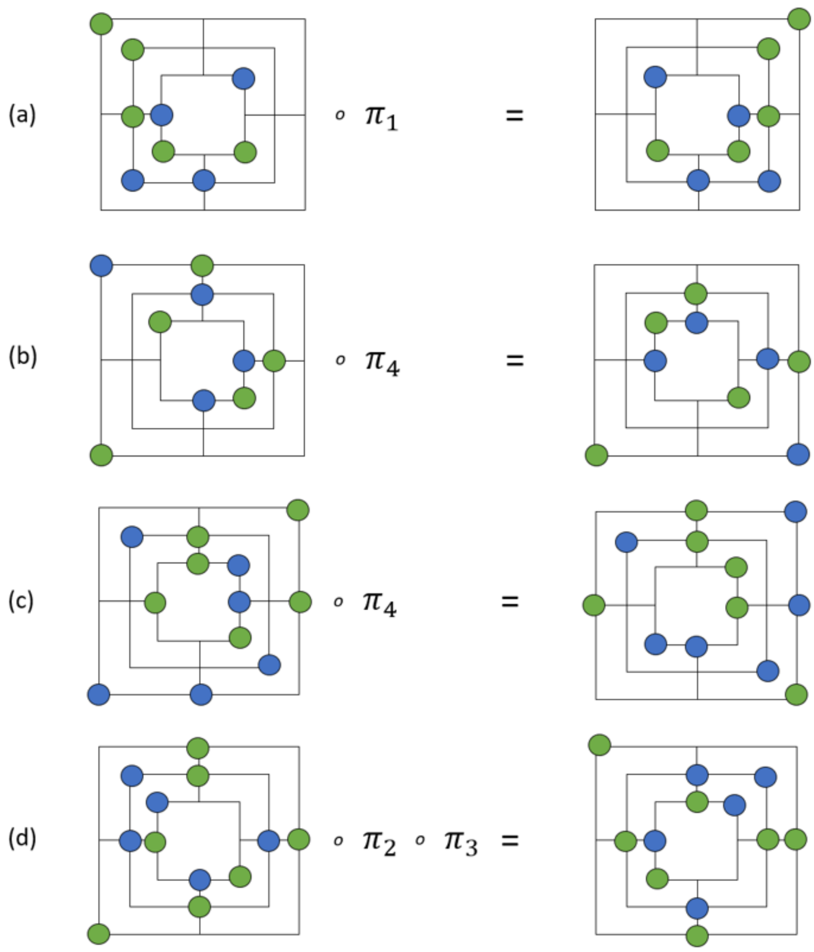

Figura 3.15: Ejemplos de equivalencia de posiciones del juego considerando la simetría del tablero.

Conclusión

A lo largo de este trabajo hemos podido ver cómo los juegos combinatorios no solo sirven como forma de entretenimiento sino que su estudio va mucho más allá, permitiendo hacer una analogía con problemas mucho más complejos del mundo real.

Hasta ahora, tenía la idea de que analizar un juego era una tarea que con la tecnología actual era bastante simple, pero en realidad es todo lo contrario. Si bien es cierto que algunos son más sencillos que otros, por lo general es una tarea compleja y el hecho de haber intentado llevarla a cabo me ha permitido darme cuenta de tal magnitud. Los estudios y conclusiones obtenidos en este trabajo se encuentran aun en su fase inicial. Esto se debe principalmente, como ya se ha visto con algunos de los ejemplos mostrados, a la gran variedad de técnicas distintas que es necesario emplear a la hora de analizar un juego (Teoría de Ramsey, Teoría de Juegos Combinatorios, estudio de estrategias, análisis de combinatoria . . .) y a la gran cantidad de posibilidades de estados del tablero de la Chascona, ya que llevar a cabo una simulación de cada uno de ellos es imposible.

Además, el estudio completo del juego de la Chascona se escapa del objetivo de este trabajo, pero sin duda, sí que me gustaría poder seguir analizando las posibilidades que tiene este juego, que son muchas.

Bibliografía

[1] Battle of the sexes (game theory). Último acceso 7 Febrero 2020.

[2] Dilema del prisionero. Último acceso 7 Febrero 2020.

[3] Nim. Último acceso 17 Febrero 2020.

[4] Tic-tac-toe-game-tree. Último acceso 7 Febrero 2020.

[5] Louis Victor Allis. *Searching for solutions in games an artificial intelligence*. PhD thesis, Universidad de Limburgo en Maastricht, 1994.

[6] I. B. Leader. Ramsey theory, 2000. Último acceso 7 Febrero 2020.

[7] Lane Barton. Ramsey theory. 2016.

[8] József Beck. *Combinatorial Games: Tic-Tac-Toe Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2008.

[9] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, and Richard K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*. A K Peters, 2 edition, 2001.

[10] Bella Bollobás. *Graph Theory*. Springer-Velarg, 1979.

[11] E. Bonnet and A. Saffidine. Complexité des jeux. *Bulletin de la ROADEF*, 31:9–12, 2014.

[12] Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. Pearson, 5 edition, 2009.

[13] Mike Chiang and Frank Hutter. Lecture notes in search with costs and heuristic search, 2011. Último acceso 7 Febrero 2020.

[14] Francisco J. Cirre. *Matemática Discreta*. Anaya, 2004.

[15] John H. Conway. *On Numbers and Games*. A K Peters, 2 edition, 2001.

[16] Walter Dean. Computational complexity theory, 2016. Último acceso 7 Febrero 2020.

[17] Eric Duchene. Combinatorial games: from theoretical solving to AI algorithms. In *SUM*, Nice, France, September 2016.

[18] Eva Elduque. The game of chomp. Último acceso 7 Febrero 2020.

[19] Jose Manuel Espinel Cejas and Francisco Carcía-Talavera Casañas. *Juegos Guanches Inéditos. Inscripciones Geométricas en Canarias*. Centro Cultura Popular Canario, 2010.

[20] Aviezri Fraenkel. Nim is easy, chess is hard - but why?? *ICGA Journal*, 29:203–206, 12 2006.

[21] David Gale. A curious nim-type game. *The American Mathematical Monthly*, 81(8):876–879, 1974.

[22] David Gale. *Tracking the Automatic ANT And Other Mathematical Explorations*. 1st ed. 1998.. edition, 1998.

[23] Félix García Merayo. *Matemática Discreta*. Thomson Paraninfo, 2005.

[24] Martin Garner. Sim, chomp and race track: new games for the intellect (and not for lady luck). *Mathematical Games*, pages 110–111, 1973.

[25] Ronald L. Graham and Joel H. Spencer. Ramsey theory. *Scientific American*, 263(1):112–117, 1990.

[26] J. P. Grossman. Game theory working seminar notes, 2003.

[27] Michael H. Albert, Richard J. Nowakowski, and David Wolfe. *Lessons in play: An introduction to Combinatorial Game Theory*. A. K. Peters, 2007.

[28] J. Hartmanis and R. E. Stearns. On the computational complexity of algorithms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 117:285–306, 1965.

[29] Johan Hastad. Complexity theory, 2009. Último acceso 7 Febrero 2020.

[30] Fraser Ian Dowall Stewart. *Scoring Play Combinatorial Games*. PhD thesis, 2011.

[31] Will Johnson. *Combinatorial Game Theory, Well-Tempered Scoring Games, and a Knot Game*. PhD thesis, 2011.

[32] Andreas Junghanns and Jonathan Schaeffer. Sokoban: Enhancing general single-agent search methods using domain knowledge. *Artificial Intelligence*, 129:219–251, 06 2001.

[33] Charles L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(14):35–39, 1901–1902.

[34] David L. Poole and Alan K. Mackworth. *Artificial Intelligence: Foundations of Computational Agents*. Cambridge University Press, 2017.

[35] Michael Lachmann, Cristopher Moore, and Ivan Rapaport. Who wins domineering on rectangular boards? 06 2000.

[36] Robert McNaughton. Infinite games played on finite graphs. *Annals of Pure and Applied Logic*, 65(2):149–184, 1993.

[37] Walter J. Savitch. Relationship between deterministic and non deterministic tape complexities. *Journal of Computer and System Sciences*, 4(2):177–192, 1970.

[38] Thomas J. Schaefer. On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225, 1978.

[39] Fred Schun. Spel van delers. *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, 39:299–304, 1952.

[40] Allan Scott. *On the parametrized Complexity of Finding Short Winning Strategies in Combinatorial Games*. PhD thesis, University of Victoria, 2009.

[41] Aaron N Siegel. *Combinatorial game theory*, volume 146. American Mathematical Soc., 2013.

[42] A. M. Turing. On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-42(1):230–265, 1937.

[43] Jos Uiterwijk. Perfectly solving domineering boards. volume 408, pages 97–121, 04 2014.