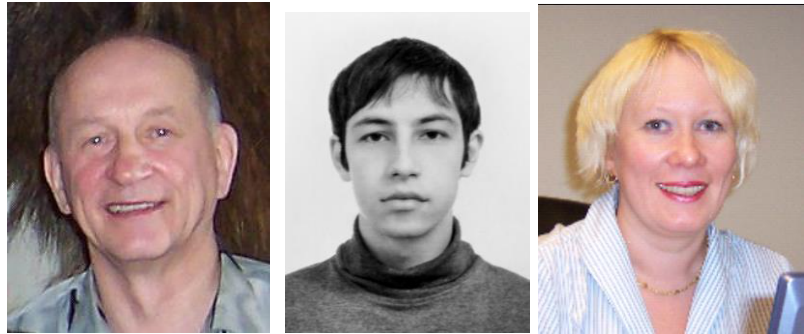


УДК 004.93'1; 004.932

*В. Лабунец¹, И. Артемов¹, Е. Остхаймер²*¹Уральский государственный лесотехнический университет, г. Екатеринбург²Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach, 33062 Florida, USA**БИХРОМАТИЧЕСКИЕ МЕТАСРЕДЫ ШРЕДИНГЕРА****Введение**

Метасреды (метаматериалы), в которых электродинамические, тепловые и другие параметры принимают “экзотические” значения (отрицательные, мнимые, комплексные, кватернионные) демонстрируют удивительное разнообразие типов динамического поведения и самоорганизации. Становится все более понятным, что такие системы не исключение: чем глубже исследователи проникают в природу сложных систем – химических, биологических или физических, тем больше обнаруживается таких примеров. Но в большей степени это относится к биологическим системам, которые по своей сути всегда далеки от равновесия и источники энергии в которых, как правило, распределены по всей среде, и их параметры зачастую имеют экзотические значения. Изучение явлений в таких метасредах важно для многих областей естествознания. Общей теории метасред пока не существует, и каждый достаточно глубоко исследованный пример метасреды, как правило, дает примеры новых типов динамики или самоорганизации.

В данной работе изучаются новые метасреды с комплексными коэффициентами теплопроводности, названные метасредами Шредингера. Как известно, классическое двумерные уравнения теплопроводности с источником имеет следующий вид

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

где $\varphi(x, y, t)$ - функция, описывающая возбуждение среды, $f(x, y, t)$ - возбуждающий источник (входной сигнал). При нулевых начальных условиях решение записывается в виде интеграла Коши:

$$\varphi(x, y, t) = \int_0^t \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi D(t-\tau)}\right)^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4D^2(t-\tau)}} f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \right) d\tau.$$

В данной работе исследуются законы функционирования метасред Шредингера в виде квантовых клеточных автоматов (ККА) с обобщенными комплексными коэффициентами диффузии. Обобщенные комплексные числа (Yaglom, 1968) содержат действительную и мнимую части и обобщенную мнимую единицу, обладающую одним из

следующих свойств: $i_-^2 = -1$ (классический случай), $i_+^2 = +1$ (двойные числа) и $i_0^2 = 0$ (дуальные числа). Они формируют три комплексные алгебры $A_2(\mathbf{R} | i) := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, где $i = i_-, i_0, i_+$. Каждому типу комплексных чисел соответствует определенная метасреда Шредингера: метасреда Шредингера-Евклида ($i = i_-$), Шредингера-Галилея ($i = i_0$), и Шредингера-Минковского ($i = i_+$), соответственно. Возбуждение среды описывается волновой $A_2(\mathbf{R} | i)$ -значной функцией. Процесс распространения возбуждения в метасреде описывается уравнением Шредингера с $A_2(\mathbf{R} | i)$ -значной волновой функцией. Дискретизация уравнения Шредингера дает модель метасреды в виде квантового клеточного автомата. Его микроэлектронная реализация представляет собой программируемую метасреду Шредингера (Лабунец, 2013).

Цель данной работы – изучить свойства метасреды Шредингера в форме клеточного автомата. Детальную информацию о клеточных автоматах можно найти в (Wolfram, 1985). Ячейки клеточного автомата размещены в 2D массиве, они могут выполнять базовые операции с комплексными числами (в различных комплексных алгебрах) и обмениваться сообщениями о своих состояниях со своими соседями. Клеточный автомат как архитектурная модель успешно используется для решения задач компьютерного зрения и обработки изображений. Новые метасреды обладают более широкими возможностями по обработке бихроматических изображений по сравнению со средой с обыкновенной диффузией, у которой коэффициент диффузии - действительное число. Диффузионные метасреды используются в медицине для создания так называемого "кремниевого глаза". Новые метасреды могут служить прототипом такого искусственного глаза для разработки систем восприятия бихроматических изображений.

Обобщенные комплексные числа

Рассмотрим алгебраические и геометрические свойства трех двумерных комплексных алгебр $A_2(\mathbf{R} | i) := \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$, где $i = i_-, i_0, i_+$. Правила сложения во всех трех алгебрах одинаковы (Лабунец, 2013):

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

а правила умножения принципиально отличаются:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \begin{cases} (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), & i^2 = -1, \\ (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), & i^2 = +1, \\ x_1 x_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1), & i^2 = 0. \end{cases}$$

В алгебрах $A_2(\mathbf{R} | i)$ можно определить операцию сопряжения, которая отображает каждое число $z = x + iy$ в новое число вида $\bar{z} = \overline{x + iy} := x - iy$. Используя эту операцию, можно легко определить псевдонорму.

Определение 1. Квадратичная форма

$$\|z\| = z\bar{z} = x^2 - i^2 y^2 = \begin{cases} x^2 + y^2, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_-), \\ x^2 - y^2, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_+), \\ x^2, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_0) \end{cases} \quad (1)$$

называется псевдонормой числа $z = x + iy$.

Легко проверить, что $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

Определение 2. Арифметическое значение корня квадратного из произведения $z\bar{z} = N(z)$ называется модулем обобщенного комплексного числа z и обозначается как

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 - i^2 y^2} = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_-), \\ \sqrt{x^2 - y^2}, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_+), \\ |x|, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_0). \end{cases} \quad (2)$$

Модуль можно интерпретировать как расстояние (эллиптическое, гиперболическое или параболическое) от начала координат до точки z . В первом случае модуль называется *эллиптическим*, во втором – *гиперболическим* (может принимать и мнимые значения из-за разности $x^2 - y^2$) и в третьем – *параболическим*.

Обобщенная комплексная плоскость превращается в двумерное псевдометрическое пространство, если определить на ней псевдометрику

$$\rho(z_1, z_2) := \sqrt{(z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1})} = \begin{cases} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_-), \\ \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_+), \\ |x_2 - x_1|, & z \in A_2(\mathbf{R} | i_0), \end{cases} \quad (3)$$

где $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Алгебры $A_2(\mathbf{R} | i)$, оснащенные псевдометриками, превращаются в три метрических пространства с соответствующими геометриями: $A_2(\mathbf{R} | i_-)$ превращается в Евклидову геометрию, $z \in A_2(\mathbf{R} | i_+)$ - в геометрию Минковского и $A_2(\mathbf{R} | i_0)$ - в геометрию Галилея.

Определение 3. Множество всех точек обобщенной комплексной плоскости $A_2(\mathbf{R} | i)$, удовлетворяющее уравнению $|z|^2 = r^2$, называется $A_2(\mathbf{R} | i)$ -окружностью радиуса r , центрированной относительно начала координат

Уравнение

$$|z|^2 = x^2 - i^2 y^2 = r^2 \quad (4)$$

определяет $A_2(\mathbf{R} | i)$ -окружность. Существует три типа окружностей: $A_2(\mathbf{R} | i_-)$ -окружность – классическая *Евклидова окружность* (рис. 1-а), $A_2(\mathbf{R} | i_+)$ -окружность – *гиперболическая окружность Минковского* (рис. 1-б) и $A_2(\mathbf{R} | i_0)$ -окружность – *параболическая окружность Галилея* в виде двух параллельных линий (рис. 1-с).

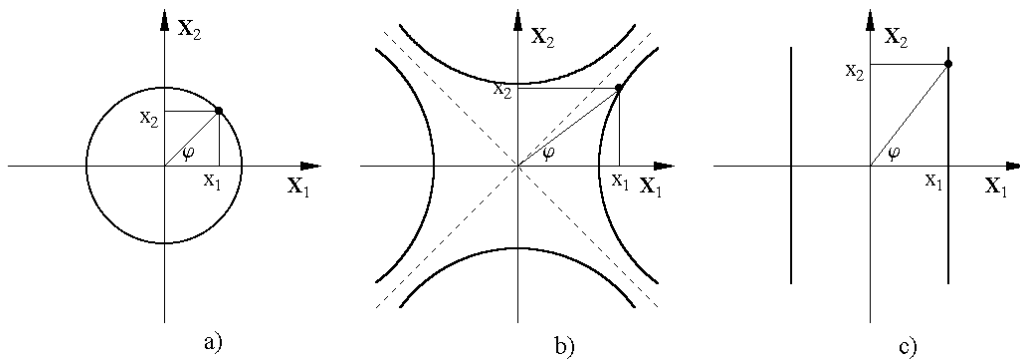


Рис. 1. Окружности в трех комплексных областях.

Если $z = x + iy$, то обобщенное комплексное число $z_0 = z / |z|$ имеет единичный модуль в том случае, когда $|z| \neq 0$. Нетрудно видеть, что

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z| (\cos \beta + i \cdot \sin \beta), \quad (5)$$

где

$$\cos \beta := \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - i^2 y^2}} = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \beta, & \text{если } i = i_-, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \operatorname{ch} \beta, & \text{если } i = i_+, \\ \frac{x}{|x|} = \pm 1 = \operatorname{cg} \beta, & \text{если } i = i_0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\sin \beta := \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - i^2 y^2}} = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \beta, & \text{если } I = i_-, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \operatorname{sh} \beta, & \text{если } I = i_+, \\ \frac{y}{|y|} = \operatorname{sg} \beta, & \text{если } I = i_0. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $\cos \beta$, $\sin \beta$ - обобщенные тригонометрические функции. В первом случае ($i = i_-$) обобщенные тригонометрические функции совпадают с классическими (эллиптическими) функциями: $\cos \beta = \cos \beta$, $\sin \beta = \sin \beta$. Во втором случае (когда $i = i_+$) они совпадают с гиперболическими функциями $\cos \beta = \operatorname{ch} \beta$, $\sin \beta = \operatorname{sh} \beta$. Третий случай (когда $i = i_0$) дает новые тригонометрические функции: $\cos \beta = \operatorname{cg} \beta \equiv \pm 1$, $\sin \beta = \operatorname{sg} \beta \equiv \beta$, которые будем называть *параболическими* (или Галилеевскими) функциями.

Согласно (5)-(7) произвольное обобщенное комплексное число единичного модуля имеет следующую форму

$$z = e^{i\beta} = (\cos \beta + i \cdot \sin \beta) = \begin{cases} \cos \beta + i_- \cdot \sin \beta, & \text{если } i = i_-, \\ \operatorname{ch} \beta + i_+ \cdot \operatorname{sh} \beta, & \text{если } i = i_+, \\ \pm 1 + i_0 \cdot \beta, & \text{если } i = i_0. \end{cases} \quad (8)$$

Целью данной работы является изучение уравнения диффузии (уравнения теплопроводности) с коэффициентом диффузии в виде обобщенного комплексного числа и с $A_2(\mathbf{R} | i)$ -значной функцией возбуждения. Такое уравнение будем называть обобщенным уравнением Шредингера.

Обобщенное уравнение Шредингера

Рассмотрим 2-D уравнение Шредингера вида

$$\frac{d}{dt} \varphi = D \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} \varphi + \frac{d^2}{dy^2} \varphi \right), \quad (9)$$

где $\varphi(x, y, t)$ - волновая $A_2(\mathbf{R} | i)$ -значная функция, описывающая в терминах обобщенных комплексных чисел состояние $\varphi(x, y, t)$ точки метасреды с координатами (x, y) в момент времени t , $D = a + ib$ - комплексный коэффициент диффузии. Если $D = a \in \mathbf{R}$ - вещественное число, то (9) суть обычное уравнение диффузии (теплопроводности) в

среде Фурье-Гаусса, если $D = ib$ - мнимое число, то (9) превращается в обычное уравнение Шредингера с постоянной Планка $\hbar = b$. Если

$$D = a + ib = |D|(\cos \beta + i \sin \beta) = |D|e^{i\beta} \in A_2(\mathbf{R} | i),$$

то (9) является обобщением и уравнения диффузии и уравнения Шредингера.

Введем разностную сетку с узлами (x_n, y_m, t_k) и шагами h и τ по пространственным и временной координатам, соответственно. Для дискретизации Лапласиана воспользуемся аппроксимацией:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \varphi &= \varphi(x_n + 1, y_m, t_k) + \varphi(x_n - 1, y_m, t_k) - 2\varphi(x_n, y_m, t_k), \\ \frac{d^2}{dy^2} \varphi &= \varphi(x_n, y_m + 1, t_k) + \varphi(x_n, y_m - 1, t_k) - 2\varphi(x_n, y_m, t_k), \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \varphi(x_n, y_m, t_k + 1) - \varphi(x_n, y_m, t_k). \end{aligned} \tag{10}$$

В результате получаем 2-D дискретное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} \varphi(x_n, y_m, t_k + 1) &= \varphi(x_n, y_m, t) + \\ + D \cdot [\varphi(x_n + 1, y_m, t_k) &+ \varphi(x_n - 1, y_m, t_k) + \varphi(x_n, y_m + 1, t_k) + \varphi(x_n, y_m - 1, t_k) - 4\varphi(x_n, y_m, t_k)]. \end{aligned} \tag{11}$$

Оно описывает закон функционирования клеточного автомата (рис. 2 а), а именно, показывает, как зависит состояние $\varphi(x_n, y_m, t_k + 1)$ произвольной клетки с целочисленными координатами (x_n, y_m) в дискретный момент времени $t_k + 1$ в зависимости от ее состояния $\varphi(x_n, y_m, t_k)$ и состояний ее четырех соседей $\varphi(x_n + 1, y_m, t_k)$, $\varphi(x_n - 1, y_m, t_k)$, $\varphi(x_n, y_m + 1, t_k)$, $\varphi(x_n, y_m - 1, t_k)$ в предыдущий момент времени t_k .

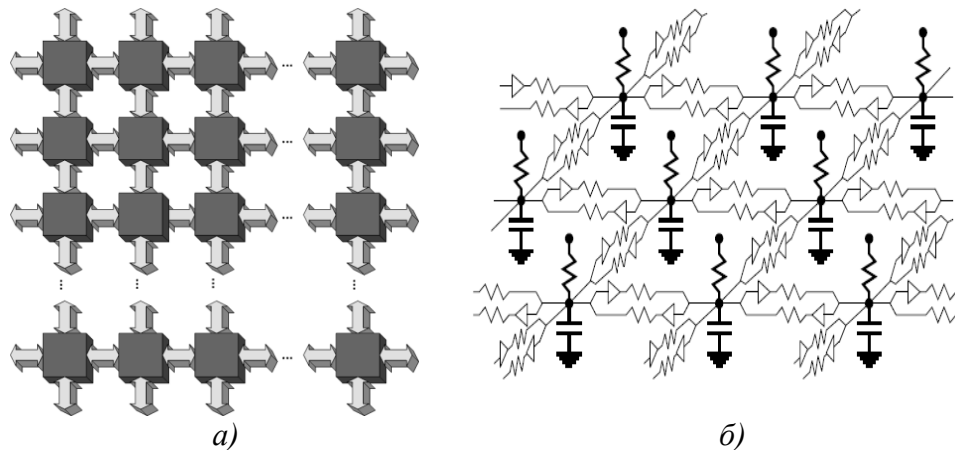


Рис. 2. а) Двумерный клеточный автомат (метасреда Шредингера) и б) его эквивалентная импедансная модель в виде пространственно-распределенных RC-цепочек, моделирующая обычную диффузионную среду.

Поведение клеточного автомата в существенной мере зависит от алгебраической природы числа D . Если D вещественное $D = a \in \mathbf{R}$, то автомат моделирует распространение тепла в двумерной пластине. Анализ показывает, что в этом случае элементарными ячейками среды являются RC-цепочки (рис. 2 б).

Интересно исследовать поведение метасреды Шредингера (клеточного автомата) с коэффициентом диффузии в виде обобщенного комплексного числа $D = D = a + ib$, с экзотической мнимой единицей $i^2 = +1, 0$. Как показывает анализ, в этом случае элемен-

тарными ячейками двумерного автомата (мета-среды Шредингера) являются не RC-цепочки, а комплексные двухканальные фильтры (рис. 3).

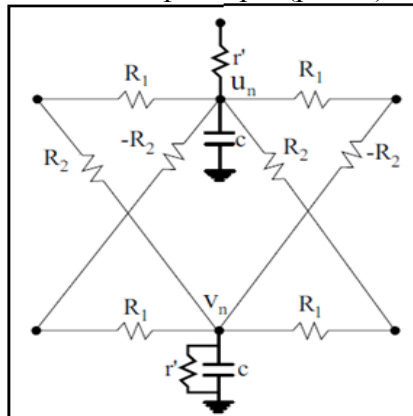


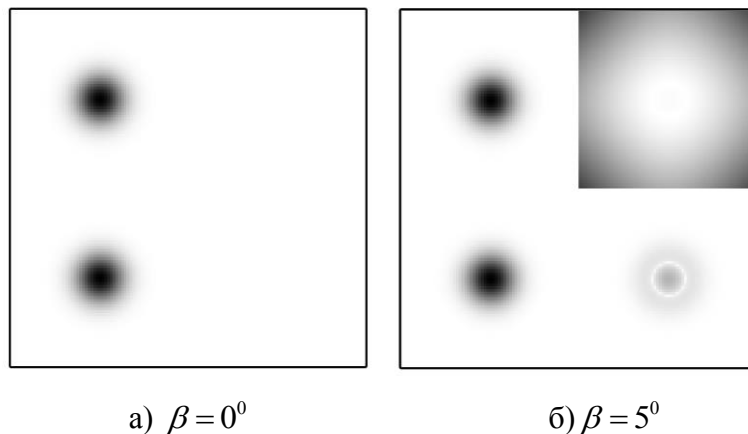
Рис. 3. Ячейка двумерного квантового клеточного автомата в виде двухканального (комплексного) фильтра.

Метасреда Шредингера-Евклида

При моделировании поведения клеточного автомата будем пользоваться фиксированным значением модуля D , а именно $|D| = |D_0| = 0.11$, который обеспечит достаточно быстрый процесс распространения диффузии в классическом варианте с вещественным коэффициентом диффузии $D \equiv |D_0| = 0.11$, но не приведет к переполнению памяти из-за появления слишком больших числовых значений. Для классического комплексного случая коэффициент диффузии представим в полярной форме

$$D = a_0 + i_b0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \cdot e^{i \cdot \beta} = D_0 \cdot e^{i \cdot \beta},$$

где $D_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$, $\beta = \arctg(b_0 / a_0)$. Обычная диффузия имеет место при $\beta = 0$ (вещественный коэффициент диффузии). Квантовая диффузия (свободное движение квантовой частицы) имеет место при $\beta = \pi / 2$ (чисто мнимый коэффициент диффузии как в уравнении Шредингера). Представляет интерес исследовать, как меняется поведение среды при изменении угла $0 \leq \beta \leq \pi / 2$. При увеличении угла β классическая диффузионная среда (будем называть ее средой Фурье-Гаусса) переходит в квантовую среду Шредингера-Евклида.



а) $\beta = 0^0$

б) $\beta = 5^0$

Рис. 4. Возбуждение метасреды Шредингера-Евклида в момент времени $t_0 = 128$ для двух значений фазы коэффициента диффузии $D = D_0 \cdot e^{i \cdot \beta}$, где $\beta = 0^0$ (среда Фурье-Гаусса) и $\beta = 5^0$ (метасреда Шредингера-Евклида).

На рис. 4 и 6 можно увидеть результаты моделирования для комплексного коэффициента D с разными значениями фазы β . Каждый рисунок разделен на четыре части: нижний ряд представляет вещественную $\Re\{\varphi(x, y, t)\}$ и мнимую $\Im\{\varphi(x, y, t)\}$ составляющие волновой $A_2(\mathbf{R}|i_-)$ -значной функции $\varphi(x, y, t)$, в левом верхнем углу представлен модуль $|\varphi(x, y, t)|$, а в верхнем правом – фаза $\text{Arg}\{\varphi(x, y, t)\}$.

В начальный момент времени единственная клетка возбуждалась дельта-функцией Дирака. С течением времени возбуждение охватывало все большее число клеток автомата. На рис. 4 представлено возбуждение метасреды с двумя коэффициентами диффузии: $\beta = 0^0$ (вещественный коэффициент диффузии) и $\beta = 5^0$, на момент времени $t_k = 128$. Нетрудно видеть, что при $\beta = 0^0$ возбуждение имеет форму двумерной Гауссоиды (см. рис. 4а и 5а) и описывает обычный процесс диффузии (более темным значениям соответствуют большим числовые значениям).

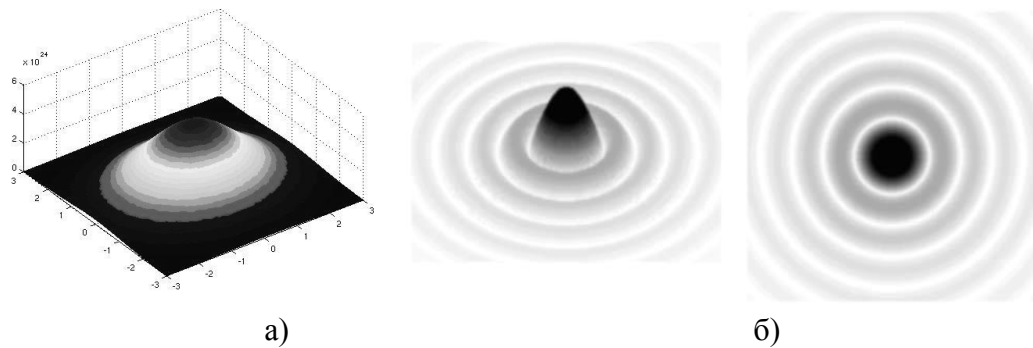


Рис. 5. Типичные возбуждения а) в виде двумерной функция Гаусса в среде Фурье-Гаусса и б) в виде волнового пакета в метасреде Шредингера-Евклида ($t_k = 128, \beta = 5^0$).

При $\beta = 5^0$ возбуждение имеет слабовыраженную форму волнового расплывающегося пакета (см. рис. 4б и рис. 5б). Волновая природа указывает на появление квантовых свойств у метасреды Шредингера-Евклида даже при малых значениях угла β .

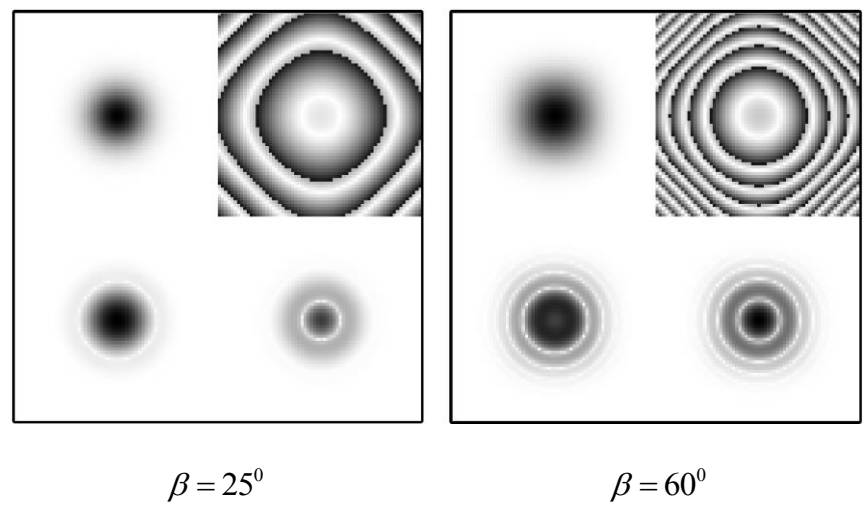


Рис. 6. Возбуждение метасреды Шредингера-Евклида в момент времени $t_0 = 128$ для двух значений фаз коэффициента диффузии $D = D_0 \cdot e^{i \cdot \beta}$ ($\beta = 25^0$ и $\beta = 60^0$).

Примечание 1. Отметим, что при малых значениях β абсолютные мнимая составляющей значительно меньше действительной $|\Im\{\varphi(x, y, t)\}| \ll |\Re\{\varphi(x, y, t)\}|$. Поэтому в модуле

$$|\varphi(x, y, t)| = \sqrt{(\Im\{\varphi(x, y, t)\})^2 + (\Re\{\varphi(x, y, t)\})^2} \approx |\Re\{\varphi(x, y, t)\}|$$

превалирует действительная составляющая. Таким образом, в данном случае (малые значения β) действительная составляющая и модуль функции возбуждения имеют форму гладкой Гауссовской функции. Для визуализации слабой мнимой составляющей на рис.4б и 5б применена ее нормировка.

При увеличении β , во-первых, действительная составляющая также начинает проявлять волновую природу и, во-вторых, значения мнимой и действительной составляющих выравниваются: $|\Im\{\varphi(x, y, t)\}| \approx |\Re\{\varphi(x, y, t)\}|$. На рис. 6 можно увидеть, что с увеличением фазы β , возбуждение принимает все более выраженную форму волнового пакета в виде двумерной Гауссовской поверхности, внутри которой действительные и мнимые части колеблются в противофазе (чередующиеся черные и белые кольца). Модуль возбуждения имеет форму двумерной Гауссоиды.

Метасреда Шредингера-Минковского

В рассматриваемом случае коэффициент диффузии является двойным числом, а волновая функция принимает значения в алгебре двойных чисел $A_2(\mathbf{R} | i_+) := \{z = a + i_+ b | a, b \in \mathbf{R}\}$, где $i_+^2 = +1$. Любое двойное число может быть представлено в полярной форме

$$D = a + i_+ b = |D|(\cosh \beta + i_+ \cdot \sinh \beta) = |D|e^{i_+ \cdot \beta} \in A_2(\mathbf{R} | i_+),$$

где $|D| = D_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$, $\beta = \text{arcth}(b_0 / a_0)$. При моделировании исследуется случай, когда $a_0 > b_0$ с тем, чтобы модуль $|D| = \sqrt{a_0^2 - b_0^2}$ не являлся комплексным числом, причем значения a_0, b_0 выбираются таким образом, чтобы $|D| = D_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2} = 0.11$. На рис. 7 представлена форма возбуждения клеточного автомата через 128 итераций после возбуждения его дельта-функцией Дирака в начальный момент времени.

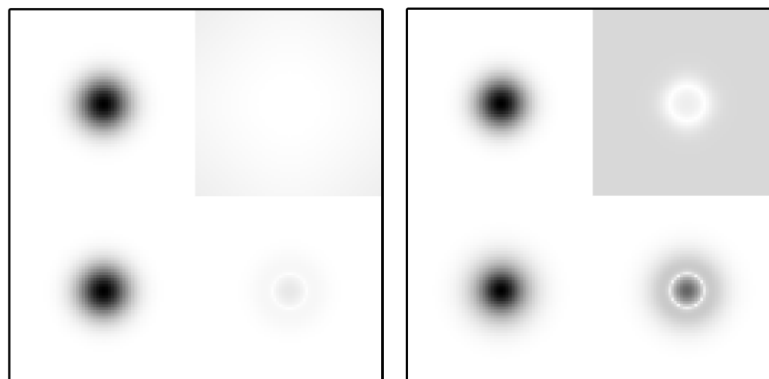


Рис. 7. Возбуждение метасреды Шредингера-Минковского в момент времени $t_0 = 128$ для двух значений фаз коэффициента диффузии

$$D = D_0 \cdot e^{i_+ \cdot \beta} \quad (\beta = 5^0 \text{ и } \beta = 20^0).$$

В отличие от предыдущего случая (в котором и действительная и мнимая части имели волновую природу), в данном случае действительная составляющая имеет гладкую Гауссовскую форму, а мнимая составляющая – форму волнового пакета. Оказалось, что частота колебаний волн у мнимых частей не увеличивается с ростом фазы коэффициента D . В центре фазовой картины (правая верхняя четверть рисунков) при увеличении угла β все более четко оформляется кольцо нулевых фаз.

Метасреда Шредингера-Галилея

В рассматриваемом случае коэффициент диффузии является дуальным числом и волновая функция принимает значения в алгебре дуальных чисел $A_2(\mathbf{R} | i_0) := \{z = a + i_0 b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, где $i_0^2 = 0$. Любое дуальное число также представляется в полярной форме

$$D = a + i_0 b = |D|(\pm 1 + i_0 \beta) = |a|e^{i_0 \cdot \beta} \in A_2(\mathbf{R} | i_0),$$

где $|D| = |a|$, $\beta = b / |a|$. На рис. 8 представлена форма возбуждения клеточного автомата через 128 итераций после возбуждения его дельта-функцией Дирака в начальный момент времени.

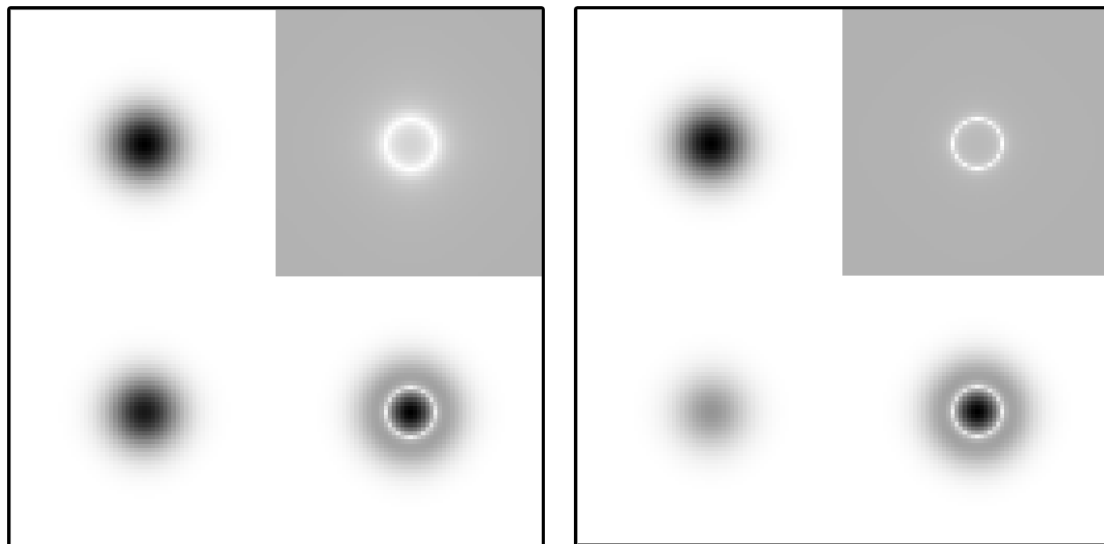


Рис. 8. Возбуждение метасреды Шредингера-Минковского в момент времени $t_0 = 128$ для двух значений фаз коэффициента диффузии

$$D = D_0 \cdot e^{i_0 \cdot \beta} \quad (\beta = 50^\circ \text{ и } \beta = 80^\circ).$$

Как и в предыдущем случае, действительная составляющая не проявляет волновую природу, в то время как мнимая – ее имеет. Причем с повышением значения β до $\beta \leq 45^\circ$, среднее значение действительной составляющей становится меньше среднего значения мнимой составляющей, а при $\beta > 45^\circ$ мнимая составляющая начинает преобладать над действительной. При этом волновая природа в модуле волновой функции отсутствует, в силу того, что в ее состав мнимая составляющая не входит, так как для дуальных чисел имеет место равенство (убрать скобку) $|z| = |x + i_0 y| = |x|$. Таким образом, мнимая составляющая волновой функции “живет” сама по себе, не проявляясь в модуле, и как ненаблюдаемый “дух” сопровождает его.

Метасреда Шредингера-Яглома

Обобщением трех комплексных алгебр $A_2(\mathbf{R} | i) := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, где $i = i_-, i_0, i_+$ является алгебра Яглома (Yaglom, 1968) $A_2(\mathbf{R} | i_k) := \{z = a + i_k b \mid a, b \in \mathbf{R}\}$, в которой $i_k^2 = k \in \mathbf{R}$, где k - произвольное действительное число (рис. 9).

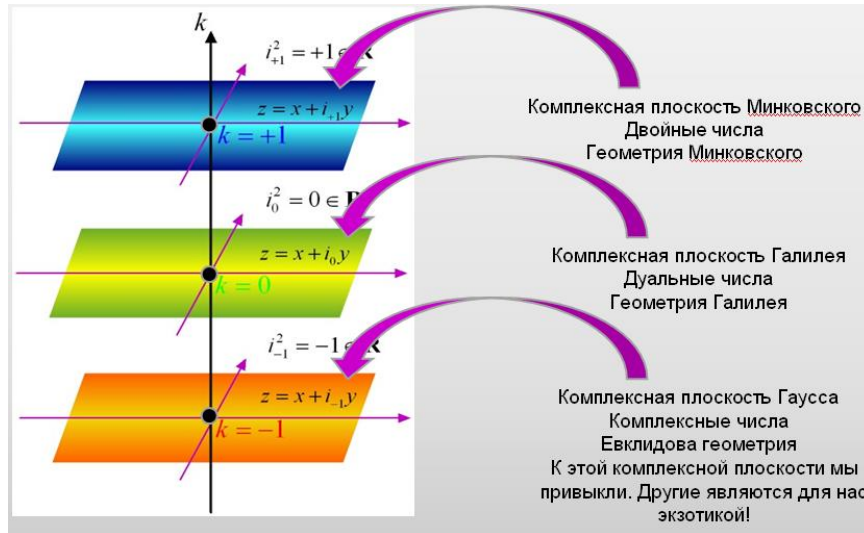


Рис. 9. В каждой плоскости, пересекающей вертикальную ось параметра k , “живет” алгебра $A_2(\mathbf{R} | i) := \{z = a + ib \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Три плоскости, пересекающие эту ось в трех точках $k = \mp 1, 0$, представляют рассмотренные выше три алгебры комплексных чисел.

В частности, когда $k = \mp 1, 0$, алгебра $A_2(\mathbf{R} | i_k)$ превращается в $A_2(\mathbf{R} | i)$. В новой алгебре правила сложения и умножения имеют следующий вид:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + k \cdot y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В алгебре $A_2(\mathbf{R} | i_k)$ можно определить операцию сопряжения, которая отображает каждое число $z = x + iy$ в новое число вида $\bar{z} = \overline{x + iy} := x - iy$. Очевидно, $\|z\| = z\bar{z} = x^2 - ky^2$.

Нетрудно видеть, что

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z| \cdot \left(\frac{x}{x^2 - k \cdot y^2} + i_k \cdot \frac{y}{x^2 - k \cdot y^2} \right) = |z| \cdot (\cos_k \beta + i_k \cdot \sin_k \beta) = |z| \cdot e^{i_k \beta}, \tag{12}$$

где

$$\cos_k \beta := \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - ky^2}}, \quad \sin_k \beta := \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 - ky^2}}, \tag{13}$$

$$\text{tg}_k \beta = \frac{\sin_k \beta}{\cos_k \beta} = \frac{b}{a}.$$

В рассматриваемом случае коэффициент диффузии является $A_2(\mathbf{R} | i_k)$ -комплексным числом, и волновая функция принимает значения в алгебре $A_2(\mathbf{R} | i_k)$, где $i_k^2 = k$. Соответствующую среду будем называть метасредой Шредингера-Яглома. Лю-

бой $A_2(\mathbf{R} | i_k)$ -комплексный коэффициент диффузии может быть представлен в полярной форме:

$$D = |D| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) = |D| \cdot \left(\frac{a}{a^2 - k \cdot b^2} + i_k \cdot \frac{b}{a^2 - k \cdot b^2} \right) =$$

$$= |D| \cdot (\cos_k \beta + i_k \cdot \sin_k \beta) = |D| \cdot e^{i_k \beta}.$$

Кроме фазы β у D появился второй параметр k .

Результаты моделирования метасред Шредингера-Яглома для различных значений k представлены на рис. 10.

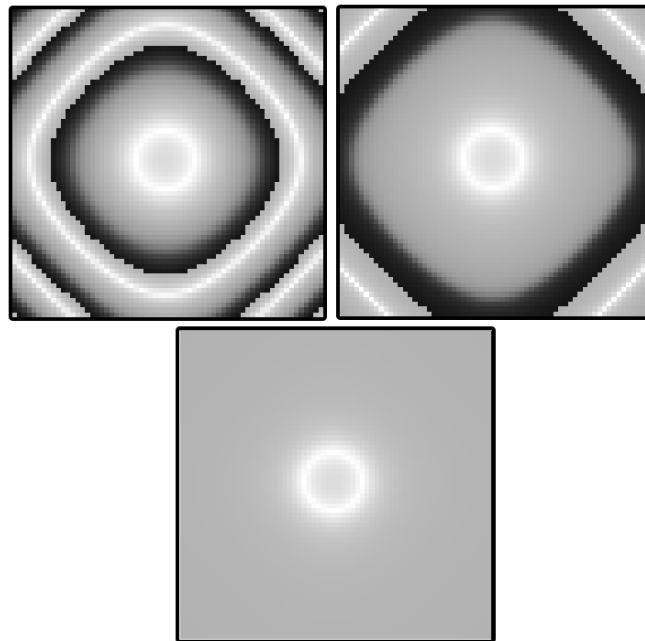


Рис. 10. Возбуждение трех метасред Шредингера-Яглома в момент времени $t_0 = 128$ для трех значений k -параметра: $k = -0.25$, $k = -0.05$ (верхний ряд изображений) и $k = 0$ (нижнее изображение) для одинаковых значений $\arg\{D\} = 40.5^\circ$, $|D| = 0.07$.

Как можно заметить, кольцо нулевых фаз (светлое кольцо), которое было свойственно дуальным числам ($k = 0$), также является первым внутренним кольцом фазовых возмущений для отрицательных значений k (на рис.10 $k = -0,25$ и $k = -0,05$). Вслед за первым светлым кольцом следует (после первого черного кольца) второе светлое кольцо, которое удаляется от начала координат при уменьшении абсолютного значения k . Когда $|k| \rightarrow 0$, второе светлое кольцо вместе с первым черным кольцом устремляется в бесконечность.

Интерференция двух возбуждений

Поскольку функция возбуждения $\varphi(x, y, t)$ довольно часто имеет волновую природу, то интересно исследовать картину интерференции двух возбуждений, возникших одновременно в двух разных точках метасреды.

На рис. 11 представлено наложение двух возбуждений при действительном коэффициенте диффузии. В этом случае оба возбуждения представляют собой двумерные Гауссоиды, с течением времени суммирующиеся друг с другом.

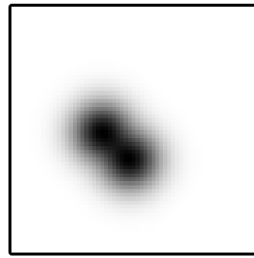


Рис. 11. Наложение двух возбуждений в обычной диффузионной среде Фурье-Гаусса с $\beta = \arg\{D\} = 0^\circ$, $i^2 = -1$.

Более интересные результаты можно увидеть на рис. 12 для метасреды Шредингера-Евклида с $\beta = \arg\{D\} = \pi/2$, $i^2 = -1$. В этом случае имеет место интерференция возбуждений, как это имеет место в классической квантовой механике.

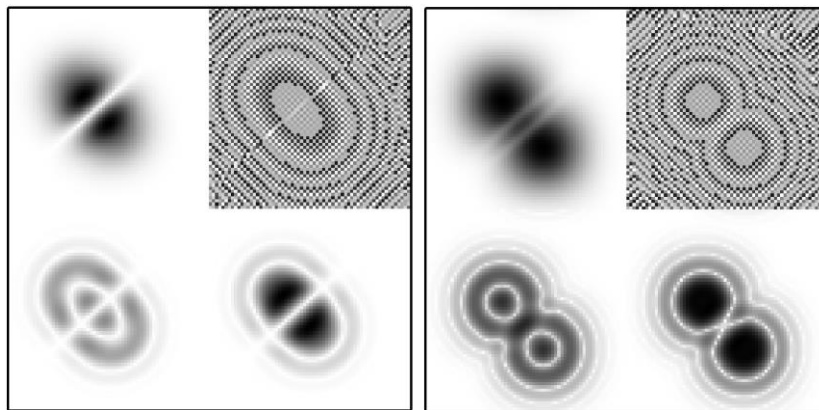


Рис. 12. Интерференционная картина двух возбуждений в метасреде Шредингера-Евклида (комплексный коэффициент диффузии). На левом рисунке в начальный момент времени были возбуждены дельта-функциями Дирака две близко расположенные точки, а на правом – расположенные далеко относительно друг от друга.

На рис. 13 показаны результаты интерференции для метасреды Шредингера-Галилея с дуальным коэффициентом диффузии ($i^2 = 0$). Отметим, что белые кольца нулевых фаз не суммируются друг с другом, как это имеет место при классической интерференции. Вместо этого они плавно соединяются.

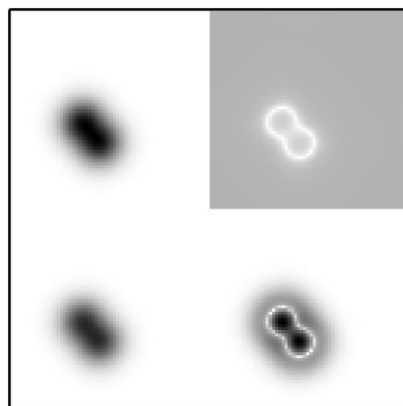


Рис. 13. Интерференционная картина двух возбуждений в метасреде Шредингера-Галилея (дуальный коэффициент диффузии).

Возбуждение метасреды движущимся источником

Пусть функция возбуждения $f(x, y, t)$ в уравнении

$$\frac{\partial \varphi(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, t)}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t),$$

представляет собой дельта-функцию Дирака, движущуюся по окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) с угловой скоростью

$$\Omega: f(x, y, t) = \delta(x_0 + R \cdot \cos(\Omega \cdot t), y_0 + R \cdot \sin(\Omega \cdot t)), \quad \text{где} \quad (x_0 - x(t))^2 + (y_0 - y(t))^2 = R^2.$$

Можно считать, что в метасреде по окружности движется квантовая частица, возбуждающая эту среду.

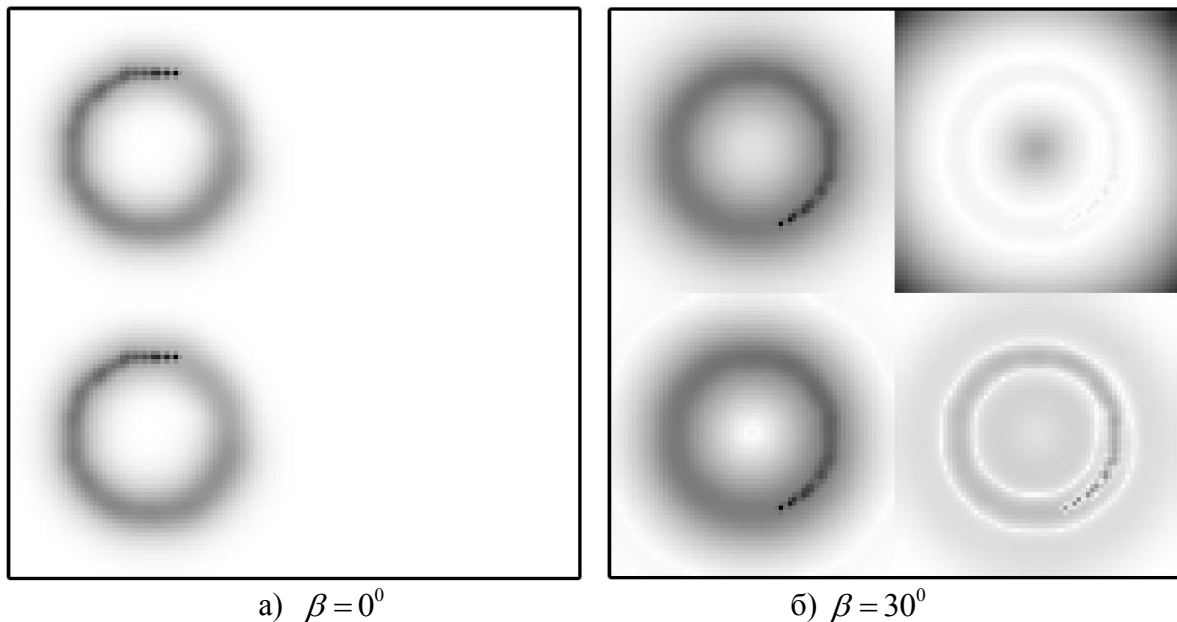


Рис. 14. Возбуждение метасреды Шредингера-Евклида движущейся по окружности Частицей ($D = a + i_b = |D|e^{i\beta}$).

Рис. 14 и 15 демонстрируют возбуждение метасреды Шредингера-Евклида при высоких и низких значениях комплексной фазы β у $D = |D|e^{i\beta}$. При низких значениях фазы β мнимая составляющая почти отсутствует, и поэтому фазовая картинка (правый верхний угол) представляет собой константу, равную нулю. Ярко выражена действительная составляющая и модуль возбуждения, которые похожи на движущуюся и затухающую двумерную Гауссоиду. В этом случае метасреда близка по своим свойствам к теплопроводящей среде. При увеличении фазы метасреда все больше приобретает квантовые свойства, и при углах $\beta = 30^\circ$ квантовые свойства начинают зримо проявляться (см. рис. 14б). Когда $\beta = \arg\{D\}$ достигает 60° и более, возникает новая особенность процесса (рис. 15). Движущаяся частица надвигается на еще не затухший хвост своей траектории и начинает с ним интерферировать. Вероятно можно подобрать такое значение круговой скорости, при которой набегающая на хвост головная часть может войти с ним в резонанс.

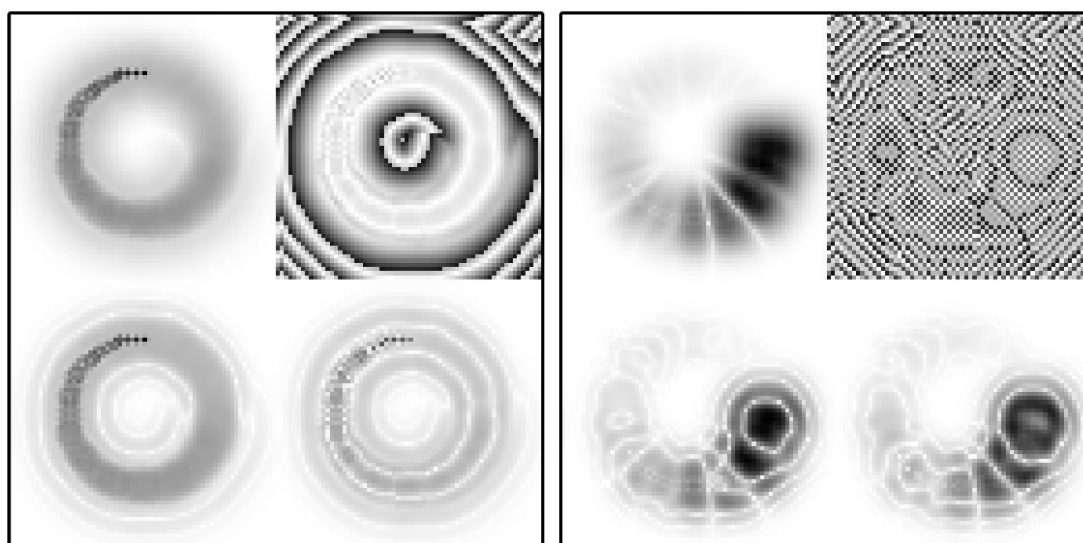
а) $\beta = 60^\circ$ б) $\beta = 90^\circ$

Рис. 15. Интерференция головной и хвостовой частей траектории в метасреде Шредингера-Евклида.

Заключение

Впервые исследованы метасреды с обобщенными комплексными коэффициентами диффузии, законы функционирования которых описываются обобщенными уравнениями Шредингера. Рассмотрена их реализация в виде клеточного автомата. Приведены результаты моделирования, которые показали сложный характер поведения таких сред.

Список использованной литературы

Лабунец В.Г. Возбудимые метасреды Шредингера // 2013 23rd International Crimean Conference. Microwave and Telecommunication Technology. Conference proceedings. 2013. Vol I. P. 12-16.

Wolfram S. Cellular automata as models of complexity // Reprinted from Nature. Macmillan Journals Ltd.. 1985. Vol. 311. No. 5985. P. 419-424.

Yaglom I. Complex numbers in geometry. New York.: Academic press, 1968. Vol. 242. P. 203-205.

Рецензент статьи: кандидат технических наук, доцент Института радиоэлектроники и информационных технологий Уральского федерального университета С.М. Зраенко.