



FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Problema de dous corpos con masa variable

Hernán Cerviño Asorey

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

O Problema de dous corpos con masa variable

Hernán Cerviño Asorey

Setembro, 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Astronomía e Astrofísica.
Título: O Problema de dous corpos con masa variable.
Breve descrición do contido
O Problema de dous corpos, base da Mecánica Celeste, é integrable. De entre as distintas perturbacións ás que pode ser sometido, está o caso no que as masas varían, como sucede coas estrelas. Neste Traballo Fin de Grao estúdase este problema, describindo os casos particulares integrables así como aqueles outros nos que, considerando unha perda lenta de masa, pódense tratar como problemas keplerianos perturbados.
Recomendacións
Ter cursado a materia de Fundamentos de Astronomía.
Outras observacións

Índice xeral

Agradecementos	VIII
Resumo	IX
Introdución	XIII
1. O Problema de dous corpos (caso non perturbado).	1
1.1. Ecuación do movemento relativo.	3
1.2. Comprobación da segunda lei de Kepler.	5
1.3. Comprobación da primeira e terceira lei de Kepler.	6
1.4. Integral da enerxía e velocidade orbital.	8
1.5. Lei horaria do movemento kepleriano elíptico.	9
1.6. Elementos orbitais.	11
1.7. Formulación Hamiltoniana do Problema de dous corpos.	12
2. O Problema de dous corpos con masa variable.	15
2.1. Preliminares.	15
2.2. Formulación do problema e integrais primeiras.	16
2.3. A achega de H. Gylden.	18
2.4. As solucións de F. Mestschersky.	20
2.5. Xeneralización das solucións de Mestschersky.	27
2.6. Función de Hamilton do Problema de dous corpos con...	28
2.7. As ecuacións de Lagrange.	30
2.8. O tratamento do problema por J. D. Hadjidemetriou.	30
3. Algúns casos particulares de variación de masa.	37
3.1. Efecto periastro.	37
3.2. Exección de masa.	40
3.2.1. Execcións aleatoriamente distribuídas ao longo do período orbital.	43

3.2.2. Exceccións máis frecuentes na zona do periastro.	43
3.3. Intercambio de masa.	45
3.3.1. Ecuación da órbita relativa.	45
3.3.2. Elementos orbitais.	47
4. Programación dalgúns casos concretos do Problema de...	49
4.1. Casos particulares na xeneralización das solucións de Mestschersky.	49
4.2. Exemplos concretos do problema segundo J. D. Hadjidemetriou.	53
4.3. Casos prácticos de perda de masa por efecto periastro.	60
4.4. Caso real de excepción de masa.	65
Conclusións	69
Apéndice	71
Bibliografía	89

Agradecementos

Gustaríame dedicar o presente traballo á miña familia, que sempre me apoiou non só ao longo da miña etapa universitaria senón en todos os ámbitos e momentos. Tamén lembrarme de todas as persoas coas que tiveren a sorte de cruzarme nestes catro anos de andaina universitaria e que sempre ma farán recordar como marabillosa.

Deixar tamén patente o meu agradecemento ao profesor José Ángel Docobo, o meu titor, de quen sempre obtiven a dirección e a axuda necesaria para a elaborar este Traballo de Fin de Grao co nivel de calidade esixido e de quen procurei aprender o máximo que puiden. A mosar de igual xeito o miña gratitude pola súa dispoñibilidade e atención absoluta durante os meses de preparación deste texto.

Resumo

No presente traballo tratamos un dous problemas máis representativos e relevantes da Mecánica Celeste: o Problema de dous corpos con masa variable. O obxectivo do texto é dar unha visión global deste tema así como particularizalo en diferentes escenarios de perda de masa. No desenvolvemento do mesmo faise un percorrido por esta liña de investigación, con implicacións tanto matemáticas como físicas, comezando pola formulación do mesmo no caso non perturbado, sentando así os conceptos básicos e necesarios para o resto do texto. Continuaremos co que constitúe a cerna deste traballo, a explicación dos fundamentos teóricos da perda de masa e a súa influencia na dinámica dos corpos involucrados, contemplando diferentes leis e situacións que se dan na física estelar. Posteriormente trataremos casos particulares integrables e obteremos os resultados numéricos dos mesmos para algunhas situacións concretas. Finalmente inclúense os programas realizados polo autor do Traballo de Fin de Grao que proporcionan a integración dos diferentes casos estudados.

Abstract

In this work, we deal with one of the most representative and relevant issues of Celestial Mechanics which is the Two-body problem with variable mass. The objective of the text is to present a global vision of this topic as well as to focus on scenarios of mass loss. We review this line of research along with the mathematical implications as well as those of physics, beginning with the formulation in the case of no perturbation. In that way, we establish the basic and necessary concepts involved in the rest of the text. We continue with what constitutes the nucleus of this contribution including the explanation of the fundamental theories of mass loss and their influence on the dynamics of the involved bodies, considering different laws and situations related to physics and stellar dynamics. Finally, we treat particular integrable cases and we obtain the numerical results for concrete situations. We also include the programs carried out by the author of this TFG that provide the integration of the different cases.

Introdución

O estudo do Problema de dous corpos remóntase a finais do século dezasete, cando Isaac Newton ideou a súa teoría sobre a gravitación universal subido aos ombreiros de Johannes Kepler, que xa estudara a comezos do mesmo século o movemento dos planetas derredor do Sol. Sentáronse entón as bases nas que astrónomos e científicos en xeral se apoiaron para desenvolver este problema e convertelo no piar da Mecánica Celeste. Dous séculos despois, a comunidade científica interesada neste tema comezou a contemplar o caso que nos atinxe neste traballo: a variación de masa. Dufour, Oppolzer, Gyldén, Mestschersky, Hadjidemetriou e outros persoeiros que iremos citando ao longo do texto, foron os pioneiros no estudo teórico e experimental deste Problema de dous corpos con masa variable. Porque, en efecto, trátase dunha investigación que pode abordarse tanto desde o punto de vista matemático como físico. No primeiro caso, traballamos na procura de leis de variación de masa que dean lugar a casos integrables. No segundo caso, desde o punto de vista astrofísico, traballamos modelizando escenarios de perda lenta de masa que poidan ser aplicables a casos reais como pode ser o caso de estrelas dobres.

Entrando en materia, esta cuestión consiste no estudo do movemento de dous corpos (en principio masas puntuais, pero esta condición foi estendida por Newton a esferas sólidas homoxéneas) que se atraen de acordo coa Lei de Gravitación Universal pero que ao mesmo tempo conforman un sistema con masa variable. Un sistema binario está formado por dúas estrelas que orbitan arredor do seu centro de masas pola acción da forza gravitacional; nós estudaremos de que xeito evolucionan estes sistemas cando están sometidos ao efecto da perda de masa. No cosmos existen multitude de situacións baixo estas características e cuxo comportamento pode ser predito como consecuencia do estudo desta materia. De feito, un exemplo tan próximo como o sistema Terra-Lúa, motivou a súa investigación e desenvolvemento a finais do século dezanove cando Dufour relacionou a variación secular da aceleración da Lúa co aumento da masa da Terra. Abríase así un camiño que chega ata os nosos días e que tentaremos percorrer ao longo deste texto. de feito, hai unhas décadas, o profesor José Ángel Docobo interesouse por esta liña de investigación, propoñéndoa como tema de dúas teses de doutoramento (C. Prieto e M. Andrade), ao tempo que publicou

varios artigos con doutorandos e colaboradores.

Este Traballo de Fin de Grao está estruturado en catro capítulos do seguinte xeito:

Tras esta introdución, no primeiro capítulo estudaremos o clásico Problema de dous corpos, isto é, non contemplaremos de momento a variación de masa, senón que a supoñeremos constante. Este estudo levarémolo a cabo desde a perspectiva newtoniana do problema así como aportando a formulación hamiltoniana do mesmo. Isto proporcionaranos unha base sólida para poder desenvolver o resto do texto. Introducimos tamén aquí os elementos que definen unha órbita.

Será no segundo capítulo cando tratemos a variación de masa, facendo un percorrido histórico desde os primeiros traballos realizados por Gyldén e Mestschersky ata outros autores do século vinte, incluíndo ao propio titor deste TFG. Neste capítulo estudaremos como os distintos investigadores chegan ás ecuacións do movemento deste problema tanto en formulación newtoniana como hamiltoniana. Unha vez exposta a achega de Gyldén, faremos especial énfase na solución exacta de Mestschersky e na extensión desta deducida por Docobo, quen ao mesmo tempo aportou novos casos integrables. Obteremos as ecuacións de Lagrange e comentaremos polo miúdo o traballo de Hadjidemetriou, así como a solución analítica de Prieto-Docobo tomando a lei de perda de masa de Eddington-Jeans.

No terceiro capítulo veremos algúns casos particulares de variación de masa, estudos que apareceron máis adiante no tempo e son froito da observación do comportamento dalgúns sistemas que non obedecían exactamente ao explicado ata agora. Recuperaremos as leis de perda de masa introducidas por Andrade e Docobo que dan lugar ao chamado *efecto periastro*, de tal xeito que se admite que a masa non só é función do tempo senón tamén da distancia entre os dous corpos. Merece especial comentario aquela lei que produce aumento secular da excentricidade dado que pode explicar o observado nalgúns sistemas binarios pechados. Así mesmo, neste capítulo expóñense cuestións tan relevantes como a perda de masa por excepcións espontáneas e o intercambio de masa entre as compoñentes de sistemas binarios con compoñentes moi próximas. Estes dous últimos temas xa estudados por Hadjidemetriou.

Finalmente, no cuarto e derradeiro capítulo veremos os resultados numéricos e as gráficas correspondentes dalgúns casos abordados ao longo da memoria e derivados da programación en *Python*. Amosaremos como evolucionan os sistemas binarios segundo a lei de variación de masa que os rexe e segundo as condicións iniciais ás que están sometidos. Tamén incluiremos no apéndice os programas elaborados polo autor deste texto e que deron lugar a ditos resultados.

Capítulo 1

O Problema de dous corpos (caso non perturbado).

Neste primeiro capítulo introduciremos o Problema de dous corpos, base da Mecánica Celeste clásica. Consideraremos o caso non perturbado do mesmo, dentro dunha formulación máis ampla desde o punto de vista da teoría de perturbacións. Estudaremos o movemento relativo de dous corpos suxeitos, de momento, soamente á súa forza gravitacional e comprobaremos que, baixo devandita hipótese, se verifican as leis de Kepler.

Tamén trataremos neste capítulo dous conceptos importantes no estudo do Problema de dous corpos, estes son a Integral da enerxía e a Lei horaria do movemento kepleriano elíptico. Remataremos esta primeira parte do texto definindo os denominados elementos orbitais e dando a formulación hamiltoniana do problema que nos atangue.

Para a confección deste capítulo fíxose uso tanto dos apuntamentos de clase de Fundamentos de Astronomía (impartida esta parte polo profesor José Ángel Docobo), como dos textos [1], [2], [9], [11], [13], [34] e [39]. Comecemos por coñecer as orixes históricas deste problema para poder entender axeitadamente o seu desenvolvemento.

I. Newton, nado en Inglaterra o día de Nadal de 1642 segundo o calendario xuliano, pasou a historia polos seus grandiosos descubrimentos, cuxos alicerces atópanse no traballo de T. Brahe e J. Kepler, dous científicos continentais dos que falaremos a continuación.

Tempo antes, fora Aristóteles quen introduciu a idea de que o movemento circular era o único perfecto e natural. Desde ese tempo ata a época de Brahe e Kepler, estaba popularmente asumido que os planetas e demais corpos celestes non fuxían deste movemento circular ou de combinacións do mesmo nun sistema xeocéntrico. Foi N. Copérnico, no século dezaseis, quen estableceu definitivamente o sistema heliocéntrico, mantendo as órbitas circulares dos planetas. Mais grazas aos traballos de Brahe, Kepler puido desenvolver o seu

2 CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE DOUS CORPOS (CASO NON PERTURBADO).

estudo acerca da órbita de Marte e tras varios anos de traballo, concluíu que a órbita do planeta vermello quedaba ben axustada usando unha elipse.



(a) <https://astrojem.com>

(b) <https://www.nationalgeographic.com>

Figura 1.1: Johannes Kepler e Isaac Newton

Este descubrimento fixo que en 1609, Kepler publicase a súa primeira e segunda lei sobre o movemento planetario. A terceira lei non se faría pública ata dez anos despois. Estes tres enunciados marcaron un antes e un despois na historia da ciencia, a modo de breve recordatorio enunciámos a continuación as tres leis:

- **Primeira lei:** A órbita de cada planeta é unha elipse, co Sol nun dos focos.
- **Segunda lei:** A liña que une un planeta co Sol barre áreas iguais en tempos iguais.
- **Terceira lei:** O cadrado do período orbital dun planeta é proporcional ao cubo da súa distancia media ao Sol.

Estes tres enunciados son de carácter empírico, foi Newton quen definitivamente deu unha explicación de carácter formal deste problema. Cando o xenio inglés era só un estudante, concibiu a Lei de Gravitación Universal así como moitas outras teorías matemáticas, pero non foi ata anos despois, en 1687, cando publicase a súa obra *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, coñecida popularmente como *Principia*. Esta sitúa hoxe a Newton como unha das mentes máis brillantes da historia da humanidade. Tamén en dita obra se inclúen os tres postulados da Mecánica Clásica:

1º: Todo corpo permanece en estado de repouso ou movemento rectilíneo uniforme de non ser afectado por unha forza externa.

2º: Se se aplica unha determinada forza sobre un corpo, este desprázase de tal xeito que a variación da súa cantidade de movemento coincide con dita forza.

3º: Se un corpo exerce unha forza sobre outro, este segundo actúa tamén sobre o primeiro cunha forza que é igual á primeira en módulo e dirección, pero de sentido contrario.

Realizada esta breve introdución histórica, pasemos a estudar os fundamentos teóricos do Problema de dous corpos.

1.1. Ecuación do movemento relativo.

Nesta sección deduciremos a ecuación que dá conta do movemento dun corpo derredor doutro sobre os cales actúa a forza de gravitación universal. Asumimos que ambos corpos verifican os tres postulados da Mecánica Clásica, considerando de entrada ambos corpos como masas puntuais. A Figura 1.2 ilustra as condicións baixo as cales formulamos este problema.

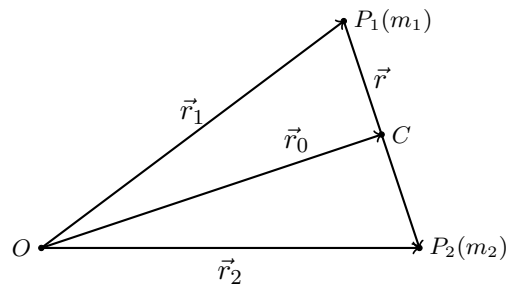


Figura 1.2: Problema de dous corpos.

Sexan ambos corpos P_1 e P_2 con masas m_1 e m_2 respectivamente. Denotemos por \vec{r}_1 e \vec{r}_2 os vectores posición de cada corpo nun instante determinado e respecto a un sistema de referencia inercial. Nestas condicións, definimos o vector posición do corpo P_2 respecto a P_1 como

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Denotemos por C o centro de masas do sistema e sexa \vec{r}_0 o seu vector posición. Obteñamos a súa expresión en función de \vec{r}_1 e \vec{r}_2 .

4 CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE DOUS CORPOS (CASO NON PERTURBADO).

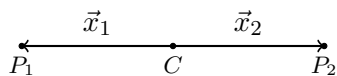


Figura 1.3: Vectores de posición respecto ao centro de masas.

Definimos por \vec{x}_1 e \vec{x}_2 os vectores posición de P_1 e P_2 respecto a C tal como amosa a Figura 1.3. Temos entón que

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \vec{r}_1 - \vec{x}_1, \\ \vec{r}_0 &= \vec{r}_2 - \vec{x}_2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Multiplicando as igualdades de 1.1 respectivamente por m_1 e m_2 , obtemos

$$\begin{aligned}m_1\vec{r}_0 &= m_1\vec{r}_1 - m_1\vec{x}_1, \\ m_2\vec{r}_0 &= m_2\vec{r}_2 - m_2\vec{x}_2.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Pola definición de centro de masas do sistema, temos que $m_1\vec{x}_1 = -m_2\vec{x}_2$. Tendo isto en conta e sumando as ecuacións de 1.2, resulta

$$\vec{r}_0(m_1 + m_2) = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2,$$

polo tanto

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Introducindo agora a Lei de Gravitación Universal, temos que

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}, \\ \vec{F}_{21} &= m_1\ddot{\vec{r}}_1 = +G\frac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Se sumamos ambas igualdades, resulta

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{0}.$$

Integrando agora esta expresión chegamos a

$$m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2 = \vec{A},$$

e integrando de novo

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = \vec{A}t + \vec{B},$$

de xeito que

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{A}t + \vec{B}}{m_1 + m_2} = \vec{a}t + \vec{b}.\tag{1.4}$$

Nesta expresión, \vec{a} e \vec{b} son vectores constantes determinados polas condicións iniciais do problema. A relación 1.4 garántenos que o centro de masas do sistema C móvese con velocidade uniforme en liña recta, é dicir, verificase o principio de conservación do momento lineal.

Dividindo agora a primeira expresión de 1.3 por m_2 e a segunda por m_1 , chegamos a

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_2 &= -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r}, \\ \ddot{\vec{r}}_1 &= -G \frac{m_2}{r^3} \vec{r}.\end{aligned}$$

Polo tanto

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r}.$$

Sexa $\mu = G(m_1 + m_2)$, temos entón que

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (1.5)$$

Esta expresión vectorial coñécese como a *ecuación do movemento relativo*. Equivale a tres ecuacións diferenciais de segunda orde, polo que necesitamos de seis constantes de integración para acadar a súa solución completa. A procura e interpretación destas constantes constitúen a cerna do Problema de dous corpos. O movemento definido por 1.5 denominámolo kepleriano xa que, como imos ver, verifica as leis de Kepler, que se deducen da súa integración. Pasemos agora a comprobalo.

1.2. Comprobación da segunda lei de Kepler.

Neste apartado veremos que, en efecto, os corpos sometidos á Lei de Gravitación Universal verifican a segunda lei de Kepler. Esta, formulada ao comezo deste capítulo, equivale a dicir que a velocidade areolar permanece constante.

Consideremos

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^3} = \vec{0}.$$

Integrando a anterior ecuación obtemos

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{k},$$

onde \vec{k} é un vector constante.

A velocidade areolar vén definida por

$$\vec{c} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}), \quad (1.6)$$

6 CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE DOUS CORPOS (CASO NON PERTURBADO).

polo que resulta

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{k},$$

logo a velocidade areolar é, en efecto, constante. Ademais, podemos deducir que \vec{r} e \vec{c} son ortogonais pois

$$\vec{r} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 0,$$

xa que \vec{r} é ortogonal a $\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$. Isto significa que a órbita que describen os corpos neste problema é plana.

1.3. Comprobación da primeira e terceira lei de Kepler.

Partindo agora das ecuacións 1.5 e 1.6 temos

$$\ddot{\vec{r}} \times 2\vec{c} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = -\frac{\mu}{r^3} [(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{r})\dot{\vec{r}}]. \quad (1.7)$$

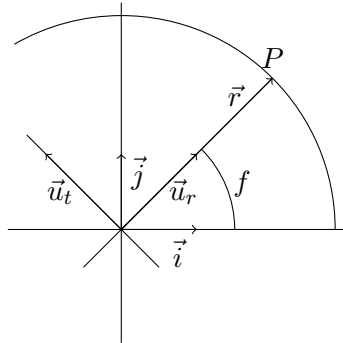


Figura 1.4: Compoñentes do vector de posición.

Abramos agora unha breve paréntese. O vector de posición dun punto P descomponse, tal como vemos na Figura 1.4, en dúas compoñentes: radial e transversal. Deste xeito podemos escribir

$$\begin{aligned} \cdot \vec{u}_r &= \cos f \cdot \vec{i} + \sin f \cdot \vec{j}, \\ \cdot \vec{u}_t &= -\sin f \cdot \vec{i} + \cos f \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Tras realizar as operacións pertinentes, obtemos

$$\begin{aligned} \cdot \vec{r} &= r\vec{u}_r + 0 \cdot \vec{u}_t = r\vec{u}_r, \\ \cdot \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{f}\vec{u}_t, \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - f\dot{f}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{f} + r\ddot{f}) \vec{u}_t.$$

Posto que se derivamos $\vec{r}^2 = |\vec{r}|^2 = r^2$ obtemos $2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 2r\dot{r}$; resulta que $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$, onde $r = |\vec{r}|$ e \dot{r} é a compoñente radial de $\dot{\vec{r}}$. Tendo isto en conta, a igualdade 1.7 continúa do seguinte xeito

$$\ddot{\vec{r}} \times 2\vec{c} = -\frac{\mu}{r^3} [(r\dot{r})\vec{r} - r^2\dot{\vec{r}}] = \frac{\mu}{r^2} [\dot{r}\vec{r} - r\dot{\vec{r}}] = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \mu \vec{u}_r. \quad (1.8)$$

Integrando a expresión obtida en 1.8, obtemos

$$\dot{\vec{r}} \times 2\vec{c} = \mu \left[\frac{\vec{r}}{r} + \vec{\varepsilon} \right], \quad (1.9)$$

con $\vec{\varepsilon}$ constante. Multiplicando 1.9 por \vec{r} resulta

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times 2\vec{c}) = \mu \vec{r} \cdot \left[\frac{\vec{r}}{r} + \vec{\varepsilon} \right] = \mu \left[\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{\varepsilon} \right] = \mu [r + r|\vec{\varepsilon}| \cos \varphi] = r\mu [1 + \varepsilon \cos \varphi], \quad (1.10)$$

con φ ángulo que forman $\vec{\varepsilon}$ e \vec{r} . Facendo a mesma operación, obtemos tamén

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times 2\vec{c}) = 2\vec{c} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = 2\vec{c} \cdot 2\vec{c} = 4c^2. \quad (1.11)$$

Polo tanto, de combinar 1.10 e 1.11 resulta

$$r = \frac{4c^2/\mu}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos f}, \quad (1.12)$$

que constitúe a ecuación dunha cónica de parámetro p e excentricidade e . En consecuencia, e é o módulo do vector $\vec{\varepsilon}$, f é o ángulo φ denominado anomalía verdadeira e $p = 4c^2/\mu$.

Podemos caracterizar a cónica 1.12 segundo o valor da excentricidade. Se $e = 0$ temos unha circunferencia, se $0 < e < 1$ unha elipse, se $e = 1$ unha parábola e se $e > 1$ unha hipérbole. Podemos dicir que se verifica a primeira lei de Kepler, pois o movemento relativo dun dos corpos describe unha cónica tal que nun dos seus focos se sitúa o outro corpo. Centrémonos a partir de agora no caso elíptico, para o cal sabemos que o parámetro p vén dado por

$$p = a(1 - e^2),$$

onde a denota o semieixe maior da elipse e e a excentricidade orbital.

Ata o de agora vimos que tanto a primeira como a segunda lei de Kepler se verifican neste problema. Comprobemos agora o que ocorre coa terceira. Denotamos por P o período orbital, podemos entón definir o movemento medio como

$$n = \frac{2\pi}{P}, \quad (1.13)$$

8 CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE DOUS CORPOS (CASO NON PERTURBADO).

que se mide en radiáns por unidade de tempo.

Se temos en conta que no caso elíptico $p = a(1 - e^2)$ e que, sendo b o semieixe menor da elipse, se verifican as igualdades $c = (\pi ab)/P$ e $b^2 = a^2(1 - e^2)$, temos que

$$\mu = \frac{4c^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{P^2 a(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{P^2 a(1 - e^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2}. \quad (1.14)$$

Entón, se denotamos por M a masa do corpo no foco e por m e m' as masas de dous corpos que orbitan ao primeiro, temos que

$$G(M + m) = \frac{4\pi^2 a^3}{P^2}, \quad G(M + m') = \frac{4\pi^2 (a')^3}{(P')^2},$$

polo que

$$\frac{M + m}{M + m'} = \frac{a^3/P^2}{(a')^3/(P')^2} \approx 1.$$

Queda patente que a formulación orixinal da terceira lei de Kepler é tan só unha aproximación da verdadeira lei que acabamos de ver.

Nestas últimas dúas seccións comprobamos que, en efecto, o Problema de dous corpos supón establecer unha equivalencia entre a Lei de Gravitación Universal de Newton e as leis de Kepler. Chegamos á conclusión de que dous corpos que se moven só pola forza gravitacional existente entre eles, cumpren as leis do astrónomo e matemático alemán, aínda que a primeira pódese estender a unha cónica calquera e a terceira só se cumpre de forma aproximada se M é moito maior que m e m' , tal como sucede por exemplo no Sistema Solar.

1.4. Integral da enerxía e velocidade orbital.

Nesta sección deduciremos a expresión denominada Integral da enerxía, a cal nos será de utilidade para obter a velocidade orbital dun corpo que, posteriormente, será necesaria para acadar a expresión da denominada Ecuación de Kepler.

Se integramos ambos extremos da seguinte expresión

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} v^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{2} 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right),$$

obtemos

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + h \quad (1.15)$$

relación denominada Integral da enerxía. Desta expresión podemos deducir que a velocidade do corpo en órbita só depende da distancia entre ambos corpos pois μ e h son constantes. Vexamos agora outra expresión da mesma constante da enerxía h . Tendo en conta que a

velocidade podemos descompoñela nas súas compoñentes radial e transversal¹ e que estas poden escribirse como

$$\begin{aligned} \cdot v_r = \dot{r} &= \frac{2ce}{p} \operatorname{sen} f, \\ \cdot v_t = r\dot{f} &= \frac{2c}{r} = \frac{2c}{p}(1 + e \cos f), \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} 2h = v^2 - \frac{2\mu}{r} &= \frac{4c^2 e^2}{p^2} \operatorname{sen}^2 f + \frac{4c^2}{p^2} (1 + e^2 \cos^2 f + 2e \cos f) - \frac{2\mu}{r} = \\ &= \frac{4c^2}{p^2} [e^2 \operatorname{sen}^2 f + 1 + e^2 \cos^2 f + 2e \cos f] - \frac{2\mu}{r} = \frac{4c^2}{p^2} (1 + e^2 + 2e \cos f) - \frac{2\mu}{r}, \end{aligned}$$

usando 1.12, a ecuación segue

$$2h = \frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e \cos f) - \frac{(1 + e \cos f)2\mu}{p} = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1). \quad (1.16)$$

Das expresións 1.15 e 1.16 tense que

$$\begin{aligned} 2h &= \frac{\mu}{p}(e^2 - 1), \\ 2h &= v^2 - \frac{2\mu}{r}, \end{aligned}$$

de onde

$$v^2 - \frac{2\mu}{r} = \frac{\mu}{p}(e^2 - 1),$$

que podemos reescribir como

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right].$$

No caso particular da elipse, como $p = a(1 - e^2)$, entón

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]. \quad (1.17)$$

1.5. Lei horaria do movemento kepleriano elíptico.

Co obxecto de poder integrar totalmente o Problema de dous corpos, cómpre poder dispoñer dunha relación entre unha das coordenadas polares relativas (r ou f) coa variable independente t . Dita relación é o que se denomina a Lei horaria. Comecemos combinando 1.13 e 1.14. Lembrando que $\mu = n^2 a^3$ e tendo en conta 1.17, resulta

$$v^2 = \mu \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right] = n^2 a^3 \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right].$$

¹Tal como vimos na sección anterior: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{f}\vec{u}_t$

10 CAPÍTULO 1. O PROBLEMA DE DOUS CORPOS (CASO NON PERTURBADO).

A partir de 1.13 e das relacións previas e necesarias tanto para 1.14 como para 1.16, temos que

$$v_t = \frac{2c}{r} = \frac{2\pi ab}{Pr} = \frac{nab}{r} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r} \Rightarrow v_t^2 = \frac{n^2a^4(1-e^2)}{r^2}.$$

Como $v^2 = v_r^2 + v_t^2$, entón

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = v_r^2 = v^2 - v_t^2 = \frac{n^2a^2}{r^2} [a^2e^2 - (a-r)^2],$$

polo que

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{na}{r} \sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2} \Rightarrow \pm ndt = \frac{rdr}{a\sqrt{a^2e^2 - (a-r)^2}}.$$

Introduzamos agora o cambio de variable $r \rightarrow E$ de modo que

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (1.18)$$

e polo tanto $dr = ae \sin E dE$. Deste xeito

$$\pm ndt = \frac{a(1 - e \cos E)ae \sin E dE}{a\sqrt{a^2e^2 - (a - a(1 - e \cos E))^2}} = \frac{ae \sin E(1 - e \cos E)dE}{ae \sin E} = (1 - e \cos E)dE.$$

Realizando a integral²

$$\int_0^E (1 - e \cos E)dE = \int_T^t \pm ndt, \quad (1.19)$$

con T tempo no punto da órbita en que os corpos están máis preto ou época de paso polo periastro, obtemos

$$E - e \sin E = \pm n(t - T). \quad (1.20)$$

Esta, prescindido do signo menos, é a Lei horaria do movemento kepleriano elíptico e denomínase Ecuación de Kepler. Esta expresión relaciona dúas novas variables que definiremos como anomalía media

$$M = n(t - T) = \frac{2\pi}{P}(t - T),$$

e anomalía excéntrica E .

Unha vez establecida a Lei horaria xa é posible saber a posición relativa de dous corpos en cada instante, o que equivale a ter integradas as ecuacións do movemento relativo.

A teoría do Problema de dous corpos, deducida para masas puntuais foi logo estendida por Newton ao caso de esferas sólidas homoxéneas[19], sendo válidas todas as expresións obtidas aquí para esa nova situación. Na natureza, aínda que non sexan sólidos homoxéneos, as estrelas dobres con compoñentes suficientemente separadas pode dicirse que representan o exemplo máis xenuíno do Problema de dous corpos tal como se deriva do estudo das súas órbitas.

²No establecemento dos límites de integración en 1.19, cómpre ter en conta que no periastro $E = 0$ (como se deduce de 1.18), dado que nesa posición $r = a(1 - e)$.

1.6. Elementos orbitais.

A integración das ecuacións de movemento relativo dadas por 1.5, como xa vimos, implican a existencia de seis constantes de integración, sete en caso de que a constante μ non sexa coñecida como acontece fóra do Sistema Solar. Precisamente, definimos os elementos orbitais coma o conxunto destas constantes ou ben doutras relacionadas con elas.

Nas seccións previas dedicadas á integración do Problema de dous corpos vimos que ditas constantes eran os vectores \vec{c} , \vec{e} , así como a integral da enerxía h e a época de paso polo periastro T . Contamos polo tanto con oito parámetros e con dúas relacións entre eles vistas nas seccións anteriores:

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{e} &= 0, \\ h &= \frac{\mu}{p}(e^2 - 1).\end{aligned}$$

Polo que deducimos que son seis parámetros independentes.

Á hora de traballar no estudo do caso do movemento elíptico, os elementos orbitais máis empregados, introducidos por Campbell, son os seguintes:

- T : época de paso polo periastro.
- e : excentricidade orbital.
- a : semieixe maior da elipse.
- i : inclinación, é dicir, ángulo diedro que forma o plano orbital co plano OXY do sistema de referencia.
- Ω : ángulo do nodo, ou sexa, ángulo formado polo eixe OX do sistema de referencia coa posición do nodo ascendente.
- ω : argumento do periastro, é dicir, o ángulo percorrido desde a posición do nodo ascendente ata o periastro no sentido do movemento e sobre o plano orbital.

Lembremos que na sección 1.3 vimos que existe unha relación entre o semieixe maior a e o período orbital P , dada por:

$$\mu = \frac{4\pi a^3}{P^2},$$

de onde se deduce que, se μ é descoñecida, debemos introducir P como un sétimo elemento orbital. Na Figura 1.5 aparecen representados os elementos orbitais i , Ω e ω nun sistema de referencia cartesiano, ortogonal e dextróxiro³.

³ND e NA denotan os nodos descendente e ascendente respectivamente.

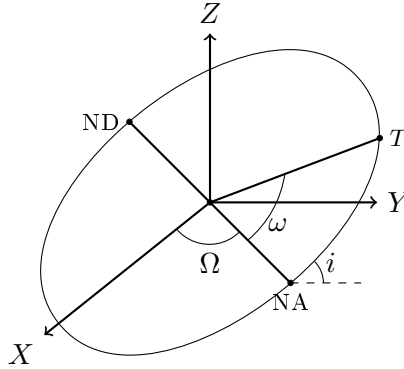


Figura 1.5: Elementos orbitais.

1.7. Formulación Hamiltoniana do Problema de dous corpos.

As ecuacións do Problema de dous corpos admiten a forma newtoniana dada por 1.5, pero tamén poden escribirse en termos da función de Hamilton [19]:

$$H = T + V = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r}.$$

Sendo:

- T : a enerxía cinética.
- V : o potencial.
- v : a velocidade relativa.
- r : a distancia entre os dous corpos.

Sabemos que o sistema de variables conformado polas compoñentes cartesianas do vector velocidade $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ e mais do vector posición $\vec{r}(x, y, z)$ é canónico [19], polo tanto as ecuacións hamiltonianas pódense escribir como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} & ; & \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} & ; & \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{y}} \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z} & ; & \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

sendo

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \mu(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

É sinxelo demostrar que as ecuacións 1.5 e 1.21 son equivalentes. Por outra banda, dado que a transformación

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z) \longleftrightarrow (L, G, \mathcal{H}, l, g, h)$$

é completamente canónica, onde

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a} & ; & \quad l = M \\ G &= L\sqrt{1 - e^2} & ; & \quad g = \omega \\ \mathcal{H} &= G \cos i & ; & \quad h = \Omega, \end{aligned} \tag{1.22}$$

é o conxunto de variables de Delaunay [19], as ecuacións correspondentes a estas variables admiten tamén forma hamiltoniana. É dicir, temos agora o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l} & ; & \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial g} & ; & \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial H}{\partial G} \\ \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial h} & ; & \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{H}}, \end{aligned} \tag{1.23}$$

sendo agora

$$H = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2},$$

xa que logo

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Vemos entón que, neste caso, H só depende da variable L , polo tanto e segundo 1.23, no Problema de dous corpos as variables L, G, \mathcal{H}, g e h son constantes. Isto equivale a que tamén o sexan os elementos orbitais e, a, i, Ω e ω , como xa era previsto.

Porén, a situación cambiará cando apareza unha forza perturbadora que torna a función de Hamilton correspondente noutra máis complexa. Neste caso estaríamos a falar dun Movemento Kepleriano Perturbado [19] cuxas ecuacións newtonianas serían:

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{P}, \tag{1.24}$$

sendo \vec{P} a función perturbadora. Así, a función de Hamilton correspondente sería da forma:

$$H = H_0 + \varepsilon H_P, \tag{1.25}$$

onde H_0 é o hamiltoniano non perturbado, ε un pequeno parámetro, e H_P a parte do hamiltoniano que se corresponde coa perturbación. Se nas ecuacións 1.24 e 1.25 facemos $\vec{P} = 0$ ou $H_P = 0$ respectivamente⁴, estaríamos no caso non perturbado.

Cómpre salientar que, de acordo co método de variación de constantes, no caso do Movemento Kepleriano Perturbado os elementos orbitais pasan a ser funcións do tempo.

⁴Notemos que considerar $\vec{P} = 0$ é equivalente a considerar $H_P = 0$

Capítulo 2

O Problema de dous corpos con masa variable.

Ao longo do presente capítulo abordaremos o Problema de dous corpos con masa variable desde a perspectiva de distintos autores e estudando diferentes formulacións do problema. Comezaremos cun pequeno contexto histórico acerca deste problema para poder comprender máis facilmente o seu desenvolvemento. De seguido, traballaremos nos textos dalgúns clásicos referentes no estudo desta materia como H. Gylden e F. Mestschersky. Tamén nos axudaremos para a elaboración deste capítulo da tese de doutoramento de C. Prieto [35] e consideraremos a xeneralización de J. A. Docobo sobre os traballos de Mestschersky. Finalmente dedicaremos parte do capítulo a estudar a formulación hamiltoniana deste problema, baseándonos en varios artigos que Docobo e Prieto publicaron conxuntamente; así como a tratar a visión deste problema dada por J. D. Hadjidemetriou.

A modo de resumo, nas seguintes páxinas condensaremos as contribucións máis clásicas deste problema. Consolidaremos así as bases que serviron para posteriores investigacións con diferentes tipos de perda de masa, así como para seguir avanzando nas liñas xa marcadas polos autores antes citados.

2.1. Preliminares.

Foi durante a segunda metade do século XIX cando xurdiu por primeira vez no panorama científico a interese polo fenómeno de variación de masa no Problema de dous corpos. Esta aparición veu da man da observación da variación secular da aceleración da Lúa. Dous foron os primeiros científicos en tratar devandito problema: M. Ch. Dufour [20], quen atribuíu esta variación ao aumento da masa terrestre producida pola chegada de corpos celestes ao planeta, e tamén Th. V. Oppolzer [33], quen considerou a diferenza entre a ace-

leración secular da lonxitude da Lúa observada e a calculada teoricamente, á incorporación de pó cósmico tanto á Terra como á Lúa.

Posteriormente, Gyldén [22] foi quen de confeccionar o sistema de ecuacións diferenciais que define o movemento de dous corpos con variación de masa, que veremos máis adiante. Anos máis tarde, Mestschersky [30] traballou sobre os resultados do anterior e deu un caso concreto no que o problema de Gyldén era integrable de forma exacta. Este traballo de Mestschersky tamén o trataremos polo miúdo, afondando nun caso particular do mesmo o cal programaremos para representar graficamente as solucións obtidas.

Ata entón, este problema era considerado tan só de carácter matemático e non existía unha perspectiva física do mesmo. Foi J. H. Jeans [28] quen relacionou os resultados teóricos obtidos coa perda de masa das estrelas. Tras numerosos traballos e baseándose na teoría de A. S. Eddington [21], chegou a establecer unha lei de variación de masa, denominada Lei de Eddington-Jeans, ou simplemente de Jeans, que reza

$$\dot{m} = -\alpha m^n,$$

con $1,4 < n < 4,4$ e α constante. Veremos, na cuarta sección deste capítulo, que Mestschersky traballou co caso $n = 2$, e como J. A. Docobo [17] [18] xeneraliza os resultados deste autor obtendo ademais outros casos integrables. Trataremos así mesmo os textos de J. D. Hadjidemetriou [23] que considera a mesma lei de variación de masa mais abordando o problema desde un ángulo distinto. Cos traballos teóricos deste último concluiremos esta parte, deixando para o cuarto capítulo a programación e comparación dos resultados obtidos neste.

2.2. Formulación do problema e integrais primeiras.

Sexan P_1 e P_2 dúas masas puntuais referidas a un sistema de referencia inercial, con vectores de posición \vec{r}_1 e \vec{r}_2 e masas respectivas m_1 e m_2 que consideraremos funcións continuas e monótonas decrecentes do tempo. Supoñamos tamén que a perda de masa ocorre a gran velocidade e de xeito isotrópico, isto é, a masa despréndese do sistema en todas direccións por igual e non nun punto concreto.

Baixo estas hipóteses e considerando a segunda Lei de Newton, a forza que exerce P_1 sobre P_2 e a que exerce P_2 sobre P_1 veñen dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= m_2(t)\ddot{\vec{r}}_2, \\ \vec{F}_{21} &= m_1(t)\ddot{\vec{r}}_1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Por outra banda, a Lei de Gravitación Universal garántenos que

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}, \\ \vec{F}_{21} &= +G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

denominando $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ao vector posición de P_2 respecto a P_1 .

A partir de 2.1 e 2.2 obtemos

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = -G \frac{m_1}{r^3} \vec{r} - G \frac{m_2}{r^3} \vec{r} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \vec{r},$$

e se denotamos ao igual que no capítulo precedente $\mu = G(m_1 + m_2) = Gm$, obtemos

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu(t)}{r^3} \vec{r}.\tag{2.3}$$

Chegamos así á expresión do sistema de ecuacións diferenciais do movemento relativo no Problema de dous corpos con masa variable. Este coñécese tradicionalmente como sistema de Gylden por ser este o primeiro autor en formulalo. Elixamos agora as unidades de distancia, tempo e masa de tal xeito que

$$G = 1 \frac{(u.d.)^3}{(u.t.)^2(u.m.)},$$

e polo tanto $\mu = m$.

Podemos demostrar facilmente que neste problema, ao igual que no de dous corpos, se verifica a segunda lei de Kepler ou lei das áreas, e tamén que a órbita é plana. En efecto, de 2.3 deducimos

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0,$$

integrando esta expresión chegamos a

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{c},\tag{2.4}$$

onde \vec{c} é o vector constante coñecido por momento angular. Chegamos finalmente ao que queríamos probar, multiplicando 2.4 por \vec{r} obtemos

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \cdot \vec{c} = 0.$$

Porén, a variación de masa ten como consecuencia que o centro de masas do sistema non se comporte como no caso non perturbado visto no primeiro capítulo. Só en casos moi particulares o centro de masas se mantén en repouso ou se despraza con velocidade constante en liña recta. Tamén apuntar que a órbita que describan os corpos dependerá da lei de perda de masa.

2.3. A chegada de H. Gyldén.

Este autor estableceu a ecuación vectorial 2.3 en coordenadas cartesianas, na forma:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 + F}{r^3}x &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu_1 + F}{r^3}y &= 0,\end{aligned}\tag{2.5}$$

onde μ_1 designa o valor constante da suma de ambas masas nun determinado intervalo de tempo e F unha función do tempo coñecida; ambas as dúas multiplicadas pola constante de gravitación universal, $G = 1$.

Consideremos agora a seguinte transformación:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\xi}{1 + \psi}, \\ y &= \frac{\eta}{1 + \psi}, \\ r &= \frac{\rho}{1 + \psi},\end{aligned}\tag{2.6}$$

con

$$\rho = r(1 + \psi) = (1 + \psi)\sqrt{x^2 + y^2} = (1 + \psi)\sqrt{\frac{\xi^2}{(1 + \psi)^2} + \frac{\eta^2}{(1 + \psi)^2}} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

incluíndo tamén a transformación na variable temporal inferida por

$$dt = \frac{d\tau}{(1 + \psi)^2}.\tag{2.7}$$

Así, as ecuacións 2.5 transfórmanse en

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \right] \frac{\xi}{1 + \psi} &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \right] \frac{\eta}{1 + \psi} &= 0.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Demostremos devandita transformación para a variable ξ , pois para a outra é análoga.

Tendo en conta a primeira ecuación de 2.6 e 2.7, temos que

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} \frac{1}{1 + \psi} - \frac{\xi}{(1 + \psi)^2} \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{1}{1 + \psi} - \frac{\xi}{(1 + \psi)^2} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = (1 + \psi) \frac{d\xi}{d\tau} - \xi \frac{d\psi}{d\tau}, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= (1 + \psi) \frac{d^2\xi}{d\tau^2} \frac{d\tau}{dt} + \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{d\xi}{d\tau} - \frac{d\xi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \frac{d\psi}{d\tau} - \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \frac{d\tau}{dt} \xi = (1 + \psi)^3 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \\ & (1 + \psi^2) \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\xi}{d\tau} - (1 + \psi)^2 \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\xi}{d\tau} - (1 + \psi)^2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} \xi = (1 + \psi)^3 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - (1 + \psi)^2 \xi \frac{d^2\psi}{d\tau^2},\end{aligned}$$

$$r^3 = \frac{\rho^3}{(1 + \psi)^3}.$$

entón

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu_1 + F}{r^3}x &= (1 + \psi)^3 \frac{d^2\xi}{d\tau^2} - \xi(1 + \psi)^2 \frac{d^2\psi}{d\tau^2} + (1 + \psi)^3 \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \frac{\xi}{1 + \psi} = \\ (1 + \psi) \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \right] \xi &= 0, \end{aligned}$$

e considerando $1 + \psi \neq 0$, queda probada a transformación, pois

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \right] \frac{\xi}{1 + \psi} = 0.$$

Determinemos a función ψ de xeito que

$$\left[-\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1 + F}{\rho^3} \right] \frac{1}{1 + \psi} = \frac{\mu_1}{\rho^3},$$

ou escrito doutro xeito

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1}{\rho^3}\psi = \frac{F}{\rho^3}. \quad (2.9)$$

Desta maneira, Gyldén escribiu o sistema 2.8 como segue

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\mu_1}{\rho^3}\xi &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{\mu_1}{\rho^3}\eta &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

o cal se corresponde co Problema de dous corpos con masa μ_1 constante e, polo tanto, sería integrable unha vez fixada a función ψ .

Debemos tratar agora de atopar a expresión da función do tempo ψ . Tomando a igualdade 2.9, multiplicándoa por unha banda por ξ e por outra por η e considerando 2.10, resulta

$$\begin{aligned} \xi \frac{d^2\psi}{d\tau^2} - \psi \frac{d^2\xi}{d\tau^2} &= \frac{\xi F}{\rho^3}, \\ \eta \frac{d^2\psi}{d\tau^2} - \psi \frac{d^2\eta}{d\tau^2} &= \frac{\eta F}{\rho^3}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Integrando agora este sistema con respecto a τ , obtense

$$\begin{aligned} \xi \frac{d\psi}{d\tau} - \psi \frac{d\xi}{d\tau} &= h_1 + \int \frac{\xi F}{\rho^3} d\tau, \\ \eta \frac{d\psi}{d\tau} - \psi \frac{d\eta}{d\tau} &= h_2 + \int \frac{\eta F}{\rho^3} d\tau, \end{aligned} \quad (2.12)$$

sendo h_1 e h_2 constantes. Finalmente, multiplicando a primeira ecuación de 2.12 por η e a segunda por ξ e restándooas, dedúcese a expresión xeral da función ψ

$$\psi = \frac{1}{\xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau}} \left[\eta(h_1 + \int \frac{\xi F}{\rho^3} d\tau) - \xi(h_2 + \int \frac{\eta F}{\rho^3} d\tau) \right].$$

Deste xeito Gyldén é pioneiro en dar forma a este problema e de integralo formalmente. No mesmo artigo [22] en que realiza a anterior formulación tamén chega a unha solución aproximada de dito problema.

2.4. As solucións de F. Mestschersky.

En xeral, a ecuación vectorial 2.3 non é integrable agás nalgúns casos especiais nos que si é posible obter unha solución exacta da mesma. Foi en 1893 cando Mestschersky [30] demostrou por primeira vez que dun caso concreto do problema de Gyldén era posible obter unha solución exacta.

Consideremos de novo a ecuación vectorial 2.3 en coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu(t)x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu(t)y}{r^3} &= 0, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

e elixamos unha lei de variación de masa dada por

$$\mu(t) = \frac{1}{a + \alpha t}, \tag{2.14}$$

con a e α constantes. Introduzamos unhas novas variables

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a + \alpha t}, \\ \eta &= \frac{y}{a + \alpha t}, \\ \tau &= \frac{-1}{\alpha(a + \alpha t)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

co obxectivo de converter o sistema 2.13 noutro integrable dado por

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\xi}{\rho^3} &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\eta}{\rho^3} &= 0, \\ \rho &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Vexamos como se realiza esta transformación para una das variables, neste caso ξ , pois para a outra é completamente análoga.

En primeiro lugar temos que

$$\begin{aligned} \cdot \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}((a + \alpha t)\xi) = \alpha\xi + (a + \alpha t)\frac{d\xi}{dt} \\ \cdot \frac{d^2x}{dt^2} &= \alpha\frac{d\xi}{dt} + \alpha\frac{d\xi}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\xi}{dt^2} = 2\alpha\frac{d\xi}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\xi}{dt^2}, \\ \cdot \mu x &= \frac{1}{a + \alpha t}(a + \alpha t)\xi = \xi, \\ \cdot r^3 &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = \left(\sqrt{(a + \alpha t)^2\xi^2 + (a + \alpha t)^2\eta^2}\right)^3 = (a + \alpha t)^3 \left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)^3 = \\ &= (a + \alpha t)^3\rho^3, \\ \cdot \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}, \\ \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \frac{d^2\xi}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + \frac{d\xi}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2}. \end{aligned}$$

Polo tanto, a primeira ecuación de 2.13 convértese en

$$\begin{aligned} 2\alpha\frac{d\xi}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\xi}{(a + \alpha t)^3\rho^3} &= \\ 2\alpha\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\xi}{d\tau^2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 + (a + \alpha t)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d^2\tau}{dt^2} + \frac{\xi}{(a + \alpha t)^3\rho^3} &= \\ (a + \alpha t)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \left[2\alpha\frac{d\tau}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\tau}{dt^2}\right]\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{1}{(a + \alpha t)^3\rho^3}\xi &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \cdot (a + \alpha t)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= (a + \alpha t)\left(\frac{-\alpha^2(-1)}{\alpha^2(a + \alpha t)^2}\right)^2 = \frac{1}{(a + \alpha t)^3}, \\ \cdot 2\alpha\frac{d\tau}{dt} + (a + \alpha t)\frac{d^2\tau}{dt^2} &= \frac{2\alpha}{(a + \alpha t)^2} + (a + \alpha t)\left(\frac{-2\alpha(a + \alpha t)}{(a + \alpha t)^4}\right) = 0. \end{aligned}$$

Polo tanto concluímos que

$$\frac{1}{(a + \alpha t)^3}\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{1}{(a + \alpha t)^3}\frac{\xi}{\rho^3} = 0,$$

e en consecuencia

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{\xi}{\rho^3} = 0.$$

Queda patente entón que esta transformación, efectivamente, dános como resultado un sistema integrable xa que logo as ecuacións 2.16 son as correspondentes a un Problema de

dous corpos con $\mu = 1$. Anos despois, E. O. Lovett [29] publicou un artigo no que sinalaba un erro nas transformacións de Mestschersky que acabamos de estudar e introducía unhas novas. Posteriormente, Mestschersky contesta a Lovett con outra publicación [32] na que xustifica que as súas transformacións son correctas e reafirmando a súa validez nun caso aínda máis xeral, cando

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta t + \gamma t^2}},$$

con α, β e γ constantes.

Caso particular.

Centremos o noso estudo nun caso concreto do anterior [35]. Sendo $m_0 = m(t_0)$, podemos escribir que

$$m(t) = \frac{1}{\frac{1}{m_0} + \alpha(t - t_0)}, \quad (2.17)$$

e admitindo, sen perda de xeneralidade, que $m_0 = 1$ e $t_0 = 0$, resulta

$$\mu(t) = m(t) = \frac{1}{1 + \alpha t}, \quad (2.18)$$

sendo esta unha situación particular de 2.14, cando $a = 1$.

A relación 2.18 equivale á ecuación de Jeans para o caso $n = 2$, tal como dixemos no remate da primeira sección deste capítulo, en efecto:

$$\dot{m}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 + \alpha t} \right) = \frac{-\alpha}{(1 + \alpha t)^2} = -\alpha \left(\frac{1}{1 + \alpha t} \right)^2 = -\alpha m^2(t).$$

Tomando 2.18 e aplicando a transformación

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{\vec{r}}{1 + \alpha t}, \\ \tau &= \frac{-1}{\alpha(1 + \alpha t)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

análoga a 2.15 con $a = 1$, chégase a

$$\vec{R}'' = -\frac{\vec{R}}{R^3}, \quad (2.20)$$

ou sexa, de novo a un Problema de dous corpos con $\mu = 1$, é dicir, con masa constante ¹. É máis, en xeral podemos usar a transformación do tempo máis xeral:

$$\tau = \frac{\pm 1}{\alpha(1 + \alpha t)} + C, \quad (2.21)$$

con C constante, para xunto con 2.18 e 2.19 transformar 2.3 en 2.20. Vexámolo:

¹Teremos en conta a partir de agora que o símbolo ($'$) fai referencia ás derivadas parciais con respecto á nova variable temporal τ .

Se realizamos as substitucións

$$\begin{aligned} \cdot \mu &= \frac{1}{1 + \alpha t}, \\ \cdot \vec{r} &= (1 + \alpha t)\vec{R}, \\ \cdot r^3 &= (1 + \alpha t)^3 R^3, \\ \cdot \ddot{\vec{r}} &= \frac{d^2}{dt^2} \left((1 + \alpha t)\vec{R} \right) = \frac{d}{dt} \left(\alpha\dot{\vec{R}} + (1 + \alpha t)\ddot{\vec{R}} \right) = 2\alpha\dot{\vec{R}} + (1 + \alpha t)\ddot{\vec{R}}, \\ \cdot \dot{\vec{R}} &= \vec{R}'\dot{\tau}, \\ \cdot \ddot{\vec{R}} &= \vec{R}''\dot{\tau}^2 + \vec{R}'\ddot{\tau}, \end{aligned}$$

en 2.3, temos que

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r} &= 2\alpha\dot{\vec{R}} + (1 + \alpha t)\ddot{\vec{R}} + \frac{1/(1 + \alpha t)}{(1 + \alpha t)^3 R^3} (1 + \alpha t)\vec{R} = \\ &= \frac{1}{(1 + \alpha t)^3 R^3} \vec{R} + 2\alpha\dot{\vec{R}} + (1 + \alpha t)\ddot{\vec{R}} = \frac{1}{(1 + \alpha t)^3 R^3} \vec{R} + 2\alpha\dot{\vec{R}} + (1 + \alpha t)[\vec{R}''\dot{\tau}^2 + \vec{R}'\ddot{\tau}] = \\ &= \frac{1}{(1 + \alpha t)^3 R^3} \vec{R} + [2\alpha\dot{\tau} + (1 + \alpha t)\ddot{\tau}]\vec{R}' + (1 + \alpha t)\dot{\tau}^2 \vec{R}'' = 0, \end{aligned}$$

onde debe cumprirse, co obxectivo de que a derradeira ecuación sexa análoga a 2.20, o seguinte

$$\begin{aligned} (i) \quad &2\alpha\dot{\tau} + (1 + \alpha t)\ddot{\tau} = 0, \\ (ii) \quad &\frac{1}{(1 + \alpha t)^4 \dot{\tau}^2} = 1 \Leftrightarrow (1 + \alpha t)^4 \dot{\tau}^2 = 1, \end{aligned}$$

que en efecto se verifica, pois se temos en conta 2.21

(i)

$$\begin{aligned} 2\alpha\dot{\tau} + (1 + \alpha t)\ddot{\tau} &= 2\alpha \frac{-\alpha^2(\pm 1)}{\alpha^2(1 + \alpha t)^2} + (1 + \alpha t) \frac{-[\frac{d}{dt}(\alpha^2 + 2\alpha^3 t + \alpha^4 t^2)](\pm \alpha^2)}{\alpha^4(1 + \alpha t)^4} = \\ &= 2\alpha \frac{\pm 1}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{-(2\alpha^3 + 2\alpha^4 t)(\pm \alpha^2)}{\alpha^4(1 + \alpha t)^3} = 2\alpha \frac{\pm 1}{(1 + \alpha t)^2} + \frac{2\alpha^3(1 + \alpha t)(\pm \alpha^2)}{\alpha^4(1 + \alpha t)^3} = \\ &= 2\alpha \frac{\pm 1}{(1 + \alpha t)^2} + 2\alpha \frac{\pm 1}{(1 + \alpha t)^2} = 0, \end{aligned}$$

(ii)

$$(1 + \alpha t)^4 \dot{\tau}^2 = (1 + \alpha t)^4 \left(\frac{-\alpha^2(\pm 1)}{\alpha^2(1 + \alpha t)^2} \right)^2 = (1 + \alpha t)^4 \frac{\alpha^4}{\alpha^4(1 + \alpha t)^4} = 1.$$

A partires de agora consideraremos en 2.21 o numerador como -1 e $C = \frac{1}{\alpha}$, así dita expresión tórnase en

$$\tau = \frac{t}{1 + \alpha t},$$

da que se deduce que si $\alpha \rightarrow 0$, entón $\tau \rightarrow t$.

Sexan agora (x, y) as compoñentes do vector \vec{r} e (ξ, η) as do vector \vec{R} . Se a órbita kepleriana a considerar no plano (ξ, η) é unha elipse, teremos que

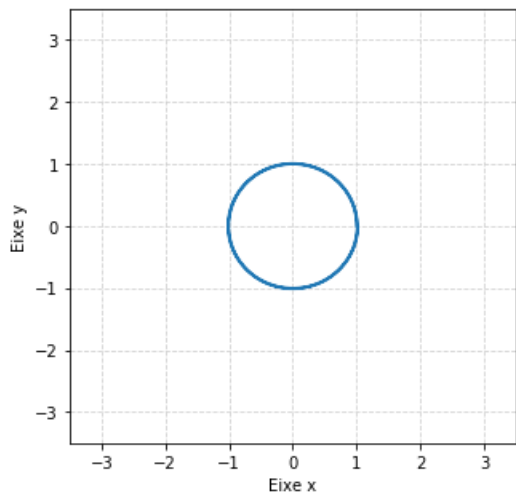
$$\begin{aligned}\xi &= a \cos(\beta), \\ \eta &= b \operatorname{sen}(\beta),\end{aligned}\tag{2.22}$$

onde a denota agora o semieixe maior da elipse, b o semieixe menor e β é un parámetro que percorre o intervalo $[0, 2\pi]$. Así as cousas, se utilizamos a transformación de coordenadas definida en 2.19, resulta:

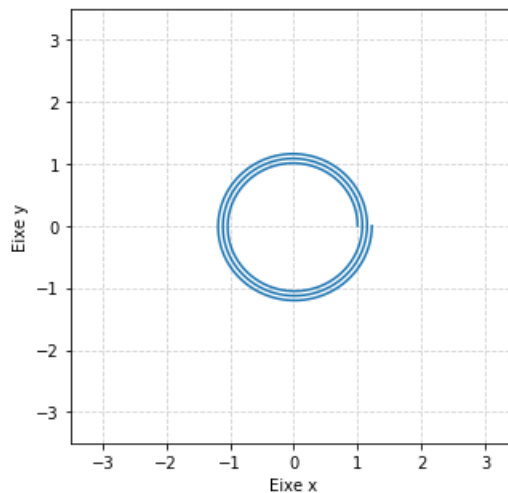
$$\begin{aligned}x &= a(1 + \alpha t) \cos(\beta), \\ y &= b(1 + \alpha t) \operatorname{sen}(\beta).\end{aligned}\tag{2.23}$$

De 2.23 deducimos que a órbita relativa descrita no plano (x, y) con masa decrecente é unha espiral. Tamén podemos dicir que a espiral será tanto máis aberta canto maior sexa α , en cambio, se α vaise achegando a cero, a espiral aproxímase a unha elipse. De feito, para casos nos que α sexa suficientemente pequena, podemos considerar este movemento como kepleriano perturbado.

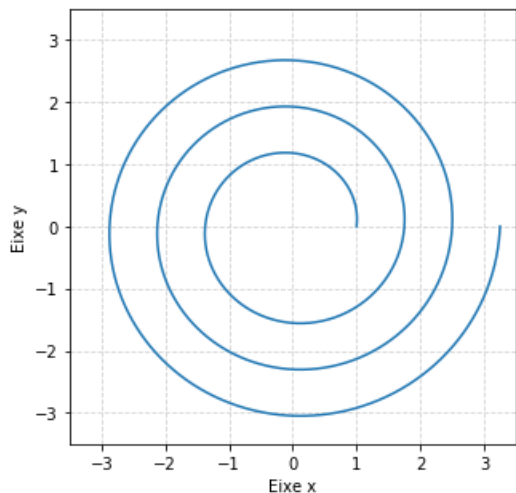
Vexamos agora unhas gráficas das órbitas relativas dun corpo sometido ao tipo de movemento que acabamos de estudar, obtidas utilizando a linguaxe de programación *Python*. Para todas as gráficas consideraremos que o valor do semieixe maior ao comezo da traxectoria é $a = 1$ unidade de distancia.



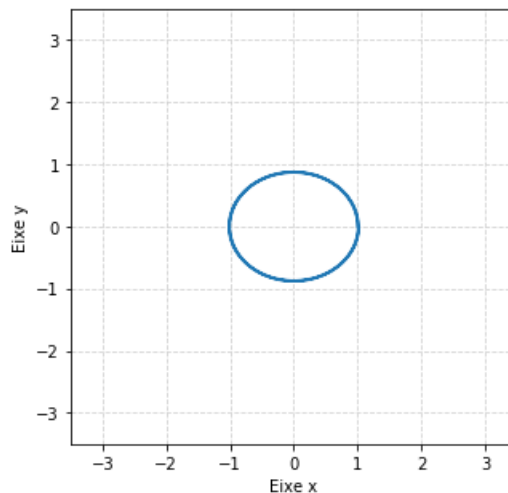
(a) Órbita relativa con $\alpha = 0,005$ e $e = 0,1$.



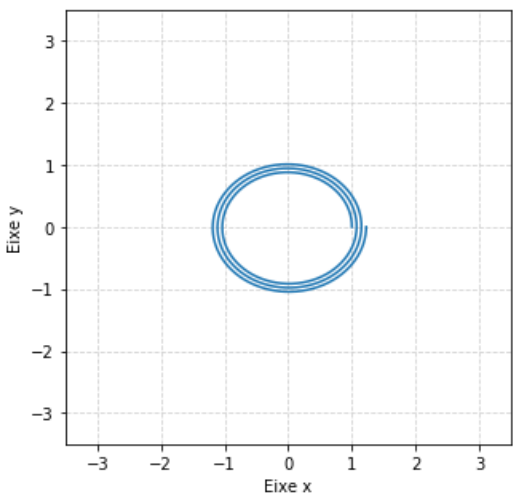
(b) Órbita relativa con $\alpha = 0,05$ e $e = 0,1$.



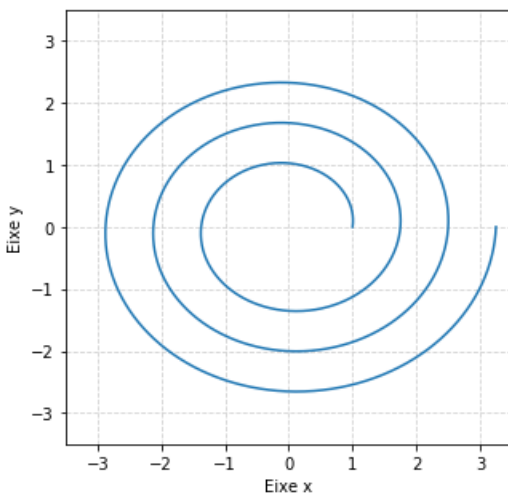
(c) Órbita relativa con $\alpha = 0,5$ e $e = 0,1$.



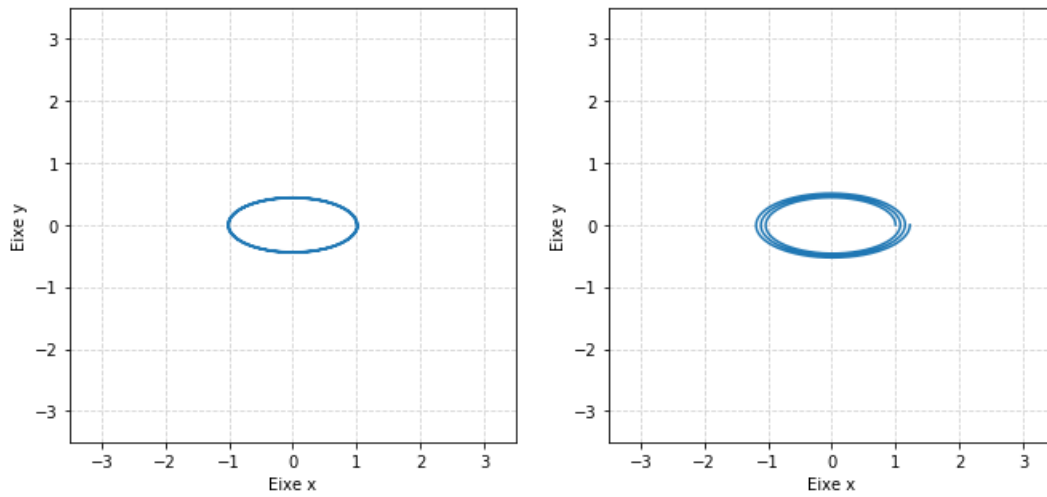
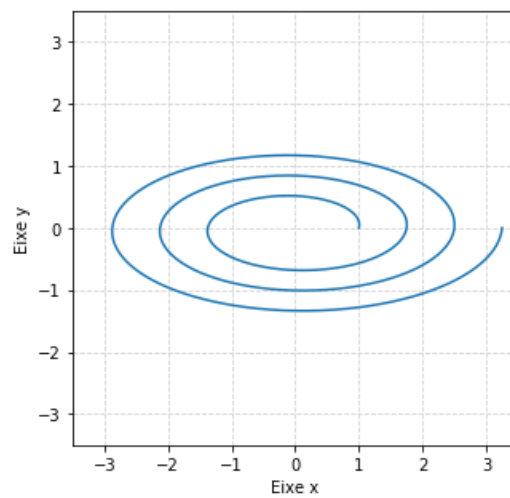
(d) Órbita relativa con $\alpha = 0,005$ e $e = 0,5$.



(e) Órbita relativa con $\alpha = 0,05$ e $e = 0,5$.



(f) Órbita relativa con $\alpha = 0,5$ e $e = 0,5$.

(g) Órbita relativa con $\alpha = 0,005$ e $e = 0,9$.(h) Órbita relativa con $\alpha = 0,05$ e $e = 0,9$.(i) Órbita relativa con $\alpha = 0,5$ e $e = 0,9$.Figura 2.1: Órbitas relativas segundo os valores de α e e .

2.5. Xeneralización das solucións de Mestschersky.

Aínda que será no vindeiro capítulo onde consideraremos leis de perda de masa máis xerais, cómpre sinalar aquí que as solucións exactas de Mestschersky foron xeneralizadas por J. A. Docobo en [17] e [18]. O autor considera unha lei de perda de masa que non só depende da variable temporal, senón que tamén da distancia entre os corpos do sistema en cuestión.

En efecto, Docobo demostra que cos cambios de variable

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\vec{r}}{1 + \alpha t}, \\ \tau &= \frac{t}{1 + \alpha t}, \\ \mu(t, r) &= \frac{1}{1 + \alpha t} + \sum_{i=n}^m (-1)^{k_i} \beta_i \left(\frac{1}{r}\right)^i (1 + \alpha t)^{i-1},\end{aligned}\tag{2.24}$$

onde α e β_i son parámetros reais positivos (con algún β_i eventualmente nulo), n e m enteiros tales que $n \leq m$ e k_i igual a 0 ou 1; podemos transformar as ecuacións de Gyldén

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu(t) \frac{\vec{r}}{r^3},$$

en

$$\vec{R}'' = -\frac{\vec{R}}{R^3} + \sum_{i=n}^m (-1)^{k_i} \beta_i \frac{\vec{R}}{R^{i+3}},\tag{2.25}$$

representando \vec{R}'' a derivada segunda do vector \vec{R} con respecto á nova variable temporal τ .

A ecuación vectorial 2.25 representa o movemento dunha partícula nun campo de forzas central derivado dun potencial

$$V = -\frac{1}{R} + \sum_{i=n}^m (-1)^{k_i} \frac{\beta_i}{i+1} R^{i+1},$$

o cal é integrable xa que se trata dun problema cun grao de liberdade.

Por exemplo, para $n = m = 2$, obtense un potencial semellante ao que explica o avance relativista do perihelio dos planetas. O movemento é plano e o vector \vec{R} describe unha elipse en precesión. A traxectoria que define o vector \vec{r} é así mesmo plana e é unha espiral, tanto máis pechada canto menor sexa α , e que tamén presenta precesión. Nesta descrición, os parámetros α e β_i non teñen porque ser pequenos, mais no caso en que $\beta_i \ll \alpha$, estamos ante un problema de Gyldén-Mestschersky perturbado.

No último capítulo dedicaremos unha sección a tratar os resultados numéricos da integración dun caso particular deste problema.

2.6. Función de Hamilton do Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente.

Outro xeito de abordar o problema de masa variable, e particularmente o de masa lentamente decrecente, é traballar co formalismo hamiltoniano. Partindo da expresión

$$H = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 - \frac{\mu(t)}{r}, \quad (2.26)$$

é dicir, da función de Hamilton relativa ao Problema de dous corpos na que agora o parámetro $\mu = G(m_1 + m_2)$ non é constante, é ben sabido que se usamos o conxunto de variables polares-nodales [19]:

$$\begin{aligned} R = \dot{r} & \quad ; \quad r = |\vec{r}| \\ U = 2c & \quad ; \quad u = w + f \\ \mathcal{H} = U \cos i & \quad ; \quad h = \Omega, \end{aligned}$$

entón a expresión 2.26 transfórmase en

$$H = \frac{1}{2} (R^2 + \frac{U^2}{r^2}) - \frac{\mu(t)}{r}.$$

Finalmente, se temos en conta o conxunto de variables de Delaunay, xa definidas en 1.22, pódese probar [15] que se obtén a seguinte expresión:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{m^2}{L^2} + \frac{\dot{m}}{m} L e \operatorname{sen} E, \quad (2.27)$$

onde $m = m_1 + m_2 = \mu$, xa que sempre podemos elixir as unidades de distancia, tempo e masa que fagan tomar á constante de gravitación, G , o valor 1.

De acordo co exposto, as ecuacións de Hamilton (ou ecuacións canónicas), serán:

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{m^2}{L^3} + \frac{\dot{m}}{m} (e + \frac{G^2}{L^2 e}) \operatorname{sen} E, \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial G} = -\frac{\dot{m}}{m} \cdot \frac{G}{eL} \operatorname{sen} E, \\ \frac{dL}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{\dot{m}}{m} \cdot \frac{eL \cos E}{1 - e \cos E}, \\ \frac{dG}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial g} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Desta última ecuación deducimos que

$$G = L\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{a(1 - e^2)m} = cte, \quad (2.29)$$

o cal era de esperar, pois xa vimos antes que no Problema de dous corpos con masa variable o momento angular mantíñase así mesmo constante. Se observamos a expresión

2.29, podemos concluír que se a masa diminúe, o parámetro da elipse $p = a(1 - e^2)$, necesariamente ten que crecer.

C. Prieto e J. A. Docobo [36] publicaron unha solución analítica do Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente aplicando o método de A. Deprit [14] ao sistema hamiltoniano 2.28, unha vez escrita a función de Hamilton 2.27 como un desenvolvemento en potencias dun pequeno parámetro:

$$H = H_0 + \frac{\varepsilon}{1!}H_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!}H_2 + \dots$$

onde, os termos ata segunda orde son:

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{m_0^2}{2L^2}, \\ H_1 &= \frac{m_0^3}{L^2}(t - t_0) - eLm_0 \operatorname{sen} E, \\ H_2 &= 4eLm_0^4 \operatorname{sen} E(t - t_0) - \frac{4m_0^6}{L^2}(t - t_0)^2. \end{aligned}$$

Estes autores tomaron como lei de perda de masa a de Eddington-Jeans para $n = 2$, co obxectivo de facer corresponder o problema cun dos casos de Mestschersky para o cal existe solución exacta. Deste xeito foron quen de comparar a solución analítica obtida por eles (cunha aproximación moi boa) coa solución exacta e mesmo mellorando os resultados que tamén obtiveron usando o método numérico de Runge-Kutta de orde oito.

O método analítico de integración de A. Deprit é aplicable á resolución formal de sistemas canónicos perturbados dependentes dun pequeno parámetro e está baseado na aplicación da transformación de Lie ao sistema canónico inicial, co obxecto de obter sistemas máis sinxelos de integrar [16].

Nun segundo artigo, C. Prieto e J. A. Docobo [37] tiveron tamén en conta a posibilidade de que ambos corpos perderan masa de distinta forma, ou sexa, tendo en cota:

$$\dot{m}_i = -\alpha_i m_i^{n_i}, \quad i = 1, 2.$$

Deste xeito, chegamos a un hamiltoniano que pode descompoñerse en función de dous parámetros ε_1 e ε_2 na forma:

$$H = H_0 + \varepsilon_1 H_1 + \varepsilon_2 H_2.$$

Neste caso, para realizar a integración analítica das correspondentes ecuacións canónicas é imprescindible facer uso dun método biparamétrico tal como o desenvolvido por A. J. Abad e J. Ribera [3], [38], baseado nas transformacións de Lie.

2.7. As ecuacións de Lagrange.

Nos problemas keplerianos perturbados, ademais do estudo hamiltoniano, é frecuente empregar un sistema de ecuacións que nos proporciona directamente a variación dos elementos orbitais. Vexamos como se poden obter estas ecuacións, denominadas ecuacións de Lagrange, a partir das ecuacións hamiltonianas.

Tendo en conta as ecuacións canónicas 2.28 e considerando as expresións do semieixe maior e da excentricidade en función das variables de Delaunay L e G , dadas en 1.22, resulta:

$$\begin{aligned} da &= 2\frac{a}{L}dL - \frac{a}{m}dm, \\ de &= \frac{1-e^2}{e} \left(\frac{dL}{L} - \frac{dG}{G} \right), \\ d\omega &= dg. \end{aligned}$$

Ademais, usando as relacións entre as diferenciais das tres anomalías $l = M$, E , e f :

$$\begin{aligned} dE &= \frac{a}{r}dl + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{sen} f de, \\ df &= \frac{1}{1-e^2} \operatorname{sen} f de + \sqrt{\frac{m}{a^3}} \cdot \frac{a}{r} dE, \end{aligned}$$

chégase finalmente as ecuacións de Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -a \frac{1+2e \cos f + e^2}{1-e^2} \cdot \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{de}{dt} &= -(e + \cos f) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\operatorname{sen} f}{e} \cdot \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\sqrt{a(1-e^2)m}(1+e \cos f)^2}{a^2(1-e^2)^2} + \frac{\operatorname{sen} f}{e} \cdot \frac{\dot{m}}{m}. \end{aligned}$$

Estas expresións son análogas ás que veremos na seguinte sección utilizadas por J. D. Hadjidemetriou.

2.8. O tratamento do problema por J. D. Hadjidemetriou.

Nesta sección analizaremos un dos traballos que J. D. Hadjidemetriou [23] realizou no ámbito do Problema de dous corpos con masa variable, concretamente para masa lentamente decrecente. O xeito de enfocar este estudo por parte de Hadjidemetriou difire respecto do visto ata entón. O autor chega a formular o mesmo sistema diferencial que xa acadaran os seus colegas previamente e que vimos anteriormente, porén Hadjidemetriou trata a perda de masa como unha perturbación.

A súa idea era considerar o Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente como un problema kepleriano perturbado, chegando a establecer a expresión da aceleración causada pola forza perturbadora. Vexamos como o autor desenvolve esta idea.

Sexa P_2 un punto material en torno a outro P_1 . Sabemos que se a masa $m = m_1 + m_2$ non varía, entón a ecuación vectorial

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{Gm}{r^3}\vec{r}, \quad (2.30)$$

describe unha cónica, por exemplo unha elipse. Pero se a masa varía, as desviacións da órbita anterior poden ser interpretadas como unha perturbación. Isto queda ilustrado na Figura 2.2:

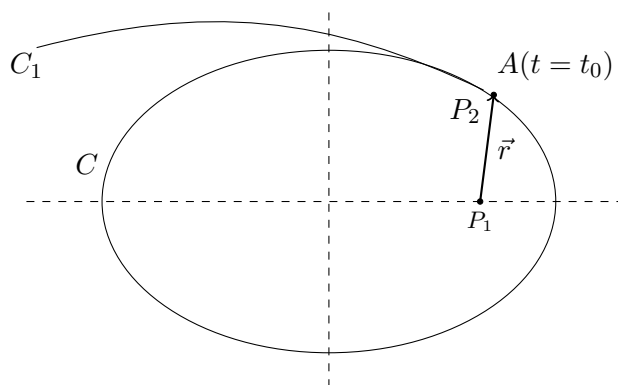


Figura 2.2: Desviación da órbita C.

A órbita C da Figura 2.2 describe o movemento definido pola ecuación 2.30 con masa constante. Porén, se a masa decrece a órbita convértese na definida por C_1 , denominada órbita oscultriz. Supoñamos que nun instante inicial $t = t_0$, o punto P_2 sitúase en A con velocidade \vec{v} respecto ao punto P_1 . Definamos agora unha nova velocidade \vec{v}_1 satisfacendo as dúas seguintes propiedades:

- (i) Ambas velocidades son iguais no instante inicial: $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_1(t_0)$;
- (ii) A velocidade \vec{v}_1 debe de ser tal que se P_2 se movese con esta velocidade, a órbita sería a oscultriz debido á perda de masa. Isto é sinónimo de dicir que o semieixe maior e a excentricidade da órbita permanezan constantes.

Sabemos que a velocidade \vec{v}_1 depende do tempo en $\vec{r}(t)$ e $m(t)$, polo que podemos expresala como

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1(\vec{r}(t), m(t)),$$

e polo tanto a aceleración do corpo viría dada por

$$\vec{a}_1 = \dot{\vec{v}}_1 = \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{m=\text{const.}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{r=\text{const.}}. \quad (2.31)$$

O primeiro termo da suma é o vector no caso en que a masa fose constante e é, polo tanto, a atracción gravitacional, isto é

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{m=\text{const.}, t=t_0} = -\frac{Gm(t_0)}{r^3(t_0)} \vec{r}(t_0). \quad (2.32)$$

O segundo termo da suma 2.31 é a aceleración no caso en que a masa varía e o resto de elementos permanecen constantes. Para comprender isto con maior claridade imaxinemos que temos unha serie de órbitas orientadas de xeito que os semieixes maiores sexan paralelos e que no instante inicial $t = t_0$ todas as compoñentes do sistema estean na mesma posición relativa. Superpoñendo todas esas órbitas, as compoñentes de cada sistema tamén se superpoñerían e os seus vectores velocidade terían a mesma dirección mais non o mesmo módulo pois as masas dos sistemas en cuestión serían diferentes. Co obxecto de obter esta aceleración con r constante e m variable, partamos da coñecida expresión da velocidade orbital no movemento elíptico:

$$v^2 = Gm \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (2.33)$$

ecuación que coliximos xa no primeiro capítulo do texto.

Derivando 2.33 con respecto ao tempo, con G , r e a constantes, resulta:

$$2v\dot{v} = G\dot{m} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \Rightarrow \dot{v} = \frac{1}{2} v \frac{\dot{m}}{m} = \frac{1}{2} v \frac{d}{dt} \ln(m).$$

Tendo agora en conta a primeira propiedade de \vec{v}_1 , é dicir, $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_1(t_0)$, temos que

$$\left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right)_{r=\text{const.}, t=t_0} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt_0} (\ln m) \vec{v}(t_0), \quad (2.34)$$

e substituíndo 2.32 e 2.34 en 2.31 chegamos a

$$\vec{a}_1 = -\frac{Gm(t_0)}{r^3(t_0)} \vec{r}(t_0) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt_0} (\ln m) \vec{v}(t_0),$$

a cal correspóndese á formulación vista en 1.24.

Polo tanto, a forza perturbadora ten a forma:

$$\vec{P} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln m) \vec{v} \quad (2.35)$$

e é o termo que explica as desviacións que xeran a órbita osculatriz e consecuentemente a perturbación orixinada pola variación de masa.

A modo de recapitulación, podemos dicir que a perda isotrópica de masa nun sistema de dous corpos equivale a unha forza proporcional á velocidade e á derivada do logaritmo neperiano da masa. Esta situación pode entenderse como segue: unha órbita queda perfectamente definida a partir da masa e do vector posición do corpo en cuestión que terá unha velocidade en cada instante; se o sistema perde masa, a velocidade e o vector posición ou *raio* da órbita non se ven afectados pero o defecto de masa fai que a velocidade sexa máis que suficiente para describir devandita órbita e polo tanto esta velocidade restante orixina unha perturbación do movemento.

J. D. Hadjidemetriou deu esta nova visión xeral do problema, do mesmo xeito tamén estudou a variación dos elementos orbitais así como a evolución do sistema co tempo. Para a primeira destas tarefas, o autor baseouse nas fórmulas de variación dos elementos orbitais obtidas por Contopoulos [12]

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2va^2}{Gm}\gamma, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2\cos E(1-e^2)}{1-e\cos E} \cdot \frac{\gamma}{v}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2(1-e^2)^{1/2}}{e} \cdot \frac{\sin E}{1-e\cos E} \cdot \frac{\gamma}{v},\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde a é o semieixe maior, e a excentricidade da órbita, ω o argumento do periastro, E a anomalía excéntrica e $\gamma = |\vec{P}| = -\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}v$.

Tendo isto último en conta e empregando as coñecidas relacións

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f}, \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 + e \cos f} \sin f,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2va^2}{Gm} \left(-\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}v \right) = -a^2 \frac{v^2}{Gm} \frac{\dot{m}}{m} = -a^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{de}{dt} &= \frac{2 \frac{e+\cos f}{1+e\cos f} (1-e^2) - \frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}f}{1 - e \frac{e+\cos f}{1+e\cos f}} = -\frac{(e+\cos f)(1-e^2)}{1+e\cos f} \frac{\dot{m}}{m} = -(e + \cos f) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{2(1-e^2)^{1/2}}{e} \frac{(1-e^2)^{1/2} \sin f}{(1+e\cos f)(1 - e \frac{e+\cos f}{1+e\cos f})} \frac{-\frac{1}{2}\frac{\dot{m}}{m}f}{f} = -\frac{1-e^2}{e} \frac{\sin f}{1+e\cos f} \frac{1+e\cos f}{1-e^2} \frac{\dot{m}}{m} = \\ &= -\frac{\sin f}{e} \frac{\dot{m}}{m}.\end{aligned}$$

En resumo

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -a^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{de}{dt} &= -(e + \cos f) \frac{\dot{m}}{m}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\sin f}{e} \frac{\dot{m}}{m}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Denominando φ ao ángulo formado polo vector \vec{r} e a dirección constante coa que o semieixe maior forma o ángulo ω , temos que

$$f = \varphi - \omega,$$

como podemos ver na Figura 2.3, e entón

$$\frac{df}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\omega}{dt}.\tag{2.38}$$

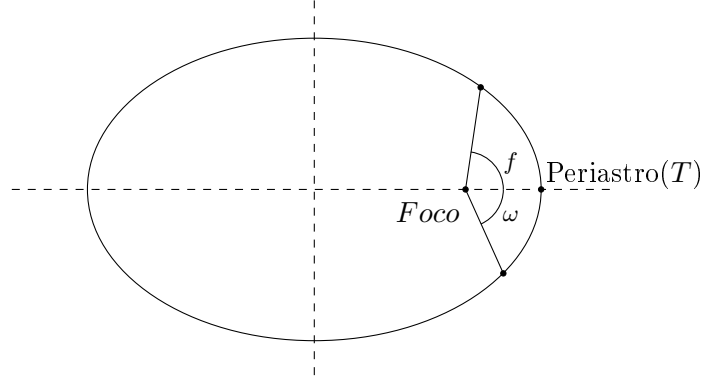


Figura 2.3: Representación do argumento do periastro (ω) e da anomalía verdadeira (f).

Se finalmente temos en conta as relacións $c = r^2\dot{\varphi}$ (Segunda Lei de Kepler, con c a constante das áreas) e

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f},\tag{2.39}$$

temos que

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{a^2(1 - e^2)^2} (1 + e \cos f)^2.\tag{2.40}$$

Polo tanto, usando 2.38, 2.39 e 2.40, as ecuacións de 2.37 transfórmanse no sistema

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= -a \frac{1 + 2e \cos f + e^2}{1 - e^2} \frac{d}{dt}(\ln m), \\ \frac{de}{dt} &= -(e + \cos f) \frac{d}{dt}(\ln m), \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\text{sen } f}{e} \frac{d}{dt}(\ln m), \\ \frac{df}{dt} &= \frac{c(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} + \frac{\text{sen } f}{e} \frac{d}{dt}(\ln m),\end{aligned}\tag{2.41}$$

o cal nos proporciona a variación dos elementos orbitais.

Se escribimos a primeira ecuación de 2.41 como segue

$$\frac{da}{dt} = -a \frac{1 + 2e \cos f + 2e^2 - e^2}{1 - e^2} \frac{d}{dt}(\ln m) = -\frac{2ae}{1 - e^2} (e + \cos f) \frac{d}{dt}(\ln m) - a \frac{d}{dt}(\ln m),$$

multiplicándoa por $m(1 - e^2)$ e usando a segunda ecuación de 2.41 temos que

$$m(1 - e^2) \frac{da}{dt} = 2aem \frac{de}{dt} - am(1 - e^2) \frac{d}{dt}(\ln m) \Leftrightarrow m(1 - e^2) \frac{da}{dt} + a(1 - e^2) \frac{dm}{dt} - 2mae \frac{de}{dt} = 0.$$

O que equivale a

$$\frac{d}{dt}(ma(1 - e^2)) = 0,$$

de onde

$$ma(1 - e^2) = \text{constante} \Rightarrow [Gma(1 - e^2)]^{1/2} = \text{constante}.$$

Ademais é sinxelo ver que dita constante esta relacionada coa constante das áreas c , pois

$$c = [Gma(1 - e^2)]^{1/2}.\tag{2.42}$$

Deste xeito, chegamos de novo a que c é constante tamén no Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente, así como a que se a masa diminúe, necesariamente o parámetro da elipse $p = a(1 - e^2)$ ten que aumentar, tal como xa viramos en 2.29.

Así queda definido o xeito no que os elementos orbitais varían neste problema. No último capítulo amosaremos o procedemento numérico para resolver o sistema 2.41, incluíndo así mesmo algunhas gráficas que describen a variación destes elementos orbitais segundo a Lei de Eddington-Jeans de perda de masa.

Capítulo 3

Algúns casos particulares de variación de masa.

Neste terceiro capítulo centrarémonos no estudo doutros escenarios de variación de masa que difiren do problema clásico visto con anterioridade. En concreto veremos en que consiste o denominado efecto periastro e de que xeito afecta á evolución dos sistemas binarios, trataremos así mesmo sistemas nos que as compoñentes sofren excecións de masa, aplicando a formulación a un sistema estelar real, e finalmente daremos unhas pinceladas acerca do fenómeno de intercambio de masa entre os corpos dun sistema con compoñentes moi próximas entre si.

Toda esta achega teórica verase complementada no derradeiro capítulo coa programación de diferentes escenarios e coa obtención dos resultados numéricos correspondentes.

3.1. Efecto periastro.

Estudaremos agora un caso particular do Problema de dous corpos con masa variable no que a perda de masa prodúcese en función do tempo e da distancia, dando conta só en casos concretos do coñecido como efecto periastro. Este fenómeno consiste nun aumento da perda de masa segundo a distancia entre os dous corpos diminúe, e pode xustificarse pola propia atracción gravitacional. Os autores M. Andrade e J. A. Docobo introduciron este concepto e publicaron catro artigos [5], [6], [7] e [8] nos que estudaron os fundamentos teóricos deste efecto así como a variación dos elementos orbitais, en particular da excentricidade que ten un aumento secular. Aparte diso, M. Andrade incluíu na súa tese de doutoramento [4] unha sección dedicada ao efecto periastro como una perturbación do problema de Gylden-Mestschersky.

Nestas publicacións, Andrade e Docobo expoñen que o efecto periastro podería ser a

causa da existencia de sistemas binarios pechados con órbitas notoriamente excéntricas. Ademais, este efecto resulta máis salientable canto maior sexa a excentricidade orbital e menor a mínima distancia entre ambas estrelas.

En [5], reformulan a ecuación do movemento relativo obtida en 2.3 (coñecida como sistema de Gylden-Mestschersky), na forma

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu(t, r)}{r^3}\vec{r},$$

onde $\mu(t, r) = Gm(t, r)$ é función do tempo e da distancia.

En consecuencia, a función de Hamilton en variables polares-nodais deste problema virá dada por

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \quad (3.1)$$

onde $\dot{\mu}(t) = -\alpha\mu^n$, sendo μ función decrecente, continua e diferenciable, α e n dous números reais tales que α é próximo a cero e $0,4 < n < 4,4$. É dicir, ditos autores traballan aínda coa lei de Eddington-Jeans de perda de masa que xa tratamos no anterior capítulo. Se comparamos esta expresión coa función hamiltoniana do Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente 2.26, vemos que son iguais agás polo último termo que acabamos de introducir. Este último pode interpretarse como unha perturbación do problema.

A partires desta función hamiltoniana, Andrade e Docobo obtiveron as ecuacións de Lagrange deste problema, as cales explican como varían os elementos orbitais. Estas ecuacións son as seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} a \frac{1 + 2e \cos f + e^2}{1 - e^2} + 4\beta e \sqrt{\frac{1}{\mu(t) a^3 (1 - e^2)^7}} (1 + e \cos f)^3 \sin f, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} (e + \cos f) + 2\beta \sqrt{\frac{1}{\mu(t) [a(1 - e^2)]^5}} (1 + e \cos f)^3 \sin f, \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \frac{\sin f}{e} - 2\beta \sqrt{\frac{1}{\mu(t) [a(1 - e^2)]^5}} (1 + e \cos f)^3 \frac{\cos f}{e}, \\ \frac{df}{dt} &= \sqrt{\frac{\mu(t)}{[a(1 - e^2)]^3}} (1 + e \cos f)^2 + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} \frac{\sin f}{e} + 2\beta \sqrt{\frac{1}{\mu(t) [a(1 - e^2)]^5}} (1 + e \cos f)^3 \frac{\cos f}{e}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Podemos comprobar facilmente que se facemos $\beta = 0$, as ecuacións resultantes son as que xa vimos no capítulo segundo 2.41, cando non existía perturbación polo efecto periastro.

Noutros artigos [6], [7] e [8], os autores, na procura dunha lei de perda de masa que produza aumento secular de excentricidade, propoñen estudar unha que vén dada en función do tempo e da distancia e que fai distinción entre a perda de masa dunha compoñente

do sistema e doutra ademais dun termo perturbador, esta é:

$$\dot{\mu}(t; r, p_\theta) = -\alpha_1 \mu_1^n(t) - \alpha_2 \mu_2^q(t) - \beta \frac{p_\theta}{r^2}. \quad (3.3)$$

Os dous primeiros sumandos representan a dependencia temporal da perda de masa para a primeira e a segunda compoñente do sistema respectivamente. Ambas as dúas se corresponden coa lei de Eddington-Jeans que xa vimos previamente, μ_1 e μ_2 son funcións do tempo decrecentes, continuas e diferenciables; α_1 e α_2 dous parámetros próximos a cero e n e q dous números reais tales que $0,4 < n, q < 4,4$. O terceiro sumando en 3.3 é o que infire o efecto periastro; temos que r é a distancia entre os dous corpos, p_θ é o momento angular total e β outro parámetro próximo a cero. Con esta lei, como veremos no cuarto capítulo, a perda de masa resulta inversamente proporcional á distancia r , e efectivamente fai que a excentricidade creza secularmente.

O Hamiltoniano correspondente a este problema expresado en variables polares-nodais é

$$H(r, \theta; p_r, p_\theta; t) = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) - \frac{\mu(t)}{r} + \beta \frac{\theta}{r}. \quad (3.4)$$

A partires da función de Hamilton 3.4, Andrade e Docobo obtiveron as ecuacións canónicas de movemento:

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\beta}{r}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{\mu(t)}{r^2} + \beta \frac{\theta}{r^2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \end{aligned} \quad (3.5)$$

que xunto coas ecuacións de perda de masa respecto do tempo:

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\alpha_1 \mu_1^n, \quad \frac{d\mu_2}{dt} = -\alpha_2 \mu_2^q, \quad (3.6)$$

forman un sistema de seis ecuacións diferenciais, onde $\mu(t) = \mu_1 + \mu_2$, e cuxa resolución proporciona os valores dos momentos e coordenadas.

Por último, tendo en conta as relacións entre estas variables e os elementos orbitais

$$\begin{aligned} r &= \|\vec{r}\| = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \\ \theta &= \omega + f, \\ p_r &= \dot{r} = \frac{2ce}{a(1 - e^2)} \operatorname{sen} f, \\ p_\theta &= 2c = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \end{aligned}$$

podemos deducir as variacións destes¹.

No próximo capítulo veremos a programación na que integramos o sistema 3.5 e os resultados numéricos obtidos a partir da mesma. Tamén mencionar que as expresións 3.3 e 3.4 son orixinais de ditos autores, que no seu día deron conta por primeira vez dunha lei de perda de masa e dun sistema hamiltoniano que producían un aumento secular da excentricidade.

3.2. Exección de masa.

Centrémonos agora nun novo caso deste Problema de dous corpos con variación de masa. Imos estudar como se comportan determinados sistemas binarios cando se producen execcións de masa, isto é, unha perda de masa instantánea por parte do sistema. Este problema foi tratado por J. D. Hadjidemetriou a mediados do pasado século. Axudarémonos dun dos artigos deste autor [25] para afondar no que respecta á teoría desta materia e poder poñela logo en práctica cun sistema estelar real.

Para comezar temos que contemplar unha serie de hipóteses, debemos ter en conta que as execcións de masa prodúcense en calquera dos dous corpos do sistema de xeito isotrópico e nun período de tempo curto en comparación co período orbital do sistema. Isto permítenos supoñer que as execcións de masa ocorren de xeito instantáneo. Este proceso físico recorrente adoita ter lugar preferentemente en estrelas xoves de tipos espectrais tardíos, especialmente en ananas vermellas de clase espectral M. A masa expulsada en cada exección pode incluso chegar ao 0,1% da masa estelar.

Denotemos por Δm a cantidade de masa perdida nunha exección, J. D. Hadjidemetriou noutro artigo [24] expoñía que se a masa Δm se perde cando a estrela se atopa na zona do periastro definida por

$$-\frac{\pi}{2} < E \leq \frac{\pi}{2},$$

sendo E a anomalía excéntrica, entón a excentricidade aumenta. No entanto, se a perda de masa prodúcese cando a estrela está na zona do apoastro definida por

$$\frac{\pi}{2} < E \leq \frac{3\pi}{2},$$

temos que a excentricidade diminúe.

¹É importante ter en conta que na expresión de p_θ temos que $\mu = \mu(t) - \beta\theta$.

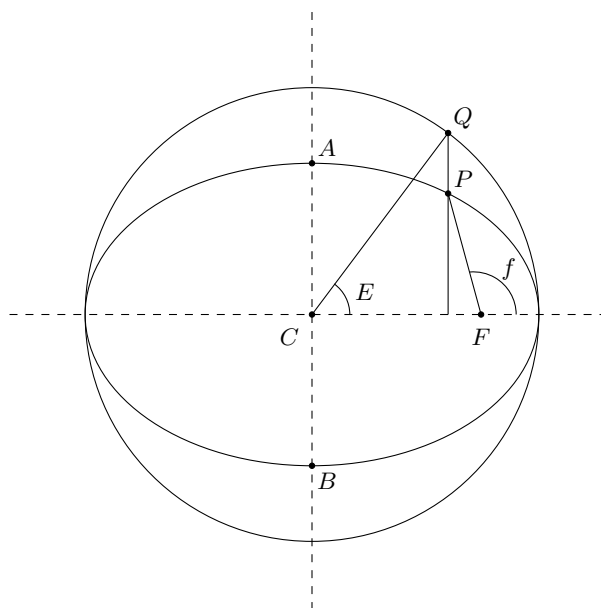


Figura 3.1: Representación da anomalía excéntrica (E) e da anomalía verdadeira (f).

Lembrando que a velocidade areolar é constante e, polo tanto, que a compoñente secundaria está máis tempo na zona do apoastro, podemos deducir que a probabilidade de que a exección de masa ocorra na zona do periastro é

$$p_1 = \frac{1}{2} - \frac{e}{\pi},$$

do mesmo xeito, a probabilidade de que a exección ocorra na zona do apoastro é

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{e}{\pi},$$

sendo e a excentricidade orbital. É sinxelo deducir estas expresións se, mediante a ecuación de Kepler 1.20, calculamos o tempo que se tarda en percorrer cada unha das zonas da órbita definidas anteriormente. Sendo A e B os puntos na órbita sinalados na Figura 3.1, temos que

$$E - e \operatorname{sen} E = \frac{2\pi}{P}(t - T) \Rightarrow \begin{cases} t_A = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - e \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = P \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} \right) \\ t_B = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - e \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) = P \left(\frac{3}{4} + \frac{e}{2\pi} \right). \end{cases}$$

Entón, para a zona do periastro obtemos

$$P - (t_B - t_A) = P \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{\pi} \right),$$

mentres que para a do apoastro obtemos

$$t_B - t_A = P \left(\frac{1}{2} + \frac{e}{\pi} \right).$$

Claramente temos que $p_2 > p_1$ e polo tanto, sempre e cando asumamos que as execcións estean distribuídas aleatoriamente no tempo, é máis probable que a exección ocorra na zona do apoastro e, en consecuencia, máis probable que tras a exección a excentricidade decreza. Podemos dicir máis, canto maior sexa a excentricidade no momento da exección, maior será p_2 e máis probable será que esta diminúa.

Vexamos agora como obter a expresión da excentricidade tras unha exección de masa por parte do sistema. Denotemos por a_0 , e_0 e m_0 o semieixe maior, a excentricidade e a masa do sistema respectivamente antes da exección e sexan a , e , $m = m_0 - \Delta m$ os seus novos valores tras esta. Sexan tamén r e v a distancia entre ambas compoñentes do sistema e a velocidade relativa no momento da exección, respectivamente. Temos que ter en conta que como a exección de masa ocorre de xeito isotrópico, ambas a distancia entre os corpos e a velocidade relativa non se ven afectadas polo evento. Tendo en conta as seguintes igualdades (introducidas anteriormente no texto):

$$v^2 = Gm \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad Gma(1 - e^2) = c^2,$$

deducimos que as expresións para a excentricidade antes e despois da exección son

$$e_0^2 = 1 + \frac{c^2}{G^2 m_0^2} \left(v^2 - \frac{2Gm_0}{r} \right), \quad (3.7)$$

$$e^2 = 1 + \frac{c^2}{G^2 m^2} \left(v^2 - \frac{2Gm}{r} \right), \quad (3.8)$$

onde c é a constante das áreas, como xa viramos previamente. Deste xeito podemos escribir

$$c^2 = Gm_0 a_0 (1 - e_0^2) = Gma(1 - e^2). \quad (3.9)$$

Tendo en conta as ecuacións 3.7, 3.8 e 3.9, así como estas dúas

$$v^2 = Gm_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_0} \right) = Gm \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right),$$

$$r = \frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos f_0},$$

a expresión que nos dá a nova excentricidade vén dada por

$$e = \left[e_0^2 + \frac{\Delta m}{m^2} (m_0(1 + 2e_0 \cos f_0 + e_0^2) - m(1 - e_0^2)) \right]^{1/2}. \quad (3.10)$$

Podemos ver que o valor da nova excentricidade non depende do signo de f_0 , isto quere dicir que o valor da nova excentricidade será, como era de agardar, o mesmo se a exección ocorre en puntos da órbita simétricos respecto ao eixe maior da elipse.

3.2.1. Execci3ns aleatoriamente distribuídas ao longo do período orbital.

Consideremos agora que as execci3ns de masa est3n distribuídas de xeito aleatorio ao longo do período orbital e asumamos que a masa perdida en cada execci3n Δm é sempre a mesma. Temos que a ecuaci3n de Kepler proporciónanos a expresi3n da anomalía excéntrica pois, como vimos no primeiro capítulo

$$\frac{2\pi}{P}(t - T) = E - e \sin E, \quad (3.11)$$

con P , o período orbital e T , a época de paso polo periaastro. Como admitimos agora que as execci3ns est3n distribuídas aleatoriamente no tempo e temos que $0 \leq E \leq 2\pi$, sabemos que $\alpha = (t - T)/P$ é un número aleatorio no intervalo $[0, 1)$. Deste xeito podemos calcular a anomalía excéntrica resolvendo a ecuaci3n:

$$2\pi\alpha = E_0 - e_0 \sin E_0. \quad (3.12)$$

Unha vez obtido o valor da anomalía excéntrica, podemos calcular o correspondente da verdadeira mediante a expresi3n:

$$\cos f_0 = \frac{\cos E_0 - e_0}{1 - e_0 \cos E_0}. \quad (3.13)$$

Con estes resultados, estamos en condici3ns de obter os novos valores da excentricidade e do semieixe maior mediante 3.10 e 3.9 respectivamente.

No último capítulo veremos algúns resultados numéricos que servirán para analizar como evoluciona a excentricidade nun sistema que sofre execci3ns de masa aleatoriamente distribuídas durante o período orbital.

3.2.2. Execci3ns máis frecuentes na zona do periaastro.

Se temos de novo en conta a ecuaci3n de Kepler coma no caso previo, resulta que $\alpha = (t - T)/P$ é un número aleatorio no intervalo $[0, 1)$ pero agora a distribuci3n que segue α non é uniforme no tempo. Busquemos que funci3n pode definir a distribuci3n de α de xeito que as execci3ns presenten maior frecuencia na zona do periaastro.

Consideremos o seguinte

- se $\alpha = 0$ ent3n $(t - T)/P = 0$ e polo tanto $t - T = 0$, o que significa que estamos no periaastro;
- se $\alpha = 0,5$ ent3n $(t - T)/P = 0,5$ e polo tanto $P = 2(t - T)$, o que significa que $t - T$ é medio período e en consecuencia estamos no apoastro;

- se $\alpha = 1$ entón $(t - T)/P = 1$ e polo tanto $t - T = P$, o que significa que estamos no seguinte periastro.

Como consecuencia a función de distribución ten que ser simétrica respecto ao punto medio do intervalo e debe presentar maior densidade nos extremos do mesmo. Definamos entón

$$\alpha = f(s), \tag{3.14}$$

onde s é un número aleatorio no intervalo $[0, 1]$ e f continua nese intervalo verificando:

- (i) $0 < f(s) < 1, \forall s \in (0, 1)$ con $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, así α pertence ao intervalo esixido.
- (ii) $f(s) = 1 - f(1 - s) \forall s \in [0, 1]$, deste xeito garantimos a simetría da función respecto do punto medio $(1/2, 1/2)$.
- (iii) $f''(s) > 0, \forall s \in [0, 1/2]$, asegurándonos así o carácter convexo da función no intervalo $[0, 1/2]$ e o cóncavo en $[1/2, 1]$.

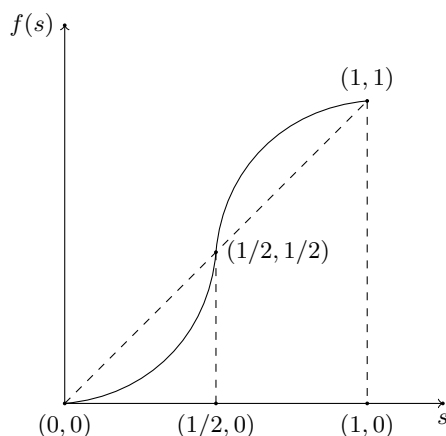


Figura 3.2: Función $\alpha = f(s)$.

En efecto, como podemos apreciar na Figura 3.2, dando as condicións anteriores para a función f , logramos que a distribución de α sexa simétrica respecto ao punto medio e máis densa nos extremos do intervalo. Podemos ver isto claramente tomando calquera punto da curva $f(s)$ distinto do punto medio $(1/2, 1/2)$ e observando que o valor de $f(s)$ é menor que s se $s < 1/2$ e maior se $s > 1/2$.

Se tomamos para 3.14 a función

$$f(s) = s - \frac{e_0}{2\pi} \text{sen}(2\pi s),$$

e a substituímos en 3.11, obtemos que $E = 2\pi s$. Disto podemos deducir que se a anomalía excéntrica toma valores aleatorios no intervalo $[0, 2\pi)$ entón as execcións de masa prodúcense máis frecuentemente na zona do periastro. Tamén dedicaremos máis adiante un apartado para tratar os resultados derivados deste tipo de exección de masa.

3.3. Intercambio de masa.

Nesta sección afondaremos no fenómeno de intercambio de masa entre as compoñentes suficientemente próximas dun sistema binario. J. D. Hadjidemetriou publicou algúns artigos, [26], [27], nos que estudou este caso, xa advertindo neles que a observación de certos sistemas binarios pechados evidenciou a existencia de intercambio de masa. Este fenómeno altera o equilibrio interno de cada compoñente, causando unha evolución do sistema distinta á que tería se non presentase dito intercambio.

O autor, en [26], propón un método de perturbacións para tratar o problema. Utiliza as leis do Problema de dous corpos con masa variable, coñecendo a de perda de masa, e atopa as ecuacións de variación dos elementos orbitais. Utilizando a lei de Mestschersky para o movemento dun corpo con masa variable [31] e modificándoa para que se axuste ao problema en si, J. D. Hadjidemetriou formulouno como un Problema de dous corpos con masa variable de xeito isotrópico. Vexamos nas seguintes seccións como o autor estuda este problema.

3.3.1. Ecuación da órbita relativa.

Consideremos dous corpos S_1 e S_2 con masas respectivas m_1 e m_2 tales que describen órbitas elípticas ao redor do seu centro de masas. Trallemos baixo as hipóteses de ausencia de forzas externas no sistema e cun sistema de referencia $Oxyz$ con orixe coincidente co centro de masas do sistema e cos eixes dispostos tales que o eixe x pasa polo centro de S_1 e S_2 e o plano xy determina o plano orbital, tal como está representado na Figura 3.3. O movemento dunha terceira masa infinitesimal, que se intercambia entre ambas compoñentes, no sistema de referencia $Oxyz$ vén determinado polas ecuacións do problema restrinxido de tres corpos.

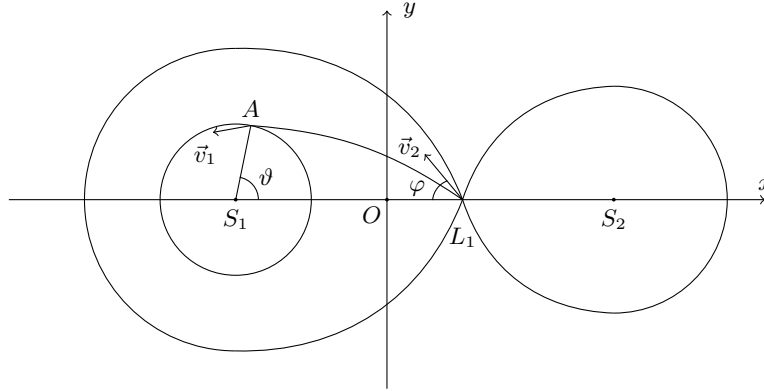


Figura 3.3: Movemento da partícula no sistema de referencia $Oxyz$.

Asumindo que a órbita relativa de S_2 ao redor de S_1 é circular e que a unidade de lonxitude é a separación entre as compoñentes, sendo a unidade de masa a masa total do sistema, e fixando a constante de gravitación $G = 1$, as ecuacións de movemento son:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x+\mu-1)}{r_2^3}, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{(1-\mu)z}{r_1^3} - \frac{\mu z}{r_2^3},\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2, \quad r_2^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2 + z^2.$$

O sistema 3.15 ten a integral de Jacobi

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} + x^2 + y^2 - C,$$

que determina as superficies equipotenciais. Unha delas de maior importancia pois pasa polo punto lagranxiano L_1 , polo cal se expulsa a partícula que se intercambia.

Tras unha serie de cálculos, o autor chega á ecuación xeral do Problema de dous corpos no cal a masa é expulsada por unha compoñente a través do punto L_1 e precipítase na outra compoñente. Esta é

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\vec{r} + S\vec{x}_0 + T\vec{y}_0,\tag{3.16}$$

onde \vec{x}_0 e \vec{y}_0 son os vectores unitarios nos eixes x e y respectivamente e S e T son as compoñentes da forza perturbadora.

O cálculo destas compoñentes S e T é bastante complexo, sobre todo para sistemas con excentricidades elevadas. Se, como mencionamos anteriormente, supoñemos que a órbita de S_2 ao redor de S_1 é circular, o autor presenta as seguintes expresións as compoñentes da forza perturbadora:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\dot{m}_2}{m_2} v_{2x} - \frac{\dot{m}_1}{m_1} (v_{1x} - 2\omega R_1 \sin \vartheta) + \frac{f_{2x}}{m_2} - \frac{f_{1x}}{m_1}, \\ T &= \frac{\dot{m}_2}{m_2} (v_{2y} - 2\omega(S_2 L_1)) - \frac{\dot{m}_1}{m_1} (v_{1y} - 2\omega R_1 \cos \vartheta) + \frac{f_{2y}}{m_2} - \frac{f_{1y}}{m_1}, \end{aligned}$$

onde os subíndices x e y denotan a respectiva compoñente do vector en cuestión, \vec{v}_1 é a velocidade relativa da masa infinitesimal no instante do impacto, \vec{v}_2 é a velocidade coa que a masa infinitesimal é expulsada por L_1 , $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotación do sistema $Oxyz$, ϑ é o ángulo entre os vectores $S_1 \vec{A}$ e \vec{x}_0 , e R_1 é o raio de S_1 . Os vectores \vec{f}_1 e \vec{f}_2 son as forzas de atracción para calquera partícula entre ambas compoñentes cara o corpo S_1 e cara o corpo S_2 respectivamente.

En consecuencia, a evolución do sistema pode estudarse en función de \vec{f}_1 , \vec{f}_2 , m_1 , m_2 , \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e $S_1 \vec{A}$, pois S e T dependen destas sete funcións.

3.3.2. Elementos orbitais.

A obtención do sistema de ecuacións diferenciais que describe a variación dos elementos orbitais cando se produce intercambio de masa é así mesmo bastante complexo e o autor desenvólveo polo miúdo en [26]. J. D. Hadjidemetriou toma de [40] o seguinte sistema que reflicte a variación do semieixe maior, da excentricidade e do argumento do periastro en función das compoñentes S e T .

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2a^{3/2}[G(m_1 + m_2)]^{-1/2}}{(1 - e^2)^{1/2}} [Se \sin f + T(1 + e \cos f)], \\ \frac{de}{dt} &= a^{1/2}(1 - e^2)^{1/2} [G(m_1 + m_2)]^{1/2} [S \sin f + T(\cos f + \cos E)], \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{[G(m_1 + m_2)a]^{1/2}}{e(1 - e^2)^{1/2}} [-aS(1 - e^2) \cos f + rT \sin f(2 + e \cos f)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tras o estudo deste sistema, o autor conclúe que para os tres elementos orbitais existe tanto unha variación secular como un comportamento periódico. A variación secular do semieixe maior é máis notoria que a da excentricidade; por outra banda, as variacións periódicas no semieixe maior son de menor orde que as seculares e, no caso da excentricidade, as variacións periódicas son de maior orde que as seculares. Neste tipo de sistemas é interesante tamén estudar a evolución do período orbital, de feito, a observación de variacións no período dalgúns sistemas binarios (con compoñentes suficientemente próximas)

motivou a investigación do fenómeno de intercambio de masa. Cando é a compoñente de menor tamaño a que expulsa masa e a de maior tamaño a que a gana, o período orbital aumentará, xa que ao diminuír o tamaño da compoñente menor, esta tomará máis tempo para percorrer a súa órbita relativa. En caso contrario é de agardar que o período orbital diminúa.

Capítulo 4

Programación dalgúns casos concretos do Problema de dous corpos con masa variable.

Este capítulo está dedicado á obtención e interpretación dos resultados numéricos relativos a algúns casos concretos de perda de masa vistos ao longo do texto. Todos os casos particulares foron programados polo autor deste Traballo de Fin de Grao utilizando a linguaxe *Python*. Os códigos correspondentes aparecerán no Apéndice do texto de tal xeito que aquí só amosaremos os resultados a través de gráficas ou cadros. Trataremos os diferentes casos particulares na orde de aparición ao longo do traballo.

4.1. Casos particulares na xeneralización das solucións de Mestschersky.

Consideremos nesta sección dous casos particulares da lei de variación de masa dada por Docobo en 2.24. Para ambos casos eliximos como condicións iniciais: $\mu_0 = 1(u.d.)^3/(u.t.)^2$, $a_0 = 1u.d.$, $e_0 = 0,5$, $w_0 = 0$ e $f_0 = 0$. O método de integración empregado foi un Runge-Kutta de orde catro. No primeiroadro aparecen os resultados obtidos para a lei de perda de masa

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + \alpha t} - \frac{\beta_2}{r^2}(1 + \alpha t),$$

mentres que no segundo aparecen os resultados para a lei

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + \alpha t} + \frac{\beta_3}{r^3}(1 + \alpha t)^2 - \frac{\beta_4}{r^4}(1 + \alpha t)^3.$$

O valor dos parámetros na primeira situación (caso 4.1) é $\alpha = 10^{-3}$ e $\beta_2 = 10^{-4}$, para o segundo (caso 4.2) é $\alpha = 10^{-4}$, $\beta_3 = 10^{-5}$ e $\beta_4 = 10^{-5}$. Nos cadros aparecen os valores correspondentes aos máximos e mínimos da excentricidade, quedando así patente o seu carácter periódico. As unidades para a masa e o semieixe maior son as dadas polas condicións iniciais.

Tempo (t)	Masa (m)	Semieixe maior (a)	Excentricidade (e)	Argumento do periastro (ω)	Anomalía verdadeira (f)
1.099999	0.998901	1.002101	0.499250	0.001784	2.117462
5.199999	0.994827	1.004190	0.500753	0.001802	4.154587
7.399999	0.992655	1.008416	0.499244	0.001727	8.369446
11.599999	0.988534	1.010579	0.500758	0.001790	10.446712
13.799999	0.986389	1.014831	0.499238	0.001702	14.637911
18.099999	0.982223	1.017067	0.500762	0.001747	16.753789
20.300000	0.980105	1.021346	0.499233	0.001709	20.921750

Cadro 4.1: Evolución dos elementos orbitais (caso 4.1).

Tempo (t)	Masa (m)	Semieixe maior (a)	Excentricidade (e)	Argumento do periastro (ω)	Anomalía verdadeira (f)
1.099999	0.999982	1.000210	0.500075	0.000178	2.119129
5.199999	0.976338	1.000419	0.499924	0.000178	4.155717
7.399999	0.976305	1.000841	0.500076	0.000170	8.369948
11.599999	0.952189	1.001057	0.499923	0.000175	10.444806
13.799999	0.952158	1.001482	0.500077	0.000164	14.633678
18.099999	0.927545	1.001706	0.499922	0.000170	16.743538
20.300000	0.927517	1.002134	0.500078	0.000160	20.906428

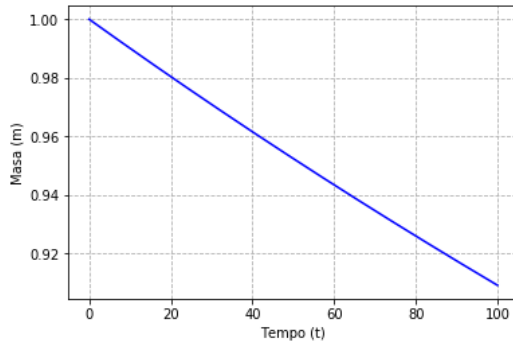
Cadro 4.2: Evolución dos elementos orbitais (caso 4.2).

Incluimos agora as gráficas correspondentes aos resultados numéricos presentados nos cadros, na Figura 4.1 as correspondentes ao Cadro 4.1 e na Figura 4.2 as relativas ao Cadro 4.2. Nestas gráficas queda patente a diferenza entre ambas leis de perda de masa, no primeiro caso a masa pérdese de xeito moito máis lento que no segundo. En tanto ao semieixe maior, en ambos casos presenta unha evolución semellante pero co matiz de que no primeiro caso o seu crecemento é moito maior que no segundo. A excentricidade ten un comportamento moi semellante e claramente periódico en ambos casos, a pesar dunha sutil diferenza non seus valores.

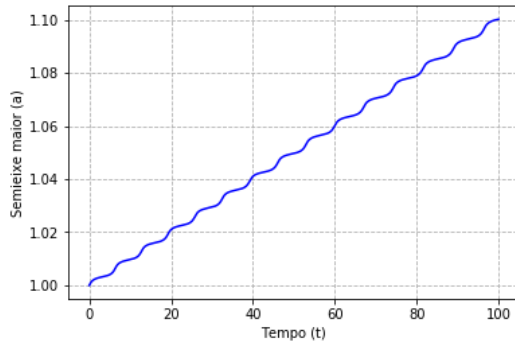
O argumento do periastro si presenta unha evolución diferente para cada exemplo, para ambas leis de perda de masa está patente o carácter periódico deste elemento orbital. Porén, no primeiro caso aparece unha compoñente secular crecente e no segundo de carácter decrecente. Tal e como explicabamos teoricamente na sección do segundo capítulo correspondente a este problema, no primeiro caso (cando na lei de perda de masa temos

4.1. CASOS PARTICULARES NA XENERALIZACIÓN DAS SOLUCIÓNS DE MESTSCHERSKY.51

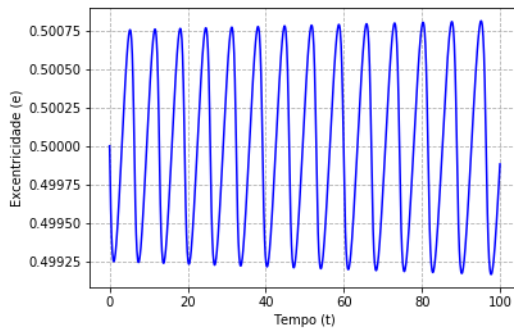
$n = m = 2$) estamos ante unha órbita en espiral que presenta precesión xa que podemos observar claramente as compoñentes seculares do semieixe maior e do argumento do periastro. Finalmente, a evolución da anomalía verdadeira é practicamente idéntica para ambos sistemas.



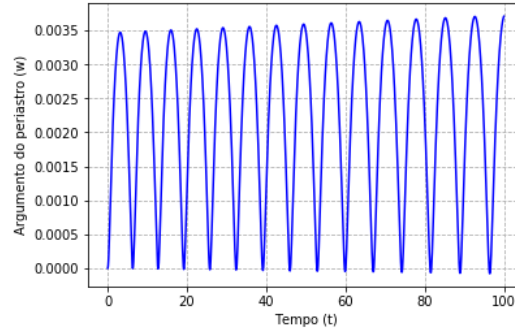
(a) Masa fronte ao tempo.



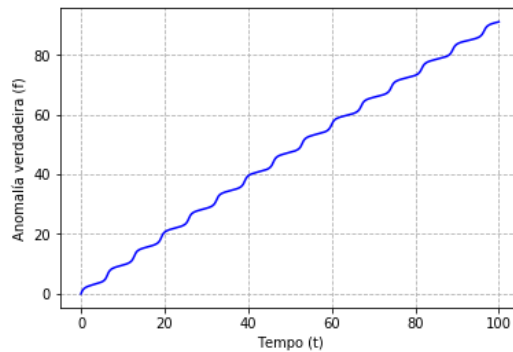
(b) Semieixe maior fronte ao tempo.



(c) Excentricidade fronte ao tempo.

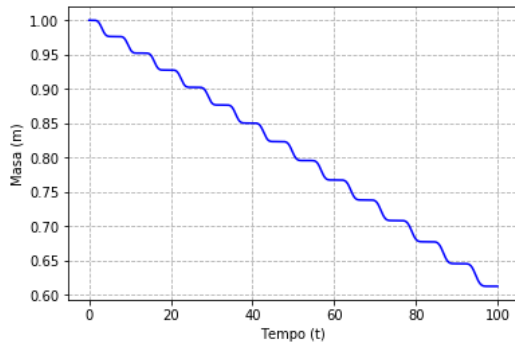


(d) Argumento do periastro fronte ao tempo.

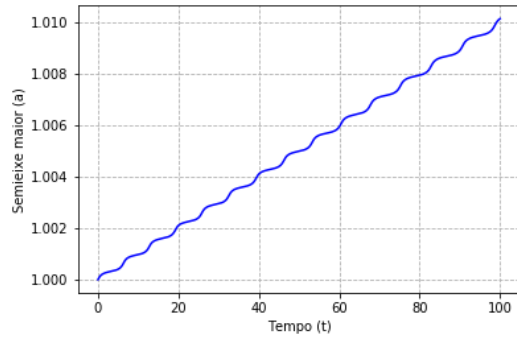


(e) Anomalía verdadeira fronte ao tempo.

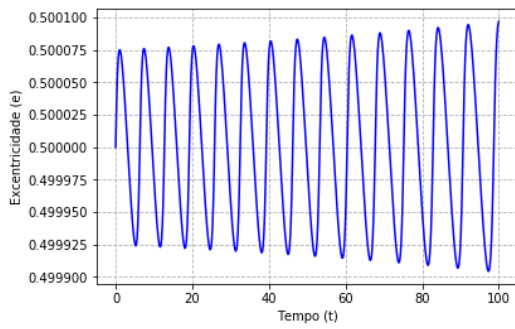
Figura 4.1: Evolución dos elementos orbitais respecto do tempo no caso 4.1.



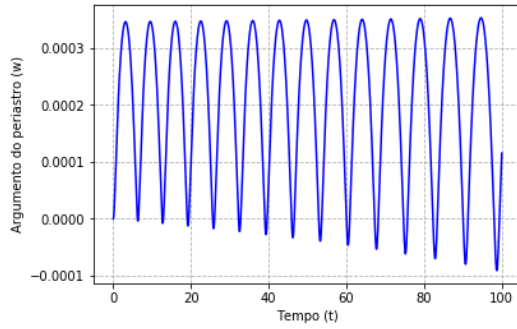
(a) Masa fronte ao tempo.



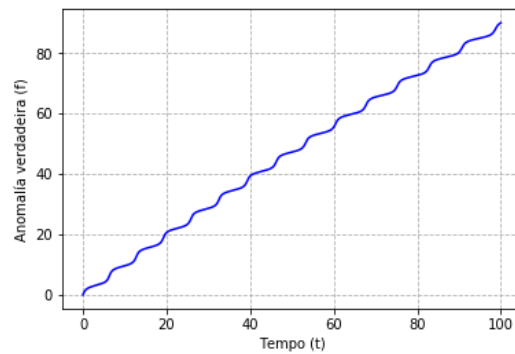
(b) Semieixe maior fronte ao tempo.



(c) Excentricidade fronte ao tempo.



(d) Argumento do periastro fronte ao tempo.



(e) Anomalia verdadeira fronte ao tempo.

Figura 4.2: Evolución dos elementos orbitais respecto do tempo no caso 4.2.

4.2. Exemplos concretos do problema segundo J. D. Hadjidemetriou.

Na última sección do segundo capítulo afondamos na visión innovadora que J. D. Hadjidemetriou deu respecto do Problema de dous corpos con masa lentamente decrecente. Agora veremos algúns resultados obtidos coa integración do sistema que proporciona a variación de elementos orbitais ao que chegou dito autor, neste caso tamén empregamos o mesmo método de Runge-Kutta dos casos anteriores.

Lembrando o dito ao final da sección dedicada ao traballo de J. D. Hadjidemetriou, a integración do sistema 2.41 que proporciona a variación dos elementos orbitais, levámola a cabo tendo en conta que a perda de masa obedece a lei de Eddington-Jeans. O autor formula esta lei como segue:

$$\dot{m} = -\alpha m^n,$$

sendo α unha constante positiva axeitada e $0,4 < n < 4,4$.

En caso de que o valor inicial da excentricidade sexa nulo, non poderemos utilizar o sistema 2.41 xa que logo a propia excentricidade figura como denominador. Nesta tesitura, para calcular os valores do semieixe maior e da excentricidade, temos que realizar a integración do sistema 2.30 e empregar as relacións

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2/(x^2 + y^2)^{1/2} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/Gm}, \\ e &= \left[1 + \frac{c^2}{G^2 m^2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{2Gm}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right) \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

que deducimos, respectivamente, das igualdades

$$v^2 = Gm \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{e} \quad Gma(1 - e^2) = c^2.$$

Nesta situación, observamos que segundo os diferentes valores que pode tomar n , o semieixe maior e a excentricidade presentarán comportamentos distintos. O estudo da evolución da excentricidade ten unha interese salientable neste caso concreto, pois para valores de n menores a 2.5 (aproximadamente), esta presenta crecemento secular, que se acentúa canto menor sexa n . Por outra banda, para valores de n maiores a 2.5, a excentricidade presenta un comportamento periódico.

Vexamos dous exemplos concretos desta situación. Para ambos casos elixiremos como condicións iniciais: $x = 1$, $y = 0$, $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 1$ e $m = 1$. Tendo en conta as relacións 4.1, vemos que estas condicións iniciais equivalen a $a = 1$ e $e = 0$. Tomamos as unidades de masa e lonxitude tales que $G = 1$. Primeiro (caso 4.3) traballaremos con $n = 1,5$ e

a continuación (caso 4.4) con $n = 3$, para a lei de Eddington-Jeans sendo $\alpha = 0,01$. Así poderemos observar as diferenzas citadas no parágrafo anterior sobre o comportamento da excentricidade. Incluímos agora os cadros cos resultados numéricos para cada caso, respectivamente.

Tempo (t)	Masa (m)	Semieixe maior (a)	Excentricidade (e)
3.300000	0.967799	1.033705	0.020467
6.699999	0.936222	1.068122	0.000693
10.399999	0.903584	1.107221	0.021599
14.399999	0.870183	1.149188	0.001854
18.799999	0.835536	1.197471	0.023031
23.400000	0.801482	1.247706	0.003640
28.600000	0.765434	1.307258	0.024872
34.200000	0.729266	1.371288	0.005852
40.500000	0.691560	1.447086	0.027318
47.300000	0.654051	1.529049	0.008756

Cadro 4.3: Evolución da masa, semieixe maior e excentricidade (caso 4.3).

Tempo (t)	Masa (m)	Semieixe maior (a)	Excentricidade (e)
3.200000	0.969458	1.031916	0.019983
6.499999	0.940721	1.063016	0.001332
10.399999	0.909843	1.099528	0.019956
14.099999	0.883194	1.132255	0.000533
18.399999	0.854982	1.170081	0.019946
23.200000	0.826475	1.209961	0.001253
27.600000	0.802702	1.246288	0.019941
32.400000	0.778971	1.283745	0.000443
38.000000	0.753778	1.327177	0.019937
44.100000	0.728937	1.371861	0.000846

Cadro 4.4: Evolución da masa, semieixe maior e excentricidade (caso 4.4).

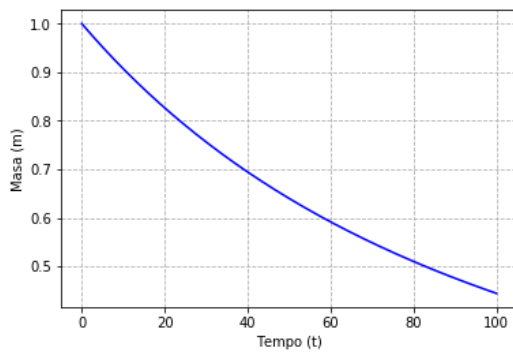
Estes resultados correspóndense cos cinco primeiros máximos e mínimos relativos da excentricidade, no primeiro podemos apreciar que crece secularmente, mentres que no segundo permanece periódica. En canto á masa e ao semieixe maior, no primeiro caso hai unha variación máis rápida de ambos comparado co segundo. Podemos apreciar tamén que

4.2. EXEMPLOS CONCRETOS DO PROBLEMA SEGUNDO J. D. HADJIDEMETRIOU.55

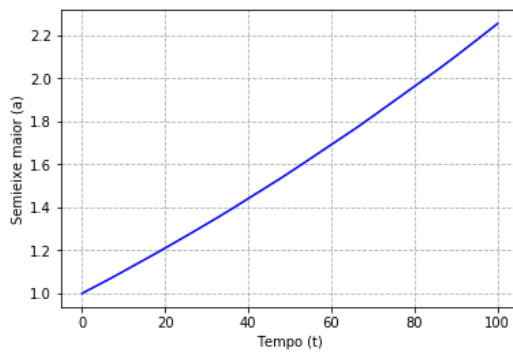
a perda de masa é bastante rápida, en poucos períodos orbitais a cantidade de masa que se perde é considerable. Teñamos en conta que, dado que o período orbital vén dado por

$$P = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mu}},$$

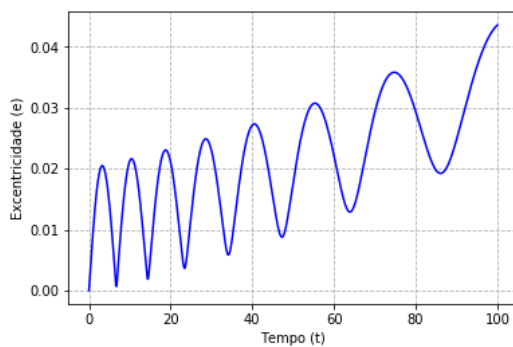
o período no instante inicial é de 2π unidades temporais e este vai crescendo a medida que o semieixe maior crece e a masa decrece, ata chegar a un valor de entre 10 e 11 unidades temporais para os últimos valores que amosamos nos cadros anteriores. Deste xeito vemos que a masa decrece rapidamente en relación á duración dos períodos orbitais. A continuación, na Figura 4.3, ilústrase este comportamento dos elementos orbitais que acabamos de describir.



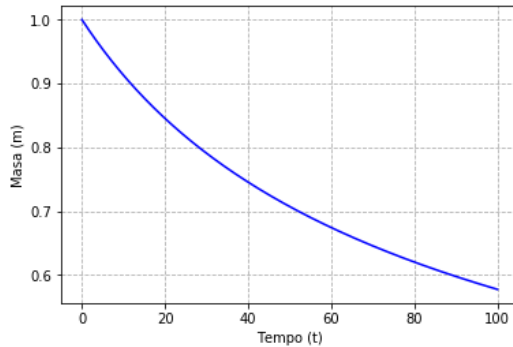
(a) Masa fronte ao tempo ($n = 1,5$).



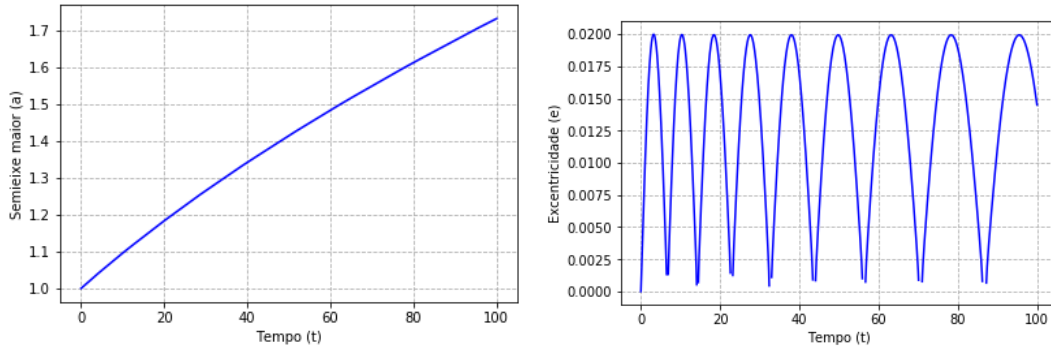
(b) Semieixe maior fronte ao tempo ($n = 1,5$).



(c) Excentricidade fronte ao tempo ($n = 1,5$).



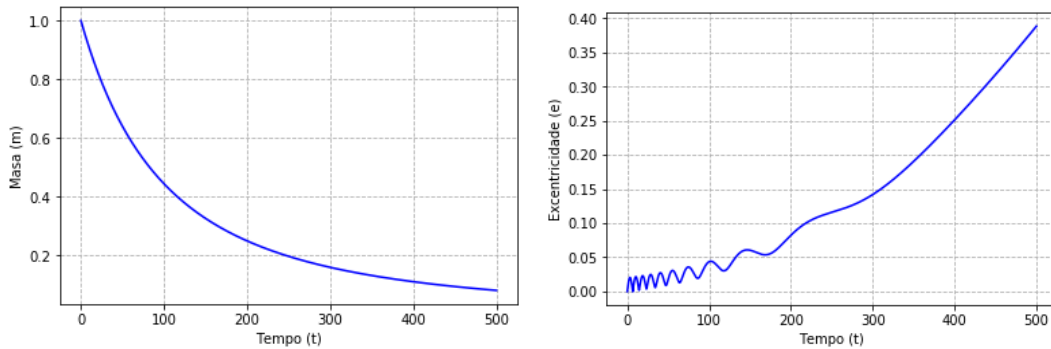
(d) Masa fronte ao tempo ($n = 3$).



(e) Semieixe maior fronte ao tempo ($n = 3$). (f) Excentricidade fronte ao tempo ($n = 3$).

Figura 4.3: Evolución dos elementos orbitais respecto do tempo nos casos 4.3 e 4.4.

No caso en que $n = 1,5$ (caso 4.3), cando a masa comeza a esgotarse, a excentricidade experimenta un crecemento moito máis rápido e ademais perde a compoñente periódica que presenta cando a masa ten valores máis elevados. Podemos observalo na Figura 4.4.



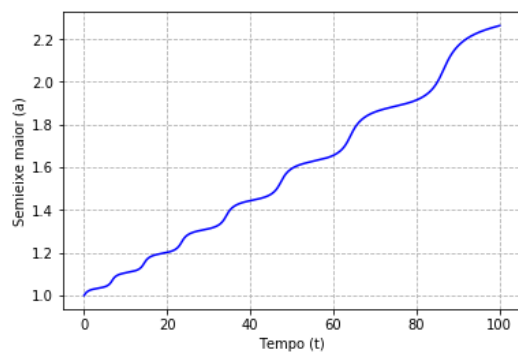
(a) Masa fronte ao tempo ($n = 1,5$). (b) Excentricidade fronte ao tempo ($n = 1,5$).

Figura 4.4: Evolución da excentricidade cando a masa está preto de esgotarse no caso 4.3.

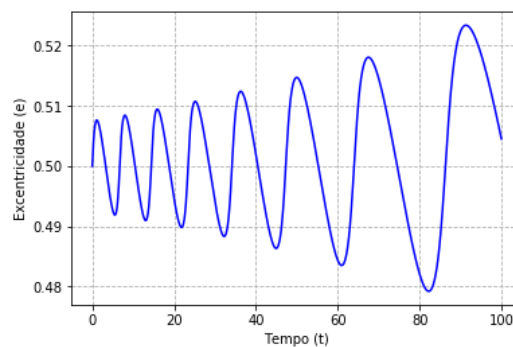
Pasemos agora a contemplar outros casos nos que a excentricidade inicial non sexa nula. Realizaremos a integración do sistema 2.41 xunto coa lei de perda de masa $\dot{m} = -0,01m^n$. Iremos analizando diferentes exemplos para valores distintos de n e distintas excentricidades iniciais para extraer as conclusións pertinentes sobre a influencia destes dous valores na evolución do sistema durante cen unidades temporais.

Incluimos de seguido na Figura 4.5 as gráficas correspondentes a este caso 4.5 elixindo como condicións iniciais $m = 1$, $a = 1$, $e = 0,5$, $\omega = 0$ e $f = 0$. As unidades están tomadas de xeito que $G = 1$.

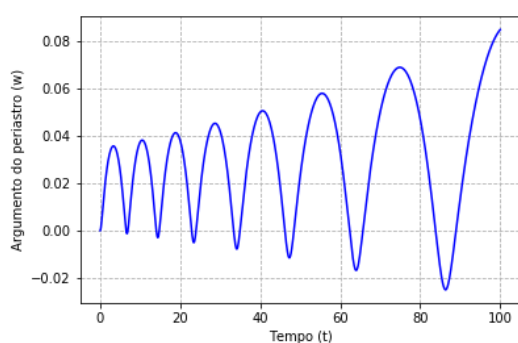
4.2. EXEMPLOS CONCRETOS DO PROBLEMA SEGUNDO J. D. HADJIDEMETRIOU.57



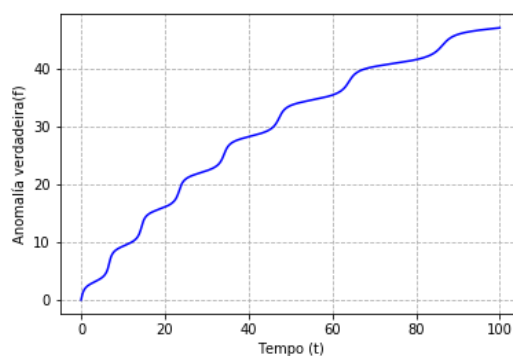
(a) Semieixe maior fronte ao tempo ($n = 1,5$).



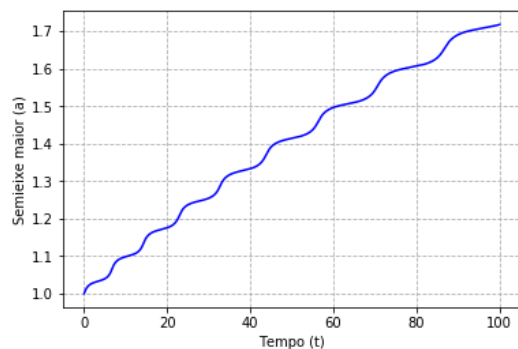
(b) Excentricidade fronte ao tempo ($n = 1,5$).



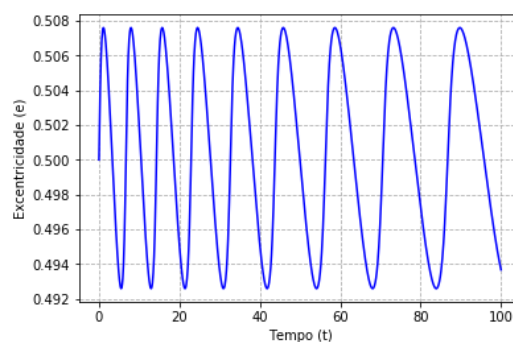
(c) Argumento do periastro fronte ao tempo ($n = 1,5$).



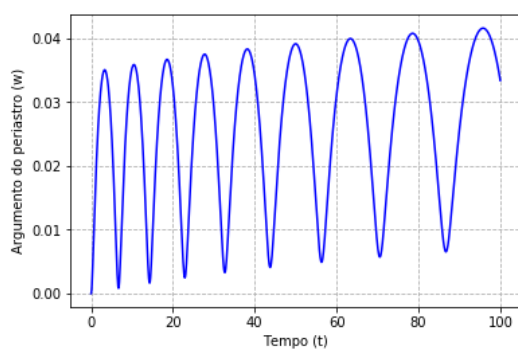
(d) Anomalia verdadeira fronte ao tempo ($n = 1,5$).



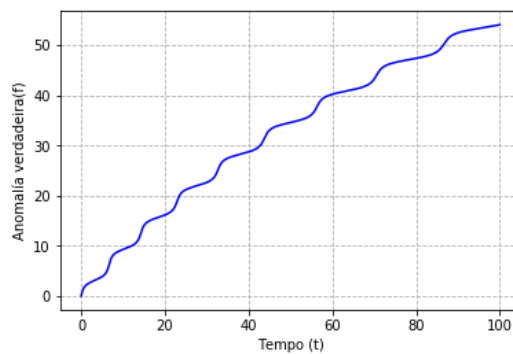
(e) Semieixe maior fronte ao tempo ($n = 3$).



(f) Excentricidade fronte ao tempo ($n = 3$).



(g) Argumento do periastro fronte ao tempo ($n = 3$).

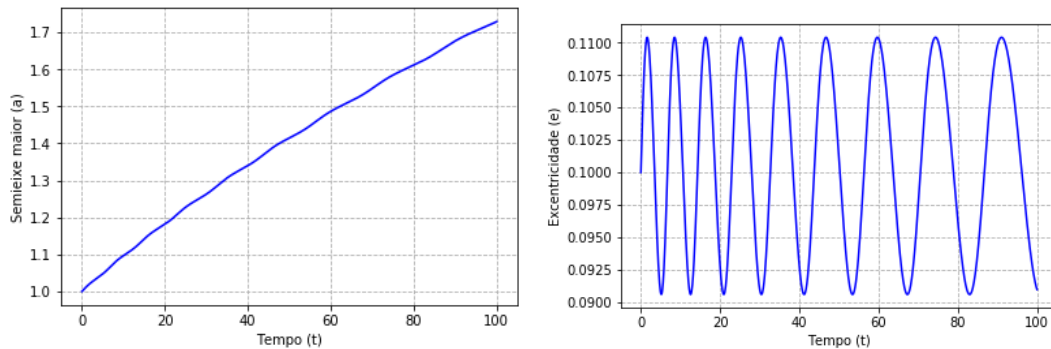


(h) Anomalia verdadeira fronte ao tempo ($n = 3$).

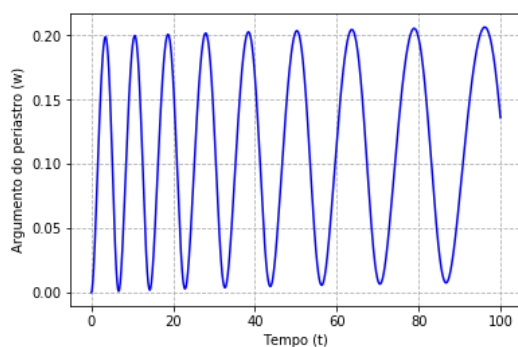
Figura 4.5: Evoluç3o dos elementos orbitais respecto do tempo no caso 4.5.

Para ambos valores de n (1.5 e 3), o semieixe maior presenta crecemento secular. En xeral, a menor valor de n , é máis rápido o crecemento do semieixe maior e máis lento o da anomalía verdadeira. En canto á excentricidade e ao argumento do periastro, presentan un comportamento claramente periódico. A medida que n vai crescendo (a partir de $n = 2,5$ aproximadamente), o argumento do periastro sofre tamén un leve crecemento secular como podemos observar na gráfica (g). Advirtamos tamén que cando $n = 1,5$, a excentricidade non presenta a compoñente secular crecente que si presentaba no caso visto previamente, cando $e_0 = 0$.

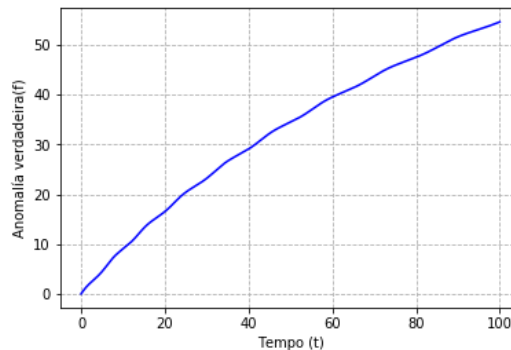
A excentricidade inicial do sistema afecta lixeiramente á evolución deste. Na Figura 4.6 incluímos as gráficas correspondentes ao caso $n = 3$, pero para sistemas con excentricidades iniciais 0.1 e 0.9 respectivamente (caso 4.6). Podemos observar que a evolución do semieixe maior e da anomalía verdadeira é análoga ao caso anterior, presentan crecemento secular pero o difiren no xeito en que crecen respecto do caso previo. En canto á excentricidade, cando $e_0 = 0,1$, o comportamento é periódico como no caso 4.5, cando $e_0 = 0,9$ o comportamento é periódico tamén pero cunha pequena diferenza que fai decrecer a excentricidade nos primeiros instantes. O argumento do periastro tamén segue comportándose de forma periódica cun lixeiro crecemento secular tras os primeiros instantes temporais cando $n = 3$, ao igual que no caso anterior.



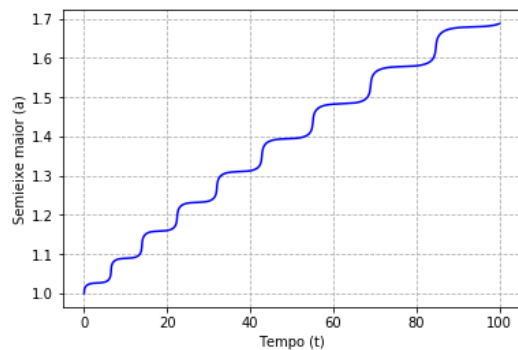
(a) Semieixe maior fronte ao tempo ($e_0 = 0,1$). (b) Excentricidade fronte ao tempo ($e_0 = 0,1$).



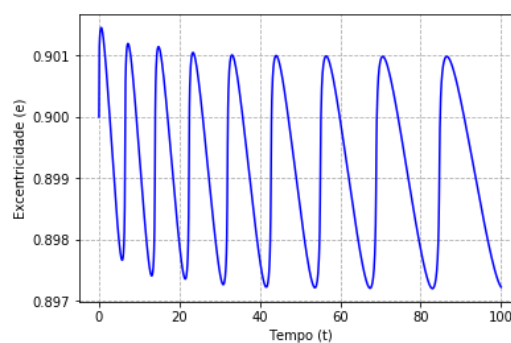
(c) Argumento do periastro fronte ao tempo ($e_0 = 0,1$).



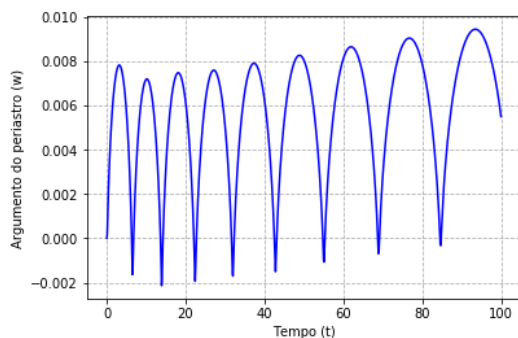
(d) Anomalia verdadeira fronte ao tempo ($e_0 = 0,1$).



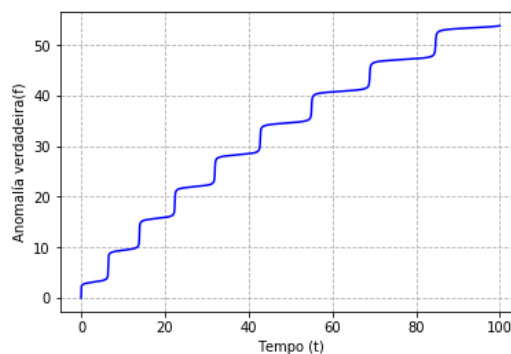
(e) Semieixe maior fronte ao tempo ($e_0 = 0,9$).



(f) Excentricidade fronte ao tempo ($e_0 = 0,9$).



(g) Argumento do periastro fronte ao tempo ($e_0 = 0,9$).



(h) Anomalia verdadeira fronte ao tempo ($e_0 = 0,9$).

Figura 4.6: Evoluç3o dos elementos orbitais respecto do tempo no caso 4.6.

4.3. Casos prácticos de perda de masa por efecto periastro.

No segundo artigo que tratamos [6] na sección do terceiro capítulo correspondente a este tipo de perda de masa, M. Andrade e J. A. Docobo contemplan unha lei de variación de masa que diferencia entre a perda de masa de cada unha das compoñentes ademais de engadir un termo coa dependencia da distancia, lembremos:

$$\dot{\mu}(t; r, p_\theta) = -\alpha_1 \mu_1^n(t) - \alpha_2 \mu_2^q(t) - \beta \frac{p_\theta}{r^2}. \quad (4.2)$$

Integrando o sistema formado por 3.5 e 3.6

$$\begin{aligned} \frac{dp_\theta}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\beta}{r}, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{r^3} - \frac{\mu(t)}{r^2} + \beta \frac{\theta}{r^2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = p_r, \\ \frac{d\mu_1}{dt} &= -\alpha_1 \mu_1^n, \\ \frac{d\mu_2}{dt} &= -\alpha_2 \mu_2^q, \end{aligned}$$

obtemos a variación dos elementos orbitais deste problema tal como vimos na sección correspondente a este problema no terceiro capítulo. Pasemos agora a ver catro casos distintos (4.7, 4.8, 4.9 e 4.10). As condicións iniciais aparecen no Cadro 4.5, as unidades de tempo, masa e distancia están tomadas tales que $G = 1$. As diferenzas atópanse nos valores asignados aos parámetros α_1 , α_2 e β en cada situación. Ao igual que nos casos anteriores, o método de integración utilizado é un Runge-Kutta de orde catro.

m_{1_0}	m_{2_0}	a_0	e_0	ω_0	f_0	P_0	n	q
0.7	0.3	1	0.2	0	0	2π	2	2

Cadro 4.5: Condicións iniciais para os catro casos.

Caso 4.7: Se tomamos os seguintes valores para os parámetros: $\alpha_1 = 10^{-4}$, $\alpha_2 = 10^{-5}$ e $\beta = 0$; estamos ante o problema de Gylden-Mestschersky xa visto no segundo capítulo só que tratado de xeito que cada compoñente do sistema ten unha perda de masa diferente. É dicir, a masa varía dependendo só do tempo. Botando unha ollada ás gráficas da Figura 4.7, podemos ver que o semieixe maior e o período orbital son crecentes mentres que a excentricidade ten un claro comportamento periódico.

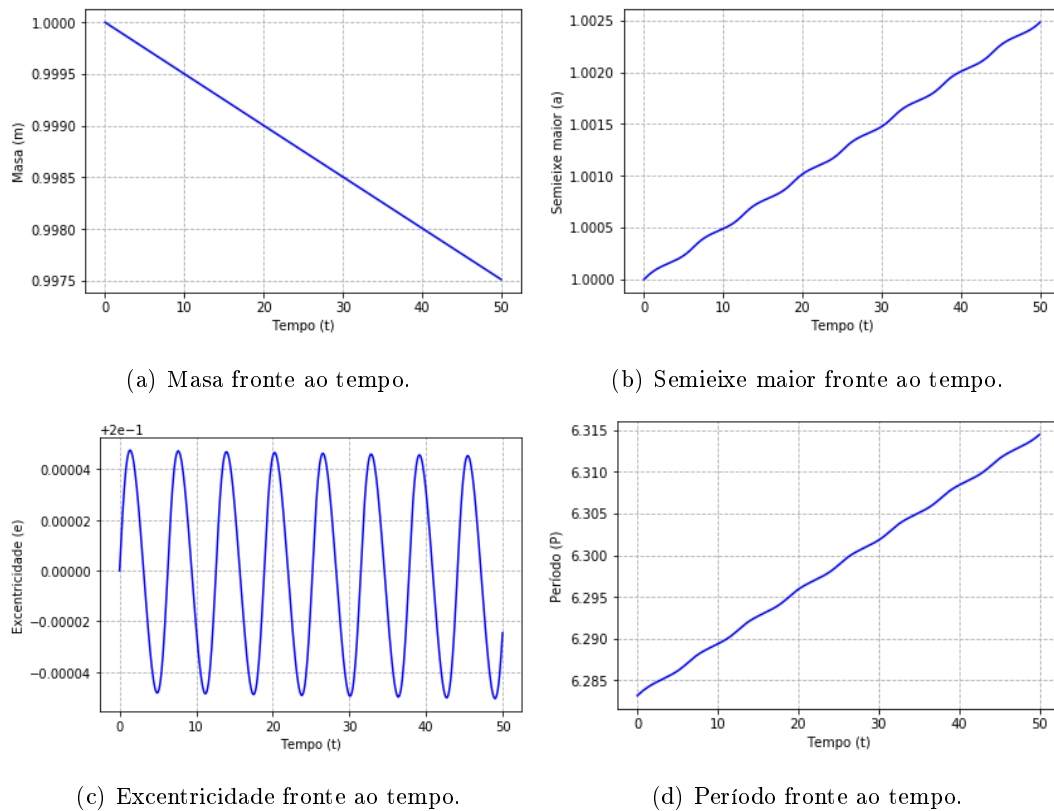
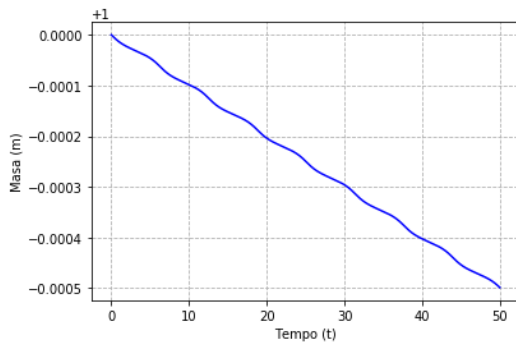
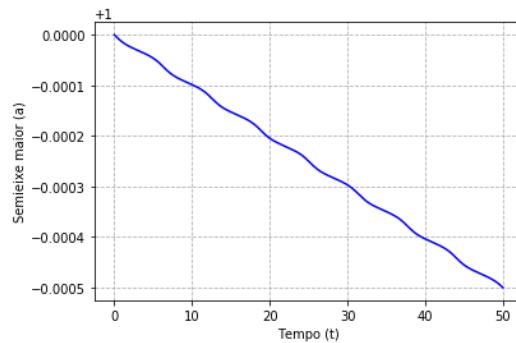


Figura 4.7: Evolución dos elementos orbitais no caso 4.7.

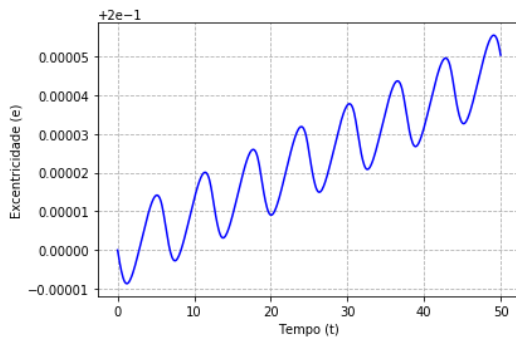
Caso 4.8: Vexamos que ocorre se tomamos como parámetros: $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ e $\beta = 10^{-5}$. Nesta tesitura estamos ante un caso de perda de masa só dependente da distancia, sen dependencia temporal. Poderíamos dicir que estamos ante un caso de efecto periastro puro. Agora, como podemos observar na Figura 4.8, a evolución do sistema é completamente diferente ao caso anterior. O semieixe maior e o período orbital pasan a presentar decrecemento. Ademais, aquí queda ben claro que a lei de perda de masa 4.2 fai que a masa se perda de xeito proporcional ao inverso da distancia e, por outra banda, a excentricidade presenta un carácter de crecemento secular acompañado doutra perturbación periódica.



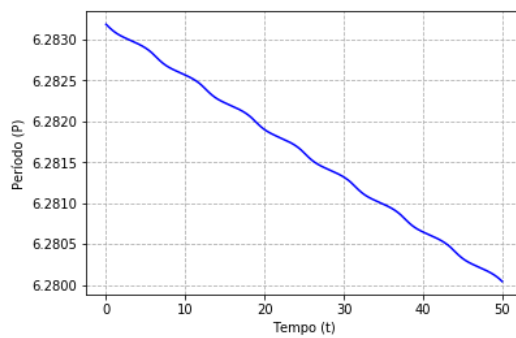
(a) Masa fronte ao tempo.



(b) Semieixe maior fronte ao tempo.



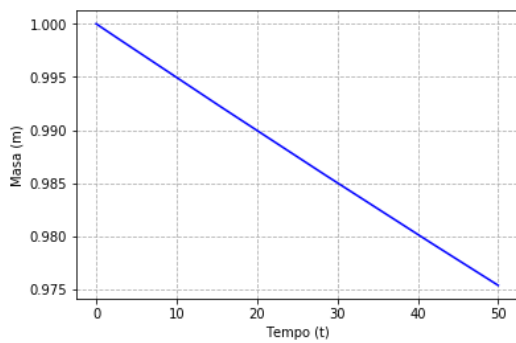
(c) Excentricidade fronte ao tempo.



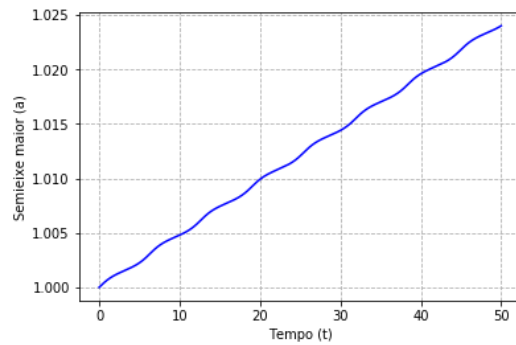
(d) Período orbital fronte ao tempo.

Figura 4.8: Evolución dos elementos orbitais no caso 4.8.

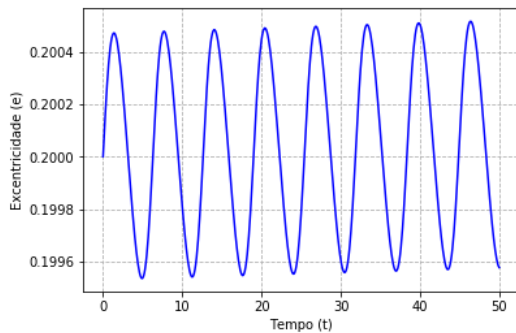
Caso 4.9: Tratemus agora o caso que probablemente resulte máis interesante dos catro, a perda de masa depende da variable temporal e do efecto periastro entendido como unha perturbación, isto é, o parámetro β será de orde menor que o resto. Tomemos neste caso: $\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_2 = 10^{-4}$ e $\beta = 10^{-5}$. Observamos na Figura 4.9 que o comportamento do semieixe maior e do período orbital é semellante ao do primeiro caso. Por outra banda, a excentricidade presenta unha compoñente secular, agora lentamente crecente ademais do seu carácter periódico. Este comportamento crecente será máis acentuado, loxicamente, canto maior sexa o parámetro β .



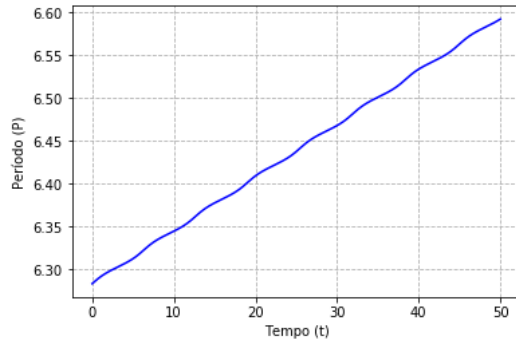
(a) Masa fronte ao tempo.



(b) Semieixe maior fronte ao tempo.



(c) Excentricidade fronte ao tempo.



(d) Período orbital fronte ao tempo.

Figura 4.9: Evolución dos elementos orbitais no caso 4.9.

Caso 4.10: Contemplemos, por último, o escenario en que: $\alpha_1 = 10^{-5}$, $\alpha_2 = 10^{-5}$ e $\beta = 10^{-5}$; é dicir, aquel no que o parámetro relativo ao efecto periastro é da mesma orde que os relativos á perda de masa dependente do tempo. Vemos que o comportamento dos elementos orbitais é semellante ao do segundo caso agás para o período, xa que este, a diferenza do que acontecía entón, presenta un aumento secular co tempo.

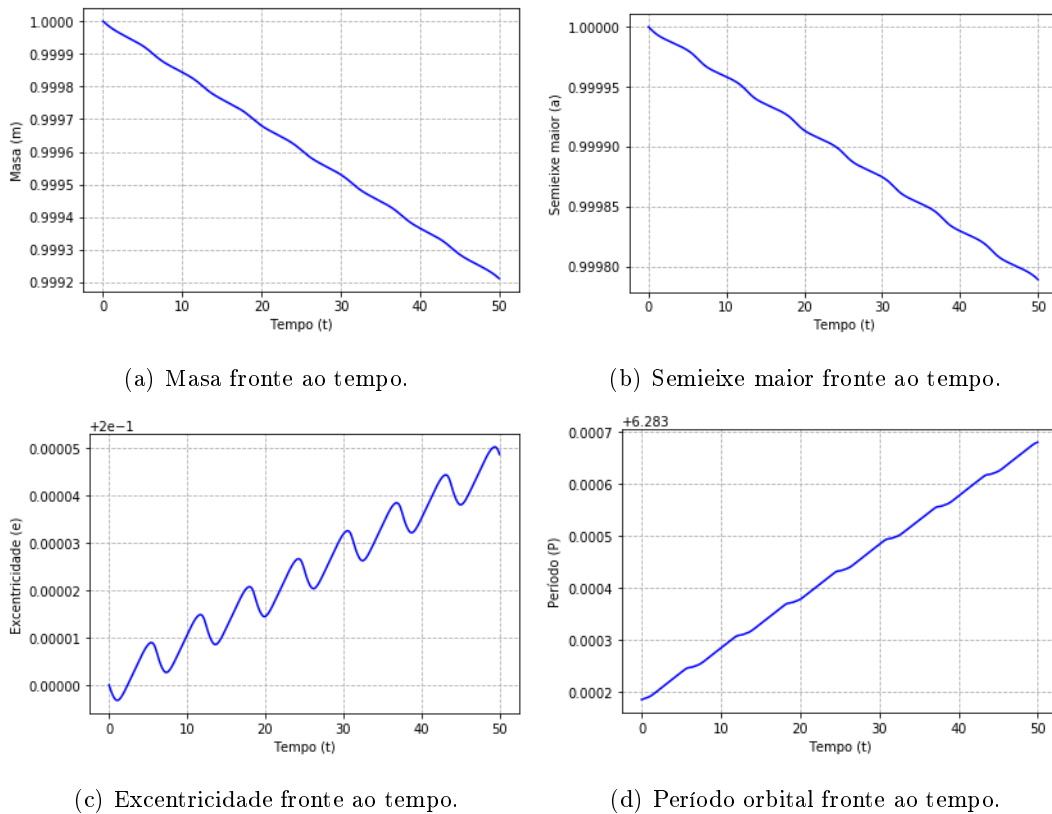


Figura 4.10: Evolución dos elementos orbitais no caso 4.10.

Como conclusión desta sección 4.3, podemos dicir que nos casos extremos, ou sexa, masa dependente só do tempo e masa dependente só da distancia, o comportamento da excentricidade é no primeiro caso estritamente periódico, mentres que no segundo é fundamentalmente de crecemento secular. En relación co semieixe maior, existe aumento secular na primeira situación e decrecemento na segunda. Considerando distintas relacións entre os parámetros α_i e β , poderemos obter unha familia intermedia de distintos comportamentos tal como xa o comentaron no seu día Andrade e Docobo.

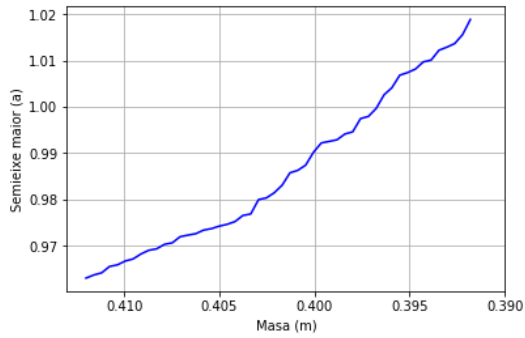
4.4. Caso real de exección de masa.

Tras tratar na segunda sección do capítulo terceiro os fundamentos teóricos deste tipo de perda de masa, imos ver agora unha aplicación a un caso real, a binaria HU Delphini (WDS 20298+0941). Trátase dun sistema de curto período formado por dúas compoñentes de tipo espectral tardío, concretamente, as súas compoñentes son de tipo M5 e M6. Os datos orbitais que coñecemos deste sistema son os seguintes [10]: o período é de $1,4731 \pm 0,0008$ anos, a excentricidade é $0,519 \pm 0,003$ e o semieixe maior de $0,963 \pm 0,007$ unidades astronómicas. Con estes datos podemos obter a masa da estrela dobre (en masas solares) a través da seguinte expresión:

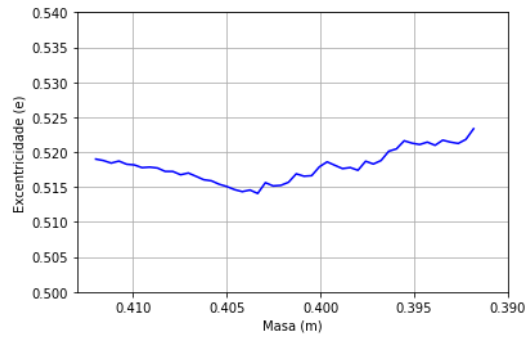
$$m = \frac{a^3}{P^2} = 0,412 \pm 0,009 \text{ masas solares.}$$

Esta masa total tan baixa está de acordo cos tipos espectrais das compoñentes. Unha vez obtida a masa do sistema, imos supoñer que esta binaria, que nun principio cumpriría as condicións para iso, sofre execcións de masa. Deste xeito podemos proceder a estudar a evolución da súa órbita. Consideraremos o transcurso de períodos orbitais necesario como para que ocorran cincuenta execcións de masa, isto é, a razón de perda do 0,1 % de masa por exección, ata que a masa do sistema sexa de 0.3914 masas solares.

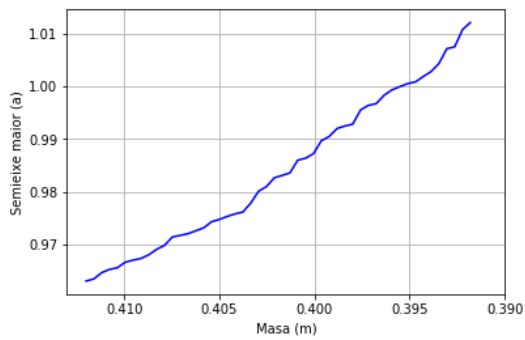
Se supoñemos en primeiro lugar que as execcións están distribuídas aleatoriamente ao longo do período orbital, o semieixe maior presenta un comportamento crecente ao longo do tempo. A excentricidade amosa intervalos de crecemento e de decrecemento en función de onde se teña producido a exección, tal como explicamos no terceiro capítulo. A pesar deste comportamento, en liñas xerais podemos dicir que a excentricidade non sofre cambios bruscos segundo se apreciar na Figura 4.11. Nesta, incluimos a evolución do semieixe maior e da excentricidade para tres simulacións diferentes. Como as execcións teñen distribución aleatoria, cada simulación que realicemos fará evolucionar de xeito diferente ao sistema binario, aínda que o comportamento xeral mantense. Cada simulación correspóndese cunha execución do programa, cuxo código xera números aleatorios que determinan en que punto da órbita ocorre a exección, tal como explicamos no capítulo terceiro.



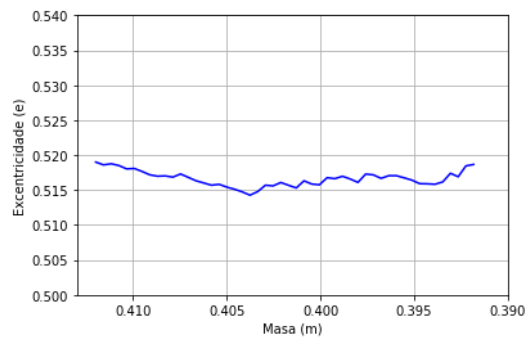
(a) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.11)



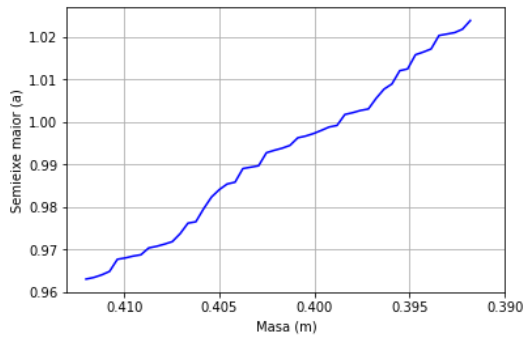
(b) Excentricidade fronte á masa (caso 4.11)



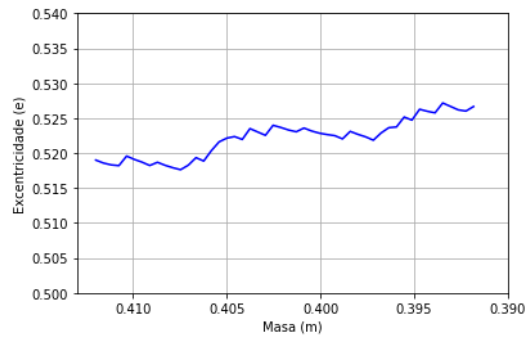
(c) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.12)



(d) Excentricidade fronte á masa (caso 4.12)



(e) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.13)

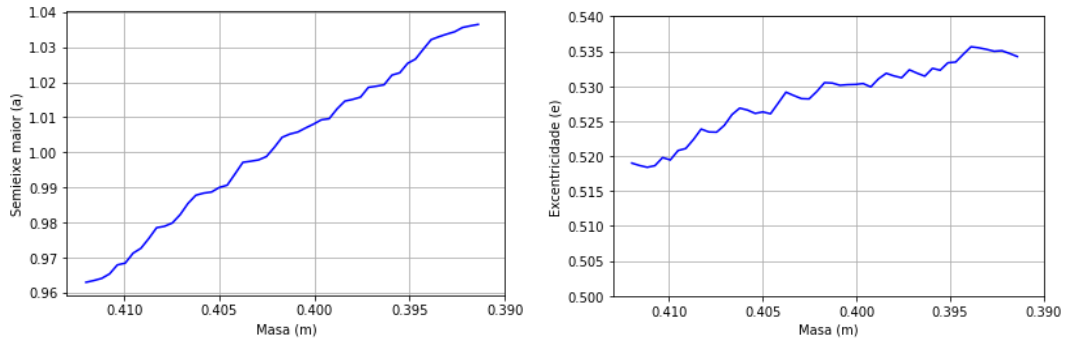


(f) Excentricidade fronte á masa (caso 4.13)

Figura 4.11: Evolución do semieixe maior e da excentricidade para execcións distribuídas aleatoriamente ao longo do período orbital.

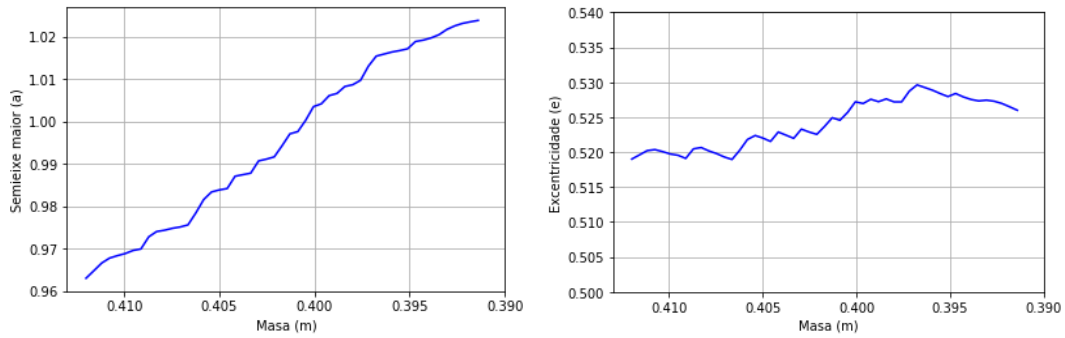
Por outra banda, se supoñemos que as execcións son máis frecuentes na zona do periastro (o que podería estar xustificado se a atracción gravitacional entre as compoñentes influíse neste proceso), o semieixe maior presenta igualmente un comportamento crecente. A diferenza do que acontece cando as execcións están aleatoriamente distribuídas ao longo do período orbital, a excentricidade aparece con claro carácter crecente, tal e como expli-

cabamos no terceiro capítulo cando tratábamos o problema teoricamente. A continuación incluímos na Figura 4.12 as gráficas correspondentes a tres simulacións desta casuística. Ao igual que nos casos anteriores, cada simulación correspóndese cunha execución do programa que produce a exección de masa, neste caso con maior frecuencia na zona do periastro.



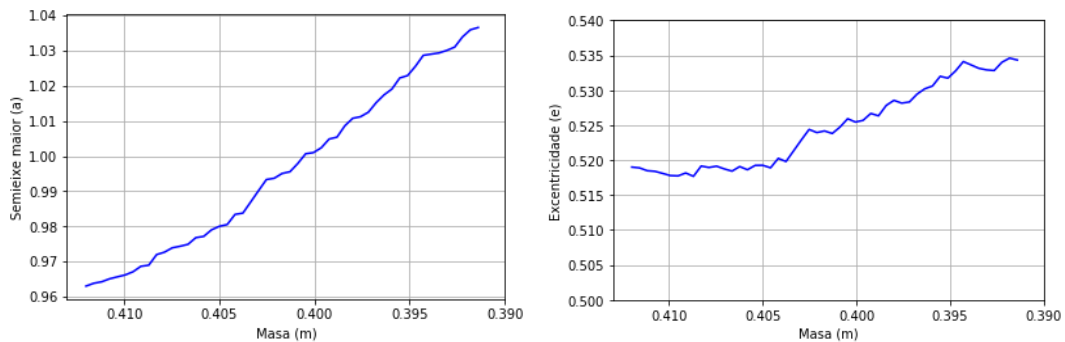
(a) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.14)

(b) Excentricidade fronte á masa (caso 4.14)



(c) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.15)

(d) Excentricidade fronte á masa (caso 4.15)



(e) Semieixe maior fronte á masa (caso 4.16)

(f) Excentricidade fronte á masa (caso 4.16)

Figura 4.12: Evolución do semieixe maior e da excentricidade para execcións máis frecuentes na zona do periastro.

Conclusións

O obxectivo deste traballo era proporcionar unha visión actual acerca do fenómeno de variación de masa en diferentes situacións teóricas, así como noutras que podemos atopar no propio universo. Fixemos un percorrido polos principais autores nesta materia e por diversos escenarios e casos reais de perda de masa.

A exposición do Problema de dous corpos sen variación de masa foi fundamental para poder elaborar o resto do texto, xa que resultou imprescindible fixar uns coñecementos previos antes de afondar na materia en cuestión. Posteriormente, introducimos o concepto de elementos orbitais, pois o estudo da súa evolución é o que nos permitiu caracterizar as distintas leis de perda de masa. No primeiro capítulo, démoslle tamén a importancia necesaria ás nocións básicas sobre a formulación hamiltoniana do problema. Esta permitiunos estudar casos concretos tratados ao longo do traballo.

A recompilación bibliográfica foi así mesmo de vital importancia para a creación dos capítulos centrais do traballo, a perspectiva histórica e as diferentes visións de varios autores axudáronos a comprender o Problema de dous corpos con masa variable e, particularmente, o de perda lenta de masa. No segundo capítulo fixemos un resumo dos fundamentos teóricos desenvolvidos polos pioneiros no estudo do problema. Gylden e Mestschersky, autores tratados no texto, probaron mediante unha serie de transformacións que o caso de masa variable é integrable nalgúns casos, ao igual que ocorre no caso non perturbado. A nosa contribución aquí, a parte de poñernos ao día sobre distintas achegas, foi desenvolver polo miúdo todos os pasos a realizar, cousa que non temos visto publicada anteriormente. Neste capítulo comezamos tamén a dar conta de numerosos resultados obtidos por Docobo e colaboradores. De xeito análogo ao capítulo primeiro, demos unha perspectiva hamiltoniana á formulación, obtendo a partir dela as Ecuacións de Lagrange, ao tempo que demos conta das solucións analíticas obtidas por Prieto e Docobo. Para rematar, tratamos a visión que Hadjidemetriou deu a este problema, á vez físico e matemático, tratando a perda de masa como unha perturbación.

Unha vez asentadas as bases teóricas na materia, ao longo do terceiro capítulo tivemos en conta tres escenarios concretos de variación de masa. Estes casos quizais presenten maior

interese práctico, pois son resultado da necesidade de explicar certos fenómenos observados na dinámica estelar. O efecto periastro podería explicar o comportamento de certos sistemas binarios pechados con excentricidades elevadas, cando o normal é que tendan cara órbitas circulares se as dúas compoñentes están moi preto. O caso de exceción de masa, tamén dá conta de como evolucionan certos sistemas reais. Neste senso realizamos unha aplicación a un sistema binario concreto. Tampouco quixemos deixar sen comentar o intercambio de masa entre as compoñentes de sistemas pechados.

Poderíamos dicir que, alén do desenvolvemento dos fundamentos teóricos que cumpríu para a elaboración do texto, a parte relativa á programación presenta especial interese e importancia, xa que pode ser de utilidade para estudar a evolución de multitude de sistemas binarios baixo algunhas condicións máis ou menos restritivas. Precisamente, toda esta parte de programación correspóndese coa achega máis orixinal por parte de quen subscribe.

A nivel persoal, a elaboración deste Traballo de Fin de Grao supuxo un reto no sentido positivo da palabra pois, a pesar de ser unha temática relativamente nova para o autor, foi unha experiencia interesante e enriquecedora. A materia de Fundamentos de Astronomía supuxo un aliciente importante á hora da escolla e realización do traballo, aínda que obviamente foi preciso, non sen esforzo, ampliar e iniciar novos coñecementos de Astrodinámica seguindo sempre os consellos e directrices do meu titor. Tamén dicir que o interese en continuar coa formación neste ámbito durante o posgraduado foi significativo á hora de realizar este texto.

Apéndice

Listing 1: Caso particular das solucións de Mestschersky.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m0=1
t0=0
alfa=0.005
e=0.1
a=1
b=a*math.sqrt(1-e**2)
N=100000
beta=np.linspace(0,6*math.pi,N)
t=np.linspace(0,4.5,N)

def masa(t):
    m=1/((1/m0)+alfa*(t-t0))
    return(m)

def funx(t,beta):
    f1=a*(1+alfa*t)*np.cos(beta)
    return f1

def funy(t,beta):
    f2=b*(1+alfa*t)*np.sin(beta)
    return f2

x=funx(t,beta)
y=funy(t,beta)

plt.figure(figsize=(5,5))
plt.plot(x,y)
plt.ylabel('Eixe_y')
plt.xlabel('Eixe_x')
```

```
plt.xlim(-3.5,3.5)
plt.ylim(-3.5,3.5)
plt.grid(color='lightgray',linestyle='--')
plt.show()
```

Listing 2: Caso 4.1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa=10**(-3)
beta2=10**(-4)
G=1

def dm(m,a,e,w,f,t):
    dm=(-alfa/((1+alfa*t)**2)-(alfa*beta2*(1+np.cos(f))**2)/((a**2)
        *((1-e**2)**2)))
    return dm
def da(m,a,e,w,f,t):
    da=a*((1+2*e*np.cos(f)+e**2)/(1-e**2))*((alfa*((a*(1-e**2))/(1+np
        .cos(f)))**2+beta2*(1+alfa*t)**2)/((1+alfa*t)*((a*(1-e**2))/(1+
        e*np.cos(f)))**2-beta2*(1+alfa*t)**2)))
    return da
def de(m,a,e,w,f,t):
    de=-(e*np.cos(f))*((alfa*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))**2+beta2
        *(1+alfa*t)**2)/((1+alfa*t)*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))**2-
        beta2*(1+alfa*t)**2)))
    return de
def dw(m,a,e,w,f,t):
    dw=((np.sin(f)/e)*((alfa*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))**2+beta2
        *(1+alfa*t)**2)/((1+alfa*t)*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))**2-
        beta2*(1+alfa*t)**2)))
    return dw
def df(m,a,e,w,f,t):
    df=(np.sqrt(G*m*a*(1-e**2))*((1+np.cos(f))**2)/(a**2*((1-e**2)
        **2))+np.sin(f)/e)*((alfa*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))**2+
        beta2*(1+alfa*t)**2)/((1+alfa*t)*((a*(1-e**2))/(1+np.cos(f)))
        **2-beta2*(1+alfa*t)**2)))
    return df

deltat=0.1
t=0
m=1
a=1
e=0.5
```



```

w=0
f=0

vt=[];vm=[];va=[];ve=[];vw=[];vf=[]
vt.append(t);vm.append(m);va.append(a);ve.append(e);vw.append(w);vf.append(f)
)

for i in range(1000):
    t=t+deltat
    k1=deltat*dm(m,a,e,w,f,t)
    h1=deltat*da(m,a,e,w,f,t)
    l1=deltat*de(m,a,e,w,f,t)
    r1=deltat*dw(m,a,e,w,f,t)
    s1=deltat*df(m,a,e,w,f,t)

    k2=deltat*dm(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    h2=deltat*da(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    l2=deltat*de(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    r2=deltat*dw(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    s2=deltat*df(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)

    k3=deltat*dm(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    h3=deltat*da(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    l3=deltat*de(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    r3=deltat*dw(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    s3=deltat*df(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)

    k4=deltat*dm(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    h4=deltat*da(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    l4=deltat*de(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    r4=deltat*dw(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    s4=deltat*df(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)

m=m+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6
a=a+h1/6+h2/3+h3/3+h4/6

```

```

    e=e+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6
    w=w+r1/6+r2/3+r3/3+r4/6
    f=f+s1/6+s2/3+s3/3+s4/6
    vt.append(t)
    vm.append(m)
    va.append(a)
    ve.append(e)
    vw.append(w)
    vf.append(f)

plt.plot(vt,vm,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Masa_(m)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,va,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,ve,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vw,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Argumento_do_periastro_(w)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vf,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

```

Listing 3: Caso 4.2.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

alfa=10**(-4)
beta3=10**(-5)
beta4=10**(-5)
G=1

def dm(m, a, e, w, f, t):
    dm=((-alfa * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))**4)**4+2*alfa*beta3 * (((a
        *(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))) * ((1+alfa*t)**3)-3*alfa*beta4*((1+
        alfa*t)**4)) / (((1+alfa*t)**2) * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))**4)
        ))
    return dm

def da(m, a, e, w, f, t):
    da=-a * ((1+2*e*np.cos(f)+e**2)/(1-e**2)) * ((-alfa * (((a*(1-e**2))/(1+e
        np.cos(f)))**4)+2*alfa*beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+
        alfa*t)**3)-3*alfa*beta4 * ((1+alfa*t)**4)) / ((1+alfa*t) * (((a*(1-e
        **2))/(1+e*np.cos(f)))**4))+beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))
        * ((1+alfa*t)**3)-beta4 * ((1+alfa*t)**4)))
    return da

def de(m, a, e, w, f, t):
    de=-(e*np.cos(f)) * ((-alfa * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))**4)+2*alfa
        *beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)**3)-3*alfa*
        beta4 * ((1+alfa*t)**4)) / ((1+alfa*t) * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)
        ))**4))+beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)**3)-
        beta4 * ((1+alfa*t)**4)))
    return de

def dw(m, a, e, w, f, t):
    dw=-((np.sin(f))/e) * ((-alfa * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))**4)+2*
        alfa*beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)**3)-3*alfa*
        beta4 * ((1+alfa*t)**4)) / ((1+alfa*t) * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)
        ))**4))+beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)**3)-
        beta4 * ((1+alfa*t)**4)))
    return dw

def df(m, a, e, w, f, t):
    df=(np.sqrt(G*m*a*(1-e**2)) * ((1+e*np.cos(f))**2)) / (a**2 * ((1-e**2)
        **2)) + (np.sin(f)/e) * ((-alfa * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f)))**4)
        +2*alfa*beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)**3)-3*
        alfa*beta4 * ((1+alfa*t)**4)) / ((1+alfa*t) * (((a*(1-e**2))/(1+e*np.
        cos(f)))**4))+beta3 * ((a*(1-e**2))/(1+e*np.cos(f))) * ((1+alfa*t)
        **3)-beta4 * ((1+alfa*t)**4)))
    return df

deltat=0.1
t=0
m=1
a=1

```

```

e=0.5
w=0
f=0

vt=[];vm=[];va=[];ve=[];vw=[];vf=[]
vt.append(t);vm.append(m);va.append(a);ve.append(e);vw.append(w);vf.append(f)
)

for i in range(1000):
    t=t+deltat
    k1=deltat*dm(m,a,e,w,f,t)
    h1=deltat*da(m,a,e,w,f,t)
    l1=deltat*de(m,a,e,w,f,t)
    r1=deltat*dw(m,a,e,w,f,t)
    s1=deltat*df(m,a,e,w,f,t)

    k2=deltat*dm(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    h2=deltat*da(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    l2=deltat*de(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    r2=deltat*dw(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    s2=deltat*df(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)

    k3=deltat*dm(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    h3=deltat*da(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    l3=deltat*de(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    r3=deltat*dw(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    s3=deltat*df(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)

    k4=deltat*dm(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    h4=deltat*da(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    l4=deltat*de(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    r4=deltat*dw(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    s4=deltat*df(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)

m=m+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6

```

```

    a=a+h1/6+h2/3+h3/3+h4/6
    e=e+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6
    w=w+r1/6+r2/3+r3/3+r4/6
    f=f+s1/6+s2/3+s3/3+s4/6
    vt.append(t)
    vm.append(m)
    va.append(a)
    ve.append(e)
    vw.append(w)
    vf.append(f)

plt.plot(vt,vm,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Masa_(m)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,va,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,ve,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vw,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Argumento_do_periastro_(w)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vf,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

```

Listing 4: Casos 4.3 e 4.4

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

```

```

alfa=0.01
G=1
n=3

def dx(x,y,u,v,m,t):
    dx=u
    return dx
def dy(x,y,u,v,m,t):
    dy=v
    return dy
def du(x,y,u,v,m,t):
    du=(-G*m*x)/((np.sqrt(x**2+y**2))**3)
    return du
def dv(x,y,u,v,m,t):
    dv=(-G*m*y)/((np.sqrt(x**2+y**2))**3)
    return dv
def dm(x,y,u,v,m,t):
    dm=-alfa*(m**n)
    return dm

deltat=0.1
t=0
m=1
x=1
y=0
u=0
v=1
a=1
e=0
c=np.sqrt(G*m*a*(1-e**2))

vt=[];vm=[];vx=[];vy=[];vu=[];vv=[];va=[];ve=[]
vt.append(t);vm.append(m);vx.append(x);vy.append(y);vu.append(u);vv.append(v)
)
va.append(a);ve.append(e)

for i in range(1000):
    t=t+deltat
    k1=deltat*dx(x,y,u,v,m,t)
    h1=deltat*dy(x,y,u,v,m,t)
    l1=deltat*du(x,y,u,v,m,t)
    r1=deltat*dv(x,y,u,v,m,t)
    s1=deltat*dm(x,y,u,v,m,t)

    k2=deltat*dx(x+0.5*k1,y+0.5*h1,u+0.5*l1,v+0.5*r1,m+0.5*s1,t+0.5*

```

```

    deltat )
h2=deltat*dy(x+0.5*k1,y+0.5*h1,u+0.5*l1,v+0.5*r1,m+0.5*s1,t+0.5*
    deltat )
l2=deltat*du(x+0.5*k1,y+0.5*h1,u+0.5*l1,v+0.5*r1,m+0.5*s1,t+0.5*
    deltat )
r2=deltat*dv(x+0.5*k1,y+0.5*h1,u+0.5*l1,v+0.5*r1,m+0.5*s1,t+0.5*
    deltat )
s2=deltat*dm(x+0.5*k1,y+0.5*h1,u+0.5*l1,v+0.5*r1,m+0.5*s1,t+0.5*
    deltat )

k3=deltat*dx(x+0.5*k2,y+0.5*h2,u+0.5*l2,v+0.5*r2,m+0.5*s2,t+0.5*
    deltat )
h3=deltat*dy(x+0.5*k2,y+0.5*h2,u+0.5*l2,v+0.5*r2,m+0.5*s2,t+0.5*
    deltat )
l3=deltat*du(x+0.5*k2,y+0.5*h2,u+0.5*l2,v+0.5*r2,m+0.5*s2,t+0.5*
    deltat )
r3=deltat*dv(x+0.5*k2,y+0.5*h2,u+0.5*l2,v+0.5*r2,m+0.5*s2,t+0.5*
    deltat )
s3=deltat*dm(x+0.5*k2,y+0.5*h2,u+0.5*l2,v+0.5*r2,m+0.5*s2,t+0.5*
    deltat )

k4=deltat*dx(x+k3,y+h3,u+l3,v+r3,m+s3,t+deltat )
h4=deltat*dy(x+k3,y+h3,u+l3,v+r3,m+s3,t+deltat )
l4=deltat*du(x+k3,y+h3,u+l3,v+r3,m+s3,t+deltat )
r4=deltat*dv(x+k3,y+h3,u+l3,v+r3,m+s3,t+deltat )
s4=deltat*dm(x+k3,y+h3,u+l3,v+r3,m+s3,t+deltat )

x=x+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6
y=y+h1/6+h2/3+h3/3+h4/6
u=u+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6
v=v+r1/6+r2/3+r3/3+r4/6
m=m+s1/6+s2/3+s3/3+s4/6
vt.append(t)
vm.append(m)
vx.append(x)
vu.append(u)
vy.append(y)
vv.append(v)

a=1/(2*np.sqrt(x**2+y**2)-(u**2+v**2)/(G*m))
va.append(a)
e=np.sqrt(1+((c**2)/((G**2)*(m**2)))*(u**2+v**2-(2*G*m)/(np.sqrt(x
**2+y**2))))
ve.append(e)

```

```

plt.plot(vt,vm,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Masa_(m)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,va,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,ve,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

```

Listing 5: Casos 4.5 e 4.6

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa=0.01
G=1
n=1.5

def dm(m,a,e,w,f,t):
    dm=-alfa*(m**n)
    return dm
def da(m,a,e,w,f,t):
    da=(-a*(1+2*e*np.cos(f)+e**2))/(1-e**2)*((-alfa*(m**n))/m)
    return da
def de(m,a,e,w,f,t):
    de=-(e+np.cos(f))*((-alfa*(m**n))/m)
    return de
def dw(m,a,e,w,f,t):
    dw=-(np.sin(f)/e)*((-alfa*(m**n))/m)
    return dw
def df(m,a,e,w,f,t):
    df=(np.sqrt(G*m*a*(1-e**2))*((1+e*np.cos(f)**2))/((a**2)*((1-e**2)
    **2)))+(np.sin(f)/e)*((-alfa*(m**n))/m)
    return df

deltat=0.1

```



```

t=0
m=1
a=1
e=0.5
w=0
f=0

vt=[];vm=[];va=[];ve=[];vw=[];vf=[]
vt.append(t);vm.append(m);va.append(a);ve.append(e);vw.append(w);vf.append(f)
)

for i in range(1000):
    t=t+deltat
    k1=deltat*dm(m,a,e,w,f,t)
    h1=deltat*da(m,a,e,w,f,t)
    l1=deltat*de(m,a,e,w,f,t)
    r1=deltat*dw(m,a,e,w,f,t)
    s1=deltat*df(m,a,e,w,f,t)

    k2=deltat*dm(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    h2=deltat*da(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    l2=deltat*de(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    r2=deltat*dw(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)
    s2=deltat*df(m+0.5*k1,a+0.5*h1,e+0.5*l1,w+0.5*r1,f+0.5*s1,t+0.5*
        deltat)

    k3=deltat*dm(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    h3=deltat*da(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    l3=deltat*de(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    r3=deltat*dw(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)
    s3=deltat*df(m+0.5*k2,a+0.5*h2,e+0.5*l2,w+0.5*r2,f+0.5*s2,t+0.5*
        deltat)

    k4=deltat*dm(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    h4=deltat*da(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    l4=deltat*de(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)
    r4=deltat*dw(m+k3,a+h3,e+l3,w+r3,f+s3,t+deltat)

```

```

s4=deltat*df(m+k3 , a+h3 , e+l3 ,w+r3 , f+s3 , t+deltat )

m=m+k1/6+k2/3+k3/3+k4/6
a=a+h1/6+h2/3+h3/3+h4/6
e=e+l1/6+l2/3+l3/3+l4/6
w=w+r1/6+r2/3+r3/3+r4/6
f=f+s1/6+s2/3+s3/3+s4/6
vt.append(t)
vm.append(m)
va.append(a)
ve.append(e)
vw.append(w)
vf.append(f)

plt.plot(vt,vm,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Masa_(m)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,va,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,ve,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vw,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Argumento_do_periastro_(w)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,vf,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

```

Listing 6: Casos 4.7, 4.8, 4.9 e 4.10.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

alfa1=10**(-3)
alfa2=10**(-4)
beta=10**(-5)
n=2
q=2
G=1

def dptita(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dptita=-beta/r
    return dptita
def dpr(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dpr=((ptita**2)/(r**3))-((m1+m2)/(r**2))+((beta*tita)/(r**2))
    return dpr
def dtita(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dtita=ptita/(r**2)
    return dtita
def dr(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dr=pr
    return dr
def dm1(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dm1=-alfa1*(m1**n)
    return dm1
def dm2(ptita, pr, tita, r, m1, m2, t):
    dm2=-alfa2*(m2**q)
    return dm2

deltat=0.1
t=0
ptita=0.979795897
pr=0
tita=0
r=0.8
m1=0.7
m2=0.3
e=0.2
a=1
w=0
f=0
P=2*np.pi
m=m1+m2

vt=[]; vptita=[]; vpr=[]; vtita=[]; vr=[]; vm1=[]; vm2=[]

```

```

va=[];ve=[];vw=[];vf=[];vP=[];vm=[]
vt.append(t);vptita.append(ptita);vpr.append(pr);vtita.append(tita)
vr.append(r);vm1.append(m1);vm2.append(m2)
va.append(a);ve.append(e);vw.append(w);vf.append(f);vP.append(P);vm.append(m
)

for i in range (500):
    t=t+deltat
    k1=deltat*dptita(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)
    h1=deltat*dpr(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)
    l1=deltat*dtita(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)
    r1=deltat*dr(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)
    s1=deltat*dm1(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)
    u1=deltat*dm2(ptita,pr,tita,r,m1,m2,t)

    k2=deltat*dptita(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*
        s1,m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)
    h2=deltat*dpr(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*s1,
        m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)
    l2=deltat*dtita(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*
        s1,m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)
    r2=deltat*dr(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*s1,
        m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)
    s2=deltat*dm1(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*s1,
        m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)
    u2=deltat*dm2(ptita+0.5*k1,pr+0.5*h1,tita+0.5*l1,r+0.5*r1,m1+0.5*s1,
        m2+0.5*u1,t+0.5*deltat)

    k3=deltat*dptita(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*
        s2,m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)
    h3=deltat*dpr(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*s2,
        m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)
    l3=deltat*dtita(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*
        s2,m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)
    r3=deltat*dr(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*s2,
        m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)
    s3=deltat*dm1(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*s2,
        m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)
    u3=deltat*dm2(ptita+0.5*k2,pr+0.5*h2,tita+0.5*l2,r+0.5*r2,m1+0.5*s2,
        m2+0.5*u2,t+0.5*deltat)

    k4=deltat*dptita(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)
    h4=deltat*dpr(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)
    l4=deltat*dtita(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)
    r4=deltat*dr(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)

```

```

s4=deltat*dm1(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)
u4=deltat*dm2(ptita+k3,pr+h3,tita+l3,r+r3,m1+s3,m2+u3,t+deltat)

ptita=ptita+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6
pr=pr+(h1+2*h2+2*h3+h4)/6
tita=tita+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6
r=r+(r1+2*r2+2*r3+r4)/6
m1=m1+(s1+2*s2+2*s3+s4)/6
m2=m2+(u1+2*u2+2*u3+u4)/6

vt.append(t)
vptita.append(ptita)
vpr.append(pr)
vtita.append(tita)
vr.append(r)
vm1.append(m1)
vm2.append(m2)

e=np.sqrt(((ptita*pr)/(G*(m1+m2)-(beta*tita)))**2+((ptita**2)/((G*(
    m1+m2)-(beta*tita))*r)-1)**2)
ve.append(e)
a=(ptita**2)/((m1+m2-(beta*tita))*(1-e**2))
va.append(a)
f=np.arccos(((a*(1-e**2))-r)/(e*r))
vf.append(f)
w=tita-f
vw.append(w)
P=np.sqrt((4*(np.pi**2)*(a**3))/(m1+m2-beta*tita))
vP.append(P)
m=m1+m2-beta*tita
vm.append(m)

plt.plot(vt,vm,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Masa_(m)')
plt.grid(True,linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,va,'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.grid(True,linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt,ve,'b')

```

```

plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

plt.plot(vt, vP, 'b')
plt.xlabel('Tempo_(t)')
plt.grid(True, linestyle='dashed')
plt.show()

```

Listing 7: Casos 4.11, 4.12 e 4.13.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
from scipy import optimize

m0=0.412
deltam=(0.1*m0)/100
e0=0.519
a0=0.963

vm=[]
vm.append(m0)
ve=[]
ve.append(e0)
va=[]
va.append(a0)
vE=[]
vf=[]

n=50
for i in range(n):
    alfa=random.random()

    def kep(x):
        return 2*np.pi*alfa-x+ve[i]*np.sin(x)
    E=optimize.brentq(kep,0,2*np.pi)
    vE.append(E)

    f=np.arccos((np.cos(vE[i])-ve[i])/(1-ve[i]*np.cos(vE[i])))
    vf.append(f)

    vm.append(m0-deltam)
    m0=m0-deltam

```

```

e=np.sqrt(ve[i]**2+(deltam/vm[i+1]**2)*(vm[i]*(1+2*ve[i]*np.cos(vf[i]
    ])+
        ve[i]**2)-vm[i+1]*(1-ve[i]**2)))
ve.append(e)

a=(vm[i]*va[i]*(1-ve[i]**2))/(vm[i+1]*(1-ve[i+1]**2))
va.append(a)

plt.plot(vm,va,'b')
plt.xlim(0.413,0.39)
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.xlabel('Masa_(m)')
plt.grid(True)
plt.show()

plt.plot(vm,ve,'b')
plt.xlim(0.413,0.39)
plt.ylim(0.50,0.54)
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.xlabel('Masa_(m)')
plt.grid(True)
plt.show()

```

Listing 8: Casos 4.14, 4.15 e 4.16.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random

m0=0.412
deltam=(0.1*m0)/100
e0=0.519
a0=0.963

vm=[]
vm.append(m0)
ve=[]
ve.append(e0)
va=[]
va.append(a0)
vE=[]
vf=[]

n=50

```

```

for i in range(n):
    E=random.random()*2*np.pi
    vE.append(E)

    f=np.arccos((np.cos(vE[i])-ve[i])/(1-ve[i]*np.cos(vE[i])))
    vf.append(f)

    vm.append(m0-deltam)
    m0=m0-deltam

    e=np.sqrt(ve[i]**2+(deltam/vm[i+1]**2)*(vm[i]*(1+2*ve[i]*np.cos(vf[i]
        ])+
            ve[i]**2)-vm[i+1]*(1-ve[i]**2)))
    ve.append(e)

    a=(vm[i]*va[i]*(1-ve[i]**2))/(vm[i+1]*(1-ve[i+1]**2))
    va.append(a)

plt.plot(vm,va,'b')
plt.xlim(0.413,0.39)
plt.ylabel('Semieixe_maior_(a)')
plt.xlabel('Masa_(m)')
plt.grid(True)
plt.show()

plt.plot(vm,ve,'b')
plt.xlim(0.413,0.39)
plt.ylim(0.5,0.54)
plt.ylabel('Excentricidade_(e)')
plt.xlabel('Masa_(m)')
plt.grid(True)
plt.show()

```


Bibliografía

- [1] Abad, A.: 2012. *Astrodinámica*. Grupo de Mecánica Espacial. Universidad de Zaragoza.
- [2] Abad, A.; Docobo, J.A.; Elipe, A.: 2017. *Curso de Astronomía*. 2^a edición. Prensas de la Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- [3] Abad, A.; Ribera, J.: 1984. *Publicaciones Seminario Matemático García de Galdeano*. Serie II, sección 1, **3**. Universidad de Zaragoza.
- [4] Andrade, M.: 2006. *O Problema de Gylden-Mescerskij em Cenários Perturbados. Métodos e Aplicações*. Tese de Doutoramento. Universidade de Santiago de Compostela. Dirixida por J. A. Docobo.
- [5] Andrade, M.; Docobo, J. A.: 2002. *The influence of mass loss on orbital elements of binary systems by periastron effect*. AIP Conference Proceedings, **637**, 82.
- [6] Andrade, M.; Docobo, J. A.: 2003. *Orbital Dynamics Analysis of Binary Systems in Mass-Loss Scenarios*. RevMexAA (Serie de Conferencias), **15**, 223-225.
- [7] Andrade, M.; Docobo, J. A.: 2003. *Una ley de pérdida de masa en binarias que por efecto periastro produce un aumento secular de la excentricidad*. Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza, **22**, 161-170.
- [8] Andrade, M.; Docobo, J. A.: 2011. *Notes about the periastron effect in binary systems*. AIP Conference Proceedings, **1346**, 61.
- [9] Bate, R.; Mueller, D.; White, J.: 1971. *Fundamentals of Astrodynamics*. Dover Publications, Inc., New York.
- [10] Benedict, G. F.; McArthur, B. E.; Franz, O. G.; et al.: 2000. *Interferometric Astrometry of the Low-Mass Binary G1 791.2 (=HU DEL) using Hubble Space Telescope Fine Guidance Sensor 3: Parallax and Component Masses*. The Astronomical Journal, **120**, 1106-1112.

- [11] Cid, R.: 1979. *Curso de Mecánica Celeste*. Departamento de Física de la Tierra y del Cosmos. Universidad de Zaragoza.
- [12] Contopoulos, C.: 1959. *Lectures in Celestial Mechanics*. Publications of the University of Thessaloniki.
- [13] Danby, J.M.A.: 1988. *Fundamentals of Celestial Mechanics*, 2nd ed., Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, USA.
- [14] Deprit, A.: 1969. *Canonical Transformations Depending on a Small Parameter*. Celestial Mechanics, **1**, 1-12.
- [15] Deprit, A.: 1983. *The Secular Accelerations in Gylden's Problem*. Celestial Mechanics, **31**, 1-22.
- [16] Docobo, J. A.: 1977. *Aplicación de la teoría de perturbaciones al estudio de sistemas estelares triples*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. DL-Z 1254/1977. Dirixida por R. Cid.
- [17] Docobo, J. A.; Abelleira, P.; Blanco, J.: 1999. *Sobre el problema de Gylden-Meshcherskii*. Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza, **14**, 33-38.
- [18] Docobo, J. A.: 2003. *Some Integrable Cases of the Two-Body Problem with Mass Depending Both on Time and Distance*. Astronomy Letters, Vol. 29, N. 5, 344-347.
- [19] Docobo, J. A.: 2018. *Curso de Astrodinámica*. Pendente de publicación.
- [20] Dufour, M. Ch.: 1866. *Sur l'accélération séculaire du mouvement de la Lune*. Comptes Rendus Hebdomadaires de L'Accademie de Sciences, 840-842.
- [21] Eddington, A. S.: 1924. *On the Relation between the Masses and Luminosities of the Stars*. Mont. Not. R. Astron. Soc., **84** 308-332.
- [22] Gylden, H.: 1884. *Die Balmbewegungen in einem Systeme von zwei Körpern in dem Falle, das die Massen Veränderungen unterworfen sind*. Astron. Nachr., **2593-94** 1-6.
- [23] Hadjidemetriou, J. D.: 1963. *Two-Body Problem with Variable Mass: A New Approach*. Icarus, **2** 440-451.
- [24] Hadjidemetriou, J. D.: 1966. *Binary Systems with Decreasing Mass*. Z. Astrophys. **63**, 116-130.
- [25] Hadjidemetriou, J. D.: 1967. *Evolution of Binary Systems with Repeated Mass Ejections*. Thessaloniki University, Thessaloniki, Greece.

- [26] Hadjidemetriou, J.D.: 1969. *Dynamics of Close Binary Systems with Mass Exchange*. *Astrophysics and Space Science*, **3**, 31-45.
- [27] Hadjidemetriou, J.D.: 1969. *Dynamical Effects of Mass Exchange in Close Binary Systems*. *Astrophysics and Space Science*, **3**, 330-344.
- [28] Jeans, J. H.: 1924. *Cosmogonic Problems associated with a Secular Decrease of Mass*. *Mont. Not. R. Astron. Soc.*, **85**,1 2-11.
- [29] Lovett, E., O.: 1902. *Note on Gyldén's equations of the problem of two bodies with masses varying with the time*. *Astron. Nachr.*, **3790** 337-344.
- [30] Mestschersky, F.: 1893. *Ein Specialfall des Gyldén'schen Probelms*. *Astron. Nachr.*, **3153** 8-9.
- [31] Mestschersky, F.: 1897. Thesis, St. Petersburg.
- [32] Mestschersky, F.: 1902. *Über die Integration der Bewegungsgleichungen in Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse*. *Astron. Nachr.*, **3807** 229-240.
- [33] Oppolzer, Th. V.: 1884. *Ueber eine Ursache, welche den Unterschied zwischen der theoretisch berechneten Säcularacceleration in der Länge des Mondes und der thatsächlichen bedingen kann*. *Astron. nachr.* **2573** 67-72.
- [34] Orús Navarro, J. J. de, Català Poch, M^a A., Núñez de Murga, J.: 2007. *Astronomía esférica y mecánica celeste*. Universitat de Barcelona.
- [35] Prieto, C.: 1995. *Soluciones analíticas del Problema de Dos Cuerpos con Masa Lentamente Decreciente*. Tesis Doctoral. Universidade de Santiago de Compostela. Dirixida por J. A. Docobo.
- [36] Prieto, C.; Docobo, J. A.: 1997a. *Analytic solution of the two-body problem with slowly decreasing mass*. *Astronomy and Astrophysics*, **318**, 657-661.
- [37] Prieto, C.; Docobo, J. A.: 1997b. *On the two-body problem with slowly decreasing mass*. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **68**, 53-62.
- [38] Ribera, J.: 1981. *Aplicación de los grupos de Lie de Transformaciones a la integración de sistemas diferenciales perturbados*. Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza. Dirixida por V. Camarena.
- [39] Roy, A. E.: 1978. *Orbital motion*. Adam Hilger Ltd.

- [40] Sterne, T. E.: 1960. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Interscience Publishers, New York.