



С.А. Одинцева
Ш.А. Салахутдинов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Екатеринбург
2016

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВО «УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЛЕСОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра технической механики и оборудования
целлюлозно-бумажных производств

С.А. Одинцева
Ш.А. Салахутдинов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Варианты заданий
к выполнению расчетно-графических работ
обучающимися по дисциплине «Сопротивление материалов»

ЧАСТЬ 1

Екатеринбург
2016

Печатается по рекомендации методической комиссии ИЛБиДС.
Протокол № 2 от 15 октября 2015 г.

Рецензент – Э.Ф. Герц, профессор д-р техн. наук.

Редактор А.Л. Ленская
Оператор компьютерной верстки Т.В. Упова

Подписано в печать 16.08.16

Плоская печать

Заказ №

Формат 60×84 1/16

Печ. л. 2,79

Пл. резерв

Тираж 10 экз.

Цена руб. коп.

Редакционно-издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Целью расчетно-графических работ (РГР) является закрепление теоретического материала по дисциплине, приобретение опыта выполнения расчетов на прочность, жесткость, устойчивость простых элементов конструкций и навыков в работе с технической литературой, справочниками, стандартами.

Расчетно-графическая работа состоит из нескольких заданий. Количество заданий, объем каждого задания и сроки выполнения определяются кафедрой в соответствии с программой по учебной дисциплине и учебным графиком.

Каждое задание выполняется на бумаге стандартного размера (А4). Титульный лист оформляется на бумаге того же формата по образцу, данному в Приложении 1. Текстовая часть и расчеты должны быть выполнены четко и разборчиво. Чертежи и схемы в текстовой части выполняются в карандаше в соответствии с требованиями Единой системы конструкторской документации (ЕСКД).

Схема заданий и числовые данные каждому студенту даются преподавателем в начале изучения курса и распространяются на все задания. В чертежах должны быть проставлены числовые данные соответствующего варианта (не буквенные значения!). Расчеты следует проводить только с числовыми значениями.

Все величины, как в условии задания, так и полученные в результате решения, должны содержать их размерность. Решения приводятся в международной системе единиц (СИ).

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Условия и порядок выполнения работы

Для заданного поперечного сечения определить геометрические характеристики и построить эллипс инерции.

1. Вычертить в масштабе заданное поперечное сечение балки на стандартном листе формата А4, провести все вспомогательные оси. Выписать из ГОСТов требуемые величины и размеры, привязав их к центральным осям каждой фигуры выполненного чертежа. Основные размеры проставить также на чертеже.

2. Определить положение центра тяжести всей фигуры, применив для этого статические моменты плоских фигур. В качестве вспомогательных осей целесообразно выбрать центральные оси одной из фигур. Провести на чертеже через найденный центр тяжести параллельно прежним осям центральные оси всей фигуры.

3. Найти осевые моменты инерции и центробежный момент инерции всей фигуры относительно ее центральных осей.

4. Определить моменты сопротивления фигуры относительно этих центральных осей.

5. Найти положение главных центральных осей фигуры и провести их на чертеже. На чертеже показать также угол поворота главных осей инерции по отношению к прежним осям и его направление.

6. Найти моменты сопротивления фигуры относительно главных центральных осей инерции. При этом расстояние от осей до наиболее удаленных точек фигуры допускается определять графически.

7. Определить радиусы инерции фигуры относительно главных центральных осей и по ним построить эллипс инерции.

8. Исходные данные для решения задания (вариант) берутся из табл. 1.

Рекомендуемая литература

1. ГОСТ 8239–89 Двутавры стальные горячекатаные. Сортамент.
2. ГОСТ 8240–89 Швеллеры стальные горячекатаные. Сортамент.
3. ГОСТ 8509–86 Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент.
4. ГОСТ 8510–89 Уголки стальные горячекатаные неравнополочные. Сортамент.
5. ГОСТ 19771–93 Уголки стальные гнутые равнополочные. Сортамент.
6. ГОСТ 19772–93 Уголки стальные гнутые неравнополочные. Сортамент.
7. ГОСТ 8278–83 Швеллеры стальные гнутые равнополочные. Сортамент.
8. ГОСТ 8281–80 Швеллеры стальные гнутые неравнополочные. Сортамент.

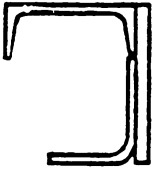
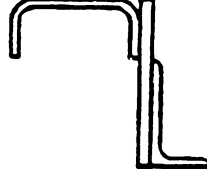
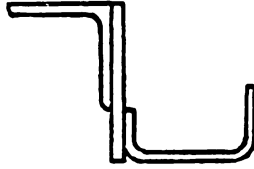
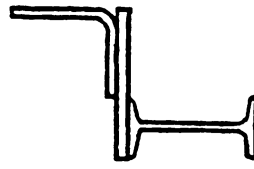
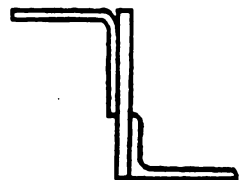
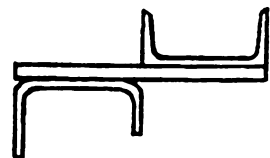
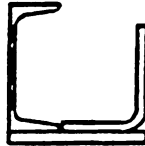
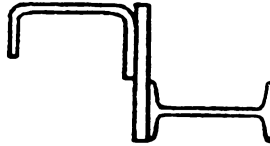
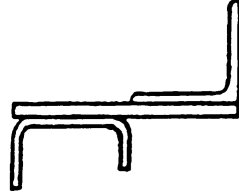
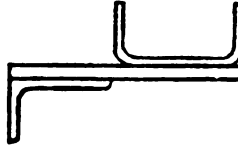
В случае замены указанных ГОСТов использовать ГОСТ, действующий на момент выполнения РГР.

Размеры стальных профилей

Вариант	Лист, толщина, мм	Прокатные профили				Гнутые профили			
		Двутавры, номер	Швеллеры, номер	Уголки равнополочные, мм	Уголки неравнополочные, мм	Уголки равнополочные, мм	Уголки неравнополочные, мм	Швеллер, равнопо- лочный, мм	Швеллер неравнополочный, мм
1	10	10	10	80×8	75×60×6	80×5×7	80×63×5×7	100×50×5	80×80×40×5
2	10	12	12	90×8	75×60×8	80×6×9	80×63×6×9	100×80×5	90×80×50×4
3	10	14	14	100×8	80×50×6	80×7×9	90×70×6×7	110×50×5	100×80×50×5
4	20	16	16	110×8	90×56×8	100×5×7	90×70×6×9	120×60×6	100×100×60×6
5	20	18	16a	125×8	100×63×8	100×6×9	100×80×6×9	140×60×6	120×60×50×5
6	20	20	18	125×10	125×80×10	120×5×7	100×80×7×9	160×80×6	130×108×50×4
7	20	22	18a	140×10	140×90×10	120×6×9	100×80×8×12	170×70×6	140×70×30×4
8	30	24	20	140×12	160×100×10	160×5×7	120×100×7×9	180×80×6	160×50×30×4
9	30	27	22	160×10	160×100×12	160×6×9	120×100×8×12	180×100×6	160×80×50×5
10	30	30	24	160×12	180×110×10	160×7×9	160×125×8×12	200×100×6	200×50×30×4

Задача 1. Сечения составных балок из стальных профилей

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

11 	12 
13 	14 
15 	16 
17 	18 
19 	20 

2. РАСТЯЖЕНИЕ ПРЯМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Условия и порядок выполнения работы

Стальной стержень ступенчатого сечения находится под действием внешней силы и собственного веса.

Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на отдельные участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы, и место изменения размеров поперечного сечения. Применяя метод сечения, будем оставлять нижнюю часть и отбрасывать верхнюю отсеченную часть стержня.

1. Построить эпюры:

- нормальных сил;
- нормальных напряжений;
- перемещений поперечных сечений относительно закрепления.

Площадь большего поперечного сечения стержня в 2 раза превышает площадь меньшего сечения.

Модуль продольной упругости для стали принять равным

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа, удельный вес } \gamma \text{ — } 78 \text{ кН/м}^3.$$

2. Исходные данные для решения задания берутся из табл. 2.

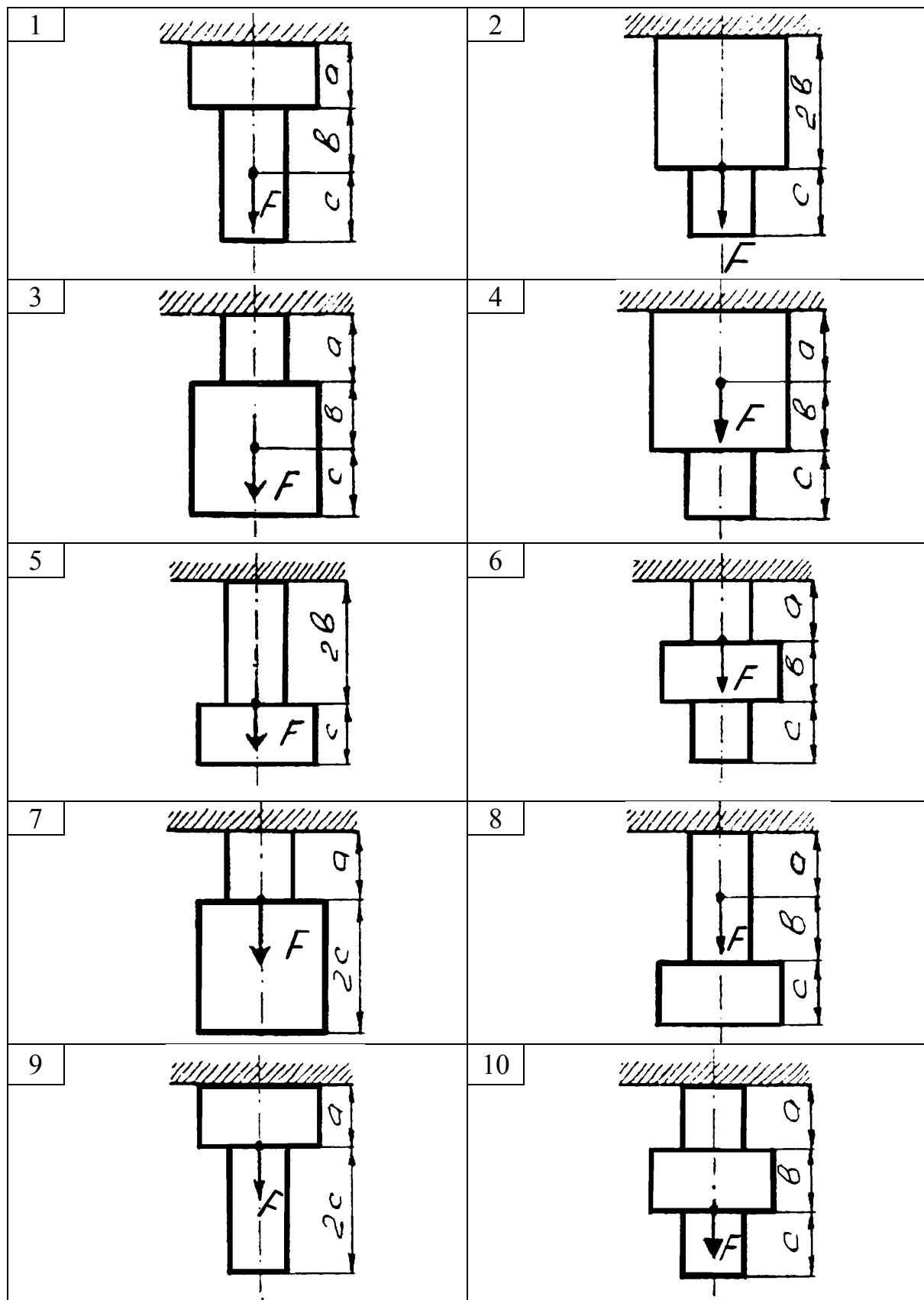
Площадь приведена для меньшего поперечного стержня.

Таблица 2

Исходные данные к заданию

Вариант	Нагрузка, кН		Площадь сечения А, см ²	Длина участков, м		
	F ₁	F ₂		a	b	c
1	110	100	15	2,0	1,6	0,6
2	120	130	16	2,1	1,7	0,7
3	130	140	17	2,2	1,8	0,8
4	140	150	18	2,3	1,9	0,9
5	150	160	19	2,4	2,0	1,0
6	160	170	20	2,5	2,1	1,1
7	170	180	21	2,6	2,2	1,2
8	180	190	22	2,7	2,3	1,3
9	190	200	23	2,8	2,4	1,4
10	200	220	24	2,9	2,5	1,5

Задача 2. Схемы нагруженных стержней



11		12	
13		14	
15		16	
17		18	
19		20	

3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Условия и порядок выполнения

1. Вычертить в карандаше в текстовой части заданную схему плоского напряженного состояния в точке. Выписать для своего варианта числовые данные напряжений и проставить их также в чертеже. Знак напряжений соответствует знаку вектора, указанного в схеме.

2. Определить аналитические значения главных нормальных напряжений. Третье главное напряжение в точке, действующее нормально к плоскости чертежа, принять равным нулю.

3. Аналитически определить угол поворота главных площадок по отношению к заданным (этот же угол и между нормальными к прежним и главным площадкам). Затем показать на чертеже положение главных площадок, направления действия главных напряжений и направление угла поворота.

4. Аналитически определить максимальное касательное напряжение в семействе заданных площадок (нормальных к плоскости чертежа), а также максимальное касательное напряжение при данном напряженном состоянии во всем объеме около рассматриваемой точки.

5. Величины, перечисленные в п.п. 2, 3 и 4 определить также графическим путем построения напряжений (кругов Мора). График должен быть выполнен в масштабе с указанием цифровых величин. Здесь же показать направление действия всех напряжений и угол поворота главных напряжений по отношению к заданным.

6. Определить относительные деформации ϵ_x , ϵ_y и ϵ_z , относительное изменение объема и удельную потенциальную энергию деформации. Коэффициент поперечной деформации для стали принять равным 0,3.

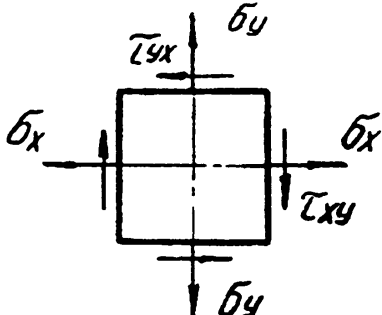
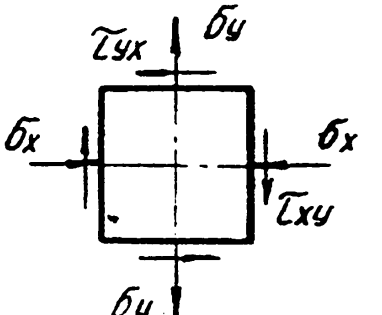
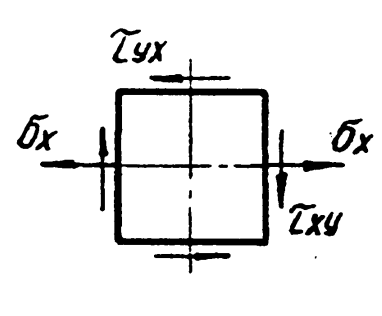
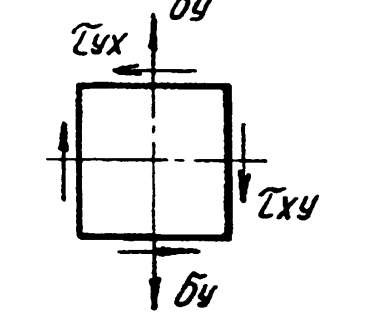
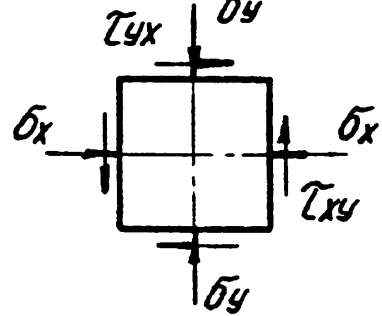
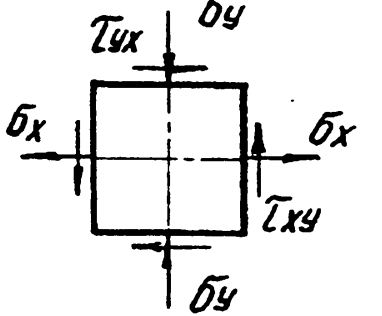
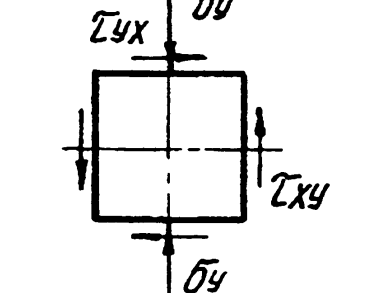
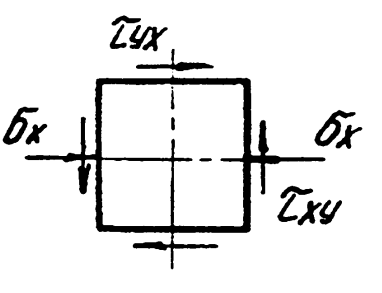
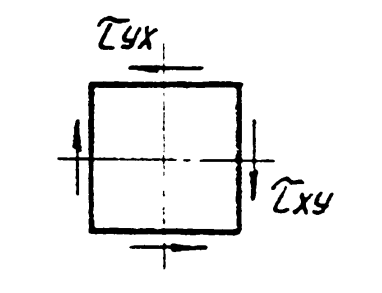
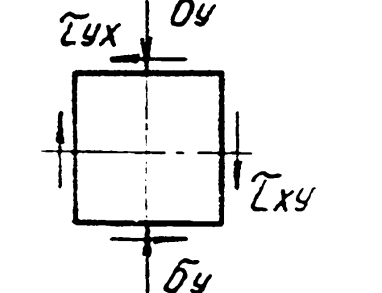
Исходные данные для решения задания (вариант) берутся из табл. 3.

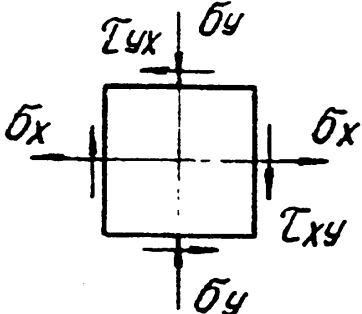
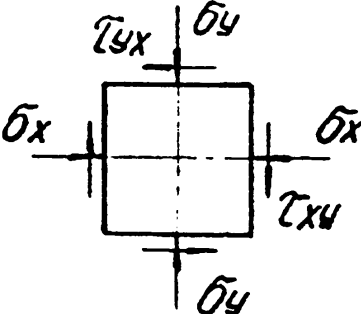
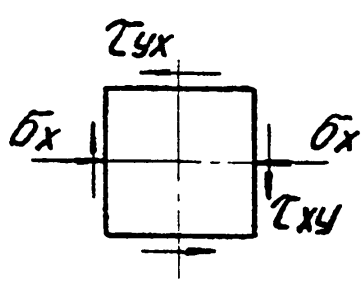
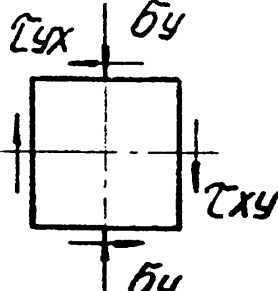
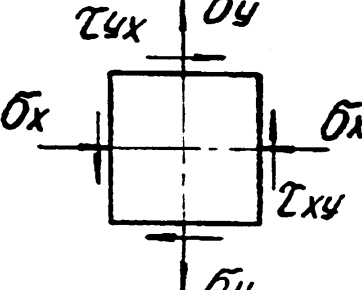
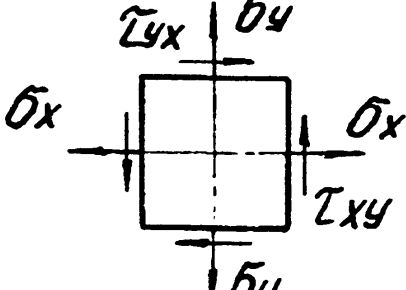
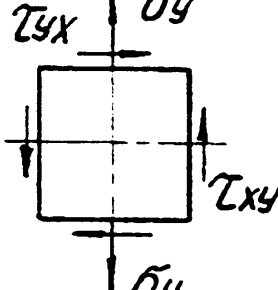
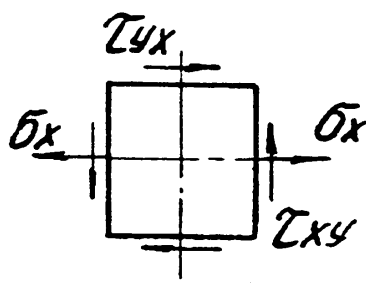
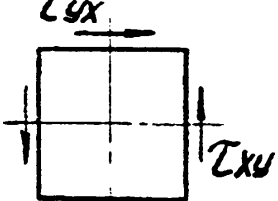
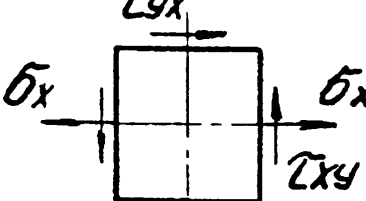
Таблица 3

Исходные данные к заданию

Вариант	Нормальные напряжение, МПа			Касательные напряжения, МПа
	σ_x	σ_y	σ_z	
1	10	40	80	20
2	15	45	75	25
3	20	50	70	30
4	25	55	65	35
5	30	60	45	40
6	35	65	40	35
7	40	70	35	30
8	45	75	30	25
9	50	80	25	20
10	55	85	20	15

Задача 3. Схемы плоского напряженного состояния в точке

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 
<p>9</p> 	<p>10</p> 

<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 
<p>15</p> 	<p>16</p> 
<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 

4. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Условия и порядок выполнения

1. Стальной вал круглого сплошного поперечного сечения нагружен внешними скручивающими моментами в соответствии с заданной схемой. Требуется построить эпюру внутренних крутящих моментов и из условия прочности определить диаметр вала. Полученный из расчета диаметр вала округлить до ближайшего целого числа соответственно: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

2. Для принятого диаметра вала построить эпюру углов закручивания поперечных сечений относительно крайнего левого сечения. Определить также наибольший относительный угол закручивания (на 1 пог. м.).

Модуль упругости при кручении для стали принять равным $8 \cdot 10^4$ МПа.

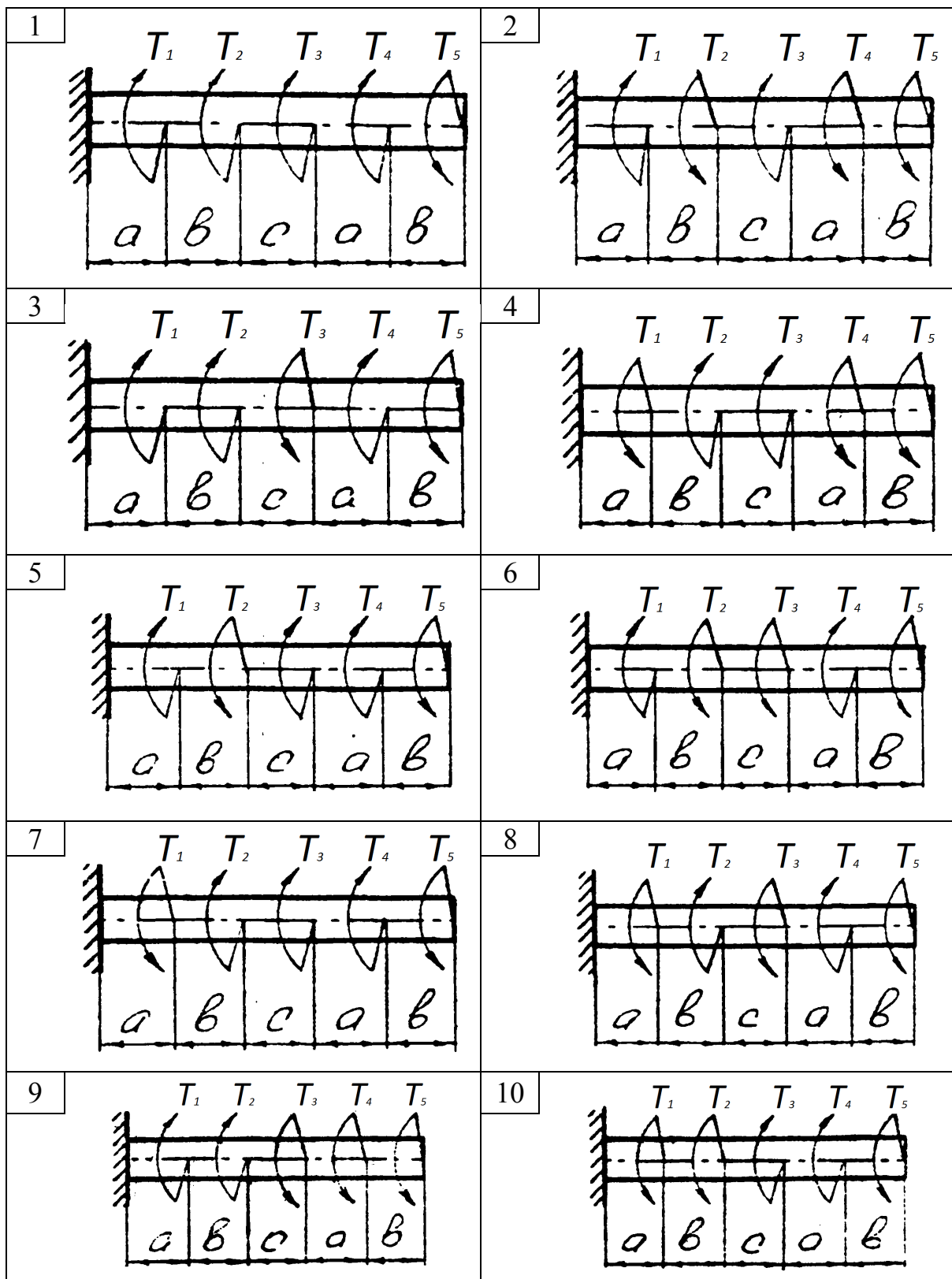
3. Исходные данные для решения задания (вариант) берутся из табл. 4. Нумерация моментов для всех задач постоянна, как показано на первых рисунках.

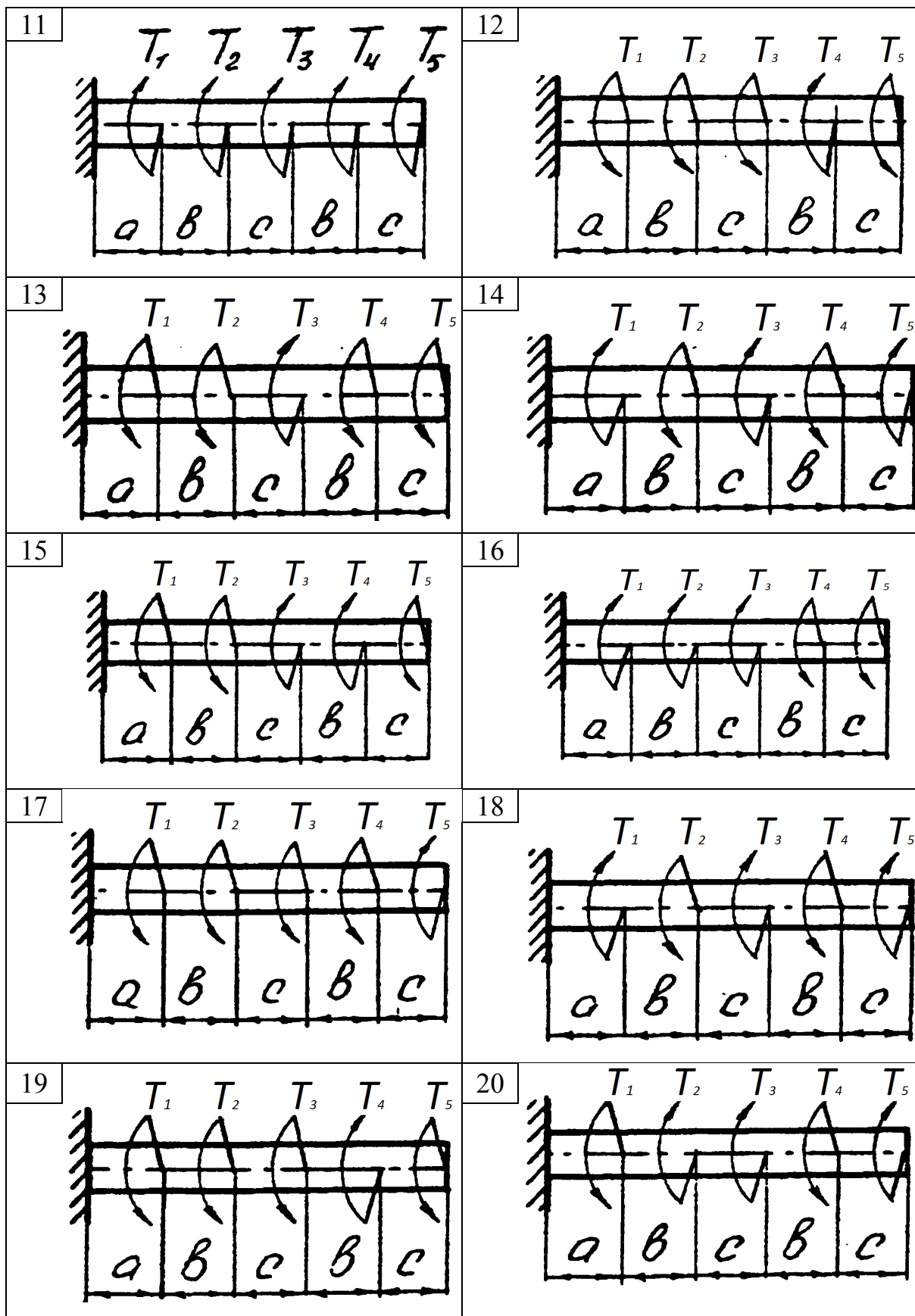
Таблица 4

Исходные данные к заданию

Вариант	Длина участков, м			Внешние скручивающие моменты, кНм					Допускаемое касательное напряжение, $[\tau]$, МПа
	а	в	с	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
1	0,4	0,6	0,5	2,2	1,1	2,0	1,2	1,6	35
2	0,5	0,7	0,6	2,1	1,2	1,9	1,1	1,7	40
3	0,6	0,8	0,7	2,0	1,3	1,8	1,4	1,8	45
4	0,7	0,9	0,8	1,9	1,4	1,7	1,3	1,9	50
5	0,8	1,0	0,9	1,8	1,5	1,6	1,6	2,0	55
6	0,9	1,1	1,0	1,7	1,6	1,5	1,5	2,1	60
7	1,0	0,9	0,8	1,6	1,7	1,4	1,8	2,2	65
8	1,2	0,8	0,7	1,5	1,8	1,3	1,7	2,3	70
9	1,3	0,6	0,9	1,4	1,9	1,2	2,0	2,4	75
10	1,4	0,5	1,0	1,3	2,0	1,1	1,9	2,5	80

Задача 4. Кручение





5. ИЗГИБ. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Условия и порядок выполнения задач 5, 6, 7

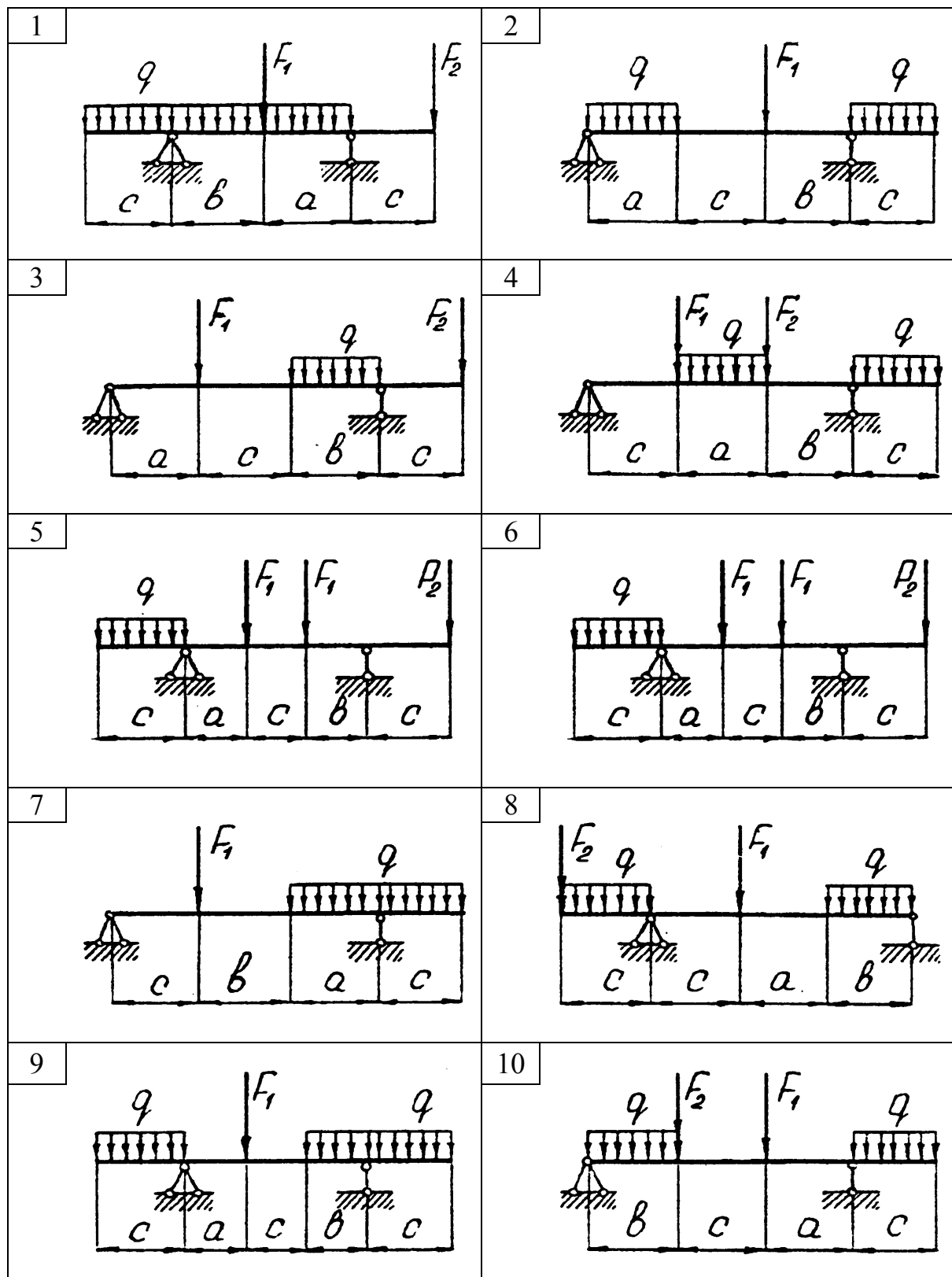
1. Для заданных схем статически определимых балок определить:
 - опорные реакции и построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
 - на эпюрах должны быть проставлены числовые значения величин в характерных точках.
 - для каждого участка балки необходимо записать уравнения определяемых величин и вычислить их значения для характерных точек.
 2. В задаче 5 дополнительно:
 - из условия прочности подобрать стальную балку двутаврового сечения;
 - вычислить для нее максимальные значения нормального и касательного напряжений;
 - в опасных сечениях построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте двутавровой балки;
 - определить прогибы в характерных точках балки (середина пролета, точки приложения сил, крайние точки на консолях);
 - по найденным точкам построить изогнутую ось балки. Вычислить также угол поворота сечения на правой опоре.
- Чертежи балок выполняются в произвольном масштабе.
3. В задаче 6 из условия прочности подобрать балку прямоугольного сечения из древесины при отношении высоты к ширине ($h:b=4:1$). Допускаемое нормальное напряжение для древесины принять равным 10 МПа. Исходные данные (вариант) для решения задач берутся из табл. 5.

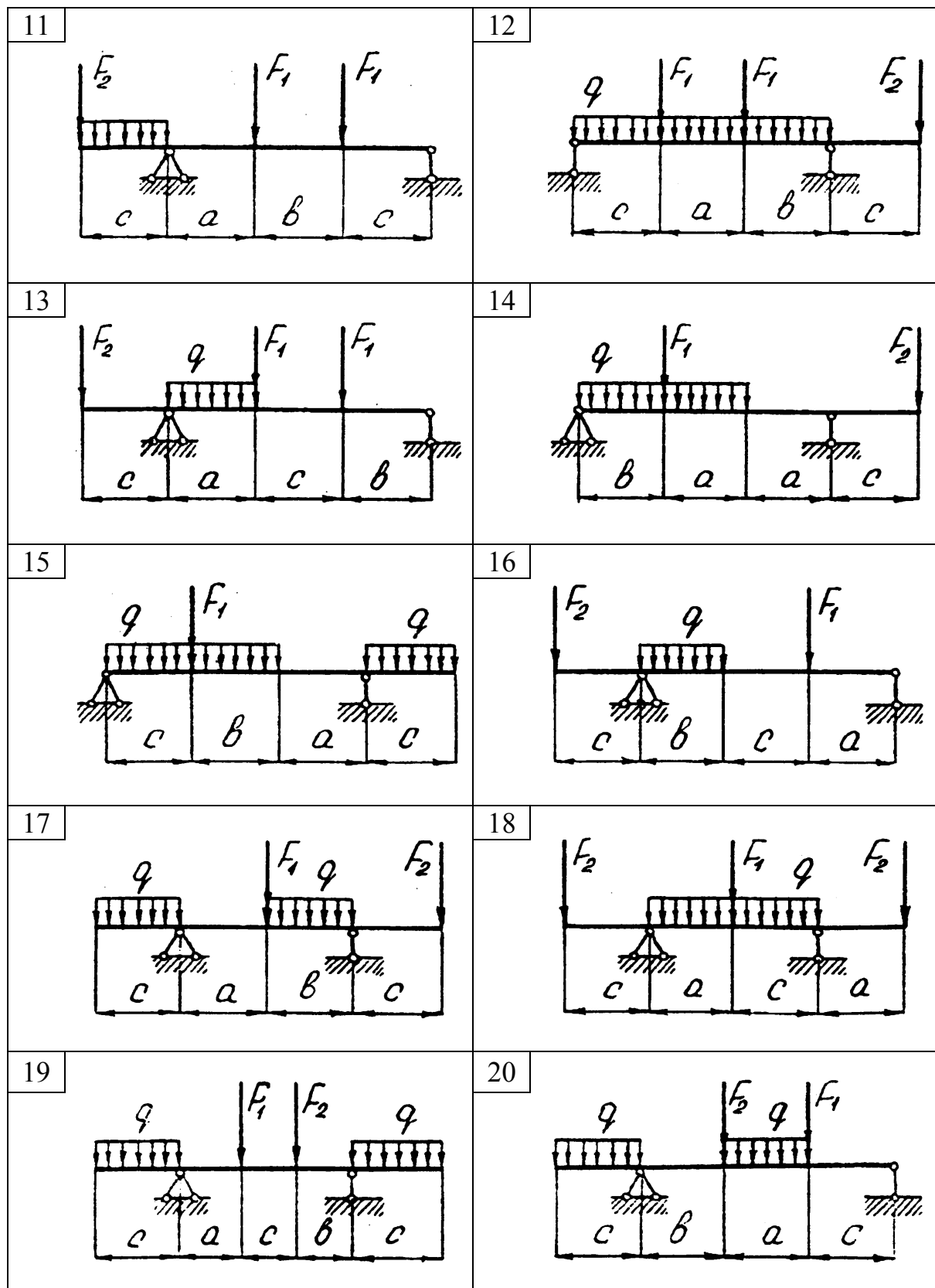
Таблица 5

Исходные данные к задачам 5, 6, 7

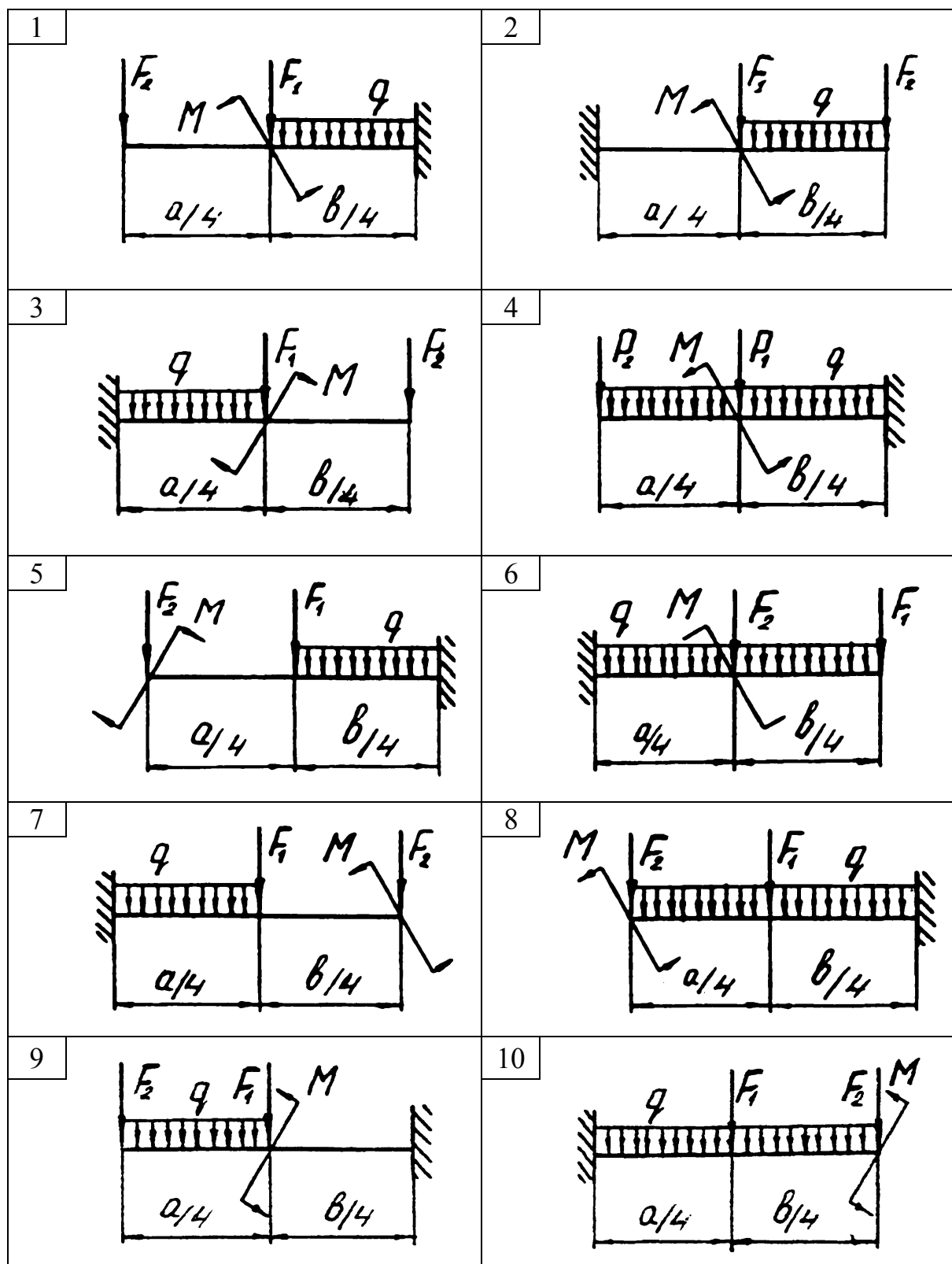
Вариант	Заданная нагрузка				Длина участков, м			
	F_1 , кН	F_2 , кН	q , кН/м	M , кНм	h	a	b	c
1	26	9	6	20	2,0	1,6	1,2	0,5
2	23	12	11	19	2,2	1,8	1,4	0,6
3	21	10	9	26	2,4	2,0	1,6	0,7
4	20	15	14	24	2,6	2,2	1,8	0,8
5	19	9	7	22	2,8	2,4	2,0	0,9
6	25	18	13	23	3,0	2,6	2,2	0,8
7	24	12	12	25	3,2	2,8	2,0	0,7
8	27	10	8	24	2,8	3,0	1,8	0,6
9	22	11	10	27	2,6	2,8	1,6	0,5
10	18	14	15	18	2,4	2,6	1,4	0,4

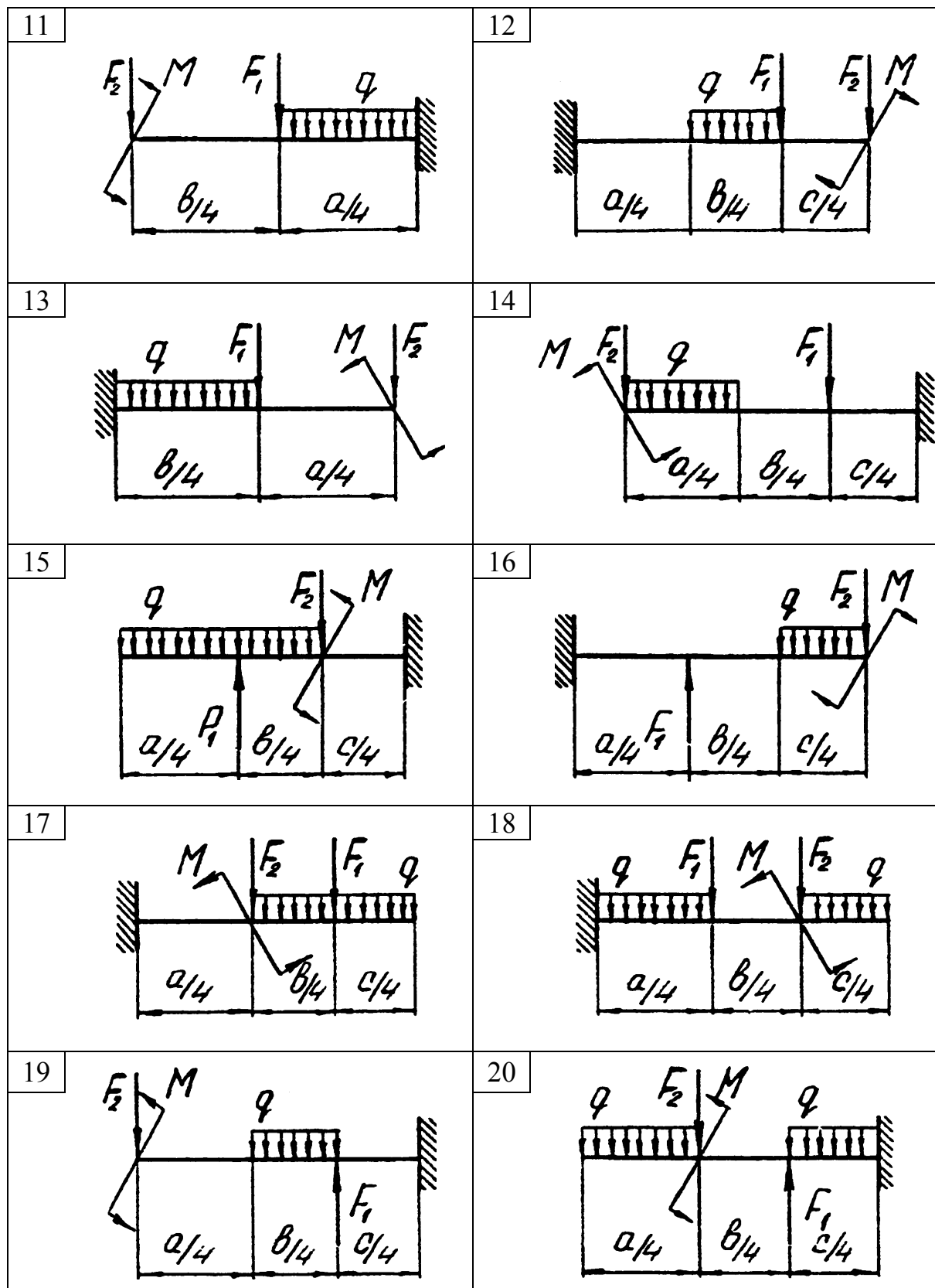
Задача 5. Двухпорная балка



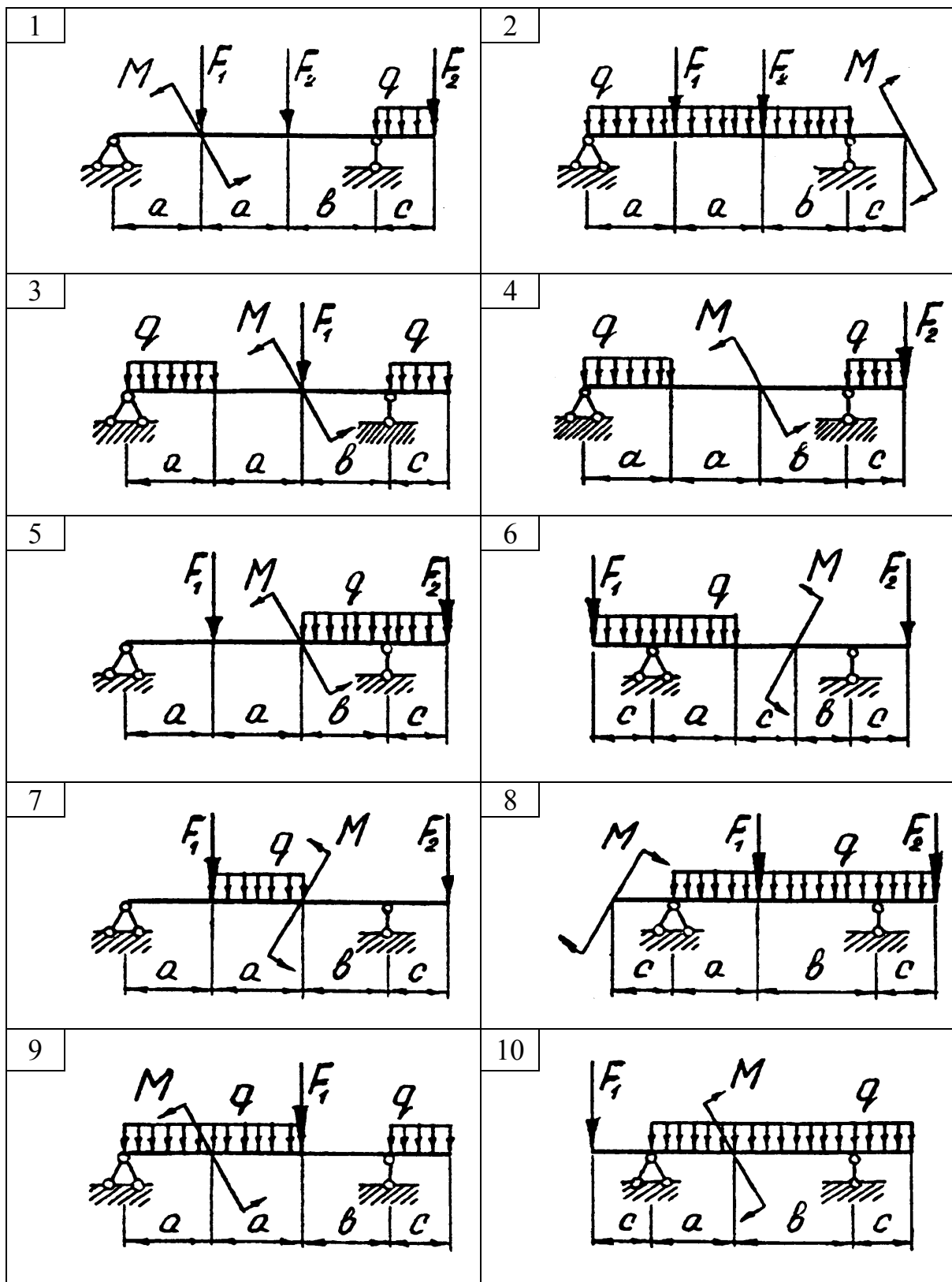


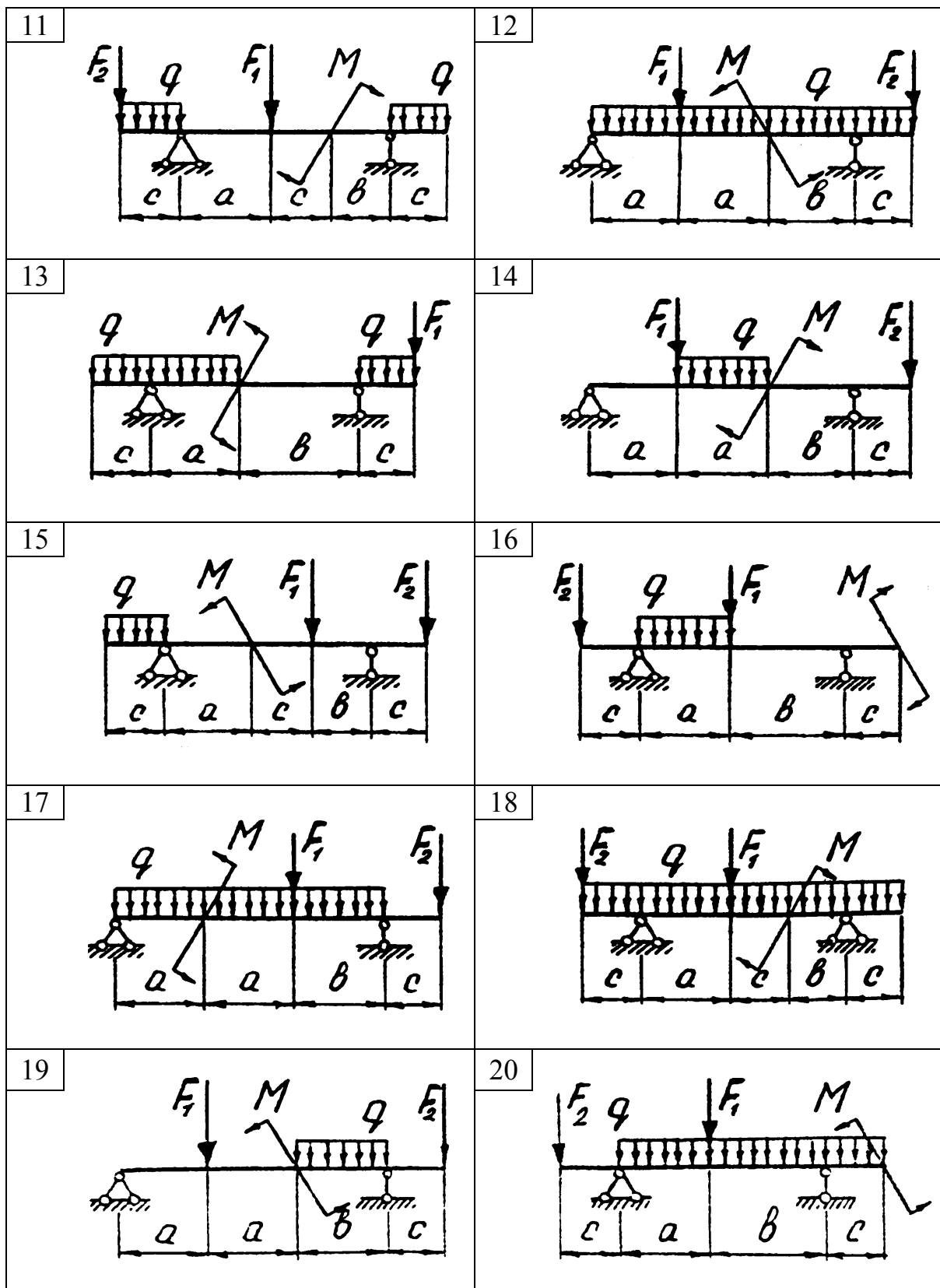
Задача 6. Консольная балка





Задача 7. Двухпорная балка





ПРИЛОЖЕНИЕ

Образец оформления титульного листа

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО «Уральский государственный лесотехнический
университет»
Институт лесопромышленного бизнеса и дорожного строительства
Кафедра технической механики и оборудования
целлюлозно-бумажных производств

Курс «Сопротивление материалов»

РГР— __
Тема: _____

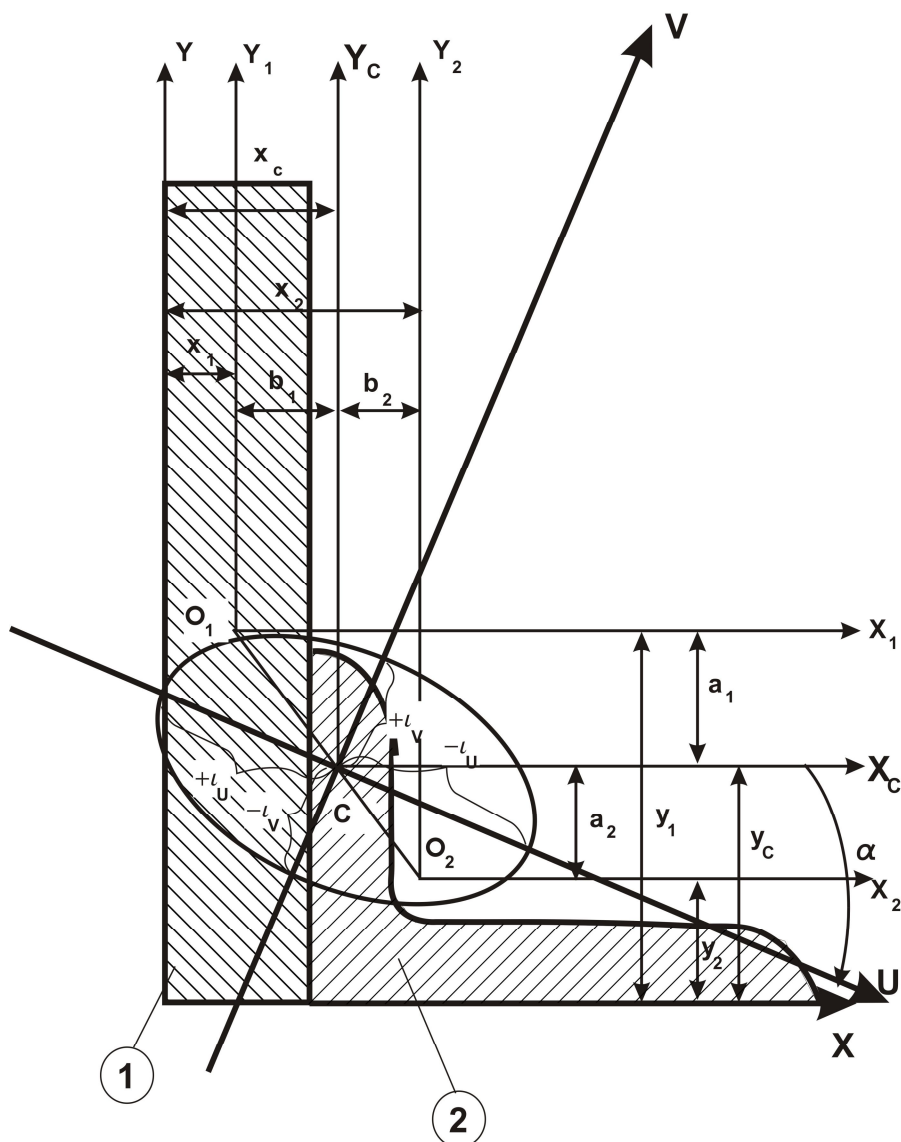
Вариант - ____

Выполнил: обучающийся _____ (ФИО)
(подпись, дата)

Проверил: преподаватель _____ (ФИО)
(подпись, дата)

Екатеринбург
20 ____

Пример решения задачи 1



Дано: профили уголка и листа
 $V=14$ см, $v=9$ см, $y_0=4,58$, $x_0=2,12$, $I_y=145,54$ см⁴, $I_x=444,45$ см⁴, $I_u=85,51$ см⁴,
 $I_{xy}=147$ см⁴, $\text{tg}\alpha=0,409$, $A=22,24$ см².

Для прямоугольного сечения: $h=2$ см, $v=15$ см, $A=30$ см².

1. Определение координат центра тяжести всей сложной фигуры (положение центральных осей):

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{30 \cdot 1 + 6,58 \cdot 22,24}{30 + 22,24} = 3,38 \text{ см} ;$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{7,5 \cdot 30 + 2,12 \cdot 22,24}{30 + 22,24} = 5,21 \text{ см} ,$$

где $x_1, y_1; x_2, y_2$ – расстояние от центра тяжести каждого сортамента до вспомогательных осей;

$$x_1 = \frac{h}{2} = 1 \text{ см}; \quad y_1 = \frac{b}{2} = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ см}; \quad x_2 = h + y_0 = 6,58 \text{ см}; \quad y_2 = x_0 = 2,12 \text{ см}.$$

2. Определение осевых моментов инерции относительно центральных осей X_c и Y_c :

$$I_{X_c} = I_{x_1} + I_{x_2} + a_1^2 \cdot A_1 + a_2^2 \cdot A_2; \quad I_{Y_c} = I_{y_1} + I_{y_2} + b_1^2 \cdot A_1 + b_2^2 \cdot A_2,$$

где $a_1; a_2; b_1; b_2$ - расстояние от центра тяжести каждого сортамента до центральных осей.

Откладываем a по оси y , b по оси x

$$a_1 = y_c - y_1 = 5,21 - 7,5 = -2,29 \text{ см}, \quad a_2 = y_c - y_2 = 5,21 - 2,12 = 3,09 \text{ см},$$

$$b_1 = x_c - x_1 = 3,38 - 1 = 2,38 \text{ см}, \quad b_2 = x_c - x_2 = 3,38 - 6,58 = -3,2 \text{ см}.$$

Для прямоугольного сечения:

$$I_{x_1} = \frac{b h^3}{12} = \frac{30 \cdot (2)^3}{12} = 20 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{h b^3}{12} = \frac{2 \cdot (30)^3}{12} = 4500 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_c} = 20 + 444,45 + (-2,29)^2 \cdot 30 + (3,09)^2 \cdot 22,24 = 834,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{Y_c} = 4500 + 145,54 + (2,38)^2 \cdot 30 + (-3,2)^2 \cdot 22,24 = 5043,3 \text{ см}^4.$$

3. Определение центробежного момента инерции относительно центральных осей X_c и Y_c :

$$I_{X_c Y_c} = I_{x_1 y_1} + I_{x_2 y_2} + a_1 b_1 \cdot A_1 + a_2 b_2 \cdot A_2,$$

где $I_{x_1 y_1} = 0$, так как лист имеет горизонтальную ось симметрии, то собственные центральные оси листа являются главными:

$$I_{x_2 y_2} = -(I_x - I_u) \cdot \text{tg} \alpha = (I_u - I_v) \cdot \text{tg} \alpha = -(444,45 - 85,51) \cdot 0,409 = -146,81 \text{ см}^4;$$

$$I_{X_c Y_c} = 0 + (-146,81) + [2,29 \cdot (2,38) \cdot 30] + [(3,09) \cdot (-3,2) \cdot 22,24] = -530,32 \text{ см}^4.$$

4. Определение моментов сопротивления относительно центральных осей X_c и Y_c :

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{Y_{\max}}; \quad W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{X_{\max}},$$

где X_{\max}, Y_{\max} - расстояние от центра тяжести всей фигуры до наиболее удаленных точек по центральным осям:

$$X_{\max} = (h_1 + b_2) - x_c = 12,62 \text{ см};$$

$$Y_{\max} = b_1 - y_c = 15 - 5,21 = 9,79 \text{ см};$$

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{Y_{\max}} = \frac{834,1}{9,79} = 85,20 \text{ см}^3; \quad W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{X_{\max}} = \frac{5043,3}{12,62} = 399,6 \text{ см}^3.$$

5. Определение положения главных центральных осей (U, V) угол наклона (α)

$$tg2\alpha = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-530,32)}{834,1 - 5043,3} = 0,133.$$

$\alpha = -3,9^\circ$, угол откладывается по часовой стрелке.

Если угол имеет положительное значение, то откладывается против часовой стрелки.

6. Определение главных центральных моментов инерции относительно главных центральных осей:

$$I_{\max(U)} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2};$$

$$I_{\min(V)} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2};$$

$$I_{\max}^U = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{5043,3 + 834,1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(834,1 - 5043,3)^2 + 4 \cdot (-530,32)^2} = 5109,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min}^V = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{5043,3 + 834,1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(834,1 - 5043,3)^2 + 4 \cdot (-530,32)^2} = 768,3 \text{ см}^4.$$

7. Определение моментов сопротивления относительно главных центральных осей (U, V):

$$W_{\max}^U = \frac{I_U}{V_{\max}} = \frac{5109,1}{12,4} = 412 \text{ см}^3; \quad W_{\min}^V = \frac{I_V}{U_{\min}} = \frac{768,3}{9,2} = 83,5 \text{ см}^3.$$

8. Определение радиусов инерции (i) относительно центра тяжести:

$$i_{\max(U)} = \pm \sqrt{\frac{I_U}{\sum A}} = \pm \sqrt{\frac{5109,1}{52,24}} = \pm 9,9 \text{ см}; \quad i_{\min(V)} = \pm \sqrt{\frac{I_V}{\sum A}} = \pm \sqrt{\frac{768,3}{52,24}} = \pm 3,8 \text{ см}.$$

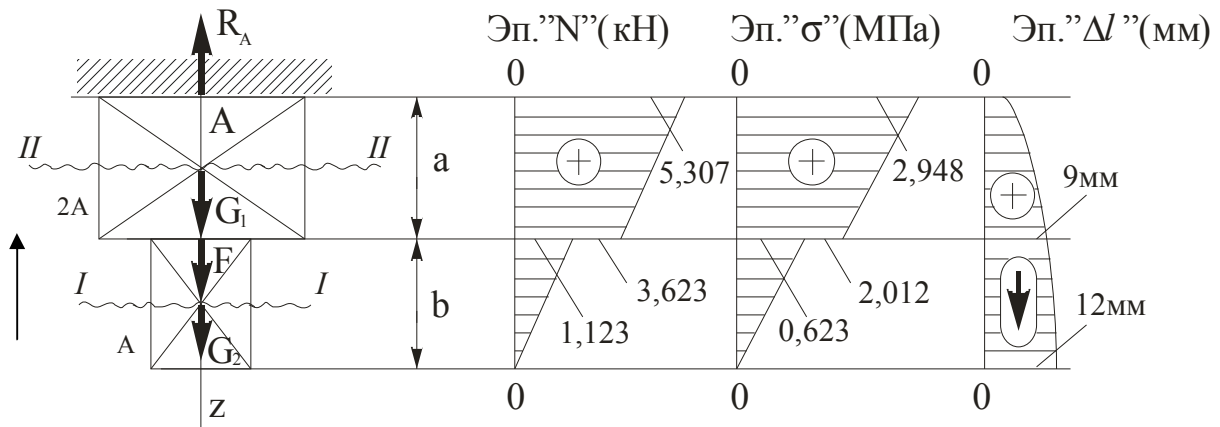
9. Проверка:

$$|I_{x_c}| + |I_{y_c}| = |I_U| + |I_V|;$$

$$834,1 + 5043,3 = 5109,1 + 768,3;$$

$$5877,4 = 5877,4 (\text{см}^4).$$

Пример решения задачи 2



Дано:

$A = 9 \text{ см}^2$; $a = 12 \text{ м}$; $b = 8 \text{ м}$; $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$; $F = 2,5 \text{ кН}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\sigma]^\ominus = 160 \text{ МПа}$.

Определить: ВСФ - N ; σ ; Δl и построить эпюры.

1. Для определения внутренних усилий разбиваем стержень на отдельные участки, начиная от свободного конца.

Применяется метод сечения на каждом участке, начиная снизу.

2. Определение реакции опоры R_A в жесткой заделке в т. А:

$$\sum F(z) = 0;$$

$$-R_A + G_1 + G_2 + F = 0;$$

$$R_A = G_1 + G_2 + F;$$

$$G_1 = \gamma \times 2A \times a = 78 \times 0,0018 \times 12 = 1,684 \text{ кН};$$

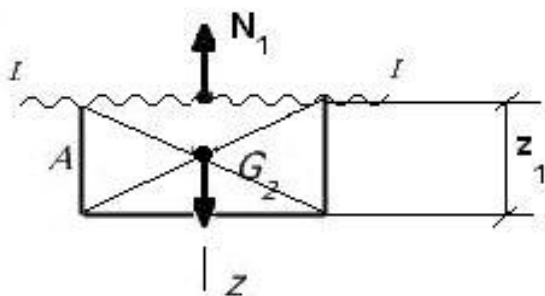
$$G_2 = \gamma \times A \times b = 78 \times 0,0009 \times 8 = 0,56 \text{ кН};$$

$$R_A = 1,684 + 0,56 + 2,5 = 4,74 \text{ кН}.$$

3. Определение продольной силы N в сечениях стержня методом сечения.

Проведем произвольное сечение на участке I-I.

Сечение I-I



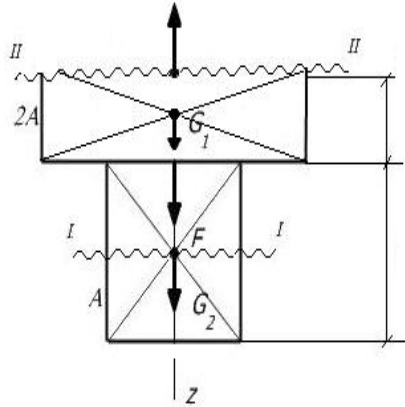
$$\sum F(z) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq z_1 \leq b$$

$$-N_1 + G_2 = 0$$

$$\begin{cases} N_1 = G_2 = \gamma \cdot A \cdot z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1 = G_2 = \gamma \cdot A \cdot b = 1,123 \text{ кН} \end{cases}$$

Сечение II-II



$$\sum F(z) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq z_2 \leq a$$

$$-N_2 + G_2 + F + G_1 = 0$$

$$\begin{cases} N_2' = G_2 + F + G_1 = \gamma \cdot A \cdot \vartheta + F + \gamma \cdot 2A \cdot z_2 = \\ = 1,123 + 2,5 + 0 = 3,623 \text{ кН} \\ N_2 = G_1 + F + G_2 = \gamma \cdot 2A \cdot a + F + \gamma \cdot A \cdot \vartheta = \\ = 4,74 \text{ кН} \end{cases}$$

Построим эпюру, показывающую, как меняется N по длине стержня. Для этого, проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольном масштабе значения продольных сил по оси ординат. Полученный график принято штриховать, при этом штриховка должна быть перпендикулярна оси стержня.

4. Определение нормальных напряжений σ , возникающих в сечениях стержня:

$$1 \left\{ \begin{aligned} \sigma_1' &= \frac{N_1'}{2A} = 0 \\ \sigma_1 &= \frac{N_1}{2A} = \frac{1,123}{0,0018} = 623,88 \text{ кН/м}^2 \approx 0,623 \text{ МПа}; \end{aligned} \right.$$

$$11 \left\{ \begin{aligned} \sigma_2' &= \frac{N_2'}{A} = \frac{3,623}{0,0009} = 4025,55 \text{ кН/м}^2 \approx 4,025 \text{ МПа} \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A} = \frac{4,74}{0,0009} = 5266,66 \text{ кН/м}^2 \approx 5,26 \text{ МПа}. \end{aligned} \right.$$

5. Определение удлинения (перемещения) Δl сечений после деформации:

$$\Delta l_B' = 0$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_B + \frac{N_2 \cdot a}{2AE} + \frac{\gamma \cdot a^2}{2E} = \Delta l_B + \frac{4,74 \cdot 12}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^8} + \frac{78 \cdot (12)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^8} = 1,86 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \frac{N_1 \cdot \vartheta}{A \cdot E} + \frac{\gamma \cdot \vartheta^2}{2E} = 1,86 \cdot 10^{-4} + \frac{1,12 \cdot 8}{9 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^8} + \frac{78 \cdot (8)^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^8} = 2,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Эпюру перемещений следует строить от зашеченного конца.

6. Условие прочности:

$$\sigma_{расч} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{расч} = \frac{N_2}{2A} = \frac{4,74}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ кН/м}^2 \approx 2,6 \text{ МПа};$$

$$2,6 \text{ МПа} \leq 160 \text{ МПа}.$$

Пример решения задачи 3

Для данной схемы плоского напряженного состояния в элементе детали необходимо определить:

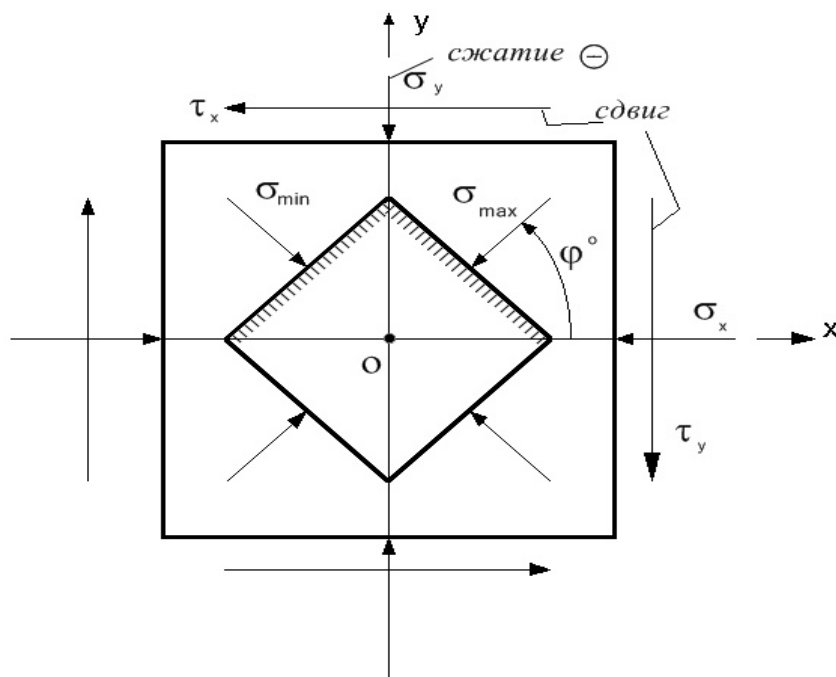
- 1) главные напряжения и положение главных площадок;
- 2) максимальное касательное напряжение;
- 3) относительные деформации;
- 4) удельную потенциальную энергию деформации.

Материал детали – сталь.

После определения положения главных площадок и главных напряжений их положения и направление действия нанести на заданную схему.

Дано:

$$\sigma_x = -70 \text{ МПа}, \sigma_y = -65 \text{ МПа}, \tau_x = -25 \text{ МПа}, \tau_y = +25 \text{ МПа}, E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \mu = 0,3.$$



1. Определение положения главных площадок и главных напряжений:

$$\operatorname{tg} 2\phi_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = +10;$$

$$2\phi_0 = 84,2^\circ \Rightarrow \phi_0 = 42,1^\circ;$$

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} = -67,5 \pm 25,1;$$

$$\sigma_{\max} = -42,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = -92,6 \text{ МПа}.$$

Максимальные касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = +25,1 \text{ МПа}.$$

2. Относительные деформации заданной площадки:

$$E_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) = -25,2 \cdot 10^{-5};$$

$$E_y = \frac{1}{E}(\sigma_y \nu \cdot \sigma_x) = -22,0 \cdot 10^{-5};$$

$$E_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] = +20,2 \cdot 10^{-5}.$$

3. Удельная потенциальная энергия деформации заданной площадки:

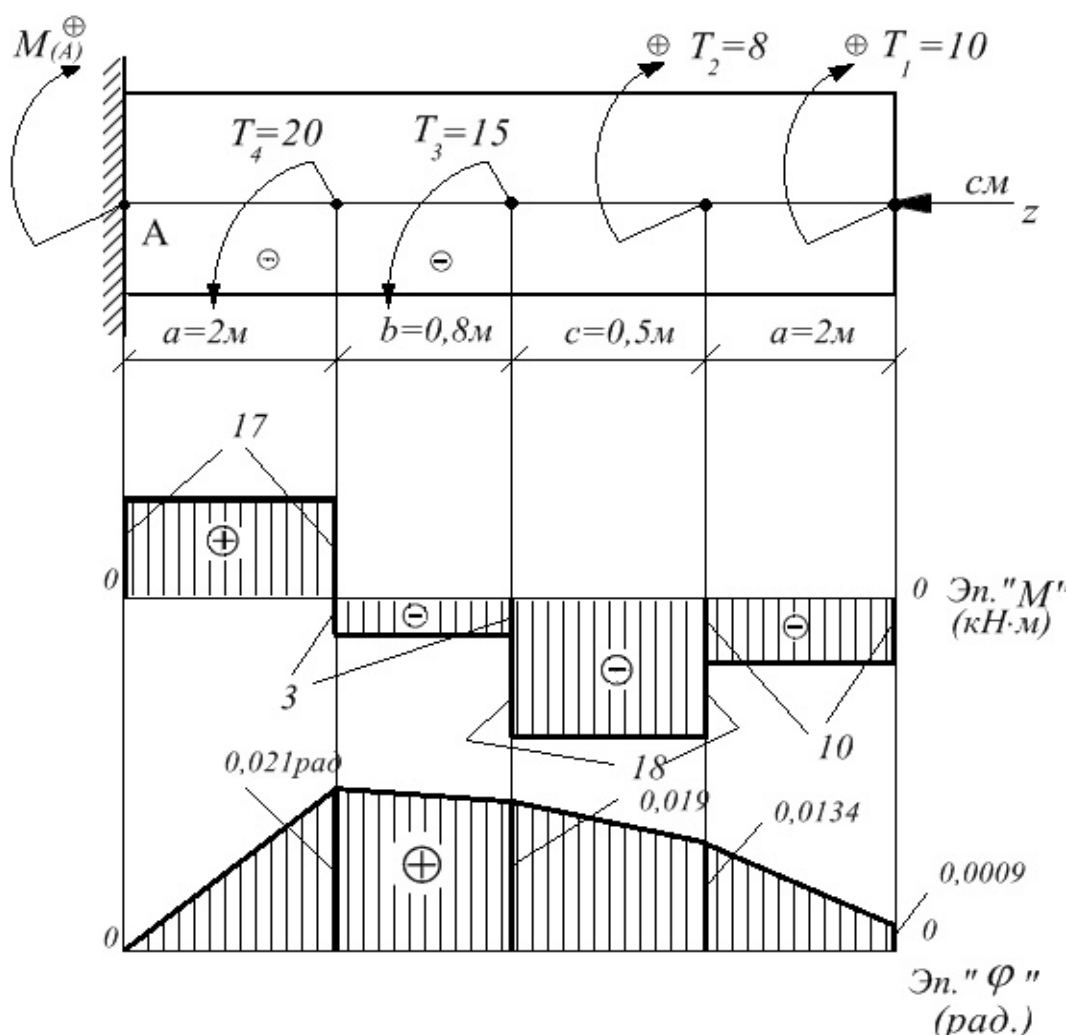
$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2 \cdot \nu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y) = 1598,7 \cdot 10^{-5}.$$

4. Проверка вычислений:

$$U = \frac{1}{2}(\sigma_x \cdot E_x + \sigma_y \cdot E_y + \sigma_z \cdot E_z) = 1597 \cdot 10^{-5};$$

$$1598,7 \cdot 10^{-5} \approx 1597 \cdot 10^{-5}.$$

Пример решения задачи 4



Дано: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\tau] = 70$ МПа.

Определить: ВСФ - $M; d; \varphi$ и построить эпюры.

1. Определение реактивного момента в жесткой заделке в т. А:

$$R_B = 0.$$

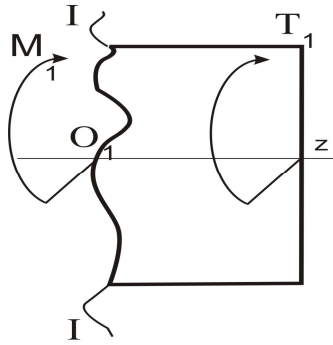
Направление реактивного момента в жесткой заделке выбирается произвольно (в нашем случае – по часовой стрелке). Далее в сечениях направление внутреннего крутящего момента ставится с тем знаком, с которым получили расчетный реактивный момент.

$$\sum M(B) = 0;$$

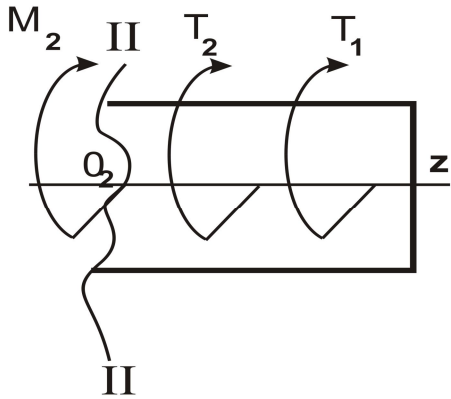
$$M_B - T_4 - T_3 + T_2 + T_1 = 0;$$

$$M_B = T_4 + T_3 - T_2 - T_1 = 20 + 15 - 8 - 10 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

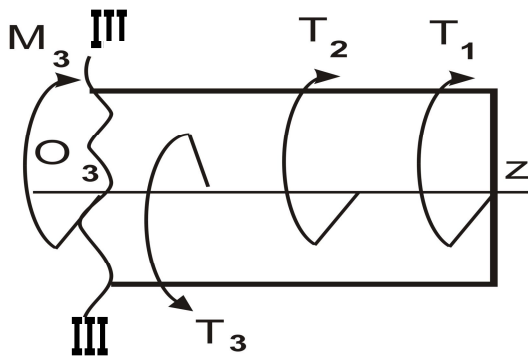
2. Определение внутренних крутящих моментов, возникающих в сечениях стержня:



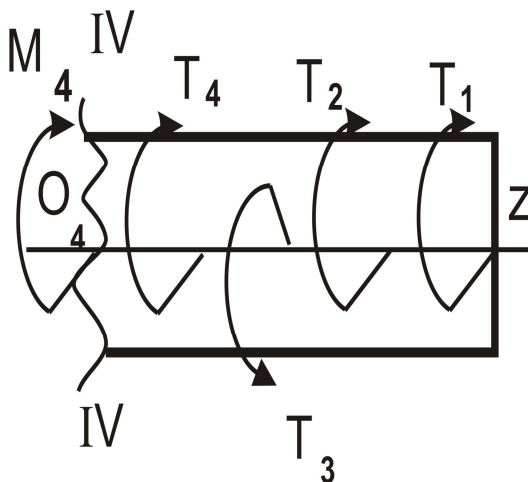
сечение I-I
 $\sum M(O_1) = 0$
 $T_1 + M_1 = 0$
 $M_1 = -T_1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}$



сечение II-II
 $\sum M(O_2) = 0$
 $M_2 + T_2 + T_1 = 0$
 $M_2 = -T_1 - T_2 = -8 - 10 = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}$



сечение III-III
 $\sum M(O_3) = 0$
 $M_3 - T_3 + T_2 + T_1 = 0$
 $M_3 = T_3 - T_2 - T_1 = 15 - 8 - 10 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}$



сечение IV-IV
 $\sum M(O_4) = 0$
 $M_4 - T_4 - T_3 + T_2 + T_1 = 0$
 $M_4 = T_4 + T_3 - T_2 - T_1 = 17 \text{ кН} \cdot \text{м}$

3. Определение диаметра вала из условия прочности при кручении:

$$\tau_{расч} = \frac{|M_{max}^{расч}|}{W_{\rho}} \leq [\tau] \leq 70 \text{ МПа};$$

$$W_{\rho} = \frac{|M_{max}^{расч}|}{[\tau]} = \frac{18}{70000} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$W_{\rho} = \frac{\Pi d^3}{16};$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16W_{\rho}}{\Pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 1,08 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 0,1 \text{ м}.$$

4. Определение углов закручивания, возникающих в сечениях стержня:

$$\varphi_i = \frac{M_i \cdot l}{G \cdot I_{\rho}},$$

где $G \cdot I_{\rho} = G \cdot \frac{\Pi d^4}{32} = \frac{8 \cdot 10^7 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^4}{32} = 0,785 \text{ МПа} \approx 785 \text{ кН/м}^2$;

$$\phi_B = 0.$$

$$\phi_1 = \phi_B + \frac{M_4 \cdot a}{1600} = \frac{17 \cdot 2}{785} = 0,04 \text{ рад};$$

$$\phi_2 = \phi_1 + \frac{M_3 \cdot b}{785} = 0,04 + \frac{(-3) \cdot 0,8}{785} = 0,036 \text{ рад};$$

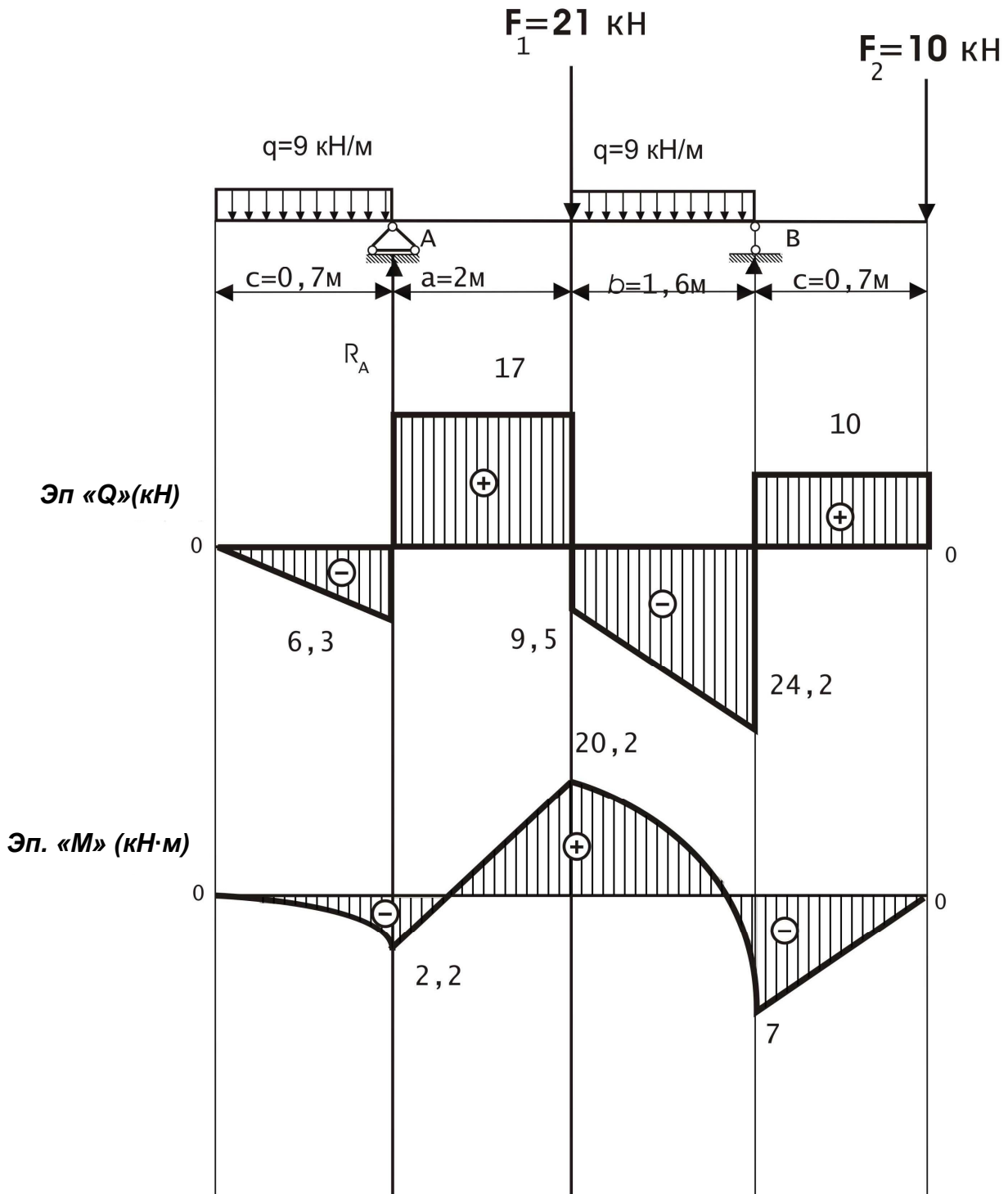
$$\phi_3 = \phi_2 + \frac{M_2 \cdot c}{785} = 0,036 + \frac{(-18) \cdot 0,5}{785} = 0,02 \text{ рад};$$

$$\phi_4 = \phi_3 + \frac{M_1 \cdot a}{785} = 0,02 + \frac{(-10) \cdot 2}{785} = -0,005 \text{ рад}.$$

5. Определение относительного угла закручивания, возникающего на валу:

$$\varphi_{отн} = |\varphi_{max}| \cdot \frac{180^{\circ}}{\Pi} = 0,04 \cdot \frac{180}{3,14} = 2,3^{\circ}.$$

Пример решения задачи 5



Определить и построить эпюры крутящих моментов $M_{кр}$, поперечных сил Q , подобрать сечение двутавра и балку прямоугольного сечения, используя условие прочности.

1. Определение опорных реакций:

$$\sum M(A) = 0;$$

$$-q \cdot c \left(\frac{c}{2} \right) + F_1 \cdot a + q \cdot b \left(\frac{b}{2} + a \right) - R_B \cdot (a+b) + F_2 \cdot (a+b+c) = 0;$$

$$R_B = \frac{-q \cdot c \left(\frac{c}{2} \right) + F_1 \cdot a + q \cdot b \left(\frac{b}{2} + a \right) + F_2 \cdot (a+b+c)}{(a+d)} = 0;$$

$$R_B = 34,19 \text{ кН};$$

$$\sum M(B) = 0;$$

$$F_2 \cdot c - q \cdot b \left(\frac{b}{2} \right) - F_1 \cdot b + R_A \cdot (a+b) - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + a+b \right) = 0;$$

$$R_A = \frac{F_1 \cdot b + q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} \right) - F_2 \cdot c + q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + a+b \right)}{(a+b)} = 0;$$

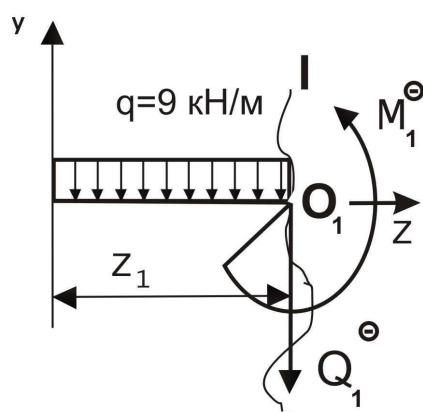
$$R_A = 17,5 \text{ кН}.$$

Проверка

$$\sum F(y) = \sum R;$$

$$-q \cdot c + R_A - F_1 - q \cdot b + R_B - F_2 = 0.$$

2. Определение внутренних силовых факторов методом сечений:



Сечение I-I

$$0 \leq z_1 \leq c$$

$$-Q_1 - q \cdot z_1 = 0$$

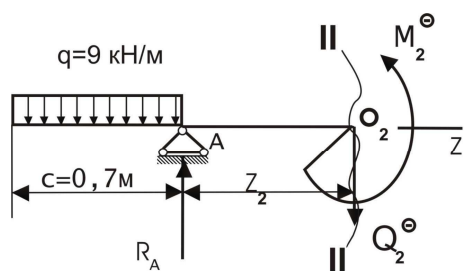
$$\begin{cases} -Q_1' - q \cdot c = 0 \\ -Q_1 - q \cdot c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1' = -q \cdot z_1 = 0 \\ Q_1 = -q \cdot c = -6,3 \text{ кН} \end{cases}$$

$$\sum M(O_1) = 0$$

$$-M_1 - q \cdot z_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} M_1 = -q \cdot z_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = -q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} \right) = -2,2 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{cases}$$



Сечение II-II

$$0 \leq z_2 \leq a$$

$$\sum F(y) = 0$$

$$-Q_2 + R_A - q \cdot c = 0$$

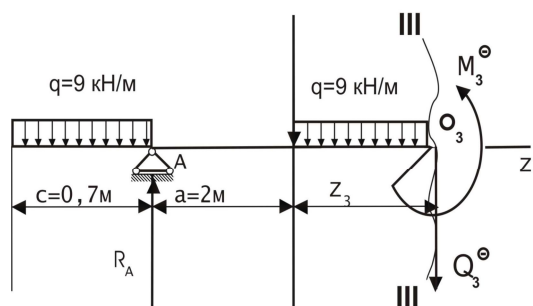
$$Q_2 = R_A - q \cdot c = 17,5 - 6,3 = 11,2 \text{ кН}$$

$$\sum M(O_2) = 0$$

$$-M + R_A \cdot z_2 - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + z_2 \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_2 &= R_A \cdot z_2 - q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + z_2 \right) = -2,3 \text{ кНм} \\ M_2 &= R_A \cdot a - q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + a \right) = 20,2 \text{ кНм} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_2 &= R_A \cdot a - q \cdot c \cdot \left(\frac{c}{2} + a \right) = 20,2 \text{ кНм} \end{aligned} \right.$$



Сечение III - III

$$0 \leq z_3 \leq b$$

$$\sum F(y) = 0$$

$$-Q_3 - q \cdot c + R_A - F_1 - q \cdot z_3 = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_3 &= R_A - q \cdot c - F_1 - q \cdot z_3 = -9,8 \text{ кН} \\ Q_3 &= R_A - q \cdot c - F_1 - q \cdot b = -24,2 \text{ кН} \end{aligned} \right.$$

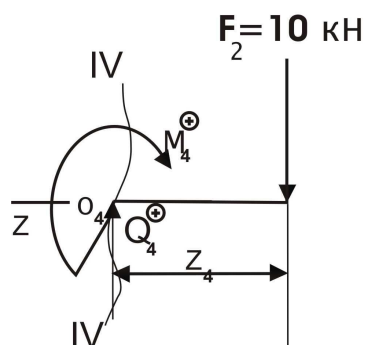
$$\left\{ \begin{aligned} Q_3 &= R_A - q \cdot c - F_1 - q \cdot b = -24,2 \text{ кН} \end{aligned} \right.$$

$$\sum M(O_3) = 0$$

$$-M_3 - q \cdot z_3 \left(\frac{z_3}{2} \right) - F_1 \cdot z_3 + R_A (a + z_3) - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + a + z_3 \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_3 &= -q \cdot z_3 \left(\frac{z_3}{2} \right) - F_1 \cdot z_3 + R_A (a + z_3) - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + a + z_3 \right) = 20,2 \text{ кНм} \\ M_3 &= -q \cdot b \left(\frac{b}{2} \right) - F_1 \cdot b + R_A (a + b) - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + a + b \right) = -7 \text{ кНм} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_3 &= -q \cdot b \left(\frac{b}{2} \right) - F_1 \cdot b + R_A (a + b) - q \cdot c \left(\frac{c}{2} + a + b \right) = -7 \text{ кНм} \end{aligned} \right.$$



Сечение IV-IV

$$0 \leq z_4 \leq c$$

$$\sum F(y) = 0$$

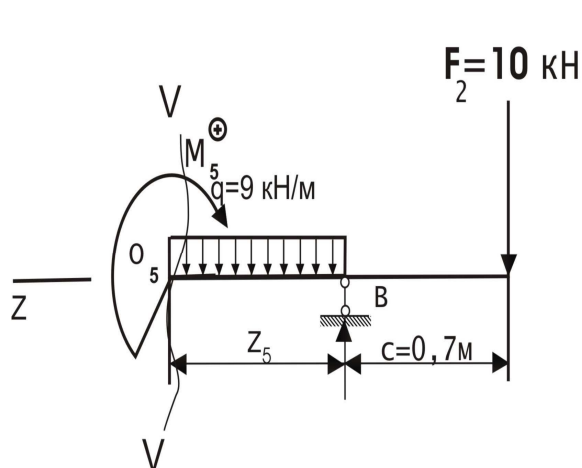
$$Q_4 - F_2 = 0$$

$$Q_4 = F_2 = 10 \text{ кН}$$

$$\sum M(O_4) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_4 &= -F_2 \cdot z_4 = 0 \\ M_4 &= -F_2 \cdot c = -7 \text{ кН} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} M_4 &= -F_2 \cdot c = -7 \text{ кН} \end{aligned} \right.$$



Сечение V-V

$$0 \leq z_5 \leq b$$

$$Q_5 - q \cdot z_5 - F_2 + R_B = 0$$

$$\begin{cases} Q_5 = q \cdot z_5 + F_2 - R_B = -24,19 \text{ кН} \\ Q_5 = q \cdot b + F_2 - R_B = -9,79 \text{ кН} \end{cases}$$

$$\sum M(O_4) = 0$$

$$\sum M(O_4) = 0$$

$$M_5 + q \cdot z_5 \left(\frac{z_5}{2} \right) - R_B \cdot z_5 + F_2 \cdot (z_5 + c) = 0$$

$$\begin{cases} M_5 = -F_2 \cdot c = -7 \text{ кНм} \\ M_5 = -q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} \right) + R_B \cdot b - F_2 \cdot (b + c) = 20,18 \text{ кНм} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_5 = -F_2 \cdot c = -7 \text{ кНм} \\ M_5 = -q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} \right) + R_B \cdot b - F_2 \cdot (b + c) = 20,18 \text{ кНм} \end{cases}$$

3. Подбор сечения двутавровой балки:

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{W_x} \leq [\sigma], \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

$$W_x = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{20,2}{160000} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 0,000126 \text{ м}^3 = 126 \text{ см}^3.$$

Номер двутавра – № 16.

$$W_x = 109 \text{ см}^3; \quad h = 160 \text{ мм}; \quad b = 81 \text{ мм}; \quad S = 5,0 \text{ мм}; \quad t = 7/8 \text{ мм};$$

$$I_x = 873 \text{ см}^4; \quad S_x = 62,3 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{W_x} = \frac{20,2}{109 \cdot 10^{-6}} = 185 \text{ МПа};$$

$$\delta = \left| \frac{185 - 160}{185} \right| \cdot 100 \% = 13,65 \%;$$

$$\tau_{\text{max}(1)} = \frac{|Q_{\text{max}}| \cdot S_x}{I_x \cdot S} = \frac{24,2 \cdot 10^3 \cdot 62,3 \cdot 10^{-6}}{873 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 34 \text{ МПа};$$

$$\tau_{(2)} = \frac{|Q_{\text{max}}| \cdot S_x}{I_x \cdot S};$$

$$S_x = b \cdot t \cdot \frac{h}{2} = 0,00005 \text{ м}^3;$$

$$\tau_2 = 27 \text{ МПа}.$$

$$\tau_3 = \frac{|Q_{\text{max}}| \cdot S_x}{I_x \cdot b} = 17 \text{ МПа}.$$

4. Подбор сечения прямоугольной балки:

$$\sigma_{\text{расч}} = \frac{|M_{\text{max}}|}{W_x} \leq [\sigma] \quad [\sigma] = 10 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{20,2}{160000} = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 0,000126 \text{ м}^3 = 126 \text{ см}^3.$$

По условию задачи $\frac{h}{b} = \frac{4}{1} \Rightarrow h = 4b$.

Момент сопротивления для прямоугольника вычисляем по формуле

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{16b^3}{6}, \text{ тогда}$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_x}{16}} = 0,12 \text{ м}, \text{ тогда } h = 0,48 \text{ м}.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Общие указания к выполнению расчетно-графических работ	3
1. Геометрические характеристики плоских сечений	3
2. Растяжение прямых стержней	8
3. Плоское напряженное состояние в точке	11
4. Кручение стержней круглого сечения	14
5. Изгиб. Статически определимые балки	17
Приложение	24
Образец оформления титульного листа	24
Пример решения задачи 1	25
Пример решения задачи 2	28
Пример решения задачи 3	30
Пример решения задачи 4	32
Пример решения задачи 5	35