UNIDAD DIDÁCTICA DE TEORÍA DE GRUPOS EN EDUCACIÓN MEDIA

RICHARD SEBASTIAN JARAMILLO QUINTERO

KELLY VANESSA PEÑA RODRIGUEZ

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

PEREIRA

2020

UNIDAD DIDÁCTICA DE TEORÍA DE GRUPOS EN EDUCACIÓN MEDIA

RICHARD SEBASTIAN JARAMILLO QUINTERO

KELLY VANESSA PEÑA RODRIGUEZ

ANTEPROYECTO

DIRIGIDO POR:

JULIÁN GUZMÁN BAENA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA

PEREIRA

2020

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El proyecto de investigación tiene como propósito exponer una unidad didáctica que permita orientar a los docentes de matemáticas en el componente académico sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de alumnos que se encuentran en la educación media, con el fin de formar las competencias pertinentes basados en los principales fundamentos de la teoría de grupos.

La característica principal de esta unidad didáctica es que se basa en los tres elementos que componen una situación de aprendizaje, que según Zapata (2008), son: “los resultados de aprendizaje o el contenido (qué se aprende), los procesos (cómo se aprende) y las condiciones de aprendizaje (lo que ha de cumplir una actividad o una situación para que el aprendizaje se produzca).”

La investigación que se realizó para formalizar el instrumento de trabajo que permitiera formar las bases sobre teoría de grupos, parte del interés por acercar a los estudiantes de la educación media, es decir de los grados décimo y undécimo, al álgebra moderna y sus aplicaciones, lo cual se obtiene por medio de la profundización en las definiciones y propiedades del álgebra elemental y abstracta.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Cuando se analizan los currículos de las diferentes instituciones con respecto a su componente matemático se debe reconocer que, en los últimos años la educación ha logrado una cercanía entre los conceptos y la práctica, es decir, los conceptos abstractos y que requieren de mayor esfuerzo para su entendimiento, se llevan a un contexto donde el estudiante puede vincular ese saber específico en su vida cotidiana o sirve de referencia en el mundo laboral. Pero, si bien se reconoce ese esfuerzo y esa transición aún se requiere de mucha transversalización y aplicabilidad en otras asignaturas o en su día a día.

En estos currículos es evidente la profundización en el álgebra clásica, que, si bien es importante como fundamento para todo el desarrollo de los pensamientos matemáticos, existen otras alternativas dentro del mundo de las ciencias exactas los cuales podrían enriquecer los conocimientos previos y futuros de los estudiantes, además de lograr la articulación entre varios campos de la misma matemática, dado que, dentro de los currículos solo se tocan de forma tangencial y no directa. Unas pequeñas nociones de las teorías de conjuntos, números y grupos son parte de la formación académica de las instituciones, pero en la mayoría de casos no cuentan con el reconocimiento y la relación necesaria con las demás ramas de las matemáticas lo que se convierte en un inconveniente en aras de lograr la integralidad al menos dentro del mismo área de estudio. Como muestra de lo anterior, la mayoría de los estudiantes sólo reconocen dentro de las matemáticas la aritmética, álgebra tradicional, la trigonometría, el cálculo, geometría y estadística.

Gracias a los fundamentos del álgebra tradicional contamos con los recursos tecnológicos y de comprensión de nuestro entorno, pero esta rama de la matemática antigua ha abierto camino a una nueva álgebra, conocida como álgebra moderna, la cual se ha convertido en sustento de diferentes y nuevas teorías en la innovación y avance tecnológico. La utilidad del álgebra moderna ha causado interés en diferentes áreas del saber y ha llevado a que encuentren con fascinación que, dentro de las matemáticas, logran no solo el sustento científico puro, si no que les ha permitido solucionar algunas de sus teorías. Por lo tanto, las instituciones que prestan el servicio de la educación media, que no empiecen a implementar el álgebra moderna como asignatura, continuarán atrasadas frente al entendimiento de los nuevos conocimientos matemáticos y por ende en su aplicabilidad.

JUSTIFICACIÓN

En el proceso educativo, el docente está llamado no solo a generar el espacio propicio para el aprendizaje respecto a la construcción de conocimiento sino a crear las condiciones necesarias para que haya una relación significativa entre el qué, cómo y cuándo se aprende. La unidad didáctica logra la integralidad en los conceptos propios de cada una de las áreas analizadas en la media educativa, llevándolos a un escenario de articulación de saberes adquiridos en varias ramas de las matemáticas. El diseño de las guías se torna en una herramienta útil para el estudiante y el docente debido a que están planteadas de tal manera que se parte siempre de lo conocido, dando tiempo para la reflexión y acercándolos a los conceptos y definiciones.

Comúnmente, las aplicaciones de los conceptos se orientan cuando el estudiante ha apropiado el proceso, olvidando el origen y raíces de las bases matemáticas, pues estas siempre buscan darles solución a las situaciones problemas; las actividades de la unidad didáctica retoman y estimulan ese pensamiento a priori permitiendo a los estudiantes explorar, plantear y originar soluciones para posteriormente modelarlas en definiciones, axiomas, teoremas o teorías ya estudiadas o demostradas. De forma directa el módulo de aprendizaje da el reconocimiento a diferentes aristas de las matemáticas aún no reconocidas por los estudiantes, puntualmente las estudiadas en teoría de números, conjuntos y en especial en grupos. Por otro lado, la unidad facilita la función que por esencia tiene la educación: explicar los fenómenos que tienen lugar en el entorno, a través de un proceso sistemático donde interactúan el docente, estudiante, medio y saber.

Los conocimientos y la innovación tecnológica avanzan siendo sujeto de una necesidad de afianzar conceptos ya existentes y de nuevas consideraciones, de ahí la evolución de teorías y aplicaciones de estas; la unidad didáctica incentiva esa transformación en los currículos con propósito de acercarnos a esa nuevas alternativas que la ciencia plantea, evitando el rezago con temáticas que si bien son relevantes, se pueden complementar y en consecuencia el proceso de enseñanza y aprendizaje logra ser mucho más significativo, competitivo y eficiente.

OBJETIVO GENERAL

Integrar conceptos de teoría de grupos con la estructura curricular establecida en el área de matemáticas, mediante una unidad didáctica orientada a la educación media.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar, con base en los lineamientos curriculares, algunos contenidos del área de matemáticas relacionados con teorías de conjuntos, números y cálculo.
2. Diseñar una unidad didáctica que integre los conocimientos básicos de la teoría de grupos con el álgebra elemental.
3. Aplicar y evaluar la unidad didáctica en un curso de educación media.

MARCO REFERENCIAL

Marco histórico

El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia o se centra en las estructuras, cantidades y relaciones. Este marco de estudio posibilita la solución sistemática de ecuaciones en diferentes áreas, por lo cual el álgebra se compone de múltiples ciencias: El álgebra lineal, multilineal, homológica, conmutativa, diferencial, booleana, vectorial, elemental y moderna.

El álgebra elemental puede describir una generalización bajo leyes matemáticas de las operaciones con números, cumpliendo con las propiedades que poseen los procesos aritméticos. Su estudio en la educación media da solución a situaciones problema, pero, además permite la ampliación de estas soluciones a otros cuestionamientos posibilitando nuevas relaciones. Las ecuaciones de análisis algebraico surgen en general de una situación problema, que según Mesa (1998) se define así: “Una situación problema es un espacio de interrogantes frente a los cuales el sujeto está convocado a responder. En el campo de las matemáticas, una situación problema se interpreta como un espacio pedagógico que posibilita tanto la conceptualización como la simbolización y la aplicación comprensiva de algoritmos para plantear y resolver problemas de tipo matemático.”

Estas situaciones juegan un papel relevante en el desarrollo de las diferentes teorías, teoremas, leyes y fundamentos matemáticos dado que estas ciencias surgen para dar respuesta o solución a estas necesidades.

El álgebra data de hace 4.000 años donde los babilonios y egipcios emplearon métodos para la resolución de situaciones concretas. Antes del álgebra en estas culturas fue de gran interés las mediciones, los cálculos geométricos y el desarrollo de los distintos sistemas de numeración que empleaban enfoques y nociones basadas en la aritmética, lo cual permitió posteriormente el surgimiento de otras áreas de conocimiento matemático.

Con un marco aritmético de referencia los babilonios dieron un paso hacia el formalismo matemático creando procesos y soluciones generales para múltiples problemas. Sus avances más significativos se basan en emplear símbolos en lugar de números y con estas variables establecer ecuaciones lineales, cuadráticas e indeterminadas con sus respectivas soluciones dentro del conjunto de los números positivos. Los babilonios lograron articular, extender y clasificar los fundamentos algebraicos en 4 categorías que según Ruiz, son:

- Álgebra simbólica, en el que se manejan símbolos tanto para la incógnita como para las operaciones y relaciones.
- Álgebra sincopada[1], se comenzaron a utilizar símbolos para representar la incógnita y las operaciones elementales. representada por la Aritmética de Diofanto (s. III d.C.) en que los tratados siguen escritos en idioma vernáculo, pero con algunos términos técnicos escritos mediante abreviaturas.
- Álgebra retórica, en el que todas las expresiones se escribían utilizando la lengua común. Son los textos de Euclides, Apolonio y Arquímedes, entre otros.
- Álgebra diagramática o álgebra geométrica cuyo origen se remonta, como se verá más adelante, a la época de Babilonia (entre 2000 y 1600 a. C) y fue dada a conocer por Euclides en el libro II de los Elementos. Se opera con diagramas para obtener resolución de ecuaciones, aunque en el caso de Mesopotamia sólo ha

[1]El álgebra sincopada precede al álgebra simbólica, ya que en esta etapa todavía se usaban algunas expresiones o abreviaturas, por ejemplo, los matemáticos italianos del renacimiento usaban la expresión “la cossa” para referirse a una incógnita.

llegado ha perdurado el texto retórico. Los escritos se redactan en lenguaje ordinario.

Marco conceptual

Para el diseño de la unidad didáctica se tuvo como fundamento matemático apartes registrados en algunos textos como: Topología de James R. Munkres, Teoría y problemas de topología general de Seymour Lipschutz, Introducción a la teoría números: ejemplos y algoritmos de Walter Mora, Análisis matemático de Tom Apóstol y, Grupos I: semigrupos y monoides de Carlos Ruiz de Velasco y Bellas; además de revistas registradas en la internet respecto a la temática algebraica a desarrollar.

1. **Conjuntos:** Se toman las siguientes definiciones:

El concepto de conjunto aparece en todas las ramas de la matemática. Intuitivamente, un conjunto es una lista o colección de objetos bien definidos. Los conjuntos se representan por letras mayúsculas A, B, X, Y, ... Los objetos comprendidos en un conjunto son los elementos del conjunto y se representan por letras minúsculas a, b, x, y, … La proposición “p es un elemento de A” o, equivalentemente “p pertenece a A” se expresa:

$$p \in A$$

La negación de $p \in A$ se escribe $p \notin A$.

Son los dos modos de especificar un conjunto particular. Un modo consiste en la numeración efectiva, cuando ello es posible, de sus elementos. Por ejemplo:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Denota el conjunto A cuyos elementos son las letras a, e, i, o y u. Obsérvese que los elementos están separados por comas y encerrados en llaves $\{\}$. El otro modo consiste en definir las propiedades que caracterizan los elementos del conjunto. Por ejemplo:

$$B = \{x: x \; es \; un \; entero, x \; 0\}$$

que se lee “B es el conjunto de las x tales que x es un entero y x es mayor que cero”, representa el conjunto B cuyos elementos son enteros positivos, se utiliza una letra, generalmente la x, para simbolizar un elemento arbitrario del conjunto; los dos puntos significan “tal que” y la coma significa “y”.

Habitualmente utilizaremos las letras mayúsculas A, B, … para representar conjuntos, y las letras minúsculas para representar objetos o elementos pertenecientes a estos conjuntos. Si un objeto *a* pertenece a un conjunto A, expresamos este hecho con la notación.

$$a \in A$$

Si *a* no pertenece a A, expresaremos esta situación escribiendo

$$a \notin A$$

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es finito cuando consta de *n* elementos diferentes, considerando a *n* como un entero positivo; en caso contrario, es un conjunto infinito. En particular, cuando un conjunto consta de un solo elemento recibe el nombre de *conjunto unitario*.

El símbolo de igualdad “=” se utiliza a lo largo de todo el libro para significar *identidad lógica*. De modo que cuando escribamos a=b estaremos queriendo decir que “a” y “b” son símbolos para el mismo objeto. Análogamente, la ecuación A=B establece que “A” y “B” son símbolos distintos para el mismo conjunto; esto es, A y B están formado precisamente por los mismos elementos.

Si a y b son objetos distintos $a \neq b$; si A y B son conjuntos diferentes, escribiremos A≠B.

Dos conjuntos A y B son iguales, lo que denota A=B, si constan de los mismos elementos, esto es, si todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A. La negación de A=B se escribe A≠B.

Diremos que A es un subconjunto de B si cada elemento de A es también un elemento de B y expresamos este hecho escribiendo

$$A \subset B$$

Nada en esta definición impide que A sea diferente de B; de hecho, si A=B, es cierto que A⊂B y que B⊂A. Si A⊂B pero A es distinto de B, diremos que A es un *subconjunto propio* de B y escribiremos $A \subseteq B$

Las relaciones ⊂ y ⊆ se denominan inclusión e inclusión propia, respectivamente. Si A⊂B, también se escribe B⊂A, y se lee "B contiene a A"

Se cumple que dos conjuntos A y B son iguales sii A⊂B y B⊂A.

En toda la aplicación de la teoría de los conjuntos que se consideran son subconjuntos de un conjunto determinado. Este conjunto se llama conjunto universal o universo del discurso y se denota por U. Conviene además introducir el concepto de conjunto vacío, esto es un conjunto que no contiene elementos. Este conjunto se representa por Ø, se considera finito y es un subconjunto de cualquier otro conjunto. Así $\emptyset \subset A \subset U$.

El conjunto vacío, tal como lo indica su nombre, es el conjunto "que no tiene elementos". Algunos estudiantes pueden sorprenderse con la noción de "conjunto vacío". El problema es similar al que surgió cuando se necesitó introducir el número 0. Es simplemente una cuestión formal que simplifica mucho el trabajo en matemáticas… El conjunto vacío es solamente una convención y las matemáticas seguirían funcionando igual de bien sin la introducción de este concepto. Pero es un convenio adecuado, ya que nos proporciona una muy buena herramienta para trabajar y previene situaciones difíciles a la hora de demostrar determinados resultados.

1.1. Operaciones con conjuntos:

1.1.1. Unión:

Dados dos conjuntos A y b, se puede construir un nuevo conjunto formado por los elementos de A junto con los elementos de B. Este conjunto se llama *la unión* de A y B y se expresa por $A \cup B$. Formalmente. se define:

$$A \cup B = \{x|\ x \in A\ o\ x \in B\}$$

La palabra “o”, en el español ordinario, es ambigua. El enunciado “P o Q” significa algunas veces “P o Q o ambos”, y otras veces quiere decir “P o Q pero no ambos”. En matemáticas no podemos admitir esa ambigüedad. Debemos decidirnos por un significado u otro, pues de lo contrario reinaría la confusión. Los matemáticos han decidido utilizar la palabra “o” con el primer significado, de forma que la frase “P o Q” significa “P o Q o ambos simultáneamente”. Si queremos indicar que “P o Q pero no ambos” entonces debemos incluir explícitamente la frase “pero no ambos”.

Con este significado, la ecuación $A \cup B$ no tiene ninguna ambigüedad; establece que $A \cup B$está formado por los elementos x que pertenecen ya a A, ya a B, ya a ambos simultáneamente.

La unión de dos conjuntos A y B, que se denota $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A o a B, es decir:

$$A \cup B = \{x:\ x \in A\ o\ x \in B\}$$

Aquí se utiliza “o” con el significado de “y/o”.

1.1.2. Intersección:

La intersección entre dos conjuntos A y B, se denota $A \cap B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B, es decir:

$$A \cap B = \{x\colon\ x \in A\ \ y\ \ x \in B\}$$

Si $A\ \cap B$= Ø, es decir, si A y B no tienen elementos comunes, se dice que A y B son disyuntos.

Dados dos conjuntos A y B, otra forma de construir un nuevo conjunto consiste en tomar la parte común de A y B. Este conjunto se llama *conjunto intersección* de A y B y se representa por $A\ \cap B$, Formalmente, se define:

$$A\ \cap\ B = \{x|\ x \in A\ \ y\ \ x \in B\}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los conjuntos no tienen elementos en común? ¿qué significa entonces el símbolo $A\ \cap B$? Para hacerle frente a esta situación, se tiene encuenta la definición especial de *conjunto vacío.* Utilizando esta definición, expresaremos el hecho de que A y B no tengan ningún elemento en común escribiendo:

$$A\ \cap B = \varnothing.$$

1.1.3. Complemento relativo:

El complemento relativo de un conjunto B respecto a un conjunto A p, simplemente la diferencia de A y B, se denota A\B, es el conjunto de los elementos que pertenecen a A pero que no pertenecen a B. Eso es:

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A, x \notin B\}$$

obsérvese que $A \setminus B$ y B son disjuntos, es decir, $(A \setminus B) \cap\ B = \emptyset$.

Existe otra operación de los conjuntos que, en ocasiones resulta muy útil. se trata de la *diferencia* de dos conjuntos, que denotamos A-B, y que se define como el conjunto formado por aquellos elementos de A que no pertenecen a B. Formalmente,

$$A - B = \{x |\ x \in A\ y\ x \notin B\}$$

En ocasiones, también se denomina *complemento* de B relativo a A, o el complemento de B en A.

1.1.4. Complemento absoluto:

El complemento absoluto o, simplemente, complemento de un conjunto A, que se denota como A^ces el conjunto de los elementos que no pertenecen a A, es decir,

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

En otras palabras A^ces la diferencia del conjunto universal U y el conjunto A.

2. Divisibilidad:

Los números enteros son el ingrediente principal en teoría de números. En esta sección, establecemos brevemente la notación y el significado de algunos símbolos que se relacionan con los enteros y que serán de amplio uso en el texto. Además, se establecen algunos principios que se usan ampliamente en los argumentos. En lo que sigue, usaremos la siguiente notación:

a.) $\mathbb{N}= \{0, 1, 2, ...\}$ y $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$.

b.) $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, ...\} = \mathbb{N}^+$

c.) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

2.1. Principio del Buen Orden:

Todo conjunto no vacío de números naturales contiene un elemento mínimo. En particular, si *SZ* y si *S* tiene al menos un elemento positivo, entonces *S* tiene un entero positivo mínimo.

2.2. Principio del palomar:

Si *k* es un entero positivo y *k* + 1 o más objetos son asignados a *k* cajas, entonces hay al menos alguna caja a la que se le asignaron dos o más objetos.

2.3. Principio de Inclusión-Exclusión:

Sean *A* y *B* dos conjuntos finitos. Entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Históricamente, el primer ejemplo que se conoce en el que se usó inducción matemática aparece en el libro "Arithmeticorum Libri Duo" de Francesco Maurolico (1494-1575). En este libro, entre otras cosas, Maurolico presenta gran variedad de propiedades de los enteros y las pruebas de estas propiedades. Para las demostraciones, él planteó el método de inducción matemática. La primera vez que se usa el método, es para probar que la suma de los primeros *n* enteros impares es *n*2. El nombre "inducción matemática", lo usó por primera vez el matemático inglés John Wallis.

Sean *a, b* enteros con $b \neq 0$. Decimos que *b* divide a *a* si existe un entero *c* tal que *a* = *bc*. Si *b divide a a escribimos b*|*a*

Sean a, b, d, p, q ∈ Z.

a.) Si d|a y d|b entonces d| (ax + by) para cualquier x, y ∈ ℤ

b.) Si d| (p + q) y d|p ⇒ d|q.

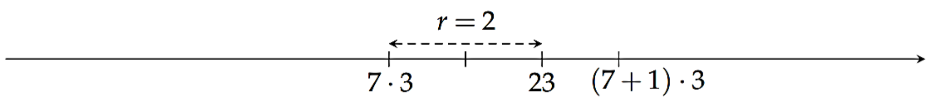
c.) Si a, b ∈ Z^+ y b|a ⇒$a \geq b$

d.) Si a|b, entonces a|mb, con m ∈ ℤ.

e.) Si a, b ∈ ℤ, a|b y b|a ⇒ |a| = |b|

2.4. Algoritmo de la división:

Si la división no es exacta, no todo está perdido: Como hacíamos en la escuela, la división de *a* por b *la* podemos expresar como un cociente y un resto. Por ejemplo, la división de 23 por 3 es 7 y queda un resto r=2, es decir, 23 = 7*3 + 2. Gráficamente,



Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$. Existen $q, r \in$ Z únicos tales que

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < |b|$$

2.5. Congruencias módulo m:

Recordemos que estábamos usando ‘ $r = a$ mod m ’ para indicar el resto (en el teorema de la di- al dividir por m, es decir si a mod m = b mod m. Como a = qm + a mod m *y* b = qm + b mod m visión) de dividir a *por* m. Dos números *son congruentes módulo m* si dejan el mismo residuo entonces $m \mid (b - a)$.

Todos los números son congruentes módulo m = 1. Si usamos m = 2, los pares son congruentes con los pares (resto 0 módulo 2) y los impares con los impares (resto 1 módulo 2). En general, la idea es ‘agrupar’ los números según el residuo que dejan al dividir por m. Estos subconjuntos constituyen una partición de Z de tal manera que podemos trabajar no con todo Z sino con un grupo de representantes.

Sea m $\in \mathbb{Z}$, m ≥ 1. Decimos que a es congruente con b módulo m si $m \mid (b - a)$. Escribimos

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Teorema: Si $a \equiv b \pmod{m}$ se tiene que:

(i) $b - a \equiv 0 \pmod{m}$

(ii) $a = mk + b$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

(iii) a mod m = b mod m

Un cuadrado mágico es un arreglo de $n \times n$ números en el que la suma de las entradas de cada fila o columna siempre es la misma. Por ejemplo, consideremos el cuadrado mágico 3×3.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$, tanto filas como columnas suman 12.

En la actualidad hay varios métodos para construir cuadrados mágicos. En 1693, se publicó el libro Una nueva relación histórica del reino de Siam, escrito por Simon De La Loubère, donde describe un método para construir cuadrados mágicos para cualquier n impar, el método es llamado el "Método Siamés". En 1929 D.N. Lehmer investigó, por medio de congruencias, una generalización de este método. El resultado es una manera sencilla de colocar los números $0, 1, \dots, n^2 - 1$ en un arreglo $n \times n$ de tal manera que sea un cuadrado mágico. Este método, llamado método del "paso uniforme", calcula la entrada (i, j), usando congruencias, en la que se debe colocar cada uno de los números $k = 0, 1, \dots, n^2 - 1$ para que el arreglo resulte "mágico".

La relación “congruente módulo m”, denotada por brevedad con “$\equiv_m$”, se define así:

$$a \equiv b \ (mod\ m) \ \Leftrightarrow m \mid (b - a)$$

La relación “$\equiv_m$” es una relación de equivalencia, es decir, particiona $\mathbb{Z}$ en clases (de equivalencia.) El *conjunto cociente* “$\mathbb{Z}/\equiv_m$”, es el conjunto de clases de equivalencia.

También se usa la notación $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_m$ o $\mathbb{Z}_m$. Denotamos con a la clase cuyo representante es a, es decir,

$$\text{En } \mathbb{Z}_m,\ a = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \ (mod\ m)\}. \text{ En particular, } 0 = m.$$

Si $a \in Z$ y $a = mk + r$ con $0 \leq r < m$, entonces $a \equiv b \ (mod\ m)$. Entonces es natural tomar como representante de clase los residuos positivos más pequeños, es decir $a = a \ mod\ m$ (recordemos que $a \ mod\ m$ denota el más pequeño residuo ≥ 0 de dividir a por m).

2.6. Suma y producto en Z_m

Ahora nos interesa ver Z_m desde el punto de vista de su estructura algebraica. Esto no solo nos permite usar un lenguaje común, sino que también nos permite usar resultados generales de la teoría de grupos, por ejemplo.

Podemos definir operaciones de suma y producto en Z_m de la siguiente manera:

a + b= (a+b) mod m i.e. a + b es el resto de dividir $a + b$ por m

a * b= (a*b) mod m i.e. a * b es el resto de dividir $a * b$ por m

Teorema: e*n* Z_m,

***a*.)** a es una unidad si y solo si mcd (a, m) = 1;

b.) a es divisor de cero si y solo si 1 < mcd (a, m) < m.

3. Par ordenado- relaciones y funciones:

3.1. Par ordenado:

Dados dos conjuntos A y B, se llama *conjunto producto de* A y B, y se presentar por AxB, al conjunto de todos los pares ordenados <a, b>, donde $a \in A\ y\ b \in B$, es decir,

$$A \times B = \{< a, b > : a \in A, b \in B\}$$

El producto de un conjunto con sí mismo, digamos A×A, se denota A^2.

La noción de “par ordenado”, <a, b>, se define rigurosamente por

<a, b> = {|a|, |a, b|}

A partir de esta definición, se puede probar la propiedad de “orden”.

<a, b>= <c, d> implica a=c y b=d

Existe todavía otra forma de construir nuevos conjuntos a partir de unos dados; lleva implícita la noción de un “par ordenado” de objetos. Cuando estudiamos en geometría analítica, de lo primero que nos convencemos es de que tenemos que elegir un eje de x y un eje de y en el plano. Así, cada punto del plano se corresponde de manera única con un par ordenado (x, y) de números reales (de hecho, cuando se estudia geometría de manera más profunda, el plano se define como el conjunto de pares ordenados de los números reales).

La noción de par ordenado se puede generalizar al caso de los conjuntos. Dados dos conjuntos A y B, definimos su producto cartesiano A×B como el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) para los cuales a es un elemento de A y b es un elemento de B. Formalmente,

$$A \times B = \{(a, b) |\ a \in A\ y\ \ b \in B\}$$

Esta definición supone que el conjunto de “par ordenado” ya es conocido. Puede considerarse aquí de modo intuitivo, como la noción de “conjunto”, o puede expresarse como una definición en términos de operaciones de conjuntos ya introducidas. Esta última sería la ecuación.

$$(a, b) = \{ |a|, |a, b| \}$$

Se define el par ordenado (a, b) como una colección de conjuntos. Si a ≠ b, esta definición nos dice que (a, b) es una colección de los conjuntos, uno de los cuales es un conjunto unipuntual y el otro es un conjunto de dos elementos. La *primera coordenada* del par ordenado se define como el único elemento que pertenece a ambos conjuntos, y la *segunda coordenada* como el elemento que pertenece sólo a un conjunto {a}, ya que {a, a} ={a} en este caso. Su primera y segunda coordenada son ambas iguales y coinciden con el elemento de este único conjunto.

En honor a la verdad, hay que decir que la mayoría de los matemáticos piensan en un par ordenado como un concepto primitivo más bien que no como una colección de conjuntos.

3.2. Relación:

Una relación binaria (o relación) R entre un conjunto A y un conjunto B asocia a cada par $< a, b >$ de A×B sólo una de las proposiciones siguientes:

(i) “a está relacionado con b”, lo que se expresa por $a \; R \; b$.

(ii) “a no está relacionado con b”, lo que se expresa por $a \not R \; b$.

Una relación entre un conjunto A y el mismo conjunto A es una relación en A.

Una Relación R entre A y B es un subconjunto de A×B. El *dominio* de una relación R entre A y B es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados de R y el dominio de las *imágenes* es el conjunto de los segundos elementos, es decir:

$$\text{Dominio de } R = \{a: < a, b > \in R\}$$

$$\text{Dominio de las imágenes de } R = \{b: < a, b > \in R\}$$

La inversa de R, denotada R^{-1}, es la relación entre B y A definida por:

$$R^{-1} = \{< b, a >:< a, b > \in R\}$$

Una relación en un conjunto A es un subconjunto C del producto cartesiano A×A.

Si C es una relación en A, usamos la notación ${}_xC_y$ para expresar lo mismo que (x, y) ∈ C. Se leerá "x está en la relación C con y" una relación de equivalencias en un conjunto A es una relación C que verifica las siguientes tres propiedades:

(1) (Reflexividad) ${}_xC_x$ para todo x∈ A.

(2) (Simetría) si ${}_xC_y$, entonces ${}_yC_x$.

(3) (Transitividad) si ${}_xC_y$ e ${}_yC_z$, entonces ${}_xC_z$.

3.3. Función:

Si a cada elemento de un conjunto A se le hace corresponder un único elemento de un conjunto B, se dice que el conjunto *f* de tales asociaciones es una *función* (o aplicación) de A en B y se denota por:

$$f: A \to B \text{ o } A \xrightarrow{f} B$$

El único elemento de B que, por la función *f*, le corresponde a $a \in A$ se representa por *f(a)* y se llama valor de *f* en a o, también, *imagen* de a por *f*, el *codominio* es B, A toda función, $f: A \to B$ le corresponde en A×B una relación definida por:

$$\{< a, f(a) >: a \in A\}$$

Este es el *grafo* de f. El *dominio de imágenes* o *dominio de valores de f,* denotado por $f[A]$, es el conjunto de las imágenes, es decir, $f[A]=|f(a): a \in A|$

Se define que dos funciones $f: A \to B$ y $g: A \to B$ son iguales, y se expresa $f: =g$, sii $f(a)=g(a)$ para todo $a \in A$, i.e sii tienen el mismo grafo. En consecuencia, no se hace distinción entre una función y su grafo. Un subconjunto f de $A \times B$, i.e. una relación entre A y b, es una función sii posee la siguiente propiedad:

[F] Todo $a \in A$ aparece como primer elemento de sólo un par ordenado $< a, b >$ de f.

La negación de $f=g$ se escribe $f \neq g$ y corresponde a la proposición: $\exists a \in A$ tal que $f(a) \neq g(a)$.

Una *regla de asignación* es un subconjunto r del conjunto cartesiano $C \times D$ de dos conjuntos, con la propiedad de que cada elemento de C aparece como la primea coordenada de a a lo sumo un par ordenado de r.

Así, un conjunto r de $C \times D$ es una regla de asignación si:

$$[(c, d) \in r \; y \; (c, d') \in r] \Rightarrow [d = d']$$

Una *función f* es una regla de asignación r, junto con un conjunto B que contiene al conjunto imagen de r. El *dominio* A de la regla r también se llama el *dominio* de la función f, el conjunto imagen de r también se llama el *conjunto imagen* de f, y el conjunto B se llama el *rango* de f.

Si f es una función con dominio A y rango B, expresamos este hecho escribiendo:

$$f: A \to B$$

Que se lee "f es una función de A a B", o simplemente "f aplica A en B". Algunas veces se visualiza f como una transformación geométrica que físicamente lleva los puntos de A en puntos de B.

Si $f:A\to B$ y si a es un elemento de A, representado por $f(a)$ el único elemento de B que la regla que determina f asigna a a; se llama el *valor de f* en a, o a veces la *imagen* de a por f. Formalmente, si r es la regla de la función f, entonces $f(a)$ representa lo único elemento de B tal que $(a,f(a)) \in r$.

3.3.1. Funciones inyectivas, sobreyectivas, biyectivas y compuestas:

Una función $f: A\to B$ es *inyectiva* (o uno-a-uno) si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, es decir, si

$$f(a)=f(a') \Rightarrow a=a'$$

Una función $f: A\to B$ es *sobreyectiva* (o sobre) si todo $b\in B$ es imagen de algún $a\in A$, esto es, si

$$b\in B \Rightarrow \exists a\in A \text{ tal que } f(a)=b.$$

De donde, si f es sobreyectiva, $f[A]=B$.

Si una función es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva, se dice que es biyectiva.

Se dice que una función $f: A\to B$ es *inyectiva* (o uno-a-uno) si para cada par de puntos distintos de A, sus imágenes por f son distintas. Se dice que es *sobreyectiva* (o que f aplica A sobre B) si cada elemento de B es la imagen por la función f de algún elemento de A. Si f es la vez inyectiva y sobreyectiva, se dice que es *biyectiva* (o se llama correspondencia uno-a-uno).

Más formalmente, f es inyectiva si

$$[f(a)=f(a')]\Rightarrow[a=a']$$

y f es sobreyectiva si

$$[b\in B]\Rightarrow[b=f(a) \text{ para al menos un } a\in A]$$

Dadas las funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, definimos la composición $g \circ f$ de f y g como la función $g \circ f: A \to C$ definida por la ecuación $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Formalmente, $g \circ f: A \to C$ es una función cuya regla es

$$\{(a, c) \mid \text{para algún } b \in B,\ f(a)=b \text{ y } g(b)=c\}.$$

4. Grupos

4.1. Operación binaria:

Una *operación binaria interna* en un conjunto X es una aplicación

$$f: X \times X \to X$$

Para abreviar se dirá "operación" en lugar de "operación binaria interna", siempre que no haya riesgo de confusión. Cuando una aplicación f se considere como una operación en X, la imagen $f((x_1, x_2))$ de cada par $(x_1, x_2) \in X \times X$ *se* escribe (según los casos) de alguna de las formas

$$x_1.x_2,\ x_1x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 * x_2,\ x_1 \circ x_2,\ \ldots$$

En las dos primeras se dice que la notación es *multiplicativa* y en la tercera se dice que la notación es aditiva.

Una operación $*$ en un conjunto X *es asociativa* si:

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3, \text{ para todo } x_1, x_2, x_3 \in X$$

Una operación $*$ en un conjunto X *es conmutativa* si

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1, \text{ para todo } x_1, x_2 \in X$$

Cuando se usa notación aditiva, se supone que la operación es conmutativa y que, por tanto,

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1, \text{ para todo } x_1, x_2 \in X.$$

Una operación $*$ en un conjunto X *posee elemento unidad (elemento neutro)* si hay un elemento $e \in X$ que cumpla:

$$x * e = x = e * x, \text{ para todo } x \in X$$

Si la notación es aditiva, se dice *"elemento neutro"* y si es multiplicativa (o, en general, no aditiva) se dice *"elemento unidad"*. Nótese que en la definición se exige que e sea un elemento del conjunto X.

4.2. Semigrupos y monoides:

Un semigrupo es un par S = (S, $*$) formado por un conjunto (no vacío) S y una operación $*$ en S asociativa. Un semigrupo conmutativo o abeliano es un semigrupo en el que la operación es conmutativa.

Un monoide es un semigrupo M = (M, $*$) con elemento unidad. Explícitamente: Un monoide es un par M = (M,) donde M es un conjunto y es una operación en M tales que:

1. $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo a, b, c $\in$ M.
2. Hay un elemento e $\in$ M tal que $a * e = a = e * a$ para todo a $\in$ M.

Un monoide M = (M, $*$) en el que la operación es conmutativa:

$$a * b = b * a, \text{ para todo } a, b \in M,$$

Se denomina monoide conmutativo o abeliano.

Un elemento u de un monoide $M = (M, *)$ *es* una unidad si hay un elemento $v \in$ M tal que:

$$u * v = e = v * u,$$

Donde e es el elemento unidad de M.

Debe ponerse especial atención con el fin de no confundir el elemento unidad, *e*, de un monoide *M* con una unidad de *M*. Dado que en todo monoide *M* se verifica $e * e = e$, el elemento unidad de *M* es una unidad de *M*.

4.3. Grupo:

Un grupo es un par G = (G, ∗) donde G es un conjunto y "∗" es una operación en G :

$$G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

tales que se cumplan las condiciones siguientes (los axiomas de grupo):

1. La operación es asociativa:

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \text{ para todo } a, b, c \in G.$$

2. Hay un elemento $e \in G$ tal que:

$$a * e = a = e * a, \text{ para todo } a \in G.$$

Para cada $a \in G$ hay un elemento $a^j \in G$ tal que:

$$a * a^j = e = a^j * a.$$

Dos elementos a y b de un grupo conmutan si $a * b = b * a$. Un grupo G es conmutativo o abeliano si todo par de elementos de él conmutan. Si el conjunto G es finito, entonces se dice que el grupo G es finito y se denota por $|G|$ el número de elementos de G; en otro caso se dice que el grupo G es infinito y se pone $|G| = \infty$.

En todo grupo se cumplen las siguientes propiedades elementales, derivadas directamente de la definición de grupo:

Sea G = (G, .) un grupo.

1. Si e, e^j son elementos de G tales que $a * e = a = e * a$, para todo $a \in G$, y $a * e^j = a = e^j * a$, para todo $a \in G$, entonces $e^j = e$.

En consecuencia, el elemento e del axioma 2 de la definición de grupo es único; se dice que e es el elemento unidad del grupo G, y se pone, habitualmente, e = 1 si se utiliza notación multiplicativa; [se pone e = 0 si la notación es aditiva, en cuyo caso 0 se denomina el elemento neutro o cero del grupo].

2. Sea a un elemento de G, si a', a'' son elementos de G tales que

$$a*a' = e = a'*a, \text{ y } a*a'' = e = a''*a,$$

Entonces a' = a''. En consecuencia, dado a∈ G, el elemento a' del axioma 3 de la definición de grupo es único; se dice que a' es el elemento inverso de a y se pone, habitualmente, a' = a^{-1} si la notación es multiplicativa; [si la notación usada es aditiva entonces se escribe a' = -a y se dice que -a es el opuesto de a].

4.4.Grupo Abeliano:

(G, ∗) es un grupo abeliano con respecto a la operación si:

1. (G, ∗) es un grupo.
2. (G, ∗) tiene la propiedad conmutativa.

4.5.Homomorfismo:

Sea la función $f: G_1 \to G_2$, donde (G_1, ∗), (G_2,@) son su operación ∗ y @, respectivamente.

f se dice homomorfismo de grupos si se cumple que:

$$\forall a, b \in G_1, f(a * b) = f(a) \ @ \ f(b).$$

4.5.1. Monomorfismo:

Si *f* es inyectiva (uno-a-uno), entonces se dice que *f* es un monomorfismo.

4.5.2. Epimorfismo:

Si f es sobreyectiva, entonces se dice que f es un epimorfismo.

4.5.3. Isomorfismo:

Si f es biyectiva, entonces se dice que f es un isomorfismo.

METODOLOGÍA

En esta sección se describe la metodología que se emplea para diseñar e implementar la unidad didáctica de teoría de grupos en la educación media, tomando como punto de partida el tipo de investigación y estableciendo las diferentes etapas del proceso de aplicación de las unidades didácticas.

Tipo de investigación

La propuesta de generar una unidad didáctica sobre teoría de grupos en la educación media es una investigación aplicada de tipo exploratorio, ya que plantea modificar el contenido que se orienta en el sistema educativo colombiano y es un tema que se ha abordado en pocas ocasiones cuando se formulan investigaciones referentes a los lineamientos curriculares en el sector educativo del territorio nacional.

Enfoque de la investigación

El enfoque de la investigación es de carácter cualitativo, ya que la primera fase de la misma consiste en realizar una prueba diagnóstica sobre los conocimientos que tienen los estudiantes de la Institución Educativa Sur Occidente de Pereira sobre teoría de conjuntos, de números y cálculo. Luego, a partir de los resultados obtenidos se completa el contenido de las guías que conforman la unidad didáctica de teoría de grupos. Es decir que la recolección y el análisis de los datos precede a la elaboración del módulo de aprendizaje.

Técnicas de recolección de información

El primer instrumento es el plan de área de matemáticas facilitado por la Institución Educativa Sur Occidente de Pereira.

El segundo instrumento es la prueba diagnóstica aplicada a los estudiantes del curso, donde se evalúan los conocimientos previos sobre teoría de conjuntos, de números y cálculo, por medio de un documento escrito y cuyas preguntas están relacionadas con el contenido de los planes de área proporcionados por la institución.

El tercer instrumento son las guías de la unidad didáctica que contiene diversas actividades enfocadas en fortalecer y ampliar las definiciones sobre teoría de conjuntos, de números, cálculo y teoría de grupos.

El cuarto instrumento es la observación de los educandos, donde se analiza el componente procedimental y actitudinal de aprendizaje durante el trabajo de la unidad didáctica. Este instrumento se divide en dos partes según la interacción con los estudiantes: participante, ya que uno de los investigadores se comunica con ellos; no participante, ya que el otro investigador registra el comportamiento de los estudiantes durante las sesiones de los cuatro capítulos manteniéndose al margen de las actividades.

El quinto instrumento es la evaluación final, que consiste en un documento escrito que debe ser completado por los estudiantes de forma individual, donde se condensan los temas de los diferentes capítulos.

El sexto instrumento corresponde a los recursos didácticos, que según Mattos (1963) son los medios materiales de que se dispone para conducir el aprendizaje de los estudiantes, los cuales son usados durante diversas sesiones de la investigación.

Fases

El proyecto sobre la unidad didáctica de teoría de grupos en educación media, se llevará a cabo en cinco fases:

Fase 1: Reconocimiento de la muestra.

La muestra se encuentra conformada por los estudiantes de grado undécimo matriculados en la Institución Educativa Sur Occidente de Pereira, con los cuales se completarán diez sesiones (un periodo académico) para cumplir con la etapa de recolección de información en la investigación.

Fase 2: Evaluación conceptual de diagnóstico.

En el mes de enero del 2020, durante la segunda semana del primer periodo académico, se realiza una evaluación diagnóstica donde se obtiene información sobre los conocimientos previos que poseen los estudiantes sobre los temas de conjuntos, el algoritmo de la división y funciones.

La prueba diagnóstica se realizó por medio de la plataforma Google Forms donde se formularon preguntas de respuesta abierta, ya que la intención fue evaluar las capacidades de orden superior sobre el contenido anteriormente mencionado. Esto se desarrolla durante la primera sesión.

Fase 3: Diseño y aplicación de la unidad didáctica.

Tomando como base de referencia los datos obtenidos en la evaluación diagnóstica, los estándares básicos de competencia, los derechos básicos de aprendizaje (expedidos por el Ministerio de Educación Nacional), el plan de área de la Institución Educativa Sur Occidente de Pereira, teoría y problemas de topología general de , introducción a la teoría de números, grupos I. semigrupos y monoides, se diseñan cuatro capítulos que conforman la unidad didáctica de teoría de grupos en educación media, los cuales permiten integrar las diferentes áreas de las matemáticas, así:

- El capítulo I se enfoca en la teoría de conjuntos.
- El capítulo II se enfoca en la teoría de números.
- El capítulo III se enfoca en cálculo.
- El capítulo IV se enfoca en la teoría de grupos.

Cada capítulo presenta diferentes actividades que permiten atravesar las diversas situaciones del proceso de enseñanza y aprendizaje, para cada definición matemática. La primera propuesta de cada subtema se denomina situación de acción ya que, según Guy Brousseau, le permite al estudiante plantear una hipótesis, formular y aplicar una estrategia de solución. Las actividades posteriores les permiten intercambiar ideas, proponer diferentes métodos de solución, exponerlos frente al grupo, analizar y evaluar los aportes de los compañeros, es decir que se encuentran ante una situación de comunicación y validación. Finalmente, se estipula la situación de institucionalización, donde se formaliza la definición matemática que corresponda.

Cada capítulo de la unidad didáctica abarca dos sesiones, donde uno de los encargados del proyecto orienta a los estudiantes con respecto a las labores que debe cumplir y las definiciones presentadas, mientras que el otro encargado realiza una observación externa, sin intervenir en el proceso educativo.

Fase 4: Evaluación sumativa.

En la última sesión, después de haber finalizado los cuatro capítulos de la unidad didáctica, se propone una evaluación final o sumativa que permite obtener información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, enfocada en el componente conceptual de las guías desarrolladas.

Esta actividad se aplica por medio de un documento escrito que contiene preguntas cerradas, con el fin de evaluar la comprensión que los estudiantes tienen sobre el contenido desarrollado en las sesiones anteriores.

Fase 5: Análisis de los resultados.

En esta etapa se realizará el análisis de los datos obtenidos en las diferentes técnicas de recolección, usadas durante todo el proceso de la investigación, lo que permite validar la viabilidad de la unidad didáctica de teoría de grupos en educación media.

ESQUEMA TEMÁTICO

Para el desarrollo de la unidad didáctica se tiene como propuesta el manejo de cuatro capítulos.

Capítulo I: En esta primera instancia se toma como referente los conjuntos. Se define que es un conjunto, se exponen los principales tipos de conjuntos, sus características principales, relaciones y operaciones entre conjuntos. (Ver anexo 1)

Capítulo II: La referencia de este capítulo es el algoritmo de la división. Se abarca división, congruencias y clases residuales módulo m, operaciones entre clases residuales y las tablas de Cayley. (Ver anexo 2)

Capítulo III: Para este tercer capítulo se toman las relaciones y funciones, partiendo de la definición de par ordenado, producto cartesiano, relación, función y las clases de funciones. (Ver anexo 3)

Capítulo IV: En este cuarto capítulo se llega a grupos, se establece la operación binaria, semigrupo, monoide, grupo, grupo abeliano, monomorfismo, isomorfismo y epimorfismos. (Ver anexo 4)

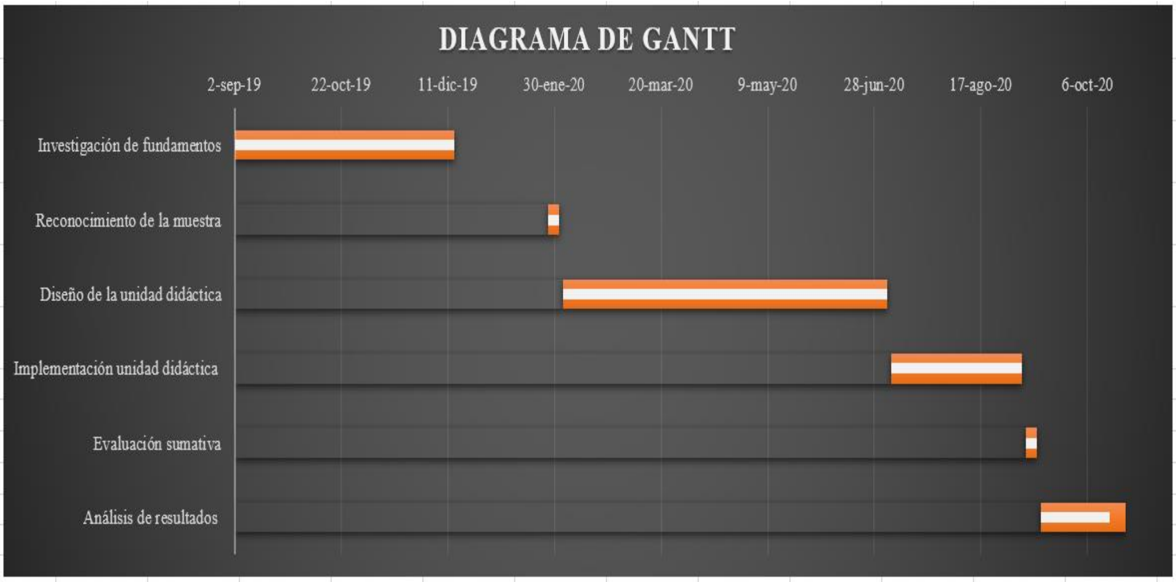
PARTICIPANTES EN EL PROYECTO

Los estudiantes que desarrollan el anteproyecto y en consecuencia el proyecto desde la concepción de la idea, planeación, investigación, aplicación y presentación son los estudiantes Kelly Vanesa Peña Rodríguez y Richard Sebastián Jaramillo Quintero. El director del proyecto el Magister Julián Guzmán Baena.

CRONOGRAMA

El diagrama de Gantt de este proyecto, muestra el cronograma de cada una de las tareas que se ejecutan para completar la investigación.

ACTIVIDADES	FECHA DE INICIO	DURACIÓN DÍAS	FECHA DE FINALIZACIÓN	PORCENTAJE	DÍAS COMPLETADOS
Investigación de fundamentos	2-sep-19	103	14-dic-19	100%	103
Reconocimiento de la muestra	27-ene-20	5	1-feb-20	100%	5
Diseño de la unidad didáctica	3-feb	152	4-jul-20	100%	152
Implementación unidad didáctica	6-jul-20	61	5-sep-20	100%	61
Evaluación sumativa	7-sep-20	5	12-sep-20	100%	5
Análisis de resultados	14-sep-20	40	24-oct-20	81%	32



BIBLIOGRAFÍA

[1] ZAPATA, M. Un cuarto de siglo de ayuda pedagógica en ordenadores y en redes de la EAOCAI a los objetos de aprendizaje, al diseño instruccional y a los patrones de e-learning. Quaderns Digitals, nº 51. Número especial con motivo del XIII aniversario, 2008. 23p. Disponible en:

https://www.um.es/ead/red/20/rodriguez.pdf

[2] MESA BETANCUR, Orlando. Contextos para el Desarrollo de Situaciones Problema en la Enseñanza de las Matemáticas. Colombia: Instituto de Educación no formal - Centro de Pedagogía Participativa, 1998. 110p. Disponible en:

http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/221/1/JC0746.pdf

[3] RUIZ, Jesús. "Álgebra, Geometría y análisis en babilonia". {En línea}. 2011. {1 de octubre de 2019}. Disponible en:

http://www.sociedadelainformacion.com/25/babilonia.pdf

[4] LIPSCHUTZ, Seymour. Teoría y Problemas de Topología General. Nueva York: Serie de Compendios Schaum, 1965. 239p. Disponible en:

https://miltonmart.files.wordpress.com/2016/08/topologia-seymour-lipschutz.pdf

[5] RUIZ DE VELASCO Y BELLAS, Carlos. Grupos I: Semigrupos y Monoides. España: Universidad de Cantabria, 2004. 35p. Disponible en:

https://personales.unican.es/ruizvc/algebra/grupos1.pdf

[6] MORA FLORES, Walter. Introducción a la Teoría de Números: Ejemplos y Algoritmos. Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2010. 210p. Disponible en:

https://repositoriotec.tec.ac.cr/bitstream/handle/2238/6299/introducci%C3%B3n-teor%C3%ADa-n%C3%BAmeros.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[7] MUNKRES, James. Topología Segunda Edición. Madrid: Pearson Educación S. A., 2002. 607p. Disponible en:
https://psm73.files.wordpress.com/2009/11/topologia-munkres.pdf

[8] APOSTOL, Tom. Análisis matemático Segunda Edición. España: Editorial Reverté S. A., 1976. 597p. Disponible en:
https://doku.pub/documents/analisis-matematico-2da-edicion-tom-apostolpdf-z06w4n8545qx

[9] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Colombia. Ministerio de Educación Nacional, 2006. Disponible en:
https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

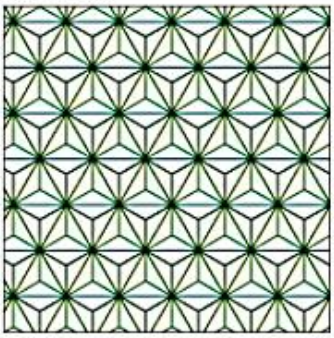
[10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Derechos Básicos de Aprendizaje: Matemáticas. Volumen 2. Colombia. Ministerio de Educación Nacional, 2016. Disponible en:
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

ANEXOS

Anexo 1: Primer capítulo de la unidad didáctica.

Actividad 2:

Coloree los polígonos que identifique en la figura. Tenga en cuenta que debe usar un color diferente para cada clase de polígono según el número de lados. Luego, agrúpelos en conjuntos en el diagrama de Venn.



Desarrolle la actividad 2 aquí.

"Un conjunto es una lista o colección de objetos bien definidos. Se representan por letras mayúsculas y los objetos comprendidos en un conjunto se denominan elementos del conjunto y se representan por letras minúsculas".

CLASIFICACIÓN DE CONJUNTOS

Actividad 3:

Exprese por extensión el conjunto de los nombres de los compañeros de clase.

Desarrolle la actividad 3 aquí.

Actividad 4:

Escriba la cantidad de madres biológicas que puede tener una persona y exprese por extensión el conjunto de los nombres.

Desarrolle la actividad 4 aquí.

Actividad 5:

¿Cuánto tiempo se tarda en contar los números naturales desde el uno?.

Desarrolle la actividad 5 aquí.

"Un conjunto es finito cuando consta de n elementos diferente, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, en caso contrario es infinito. En particular, cuando un conjunto consta de un solo elemento recibe el nombre de conjunto unitario".

Actividad 6:

Represente en un diagrama de Venn y por extensión el conjunto de los números pares.

Desarrolle la actividad 6 aquí.

Actividad 7:

Represente en un diagrama de Venn y por extensión el conjunto de los números impares.

Desarrolle la actividad 7 aquí.

¿Qué tienen en común los elementos de los conjuntos representados en las actividades 6 y 7?

Actividad 8:

Represente en un diagrama de Venn y por extensión el conjunto de los números que son pares e impares a la vez.

Desarrolle la actividad 8 aquí.

"El conjunto universal es un conjunto de referencia que contiene a todos los conjuntos objeto de análisis, y se representa con la U".

"El conjunto vacío es aquel que no tiene ningún elemento, y se representa con ∅".

RELACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Actividad 9:

A continuación se presenta una lista de diversos géneros musicales:

Bachata	Balada	Blues
Clásica	Corrido	Country
Cumbia	Disco	Dubstep
Flamenco	Folk	Funk
Heavy Metal	Hip hop	Indie
Merengue	Pop	Punk
Rap	Reggae	Reggaetón
Salsa	Samba	Ska
Trap	Trova	Vals
Bolero	Electrónica	Rock
Criollo	Góspel	Tango
Electrónica	Jazz	Vallenato

Coloree su género musical favorito y el de sus compañeros. Luego, represente por extensión el conjunto de géneros musicales y el de aquellos que fueron seleccionados.

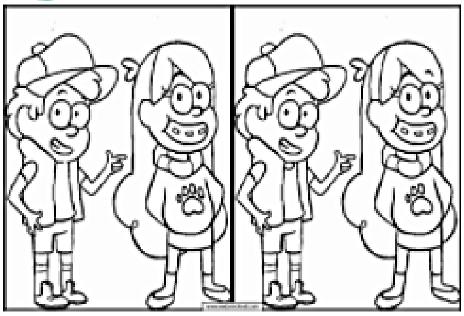
Desarrolle la actividad 9 aquí.

"A es un subconjunto de B si cada elemento de A es a su vez un elemento de B. Simbólicamente se representa como $A \subseteq B$".

Actividad 10:

Encuentra las diferencias entre las dos imágenes. Luego, completa los trazos.

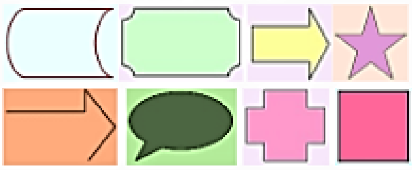
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS



"Dos conjuntos A y B son iguales, si constan de los mismos elementos, y se denota A = B".

Actividad 11:

Recorte y agrupe en dos conjuntos según los criterios que considere pertinentes.

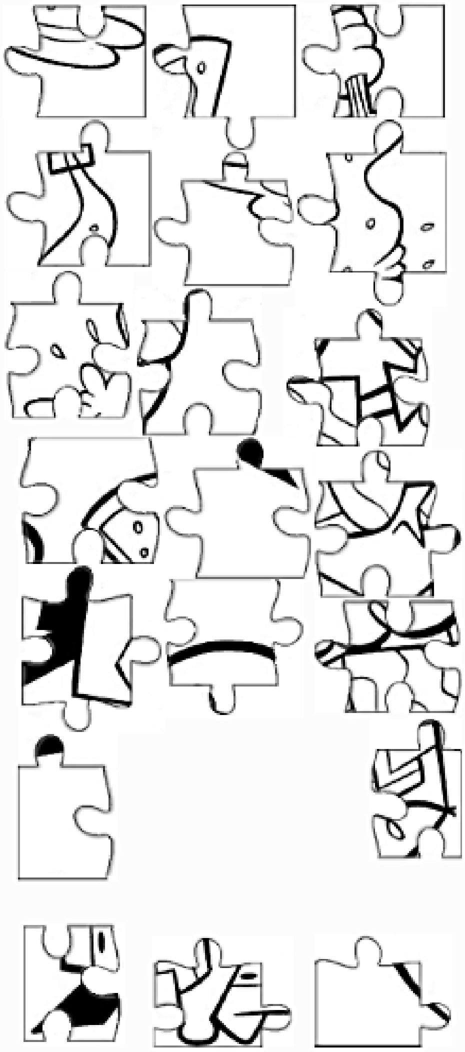


Desarrolle la actividad 11 aquí.

"Dos conjuntos A y B son disyuntos cuando no tienen elementos en común, es decir que la intersección de A y B es igual a vacío, lo se representa $A \cap B = \emptyset$".

Actividad 12:

Recorte las fichas. Luego, ubíquelas de forma tal que arme el rompecabezas.



Desarrolle la actividad 12 aquí.

"Dados dos conjuntos A y B, se puede construir un nuevo conjunto formado por todos los elementos de A junto con los elementos de B, este conjunto formado se llama la unión de A y B, y se representa $A \cup B$"

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Actividad 13:

Realice un plano a escala de su casa, donde se representen los espacios que la componen (habitaciones, sala...)

Desarrolle la actividad 13 aquí.

Después de realizar el plano, compárelo con el de un compañero y verifique que espacios tienen en común. Grafique un diagrama de Venn con los conjuntos de los espacios que contiene su casa y la de su compañero teniendo en cuenta los elementos comunes.

"La intersección de dos conjuntos A y B, se denota como $A \cap B$, y es el conjunto de elementos que pertenecen simultaneamente a A y B".

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Actividad 14:

Los estudiantes forman dos circunferencias, una interna y otra externa, donde la primera gira hacia la derecha y la segunda gira hacia la izquierda mientras el docente propone operaciones aritméticas simples, y los estudiantes van respondiendo en orden secuencial. En caso de que uno de los que responde se equivoque forman parejas donde un integrante de la circunferencia interna se agrupa con uno de la externa en la siguiente posición:

"El complemento absoluto de un conjunto A, son todos los elementos que no pertenecen a A y que pertenecen al conjunto universal; se denota A^c".

$$A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

Actividad 15:

Los estudiantes se asocian en parejas, donde cada uno verifica que elementos lleva a la institución, y menciona aquellos que tiene en sus pertenencias, pero su compañero no.

"La diferencia de un conjunto A con B se refiere a aquellos elementos que pertenecen a A pero no pertenecen al conjunto B, y se denota $A \setminus B$".

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

Anexo 2: Segundo capítulo de la unidad didáctica.

Actividad 4:
Halle el valor de k y r cuando se tiene los siguientes valores para a y m.

- a= 25 y m= 6
- a= 64 y m =3

Desarrolle la actividad 4 aquí.

CONGRUENCIAS MODULO M

La congruencia modulo m designa que dos números enteros a y b tienen el mismo residuo al dividirlos por un número natural m (Con m diferente de cero), llamado módulo; esto se expresa utilizando la notación: $a \equiv b \pmod{m}$

"si a mod m= b mod (m) ⇒ m/ (b-a)

$a \equiv b \pmod{m}$"

Actividad 5:
Divida 7 entre 3 y 13 entre 3 ¿Qué residuo obtiene?

Desarrolle la actividad 5 aquí.

Actividad 6:
Descubre el día de la semana en que nació tu compañero.

f = fecha, m = mes, a = año, s = siglo, n = años en el siglo y d = día semana.

a=100s+n

$$d = f + \left[\frac{13m-1}{5}\right] - 2s + n + \left[\!\left[\frac{s}{4}\right]\!\right] + \left[\frac{n}{4}\right] (mod\ 7)$$

Tener en cuenta que si nació en enero o febrero se resta un año, además en las siguientes tablas se asignan los valores para el mes y el año.

Dom	Lun	Mar	Mié	Jue	Vie	Sáb
1	2	3	4	5	6	7

Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Desarrolle la actividad 6 aquí.

Actividad 7:
Verifique que si se cumple que:

- 19 mod 4 = 31 mod 4
- 8 ≡ 24 (mod 2)
- 1 ≡ 343 (mod 2)
- 13 ≡ 27 (mod 2)
- 3 (mod 1) = 4 (mod 1) = 10 (mod 1) = 13 (mod 1)

Desarrolle la actividad 7 aquí.

Actividad 8:
Aplique la definición de:

a (mod m) = b (mod m) ⇒ (b-a) / m

- -3 ≡ 1
- -8 (mod 8) = 32 (mod 8)
- -9 ≡ -2 (mod 7)

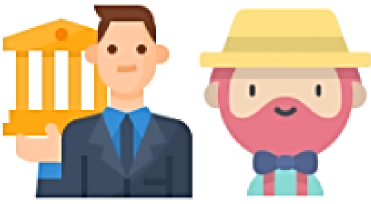
Desarrolle la actividad 8 aquí.

CLASES RESIDUALES MODULO M

Denotamos $\bar{a}$ la clase cuyo representante es a, es decir:

$$En\ \mathbb{Z}_m;\ \bar{a} = \{b \in \mathbb{Z}: a \equiv b_{(mod\ m)}\}.$$
$$En\ particular\ \bar{0} = \bar{m}$$

Actividad 9:
Analice y escoja uno de los dos personajes el cual representará, posteriormente elige una pareja que haya escogido el rol contrario.



Banquero **Ciudadano**

Una vez tenga definido a quien representa, solicite al docente los billetes y recrea la situación, después mediante dibujos y conjuntos realice el esquema de la situación y la solución que encontró.

Situación: El gobierno mediante una resolución decreta que saldrán de circulación los billetes de $100.000, $50.000 y $20.000 pesos en un plazo no mayor a 1 hora. El ciudadano acude ante la entidad bancaria para que se efectúe el cambio de las denominación de los billetes . ¿Qué ocurrió? ¿Cómo quedo repartido el dinero de cada parte?

Desarrolle la actividad 9 aquí.

Actividad 10:
Halle el conjunto de clase para:

- $\mathbb{Z}_2$

Desarrolle la actividad 10 aquí.

- $\mathbb{Z}_5$

Desarrolle la actividad 10 aquí.

Actividad 11:
Proponga dos conjuntos de clases diferentes.
- $\mathbb{Z}_n$
- $\mathbb{Z}_m$.

Desarrolle la actividad 11 aquí.

Operaciones entre clases residuales

- **Suma:** $\bar{a} + \bar{b} = \overline{(a+b)} = \bar{c}$
- **Resta:** $\bar{a} - \bar{b} = \overline{(a-b)} = \bar{c}$
- **Multiplicación:** $\bar{a} * \bar{b} = \overline{(a*b)} = \bar{c}$

Actividad 12:
A partir del conjunto de clases $\mathbb{Z}_4$ proponga tres sumas entre los elementos del conjunto.

Desarrolle la actividad 12 aquí.

Actividad 13:
A partir del conjunto de clases $\mathbb{Z}_4$ proponga tres multiplicaciones entre los elementos del conjunto.

Desarrolle la actividad 13 aquí.

TABLAS DE CAYLEY

Actividad 14:
Resuelve los siguientes sudokus teniendo en cuenta las reglas de juego.

Reglas:
Para orientarnos dentro del juego debemos tener en cuenta que la cuadrícula está numerada de la siguiente forma. Partiendo de la esquina superior izquierda tenemos hacia abajo n filas y hacia la derecha, n columnas. Por ejemplo numeradas del 1 al 4, respectivamente.

Los números que las componen se conocen como números dados y no puedes modificarlos a lo largo del juego. El resto de las casillas están vacías. El objetivo es que, partiendo de los números dados, consigas rellenar todas las casillas usando únicamente números de una cifra. En nuestro ejemplo números del 1 al 4.

Para saber qué número corresponde a cada casilla deben tenerse en cuenta estas reglas básicas:

- Ningún número puede repetirse en una misma fila.
- Ningún número puede repetirse en una misma columna.
- Ningún número puede repetirse en una misma región.
- Ningún número puede repetirse entre las casillas amigas.

		4	
4		3	
	4		3
	1		

		1	
4			
			2
	3		

1		4	
	1		2

			3
3	2	4	
	4	3	2
2			

4						2		
5				4			7	8
	6	3				5		4
		8		6	4	9		1
3		9			2	6		
6	7	1					4	
	3	5		8	9	4		
1	8			3	5	7	2	
9		4			1			5

Actividad 15:
Realice una tabla donde en la primera fila y columna se ubiquen los colores primarios. Luego se mezclan.

Desarrolle la actividad 15 aquí.

Actividad 16:
Teniendo en cuenta las operaciones entre clases residuales completa las tablas.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$			
$\bar{1}$			
$\bar{2}$			

•	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$			
$\bar{2}$			
$\bar{3}$			

Actividad 17:
Resuelva en forma de tabla de Cayley $\mathbb{Z}_5$ con suma y multiplicación.

Desarrolle la actividad 17 aquí.

Anexo 3: Tercer capítulo de la unidad didáctica.

PAR ORDENADO

ACTIVIDAD 1:

Las siguientes personas se ofrecieron como voluntarios para un experimento donde el conjunto M está conformado por Valentina, Diana, María y Paula, y el conjunto H lo conforma Martín y Víctor.

CONJUNTO M

CONJUNTO H

Para las pruebas serán agrupados en parejas, ¿Cuántas y cuáles parejas se pueden formar que cumpla con las condiciones:

1. El primer participante sea del conjunto M.
2. El segundo participante sea del conjunto H.

El experimento requiere que el primer integrante pueda embarazarse, y el segundo debe producir espermatozoides ¿Importa el orden en que se escojan las parejas?

Desarrolla la actividad 1 aquí.

DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos A y B se llama producto cartesiano entre A y B y se representa A×B, al conjunto de todos los pares (a,b) donde $a \in A$ y $b \in B$, es decir:

$$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$$

RELACIÓN

ACTIVIDAD 2:

Conforme un grupo de tres estudiantes y elije las imágenes que representen tus gustos. Posteriormente, represente los dos conjuntos y relaciónelos por medio de flechas.

Desarrolla la actividad 2 aquí.

ACTIVIDAD 3:

En el primer conjunto escriba el nombre de los compañeros de curso y en el segundo conjunto géneros musicales, después relacione por medio de flechas con base en los gustos musicales.

DEFINICIÓN

Una relación binaria R entre el conjunto A y el conjunto B asocia a cada par (a,b) de A×B se cumple una sola de las siguientes proposiciones.

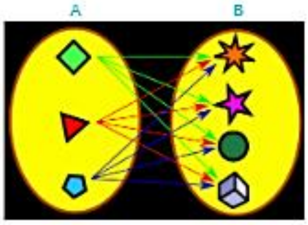
1. aRb, "a está relacionado con b"
2. $a \not R b$, "a no está relacionado con b"

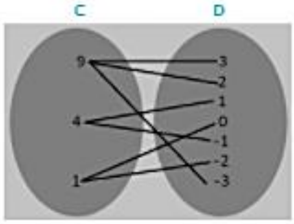
Una relación R entre A y B es un subconjunto de A×B. El dominio de una relación R entre A y B es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados de R, y el dominio de las imágenes es el conjunto de los segundos elementos.

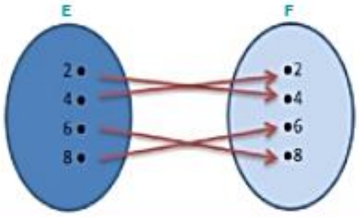
$$\text{Dom } R=\{a/(a,b)\in R\} \qquad \text{Im } R=\{b/(a,b)\in R\}$$

ACTIVIDAD 4:

Exprese por extensión el conjunto del dominio e imagen de las siguientes relaciones.





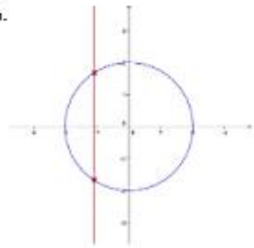


Desarrolla la actividad 4 aquí.

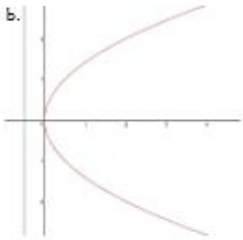
ACTIVIDAD 5:

Exprese como intervalo el Dom e Im de las relaciones.

a.



b.



Desarrolla la actividad 5 aquí.

FUNCIÓN

ACTIVIDAD 6:

Laura va a la tienda London y pide 3 bombones y 2 paquetes de choclitos, por los cuales le cobran $2.450 pesos. Luego, Camilo llega a la misma tienda y compra 1 paquete de papas y 2 bombones por $1.400. Ninguno de los dos se fijo en el precio unitario de los productos. Relacione los que considere pertinente.

1 Paquete de choclitos.

1 Bombon.

200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800

DEFINICIÓN

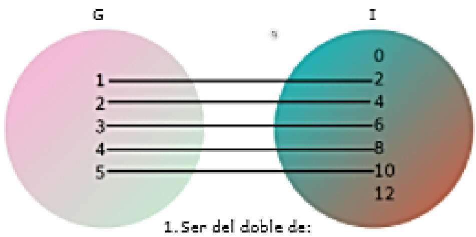
Si a cada elemento de de un conjunto A se le hace corresponder un único elemento del conjunto N, se dice que el conjunto f de tales asociaciones es una función (o aplicación) de A en B y se denota por:

$$f: A \rightarrow B$$

El dominio de f es A y el codominio de f es B.
Rango: El rango es el conjunto formado por los elementos del codominio que son imagen de los elementos del dominio.

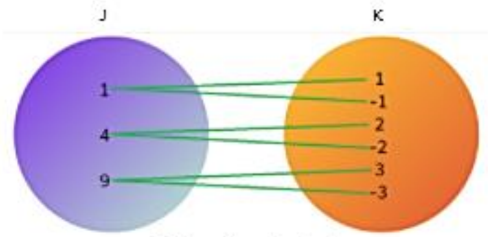
ACTIVIDAD 7:

A. Observa la relación que se establece y para cada elemento del conjunto de partida ¿Cuántos elementos le corresponden en el conjunto de llegada?



1. Ser del doble de:

Desarrolla la actividad 7.1 aquí.



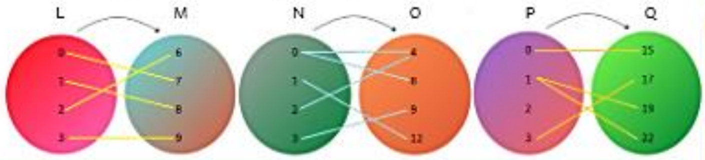
2. Ser raíz cuadrada de:

Desarrolla la actividad 7.2 aquí.

B. De los ejercicios 7.1 y 7.2 ¿Cuál es función?

Desarrolla la actividad 7.B aquí.

C. Escribe en los espacios, si la correspondencia o relación de cada diagrama es una función. De serlo, indicarlo en el diagrama sagital.

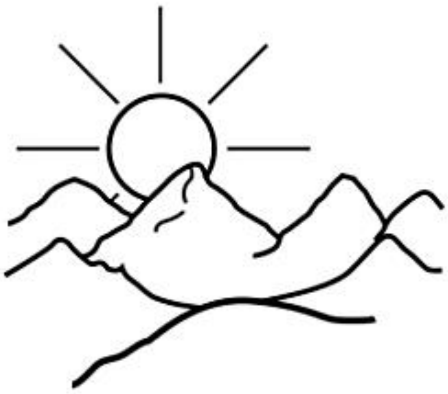


Desarrolla la actividad 7.C aquí.

D. Escribe el dominio, codominio y rango para cada una de las funciones encontradas en el ejercicio anterior.

ACTIVIDAD 8:

Descomponer el dibujo en capas de tal manera que, cada parte de el pueda ser una función.



Desarrolla la actividad 8 aquí.

Desarrolla la actividad 8 aquí.

Desarrolla la actividad 8 aquí.

CLASES DE FUNCIONES

FUNCIÓN INYECTIVA:

Una función $f:A \to B$ es inyectiva (o uno a uno) si elementos distintos de A tienen imágenes distintas, es decir:

si $f(a) = f'(a) \Rightarrow a = a'$

ACTIVIDAD 9:

Asocie el tipo de carro con una marca que le corresponde.

Honda.
Mercedes-Benz.
BMW.
Chevrolet.
Mazda.
Ford.
Toyota.
Audi.
Ferrari.
Lamborghini.

ACTIVIDAD 10:

Verificar que $f(x)=2x$ toma cualquier número entero y lo convierte en un número par.

Desarrolla la actividad 10 aquí.

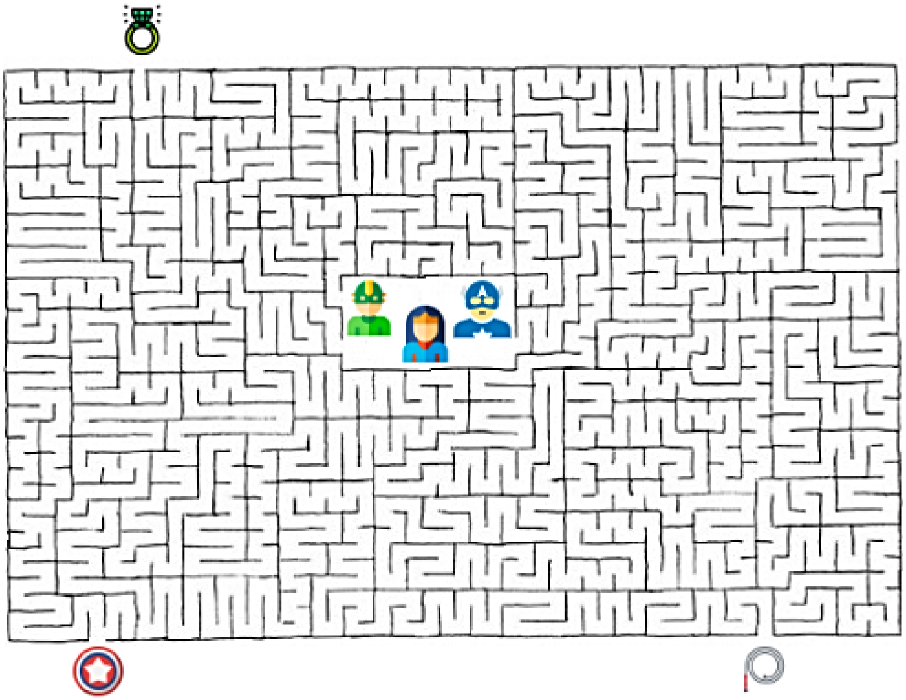
FUNCIÓN SOBREYECTIVA:

Una función $f: A \rightarrow B$ es sobreyectiva si todo $b \in B$ es imagen de algún $a \in A$, esto es si:

$b \in B \Rightarrow \exists a \in A$ tal que: $f(a)=b$.

ACTIVIDAD 11:

Ayuda a cada super héroe a llegar hasta su elemento representativo y/o su fuente de poder.



ACTIVIDAD 12:

Veamos como esta función toma cualquier número entero y lo eleva al cuadrado. $f(x)=X^2$

Desarrolla la actividad 12 aquí.

FUNCIÓN BIYECTIVA:

Si una función es simultáneamente inyectiva y sobreyectiva, de dice que es biyectiva.

$$\forall b \in Cod\, f\, \exists!\, a \in Dom f \;//\; f(a) = b$$

ACTIVIDAD 13:

Recorte las fichas del conjunto A. Luego, ubíquelas de forma tal que arme el rompecabezas en el conjunto B.

Recorte de la última página el recuadro y las piezas del rompecabezas y péguelas en el orden correcto en el siguiente espacio.

Desarrolla la actividad 13 aquí.

FUNCIÓN COMPUESTA:

Dadas las funciones f:A→B y g:B→C, definimos la composición de g ∘ f de f y g como una función g ∘ f: A→C definida por la ecuación (g ∘ f)(a)=g(f(a)).

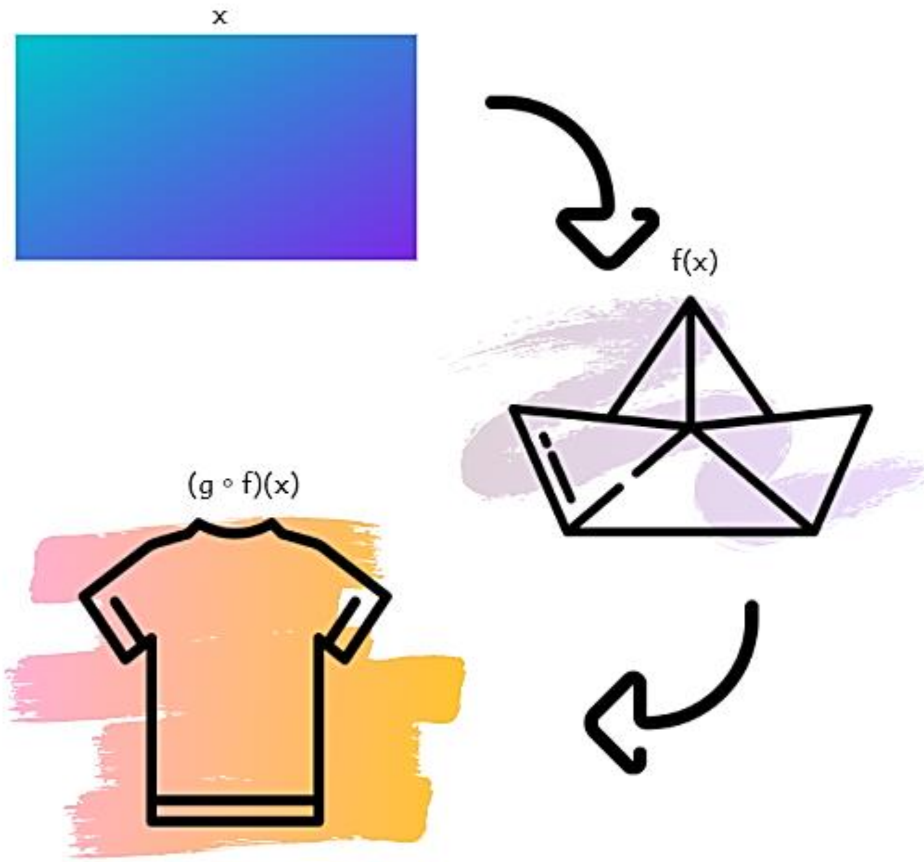
Formalmente $g \circ f: A \to C$ es una función cuya regla es:

$\{(a,c) / \text{ para algún } b \in B,\ f(a)=b \text{ y } g(b)=c\}$

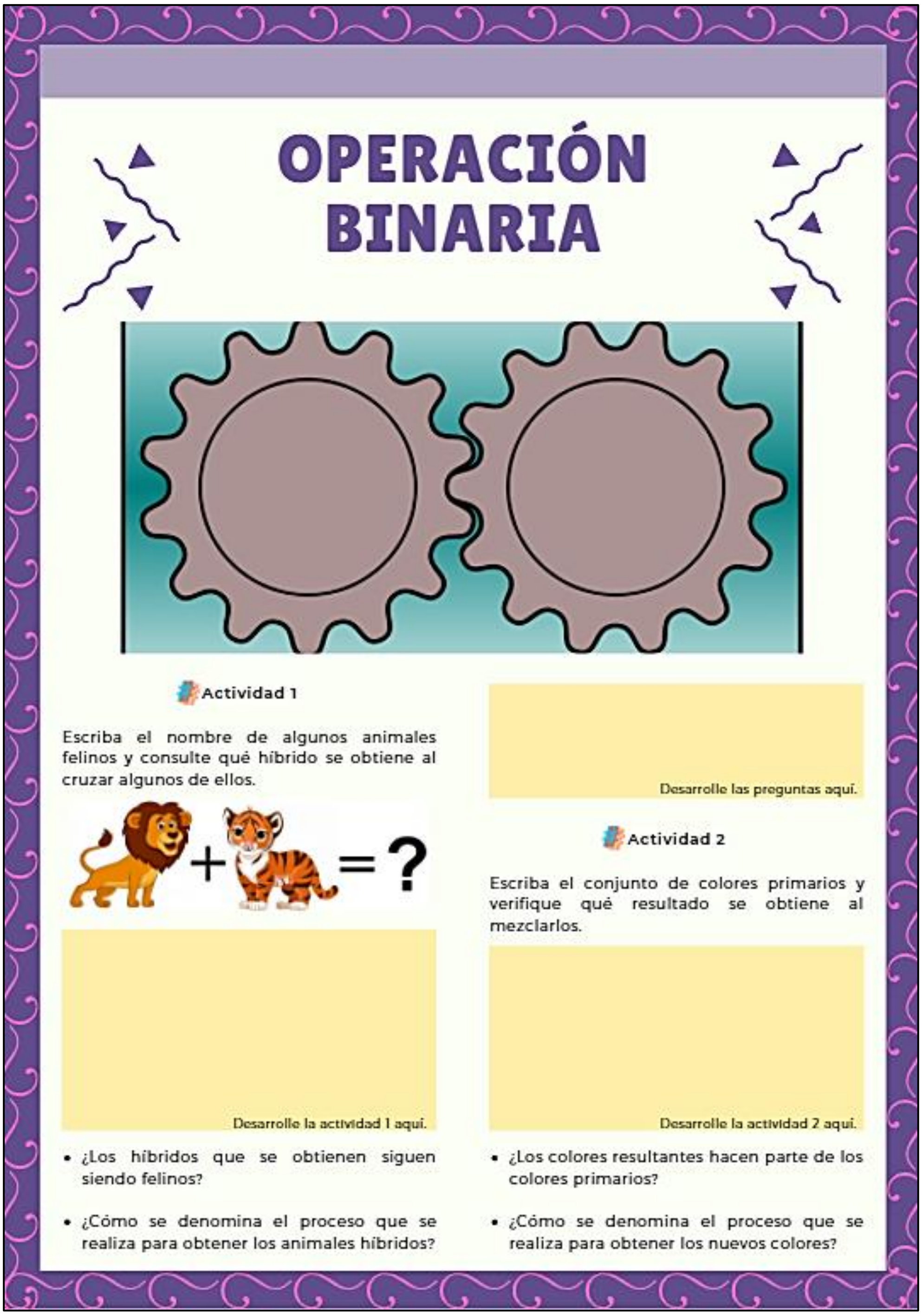
ACTIVIDAD 14:

Recortar el rectángulo que aparece en la siguiente página y realizar las transformaciones tal y como nos indican a continuación.

Se debe tomar la figura rectangular x y fabricar con ella un barco, el cual recibirá el nombre de f(x). Después se debe transformar el barco f(x) en una camiseta llamada g(x) Así:



Anexo 4: Cuarto capítulo de la unidad didáctica.



OPERACIÓN BINARIA

Actividad 1

Escriba el nombre de algunos animales felinos y consulte qué híbrido se obtiene al cruzar algunos de ellos.

+ = ?

Desarrolle la actividad 1 aquí.

- ¿Los híbridos que se obtienen siguen siendo felinos?
- ¿Cómo se denomina el proceso que se realiza para obtener los animales híbridos?

Desarrolle las preguntas aquí.

Actividad 2

Escriba el conjunto de colores primarios y verifique qué resultado se obtiene al mezclarlos.

Desarrolle la actividad 2 aquí.

- ¿Los colores resultantes hacen parte de los colores primarios?
- ¿Cómo se denomina el proceso que se realiza para obtener los nuevos colores?

"$A \neq \varnothing$, definimos la operación binaria ★ como la función:

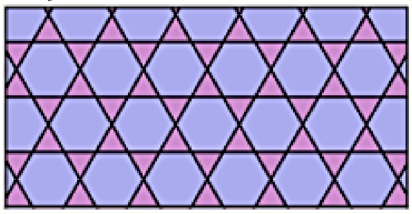
$$★: A \times A \rightarrow A$$

$$(a,b) \mapsto a★b$$

donde a,b ∈ A. La operación binaria que se definió anteriormente se representa (A, ★)"

Actividad 3

El conjunto P corresponde a un teselado de polígonos y ★ representa la operación descomposición.



Descomponga el teselado en las diferentes figuras geométricas que encuentre.

Desarrolle la actividad 3 aquí.

- ¿Las figuras geométricas obtenidas en la descomposición son polígonos?
- ¿(P,★) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle las preguntas aquí.

Actividad 4

Sea el conjunto D={0,1,2,3,4} y ★ es la operación suma entonces, ¿(D,+) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 4 aquí.

Actividad 5

Si N es el conjunto de números naturales y ★ es la operación suma entonces, ¿(N,+) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 5 aquí.

Actividad 6

Sea el conjunto E={5, 6, 7, 8, 9} y ★ es la operación resta entonces, ¿(E,-) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 6 aquí.

Actividad 7

Si N es el conjunto de números naturales y ★ es la operación resta entonces, ¿(N,-) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 7 aquí.

Actividad 8

Sea M el conjunto de los números impares y ★ es la operación suma, ¿(M,+) es una operación binaria? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 8 aquí.

SEMIGRUPO

Actividad 9

Ilustre en forma de historieta el proceso para hacer una limonada natural.

Desarrolle la actividad 9 aquí.

Actividad 10

Pablo tiene el conjunto de prendas H={boxer, pantalón, medias, zapatos y correa} y pretende efectuar la operación vestirse representada ★.

Si Pablo se viste variando el orden en que se pone las prendas, ¿obtendrá el mismo resultado?. Dibuje al menos 5 opciones.

Desarrolle la actividad 10 aquí.

"Sea $A \neq \emptyset$, ★ una operación binaria. Si ★ es asociativa, es decir que $\forall$ a,b,c $\in$ A se cumple que:

$$(a\star b)\star c = a\star(b\star c)$$

entonces, decimos que (A,★) es semigrupo."

Actividad 11

Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de números naturales y ★ es la operación suma entonces, ¿($\mathbb{N}$,+) es un semigrupo? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 11 aquí.

Actividad 12

Sea el conjunto de números enteros pares H y ★ es la operación producto entonces, ¿(H,·) es un semigrupo? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 12 aquí.

MONOIDE

Actividad 13

Ubique las 5 fichas recibidas en el tablero, de forma tal que cubran toda la superficie de este, sin superponer las piezas ni modificar su forma. Dibuje la solución:

Desarrolle la actividad 13 aquí.

Luego, realice el mismo proceso, teniendo en cuenta que se agrega una nueva pieza al reto:

Desarrolle la actividad aquí.

Desarrolle la actividad 16 aquí.

Sea A≠ ∅, ★ una operación binaria. Si ★ es asociativa y posee el elemento neutro (representado como e), entonces, se afirma que (A,★) es un monoide".

Es decir que ∀ a,b,c ∈ A se cumple que:

$$(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$$

$$\exists\, e \in A \text{ t.q. } \quad a \star e = a$$

GRUPO

Actividad 14

Sea el conjunto de los enteros positivos unidos con el cero, y ★ es la operación suma entonces, ¿($\mathbb{Z}^+$ U {0}, +) es un monoide? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 14 aquí.

Actividad 15

Sea el conjunto [12,∞)U{0} y ★ es la operación suma entonces, ¿([12,∞)U{0}, +) es un monoide? Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 15 aquí.

Actividad 16

Proponga dos ejemplos de monoides con su respectiva justificación.

Actividad 17

La panadería Panamericana realiza un análisis contable de las últimas dos semanas para identificar las ganancias o pérdidas. La información recolectada se presenta en la siguiente tabla:

	L	Ma	Mi	J	V	S	D
Semana 1	85.000	0	90.000	-250.400	-200.000	195.400	0
Semana 2	-85.000	0	0	250.400	200.000	-195.400	335.900
Total							

¿Importa el orden de los valores al sumarlos para obtener el balance de cada día de la semana?

Desarrolle la actividad 17 aquí.

¿Existe el elemento neutro en la tabla que se encuentra registrada?

Desarrolle la actividad aquí.

¿Cuáles de los valores registrados en la tabla son inversos aditivos?

Desarrolle la actividad aquí.

Sea G$\neq \varnothing$, ★ una operación binaria. Si ★ es asociativa, modulativa e invertiva, entonces, se dice que (G,★) tiene estructura de Grupo".

Es decir que $\forall$ a,b,c $\in$ G se cumple que:

$$(a\star b)\star c = a\star(b\star c)$$
$\exists$ e $\in$ G t.q. $\quad a\star e = a$
$\exists$ a' $\in$ G t.q. $\quad a\star a' = e$

Actividad 18

Sea el conjunto H={0,1,2,3}, ★ es la operación resta entonces, ¿(H, -) tiene estructura de grupo?
Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 18 aquí.

Actividad 19

Sea el conjunto de los números enteros, y ★ es la operación suma entonces, ¿($\mathbb{Z}$, +) tiene estructura de grupo?
Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 19 aquí.

Actividad 20

Sea el conjunto de los números naturales, y ★ es la operación producto entonces, ¿($\mathbb{N}$, ·) tiene estructura de grupo?
Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 20 aquí.

Actividad 21

Sea el conjunto A={-3,-2,-1,0,1,2,3}, ★ es la operación producto entonces, ¿(A, ·) tiene estructura de grupo?
Justifique su respuesta.

Desarrolle la actividad 21 aquí.

Actividad 22

Sea el conjunto de clases $\mathbb{Z}_3$, y ★ es la operación suma entonces, ¿($\mathbb{Z}_3$, +) tiene estructura de grupo?

Justifique su respuesta usando la tabla de Cayley.

Desarrolle la actividad 22 aquí.

Actividad 23

Sea el conjunto de clases $\mathbb{Z}_5$, y ★ es la operación producto entonces, ¿($\mathbb{Z}_5$, ·) tiene estructura de grupo?

Justifique su respuesta usando la tabla de Cayley.

Desarrolle la actividad 23 aquí.

GRUPO ABELIANO

$(G, \bigstar)$ es un grupo abeliano con respecto a la operación $\bigstar$ si:

1. $(G, \bigstar)$ es un grupo.
2. $(G, \bigstar)$ cumple la propiedad conmutativa en la operación $\bigstar$. Es decir que $\forall$ a,b $\in$ G se cumple que:

$$a \bigstar b = b \bigstar a$$

Actividad 24

Verifique cuáles de los grupos encontrados en las actividades 18 a la 23 son grupos abelianos.

Desarrolle la actividad 24 aquí.

HOMOMORFISMO

Actividad 25

Bart recorre la distancia desde el punto de partida hasta el de llegada. ¿Cuáles son los posibles caminos que puede recorrer?

¿Cuál es el número menor de cuadras que Bart puede recorrer?

Desarrolle la actividad 25 aquí.

Sea la función $f: G_1 \to G_2$, donde el grupo 1 con la operación binaria $\bigstar$ es $(G_1, \bigstar)$ y el grupo 2 con operación binaria $\heartsuit$ es $(G_2, \heartsuit)$.

f se dice homomorfismo de grupos si se cumple que:

$\forall$ a,b $\in G_1$, $\quad f(a \bigstar b) = f(a) \heartsuit f(b)$

Actividad 26

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ donde los grupos son $(\mathbb{R}, +)$ y $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Verificar si la función f es homomorfismo de grupos definida $f(x) = 2^x$

Desarrolle la actividad 26 aquí.

Actividad 27

Sea la función $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ donde los grupos son $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Verificar si la función g es homomorfismo de grupos definida $g(x) = \sqrt{x}$

Desarrolle la actividad 27 aquí.

MONOMORFISMO

Si f es una función inyectiva (uno a uno), entonces se dice que f es un monomorfismo.

EPIMORFISMO

Si f es una función sobreyectiva, entonces se dice que f es un epimorfismo.

ISOMORFISMO

Si f es una función biyectiva, entonces se dice que f es un isomorfismo.

Actividad 28

Sea la función $f:\mathbb{R}^{*} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = log(x)$$

Donde los grupos son $(\mathbb{R}^{*}, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +)$.

¿La función f es homomorfismo de grupos?

Desarrolle la actividad 28 aquí.

¿La función f es monomorfismo de grupos?

Desarrolle la actividad aquí.

¿La función f es epimorfismo de grupos?

Desarrolle la actividad aquí.

¿La función f es isomorfismo de grupos?

Desarrolle la actividad aquí.