UNA INTRODUCCIÓN A LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES GEOMÉTRICOS A PARTIR DE UNA SECUENCIA DE ENSEÑANZA ONLINE EN ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO

ELIANA DEL CARMEN PULIDO ORELLANO

Trabajo de investigación para optar el título de

Magister en Educación

Directores

DRA. EVELYN ARIZA MUÑOZ

DR. JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ-CALERO SOMOZA

UNIVERSIDAD DEL NORTE

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BARRANQUILLA

2021

Nota de Aceptación

Dedicatoria

A Dios, por sus bendiciones, porque con el milagro de la vida, es quien nos da los dones, el talento y la capacidad para alcanzar estos triunfos.

A mis padres José Luis e Ignacia y a mis hermanos José Andrés y Milena, por su apoyo incondicional en este camino lleno de esfuerzos y sacrificios.

A José por su amor, comprensión y desmesurada paciencia. Por compartir conmigo este sueño y motivarme a salir adelante.

A mis amigos Joyce, Amir, Luisa, Jelizka, Sandra y Gloreine por contagiarme de su buena energía y tener siempre buenos deseos para mi vida.

Agradecimientos

A Dios, por permitirme vivir la experiencia de este postgrado y rodearme de personas que me ayudaron a crecer en mi camino académico.

A mi tutora, la Doctora Evelyn Ariza Muñoz por estar siempre dispuesta a orientarme y motivarme a participar de espacios de formación y socialización de experiencias entre colegas.

A mi cotutor, el Doctor José Antonio González-Calero por sus enseñanzas y acompañamiento en la realización del presente trabajo de investigación.

Al Doctor Pascual Diago Nebot por haber compartido conmigo sus saberes en la pasantía investigativa en modalidad virtual, en la Universidad de Valencia, España.

A los niños y niñas de la Institución Educativa Francisco José de Caldas de Baranoa, por su tiempo y disposición para participar de este trabajo.

Tabla de contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Resumen

Esta investigación tiene por objetivo explorar la introducción del álgebra en estudiantes de sexto grado, a través de tareas de generalización de patrones geométricos. Para cumplir tal fin, empleando una metodología de investigación basada en el diseño, se propuso una secuencia de enseñanza que ha sido experimentada en modalidad virtual con seis estudiantes de 11-12 años sin experiencia previa en este tipo de tareas. Analizamos el proceso de generalización e identificamos las estrategias y dificultades que emergen cuando resuelven estas tareas. Encontramos que las estrategias más utilizadas son las aditivas y funcionales y que la dificultad mayor de los estudiantes es establecer relaciones de proceso inverso. La secuencia de enseñanza les permitió tomar una mayor conciencia sobre las características de las secuencias y desarrollar una evolución de pensamiento con componentes del razonamiento algebraico.

Palabras clave: Generalización de patrones, pre-álgebra, secuencia de enseñanza.

Introducción

La posibilidad de introducir el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad es algo que genera cada vez mayor interés en la investigación en educación matemática. Esto requiere desarrollar una mirada más amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar, trabajo que han hecho durante años varios investigadores quienes lo han examinado desde diferentes perspectivas teóricas, por ejemplo, (Kaput, 2000; Radford 2003; Carraher et al., 2008; Socas 2011;) y que a la vez dejan presente que todavía hay muchas cosas importantes que investigar y aprender.

La generalización es un rasgo característico del pensamiento algebraico, así como los medios de simbolización para representar las situaciones de generalización y las de indeterminación. En concreto, para explicitar este pensamiento en los primeros niveles escolares, se propone el estudio de regularidades y propiedades de los patrones, a través de tareas de generalización. En este trabajo se plantean tareas que demandan encontrar el valor de diferentes términos a partir de una secuencia de figuras geométricas que se construye siguiendo una determinada regla. Una de las características relevantes es que estas actividades pueden realizarse sin utilizar expresiones simbólicas algebraicas.

En este contexto, se ha diseñado una secuencia de enseñanza que permite la iniciación al álgebra en estudiantes de sexto grado, mediante la resolución de tareas con patrones geométricos y, a través de la cual, se ha podido analizar el proceso de generalización empleado por estos estudiantes de manera directa e inversa.

El documento de investigación se organiza en siete capítulos. En el primero de ellos, se expone el planteamiento del problema, junto a la pregunta de investigación *¿Cómo los estudiantes de sexto de grado se acercan a la generalización de patrones geométricos a partir de una* *secuencia de enseñanza online?* También se sustentan los aspectos teóricos, conceptuales y metodológicos que motivan a realizar este trabajo investigativo.

El segundo capítulo está destinado a presentar la revisión de trabajo previos y los referentes teóricos que orientan esta investigación. Así pues, se centrarán en el proceso de generalización Radford (2003), relacionado con el trabajo con patrones geométricos Radford (2006); Rivera (2013); Zapatera (2018), Arbona et al. (2018). Seguidamente, en el capítulo 3, se proyectan los objetivos trazados en esta investigación. Siendo el objetivo general, *explorar una introducción al pre- álgebra en estudiantes de sexto grado, a través de una secuencia de enseñanza online con tareas de patrones geométricos.*

En el capítulo 4, se describen los elementos metodológicos que guiaron la investigación. De manera puntual se exponen las características de la investigación basada en el diseño y sus fases distintivas, preparación del experimento, realización del experimento de diseño y análisis retrospectivo. Se incluye el constructo de una secuencia de enseñanza como una herramienta metodológica para crear escenarios de innovación pedagógica con la intención de acercar a los estudiantes a la generalización de patrones geométricos.

En el capítulo 5, se describen los principales resultados obtenidos durante la implementación de la secuencia de enseñanza. Los datos son organizados por cada sesión de experimentación teniendo en cuenta las estrategias de solución y los procesos de aprendizaje empleados por cada estudiante.

El análisis retrospectivo es presentado en el capítulo 6, enfocándose en la relación entre los objetivos de enseñanza y los resultados obtenidos, las estrategias empleadas durante todo el proceso de aplicación de la secuencia de enseñanza y el tipo de generalización desarrollada por los estudiantes. Por último, en el capítulo 7 se recogen algunas observaciones finales que se derivan de este trabajo de maestría. Se manifiesta el aporte que se hizo a los objetivos de investigación, las limitaciones identificadas y las posibles vías de continuación de esta investigación.

Capítulo 1. Contextualización

1.1 Planteamiento del Problema

El nuevo coronavirus denominado SARS-CoV-2, ha sido catalogado como una emergencia en salud pública de importancia internacional; de hecho, a la fecha en todos los continentes se han identificado casos de coronavirus (Organización Mundial de la Salud [OMS], 2020). En Colombia se confirmó el primero el 6 de marzo y hasta el momento se conocen más de 2,26 millones de casos (Ministerio de Salud de Colombia [Minsalud], 2020). Esta pandemia ha alterado la normalidad de todas las personas y afectado los proyectos que se tenían a corto y a mediano plazo, con consecuencias graves a nivel personal y social en los campos de salud, economía, comercio, turismo y educación (OMS, 2020).

En la educación, tema que nos convoca, la Organización de las Naciones Unidas para la Educación (UNESCO, por su sigla en inglés) en su informe emitido el 31 de marzo del 2020 calcula que, del total de la población estudiantil de todo el mundo, más del 89% está fuera de la escuela debido al cierre por la pandemia de COVID-19. Este porcentaje representa a 1,54 millones de niñas, niños y jóvenes que están inscritos en la escuela o en la universidad (UNESCO, 2020).

En Colombia las escuelas y universidades se encuentran cerradas desde el 16 de marzo, lo que ha generado un desafío para la educación. Como respuesta a ello y para solventar esta necesidad se ha optado por emplear estrategias de educación remota, al igual que lo han hecho otros países en donde la crisis comenzó con anterioridad (Ministerio de educación de Colombia [MEN], 2020). De manera similar, los trabajos de investigación en educación no pueden ser ajenos a esta realidad y, en este caso particular, surge la necesidad de cambiar la implementación de esta investigación de modalidad presencial a una modalidad virtual, debido al interés de contribuir a la investigación en educación matemática en el país y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta área del conocimiento.

En concordancia a lo anterior, si se realiza un análisis preliminar de los resultados de las pruebas PISA, referente que permite conocer a nivel mundial el estado en que se encuentran los estudiantes en el área de matemáticas, se puede observar que en los últimos años los países con mayor puntaje y promedio establecido por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) son los países asiáticos como Singapur, China, Japón, y siguen los europeos como Estonia y Países Bajos, quienes se mantienen en el ranking de los diez mejores países en los resultados de esta prueba (PISA, 2018). Se podría pensar que, en estos países los estragos de la pandemia serían menos notorios y de bajo impacto, puesto que son países que se encuentran muy bien académicamente y sus estudiantes estarían en la capacidad de superar de mejor manera los retrocesos que esta crisis pueda traer.

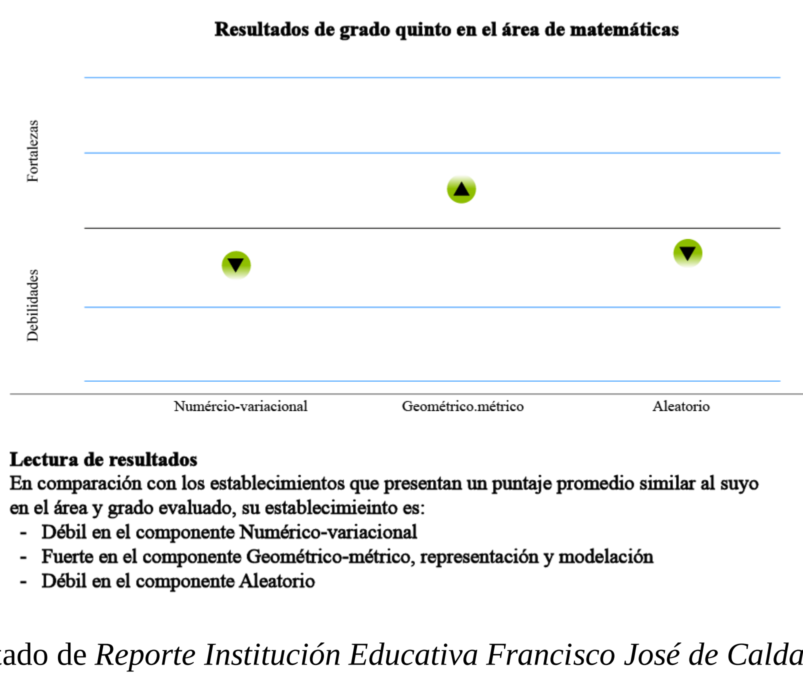
En América Latina ocurre lo contrario, los promedios obtenidos son muy inferiores a lo establecido por la OCDE. Así, los países de esta zona se encuentran en los últimos puestos del ranking mundial, ubicándose Uruguay y Chile en los primeros lugares dentro de la escala regional y quedando Colombia como uno de los países con los resultados más bajos en este examen a nivel de Latinoamérica y del mundo. En el año 2018 solo un 35% de la población colombiana evaluada alcanzó el nivel 2 de los 6 niveles de competencias matemáticas que establece esta prueba (PISA, 2018), muestra de que la educación matemática en este país necesita ser fortalecida.

A nivel nacional, haciendo una revisión de los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas Saber de quinto y noveno en su último año de aplicación, es decir, en el año 2017. Se observa un bajo rendimiento en las competencias matemáticas que evalúa la prueba, debido a que el 72% de los estudiantes de quinto grado se encuentran en los niveles insuficiente y mínimo, por lo tanto, los niveles satisfactorio y avanzado fueron obtenidos por un bajo porcentaje de estudiantes, lo mismo ocurre en noveno grado donde el nivel insuficiente fue de 22% y el mínimo fue de 53% (ICFES, 2017a), cifras que al compararlas arrojan una situación alarmante y es la notoria dificultad que presentan los estudiantes en el área de matemáticas y su falta de mejoría al pasar de los años.

En un contexto local, observando los resultados de las pruebas saber de la Institución Educativa Francisco José de Caldas del municipio de Baranoa se logra ver que uno de los puntos débiles que presentan los estudiantes de quinto y noveno grado, es el componente numérico – variacional, que se compone del pensamiento numérico y el pensamiento variacional según la reorganización que hace la prueba de los cincos pensamientos descritos en los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias. En la Figura 1 se muestran los resultados de grado quinto en el área de matemáticas (Ver Figura 1)

Figura 1

Resultados de las pruebas saber área de Matemáticas de grado quinto

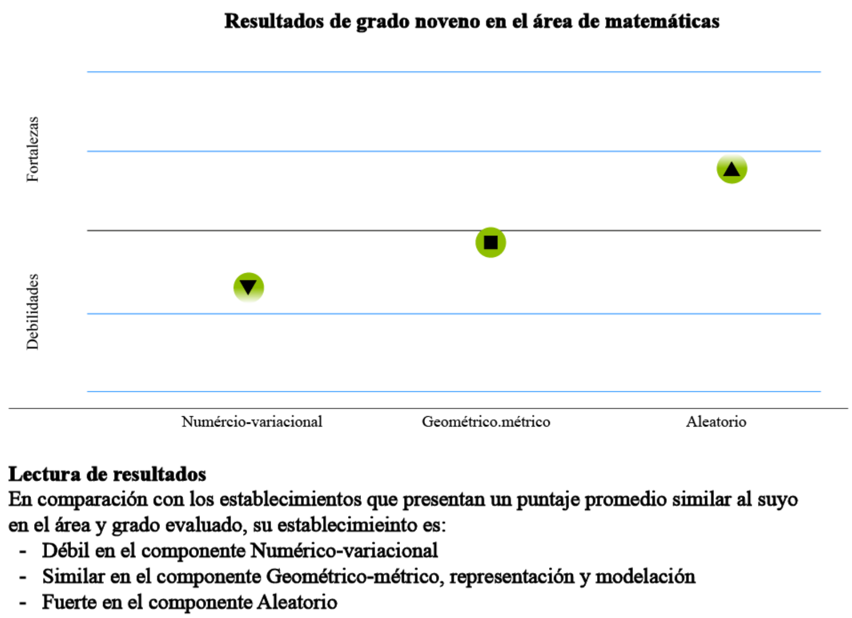


Nota. Adaptado de *Reporte Institución Educativa Francisco José de Caldas* de ICFES, 2017a.

En la Figura 2 se presentan los resultados de grado noveno en el área de matemáticas, (Ver Figura 2)

Figura 2

Resultados de las pruebas saber área de Matemáticas de grado noveno



Nota. Adaptado de *Reporte Institución Educativa Francisco José de Caldas* de ICFES, 2017a.

Los anteriores resultados reflejan que no existe avance entre los niveles escolares de quinto a noveno en el componente numérico-variacional, debido a que este componente sigue mostrando debilidad. Por tanto, se hace necesario fomentar espacios de aprendizaje en los que se creen oportunidades para desarrollar los pensamientos que lo componen, esto incluye actividades asociadas a los números y los sistemas de numeración; a las operaciones y sus propiedades; el reconocimiento y descripción de regularidades y patrones; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, el lenguaje simbólico (algebraico), a la variación inversa y el concepto de función (ICFES, 2017b).

Por todo el panorama expuesto anteriormente y la evidente problemática existente en la educación matemática, desde mi punto de vista, este trabajo no debía limitarse a una revisión bibliográfica o una revisión de datos secundarios. En este sentido, se necesitaba ser más propositivos y trabajar para que el aprendizaje de los estudiantes pueda estar activo y mejorando a pesar de las adversidades. Así, surgió el interés de investigar el proceso de generalización de patrones geométricos como una manera de aportar a la investigación en una parte de esta amplia problemática, en específico en el pensamiento variacional.

Este interés particular surge debido a que el trabajo con regularidades y patrones se encuentra ausente en gran parte del currículo a pesar que el MEN (2006) lo propone para abordar el pensamiento variacional (Forigua y Velandia, 2015). La enseñanza escolar hace mayor énfasis en el pensamiento aritmético-aditivo y dificulta el acceso a otro tipo de razonamiento como el algebraico (Butto y Rojano, 2010). De ahí a que los estudiantes centren su atención en el cálculo y no establezcan los aspectos relacionales de las operaciones (Kieran, 2004).

En este sentido, la enseñanza del álgebra se introduce en las mallas curriculares tradicionalmente en octavo o noveno grado, y, este proceso viene cargado de muchas dificultades. Kieran (1989) resalta que estas dificultades vienen asociadas al uso de los símbolos, y, a dotar esta actividad de significado, motivo por el cual le atribuyen el fracaso de los estudiantes en esta rama de las matemáticas (Rojas y Vergel, 2013; Vergel, 2015). Este hecho ha motivado durante varios años investigaciones que han llegado a concluir que la enseñanza del álgebra puede –y debería darse– desde la educación básica primaria (Mason, 1999; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Radford, 2006, 2015; Rivera, 2009, 2013).

En esta línea, Kaput (2000) realiza una propuesta, denominada "álgebra para todos" que sugiere integrar el razonamiento algebraico en todos los grados escolares con el fin de algebrizar las matemáticas escolares, para añadir mayor coherencia y profundidad a las matemáticas.

De lo anterior surge la siguiente pregunta problema:

¿Cómo los estudiantes de sexto de grado se acercan a la generalización de patrones geométricos a partir de una secuencia de enseñanza online?

1.2 Justificación

Ante las notorias dificultades que presentan los estudiantes en el estudio de las matemáticas y propiamente del álgebra, surge la necesidad de realizar reestructuraciones en la manera en que se está enseñando y concibiendo el álgebra. Pues ésta no debe ser vista como la manipulación de letras que carecen de significado para realizar cálculos sin sentido. Se necesita una mirada más amplia, por ejemplo, Vergel (2010) manifiesta que el estudio del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, requiere que, curricularmente, se centre la atención en los aspectos relacionales y en las estructuras matemáticas que subyacen en dichas situaciones contextuales. En este sentido, la enseñanza en los primeros grados escolares debe basarse en la organización de actividades que lleven al desarrollo de formas de pensamiento y que pueden realizarse sin emplear el álgebra simbólica (Kieran, 2004). La presente investigación se enfoca en esta mirada como una manera de mejorar la transición de la aritmética al álgebra.

En relación a lo anterior, los documentos curriculares para la educación matemática en Colombia MEN (1998) proponen que el estudio de la variación puede ser iniciado en el currículo de matemáticas desde los primeros grados escolares. De hecho, en los estándares básicos de competencias MEN (2006) se describe el pensamiento variacional como uno de los cinco pensamientos que los estudiantes necesitan desarrollar para ser matemáticamente competentes. Sin embargo, es común encontrar en la práctica educativa que su estudio tiene lugar a partir de octavo grado. En este sentido, es necesario que los docentes de matemáticas busquen, creen y apliquen estrategias, materiales y recursos que permitan a los estudiantes tener un acercamiento significativo con este pensamiento desde los primeros años escolares.

Por lo anterior, esta investigación resulta pertinente porque propone la introducción del álgebra en los estudiantes de sexto grado, mediante la implementación de una secuencia de enseñanza sobre generalización de patrones geométricos. A su vez, brinda bases conceptuales y experimentales a los estudiantes para el desarrollo de aprendizajes posteriores, de acuerdo con Velásquez (2014) el inicio temprano de actividades encaminadas a expresar lo general favorece en gran medida el proceso de simbolización y manipulación de expresiones algebraicas. En particular, las generalizaciones de patrones geométricos es una manera apropiada para preparar el aprendizaje de los sistemas algebraicos antes de iniciar la instrucción del álgebra formal (MEN, 2006).

Los patrones geométricos son un contexto que permite una aproximación inicial, visual e intuitiva, al alcance de todos los estudiantes y permiten pasar de forma significativa a la aproximación algebraica mediante el uso de letras y símbolos que adquieren significado en el contexto de las representaciones gráficas de secuencias numéricas (Arbona et al., 2017). En otras palabras, los patrones geométricos al ser una representación gráfica de sucesiones o secuencias numéricas, facilitan al estudiante la identificación de la variación y el cambio, así como la posibilidad de establecer conjeturas sobre la representación de los próximos términos de la secuencia, hasta llegar a una representación algorítmica o fórmula que reproduzca el mismo patrón en los siguientes términos.

Cabe señalar que el trabajar tareas prealgebraicas con el apoyo de un patrón geométrico, es un enfoque adecuado para desarrollar capacidades de pensamiento en los estudiantes, aunque éstos no utilicen un lenguaje algebraico, pues en niveles superiores el estudiante será capaz de utilizar la simbología y notación algebraica (Apsari et al., 2020).

Por otra parte, esta investigación es viable porque se desarrolla con recursos propios y su implementación se lleva a cabo en el establecimiento educativo donde la investigadora desarrolla su labor docente, además la propuesta fue presentada con anterioridad a los directivos de la institución y se contó con su aprobación.

En este trabajo de investigación, siendo conscientes de la situación actual por la emergencia sanitaria decretada mediante Resolución 385 del 12 de marzo de 2020 del Ministerio de Salud, y las orientaciones emitidas (conjunta entre Ministerio de Salud y Ministerio de Educación) en las Circulares 11 del 9 de marzo, 19 del 14 de marzo y 20 del 16 de marzo de 2020, las cuales sustentan la estrategia de continuar el trabajo académico en casa utilizando las tecnologías de la información y comunicación, guías y metodologías desarrolladas por cada colegio para no realizar clases presenciales. Se realizan distintas adecuaciones relacionadas con la implementación de la secuencia de enseñanza para garantizar el acompañamiento educativo a los estudiantes en sus casas y sobre todo proteger la vida de los miembros de la comunidad educativa.

1.3 Identificación

La institución educativa en la que se desarrolla esta investigación se encuentra ubicada en el municipio de Baranoa del departamento del Atlántico, la mayor parte de su población pertenece a las zonas más vulnerables de este municipio. Es una institución de naturaleza oficial y de carácter mixto que ofrece educación para los niveles de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media.

Con el cierre de las escuelas a causa de la pandemia por COVID 19 y en el interés de buscar estrategias para dar continuidad a las clases, la institución realizó una caracterización a todos los estudiantes para conocer la disponibilidad de herramientas tecnológicas en sus hogares que les permitiera recibir clases de manera virtual. Los resultados reflejaron que la mayor parte de la población estudiantil carece de herramientas tecnológicas como computador, tablets, celulares y que la conexión a internet en sus hogares es escasa y en la mayoría de casos nula.

En consecuencia, la intervención que se propone en este trabajo será llevada a cabo únicamente con los estudiantes de sexto grado que manifestaron poder participar de este espacio de formación al contar con los recursos necesarios.

Capítulo 2. Marco de Referencia

2.1 Antecedentes

Hace varias décadas la idea de que el álgebra debería enseñarse desde los primeros años escolares ha tomado gran importancia en la investigación matemática, producto de ello han surgido dos corrientes como lo son el álgebra temprana y el pre-álgebra. La primera involucra un cambio curricular en la educación primaria, en el cual el álgebra se encuentra relacionado con los temas tradicionales del programa de estudios de educación básica primaria y la notación algebraica aparece de forma gradual (Carraher et al., 2008). "El álgebra temprana enriquece la enseñanza tradicional de las matemáticas, porque se puede organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra evitando saltos, rupturas y cortes didácticos entre ambas" (Socas, 2011, p.9). Y la segunda, el pre-álgebra tiene como finalidad "facilitar la transición de la aritmética al álgebra, dadas las dificultades y los errores que tienen los alumnos en álgebra, como consecuencia de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la educación primaria" (Socas, 2011, p.15).

En palabras de Zapatera (2018a) estas dos propuestas se diferencian por los aspectos que se indican a continuación. La pre-álgebra intenta mejorar la transición entre la aritmética y el álgebra para evitar las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra. Por lo tanto, propone que su estudio inicie en los últimos grados de educación primaria y la Early-Algebra tiene como objetivo introducir características del pensamiento algebraico en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por lo que propone que la introducción del álgebra se haga desde los primeros grados escolares.

Este trabajo de investigación se enmarca desde la propuesta del pre-álgebra, pues la secuencia didáctica que aquí se plantea se configura como una introducción a la generalización de patrones geométricos como una manera de conectar la aritmética y el álgebra. De acuerdo a que las actividades con patrones invitan a revisar la relación entre el pensamiento aritmético y el algebraico en lugar de una enseñanza lineal tradicional en el que el álgebra aparece como una aritmética generalizada (Radford, 2010).

Desde esta perspectiva en los principios y estándares para la educación matemática NCTM (2000) se evidencia la inclusión del álgebra desde la educación primaria, en ellos el álgebra es una de las cinco áreas principales de las matemáticas, junto a: *Geometría*, *Medida*, *Análisis de datos y probabilidad* y *Números y operaciones*, de las cuales se desprenden unos estándares que esbozan las expectativas en cuanto a contenidos y procesos matemáticos que los estudiantes de los diferentes niveles educativos deben conocer y ser capaces de usar. Cada uno de estos estándares se encuentran en todas las etapas de escolaridad que van desde la etapa K-2 hasta la etapa 9-12, lo que los hace diferente es su profundización y complejidad. El primero de ellos es, *comprender patrones, relaciones y funciones*, es decir, que la enseñanza del álgebra en cada etapa tiene lugar inicialmente con el estudio de patrones, su representación, análisis y generalización. Por ejemplo, en la etapa 6-8 las expectativas para este estándar según NCTM (2000) son las siguientes:

- Representar, analizar y generalizar una variedad de patrones mediante tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas;
- Relacionar y comparar distintas formas de representación de una relación;
- Identificar funciones, lineales o no lineales, y contrastar sus propiedades a partir de tablas, gráficas o ecuaciones (p. 226).

En esta etapa se evidencia que la intención es que el estudiante desarrolle habilidades para formalizar patrones, funciones y generalizaciones, utilizando diferentes maneras de representación, ya sea gráficas, tablas o palabras y de manera simbólica cuando sea posible. Esto implica que la enseñanza del álgebra en estos niveles escolares pretende más que todo que el estudiante sea capaz de identificar, analizar, comparar, establecer relaciones entre un conjunto de elementos y sea capaz de verbalizarlo o representarlo de diferentes formas.

Con respecto a lo anterior, investigaciones recientes han mostrado que los estudiantes son capaces de generalizar patrones sin recibir instrucción previa del álgebra formal. Algunas de los trabajos en este ámbito son las realizadas por Ferdinand Rivera durante más de 20 años con estudiantes de primaria y secundaria, las cuales le han permitido determinar que las actividades con patrones pueden fomentar el desarrollo del pensamiento algebraico, centrándose principalmente en estructuras y formas de representación (Rivera, 2009).

Algunos de sus hallazgos claves los describe en cuatro lecciones a las que se refiere como lecciones para maestros, la primera la nombra como: *Generalizar patrones es más que obtener una regla*, a esto se refiere que el objetivo de ampliar un patrón debe ser inicialmente que los estudiantes articulen sus supuestos de lo que ellos consideran significativo y pertinente dentro de la estructura de un patrón y cómo se imaginan las etapas siguientes, estos supuestos son las bases para la creación de la regla y su justificación. La segunda lección, *pedir a los estudiantes que determinen lo que permanece igual y lo que cambia en un patrón no es tarea fácil para ellos*, pues es normal que los estudiantes perciban distintas estructuras, es decir, diferentes propiedades o características invariantes que se utilizan para crear la regla general y esto también conlleva a la dificultad de transcribir las descripciones verbales de estructuración de un patrón en forma algebraica. La tercera lección tiene que ver con la *importancia de la comprensión de la multiplicación para la generalización de patrones numéricos*. Para ello, antes de trabajar con patrones sería conveniente que los estudiantes realicen actividades en las que puedan aprender de forma correcta a escribir una expresión que implique multiplicación, porque, de esta manera, los estudiantes pueden incluir fácilmente formas de pensamiento de estructura multiplicativa y no quedarse solo con las aditivas. Por tal motivo, la multiplicación se convierte en uno de los conocimientos previos para la construcción de la fórmula general. Por último, la cuarta lección hace referencia a que *la justificación de manera numérica de la regla general no es suficiente*, debe quedar claro de qué manera fue percibido el patrón (Rivera, 2009).

Otras de las investigaciones en este campo han centrado su atención en las estrategias que emplean los estudiantes al resolver tareas de generalización de patrones geométricos, entre ellas se encuentra el trabajo de Barbosa (2011) quien basándose en propuestas anteriores plantea la siguiente categorización:

- Recuento: Esta estrategia incluye el dibujo y el conteo sobre él.
- Objeto completo: Éstas pueden ser sin ajuste, con ajuste numérico y con ajuste visual, tienen que ver con situaciones de proporción directa.
- Diferencia: El estudiante continúa la secuencia usando la diferencia constante.
- Explícitas: En esta estrategia el estudiante encuentra una regla que permite el cálculo del valor de cualquier término de la secuencia.
- Adivina y comprueba: Es cuando el estudiante adivina una regla al probar varios valores.

A partir de ello la autora concluye que los estudiantes prefieren la estrategia de recuento para la generalización cercana y las estrategias explícitas sólo aparecían cuando el estudiante se enfrentaba a preguntas de generalización lejana.

En esta misma línea, Zapatera y Callejo (2011) definen tres tipos de estrategias de resolución de tareas con patrones lineales, que son: las estrategias aditivas, funcionales y proporcionales. En las estrategias aditivas el estudiante encuentra el valor del término requerido realizando un recuento sobre el dibujo o sumando el patrón de crecimiento, en las estrategias funcionales el estudiante relaciona la posición de la figura y el número de elementos que la componen mediante una función afín y en las estrategias proporcionales el estudiante realiza multiplicaciones entre el patrón de crecimiento y la posición solicitada sin considerar el término independiente o también cuando emplean regla de tres. Los autores concluyen que esta última estrategia es utilizada especialmente en la generalización lejana y que los estudiantes con mayor nivel de éxito en la solución de la tarea, presentan una mayor flexibilidad en el cambio de estrategias.

Una clasificación similar es la que realizan Arbona et al. (2018) para su clasificación ellos tienen en cuenta las estrategias que emplean los estudiantes en tareas de relación directa y las estrategias que emplean en las tareas de relación inversa. Para las de relación directa consideran dos aspectos, i) el procedimiento de resolución y ii) el procedimiento de cálculo. En el procedimiento de resolución, los estudiantes se apoyan en estrategias visuales, que es cuando hacen una descomposición geométrica del patrón y estrategias numéricas que es cuando transforman el patrón geométrico en un patrón numérico. En relación al procedimiento de cálculo, las estrategias guardan relación con las que plantean Zapatera y Callejo (2011) en su trabajo, las cuales son las estrategias de recuento, las recursivas, las funcionales y las proporcionales. Y por el lado de las estrategias de relación inversa se encuentran las de ensayo y error, las de inversión de las operaciones y la resolución de ecuaciones.

Para términos de esta investigación se considerarán las clasificaciones anteriores para referenciar las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver las tareas de generalización de patrones geométricos, la clasificación que hace Zapatera y Callejo (2011) se tendrá en cuenta para las tareas de relación directa y la que realizan Arbona et al. (2018) para las tareas de relación inversa.

También cabe destacar que los resultados obtenidos en trabajo previos han evidenciado que los estudiantes prefieren las estrategias aditivas para encontrar los casos cercanos (Barbosa et al., 2009; Güner et al., 2013; Akkan, 2013; Goni-Cervera y Polo-Blanco, 2019). Los que utilizan la estrategia recursiva se apoyan en las representaciones numéricas, es decir, cuando convierten el patrón geométrico en patrón numérico y los que utilizan las estrategias de recuento se apoyan en las representaciones pictóricas (Tanişli y Özdaş, 2009; Akkan, 2013). Esta última es una de las más utilizadas para la generalización cercana, pero al emplearlas los estudiantes también cometen errores al no respetar la estructura espacial y numérica de las figuras (Callejo et al., 2016, Zapatera, 2018b). De igual manera se ha encontrado que los estudiantes son capaces de identificar que para la generalización lejana deben emplear estrategias más avanzadas, pues las estrategias aditivas les resulta difícil e ineficiente (Güner et al., 2013). Por lo cual llegan a establecer relaciones funcionales entre dos variables (Goni-Cervera y Polo-Blanco, 2019), en este sentido, el uso de las estrategias funcionales aumenta a medida que la dificultad de la tarea es mayor (Zapatera y Callejo, 2011).

Así mismo, se han identificado algunas de las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a las tareas con patrones geométricos, Barbosa et al. (2009) expresa que las principales dificultades se encuentran al realizar generalizaciones lejanas y las de proceso inverso. Además, algunas de las estrategias que los llevan a cometer errores son las estrategias de proporción directa, que no encajan dentro del proceso de generalización. A su vez, Akkan (2013) y Somasundram et al., (2019) identifican que a los estudiantes se les facilita más resolver tareas con patrones lineales a diferencia de los cuadráticos.

Aparte de las estrategias empleadas por los estudiantes para resolver tareas de generalización de patrones y las dificultades que presentan, hay estudios como el de Zapatera

(2018b) que sirven de guía para evaluar el grado de desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, esto lo hace mediante una trayectoria de aprendizaje compuesta por 10 niveles expuestos a continuación:

Nivel 0. No continúa la secuencia: El estudiante no respeta las estructuras espaciales y numéricas.

Nivel 1. Continúa la secuencia: Continúa las primeras representaciones de la secuencia de figuras, pero no halla correctamente más generalizaciones cercanas por recurrir a estrategias de proporcionalidad.

Nivel 2. Realiza generalización cercana: Encuentran la generalización cercana pero no son capaces de invertir el proceso para términos cercanos.

Nivel 3. Invierte el proceso para términos pequeños: Puede invertir el proceso para términos pequeños, pero no realiza la representación lejana al no respetar las estructuras espaciales y numéricas.

Nivel 4. Realiza generalización lejana: Obtienen las representaciones lejanas, aunque no son capaces de expresarlo, dando explicaciones erróneas.

Nivel 5. Expresa regla general: El estudiante es capaz de expresar la regla general, pero se le dificulta invertir el proceso para términos grandes.

Nivel 6. Invierte el proceso para términos grandes: Puede invertir el proceso para términos grandes, pero no puede expresar verbalmente la relación funcional inversa.

Nivel 7. Expresa regla general del proceso inverso: Es capaz de expresar verbalmente la regla general del proceso inverso, pero no lo puede transcribir algebraicamente.

Nivel 8. Expresa algebraicamente la regla general: No utilizan la indeterminada para expresar el proceso inverso de manera algebraica.

Nivel 9. Expresa algebraicamente la regla general del proceso inverso: Cumple con éxito todos los niveles anteriores.

La anterior trayectoria de aprendizaje es un importante referente para esta investigación y será tenida en cuenta para el diseño de la propuesta. Otra propuesta importante es la que hace Benedicto et al. (2015) sobre los niveles de demanda cognitiva. Este modelo incluye cuatro niveles que son: Bajo, bajo-medio, medio–alto y alto, cada uno de estos corresponde al esfuerzo intelectual que el estudiante debe hacer al resolver un problema de patrones geométricos. En el nivel bajo, se ubican las cuestiones de recuento directo, en el nivel bajo – medio, se ubican las cuestiones que solicitan término inmediato y próximo, en el nivel medio – alto, están las cuestiones que hacen referencia a términos próximos y lejanos y el nivel alto toma las cuestiones que piden hallar el término general. Esta manera de ver y entender como pueden ser organizados los niveles de pensamiento requeridos por los estudiantes para resolver con éxito tareas con patrones geométricos, le brinda a esta investigación herramientas importantes para el diseño y aplicación de instrumentos que permitan cumplir los objetivos planteados.

Ahora bien, continuando con esta revisión bibliográfica es importante referenciar los trabajos de investigación realizados a nivel nacional sobre la generalización de patrones, entre ellos, Vergel (2014; 2015) quien resalta la importancia de considerar los diferentes sistemas semióticos expresados por los estudiantes de manera verbal y corporal para generalizar patrones. Sugiere elementos para la construcción de un currículo y materiales curriculares que consideren el álgebra temprana, para incidir de una forma significativa en el aprendizaje de los estudiantes y eliminar prejuicios que los aprendizajes en matemáticas son memorísticos, mecánicos, descontextualizados, inertes, estáticos y sin utilidad. Velásquez (2014) y Pulgarín (2015) plantean unidades didácticas para la enseñanza de la generalización de patrones en estudiantes de sexto grado las cuales aportan significativamente a este proceso y motivan a realizar en Colombia este tipo de estudio.

2.2 Marco Teórico

2.2.1 Pensamiento Variacional

El pensamiento variacional hace parte de los cinco conocimientos básicos en matemáticas que propone el MEN (1998) dentro de su estructura curricular. Desde esta propuesta se relaciona el pensamiento variacional con los sistemas algebraicos y analíticos. aunque existe una correlación con los otros sistemas.

Este pensamiento tiene que ver con "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 2006, p. 66). Desde este pensamiento se promueve la resolución de problemas encaminados al estudio de la variación y el cambio, al igual que la modelación de situaciones de la vida cotidiana, las ciencias y las propias matemáticas.

En otras palabras, este pensamiento se entiende como una forma específica de pensar matemáticamente. Se orienta a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio. Toma forma y sentido con el conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que constituyen el pensamiento algebraico (Rojas y Vergel, 2013).

Cabe destacar que el pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento, el numérico, espacial, métrico y aleatorio y a su vez con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias (MEN, 2006). De allí la idea de superar la enseñanza de los contenidos matemáticos de forma fragmentada para convertirse en un campo conceptual; en el que se relacionan conceptos y procedimientos que permiten analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones de la vida real, de las ciencias y de las matemáticas (MEN, 2006). Para ello se requieren de situaciones de aprendizajes que fomenten la formulación, argumentación y comprobación de conjeturas y propuestas de generalización que caracterizan al pensamiento lógico y científico. En esta misma línea Vasco (2002) se refiere a este pensamiento en los siguientes términos:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p.63).

Tiene un momento de identificación de lo que cambia y permanece constante y los patrones que se repiten en determinadas situaciones, luego viene la creación de modelos mentales en los que se establecen relaciones entre variables de tal manera que produzcan las covariaciones detectadas, estos modelos luego son probados y comparados para finalmente refinarlos o descartarlos y empezar de nuevo (Vasco, 2002). En este sentido, el pensamiento variacional se encarga principalmente de la modelación matemática (Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, 2006)

"El desarrollo del pensamiento variacional inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente" (MEN, 2006, p. 66). Desde los referentes de calidad, específicamente en los estándares básicos de competencias (MEN, 2006) se plantean un conjunto de actividades con las cuales se puede desarrollar el pensamiento variacional desde edades tempranas. Entre ellas se encuentran: analizar de qué manera cambia la forma o el valor en una secuencia; establecer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia;

continuar la secuencia dos o tres términos siguientes, sea forma oral o escrita y utilizando diferentes maneras de representación; intentar encontrar una fórmula que permita calcular cualquier término de la secuencia; confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas.

En los Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2016), en coherencia con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias se plantean los siguientes elementos que corresponden a lo que los estudiantes de sexto grado como resultado de un proceso deben alcanzar.

> DBA 8. Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos y las representa mediante gráficas (cartesianas de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.).
>
> Evidencias de aprendizaje:
>
> Propone patrones de comportamiento numéricos y expresa verbalmente o por escrito los procedimientos matemáticos (MEN, 2016, p. 49).

2.2.2 Generalización

La generalización es un proceso determinado por la observación o visualización de invariantes en medio de lo que varía (Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, 2006). Es considerada como una característica intrínseca de gran parte de las matemáticas (Kaput, 2000) y como el nivel más alto de la modelación (MEN, 1998).

> Generalizar es algo más complejo que ir de lo particular a lo general; es también recorrer el camino en el sentido inverso. Además, se debe incluir el paso de casos particulares a la construcción de otros particulares y de elementos generales a otros de mayor grado de generalidad (Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia, 2006, p. 20)

Desde esta definición ver lo general en lo particular consiste en la identificación de invariantes, cuando se es capaz de distinguir lo que es particular y común dentro de múltiples situaciones para lograr la sistematización de características generales. Y ver lo particular como una expresión de lo general, está relacionado con interpretar cada situación a partir de los elementos que la conforman. Inicialmente la representación de la generalización se da en un lenguaje natural, cuando se describe las características observadas en un fenómeno variante, pero luego es necesario un conjunto de símbolos que permitan expresar conclusiones de las representaciones generalizadas.

Otra postura importante sobre la generalización es la Radford (2015) quien manifiesta que la generalización implica por lo menos tres componentes interrelacionados, en primer lugar, hay un componente fenomenológico, en segundo lugar, hay un componente epistemológico-ontológico y, en tercer lugar, hay un componente semiótico. El componente fenomenológico hace referencia a cómo interactúan la intuición, la atención y la intención para percibir a los objetos particulares que son la base de la generalización. El componente epistemológico–ontológico consiste en generalizar objetos particulares que sirven para inferir o deducir algo sobre otro objeto. Y el componente semiótico es el conjunto de medios semióticos sean gestuales, verbales o escritos que permiten afirmar cosas sobre los objetos generalizados.

Rivera (2013) habla de tres tipos de razonamiento que entran en juego al expresar una generalidad, estos son: abducción, inducción y deducción. La abducción es el desarrollo de inferencias o hipótesis para someterlas a pruebas por medio de la inducción, estas hipótesis por lo general están influenciadas por experiencias previas. La inducción pone a prueba una inferencia preliminar con el fin de apoyar una regla que involucre los casos conocidos como los proyectados y la deducción es una única conclusión válida, los estudiantes de primaria y secundaria podrían hacer deducciones mediante explicaciones verbales, numéricas o visuales más que de una prueba deductiva formal.

2.2.3 Generalización de patrones

Los procesos de generalización consisten en descubrir un patrón o regla a partir de una secuencia de objetos, que pueden ser numéricos o geométricos (Butto et al., 2018). La capacidad para encontrar patrones y expresar su generalidad se encuentran presente desde el nacimiento. De esta manera es necesario aprovechar todas esas capacidades que poseen los estudiantes desde edades muy tempranas para que ellos en grados más avanzados lleguen a utilizar reglas que sean producto de sus propias expresiones de generalidad, por ejemplo, los casos de factorización (Mason, 1999).

“Las actividades de generalización de patrones son una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado” (MEN, 2006, p.67). Por tanto, la generalización de patrones se considera un medio especialmente adecuado para la introducción de ideas algebraicas dada su representación dinámica entre variables (p. ej., Stacey y MacGregor, 2001) y porque posibilita a los estudiantes a acercarse a situaciones de variación que se constituyen en el pensamiento algebraico (Vergel, 2014).

De acuerdo con Radford (2006):

> La generalización algebraica de un patrón se basa en la observación de un punto común local que luego se generaliza a todos los términos de la secuencia y que sirve de garantía para construir expresiones de elementos de la secuencia que permanecen más allá del campo perceptivo. (p. 5).

Ésta debe incluir tres componentes, el primero identificar un punto común en términos particulares, el segundo formar un concepto común para todos los términos de la secuencia y el tercero decir una regla general que permita calcular cualquier término de la secuencia. Así mismo, Radford (2003) clasifica el modo que utilizan los estudiantes para expresar las generalidades algebraicas en tres tipos que son: *(i) Factual*, en esta forma de representación hacen parte los gestos y palabras, *(ii) Contextual*, la generalización se hace lingüísticamente explícita, se nombra y describen las relaciones existentes, por ejemplo, las espaciales, *(iii) Simbólica*, en esta la generalización se expresa en el sistema semiótico alfanumérico del álgebra. Estas maneras de representación no son distintas formas de representar lo mismo, es una manera de acceder a formas más profundas de conciencia.

2.2.4 Patrones y clases de patrones

Según Zapatera (2018a), un patrón es una sucesión de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla; los estudiantes han de deducir esta regla a partir de casos particulares, para generalizar el patrón y continuar la sucesión. Los patrones llevan a los estudiantes a emplear habilidades de orden superior y hacer hincapié en la exploración, la investigación, la conjetura y la generalización (Vale, 2009).

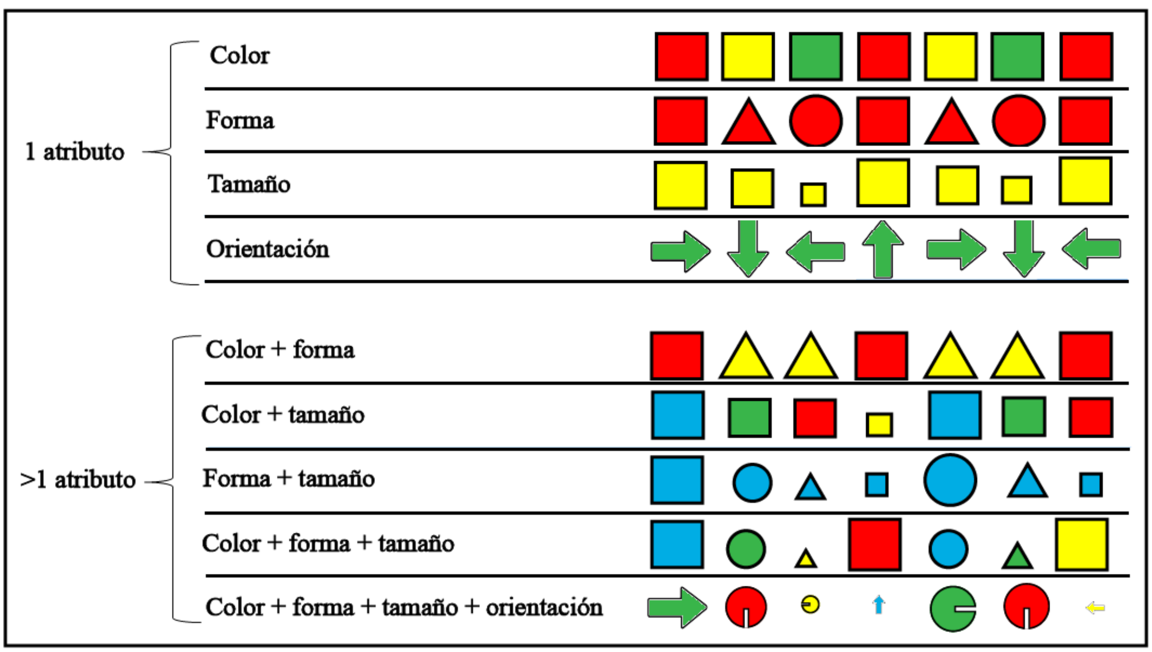
Según Rivera (2013), el estudiante al trabajar con patrones se enfrenta a dos tareas, una es que aprendan a identificar puntos variantes e invariantes en cada una de las etapas y la otra es que adquieran la práctica que para hallar las próximas etapas de un patrón se puede hacer mediante una expresión general. De esta manera se hace evidente que el trabajo con patrones juega un papel importante para el desarrollo del pensamiento algebraico.

De acuerdo con Vale (2009), los patrones son un campo con un alto potencial para el estudio de las matemáticas, pues estos desarrollan diferentes habilidades matemáticas como la resolución de problemas, el razonamiento y la comunicación utilizando diferentes maneras de representación. Las actividades con ellos han sido consideradas como una de las rutas para introducir a los estudiantes en el álgebra; sin embargo, no todas las actividades conducen a eso, pues existe el caso de formación de reglas por ensayo y error y por estrategias de adivinación (Radford, 2006). Esto es indicativo de la importancia de conocer la manera en la que los estudiantes se enfrentan a las tareas.

Los patrones se pueden clasificar según sus reglas de formación, ya sea en patrones de repetición o de recurrencia. En los patrones de repetición los elementos se presentan de forma periódica en función de uno o más atributos como los son: color, tamaño, orientación, forma, entre otros (ver Figura 3) y en los patrones de recurrencia cada término de la sucesión se expresa en función de los anteriores o siguiendo una determinada regla, estos a su vez pueden ser numéricos o geométricos (ver Figura 4) (Zapatera, 2018a).

Figura 3

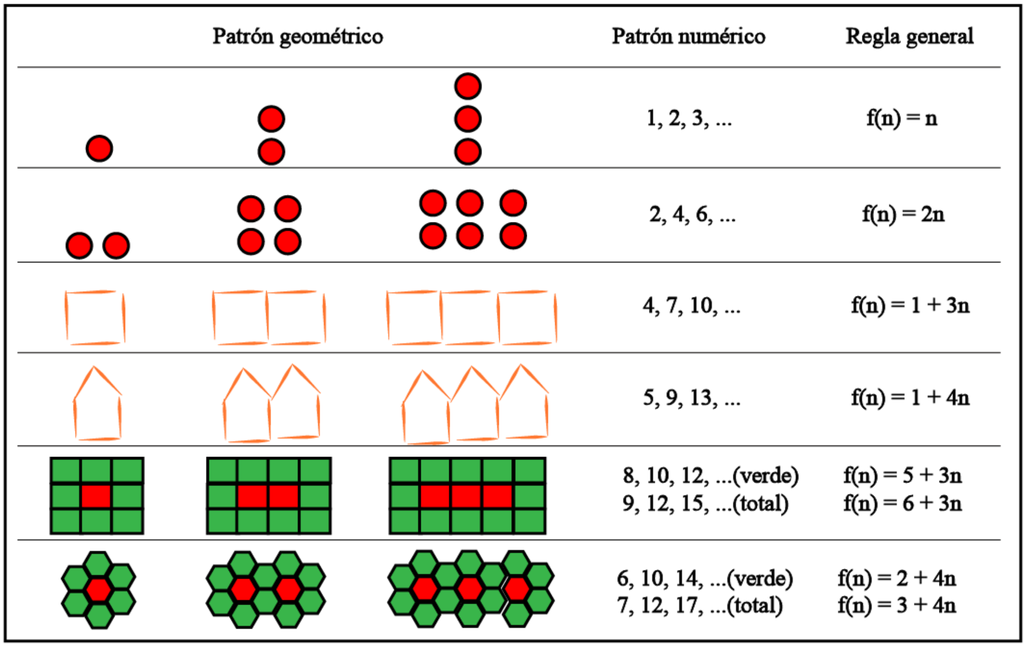
Patrones de repetición con uno o más atributos



Nota. Tomado de Zapatera (2018a).

Figura 4

Patrones recurrentes



Nota. Tomado de Zapatera (2018a).

En este trabajo en particular se emplearán tareas de generalización con patrones lineales definidos como:

> Aquellos que describen una situación que contiene en el enunciado un dibujo o figura que proporciona los primeros términos $f(1), f(2), f(3), \ldots$ de una progresión aritmética y se pide a los alumnos calcular $f(n)$ para n "pequeño" y para n "grande" y obtener la regla general. El término general viene dado por una función lineal o afín (Zapatera y Callejo, 2011; p. 600).

2.2.4.1 Patrones numéricos. Son una lista de números que siguen una cierta secuencia. En estos patrones se logra identificar de cuanto en cuanto cambia, pero no se hace evidente lo variable e invariable (Pulgarín, 2015).

2.2.4.2 Patrones geométricos. “Un patrón geométrico es una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales, representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado” (Arbona et al., 2017).

Las actividades con patrones geométricos presentan los primeros términos de una secuencia y piden calcular, el término inmediato, un término próximo y un término lejano, tal que este último lleve a formular una expresión algebraica para calcular cualquier término de la secuencia (Benedicto et al., 2015). Por término inmediato se entiende al término que sigue en la secuencia, el término próximo es el que se encuentra en posiciones cercanas y que su representación puede darse de manera gráfica como aritmética y el término lejano es aquel que su representación gráfica puede tardar más tiempo en llevarla a cabo, por lo tanto, es conveniente realizar una generalización que conlleva a formular una expresión algebraica para hallar cualquier término de la secuencia.

Lo anterior es conocido como cuestiones de *relación directa*, pero también pueden plantearse cuestiones de *relación inversa,* que son aquellas en las que se proporciona el número de elementos de un término dado y el estudiante debe encontrar la posición en la que se encuentra ese término dentro de la secuencia (Arbona et al., 2017).

Los patrones geométricos son un contexto que permite una aproximación inicial, visual e intuitiva, al alcance de todos los estudiantes y permiten pasar de forma significativa a la aproximación algebraica mediante el uso de letras y símbolos que adquieren significado en el contexto de las representaciones gráficas de secuencias numéricas. (Arbona et al., 2017, p. 45)

En concordancia a lo anterior Apsari et al. (2020) manifiestan que como modelo matemático la visualización les ayuda a los estudiantes a reconocer la estructura de la serie, la cual tiende a ser categorizada por ellos como un concepto abstracto si se empieza directamente con los números. De acuerdo con ello, en esta investigación se utilizarán los patrones geométricos para que los estudiantes mediante las representaciones gráficas puedan identificar lo variable e invariable en la secuencia.

2.2.5 Secuencia de Enseñanza

Según Díaz-Barriga (2013) las secuencias constituyen una organización de actividades de aprendizaje con propósitos y objetivos claramente definidos que se proponen a los estudiantes con el fin de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo.

Las secuencias de enseñanza se elaboran mediante un proceso en el cual la evaluación cumple un papel importante, pues ésta desde sus tres dimensiones, diagnóstica, formativa y sumativa permite que la secuencia esté en constante mejoramiento y se realicen los ajustes necesarios para brindar mejores oportunidades y ambientes de aprendizaje. Díaz-Barriga (2013) propone un modelo de secuencia de enseñanza el cual será tomado como referencia en esta investigación para el diseño de nuestra secuencia. Este modelo incluye tres tipos de actividades: *apertura, desarrollo* y *cierre*. Las actividades de apertura son aquellas que abren el clima de la clase, estas pueden ser problemas que constituyan un reto intelectual para los estudiantes y se pueden asignar de manera previa a la sesión como, por ejemplo: consultas, lecturas, videos, entre otras. En las actividades de desarrollo el estudiante interactúa y pone en práctica nueva información con la orientación del docente y en las actividades de cierre se sintetizan todas las actividades para reelaborar la estructura conceptual.

Durante los años de investigación sobre la inclusión del álgebra en los primeros grados de escolaridad mediante el trabajo con patrones, diferentes autores han hecho propuestas en las que han incluido las secuencias de enseñanzas como una manera de llegar a los estudiantes y abordar las tareas con patrones. Por ejemplo, Zapatera (2018a) plantea una secuencia de tareas para los estudiantes de primaria, en los grados 1° y 2° utiliza los patrones de repetición y para los grados de 3°, 4°, 5° y 6° utiliza los patrones de recurrencia. Barajas et al. (2018) caracteriza el proceso de generalización de patrones que siguen los estudiantes de 3° a partir de una secuencia didáctica, Merino (2012) lo hace con estudiantes de 5° para aportar información útil a estudios que pretenden poner en práctica la nueva visión del álgebra en el currículo. Arbona (2016) diseña y experimenta una secuencia de enseñanza- aprendizaje para iniciar el álgebra a estudiantes con altas capacidades matemáticas. Steele y Johanning (2004) y Morales et al. (2018) proponen experimentos de enseñanza, sus resultados les permitieron confirmar la idea que desde edades muy tempranas los estudiantes son capaces de desarrollar tareas que promuevan el pensamiento funcional.

2.2.6 Enseñanza Online

Centrándonos ya en el aprendizaje online, aunque acontece nuevamente la falta de un consenso claro a la hora de definir el término, la mayoría de autores parecen concordar al considerarlo una evolución del aprendizaje a distancia en la cual la tecnología facilita el acceso a experiencias de aprendizaje (p. ej., Carliner, 2004). Obviamente, una conceptualización tan amplia posibilita un elevado número de configuraciones que podrían encuadrarse en este ámbito. De hecho, Means et al. (2014) identifican nueve dimensiones, cada una de ellas con diferentes opciones, cuyas combinaciones darían cuenta de los múltiples diseños dentro del aprendizaje online. Estas nueve dimensiones serían: modalidad, que indicaría el grado de presencialidad; el tipo de pedagogía, el rol del instructor, el rol del estudiante, la ratio instructor-alumno, el grado de sincronía en la comunicación, la fuente de la retroalimentación que reciben los estudiantes y el objeto de la evaluación online. La alta variabilidad de modalidades de aprendizaje online complica realizar comparaciones globales entre el grado de efectividad de la enseñanza presencial y la enseñanza online, pues se ha de contemplar que el impacto educativo de esta última se ve claramente influenciado por algunas de las variables que acabamos de enumerar (Hodges et al., 2020). Sirva de ejemplo el apunte de García-Peñalvo et al. (2020), quienes, sobre la base de trabajos propios previos, afirman que, en términos evaluativos, los modelos online con pocos alumnos y alto grado de interacción docente-discente son perfectamente competitivos, mientras que un incremento de estudiantes se asocia a situaciones disruptivas o poco efectivas.

En el caso específico del aprendizaje online en las matemáticas, las investigaciones recientes sugieren que, éste, no debe centrarse solamente en la modernización del entorno educativo, más bien debe cumplir una función específica en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es decir, su uso debe regirse por un adecuado modelo educativo y metodológico (Álvarez et al., 2015; Mavridis et al., 2017). Por tal motivo, en el presente trabajo el aprendizaje online va mediado por una secuencia de tareas que constituyen una organización de las actividades de aprendizaje con la intención de proponer situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo (Artigue, 2009; Bell, 1993), que propicie el acercamiento efectivo, en este caso al álgebra.

Butto y Rojano (2010), Van den Heuvel-Panhuizen et al. (2013) y Jupri et al. (2015) integran las herramientas tecnológicas a la enseñanza del álgebra temprana y confirman su eficacia a través de la comparación entre el grupo experimental que participa del experimento mediante un trabajo digital y el grupo control que lo hace utilizando papel y lápiz. En este mismo sentido, la investigación de Kieran (2019), ilustra la forma en que un contenido específico para el aprendizaje del álgebra con herramientas tecnológicas, se desarrolló de forma exitosa por medio de una secuencia de tareas, a través de la metodología de diseño.

Capítulo 3. Objetivos

3.1 Objetivo General

Explorar una introducción al pre- álgebra en estudiantes de sexto grado, a través de una secuencia de enseñanza online con tareas de patrones geométricos.

3.2 Objetivos Específicos

- Diseñar y experimentar una secuencia de enseñanza-aprendizaje online que permita la iniciación al álgebra a estudiantes de sexto grado mediante la resolución de tareas de patrones geométricos.
- Observar e identificar cuáles son las estrategias y dificultades que emergen cuando los estudiantes realizan tareas de generalización de patrones geométricos en la implementación de la secuencia de enseñanza online.
- Aportar información que nos permita identificar las características que manifiestan los estudiantes de sexto grado en este contexto de iniciación al álgebra (pre-álgebra).

Capítulo 4. Metodología

Con el fin de dar respuesta a los objetivos planteados en la investigación, se decide emplear una metodología de enfoque cualitativo encaminada hacia una intervención educativa centrada en la iniciación de la enseñanza del álgebra para estudiantes de sexto grado de Educación Básica Secundaria (EBS). Desde este camino, se requería una metodología de trabajo que permitiese el diseño de un entorno de aprendizaje sujeto a revisiones constantes durante la experimentación y el análisis sistemático de las estrategias y herramientas instruccionales. De modo que se utilizó una metodología de investigación basada en el diseño.

Para poder cumplir con lo acometido contamos con 6 estudiantes de sexto grado, tres niños y tres niñas con edades que oscilan entre 11 y 12 años. Estos estudiantes no habían recibido formación previa en la solución de tareas de generalización de patrones geométricos. Son miembros de la institución educativa antes mencionada y durante el proceso de caracterización manifestaron disponer en casa de herramientas tecnológicas que le permitiesen participar en este estudio, así como su interés por el mismo.

4.1 Metodología de investigación basada en el diseño

De acuerdo a los intereses de esta investigación de realizar una introducción a la generalización de patrones geométricos en los estudiantes de sexto grado y diseñar una secuencia de enseñanza para cumplir tal fin, se consideró pertinente emplear una metodología de *research design* (investigación de diseño). Según Gravemeijer y Prediger (2019), la investigación de diseño combina diseño instruccional con el objetivo de desarrollar experiencias de enseñanza-aprendizaje dentro en las aulas y la investigación educativa, con la finalidad de investigar y comprender estos procesos.

Cobb et al. (2003) identifican cinco características transversales que presentan estos tipos de experimento de diseño. En primer lugar, se caracterizan por su propósito de desarrollar una serie de teorías sobre el proceso de aprendizaje y sobre los medios que se diseñan para apoyar ese aprendizaje. En segundo lugar, estos experimentos presentan una naturaleza altamente intervencionista, es decir, en su intención de crear e investigar nuevas formas de instrucción para mejorar el aprendizaje, el investigador interviene en las prácticas de aula en vez de limitarse solamente a su observación. Una tercera característica es su mirada prospectiva y reflexiva. En el lado de la prospectiva el experimento se lleva a cabo bajo un proceso hipotético de aprendizaje, que, en el caso de esta investigación, es la trayectoria de aprendizaje propuesta por Zapatera (2018b) y, en el lado reflexivo, los experimentos de diseño son pruebas basadas en conjeturas, a menudo en varios niveles de análisis. Estos dos aspectos juntos, el prospectivo y reflexivo, dan lugar a una cuarta característica que es el proceso iterativo, porque el experimento se desarrolla en una iteración de ciclos de conjeturas, pruebas y revisiones. Finalmente, una última característica de los experimentos de diseño tiene que ver con sus raíces pragmáticas y las teorías desarrolladas durante el proceso de experimentación. En este sentido, estos diseños aceptan la complejidad del aula como escenario de investigación, y las teorías son de dominios específicos que están destinadas a tener implicaciones prácticas.

4.1.1 Estructura general de un experimento de diseño

A las investigaciones de este tipo la caracterizan tres fases distintivas que son: preparación del experimento, realización del experimento de diseño y análisis retrospectivo (Cobb et al., 2003), las cuales se desarrollan mediante un proceso cíclico, con la finalidad de realizar una mejora constante en el modelo. Este ciclo puede ilustrarse tal y como se presenta en la siguiente figura (ver Figura 5).

Figura 5

Fases de la metodología de investigación basada en el diseño

4.1.1.1 Preparación del experimento. En esta fase se aclaran los objetivos de aprendizaje y se definen los puntos de partida de la instrucción, para ello se tiene en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. También se delimitan teorías sobre el proceso de aprendizaje y sobre los medios para apoyar este proceso.

4.1.1.2 Realización del experimento de diseño. En esta segunda fase el diseño y el proceso instruccional construido en la fase anterior es puesto en práctica a través de una serie de ciclos de diseño y análisis con el fin de mejorar el diseño inicial. En cada ciclo el investigador lleva a cabo un experimento mental anticipatorio en el que se imagina de qué manera las actividades de instrucción podrían realizarse en la interacción en el aula y lo que los estudiantes podrían aprender con ellas, posteriormente el investigador intenta analizar el proceso real en el aula (Gravemeijer y Prediger, 2019).

4.1.1.3 Análisis retrospectivo. El análisis retrospectivo consiste en situar el aprendizaje y los medios mediante los cuales fue apoyado este proceso en un contexto teórico más amplio enmarcándolo como un caso paradigmático de un fenómeno más global.

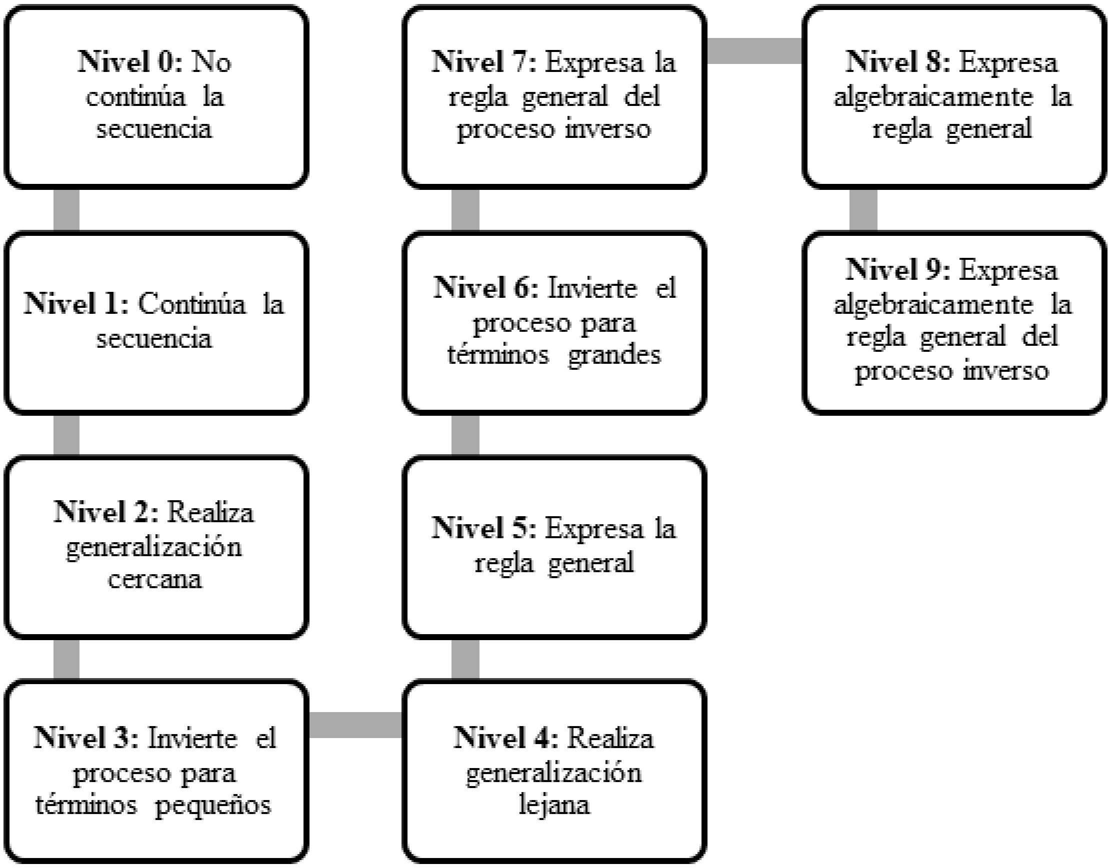
En esta investigación se propone como experimento de enseñanza una secuencia de tareas de generalización de patrones geométricos. A continuación, se describen los procedimientos llevados a cabo en cada una de las fases que componen esta metodología.

4.2 Preparación del experimento

El experimento de diseño se sitúa dentro de la propuesta de pre-álgebra como una manera de conectar la aritmética y el álgebra en los estudiantes de sexto grado. Con él se pretende analizar el proceso de generalización en estudiantes cuando resuelven tareas con patrones geométricos. Así pues, como se ha dicho en capítulos anteriores, una buena manera de introducir el álgebra en los estudiantes es a través de la generalización de patrones geométricos (Radford, 2010). En esta línea, se diseñó una secuencia de enseñanza a partir de una revisión bibliográfica sobre el proceso de generalización de patrones geométricos y el tipo de tareas empleadas por otros autores para acercar a los estudiantes a este proceso. Producto de ello se tomó como referente la trayectoria de aprendizaje definida por Zapatera (2018b) (ver Figura 6) porque esta describe el progreso de los estudiantes en 10 niveles de desarrollo y orienta el camino que ha de seguirse para diseñar un experimento de enseñanza con la finalidad de promover en los estudiantes el aprendizaje.

Figura 6

Niveles de la trayectoria de aprendizaje



En esta trayectoria de aprendizaje el nivel 0 estaría formado por los estudiantes que no continúan la secuencia y los siguientes nueve niveles se caracterizarían por los saltos cognitivos que permiten adquirir ese determinado nivel y que se arrastran progresivamente a los niveles posteriores (Zapatera, 2018b). Estos niveles son acumulativos, un determinado nivel incluye los niveles que lo preceden.

De igual manera, se seleccionaron y adaptaron algunas tareas encontradas en la literatura que sirvieron para orientar a los estudiantes a que progresivamente lleguen a desarrollar las características de los primeros ocho niveles de la trayectoria de aprendizaje. Cabe resaltar que los dos últimos niveles, que tienen que ver con expresar algebraicamente la regla general del proceso directo y del proceso inverso quedan fuera del alcance de los objetivos para la secuencia de enseñanza que se proyecta en este trabajo de investigación.

Algunas de las adaptaciones realizadas a estas tareas fueron revisadas por tres profesionales teniendo en cuenta criterios como: pertinencia, claridad, precisión, lenguaje y metodología. En esta revisión se obtuvo un promedio de 96% de nivel de validación (ver anexo A). Con base a estos resultados se realizaron ajustes de acuerdo a las sugerencias. Posterior a ello, se asignaron las tareas a un grupo de 32 estudiantes de sexto grado pertenecientes a una institución educativa cercana y con características similares a la institución en la que se realiza la presente investigación, con la finalidad de conocer las principales dificultades que presentan los estudiantes al interpretar las tareas para a partir de sus respuestas realizar nuevamente los ajustes pertinentes.

Como resultado de este proceso, se cambiaron algunas imágenes de los patrones geométricos para que estos fueran más acordes al contexto planteado. La experiencia sirvió para conocer la manera en la que los estudiantes resuelven este tipo de tareas y las dudas que les surgen. Lo cual permitió establecer los posibles resultados que se puedan obtener con la implementación de la secuencia de enseñanza y proyectar la manera en que se llevará a cabo el análisis de los datos. Por lo tanto, se determinó que para analizar el proceso de generalización en los estudiantes es importante identificar cuáles son las estrategias que ellos emplean para resolver estas tareas y las dificultades que emergen durante el proceso de resolución. Por consiguiente, se decidió utilizar como referente la clasificación de estrategias que realizan Zapatera y Callejo (2011) para la solución de tareas de relación directa y la que realizan Arbona et al. (2018) para la solución de tareas de relación inversa.

Otro punto de partida para la preparación del experimento son las conjeturas que se establecieron sobre la generalización de patrones en los estudiantes, estas son las siguientes:

- Los estudiantes no identifican características comunes entre los elementos de una secuencia.
- Los estudiantes no tienen desarrolladas las destrezas necesarias para usar una propiedad común a fin de deducir una expresión que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

En este mismo camino, se indagaron los conocimientos previos de los estudiantes relacionados con la solución de tareas con patrones geométricos y el conocimiento de plataformas educativas digitales. Referente a esto se encontró que los estudiantes durante sus años de formación no habían recibido ninguna instrucción relacionada con este tipo de tareas y que además no habían utilizado plataformas digitales para el desarrollo de sus clases. Por consiguiente, se realizó una revisión cuidadosa de las plataformas digitales disponibles que fueran de fácil acceso y manejo de los estudiantes. a partir de ello, se decidió utilizar *Google Classroom* para la asignación y desarrollo de tareas y *Zoom* para los espacios sincrónicos de explicación, discusión y retroalimentación.

La toma de decisiones en el diseño de la secuencia obedecía al propósito de, en la medida de lo posible, disminuir la distancia entre una enseñanza presencial y online. Nótese que esta secuencia está destinada a estudiantes a los que no se les presupone ninguna experiencia previa en enseñanzas virtuales o ningún conocimiento específico con las herramientas tecnológicas empleadas como soporte al proceso de enseñanza. Consecuentemente, el diseño contempla la necesidad de formar al alumno en las funcionalidades básicas de las aplicaciones que les serán necesarias a lo largo de la secuencia de trabajo. Además, se pretende dotar al alumno de una retroalimentación continuada, especialmente necesaria al abordar conceptos de complejidad creciente e ideas con las que el alumnado no había trabajado con anterioridad.

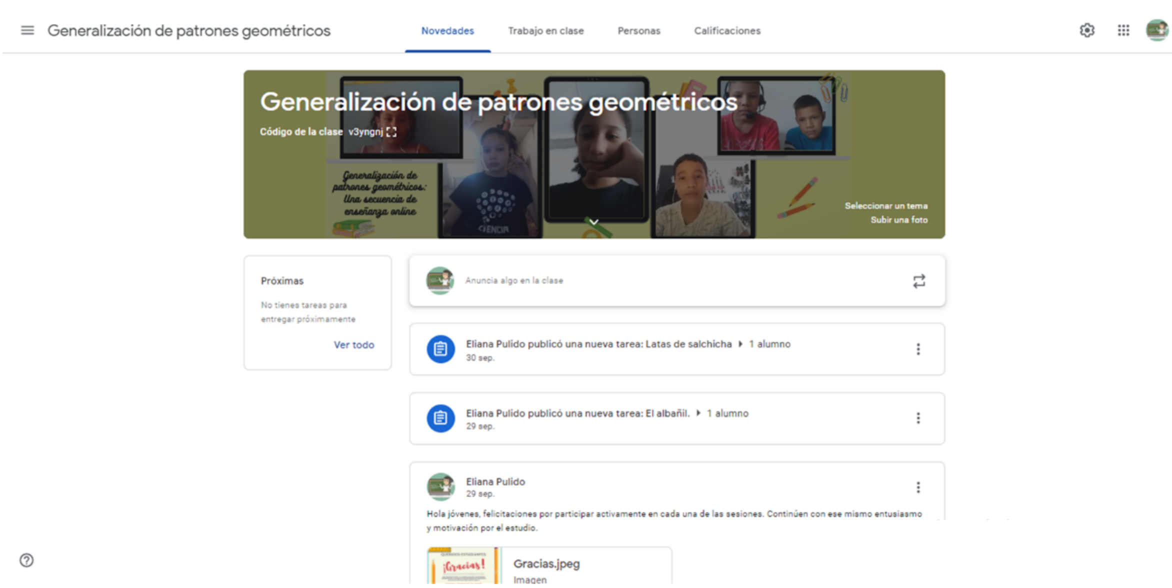
4.2.1 Plataforma Google Classroom

Google Classroom es una herramienta de *Google for Education*, clasificada como Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA), debido al hecho de ser ofrecida a los docentes por tener potencial para auxiliar y proporcionar aprendizaje y enseñanza, además de disponer de soporte técnico, social y pedagógico (Zhang, 2016). Los participantes se benefician de tener una herramienta gratuita, de fácil acceso y rápida apropiación, donde pueden comunicarse fácilmente con sus profesores de forma sincrónica y asincrónica (Zhang, 2016).

Desde la parte de aprendizaje y enseñanza, la plataforma permite la creación de una clase, por lo que lo primero que se hizo fue crear una cuenta con el dominio *Gmail*, que permitiera tener el control de la clase. Después se accede a la url: https://classroom.google.com, y se va al perfil “profesor” y se crea la clase, que en nuestro caso (ver Figura 7), es el entorno donde se desarrolla la secuencia.

Figura 7

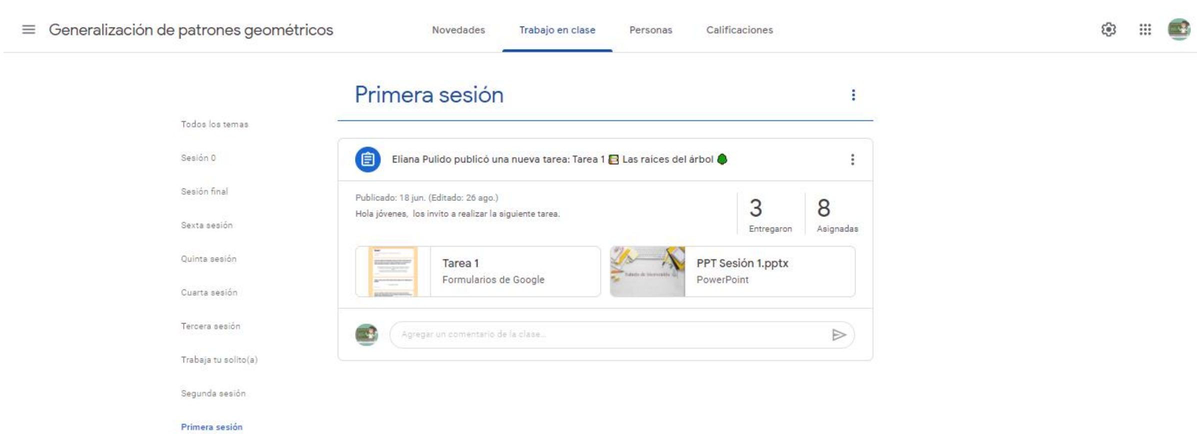
Entorno virtual de la clase “Generalización de patrones geométricos"



Una vez creada la clase se accede al menú principal, donde se tienen las opciones de: novedades, trabajo en clase o calificaciones, con las cuales se dinamiza el proceso. Cada sesión de la secuencia es asignada como un trabajo en clase. Los estudiantes reciben actualizaciones y notificaciones en tiempo real del contenido del profesor, con acceso a recursos avanzados de las aplicaciones de *Google*, enlaces a sitios interesantes, vídeos y notas de evaluación. La herramienta brinda diferentes formatos para crear una tarea como lo son documentos, presentaciones, hojas de cálculo, dibujos y formularios. En este caso algunas de las tareas son planteadas en *formularios de Google*, con un diseño mediante el cual los estudiantes incluyen respuestas en formato numérico o a modo de respuesta abierta breve. También se emplean presentaciones y dibujos en línea que los estudiantes pueden editar. Esta plataforma simplifica la creación y organización de tareas y la retroalimentación en tiempo real, entre otras características y funcionalidades. En la Figura 8 se muestra un ejemplo de cómo se ve la primera sesión en este espacio.

Figura 8

Ejemplo de la primera sesión de la secuencia



El entorno facilita almacenar información, lo que permite la actividad académica asincrónica. En este sentido, la secuencia de enseñanza es implementada en esta plataforma aprovechando todas las herramientas que ella brinda. Otras herramientas usadas fueron el programa de videollamadas *Zoom*, el cual cuenta además con la funcionalidad la “pizarra en blanco”, con la que los usuarios pueden dibujar, escribir y, de esta forma, dar conocer al maestro en tiempo sincrónico la respuesta puntual algunas preguntas de la secuencia que hacían referencia a dibujar la próxima figura.

4.2.2 Protocolo para el desarrollo de cada una de las sesiones.

En la siguiente tabla (ver Tabla 1) se describe el protocolo a seguir en cada una de las sesiones de implementación de la secuencia de enseñanza.

Tabla 1

Acciones para desarrollar la secuencia de enseñanza online

Antes de cada sesión	Realizar la planeación de la sesión y preparar todos los recursos necesarios para ella (diapositivas, imágenes, juegos, entre otros) Revisar la conexión y el funcionamiento de la plataforma.
En cada sesión	Teniendo en cuenta las orientaciones de una enseñanza online, cada una de las sesiones sigue la siguiente estructura. • Saludo e introducción. • Presentación del objetivo de la sesión a los estudiantes. • Negociación de normas de convivencia para la sesión, propuestas por los estudiantes y docente. • Indagación de conocimientos previos. • Desarrollo de las actividades propuestas para la sesión. Apoyo del docente a los estudiantes mientras desarrollan las actividades, revisan lo que hacen, aclaran dudas, hacen evaluación formativa y realimentación inmediata a los estudiantes. • Resumen de la sesión por parte de los estudiantes bajo la orientación del docente. • Evaluación de la sesión, de carácter formativo durante el desarrollo de la sesión y con realimentación inmediata. • Asignación de tarea para desarrollar en casa con la supervisión del acudiente o tutor.
Después de cada sesión	Organizar los datos recolectados en la sesión. Analizar los resultados y con base a ellos realizar los ajustes pertinentes a la secuencia y a la siguiente sesión.

4.2.3 Experimento de Enseñanza

4.2.3.1 Presentación. Desde el punto de vista de la clasificación del aprendizaje online que posibilitan las dimensiones definidas por Means et al. (2014), la secuencia de enseñanza se caracteriza por:

- Modalidad: totalmente online.
- Rol del docente online: activo
- Ritmo: combinación de sesiones planificadas de naturaleza síncrona con el docente y de trabajo autónomo en cualquier momento.
- Rol del estudiante: resolución de problemas, de manera preferente.
- Ratio docente-alumnos: inferior a 35 estudiantes por docente.
- Comunicación: combinación de comunicación síncrona y asíncrona
- Pedagogía: práctica, de manera preferente.
- Fuente de retroalimentación: docente, de manera mayoritaria.
- Objeto de la evaluación: recogida de información sobre la evolución del aprendizaje de cada estudiante.

En esta secuencia hacen parte 18 tareas de patrones lineales $y = ax \pm b$ que son distribuidas en trabajo grupal, trabajo individual, y trabajo independiente. Las tareas de trabajo grupal se plantean en los encuentros sincrónicos con la presencia de todos los estudiantes para que sean resueltas de manera conjunta con la orientación del docente, la idea es que se fomente la discusión entre ellos, que creen y comprueben sus propias conjeturas. Las tareas de trabajo individual son las que resuelve cada estudiante en compañía del docente y las tareas de trabajo independiente son las que realiza el estudiante sin ninguna supervisión, éstas se proponen sólo algunas veces.

La secuencia se desarrolla en ocho sesiones dirigidas por la docente y autora del presente estudio. En la Tabla 2 se muestra la distribución de las tareas por sesión y los métodos de recogida de datos.

Tabla 2

Breve descripción de las sesiones de la secuencia de enseñanza

Sesión	Descripción	Recogida de datos
01	Está compuesta de tres tareas de generalización inmediata, para ser resueltas de manera individual y en encuentros diferentes, con la finalidad de indagar un poco los conocimientos previos de los estudiantes frente a este tipo de tareas.	● Formulario en línea. ● Dibujos realizados por los estudiantes. ● Grabación de la sesión. ● Anotaciones de la investigadora.
02	Se hace un acercamiento a lo que son los patrones, ejemplos, los tipos de patrones que existen en matemáticas y se profundiza propiamente en lo que son los patrones geométricos. En esta sesión se proponen dos tareas de generalización inmediata, con las que se pretende que el estudiante identifique que cada representación gráfica tiene un valor.	● Formulario en línea. ● Dibujos realizados por los estudiantes. ● Grabación de la sesión. ● Anotaciones de la investigadora.
03	Se continúa con el objetivo de la sesión anterior y además se espera que el estudiante identifique lo que cambia y lo que permanece constante en cada representación gráfica, aquí se plantean dos tareas, una de ellas de trabajo grupal y la otra de trabajo individual.	● Formulario en línea. ● Dibujos realizados por los estudiantes. ● Grabación de la sesión. ● Anotaciones de la investigadora.
04	Esta sesión tiene dos tareas de generalización cercana con las que se espera que el estudiante comience a emplear estrategias funcionales.	● Formulario en línea. ● Dibujos realizados por los estudiantes. ● Grabación de la sesión. ● Anotaciones de la investigadora.
05	Está compuesta de tres tareas relacionadas con la generalización en el proceso inverso.	● Formulario en línea. ● Dibujos realizados por los estudiantes. ● Grabación de la sesión. ● Anotaciones de la investigadora.

Sesión	Descripción	Recogida de datos
06	Se plantean 3 tareas de generalización lejana en las cuales también se solicita la expresión verbal de la regla general.	• Formulario en línea. • Dibujos realizados por los estudiantes. • Grabación de la sesión. • Anotaciones de la investigadora.
07	Se proponen dos tareas de generalización en el proceso inverso para términos grandes y verbalización de la regla general	• Formulario en línea. • Dibujos realizados por los estudiantes. • Grabación de la sesión. • Anotaciones de la investigadora.
08	Se plantea una tarea de trabajo individual que incluye cuestiones trabajadas en cada una de las sesiones anteriores.	• Formulario en línea. • Dibujos realizados por los estudiantes. • Grabación de la sesión. • Anotaciones de la investigadora.

4.3 Realización del experimento de diseño

Como se ha dicho anteriormente la secuencia de enseñanza fue implementada de manera virtual en ocho sesiones, con encuentros grupales e individuales realizados una vez a la semana, en el primer encuentro del día se realizaba la sesión grupal y luego en horarios diferentes se llevaban a cabo las sesiones individuales. Durante estos espacios los estudiantes resolvieron tareas de generalización de patrones geométricos utilizando las plataformas antes mencionadas, aunque después de la sesión 04 se utilizó la plataforma *Google Meet* para realizar las videollamadas[1].

En cada sesión individual se le solicitó al estudiante que hiciera uso de la opción de compartir pantalla y enviara fotografías de los dibujos o tablas realizadas para responder a las tareas, con la finalidad de conocer el paso a paso de su trabajo y hacer un mejor acompañamiento.

Al finalizar cada jornada la docente realizó anotaciones de aspectos relevantes durante la implementación, a partir de ello, de la información proporcionada por las grabaciones y del análisis

[1] Se realizó el cambio porque el tiempo para las videoconferencias en la plataforma *zoom* es limitado. Los 40 minutos que ofrece por reunión no era suficiente para desarrollar toda lo que se tenía preparado para la sesión.

de la sesión se hicieron varios ajustes, quedando como producto final la secuencia de enseñanza que se describe en el anexo B (Ver anexo B).

4.4 Análisis retrospectivo de datos

Para realizar el análisis de todos los datos recogidos durante el experimento, se establecen los siguientes criterios:

4.4.1 Criterios de análisis de la secuencia de enseñanza

Para el análisis de la secuencia de enseñanza se determinará la relación que existe entre los objetivos de enseñanza planteados y los resultados obtenidos. A su vez, el impacto académico que produzca en los estudiantes la aplicación de esta secuencia.

4.4.2 Criterios de análisis del proceso de generalización de patrones

Se analizarán las estrategias empleadas por los estudiantes para solucionar las tareas de generalización de patrones de relación directa y de relación inversa. Usando como referente las clasificaciones realizadas por Zapatera y Callejo (2011) y Arbona et al., (2018). Los autores las describen del siguiente modo:

- Estrategias aditivas [EA]: Al emplear esta estrategia el estudiante observa que en cada paso aumenta una diferencia constante. Estas estrategias pueden ser de tres tipos:
  - Recuento: Realiza el conteo directamente desde el dibujo o construye la sucesión hasta el término solicitado.
  - Proceso iterativo: Reconoce y emplea el carácter iterativo de la pauta lineal.
    - Con f(1): Se suma la diferencia a partir del valor del primer término.
    - Sin f(1): Se suma la diferencia a cada elemento sin observar la particularidad del primer término.

    - Proceso recursivo: se reconoce y utiliza el carácter recursivo de la pauta lineal y se halla el valor del término solicitado al sumar la diferencia constante al término anterior o uno conocido.
- Estrategias funcionales [EF]: El estudiante utiliza una expresión para encontrar el número de elementos de cada figura. Pueden ser de dos casos:
    - Generalización local: Se utiliza la expresión para hallar el valor de un determinado número de términos.
    - Generalización global: Se utiliza la expresión para hallar el valor de cualquier término de la secuencia.
- Razonamiento proporcional [RP]: El estudiante emplea el razonamiento proporcional con multiplicaciones y regla de tres para hallar el número de elementos de la figura
- Otras: Se consideran las estrategias distintas a las anteriores o respuestas sin sentido aparente.

Estrategias en tareas de relación inversa, Arbona et al., (2018):

- Ensayo y error con cálculos de relación directa [EE]: El estudiante prueba con diferentes valores hasta que encuentra el término que tiene la cantidad de elementos dados.
- Inversión de las operaciones [IO]: Se invierten las operaciones aritméticas empleadas en las cuestiones de relación directa. Estas pueden ser:
    - Inversión correcta [IC]: Emplea el orden correcto al invertir las operaciones.
    - Inversión errónea [IE]: Invierte las operaciones en orden incorrecto.
- Resolución de ecuaciones [RE]: Resuelve la tarea planteando una ecuación.

En este análisis también se identificará el tipo de generalización empleado por los estudiantes, Radford (2003) y las principales dificultades que presentan al resolver las tareas.

Capítulo 5. Realización del experimento de diseño

En este capítulo se presentan los principales resultados obtenidos en cada una de las sesiones de aplicación de la secuencia de enseñanza. Se presenta a través de tablas las estrategias empleadas por los estudiantes en las tareas de trabajo individual y trabajo independiente, pues en éstas fue más claro identificar el tipo de estrategia utilizada por cada de ellos en comparación a las tareas de trabajo grupal.

5.1 Sesión 01

Tal como se describió en el experimento de enseñanza en esta primera sesión se pretendía indagar los conocimientos previos de los estudiantes, por ello se desarrolló de manera individual con el fin de evitar algún tipo de interferencia en las respuestas de los estudiantes. En este encuentro el papel del docente consistió en acompañar a los estudiantes y brindar orientaciones generales sobre el desarrollo del formulario, mediante el cual se propusieron las siguientes tres tareas de patrones lineales.

Figura 9

Estructura geométrica de la tarea "La planta"

1°día 2° día 3° día

Figura 10

Estructura geométrica de la tarea ***"Juego de bolos"***

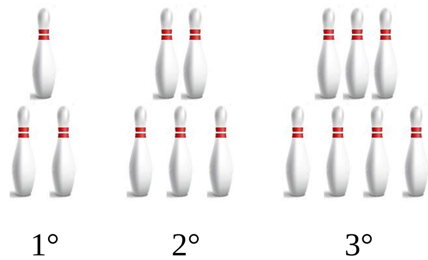
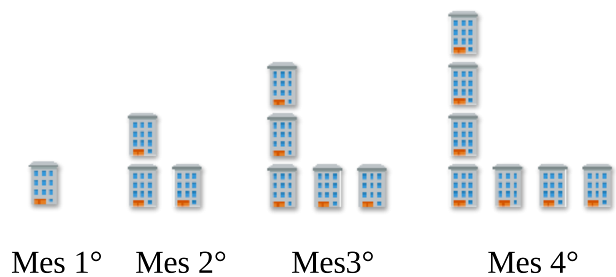


Figura 11

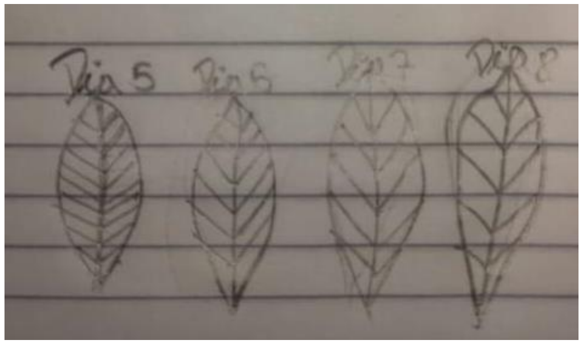
Estructura geométrica de la tarea "La constructora"



Las cuestiones en estas tareas solicitaban datos que podían ser tomados del mismo enunciado como, por ejemplo, ¿Cuántas hojas ha crecido la planta el 1° día, el 2° día y el 3° día? y encontrar términos inmediatos de la secuencia. En la primera tarea, denominada *"La planta"* los estudiantes emplearon varias estrategias para responder a los interrogantes. Uno de ellos, por ejemplo, continuó la secuencia dibujando la manera en que se verá la planta los días 5, 6, 7 y 8, de la siguiente forma (ver Figura 12).

Figura 12

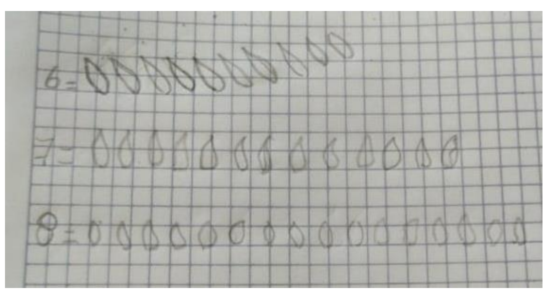
Respuesta de la estudiante Alina al apartado e. de la tarea



En este dibujo se evidencia que la estudiante reconoce las figuras como un todo y no como un conjunto de elementos. Las plantas que realizó las hizo casi de la misma manera, argumentando que se diferencian por su tamaño. Otro caso fueron los estudiantes que no respetaron la estructura espacial y numérica de las representaciones gráficas. Un ejemplo de ello se aprecia en la siguiente imagen, ver Figura 13.

Figura 13

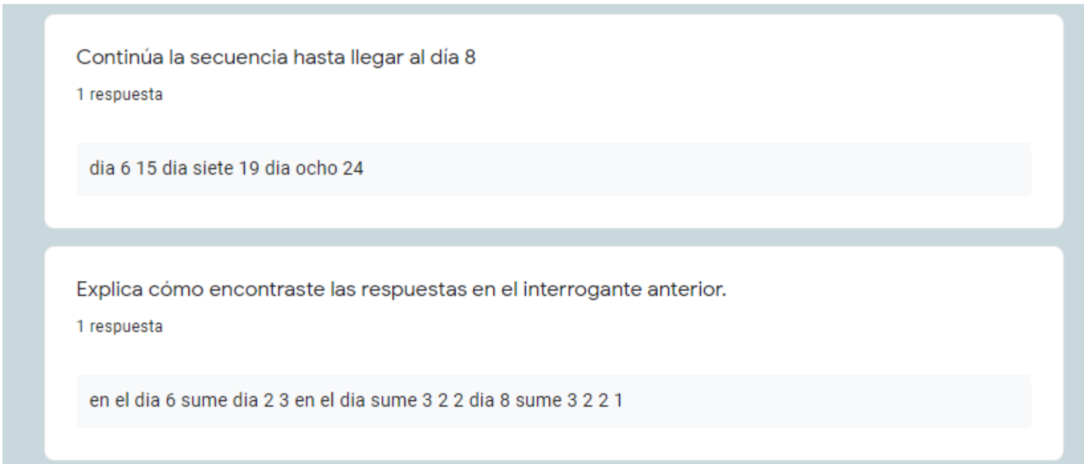
Respuesta del estudiante Juan de Dios al apartado e. de la tarea



Este estudiante ubica todas las hojas en posición horizontal y las cantidades no corresponden al valor del término solicitado. Este error lo llevó a responder de manera equivocada los interrogantes que conforman esta tarea. Una situación similar fueron los estudiantes que inventaron adiciones para encontrar los términos solicitados. Esto es, sumar el valor de los términos anteriores para hallar los siguientes. Así como se ve en la siguiente imagen (ver Figura 14):

Figura 14

Respuesta del estudiante Juan Sebastián al apartado e. de la tarea

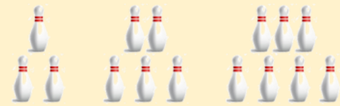


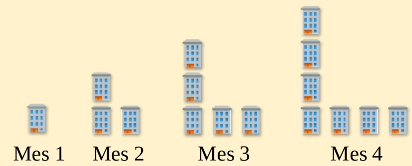
En este caso Juan Sebastián manifiesta que, por ejemplo, para encontrar el valor del día 6 sumó la cantidad de hojas que tenía la planta el día 2 y el día 3, y para el día siete sumó la cantidad de hojas del día 3, y dos veces las del día 2. El estudiante al emplear esta estrategia también cometió errores en los cálculos, pues el proceso que indica no da como resultado esas cantidades. Se evidencia entonces que los estudiantes no establecieron relaciones correctas entre los elementos de la secuencia y no corroboraron si el procedimiento planteado se cumplía para las figuras que aparecen en el enunciado. Por otro lado, dos de los estudiantes respondieron acertadamente a la tarea empleando estrategias aditivas, uno de ellos haciendo recuento sobre el dibujo y el otro mediante el proceso recursivo. Un último estudiante también empleó el proceso recursivo, pero utilizando un patrón de crecimiento erróneo. En las siguientes tareas *"juego de bolos"* y *"la constructora"* los estudiantes emplearon las mismas estrategias, mostrando mayor preferencia por las estrategias aditivas de proceso recursivo para resolver la tarea número tres, aunque dos ellos presentaron dificultad al no identificar correctamente el patrón de crecimiento, éstos se distinguen por estar marcados con × en la Tabla 3. Esta Tabla presenta las estrategias usadas por los estudiantes en la sesión 01 y algunas observaciones generales.

Tabla 3

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 01

Tarea: La planta **Función:** $\mathbf{3(n-1)+1}$							
Est.	**Generalización inmediata**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				
Sofía			×				Desde el primer momento identificó el patrón de crecimiento y continuó correctamente la secuencia.
Yuceiby	×						Continuó correctamente la secuencia dibujando las representaciones siguientes.
Isaid						×	No identificó características comunes entre las figuras**.** Sumó el valor de varios términos para encontrar los siguientes.
Juan de Dios						×	No respetó la estructura espacial-numérica y para hallar el valor de los términos solicitados sumó el valor de los términos anteriores.
Juan Sebastián			×				Identificó como patrón de crecimiento 4 elementos en vez de 3.
Alina						×	No continuó la secuencia.
Total	1	0	2	0	0	3	

Tarea: Juego de bolos **Función: $2n+1$**							 1° 2° 3°
Est.	**Generalización inmediata**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				
Sofía			×				Identificó el patrón de crecimiento y continuó la secuencia correctamente.
Yuceiby			×				Continuó la secuencia correctamente poniendo en práctica el proceso recursivo.
Isaid						×	Sumó el valor de varios términos dados en el enunciado para encontrar los siguientes.
Juan de Dios						×	Encontró de manera errónea los valores de los términos inmediatos solicitados por realizar cálculos erróneos.
Juan Sebastián						×	Para encontrar el valor de los términos solicitados, sumó el valor de los términos anteriores. .
Alina			×				Reconoció la estructura espacial de la secuencia y manifestó que “se suma un bolo en cada hilera”.
Total	0	0	3	0	0	3	

Tarea: La constructora **Función: $n + (n - 1)$**							
Est.	**Generalización inmediata**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				
Sofía			×				Continuó la secuencia empleando correctamente el proceso recursivo.
Yuceiby			×				Identificó el patrón de crecimiento y continuó la secuencia.
Isaid			×				Identificó como patrón de crecimiento 5 elementos en vez de 2.
Juan de Dios			×				Continuó correctamente la secuencia empleando el proceso recursivo.
Juan Sebastián			×				Identificó como patrón de crecimiento 7 elementos en vez de 2.
Alina			×				Reconoció la estructura espacial de la secuencia y manifestó que “se le adiciona un apartamento a cada hilera”
Total	0	0	6	0	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Con estos primeros resultados se reconoció la importancia que tienen aquellas cuestiones que solicitan información sobre las representaciones gráficas dadas en la secuencia, porque éstas llevan al estudiante a tomar consciencia de la estructura espacial y numérica de la misma y plantear estrategias para encontrar el valor de los siguientes términos. Por lo tanto, para las siguientes sesiones se decidió formular este tipo de preguntas en medio del diálogo con los estudiantes, mientras que ellos desarrollan la habilidad de realizarlo de manera autónoma.

5.2 Sesión 02

En esta sesión se pretendía que los estudiantes tuvieran un acercamiento a la definición de patrones y que llegasen a encontrar el valor de términos inmediatos de la secuencia. En relación al primer propósito la docente inicialmente ahondó en los preconceptos de los estudiantes, entre ellos se encontró que para ellos un patrón es:

Juan Sebastián: "persona que dirige" ejemplo "Cuando jugamos fútbol, seguimos al capitán del equipo".

Juan de Dios: "persona que manda" ejemplo "Los carros de la patrulla, primero va el líder y después los guardias".

Sofía: "secuencia que hay que seguir" ejemplo "lo que hacemos todos los días, desayunamos, luego almorzamos y cenamos".

A partir de estas respuestas, la docente introdujo el tema y propuso las siguientes tareas: *"Fiesta de sabores" y "Raíces del árbol".*

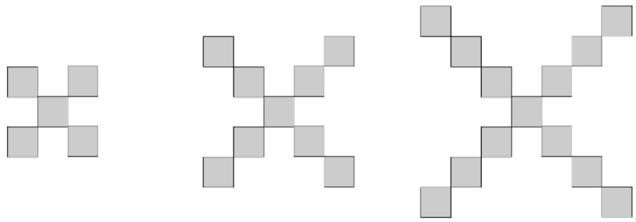
Figura 15

Estructura geométrica de la tarea "Fiesta de sabores"

1° 2° 3°

Figura 16

Estructura geométrica de la tarea "Raíces del árbol"

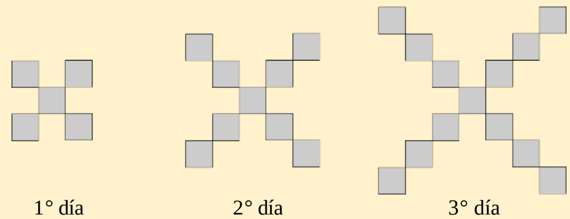


1° día 2° día 3° día

Los estudiantes continuaron la secuencia dibujando las figuras siguientes y haciendo el recuento sobre ellas, como se refleja en la Tabla 4. En esta tabla y en las siguientes se utilizará la × para hacer referencia a los estudiantes que emplearon la estrategia pero que cometieron algún error.

Tabla 4

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 02

Tarea: Raíces del árbol **Función: $4n + 1$**							
Est.	**Generalización inmediata (Cuestión)**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				
Sofía			×				Respondió rápidamente a la tarea sumando cuatro cuadrados por cada figura.
Yuceiby	×						En sus dibujos hizo cuatro cuadrados más por cada figura y luego los contó.
Isaid			×				Identificó el patrón de crecimiento y continuó correctamente la secuencia.
Juan de Dios	×						Empleó el recuento sobre el dibujo y expresó que “A cada esquina le sumé un cuadrito”
Juan Sebastián	×						Realizó correctamente las representaciones gráficas siguientes y el conteo sobre ellas.
Alina	×						Dibujó dos cuadrados más por cada representación gráfica en vez de cuatro.
Total	4	0	2	0	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

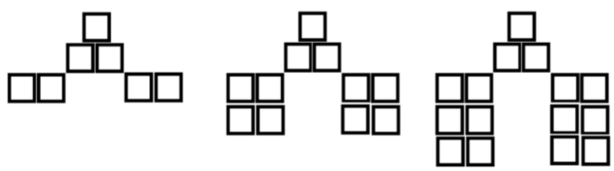
Se observa que los estudiantes se apoyaron de las representaciones gráficas para identificar la cantidad de elementos que aumenta la secuencia de la tarea *Raíces del árbol*, uno de ellos expresó que “se le suma a cada esquina un cuadrito”. Lo cual da un primer indicio que las gráficas pueden facilitar el descubrimiento de diferentes relaciones para identificar el patrón a través del cual se forma la secuencia. Algunas de las dificultades que aparecieron en la sesión anterior de considerar la figura como un todo y no como un conjunto de elementos, en esta sesión no se presentaron.

5.3 Sesión 03

En la sesión 03 se esperaba que los estudiantes continuaran la secuencia e identificaran en las representaciones gráficas lo que cambia y permanece constante, para cumplir tal fin se propusieron dos tareas: “*Fichas LEGO*” y “*Edificio con palillos*”.

Figura 17

Estructura geométrica de la tarea “Fichas LEGO”



Torre 1 Torre 2 Torre 3

Figura 18

Estructura geométrica de la tarea “Edificio con palillos”

1 planta 2 plantas 3 plantas

En estas tareas, la docente guía a los estudiantes para que ellos perciban características comunes en las figuras e identifiquen el patrón que forma la secuencia. En la de *"Fichas LEGO"* se evidenció que primeramente los estudiantes reconocieron como parte invariante de la secuencia a la Torre 1 en su totalidad, como si se tratase de esta figura contenida dentro de las siguientes. No obstante, esa opinión varió cuando en el apartado *d* se les pidió que representaran mediante una operación cada una de las representaciones gráficas que conforman la secuencia, pues mediante este ejercicio ellos poco a poco lograron establecer que hay una cantidad que permanece constante y que esta se asocia a la parte invariante de la torre, es decir, las tres fichas LEGO que se encuentran en la parte superior. A continuación, se presentan dos de las respuestas de los estudiantes al apartado *d* de la tarea (ver Figura 19).

Figura 19

Respuesta de Sofía al, interrogante d. de la tarea Fichas LEGO

A Pablo también se le ocurrió otro reto y es representar la secuencia de las figuras empleando una operación. ¿Tú podrías hacerlo? Él facilitó la siguiente tabla como pista.

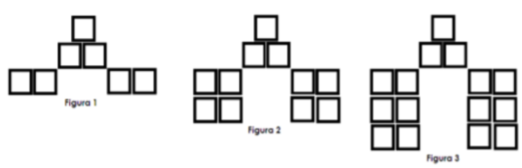


Figura	Número	Signo	Número	Signo	Número	Signo Igual	Resultado
Figura 1	3	+	2	+	2	=	7
	2	x	2	+	3	=	7
	3	x	2	+	1	=	7
Figura 2	4	x	2	+	3	=	11
	3	x	3	+	2	=	11
Figura 3	6	x	2	+	3	=	15
	8	+	4	+	3	=	15
Figura 4	6	x	2	+	7	=	19
	8	x	2	+	3	=	19

Esta estudiante encontró varias opciones para expresar las representaciones visuales como operaciones y combinó estructuras aditivas y multiplicativas. En medio del diálogo la estudiante señaló en la pantalla las agrupaciones que hizo dentro de la torre, utilizando la herramienta lápiz de la aplicación *Zoom*, lo que permitió conocer la manera en la que la estudiante estaba concibiendo la secuencia y las relaciones que establecía.

Figura 20

Respuesta de Yuceiby al interrogante d. de la tarea de las Fichas Lego

A Pablo también se le ocurrió otro reto y es representar la secuencia de las figuras empleando una operación. ¿Tú podrías hacerlo? Él facilitó la siguiente tabla como pista.

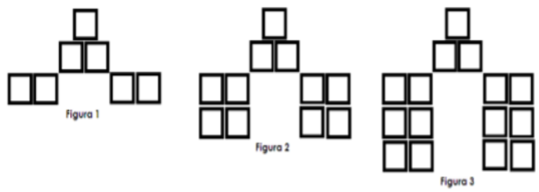


Figura	Número	Signo	Número	Signo	Número	Signo Igual	Resultado
Figura 1	2	+	2	+	3	=	4
Figura 2	4	+	4	+	3	=	11
Figura 3	6	+	6	+	3	=	15
Figura 4	8	+	8	+	3	=	18

En la Figura 20 la estudiante realizó tres agrupaciones en los elementos que constituyen cada torre, esto es, las fichas que se encuentran a la izquierda de la torre, las que se encuentran en la parte superior y las que están a la derecha de la torre, esto le posibilitó plantear la operación para el término siguiente y encontrar la cantidad de elementos que conforman la torre 5.

En la segunda tarea de esta sesión *"Edificio con palillos"* los estudiantes no reconocieron tan fácilmente la parte invariante de las gráficas, lo que lleva a pensar que la forma de la figura puede influir en gran medida a la hora de establecer estas relaciones. Sin embargo, sí lograron identificar la cantidad de elementos que aumenta de un término a otro, por lo tanto, lograron continuar la secuencia empleando el proceso recursivo, como se muestra en la siguiente Tabla.

Tabla 5

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 03

Tarea: Edificio con palillos Función: $3n + 3$							
Est.	**Generalización inmediata**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				
Sofía			×				Continuó correctamente la secuencia mediante el proceso recursivo, pero no descompuso el patrón geométrico de la misma manera, lo que la llevó a plantear procedimientos de cálculos para cada figura que no mantenían la misma estructura.
Yuceiby			×				Continuó la secuencia de manera correcta a través del proceso recursivo. Descompuso el patrón realizando agrupaciones de tres palillos por cada planta. En las operaciones primero propuso adiciones y luego cambió a multiplicaciones.
Isaid			×				Encontró los términos inmediatos mediante el proceso recursivo y presentó dificultad en plantear la misma estructura de operación para todas las gráficas. Isaid propuso operaciones que dieran como resultado la cantidad de elementos de cada figura, sin realizar ningún tipo de agrupación. .
Juan de Dios			×				Continuó la secuencia correctamente. Planteó por cada figura adiciones reiteradas con tres que significan los tres palillos que se agregan por cada planta más.
Juan Sebastián			×				Encontró el valor de los términos solicitados por proceso recursivo y planteó sumas reiteradas para cada figura.
Alina			×				Continuó correctamente la secuencia hasta los términos solicitados y presentó dificultad en plantear la misma estructura de operación para todas las gráficas. La estudiante propuso operaciones que dieran como resultado la cantidad de elementos de cada figura, sin realizar ningún tipo de agrupación. .
Total	0	0	6	0	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Como se puede apreciar en la tabla, en esta sesión ninguno de los estudiantes continuó la secuencia empleando la estrategia de recuento. En esta tarea en particular los estudiantes presentaron dificultad en mantener la misma estructura para descomponer el patrón, en comparación con la secuencia de *"Fichas LEGO"*. Así mismo se percibe que los estudiantes encuentran el patrón de crecimiento, pero no establecen relación entre él y el número de la figura.

5.4 Sesión 04

En esta sesión se esperaba que el estudiante fuera capaz de encontrar el valor de términos cercanos de la secuencia y expresar verbalmente o por escrito el procedimiento llevado a cabo, para ello, se presentaron dos tareas de generalización cercana, *"Las hormigas"* y *"cuadrados con palitos"*.

Figura 21

Estructura geométrica de la tarea "Las hormigas"

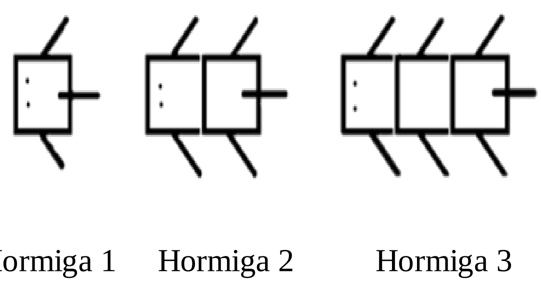
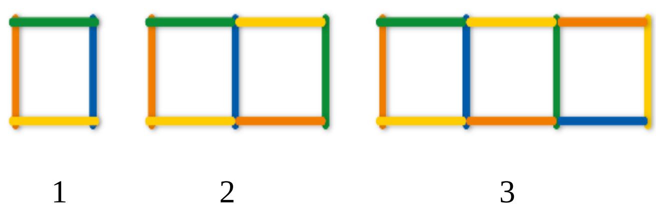


Figura 22

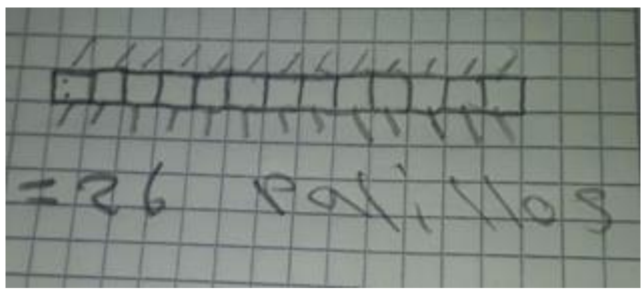
Estructura geométrica de la tarea "cuadrados con palitos"



En la tarea *"Las hormigas"* los estudiantes utilizaron estrategias aditivas de proceso recursivo para encontrar los términos inmediatos. Ellos encontraron la cantidad de palillos necesarios para dibujar la hormiga 4 y la hormiga 5 contando de 5 en 5, argumentando que la cantidad de palillos entre cada representación aumenta en 5. En el siguiente interrogante, si Robert y sus amigos quieren dibujar la hormiga número 14 ¿cuántos palillos necesitan? ¿Qué procedimiento harías para saberlo? El estudiante Isaid empleó de manera errónea la estrategia aditiva de recuento, como se muestra en la Figura 23.

Figura 23

Respuesta del estudiante Isaid al interrogante b de la tarea Las hormigas



El estudiante no fue capaz de continuar la secuencia, a pesar de que hizo la representación gráfica no respetó las estructuras espaciales y numéricas de la secuencia, pues en su dibujo no incluyó la parte final de la hormiga (seis palillos más). De igual manera en el conteo no tuvo en cuenta todos los palillos, solamente contabilizó los que representan las patas de las hormigas, lo que lo hizo llegar a una respuesta errónea.

Por otro lado, los demás estudiantes pudieron encontrar la generalización cercana mediante estrategias aditivas de proceso recursivo y Sofía plantea una estrategia funcional como se evidencia en el siguiente fragmento de conversación:

La docente lee el literal *a.* de la tarea.	**Docente:** Si Robert y sus amigos quieren dibujar la hormiga número 14 ¿cuántos

	palillos necesitan? ¿Qué procedimiento harías para saberlo?
El estudiante propone una estrategia funcional para encontrar el valor del término 14 y señala sobre la figura las relaciones que establece.	**Sofía:** Sería $6 \times 14 + 1$ porque siempre este palito está de último, entonces … ¿por qué seis y no siete? porque este palillo siempre se repite de último (señala el palillo que se encuentra de manera horizontal sobre el último palillo en posición vertical) o también podría ser cinco, entonces serían 73 palillos.
	Docente: ¿Se necesitarían 73 palillos? ¿Cómo lo hiciste?
La estudiante justifica nuevamente su respuesta, pero al final comete un error al sumar tres.	**Sofía:** Este palillo siempre se repite al final y este que es el complemento de este (señala el último palillo que está en posición vertical), entonces lo que tenía que hacer era contar estos, los demás, multiplicarlos por catorce y sumar los otros tres.
	Docente: ¿Por qué multiplicar por catorce?
La docente realiza esta pregunta para confirmar el aprendizaje de la estudiante.	**Sofía:** Porque dice la hormiga catorce, porque si voy contando de palillo en palillo ¿Cuánto tiempo me demoraría?
	Docente: Exacto, has encontrado una forma más fácil de hacerlo.

La estudiante establece una relación funcional equivalente a $f(14) = 14 \times 5 + 3$, aunque esta expresión presenta un error que la estudiante más adelante corrigió y es que en su justificación expresó como término independiente el número 2 al referirse a los dos palillos que se mantienen constantes en todas las representaciones gráficas, pero al resolver las operaciones sumó 3 en vez de 2.

En la tarea número dos de esta sesión los estudiantes por el contrario presentaron dificultades al encontrar los términos cercanos, pues emplearon el razonamiento proporcional erróneo al multiplicar 15×3y 20×3 sin tener en cuenta el palillo que permanece constante. A continuación, en la Tabla 6 se presentan las estrategias empleadas por los estudiantes en esta tarea.

Tabla 6

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 04

Tarea: Cuadrados con palitos
Función: $3n + 1$

Est.	**Generalización inmediata**						**Generalización cercana**						**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	**EA**			**EF**	**RP**	**O**	
	R	PI	PR				R	PI	PR				
Sofía			×							×			Fue la primera estudiante en proponer la estrategia funcional $y(15) = 14 \times 3 + 4$para encontrar un término cercano.
Yuceiby			×								×		Identificó el patrón de crecimiento y lo multiplicó por el número del término solicitado, sin tener en cuenta la cantidad constante.
Isaid			×								×		No identificó cantidad constante y reconoció como patrón de crecimiento al número 5 y no al 3.
Juan de Dios			×								×		Utilizó la estrategia proporcional errónea con multiplicaciones para encontrar el término cercano.
Juan Sebastián			×						×				Se mantuvo en la estrategia de proceso recursivo para encontrar el valor de términos cercanos.
Alina			×							×			Planteó una estrategia funcional para encontrar el término cercano $f(15) = 15 \times 3 + 1$
Total	0	0	6	0	0	0	0	0	1	2	3	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

A través de estas tareas los estudiantes comienzan a identificar que realizar dibujos y hacer recuento sobre él demanda mayor tiempo y esfuerzo, por tal razón comienzan a emplear otras estrategias que incluyen cálculos y relaciones entre la variable, sin embargo, presentan dificultades en identificar la cantidad constante, lo cual los lleva a obtener resultados erróneos.

5.5 Sesión 05

En esta sesión se buscaba que los estudiantes fueran capaces de encontrar el término que ocupa dentro de la secuencia una determinada cantidad de elementos a través de tareas de generalización de proceso inverso. Estas son: *"La cenefa"*, *"Diseño con palillos"* y *"Estrellas marinas"*.

Figura 24

Estructura geométrica de la tarea "La cenefa"

1 2 3 4

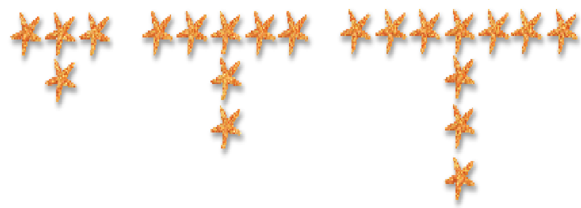
Figura 25

*Estructura geométrica de la tarea **"Diseño con palillos"***

Paso 1 Paso 2 Paso 3

Figura 26

Estructura geométrica de la tarea "Estrellas marinas"



Fotografía 1 Fotografía 2 Fotografía 3

En estas tareas también se incluyeron cuestiones de generalización inmediata y cercana. En relación a la tarea *"La cenefa"* la estudiante Sofía planteó una estrategia funcional para encontrar términos cercanos y Juan Sebastián se mantuvo con el proceso recursivo. En el siguiente fragmento de conversación se pueden apreciar sus razonamientos:

La docente lee el literal *b*. de la tarea.	**Docente:** ¿Cuántas tiras de cinta son necesarias para decorar la cenefa cuando son 16 hexágonos? **Sofía:** 81 **Docente:** ¿Cómo lo hiciste?
La estudiante responde al interrogante teniendo en cuenta tres aspectos, el primero es la cantidad de elementos que aumenta de una figura a otra, el segundo, es el término que se quiere encontrar menos 1 y el tercero, es el valor del primer término de la secuencia.	**Sofía:** $5 \times 15 + 6$ puse 5 que son los que van aumentando por 15 más los 6 que siempre están (se refiere al primer hexágono), los 5 que van aumentando por 15 porque son 16 y no se cuenta… ay no lo sé explicar. **Docente:** Lo estás haciendo bien, continúa **Sofía:** Lo que trato de decirle es que los 15 por 5 son los que van aumentando, los otros 6 como el primero no se cuenta se suman esos 6 y me da 81.
La docente pregunta a los demás estudiantes si existe otra manera de responder a esa pregunta.	**Docente:** Bien, ¿existe otra manera de hacerlo?
El estudiante plantea una estrategia aditiva de proceso recursivo. Sin importar que tan alejado se encuentre el término.	**Juanse:** Si, sumar de 5 en 5. **Docente**: ¿Y si te pido un término más alejado por ejemplo el 200 lo harías de la misma manera? **Juanse:** Sí.

La estudiante reconoce que existe una manera más rápida de hacer las sumas reiteradas.	**Docente**: ¿No sería más fácil encontrar una operación? **Sofía:** Si, es una manera corta de hacer tanto más tanto, más tanto.
La docente lee el literal *c.* de la tarea.	**Docente:** ¿Cuántas tiras de cinta son necesarias para decorar la cenefa cuando son 22 hexágonos? **Juanse:** 121 **Docente:** ¿Cómo lo hiciste?
El estudiante emplea estrategia aditiva de proceso iterativo.	**Juanse:** Hice 22 palitos cinco veces, 22 en una hilera, 22 en otra hilera, 22 en la otra hasta que llegué a 5 hileras y fui sumando. **Docente:** ¿y el resultado fue 121? **Juanse:** 110 me equivoqué sumando. **Alina:** Seño, a mí también me dio eso. **Docente:** ¿Cómo lo hiciste?
Alina utiliza el razonamiento proporcional, ella multiplica el término solicitado por la cantidad de elementos que aumenta la secuencia, que en este caso es 5. Pero desconoce la cantidad constante.	**Alina:** Multipliqué 5×22, 22 son los hexágonos y 5 lo que va sumando. **Isaid:** Son 111 **Docente:** ¿Cómo llegaste a ese resultado?
Isaid utiliza el proceso recursivo a partir de un término conocido.	**Isaid:** Como en la 16 da 81 fui sumando a partir de ahí de 5 en 5 y siguiendo así hasta que me dio 111.
Sofía emplea una estrategia funcional.	**Sofía:** También me dio 111, hice lo mismo que en el anterior $21 \times 5 = 105 + 6 = 111$

Como se puede evidenciar en los fragmentos anteriores, los estudiantes emplearon diferentes estrategias de resolución para encontrar las generalizaciones cercanas y mostraron habilidad para explicar sus respuestas. En las cuestiones de relación inversa por su parte, se mantuvo la siguiente conversación:

La docente lee el apartado *d.* de la tarea.	**Docente:** Si tuvieras 56 tiras de cinta para ¿cuántos hexágonos alcanzaría?
Sofía se da cuenta que esta cuestión es diferente a las que había resuelto anteriormente.	**Sofía:** Profe, esto es raro. **Docente:** ¿Qué es lo raro? **Sofía:** ah no no no ya me di cuenta de una cosa, son 11 hexágonos. **Docente:** ¿Cómo lo sabes?
La estudiante invierte las operaciones y lo	

hace en el orden correcto.	**Sofía:** Me di cuenta como es 56 y son los seis primeros así que los quité y me dio 50, entonces los 50 entre 5, que son los que van aumentando, me dio 10 y las seis cintas del primer hexágono lo sumo y son 11 hexágonos.
La docente invita a los demás estudiantes a responder la cuestión anterior. Transcurre un lapso de tiempo y ningún otro estudiante participa.	[...]
La docente lee el apartado *e.* de la tarea.	**Docente:** ¿Si tuviera 126 tiras de cinta para cuántos hexágonos alcanzaría? **Isaid:** creo que tengo la respuesta **Docente:** ¿Cuál es? **Isaid:** 48. **Docente:** ¿Cómo lo encontraste?
Isaid utiliza el razonamiento proporcional de relación directa de manera errónea.	**Isaid:** Si acá arriba da 11 hexágonos lo que hice fue sumar 56 más, hice la misma respuesta y 11+11=22, entonces cogí los 26 los sume con el 22 y me dio 48.

En el anterior fragmento se evidencian las dificultades que presentaron los estudiantes al responder los interrogantes de relación inversa. Situación similar se reflejó cuando se enfrentaron a las otras tareas *"diseño de mochilas"* y *"estrellas marinas"*. Algunos de ellos a excepción de Sofía no establecieron las diferencias entre las cuestiones y respondieron como si se tratase de una cuestión de relación directa. Los que sí realizaron la diferenciación se apoyaron en estrategias de proceso recursivo. A continuación, en la Tabla 7 se muestran las estrategias que utilizó cada estudiante en la tarea *"diseño con palillos"* y en la Tabla 8 las estrategias que utilizaron en la tarea *"estrellas marinas"*.

Tabla 7

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 04 Tarea. "Diseño con palillos"

Est.	Tarea: Diseño con palillos Función: $2n+1$																
	Generalización inmediata						**Generalización cercana**						**Relación Inversa**				**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	**EA**			**EF**	**RP**	**O**	**EE**	**IO**		**RE**	
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		
Sofía				×						×				×			Estableció la función $yn = 2(n-1)+3$ para el proceso directo y $((yn-3) \div 2)+1$ para el proceso inverso.
Yuceibis			×							×				×			Planteó la función $yn = 2n+1$para el proceso directo **y** $(\boldsymbol{yn-1}) \div \mathbf{2}$ para el proceso inverso.
Isaid			×							×			×				Construyó una tabla contando de dos en dos a partir del valor del primer término para responder a las cuestiones de relación inversa.
Juan de Dios			×							×			×				Realizó el conteo de dos en dos a partir del valor del primer término para las cuestiones de relación inversa.
Juan Sebastián			×								×		×				Sumó 2 a partir del valor de un término conocido y de esa manera encontró el término en el cual se habían utilizado esa cantidad de palillos.
Alina			×							×			×				Realizó cálculos mediante estrategias aditivas de forma directa apoyándose en respuestas anteriores.
Total	0	0	5	1	0	0	0	0	0	5	1	0	4	2	**0**	**0**	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Tabla 8

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 05 Tarea. "Estrellas marinas"

Tarea: Estrellas marinas Función: $3n + 1$																
Est.	**Generalización inmediata**						**Generalización cercana**						**Relación Inversa**				**Observaciones**
	EA			**EF**	**RP**	**O**	**EA**			**EF**	**RP**	**O**	**EE**	**IO**		**RE**	
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		
Sofía				×						×				×			En las cuestiones de relación directa obtuvo resultados erróneos por utilizar una cantidad constante que no corresponde.
Yuceibis				×						×				×			Planteó la función $3n + 1$ para las cuestiones de relación directa y para las de relación inversa invirtió las operaciones en el orden correcto.
Isaid				×						×							No estableció la diferencia que existe entre las cuestiones de relación directa y las de relación inversa, por tal motivo, respondió a las tareas de manera directa a través de la estrategia funcional.
Juan de Dios				×						×							No reconoció el proceso inverso y resolvió las cuestiones como si fuera de relación directa.
Juan Sebastián			×							×			×				Construyó una tabla desde el término número 1 hasta encontrar aquel en el aparecieron la cantidad de estrellas marinas dadas.
Alina				×						×				×			Realizó cálculos mediante estrategias aditivas de forma directa apoyándose en respuestas anteriores.
Total	0	0	1	5	0	0	0	0	0	6	0	0	1	3	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

En esta tabla se puede apreciar que los estudiantes comienzan a emplear las estrategias funcionales desde la búsqueda de términos inmediatos, lo cual es un avance significativo durante este periodo de instrucción.

5.6 Sesión 06

En esta sesión se pretendía que los estudiantes lograran encontrar términos lejanos de la secuencia y expresar verbalmente o por escrito el procedimiento llevado a cabo. En relación a ello se propusieron tres tareas: *"Fiesta de cumpleaños", "La floristería"* y *"La urbanización".*

Figura 27

Estructura geométrica de la tarea "Fiesta de cumpleaños"

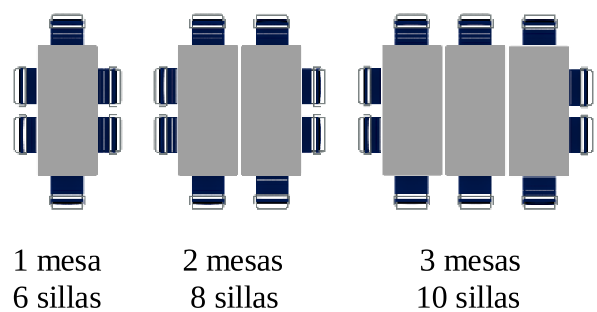


Figura 28

Estructura geométrica de la tarea ***"La floristería"***

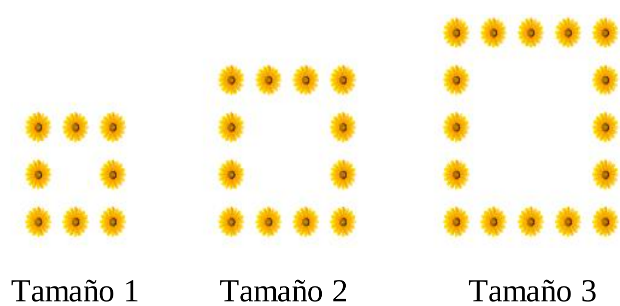


Figura 29

Estructura geométrica de la tarea "La urbanización"

1 casa 2 casas 3 casas

Estas tareas incluían cuestiones de relación inversa, generalización lejana y de expresión verbal de la regla general. En el siguiente fragmento se presentan algunas de las respuestas de los estudiantes al literal ***a*** la tarea *"Fiesta de cumpleaños"*

La docente lee el literal *a.* de la tarea.	**Docente:** Si en una mesa se pueden colocar 6 sillas, en dos mesas se pueden colocar 8 sillas y en 3 mesas se pueden colocar 10 sillas. Si se necesitan ubicar 24 niños ¿cuántas mesas se necesitan? **Isaid:** Serian 10 mesas para las 24 sillas. **Docente:** ¿cómo encontraste esa respuesta?
Isaid continúa empleando cálculos de proceso directo para resolver las cuestiones de relación inversa.	**Isaid:** porque mire si en la primera mesa hay 6 sillas, en la segunda hay ocho, o sea que va sumando de dos en dos, entonces conté desde las tres mesas hasta que me diera 24, o sea que en la cuarta son 12, en la quinta 14, en la sexta son 16, en la séptima son 18, en la octava son 20, en la novena son 22 y en la décima son 24. **Docente:** Muy bien, efectivamente se necesitan 10 mesas ¿quién lo ha hecho de otra manera? **Sofía:** Yo. **Docente:** Adelante Sofía, explicamos cómo lo hiciste.
Sofía invierte las operaciones en el orden	**Sofía:** A mí me dio lo mismo, pero yo hice los 24 menos 6, las 6 sillas de la primera

correcto.	mesa, luego entonces hice 18 entre 2 que me da 9 y le sumo otra mesa y me da 10.

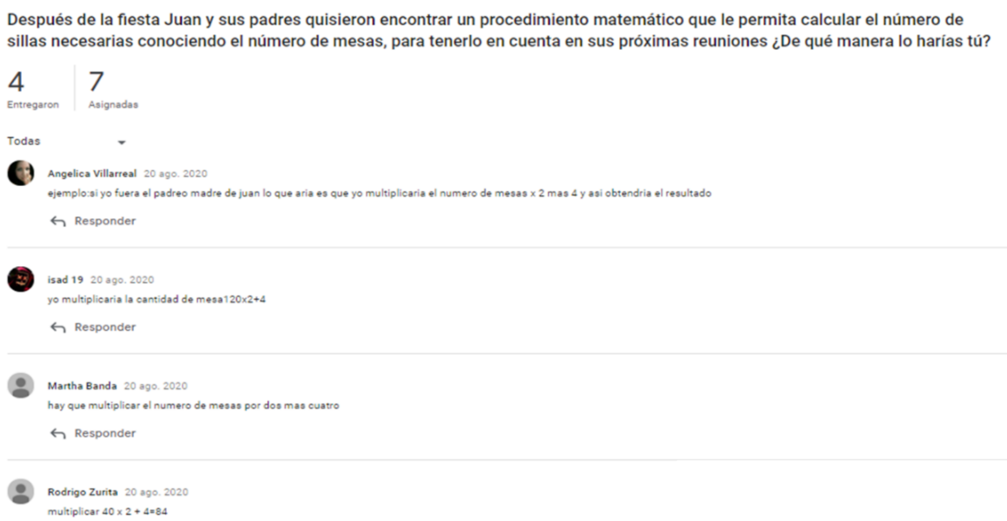
Estas dos respuestas reflejan estrategias distintas para resolver a un mismo interrogante de relación inversa, Isaid a diferencia de la sesión anterior reconoció que estas cuestiones incluyen algo distinto, pero no logró plantear un procedimiento matemático para responder a ella. Sofía por su parte, siguió mostrando habilidad para solucionar estas tareas. En relación a las cuestiones de proceso directo los estudiantes continuaron empleando estrategias de proceso recursivo y estrategias funcionales, así como se muestra en el siguiente fragmento de conversación.

La docente lee el literal *b.* de la tarea.	**Docente:** ¿Cuántas sillas se pueden colocar en 15 mesas? **Juan de D.:** 34 sillas
Juan de Dios encuentra el término cercano mediante el proceso recursivo.	**Docente:** ¿Cómo lo hiciste? **Juan de D.:** Sumando de dos en dos. [...] **Docente:** ¿Cuántas sillas se pueden colocar en 29 mesas? **Isaid**: serian 58 **Docente:** ¿Cómo lo hiciste?
Isaid multiplica el patrón de crecimiento por el término solicitado, pero no tiene en cuenta la cantidad constante.	**Isaid**: multipliqué 2 por 29 y me dio 58
Yuceiby complementa la respuesta de Isaid.	**Yuceiby**: Seño le hace falta sumarle 4. **Docente:** ¿Por qué lo dices? **Yuceiby:** Son las 4 sillas que siempre están. [...]
De esta manera construyeron la expresión matemática y encontraron el valor de los otros términos que se pedían en la tarea.	

El hallar varios términos lejanos funcionó como elemento clave para que los estudiantes lograran expresar de manera verbal la regla general. En la siguiente Figura (ver Figura 30) se pueden ver algunas de las respuestas de los estudiantes, en las cuales se refleja que tres de ellos nombran la indeterminación al referirse a # de la figura, mientras que uno de los estudiantes respondió con un ejemplo puntual.

Figura 30

Respuesta de los estudiantes al literal c. de la tarea "Fiesta de cumpleaños"

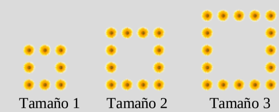


En el caso de la tarea *"La floristería"* tres de los seis estudiantes siguieron presentando las mismas dificultades al resolver las cuestiones de relación inversa, por lo tanto, se les vio realizando cálculos de ensayo y error. Para las cuestiones de relación directa los estudiantes iniciaron con las estrategias aditivas y cambiaron a las funcionales para los términos lejanos. En la Tabla 9 se muestran las estrategias que utilizó cada estudiante en la tarea *"La floristería"* y en la Tabla 10 las estrategias que utilizaron en la tarea *"La urbanización"*.

Tabla 9

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 06 Tarea. "la floristería"

Tarea: La floristería
Función: $4n + 4$



Est.	Generalización inmediata						Generalización cercana y lejana						Relación Inversa				Observaciones
	EA			EF	RP	O	EA			EF	RP	O	EE	IO		RE	
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		
Sofía				×						×				×			Sin mayor dificultad describió verbalmente la regla que relaciona el número de flores con el tamaño del arreglo.
Yuceibis			×							×				×			Identificó una función global al explicar la regla general para un término cualquiera.
Isaid			×							×			×				Describió la regla general del proceso directo refiriéndose a "Lo que yo haría es multiplicar el tamaño por cuatro y le sumo cuatro"
Juan de Dios			×							×			×				Respondió a la regla general con un ejemplo.
Juan Sebastián			×								×		×				Propuso como regla general la estrategia de razonamiento proporcional, esto es, multiplicar el número de girasoles que aumenta por el tamaño del arreglo.
Alina				×						×				×			Encontró y describió la regla general que relaciones el número de girasoles con el tamaño del arreglo.
Total	0	0	4	2	0	0	0	0	0	5	1	0	3	3	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Tabla 10

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 06 Tarea. "La urbanización"

Tarea: La Urbanización
Función: $5n + 1$

Est.	Generalización inmediata						Generalización cercana y lejana						Relación Inversa				Observaciones
	EA			EF	RP	O	EA			EF	RP	O	EE	IO		RE	
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		
Sofía				×						×				×			Usó de manera errónea las estrategias porque no identificó correctamente el término independiente.
Yuceibis				×						×				×			Describió claramente la regla general y en el proceso inverso presentó dificultades al hacerlo de manera incompleta.
Isaid			×								×		×				En el proceso inverso probó distintos valores para la variable en la generalización directa y llegó a resultados erróneos. En la regla general omitió la cantidad constante.
Juan de Dios				×							×		×				No fue capaz de identificar la regla general del proceso directo.
Juan Sebastián			×								×		×				Para plantear la regla general no reconoció cantidad constante.
Alina				×						×				×			Expresó por escrito la regla general que relaciona el número de palillos con el número de casas.
Total	0	0	3	3	0	0	0	0	0	3	3	0	3	3	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

El apartado de la tarea que pide a los estudiantes redactar una carta al amigo de Marc explicándoles el proceso que debe seguir para encontrar la cantidad de palillos conociendo el número de casas, facilitó que lograran explicar de manera detallada la regla general. En este sentido, el lenguaje natural sirvió como medio para expresar la fórmula en acción. También, es importante anotar que la primera cuestión de estas tareas es de relación inversa y esta organización ha podido ocasionar que sus dificultades al resolver este tipo de cuestiones se intensificaran debido a que no tenían como referencia el proceso directo. Por lo cual para las siguientes sesiones se propusieron de manera distinta.

5.7 Sesión 07

En esta sesión, tal y como fue justificado en la descripción de la secuencia de enseñanza, se pretendía que los estudiantes pudieran expresar la regla general del proceso directo y del proceso inverso de cada una de las tareas que hacen parte de la sesión. Cuyo término general corresponde a $4n + 1$ para la tarea *"Conchas marinas"* y $2n + 1$ para la tarea *"Jardín"*.

Figura 31

Estructura geométrica de la tarea "conchas marinas"

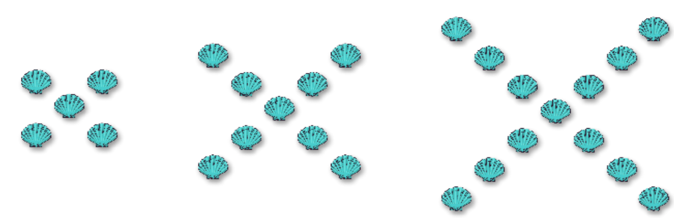


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 32

Estructura geométrica de la tarea "Jardín"

Día 1 Día 2 Día 3

Para la tarea *"conchas marinas"* los estudiantes notaron sin mayor dificultad que los términos aumentan en 4 y utilizaron este incremento para encontrar el valor de los términos inmediatos, luego para encontrar las generalizaciones lejanas como lo es el caso de la figura 92, los estudiantes plantearon la función $4n + 1$, para llegar a esta construcción, Isaid, por ejemplo, manifestó que por cada figura aumenta una concha en cada esquina de la figura y que el "la concha del medio, siempre está ahí", este ejercicio les sirvió para establecer sus propias conclusiones y expresar verbalmente la regla general.

En esta sesión, la estudiante Alina presentó problemas de conectividad, motivo por el cual ingresó a la clase minutos más tarde, este suceso fue aprovechado para solicitarle a los estudiantes que explicaran a su compañera lo que se había hecho hasta el momento en la clase. Sofía le describió la regla general en las siguientes palabras: "En esta actividad en específico, ella debe multiplicar el número de la figura por cuatro que va aumentando y lo que le dé, debe sumarle uno, que es la conchita del centro". En esta expresión se refleja la indeterminación cuando la estudiante se refiere al # de la figura y no a un caso es específico lo cual constituye un aspecto importante del pensamiento algebraico.

En relación a las cuestiones de relación inversa propiamente en la descripción de la regla general, el estudiante Isaid lo expresó de la siguiente forma: "la cantidad de conchas le restan uno y ese resultado lo dividen entre cuatro”. En cuanto a la tarea *“jardín”* los estudiantes utilizaron las estrategias que se muestran en la Tabla 11.

Tabla 11

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 07 Tarea. "El jardín"

Tarea: El jardín
Función: $2n + 1$

Día 1 Día 2 Día 3

Est.	Generalización inmediata						Generalización cercana y lejana						Relación Inversa				Observaciones
	EA			EF	RP	O	EA			EF	RP	O	EE	IO		RE	
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		
Sofía				×						×				×			Expresó claramente la regla general del proceso directo y del proceso inverso.
Yuceibis				×						×				×			Planteó la función, pero no describió todo el proceso en la regla general de relación directa. Y en la regla de relación inversa utilizó un ejemplo.
Isaid				×						×				×			Utilizó como cantidad constante al número 3 y en esta función es 1.
Juan de Dios			×							×			×				Tomó como cantidad constante el número 2 y además efectuó las multiplicaciones de manera incorrecta, llegando a resultados erróneos. No identificó la regla general.
Juan Sebastián			×								×		×				Poca claridad al expresar reglas generales.
Alina				×						×			×				No expresó regla general.
Total	0	0	2	4	0	0	0	0	0	5	1	0	3	3	0	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

En la anterior tarea, los resultados muestran que la dificultad de reconocer la cantidad constante permanece en algunos estudiantes y esto puede estar asociado a la forma que tiene la figura, pues se evidencia que la posición de los elementos dentro de ella en algunos casos influye en la deducción del procedimiento matemático.

5.8 Sesión 08

En esta sesión se esperaba que los estudiantes continuaran la secuencia y encontraran el valor de términos inmediatos, cercanos y lejanos. Lograran invertir el proceso para términos grandes y fueran capaces de expresar la regla general del proceso directo y del proceso inverso. Con este propósito se planteó la tarea *"El reciclador"*.

Figura 33

Estructura geométrica de la tarea "el reciclador"

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Esta última sesión se llevó a cabo de manera individual con la finalidad de identificar el impacto académico de la secuencia de enseñanza en cada uno de los estudiantes. La tarea que aquí se propuso contenía apartados incluidos en todas las sesiones anteriores y que fueron adaptados al contexto de esta tarea. Los primeros de ellos tenían que ver con la generalización inmediata, en la siguiente Figura (ver Figura 34) se puede apreciar las respuestas de los estudiantes a una de estas cuestiones.

Figura 34

Respuestas de los estudiantes al literal b. de la tarea El reciclador.

2. ¿Cuántos palitos tendría la figura 5? ¿Cómo lo sabes?

6 respuestas

Yuceiby

la figura 5 tendria 18 palitos, ya que cada figura va aumentando de tres en tres

Juan de Dios

tendria 18 palillos sume 3 palillos

Isaid

La figura cinco tendría 18 palillos como yo estaba en la figura cuatro lo que fue sumarle de la figura cuatro que son 15 palillos y le sume tres y me dio 18

Alina

la figura 5 tendrá 18 palillos de bombón, lo que hice fue sumarle tres

Sofía

Tendría 18 palitos
Hice 3 * 6 = 18 porque había hecho 3 por 5 y luego le iba a sumar tres pero dije que era lo mismo que hacer 3 * 6

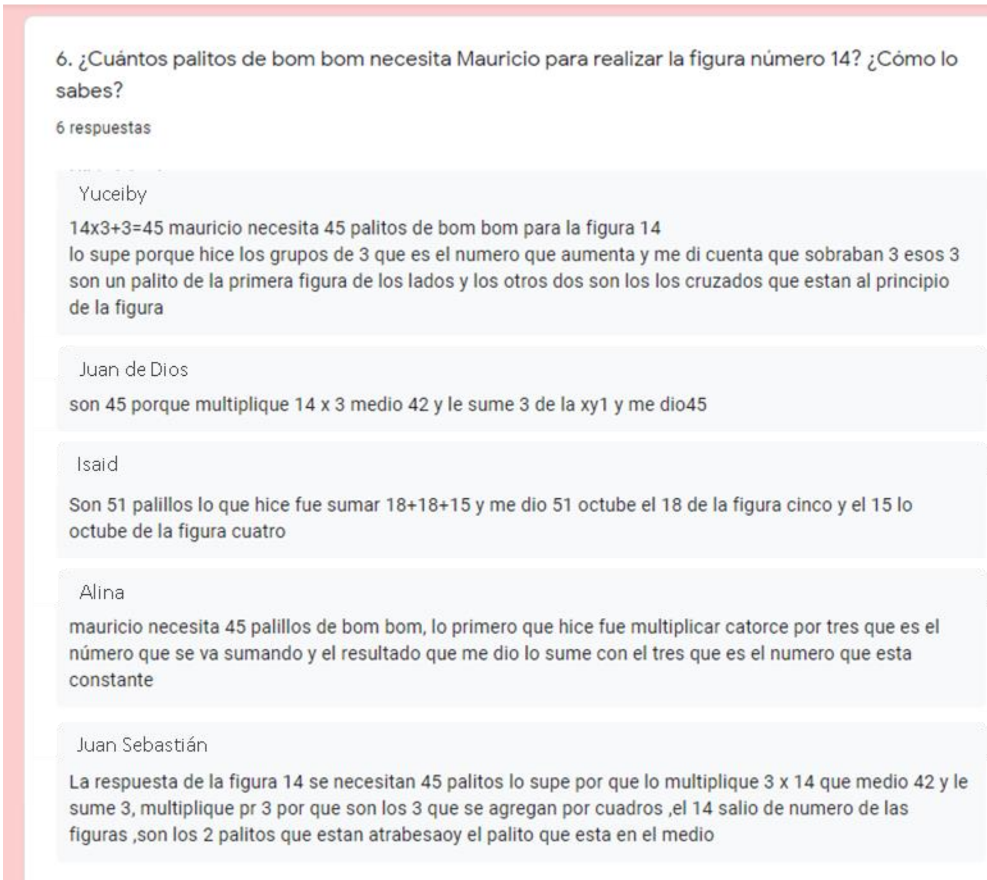
Juan Sebastián

Son 21 palitos lo supe por que ban en 3 en 3 y deay medio la respuesta

El abordaje de esta tarea pone en evidencia que los estudiantes utilizan el proceso recursivo para encontrar las generalizaciones inmediatas, así como se muestra en la Figura anterior. Lo hacen de esta manera porque la primera característica común que establecen entre los elementos de la secuencia es la cantidad que aumenta de un término a otro. En el caso de las generalizaciones cercanas los estudiantes establecieron relaciones funcionales y fueron capaces de explicarlas claramente. El estudiante Isaid para encontrar algunos términos cercanos realizó sumas de valores de términos anteriores, pero luego para encontrar las generalizaciones lejanas cambió a una estrategia funcional, aunque con errores en la cantidad constante (ver Figura 35).

Figura 35

Respuestas de los estudiantes al literal f. de la tarea El reciclador.



6. ¿Cuántos palitos de bom bom necesita Mauricio para realizar la figura número 14? ¿Cómo lo sabes?

6 respuestas

Yuceiby

14x3+3=45 mauricio necesita 45 palitos de bom bom para la figura 14
lo supe porque hice los grupos de 3 que es el numero que aumenta y me di cuenta que sobraban 3 esos 3 son un palito de la primera figura de los lados y los otros dos son los los cruzados que estan al principio de la figura

Juan de Dios

son 45 porque multiplique 14 x 3 medio 42 y le sume 3 de la xy1 y me dio45

Isaid

Son 51 palillos lo que hice fue sumar 18+18+15 y me dio 51 octube el 18 de la figura cinco y el 15 lo octube de la figura cuatro

Alina

mauricio necesita 45 palillos de bom bom, lo primero que hice fue multiplicar catorce por tres que es el número que se va sumando y el resultado que me dio lo sume con el tres que es el numero que esta constante

Juan Sebastián

La respuesta de la figura 14 se necesitan 45 palitos lo supe por que lo multiplique 3 x 14 que medio 42 y le sume 3, multiplique pr 3 por que son los 3 que se agregan por cuadros ,el 14 salio de numero de las figuras ,son los 2 palitos que estan atrabesaoy el palito que esta en el medio

En estas respuestas cabe resaltar el procedimiento empleado por Yuceiby, ella manifestó que para encontrar la cantidad constante recurrió a las agrupaciones de acuerdo al patrón de crecimiento y el término que se quiere hallar. La cantidad de elementos que no entra dentro de estas agrupaciones corresponde a la cantidad constante. En relación a esto se puede decir que la descomposición del patrón geométrico cumple un papel importante para obtener un procedimiento de cálculo. Por el lado de las cuestiones de relación inversa, tres de los seis estudiantes respondieron de manera incorrecta, dos de ellos sí reconocieron que debían utilizar las operaciones opuestas, pero no lo hicieron con las cantidades adecuadas, así como se muestra en la Figura 36.

Figura 36

Respuestas de los estudiantes al literal i. de la tarea El reciclador.

9. Mauricio empleó 54 palitos de bom bom para realizar una de las figuras ¿Cuál de ellas fue? ¿Cómo lo sabes?

6 respuestas

Sofía

Sería la figura 13
Hice 54 entre 3 igual 18 menos 6 más uno
lo hice así porque se me hace más fácil y siempre lo he hecho y está bien hecho

Yuceiby

seria la figura #17 lo supe porque hice el proceso inverso a 54 le reste 3 y de resultado me dio 51 despues lo dividi entre 3 y me dio 17

Juan de Dios

seria la figura 17 lo supe por una suma

Isaid

Es la figura 15 lo que hice fue sumarle a la figura 14 que son 51 palillos le sume 3 que son los palillos que van subiendo

Alina

la figura fue 17, lo primero que hice fue rester el número que se suma y el resultado que me de lo divido por el numero que por el numero que a aumentando la secuencia

Juan Sebastián

Fue en la figura numero 18 lo supe por dividi 3 entre 54 pero cogi 5 primero y un numero que se asercara a 5 no abia cogi 3 que es 1 y lo reste 5 menos 3 =2 y baje el 4 numero 4 y un numero que sea hacercara a 24 es 8y dea y medio el resultado

La respuesta de Alina expone la regla general del proceso inverso, poniendo en evidencia un tipo de generalización contextual. Como se sustentó anteriormente, uno de los intereses de esta tarea era que los estudiantes construyeran una explicación que diera indicios de la generalidad en relación a la forma de construir figuras grandes. Por lo cual se les planteó la siguiente situación (literal *m.* tarea el reciclador):

Finalmente él (refiriéndose a Marc) quiere hallar un procedimiento que le permita calcular la cantidad de palillos que necesita para realizar cualquier figura. ¿Cómo lo harías tú? Escríbele un mensaje donde le expliques qué debe hacer.

En las respuestas de los estudiantes la indeterminancia está representada por frases como: “la figura que se quiere hallar”, “la cantidad cualquiera”, “el número de la figura”, “cualquier número”. El carácter operatorio de la indeterminancia en esta tarea está dado por: “la figura que se quiere hallar multiplicarla por la cantidad de objetos o algo que aumenta y le sumas la cantidad que sobra ” (cuando menciona la cantidad que sobra hace referencia a la cantidad constante), “la cantidad cualquiera se multiplica por la cantidad de palillos que aumenta y le sumas tres”, “tienes que hacer una multiplicación de 3 por el número de figura y ese resultado sumarle 3 palitos”, “lo primero que tienes que tienes que hacer es tomar cualquier número y multiplicarlo por el número que se va sumando y el resultado que te dé lo tienes que sumar por tres”. Aquí hay evidencia un avance importante en las construcciones de los estudiantes y su manera de encontrar una expresión que le permite calcular directamente cualquier término de la secuencia.

En la Tabla 12 se muestran las estrategias puestas en práctica por los estudiantes para resolver esta tarea.

Tabla 12

Estrategias empleadas por los estudiantes en la sesión 08 Tarea. "El reciclador"

Tarea: El reciclador Función: $3n + 3$																 Figura 1 Figura 2 Figura 3
Est.	**Generalización inmediata**						**Generalización cercana y lejana**						**Relación Inversa**			
	EA			**EF**	**RP**	**O**	**EA**			**EF**	**RP**	**O**	**EE**	**IO**		**RE**
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE		**Observaciones**
Sofía				×						×				×			Desde la generalización inmediata estableció la función $3n + 3$ y se dio cuenta que era lo mismo que efectuar $3(n + 1)$ de esta manera planteó en la regla general.
Yuceibis			×							×				×			Resolvió sin ningún problema toda la tarea.
Isaid			×							×				×			Identificó de manera incorrecta la cantidad constante, por tal motivo llegó a resultados erróneos.
Juan de Dios			×							×			×				Propuso como regla general de relación inversa el uso de una estrategia aditiva, específicamente el proceso recursivo de relación directa.
Juan Sebastián			×							×					×		Solamente empleó la división para el proceso inverso, le hizo falta restar la cantidad constante.
Alina			×							×				×			Estableció relaciones entre las figuras que le permitieron plantear un procedimiento adecuado para responder acertadamente a cada una de las cuestiones de la tarea.
Total	0	0	5	1	0	0	0	0	0	6	0	0	1	4	1	0	

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Estos resultados que se ven reflejados en la tabla permiten concluir que los estudiantes desarrollaron habilidades de pensamiento que le permitieron llegar a la generalización de patrones y que la mayor dificultad que presentaron fue al responder a las cuestiones de relación inversa.

Capítulo 6. Análisis Retrospectivo de los datos

En esta sección se realiza un análisis a profundidad de los datos recogidos durante la experimentación de la secuencia de enseñanza, teniendo en cuenta los criterios descritos en el capítulo 4. Este análisis está dividido en tres secciones destinadas a establecer la relación entre los objetivos de enseñanza planteados y los resultados obtenidos. Las estrategias de generalización de proceso directo e inverso empleadas por los estudiantes y el tipo de generalización desarrollada.

6.1 Relación entre los objetivos de enseñanza y los resultados obtenidos

En este trabajo partimos de las conjeturas que los estudiantes no identifican características comunes entre los elementos de una secuencia. Y que no tienen desarrolladas las destrezas necesarias para usar una propiedad común a fin de deducir una expresión que permita calcular el valor de cualquier término de la secuencia, por el hecho de que este tipo de actividades con patrones no se incluyen a nivel curricular en este curso o en años previos. En este sentido, planteamos como objetivo de enseñanza realizar generalizaciones de relación directa e inversa a través de tareas de patrones geométricos.

De los análisis realizados por sesión sobre las respuestas de los estudiantes en cada una de las tareas de la secuencia de enseñanza se puede afirmar que existen avances importantes en sus habilidades de pensamiento. Los estudiantes fueron capaces de visualizar y verbalizar aspectos variantes e invariantes dentro de las secuencias, lo que les posibilitó la construcción de expresiones de generalidad. Antes de iniciar la intervención los estudiantes no habían sido familiarizados con este tipo de tareas, de ahí a que en el primer encuentro algunos de ellos no fueron capaces de continuar la secuencia pues no identificaron el valor numérico de cada una de las gráficas ni la estructura espacial de las mismas, se puede decir entonces que estos estudiantes se encontraban en el nivel 0 de la trayectoria de aprendizaje.

A medida que se avanzó en la implementación del experimento de enseñanza, los estudiantes fueron mostrando progresivamente características propias de los niveles superiores, como lo son realizar la generalización cercana, encontrar la generalización lejana, expresar verbalmente y por escrito la regla general y algunos de ellos invertir el proceso para términos pequeños, grandes y de manera general. En este sentido, los objetivos propuestos para cada sesión fueron alcanzados parcialmente y las tareas implementadas llevaron a ello.

Es de anotar la importancia que tienen las representaciones visuales dentro de la tarea, pues los estudiantes se apoyaron de ellas al descomponerlas en partes diferenciales, lo que les facilitó encontrar el proceso matemático para hallar cualquier valor de la secuencia. Aunque en algunos casos cometieron errores, quizás por la complejidad de su descomposición.

De manera particular se puede decir que la estudiante Sofía, aunque mostró gran habilidad para la generalización desde el principio, también presentó una evolución a lo largo de su participación en la intervención. Fue la primera estudiante en emplear estrategias funcionales, para algunas de las secuencias empleó la función $f(n) = a(n - 1) + b$ siendo b el valor del primer término (ver Figura 37) y para otras $f(n) = an + b$ (ver Figura 38).

Figura 37

Respuesta de Sofía al literal b. de la tarea La floristería.

2. Los dueños de la floristería quisieron organizar en una tabla la cantidad de girasoles que necesitan para hacer arreglos grandes, ayúdalos a continuarla. * / 0

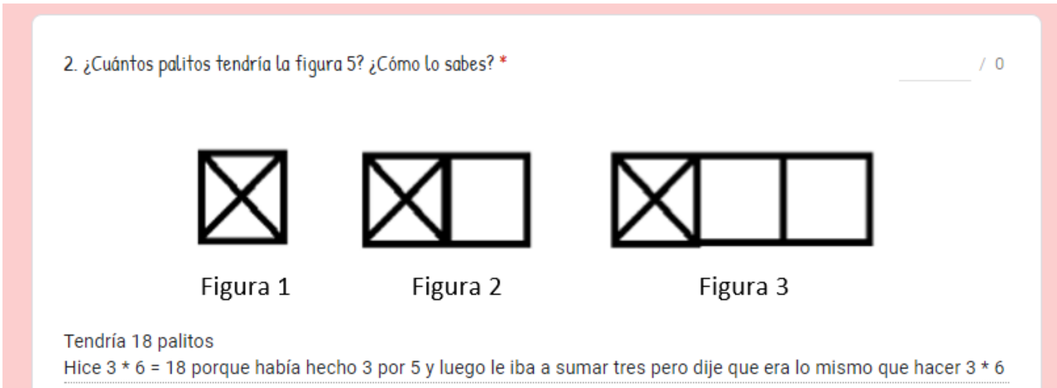
Tamaño	12	23	35	110
Número de girasoles				

Explica cómo encontraste las respuestas.

12=52
23=96
35=144
110=444
Hice el tamaño menos uno por cuatro más ocho

Figura 38

Respuesta de Sofía al literal b. de la tarea El reciclador.

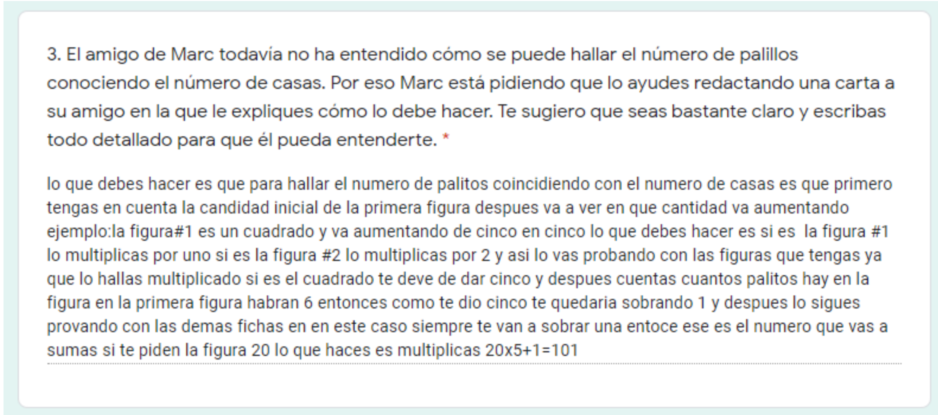


Como se puede ver en las anteriores figuras la estudiante aplicó esta estrategia en las últimas sesiones desde las generalizaciones inmediatas. Pues, primeramente, buscó una fórmula general que le sirviera para encontrar todos los términos solicitados y, luego, la aplicó al término en cuestión.

Yuceiby también mostró un progresivo avance, sus respuestas fueron cada vez más elaboradas sobre todo al expresar la regla general de proceso directo y de proceso inverso. Descubrió una forma que le facilitó encontrar la cantidad constante y fue agrupar los elementos que conforman la figura de acuerdo a la posición que ocupan y el patrón de crecimiento. La cantidad de elementos resultantes es la constante. Un ejemplo de ello se muestra en la Figura 39.

Figura 39

Respuestas de Sofía al literal c. de la tarea La urbanización.


3. El amigo de Marc todavía no ha entendido cómo se puede hallar el número de palillos conociendo el número de casas. Por eso Marc está pidiendo que lo ayudes redactando una carta a su amigo en la que le expliques cómo lo debe hacer. Te sugiero que seas bastante claro y escribas todo detallado para que él pueda entenderte. *

lo que debes hacer es que para hallar el numero de palitos coincidiendo con el numero de casas es que primero tengas en cuenta la candidad inicial de la primera figura despues va a ver en que cantidad va aumentando ejemplo:la figura#1 es un cuadrado y va aumentando de cinco en cinco lo que debes hacer es si es la figura #1 lo multiplicas por uno si es la figura #2 lo multiplicas por 2 y asi lo vas probando con las figuras que tengas ya que lo hallas multiplicado si es el cuadrado te deve de dar cinco y despues cuentas cuantos palitos hay en la figura en la primera figura habran 6 entonces como te dio cinco te quedaria sobrando 1 y despues lo sigues provando con las demas fichas en en este caso siempre te van a sobrar una entoce ese es el numero que vas a sumas si te piden la figura 20 lo que haces es multiplicas 20x5+1=101

En este caso, Yuceiby explicó correctamente la regla general y demostró un aspecto clave para llegar a la generalización y es el hecho de comprobar que si un procedimiento se cumple para un término y para los siguientes del enunciado entonces se cumple para los demás.

La estudiante Alina también presentó avances en su proceso de aprendizaje, en la primera sesión ella fue una de las estudiantes que no continuaron correctamente la secuencia. En su caso particular continuó la secuencia en la tarea La planta, dibujando una sola hoja por día con unas pequeñas variaciones en su forma y tamaño. Mientras que en las sesiones siguientes propuso estrategias funcionales desde términos inmediatos, un ejemplo de esto se presenta en la Figura 40.

Figura 40

Respuesta de Alina al literal a. de la tarea El jardín.

En esta estudiante se puede destacar la habilidad que desarrolló para resolver este tipo de tareas de manera más fluida y en menor tiempo, en un principio le generaba mayor esfuerzo identificar un procedimiento para resolver las tareas, pero a medida que fue avanzando la intervención descubrió aspectos claves que le permitieron responder correctamente y de manera más rápida.

Isaid por su parte, fue capaz en algunas sesiones de proponer estrategias funcionales, así como se muestra en la Figura 41. Su proceso de aprendizaje también mostró avances, pues este estudiante en el primer encuentro realizó cálculos erróneos para encontrar el valor de los términos siguientes y no fue capaz de identificar que el valor de las figuras aumenta en una misma cantidad, por ejemplo, en la tarea juego de bolos al preguntarle ¿De qué manera el grupo de amigos quieren aumentar el número de bolos? Su respuesta fue: “lo pueden aumentar de 2 o 3”. En las sesiones siguientes el estudiante si fue capaz de identificar el patrón de crecimiento.

Figura 41

Respuesta de Isaid al literal b. de la tarea Estrellas marinas.

El estudiante Juan Sebastián mediante su participación en la intervención mostró flexibilidad al cambiar de estrategias, por ejemplo, podía empezar con estrategias aditivas como el caso que se muestra en la Figura 42, realizar dibujos, construir tablas y finalmente cambiar a una estrategia funcional.

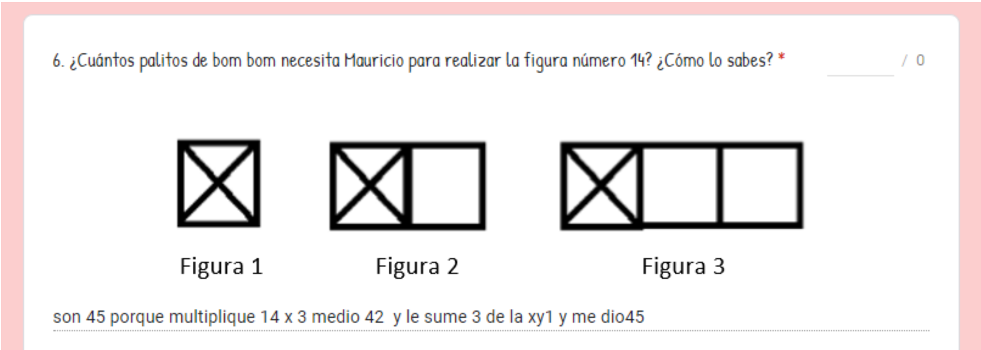
Figura 42

Respuesta de Juan Sebastián al literal a. de la tarea Jardín.

Juan de Dios logró descubrir y expresar el patrón, aspecto que en las primeras sesiones les generaba dificultad porque no establecía características comunes entre los elementos de la secuencia. Por ejemplo, en la Figura 43 se evidencia como es capaz de plantear la función y reconocer la cantidad constante en la figura al hacer alusión a los dos palitos ubicados en forma de x y a un palito más.

Figura 43

Respuesta de Juan de Dios al literal f. de la tarea El reciclador.

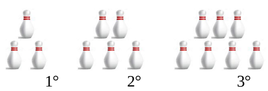
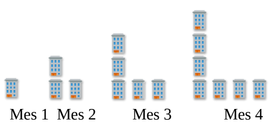
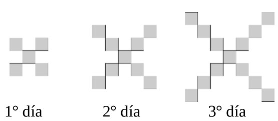
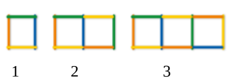
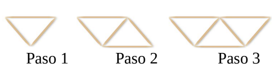
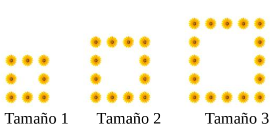
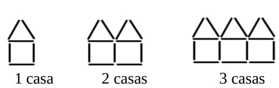


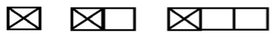
6.2 Estrategias empleadas por los estudiantes en las tareas de generalización de patrones

Para la resolución de las tareas planteadas en la secuencia de enseñanza durante las 8 sesiones de implementación, los estudiantes utilizaron diversas estrategias, que difieren de acuerdo a la relación entre las variables de manera directa o inversa. Entre las cuestiones de relación directa, distinguimos dos tipos principales de estrategias, en primera instancia las estrategias aditivas de proceso recursivo para encontrar principalmente los términos inmediatos. Y las estrategias funcionales para encontrar los términos cercanos y lejanos. En la siguiente tabla (ver Tabla 13) se presenta la cantidad de veces que fue empleada cada estrategia por los estudiantes para responder a las tareas de generalización.

Tabla 13

Estrategias empleadas durante toda la secuencia

Tarea	Generalización inmediata						Generalización cercana y lejana						Relación Inversa			
	EA			EF	RP	O	EA			EF	RP	O	EE	IO		RE
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE	
	1	0	2	0	0	3										
	0	0	3	0	0	3										
	0	0	6	0	0	0										
	4	0	2	0	0	0										
	0	0	6	0	0	0										
	0	0	6	0	0	0	0	0	1	2	3	0				
	0	0	5	1	0	0	0	0	0	5	1	0	4	2	0	0
	0	0	1	5	0	0	0	0	0	6	0	0	1	3	0	0
	0	0	4	2	0	0	0	0	0	5	1	0	3	3	0	0
	0	0	3	3	0	0	0	0	0	3	3	0	3	3	0	0
	0	0	2	4	0	0	0	0	0	5	1	0	3	3	0	0

Tarea	**Generalización inmediata**						**Generalización cercana y lejana**						**Relación Inversa**			
	EA			**EF**	**RP**	**O**	**EA**			**EF**	**RP**	**O**	**EE**	**IO**		**RE**
	R	PI	PR				R	PI	PR					IC	IE	
 Figura 1 Figura 2 Figura 3	0	0	5	1	0	0	0	0	0	6	0	0	1	4	1	0
Total	5	0	45	16	0	6	0	0	1	32	9	0	15	18	1	0

Nota. **EA:** Estrategias aditivas, **R:** Recuento, **PI:** Proceso iterativo, **PR:** Proceso recursivo, **EF:** Estrategias funcionales, **RP:** Razonamiento proporcional, **O:** Otras.

Existen estrategias de relación directa que no fueron empleadas por los estudiantes como lo es el caso del proceso iterativo que consiste en partir de la primera figura y sumar el patrón de crecimiento de forma iterada hasta el término requerido. Los estudiantes más bien iniciaban de una figura cualquiera y sumaban el patrón de crecimiento de forma iterada hasta encontrar el valor del término solicitado, es decir la estrategia recursiva, o, como ya se mencionó para los términos cercanos y lejanos, los estudiantes relacionaban las dos variables, la posición de la figura y el número de elementos de ésta mediante una función afín $f(n) = an + b$ $(b \neq 0)$, donde a es el patrón de crecimiento, y b es el término independiente.

Entre las estrategias que surgieron en la experimentación de la secuencia y que no hacían parte de la clasificación de referencia está el hecho (erróneo) de sumar los valores de varios términos para encontrar los siguientes. Cabe resaltar que esta estrategia solamente fue empleada por algunos estudiantes en la primera sesión. Pues, en cuanto fueron participando de la intervención desarrollaron habilidades que les permitieron establecer características comunes en la secuencia. Es de anotar que a medida que se desarrollaron las tareas fue mayor el número de estudiantes que fueron utilizando las estrategias funcionales, esta evolución se puede apreciar en la tabla anterior.

Al realizar las comparaciones entre los resultados de las cuestiones de relación inversa se observa que no existe una diferencia significativa en la cantidad de veces que emplearon las estrategias de ensayo y error con las veces que realizaron la inversión de las operaciones. A su vez, teniendo en cuenta lo observado durante las sesiones se puede afirmar que este tipo de cuestiones requieren un nivel mayor de abstracción y que a los estudiantes les demanda mayor dificultad.

6.3 Tipo de Generalización Desarrollada por los Estudiantes

Los estudiantes utilizaron dos maneras para expresar las generalidades algebraicas, esto son, las generalizaciones algebraicas factuales y las generalizaciones algebraicas contextuales (Radford, 2003). Las primeras, se hicieron evidentes cuando encontraron los términos inmediatos a través del proceso recursivo, mediante esta estrategia los estudiantes se dieron cuenta que entre cada término existía una diferencia constante y expresaron frases como: “va de dos en dos”, “aumenta de tres en tres” o también cuando hacían referencias puntuales a la estructura de la figura como por ejemplo: “se agrega uno a cada hilera”, “se agregan dos cuadrados a cada lado”, “se agrega una concha a cada esquina” y con base a ello encontraban los términos solicitados en las tareas.

Las generalizaciones algebraicas contextuales se evidenciaron cuando los estudiantes establecieron relaciones entre las variables y fueron capaces de hallar términos cercanos y lejanos mediante estrategias funcionales. A su vez, al resolver aquellas cuestiones en las que se les pedía una explicación por medio de un mensaje o una carta a un destinatario que no forma parte de la clase, sobre el proceso empleado para encontrar el término general de la secuencia. Pues aquí los estudiantes en vez de aludir a una figura en particular, hacían referencia a “cualquier figura”, “el número del día”, “número cualquiera”, entre otros. Es decir, los estudiantes cambiaron su discurso de “va de dos en dos” a “El número del día lo multiplicas por 2, luego le sumas 1” lo que permite afirmar que hay una evolución entre el proceso de generalización factual hacia el contextual.

Las generalizaciones algebraicas simbólicas no fueron desarrolladas por los estudiantes que participaron de esta investigación puesto que no se realizó instrucción sobre ello. Se consideró que este nivel de abstracción no era propio para estos estudiantes que tienen este primer acercamiento al álgebra.

Capítulo 7. Conclusión

Con este trabajo se buscaba *explorar una introducción al pre- álgebra en estudiantes de sexto grado, a través de una secuencia de enseñanza online con tareas de patrones geométricos*. Con relación a este objetivo se puede decir que la metodología de investigación basada en el diseño, nos ha permitido crear e implementar un experimento de enseñanza en paralelo a la intervención, con el que hemos podido acercar a los estudiantes a la generalización. Consistió en una secuencia de enseñanza que fue implementada de manera virtual a través de la plataforma *Google Classroom* y *Meet*.

De esta manera se cumplió con el primer objetivo específico que consistió en *diseñar y experimentar una secuencia de enseñanza-aprendizaje online que permita la iniciación al álgebra de estudiantes de sexto grado mediante la resolución de tareas de patrones geométricos.* Los resultados obtenidos y el análisis de ellos han permitido determinar que esta secuencia de enseñanza promueve habilidades de pensamiento algebraico en los estudiantes. Las tareas de generalización de patrones geométricos fueron retadoras para ellos y los llevaron a identificar características comunes de la secuencia, buscar la manera de continuarlas y plantear una abducción que luego se convirtió en una regla para encontrar el valor de cualquier figura.

Como segundo objetivo específico se planteó, *observar e identificar cuáles son las estrategias y dificultades que emergen cuando los estudiantes realizan tareas de generalización de patrones geométricos en la implementación de la secuencia de enseñanza online.* Se puede decir que se ha conseguido ese objetivo, pues analizar los datos obtenidos en cada una de las tareas, se han identificado las estrategias que han sido utilizadas por los estudiantes, destacando aquellas que utilizan para el proceso directo y las que utilizan para el proceso inverso.

Como tercer objetivo específico se planteó *aportar información que nos permita identificar las características que manifiestan los estudiantes de sexto grado en este contexto de iniciación al álgebra (pre-álgebra).* Con este trabajo se ha querido aportar información a estudios que intentan llevar al aula una nueva visión del álgebra. La secuencia de enseñanza que aquí se propone puede servir a los maestros de sexto grado para iniciar el pensamiento algebraico en sus estudiantes. Las tareas son fáciles de adaptar de acuerdo al contexto y a sus necesidades. Se espera que esta investigación contribuya a que los maestros se animen a proponer las tareas de generalización de patrones como una manera de trabajar el pre-álgebra y ayudar a los estudiantes a eliminar los prejuicios que tienen sobre esta rama de las matemáticas.

Es de anotar que la implementación de la secuencia de enseñanza mediante una modalidad online demuestra que el trabajo de pre- álgebra puede ser desarrollado mediante plataformas como *Google Classroom* y *Meet* de manera efectiva, pues la mayoría de trabajos que se han realizado en el ámbito de pre- álgebra implican configuraciones de clase de manera presencial y no configuraciones de enseñanza online. En este sentido este trabajo aporta de manera significativa a la educación matemática. A su vez posibilita que, ante la situación actual de pandemia, trabajos como estos que proponen una innovación en el proceso de enseñanza no queden aplazados hasta esperar el regreso a las escuelas de manera presencial.

7.1 Reflexión final

El presente trabajo de investigación puede considerarse como un aporte didáctico y metodológico a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra en sexto grado, en la medida que ofrece una manera de intervenir en el aula. El conocimiento que han logrado los estudiantes participantes de este estudio sobre el pensamiento algebraico en relación con las tareas de generalización de patrones geométricos es de gran importancia para sus estudios futuros. Sus habilidades de pensamiento fueron más notorias durante la realización de las tareas. Además de su capacidad para adaptarse a esta nueva modalidad de trabajo para ellos.

A modo personal, el desarrollo de esta investigación fue una oportunidad para salir de mi zona de confort y mejorar mi formación en competencias didácticas, pedagógicas y tecnológicas para emplear las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje. No fue un camino fácil, existieron dificultades de conectividad que en ciertos momentos no permitieron que las sesiones se llevaran a cabo en el tiempo estipulado. Pero sin lugar a dudas la mejor satisfacción fue que los estudiantes y yo estábamos viviendo una experiencia nueva que sirvió para seguir trabajando por el mejoramiento de la educación y sacar lo mejor de mí en medio de la crisis.

7.2 Limitaciones

En este estudio por razones antes mencionadas no se consiguió acceder a una muestra mayor. Futuros estudios, con un enfoque cuantitativo, y una muestra mayor permitirían generalizar los resultados.

Recomendaciones

Este estudio puede ser objeto de investigaciones futuras, pues de aquí se desprenden varias líneas de continuación como lo son:

- Experimentar la secuencia de enseñanza con una muestra mayor a la empleada en este estudio y analizar el proceso de generalización en los estudiantes.
- Extender la secuencia la secuencia de enseñanza incluyendo una iniciación al lenguaje simbólico, para acercar a los estudiantes a una generalización algebraica simbólica.
- Incluir tareas de función cuadrática a los estudiantes que presenten mayores habilidades.

Referencias

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6 th -8 th Graders' Efficiencies, Strategies and Representations Regarding Generalization Patterns Estudo Comparativo da Eficácia de Estratégias e Representações Usadas por Estudantes da Escola Básica em Problemas Relativos à Generalização d. *Bolema*, *27*(47), 703–732.

Álvarez Jiménez, D., Moreno Mediavilla, D., Orduna Portús, P., Pascual López, V., & San Vicente Vicente, F. J. (2015). Maths: from distance to e-learning. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, *3*(4), 5-12. https://doi.org/10.9781/ijimai.2015.341

Apsari, R., Sariyasa, S., Putri, R., Gunawan, G., & Prayitno, S. (2020). Understanding Students' Transition from Arithmetic to Algebraic Thinking in the Pre-Algebraic Lesson. *Physics: Conf. Series*, *1471*(012056). https://doi.org/10.1088/1742-6596/1471/1/012056

Arbona, E. (2016). *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas* [Tesis de Maestría, Universitat de València]. https://roderic.uv.es/handle/10550/56731

Arbona, E., Beltrán, M. J., Gutiérrez, Á., y Jaime, A. (2018). El uso de los problemas de patrones geométricos para la introducción del álgebra en la educación primaria 1. En M.T. Navarro (Ed.), *Actas de las XII Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana* (pp. 103-111). Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana (SEMCV).

Arbona, E., Beltrán, M. J., Jaime, A., y Gutiérrez, Á. (2017). Aprendizaje del álgebra a través de problemas de patrones geométricos. *Suma*, *86*, 39–46.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), Nordic research in mathematics education: Proceedings from NORMA08 in Copenhagen (pp. 7–16). Sense Publishers.

Barajas, M., Madero, P., & Sánchez, A. (2018). *Una aproximación a la generalización de patrones para fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado tercero, del colegio Isla del Sol I.E.D.* [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Javeriana]. http://hdl.handle.net/10554/35027

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of The Seventh Congress of The European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 420-428). CERME 7.

Barbosa, A., Vale, I. & Palhares, P. (2009). Exploring generalization with visual patterns: tasks developed with pre-algebra students. In I. Vale y A. Barboza (Org.) *Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 137 - 150). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Bell, A. (1993). Guest editorial. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 1-4. https://www.jstor.org/stable/i277334

Benedicto, C., Jaime, A., Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández Verdú, M. Molina González y N. Planas Raig (Eds.), *Investigación en educación matemática XIX* (pp. 153-162). Universidad de Alicante. http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/51591

Butto, C., y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, *22*(3), 55-86. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a4.pdf

Butto Zarzar, C., Delgado Fernández, J., y Bazán Ramírez, A. (2018). Procesos de generalización: Una vía de acceso al pensamiento algebraico temprano en Educación Básica. *Horizontes Pedagógicos*, *20*(1), 25–36. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.20104

Callejo, M. L., España, U. D. A., García-reche, Á., España, U. D. A., Fernández, C., y España, U. D. A. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* (10), 5-25. https://core.ac.uk/download/pdf/78636996.pdf

Carliner, S. (2004). *An overview of online learning* (2nd ed.). Human Resource Development Press.

Carraher, D., Schliemann, A., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Lawrence Erlbaum/Taylor & Francis Group; National Council of Teachers of Mathematics.

Circular No. 11 del 2020 [Ministerio de Educación Nacional]. Recomendaciones para prevención, manejo y control de la infección respiratoria aguda por el nuevo Cornonavirus, en el entorno educativo. 9 de marzo de 2020.

Circular No. 19 de 2020 [Ministerio de Educación Nacional]. Orientaciones con ocasión a la declaratoria de emergencia sanitaria provocada por el coronavirus COVID-19. 14 de marzo de 2020.

Circular No. 20 de 2020 [Ministerio de Educación Nacional]. Medidas adicionales y complementarias para el manejo, control y prevención del Coronavirus (COVID-19). 16 de marzo de 2020.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica.* Universidad Nacional Autónoma de México.

Directiva No 03 de 2020 [Ministerio de Educación Nacional]. Orientaciones para el manejo de la emergencia por COVID-19 por parte de los establecimientos educativos privados. 20 de marzo de 2020.

Forigua, J. E., y Velandia, D. A. (2015). *Sobre la interpretación y uso de la letra como número generalizado en tareas y actividades sobre generalización de patrones: reporte de una experiencia con estudiantes de grado octavo (13 - 15 años).* [Tesis de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://funes.uniandes.edu.co/7299/1/Forigua2015%C3%81lgebra.pdf

García-Peñalvo, F. J., Corell, A., Abella-García, V., y Grande, M. (2020). La evaluación online en la educación superior en tiempos de la COVID-19. *Education in the Knowledge Society*, *21*, 12. https://doi.org/10.14201/eks.23013

Goni-Cervera, J., y Polo-Blanco, I. (2019). Estrategias de generalización por niños de 6 y 7 años al resolver una tarea que involucra un patrón geométrico. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 8*(2), 61-76. http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/81

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2019). Topic-Specific Design Research: An Introduction. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp.33 – 58) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

Guner, P., Ersoy, E., & Temiz, T. (2013). 7Th and 8Th Grade Students' Generalization Strategies of Patterns. *International Journal of Global Education*, *2*(4), 38–54. http://www.ijtase.net/ojs/index.php/ijge/article/view/284/348

Hodges, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T., & Bond, A. (27 de marzo de 2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *Educause Review*. https://bit.ly/3b0Nzx7

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior (ICFES). (2017a). *ICFES interactivo. Informe nacional pruebas saber.* http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/autenticacion/autenticacionPlantel.jsf

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior (ICFES). (2017b). *Saber 5°. Guía de orientación 2017.* Ministerio de Educación Nacional.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving Grade 7 Students' Achievement in Initial Algebra Through a Technology-Based Intervention. *Digital Experiences in Mathematics Education*, (1), 28–58. https://doi.org/10.1007/s40751-015-0004-2

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the k-12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Lawence Erlbaum, Hillsdale, NJ. https://doi.org/10.4324/9781315044378-4

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139–151.

Kieran, C. (2019). Task Desing Frameworks in Mathematics Education Research: An Example of a Domain-Specific Frame for Algebra Learning with Technological. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp.265 – 287) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7

Mason, J. (1999). La incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA*, *4*(3), 232–246.

Mavridis, A., Katmada, A., & Tsiatsos, T. (2017). Impact of online flexible games on students' attitude towards mathematics. *Educational Technology Research and Development, 65*(6), 1451–1470. https://doi.org/10.1007/s11423-017-9522-5

Means, B., Bakia, M., & Murphy, R. (2014). *Learning online: What research tells us about whether, when and how*. Routledge.

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización. [Tesis de Maestría, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Imprenta Nacional de Colombia

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento variacional y tecnologías computacionales*. Enlace Editores LTDA.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas.* Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos básicos de aprendizaje Matemáticas.* http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Ministerio de salud. (2020). *CORONAVIRUS (COVID-19)*. https://www.minsalud.gov.co/salud/publica/PET/Paginas/Covid-19_copia.aspx

Morales, R., Cañadas, Ma., Brizuela, B., & Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de Educación Primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *36*(3), 59–78. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/343228

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Author

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). (31 de marzo de 2020). *El cierre de escuelas debido a la Covid-19 en todo el mundo afectará más a las niñas.* https://es.unesco.org/news/cierre-escuelas-debido-covid-19-todo-mundo-afectara-mas-ninas

Organización Mundial de la Salud (OMS). (2020). *Brote de enfermedad por coronavirus (COVID-19)*. https://www.who.int/es/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019

PISA, y OCDE. (s.f.). *Programme for International Student Assessment.* http://www.oecd.org/pisa/

Pulgarín, J. (2015). *Generalización de patrones geométricos. Proyecto de aula para desarrollar pensamiento variacional en estudiantes de 9 – 12 años*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/56911

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Elementary forms of algebraic thinking in young students. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *4*, 73–80. http://www.luisradford.ca/pub/20_PME342010_3.pdf

Radford, L. (2015). Introduction: The Phenomenological, Components of Generalization. *PNA*, *9*(3), 129–141. http://hdl.handle.net/10481/34986

Resolución 385 de 2020 [Ministerio de Salud y Protección Social]. Por la cual se declara la emergencia sanitaria por causa del coronavirus COVID-19 y se adoptan medidas para hacer frente al virus. 12 de marzo de 2020.

Rivera, F. (2009). Visual Alphanumeric mechanisms that support pattern generalization. In I. Vale y A. Barboza (Org.) *Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 123 - 136). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Rojas, P. J., y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico 1. *Educación Científica y Tecnológica*, 760–766. http://funes.uniandes.edu.co/2726/1/Procesos_de_Generalizaci%C3%B3n_y_Pensamiento_Algebraico.pdf

Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. (2006). *Módulo 2 Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico* (Primera edición, ed.). Gobernación de Antioquia. Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia Dirección de Fomento a la Educación con Calidad. Editorial Artes y Letras Ltda.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de Las Matemáticas*, *77*, 5–34. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/77/Volumen_77.pdf

Somasundram, P., Akmar, S. N., & Eu, L. K. (2019). Pattern Generalisation by Year Five Pupils. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *14*(2), 353–362. International Electronic Journal of Mathematics Education

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Lins (Ed.), *Perspectives on school algebra* (pp. 141–153). Kluwer Academic.

Steele, D., & Johanning, D. (2004). A schematic-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *57*(1), 65–90. https://www.jstor.org/stable/4150315

Tanisli, D., & Ozdas, A. (2009). The Strategies of using the Generalizing Patterns of the Primary School 5 th Grade Students. *Educational Sciences: Theory & Practice*, *9*(3), 1485–1497. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ858930.pdf

Vale, I. (2009). Mathematics and patterns in elementary schools: perspectives and classroom experiences of students and teachers. In I. Vale y A. Barboza (Org.) *Patterns: Multiple perspectives and contexts in mathematics education* (pp. 7 – 14). Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 281–307. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9483-5

Vasco, C. (8-10 de mayo de 2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales En El Currículo de Matemáticas, Bogotá, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/10178/1/Vasco2002El.pdf

Velásquez, E. (2014). *Unidad didáctica para el proceso de generalización y solución de ecuaciones, utilizando métodos informales, como apoyo para el sexto grado.* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia].

Vergel, R. (7-9 de octubre de 2010). *La Perspectiva de Cambio Curricular Early-Algebra como Posibilidad para desarrollar el Pensamiento Algebraico en Escolares de Educación Primaria: Una Mirada al Proceso Matemático de Generalización*. Comunicación presentada en 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa, Bogotá, Colombia. http://funes.uniandes.edu.co/1163/

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)*. [Tesis de Doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. http://hdl.handle.net/11349/2608

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193–215. http://hdl.handle.net/10481/34991

Zapatera, A. (2018a). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números*, *97*, 51–67. http://www.sinewton.org/numeros/numeros/97/Articulos_04.pdf

Zapatera, A. (2018b). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 21*(1), 87–114. https://doi.org/10.12802/relime.18.2114

Zapatera, A., y Callejo, M. L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. *Ciudad Real: SEIEM*, 599–610. http://funes.uniandes.edu.co/1843/1/414_Zapatera2011Nivel_SEIEM13.pdf

Zhang, M. (2016). *Teaching with Google Classroom: put Google Classroom to work while teaching your students and make your life easier*. Packt Publishing.

Anexos

Anexo A. Secuencia de enseñanza

Trabajo de Investigación: Una introducción a la generalización de patrones geométricos a partir de una secuencia de enseñanza online en estudiantes de sexto grado.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Nombre de la secuencia:	Generalización de patrones geométricos: una secuencia de enseñanza online.
Investigador:	Eliana Pulido Orellano
Coinvestigadores:	Evelyn Ariza Muñoz José Antonio González Calero
Grado:	6º
Área:	Matemáticas
Estándar básico de competencia:	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
Derecho básico de aprendizaje:	Identifica y analiza propiedades de covariación directa e inversa entre variables, en contextos numéricos, geométricos y cotidianos los representa mediante gráficas (Cartesianas de puntos, continuas, formada por segmentos, etc.)
Evidencia de aprendizaje:	Propone patrones de comportamiento numéricos y expresa verbalmente o por escrito los procedimientos matemáticos
Objetivo de enseñanza:	Realizar generalizaciones de relaciones directas e inversas a través de tareas de patrones geométricos.

Sesión 01

Tareas: La planta, juego de bolos y la constructora. **Duración:** 50 minutos

Objetivo de la sesión: Identificar los conocimientos previos de los estudiantes al realizar tareas con patrones geométricos a través de un cuestionario en línea.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

Desarrollo

Instrucción: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la sesión 0 y abre el formulario que tiene tu nombre. Una vez allí te invito a que resuelvas la actividad. No te de miedo a equivocarte porque tus respuestas me servirán para diseñar las siguientes sesiones y ayudarte a despejar las dudas que presentes.

Tarea. *La planta.* **Fuente:** Adaptación (Arbona et al., 2018).

Una amiga de mi madre se ha comprado una planta nueva de una especie un poco rara. La planta crece siempre de noche, de modo que a la mañana siguiente se nota la diferencia. Observa cómo ha crecido los primeros tres días. Las hojas representan el crecimiento de la planta, guíate de ellas y responde los interrogantes.

1° día 2° día 3° día

a) ¿Cuántas hojas ha crecido la planta el 1° día, el 2° día y el 3° día?

b) ¿Qué diferencia hay en la planta entre lo que creció del día 1 al 2?

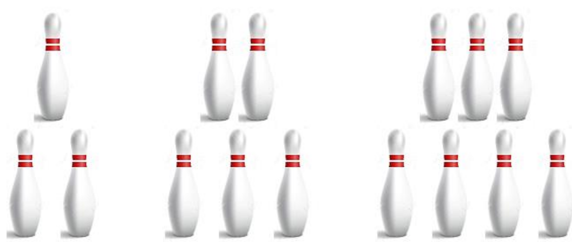
c) ¿Es la misma diferencia que hay del día 2 al día 3?

d) ¿Cómo se verá la planta el 5° día? Dibújala

e) Continúa la secuencia hasta llegar al día 8. Explica cómo encontraste la respuesta.

Tarea. *Juego de bolos.* **Fuente:** Adaptación Arbona et al. (2017).

Un grupo de amigos hemos decidido jugar a los bolos. Entre cada tiro hemos acordado que vayan aumentando poco a poco del siguiente modo.



1° 2° 3°

a) ¿Cuántos bolos colocaron la 1º vez, la 2° vez y la 3° vez?

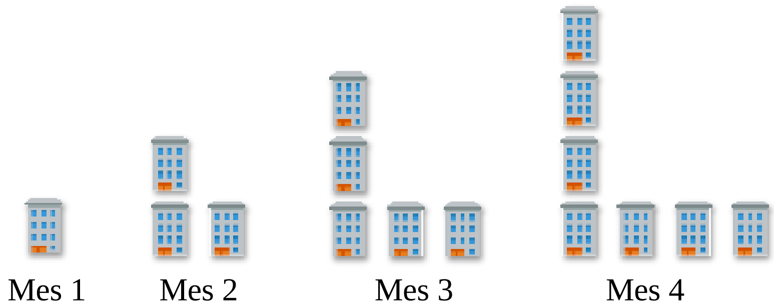
b) ¿De qué manera el grupo de amigos quieren aumentar el número de bolos?

c) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 4º vez? Explica cómo llegaste a la respuesta.

d) ¿Cuántos bolos habrá colocados la 5º vez? Explica cómo encontraste la respuesta.

Tarea. *La constructora.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013)

Una constructora está diseñando un conjunto residencial que sea diferente a los otros que han realizado. Su idea se encuentra plasmada en el siguiente bosquejo, donde cada cuadrado hace referencia a un apartamento. Además, en la imagen es posible observar el progreso de la construcción mes a mes, así como se muestra a continuación. Observa y responde:



a) ¿Cuántos apartamentos tiene terminados la constructora en el mes 1? ¿cuántos en el mes 2? Y ¿cuántos en el mes 3?

b) ¿Qué cambio observas en la construcción del mes 1 al mes 2? ¿Es el mismo cambio del mes 2 al mes 3? ¿sí? ¿no? ¿por qué?

c) ¿Cuántos apartamentos serán construidos en el mes 6, en el mes 7 y en el mes 8? Explica cómo encontraste la respuesta.

Cierre

El docente indaga con los estudiantes si en el transcurso de su formación escolar han realizado tareas con patrones geométricos y hace una proyección de lo que será la próxima sesión.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas

Evaluación: Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos. En cuanto a los estudiantes se valorará la capacidad argumentativa para justificar sus respuestas y las estrategias utilizadas para resolver las tareas.

Sesión 02

Tareas: Fiesta de los sabores y raíces del árbol. **Duración:** 60 minutos.

Objetivo de la sesión: Distinguir los patrones geométricos dentro del conjunto de clasificación y encontrar los términos inmediatos de una secuencia, a través de la solución de un cuestionario en línea.

Desempeños esperados

- Reconoce los patrones geométricos como una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales.
- Expresa el valor de los términos inmediatos de la secuencia.

Conceptualización

Patrón: Se entiende como patrón a las sucesiones de elementos que se construyen siguiendo una determinada regla. Las reglas de formación de patrones pueden ser de repetición o de recurrencia y sirven para clasificar los patrones: en los patrones de repetición los elementos se presentan de forman periódica y en los patrones de recurrencia cada término de la sucesión se expresa en función de los anteriores (Zapatera 2018a).

Patrones geométricos: Un patrón geométrico es una representación gráfica de los términos de una secuencia creciente de números naturales**,** representación formada por objetos cuya cantidad corresponde al valor del término de la secuencia representado (Arbona et al., 2017).

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

- El docente explica mediante una ppt la definición, clasificación y ejemplos de patrones. Profundiza en lo que son los patrones geométricos y la descripción de las tareas con ellos. Durante la presentación formula preguntas que sirvan para seguir ahondando en los conocimientos previos de los estudiantes y para verificar su aprendizaje.
- El docente propone la siguiente tarea de trabajo grupal:

Tarea. *Fiesta de sabores*. **Fuente:** Adaptación Arbona et al. (2017).

¡Nos han invitado a una fiesta! En la invitación nos han informado que se trata de una fiesta de los sabores y, por tanto, cada invitado debe llevar una comida. Nosotros hemos decidido llevar cupcakes con crema por encima. Vamos sacándolos poco a poco del horno y colocándolos de la siguiente forma para decorarlos:

1° 2° 3°

¿Cuántos cupcakes habrá la cuarta vez que los saquemos del horno?

¿Cuántos cupcakes habrá la sexta vez que los saquemos del horno?

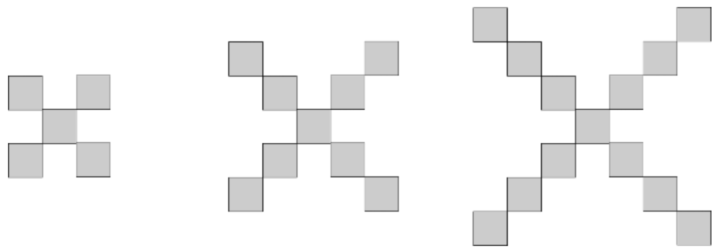
Desarrollo

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la sesión 1, abre el formulario que tiene por nombre Tarea 1. Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

El docente acompaña el proceso de resolución de la tarea, ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes y formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad el pensamiento de los estudiantes.

Tarea. *Raíces del árbol.* **Fuente:** Rivera (2013).

Un grupo de científicos está investigando un árbol cuyas raíces crecen de manera muy rápida. En los primeros tres días ha crecido de la siguiente forma. Los científicos han utilizado cuadrados para dibujar el crecimiento de las raíces en esos días.



1° día 2° día 3° día

a) De acuerdo a la información anterior ¿cuántos cuadrados utilizarán los científicos para dibujar las raíces del árbol en el día 4? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cómo se verán las raíces el día 5? Realiza el dibujo y comparte la foto al WhatsApp de la profesora.

Ayuda a los científicos a predecir de qué manera se verán las raíces del árbol los próximos 4 días, es decir, los días 6, 7, 8 y 9 y la cantidad de cuadrados que necesitan para dibujar las raíces en cada uno de esos días. Explica cómo encontraste la respuesta.

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Compromiso: Describir un patrón geométrico que hayan visto alguna vez.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad argumentativa de los estudiantes para justificar sus respuestas y las estrategias utilizadas para resolver las tareas. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 03

Tareas: Fichas lego y edificio con palillos **Duración:** 120 minutos

Objetivo de la sesión: Continuar la secuencia e identificar en ella lo que cambia y lo que permanece constante a través de la solución de dos tareas de generalización de patrones geométricos.

Desempeños esperados

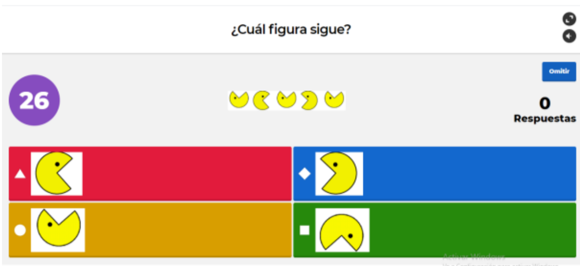
- Encuentra los términos inmediatos de la secuencia.
- Describe los elementos variantes e invariantes de las representaciones gráficas de la secuencia y a partir de ello propone una operación que represente el valor de la figura.

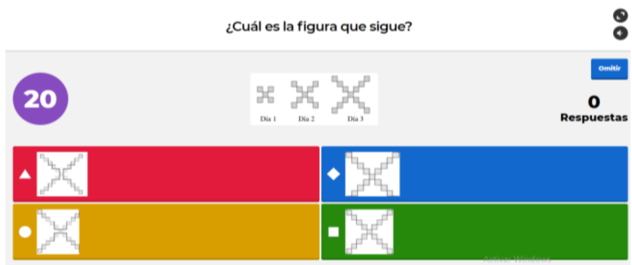
Ideas claves: Elementos variantes e invariantes.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.
- Repaso de la clase anterior a través de un kahoot. A continuación, se presentan algunas de las preguntas que aparecen en el juego.





Desarrollo

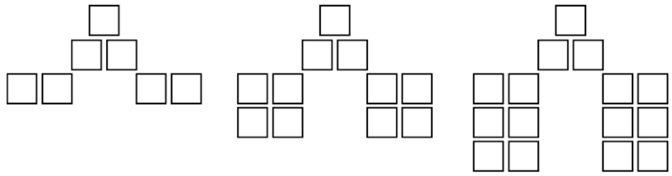
El docente propone las siguientes dos tareas, una de trabajo grupal que es proyectada en una ppt y otra de trabajo individual para resolver en un documento en línea. Acompaña el proceso de resolución y ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes, les formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad su pensamiento.

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la segunda sesión, abre el documento que tiene tu nombre. Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

Tarea: *Fichas lego*. **Fuente:** Pulgarín (2015).

Pablo mientras jugaba con sus fichas lego ha construido la siguiente secuencia y ha retado a su hermanito menor a continuarla. Pero él está confundido y no sabe cómo hacerlo. Por tal motivo Pablo lo ha guiado formulándole las preguntas que se encuentran a continuación.

Ayuda al hermano de Pablo a responder los interrogantes y a continuar la secuencia.



Torre1 Torre 2 Torre 3

a) ¿Qué parte de la figura es la que cambia en la secuencia? ¿Cuál parte es la que no varía?

b) ¿La cantidad de fichas LEGO entre cada torre aumenta o disminuye? ¿En qué cantidad?

c) ¿Qué cantidad de fichas LEGO se necesitan para construir la torre 4?

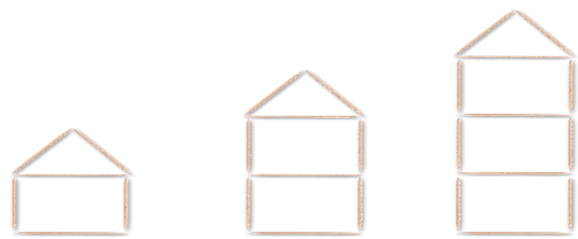
d) A Pablo también se le ocurrió otro reto y es representar la secuencia de las torres empleando una operación. ¿Tú podrías hacerlo? Él facilitó la siguiente tabla como pista.

Figura	**Número**	**Signo**	**Número**	**Signo**	**Número**	**Signo Igual**	**Resultado**
Torre 1							
Torre 2							
Torre 3							
Torre 4							

De acuerdo a la respuesta en la tabla anterior, ¿cuál es la cantidad que se mantiene constante? ¿Tiene alguna relación con la que habías dicho en la representación gráfica? ¿Sí o no? ¿Por qué?

Tarea. *Edificio con palillos*. **Fuente:** Arbona et al. (2017)

Dos amigas están haciendo edificios con palillos de esta forma:



1 planta 2 plantas 3 plantas

a) En la representación gráfica ¿Qué parte de los edificios no varía? En la representación gráfica ¿Qué parte de los edificios es la que varía?

b) ¿La cantidad de palillos entre cada edificio aumenta o disminuye? ¿En qué cantidad?

c) ¿Cómo se vería el edificio de 4 plantas? Dibújalo.

d) Completa la siguiente tabla:

Número de plantas	**Número de palillos**
1	
2	
3	
4	

e) Ahora vamos a representar la secuencia empleando una operación.

Número de plantas	**Operación y resultado**
1	
2	
3	
4	

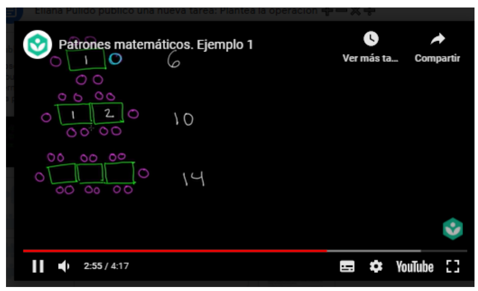
f) ¿Qué tuviste en cuenta para plantear las operaciones en la tabla anterior?

g) De acuerdo a lo que respondiste en la tabla ¿Cuál es la cantidad que se mantiene constante? ¿Tiene alguna relación con lo que habías dicho en la representación gráfica? ¿por qué?

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Compromiso: Observa el video https://www.youtube.com/watch?v=ERFEfb6Nnvk&feature=emb_title



Con base en él dibuja la figura 4 y la figura 5 en la herramienta de dibujo de Google con tu nombre, señala de un color en específico la parte de las figuras que permanece constante. Luego en el docs que tiene tu nombre expresa mediante una operación las primeras cinco figuras de la secuencia e identifica la cantidad que permanece constante.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad argumentativa de los estudiantes para justificar sus respuestas y las estrategias utilizadas para resolver las tareas. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 04

Tareas: Las hormigas, cuadrados con palitos. **Duración:** 120 minutos.

Objetivo de la sesión: Encontrar términos cercanos de la secuencia y expresar verbalmente o por escrito el procedimiento llevado a cabo.

Desempeños esperados

- Encuentra el valor de términos cercanos a los presentados en el enunciado de la tarea.
- Expresa claramente el procedimiento seguido para encontrar el valor de las representaciones solicitadas en la tarea.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

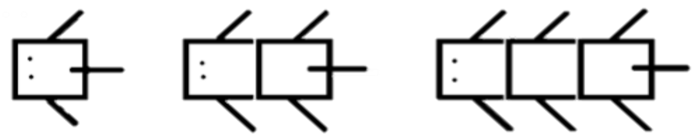
Desarrollo

El docente propone las siguientes dos tareas, una de trabajo grupal que es proyectada en una ppt y otra de trabajo individual para resolver en un formulario en línea. Acompaña el proceso de resolución y ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes, les formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad su pensamiento.

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la tercera sesión, abre el formulario que tiene por nombre “cuadrados con palitos”. Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

Tarea grupal: Tarea. *Las hormigas*. **Fuente:** Adaptación Pulgarín (2015)

Robert y sus amigos están dibujando hormigas utilizando pitillos y cada vez van haciendo una hormiga la van haciendo más grande a la anterior, así como se muestra a continuación:



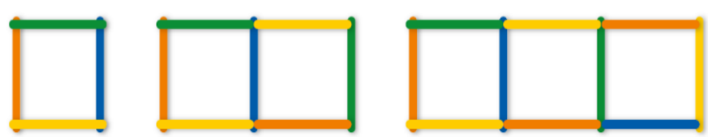
Hormiga 1 Hormiga 2 Hormiga 3

a) Si Robert y sus amigos quieren dibujar la hormiga número 14 ¿cuántos palillos necesitan? ¿Cómo lo sabes?

b) Si quieren dibujar la número 22 ¿Cuántos palitos necesitan?

Tarea Individual: Tarea. *Cuadrados con palitos.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013).

A Miranda le gustan mucho los juegos matemáticos, por eso ha inventado una secuencia utilizando palitos de paletas para formar varios cuadrados, como lo puedes observar a continuación.



1 2 3

a) Si Miranda quiere realizar 15 cuadrados ¿Cuántos palitos de paleta necesita? ¿Cómo lo sabes?

b) Y si quisiera realizar 20 ¿Cuántos palitos de paleta necesita? Explica cómo llegaste a la respuesta.

Si el estudiante no encuentra la manera de proceder, se plantean los siguientes interrogantes como guía:

a) ¿Cuántos palitos se utilizaron para realizar un cuadrado? ¿Cuántos para realizar dos cuadrados? y ¿Cuántos se utilizaron para realizar tres cuadrados?
b) ¿En qué cantidad de palitos aumenta la secuencia?
c) Observa cuidadosamente cada una de las gráficas e identifica en ella lo que cambia y lo que no cambia en ellas.
d) ¿Cuántos palitos se necesitan para realizar cuatro cuadrados? ¿Cuántos palitos se necesitan para realizar cinco cuadrados?

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad de encontrar las representaciones cercanas y las estrategias utilizadas para hacerlo, así como también su capacidad de expresar los procedimientos seguidos. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 05

Tareas: La cenefa, diseño de mochilas, estrellas marinas. **Duración:** 120 minutos.

Objetivo de la sesión: Encontrar el término que ocupa dentro de la secuencia una determinada cantidad de elementos a través de una tarea de generalización de patrones geométricos de proceso inverso.

Desempeños esperados

- Halla la posición que tiene una determinada cantidad de elementos dentro de la secuencia.
- Emplea las operaciones opuestas del proceso directo para encontrar la solución al interrogante.

Ideas claves: Operaciones opuestas.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

Desarrollo

El docente propone las siguientes dos tareas, una de trabajo grupal que es proyectada en una ppt y otra de trabajo individual para resolver en un formulario en línea. Acompaña el proceso de resolución y ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes, les formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad su pensamiento.

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la cuarta sesión, abre el formulario que tiene por nombre “Diseño con palillos”. Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

Tarea grupal: Tarea. *La Cenefa.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013).

Juanita quiere decorar la cenefa de su habitación colocando tiras de cinta a cada lado de los hexágonos que hacen parte del diseño.

Ayuda a Juanita a saber ¿Cuántas tiras de cinta necesita para decorar su cenefa? Ten en cuenta que cada tira tiene la misma medida de cada lado del hexágono.

1 2 3 4

a) Comienza averiguando ¿cuántas tiras se necesitan para colocar en cinco hexágonos?

b) ¿Cuántas tiras de cinta son necesarias para 16 hexágonos? ¿Cómo lo sabes?

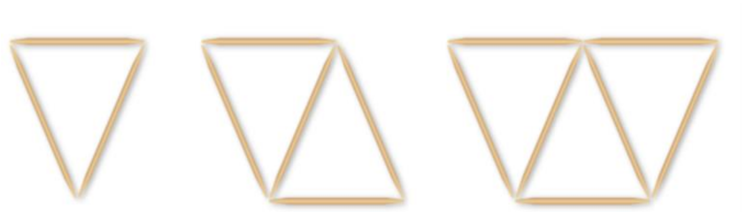
c) ¿Y para 22 hexágonos? ¿Cuántas tiras se necesitan?

d) Si tuviera 56 tiras de cinta para ¿Cuántos hexágonos le alcanzaría? ¿De qué manera lo hiciste?

e) Si tuviera 126 tiras de cinta para ¿Cuántos hexágonos le alcanzaría? ¿De qué manera lo hiciste?

Tarea individual: Tarea. *Diseño con palillos.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013).

Unos artesanos están elaborando lo que sería su nuevo diseño para sus mochilas. Ellos están utilizando palillos para representarlo, colocando cada palillo como un lado del triángulo, de la siguiente manera:



a) ¿Qué cantidad de palillos se necesitan para realizar el paso 4?

b) ¿Qué cantidad de palillos son necesarios para realizar el paso número 17? ¿qué hiciste para saberlo?

c) ¿Qué cantidad de palillos son necesarios para realizar el paso número 23? ¿qué hiciste para saberlo?

d) Uno de los artesanos utilizó 21 palillos en uno de los pasos que realizó ¿En qué paso crees que lo hizo? Explica tu respuesta.

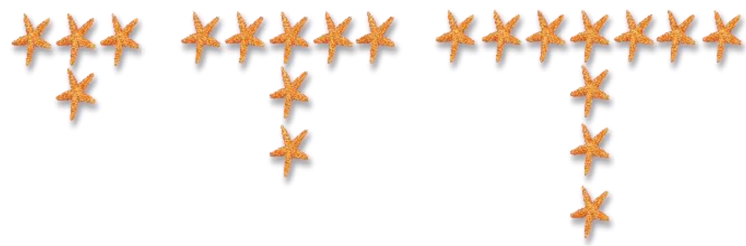
e) Otro de los artesanos utilizó 53 palillos en uno de los pasos que realizó ¿En qué paso lo hizo? Explica tu respuesta.

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Compromiso: Tarea. *Estrellas marinas.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013).

Unos biólogos marinos han descubierto en el fondo del mar un grupo de estrellas marinas organizadas de una manera bastante particular y decidieron hacer un registro fotográfico para ver lo que ocurría durante los próximos días. Los resultados son los siguientes:



Fotografía 1 Fotografía 2 Fotografía 3

a) ¿Cuántas estrellas quedarán registradas en la fotografía del día 7? Explica de qué manera llegaste a la respuesta.

b) ¿Cuántas estrellas quedarán registradas en la fotografía del día 31? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Si en una fotografía aparecen 55 estrellas marinas ¿qué día tomaron la fotografía? ¿Qué hiciste para saberlo?

d) ¿Si en otra fotografía aparecen 121 estrellas marinas ¿qué día tomaron la fotografía? ¿Cómo encontraste la respuesta?

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad para emplear el proceso inverso de las tareas de generalización y las estrategias utilizadas para hacerlo. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 06

Tareas: Fiesta de cumpleaños, la floristería, la urbanización. **Duración:** 120 minutos.

Objetivo de la sesión: Encontrar términos lejanos de la secuencia y expresar verbalmente o por escrito el procedimiento llevado a cabo.

Desempeños esperados

- Hallar el valor de términos lejanos a los presentados en el enunciado de la tarea.
- Expresar el procedimiento seguido para encontrar las representaciones solicitadas.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

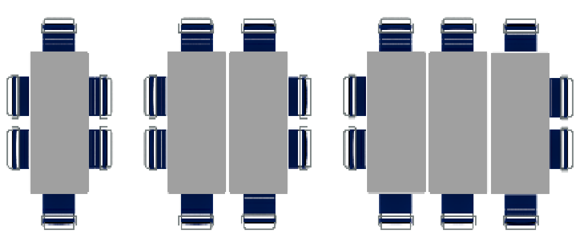
Desarrollo

El docente propone las siguientes dos tareas, una de trabajo grupal que es proyectada en una ppt y otra de trabajo individual para resolver en un formulario en línea. Acompaña el proceso de resolución y ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes, les formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad su pensamiento.

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la quinta sesión, abre el formulario que tiene por nombre "La floristeria". Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

Tarea grupal: Tarea. *Fiesta de cumpleaños.* **Fuente:** Adaptación Zapatera (2018).

Juan ha invitado a su cumpleaños a los compañeros de su clase y sus padres le ayudan a colocar las mesas y las sillas de la siguiente manera.



1 mesa
6 sillas

2 mesas
8 sillas

3 mesas
10 sillas

a) Si en una mesa se pueden colocar 6 sillas, en dos mesas se pueden colocar 8 sillas y en 3 mesas se pueden colocar 10 sillas. Si se necesitan ubicar 24 niños ¿cuántas mesas se necesitan?

b) Los padres de Juan quisieron organizar en una tabla la cantidad de sillas que necesitan, según el número de invitados. Ayúdalos a completar la tabla.

Número de mesas	15	29	44	107
Número de sillas				

Después de la fiesta Juan y sus padres quisieron encontrar un procedimiento matemático que le permita calcular el número de sillas necesarias conociendo el número de mesas, para tenerlo en cuenta en sus próximas reuniones ¿De qué manera lo harías tú?

Tarea individual: Tarea. *La floristería.* **Fuente:** Adaptación Arbona et al. (2018).

En la floristería Dalia están promocionando un nuevo arreglo con girasoles, el cual se puede adquirir en diferentes tamaños. En la siguiente figura, se muestran los tres primeros de ellos.

Tamaño 1 Tamaño 2 Tamaño 3

a) El arreglo del tamaño 1 tiene 8 girasoles, el arreglo de tamaño 2 tiene 12 girasoles y el arreglo floral del tamaño 3 tiene 16 girasoles. Si un arreglo tiene 44 girasoles, ¿a qué tamaño corresponde? Explica cómo encontraste tu respuesta.

b) Los dueños de la floristería quisieron organizar en una tabla la cantidad de girasoles que necesitan para hacer arreglos grandes, ayúdalos a continuarla. Explica cómo encontraste las respuestas.

Tamaño	12	23	35	110
Cantidad de girasoles				

Después de este lanzamiento del arreglo floral, a la floristería Dalia le han aumentado los pedidos y a raíz de eso están buscando un procedimiento matemático que les permita averiguar el número de girasoles necesarios para realizar un arreglo de cualquier tamaño. Ayúdalos a encontrarlo y explícales cómo lo harías tú.

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Compromiso: Tarea. *La urbanización.* **Fuente:** Arbona et al. (2018)

Marc y su amigo quieren dibujar una urbanización con palillos. La dibujan del siguiente modo.

1 casa 2 casas 3 casas

a) Para dibujar una casa utilizaron 6 palillos, para dibujar dos casas utilizaron 11 palillos y para dibujar 3 casas utilizaron 16 palillos. Si en un dibujo utilizaron 66 palillos ¿Cuántas casas dibujaron? ¿Cómo lo sabes?

b) Marc y su amigo quisieron registrar en una tabla la cantidad de palillos que necesitan conociendo el número de casas. Completa la tabla y explica ¿cómo lo hiciste?

Número de casas	18	27	42	106
Cantidad de palillos				

El amigo de Marc todavía no ha entendido cómo se puede hallar el número de palillos conociendo el número de casas. Por eso Marc está pidiendo que lo ayudes redactando una carta a su amigo en la que le expliques cómo lo debe hacer. Te sugiero que seas bastante claro y escribas todo detallado para que él pueda entenderte.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad argumentativa de los estudiantes para justificar sus respuestas y las estrategias utilizadas para resolver las tareas. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 07

Tareas: Conchas marinas y Jardín. **Duración:** 120 minutos

Objetivo de la sesión: Expresar la regla general del proceso directo y del proceso inverso, mediante la solución de un cuestionario en línea.

Desempeños esperados

- Explica la regla general del proceso directo.
- Explica la regla general del proceso inverso.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión.
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

Desarrollo

El docente propone las siguientes dos tareas, una de trabajo grupal que es proyectada en una ppt y otra de trabajo individual para resolver en un formulario en línea. Acompaña el proceso de resolución y ayuda a los estudiantes a despejar sus inquietudes, les formula preguntas que permitan conocer a mayor profundidad su pensamiento.

Indicaciones: Ingresa a *Google Classroom*, en la sección trabajo en clase busca la sexta sesión, abre el formulario que tiene por nombre "Jardín". Lee atentamente la tarea y responde los interrogantes.

Tarea grupal: Tarea. *Conchas marinas.* **Fuente:** Adaptación Rivera (2013).

Lucía y su familia están construyendo en la orilla de playa una secuencia de figuras utilizando conchas marinas. Observa cómo se ven las tres primeras figuras.

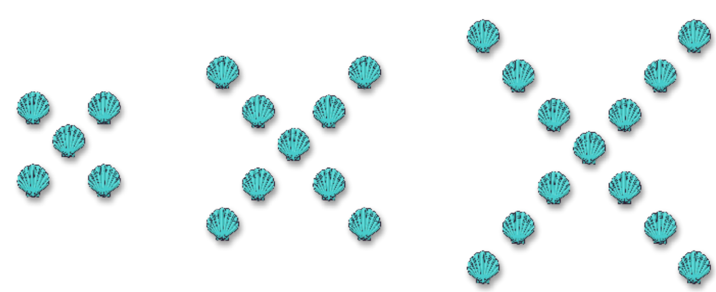


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) ¿Cuántas conchas marinas tendrá la figura número 5?

b) ¿Cuántas conchas marinas se utilizarán en la figura número 14? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Cuántas conchas se necesitan para la figura número 29? ¿Cómo lo sabes?

d) ¿Cuántas conchas tendrá la figura número 92? Explica tu respuesta

e) ¿Cómo le explicas a Lucía y su familia de qué manera puede calcular el número de conchas marinas que necesitan para realizar cualquier figura?

f) La familia ha contado 141 conchas en una de las figuras que hicieron ¿Cuál de ellas fue? ¿Cómo lo sabes?

g) En otra de las figuras contaron 433 conchas marinas ¿Cuál figura fue? Explica tu respuesta.

h) ¿Cómo le explicas a la familia cómo puede calcular el número de la figura conociendo la cantidad de conchas utilizadas?

Tarea individual: Tarea. *Jardín.* **Fuente:** Adaptación Arbona (2016).

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día.

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?

b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 13? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?

d) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 89? ¿Cómo lo sabes?

e) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede calcular el número de macetas que tendrá el jardín cada día?

f) Luis ha contado 39 macetas, ¿sabrías decir qué día es? ¿Cómo lo sabes?

g) ¿Cómo le explicarías a un amigo cómo puede encontrar el número del día conociendo la cantidad de macetas que tiene el jardín?

Cierre

- Resumen de la sesión.
- Evaluación de la sesión.
- Asignación de la tarea para desarrollar en casa.

Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: La evaluación será de carácter formativo y se llevará a cabo durante toda la sesión, haciendo retroalimentación de manera individual o grupal, se valorará la capacidad de encontrar y argumentar la regla general del proceso directo y del proceso inverso. Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las dudas que presenten los estudiantes y si las tareas fueron lo suficientemente claras para ellos, con la finalidad de realizar los ajustes pertinentes en la secuencia de enseñanza.

Sesión 08

Tareas: El reciclador. **Duración:** 40 minutos.

Objetivo de la sesión: Resolver una tarea de generalización de patrones geométricos que involucra el proceso de generalización de manera directa e inversa.

Desempeños esperados

- Continúa la secuencia en términos inmediatos, cercanos y lejanos.

- Invierte el proceso para términos grandes.
- Expresa la regla general del proceso directo y del proceso inverso.

Momentos de la clase

Inicio

- Saludo e introducción.
- Presentación del objetivo de la sesión
- Negociación de las normas de convivencia para la sesión.

Desarrollo

En esta sesión se propone esta única tarea de trabajo individual.

Tarea. *El reciclador.* **Fuente:** Adaptación de Pulgarín (2015).

A Mauricio le gusta mucho reciclar y crear cosas nuevas con los elementos que encuentra. En esta ocasión está realizando un mural compuesto de varias figuras hechas con palitos de bom bom. Cada figura que va haciendo va aumentando su tamaño, así como se muestra a continuación.

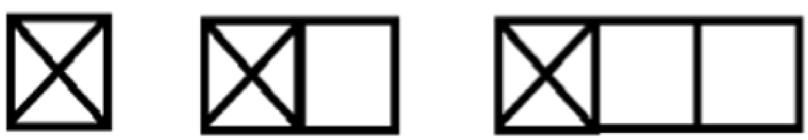


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Describe cómo se vería la figura cuatro y ¿cuántos palitos tendría?

b) ¿Cuántos palitos tendría la figura 5? ¿Cómo lo sabes?

c) ¿Cuántos palitos tendría la figura 6? ¿Cómo obtuviste el resultado?

d) Mira cuidadosamente cada una de las figuras e identifica ¿qué es lo que permanece igual de una figura a otra? ¿por qué lo crees?

e) ¿Qué es lo que cambia de una figura a otra?

f) ¿Cuántos palitos de bom bom necesita Mauricio para realizar la figura número 14? ¿Cómo lo sabes?

g) ¿Cuántos palitos de bom bom son necesarios para realizar la figura número 19? ¿Cómo lo sabes?

h) ¿Cuántos palitos necesita Mauricio para realizar la figura número 23?

i) Mauricio empleó 54 palitos de bom bom para realizar una de las figuras ¿Cuál de ellas fue? ¿Cómo lo sabes?

j) Y si empleó 87 palitos de bom bom ¿Cuál figura realizó? ¿Cómo lo sabes?

k) Mauricio quiere realizar figuras muy grandes, se le ha ocurrido realizar la figura número 115. ¿Cuántos palitos necesita?

l) También quiere realizar la figura número 160. ¿Cuántos palitos necesita?

m) Finalmente él quiere hallar un procedimiento que le permita calcular la cantidad de palillos que necesita para realizar cualquier figura. ¿Cómo lo harías tú? Escríbele un mensaje donde le expliques qué debe hacer.

n) También quiere encontrar un procedimiento matemático que le permita encontrar el número de la figura que puede hacer, sabiendo la cantidad de palillos con los que dispone. ¿Tú cómo lo harías? Escríbele un mensaje donde le expliques tu procedimiento.

Cierre

Se realiza la retroalimentación de la tarea y se solicitan las opiniones de los estudiantes en cuanto a la implementación de la secuencia.

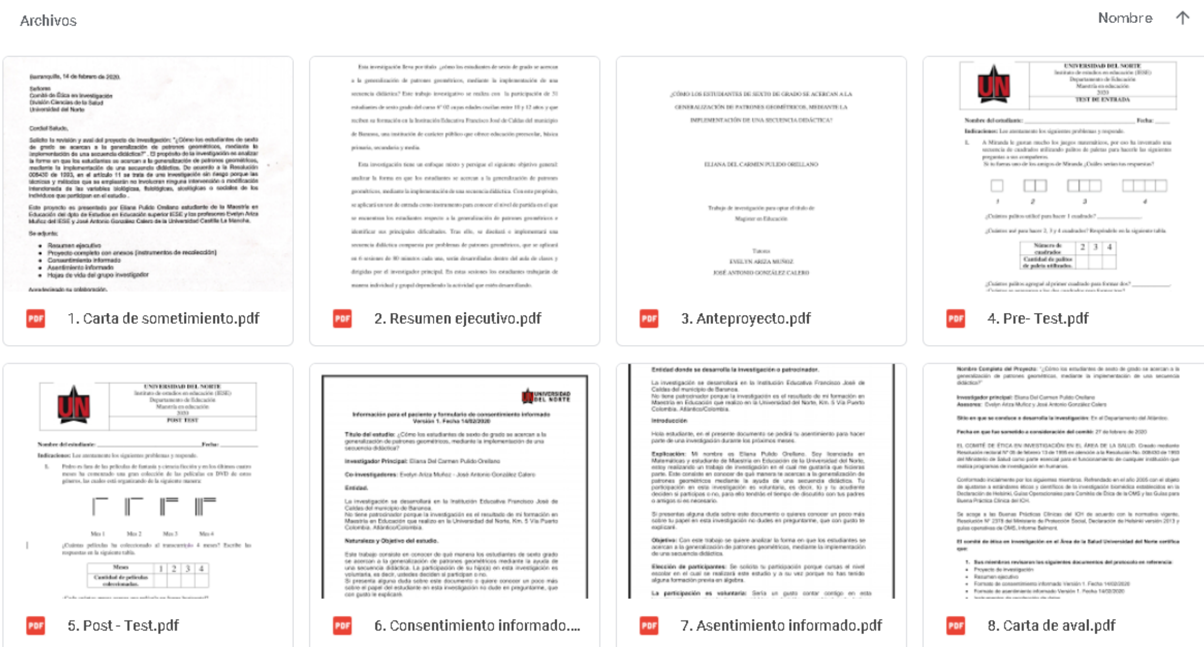
Recursos: Dispositivo con conexión a internet, cuaderno de apuntes, lápiz, borrador y sacapuntas.

Evaluación: Para la evaluación de la sesión se tendrán en cuenta las opiniones de los estudiantes respecto al proceso de aplicación de la secuencia de enseñanza y si existen recomendaciones o sugerencias. En cuanto a los estudiantes se valorará la capacidad para responder cada uno de los interrogantes, estrategias empleadas y capacidad argumentativa para justificar las respuestas.

Anexo B. Comité de Ética

Link a carpeta: https://drive.google.com/drive/folders/1gwB7l-B8k4gfEnaDzObC-vzgtppUMVvJ?usp=sharing

Código QR:


Archivos
Nombre
1. Carta de sometimiento.pdf
2. Resumen ejecutivo.pdf
3. Anteproyecto.pdf
4. Pre- Test.pdf
5. Post - Test.pdf
6. Consentimiento informado....
7. Asentimiento informado.pdf
8. Carta de aval.pdf

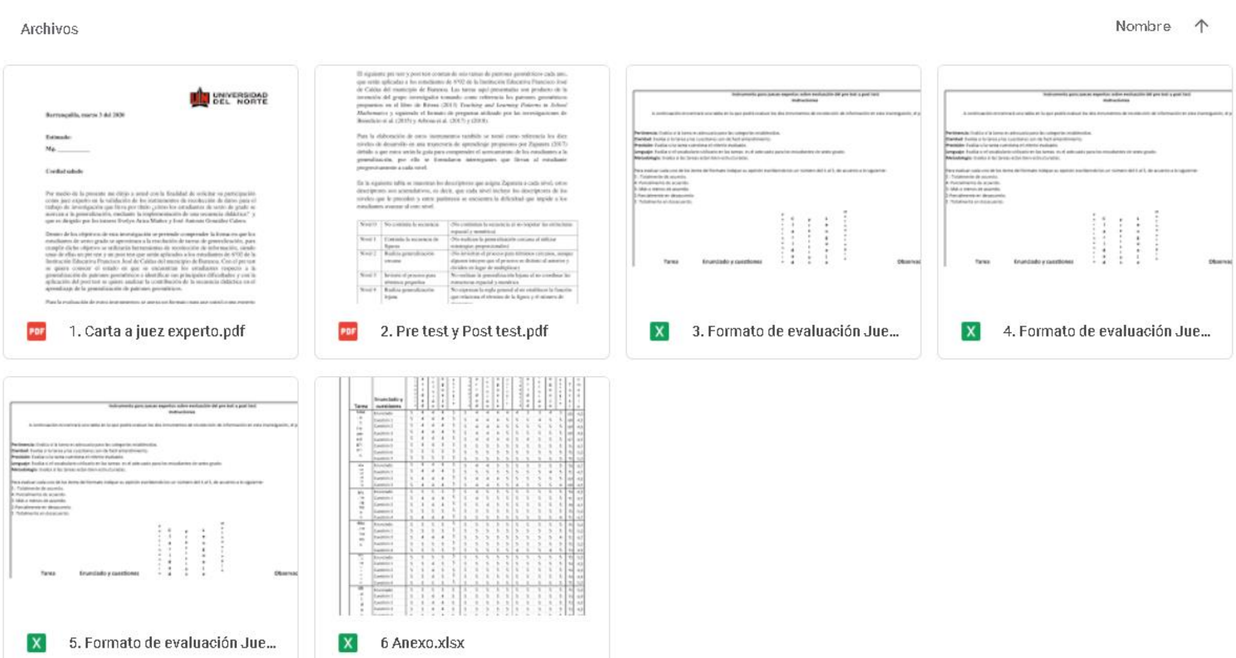
Anexo C. Jueces Expertos

Link a carpeta:

https://drive.google.com/drive/folders/1kDEZozChLcDHeLtMuuwrLquPhrPCEWJs?usp=sharin

g

Código QR:



Anexo D. Prueba Piloto

Link a carpeta:

https://drive.google.com/drive/folders/1m4F5k0XF_TpUqGoi45JX4z2JUSo0zWQb?usp=sharing

Código QR:

Anexo E. Recursos

Link a carpeta: https://drive.google.com/drive/folders/1-4mbvNwPaSoWS32N7PdFTNCmoc4YlKSW?usp=sharing

Código QR: