



# Optimización convexa

## Aplicaciones en operación y dinámica de sistemas de potencia

**UTP**  
Universidad Tecnológica  
de Pereira

**Editorial UTP**

Alejandro Garcés Ruiz



### **Alejandro Garcés Ruiz**

Profesor asociado al programa de ingeniería eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP).

Es ingeniero electricista y magister en ingeniería eléctrica de la misma universidad y doctor en ingeniería de la Universidad Noruega de Ciencia y Tecnología (NTNU) en Trondheim Noruega. Actualmente es *Senior Member* de IEEE, investigador senior de Colciencias y editor asociado en *IEEE Transactions on Industrial Electronics* e *IET-Renewable Power Generation*.

A nivel de pregrado, orienta los cursos de operación de sistemas de eléctricos y estabilidad de sistemas de potencia, así como diferentes cursos a nivel de posgrado tales como optimización convexa, generación eólica y control en sistemas de potencia. Sus temas de investigación están relacionados con optimización matemática, dinámica y estabilidad de sistemas eléctricos, especialmente en micro-redes, energías renovables y transmisión en HVDC.

[alejandro.garces@utp.edu.co](mailto:alejandro.garces@utp.edu.co)

La Editorial de la Universidad Tecnológica de Pereira tiene como política la divulgación del saber científico, técnico y humanístico para fomentar la cultura escrita a través de libros y revistas científicas especializadas.

Las colecciones de este proyecto son: Trabajos de Investigación, Ensayos, Textos Académicos y Tesis Laureadas.

Este libro pertenece a la Colección Textos Académicos.

# **Optimización convexa**

## **Aplicaciones en operación y dinámica de sistemas de potencia**

Alejandro Garcés Ruiz



Colección Textos Académicos  
Facultad de Ingenierías  
2020

Garcés Ruiz, Alejandro

Optimización convexa : aplicaciones en operación y dinámica de sistemas / Alejandro Garcés Ruiz. -- Pereira : Universidad Tecnológica de Pereira, 2020.

307 páginas. -- (Colección Textos académicos).

ISBN: 978-958-722-466-5

eISBN: 978-958-722-465-8

1. Optimización matemática 2. Programación lineal 3. Sistemas de control 4. Algoritmos matemáticos 5. Sistemas eléctricos

CDD. 519.6

### **Autor**

© Alejandro Garcés Ruiz

**Universidad Tecnológica de Pereira**  
**Pereira, Colombia**

### **Colección Textos Académicos**

Optimización Convexa Aplicaciones en operación y dinámica de sistemas de potencia

### **Universidad Tecnológica de Pereira**

Vicerrectoría de Investigaciones, Innovación y Extensión

Editorial Universidad Tecnológica de Pereira

Pereira, Colombia

### **Coordinador editorial:**

Luis Miguel Vargas Valencia

luismvargas@utp.edu.co

Teléfono 313 7381

Edificio 9, Biblioteca Central "Jorge Roa Martínez"

Cra. 27 No. 10-02 Los Álamos, Pereira, Colombia

www.utp.edu.co

Montaje y producción:

David Restrepo Suarez.

Universidad Tecnológica de Pereira



# CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	12
PRIMERA PARTE .....	17
FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA .....	17
CAPÍTULO UNO .....	18
PRELIMINARES MATEMÁTICOS.....	19
1.1 Modelos de optimización matemática .....	19
1.2 Sobre conjuntos y funciones .....	21
1.3. Formas cuadráticas .....	24
1.4 Productos interiores y normas.....	26
1.5 Teoría básica de máximos y mínimos.....	30
1.6 Multiplicadores de Lagrange .....	31
1.7. Lecturas complementarias.....	33
1.8. Ejercicios.....	33
CAPÍTULO DOS.....	35
PROGRAMACIÓN LINEAL.....	36
2.1 Representación de problemas PL .....	36
2.2 Geometría de los problemas PL.....	38
2.3 Dualidad en problemas PL .....	41
2.4 Lecturas complementarias.....	43
2.5 Ejercicios .....	43
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA .....	46
3.1 Conjuntos convexos .....	46
3.1.1. Politopos.....	49
3.1.2. Bolas .....	50
3.1.3. Elipsoides .....	50
3.1.4. Mapas no expansivos.....	51
3.1.5. Conos convexos .....	53
3.1.6. Suma de polinomios cuadráticos.....	53
3.2. Funciones convexas.....	54
3.3. Optimización convexa .....	58
3.4. Unicidad de la solución y óptimo global .....	61
3.5. Lecturas complementarias.....	64
3.6. Ejercicios.....	64
CAPÍTULO CUATRO .....	66
CONDICIONES DE OPTIMALIDAD.....	67
4.1. Condiciones de primer orden .....	67
4.2 Condiciones de segundo orden .....	73
4.3 Subgradientes .....	74
4.4. Solución de modelos en Python.....	78
4.5. Lecturas complementarias.....	79
4.6. Ejercicios.....	79
DUALIDAD .....	82
5.1 Función dual.....	82
5.2. Relación entre el primal y el dual.....	87
5.3. Condiciones de KKT .....	92
5.3.1. Interpretación mecánica de las condiciones KKT .....	93
5.4. Análisis de sensibilidad .....	94
5.5. Lecturas complementarias.....	96
5.6. Ejercicios.....	96

SEGUNDA PARTE .....	98
MODELOS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA .....	98
CAPÍTULO SEIS .....	99
OPTIMIZACIÓN CÓNICA .....	100
6.1. Conos convexos .....	100
6.2. Programación semidenida .....	101
6.2.1. La traza, el determinante y el complemento de Shur .....	102
6.2.2. El cono de las matrices semidenidas .....	104
6.2.3. Dualidad en problemas SDP .....	107
6.3. Programación cónica de segundo orden SOC .....	108
6.3.1. Dualidad en problemas SOC .....	111
6.4. Lecturas complementarias .....	113
6.5. Ejercicios .....	113
CAPÍTULO SIETE .....	115
MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE .....	116
7.1. Incertidumbre en problemas de optimización .....	116
7.2. Optimización por escenarios .....	117
7.3. Espacio de incertidumbre como un politopo .....	118
7.4. Espacio de incertidumbre como una bola .....	119
7.5. Conjunto convexo de incertidumbre .....	122
7.6. Robustez vs optimalidad .....	124
7.7. Restricciones probabilísticas .....	125
7.7.1. Incertidumbre en las restricciones .....	125
7.7.2. Incertidumbre en la función objetivo .....	126
7.8. Lecturas complementarias .....	127
7.9. Ejercicios .....	127
CAPÍTULO OCHO .....	129
SUMA DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS .....	130
8.1. Optimización en el espacio de los polinomios .....	130
8.2. Suma de cuadrados (SOS) .....	132
8.3. Equivalente semidenido .....	133
8.4. Dispersidad en problemas SOS .....	137
8.5. Solución de problemas polinomiales .....	141
8.7. Ejercicios .....	146
CAPÍTULO NUEVE .....	147
APROXIMACIONES CONVEXAS .....	148
9.1. Linealización y envolvente convexa .....	148
9.2. Optimización convexa secuencial .....	149
9.4. Problemas binarios .....	152
9.5. Optimización polinomial usando linealización .....	154
9.5.1. Aproximación SOS a problemas polinomiales .....	156
9.6. Jerarquía de Lasserre .....	158
9.6.1. El problema de la medida de un conjunto .....	158
9.6.2. Optimización sobre un espacio de medida .....	159
9.7. Lecturas complementarias .....	163
9.8. Ejercicios .....	164
TERCERA PARTE .....	165
APLICACIONES EN OPERACIÓN Y CONTROL DE SISTEMAS DE POTENCIA .....	165
CAPÍTULO DIEZ .....	166
OPERACIÓN DE SISTEMAS DE POTENCIA .....	167
10.1. Despacho económico y despacho ambiental .....	167
10.2. Restricciones de capacidad .....	170

10.3. Flujo de carga óptimo .....	171
10.4. Gestión de la demanda .....	171
10.5. Plantas de potencia virtuales .....	173
10.7. Problemas binarios en sistemas eléctricos.....	176
10.9. Ejercicios.....	178
<b>CAPÍTULO ONCE .....</b>	<b>181</b>
<b>APROXIMACIÓN CONVEXA AL FLUJO DE CARGA .....</b>	<b>182</b>
11.1. Problemas convexos en variable compleja.....	182
11.2. Flujo de carga en redes de distribución .....	184
<b>CAPÍTULO DOCE.....</b>	<b>193</b>
<b>DINÁMICA Y ESTABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS.....</b>	<b>194</b>
12.1. Dinámica en sistemas eléctricos.....	194
12.2. Análisis de sistemas dinámicos .....	196
12.6. Lecturas complementarias.....	204
12.7. Ejercicios.....	204
<b>CAPÍTULO TRECE .....</b>	<b>206</b>
<b>CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO .....</b>	<b>207</b>
13.1. La estrategia de receding horizon .....	207
13.4. Análisis de estabilidad .....	213
<b>CUARTA PARTE .....</b>	<b>216</b>
<b>ALGORITMOS DE SOLUCIÓN.....</b>	<b>216</b>
<b>CAPÍTULO CATORCE.....</b>	<b>217</b>
<b>MÉTODO DEL GRADIENTE .....</b>	<b>218</b>
14.1. Conceptos preliminares.....	218
14.3. Método del gradiente con paso óptimo .....	226
<b>CAPÍTULO QUINCE.....</b>	<b>231</b>
<b>MÉTODO NEWTON .....</b>	<b>232</b>
15.1. Método de Newton.....	232
<b>CAPÍTULO DIECISÉIS .....</b>	<b>244</b>
<b>MÉTODO DE PUNTOS INTERIORES .....</b>	<b>245</b>
16.1. Métodos de puntos interiores.....	245
<b>CAPÍTULO DIECISIETE .....</b>	<b>254</b>
<b>MÉTODOS PROXIMALES.....</b>	<b>255</b>
17.1. Métodos de proyección.....	255
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>267</b>
<b>ÍNDICE ALFABÉTICO.....</b>	<b>272</b>

## FIGURAS

<b>Figura nro. 1.</b> El proceso de optimización matemática en un problema de ingeniería.....	13
<b>Figura nro. 2.</b> Tipos de problemas de optimización: programación lineal (PL), programación entera (PE), programación no lineal (PNL), programación no lineal entera mixta (PNLE).....	14
<b>Figura nro. 1.1.</b> Ejemplo de óptimos locales y globales: a) función con dos óptimos locales y sus respectivos vecindarios de optimalidad $V_1$ y $V_2$ , b) función con un único óptimo global.....	20
<b>Figura nro. 1.2.</b> Ejemplo de una región plana en una función univariable.....	21
<b>Figura nro. 1.3.</b> Comparación entre la normas 1, 2 e $\infty$ en el plano.....	29
<b>Figura nro. 1.4.</b> Interpretación geométrica del multiplicador de Lagrange.....	33
<b>Figura nro. 1.5.</b> Sistema de tren eléctrico alimentado desde dos subestaciones A, B.....	34
<b>Figura nro. 2.1.</b> Grafo orientado que representa un problema de transportes entre los nodos de producción (G) y los nodos de demanda (D).....	38
<b>Figura nro. 2.2.</b> Ejemplo de un poliedro cerrado (politopo) y de un poliedro abierto con sus respectivas direcciones extremas.....	39
<b>Figura nro. 2.3.</b> Ejemplo de politopo en $R_2$ dado por una restricción de la forma $Ax \leq b$ .....	39
<b>Figura nro. 2.4.</b> Representación de los puntos interiores a un politopo como una combinación lineal de sus vertices.....	40
<b>Figura nro. 3.1.</b> Ejemplo de un conjunto convexo $A$ y un contraejemplo de un espacio no convexo $B$ .....	47
<b>Figura nro. 3.2.</b> Ejemplo de tres conjuntos denidos por una bola en el plano.....	48
<b>Figura nro. 3.3.</b> Ejemplo de un politopo como la intersección de tres conjuntos convexos.....	49
<b>Figura nro. 3.4.</b> Ejemplo de un cono convexo $A$ y un cono no convexo $B$ .....	53
<b>Figura nro. 3.5.</b> Ejemplo de dos funciones convexas: a) $f(x) = x^2$ , b) $f(x) = \ln(x)$ .....	55
<b>Figura nro. 3.6.</b> Representación gráfica de la vecindad de $x$ en un problema de optimización convexa sobre un espacio convexo.....	61
<b>Figura nro. 4.1.</b> Interpretación geométrica de las condiciones dadas por el Teorema 4.1.....	69
<b>Figura nro. 4.3.</b> Representación gráfica para el análisis del ejemplo 1.....	71
<b>Figura nro. 4.4.</b> Ejemplo de subgradiente en un punto $y$ .....	75
<b>Figura nro. 4.8.</b> Hiperplano de soporte del epígrafo de $f$ como subgradiente de $f$ .....	78
<b>Figura nro. 5.1.</b> Comparación entre el problema primal y dual para el ejemplo 1.....	85
<b>Figura nro. 5.2.</b> Diagrama esquemático del problema primal del ejemplo 5.4.....	87
<b>Figura nro. 5.3.</b> Relación entre los problemas primales y duales.....	88
<b>Figura nro. 5.4.</b> Interpretación gráfica del concepto de dualidad fuerte en un problema de optimización convexa con una variable.....	89
<b>Figura nro. 5.5.</b> Interpretación gráfica del concepto de dualidad en un problema de optimización no convexo.....	91
<b>Figura nro. 5.6.</b> Ejemplo de un sistema con una masa sobre un plano inclinado.....	94
<b>Figura nro. 6.1.</b> Jerarquía de algunos problemas de optimización convexa: programación semidenida (SDP), programación cónica de segundo orden (SOCP), programación cuadrática (QP), programación cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP), programación lineal (LP).....	101
<b>Figura nro. 6.2.</b> Uso del determinante para calcular el volumen de un elipsoide visto como una transformación lineal de una bola unitaria.....	104
<b>Figura nro. 7.1.</b> Dominancia de Pareto en problemas de optimización robusta.....	125

<b>Figura nro. 8.2.</b> Ejemplo de suma de Minkowski para dos conjuntos convexos $A$ y $B$ .....	139
<b>Figura nro. 8.3.</b> Politopo de Newton para $p$ y para la posible descomposición SOS. ....	140
<b>Figura nro. 9.1.</b> Envoltura convexa asociada a un conjunto no convexo. ....	149
<b>Figura nro. 9.3.</b> Ejemplo de un espacio de soluciones asociado a un problema de optimización polinomial. ....	155
<b>Figura nro. 9.4.</b> Medida de algunos conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$ . $\mu(A) = 1, \mu(B) = 2, \mu(C) = 2, \mu(D) = 0$ . ....	159
<b>Figura nro. 10.1.</b> Modelo de despacho económico por áreas, considerando restricciones de red con el modelo de transportes. ....	170
<b>Figura nro. 10.2.</b> Esquema V2G con un agregador que centraliza las acciones de control y resuelve problemas de optimización convexa en tiempo real. ....	173
<b>Figura nro. 10.3.</b> Micro-red en DC con medición centralizada. ....	175
<b>Figura nro. 11.1.</b> Diferentes direcciones para obtener $\Delta z \rightarrow 0$ en el plano complejo. ....	184
<b>Figura nro. 12.1.</b> Ejemplo de una máquina síncrona conectada a un barraje inmito. ....	195
<b>Figura nro. 12.2.</b> Estabilidad de un punto de equilibrio asociado a un sistema dinámico autónomo. ....	197
<b>Figura nro. 12.3.</b> Politopo de Newton asociado a la derivada de $V$ . ....	201
<b>Figura nro. 13.1.</b> Esquema básico de la estrategia de receding horizon. ....	208
<b>Figura nro. 15.2.</b> Posibles soluciones del sistema dado por las ecuaciones 15.3 y 15.4. ....	234
<b>Figura nro. 15.3.</b> Diagrama esquemático que representa la proyección del gradiente $\nabla f(x^k)$ sobre el espacio nulo de $A$ . ....	240

## TABLAS

<b>Tabla nro. 1.1.</b> <i>Cotas en diferentes conjuntos.</i> .....	22
<b>Tabla nro. 10.1.</b> <i>Valores esperados de auencias y demandas.</i> .....	178
<b>Tabla nro. 10.2.</b> <i>Generación solar y precio de bolsa para la micro-red del ejercicio 1</i> .....	179
<b>Tabla nro. 10.3.</b> <i>Mediciones de voltaje y corriente en una micro-red dc para diferentes puntos de operación</i> .....	180

# INTRODUCCIÓN

Un problema de optimización matemática consiste en cuatro elementos básicos: un conjunto de parámetros de entrada, un vector de variables de decisión, una función objetivo (usualmente costos) y un conjunto de restricciones técnicas. Las características de cada uno de estos elementos determinan el tipo de problema de optimización y la metodología a utilizar. Son de nuestro interés aquellos modelos que pueden ser representados como un conjunto de ecuaciones, tal y como se muestra a continuación:

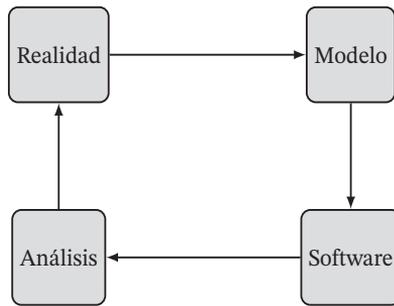
$$\min_{x \in \Omega} f(x, \beta)$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son las variables de decisión,  $\beta$  son los parámetros de entrada,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es la función objetivo y  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es el espacio de soluciones factibles.

El proceso de optimización, a su vez, requiere cuatro pasos como se muestra en la FIGURA NRO. 1. El primer paso consiste en identificar el problema y plantear un modelo matemático. Podríamos decir que este paso es más un arte que una ciencia, pues no existe un método general para definir el modelo más adecuado; un mismo problema puede tener varios modelos, así que la experiencia es un elemento fundamental para definir un modelo que represente adecuadamente la realidad pero que, al mismo tiempo, pueda ser solucionado computacionalmente.

Una vez se tiene un modelo matemático, el siguiente paso es solucionarlo mediante un software especializado. Dado que un mismo problema puede tener varios modelos, es importante hacer las aproximaciones adecuadas para lograr que el modelo resultante cuente con características teóricas tales como globalidad y unicidad de la solución.

Finalmente, la última etapa del proceso consiste en analizar los resultados y evaluarlos en el contexto del problema práctico con el fin de afinar el modelo. Esto



**FIGURA NRO. 1.** El proceso de optimización matemática en un problema de ingeniería<sup>1</sup>.

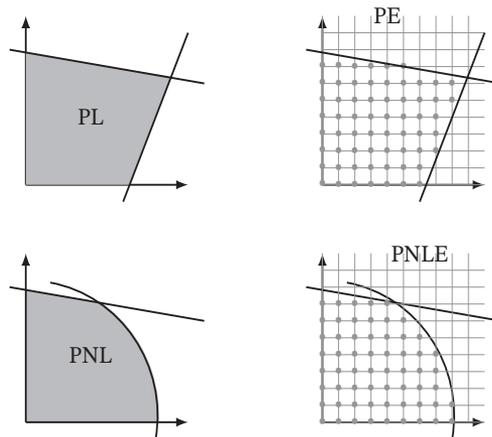
implica retornar al paso de modelado. El proceso se repite hasta que la solución sea adecuada desde el punto de vista teórico, computacional y práctico.

La mayoría de problemas de optimización matemática se pueden clasificar en cuatro tipos, como se muestra en la FIGURA NRO. 2. Estos son: programación lineal (PL), programación lineal entera (PLE), programación no lineal (PNL) y programación no lineal entera mixta (PNLEM). Esta clasificación, aunque simplista, permite identificar los principales retos asociados a cada uno de los problemas. En general, los problemas más simples son los PL mientras que los más complejos son los PNLEM. Dicha complicación depende de muchos factores, tales como las características geométricas y el número de variables, siendo las primeros más importante que los segundos; así, un problema de PL con 1000 variables es mucho más sencillo que un problema de PNLEM con 100 variables debido a que, en el primer caso, el espacio de soluciones es continuo y lineal mientras que, en el segundo, es discreto y curvo.

En este libro, nos enfocaremos en problemas con una característica geométrica denominada *convexidad* que garantiza ciertas ventajas, a saber:

- Los problemas convexos tienen asociados algunos conceptos teóricos que son importantes en todos los problemas de optimización matemática. Entender estos conceptos permite entender mejor los problemas de optimización matemática y la eficiencia de los algoritmos de solución. En particular, los problemas convexos garantizan que la solución encontrada sea el óptimo global. Así mismo, se puede demostrar la convergencia de los algoritmos bajo condiciones específicas.
- Existen algoritmos altamente eficientes que solucionan problemas convexos; en la práctica, cualquier problema convexo es tratable computacionalmente. En algunos casos, se puede incluso desarrollar algoritmos que funcionen en tiempo real y que permitan solucionar problemas de operación y control de sistemas eléctricos.
- Muchos problemas prácticos en Ingeniería Eléctrica son convexos; por ejemplo,

<sup>1</sup>Todas las figuras que se presentan en el libro son elaboración propia del autor (N.del E.).



**FIGURA NRO. 2.** Tipos de problemas de optimización: programación lineal (PL), programación entera (PE), programación no lineal (PNL), programación no lineal entera mixta (PNLE).

el despacho económico de plantas térmicas o el análisis de estabilidad mediante desigualdades matriciales.

- Existen metodologías que permiten resolver problemas de PNL (no convexos) PE y PNLE mediante aproximaciones convexas. Estas aproximaciones son suficientes en algunos problemas prácticos y proporcionan más información que las técnicas heurísticas.
- El resultado de la aproximación convexa puede servir como punto de partida en otras metodologías de optimización.

En resumen, la optimización convexa tiene una fundamentación teórica sólida y un rango de aplicación amplio. Por tanto, estudiaremos primero el aspecto teórico antes de adentrarnos en sus aplicaciones. En general, los modelos de optimización convexa incluyen a los problemas de PL y algunos de PNL. Sin embargo, otros tipos de problemas pueden ser solucionados mediante las técnicas de optimización convexa usando aproximaciones adecuadas, esto dependerá del tipo de aplicación.

El libro está orientado a estudiantes de Ingeniería Eléctrica/Electrónica que tengan conocimientos básicos en álgebra lineal y cálculo multivariado. Un primer curso de programación lineal podría ser un complemento adecuado aunque no obligatorio, ya que el libro busca ser autocontenido, partiendo de conceptos tan básicos como el criterio de la derivada hasta terminar en metodologías avanzadas como suma de polinomios cuadráticos y programación semidefinida. El contenido se presenta agrupado de la siguiente forma:

**Primera parte: Fundamentación matemática.** En este apartado, se muestra la

fundamentación matemática asociada a los problemas de optimización convexa sobre  $\mathbb{R}^n$ . Partimos de conceptos básicos de optimización sobre los reales, multiplicadores de Lagrange y programación lineal para terminar en temas un poco más avanzados como dualidad y las condiciones Karush-Kuhn-Tucker. Asimismo, presentaremos algunos resultados teóricos importantes, tales como la globalidad de la solución en problemas convexos, la unicidad en problemas estrictamente convexos y la relación de dualidad fuerte en problemas que cumplan las condiciones de Slater.

**Segunda parte: Optimización convexa en espacios diferentes a  $\mathbb{R}^n$ .** En esta sección, presentamos los modelos de optimización en espacios lineales más abstractos, tales como el espacio de las matrices semidefinidas y el espacio de los polinomios reales. Los conceptos teóricos presentados en la primera parte se mantienen en este tipo de espacios que, a pesar de su carácter abstracto, tienen múltiples aplicaciones en ingeniería.

**Tercera parte: Aplicaciones.** En esta, mostramos algunas aplicaciones asociadas a modelos de optimización convexa en ingeniería. En particular, algunas ideas tales como la optimización robusta y las restricciones probabilísticas. También, expondremos aplicaciones de optimización convexa en problemas de control, así como en el problema de flujo de carga óptimo en sistemas de potencia. Estas son solo algunas de las aplicaciones posibles, pero permiten dar un vistazo general a la parte práctica de la metodología.

**Cuarta parte: Algoritmos** En esta última parte, presentamos los algoritmos clásicos de solución para problemas de optimización convexa. El objetivo de este apartado es ver qué hay «dentro de la caja». Mostraremos resultados asociados a la convergencia del método del gradiente, el método de Newton y los métodos proximales. Es importante resaltar que, debido a la propiedad de globalidad asociada a los problemas convexos, el método de solución es indiferente. Esto significa que en la práctica podríamos usar cualquier paquete o algoritmo de optimización para encontrar la solución de los problemas convexos. Nuestros modelos son por tanto, independientes a la forma de implementación.

Cada capítulo incluye demostraciones y ejemplos de aplicación, y finaliza con ejercicios y lecturas complementarias. Hemos optado por un número limitado tanto de ejercicios como de referencias bibliográficas con el objetivo de no saturar al estudiante con contenido innecesario o ejercicios repetitivos. En los primeros capítulos, dichos ejercicios son básicamente geométricos pero más adelante se presentan ejemplos y ejercicios orientados a los sistemas eléctricos. La estructura del libro busca una fundamentación teórica sólida con aplicaciones prácticas en Ingeniería Eléctrica. Se recomienda al estudiante hacer experimentos numéricos en diferentes lenguajes de modelado con el fin de adquirir intuición de los modelos. Citando al matemático Vladimir Arnold, «la matemática es una ciencia aplicada, simplemente es la ciencia en donde los experimentos son más baratos».

Para finalizar, quiero agradecer a las personas que han contribuido en este trabajo. En primer lugar, a mi esposa Juanita Escobar quien hizo la primera revisión de estilo

del documento; a David Mejía de la Editorial UTP, quien perfeccionó esta corrección; igualmente, al doctor Cristian Guarnizo por sus invaluable recomendaciones técnicas y de formato en LaTeX; finalmente, a los estudiantes del curso de optimización convexa quienes contribuyeron a detectar algunos gazapos en las ecuaciones y ejemplos.

El autor.

## **PRIMERA PARTE**

### **FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

**1**

**CAPÍTULO  
UNO**

# PRELIMINARES MATEMÁTICOS

*En este capítulo se revisan algunos conceptos de cálculo multivariado y álgebra lineal. Así mismo, se presenta una teoría básica de optimización matemática en funciones continuas y diferenciables. También se presenta una breve introducción al método de multiplicadores de Lagrange y se analizan propiedades básicas de las formas cuadráticas.*

## 1.1. Modelos de optimización matemática

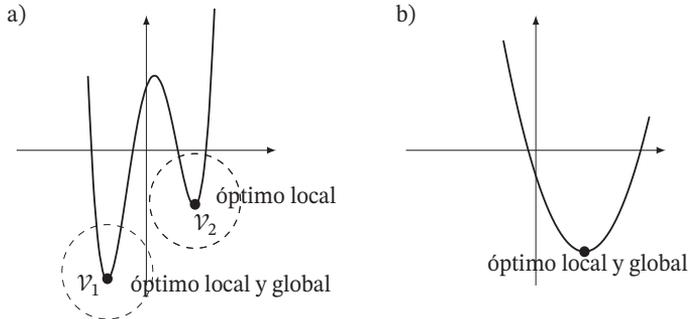
Cualquier problema de optimización matemática puede ser representado como se muestra en la ecuación 1.1

$$\min_{x \in \Omega} f(x, \beta) \quad (1.1)$$

en donde  $x$  son las variables de decisión,  $\beta$  son los parámetros del modelo y  $\Omega$  es el conjunto de soluciones factibles. La función objetivo la podemos interpretar como un mapa que toma puntos de  $\Omega$  y entrega puntos en un conjunto  $\Gamma = \{y = f(x) : x \in \Omega\}$ . Estamos interesados en resolver el problema de optimización, encontrando los puntos  $x$  en  $\Omega$  cuya imagen en  $\Gamma$  sea óptima. Pero, ¿qué significa realmente «resolver» el problema? ¿Cómo estamos seguros que una solución  $x$  es realmente óptima? Para resolver estos interrogantes, necesitamos estudiar la geometría tanto de  $\Omega$  como de

Γ. Igualmente, necesitamos definiciones formales que nos permitan avanzar con paso firme.

**Definición 1.1. Óptimos locales y óptimo global.** Un punto  $\bar{x}$  es un óptimo local asociado al problema de optimización  $\{\min f(x), x \in \Omega\}$ , si existe un conjunto abierto  $\mathcal{V}(\bar{x})$  llamado vecindario, el cual contiene a  $\bar{x}$ , tal que  $f(x) \geq f(\bar{x}), \forall x \in \mathcal{V}(\bar{x})$ . Si  $\Omega \supseteq \mathcal{V}$  entonces el óptimo es global.



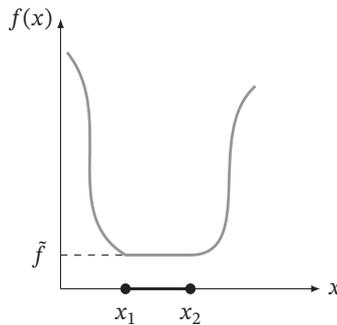
**FIGURA NRO. 1.1.** Ejemplo de óptimos locales y globales: a) función con dos óptimos locales y sus respectivos vecindarios de optimalidad  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ , b) función con un único óptimo global.

La FIGURA NRO. 1.1 muestra el concepto de óptimo local y global para dos funciones en  $\mathbb{R}$  con sus respectivos vecindarios  $\mathcal{V}$ . En el primer caso, se tiene una función con dos mínimos locales cuyos vecindarios son  $\mathcal{V}_1$  y  $\mathcal{V}_2$ . El óptimo asociado a  $\mathcal{V}_1$  es además el mínimo global de la función. En el segundo caso, existe un único punto mínimo (local y global). En este ejemplo, vemos claramente que el segundo problema es más fácil de resolver que el primero, pues tiene un único óptimo. La forma de la función tiene una fuerte influencia en este caso.

**Definición 1.2. Regiones planas.** Decimos que  $\Gamma \subseteq \Omega$  es una región plana asociada a la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si todos los puntos  $x \in \Gamma$  constituyen un óptimo (local o global) de  $f$ .

La FIGURA NRO. 1.2 muestra un ejemplo de una región plana para una función univariada. Este caso muestra que aunque existe un óptimo global, este se produce en diferentes puntos del espacio de soluciones. Nótese que todos los puntos del conjunto  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x_1 \leq x \leq x_2\}$  producen el mismo óptimo global  $\bar{f}$ . En otras palabras, un óptimo global no implica que la solución sea única; estamos interesados en investigar tanto las propiedades de globalidad como de unicidad de las soluciones. Estas propiedades están estrechamente relacionadas con el concepto de convexidad, el cual constituye el eje central de este libro.

Encontrar el óptimo global y demostrar unicidad de la solución asociada a un problema de optimización matemática tienen fuertes implicaciones prácticas,



**FIGURA NRO. 1.2.** Ejemplo de una región plana en una función univariable.

especialmente en ambientes económicos altamente competitivos como los que se presentan en el sector eléctrico. Supongamos que debemos hacer una inversión de cientos de millones de pesos y nuestro modelo nos arroja una solución óptima local, ¿de que me sirve esta solución si tal vez existe una de mejor calidad?, ¿cómo podemos estar seguros que la solución que hemos encontrado es el óptimo global? ¿Como podemos asegurar que esta era la única solución óptima? Estas preguntas tienen implicaciones prácticas pero deben ser solucionadas con base en una adecuada fundamentación teórica. Necesitamos, por tanto, construir esta fundamentación antes de empezar a atacar el problema.

## 1.2. Sobre conjuntos y funciones

A continuación, presentamos una serie de definiciones que serán de utilidad más adelante en nuestro análisis.

**Definición 1.3** (Conjunto ordenado). Decimos que un conjunto  $\Omega$  está totalmente ordenado si podemos establecer una relación del tipo  $\leq$  con las siguientes propiedades:

- REFLEXIBILIDAD:  $a \leq a \forall a \in \Omega$ .
- ANTISIMETRÍA: si  $a \leq b$  y además  $b \leq a$  entonces necesariamente  $a = b$ .
- TRANSITIVIDAD:  $a \leq b$  y  $b \leq c$  implica que  $a \leq c$ .
- TRICOTOMÍA: para cualquier par de elementos  $a, b$  del conjunto se cumple que  $a \leq b$  o bien  $b \leq a$ .

Esta definición es apenas obvia si pensamos en los números naturales, el cual es un conjunto ordenado y, por tanto, cumple con las cuatro propiedades. No obstante, en los complejos es un poco más «complejo»: consideremos los números  $1 + i$  y  $1 - i$ . ¿Cuál

de estos dos números es mayor? Resulta claro que no podemos establecer una relación del tipo  $\leq$  o  $\geq$ ; por tanto, los complejos son un conjunto no-ordenado.

El espacio de soluciones  $\Omega$  puede ser un conjunto no-ordenado<sup>1</sup>. Sin embargo, el espacio de la función objetivo  $\Gamma$  debe ser ordenado, pues optimizar no es más que establecer relaciones del tipo  $\leq$  entre un punto y los demás elementos del conjunto. Por eso, la función objetivo de nuestros problemas de optimización estará siempre sobre un conjunto totalmente ordenado, en particular, sobre los reales.

Cabe notar que podríamos plantear problemas de optimización sobre conjuntos parcialmente ordenados; ese es el caso de la optimización multi-objetivo en donde no se puede encontrar relaciones del tipo  $\leq$  entre dos objetivos usualmente contradictorios. En este caso, se pueden encontrar relaciones de dominancia en un frente de Pareto, como se presentará en el capítulo siete.

**Definición 1.4. Fronteras de un conjunto.** Dado un conjunto ordenado  $\Omega$  definimos lo siguiente:

- Supremo: el supremo de un conjunto ordenado denotado como  $\sup(\Omega)$  es el mínimo valor que es mayor a todos los elementos de  $\Omega$ .
- Ínfimo: el ínfimo de un conjunto ordenado denotado como  $\inf(\Omega)$  es el máximo valor que es menor a todos los elementos de  $\Omega$ .

El supremo y el ínfimo están estrechamente relacionados con el máximo y el mínimo de un conjunto. La principal diferencia radica en que el ínfimo y el supremo pueden estar por fuera del conjunto. Por ejemplo, el supremo del conjunto  $\Omega = [3, 5)$  es 5 mientras que el máximo no existe ya que 5 no pertenece a  $\Omega$  pues el conjunto es abierto por la derecha.

**Ejemplo 1.1.** La TABLA NRO. 1.1 muestra algunos casos de mínimos y máximos en intervalos abiertos y cerrados sobre la recta numérica. ■

conjunto	sup	max	inf	min
$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$	4	4	1	1
$\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$	2	2	1	1
$\Omega_3 = \{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 8\}$	8	8	3	-
$\Omega_4 = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < 9\}$	9	-	2	2
$\Omega_5 = \{x \in \mathbb{R} : 4 < x < 7\}$	7	-	4	-

**TABLA NRO. 1.1.** Cotas en diferentes conjuntos.

<sup>1</sup>Un ejemplo de un problema de optimización sobre un conjunto no-ordenado es el flujo de carga óptimo en redes AC. En este caso, el espacio de soluciones corresponde a los números complejos mientras que el espacio de la función objetivo apunta a las pérdidas de potencia activa, las cuales se representan en los reales.

En la mayoría de nuestras aplicaciones, los conjuntos son cerrados y, por tanto, no es necesario hacer distinción entre sup y máx o entre ínf y mín. Sin embargo, algunos análisis teóricos van a requerir hacer énfasis en este detalle, al menos para unificar la nomenclatura.

Algunas propiedades útiles en el caso de ser aplicado sobre funciones reales son las siguientes:

$$\sup_x f(x) = -\inf_x -f(x) \quad (1.2)$$

$$\sup_x \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \sup_x f(x) \quad (1.3)$$

$$\sup_x \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_x f(x) + \sup_x g(x) \quad (1.4)$$

$$\sup_x \{f(x) + \alpha\} = \alpha + \sup_x f(x) \quad (1.5)$$

En este último caso, tenemos además que,

$$\bar{x} = \operatorname{argmin}\{f(x) + \alpha\} = \operatorname{argmin}\{f(x)\} \quad (1.6)$$

Dicho de otro modo, el valor de  $x$ , que minimiza la función  $f(x) + \alpha$ , es el mismo valor que minimiza la función  $f(x)$  y, por tanto, podemos obviar la constante  $\alpha$ . Una interpretación económica de esta propiedad es que los costos fijos no son sujetos de optimización<sup>2</sup>.

**Definición 1.5. Función monótona.** Decimos que una función  $f$  es monótonamente creciente, si para todo  $x$ , y tal que  $x \leq y$ , se tiene que  $f(x) \leq f(y)$  (es decir, se preserva el orden de la desigualdad). Una función es monotonamente decreciente si  $f(x) \geq f(y)$  —cambia el orden de la igualdad—.

Las funciones monótonas tienen la propiedad de mantener el orden del conjunto, así que debemos tener en mente este concepto al momento de trabajar con desigualdades. Por ejemplo, si  $x \leq y$  no podemos concluir inmediatamente que  $f(x) \leq f(y)$ . Las desigualdades se mantienen en funciones crecientes mientras que cambian en funciones decrecientes. Sin embargo, no podemos decir nada de una función que no sea ni creciente ni decreciente. Este es un hecho simple pero importante que a veces se pasa por alto al momento de trabajar con desigualdades. Veamos un ejemplo para afianzar el concepto.

**Ejemplo 1.2.** La función  $f(x) = x^2$  no es monótona en todo su dominio, por tanto, la desigualdad  $-3 \leq 1$  no se mantiene al aplicar la función, es decir,  $f(-3) \not\leq f(1)$ . No obstante, la función es monótonamente creciente en  $\mathbb{R}_+$  y por ende una desigualdad de la forma  $4 \leq 8$  se mantiene  $f(4) \leq f(8)$  pues ambos términos están sobre el dominio  $\mathbb{R}_+$ . ■

<sup>2</sup>Por ejemplo, el costo directo de operación asociado a las centrales de generación hidroeléctrica se suele asumir como cero.

**Definición 1.6. Función continua.** Una función  $f : \Omega \rightarrow \Gamma$  es continua si para cada conjunto abierto  $S \in \Gamma$ , existe un conjunto abierto  $f^{-1}(S) \in \Omega$ .

En un problema de optimización no necesitamos que una función sea continua en el espacio de soluciones pero sí que tenga un número finito de discontinuidades. Un ejemplo de una función discontinua, que puede ser útil en los problema de optimización, es la función indicatriz.

**Definición 1.7. Función indicatriz.** La función indicatriz, asociada a un conjunto  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ , es una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$I_{\Omega}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega \\ \infty & x \notin \Omega \end{cases} \quad (1.7)$$

**Ejemplo 1.3.** La función indicatriz es útil para definir el espacio de soluciones en problemas de optimización, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ 10 \leq x \leq 20 \end{aligned} \quad (1.8)$$

En este caso, podemos definir el conjunto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R} : 10 \leq x \leq 20\}$  y la función indicatriz correspondiente

$$I_{\Omega}(x) = \begin{cases} 0 & 10 \leq x \leq 20 \\ \infty & x > 20, x < 10 \end{cases} \quad (1.9)$$

Finalmente, el problema de optimización puede ser reescrito en función de  $I_{\Omega}(x)$ , como sigue:

$$\min f(x) + I_{\Omega}(x) \quad (1.10)$$

Nótese que este problema es ahora irrestricto, pero que la función objetivo es discontinua, así que no podemos usar el criterio de la derivada para evaluar el óptimo. En este caso, necesitamos desarrollar el concepto de subdiferencial como se mostrará en el capítulo tres. ■

### 1.3. Formas cuadráticas

**Definición 1.8. Forma cuadrática.** Una forma cuadrática  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio con variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en donde todos los términos son a lo sumo de orden 2. En general, cualquier forma cuadrática puede ser escrita como:

$$Q(x) = x^T A x + b^T x + c \quad (1.11)$$

en donde  $A$  es una matriz cuadrada,  $b$  es un vector columna y  $c$  es una constante.

**Ejemplo 1.4.** Consideremos la siguiente forma cuadrática,

$$Q(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^2 + 8x + 4y + 15 \quad (1.12)$$

Esta forma la podemos reescribir matricialmente como:

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 15 \quad (1.13)$$

Nótese que esta no es la única representación posible, pues la siguiente forma también es una representación de muchas posibles:

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 15 \quad (1.14)$$

■

**Lema 1.1.** Si  $N$  es una matriz antisimétrica, es decir,  $N = -N^T$ ; entonces la siguiente forma cuadrática será siempre cero:

$$q(x) = x^T N x \quad (1.15)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que  $q(x)$  es un escalar entonces  $q(x) = q(x)^T$ , esto significa que

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x)^T \\ &= (x^T N x)^T \\ &= (N x)^T x \\ &= x^T N^T x \end{aligned} \quad (1.16)$$

pero como  $N^T = -N$ , entonces  $q(x)^T = -q(x)$ ; por la propiedad de la tricotomía, la única forma en que esto sea cierto es que  $q(x) = 0$  con lo que el Lema 1.1 queda demostrado. □

**Lema 1.2.** Toda forma cuadrática puede escribirse en función de una matriz simétrica.

DEMOSTRACIÓN. Digamos que hemos logrado representar la forma cuadrática como una matriz cuadrada  $A$ , no necesariamente simétrica. A su vez, esta matriz la podemos reescribir como:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \quad (1.17)$$

Definimos ahora  $M = A + A^T$  y  $N = A - A^T$ . Nótese que  $M$  es simétrica mientras que  $N$  es antisimétrica. Esto último significa que  $x^T N x = 0$ , por tanto, la forma cuadrática se puede reescribir como función de una matriz simétrica:

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^T M x + b^T x + c \quad (1.18)$$

□

**Ejemplo 1.5.** La forma cuadrática mostrada en la ecuación 1.13 puede ser reescrita en forma simétrica como se muestra a continuación:

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 15 \quad (1.19)$$

■

**Definición 1.9. Matriz semidefinida.** Decimos que una matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es semidefinida positiva, denotada por  $A \geq 0$ , si para cualquier vector  $u \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$u^T A u \geq 0 \quad (1.20)$$

Así, si la desigualdad se cumple estrictamente, decimos que la matriz es definida positiva ( $A > 0$ ). De otro lado, decimos que una matriz  $A$  es semidefinida o definida negativa si  $(-A) \geq 0$  o  $(-A) > 0$ , respectivamente.

Una matriz simétrica y semidefinida positiva tiene además las siguientes propiedades:

- La parte real de los eigenvalores es siempre positiva o cero.
- La matriz  $A$  se puede factorizar como  $A = CC^T$  en donde  $C$  es una matriz diagonal superior. Esta se denomina factorización de Cholesky.
- Si  $A > 0$  entonces  $A^{-1} > 0$ .
- Si  $A > 0$  y  $B > 0$  entonces  $A + B > 0$ .
- Sin embargo, si  $A > 0$  y  $B > 0$  no podemos decir nada de  $AB$ .

## 1.4. Productos interiores y normas

**Definición 1.10. Espacio lineal.** Un espacio lineal o espacio vectorial es un conjunto  $\mathcal{L}$  de elementos (vectores) junto con dos operaciones (suma vectorial y multiplicación por un escalar) tal que si  $x \in \mathcal{L}, y \in \mathcal{L}, \alpha \in \mathbb{R}$  entonces

1.  $x + y \in \mathcal{L}$ .
2.  $\alpha x \in \mathcal{L}$ .
3.  $x + y = y + x$ .
4.  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
5. Existe un elemento  $\vec{0}$  tal que  $x + \vec{0} = x$ .

6.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ .
7.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$ .
8.  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ .
9.  $0x = \vec{0}$ .
10.  $1x = x$ .

Es fácil demostrar que  $\mathbb{R}^n$ , con las operaciones vectoriales usuales, es un espacio lineal. Sin embargo, hay espacios lineales más abstractos que pueden ser útiles para definir problemas de optimización convexa; por ejemplo, un espacio de matrices, el espacio de funciones continuas en el intervalo  $[0, 1]$  o el espacio de los polinomios con coeficientes reales. Este último genera los problemas de sumas de cuadrados o SOS (por sus siglas en inglés: *sum of squares*).

**Definición 1.11. Subespacio lineal.** Un subconjunto no vacío  $\mathcal{S}$  de un espacio lineal  $\mathcal{L}$  es un subespacio lineal si cada vector de la forma  $\alpha x + \beta y \in \mathcal{S}$  para cualquier  $x, y \in \mathcal{S}$ .

Todo subespacio lineal es también un espacio lineal. Esta propiedad es útil para determinar si un conjunto es un espacio lineal sabiendo que pertenece a otro espacio lineal más grande. Un ejemplo típico es el conjunto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$  el cual es un subespacio lineal de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.12. Espacio afín.** Un espacio afín es un conjunto  $\Omega$  que admite traslaciones libres de un espacio lineal  $\mathcal{V}$ . En otras palabras, es un espacio que admite un mapa  $\Omega \times \mathcal{V} \rightarrow \Omega$  tal que

- Para cualquier  $x \in \Omega$  y  $u, v \in \mathcal{V}$  tenemos que  $x + (u + v) = (x + u) + v$ .
- Se tiene un vector cero  $x + 0 = x$ .
- Para cada  $x \in \Omega$  existe un vector  $v \in \mathcal{V}$  tal que  $x = u + v$ .

En términos informales, podemos decir que un espacio afín es un espacio lineal que se ha trasladado o que no tiene especificado un vector cero. Nótese que el conjunto  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$  con  $b \neq 0$  no es un espacio lineal pero sí es un espacio afín.

Una vez hemos definido el espacio lineal podemos asociarle una serie de operaciones adicionales, tales como el producto interior y la norma. La primera operación genera los llamados espacios de Hilbert mientras que la segunda genera los espacios de Banach. En ambos casos, se requiere además que el espacio sea completo; esto significa que es lo suficientemente «suave» como para permitir las operaciones del cálculo como el límite o la derivada. En nuestro caso, trabajaremos en espacios completos como  $\mathbb{R}^n$  (el conjunto de los números naturales es un ejemplo de un espacio que no es completo).

**Definición 1.13. Producto interior o escalar.** El producto interior o producto punto, denotado por  $x \cdot y$  es una operación que toma dos vectores de un espacio lineal y genera un escalar con las siguientes propiedades:

- $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ .
- $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ .
- $x \cdot x \geq 0$ ,  $x \cdot x = 0$  si  $x = \vec{0}$ .
- $(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y)$  —desigualdad de Cauchy–Schwarz—.

Un espacio lineal completo con producto interior lo llamamos espacio de Hilbert.

Podemos definir diferentes tipos de productos interiores sobre un mismo espacio; dos posibles ejemplos en  $\mathbb{R}^n$  son:

$$x \cdot y = x^T y \tag{1.21}$$

$$x \cdot y = x^T A y \tag{1.22}$$

En donde  $A$  es una matriz definida positiva. El uso de un producto interior dependerá de la aplicación pero es importante identificar sus propiedades, especialmente la desigualdad de Cauchy–Schwarz que será de utilidad en múltiples problemas prácticos. Nótese que dos vectores son perpendiculares si  $x \cdot y = 0$ ; esto significa que dos vectores pueden ser perpendiculares bajo una definición de producto-punto, pero no serlo bajo otra definición.

**Definición 1.14. Norma.** Sea  $\mathcal{L}$  un espacio lineal. Decimos que una función  $\|\cdot\| : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  es una norma si cumple las siguientes propiedades:

$$\|x\| > 0 \quad \forall x \in \mathcal{L} - \{\vec{0}\} \tag{1.23}$$

$$\|x\| = 0 \rightarrow x = \vec{0} \tag{1.24}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \tag{1.25}$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1.26}$$

Un espacio normado completo lo llamamos espacio de Banach.

Los tres ejemplos más comunes de normas sobre  $\mathbb{R}^n$  son los siguientes:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \tag{1.27}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \tag{1.28}$$

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i| \tag{1.29}$$

Cada una es un caso particular de la norma-p, definida de la siguiente forma:

$$\|x\|_p = \left( \sum_i |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1.30)$$

en donde  $p \geq 1$ . Un espacio lineal junto con una de estas normas se le conoce como espacio  $\mathcal{L}_p$  o espacio Lebesgue. En general, se tiene que  $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_\infty$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 1.3 para el caso de  $\mathbb{R}^2$ .

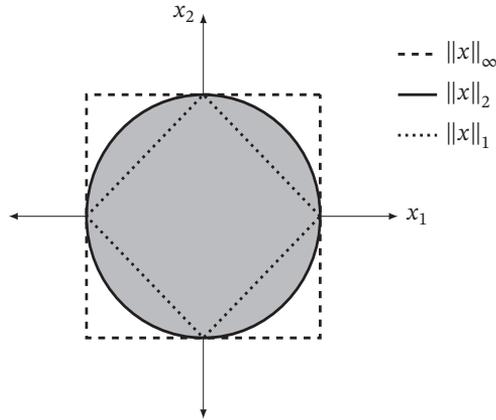


FIGURA NRO. 1.3. Comparación entre la normas 1, 2 e  $\infty$  en el plano.

También podemos generar normas sobre el espacio de las matrices inducida por alguna norma-p.

**Definición 1.15. Norma matricial inducida.** Dada una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$  podemos definir una nueva norma sobre el espacio  $\mathbb{R}^{m \times n}$  dada por

$$\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\| \quad (1.31)$$

**Lema 1.3.** Las normas inducidas tienen la propiedad de ser submultiplicativas, es decir,

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (1.32)$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese que la condición  $\|x\| = 1$  es equivalente a hacer que el vector sea unitario

$$\sup_{\|x\|=1} \|Mx\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{Mx}{\|x\|} \right\| \quad (1.33)$$

Ahora, calculamos  $\|AB\|$  y definimos  $y = Bx$ , premultiplicando por este factor sin modificar la ecuación

$$\begin{aligned}
 \|AB\| &= \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{ABx}{\|x\|} \right\| \\
 &= \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{(\|Bx\|)ABx}{(\|Bx\|)\|x\|} \right\| \\
 &= \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{(\|Bx\|)Ay}{(\|y\|)\|x\|} \right\| \\
 &\leq \sup_{\|x\| \neq 0} \left\| \frac{Bx}{\|x\|} \right\| \sup_{\|y\| \neq 0} \left\| \frac{Ay}{\|y\|} \right\| \\
 &\leq \|A\| \|B\|
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

□

Nótese que esta propiedad no está directamente establecida en nuestra definición de una norma-p. Sin embargo, muchas normas la cumplen, especialmente aquellas que provienen de un producto punto, como es el caso de la norma-2, que puede ser definida en función de un producto punto como  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ .

## 1.5. Teoría básica de máximos y mínimos

Revisemos algunos conceptos básicos, asociados a la solución de problemas de optimización en funciones continuas y diferenciables.

**Teorema 1.1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable con un mínimo o un máximo local en  $\tilde{x}$ , entonces tenemos que  $f'(\tilde{x}) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\tilde{x}$  es un mínimo local, entonces podemos definir un vecindario alrededor de  $\tilde{x}$ ; esto es  $\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} : x = \tilde{x} \pm t, |t| < t_0\}$ , tal que

$$f(\tilde{x} \pm t) \geq f(\tilde{x}) \tag{1.35}$$

De este modo, podemos notar que  $t$  puede ser positivo o negativo. Si  $t > 0$ , entonces

$$f'(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\tilde{x} + t) - f(\tilde{x})}{t} \geq 0 \tag{1.36}$$

Ahora, si  $t < 0$  entonces

$$f'(\tilde{x}) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\tilde{x} + t) - f(\tilde{x})}{t} \leq 0 \tag{1.37}$$

Por tanto,  $f'(\tilde{x}) = 0$ . Lo mismo se aplica si estamos buscando un máximo. □

**Teorema 1.2.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y diferenciable con un mínimo o un máximo local en  $\bar{x}$ , entonces tenemos que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un  $\Delta x \in \mathbb{R}^n$  arbitrariamente pequeño y definimos una nueva función  $g(t) = f(\bar{x} + t\Delta x)$ ; dado que  $\bar{x}$  es un mínimo local, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g(t) &\geq g(0) \\ f(\bar{x} + t\Delta x) &\geq f(\bar{x}) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Además, tenemos una relación para la derivada:

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + t\Delta x) - f(\bar{x})}{t} = (\nabla f(\bar{x}))^\top \Delta x \quad (1.39)$$

Entonces  $g'(0)$  es cero si  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ , lo cual es válido para cualquier valor de  $\Delta x$ .  $\square$

**Teorema 1.3.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y doblemente diferenciable con un mínimo local en  $\bar{x}$ , entonces la matriz hessiana  $\mathcal{H}_f$  es positiva definida en el vecindario  $\mathcal{V}(\bar{x})$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una expansión en un polinomio de Taylor alrededor de  $\bar{x}$ , a saber:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.40)$$

Si  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  entonces,

$$f(x) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \quad (1.41)$$

Esto significa que  $f(x) \geq f(\bar{x})$  cuando  $\frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top H_f(\bar{x})(x - \bar{x}) \geq 0$ , es decir, cuando  $\mathcal{H}_f$  es semidefinida positiva  $\forall x \in \mathcal{V}(\bar{x})$ . En este caso, podemos asegurar que se trata de un mínimo local.  $\square$

El Teorema 1.3 es importante porque permite identificar que se trata de un óptimo local; sin embargo, este teorema no es suficiente para identificar óptimos globales. Para ello, necesitamos desarrollar una teoría más completa, basada en la geometría del problema, la cual será presentada en el siguiente capítulo.

## 1.6. Multiplicadores de Lagrange

Consideremos ahora un problema de optimización con restricciones de igualdad como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) = a \end{aligned} \quad (1.42)$$

En este caso, se genera un espacio, posiblemente no-lineal, definido por 1.43,

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = a\} \quad (1.43)$$

Así, nuestro problema será encontrar el valor que minimice a  $f(x)$  pero que, al mismo tiempo, pertenezca al conjunto  $\Omega$ . Para solucionar este problema, establecemos otra función llamada lagrangeano dada por

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda(g(x) - a) \quad (1.44)$$

Nótese que esta función está definida en un nuevo espacio  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ya que hemos introducido una nueva variable  $\lambda$ , denominada multiplicador de Lagrange.

**Teorema 1.4.** Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , funciones continuas y diferenciables entonces, el óptimo del problema de optimización dado por 1.42 es equivalente al óptimo de la función lagrangeana.

DEMOSTRACIÓN. El óptimo de la función lagrangeana se obtiene derivando con respecto a  $x$  y a  $\lambda$ . Lo anterior permite obtener las condiciones de optimalidad de primer orden tales como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(x) - a = 0 \quad (1.46)$$

De la segunda expresión, podemos concluir que  $\Omega$  es igual a la ecuación 1.43, esto es, el conjunto de soluciones factibles. Además, si  $x \in \Omega$  entonces  $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x)$  en la ecuación 1.44 con lo cual concluimos que corresponde al óptimo en  $f$ .  $\square$

Nuevamente, en este caso, podemos establecer que se trata de un óptimo local usando el criterio de la segunda derivada dado por el Teorema 1.3. Sin embargo, no podemos garantizar que se trate de un óptimo global o que la solución sea única.

La FIGURA NRO. 1.4 muestra una interpretación geométrica del método de multiplicadores de Lagrange. El óptimo se produce cuando  $\nabla f$  es paralelo a  $\nabla g$ , en donde  $\lambda$  (el multiplicador de Lagrange) es la constante de proporcionalidad. Nótese que en el punto  $x_A$ , el gradiente de  $f$  puede ser proyectado sobre  $g$ . Esto permitirá encontrar un nuevo punto  $x_B$  que mejora la función objetivo para el caso de maximización. El punto  $\tilde{x}$  es un óptimo local porque los gradientes de  $f$  y  $g$  son paralelos, y además el punto está sobre la curva  $g(x) = 0$ . De esta índole, cualquier proyección del gradiente sobre la curva lleva nuevamente a  $\tilde{x}$ .

Analicemos ahora la relación entre el multiplicador de Lagrange y la restricción; para ello, consideramos un punto óptimo  $\tilde{x}$ ; ahora, derivamos el lagrangeano respecto a la constante  $a$ , asociada a la restricción de igualdad:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = [\nabla f] \left[ \frac{\partial x}{\partial a} \right] + \lambda \cdot \left( [\nabla g] \left[ \frac{\partial x}{\partial a} \right] - 1 \right) + \frac{\partial \lambda}{\partial a} \cdot (g(x) - a) \quad (1.47)$$

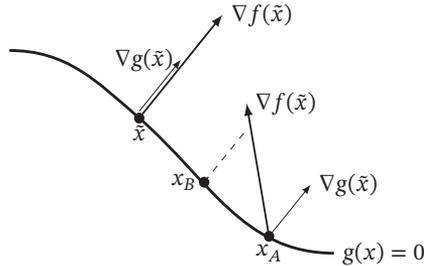


FIGURA NRO. 1.4. Interpretación geométrica del multiplicador de Lagrange.

Puesto que  $\bar{x}$  es una solución que cumple con las condiciones de optimalidad de primer orden, se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial a} = -\lambda \quad (1.48)$$

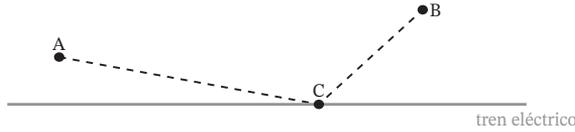
Por tanto, el multiplicador de Lagrange ( $\lambda$ ) representa la derivada de la función objetivo respecto a una variación en el parámetro que acompaña la restricción. Esta interpretación económica será desarrollada más adelante en el capítulo cuatro cuando presentemos el concepto de dualidad en problemas convexos.

## 1.7. Lecturas complementarias

Los conceptos presentados en este capítulo, aunque básicos, son necesarios para comprender el material que se presentará más adelante. Hemos obviado algunos detalles tales como el teorema de la función implícita, el cual es de utilidad para una demostración más completa del método de multiplicadores de Lagrange. El estudiante interesado puede referirse a [1] y sobre todo a [2] para más detalles sobre este aspecto.

## 1.8. Ejercicios

1. Considere un sistema de tren eléctrico con una vía lineal como se muestra en la FIGURA NRO. 1.5. Suponga que deseamos alimentar este sistema desde dos subestaciones A y B; para ello, proponemos una tercera subestación C la cual está sobre la ruta del tren. Determine la posición de la subestación C de tal forma que se use el mínimo cable, es decir, que la distancia ACB sea mínima.
  - Usar argumentos puramente geométricos
  - Usar el criterio de la derivada.
2. Demuestre que el espacio conformado por las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuas en el intervalo  $[0, 1]$  forman un espacio lineal y que el subconjunto de los polinomios



**FIGURA NRO. 1.5.** Sistema de tren eléctrico alimentado desde dos subestaciones A,B.

de grado  $n$  forman un subespacio de este espacio. Muestre igualmente que la siguiente relación es un producto interior. Determine la norma que induce este producto.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (1.49)$$

3. Considere el siguiente problema de optimización restringido a un conjunto  $\Omega$ , a saber:

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= x + y \\ (x, y) &\in \Omega \\ \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Redefina  $\Omega$  usando una parametrización en una nueva variable  $t$  tal que  $x = \cos(t), y = \sin(t)$ ; solucione el problema de optimización en función de esta parametrización (usar la regla de la cadena).

4. Resuelva el problema anterior usando las variables originales  $(x, y)$  mediante el método de multiplicadores de Lagrange. Analice las ventajas y desventajas de estas dos formas de solución.
5. Sea  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funciones acotadas. Demuestre las siguientes relaciones:

$$\sup_{\Omega} f - \sup_{\Omega} g \leq \sup_{\Omega} (f - g) \quad (1.51)$$

$$\inf_{\Omega} f - \inf_{\Omega} g \geq \inf_{\Omega} (f - g) \quad (1.52)$$

$$\inf_{\Omega} f + \inf_{\Omega} g \leq \inf_{\Omega} (f + g) \quad (1.53)$$

**2**

**CAPÍTULO  
DOS**

# PROGRAMACIÓN LINEAL

*Los problemas de programación lineal (PL) tienen propiedades geométricas y algebraicas que permiten garantizar el óptimo global. El espacio de soluciones asociado a un problema lineal es un politopo en donde el óptimo se encuentra en alguno de sus vértices. En este capítulo, estudiaremos estas propiedades sin adentrarnos en los algoritmos de solución.*

## 2.1. Representación de problemas PL

Un problema de programación lineal es aquel en donde tanto la función objetivo como las restricciones tienen una estructura de la forma  $f(x) = a^T x + b$ , en donde  $a$  y  $b$  son vectores columna. Una de las propiedades más importantes de los problemas de programación lineal es que se puede encontrar el óptimo global. Más adelante veremos que existen propiedades similares en todos los problemas convexos y que los problemas de programación lineal son solo un caso particular.

**Definición 2.1. Problema de programación lineal.** Un problema de programación

lineal representado en su forma canónica, es aquel que tiene la siguiente estructura,

$$\begin{aligned} \text{mín } c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

en donde  $x$  representa las variables de decisión.

La forma canónica no es la única representación de un problema de programación lineal; sin embargo, cualquier otra representación puede ser transformada en la forma canónica. Por ejemplo, si el problema es de maximización, podemos convertirlo en minimización multiplicando por  $-1$  y las restricciones de desigualdad las podemos convertir en igualdad usando variables de holgura o *slack*.

**Ejemplo 2.1.** Deseamos representar el siguiente problema de programación lineal en su forma canónica, a saber:

$$\begin{aligned} \text{máx } 3x - 2y \\ x + y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

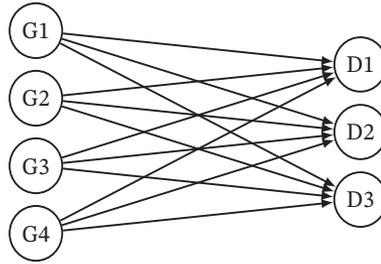
Para ello, convertimos el problema de maximización en uno de minimización y transformamos la restricción de desigualdad en una de igualdad usando una variable de holgura  $z$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{mín } -3x + 2y \\ x + y + z = 5 \\ x, y, z \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

■

**Ejemplo 2.2.** Existen múltiples problemas de optimización matemática que pueden ser representados como un problema de programación lineal. Uno de los más comunes es el problema de transportes, el cual consiste en minimizar los costos de operación asociados al transporte de un producto desde los centros de producción hasta los centros de consumo. Para ello, consideremos un grafo como el que se muestra en la FIGURA NRO. 2.1.

Definimos  $x_{ij}$ , como las variables de decisión, asociadas a la cantidad de producto transportado entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ . Definimos también un costo  $c_{ij}$ , asociado a transportar una unidad de producto desde el el generador  $i$  hasta la demanda  $j$ . El problema de optimización consiste en minimizar los costos de transporte teniendo en



**FIGURA NRO. 2.1.** Grafo orientado que representa un problema de transportes entre los nodos de producción ( $G$ ) y los nodos de demanda ( $D$ ).

cuenta el balance de masas en cada nodo, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\
 \sum_i x_i &= g_i \\
 \sum_j x_j &= d_j \\
 x_{ij} &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

en donde  $g_i$  es la producción en el nodo  $i$  y  $d_j$  es la demanda en el nodo  $j$ . Este problema puede ser extendido fácilmente a aplicaciones eléctricas, como veremos más adelante.



## 2.2. Geometría de los problemas PL

El espacio de soluciones asociado a un problema de programación lineal es un poliedro o un politopo<sup>1</sup> como se muestra en la FIGURA NRO. 2.2. Esta es una figura geométrica definida por un número finito de vértices en el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Se puede obtener también una forma abierta como la que se muestra en el lado derecho de la figura. En ese caso, el politopo está definido no solo por los vértices, sino también por las direcciones extremas; esto es, el conjunto de puntos de  $\Omega$  que pertenecen al rayo,  $r$  definido como sigue:

$$r = \{x : x = x_0 + \mu d, \mu \geq 0\} \tag{2.5}$$

**Ejemplo 2.3.** La FIGURA NRO. 2.3 muestra un politopo en  $\mathbb{R}^2$  con la siguiente

<sup>1</sup>Usaremos los términos poliedro y politope de forma indistinta, aunque tienen una definición matemática levemente diferente. El lector interesado puede consultar [3] para más detalles.

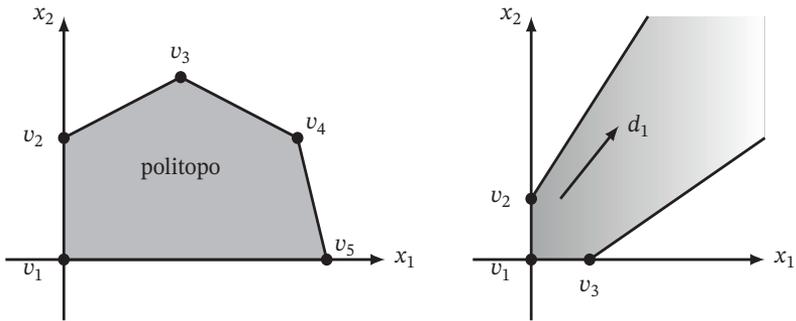
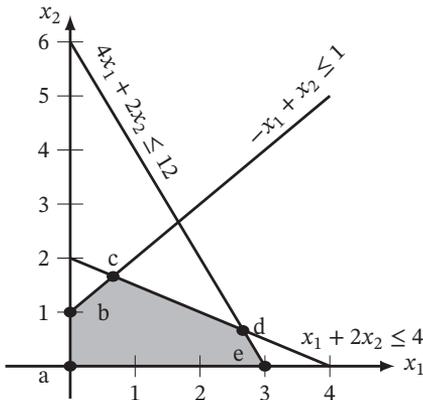


FIGURA NRO. 2.2. Ejemplo de un poliedro cerrado (politopo) y de un poliedro abierto con sus respectivas direcciones extremas.

representación

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.6)$$



- $a = (0, 0)$
- $b = (1, 0)$
- $c = (2/3, 5/3)$
- $d = (8/3, 2/3)$
- $e = (3, 0)$

FIGURA NRO. 2.3. Ejemplo de politopo en  $\mathbb{R}^2$  dado por una restricción de la forma  $Ax \leq b$ .

Este espacio se puede reescribir de la forma canónica adicionando variables *slack* o de holgura:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Los vértices marcados con letras minúsculas se pueden obtener como la intersección de dos rectas o hiperplanos en el caso de  $\mathbb{R}^n$ . ■

**Teorema 2.1. Teorema de Weyl.** Un poliedro  $\mathcal{P}$  puede ser representado en función de los vértices y las direcciones extremas como

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda_k v_k + \sum_i \mu_i d_i \\ \sum \lambda_k = 1 \\ \mu_i \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

en donde  $v_k$  son los vértices y  $d_i$  son las direcciones extremas.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un politopo cerrado, como el que se muestra en la FIGURA NRO. 2.4 en donde  $x$  es un punto arbitrario en su interior. Por tanto, podemos representar a  $x$  como  $x = \lambda v_1 + (1 - \lambda)y$  en donde  $y$  está en una arista y  $0 \leq \lambda \leq 1$ . A su vez, podemos representar  $y$  como una combinación lineal de otros vértices  $y = \mu v_3 + (1 - \mu)v_4$  y continuar así hasta representar todo el conjunto. En el caso de que el politopo sea abierto, debemos incluir las direcciones extremas. De esta forma, cualquier punto  $x$

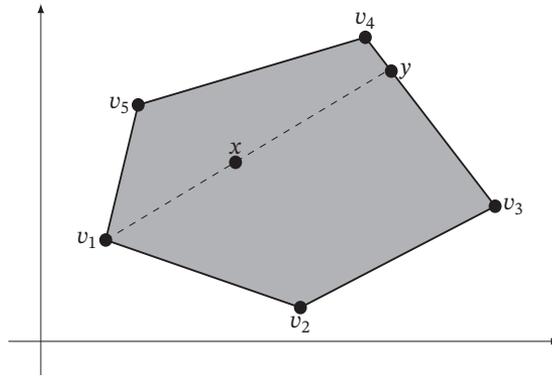


FIGURA NRO. 2.4. Representación de los puntos interiores a un politopo como una combinación lineal de sus vértices.

de un poliedro  $\Omega = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$  se puede representar como una combinación lineal de los vértices y las direcciones extremas

$$x = \sum_k \lambda_k v_k + \sum_i \mu_i d_i \quad (2.9)$$

En donde  $v_k$  es el conjunto de vértices,  $\sum \lambda_k = 1$  y  $d_i$  es el conjunto de direcciones extremas. □

Usando el teorema de Weyl podemos cambiar la representación del problema de programación lineal de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ x = \quad & \sum_k \lambda_k v_k + \sum_i \mu_i d_i \\ \sum \lambda_k = \quad & 1 \\ \mu_i \geq \quad & 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esta representación es poco práctica en problemas de gran tamaño, ya que el número de vértices y direcciones extremas puede ser muy elevado y se requiere solucionar un sistema lineal para encontrar cada uno de ellos. No obstante, esta representación nos permite el siguiente resultado, a saber:

**Teorema 2.2.** Dado un problema de programación lineal, podemos obtener los siguiente resultados: a) el problema es infactible, b) el problema es ilimitado, c) existe un óptimo global el cual se encuentra en un vértice o en una dirección extrema.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de la parte a) del teorema es trivial ya que corresponde al caso en que el espacio de soluciones es vacío. Para la parte b) y c) reemplazamos  $x$  en la función objetivo como sigue:

$$\min \sum_k \lambda_k (c^T v_k) + \sum_i \mu_i (c^T d_i) \tag{2.11}$$

Ahora, si existe algún  $c^T d_i$  que sea negativo entonces podemos aumentar  $\mu_i$  indefinidamente y por tanto el problema sería ilimitado. En caso contrario, es decir, si  $c^T d_i \geq 0$  entonces la mejor solución requiere que  $\mu_i = 0$ . En ese caso, la mejor solución se presenta cuando  $\lambda_k = 1$ , asociado al valor de  $k$  tal que  $c^T v_k$  sea el más pequeño.  $\square$

El teorema anterior permite desarrollar algoritmos como el *simplex*, el cual se mueve de vértice en vértice hasta encontrar la solución con la certeza de que, una vez encontrada, corresponde al óptimo global. Esta característica de optimalidad global la comparten todos los problemas convexos, aunque el óptimo no se encuentre necesariamente en los vértices, como veremos en el siguiente capítulo.

### 2.3. Dualidad en problemas PL

Cualquier problema de programación lineal tiene asociado un segundo problema —también de programación lineal—, el cual llamaremos dual. Consideremos el siguiente problema PL:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{l} \text{máx} \quad c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \tag{2.12}$$

Y el siguiente problema dual, el cual tiene los mismos parámetros de  $\mathcal{P}$  pero con una estructura y variables de decisión diferentes, a saber:

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \min \quad b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

Mas adelante veremos diferentes interpretaciones del problema dual. Igualmente, se podrá constatar que el concepto se puede extender a cualquier problema de optimización. Por ahora solo nos interesa conocer algunas propiedades que relacionan los problemas  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ .

**Teorema 2.3. Dualidad débil.** Cada par de soluciones factibles  $x$  en  $\mathcal{P}$  e  $y$  en  $\mathcal{D}$  cumplen la siguiente relación:

$$c^T x \leq b^T y \quad (2.14)$$

DEMOSTRACIÓN. Partimos de la función objetivo del problema primal, recordando que  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} c^T x &\leq (A^T y)^T x \\ &= y^T A x \leq y^T b \end{aligned} \quad (2.15)$$

□

En algunos casos, solucionar el dual es mucho mas simple que solucionar el primal. Por tanto,  $\mathcal{D}$  puede ser una herramienta para encontrar limites inferiores al problema original.

**Teorema 2.4. Dualidad fuerte.** En un problema de programación lineal se cumple solo uno de los siguientes posibilidad:

- Tanto  $\mathcal{P}$  como  $\mathcal{D}$  son infactibles.
- $\mathcal{P}$  es ilimitado y  $\mathcal{D}$  es infactible.
- $\mathcal{D}$  es ilimitado y  $\mathcal{P}$  es infactible.
- Tanto  $\mathcal{P}$  como  $\mathcal{D}$  son factibles y tiene la misma solución óptima  $c^T x = b^T y$ .

Un problema infactible o ilimitado se debe usualmente a algun error en la etapa de modelado. El caso mas interesante desde el punto de vista práctico es cuando tanto el primal como el dual son factibles y el óptimo del primal es igual al óptimo del dual. De esta forma, podemos usar el problema dual para encontrar una solución al primal. La demostración de este teorema, propuesto por Von Neuman, puede ser encontrada en [3]. En el capítulo cinco veremos una demostración general para cualquier problema convexo.

Una consecuencia directa del teorema de la dualidad fuerte es que cualquier problema de programación lineal puede ser reducido a un problema de factibilidad, pues solo en el punto óptimo obtenemos soluciones factibles tanto en  $x$  como en  $y$ . Así, la solución de los problemas  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$  corresponde al siguiente problema de factibilidad:

$$\begin{aligned}
 Ax &\leq b \\
 A^T y &\geq c \\
 x &\geq 0 \\
 y &\geq 0 \\
 c^T x &= b^T y
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

## 2.4. Lecturas complementarias

Los conceptos básicos asociados a los problemas de programación lineal pueden ser consultados en [4] y en [5]. Existen múltiples algoritmos para solucionar problemas de programación lineal, tanto en su formulación primal como en su forma dual. La mayoría de ellos se basan en las propiedades antes descritas. Por ejemplo, el método simplex, propuesto por George Dantzig en los años 40, usa el hecho de que el óptimo se encuentra en un vértice del politopo. Por tanto, el algoritmo parte de un vértice factible moviéndose a vértices vecinos que minimizan la función objetivo. El otro método clásico es el de puntos interiores, el cual parte de una barrera logarítmica en el interior del politopo, siguiendo la dirección del gradiente. Este último método es el más usado en aplicaciones prácticas y puede ser extendido a otros problemas no lineales. Este método será estudiado en el capítulo dieciséis).

## 2.5. Ejercicios

Considere el siguiente problema de programación lineal, a saber:

$$\begin{aligned}
 \text{mín } &5x_1 + 10x_2 \\
 &6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
 &x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 &x_1 - x_2 \geq 0 \\
 &0 \leq x_1 \\
 &0 \leq x_2 \leq 2
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

1. Graficar el espacio de soluciones.
2. Determinar el óptimo evaluando los vértices del politopo.
3. Escribir el problema en la forma canónica.

4. Mostrar el problema dual.
5. Resolver el problema dual y comparar los resultados.

3

CAPÍTULO  
TRES

# PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA

*En este capítulo, se definen tanto funciones como conjuntos convexos y la forma en que estos se relacionan entre sí para formular problemas de optimización. Se presentan las condiciones de unicidad y globalidad de la solución en funciones fuerte y estrictamente convexas. Finalmente, se presentan una serie de ejemplos simples y una taxonomía básica de los problemas de optimización convexa.*

## 3.1. Conjuntos convexos

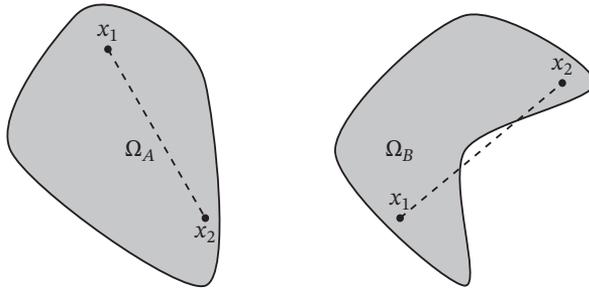
Los problemas de optimización convexa son aquellos que se pueden definir en un espacio de soluciones convexo. Para ello, debemos identificar claramente cuando este espacio es convexo. Comencemos por la definición formal.

**Definición 3.1. Conjunto convexo.** Decimos que un conjunto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es convexo, si para cualquier par de puntos  $x, y \in \Omega$  tenemos que

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in \Omega \tag{3.1}$$

para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

En términos simples, un conjunto es convexo si podemos elegir cualquier par de puntos dentro de este conjunto de forma que la semirrecta que une dichos puntos también pertenezca al conjunto. Desde luego, en problemas de optimización, no todos los conjuntos son convexos, aunque una gran cantidad de problemas prácticos tienen espacios convexos. En la FIGURA NRO. 3.1 vemos que esta condición se cumple para cualquier par de puntos arbitrarios en el caso de  $\Omega_A$  mientras que en  $\Omega_B$  existen puntos que pertenecen al segmento de recta, pero que se salen del espacio; por lo tanto,  $\Omega_A$  es convexo mientras que  $\Omega_B$  es no convexo. Esta intuición geométrica es útil para problemas en  $\mathbb{R}^2$ ; no obstante, el caso general requiere el uso de la definición, como se muestra a continuación:



**FIGURA NRO. 3.1.** Ejemplo de un conjunto convexo  $\Omega_A$  y un contraejemplo de un espacio no convexo  $\Omega_B$ .

**Ejemplo 3.1.** Considere un espacio afín dado por  $Ax = b$  y dos puntos  $x, y$  que pertenecen al espacio; ahora tomemos un tercer punto  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Ay &= b \\ (1 - \lambda)Ax + \lambda Ay &= (1 - \lambda)b + \lambda b \\ Az &= b \end{aligned} \tag{3.2}$$

Este último indica que  $z$  también pertenece al espacio afín. ■

**Ejemplo 3.2.** La definición de conjuntos convexos puede ser engañosa a simple vista. Consideremos, por ejemplo, conjuntos generados por una bola en  $\mathbb{R}^2$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 3.2. Podemos definir claramente tres conjuntos:

$$\Omega_A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \tag{3.3}$$

$$\Omega_B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \tag{3.4}$$

$$\Omega_C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1\} \tag{3.5}$$

A pesar de la similitud evidente entre estos tres conjuntos, una simple inspección sobre la definición nos muestra que  $\Omega_A$  es convexo mientras  $\Omega_B$  y  $\Omega_C$  no lo son. De hecho, los problemas de optimización sobre los conjuntos  $\Omega_B$  y  $\Omega_C$  son extremadamente complejos (combinatoriales) mientras que los problemas de optimización sobre conjuntos como  $\Omega_A$  son relativamente más simples. ■

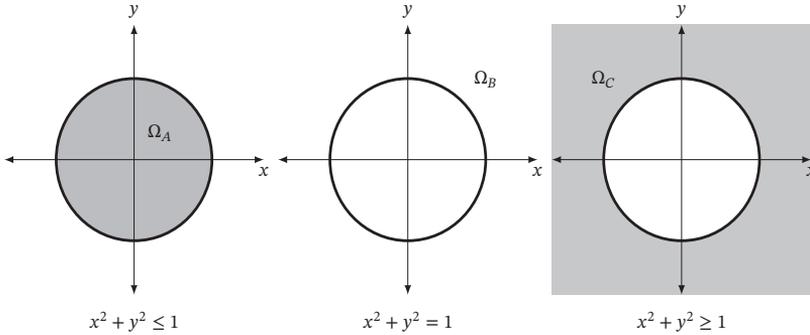


FIGURA NRO. 3.2. Ejemplo de tres conjuntos definidos por una bola en el plano.

Es fácil demostrar que la definición se puede extender a varios puntos, es decir, si  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  es un conjunto convexo con  $x_k \in \Omega$  y  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sum \alpha_k x_k \in \Omega$  si  $\sum \alpha_k = 1$ . Algunas operaciones entre conjuntos preservan la convexidad, por ejemplo, la intersección.

**Lema 3.1.** La intersección de conjuntos convexos genera un conjunto convexo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{C} = \bigcap C_i$ . En caso de que  $\mathcal{C}$  sea no vacío, tomamos dos puntos  $x, y \in \mathcal{C}$  y seleccionamos un  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Evidentemente,  $x, y \in C_i$  pues tanto  $x$  como  $y$  pertenecen a la intersección de  $C_i$ . Además,  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y \in C_i$  pues cada uno de los conjuntos es convexo; por tanto,  $z \in \mathcal{C}$  con lo que se concluye que  $\mathcal{C}$  es convexo [6]. □

Este lema permite identificar fácilmente un espacio de soluciones convexo, pues solo se requiere analizar la convexidad de cada una de las restricciones. Es decir, si tenemos un espacio de soluciones representado por ecuaciones de la forma

$$g_1(x) \leq 0 \quad (3.6)$$

$$g_2(x) \leq 0 \quad (3.7)$$

$$g_3(x) \leq 0 \quad (3.8)$$

entonces es suficiente con demostrar que cada uno de los siguientes conjuntos es convexo,  $\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0\}$ . Esto es una ventaja teórica pero también

computacional a la hora de convertir nuestros problemas en algoritmos. Cabe resaltar que la unión de conjuntos convexos no genera, necesariamente, un conjunto convexo (considérese por ejemplo, en la unión de dos conjuntos como  $\Omega_A$ , en donde se ha desplazado el origen en uno de ellos).

**Ejemplo 3.3.** Consideremos la intersección de cuatro espacios afines, a saber:

$$\Omega_A = \{(x_1, x_2) : x_1 + 2x_2 \leq 10\} \quad (3.9)$$

$$\Omega_B = \{(x_1, x_2) : -5x_1 + 2x_2 \leq 4\} \quad (3.10)$$

$$\Omega_C = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0\} \quad (3.11)$$

$$\Omega_D = \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\} \quad (3.12)$$

La FIGURA NRO. 3.3 muestra que esta intersección constituye un conjunto convexo, llamada politopo. En las siguientes subsecciones, estudiaremos en detalle este y otros conjuntos convexos que son clásicos en problemas de ingeniería.

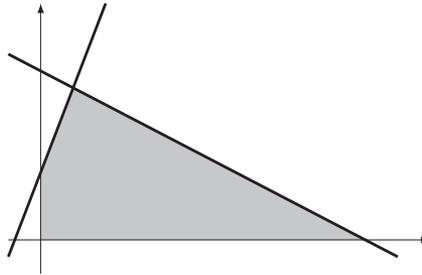


FIGURA NRO. 3.3. Ejemplo de un politopo como la intersección de tres conjuntos convexos. ■

### 3.1.1. Politopos

Un politopo, como el de la FIGURA NRO. 3.3, se puede escribir de la siguiente forma canónica:

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \quad (3.13)$$

Ahora, tomamos dos puntos  $x \in \mathcal{P}$ ,  $y \in \mathcal{P}$  y el segmento de recta  $\alpha x + \beta y$  con  $\alpha + \beta = 1$  y  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Nótese que esto es equivalente a la representación  $(1 - \lambda)x + \lambda y$  mostrada

en la ecuación 3.1; por tanto, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Ax &\leq b \\
 Ay &\leq b \\
 \alpha Ax &\leq \alpha b \\
 \beta Ay &\leq \beta b \\
 A(\alpha x + \beta y) &\leq b
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que el punto  $\alpha x + \beta y$  pertenece al polítopo y, por tanto, el conjunto es convexo.

### 3.1.2. Bolas

**Definición 3.2. Bola.** Una bola de radio  $\delta$  alrededor de un punto  $x_0$  es un conjunto definido de la siguiente forma:

$$\mathcal{B}_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \delta\} \tag{3.15}$$

En donde  $\|\cdot\|$  representa una norma cualquiera.

Para demostrar que este conjunto es convexo, solo requerimos usar la desigualdad triangular en un nuevo punto  $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$  en donde  $x, y \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ . Así,

$$\begin{aligned}
 \|z - x_0\| &= \|(1 - \lambda)x + \lambda y - (1 - \lambda + \lambda)x_0\| \\
 &\leq \|(1 - \lambda)x - x_0\| + \|\lambda y - \lambda x_0\| \\
 &\leq (1 - \lambda)\|x - x_0\| + \lambda\|y - x_0\| \\
 &\leq (1 - \lambda)\delta + \lambda\delta = \delta
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Con esto concluimos  $z \in \mathcal{B}_\delta(x_0)$ ; por tanto, el conjunto es convexo. Nótese que esta propiedad es independiente del tipo de norma utilizada.

### 3.1.3. Elipsoides

**Definición 3.3. Elipsoide.** Un elipsoide es un conjunto definido como sigue:

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0)^T A (x - x_0) \leq b^2\} \tag{3.17}$$

En donde  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva.

Es fácil demostrar que  $\mathcal{E}$  es, de hecho, una bola de radio  $b$  para la siguiente norma

$$\|x\|_A = \sqrt{x^T A x} \tag{3.18}$$

Esta última cumple con todas las propiedades de la definición 1.14, es decir,  $\|x\|_A \geq 0$  (definida positiva),  $\|x\|_A = 0$  cuando  $x = 0$  y la desigualdad triangular, es decir:

$$\begin{aligned}\|x + y\|_A^2 &= (x + y)^T A (x + y) \\ &= x^T A x + y^T A y + 2x^T A y\end{aligned}\quad (3.19)$$

Ahora, usamos la desigualdad de Cauchy para obtener:

$$x^T A y \leq \sqrt{(x^T A x)(y^T A y)}\quad (3.20)$$

Por lo tanto:

$$\|x + y\|_A^2 \leq x^T A x + y^T A y + 2\sqrt{(x^T A x)(y^T A y)}\quad (3.21)$$

$$= \|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 + 2\|x\|_A \|y\|_A\quad (3.22)$$

$$= (\|x\|_A + \|y\|_A)^2\quad (3.23)$$

Cuando  $A$  es semidefinida, se puede analizar de forma similar aunque, en tal caso, no se trata necesariamente de una norma.

### 3.1.4. Mapas no expansivos

**Definición 3.4.** Un mapa no expansivo en  $\mathbb{R}^n$  es una función  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que cumple con la siguiente propiedad

$$\|T(x) - T(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2\quad (3.24)$$

En donde  $\|\cdot\|_2$  representa la norma-2.

Este tipo de mapas permite representar el siguiente conjunto:

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : x = T(x)\}\quad (3.25)$$

Dicho de otro modo,  $\mathcal{D}$  corresponde a los puntos fijos de  $T$ . Este conjunto es convexo; para demostrarlo, consideremos dos teoremas básicos tomados de [7]. Omitimos el subíndice entendiendo que se trata de la norma-2.

**Teorema 3.1.** Si  $x, y$  dos vectores en  $\mathbb{R}^n$  y  $\lambda$  un escalar positivo entonces se cumple que:

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda \|x\|^2 + (1 - \lambda) \|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2\quad (3.26)$$

En donde  $\|\cdot\|$  es la norma-2

**DEMOSTRACIÓN.** Simplemente expandimos el lado izquierdo de la expresión como sigue:

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)x^T y\quad (3.27)$$

Consideremos ahora la siguiente identidad:

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x^T y \quad (3.28)$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 &= \lambda^2 \|x\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|y\|^2 + \lambda(1 - \lambda) (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \lambda \|x\|^2 + (1 - \lambda) \|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Gracias a lo anterior, queda demostrada la relación.  $\square$

**Teorema 3.2.** Sea  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo no vacío y sea  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  un mapa no expansivo. Entonces  $\Omega = \{x : x = T(x)\}$  es un conjunto cerrado y convexo.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x \in \Omega, y \in \Omega$  entonces  $x = T(x), y = T(y)$ . Consideremos ahora un punto  $z$  en el segmento  $x, y$  dado por  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ , a saber:

$$\begin{aligned} \|z - T(z)\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - T(z)\| \\ &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y - (1 - \lambda)T(z)\| \\ &= \|\lambda(x - T(z)) + (1 - \lambda)(y - T(z))\| \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ahora usemos el teorema 3.1:

$$\begin{aligned} &\|\lambda(x - T(z)) + (1 - \lambda)(y - T(z))\|^2 = \\ &\lambda \|x - T(z)\|^2 + (1 - \lambda) \|y - T(z)\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dado que  $x = T(x), y = T(y)$ , entonces tenemos lo siguiente:

$$\|z - T(z)\| = \lambda \|T(x) - T(z)\|^2 + (1 - \lambda) \|T(y) - T(z)\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \quad (3.32)$$

Como  $T$  es un mapa no expansivo, entonces:

$$\|T(x) - T(z)\| \leq \|x - z\| \quad (3.33)$$

Lo mismo decimos de  $y$ , por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|z - T(z)\| &= \lambda \|T(x) - T(z)\|^2 + (1 - \lambda) \|T(y) - T(z)\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \\ &\leq \lambda \|x - z\|^2 + (1 - \lambda) \|y - z\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \\ &= \lambda \|x - (\lambda x + (1 - \lambda)y)\|^2 + (1 - \lambda) \|y - (\lambda x + (1 - \lambda)y)\|^2 \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)^2 \|x - y\|^2 + (1 - \lambda)\lambda^2 \|x - y\|^2 - \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \\ &= (\lambda)(1 - \lambda) \|x - y\|^2 (1 - \lambda + \lambda - 1) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Esto significa que  $\|z - T(z)\| = 0$  lo que implica que  $z = T(z)$  y, por tanto,  $z \in \Omega$ ; es decir, el conjunto  $\Omega$  es convexo.  $\square$

### 3.1.5. Conos convexos

**Definición 3.5.** Un cono es un subconjunto  $\mathcal{C}$  sobre un espacio lineal tal que, para cada  $x \in \mathcal{C}$  y un número escalar positivo  $\alpha$ , se tiene que  $\alpha x \in \mathcal{C}$ .

El concepto de cono es intuitivo y la diferencia entre un cono convexo y un cono no convexo puede ser fácilmente observada en la FIGURA NRO. 3.4.

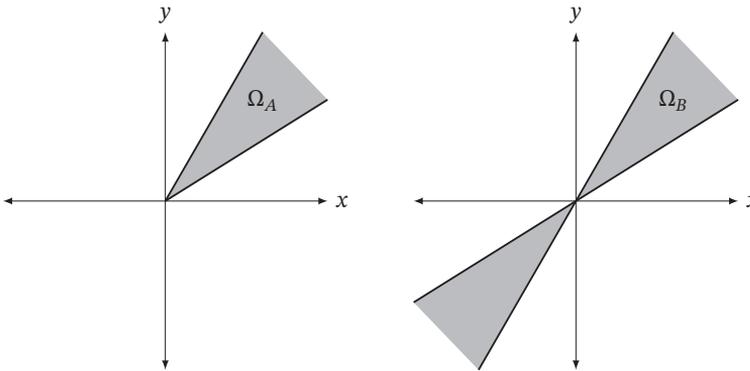


FIGURA NRO. 3.4. Ejemplo de un cono convexo  $\Omega_A$  y un cono no convexo  $\Omega_B$ .

En particular, estamos interesados en tres tipos de conos convexos que serán de utilidad en diferentes aplicaciones, estos son:

- Cono asociado a la forma canónica de los problemas de programación lineal (ver capítulo uno)

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \quad (3.35)$$

- Cono de segundo orden

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax + b\| \leq c^x + d\} \quad (3.36)$$

- Cono de las matrices semidefinidas

$$\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X \geq 0\} \quad (3.37)$$

Hablaremos en más detalle de estos conjuntos en el capítulo seis

### 3.1.6. Suma de polinomios cuadráticos

En el capítulo anterior aprendimos que el conjunto de los polinomios en  $x$  forman un espacio lineal. Ahora, consideremos el subconjunto de los polinomios que se pueden

escribir como la suma de polinomios al cuadrado, es decir:

$$\mathcal{S} = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = \sum_i (m(x))^2 \right\} \quad (3.38)$$

en donde  $m(x)$  son polinomios. Para ver que este conjunto es convexo, consideremos dos polinomios  $p(x) \in \mathcal{S}$  y  $q(x) \in \mathcal{S}$ . Obviamente,  $\lambda p(x)$  y  $(1 - \lambda)q(x)$  también son polinomios y como  $\lambda \geq 0, (1 - \lambda) \geq 0$  entonces el nuevo polinomio  $s(x) = \lambda p(x) + (1 - \lambda)q(x)$ , también pertenece a  $\mathcal{S}$ . El conjunto de los polinomios representables como suma de polinomios cuadrados forma una interesante gama de problemas de optimización que serán estudiados en el capítulo ocho.

### 3.2. Funciones convexas

**Definición 3.6. Desigualdad de Jensen.** Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si su dominio es convexo y además, para cualquier par de puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se cumple que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.39)$$

para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $0 \leq \lambda \leq 1$ . De otro lado, si  $-f(x)$  es convexa entonces decimos que  $f(x)$  es cóncava.

La ecuación 3.39 también se puede escribir como:

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ con } \alpha + \beta = 1 \quad (3.40)$$

Al igual que en el caso de los conjuntos convexos, podemos extender nuestra definición a varios puntos del espacio, es decir:

$$f\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \leq \sum_i \alpha_i f(x_i), \text{ con } \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \quad (3.41)$$

Usaremos una u otra definición según sea conveniente.

Una función convexa implica que cualquier segmento de recta entre dos puntos  $x, y$  está por encima de la función, como se muestra en la FIGURA NRO. 3.5 para el caso de las funciones  $f(x) = x^2$  y  $f(x) = -\ln(x)$ .

**Ejemplo 3.4.** Verifiquemos que  $f(x) = x^2$  es convexa usando la definición. Veamos:

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 &\leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \\ \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy &\leq \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 \\ (\lambda^2 - \lambda)x^2 + ((1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda))y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)x^2 + (\lambda^2 - \lambda)y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)(x^2 + y^2 - 2xy) &\leq 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)(x - y)^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

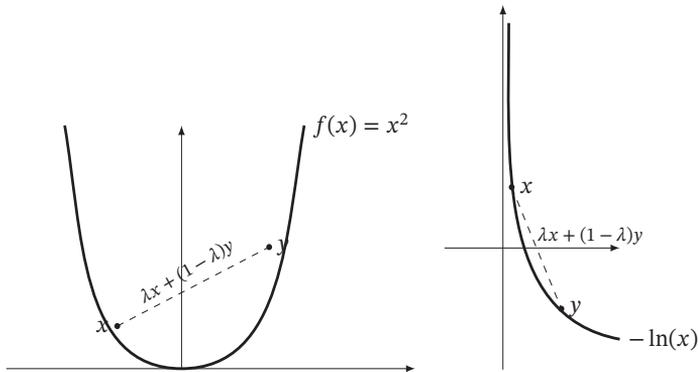


FIGURA NRO. 3.5. Ejemplo de dos funciones convexas: a)  $f(x) = x^2$ , b)  $f(x) = -\ln(x)$ .

Esto último es cierto para todos los reales debido a que  $0 \leq \lambda \leq 1$ ; por tanto, se cumple la desigualdad y se concluye que la función  $f(x) = x^2$  es convexa. ■

**Lema 3.2. Suma de funciones convexas.** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones convexas, entonces  $h(x) = f(x) + g(x)$  es también una función convexa.

DEMOSTRACIÓN. Solo basta sumar las siguiente desigualdades:

$$\begin{aligned} \alpha f(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha f(x) + \beta f(y) \\ \alpha g(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned} \tag{3.43}$$

En donde

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) \\ &\leq \alpha(f(x) + g(x)) + \beta(f(y) + g(y)) \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y) \end{aligned} \tag{3.44}$$

Dado lo anterior, se concluye que  $h$  también es convexa. □

**Lema 3.3.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa si y solo si la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(t) = f(x + tv)$  es también convexa para todos los valores de  $x \in \text{dom}(f)$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

DEMOSTRACIÓN. Nótese que  $g$  es una función en una sola variable mientras que  $f$  es una función en múltiples variables. Debemos demostrar que  $f$  convexa implica  $g$  convexa y viceversa. Primero, asumimos que  $f$  es convexa entonces, para un par de puntos  $t, s$  y dos escalares  $\alpha + \beta = 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha t + \beta s) &= f(x + (\alpha t + \beta s)v) \\ &= f(\alpha(x + tv) + \beta(x + sv)) \\ &\leq \alpha f(x + tv) + \beta f(x + sv) \\ &\leq \alpha g(t) + \beta g(s) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Con esto concluimos que  $g$  es convexa. Ahora, para demostrar el lema en sentido opuesto, asumimos que  $g$  es convexa, entonces tenemos lo siguiente:

$$g(\alpha t_1 + \beta t_2) \leq \alpha g(t_1) + \beta g(t_2) \quad (3.46)$$

Definimos las dos variables  $y_1 = x + \alpha t_1$  y  $y_2 = x + \beta t_2$  las cuales permiten concluir fácilmente que  $f$  también es convexa.  $\square$

Este lema es útil ya que permite verificar la convexidad de una función multivariable usando una función en una sola variable. Igualmente, algunos algoritmos de optimización hacen iterativamente una búsqueda en una línea recta con lo que este resultado permite garantizar que esa búsqueda local represente un problema convexo. A continuación, veremos como podemos definir conjuntos convexos con la ayuda de funciones convexas.

**Definición 3.7. Epígrafo.** Dada una función convexa  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definimos el epígrafo de  $f$  denotado como  $\text{epi}(f)$  de la siguiente forma

$$\text{epi}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\} \quad (3.47)$$

Los epígrafos desempeñan un papel importante en diferentes problemas de optimización.

**Lema 3.4.** Una función es convexa si y solo si su epígrafo definido como  $\text{epi}(f)$  es un conjunto convexo.

**DEMOSTRACIÓN.** Debemos comprobar que  $\text{epi}(f)$  convexo implica  $f$  convexa y que  $f$  convexo implica  $\text{epi}(f)$  convexo. Como  $f$  es convexa entonces  $\alpha f(x) + \beta f(y) \geq f(\alpha x + \beta y)$  con  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ . Consideremos dos reales  $t, r$  tales que  $t \geq f(\alpha x + \beta y)$ , y  $r \geq f(\alpha x + \beta y)$ ; por tanto,  $\alpha t + \beta r \geq (\alpha + \beta)f(\alpha x + \beta y) = f(\alpha x + \beta y)$ , es decir que  $(\alpha t + \beta r, \alpha x + \beta y) \in \text{epi}(f)$ . Por tanto,  $\text{epi}(f)$  es un conjunto convexo. La demostración en sentido contrario sigue un argumento similar.  $\square$

**Lema 3.5.** El supremo de una colección de funciones convexas es también una función convexa, *i. e.*:

$$g(x) = \sup_i \{f_i(x)\} \quad (3.48)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos un punto intermedio entre dos puntos  $x, y$

$$g(\alpha x + \beta y) = \sup_i \{f_i(\alpha x + \beta y)\} \quad (3.49)$$

Como cada  $f_i$  es convexa entonces tenemos

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha \sup_i \{f_i(x)\} + \beta \sup_i \{f_i(y)\} \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dado lo anterior, podemos concluir que  $g$  también es convexa.  $\square$

**Lema 3.6.** La composición de una función convexa y una función afín resulta en una función convexa. Es decir, si  $f : \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa entonces  $g(x) = f(Ax + b)$  es también convexa para una matriz constante  $A$  y un vector  $b$ .

DEMOSTRACIÓN. Nuevamente tomamos un punto intermedio entre dos puntos arbitrarios  $x, y$ , a saber:

$$\begin{aligned} g(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha Ax + \beta Ay + (\alpha + \beta)b) \\ &\leq \alpha f(Ax + b) + \beta f(Ay + b) \\ &= \alpha g(x) + \beta g(y) \end{aligned} \tag{3.51}$$

□

**Lema 3.7.** Si  $f, g$  son funciones convexas con  $g$  monotonamente creciente entonces la composición de  $f \circ g$ , dada por  $h(x) = g(f(x))$ , es también convexa.

DEMOSTRACIÓN. Partimos del hecho de que  $f$  es convexa y, por tanto,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) \tag{3.52}$$

Ahora, como  $g$  es monótonamente creciente, podemos aplicarla sin modificar la desigualdad

$$g(f(\alpha x + \beta y)) \leq g(\alpha f(x) + \beta f(y)) \tag{3.53}$$

Finalmente, como  $g$  también es convexa, entonces tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} h(\alpha x + \beta y) &= g(f(\alpha x + \beta y)) \\ &\leq \alpha g(f(x)) + \beta g(f(y)) \\ &= \alpha h(x) + \beta h(y) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Dado lo anterior, podemos concluir que  $h$  también es convexa.

□

**Ejemplo 3.5.** Queremos demostrar que la función  $f(x) = (5x + 8)^4$  es convexa; para ello, definimos las siguientes funciones auxiliares:

$$g_1(x) = 5x + 8 \tag{3.55}$$

$$g_2(y) = y^2 \tag{3.56}$$

$$g_3(z) = z^2, \text{ con } z \geq 0 \tag{3.57}$$

Claramente, la función  $f$  se puede obtener como una composición de funciones, a saber:  $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ . Nótese que la función  $g_1$  es afín y la función  $g_2$  es convexa, por tanto,  $g_1 \circ g_2$  es convexa. Ahora, la función  $g_3$  es convexa y además monótonamente creciente por tanto, su composición genera una función convexa. El proceso completo se muestra a continuación:

$$x \xrightarrow[\text{afín}]{g_1} (5x + 8) \xrightarrow[\text{convexa}]{g_2} (5x + 8)^2 \xrightarrow[\text{convexa y monótona}]{g_3} (5x + 8)^4 \tag{3.58}$$

Conforme a lo anterior,  $g_3$  y  $g_2$  son funciones diferentes, pues el dominio de  $g_3$  son solo los números positivos. Así,  $g_2$  es convexa pero  $g_3$  es convexa y, además, monótonamente creciente (una grafica de cada una de las funciones puede ayudar a visualizar la diferencia). El mismo resultado se puede obtener mediante la definición, pero es más simple usar las propiedades de composición. ■

**Ejemplo 3.6.** Debemos tener cuidado con las propiedades de composición, especialmente las del Lema 3.7. Consideremos la función  $f(x) = (x^2 - 5)^2$ , la cual se puede escribir como la composición de las funciones  $g_1(x) = x^2 - 5$  y  $g_2(y) = y^2$ . Tanto  $g_1$  como  $g_2$  son convexas, pero  $g_2$  no es monótonamente creciente. Por tanto, no podemos concluir que  $f = g_1 \circ g_2$  sea convexa. ■

### 3.3. Optimización convexa

**Definición 3.8. Problema de optimización convexa.** Un problema de optimización matemática de la forma

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ & x \in \Omega \end{aligned} \tag{3.59}$$

es un problema de optimización convexa si la función objetivo  $f$  es convexa y el espacio de soluciones  $\Omega$  es un conjunto convexo.

En términos prácticos, un problema de optimización de la forma

$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ & g_i(x) = 0 \\ & h_j(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

es convexo, si tanto  $f$  como  $h_j$  son funciones convexas y  $g_i$  son funciones afines. Los problemas de optimización convexa tienen características teóricas interesantes y pueden ser solucionados eficientemente en la práctica [8]. De hecho, podemos asegurar que la complejidad computacional de un problema está mucho más relacionado con la convexidad que con la linealidad. Por ejemplo, un problema convexo y cuadrático suele ser computacionalmente menos demandante que un problema de programación lineal-entera. Por ello, es importante establecer condiciones de convexidad así como formas de aproximaciones convexas.

A continuación, se enumeran algunos problemas que podemos resolver usando optimización convexa:

**Programación lineal (LP):**

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned} \quad (3.61)$$

**Programación cuadrática (QP):**

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned} \quad (3.62)$$

con  $H \geq 0$ .

**Programación cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP):**

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T H x + c^T x \\ & x^T Q_i x + a_i x \leq b_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

con  $H \geq 0, Q_i \geq 0$ .

**Programación geométrica:**

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_k c_k \left( \prod_m x_m^{a_m} \right) \\ & \sum_k h_k \left( \prod_m x_m^{b_m} \right) \leq 1 \\ & \left( \prod_m x_m^{d_m} \right) = 1 \end{aligned} \quad (3.64)$$

**Programación semidefinida:**

$$\begin{aligned} \min \quad & Tr(CX) \\ & AX = B \\ & X > 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

**Programación cónica de segundo orden:**

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & \|A_i x + b_i\| \leq h_i x + m_i \end{aligned} \quad (3.66)$$

**Suma de polinomios cuadráticos:**

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & \sum f_i(x) \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.67)$$

**Optimización de punto fijo:**

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x = T(x) : \text{con } T \text{ un mapa no-expansivo.} \end{aligned} \quad (3.68)$$

**Ejemplo 3.7.** Un problema clásico de optimización convexa es el despacho económico de plantas térmicas. En este problema, buscamos minimizar el costo total de operación teniendo en cuenta los costos del combustible. El problema se puede representar como sigue:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} p_k^2 + b_k p_k + c_k \\ & \sum_{k=1}^n p_k = D \\ & p_{\min} \leq p_k \leq p_{\max} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Allí,  $D$  es la demanda del sistema,  $p_k$  es la potencia generada en cada unidad térmica,  $p_{\min}$  y  $p_{\max}$  son los límites operativos de cada unidad, y  $\{a_k, b_k, c_k\}$  son parámetros asociados a la curva de costos de cada unidad; el problema es claramente convexo pues las restricciones son afines y la función objetivo es cuadrática y convexa. ■

Existen múltiples representaciones a un mismo problema, algunas de ellas más convenientes que otras para ser analizadas bajo el paradigma de optimización convexa. Veamos algunos ejemplos:

**Ejemplo 3.8.** Los problemas con valor absoluto pueden transformarse en problemas lineales mediante un simple cambio de variables, a saber:

$$\begin{aligned} |x| &= x_p + x_n \\ x &= x_p - x_n \\ x_p &\geq 0 \\ x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

■

**Ejemplo 3.9.** Un problema fraccional de la forma

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{c^T x + \alpha}{d^T x + \beta} \\ & Ax \leq b \end{aligned} \quad (3.71)$$

es equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T y + \alpha t \\ & Ay \leq bt \\ & d^T y + \beta t = 1 \\ & t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

en donde se realizó el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{d^T x + \beta} \\ y &= tx \end{aligned} \tag{3.73}$$

■

En este último ejemplo es importante verificar que, aunque equivalentes, la representación lineal del problema tiene mejores características geométricas y por tanto es más fácil de solucionar. Como mencionamos anteriormente, el proceso de modelado es más un arte que una ciencia. Por tanto, se requiere experimentar con los modelos para encontrar las mejores características geométricas.

### 3.4. Unicidad de la solución y óptimo global

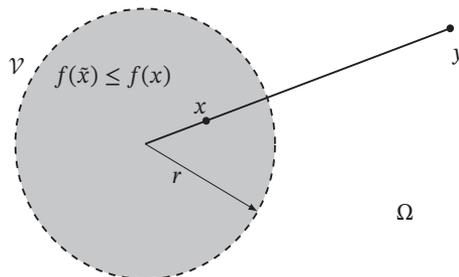
**Teorema 3.3. Óptimo global.** En un problema de optimización convexa, todo óptimo local es un óptimo global.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un problema de optimización convexa en donde conocemos un óptimo local  $\bar{x}$  :

$$f(\bar{x}) = \inf \{f(x) : x \in \Omega\} \tag{3.74}$$

en donde  $\mathcal{H}$  es la vecindad del óptimo  $\bar{x}$  (i.e, un óptimo local),  $\|\cdot\|$  es una norma arbitraria y  $r$  es un número positivo que permite definir la vecindad de  $\bar{x}$  como se muestra en la ecuación 3.75 y en la FIGURA NRO. 3.6.

$$\mathcal{V} = \{x \in \Omega, \|x - \bar{x}\| < r\} \tag{3.75}$$



**FIGURA NRO. 3.6.** Representación grafica de la vecindad de  $\bar{x}$  en un problema de optimización convexa sobre un espacio convexo  $\Omega$ .

Sea  $y \in \Omega$  un punto factible por fuera de la vecindad de  $\bar{x}$ . Dado que  $\Omega$  es convexo tenemos que:

$$x = \alpha\bar{x} + \beta y \quad (3.76)$$

En donde  $\alpha + \beta = 1$  y  $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ . Ahora, puesto que  $f$  es una función convexa sabemos que:

$$f(x) \leq \alpha f(\bar{x}) + \beta f(y) \quad (3.77)$$

Evidentemente,  $f(\bar{x}) \leq f(x)$  puesto que  $x$  se encuentra en la vecindad de  $\bar{x}$ , esto es:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq f(x) \leq \alpha f(\bar{x}) + \beta f(y) \\ (1 - \alpha)f(\bar{x}) &\leq \beta f(y) \\ \beta f(\bar{x}) &\leq \beta f(y) \\ f(\bar{x}) &\leq f(y) \end{aligned} \quad (3.78)$$

En conclusión, cualquier punto factible por fuera de la vecindad de  $\bar{x}$  es también mayor que  $f(\bar{x})$  lo cual significa que  $\bar{x}$  es un óptimo en todo el espacio  $\Omega$  (i. e. es un óptimo global).  $\square$

Este es probablemente el resultado más importante asociado a los problemas convexos y una de las razones por la cual nos interesa su estudio.

**Definición 3.9. Función estrictamente convexa.** Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexa si

$$f(\alpha x + \beta y) < \alpha f(x) + \beta f(y) \quad (3.79)$$

con  $\alpha + \beta = 1, 0 \leq \alpha \leq 1$  y además  $x \neq y$ .

Esta definición nos permite demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.4.** Consideremos el siguiente problema de optimización convexa, a saber:

$$\text{mín } f(x), x \in \Omega \quad (3.80)$$

en donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa con  $\Omega$  un conjunto convexo, entonces el óptimo (si existe) es único.

**DEMOSTRACIÓN.** Usaremos un argumento de reducción al absurdo, para ello, suponemos que existen dos puntos óptimos  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$ . Entonces, debido a la condición de globalidad de la solución tenemos que

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \leq f(z) \quad (3.81)$$

para todo  $z \in \Omega$ . Consideremos ahora un punto intermedio  $z = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ . Como  $\Omega$  es convexo entonces este punto debe pertenecer al espacio de soluciones factibles. En esa dirección, como la función es estrictamente convexa:

$$f(z) < \alpha f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) = f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \quad (3.82)$$

Sin embargo,  $f(z) < f(\bar{x})$  contradice nuestra suposición inicial. Por tanto, no pueden existir dos puntos óptimos diferentes.  $\square$

**Ejemplo 3.10.** Consideremos el problema de optimización dado por la ecuación 3.83 en donde  $A$  es una matriz simétrica,  $b$  es un vector columna y  $c$  es un escalar.

$$\text{mín } f(x) = x^T A x + b^T x + c \quad (3.83)$$

Primero, observamos que  $f$  es convexa si y solo si  $A \geq 0$ , independiente de  $b$  y  $c$ . Esto se debe a que  $A$  es la matriz hessiana de  $f$ . Igualmente, podemos asegurar que la solución es única si  $A > 0$  pues, en este caso,  $f$  es estrictamente convexa. Finalmente, el problema es ilimitado si  $f$  no es convexa, es decir, si  $A \not\geq 0$ . En ese caso, existe al menos un eigenvalor  $\lambda$  negativo asociado a la matriz  $A$  con su respectivo eigenvector  $\bar{x}$ . Entonces tenemos que  $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$  y por ende,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \bar{x}^T A \bar{x} + b^T \bar{x} + c \\ &= \lambda \bar{x}^T \bar{x} + b^T \bar{x} + c \end{aligned} \quad (3.84)$$

Tomemos ahora el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t\bar{x}) = -\infty \quad (3.85)$$

Esto significa que podemos reducir indefinidamente la función  $f$  al movernos en la dirección  $\bar{x}$ . De otro lado, si  $\lambda = 0$ , el límite puede ser 0 o  $-\infty$ , es decir, que el problema puede ser ilimitado o 0. En el segundo caso, el óptimo puede existir pero hay infinitas soluciones que toman ese valor.  $\blacksquare$

**Definición 3.10. Función fuertemente convexa.** Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y doblemente diferenciable, es fuertemente convexa si existe un  $\mu > 0$  tal que la función  $g$ , dada por 3.86 sea convexa. Así:

$$g(x) = f(x) - \mu \|x\|^2 \quad (3.86)$$

**Lema 3.8.** Toda función fuertemente convexa es estrictamente convexa.

DEMOSTRACIÓN. Como  $g(x)$  es convexa entonces tenemos

$$g(\alpha x + \beta y) \leq \alpha g(x) + \beta g(y) \quad (3.87)$$

es decir,

$$f(\alpha x + \beta y) - \mu \|\alpha x + \beta y\|^2 \leq \alpha f(x) + \beta f(y) - \mu \alpha \|x\|^2 - \beta \mu \|y\|^2 \quad (3.88)$$

Ahora, definimos una nueva variable  $h(x, y)$  como sigue:

$$h(x, y) = -\mu \alpha \|x\|^2 - \beta \mu \|y\|^2 \quad (3.89)$$

Por lo tanto,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y) + h(x, y) \quad (3.90)$$

En este punto, usando el Teorema 2.1 teniendo en cuenta que  $h(x, y) = -\mu\alpha\beta \|x - y\|^2$ , el cual es siempre un término negativo para  $x \neq y$ . Dado lo anterior, podemos concluir que la desigualdad 3.79 se cumple estrictamente.  $\square$

### 3.5. Lecturas complementarias

En este capítulo, se caracterizaron los conjuntos convexos y las funciones convexas. Estos generan problemas de optimización en donde se puede garantizar optimalidad global. Igualmente, se asegura que el óptimo es único en el caso de que la función sea estrictamente convexa. Estos dos aspectos son fundamentales en problemas de operación de sistemas de potencia tales como el despacho económico y el flujo de carga óptimo. En el capítulo diez exploramos otras aplicaciones convexas en sistemas de potencia. En cuanto al aspecto más teórico, se recomienda revisar [9] y sobre todo [8]. Además, allí se presentan ejemplos que pueden ser utilidad práctica. Un análisis un poco más teórico puede encontrarse en [7] y [6]. Finalmente, se hace hincapié en la importancia de una sólida fundamentación en álgebra lineal; dos referencias importantes son [10] y [2].

### 3.6. Ejercicios

1. Encontrar el óptimo del siguiente problema de optimización en  $\mathbb{R}^n$  usando multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} x^T H x \\ & x^T x = 1 \end{aligned} \quad (3.91)$$

¿Es este un problema de optimización convexa?, ¿por qué?

2. Determinar si las siguientes funciones  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son o no convexas. Usar las propiedades de composición dadas en la sección 3.2.

$$f(x) = x^T A x, \text{ con } A \succ 0 \quad (3.92)$$

$$f(x) = \exp((Bx + c)^T A (Bx + c)), \text{ con } A \geq 0 \quad (3.93)$$

$$f(x) = -\ln((Bx + c)^T A (Bx + c)), \text{ con } A \geq 0 \quad (3.94)$$

$$(3.95)$$

3. Demostrar la siguiente relación entre la media aritmética y la media geométrica.

Partir del hecho de que la función  $-\ln(x)$  es convexa y monótona.

$$\prod_{k=1}^n x_k^{1/n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} x_k \quad (3.96)$$

4. Mostrar que conjunto hiperbólico  $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \prod_{k=1}^N x_k \geq 1, x_k \geq 0 \right\}$  es convexo.
5. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa, continua, diferenciable, monótonamente creciente y biyectiva con inversa dada por una función  $g$ ; es decir, que  $g(f(x)) = x$ . Demuestre que bajo estas condiciones  $g$  es cóncava.

Nota: para demostrar no-convexidad, es suficiente con encontrar un par de puntos que no cumplan con la definición, es decir, buscar un contraejemplo. Sin embargo, para demostrar convexidad, se requiere verificar que cualquier par de puntos cumple con la definición.

**4**

**CAPÍTULO  
CUATRO**

# CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

*En este capítulo, se presentan las condiciones de primer y segundo orden para funciones convexas, continuas y diferenciables. Igualmente, se presenta el concepto de sub-diferencial y su aplicación a algunas funciones discontinuas.*

## 4.1. Condiciones de primer orden

**Teorema 4.1.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^1$  (continua y diferenciable) es convexa si y solo si

$$f(x) \geq f(y) + (\nabla f(y))^T(x - y) \quad (4.1)$$

para cualquier par de puntos  $x, y$  en el dominio de  $f$ .

DEMOSTRACIÓN. Esta relación debe funcionar en ambos sentidos, es decir, la condición 4.1 implica convexidad y, a su vez, si la función es convexa, entonces debe cumplir con la condición 4.1. Igualmente, es importante tener en cuenta que se cumple para cualquier par de puntos arbitrarios, por lo que se pueden intercambiar los valores de  $x$  y  $y$ , así:

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x))^T(y - x) \quad (4.2)$$

O bien un nuevo punto  $z = \alpha x + \beta y$  con  $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ , como sigue

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T(x - z) \\ f(y) &\geq f(z) + \nabla f(z)^T(y - z) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Podemos multiplicar la primera expresión por  $\alpha$  y la segunda por  $\beta$  sin modificar la dirección de la desigualdad ya que, tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son positivas; por tanto, tenemos que,

$$\alpha f(x) + \beta f(y) \geq (\alpha + \beta)f(z) + \nabla f(z)^T(\alpha x - \alpha z + \beta y - \beta z) \quad (4.4)$$

Claramente, obtenemos la definición de convexidad, teniendo en cuenta que el término asociado al gradiente se hace 0 debido a que  $\alpha + \beta = 1$ . Con esto probamos que la condición 4.1 implica que la función es convexa. Ahora, debemos demostrar que una función convexa implica 4.1. Partimos entonces de la definición de convexidad

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) \quad (4.5)$$

con  $0 \leq t \leq 1$ ; ahora, reorganizamos la ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{f(y + t(x - y)) - f(y)}{t} \leq f(x) - f(y) \quad (4.6)$$

Luego, definimos una nueva variable  $v = x - y$  y una nueva función  $g$  como sigue:

$$g(t) = f(y + t(x - y)) = f(y + tv) \quad (4.7)$$

Nótese que  $g$  es una función en una sola variable tal que,  $g(0) = f(y)$  y  $g(1) = f(x)$ , por lo tanto, podemos representar la ecuación 4.6 de la siguiente forma:

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} + f(y) \leq f(x) \quad (4.8)$$

Tomamos el límite cuando  $t \rightarrow 0$  lo cual resulta en la derivada de  $g$ , evaluada en 0. A su vez, con esta y la regla de la cadena podemos obtener:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \nabla f(y)^T(x - y) \leq f(x) - f(y) \quad (4.9)$$

Dado lo anterior, la desigualdad 4.1 queda demostrada<sup>1</sup>. □

La FIGURA NRO. 4.1 muestra la relación entre la desigualdad de Jensen y la condición dada por el teorema anterior para una función en  $\mathbb{R}$ . Las desigualdad de Jensen indica que los puntos sobre la recta  $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$  están siempre por encima de cualquier punto sobre la función  $f(y)$  para todo  $y = \alpha x_1 + \beta x_2$  con  $\alpha + \beta = 1$  y  $\alpha, \beta \geq 0$ . Sin embargo, podemos acercarnos los puntos  $x_1 \rightarrow y$  y  $x_2 \rightarrow y$  de tal forma que en el límite se obtiene una línea que está por debajo de la función para cualquier punto  $x$ . Esta línea (o hiperplano, para el caso más general) se denomina hiperplano de soporte. Nótese que en una función convexa de tipo  $C^1$  existe uno solo hiperplano para cada punto en el dominio de la función.

<sup>1</sup>Nótese que, en este caso, usamos dos formas diferentes de la desigualdad de Jensen. Estas son  $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$  y  $f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$  con  $\alpha + \beta = 1$ . Ambas expresiones son equivalentes; sin embargo, en algunos casos, es mucho más fácil usar una u otra. Debemos, por tanto, aprender a usar ambas representaciones según se requiera.

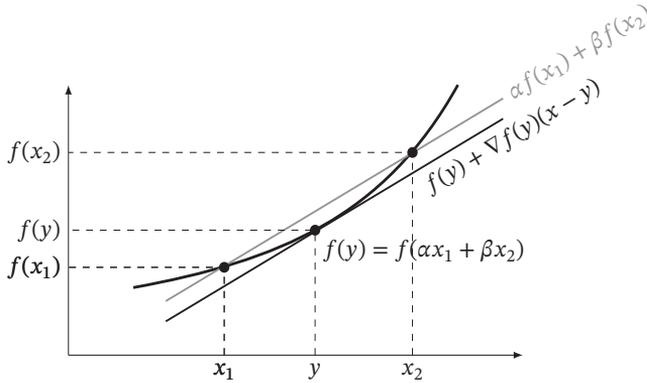


FIGURA NRO. 4.1. Interpretación geométrica de las condiciones dadas por el Teorema 4.1.

**Corolario 4.1.** Una función convexa cumple con la siguiente relación:

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq 0 \quad (4.10)$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las condiciones de primer orden para un par de puntos  $x$  y  $y$

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \\ f(x) &\geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Si se suman estas dos desigualdades, obtenemos la expresión 4.10.  $\square$

Este teorema, además, nos permite concluir lo siguiente [8]:

**Corolario 4.2.** Si  $f \in \mathcal{C}^1$  es convexa y existe un punto  $\bar{x} \in \text{dom}(f)$  con  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  entonces  $\bar{x}$  es el mínimo global de la función  $f$ .

DEMOSTRACIÓN. Solo basta notar que  $f(x) \geq f(\bar{x}), \forall x \in \text{dom}(f)$  si  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  en vista de la ecuación 4.1.  $\square$

Esta condición se cumple en problemas sin restricciones. Sin embargo, podemos definir condiciones de primer orden en un problema con restricciones como se muestra a continuación:

**Teorema 4.2.** Consideremos un problema de optimización:

$$\min \{f(x), x \in \Omega\} \quad (4.12)$$

en donde  $\Omega$  es un conjunto convexo y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa y diferenciable, entonces  $\bar{x}$  es un punto óptimo si y solo si

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geq 0 \quad (4.13)$$

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que 4.13 es una condición necesaria y suficiente para que  $\bar{x}$  sea óptimo. Probar suficiencia es usualmente más fácil. Consideremos un punto que cumpla con la condición dada por 4.13 el cual, debido a la ecuación 4.1, se ajusta también lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \\ f(x) - f(\bar{x}) &\geq \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0 \\ \therefore f(x) &\geq f(\bar{x}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Lo anterior significa que cualquier punto  $x$  es mayor a  $\bar{x}$  y, por tanto,  $\bar{x}$  es un óptimo global.

Ahora, para probar que la condición es necesaria podemos usar un método de *reductio ad absurdum*. Dicho esto, suponemos que existe un punto factible  $\bar{x}$  que es óptimo global  $f(x) \geq f(\bar{x})$ , pero que no cumple con la condición 4.13; por tanto, debería existir un punto  $x \in \Omega$ , tal que  $\nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) < 0$ . Como el espacio es convexo entonces cualquier punto intermedio  $y = \alpha x + (1 - \alpha)\bar{x} \in \Omega$ . Ahora, definimos una nueva función en una variable  $\alpha$

$$g(\alpha) = f(\alpha x + (1 - \alpha)\bar{x}) = f(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})) \tag{4.15}$$

Esta función se puede graficar como en la FIGURA NRO. 4.2. Veamos:

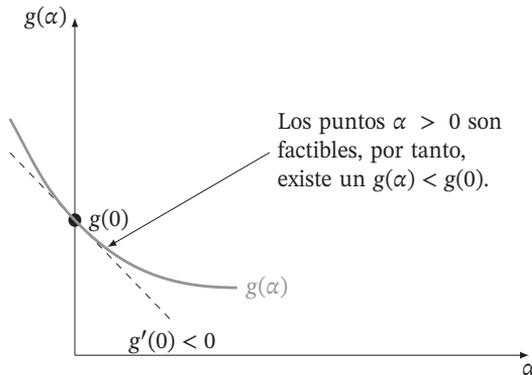


FIGURA NRO. 4.2. Representación gráfica de  $g$  como función de  $\alpha$ .

Tomamos ahora la derivada y la evaluamos en  $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \nabla f(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x}))^T(x - \bar{x}) \\ g'(0) &= f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) < 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

La última desigualdad se obtiene de la suposición de que el punto no cumple la condición 4.13, sin embargo, esto contradice la hipótesis de que se trata de un óptimo global. La FIGURA NRO. 4.2 muestra mejor la situación. Si  $g'(0)$  fuera negativa entonces

existirían puntos  $x$  tales que  $g(\alpha) < g(0)$  y, por tanto,  $g(0) = f(\tilde{x})$  no podría ser el óptimo global. Esto contradice nuestra suposición inicial.

□

El Teorema 4.2 tiene diferentes usos en los problemas de optimización convexa. Por un lado, permite solucionar algunos relativamente sencillos usando argumentos geométricos; por otro lado, nos permite identificar si una solución dada es óptima. Esta solución es usualmente determinada mediante algoritmos que se acercan continuamente a la solución. Veamos algunos casos de aplicación de este teorema.

**Ejemplo 4.1.** Consideremos el siguiente problema de optimización en donde  $f$  es una función convexa de clase  $\mathcal{C}^2$

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ Ax = b \end{aligned} \quad (4.17)$$

Llamemos a  $\tilde{x}$ , el mínimo de la función, entonces sabemos que  $f(x) \geq f(\tilde{x})$ ,  $\forall x \in \Omega \subset \text{dom}(f)$ . Ahora, como la función es diferenciable, entonces sabemos que

$$\nabla f(\tilde{x})^T(x - \tilde{x}) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \quad (4.18)$$

en donde  $\Omega = \{x : Ax = b\}$ . Definimos el espacio nulo de  $A$  como  $\mathcal{N}(A) = \{v : Av = 0\}$ . (Ver FIGURA NRO. 4.3). El espacio nulo de  $A$  corresponde a mover  $\Omega$

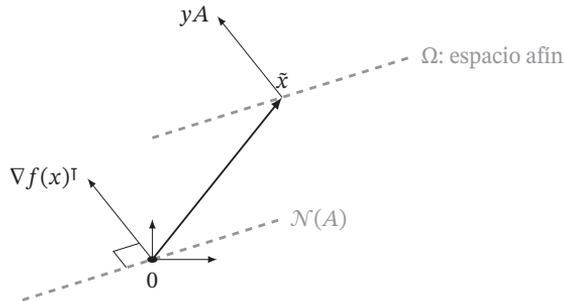


FIGURA NRO. 4.3. Representación gráfica para el análisis del ejemplo 1.

de tal forma que pase por cero, de donde se obtiene lo siguiente:

$$A(\tilde{x} + v) = b, \quad \text{con } v \in \mathcal{N}(A) \quad (4.19)$$

Así,  $x = \tilde{x} + v \in \Omega$  y, por lo tanto,

$$\nabla f(\tilde{x})^T v \geq 0 \quad (4.20)$$

Tanto  $v$  como  $-v$  pertenecen a  $\mathcal{N}(A)$  entonces la única forma de que se cumpla esta condición es mediante la igualdad; esto significa que el gradiente es perpendicular al espacio nulo  $\mathcal{N}(A)$ , como se muestra a continuación:

$$\nabla f(\tilde{x})^T v = 0 \quad (4.21)$$

Tomemos ahora un nuevo par de variables  $u$  y  $y$  con las cuales definimos el siguiente espacio afín  $\mathcal{R} = \{(u, y) : u = A^T y\}$ . Es claro que  $u$  debe ser perpendicular a todos los puntos  $v \in \mathcal{N}(A)$  ya que  $u^T v = y^T A v = 0$  para cualquier punto  $y$ ; por tanto,  $\nabla f(\bar{x})$  se puede representar como un punto de  $\mathcal{R}$ , es decir, existe un  $y$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = A^T y$ . Como resultado, obtenemos las siguientes condiciones de optimalidad, a saber:

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) - A^T y &= 0 \\ A\bar{x} &= b \end{aligned} \tag{4.22}$$

La FIGURA NRO. 4.3 muestra la situación de una forma más clara. ■

En el ejemplo anterior podemos llegar al mismo resultado usando el método de multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, el Teorema 4.2 es más general pues permite identificar la solución óptima en problemas con restricciones de desigualdad como se muestra a continuación.

**Ejemplo 4.2.** Consideremos el caso de un problema convexo con restricciones de desigualdad

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Sabemos que  $\nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) \geq 0$  lo cual, término a término, está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i}(x_i - \bar{x}_i) &\geq 0 \\ x_i &\geq 0 \\ \bar{x}_i &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

En la primera condición, podemos reconocer dos casos principales, a saber:  $\bar{x}_i > 0$  y  $\bar{x}_i = 0$ . En el primer caso, dado que  $x_i \geq 0$  y  $\bar{x}_i \geq 0$ , entonces el término  $x_i - \bar{x}_i$  puede ser positivo o negativo de acuerdo al valor de  $x_i$ . Por tanto, la única forma en que se cumpla la condición 4.24 cuando  $\bar{x}_i > 0$  es que  $\nabla f(\bar{x}_i) = 0$ . Por otro lado, si  $\bar{x}_i = 0$  entonces el término  $x_i - \bar{x}_i$  es siempre positivo y, por consiguiente, es suficiente con que  $\nabla f(\bar{x}_i) \geq 0$ . Estas dos condiciones se pueden resumir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i > 0 &\rightarrow \nabla f(\bar{x}_i) = 0 \\ \bar{x}_i = 0 &\rightarrow \nabla f(\bar{x}_i) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Dichas condiciones se pueden reescribir como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} &\geq 0 \\ \bar{x}_i &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Si un punto cumple estas condiciones, podemos asegurar que se trata del óptimo global del problema. Esto nos permite evaluar la optimalidad de un punto dado. Encontrar dicho punto es otro problema que será analizado en la sección de algoritmos. ■

**Ejemplo 4.3.** Consideremos ahora un problema de optimización de la forma

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \geq a \end{aligned} \quad (4.27)$$

Este se puede reescribir como en el ejemplo anterior, realizando el siguiente cambio de variable  $y = x - a$ . Nótese que  $\partial f / \partial y_i = \partial f / \partial x_i$  y, por tanto, las condiciones de optimalidad son la siguientes:

$$\begin{aligned} y_i &\geq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y_i} &\geq 0 \\ y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Usando las variables originales, dichas condiciones corresponden a:

$$\begin{aligned} x_i - a &\geq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} &\geq 0 \\ (x_i - a) \frac{\partial f}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

■

## 4.2. Condiciones de segundo orden

**Teorema 4.3.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa de clase  $\mathcal{C}^2$  (continua y doblemente diferenciable) entonces, necesariamente,

$$\mathcal{H}_f(x) \geq 0 \quad (4.30)$$

en donde  $\mathcal{H}_f$  es la hessiana.

DEMOSTRACIÓN. Definimos una nueva variable  $v = (y - x)$  y una función en una variable  $g(t) = f(x + tv)$ . De esta índole, tenemos que:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(x + tv)^T v \\ g'(0) &= \nabla f(x)^T v \end{aligned} \quad (4.31)$$

Luego, dividimos por  $t^2 > 0$  y en vista de la ecuación 4.10, tenemos

$$(\nabla f(x + tv)^T - \nabla f(x)^T)v = \frac{g'(t) - g'(0)}{t} \geq 0 \quad (4.32)$$

Así, tomando el límite  $t \rightarrow 0$  obtenemos que  $g''(0) = v^T \mathcal{H}_f(x)v \geq 0$  con lo que el teorema queda demostrado.  $\square$

**Lema 4.1.** En una función fuereemente convexa se tiene que

$$\mathcal{H}_f(x) \geq \frac{\mu}{2}I, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (4.33)$$

en donde  $\mathcal{H}_f$  es la hessiana de  $f$  e  $I$  es la matriz identidad.

DEMOSTRACIÓN. Como  $f$  es fuertemente convexa entonces sabemos que  $g(x) = f(x) - \mu \|x\|^2$  es también convexa, lo cual significa que

$$\mathcal{H}_g(x) = \mathcal{H}_f(x) - \frac{\mu}{2}I \geq 0 \quad (4.34)$$

$\square$

**Ejemplo 4.4.** La función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  es convexa ya que la hessiana cumple con la siguiente propiedad:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} > 0 \quad (4.35)$$

Además, es fuertemente convexa, ya que

$$H(x, y) - \mu I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0 \quad (4.36)$$

con  $2 \geq \mu > 0$ . ■

### 4.3. Subgradientes

Las condiciones presentadas en el Teorema 4.1 pueden ser generalizadas en funciones no diferenciables; para ello, necesitamos definir los conceptos de subgradiente y subdiferencial.

**Definición 4.1. Subgradiente.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa entonces decimos que un vector  $g$  es un subgradiente de  $f$  si

$$f(x) \geq f(y) + g^T(x - y) \quad (4.37)$$

Así, el conjunto de todos los subgradientes de  $f$  se denomina subdiferencial de  $f$  y lo denotamos como

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq f(y) + g^T(x - y), \forall x, y \in \text{dom}(f)\} \quad (4.38)$$

En el caso en que  $f$  sea diferenciable, entonces el gradiente de  $f$  es un subgradiente. No obstante, en el caso más general, existen varios vectores  $g$  que hacen las veces de subgradiente de  $f$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 4.4. En la figura de la izquierda, la función es continua y, por tanto,  $g = \nabla f(y)$ . En la figura de la derecha, existen varias pendientes  $g_1$  y  $g_2$ , que son subgradientes de la función en el punto  $y$ . El subdiferencial es entonces un conjunto asociado a cada punto  $x$  y no una función.

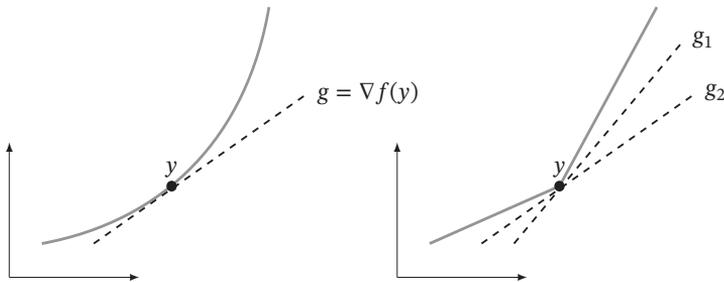


FIGURA NRO. 4.4. Ejemplo de subgradiente en un punto  $y$ .

**Lema 4.2.** Sea  $f$  una función convexa con subdiferencial  $\partial f$ . Entonces  $\tilde{x}$  minimiza  $f$  si  $0 \in \partial f(x)$ .

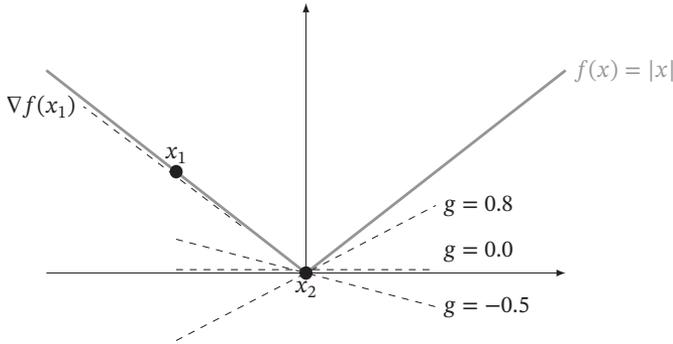
DEMOSTRACIÓN. Basta con notar que  $f(x) \geq f(y)$  en la ecuación 4.37 cuando  $g = 0$ . Esto significa que  $y$  es un óptimo global si  $g \in \partial f = 0$ .  $\square$

**Ejemplo 4.5.** Consideremos el caso de la función  $f(x) = |x|$  que se muestra en la FIGURA NRO. 4.5 cuyo subdiferencial esta dado por:

$$\partial f(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) & x \neq 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\partial f(x) = \begin{cases} \text{sign}(x) & x \neq 0 \\ [-1, 1] & x = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

En este caso, el subdiferencial es un mapa que asigna un conjunto a cada punto y este conjunto es un único punto cuando la función es continua. Así, en el punto  $x_1$ , el subdiferencial es un único punto y es igual al gradiente, es decir,  $\partial f(x_1) = \{\nabla f(x_1)\}$ .



**FIGURA NRO. 4.5.** Ejemplo de subdiferencial asociado a la función  $f(x) = |x|$  en dos puntos  $x_1$  y  $x_2$ .

En el punto  $x_2$ , el subdiferencial incluye a todos los puntos entre  $-1$  y  $1$ , es decir,  $\partial f(x_2) = \{g \in \mathbb{R} : -1 \leq g \leq 1\}$ . En este caso,  $0 \in \partial f(x_2)$  y, por tanto, podemos concluir que se trata de un óptimo global. ■

**Teorema 4.4.** Sean  $\Omega_A$  y  $\Omega_B$  dos conjuntos convexos no vacíos y disyuntos, esto es  $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$ . Entonces, existe un hiperplano que separa a los dos conjuntos  $\Omega_A$  y  $\Omega_B$ .

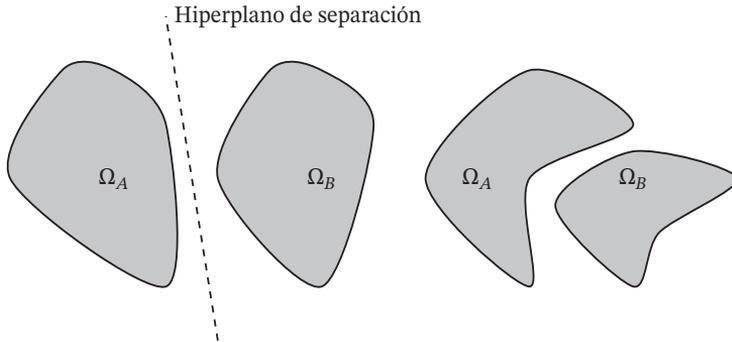
Este teorema es intuitivo, como se muestra en la FIGURA NRO. 4.6. En el primer caso, existe al menos un hiperplano que separa los dos conjuntos. En el segundo caso, no existe forma de separar los conjuntos por un hiperplano, a pesar de que los conjuntos son disyuntos. La idea general es que siempre podremos encontrar un hiperplano que separa a dos conjuntos convexos y disyuntos, algo que no se puede asegurar en un par de conjuntos no-convexos. La demostración de este teorema se puede encontrar en [6] página 133.

**Teorema 4.5.** Sea  $\Omega$  un conjunto convexo cuya frontera es denotada por  $\partial\Omega$ . Consideremos ahora un punto  $x_0 \in \partial\Omega$ . Entonces existe, por lo menos, un hiperplano que pasa por  $x_0$  tal que todo el conjunto  $\Omega$  está contenido en uno de los semiespacios que divide el hiperplano.

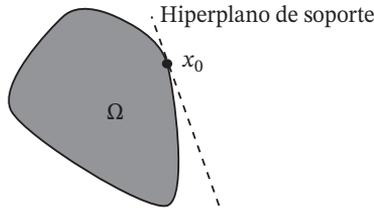
Este teorema es consecuencia del Teorema 4.4, la intuición del mismo se muestra en la FIGURA NRO. 4.7.

**Teorema 4.6.** Dada una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y un punto  $x_0 \in \text{dom}(\Omega)$ , entonces existe al menos un sugradiente  $g$  en  $x_0$ .

**DEMOSTRACIÓN.** El epígrafo de  $f$  dado por  $\text{epi}(f) = \{(x, t) : f(x) \leq t\}$  es un conjunto convexo con frontera  $\partial \text{epi}(f) = \{(x, t) : f(x) = t\}$ . Así, un punto en la frontera



**FIGURA NRO. 4.6.** Existencia de un hiperplano de separación entre dos conjuntos convexos disyuntos.



**FIGURA NRO. 4.7.** Ejemplo de un hiperplano de soporte a un conjunto convexo  $\Omega$  en un punto  $x_0 \in \partial\Omega$ .

$(x_0, t_0) \in \partial \text{epi}(f)$  tiene un hiperplano de soporte definido como

$$t + g^T x \leq c \quad (4.41)$$

Este hiperplano existe debido al Teorema 4.5 (ver FIGURA NRO. 4.8). Ahora, en el punto de frontera  $(x_0, t_0)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} t_0 + g^T x_0 &= c \\ f(x_0) + g^T x_0 &= c \end{aligned} \quad (4.42)$$

Por consiguiente, la expresión 4.41 toma la siguiente forma, a saber:

$$\begin{aligned} t &\leq c - g^T x \\ f(x) &\leq t \leq c - g^T x \\ f(x) &\leq f(x_0) + g^T x_0 - g^T x \end{aligned} \quad (4.43)$$

de donde concluimos que  $g$  es un subgradiente de  $f$  en el punto  $x_0$ .

□

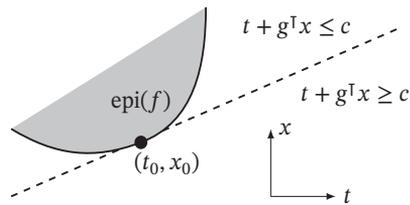


FIGURA NRO. 4.8. Hiperplano de soporte del epígrafo de  $f$  como subgradiente de  $f$ .

#### 4.4. Solución de modelos en Python

Existen múltiples herramientas para solucionar problemas de optimización convexa. A lo largo de este libro, usaremos `cvxpy`, por tratarse de una herramienta libre. No obstante, la teoría de optimización es general y los resultados obtenidos deben ser iguales sin importar la herramienta utilizada.

`cvxpy` es una herramienta libre de Python que permite escribir modelos de optimización de una forma natural para, posteriormente, invocar a paquetes de optimización matemática tales como GUROBI o ECOS. La mayoría de estos paquetes usan métodos basados en puntos interiores (ver capítulo dieciséis). El uso del paquete es intuitivo. Por lo cual mostraremos su uso mediante un ejemplo simple.

**Ejemplo 4.6.** Solucionar el siguiente modelo de programación cuadrática usando `cvxpy`.

$$\begin{aligned}
 \text{mín } & 3x^2 + 2y^2 + 5z^2 \\
 & x + y + z = 1 \\
 & x \geq 0 \\
 & y \geq 0 \\
 & z \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

El código en Python es el siguiente:

```

import cvxpy as cvx

x = cvx.Variable(1)
y = cvx.Variable(1)
z = cvx.Variable(1)
obj = cvx.Minimize(3*x**2+2*y**2+5*z**2)
res = [x+y+z == 1,
       x>= 0,
       y>=0,
       z>=0]
prob = cvx.Problem(obj, res)
    
```

```

prob.solve(verbose=True)

print("Valor optimo", prob.value)
print("Valor de x", x.value)
print("Valor de y", y.value)
print("Valor de z", z.value)

```

La implementación consta de cinco etapas: primero se importa la librería `cvxpy` y se le asigna un nombre (en este caso, «`cvx`»); luego, se definen las variables de decisión; posteriormente, se define la función objetivo (`obj`) y las restricciones (`res`); finalmente, se define el problema y se resuelve con el comando `solve`.



## 4.5. Lecturas complementarias

En este capítulo se presentaron las condiciones de optimalidad para funciones convexas, continuas y diferenciables. Los conceptos son similares al caso presentado en el capítulo uno. No obstante, los resultados presentados en este capítulo son generales e incluyen el caso multivariado. El estudiante interesado puede referirse a [8] para más detalles y ejemplos. Igualmente, puede referirse a [9] para el análisis de estas propiedades en el contexto de los algoritmos de optimización. Algunas de estas propiedades serán presentadas en la cuarta parte del libro.

## 4.6. Ejercicios

1. Comprobar que el punto  $\bar{x} = [1, 1/2, -1]$  es el óptimo del problema de optimización

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} x^T H x + c^T x + r \\ -1 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (4.45)$$

con

$$H = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -22 \\ -14.5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

¿Se trata de un problema convexo? Justifique su respuesta.

2. Determinar el óptimo del siguiente problema de optimización, a saber:

$$\begin{aligned} \text{mín} c^T \cdot x \\ x^T \cdot H \cdot x \leq 1 \end{aligned} \quad (4.46)$$

en donde  $c \neq 0$  y  $H$  es una matriz simétrica definida positiva (por tanto, tiene inversa y admite una factorización de Cholesky).

3. Usar el resultado del punto anterior para

$$H = \begin{pmatrix} 62 & 10 & -9 & -17 \\ 10 & 103 & 8 & 101 \\ -9 & 8 & 48 & -14 \\ -17 & 101 & -14 & 130 \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Comprobar el resultado usando `cvxpy` o cualquier herramienta similar.

4. Determinar si las siguientes funciones son convexas. Usar el criterio de la hessiana.

$$f(x) = -\ln(x) + e^x \quad (4.47)$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \alpha xy \quad (4.48)$$

$$f(x) = -\ln(\det(M(x))), \text{ con } M(x) = \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

$$f(x, y) = \ln(e^x + e^y) \quad (4.50)$$

$$f(x) = \left( \prod_i x_i \right)^{1/n}, \quad x_i > 0 \quad (4.51)$$

$$f(x, y) = -x^p y^{1-p}, \quad x > 0, y > 0, 0 < p < 1 \quad (4.52)$$

5. Graficar cada una de las siguientes funciones y calcular el subdiferencial, a saber:

$$f(x) = |x + 5| \quad (4.53)$$

$$f(x) = \sup \{x^2, x + 1\} \quad (4.54)$$

Determinar el óptimo usando dichos sub-diferenciales.

5

CAPÍTULO  
CINCO

# DUALIDAD

*Cualquier modelo de optimización matemática tiene asociado un modelo dual. Este modelo está estrechamente relacionado con los multiplicadores de Lagrange. Estos permiten resolver un problema equivalente y determinar condiciones de optimalidad. En este capítulo, estudiaremos dichas condiciones, llamadas de Karush-Kuhn-Tucker así como las condiciones de Slater, las cuales permiten garantizar optimalidad e igualdad entre el primal y el dual.*

## 5.1. Función dual

Consideremos el problema de optimización convexa

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & g_i(x) = 0 \\ & h_j(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

con  $f$  y  $h$  como funciones convexas y  $g$  como funciones afines; llamaremos a este problema primal. Podemos asociar una función lagrangeana  $\mathcal{L}$ , definida de la siguiente

forma:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_i \lambda_i g_i(x) + \sum_j \mu_j h_j(x) \quad (5.2)$$

en donde asumimos  $\mu_j \geq 0$ . Ahora, en cualquier punto factible, se tiene que  $g_i(x) = 0$  y, por tanto, tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_j \mu_j h_j(x) \quad (5.3)$$

puesto que  $h_j(x) \leq 0$  y  $\mu_j \geq 0$  tenemos que

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \leq f(x) \quad (5.4)$$

Lo anterior se cumple incluso para el óptimo  $\bar{x}$ . Esto significa que  $\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu)$  es siempre menor que el valor de la función objetivo para cualquier punto factible  $x$ .

**Definición 5.1. Función dual.** Consideremos un problema de optimización convexa dado por 5.1 y una función lagrangeana dada por 5.2. Entonces podemos definir una nueva función llamada función dual de la siguiente forma:

$$\mathcal{W}(\lambda, \mu) = \inf_x \{\mathcal{L}(x, \lambda, \mu)\} \quad (5.5)$$

Nótese que esta función depende solo de  $(\lambda, \mu)$  y el ínfimo se esta tomando sobre  $x$ . Por tanto, es claro que  $\mathcal{W}(\lambda, \mu) \leq f(\bar{x}) \leq f(x)$ , es decir, que el valor de la función dual es siempre menor al valor del primal.

**Lema 5.1.** La función dual  $\mathcal{W}$  es cóncava para cualquier tipo de funciones  $f, h, g$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Para que  $\mathcal{W}$  sea cóncava entonces  $-\mathcal{W}$  debe ser convexa. Por tanto, solo debemos comprobar que la función  $-\mathcal{W}$  cumple con la desigualdad de Jensen. Tomamos los puntos  $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ , dos valores reales  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  con  $\alpha + \beta = 1$  y evaluamos la función en el segmento de recta resultante, así<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} -\mathcal{W}(\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \alpha\mu_1 + \beta\mu_2) &= -\inf_x \{\mathcal{L}(x, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \alpha\mu_1 + \beta\mu_2)\} \\ &= \sup_x \{-\mathcal{L}(x, \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2, \alpha\mu_1 + \beta\mu_2)\} \\ &\leq \alpha \sup_x \{-\mathcal{L}(x, \lambda_1, \mu_1)\} + \beta \sup_x \{-\mathcal{L}(x, \lambda_2, \mu_2)\} \\ &= -\alpha \mathcal{W}(\lambda_1, \mu_1) - \beta \mathcal{W}(\lambda_2, \mu_2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Con lo anterior queda demostrado que se trata de una función cóncava. □

No hemos usado el hecho de que  $f, h$  y  $g$  son convexas y, por tanto, la función dual es cóncava incluso en problemas no-convexos.

<sup>1</sup>Recordar que  $\inf(A) = -\sup(-A)$ .

**Definición 5.2.** Dado el problema de optimización representado por 5.1 podemos asociar el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{máx } \mathcal{W}(\lambda, \mu) \\ \mu \geq 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

en donde  $\mathcal{W}$  está dado por la ecuación 5.5. Al problema original lo llamamos primal ( $\mathcal{P}$ ) y a este nuevo problema de optimización lo llamamos problema dual ( $\mathcal{D}$ ).

El problema dual puede ser de utilidad para resolver el problema primal como veremos en la siguiente sección. El problema dual es convexo, así que cualquier problema de optimización lo podemos convertir en uno de optimización convexa usando la función dual. Sin embargo, no siempre la solución del problema primal y del problema dual son iguales. Ese es un detalle importante que estudiaremos en la siguiente sección; por ahora, veamos algunos ejemplos de problemas duales:

**Ejemplo 5.1.** Mostrar el dual del siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x) = x^2 \\ x \geq 3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

definimos la función lagrangeana con  $\mu \geq 0$ , así:

$$\mathcal{L}(x, \mu) = x^2 + \mu(3 - x) \quad (5.9)$$

Ahora bien, la función dual está dada por

$$\mathcal{W}(\mu) = \inf_x \mathcal{L}(x, \mu) = \inf_x \{x^2 + \mu(3 - x)\} \quad (5.10)$$

Nótese que  $x$  es irrestricto así que podemos encontrar el ínfimo usando el criterio de la primera derivada (aprovechamos el hecho de que  $\mathcal{W}$  es convexa). Entonces tenemos lo siguiente:

$$\hat{x} = \text{argmin } \mathcal{L}(x, \mu) = \mu/2 \quad (5.11)$$

Conforme a lo anterior,  $\mathcal{W}(\mu) = \mathcal{L}(\hat{x}, \mu)$ , es decir:

$$\mathcal{W}(\mu) = (\mu/2)^2 + \mu(3 - \mu/2) = 3\mu - \mu^2/4, \text{ con } \mu \geq 0 \quad (5.12)$$

La FIGURA NRO. 5.1 muestra una comparación entre los problemas primales y duales. Allí, el mínimo de  $\mathcal{P}$  se presenta cuando  $x = 3$  y es igual a  $f(3) = 9$ , mientras que el máximo de  $\mathcal{W}$  se presenta en  $\mu = 6 \geq 0$  y es igualmente  $\mathcal{W}(6) = 9$ . Esto significa que el mínimo del problema primal es igual al máximo del problema dual. Esta característica es propia de algunos problemas de optimización convexa, pero no es general, como veremos más adelante. ■

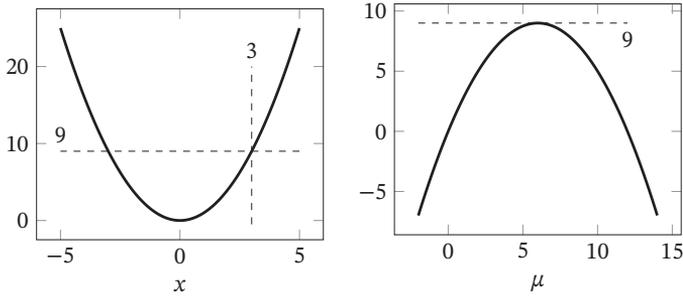


FIGURA NRO. 5.1. Comparación entre el problema primal y dual para el ejemplo 1.

**Ejemplo 5.2.** Mostrar el dual del siguiente problema de optimización cuadrática:

$$\begin{aligned} \text{mín} x^T x \\ Ax = b \end{aligned} \tag{5.13}$$

Procedemos de la misma forma que en el ejemplo anterior, definiendo el lagrangeano y la función dual correspondiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \lambda) &= x^T x + \lambda^T (Ax - b) \\ \mathcal{W}(\lambda) &= \inf_x \{x^T x + \lambda^T (Ax - b)\} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Afortunadamente,  $\mathcal{L}$  es convexo así que es fácil encontrar un valor mínimo, del siguiente modo:

$$\hat{x} = \text{argmin} \{x^T x + \lambda^T (Ax - b)\} = -\frac{1}{2} A^T \lambda \tag{5.15}$$

Por tanto, el problema dual puede ser escrito de forma explícita, así:

$$\text{máx } \mathcal{W}(\lambda) = \frac{-1}{4} \lambda^T (AA^T) \lambda - b^T \lambda \tag{5.16}$$

En donde, evidentemente,  $\mathcal{W}$  es una función cóncava y, por tanto, tiene un máximo en el punto  $\lambda = -2(AA^T)^{-1}b$ . ■

**Ejemplo 5.3.** Mostrar el problema dual para el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{mín} c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Formulamos la función dual, la cual tiene multiplicadores de Lagrange, asociados tanto a las restricciones de igualdad como de desigualdad, a saber:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(\lambda, \mu) &= \inf_x \{c^T x + \lambda^T(b - Ax) + \mu^T(-x)\} \\ &= \inf_x \{(c^T - \lambda^T A - \mu^T)x + \lambda^T b\}\end{aligned}\quad (5.18)$$

En este caso,  $\mathcal{W}$  solo puede tomar dos valores:  $-\infty$  o  $\lambda^T b$ . Desde luego, el segundo caso es más interesante, de este modo, el problema dual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{mín } & b^T \lambda \\ & c - A^T \lambda - \mu = 0 \\ & \mu \geq 0\end{aligned}\quad (5.19)$$

Cabe mencionar que pueden existir diferentes formas del dual; sin embargo, bajo ciertas condiciones que analizaremos en la siguiente sección, el óptimo del problema primal es igual al óptimo del problema dual. ■

**Ejemplo 5.4.** Mostrar el dual del siguiente problema no convexo con  $H = H^T > 0$ , a saber:

$$\begin{aligned}\text{mín } & x^T H x \\ & x^T x = 1\end{aligned}\quad (5.20)$$

A pesar que el problema primal es no-convexo, el dual sí es un problema convexo dado por

$$\mathcal{W}(\lambda) = \inf_x \{x^T H x + \lambda(1 - x^T x)\} \quad (5.21)$$

en donde el óptimo se produce en los puntos  $x$  que pertenecen al espacio nulo de  $H - \lambda I$  ( $I$  es la matriz identidad) de donde se deduce que necesariamente  $\lambda = \text{eig}(H)$  ya que, la restricción misma implica que  $x \neq 0$ . Es decir, la función dual está definida sobre puntos discretos (ver FIGURA NRO. 5.2). Este caso atípico deja ver los problemas a los que nos enfrentamos cuando el espacio de soluciones es no-convexo. ■

Este ejemplo deja ver que el concepto de dualidad puede ser utilizado incluso en funciones que no son convexas. Sin embargo, no se puede garantizar que el óptimo del dual corresponda a la solución del primal. Así mismo, los ejemplos anteriores muestran que en algunos casos el problema dual puede ser más simple que el primal. Ahora, nos interesa analizar las condiciones en las cuales el primal es igual al dual, y la relación que existe entre  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{D}$ .

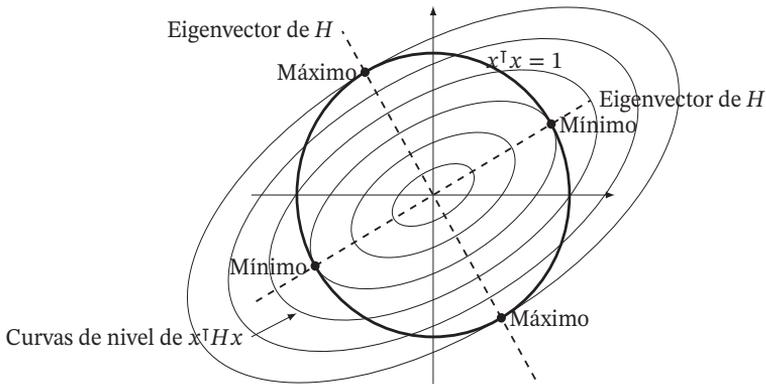


FIGURA NRO. 5.2. Diagrama esquemático del problema primal del ejemplo 5.4.

## 5.2. Relación entre el primal y el dual

**Lema 5.2. dualidad débil.** Dado un punto factible del problema primal  $\mathcal{P}$  y un punto factible del problema dual  $\mathcal{D}$ , se tiene que

$$W(\lambda, \mu) \leq f(x) \tag{5.22}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este lema se obtiene directamente de las consideraciones presentadas en la sección anterior, especialmente, de la ecuación 5.5 teniendo en cuenta que  $\inf(f) \leq f$  y  $\mu \geq 0$ .  $\square$

La FIGURA NRO. 5.3 muestra la situación de forma esquemática. El primal genera un problema de minimización en el espacio de  $x$ , mientras que el dual genera un problema de optimización en el espacio  $(\lambda, \mu)$ , de tal forma que cualquier valor factible del dual es siempre inferior a cualquier valor factible del primal. De esta forma, el dual se convierte en una cota inferior del problema. Nuestro objetivo es tratar de minimizar el primal y maximizar el dual para que la diferencia entre uno y otro sea mínima. El criterio de dualidad débil nos garantiza esta diferencia. Sin embargo, nos gustaría saber en qué condiciones podemos asegurar que el primal y el dual se tocan. Para ello, usamos el criterio de dualidad fuerte, a saber:

**Definición 5.3.** Decimos que un problema de optimización cumple con el criterio fuerte de dualidad si el óptimo del problema primal es igual al óptimo del problema dual.

Es importante destacar que los problemas de programación lineal cumplen con el criterio de la dualidad fuerte, pero no todos los problemas convexos cumplen con esta

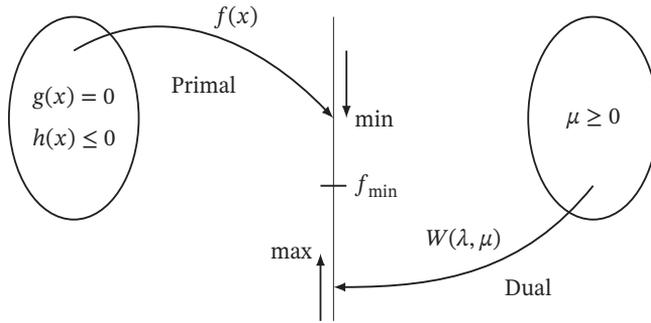


FIGURA NRO. 5.3. Relación entre los problemas primales y duales.

condición. Las consideraciones de dualidad débil, en cambio, se cumplen en todos los problemas con primal factible.

**Teorema 5.1. Condiciones de Slater.** Un problema convexo con cota inferior finita cumple con la condición de dualidad fuerte si existe un punto en el interior relativo del espacio de soluciones.

Proponemos un análisis para problemas *ad-hoc* con una sola restricción de desigualdad. El lector interesado puede encontrar una demostración más general en [8] y en [6]. Consideremos inicialmente el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & h(x) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

con  $f$  y  $h$  funciones convexas. Nombramos  $\bar{p}$  como la solución óptima del problema primal y  $\bar{d}$  como la solución óptima del problema dual; la condición de dualidad débil garantiza que  $\bar{d} \leq \bar{p}$ .

Ahora, definimos un conjunto  $\mathcal{V}$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{V} = \{(y, z) : f(x) \leq z, h(x) \leq y\} \quad (5.24)$$

El conjunto  $\mathcal{V}$  es convexo ya que está formado por la intersección de epígrafos de conjuntos convexas. Además, podemos aumentar indefinidamente los valores de  $(y, z)$  y estos puntos siguen perteneciendo a  $\mathcal{V}$ . Es decir, si un punto  $(y, z) \in \mathcal{V}$  y tenemos otro punto  $y' > y$  y  $z' > z$ , entonces  $(y', z') \in \mathcal{V}$ .

El punto  $(0, \bar{p})$  no pertenece al interior de  $\mathcal{V}$ , ya que  $f(x) \geq \bar{p}$  (i.e., el punto  $\bar{p}$  es un óptimo local). Es decir que  $(0, \bar{p})$  está en la frontera o en el exterior de  $\mathcal{V}$ . Puesto que  $\mathcal{V}$  es convexo, entonces existe un hiperplano de soporte que pasa por el punto  $(0, \bar{p})$ . Este hiperplano separa el espacio en dos subespacios  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$  como se muestra en la FIGURA

NRO. 5.4. La ecuación del hiperplano se presenta a continuación:

$$a^T y + b^T(z - \bar{p}) = 0 \tag{5.25}$$

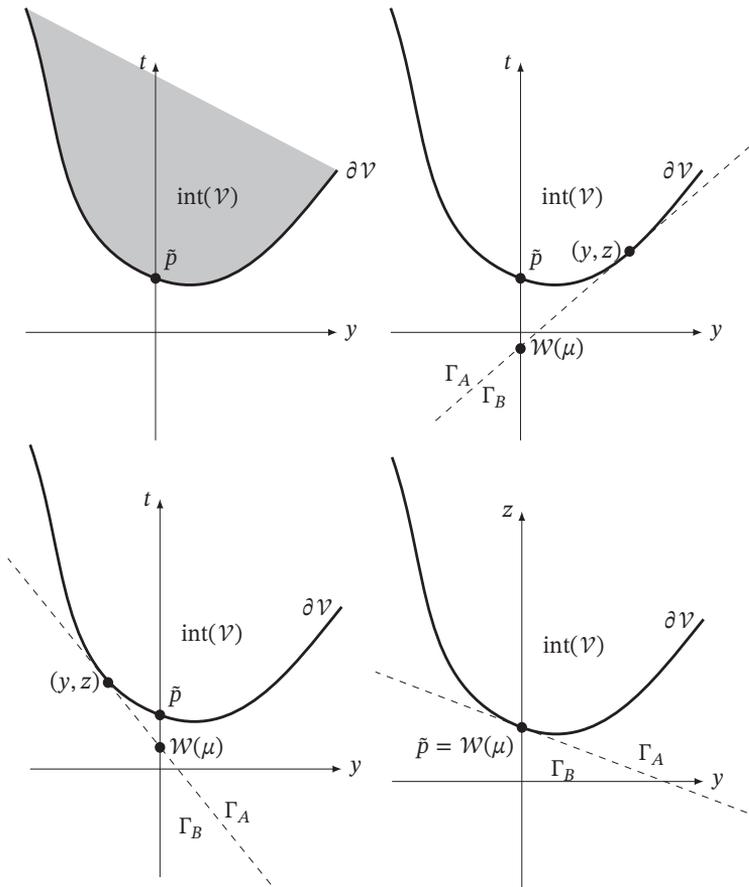


FIGURA NRO. 5.4. Interpretación gráfica del concepto de dualidad fuerte en un problema de optimización convexa con una variable.

Todos los puntos que pertenecen a  $\mathcal{V}$  están por encima de este hiperplano, es decir:

$$a^T y + b^T z \geq b^T \bar{p} \tag{5.26}$$

Note que  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ , pues si alguna de estas variables fuera negativa, entonces podríamos aumentar indefinidamente valores de  $(y, z)$  hasta encontrar puntos que violaran la inecuación 5.26. Además,  $b \neq 0$ ; esto se explica usando el siguiente

razonamiento: si fuera cero entonces 5.26 se transformaría en  $a^\top y \geq 0$ ; como  $(h(x), f(x)) \in \mathcal{V}$  entonces tendríamos que  $a^\top h(x) \geq 0$ ; sin embargo, existe al menos un punto interior tal que  $h(x) < 0$ , el cual violaría esta restricción. Por tanto,  $b > 0$  y puede ser dividido en 5.26 sin modificar la relación:

$$(a/b)^\top y + z \geq \bar{p} \quad (5.27)$$

Ahora, definimos  $\mu = a/b$ , de manera que esta relación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mu^\top y + z \geq \bar{p} \quad (5.28)$$

Esta inecuación se cumple para todos los puntos  $(y, z) \in \mathcal{V}$ ; en particular, se cumple para  $(h(x), f(x))$ , es decir,

$$\mu^\top h(x) + f(x) \geq \bar{p} \quad (5.29)$$

Tomamos el ínfimo en  $x$  y luego el supremo en  $\mu$  para obtener el valor de la solución dual:

$$\sup_{\mu} \left\{ \inf_x \mu^\top h(x) + f(x) \right\} = \bar{d} \geq \bar{p} \quad (5.30)$$

El criterio de dualidad débil indica que  $\bar{d} \leq \bar{p}$ . Por lo tanto, la única forma en que se cumplan ambos resultados es que  $\bar{p} = \bar{d}$ , es decir, si se cumple el criterio de dualidad fuerte.

En conclusión, podemos garantizar dualidad fuerte cuando se cumplen tres condiciones, a saber:

- El primal debe ser convexo.
- Debe tener una solución finita.
- El interior debe ser no vacío.

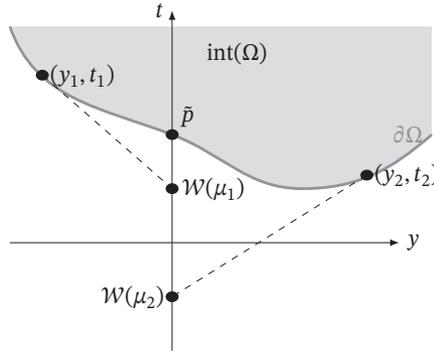
Cuando consideramos restricciones de igualdad entonces debemos garantizar que el interior relativo sea no vacío. El interior relativo de un conjunto  $\Omega = \{Ax = b, h(x) \leq 0\}$  está definido de la siguiente forma:

$$\text{intrel}(\Omega) = \{Ax = b, h(x) < 0\} \quad (5.31)$$

Podemos definir problemas duales en modelos no convexos; aunque, en ese caso, la solución del problema dual puede ser diferente a la del primal, lo cual se evidencia en la FIGURA NRO. 5.5. Nótese que no hay forma de separar el espacio en el punto  $\bar{p}$ . La condición de dualidad débil puede seguirse cumpliendo. Finalmente, si el problema es convexo pero el interior relativo es vacío entonces la solución del problema dual puede ser infinita (lo cual significa que el hiperplano de soporte puede ser vertical).

**Ejemplo 5.5.** Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (x - 1)^2 \\ x^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$



**FIGURA NRO. 5.5.** Interpretación gráfica del concepto de dualidad en un problema de optimización no convexo.

El espacio de soluciones de este problema es convexo pero su interior es vacío ya que el espacio mismo es solo un punto; esto es,  $\Omega = \{0\}$ ,  $\partial\Omega = \{0\}$  e  $\text{int}(\Omega) = \text{vacío}$ . La solución del problema primal es  $x = 0$ ,  $f(x) = 1 = \bar{p}$  mientras que el problema dual está dado por

$$\mathcal{L}(x, \mu) = (x - 1)^2 + \mu x^2 \tag{5.33}$$

$$\mathcal{W}(\mu) = \frac{\mu}{1 + \mu} \tag{5.34}$$

Por lo anterior,  $\mu$  puede crecer indefinidamente, es decir,

$$\mu = \operatorname{argmax} \{ \mathcal{W}(\mu) : \mu \geq 0 \} = \infty \tag{5.35}$$

Aunque el valor de la función objetivo  $\mathcal{W}(\mu) \rightarrow 1$ , podemos ver que esto se cumple cuando  $\mu \rightarrow \infty$ . En otras palabras, este problema no cumple con las condiciones de Slater y, a pesar de ello, la solución del problema primal es igual a la del problema dual. Esto se debe a que el teorema brinda condiciones suficientes pero no necesarias. ■

**Ejemplo 5.6.** Consideremos el siguiente problema de optimización, a saber:

$$\begin{aligned} \min e^{-x} \\ x^2/y \leq 0 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Este se encuentra definido en el dominio  $\mathcal{M} = \{(x, y) : y > 0\}$ . El espacio de soluciones de este problema corresponde a  $x = 0$  y  $y > 0$  por lo que el óptimo es  $\bar{p} = e^0 = 1$ . La función lagrangeana está dada por

$$\mathcal{L}(x, y, \mu) = e^{-x} + \mu \frac{x^2}{y} \tag{5.37}$$

Tomamos el ínfimo de  $\mathcal{L}$  en  $\mathcal{M}$  con el objetivo de encontrar la función dual; para ello, primero tomamos el límite cuando  $y \rightarrow \infty$  y, luego, cuando  $x \rightarrow \infty$ , de donde obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{W}(\mu) = \inf_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(x, y, \mu) = 0 \quad (5.38)$$

Dado lo anterior, el óptimo de la función dual es  $\tilde{d} = 0$ . En este caso, el óptimo del problema dual es diferente a aquel del problema primal. Esto se debe a que, en cada caso, el espacio de soluciones tiene un interior relativo vacío. No obstante, la condición de dualidad débil se sigue cumpliendo  $\tilde{d} \leq \tilde{p}$  ■

Estos ejemplos son casos atípicos, ya que la mayoría de problemas prácticos cumplen con las condiciones de Slater, por lo que podremos asegurar que se cumple el criterio de dualidad fuerte.

### 5.3. Condiciones de KKT

Las condiciones de optimalidad de primer orden sobre el problema primal  $\mathcal{P}$  y sobre el problema dual  $\mathcal{D}$  dan condiciones suficientes para garantizar la optimalidad. Estas condiciones se denominan de Karush-Kuhn-Tucker o KKT en honor de los matemáticos William Karush, Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker, quienes plantearon estas condiciones a mediados del siglo pasado. Estas condiciones son las siguientes:

- FACTIBILIDAD DEL PRIMAL:

$$g_i(\tilde{x}) = 0 \quad (5.39)$$

$$h_j(\tilde{x}) \leq 0 \quad (5.40)$$

- FACTIBILIDAD DEL DUAL:

$$\tilde{\mu}_j \geq 0 \quad (5.41)$$

- OPTIMALIDAD DE LA FUNCIÓN DUAL:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \text{diag}(\tilde{\lambda}) \frac{\partial g}{\partial x} + \text{diag}(\tilde{\mu}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (5.42)$$

- CONDICIONES DE COMPLEMENTARIEDAD:

$$\text{diag}(\tilde{\mu})h(\tilde{x}) = 0 \quad (5.43)$$

Las primeras tres condiciones son evidentes, así que analizaremos con más detalle las condiciones de complementariedad. En primera instancia, asumimos que el problema cumple con el teorema de Slater y, por tanto, el primal es igual al dual, esto es:

$$f(\tilde{x}) = \inf_x \{f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)\} \quad (5.44)$$

$$\leq f(\tilde{x}) + \lambda^T g(\tilde{x}) + \mu^T h(\tilde{x}) \quad (5.45)$$

Así, si cancelamos  $f(\bar{x})$  a ambos lados de la desigualdad, notamos que  $g(x) = 0$  debido a la factibilidad del primal. Por ende, tenemos que  $0 \leq \mu^T h(\bar{x})$ . Sin embargo, como  $h(\bar{x}) \leq 0$  y  $\mu \geq 0$  entonces la única posibilidad es que  $\mu_j h_j(x) = 0$ . Esto significa que la variable dual es 0 cuando la restricción no está activa y viceversa.

### 5.3.1. Interpretación mecánica de las condiciones KKT

Los multiplicadores de Lagrange tienen su origen en la formulación analítica de la mecánica de Newton. Consideremos una partícula que se mueve bajo la acción de un campo conservativo  $\phi(x, y, z)$  — por ejemplo, el campo eléctrico o el campo gravitacional—; la fuerza desarrollada será proporcional al gradiente de este campo, como se muestra a continuación:

$$m \frac{dv}{dt} = -\nabla\phi \tag{5.46}$$

Allí,  $m$  es la masa de la partícula y  $v$ , su velocidad. De esta expresión resulta claro que un equilibrio se produce cuando  $-\nabla\phi = 0$ . Esto corresponde a un mínimo o un máximo del campo  $\phi$  (la estabilidad del equilibrio también puede ser analizada con este tipo de criterio como se mostrará en el capítulo once). Por lo cual, el punto de equilibrio estará caracterizado como  $(x, y, z) = \operatorname{argmin} \phi(x, y, z)$ . La utilidad de esta consideración se presenta cuando se tienen restricciones físicas sobre el sistema mecánico.

**Ejemplo 5.7.** Consideremos una masa que se mueve sobre un plano inclinado sin fricción, como se muestra en la FIGURA NRO. 5.6. Por facilidad, suponemos una masa  $m = 1$  y una aceleración de la gravedad  $g = 10$  —omitimos las unidades por ser evidentes—; por tanto, el campo gravitacional estaría dado por  $\phi(x, y, z) = 10y$ . Desde luego, este campo no tiene límite inferior, lo que significa que la masa seguirá cayendo indefinidamente si no hay algún elemento que lo detenga. En el ejemplo de la figura, estos elementos están dados por el plano inclinado  $x = y$  y por el plano vertical  $x = 8$ ; por ende, el equilibrio puede ser totalmente determinado por el siguiente problema de optimización, a saber:

$$\begin{aligned} \text{mín } & 10y \\ & x - y = 0 \\ & 8 - x \leq 0 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Usando las condiciones de KKT, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 + \lambda - \mu &= 0 \\ 10 - \lambda &= 0 \\ \mu &\geq 0 \\ x - y &= 0 \\ 8 - x &\leq 0 \\ \mu(8 - x) &= 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

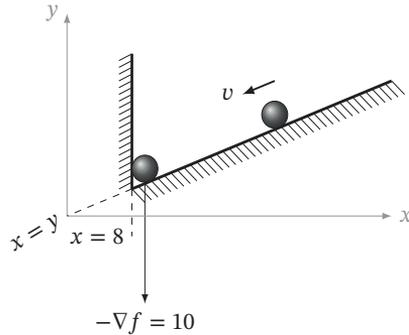


FIGURA NRO. 5.6. Ejemplo de un sistema con una masa sobre un plano inclinado.

De lo anterior, se obtiene un único equilibrio dado por  $x = 8$ ,  $y = 8$ ,  $\lambda = 10$  y  $\mu = 10$ . Los multiplicadores de Lagrange  $\lambda$  y  $\mu$  indican, en este caso, las fuerzas normales que ejercen los planos sobre la masa. ■

#### 5.4. Análisis de sensibilidad

La formulación dual tiene una interpretación asociada con el análisis de sensibilidad del problema primal tal y como se mostró en la interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange. Consideremos el siguiente problema de optimización con una única restricción de igualdad y una restricción de desigualdad, a saber:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) = a \\ h(x) \leq b \end{aligned} \quad (5.49)$$

cuyo lagrangeano es

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda(g(x) - a) + \mu(h(x) - b) \quad (5.50)$$

Deseamos saber el efecto sobre las variables de decisión en relación con el aumento o disminución de los vectores  $a$  y  $b$ ; para ello, analizamos el problema con una perturbación

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) = a + \Delta a \\ h(x) \leq b + \Delta b \end{aligned} \quad (5.51)$$

cuyo lagrangeano es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \lambda(g(x) - a - \Delta a) + \mu(h(x) - b - \Delta b) \\ &= \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) - \lambda\Delta a - \mu\Delta b \end{aligned} \quad (5.52)$$

Así, la nueva función dual  $\mathcal{W}_N$  estará dada por:

$$\mathcal{W}_N(\lambda, \mu) = \mathcal{W}(\lambda, \mu) - \lambda\Delta a - \mu\Delta b \quad (5.53)$$

Esto significa que, para  $\Delta b = 0$  y  $\Delta a \neq 0$ , se tiene:

$$\lambda = -\frac{\mathcal{W}_N - \mathcal{W}}{\Delta a} \quad (5.54)$$

Y, para  $\Delta b \neq 0$  y  $\Delta a = 0$ , se tiene que

$$\mu = -\frac{\mathcal{W}_N - \mathcal{W}}{\Delta b} \quad (5.55)$$

Conforme a lo anterior, los factores  $\lambda$  y  $\mu$  indican en cuanto cambia la función objetivo respecto a un cambio en las restricciones.

**Ejemplo 5.8.** `Cvxpy` permite obtener las variables duales del problema de una forma directa. Consideremos el siguiente problema de optimización cuyos valores óptimo son  $x = 10$  y  $y = 5$ , veamos:

$$\begin{aligned} \text{mín } & 8x + 7y^2 \\ & x \geq 10 \\ & y \geq 5 \end{aligned} \quad (5.56)$$

El resultado de las variables duales son 8 y 70. Esto significa que si la restricción no fuera  $x \geq 10$  sino  $x = 11$ , la función objetivo aumentaría en aproximadamente 8 unidades. Este valor no es preciso porque se trata de una aproximación de la derivada en la vecindad del punto óptimo. En el ejemplo, la función objetivo pasa de 255 a 263.

La implementación en Python es la siguiente<sup>2</sup>:

```
import cvxpy as cvx

x = cvx.Variable(1);
y = cvx.Variable(1);
obj = cvx.Minimize(8*x+7*y**2)
res = [x>=10, y>=5]
prob = cvx.Problem(obj, res)
prob.solve(verbose=False)

print("Valor optimo", prob.value)
print(x.value, y.value)
print("duals", res[0].dual_value, res[1].dual_value)
```

■

<sup>2</sup>Se invita al lector a experimentar con otros problemas de optimización.

## 5.5. Lecturas complementarias

En este capítulo se presentó brevemente el concepto de dualidad en problemas de optimización convexa. Dicho concepto es clave para entender las condiciones KKT, las cuales se cumplen cuando el interior relativo de cada problema es no-vacío, (condiciones de Slater). Algunos detalles teóricos sobre dualidad pueden encontrarse en [6] y en [8].

## 5.6. Ejercicios

1. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x^2 + 1 \\ g(x) &= (x - 2)(x - 4) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Mostrar el conjunto de soluciones factibles y el óptimo del problema. Graficar la función objetivo  $f$  vs  $x$ . Sobre la misma gráfica, mostrar el lagrangeano  $\mathcal{L}(x, \mu)$  para diferentes valores de  $\mu$  (por ejemplo,  $\mu = 1$  y  $\mu = 5$ ,  $\mu = 10$ ). Verificar que se cumplen las condiciones de dualidad débil  $p^* \geq \inf_x(\mathcal{L}(x, \mu))$ . Plantear el problema dual y resolverlo. Analizar si se cumplen las condiciones de dualidad fuerte.

2. Resolver el siguiente problema de optimización usando tanto la formulación primal como la dual. Graficar el espacio de soluciones y mostrar la solución óptima.

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x + y \\ g(x) &= x^2 + y^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (5.58)$$

3. Determinar las condiciones para que el interior de la intersección de  $m$  elipsoides dado por

$$\mathcal{E}_i = \left\{ x : \frac{1}{2} x^T H_i x + b_i x + c_i \leq 0 \right\} \quad (5.59)$$

sea no-vacío. Usar el problema dual.

4. Considere el problema de despacho económico presentado en el ejemplo 3.7 (capítulo tres). Determinar el dual de este problema. Analizar los casos en que  $P_k = P_{max}$ ,  $P_k = P_{min}$  y  $P_{min} < P_k < P_{max}$ .

5. Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min x^2 + y^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &\leq 1 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (5.60)$$

Graficar la región factible y las curvas de nivel asociadas a la función objetivo. Resolver el problema gráficamente. Plantear el problema dual y resolverlo gráficamente. Determinar si cumple las condiciones de Slater y las condiciones KKT.

## SEGUNDA PARTE

# MODELOS DE OPTIMIZACIÓN CONVEXA

6

CAPÍTULO  
SEIS

# OPTIMIZACIÓN CÓNICA

*En este capítulo, estudiamos los problemas de optimización cuyo espacio de solución puede ser representado como un cono convexo; en particular, el cono de las matrices semidefinidas positivas y el cono de segundo orden. Presentamos igualmente las formulaciones duales a cada uno de estos problemas.*

## 6.1. Conos convexos

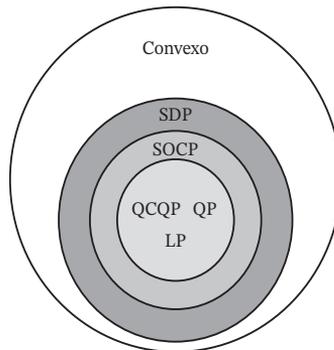
En el capítulo tres se presentó una definición general de conos convexos. En términos simples, un cono es un conjunto  $\mathcal{C}$ , tal que si  $x \in \mathcal{C}$  entonces  $\alpha x \in \mathcal{C}$ . En nuestro campo, existen tres conos de particular interés, a saber:

$$\mathcal{C}_{PL} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\} \quad (6.1)$$

$$\mathcal{C}_{SOC} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|Ax + b\| \leq c^x + d\} \quad (6.2)$$

$$\mathcal{C}_{SDP} = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X \geq 0\} \quad (6.3)$$

El primero corresponde al problema clásico de programación lineal, mientras que el segundo genera los problemas de optimización cónica de segundo orden y el tercero corresponde a los problemas de programación semidefinida. Todos estos conos son



**FIGURA NRO. 6.1.** Jerarquía de algunos problemas de optimización convexa: programación semidefinida (SDP), programación cónica de segundo orden (SOCP), programación cuadrática (QP), programación cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP), programación lineal (LP).

convexos y por tanto los problemas resultantes son de optimización convexa. El cono  $\mathcal{C}_{PL}$  ya fue estudiado en el capítulo dos, así que nos centraremos en los dos últimos. De ahora en adelante, usaremos las siglas en inglés asociadas a cada uno de estos problemas, es decir, SOC para *second order cone optimization* y SDP para *semidefinite programming*.

Existe una jerarquía asociada a los problemas de optimización cónica, como se muestra en la FIGURA NRO. 6.1. Los problemas de programación lineal y programación cuadrática se pueden representar como SOC y estos, a su vez, se pueden representar como SDP. Sin embargo, como veremos más adelante, los algoritmos de solución asociados a los problemas SOC suelen ser más eficientes que los asociados a SDP, a pesar de que en muchos casos los problemas sean equivalentes. Esto significa que el modelo puede afectar la velocidad de cálculo de los algoritmos y, por ello, se hace relevante identificar las ventajas y desventajas de cada representación.

## 6.2. Programación semidefinida

Estamos interesados en solucionar problemas con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{mín } & \text{tr}(CX) \\ & AX = B \\ & X \geq 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Este problema luce muy diferente a los problemas convexos que hemos estudiado hasta ahora. Primero, las variables de decisión  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son ahora matrices y no vectores, aunque  $\mathbb{R}^{n \times n}$  es ciertamente un espacio lineal sobre el que podemos representar el problema de optimización; segundo, la función objetivo es la traza de

un producto matricial; y tercero, aparece una restricción del tipo  $X \geq 0$  la cual indica que la matriz debe ser semidefinida positiva. Nótese que el símbolo es diferente al de una desigualdad.

Antes de explorar las propiedades matemáticas de los problemas de optimización semidefinida, debemos recordar algunos conceptos de álgebra lineal, asociados a la traza y al determinante. Posteriormente, estudiaremos el cono de las matrices semidefinidas con lo que estaremos preparados para mostrar que este problema es convexo. Finalmente, mostraremos la formulación dual y las condiciones de optimalidad. Se recomienda al estudiante revisar las definiciones de los capítulos uno y dos.

### 6.2.1. La traza, el determinante y el complemento de Shur

**Definición 6.1.** Dada una matriz cuadrada, definimos la traza como una función lineal  $\text{tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , la cual asigna un escalar que se obtiene de sumar los elementos de la diagonal, es decir,

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad (6.5)$$

La traza tiene muchas propiedades útiles, algunas de las cuales se enumeran a continuación<sup>1</sup>:

- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .
- $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$ .
- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ .
- $\text{tr}(A^T B) = \text{tr}(A B^T)$ .
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  pero en general,  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ .
- si  $A > 0$  y  $B > 0$  entonces  $\text{tr}(AB) \geq 0$ .
- $x^T H x = \text{tr}(H x x^T)$ .
- $\text{tr}(H) = \sum \lambda_i$  en donde  $\lambda_i$  son los eigenvalores de  $H$ .

Otra función que usaremos es el determinante, el cual ya conocemos de los cursos de álgebra lineal.

**Definición 6.2. Determinante.** El determinante de una matriz  $A$  es una función que toma los  $n$  vectores columna (o fila) que forman la matriz y regresa un escalar  $\det(A) = \det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n])$  con las siguientes propiedades:

<sup>1</sup>Se invita al lector a demostrar cada una de estas propiedades usando la definición de traza y las propiedades del álgebra de matrices.

- **MULTILINEARIDAD:** es lineal con respecto a una columna determinada.

$$\begin{aligned} \det([\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n]) &= \det([\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n]) + \det([\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n]) \\ \det([\vec{a}_1, \dots, \alpha \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n]) &= \alpha \cdot \det([\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n]) \end{aligned} \quad (6.6)$$

- **ANTISIMETRÍA:** intercambiar la posición de dos vectores, cambia el signo del resultado.

$$\det(A) = \det([\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]) = -\det([\vec{a}_2, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n]) \quad (6.7)$$

- **NORMALIZACIÓN:** el determinante de la identidad es 1.

$$\det(I) = 1 \quad (6.8)$$

Una de las propiedades sorprendentes de esta función es que es única. La demostración de este resultado puede ser estudiada en [2] página 632. Otras propiedades adicionales son las siguientes:

- Una matriz es invertible si su determinante es diferente de 0.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ; pero en general,  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$ .
- $\det(A^T) = \det(A)$ .
- Si una matriz es triangular entonces el determinante es el producto de los elementos de la diagonal.
- Si una matriz es invertible entonces  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ .
- El determinante es invariante frente a un cambio de base  $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$ .
- $\det(A) = \prod \lambda_i$  en donde  $\lambda = \text{eig}(A)$ .

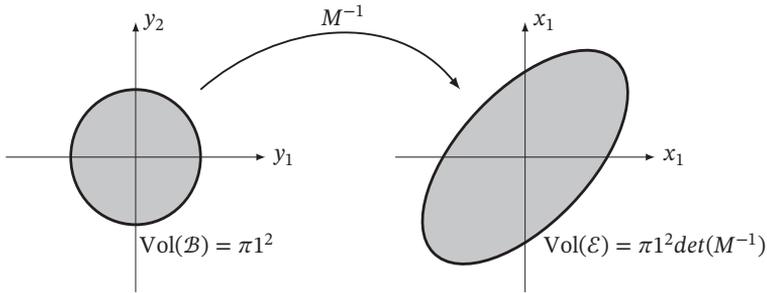
El determinante está, a su vez, relacionado con las permutaciones de los vectores  $a_i$  que forman la matriz  $A$ , así:

$$\det(A) = \sum_i \text{sgn}(\sigma) \prod_k (\sigma(a)_i)_{kk} \quad (6.9)$$

De otro lado, el determinante permite medir volúmenes en  $\mathbb{R}^n$  (hipervolumenes). Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , una transformación lineal dada por la matriz  $H$ , entonces

$$\text{Vol}_n T(A) = |\det(H)| \text{Vol}_n(A) \quad (6.10)$$

**Ejemplo 6.1.** Una forma cuadrática  $x^T H x$  con  $H > 0$  puede tener múltiples interpretaciones; en particular, puede generar un elipsoide  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T H x \leq 1\}$ . Puesto que  $H$  es semidefinida positiva, podemos hacer una factorización de Cholesky



**FIGURA NRO. 6.2.** Uso del determinante para calcular el volumen de un elipsoide visto como una transformación lineal de una bola unitaria.

( $H = M^T M$ ) que nos permite definir la transformación lineal  $y = Cx$ , la cual transforma el elipsoide como sigue:  $\mathcal{B} = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T y \leq 1\}$ . Nótese que este corresponde a una bola unitaria sobre la cual podemos calcular el área o el volumen. El determinante nos permite extender este resultado sobre el elipsoide como se muestra en la FIGURA NRO. 6.2.

■

**Definición 6.3. Complemento de Shur.** Dada una matriz cuadrada representada en bloques como la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

decimos que el complemento de Shur de  $M$  con respecto  $C$  o  $A$ , denotados por  $M/C$  y  $M/A$ , respectivamente

$$M/C = A - BC^{-1}B^T \quad (6.12)$$

$$M/A = C - B^T A^{-1}B \quad (6.13)$$

Una de las características más importantes del complemento de Shur es que  $M \geq 0$  si  $M/C \geq 0$  con  $C > 0$ , o  $M/A \geq 0$  con  $A > 0$ .

### 6.2.2. El cono de las matrices semidefinidas

**Lema 6.1.** Decimos que un problema es de optimización semidefinida o SDP si puede ser representado como en la ecuación 6.4. Los problemas de programación semidefinida son convexos.

**DEMOSTRACIÓN.** Nótese que la función objetivo en 6.4 es lineal debido a que  $C$  es una

matriz constante, mientras que la primera restricción define un espacio afín. De esta índole, solo basta demostrar que el conjunto definido por

$$\Omega = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X \succeq 0\} \quad (6.14)$$

es convexo. Para ello, tomamos dos matrices diferentes  $X, Y \in \Omega$  y notamos que  $\alpha X + \beta Y \succeq 0$ ; la definición de matriz semidefinida nos puede ser útil en este último punto, a saber:

$$u^T X u \geq 0, \alpha \geq 0 \implies u^T (\alpha X) u \geq 0 \quad (6.15)$$

$$u^T Y u \geq 0, \beta \geq 0 \implies u^T (\beta Y) u \geq 0 \quad (6.16)$$

$$\therefore u^T (\alpha X + \beta Y) u \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n \quad (6.17)$$

Con lo anterior, podemos concluir que los problemas de programación semidefinida son convexos.  $\square$

El espacio de soluciones de los problemas de optimización semidefinida forman un cono convexo<sup>2</sup>. Esto se debe a que  $\alpha X \succeq 0, \forall \alpha \geq 0$  [11].

**Ejemplo 6.2.** Los problemas de programación lineal son un caso particular de SDP; por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Si  $a_i$  corresponde a la fila  $i$  de la matriz  $A$ , entonces la restricción afín se puede reescribir como  $a_i^T x = b_i$  de donde definimos las siguientes variables:  $B_i = \text{diag}(a_i)$  y  $X = \text{diag}(x)$ ,  $C = \text{diag}(c)$ . Nótese que  $X$  es una matriz cuadrada mientras que  $x$  es un vector columna. Entonces, el problema de optimización se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(CX) \\ \text{s.t.} \quad & \text{tr}(B_i X) = b_i \\ & X_{ij} = 0, \forall i \neq j \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Evidentemente, este es un problema de optimización semidefinida. El conjunto de soluciones factibles en un problema de programación lineal es un politopo mientras que en un problema de SDP es un objeto geométrico más general (aunque convexo) llamado *espectraedro*.  $\blacksquare$

**Ejemplo 6.3.** Algunas restricciones convexas pueden ser reescritas como un espectraedro, por ejemplo, consideremos la siguiente restricción cuadrática:

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (6.20)$$

<sup>2</sup>Recordar la definición del capítulo dos.

Esta se puede reescribir usando el complemento de Shur, como:

$$\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix} \geq 0 \quad (6.21)$$

con  $1+x \geq 0$ ,  $1-x \geq 0$ . ■

**Ejemplo 6.4.** Consideremos ahora un ejemplo de un problema no-convexo que puede ser representado usando SDP, a saber:

$$\begin{aligned} \min & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ & Ax + b \geq 0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

Nótese que el modelo anterior no corresponde a un problema de programación lineal fraccional. Ahora, representamos la función objetivo en función del epígrafo

$$\begin{aligned} \min & t \\ & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t \\ & Ax + b \geq 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

Luego, hacemos algunos cambios sobre la primera restricción de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \leq t \\ & (c^T x)^2 - t(d^T x) \leq 0, \text{ con } d^T x \neq 0 \\ & \begin{pmatrix} d^T x & c^T x \\ c^T x & t \end{pmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (6.24)$$

En el último paso usamos el complemento de Shur para convertir la desigualdad en una desigualdad matricial. Finalmente, la restricción lineal se puede reescribir como una desigualdad matricial usando el mismo método del ejemplo anterior, así el modelo toma la siguiente forma equivalente:

$$\begin{aligned} \min & t \\ & \begin{pmatrix} \text{diag}(Ax + b) & 0 & 0 \\ 0 & t & c^T x \\ 0 & c^T x & d^T x \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.25)$$

Desde luego, este es un problema SDP. ■

**Ejemplo 6.5.** Los problemas SDP pueden ser fácilmente solucionados usando CVXPY. Consideremos el siguiente problema cuyo valor óptimo es, evidentemente,  $X = 0$ , a

saber:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(X) \\ \text{s.t.} \quad & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{6.26}$$

La implementación en Python es intuitiva:

```
import cvxpy as cvx
import numpy as np

X = cvx.Variable((2,2), symmetric = True)
obj = cvx.Minimize(cvx.trace(X))
res = [X >> 0]
prob = cvx.Problem(obj, res)
prob.solve(verbose=False)

print("Valor optimo", np.round(prob.value))
print(np.round(X.value))
```

La principal diferencia con respecto a los ejemplos anteriores en `cvxpy` está en la definición de la matriz simétrica y semidefinida. ■

### 6.2.3. Dualidad en problemas SDP

Consideremos el siguiente problema de optimización semidefinida:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(CX) \\ \text{s.t.} \quad & \text{tr}(A_i X) = b_i \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Definimos un lagrangeano dado por

$$\mathcal{L}(x, z, Y) = \text{tr}(CX) + \sum_i z_i (b_i - \text{tr}(A_i X)) - \text{tr}(YX) \tag{6.28}$$

Allí,  $Y$  es una matriz cuadrada semidefinida positiva, esto es  $Y \succeq 0$  y  $z$  es un vector columna. Procedamos ahora a definir la función dual

$$\mathcal{W}(z, Y) = \inf_x \mathcal{L}(x, z, Y) \tag{6.29}$$

Para que este ínfimo exista, se necesita que

$$\begin{aligned} \text{tr}(CX) - \sum_i z_i \text{tr}(A_i X) - \text{tr}(YX) &= 0 \\ \text{tr}(CX - \sum_i z_i A_i X - YX) &= 0 \\ \therefore \sum_i z_i A_i + Y &= C \end{aligned} \tag{6.30}$$

Recordemos que la traza es distributiva con respecto a la suma; por tanto, el problema dual toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{máx } b^T z \\ & Y + \sum z_i A_i = C \\ & Y \geq 0 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Tal y como en los demás problemas de optimización convexa, se cumple la relación de dualidad débil ( $dual \leq primal$ ) y la relación de dualidad fuerte de acuerdo a las condiciones de Slater. Esto significa que debe existir un punto interior relativo tanto en el problema primal como en el problema dual.

### 6.3. Programación cónica de segundo orden SOC

Los problemas cónicos de segundo orden o *second order cone optimization* (SOC) son aquellos que se pueden representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^T x \\ & \|A_i x + b_i\| \leq \alpha_i^T x + \beta_i \end{aligned}$$

en donde  $\|\cdot\|$  es la norma-2,  $A_i$  son matrices reales;  $c, b_i, \alpha_i$  son vectores y  $\beta_i$  son escalares. Ahora, definamos una nueva variable  $u_i = A_i x + b_i$  para generar el siguiente problema convexo equivalente

$$\begin{aligned} & \text{mín } c^T x \\ & \|u_i\| \leq \alpha_i^T x + \beta_i \\ & u_i = A_i x + b_i \end{aligned} \tag{6.32}$$

**Ejemplo 6.6.** Los problemas de programación lineal pueden ser representados como problemas SOC. De aquí se concluye que los PL son solo un caso particular de SOC. Solo basta hacer  $A_i = 0$  en la restricción SOC de la ecuación 6.32. ■

**Ejemplo 6.7.** Los problemas de optimización cuadrática (QP) y optimización cuadrática con restricciones cuadráticas (QCQP) también se pueden representar como SOC. Consideremos el caso más general

$$\begin{aligned} & \text{mín } x^T P_0 x + 2q_0^T x + r_0 \\ & x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i \leq 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

en donde  $P_0$  y  $P_i$  son simétricas y semidefinidas; por tanto, tienen factorización de

Cholesky<sup>3</sup> permitiendo la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \left\| P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i \right\|^2 &= (P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i)^T (P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i) \\ &= x^T P_i x + 2q_i^T x + q_i^T P_i^{-1} q_i \end{aligned} \quad (6.34)$$

Así, el problema de programación cuadrática con restricciones cuadráticas toma la siguiente forma equivalente

$$\begin{aligned} \min t \\ \left\| P_0^{1/2} x + P_0^{-1/2} q_0 \right\| &\leq t \\ \left\| P_i^{1/2} x + P_i^{-1/2} q_i \right\| &\leq (q_i^T P_i^{-1} q_i - r_i)^{1/2} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Los problemas de programación cuadrática (con restricciones lineales) son solo un caso particular con  $P_i = 0$ . ■

**Ejemplo 6.8.** Algunos problemas de optimización semidefinida se pueden reescribir como SOC. Consideremos la siguiente restricción

$$\begin{pmatrix} tI & u \\ u^T & t \end{pmatrix} \succeq 0 \quad (6.36)$$

Ahora, podemos generar una restricción SOC usando el complemento de Shur, a saber:

$$\|u\| \leq t \quad (6.37)$$

Los algoritmos de solución de problemas SOC suelen ser más eficientes que los de SDP; por tanto, es deseable reformular los problemas como SOC. Sin embargo, no todos los problemas SDP son SOC-representables. ■

**Ejemplo 6.9.** Las restricciones hiperbólicas también pueden ser representadas como SOC, veamos:

$$\begin{aligned} xy &\geq w^T w \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

en donde  $w$  es un vector y  $x$  y  $y$  son escalares. Esta restricción equivale a lo siguiente:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2w \\ x - y \end{pmatrix} \right\| \leq x + y \quad (6.39)$$

<sup>3</sup>Dada una matriz  $P$  definimos  $P^{1/2}$  a la matriz que se genera de la factorización de Cholesky, de tal forma que  $P = (P^{1/2})^T (P^{1/2})$ . Igualmente, definimos  $P^{-1/2} = ((P^{1/2})^{-1})^T$  de tal forma que  $(P^{-1/2})^T (P^{1/2}) = I$ .

A continuación, presentamos el procedimiento paso a paso:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2w \\ x-y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2w \\ x-y \end{pmatrix} &\leq (x+y)^2 \\
 4w^T w + (x-y)^2 &\leq (x+y)^2 \\
 4w^T w + x^2 - 2xy + y^2 &\leq x^2 + 2xy + y^2 \\
 4w^T w &\leq 4xy \\
 w^T w &\leq xy
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

■

**Ejemplo 6.10.** Una forma común de convexificar las restricciones de la forma  $z = xy$  es usar RLT (*reformulation-linearisation*) el cual es simplemente un estimador lineal que contiene la restricción, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 z &= xy \\
 0 &\leq x \leq 1 \\
 0 &\leq y \leq 1
 \end{aligned} \tag{6.41}$$

Esta se suele relajar como

$$\begin{aligned}
 z &\geq 0 \\
 x &\leq z \\
 y &\leq z \\
 z &\geq x + y - 1
 \end{aligned} \tag{6.42}$$

De esta forma, se expresa una aproximación lineal que puede funcionar en muchos casos; sin embargo, la aproximación SOC presentada en el ejemplo anterior conserva parte de la no-linealidad del modelo y, por tanto, puede ser más precisa. ■

**Ejemplo 6.11.** Podemos solucionar problemas SOC usando CVX. Consideremos el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}
 \text{mín } t^2 + \sum x_i \\
 \|x\| \leq t
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Su implementación en Python corresponde a:

```

import numpy as np

x = cvx.Variable(10)
t = cvx.Variable()
obj = cvx.Minimize(cvx.sum(x)+t**2)
res = [cvx.norm(x) <= t]
prob = cvx.Problem(obj, res)

```

```

prob.solve(verbose=False)
print("Valor optimo", prob.value)
print(x.value, t.value)
    
```

Aunque otras librerías como `numpy` tienen funciones para extraer la norma de un vector, es siempre recomendable usar las funciones asociadas a la librería de `cvxpy` para definir las restricciones del problema. ■

### 6.3.1. Dualidad en problemas SOC

Dado un problema primal como en la ecuación 6.32 podemos calcular la función dual correspondiente

$$\mathcal{L}(x, u, y, z) = c^T x + \sum_i y_i (\|u_i\| - \alpha_i^T x - \beta_i) + z_i^T (u_i - A_i x - b_i) \quad (6.44)$$

$$\mathcal{W}(y, z) = \inf_{x, u} \mathcal{L}(x, u, y, z) \quad (6.45)$$

en donde  $z_i$  son vectores asociados a las variables duales de la restricción de igualdad y  $y_i \geq 0$  son escalares asociados a la restricción SOC. Podemos calcular fácilmente el ínfimo aprovechando que el problema es separable, como se muestra a continuación:

$$\inf_{x, u} \mathcal{L}(x, u, y, z) = - \sum_i \beta_i y_i - b_i^T z_i + \inf_x \mathcal{L} + \inf_u \mathcal{L} \quad (6.46)$$

con

$$\inf_x \mathcal{L} = \inf_x \left\{ c - \sum_i y_i \alpha_i - A_i^T z_i \right\}^T x = 0 \Leftrightarrow c - \sum_i y_i \alpha_i - A_i^T z_i = 0 \quad (6.47)$$

$$\inf_u \mathcal{L} = \inf_u \left\{ \sum_i y_i \|u_i\| + z_i^T u_i \right\} = \sum_i \inf_{u_i} \{ y_i \|u_i\| + z_i^T u_i \}$$

La segunda ecuación la podemos reescribir de la siguiente forma:

$$y_i \inf_{u_i} \left\{ \|u_i\| + \frac{1}{y_i} z_i^T u_i \right\} \quad (6.48)$$

en donde  $y_i$  es un escalar y  $z_i$  es un vector. Si definimos un nuevo vector  $m_i = 1/y_i z_i$  tenemos lo siguiente:

$$\inf_{u_i} \{ \|u_i\| + m_i^T u_i \} \quad (6.49)$$

Nótese que  $m_i^T u_i$  corresponde al producto punto entre los vectores  $u_i$  y  $m_i$ . Este producto se puede representar en función del ángulo que se forma entre los vectores, así:

$$\|u_i\| + m_i^T u_i = \|u_i\| + \cos(\theta) \|m_i\| \|u_i\| \quad (6.50)$$

El ínfimo de esta expresión se obtiene cuando  $\theta = \pi$  y  $\|m_i\| \leq 1$  lo cual, a su vez, implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|m_i\| &\leq 1 \\ \frac{1}{y_i} \|z_i\| &\leq 1 \\ \|z_i\| &\leq y_i \end{aligned} \quad (6.51)$$

Por tanto, podemos generar el siguiente problema dual:

$$\begin{aligned} \text{mín } &\sum_i \beta_i y_i + b_i^\top z_i \\ &\sum_i A_i^\top z_i + \alpha_i y_i = c \\ &\|z_i\| \leq y_i \end{aligned} \quad (6.52)$$

Dicho de otro modo, el dual es también un problema cónico de segundo orden.

La diferencia entre el primal y dual (gap) está dado por la siguiente expresión<sup>4</sup>:

$$\text{gap} = c^\top x + \sum (b_i^\top z_i + \beta_i y_i) \quad (6.53)$$

Sin embargo, gracias a la restricción de igualdad del dual tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &c^\top x + \sum (b_i^\top z_i + \beta_i y_i) \\ &\left( \sum_i A_i^\top z_i + \alpha_i y_i \right)^\top x + \sum b_i^\top z_i + \beta_i y_i \\ &\sum_i z_i^\top (A_i x + b_i) + y_i (\alpha_i^\top x + \beta_i) \\ &\sum_i z_i^\top u_i + t_i y_i \end{aligned} \quad (6.54)$$

en donde  $t_i = \alpha_i^\top x + \beta_i$  ( $u_i$  ya lo habíamos definido). De este resultado y usando el hecho que  $\|u_i\| \leq t_i$  y  $\|z_i\| \leq y_i$ , obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{gap} &= \sum_i z_i^\top u_i + t_i y_i \geq \sum_i -\|z_i\| \|u_i\| + t_i y_i \\ &\geq \sum_i (y_i - \|z_i\|) t_i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

dado que  $\text{gap} = \text{primal} - \text{dual} \geq 0$  concluimos que el primal es siempre mayor que el dual (dualidad débil). Las condiciones de dualidad fuerte se cumplen cuando ambos conos tienen un interior no-vacío (condiciones Slater).

<sup>4</sup>Recordar que  $\text{máx}(f) = -\text{mín}(-f)$ .

## 6.4. Lecturas complementarias

Los problemas de SOC y SDP son solo dos casos particulares de optimización cónica; sin embargo, son los casos más comunes en problemas de ingeniería eléctrica. Una revisión más detallada puede encontrarse en [12]. En la tercera parte de este libro mostraremos varias aplicaciones de estas técnicas. El complemento de Shur es uno de los aspectos más importantes para tener en cuenta en estas aplicaciones. Conforme a lo anterior, un repaso de álgebra lineal es clave para avanzar con seguridad; por ejemplo, se recomienda revisar [10].

## 6.5. Ejercicios

1. Demuestre que si  $\phi(X) = -\ln(\det(X))$  entonces  $\phi'(X) = -X^{-1}$  en donde  $X$  es una matriz simétrica de tamaño  $2 \times 2$ . Además, demuestre que se trata de una función convexa. Intente extender el resultado al caso general  $n \times n$ .
2. Resolver en `cvxpy` el siguiente problema de SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & x + y \\ & \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & x + y \leq 3 \end{aligned} \tag{6.56}$$

Nótese que  $\succeq$  y  $\geq$  son dos operaciones diferentes. Graficar el espacio de soluciones factibles, asociado a este problema. Formular el problema dual y resolverlo igualmente usando `cvxpy`.

3. Formular el dual del siguiente problema no convexo con  $H \succeq 0$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T H x \\ & x_i^2 = 1 \end{aligned} \tag{6.57}$$

4. Resolver en `cvx` el siguiente problema de programación semidefinida.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T u + t \\ & \begin{pmatrix} tI & u \\ u^T & t \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & 1 \leq t \leq 2 \end{aligned} \tag{6.58}$$

Convertir el problema en uno de optimización cónica de segundo orden y resolverlo en `cvxpy`. Comparar los tiempos de cálculo para valores de  $c \in \mathbb{R}^n$  tal que  $-0.5 \leq c_i \leq 0.5$ . Mostrar el caso para  $n = 10, n = 20, \dots, n = 100$ . Señale en la misma gráfica, los tiempos de cálculo como función del número de variables para cada caso.

5. Muestre que cada uno de los siguientes problemas pueden ser SOC-representables:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^n \frac{\|F_i x + g_i\|^2}{a_i^\top x + b_i} \\ a_i^\top x + b_i > 0 \end{aligned} \quad (6.59)$$

$$\begin{aligned} \min \prod_{i=1}^n (a_i^\top x + b_i)^{1/n} \\ a_i^\top x + b_i \geq 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

**7**

**CAPÍTULO  
SIETE**

# MANEJO DE LA INCERTIDUMBRE

*En algunos casos, tenemos problemas de optimización en donde se tienen incertidumbres asociadas a las restricciones o a la función objetivo. Estas incertidumbres pueden ser analizadas usando optimización estocástica o bien usando optimización robusta. En este capítulo, presentamos una breve introducción a estos aspectos, bajo el paradigma de la optimización convexa.*

## 7.1. Incertidumbre en problemas de optimización

Hasta ahora nos hemos preocupado por problemas de la forma  $\min_x f(x, \beta)$  en donde  $x$  son las variables de decisión y  $\beta$ , los parámetros conocidos del modelo. Sin embargo, es muy común que los parámetros  $\beta$  no sean completamente determinísticos. Existen dos formas de hacer frente a este problema, a saber: optimización estocástica y optimización robusta. En la optimización estocástica se asume que se conoce la distribución de probabilidad de  $\beta$ , una información que no siempre está disponible, pues necesitamos una extensiva cantidad de datos estadísticos para generar dicha distribución. En la optimización robusta asumimos que  $\beta$  se encuentran en algún conjunto cerrado  $\mathcal{A}$ . En tal caso, nuestro objetivo es encontrar una solución que sea óptima en el sentido de  $f$  pero que, al mismo tiempo, sea factible sin importar el valor

de  $\beta \in \mathcal{A}$ . En particular, queremos la mejor de las soluciones posibles en el peor de los escenarios. A continuación, analizaremos este tipo de problemas bajo el contexto de optimización convexa. Un estudio detallado de optimización robusta/estocástica va mas allá de los alcances de este libro pero esperamos que esta introducción muestre los principales aspectos de la optimización bajo incertidumbre.

## 7.2. Optimización por escenarios

Existen varias formas de afrontar la aleatoriedad y el riesgo asociado. Una de las estrategias es denominada *here and now* la cual asume que el problema de optimización se ejecuta una sola vez, al principio del horizonte de planeamiento, teniendo en cuenta la incertidumbre futura. La segunda estrategia es llamada *wait and see* y consiste en tomar algunas decisiones en una etapa inicial e ir realizando modificaciones a lo largo del horizonte del planeamiento. Analicemos la primera estrategia.

Consideremos una función  $f(x, \beta)$  en donde  $x$  son las variables de decisión y  $\beta$  corresponde a un conjunto de parámetros aleatorios. En este caso, podemos tener diferentes objetivos y formas de considerar el riesgo; una de las funciones objetivo más comunes es minimizar el valor esperado de la función, esto es:

$$\min_{\beta \in \mathcal{M}} \mathbb{E}(f(x, \beta)) \quad (7.1)$$

Allí,  $\mathcal{M}$  es un espacio probabilístico. Este problema puede ser complejo debido a que la función objetivo termina siendo representada como una integral. Una forma de simplificar el modelo es usando una aproximación de Montecarlo, así:

$$\mathbb{E}(f(x, \beta)) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x, \beta_k) \quad (7.2)$$

Esta metodología se denomina SSA por las siglas en inglés de *sample average approximation*. Básicamente, lo que hacemos es convertir el problema estocástico en uno determinístico con  $N$  escenarios diferentes, en donde cada escenario corresponde a una realización de  $\beta$ . Este problema es claramente convexo si  $f$  es una función de dicha naturaleza. Desde luego, para obtener una buena aproximación, se requiere una buena cantidad de escenarios, aunque podemos reducir el tamaño del problema mediante técnicas de agrupamiento. Esto puede resultar en un problema como

$$\mathbb{E}(f(x, \beta)) = \sum_{k=1}^m \rho_k f(x, \beta_k) \quad (7.3)$$

En este,  $\rho_k$  es la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario. Otra forma consiste en tener las distribuciones de probabilidad y generar los escenarios basados en un

histograma en donde la probabilidad de cada escenario se asocia a la frecuencia de ocurrencia del mismo. Un problema con restricciones también puede ser solucionado mediante este enfoque.

**Ejemplo 7.1.** Consideremos el problema de despacho económico de plantas térmicas presentado en el ejemplo 2.4 (capítulo dos), pero en el presente caso supondremos incertidumbre en los costos asociados a los combustibles. Consideremos tres escenarios posibles con probabilidades  $\rho_i = \{\rho_A, \rho_B, \rho_C\}$ , correspondientes a costos altos, medios y bajos, respectivamente. El problema de optimización resultante toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^n \rho_i \left( \frac{a_{ki}}{2} p_{ik}^2 + b_{ki} p_{ik} + c_{ki} \right) \\ & \sum_{k=1}^n p_{ik} = D_i \\ & p_{\min(ik)} \leq p_{ik} \leq p_{\max(ik)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Claramente, el problema sigue siendo convexo. Podemos obtener un modelo similar si tenemos presente la aleatoriedad de la demanda mediante escenarios. ■

### 7.3. Espacio de incertidumbre como un politopo

En algunos casos, las restricciones  $a^T x \leq b$  pueden ser tal, que los valores de  $a$  estarían confinados en un politopo  $\mathcal{M}$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & a^T x \leq b \\ & a \in \mathcal{M} = \{a : D^T a \leq d\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

El problema parece complejo porque tanto  $a$  como  $x$  son variables; sin embargo, nos interesa analizar solo el peor de los casos, es decir:

$$\mathcal{P}(a) = \left\{ \sup_{a \in \mathcal{M}} a^T x \leq b \right\} \quad (7.6)$$

Este sub-problema corresponde a uno de programación lineal en donde las variables de decisión corresponden al vector  $a$ , es decir, debemos encontrar el valor de  $t < b$ , tal

que

$$\mathcal{P}(a) = \left\{ \begin{array}{l} t = \text{máx } a^T x \\ D^T a \leq d \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

En la anterior ecuación,  $x$  es constante para este problema de optimización. Este problema primal  $\mathcal{P}(a)$  tiene asociado un dual  $\mathcal{D}(y)$  dado por:

$$\mathcal{D}(y) = \left\{ \begin{array}{l} t = \text{mín } y^T d \\ y^T D = x \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \quad (7.8)$$

De este modo, si reemplazamos este problema en la restricción original  $t \leq b$ , se genera el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{l} \text{mín } c^T x \\ y^T d \leq b \\ y^T D = x \\ y \geq 0 \end{array} \quad (7.9)$$

Este problema corresponde a la formulación robusta del problema original.

#### 7.4. Espacio de incertidumbre como una bola

Una forma de modelar el espacio de incertidumbre es como una bola cerrada  $\mathcal{A}$ , usando cualquier norma  $L_p$ . En el caso de un problema de programación lineal, tendríamos la siguiente representación:

$$\begin{array}{l} \text{mín } f = c^T x \\ \alpha^T x \leq \beta \\ \forall \alpha \in \mathcal{A} = \{\alpha \in \mathbb{R}^n : \|\alpha - \alpha_0\| \leq \delta\} \end{array} \quad (7.10)$$

**Definición 7.1. Norma-dual.** Dada una norma  $\|x\|$  podemos definir una norma-dual  $\|y\|_*$ , dada por

$$\|y\|_* = \sup \{y^T x, \|x\| \leq 1\} = \sup_{\|x\| \neq 0} \left\{ y^T \frac{x}{\|x\|} \right\} \quad (7.11)$$

La norma dual cumple con todas las propiedades para ser una norma. Además el operador es biyectivo, lo cual significa que el dual de una norma-dual es nuevamente la norma original.

**Ejemplo 7.2.** La norma-dual de la norma- $\infty$  es la norma-1, ya que

$$\begin{aligned}\|y\|_* &= \sup \{y^T x, \|x\|_\infty \leq 1\} \\ &= \sup \{y^T x, |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, \dots, |x_i| \leq 1\}\end{aligned}\quad (7.12)$$

Lo anterior, corresponde a un problema de programación lineal en un espacio de soluciones dado por un hipercono unitario. Evidentemente, el óptimo  $\tilde{x}$  se encuentra en un vértice por lo que si  $y_i > 0 \rightarrow \tilde{x}_i = 1$ , mientras que  $y_i < 0 \rightarrow x_i = -1$ , así que:

$$\begin{aligned}y^T \tilde{x} &= \sum_i y_i \tilde{x}_i \\ &= \sum_i |y_i| = \|y\|_1\end{aligned}\quad (7.13)$$

De forma análoga, es fácil ver que la norma dual de la norma-1 es la norma- $\infty$  (el operador es involutivo). ■

**Ejemplo 7.3.** La norma-dual de la norma-2 es la misma norma-2, ya que

$$\|y\|_* = \sup \{y^T x, \|x\|_2 \leq 1\} \quad (7.14)$$

Conforme a lo anterior, para encontrar  $y$  necesitamos resolver un problema de optimización convexa dentro de una bola unitaria. Evidentemente, no se encuentra en el interior de la bola porque, en ese caso, sería 0; por tanto, debemos encontrar el supremo en el borde, es decir,  $\|x\| = 1$ ; ahora bien, si usamos la técnica de multiplicadores de Lagrange tenemos que

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = y^T x + \lambda \left( 1 - \sqrt{\sum_i x_i^2} \right) \quad (7.15)$$

Luego, si se deriva e iguala a 0, obtenemos que  $y_i = \lambda x_i / \|x\|$ , de donde concluimos que  $y^T x = \|y\|_2 x^T x = \|y\|_2$ ; es decir, la norma dual es igual a la norma-2. ■

**Definición 7.2. optimización robusta.** Un problema es de optimización robusta si encuentra una solución óptima que sea factible en todos los escenarios posibles.

La expresión del tipo  $\forall \alpha \in \mathcal{A}$  en la ecuación 7.10 implica que podemos tener un número infinito de restricciones. El problema se puede hacer tratable si optimizamos con miras al peor de los escenarios posibles.

**Lema 7.1.** Considere una restricción de la forma

$$a^T x \leq b \quad (7.16)$$

en donde  $a$  se encuentra en una región  $\mathcal{E}$ , dada por

$$\mathcal{E} = \{a \in \mathbb{R}^n, a = a_0 + \rho \xi, \|\xi\| \leq 1\} \quad (7.17)$$

En este sentido,  $\|\cdot\|$  es alguna norma  $\mathcal{L}_p$ . Un equivalente robusto a esta restricción es

$$a_0^T x + \rho \|x\|_* \leq b \quad (7.18)$$

en donde  $\|\cdot\|_*$  representa la norma dual.

**DEMOSTRACIÓN.** Nuestro objetivo es resolver el problema de optimización en el peor caso posible, esto es:

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\xi\| \leq 1} a^T x \leq b \\ & \sup_{\|\xi\| \leq 1} (a_0 + \rho \xi)^T x \leq b \\ & a_0^T x + \rho \sup_{\|\xi\| \leq 1} \xi^T x \leq b \\ & a_0^T x + \rho \|x\|_* \leq b \end{aligned} \quad (7.19)$$

Con lo anterior el lema queda demostrado. □

El conjunto  $\mathcal{E}$  define un elipsoide en el caso de la norma-2 y un hipercubo en el caso de la norma-1. El valor de  $\rho$  determina el tamaño de la bola. En el caso de que  $\mathcal{E}$  sea un elipsoide, el problema resultante se convierte en uno de optimización cónica de segundo orden. Mientras que para el caso de la norma-1 o la norma  $-\infty$  sigue siendo un problema de programación lineal.

**Ejemplo 7.4.** Consideremos el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \quad -8x_1 - 7x_2 - 9x_3 \\ & \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \leq 10 \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

En este,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$  y su solución óptima  $-90$  en  $x = (0, 0, 10)$ . Consideremos ahora el caso en donde la tripla  $(a_1, a_2, a_3)$  es tal que  $(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 1)^2 + (a_3 - 1)^2 \leq 0.1$ .

Lo anterior es equivalente a decir que  $a = (1, 1, 1) + \xi$  con  $\|\xi\| \leq 0.3162$ . El modelo equivalente de optimización robusta está dado por

$$\begin{aligned} \min \quad & -8x_1 - 7x_2 - 9x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 0.3162 \|x\| \leq 10 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

en donde el resultado óptimo es  $-70.1356$ , el cual se produce en  $\bar{x} = (2.685, 0, 5.406)$ . Este resultado tiene como ventaja su factibilidad para cualquier valor de  $a$ . Es el resultado más pesimista posible. ■

**Ejemplo 7.5.** Un mismo problema puede tener dos representaciones robustas. Consideremos una restricción de la forma  $(a + \beta)x \leq 1$ , la cual puede reescribirse como restricción de igualdad usando variables de holgura como  $(a + \beta)x + s = 1$  con  $s \geq 1$ . Supongamos ahora que  $|\beta| \leq 1$ , entonces la contraparte robusta de la restricción de desigualdad será

$$3x + |x| \leq 1 \tag{7.22}$$

En este caso, el espacio de soluciones factibles será  $x \leq 1/4$ . Ahora, la contraparte robusta de la restricción con variables de holgura estará dada por

$$\begin{aligned} (3 + \beta)x + s &= 1 \\ s &\geq 0 \\ |\beta| &\leq 1 \end{aligned} \tag{7.23}$$

En este caso, la única solución que cumple con la restricción es  $x = 0$ . Asimismo, podemos observar que la representación robusta a un mismo problema puede variar. En particular, la introducción de variables de holgura limita el espacio de soluciones en problemas robustos y, por tanto, debemos mantener, dentro de lo posible, las restricciones de desigualdad. ■

## 7.5. Conjunto convexo de incertidumbre

Los casos presentados en las dos secciones anteriores pueden ser generalizados para cualquier conjunto de incertidumbre convexo. Consideremos, por ejemplo, la siguiente restricción:

$$a^T x + \rho \xi^T x \leq c \tag{7.24}$$

Esta posee un espacio de incertidumbre dado por

$$h(\xi) \leq 0 \quad (7.25)$$

en donde  $h$  es una función convexa que genera un espacio cerrado. En este caso, podemos proceder a encontrar la restricción robusta como sigue

$$a^T x + \sup_{h(\xi) \leq 0} \{\rho \xi^T x\} \leq c \quad (7.26)$$

De lo anterior, obtenemos el siguiente problema primal:

$$\mathcal{P}(\xi) = \left\{ \begin{array}{l} \min -\rho \xi^T x \\ h(\xi) \leq 0 \end{array} \right\} \quad (7.27)$$

Este tiene la siguiente función dual, a saber:

$$\mathcal{W} = \inf \mathcal{L}(x, \xi, u) = \inf \{-\rho \xi^T x + u h(\xi)\} \quad (7.28)$$

Ahora, definimos la función conjugado  $h^*$ , de la siguiente forma:

$$h^* = \sup_{\xi} x^T \xi - h(\xi) \quad (7.29)$$

Por tanto, podemos escribir  $\mathcal{W}$  como función de  $h^*$ , así:

$$\mathcal{W} = u h^*(\rho x / u) \quad (7.30)$$

Finalmente, el problema robusto se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} a^T x + u h^*(\rho x / u) \leq c \\ u \geq 0 \end{array} \quad (7.31)$$

Este conjunto de restricciones es evidentemente convexo y tratable por la mayoría de paquetes de optimización. La única dificultad está en definir adecuadamente la función conjugado  $h^*$ . El problema resultante es convexo debido a que viene desde la función dual.

## 7.6. Robustez vs optimalidad

El parámetro  $\rho$  en la ecuación 7.17 representa el tamaño de la región de incertidumbre, el cual afecta significativamente la optimalidad de la respuesta. En muchos casos, la robustez de la solución se encuentra en conflicto con la optimalidad. Es decir, una solución robusta es menos óptima que una determinista. Una forma de analizar esta dualidad es convirtiendo el problema en uno multiobjetivo usando el concepto de eficiencia de Pareto.

**Definición 7.3. Optimización multiobjetivo.** Un problema de optimización multi-objetivo es aquel en donde buscamos maximizar dos funciones objetivo usualmente contradictorias. Este tipo de problemas los representamos de la siguiente forma:

$$\text{máx } \{f(x), g(x)\} \quad (7.32)$$

en donde  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que los objetivos son contradictorios puesto que no existe una solución  $\bar{x}$  que cumpla simultáneamente con las condiciones de optimalidad  $f(x) \leq f(\bar{x})$  y  $g(x) \leq g(\bar{x})$ .

En este caso, debemos usar el concepto de dominancia de Pareto con el fin de encontrar el conjunto de soluciones que sean óptimas en el sentido de  $f$  o  $g$ .

**Definición 7.4. Dominancia de Pareto para problemas de maximización.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones escalares con dominio en  $\mathbb{R}^n$ , y sean dos puntos  $x, y$  en el dominio de ambas funciones; decimos que  $x$  domina a  $y$ , denotado por  $x \triangleright y$  si  $f(x) \geq f(y)$ , y simultáneamente  $g(x) > g(y)$ .

Dado lo anterior, se puede observar que este operador no cumple con todas las propiedades para ser un orden, aunque sí cumple con algunas y, por tanto, es un semi-orden. Nuestro objetivo es encontrar soluciones no dominadas las cuales se puedan representar en un frente de Pareto, como se muestra en la FIGURA NRO. 7.1. En esta figura, las soluciones a la izquierda presentan una mejor función objetivo pero son menos robustas, mientras que las soluciones a la derecha son más robustas sacrificando optimalidad. Mediante este tipo de gráficas podemos tomar decisiones, asociadas a cuánto estamos dispuestos a sacrificar en la función objetivo con el fin de obtener una solución robusta.

El problema multiobjetivo resultante es convexo, ya que cada problema es convexo con respecto a  $\rho$ . Cabe anotar que el concepto de eficiencia de Pareto puede ser utilizado en otros contextos de optimización y no únicamente en la optimización convexa bajo incertidumbre. En cualquier caso, se puede generar el frente de Pareto solucionando el problema mono-objetivo  $\alpha f(x) + (1 - \alpha)g(x)$  – en donde  $f$  y  $g$  son los objetivos en contradicción y  $\alpha$  es un parámetro constante que varía entre 0 y 1– con el fin de generar la gráfica paramétrica. En el caso en que  $f$  y  $g$  sean convexos entonces el frente de Pareto también constituye una función convexa.

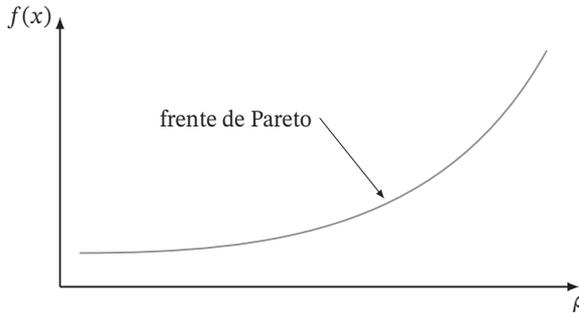


FIGURA NRO. 7.1. Dominancia de Pareto en problemas de optimización robusta.

## 7.7. Restricciones probabilísticas

### 7.7.1. Incertidumbre en las restricciones

Consideremos ahora el caso de una restricción de la forma  $a^T x \leq b$  en donde no conocemos exactamente el valor de  $a$ , pero sabemos que se distribuye normalmente, es decir,  $a \sim \mathcal{N}(a_0, \sigma_a)$ . El hecho de que la distribución sea normal es importante, pues las variables aleatorias con distribución normal se pueden sumar y el resultado también se distribuye normalmente. Dicho de otro modo,

$$\begin{aligned}
 x &\sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_x) \\
 y &\sim \mathcal{N}(y_0, \sigma_y) \\
 z = x + y &\sim \mathcal{N}(z_0, \sigma_z) \\
 z_0 &= x_0 + y_0 \\
 \sigma_z &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

No obstante, cabe mencionar que esto no pasa con otras distribuciones de probabilidad. Ahora, queremos resolver el problema de tal forma que la restricción de desigualdad se cumpla con una probabilidad  $\eta$ , es decir

$$\text{Prob}(a^T x \leq b) \geq \eta \tag{7.34}$$

en donde cada valor de  $a$  se distribuye normalmente, asumiendo que las variables  $a_i$  son independientes. La idea básica es convertir este problema estocástico en uno robusto definiendo un elipsoide, como

$$a = \bar{a} + \rho \|S^{1/2} \xi\|_2 \tag{7.35}$$

Conforme a lo anterior, si queremos que la probabilidad dada por la ecuación 7.34 se cumpla entonces necesariamente  $\rho = \phi^{-1}(\eta)$  y  $S = \text{Var}(a)$ , en donde  $\phi^{-1}$  es la función cuantil<sup>1</sup> y  $\text{Var}(a)$  es la varianza de  $a$  la cual es una matriz definida positiva.

El problema robusto resultante es, por tanto, el siguiente:

$$a^T x + \phi^{-1}(\eta) \left\| S^{1/2} x \right\|_2 \leq b \quad (7.36)$$

el cual constituye una restricción convexa.

Es importante destacar que, en este caso, se consideraron las restricciones lineales e independientes; sin embargo, es posible generar un problema con incertidumbres de la forma

$$\text{Prob}(f_i(x, a) \leq b) \geq \eta \quad (7.37)$$

Esta expresión considera la probabilidad conjunta de que se cumplan todas las restricciones asociadas al modelo. Asimismo, algunos parámetros  $a$  de la función son aleatorios. Desde luego, este problema es más complejo y requiere técnicas adicionales de modelado y aproximación, las cuales van mas allá de los objetivos de este libro.

Un problema más simple se presenta cuando la aleatoriedad se presenta en  $b$  y no en  $f$ . Si tenemos presente una restricción dada por la ecuación 7.37 en donde  $f$  es convexa y  $b$  es un parámetro aleatorio que se distribuye con una función de probabilidad acumulada  $\phi$ ; en este caso, podemos usar directamente la función cuantil<sup>2</sup> y generar el siguiente problema robusto:

$$f(x, a) \leq \phi^{-1}(\eta) \quad (7.38)$$

En el presente ejemplo,  $b$  puede incluso tener una distribución diferente de la distribución normal.

## 7.7.2. Incertidumbre en la función objetivo

Consideremos ahora una función objetivo de la forma  $f(x) = c^T x$  en donde  $c_i \sim \mathcal{N}(\bar{c}_i, \sigma_i)$ . En este caso, podemos minimizar el valor esperado como sigue:

$$\text{mín } \mathbb{E}(f(x)) = \bar{c}^T x \quad (7.39)$$

<sup>1</sup>La función cuantil está dada por  $\phi^{-1}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \geq p\}$ . Básicamente, es la función inversa a la distribución acumulada de probabilidad.

<sup>2</sup>Recordar que una función acumulada de probabilidad  $\phi(x)$  está dada por  $\text{Prob}(s \leq x)$  y la función cuantil  $\phi^{-1}(\eta) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \eta \leq \phi(x)\}$ .

Para el presente problema, no necesitamos dividir el modelo en escenarios debido a las propiedades de la distribución normal. Sin embargo, podemos estar interesados en incluir el riesgo asociado al problema; para ello, calculamos la varianza de  $f$  de la siguiente forma:

$$\text{var}(f) = \mathbb{E}(c^T x - \bar{c}^T x) = x^T \sigma x \quad (7.40)$$

Esta varianza indica qué tanto se espera que la solución final se desplace de la media. Deseamos encontrar una relación de compromiso entre el óptimo medido desde el punto de vista de la media y la desviación. Para ello, penalizamos la función objetivo así:

$$\text{mín } \bar{c}^T x + \xi \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i x_i^2} \quad (7.41)$$

Allí,  $\xi$  es una penalización al riesgo (factor de aversión al riesgo). El problema puede convertirse en uno multiobjetivo variando el parámetro  $\xi$ .

## 7.8. Lecturas complementarias

En este capítulo se presentó una breve introducción a la optimización robusta y algunos elementos asociados a la medición del riesgo en modelos de optimización. El lector interesado en un acercamiento más formal, puede referirse a [13]. Es importante destacar que, aunque la optimización robusta está relacionada con la optimización estocástica, estas son formas diferentes de atacar el problema. De hecho, una es complementaria a la otra. El estudio de modelos de optimización estocástica requiere de todo un curso dedicado al tema; una visión completa de la temática se presenta en [14]. Hemos omitido varios detalles asociados a teoría de la probabilidad, por lo que se recomienda al lector revisar [15] la cual es una referencia concisa pero suficiente para nuestros resultados de aprendizaje. Otro tema importante que no fue presentado, corresponde a la medición del riesgo usando herramientas como el VaR (*value at the risk*) y el CVaR (*conditional value at the risk*). Una revisión completa a estos conceptos se encuentra en [16], en donde se presentan, además, algunas aplicaciones.

## 7.9. Ejercicios

1. Sea  $\|x\|$  una norma cualquiera y  $\|y\|_*$  su correspondiente normal dual, demuestre la siguiente desigualdad:

$$x^T y \leq \|x\| \|y\|_* \quad (7.42)$$

2. Sea  $H = H^T > 0$  una matriz cuadrada, simétrica y definida positiva; considere la función

$$n(x) = x^T H x \quad (7.43)$$

Luego, demuestre que  $n(x)$  es una norma y determine su norma dual.

3. Considere el problema de despacho ideal teniendo presentes las restricciones de la red (modelo dc). Sin embargo, suponga que los valores de las inductancias los conocemos con un error de  $\pm 10\%$ . Formular el problema robusto asociado.
4. Formular la solución del siguiente problema de programación lineal robusta, a saber:

$$\begin{aligned} \text{mín } & f(x) \\ & a^T x \leq b \end{aligned} \quad (7.44)$$

Allí,  $a$  es un vector contenido en un elipsoide  $\mathcal{E} = \{a \in \mathbb{R}^n : a^T H a \leq 1\}$  con  $H > 0$

5. Una empresa de comercialización requiere comprar energía y para ello tiene tres opciones: a) un contrato tipo pague lo demandado por valor de 250COP/kWh con un tope de 10MWh, b) un contrato tipo pague lo demandado sin tope por valor de 320COP/kWh y c) comprar energía en bolsa. El precio de bolsa es aleatorio pero se distribuye normalmente con una media de 243COP/kWh y una desviación de 20COP/kWh. Determinar el valor óptimo del portafolio de compra de energía para una demanda promedio de 23MWh con diferentes valores de aversión al riesgo. Usar un enfoque directo como el presentado en la sección 6.6 y un enfoque basado en escenarios como el presentado en la sección 6.2. Finalmente, comparar los resultados.

8

CAPÍTULO  
OCHO

# SUMA DE POLINOMIOS CUADRÁTICOS

*Los problemas de optimización convexa pueden ser definidos en espacios lineales diferentes a  $\mathbb{R}^n$ . El primer ejemplo de estos espacios es el de optimización semidefinida, el cual se plantea en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , es decir, en el espacio de las matrices. En este capítulo, mostraremos problemas convexos en el espacio  $\mathbb{R}[x]$ , el cual corresponde al espacio de los polinomios con coeficientes reales. En particular, estamos interesados en el conjunto de las funciones que se pueden representar como la suma de polinomios cuadráticos. Este tipo de problema, aunque abstracto, tiene múltiples aplicaciones como se verá más adelante.*

## 8.1. Optimización en el espacio de los polinomios

Las funciones continuas forman un espacio lineal (ver sección 1.4 y el ejercicio 3 del capítulo 1). Asociado a este espacio, podemos definir el sub-espacio de los polinomios con coeficientes reales, denotado como  $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]_d$ , o simplemente  $\mathbb{R}[x]_d$ , en donde  $d$  indica el grado del polinomio.

**Ejemplo 8.1.** A continuación, se muestran algunos polinomios y los sub-espacios a los que pertenecen

$$p(x) = 5x^3 + 2x^2 + 8, \quad p \in \mathbb{R}[x]_3 \quad (8.1)$$

$$f(x, y) = 3x^2 - 3xy + y^2, \quad f \in \mathbb{R}[x, y]_2 \quad (8.2)$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 3x_1^2x_2x_3^5 + 8x_2x_3 + 2x_1, \quad h \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]_5 \quad (8.3)$$

Cada polinomio es un vector dentro del espacio lineal correspondiente. ■

Es fácil ver que  $\mathbb{R}[x]_d$  es un subespacio lineal, ya que la suma de dos polinomios es nuevamente un polinomio y la multiplicación de un polinomio por un escalar genera un polinomio (ver capítulo uno, definición 1.10). Al igual que en el caso de  $\mathbb{R}^n$ , podemos generar el espacio usando una base adecuada; en este caso, las bases del espacio están definidas como monomios  $m(x)$ .

**Ejemplo 8.2.** A continuación, se muestran posibles bases para cada espacio

$$\mathbb{R}[x]_3, m(x) = (1, x, x^2, x^3) \quad (8.4)$$

$$\mathbb{R}[x, y]_2, m(x) = (1, x, y, xy, x^2y, y^2x, x^2, y^2, x^2y^2) \quad (8.5)$$

Nótese que el tamaño de  $m(x)$  es  $\binom{n+d}{d}$ . ■

Los espacios  $\mathbb{R}[x]$  permiten representar toda una serie de problemas de optimización, denominados optimización polinomial.

**Definición 8.1. Optimización polinomial.** Un problema de optimización polinomial es aquel que se puede representar como

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) &= 0 \\ h(x) &\geq 1 \\ f, g, h &\in \mathbb{R}[x] \end{aligned} \quad (8.6)$$

Los problemas de optimización polinomial incluyen una gran variedad de sub-problemas, entre ellos, los problemas de programación lineal, programación cuadrática y programación cónica de segundo orden. Igualmente, los problemas combinatoriales pueden ser sujetos a esta representación, por ejemplo, una restricción binaria  $x_i \in \{1, 0\}$  puede ser reescrita como un polinomio  $x(1 - x) = 0$ . Desafortunadamente, esta restricción no es convexa. Esta dificultad se presenta en la mayoría de problemas polinomiales; no obstante, algunos son convexos, como es el caso de los problemas polinomiales que se pueden representar como una suma de polinomios al cuadrado.

## 8.2. Suma de cuadrados (SOS)

**Definición 8.2.** Una suma de polinomios cuadráticos o SOS (*sum of squares*) es un polinomio que puede ser representado como

$$f(x) = \sum (p_i(x))^2 \quad (8.7)$$

Allí, cada  $p_i(x)$  corresponde a un polinomio multivariado.

**Ejemplo 8.3.** El polinomio

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 5y^2 \quad (8.8)$$

es un polinomio cuadrático, ya que se puede representar como

$$f(x, y) = (x + y)^2 + (x - 2y)^2 \quad (8.9)$$

Es importante notar que esta factorización no es única. ■

Podemos definir un problema de optimización matemática en el espacio  $\mathbb{R}[x]$  usando el concepto de polinomio cuadrático como restricción, a saber:

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\sum p_i(x) \in \text{SOS} \end{aligned} \quad (8.10)$$

Este problema es mucho más abstracto que los problemas anteriores debido a que el conjunto de soluciones factibles no está contenido en el espacio de los números reales sino en el de los polinomios reales.

**Lema 8.1.** El conjunto de los polinomios SOS es convexo.

**DEMOSTRACIÓN.** Tomemos un par de polinomios  $p_1(x) \in \text{SOS}$ ,  $p_2 \in \text{SOS}$  y un par de números reales  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ , tal que  $\alpha + \beta = 1$ . Entonces podemos definir un tercer polinomio como

$$p_3(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) \quad (8.11)$$

Tanto  $\alpha$  como  $\beta$  son mayores o iguales a 0. Conforme a lo anterior,  $p_3$  es la suma de dos polinomios cuadráticos y, por tanto,  $p_3(x) \in \text{SOS}$ . □

Los problemas de optimización SOS, al ser convexos, garantizan todas las propiedades de globalidad y unicidad que estudiamos anteriormente. Sin embargo, el espacio de soluciones es más abstracto, lo que dificulta el desarrollo de métodos numéricos que den solución al problema; por ello, se usa un isomorfismo al conjunto de las matrices semidefinidas, como veremos a continuación.

### 8.3. Equivalente semidefinido

Una restricción SOS puede ser reescrita como un espectraedro, permitiendo usar los mismos algoritmos de SDP para dar solución al problema. Para ello definimos adecuadamente una serie de monomios  $m(x)$  y una matriz  $Q$  definida positiva (matriz de Gram). Así, el polinomio  $p(x) \in \text{SOS}$  puede ser reescrito como  $p(x) = (Qm(x))^T(Qm(x))$ .

**Teorema 8.1.** Un polinomio  $p \in \mathbb{R}[x]$  tiene una descomposición como suma de polinomios cuadráticos, si y solo si existe una matriz real, simétrica y definida positiva tal que  $p(x) = m(x)^T Q m(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ , en donde  $m(x)$  representa una base asociado a  $\mathbb{R}[x]$ .

DEMOSTRACIÓN. Suponga que existe una matriz definida positiva  $Q$  que permite escribir al polinomio como  $p(x) = m(x)^T Q m(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, existe una factorización de Cholesky  $Q = HH^T$ , tal que

$$\begin{aligned} p(x) &= m(x)^T H H^T m(x) \\ &= (H^T m(x))^T (H^T m(x)) \\ &= \sum (H^T m(x))_i^2 \end{aligned} \tag{8.12}$$

La condición necesaria se demuestra siguiendo un argumento similar. □

**Ejemplo 8.4.** Deseamos representar el siguiente polinomio usando matrices semidefinidas, a saber:

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 5 \tag{8.13}$$

Para ello, definimos un vector de monomios  $m(x)$ , el cual forma la base canónica del polinomio, como sigue:

$$m(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

Así, el polinomio podría ser representado como  $p(x) = m(x)^T Q m(x)$  con

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Desafortunadamente, esta no es una matriz semidefinida. Sin embargo, esto no significa que el polinomio no sea SOS, pues la representación de un polinomio no es única; podemos usar otra representación, a saber:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Esta es semidefinida positiva ya que  $p(x) > 0$  para cualquier  $x$ . Ahora, hacemos una factorización de Cholesky  $Q = C^T C$ , como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Dado lo anterior, obtenemos la factorización del polinomio  $Cm(x)$ , como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x^2 + 2x) \\ \sqrt{2}(x + 1) \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

Por lo tanto,

$$p(x) = (x^2 + 2x)^2 + 2(x + 1)^2 + 3 \quad (8.19)$$

Claramente,  $p(x)$  corresponde a un polinomio SOS.



**Ejemplo 8.5.** Mostraremos que  $p(\theta) = 5 + 4 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta) + 2 \cos(2\theta)$  se puede representar como un polinomio SOS. Primero expandimos la expresión, así:

$$p(\theta) = 5 + 4 \cos(\theta) - 2 \sin(\theta) + 2 \cos^2(\theta) - 2 \sin^2(\theta) \quad (8.20)$$

Luego, definimos un vector  $m(\theta) = (1, \cos(\theta), \text{sen}(\theta))$  en donde

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

En principio, esta matriz no es semidefinida positiva; sin embargo, la representación no es única así que podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

Esta es semidefinida positiva y, por tanto, tiene factorización de Cholesky

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

Conforme a lo anterior, la función puede ser reescrita como

$$p(\theta) = 2 \left( 1 + \cos(\theta) + \frac{1}{2} \text{sen}(\theta) \right)^2 + 3 \left( \cos(\theta) + \frac{1}{3} \text{sen}(\theta) \right)^2 + 6 \left( \frac{1}{6} \text{sen}(\theta) \right)^2 \quad (8.24)$$

Nótese que  $p(\theta)$  corresponde a un polinomio cuadrático. ■

En los ejemplos anteriores podemos observar un paso clave: la factorización de Cholesky. Recordemos que una matriz tiene factorización de Cholesky si es definida positiva. Por tanto, podemos sistematizar el método usando SDP. Mostremos el procedimiento con un ejemplo.

**Ejemplo 8.6.** Queremos encontrar una representación SOS al polinomio  $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 5x + 5$  usando SDP. Con esta fin, definimos un nuevo polinomio  $p(x) = m(x)^T Q m(x)$  tal y como en el ejemplo 1. Ahora, expandimos la expresión en función de  $Q$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= q_{33} + (q_{32} + q_{23})x + q_{11}x^4 + (q_{12} + q_{21})x^3 + (q_{13} + q_{31})x^2 + q_{22}x^2
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Igualando término a término, obtenemos el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned}
 Q &\geq 0 \\
 q_{11} &= 1 \\
 q_{12} + q_{21} &= 4 \\
 q_{22} + q_{13} + q_{31} &= 6 \\
 q_{23} + q_{32} &= 4 \\
 q_{33} &= 5
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Finalmente, podemos usar `cvx` para encontrar los valores numéricos de  $Q$ . ■

**Ejemplo 8.7.** Analicemos ahora el caso de un polinomio multivariado

$$p(x, y) = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y + 2x + 2 \tag{8.27}$$

Ahora, factorizamos el polinomio como  $p(x, y) = m(x, y)^T Q m(x, y)$ , de la siguiente forma:

$$p(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \\ x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} & q_{46} \\ q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} \\ q_{61} & q_{62} & q_{63} & q_{64} & q_{65} & q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ xy \\ x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

de donde obtenemos el siguiente conjunto de restricciones, a saber:

$$\begin{aligned}
 Q &\geq 0 \\
 q_{11} &= 2 \\
 q_{13} + q_{31} &= -1
 \end{aligned} \tag{8.29}$$

Se invita al lector a completar las restricciones faltantes. ■

Es importante destacar que si el problema es infactible entonces el polinomio no es SOS. El Teorema 7.1 da condiciones para la factorización SOS de un polinomio positivo, pero no significa que dicha factorización siempre exista, especialmente para el caso multivariado<sup>1</sup>. Esto significa que pueden existir polinomios multivariados positivos, que no son SOS.

**Ejemplo 8.8.** No todos los polinomios positivos son SOS, consideremos el siguiente polinomio multivariado:

$$p(x, y, z) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2z^2 + z^6 \quad (8.30)$$

Recordemos que la media aritmética es siempre mayor a la media geométrica<sup>2</sup>; por tanto, tenemos que,

$$(x^6y^6z^6)^{1/3} \leq \frac{x^4y^2 + x^2y^4 + z^6}{3} \quad (8.31)$$

Lo anterior, implica que  $p(x, y, z) \geq 0$  para todo  $x, y$  y  $z$ . Sin embargo, este polinomio no puede escribirse como un SOS. Esto se puede demostrar planteando el equivalente SDP y exhibiendo su infactibilidad. ■

## 8.4. Dispersidad en problemas SOS

En los ejemplos mostrados en la sección anterior, resulta claro que la matriz de Gram puede ser de grandes dimensiones. A su vez, esto puede dificultar la solución computacional del problema de optimización. No obstante, la mayoría de problemas prácticos y, en especial, los problemas en sistemas de potencia presentan características de dispersidad y simetría que pueden ser utilizados para reducir la complejidad computacional. Analizaremos un enfoque simple, basado en el politopo de Newton.

**Definición 8.3. Politopo de Newton.** Dado un polinomio  $p(x) \in \mathbb{R}[x]_d$ , el politopo de Newton  $\mathcal{N}(p)$  es la envolvente convexa asociada a los exponentes del conjunto de monomios base.

**Ejemplo 8.9.** Calcular el politopo de Newton, asociado al siguiente polinomio en  $\mathbb{R}[x, y]_4$ ,

$$p(x, y) = 18x^3y - 15x^4 + 13x^2y + 24xy^2 - 27 \quad (8.32)$$

<sup>1</sup>El estudio de los polinomios SOS fue iniciado por Hilbert en el siglo XIX. Hilbert también demostró la existencia de polinomios positivos que no se pueden representar como SOS. Solo recientemente se han utilizado estas ideas en problemas de optimización matemática.

<sup>2</sup>Ver ejercicio 3 del capítulo dos, sección 2.6

Para ello, graficamos cada uno de los coeficientes asociados a los exponentes del polinomio, como se muestra en la FIGURA NRO. 8.1. ■

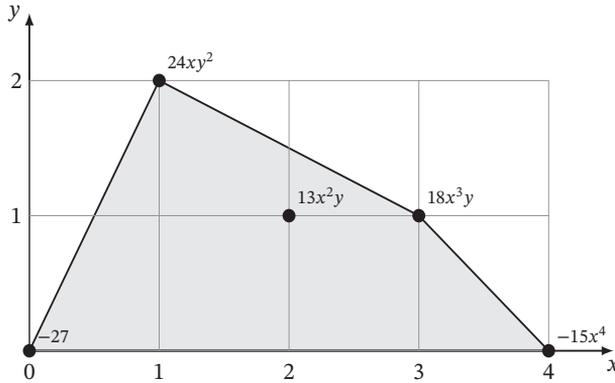


FIGURA NRO. 8.1. Polítopo de Newton para  $p(x, y) = 18x^3y - 15x^4 + 13x^2y + 24xy^2 - 27$ .

**Teorema 8.2.** Si  $p(x) \in \mathbb{R}[x]_d$  es SOS entonces cada vértice de  $\mathcal{N}(p)$  debe corresponder a exponentes pares y coeficientes positivos (ver [17]).

La condición de este teorema es necesaria pero no suficiente para garantizar que un polinomio es SOS; sin embargo, es útil para descartar polinomios que no son SOS.

**Ejemplo 8.10.** El polinomio  $p(x, y) = 18x^3y - 15x^4 + 13x^2y + 24xy^2 - 27$  no es SOS porque dos vértices de  $\mathcal{N}(p)$ , mostrados en la FIGURA NRO. 8.1, tienen coeficientes negativos; estos son  $-27$  en  $(0, 0)$  y  $-15$  en  $(4, 0)$ . ■

**Ejemplo 8.11.** El polinomio  $q(x, y) = 5x^3y + 12x^4 + 43x^2y + 17xy^2 + 8$  no es SOS pues, aunque los vértices de  $\mathcal{N}(q)$  tienen coeficientes positivos, estos no corresponden a exponentes pares. Nótese que el polítopo de Newton tiene la misma forma que el de la FIGURA NRO. 8.1. ■

**Definición 8.4. Suma de Minkowski.** Dados dos conjuntos  $A \in \mathbb{R}^n$  y  $B \in \mathbb{R}^n$ , la suma de Minkowski  $C = A + B$  es un nuevo conjunto de  $\mathbb{R}^n$  que corresponde a la suma vectorial de cada punto  $x \in A$  con cada punto  $y \in B$ .

La suma de Minkowski será utilizada para definir algunas condiciones de dispersidad que se pueden identificar en el polítopo de Newton asociado a un polinomio. En general, la suma de Minkowski de dos conjuntos convexos es también

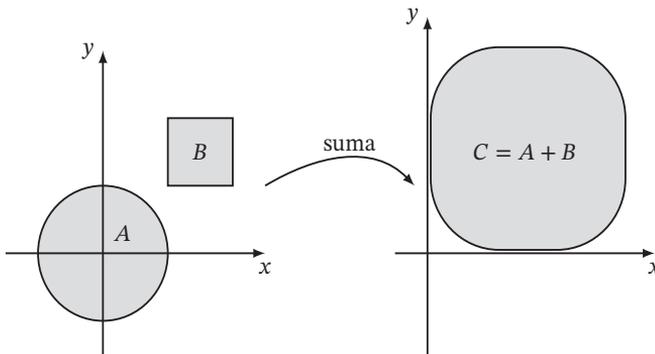
un conjunto convexo.

**Ejemplo 8.12.** Considere los siguientes conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \quad (8.33)$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\} \quad (8.34)$$

La operación de suma de Minkowski  $C = A + B$  se muestra en la FIGURA NRO. 8.2. Nótese que el nuevo conjunto  $C$  es también convexo. ■



**FIGURA NRO. 8.2.** Ejemplo de suma de Minkowski para dos conjuntos convexos  $A$  y  $B$ .

**Teorema 8.3.** Dado dos polinomios  $p(x) \in \mathbb{R}[x]_d$  y  $q(x) \in \mathbb{R}[x]_d$ , tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{N}(p \cdot q) = \mathcal{N}(p) + \mathcal{N}(q) \quad (8.35)$$

en donde la suma representa la suma de Minkowski (ver [17]).

Una consecuencia directa de este resultado, es que podemos relacionar la suma de Minkowski con el politopo de Newton en polinomios SOS.

**Corolario 8.1.** Dado un  $p(x) \in \mathbb{R}[x]_d$ , tal que

$$p(x) = \sum_{i=1}^n (g_i(x))^2 \quad (8.36)$$

Entonces  $\mathcal{N}(g_i) \subseteq \frac{1}{2}\mathcal{N}(f)$ .

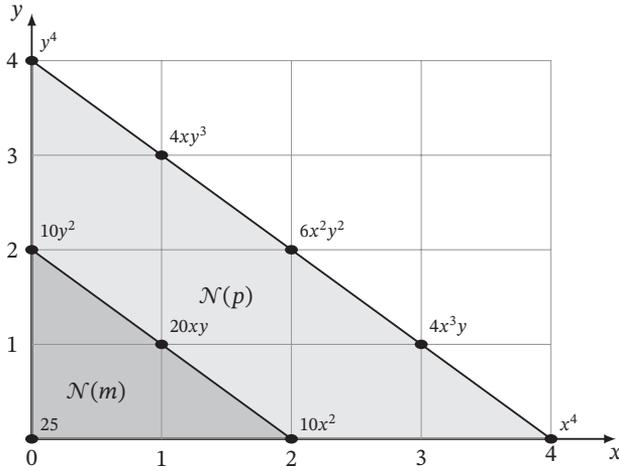


FIGURA NRO. 8.3. Polítipo de Newton para  $p$  y para la posible descomposición SOS.

De esta forma, podemos identificar fácilmente los coeficientes asociados al conjunto de monomios  $m(x)$  lo cual, a su vez, permite reducir el tamaño del problema de optimización resultante.

**Ejemplo 8.13.** Considere el siguiente polinomio bi-variado cuyo polítipo de Newton  $\mathcal{N}$  se muestra en la FIGURA NRO. 8.3.

$$p(x, y) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 10x^2 + 4xy^3 + 20xy + y^4 + 10y^2 + 25 \quad (8.37)$$

Deseamos una representación SOS de la forma  $p(x, y) = m(x, y)^T Q m(x, y)$ . Para ello, generamos el polítipo de Newton  $\mathcal{N}(m)$  el cual tiene como propiedad que  $\mathcal{N}(m) + \mathcal{N}(m) = \mathcal{N}(p)$ . Es decir, el conjunto de monomios  $m$  estará dado por

$$m(x, y) = \{1, x, x^2, xy, y, y^2\} \quad (8.38)$$

De esta forma, descartamos una gran cantidad de monomios que sabemos no van a estar presentes en la representación SOS; por consiguiente, se reduce el tamaño de la matriz  $Q$ . En este caso particular, podemos alcanzar una representación SOS dada por

$$p(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2 + 5)^2 \quad (8.39)$$

■

### 8.5. Solución de problemas polinomiales

En este punto, tenemos todos los elementos necesarios para solucionar problemas de optimización polinomial que puedan ser representados como SOS. En general, la técnica consiste en identificar la restricción SOS y convertirla en una restricción SDP, como se muestra a continuación.

**Ejemplo 8.14.** Considere el siguiente problema de optimización polinomial:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & y_1 + y_2 \\ & x^4 + y_1x + 2 + y_2 \geq 0 \\ & (y_1 - y_2 + 1)x^2 + y_2x + 1 \geq 0 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Nótese que el problema de optimización está definido sobre el espacio  $(y_1, y_2)$  y, por tanto, las restricciones se deben cumplir para cualquier valor de  $x$ . Una forma de solucionar el problema consiste en suponer que cada una de las restricciones es un polinomio SOS, a saber:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & y_1 + y_2 \\ & x^4 + y_1x + 2 + y_2 \in \text{SOS}(x) \\ & (y_1 - y_2 + 1)x^2 + y_2x + 1 \in \text{SOS}(x) \end{aligned} \tag{8.41}$$

Ahora, podemos pasar a una representación semidefinida, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x^4 + y_1x + 2 + y_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \\ (y_1 - y_2 + 1)x^2 + y_2x + 1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.42}$$

Finalmente, el problema de optimización toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_y y_1 + y_2 \\ \begin{pmatrix} y_2 - 2 & y_1/2 & -\alpha_{22}/2 \\ y_1/2 & \alpha_{22} & 0 \\ -\alpha_{22}/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 & y_2/2 \\ y_2/2 & y_1 - y_2 + 1 \end{pmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

Este corresponde a un modelo de optimización semidefinida. ■

Una de las mayores aplicaciones de las técnicas de polinomios cuadráticos es la aproximación a problemas polinomiales, no necesariamente convexos. Iniciamos nuestro análisis con el caso de un polinomio en una variable  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  cuyo mínimo global es  $\bar{p}$ , es decir,

$$p(x) \geq \bar{p}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.44)$$

En esta ecuación, podemos notar que  $p(x)$  no es necesariamente SOS y, por tanto, el problema puede ser no convexo. Ahora, como  $\bar{p}$  es el mínimo global, entonces necesariamente

$$p(x) - \bar{p} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (8.45)$$

Así, el problema puede ser transformado en la siguiente restricción equivalente, a saber:

$$p(x) - \bar{p} \in \text{SOS} \quad (8.46)$$

Es importante destacar que no todos los polinomios positivos multivariados en  $\mathbb{R}^n$  son SOS. Así, en la mayoría de los casos, se trata de una aproximación SOS. El problema de minimización resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{máx } t \\ p(x) - t \in \text{SOS} \end{aligned} \quad (8.47)$$

Dado lo anterior, se puede convertir en un problema SDP equivalente. A todas luces, el problema es de maximización a pesar de estar buscando el mínimo de  $p(x)$  en el problema original. Esto se demuestra fácilmente usando el epigrafo de la restricción. El hecho de que se trate de un mínimo viene de la restricción 8.47 que, a su vez, representa la condición 8.44.

**Ejemplo 8.15.** Queremos encontrar el mínimo del siguiente polinomio, cuyo gráfico se muestra en la FIGURA NRO. 8.4.

$$p(x) = x^4 - 30x^2 + 8x - 15 \quad (8.48)$$

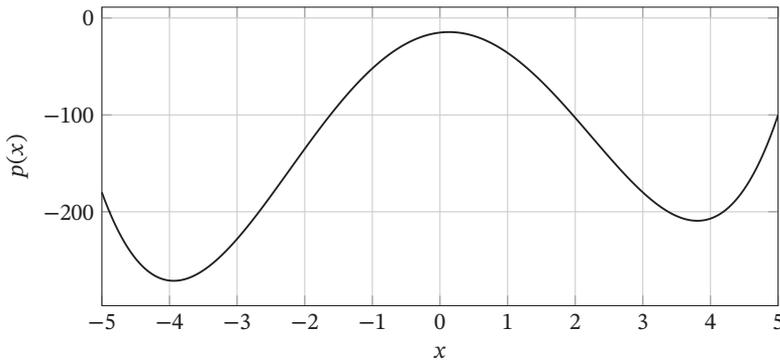


FIGURA NRO. 8.4. Gráfica del polinomio  $p(x) = x^4 - 30x^2 + 8x - 15$ .

De la gráfica se puede concluir que la función es no convexa y que tiene dos mínimos locales aproximadamente en  $-3.94$  y  $3.8$  con valores de  $p(-3.94) \approx -271.25$  y  $p(3.8) \approx -209.28$ , respectivamente. El óptimo global es, por tanto,  $\approx -271.25$ . Ahora, planteamos el problema SOS equivalente, a saber:

$$\begin{aligned} \text{mín } t \\ x^4 - 30x^2 + 8x - 15 - t \in \text{SOS} \end{aligned} \tag{8.49}$$

La factorización SOS de este polinomio tendría la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \tag{8.50}$$

Igualando término a término, podemos obtener el problema SDP equivalente, veamos:

$$\begin{aligned} \text{máx } t \\ Q \geq 0 \\ q_{33} = 1 \\ 2q_{23} = 0 \\ q_{22} + 2q_{13} = -30 \\ 2q_{12} = 8 \\ q_{11} = -15 - t \end{aligned} \tag{8.51}$$

El óptimo de este problema usando `cvxpy` es de  $-271.2461$ , el cual corresponde al valor global esperado, de acuerdo a la FIGURA NRO. 8.4. De esta forma, hemos encontrado el mínimo global a un problema no convexo, usando un modelado convexo; el paso clave fue transferir el problema del espacio  $x \in \mathbb{R}$  a un espacio más abstracto y

luego hacer un equivalente SDP computacionalmente tratable. ■

**Ejemplo 8.16.** Consideremos el siguiente problema no convexo:

$$\min f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x - 1}{x^4 + 1} \quad (8.52)$$

Este se trata de una función racional en donde  $q(x) > 0$ . Si  $t$  corresponde al mínimo global, entonces se cumple lo siguiente para cualquier valor de  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{p(x)}{q(x)} \geq t \quad (8.53)$$

De esta índole, usando el mismo razonamiento del ejemplo anterior, podemos plantear el siguiente problema convexo equivalente, a saber:

$$\begin{aligned} & \text{máx } t \\ & p(x) - tq(x) \in \text{SOS} \end{aligned} \quad (8.54)$$

Así, se tiene una factorización SOS con la misma estructura que 8.50, la cual genera el siguiente problema SDP equivalente:

$$\begin{aligned} & \text{máx } t \\ & Q \geq 0 \\ & q_{33} = -t \\ & 2q_{23} = 0 \\ & q_{22} + 2q_{13} = 0 \\ & 2q_{12} = 2 \\ & q_{11} = -1 - t \end{aligned} \quad (8.55)$$

La solución de este problema convexo es  $t = -1.9525$ . Este valor corresponde al óptimo global, de acuerdo a la FIGURA NRO. 8.5. ■

**Ejemplo 8.17.** La FIGURA NRO. 8.50 muestra que también existe un máximo global al problema de optimización del ejemplo anterior. En el presente caso, podemos proceder de forma análoga, de tal manera que el máximo global de la función cumpla lo siguiente:

$$t \geq \frac{p(x)}{q(x)} \quad (8.56)$$

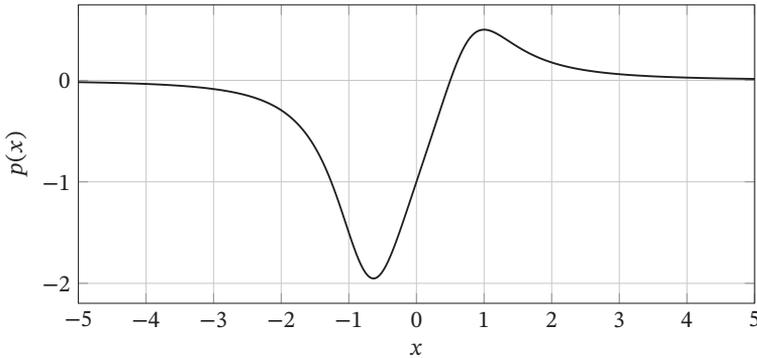


FIGURA NRO. 8.5. Gráfica del polinomio  $f(x) = (2x - 1)/(x^4 + 1)$ .

De esta forma, podemos plantear un problema SOS con la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \min t \\ tq(x) - p(x) \in SOS \end{aligned} \tag{8.57}$$

Este tendrá el siguiente equivalente SDP, a saber:

$$\begin{aligned} \min t \\ Q \geq 0 \\ q_{33} = t \\ 2q_{23} = 0 \\ q_{22} + 2q_{13} = 0 \\ 2q_{12} = -1 \\ q_{11} = t + 1 \end{aligned} \tag{8.58}$$

El óptimo de este problema de optimización semidefinida es  $t = 0.5$ . Este corresponde al valor esperado, de acuerdo a la gráfica de la función. ■

## 8.6. Lecturas complementarias

En este capítulo, se presentaron brevemente algunos aspectos, asociados a la optimización polinomial y, en particular, al problema de suma de polinomios cuadráticos. Un estudio más completo de este tema desde el punto de vista de la geometría algebraica se encuentra en [17]. Es importante destacar que SOS no es el único tipo de problema de optimización polinomial ya que existen otros enfoques;

sin embargo, los problemas SOS tienen la ventaja de ser representables como SDP y, por tanto, pueden ser solucionados eficientemente por medio de algoritmos de optimización convexa. Los polinomios SOS pueden ser utilizados en todo tipo de problemas de optimización matemática y, en particular, en aplicaciones de ingeniería eléctrica, como se mostrará en la tercera parte del libro.

## 8.7. Ejercicios

1. Graficar la siguiente función en el intervalo  $[-50, 50]$ . Calcular el máximo y el mínimo global usando dicha gráfica.

$$f(x) = \frac{x^3 - 8x + 1}{x^4 + x^2 + 12} \quad (8.59)$$

2. Calcular una aproximación al mínimo y al máximo global del ejemplo anterior usando SOS.
3. Considere el siguiente problema de optimización no-convexo:

$$\min f(x, y) = 4x^2 - \frac{21}{10}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + xy - 4y^2 + 4y^4 \quad (8.60)$$

Graficar la función en  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Resolver el problema alternativo (convexo).

$$\begin{aligned} &\text{máx } z \\ &f(x, y) - z \in \text{SOS} \end{aligned} \quad (8.61)$$

Analizar los resultados.

4. Determine si los siguientes polinomios son SOS usando el equivalente SDP. Usar el criterio del politopo de Newton para determinar los monomios base.

$$\begin{aligned} p_1(x, y) &= 9x^4 + 12x^2y^5 + 7x^2 + 2xy + 4y^{10} + 4y^5 + y^2 + 1 \\ p_2(x, y) &= 100x^{12} + 40x^6y^7 + 200x^6 + 4y^{14} + 40y^7 + 100 \\ p_3(x, y) &= x^6 + 2x^3y + 10x^3 + y^2 + 10y + 25 \\ p_4(x, y) &= 4x^2 - 4xy^3 - 4x + y^6 + 2y^3 + 1 \\ p_5(x, y) &= 4x^{10} - 4x^5y^5 + 4x^5 + y^{10} - 2y^5 + 1 \end{aligned} \quad (8.62)$$

5. Muestre que la siguiente expresión se cumple para cualquier valor de  $x$ , a saber:

$$\cos(x)^4 + 2 \cos(x)^2 \sin(x) + 10 \cos(x)^2 + \sin(x)^2 + 10 \sin(x) + 25 \geq 0 \quad (8.63)$$

9

CAPÍTULO  
NUEVE

# APROXIMACIONES CONVEXAS

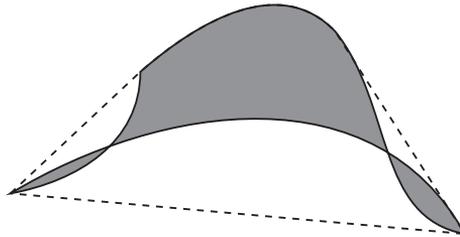
*Hasta ahora hemos analizado exclusivamente problemas de optimización convexa. Sin embargo, existen una serie de problemas no convexos con estructuras particulares que permiten usar algunas de las ideas presentadas anteriormente, ya sea a través de aproximaciones convexas o bien de algoritmos que solucionen secuencialmente el problema. Este capítulo muestra algunas de estas ideas.*

## **9.1. Linealización y envolvente convexa**

Una de las formas más simples y comúnmente usadas para encontrar modelos convexos, consiste en la linealización de las restricciones no lineales; especialmente, las restricciones de igualdad. Este enfoque es adecuado en espacios de baja curvatura que puedan ser aproximados por un hiperplano. No obstante, muchos problemas se mueven en rangos de operación en donde las linealizaciones son insuficientes para modelar el problema. Además, el uso de linealizaciones puede ser innecesario, ya que algunas restricciones no-lineales pueden ser transformadas en problemas SDP o SOC. En algunos casos, la expansión de la función en polinomios de Taylor puede ser truncada hasta obtener una ecuación cuadrática o incluso SOS. Estas son tratables con las metodologías presentadas hasta el momento. La recomendación

general es evitar las linealizaciones en aras de obtener *convexificaciones*, es decir, equivalentes convexos que preserven las características no lineales del modelo y que sean tratables computacionalmente con los métodos de optimización convexa. Un enfoque alternativo e igualmente práctico es el uso de envolventes convexas.

**Definición 9.1.** La envolvente convexa de un conjunto  $S \in \mathbb{R}^n$  es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $S$ .



**FIGURA NRO. 9.1.** Envolvente convexa asociada a un conjunto no convexo.

La FIGURA NRO. 9.1 muestra el ejemplo de una envolvente convexa, asociada a un conjunto no convexo. El conjunto original es la región sombreada y la envolvente convexa es la región marcada con líneas punteadas. En el caso de un conjunto de puntos discretos, la envolvente convexa es el polígono mínimo que abarca a todos los puntos. En general, la envolvente convexa es una forma simple de generar un problema convexo, asociado a un espacio no convexo. Desde luego, se trata de una aproximación, pero en algunos casos, esta aproximación es suficiente para encontrar soluciones prácticas a complejos problemas de optimización. Cabe mencionar que la envolvente convexa de un conjunto no convexo mantiene las no-linealidades en las zonas convexas del conjunto, linealizando exclusivamente en las zonas no convexas. De esta forma, se preserva parte de la geometría del espacio de soluciones.

## 9.2. Optimización convexa secuencial

Consideremos el siguiente problema de optimización:

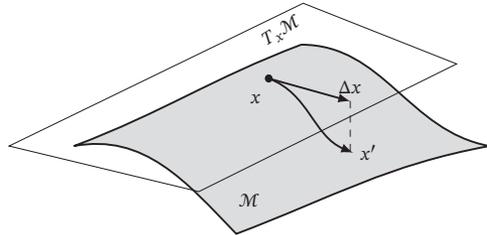
$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{M} \end{aligned} \tag{9.1}$$

Allí,  $f(x)$  es una función convexa pero el espacio  $\mathcal{M}$  no es convexo. Una forma de encontrar un óptimo local a este problema es mediante sucesivas linealizaciones de  $\mathcal{M}$  al rededor de un punto  $x$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 9.2. En este caso, obtenemos un nuevo punto  $x_n = \psi(\Delta x)$  que pertenece al espacio y sobre el cual se

puede linealizar nuevamente. Definimos  $T_x\mathcal{M}$  como espacio tangente en el punto  $x$ . Lo anterior genera el siguiente problema de optimización convexa, a saber:

$$\begin{aligned} \text{mín } f(\Delta x) \\ \Delta x \in T_x\mathcal{M} \end{aligned} \quad (9.2)$$

La solución  $\Delta x$  de este problema se encuentra en  $T_x\mathcal{M}$  por lo que se requiere proyectar este punto al espacio original  $\mathcal{M}$  y encontrar un nuevo punto  $x'$ . Esta proyección supone, en algunos casos, resolver numéricamente un sistema no lineal de ecuaciones mediante el método de Newton-Rapshon.



**FIGURA NRO. 9.2.** Retracción desde el espacio tangente  $T_x\mathcal{M}$  asociado al espacio  $\mathcal{M}$ .

Ahora, redefinimos el espacio tangente en el nuevo punto  $T_{x'}\mathcal{M}$  y repetimos el procedimiento hasta alcanzar convergencia. En caso de que  $f$  sea una función no convexa, podemos generar una linealización con el objetivo de que cada sub-problema sea convexo. El método tiene múltiples variantes, por ejemplo, podemos generar aproximaciones cuadráticas a la función objetivo y plantear una secuencia de problemas de optimización cuadrática. La principal dificultad de este enfoque se encuentra en el cálculo de la matriz hessiana de  $f$  la cual puede ser costosa computacionalmente. En la práctica, el método suele converger en pocas iteraciones, aunque es importante destacar que solo podemos encontrar un óptimo local al problema.

### 9.3. Aproximaciones semidefinidas

Algunas restricciones no convexas pueden ser aproximadas a restricciones semidefinidas usando un simple cambio de variable. Consideremos, por ejemplo, la siguiente restricción, evidentemente no convexa:

$$x^T H x = 1 \quad (9.3)$$

Allí,  $H$  es una matriz cuadrada. Ahora, definimos una nueva variable  $X = x x^T$ . Esta última es una matriz cuadrada y simétrica.

**Lema 9.1.** La matriz  $X = x x^T$  es semidefinida positiva y de rango 1.

DEMOSTRACIÓN. El rango de la matriz se observa fácilmente en la definición misma. Ahora, para demostrar que es semidefinida positiva, consideremos un vector arbitrario  $u$  y una forma cuadrática  $u^T X u$ . De este modo, tendríamos que  $u^T X u = u^T x x^T u = (x^T u)^T (x^T u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Usando esta matriz, podemos redefinir la restricción como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x^T H x &= \text{tr}(H X) = 1 \\ X &\geq 0 \\ \text{rango}(X) &= 1 \end{aligned} \tag{9.4}$$

En este punto, la ecuación 9.4 sigue siendo no convexa. Sin embargo, relajando la restricción  $\text{rango}(X) = 1$ , obtenemos un conjunto convexo. Aquí, podemos observar que la complejidad de un problema de optimización no siempre es proporcional al número de variables pues, en este ejemplo, hemos pasado de un problema no convexo en  $\mathbb{R}^n$  a un problema convexo en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . La geometría del problema resulta ser más importante que el número de variables.

Una vez solucionado este problema, podemos proyectar la matriz  $X$  sobre el espacio original en busca de la matriz de rango 1 que más se acerque a  $X$ . Esto se traduce en el siguiente problema de optimización:

$$\min_x \|x x^T - X\|_F^2 \tag{9.5}$$

Aquí,  $\|\cdot\|_F$  es la norma de Frobenius, dada por

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \tag{9.6}$$

Gracias a lo anterior, podemos encontrar el mínimo de 9.5 derivando e igualando a cero. Veamos:

$$2(x x^T - X)(2x) = 0 \tag{9.7}$$

Luego, definimos  $\alpha = x^T x$  para que 9.7 tome la siguiente forma:

$$\alpha x - X x = 0 \tag{9.8}$$

Claramente,  $\alpha$  es un eigenvalor asociado a la matriz  $X$ , mientras que  $x$  es el correspondiente eigenvector<sup>1</sup>. El valor de  $x$  lo podemos calcular de la siguiente forma:

<sup>1</sup>Recordar que los eigenvalores son únicos pero los eigenvectores no. Cualquier múltiplo de un eigenvector es también un eigenvector.

calculamos los eigenvalores ( $\lambda$ ) y eigenvectores ( $\phi$ ) de  $X$ ; luego, tomamos  $\alpha = \max(\lambda)$ . Posteriormente, calculamos el valor de  $x$  como en la ecuación 9.9.

$$x = \sqrt{\alpha} \frac{\phi}{\|\phi\|} \quad (9.9)$$

Esta, evidentemente, cumple con la condición de ser un eigenvector tal que  $x^T x = \alpha$ . Nótese que  $\sqrt{\alpha}$  existe dado que la matriz  $X$  es semidefinida positiva.

El elevado esfuerzo computacional, asociado a las restricciones semidefinidas, puede hacer impráctica la metodología en problemas de gran tamaño. En estos casos, es posible generar una aproximación adicional reemplazando las restricciones SDP  $X \geq 0$  por una serie de restricciones de la forma

$$(x_{km})^2 \leq x_{kk} x_{mm} \quad (9.10)$$

Estas restricciones son SOC-representables, tal y como se mostró en la ecuación 6.39. Esta aproximación puede, en algunos casos, generar soluciones de buena calidad con un reducido esfuerzo computacional<sup>2</sup>.

Otra posible aproximación consiste en hacer la matriz  $X$  diagonalmente dominante. Sin embargo, cabe recordar que una matriz es diagonalmente dominante si los términos de la diagonal son mayores o iguales a los términos fuera de la diagonal.

$$x_{kk} \geq \sum_{m \neq k} |x_{km}| \quad (9.11)$$

Toda matriz diagonalmente dominante es SDP, lo cual puede ser fácilmente demostrado usando el teorema de Gershgorin [18]. De esta forma, hemos reemplazado la restricción SDP por una serie de restricciones lineales.

#### 9.4. Problemas binarios

Ahora bien, consideremos un problema de optimización cuadrática con restricciones binarias que toman valores de  $-1$  o  $1$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min x^T Q x \\ x \in \{1, -1\} \end{aligned} \quad (9.12)$$

En el anterior modelo,  $Q$  es una matriz no necesariamente convexa. Ahora, convertimos el problema en un modelo SDP equivalente, usando el mismo argumento

<sup>2</sup>Este es el caso del problema de flujo de carga óptimo que será discutido en el capítulo once.

presentado en la sección anterior.

$$\begin{aligned}
 \text{mín } & \text{tr}(QX) \\
 & \text{diag}(X) = e \\
 & X > 0 \\
 & \text{rango}(X) = 1
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

De esta manera, obtenemos un problema convexo cuando relajamos la restricción de rango 1. La solución a este problema es una aproximación inferior al problema combinatorial, pero puede constituir un punto de partida para una metodología heurística<sup>3</sup>. Una forma simple de encontrar una solución binaria es tomar el signo del eigenvector, asociado al eigenvalor más grande del sistema.

De otro lado, los problemas binarios  $\{0, 1\}$  también pueden ser relajados, generando modelos de optimización semidefinida [20]; para ello, creamos una nueva variable  $y_i = (x_i + 1)/2$ ; dado que  $x_i$  toma valores  $\pm 1$ , entonces  $y_i$  tomará valores  $\{1, 0\}$ . De este modo, las restricciones del problema relajado serán

$$\begin{aligned}
 \text{diag}(X) &= \text{diag}((2y - e)(2y - e)^T) = e \\
 X = xx^T &= (2y - e)(2y - e)^T \geq 0
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

Luego, definimos una nueva matriz  $Y = yy^T \geq 0$  y desarrollamos la primera ecuación

$$\begin{aligned}
 \text{diag}((2y - e)(2y - e)^T) &= e \\
 \text{diag}(4yy^T - 2ye^T - 2ey^T + ee^T) &= e \\
 4 \text{diag}(Y) - 4 \text{diag}(ye^T) &= 0 \\
 \text{diag}(Y) &= y
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

Ahora, extendemos la desigualdad matricial, así:

$$\begin{aligned}
 (2y - e)(2y - e)^T &\geq 0 \\
 4yy^T - 2ye^T - 2ey^T + ee^T &\geq 0 \\
 4Y - 2 \text{diag}(Y)e^T - 2e \cdot \text{diag}(Y)^T + ee^T &\geq 0
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

Como se puede notar,

$$\begin{aligned}
 (e - 2 \text{diag}(Y))(e - 2 \text{diag}(Y))^T &= ee^T - e \cdot 2 \text{diag}(Y)^T - 2 \text{diag}(Y)e^T \\
 &\quad + 4 \text{diag}(Y) \text{diag}(Y)^T \geq 0
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

Si se reemplaza en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente,

$$4Y + (e - 2 \text{diag}(Y))(e - 2 \text{diag}(Y))^T - 4 \text{diag}(Y) \text{diag}(Y)^T \geq 0 \tag{9.18}$$

<sup>3</sup>Ver, por ejemplo, el método de hiperplanos aleatorios presentado en [19] para el problema de *MaxCut*.

Dado que  $(e - \text{diag}(Y))(e - \text{diag}(Y))^T \geq 0$ , podemos establecer una restricción más fuerte haciendo la siguiente consideración:

$$Y - \text{diag}(Y) \text{diag}(Y)^T \geq 0 \quad (9.19)$$

Con lo anterior, el problema binario relajado 0/1 considera las siguiente restricciones:

$$\begin{pmatrix} I & \text{diag}(Y)^T \\ \text{diag}(Y) & Y \end{pmatrix} \succeq 0 \quad (9.20)$$

$$Y \succeq 0$$

Este problema se puede resolver fácilmente con cualquier paquete de programación semidefinida.

Finalmente, los métodos de programación lineal entera, tales como *branch and bound*, y los cortes de Gomory pueden ser extendidos al caso de problemas convexos, especialmente, en problemas cónicos. Un caso particular es el de optimización cónica de segundo orden el cual presenta un bajo costo computacional, comparable al de los problemas lineales pero, al mismo tiempo, mantiene la no linealidad del problema. El estudio detallado de los problemas enteros-mixtos va más allá de los objetivos de este libro, el lector interesado, puede revisar [21].

## 9.5. Optimización polinomial usando linealización

En esta sección, analizaremos los problemas que tengan la siguiente estructura:

$$\text{mín } p(x) \text{ con } x \in \mathcal{K} \quad (9.21)$$

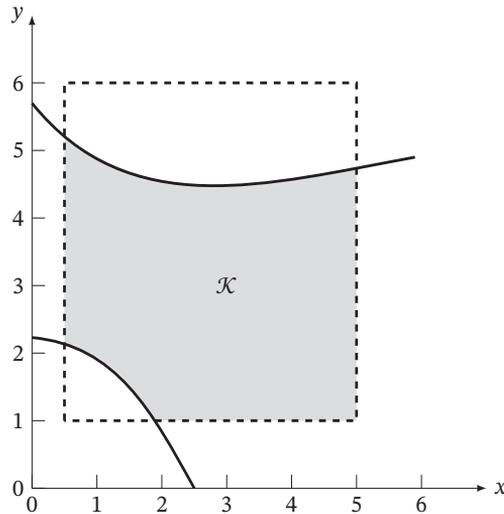
En estos problemas,  $p \in \mathbb{R}[x]$  (polinomio multivariado) y  $\mathcal{K}$  es un conjunto semialgebraico de la siguiente forma:

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, h_i(x) \geq 0, g_i, h_i \in \mathbb{R}[x]\} \quad (9.22)$$

Este problema es, desde luego, no convexo a menos que  $p, g$  y  $h$  sean polinomios SOS. No obstante, podemos generar problemas convexos aproximados mediante la técnica de reformulación-linealización o RLT (*reformulation-linearization technique* [22]). Consideremos un problema de optimización polinomial con restricciones adicionales tipo caja ( $l_i \leq x_i \leq u_i$ ) en donde  $l_i > 0$  y  $u_i$  es finito. La idea básica es generar una nueva restricción de la forma

$$\prod (x_i - l_i)(u_i - x_i) \geq 0 \quad (9.23)$$

Posteriormente, se debe generar un problema lineal y crear nuevas variables  $z = \prod x$ . veamos la metodología a través de un ejemplo.



**FIGURA NRO. 9.3.** Ejemplo de un espacio de soluciones asociado a un problema de optimización polinomial.

**Ejemplo 9.1.** Considere el siguiente problema de optimización polinomial cuyo espacio de soluciones se muestra en la FIGURA NRO. 9.3:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x^2 + y^2 \\
 \text{s.t.} \quad & x^2 - 3xy + 8x - 2y^2 + 16y - 26 \geq 0 \\
 & 1/2 \leq x \leq 5 \\
 & 1 \leq y \leq 6
 \end{aligned} \tag{9.24}$$

Dado lo anterior, evidenciamos una nueva restricción tal y como en 9.23:

$$\begin{aligned}
 & (x - 1/2)(5 - x)(y - 1)(6 - y) \geq 0 \\
 x^2y^2 - 7x^2y + 6x^2 - \frac{11}{2}xy^2 + \frac{77}{2}xy - 33x + \frac{5}{2}y^2 - \frac{35}{2}y + 15 \geq 0
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Luego, debemos definir un nuevo conjunto de variables a partir de los monomios generados por la ecuación 9.25 de la siguiente forma:  $z_1 = x, z_2 = y, z_3 = xy, z_4 = x^2y, z_5 = xy^2, z_6 = x^2y^2, z_7 = x^2$  y  $z_8 = y^2$ ; de estas obtenemos el siguiente problema lineal, a saber:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z_7 + z_8 \\
 \text{s.t.} \quad & z_6 - 7z_4 + 6z_7 - \frac{11}{2}z_5 + \frac{77}{2}z_3 - 33z_1 + \frac{5}{2}z_8 - \frac{35}{2}z_2 + 15 \geq 0 \\
 & z_7 - 3z_3 + 8z_1 - 2z_8 + 16z_2 - 26 \geq 0
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

En este punto, el problema es ilimitado así que incluimos restricciones adicionales del tipo  $z_{\min} \leq z_i \leq z_{\max}$ , las cuales se obtienen a partir de los límites inferiores y superiores de  $x$  y  $y$ ; incluyendo estas restricciones, tendremos un valor óptimo de 1.25 con  $x = 0.5$  y  $y = 1$ . Esto corresponde a una aproximación al problema original <sup>4</sup>. ■

### 9.5.1. Aproximación SOS a problemas polinomiales

Podemos obtener una mejor aproximación al problema 9.21 usando la técnica de suma de polinomios cuadráticos. Consideremos el caso en que  $\mathcal{K}$  contenga únicamente restricciones de desigualdad<sup>5</sup>, definiendo el siguiente problema SOS:

$$\begin{aligned} & \text{máx } \lambda \\ & p(x) - \lambda = u_0(x) + \sum_{k=1}^n h_k(x)q_k(x) \\ & u_i(x) \in \text{SOS}, \forall i \in \{0, \dots, n\} \end{aligned} \quad (9.27)$$

Este modelo puede ser solucionado usando un equivalente semidefinido, como se presentó en el capítulo ocho. En caso de no encontrar una solución, podemos aumentar el orden de los polinomios  $u_i$  y repetir el proceso. Esto ofrecerá una jerarquía de problemas SOS que se acerca cada vez más a la solución del problema original. Desde luego, el tamaño del modelo equivalente de optimización semidefinida puede crecer significativamente tal y como ocurre en la mayoría de problemas SOS. Esta es la principal limitante de la metodología. Veamos el uso de la técnica a través de un ejemplo.

**Ejemplo 9.2.** Deseamos solucionar el problema de optimización polinomial dado en el ejemplo anterior usando una relajación SOS, para ello definimos los siguientes polinomios en  $x$  y  $y$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 \\ q_1(x, y) &= x^2 - 3xy + 8x - 2y^2 + 16y - 16 \\ q_2(x, y) &= x - 1/2 \\ q_3(x, y) &= 5 - x \\ q_4(x, y) &= y - 1 \\ q_5(x, y) &= 6 - y \end{aligned} \quad (9.28)$$

Además, consideraremos una serie de polinomios cuadráticos  $u_i$ , a saber:

$$u_i(x, y) = \sum_k \sum_m a_{kmi} x^k y^m \quad (9.29)$$

<sup>4</sup>Nótese que, la solución dada por el problema lineal es infactible así que no es una buena aproximación.

<sup>5</sup>El caso con restricciones de igualdad se puede obtener fácilmente a partir del mismo concepto.

Allí,  $a_{kmi}$  forma un arreglo multidimensional. De esta forma, formulamos el siguiente problema de optimización SOS:

$$\begin{aligned}
 & \text{máx } \lambda \\
 & f(x, y) - \lambda = u_0(x, y) + u_1(x, y)q_1(x, y) + u_2(x, y)q_2(x, y) + \\
 & u_3(x, y)q_3(x, y) + u_4(x, y)q_4(x, y) + u_5(x, y)q_5(x, y) \quad (9.30) \\
 & u_i(x, y) \in \text{SOS}
 \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones se debe expandir en terminos de  $a_{km}$ , tal y como se explicó en el capítulo ocho, garantizando que cada submatriz  $(a_{km})_i$  sea semidefinida positiva. De esta forma, obtendremos el siguiente modelo SDP:

$$\begin{aligned}
 & \text{máx } \lambda \\
 & 26a_{001} - a_{000} - \lambda - 5a_{002} + \frac{a_{003}}{2} - 6a_{004} + a_{005} = 0 \\
 & a_{004} - 16a_{001} - a_{005} - 2a_{010} + 52a_{011} - 10a_{012} + a_{013} - 12a_{014} + 2a_{015} = 0 \\
 & 2a_{001} - 32a_{011} + 2a_{014} - 2a_{015} - a_{020} + 26a_{021} - 5a_{022} + \\
 & \frac{a_{023}}{2} - 6a_{024} + a_{025} + 1 = 0 \\
 & 4a_{011} - 16a_{021} + a_{024} - a_{025} = 0 \\
 & 2a_{021} = 0 \\
 & a_{002} - 8a_{001} - a_{003} - 2a_{100} + 52a_{101} - 10a_{102} + a_{103} - 12a_{104} + 2a_{105} = 0 \\
 & 3a_{001} - 16a_{011} + 2a_{012} - 2a_{013} - 32a_{101} + 2a_{104} - 2a_{105} - 2a_{110} + \\
 & 52a_{111} - 10a_{112} + a_{113} - 12a_{114} + 2a_{115} = 0 \\
 & 6a_{011} - 8a_{021} + a_{022} - a_{023} + 4a_{101} - 32a_{111} + 2a_{114} - 2a_{115} = 0 \\
 & 3a_{021} + 4a_{111} = 0 \\
 & 2a_{102} - 16a_{101} - a_{001} - 2a_{103} - a_{200} + 26a_{201} - 5a_{202} + \\
 & \frac{a_{203}}{2} - 6a_{204} + a_{205} + 1 = 0 \\
 & 6a_{101} - 2a_{011} - 16a_{111} + 2a_{112} - 2a_{113} - 16a_{201} + a_{204} - a_{205} = 0 \\
 & 6a_{111} - a_{021} + 2a_{201} = 0 \\
 & a_{202} - 8a_{201} - 2a_{101} - a_{203} = 0 \\
 & 3a_{201} - 2a_{111} = 0 \\
 & -a_{201} = 0 \\
 & (a_{km})_i \geq 0 \quad \forall k, m \in \{1, 2, 3\}, i \in \{0, \dots, 5\} \quad (9.31)
 \end{aligned}$$

El valor óptimo es  $\lambda = 4.01577$ , el cual corresponde a una aproximación muy precisa del óptimo del problema original. Esta aproximación se puede mejorar aumentando el orden de cada uno de los polinomios  $u_i$  a expensas de un mayor esfuerzo computacional

debido al aumento significativo del número de variables. ■

Las relajaciones SOS son mucho más precisas que las linealizaciones; aunque, el esfuerzo computacional, asociado a las restricciones semidefinidas, puede ser elevado. Un punto intermedio consiste en reemplazar las restricciones semidefinidas por restricciones SOC, tal y como se presentó en la ecuación 9.10.

## 9.6. Jerarquía de Lasserre

La jerarquía de Lasserre es un método dual a las relajaciones SOS en donde se optimiza sobre un espacio de medida. Por tanto, antes de analizar el método, debemos entender el concepto de medida y cómo puede ser usado en problemas de optimización matemática.

### 9.6.1. El problema de la medida de un conjunto

En muchos casos, deseamos medir el tamaño de un conjunto; para ello, usamos conceptos como longitud, área o volumen de acuerdo al espacio en que estemos trabajando. Consideremos el caso que se muestra en la FIGURA NRO. 9.4 en donde deseamos medir el área de cada conjunto. La función área toma entonces un conjunto y regresa un escalar positivo con las siguientes características:

$$\mu(\mathcal{K}) \geq 0 \quad (9.32)$$

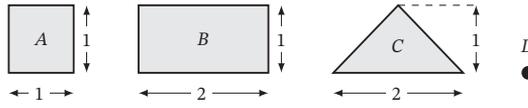
$$\mu(\emptyset) = 0 \quad (9.33)$$

$$\mu(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = \mu(\mathcal{K}_1) + \mu(\mathcal{K}_2) \text{ si } \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset \quad (9.34)$$

El valor de  $\mu$  es siempre positivo siendo 0 solo cuando el conjunto es vacío, como es el caso del conjunto  $D$  en la FIGURA NRO. 9.4. Igualmente, el área equivalente de la intersección de dos conjuntos disjuntos es simplemente la suma de las áreas correspondientes. Estas tres características se mantienen en los conceptos de longitud y volumen. Con esta idea, podemos generalizar el concepto a cualquier tipo de medida sobre un conjunto<sup>6</sup>. Desde luego, pueden existir múltiples medidas posibles sobre un conjunto por ejemplo, el perímetro de cada conjunto puede ser una medida y, por tanto, en la FIGURA NRO. 9.4 tendríamos  $\mu(A) = 4$ ,  $\mu(B) = 6$ ,  $\mu(C) = 2 + 2\sqrt{5}$ , y  $\mu(D) = 0$ . Igualmente, pueden existir conjuntos que no admiten una función de medida.

El concepto de medida fue fundamental para el entendimiento de los problemas asociados a la teoría de la probabilidad pues, una distribución de probabilidad puede

<sup>6</sup>El concepto de medida requiere un desarrollo más formal. Por ahora, nos conformaremos con una intuición geométrica, pues un estudio detallado de dichos conceptos nos apartarían de nuestro objetivo. El lector interesado puede visitar [15] y [23].



**FIGURA NRO. 9.4.** Medida de algunos conjuntos cerrados en  $\mathbb{R}^2$ .  
 $\mu(A) = 1, \mu(B) = 2, \mu(C) = 2, \mu(D) = 0$ .

ser interpretada como una medida  $\mu$  con la propiedad adicional de que  $\mu(\mathcal{K}) = 1$ ; es decir, la medida de todo el espacio es igual a uno.

### 9.6.2. Optimización sobre un espacio de medida

Existe una formulación dual, asociada a la aproximación SOS del problema 9.21 definiendo el equivalente:

$$\tilde{p} = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K})} \left\{ \int_{\mathcal{X}} p d\mu : \mu(\mathcal{K}) = 1 \right\} \quad (9.35)$$

$\mathcal{M}(\mathcal{K})$  es el espacio de todas las posibles medidas  $\mu$  sobre el conjunto factible  $\mathcal{K}$ . Para comprobar que ambos problemas son equivalentes, partimos del hecho de que  $p(x) \geq \tilde{p}, \forall x \in \mathcal{K}$  pues  $\tilde{p}$  es el óptimo global del problema y por tanto:

$$\int_{\mathcal{X}} p d\mu \geq \int_{\mathcal{X}} \tilde{p} d\mu \quad (9.36)$$

Como  $\tilde{p}$  es un escalar constante, entonces

$$\int_{\mathcal{X}} p d\mu \geq \tilde{p} \int_{\mathcal{X}} d\mu = \tilde{p} \quad (9.37)$$

La última igualdad se debe a que  $\mu(\mathcal{K}) = 1$ , así que si tomamos el ínfimo respecto a  $\mu$ , tenemos lo siguiente:

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}} \left\{ \int_{\mathcal{X}} p d\mu \right\} \geq \tilde{p} \quad (9.38)$$

De esta forma, la ecuación 9.38 define una aproximación superior al problema de optimización polinomial. Como se puede notar el problema 9.35 es dual a la formulación SOS; para demostrarlo, definimos la siguiente función lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{X}} p d\mu - \lambda \left( \int_{\mathcal{X}} d\mu - 1 \right) \quad (9.39)$$

Dado lo anterior, obtenemos la función dual  $W = \lambda$  con  $p - \lambda = 0$ ; por lo tanto, podemos definir el siguiente problema dual,

$$\sup_{x, \lambda} \{ \lambda : p(x) - \lambda = 0; x \in \mathcal{K} \} \quad (9.40)$$

Luego, regresamos al problema 9.35, en donde  $p(x)$  es un polinomio multivariado.

Ahora, introducimos una nueva notación para facilitar el análisis:

**Definición 9.2.** Dado un polinomio multivariado  $p(x)$ , definimos un multiexponente  $\alpha$  como una secuencia ordenada de números no-negativos tal que

$$p(x) = \sum m_{\alpha} x^{\alpha} \quad (9.41)$$

**Ejemplo 9.3.** Considere el polinomio multivariado

$$p(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^4 - 3x_1x_2x_3^2 + 8x_2x_3 - 10x_1^5x_2 + 7 \quad (9.42)$$

Este puede escribir como 9.41 al definir los siguientes multiexponentes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (4, 0, 0) \text{ con } m_{\alpha_1} = 5 \\ \alpha_2 &= (1, 1, 2) \text{ con } m_{\alpha_2} = -3 \\ \alpha_3 &= (0, 1, 1) \text{ con } m_{\alpha_3} = 8 \\ \alpha_4 &= (5, 1, 0) \text{ con } m_{\alpha_4} = -10 \\ \alpha_5 &= (0, 0, 0) \text{ con } m_{\alpha_5} = 7 \end{aligned} \quad (9.43)$$

Claramente, esta representación es más compacta. ■

Ahora, definimos el siguiente operador lineal:

$$\mathbb{L}(q) = \int_{\mathcal{X}} q d\mu \quad (9.44)$$

de donde obtenemos

$$\mathbb{L}(p) = \sum m_{\alpha_k} \mathbb{L}(x^{\alpha_k}) \quad (9.45)$$

Igualmente, definimos el momento asociado al monomio  $x_k^{\alpha}$ :

$$y_{\alpha_k} = \mathbb{L}(x^{\alpha_k}) \quad (9.46)$$

Como se puede evidenciar, el problema 9.35 es lineal respecto a  $y_{\alpha}$ , aunque aún no conocemos los valores numéricos de  $y$ . De hecho, no sabemos si cada uno de estos

valores existe dado que dicho problema es definido a través de una integral sobre una medida que desconocemos. En principio, queremos caracterizar la medida  $\mu$  mediante una secuencia de momentos  $y_\alpha$ . En otras palabras, no nos interesa el valor o la forma de  $\mu$ ; sin embargo, debemos asegurar que la secuencia de momentos  $y_\alpha$  corresponda a una medida del espacio  $\mathcal{K}$ ; para ello, encontramos una serie de restricciones que se deben cumplir con el objetivo de que la secuencia sea factible. Por ejemplo, dado un número real  $a^2 \geq 0$ , sabemos que  $\mathbb{L}(a^2) \geq 0$ ; lo mismo se cumple si tenemos polinomios SOS. De esta forma, podemos generar un problema de optimización que equivale a 9.35 pero en función de los momentos  $y_\alpha$ , como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min \mathbb{L}(p) \\ \mathbb{L}(p) = 1 \\ \mathbb{L}(q^2 g_i) = 0 \\ \mathbb{L}(q^2 h_i) \geq 0 \end{aligned} \tag{9.47}$$

La metodología consiste en generar una jerarquía de polinomios SOS que garanticen que  $y$  sea una secuencia de momentos asociado al espacio  $\mathcal{K}$ . Esta secuencia puede llegar a ser infinita; sin embargo, truncamos los polinomios a tamaños que permitan una solución computacional. En particular, generamos polinomios  $q$  a partir de la matriz de momentos  $M_i(y)$ , definida por la ecuación 9.48:

$$M_i(y) = (m_{\alpha\beta}) = \mathbb{L}(x^\alpha x^\beta) \tag{9.48}$$

**Ejemplo 9.4.** Dado un polinomio multivariado y cuadrático podemos definir la matriz  $M_2(y)$ , como sigue

$$M(y) = \begin{pmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{01} & y_{20} & y_{11} & y_{02} \\ y_{10} & y_{20} & y_{11} & y_{30} & y_{21} & y_{12} \\ y_{01} & y_{11} & y_{02} & y_{21} & y_{12} & y_{03} \\ y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{02} & y_{12} & y_{03} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \end{pmatrix} \tag{9.49}$$

Allí, cada fila-columna corresponde a los siguientes monomios,

$$m(x) = (1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2) \tag{9.50}$$

■

En el caso de un problema sin restricciones ( $\mathcal{K} = \mathbb{R}^n$ ), podemos generar el problema equivalente como

$$\begin{aligned} \min \mathbb{L}(p) \\ M_i(y) \geq 0 \\ y_0 = 1 \end{aligned} \tag{9.51}$$

La función objetivo es lineal mientras que la primera restricción nos sirve para asegurar que la secuencia de momentos  $y_\alpha$  corresponde a una medida  $\mu$  del espacio. La restricción  $y_0 = 1$  es equivalente a  $\mathbb{L}(1) = 1$  o bien a  $\mu(\mathcal{K}) = 1$ .

En el caso más general, podemos definir las restricciones mediante la matriz de momentos, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min \mathbb{L}(p) \\ M_i(y) \geq 0 \\ M_i(gy) = 0 \\ M_i(hy) \geq 0 \\ y_0 = 1 \end{aligned} \tag{9.52}$$

**Ejemplo 9.5.** Resolvamos el ejemplo 8.3 usando jerarquías de Lasserre de orden 2.

En este caso, la matriz  $M$  es igual a la de la ecuación 9.49, mientras que cada  $M(hy)$  se obtiene aplicando término a término el polinomio correspondiente sobre la matriz de momentos, así:

$$M_x = \begin{pmatrix} y_{10} & y_{20} & y_{11} & y_{30} & y_{21} & y_{12} \\ y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{30} & y_{40} & y_{31} & y_{50} & y_{41} & y_{32} \\ y_{21} & y_{31} & y_{22} & y_{41} & y_{32} & y_{23} \\ y_{12} & y_{22} & y_{13} & y_{32} & y_{23} & y_{14} \end{pmatrix} \tag{9.53}$$

$$M_y = \begin{pmatrix} y_{01} & y_{11} & y_{02} & y_{21} & y_{12} & y_{03} \\ y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{02} & y_{12} & y_{03} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \\ y_{21} & y_{31} & y_{22} & y_{41} & y_{32} & y_{23} \\ y_{12} & y_{22} & y_{13} & y_{32} & y_{23} & y_{14} \\ y_{03} & y_{13} & y_{04} & y_{23} & y_{14} & y_{05} \end{pmatrix} \tag{9.54}$$

$$M_{x^2} = \begin{pmatrix} y_{20} & y_{30} & y_{21} & y_{40} & y_{31} & y_{22} \\ y_{30} & y_{40} & y_{31} & y_{50} & y_{41} & y_{32} \\ y_{21} & y_{31} & y_{22} & y_{41} & y_{32} & y_{23} \\ y_{40} & y_{50} & y_{41} & y_{60} & y_{51} & y_{42} \\ y_{31} & y_{41} & y_{32} & y_{51} & y_{42} & y_{33} \\ y_{22} & y_{32} & y_{23} & y_{42} & y_{33} & y_{24} \end{pmatrix} \tag{9.55}$$

$$M_{y^2} = \begin{pmatrix} y_{02} & y_{12} & y_{03} & y_{22} & y_{13} & y_{04} \\ y_{12} & y_{22} & y_{13} & y_{32} & y_{23} & y_{14} \\ y_{03} & y_{13} & y_{04} & y_{23} & y_{14} & y_{05} \\ y_{22} & y_{32} & y_{23} & y_{42} & y_{33} & y_{24} \\ y_{13} & y_{23} & y_{14} & y_{33} & y_{24} & y_{15} \\ y_{04} & y_{14} & y_{05} & y_{24} & y_{15} & y_{06} \end{pmatrix} \tag{9.56}$$

$$M_{xy} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{12} & y_{31} & y_{22} & y_{13} \\ y_{21} & y_{31} & y_{22} & y_{41} & y_{32} & y_{23} \\ y_{12} & y_{22} & y_{13} & y_{32} & y_{23} & y_{14} \\ y_{31} & y_{41} & y_{32} & y_{51} & y_{42} & y_{33} \\ y_{22} & y_{32} & y_{23} & y_{42} & y_{33} & y_{24} \\ y_{13} & y_{23} & y_{14} & y_{33} & y_{24} & y_{15} \end{pmatrix} \quad (9.57)$$

De este modo, el problema de optimización toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_{20} + y_{02} \\ & M \geq 0 \\ & M_x - 1/2M \geq 0 \\ & 5M - M_x \geq 0 \\ & M_y - M \geq 0 \\ & 6M - M_y \geq 0 \\ & M_{x^2} - 3M_{xy} + 8M_x - 2M_{y^2} + 16M_y - 26M \geq 0 \\ & y_{00} = 1 \end{aligned} \quad (9.58)$$

La solución óptima del problema es 4.0158 con  $x = 1.5046$  y  $y = 1.3236$ . ■

En general, el método de jerarquías de Lasserre es poderoso y permite encontrar soluciones óptimas a casi cualquier problema en sistemas eléctricos, teniendo en cuenta que la mayor parte de problemas pueden ser reescritos como uno de optimización polinomial. La principal dificultad de esta metodología está asociada, nuevamente, al esfuerzo computacional para resolver los problemas SDP, ya que el tamaño de las matrices semidefinidas crece a medida que nos acercamos a la solución óptima del problema original.

## 9.7. Lecturas complementarias

El uso de aproximaciones SDP en problemas combinatoriales ha sido estudiado en [20] y en [24]. No obstante, existen pocas referencias sobre la aplicación de este enfoque en problemas de sistemas eléctricos. Las aproximaciones SDP y SOC a problemas cuadráticos han sido ampliamente desarrolladas en el problema de flujo de carga óptimo, tal y como se mostrará en el capítulo once. Un estudio formal sobre optimización polinomial puede ser encontrado en [17] para la aproximación SOS y en [25] para las jerarquías de Lasserre.

## 9.8. Ejercicios

1. Encontrar una solución aproximada (SDP) al siguiente problema cuadrático:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x^2 + 2y^2 \\ & x^2 - 10x + y^2 - 16y + z^2 + 4z + 92 = 0 \quad 0.5 \leq z \leq 1 \end{aligned} \quad (9.59)$$

Generar, igualmente, una aproximación SOC usando la ecuación 9.10 y una aproximación diagonalmente dominante usando la ecuación 9.11; comparar los resultados.

2. Considere la siguiente matriz cuadrada:

$$M = I + xA + yB \quad (9.60)$$

Aquí,  $I$ ,  $A$  y  $B$  son matrices de  $5 \times 5$  siendo  $I$  la matriz identidad y  $A$ ,  $B$  dos matrices simétricas generadas aleatoriamente mediante una distribución normal. Los valores de  $x$  y  $y$  son escalares entre  $-1$  y  $1$ . Hacer una gráfica en donde se muestren los puntos  $x$  y  $y$  que hacen que  $M$  sea semidefinida positiva. Mostrar del mismo modo los puntos que hacen que  $M$  sea diagonalmente dominante y aquellos que cumplan la ecuación 9.10.

3. Encontrar una solución aproximada usando SDP al problema binario cuadrático

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \quad (9.61)$$

con  $x_i \in \{-1, 1\}$ ,  $c = (-5, -8, 3, 7, 4)$  y

$$Q = \begin{pmatrix} 80 & 96 & 73 & 58 & 144 \\ 96 & 202 & 126 & 60 & 193 \\ 73 & 126 & 117 & 47 & 186 \\ 58 & 60 & 47 & 56 & 112 \\ 144 & 193 & 186 & 112 & 418 \end{pmatrix} \quad (9.62)$$

4. Encontrar una solución aproximada al siguiente problema de optimización polinomial usando una técnica de linealización (RLT). Graficar el espacio de soluciones.

$$\begin{aligned} \min \quad & x + y \\ & x^2 + y - 8 \geq 0 \\ & -x + y^2 + 1 \geq 0 \\ & 1 \leq x \leq 10 \\ & 2 \leq y \leq 8 \end{aligned} \quad (9.63)$$

5. Repetir el problema anterior usando tanto SOS como jerarquías de Lasserre.

**TERCERA PARTE**

**APLICACIONES EN OPERACIÓN  
Y CONTROL DE SISTEMAS DE  
POTENCIA**

# 10 CAPÍTULO DIEZ

# OPERACIÓN DE SISTEMAS DE POTENCIA

*En este capítulo, se presentan algunos modelos de optimización convexa aplicados a problemas de operación en sistemas de potencia. Cada problema se describe brevemente y se presenta el modelo simplificado. No se busca hacer un análisis detallado de cada modelo; por el contrario, se presenta una visión general de las posibles aplicaciones de la teoría que hemos desarrollado hasta el momento.*

## **10.1. Despacho económico y despacho ambiental**

El despacho económico de plantas térmicas es uno de los problemas clásicos en la operación de sistemas de potencia. Este consiste en minimizar los costos de operación del sistema sujeto a restricciones físicas, como el balance de potencia y la máxima

capacidad de generación. Básicamente, el problema tiene la siguiente estructura

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i f_i(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i p_i = d \\ & p_{min} \leq p_i \leq p_{max} \end{aligned} \quad (10.1)$$

En este,  $p_i$  corresponde a la potencia generada por cada unidad termoeléctrica y  $d$  a la demanda esperada. La función objetivo, usualmente cuadrática, puede representar tanto los costos como las emisiones de gases de efecto invernadero. En el primer caso, se trata de un despacho económico mientras que en el segundo es un despacho ambiental. En ambos casos, el problema resultante es convexo. Más aún, la función objetivo es estrictamente convexa y, por tanto, la solución es única.

Las restricciones de flujo de carga pueden ser incluidas en el despacho haciendo el modelo no convexo. En tal caso, debemos usar las aproximaciones convexas que se mostrarán en el capítulo siguiente para el problema de flujo de carga óptimo<sup>1</sup>. Cabe anotar que el despacho económico/ambiental es muy similar al de flujo de carga óptimo. Esto hace que, en algunos casos, se use ambos conceptos de forma indistinta. Sin embargo, la principal diferencia entre uno y otro consiste en que el flujo de carga óptimo busca minimizar pérdidas con las tensiones como variables de decisión, mientras que el despacho económico/ambiental busca minimizar costos/emisiones con las potencias activas como variables de decisión.

El problema de despacho económico puede incluir centrales hidroeléctricas, las cuales generan dos cambios fundamentales en el modelo. Por un lado, el modelo se hace dinámico pues las decisiones operativas y presentes afectan la operación futura del sistema. De otro lado, el modelo se hace estocástico pues las afluencias suelen ser variables aleatorias, especialmente, en los modelos de largo plazo. El problema se hace aún más complejo cuando introducimos energías renovables no convencionales tales como la generación eólica y la generación solar fotovoltaica. Iniciemos planteando el

---

<sup>1</sup>Aunque el flujo de carga óptimo es un problema operativo, hemos decidido incluir un capítulo exclusivo para este problema debido a su importancia en sistemas de potencia y a los avances recientes en optimización convexa, aplicados a este modelo.

modelo clásico de despacho hidrotérmico, a saber:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_t \sum_i f_i(p_{it}) \\
 & \sum_i p_{it} + \sum_j p_{jt} = d_t \quad \forall t \in \mathcal{T} \\
 & p_{jt} = g(q_{jt}, v_{jt}) \\
 & v_{j(t+1)} = v_{jt} + \alpha(a_{jt} - q_{jt} - s_{jt}) \\
 & p_{\min} \leq p_{it} \leq p_{\max} \\
 & q_{\min} \leq q_{jt} \leq q_{\max} \\
 & s_{\min} \leq s_{it} \leq s_{\max} \\
 & v_{\min} \leq v_{it} \leq v_{\max}
 \end{aligned} \tag{10.2}$$

En este modelo,  $i$  enumera las plantas térmicas y  $j$  enumera las plantas hidroeléctricas. Así,  $p_{it}$  es la generación en la planta termoeléctrica  $i$  en el instante  $t$ , y  $a_{jt}$ ,  $v_{jt}$ ,  $p_{jt}$ ,  $q_{jt}$  y  $s_{jt}$  son respectivamente las afluencias, el volumen del embalse, la potencia generada, el turbinamiento y los vertimientos de la central  $j$  en el instante  $t$ . La función  $g$  puede ser lineal o no lineal. En el primer caso, el problema resultante es convexo mientras que en el segundo caso se debe recurrir a aproximaciones convexas<sup>2</sup>.

El horizonte de planeamiento  $\mathcal{T}$  puede ser de corto, mediano o largo plazo. El primero se refiere a periodos de un día o una semana con división horaria. El segundo es usualmente de un año, mientras que el tercero es de varios años. En cualquiera de los casos, el problema se hace estocástico si se tienen en cuenta que tanto la demanda  $d_t$  como las afluencias  $a_{jt}$  son variables aleatorias. En todos los casos, se pueden usar aproximaciones robustas como las presentadas en el capítulo seis. En el caso del despacho de corto plazo, podemos además utilizar un esquema de *receding horizon* en que se tiene un modelo de predicción sobre una ventana de tiempo, el cual será solucionado iterativamente usando el modelo convexo<sup>3</sup>.

La estrategia que será usada en diferentes problemas a lo largo de este capítulo consiste en un estimador de las variables aleatorias el cual se asume con un error medio igual a cero y una desviación conocida. Las variables aleatorias incluyen las afluencias, la demanda de potencia, las velocidades del viento y la radiación solar. El problema se puede entonces resolver en una ventana de tiempo móvil usando el modelo robusto, presentado en el capítulo siete. La región de incertidumbre puede ser especificada usando la desviación dada por el estimador o bien mediante medidas del riesgo, como el VaR y el CVaR. En cualquiera de los casos, el problema se reduce a uno de optimización robusta y estocástica el cual puede ser solucionado en tiempo real gracias a las propiedades de convergencia de los problemas convexos que serán estudiados en la última parte del libro. De otro lado, podemos garantizar que la solución

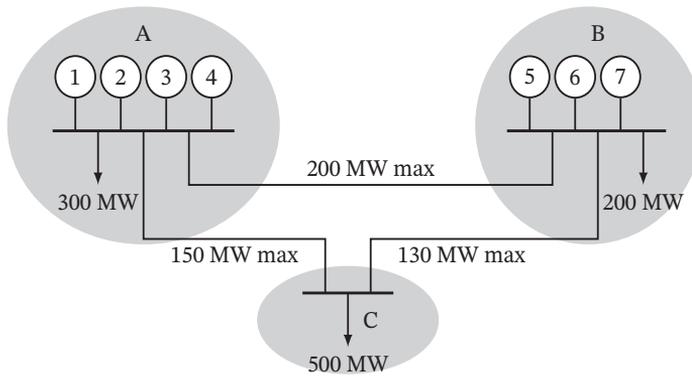
<sup>2</sup>Para mas detalles, ver [26]

<sup>3</sup>El concepto de *receding horizon* es la base del control predictivo, basado en el modelo, el cual será presentado en el capítulo trece

en cada punto de la venta de tiempo es única y el óptimo es global. Estas características son particularmente útiles en los problemas operativos en los que el algoritmo toma decisiones no supervisadas y en tiempo real. Este enfoque se presenta no solo en los problemas operativos, sino también en los problemas de control como se mostrará en el capítulo trece.

## 10.2. Restricciones de capacidad

El modelo de transportes constituye un tipo de problema de programación lineal que ha sido estudiado desde los inicios de la investigación de operaciones a mediados del siglo XX. Este tipo de modelos permite considerar de una forma simplificada las restricciones de red en un sistema de potencia.



**FIGURA NRO. 10.1.** Modelo de despacho económico por áreas, considerando restricciones de red con el modelo de transportes.

Ahora bien, consideremos una red de potencia con tres áreas de operación, como se muestra en la FIGURA NRO. 10.1, en donde las líneas son representadas exclusivamente por su capacidad de potencia. El problema de despacho económico se plantea considerando estas restricciones:

$$\begin{aligned}
 \min & f_1(p_1) + f_2(p_2) + f_3(p_3) + f_4(p_4) + f_5(p_5) + f_6(p_6) + f_7(p_7) \\
 & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 300 + p_{AB} + p_{AC} \\
 & p_5 + p_6 + p_7 = 200 - p_{AB} + p_{BC} \\
 & p_{AC} + p_{BC} = 500 \\
 & \left| p_{ij} \right| \leq p_{\max(ij)} \quad \forall (ij) \in \{AB, BC, AC\} \\
 & p_{\min} \leq p_i \leq p_{\max}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

La principal diferencia con respecto al problema clásico, corresponde a las restricciones del flujo de potencia, asociadas a la transferencia de potencia entre áreas (es decir  $\{p_{AB}, p_{BC}, p_{AC}\}$ ). Estas restricciones son lineales por lo que el problema se mantiene convexo.

### 10.3. Flujo de carga óptimo

El flujo de potencia es una de las herramientas más importantes en el análisis de los sistemas de potencia. Este permite determinar el estado del sistema de potencia conociendo la magnitud de la tensión y la potencia activa en los nodos generadores y la potencia demandada en los nodos de carga. Esto resulta en un sistema no lineal de ecuaciones, de la forma:

$$\begin{aligned} p &= f_p(v, \theta) \\ q &= f_q(v, \theta) \end{aligned} \quad (10.4)$$

en donde  $p$  y  $q$  son las potencias activas y reactivas en cada nodo. Estas ecuaciones entran como restricciones al problema de despacho económico y al problema de flujo de carga óptimo. Este último consiste en minimizar las pérdidas del sistema, sujeto a las restricciones físicas de la red, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min_{v, \theta, p, q} \quad & L(v, \theta) p = f_p(v, \theta) \\ & q = f_q(v, \theta) \\ & p_{min} \leq p \leq p_{max} \\ & q_{min} \leq q \leq q_{max} \\ & v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ & \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{max} \\ & \theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Desafortunadamente, el problema resultante no es convexo. Por esta razón, requerimos hacer diferentes aproximaciones convexas con el objetivo de obtener un modelo que pueda garantizar un óptimo global. Este tipo de aproximaciones son importantes en todo tipo de problemas operativos, además del problema de flujo de carga óptimo y despacho económico; por tal razón, las aproximaciones convexas a estos problemas se presentan con detalle en el siguiente capítulo.

### 10.4. Gestión de la demanda

La gestión de la demanda constituye un cambio de paradigma en el contexto de las redes inteligentes, en donde las cargas pasan de tener una característica pasiva a tener un comportamiento activo que puede ser sujeto a optimización y maniobras operativas.

Las tecnologías modernas de comunicación y en especial el concepto de IoT (Internet of the Things) podrían ser el catalizador de este cambio. Sin embargo, la tecnología por sí sola no es suficiente pues es necesario crear una capa de optimización que permita tomar decisiones de forma óptima, automatizada y en tiempo real. La optimización convexa brinda, por tanto, la capa de inteligencia en la metodología.

En general, las cargas de un sistema eléctrico pueden ser clasificadas de acuerdo al tipo de usuario en cargas industriales, comerciales y residenciales. A su vez, estas cargas pueden ser sub-clasificadas en cargas fijas, cargas continuamente controlables, cargas desconectables y cargas desplazables. A continuación, describimos cada una de ellas:

- Las cargas fijas son aquellas que no pueden ser controladas, ya sea por sus características técnicas o bien por su importancia para el usuario. Un hospital es un buen ejemplo de una carga fija en un sistema de distribución. A nivel de usuario final, una carga fija puede ser un proceso importante y continuo en una fábrica, el sistema de seguridad de un banco o la alimentación de los servidores en un *data-center*.
- Las cargas continuamente controlables son cargas con alguna interfaz basada en electrónica de potencia que permite un control fino de la potencia consumida. El tipo de carga más común de este tipo son los variadores de velocidad en usuarios industriales y algunos sistemas de aire acondicionado en usuarios comerciales.
- Las cargas desconectables voluntarias son aquellas que no pueden ser controladas en cuanto a su potencia consumida, pero que pueden ser desconectadas en caso de ser necesario. Estas incluyen circuitos de iluminación en usuarios comerciales y procesos industriales menos relevantes en usuarios industriales. La desconexión de estas cargas puede traer un costo asociado que debe ser considerado en la función objetivo del modelo de optimización. Igualmente, a nivel de red de distribución, se pueden tener secciones de alimentadores primarios y cargas desconectables voluntarias que puedan ser usadas como última capa de seguridad en los esquemas de operación del sistema.
- Las cargas desplazables son cargas que se pueden trasladar en el tiempo, por ejemplo, una lavadora de un usuario residencial. El reto en el modelado de este tipo de cargas consiste en que debe permitir un movimiento como bloque a través del tiempo; esto significa que una vez iniciado el proceso no se puede interrumpir. Muchos procesos industriales tienen esta característica por lo que estas cargas son particularmente importantes en este tipo de aplicaciones.

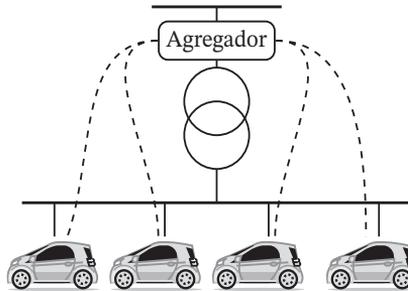
Tanto las cargas desconectables voluntarias como las cargas desplazables introducen variables binarias que deben ser consideradas mediante aproximaciones convexas. Estas aproximaciones se presentarán en el capítulo once en donde se tratarán problemas de planeamiento. Por lo pronto, podemos centrarnos en el problema con cargas continuamente controlables cuyo modelo de optimización se presenta a

continuación:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_t \sum_i c_{it} p_{it} \\ & \sum_t (\bar{p}_{it} - p_{it}) = d_t \\ & 0 \leq p_{it} \leq \bar{p}_{it} \end{aligned} \quad (10.6)$$

En dicho modelo,  $\bar{p}_{it}$  es la potencia consumida por la carga  $i$  en el periodo  $t$ ;  $p_{it}$  es la cantidad de potencia que se reduce, producto del algoritmo de gestión de la demanda;  $c_{it}$  es el costo de desconexión por unidad de potencia y  $d_t$  es la demanda admisible total. Nótese que el problema es básicamente el mismo que el de despacho económico solo que esta vez optimizamos las cargas y no la generación. El problema resultante es evidentemente convexo. De hecho, se trata de un problema de programación lineal.

Los esquemas de gestión de la demanda se relacionan con las micro-redes y los esquemas de gestión de vehículos eléctricos o V2G (*vehicle to grid*) de varias formas. Una de las más comunes es el esquema que se muestra en la FIGURA NRO. 10.2 en donde se tiene un dispositivo llamado agregador el cual centraliza las acciones de control de la micro-red, resolviendo el problema de despacho y/o de gestión de la demanda en tiempo real.



**FIGURA NRO. 10.2.** Esquema V2G con un agregador que centraliza las acciones de control y resuelve problemas de optimización convexa en tiempo real.

## 10.5. Plantas de potencia virtuales

Las energías renovables no convencionales así como los elementos almacenadores de energía pueden ser integrados en un sistema de potencia mediante el concepto de planta de potencia virtual o VPP (*virtual power plant*). Una VPP es un ente que centraliza la operación de pequeñas fuentes de generación con el fin de ser despachadas. Existen múltiples configuraciones y modos de operación. En esta sección, nos centraremos en una en particular la cual fue estudiada en [27]. En esta configuración, se tiene un alimentador primario con generación distribuida, ya sea

como usuarios directamente conectados a la red o bien como micro-redes controladas por un agregador local.

La planta de potencia virtual es el agente del mercado que oferta cantidades de energía al sistema de potencia. Dichas cantidades son gestionadas a partir de las fuentes distribuidas a lo largo del alimentador primario. Se presentan al menos dos momentos en donde se requieren utilizar modelos de optimización convexa: el día antes de la operación (*day ahead*) y la operación técnica en tiempo real. Para el despacho el día antes de la operación, se debe ejecutar un modelo de despacho económico como el presentado en la sección 9.1, en donde la disponibilidad de generación debe ser incluida considerando la estocasticidad del recurso primario (afluencias, viento o sol). El problema resultante puede ser solucionado mediante una estrategia de optimización robusta. Este modelo entrega una serie de requerimientos de potencia a los cuales se compromete el operador de la VPP en el día de la operación.

El modelo de optimización en el día de la operación debe incluir las restricciones operativas del sistema y las variaciones del recurso primario con respecto a la predicción realizada el día anterior. Para esto, se utiliza una estrategia de *receding horizon*, tal y como en el caso del despacho hidrotérmico; solo que esta vez se deben involucrar las restricciones de la red a través de un flujo de carga óptimo como el que se presentará en el capítulo siguiente.

## 10.6. Estimación de estado e identificación de la red

El problema de estimación de estado es clásico en la operación de sistemas de potencia y es un componente fundamental en los sistemas SCADA (*supervisory control and data acquisition*). El problema consiste en determinar el estado más probable del sistema a partir de mediciones redundantes sobre la red, y del conocimiento de la topología y relación de las variables eléctricas. Cuando las variables a medir son potencias activas y reactivas, se obtiene un problema no convexo con el mismo grado de complejidad que el flujo de carga. Sin embargo, modernas tecnologías como los esquemas de medición sincronofasorial o PMUs (*phasor measurement units*) permiten que el problema resultante tenga restricciones afines debido a que las mediciones son de corriente y de voltaje.

El problema se puede plantear también sobre micro-redes AC y DC. Analicemos el caso de una micro-red DC con medición centralizada, como se muestra en la FIGURA NRO. 10.3. Cada elemento activo de la red puede tener medición tanto de voltaje como de corriente; no obstante, el estado del sistema se puede determinar completamente con solo mediciones de tensión; por tanto, las mediciones de corriente son redundantes. No obstante, podemos usar estas mediciones con el fin de encontrar el estado más probable de operación, basados en el modelo de mínimos cuadrados, como se muestra

a continuación:

$$\begin{aligned} \min_{I,V} (I - J)^T M(i - j) + (v - u)^T N(v - u) \\ I = YV \\ I_{min} \leq I \leq I_{max} \\ V_{min} \leq V \leq V_{max} \end{aligned} \quad (10.7)$$

En donde  $U$  y  $J$  son las mediciones de tensión y corriente, respectivamente;  $V$  e  $I$  son las mediciones correspondientes, y  $M$  y  $N$  son matrices definidas positivas que representan el peso de cada medición. El problema resultante es de optimización cuadrática y convexa, con una función fuertemente convexa y por ende, tiene solución única.

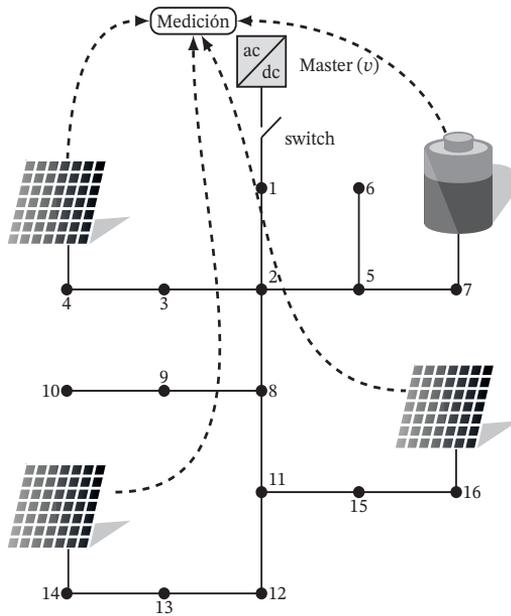


FIGURA NRO. 10.3. Micro-red en DC con medición centralizada.

Otro problema de operación, estrechamente ligado a la estimación de estado, es la identificación de la red. En este caso, tenemos mediciones tanto de tensión como de corriente en diferentes puntos de operación. Nuestro objetivo es estimar la  $Y_{bus}$  a partir de estas mediciones. En este caso, podemos formular un problema de optimización como sigue:

$$\min_Y f(Y) = \frac{1}{2} \|I - YV\|_F^2 \quad (10.8)$$

en donde la variable de decisión es una matriz  $Y$  y la función objetivo es la norma de Frobenius<sup>4</sup>, definida en la ecuación 9.6 (capítulo nueve). Al ser una norma, podemos asegurar que se trata de un problema fuertemente convexo y, por tanto, podemos encontrar eficientemente el óptimo global garantizando que la solución es única. Dada la ecuación 10.8, el óptimo se encuentra derivando e igualando a cero, es decir,

$$(VV^T)Y - VI^T \quad (10.9)$$

De lo anterior, podemos despejar directamente el valor de  $Y$ :

$$Y = (VV^T)^{-1}VI^T \quad (10.10)$$

Una modificación al problema consiste en incluir información disponible de la estructura de la matriz  $Y$ ; por ejemplo, sabemos que la matriz es simétrica y que algunas posiciones son 0. En ese caso, el problema de optimización toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min_Y f(Y) &= \frac{1}{2} \|I - YV\|_F \\ y_{ij} &= y_{ji}, \quad \forall i, j \\ y_{ij} &= 0, \quad \text{si } i \text{ no está conectado a } j \end{aligned} \quad (10.11)$$

Tanto la estimación de estado como la identificación de la red, pueden ser extendidos a redes AC de forma directa. Solo basta separar el problema en parte real e imaginaria. Mas información se puede encontrar en [28].

## 10.7. Problemas binarios en sistemas eléctricos

Existen múltiples problemas combinatoriales en sistemas eléctricos, tanto en la etapa de planeación, como en la de operación. En la etapa de planeación, se destacan los problemas de planeación de la transmisión y planeación de la distribución. Estos tipos de problemas son usualmente solucionados mediante técnicas heurísticas o mediante aproximaciones lineales<sup>5</sup>. Entre los problemas operativos, se incluyen el enganche de unidades térmicas y el balance de fases.

El enganche de plantas térmicas consiste en determinar el orden de arranque y parada de las centrales termoeléctricas, teniendo en cuenta los costos de encendido y apagado, así como las rampas de arranque. El modelo de optimización resultante es similar al del despacho económico, pero esta vez se consideran variables binarias  $s_k$ , asociadas a cada unidad termoeléctrica. En este modelo,  $s_k = 1$  si la central esta

<sup>4</sup>De hecho, la función objetivo puede ser cualquier norma; no obstante, la derivada de la norma de Frobenius se puede obtener fácilmente.

<sup>5</sup>Para más detalles, ver [29].

encendida y  $s_k = 0$  si la central esta apagada. El modelo simplificado se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum f(p_k) + \sum h(s_k) \\
 & \sum p_k = p_D \\
 & r(s_k) \leq 0 \\
 & p_{\min} s_k \leq p_k \leq p_{\max} s_k \\
 & s_k \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{10.12}$$

De esta índole,  $f$  representa los costos de operación;  $h$ , los costos de encendido y apagado;  $r$ , las rampas de encendido; y  $p_{\min}$ ,  $p_{\max}$ , los límites operativos de cada central. El problema resultante es no convexo debido a las restricciones binarias, asociadas a  $s_k$ .

Otro modelo operativo común en sistemas de potencia es el balance de fases. Este se produce en alimentadores primarios altamente desbalanceados, en donde podemos cambiar la conexión en cada una de las fases con el objetivo de minimizar las pérdidas. Definimos una serie de matrices de permutaciones  $M$ , tal que

$$p_k + jq_k = Ms_k \tag{10.13}$$

Allí,  $s_k$  es la demanda trifásica asociada a cada nodo, y  $p_k$  y  $q_k$  son las demandas del sistema después del balance. El problema consiste en seleccionar la permutación adecuada, de tal forma que se minimicen las pérdidas totales del sistema, es decir,

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_L(p, q) \\
 & h(v) = \left( \sum M_k x_k \right) s \\
 & \sum x_k = 1 \\
 & x_k \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

en donde  $f_L$ , corresponde a las pérdidas de potencia;  $v$ , al vector de tensiones nodales;  $h$ , a las ecuaciones de flujo de carga; y  $M_k$ , al conjunto de matrices que definen las posibles permutaciones de la carga. Asimismo,  $x_k$  es un conjunto de variables binarias que permite seleccionar una las permutaciones<sup>6</sup>.

## 10.8. Lecturas complementarias

Los problemas de despacho económico y despacho ambiental son clásicos en la operación de sistemas de potencia. En [28] y [31] se muestran modelos de operación con diferentes grados de detalle. Estas referencias no usan el paradigma de optimización convexa para formalizar sus resultados, pero dan una buena introducción a los problemas reales de operación de sistemas de potencia. En el caso particular del

<sup>6</sup>Más detalles de este modelo pueden encontrarse en [30]

problema de despacho hidrotérmico usando *receding horizon*, se recomienda ver [26]. Un análisis detallado sobre los problemas de gestión de la demanda en el contexto colombiano se presenta en [32]. Igualmente, el estudio de plantas de potencia virtuales en el contexto colombiano se puede encontrar en [27]. El estudio del problema de identificación de redes DC puede ser estudiado en [33].

## 10.9. Ejercicios

1. Solucionar el siguiente problema de despacho económico de plantas térmicas para diferentes valores de demanda  $P_D$ .

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.0054p_1^2 + 11.67p_1 + 5 \\ f_1 &= 0.0088p_2^2 + 11.33p_2 + 10 \end{aligned} \tag{10.15}$$

2. Considere un sistema hidrotérmico con una planta térmica equivalente de 2500 MW cuya función de costos está dada por

$$f = 0.002p_T^2 + 19.2p_T + 5000 \tag{10.16}$$

El sistema hídrico está representado por un reservorio equivalente cuyo volumen varía entre  $310 \times 10^4 \text{m}^3$  y  $670 \times 10^4 \text{m}^3$ . Determinar el despacho óptimo para una operación en 24 h, teniendo en cuenta que la planta hidroeléctrica tiene un factor de turbinamiento de  $\tau = 16.64 \text{MW}/(10^4 \text{m}^3)$  y una potencia máxima de 1500MW. El volumen en la hora cero es de  $500 \times 10^4 \text{m}^3$  y se espera tener el mismo volumen al final de la operación. Los valores típicos de demanda y afluencias se muestran en la TABLA NRO. 10.1.

Hora	Demanda [MW]	Afluencias $\times 10^4 [\text{m}^3]$
1-4	1370	40
5-8	1290	24
9-12	2240	40
13-16	2230	48
17-20	2130	36
21-24	2280	28

**TABLA NRO. 10.1.** Valores esperados de afluencias y demandas.

3. Considere una micro-red, constituida por un panel solar fotovoltaico de 10kW nominales, una pequeña planta diesel de 20 kW y un sistema de almacenamiento por baterías de 5kW/50kWh. Los costos de operación de planta diesel son constantes a razón de 380COP/kWh y tanto la irradiancia como el precio de la energía son altamente predecibles. Los parámetros de cada elemento se muestran en la TABLA NRO. 10.2. Usar los datos del escenario medio de precios.

4. Solucionar el problema anterior, pero esta vez las probabilidades de cada escenario de costos son de 0.3, 0.5 y 0.2, respectivamente. Calcular el valor esperado de costos.
5. Considere una micro-red en DC con tres nodos, cuyas medidas de voltaje y corriente en diferentes puntos de operación se muestran en la TABLA NRO. 10.3. Encontrar la matriz  $Y_{\text{bus}}$  a partir de esta información.

Hora	Solar kW	Bajo (COP/kWh)	Medio (COP/kWh)	Alto (COP/kWh)
0-4	0	300	320	340
5-8	2	350	370	380
9-12	10	380	400	420
13-16	8	350	380	400
17-20	0	450	440	480
21-24	0	350	380	400

**TABLA NRO. 10.2.** Generación solar y precio de bolsa para la micro-red del ejercicio 1.

$v_1$	$v_2$	$v_2$	$i_1$	$i_2$	$i_3$
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.6667
1.0000	1.0100	0.9900	0.9667	1.2100	0.4933
0.8000	0.9500	1.0100	-2.1000	2.1500	2.3733
0.9300	0.8500	0.9700	1.4633	-0.5500	1.5133
0.9800	0.9700	0.9500	1.2800	0.9700	0.3333
1.1200	0.9000	1.0500	3.7867	-2.0500	0.9833
1.0200	1.0000	1.0100	1.2867	0.7500	0.6567

**TABLA NRO. 10.3.** Mediciones de voltaje y corriente en una micro-red dc para diferentes puntos de operación.

# 11

## CAPÍTULO ONCE

# APROXIMACIÓN CONVEXA AL FLUJO DE CARGA

*El flujo de carga es, quizás, la herramienta más importante para la operación de sistemas eléctricos tanto a nivel de potencia como a nivel de distribución. Sin embargo, las ecuaciones de flujo de carga constituyen un sistema no afín que hacen que los problemas sean no convexos. En este capítulo, presentamos algunas aproximaciones convexas a este problema.*

## **11.1. Problemas convexos en variable compleja**

El modelo de flujo de carga genera un conjunto de ecuaciones algebraicas en variable compleja, con las características adicionales de ser no lineales y no holomórficas. Es por ello que debemos analizar en detalle estas características desde el paradigma de la optimización convexa.

**Definición 11.1.** Decimos que un problema de optimización convexa es representable

en variable compleja, si puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min f(z) \\ g(z) = 0 \\ h(z) \leq 0 \end{aligned} \tag{11.1}$$

en donde  $z = x + jy$ ,  $f : (x, y) \mapsto \mathbb{R}$  y  $h : (x, y) \mapsto \mathbb{R}$  son funciones convexas (es decir que son convexas al separar a  $z$  en parte real e imaginaria) y  $g(x, y)$  es una función afín.

Como se mencionó en el capítulo uno, el espacio de la función objetivo debe ser un conjunto ordenado; por tal razón, la imagen de  $f$  debe estar sobre los reales. Lo mismo se aplica a  $h$  para que la desigualdad tenga sentido. La formulación compleja es, por ende, solo una representación del problema, la cual puede resultar conveniente en el momento de implementarla computacionalmente y de hacer análisis de los resultados. No obstante, la solución del modelo se realiza separando en parte real e imaginaria y, por consiguiente, el problema se soluciona en los reales. Es importante destacar que la mayoría de lenguajes modernos admiten una representación compleja de los problemas de optimización; no obstante, se deben cumplir las condiciones de la definición 11.1.

Antes de presentar la aplicación a los problemas de flujo de carga, presentaremos algunos conceptos asociados a la derivada de funciones complejas.

**Definición 11.2. Funcion holomorfas.** Una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en un punto  $z_0$ , si tiene derivada continuas al rededor de  $z_0$  dada por

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{11.2}$$

Esta definición es similar al caso de los reales; sin embargo, debemos tener en cuenta que existen múltiples direcciones para acercarse a  $z_0$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 11.1. Una función es holomorfa (o analítica sobre los complejos) si el límite es el mismo sin importar la dirección.

**Teorema 11.1.** Una función compleja  $f = u(x, y) + jv(x, y)$  es holomorfa si cumple las condiciones de Cauchy-Riemann [ver [34]], a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{11.3}$$

Una función que dependa tanto de  $z$  como de su conjugado no es analítica, ya que el conjugado dará direcciones opuestas en el momento de tomar el límite. Este es el caso de las ecuaciones de flujo de carga; por tanto, la linealización del flujo de carga se debe realizar usando una teoría matemática diferente, como se mostrará mas adelante.

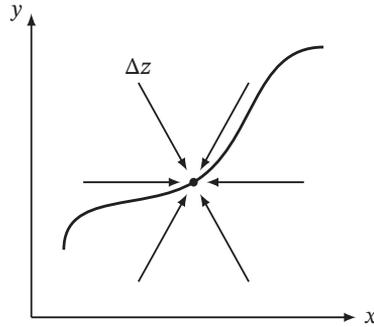


FIGURA NRO. 11.1. Diferentes direcciones para obtener  $\Delta z \rightarrow 0$  en el plano complejo.

## 11.2. Flujo de carga en redes de distribución

Como se mostró en la sección 10.3, el flujo de carga constituye el conjunto de ecuaciones algebraicas que modelan el estado estacionario de una red eléctrica. Analizaremos el caso de sistemas de distribución. Estos presentan ventajas en el modelo, las cuales permiten hacer algunas simplificaciones.

Considere una red de distribución representada como un grafo orientado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$ , en donde  $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  representa el conjunto de nodos del sistema, incluyendo el *slack*; el cual es representado por el subíndice 0, y  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  es el conjunto de enlaces. La siguiente expresión muestra la relación entre voltajes y corrientes nodales:

$$i_k = \sum_{m=0}^n y_{km} v_m, \quad \forall k \in \mathcal{N} \quad (11.4)$$

En esta,  $y$  representa la matriz de admitancias nodales. Esta ecuación es lineal y, por tanto, se transforma en una restricción afín cuando se separa en parte real e imaginaria. No obstante, los modelos de operación se encuentran dados en función de la potencia y no de la tensión, es decir, la ecuación 11.4 toma la siguiente estructura:

$$\left(\frac{s_k}{v_k}\right)^* = \sum_{m=0}^n y_{km} v_m, \quad \forall k \in \mathcal{N} \quad (11.5)$$

en donde el símbolo  $*$  representa el conjugado complejo y  $s_k$  es la potencia nodal. Este problema es claramente no lineal y genera una restricción no afín al momento de ser separado en parte real e imaginaria. De allí la necesidad de desarrollar aproximaciones convexas al problema.

### 11.3. Aproximación semidefinida

Antes de mostrar la aplicación de programación semidefinida en problemas de flujo de carga, consideremos un problema de optimización cuadrática con unas restricciones cuadráticas de igualdad, a saber:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Hx \\ & x^T Bx = 1 \end{aligned} \tag{11.6}$$

Este es evidentemente un problema no convexo. Sin embargo, podemos establecer una relajación semidefinida mediante el cambio de variable  $X = xx^T$  que se presentó en la sección 9.3, en donde  $X$  es ahora la variable de decisión<sup>1</sup>. Haciendo uso del Lema 9.1 establecemos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \text{tr}(HX) \\ & \text{tr}(BX) = 1 \\ & X \geq 0 \\ & \text{Rango}(X) = 1 \end{aligned} \tag{11.7}$$

En este punto, el problema es equivalente al problema original y, por tanto, es no convexo. La no convexidad se manifiesta en la restricción de rango 1. Después de relajar esta restricción, obtenemos un problema semidefinido que puede ser solucionado computacionalmente. Este tipo de relajaciones produce resultados precisos en muchas aplicaciones prácticas, como se mostró en el capítulo nueve.

Regresando al problema de flujo de carga, recordamos que las pérdidas corresponden a una función cuadrática y convexa debido a que la parte real de la matriz de admitancias nodales es semidefinida positiva. Sin embargo, las ecuaciones de flujo de carga son no afines y, por ende, requieren de una relajación convexa. Para ello, reescribimos el modelo con el fin de trabajar sobre el conjunto de los reales, expandiendo la ecuación 11.5 como sigue:

$$\begin{aligned} p_k - jq_k &= \sum_{m=0}^n (e_k - jf_k)(g_{km} + jb_{km})(e_m + jf_m) \\ p_k &= \sum_{m=0}^n g_{km}e_k e_m + g_{km}f_k f_m - b_{km}f_m e_k + b_{km}e_m f_k \\ -q_k &= \sum_{m=0}^n g_{km}f_k e_m - b_{km}e_m e_k + g_{km}e_m f_k - b_{km}f_m f_k \end{aligned} \tag{11.8}$$

<sup>1</sup>Como se puede observar,  $x^T x$  es un escalar; sin embargo,  $xx^T$  es una matriz cuadrada, tal que  $x_{km} = x_k x_m$ .

en donde  $s_k = p_k + jq_k$ ,  $v_k = e_k + jf_k$  y  $y_{km} = g_{km} + jb_{km}$ . Ahora, definimos nuevas variables, a saber:

$$\begin{aligned} E_{km} &= e_k e_m \\ F_{km} &= f_k f_m \\ Z_{km} &= e_k f_m - e_m f_k \end{aligned} \quad (11.9)$$

Dado lo anterior, el modelo completo de flujo de carga se puede reescribir de la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned} &\text{mín } \text{tr}(G(E + F)) \\ P_G - P_D &= \text{diag}(GE + GF - BZ) \\ -Q + Q_D &= \text{diag}(GZ + BE + BF) \\ 0 &= Z + Z^T \\ E_{00} &= 1 \\ F_{0k} = F_{k0} &= 0 \\ P_G &\leq P_{max} \\ P_G &\geq P_{min} \\ Q_G &\leq Q_{max} \\ Q_G &\geq Q_{min} \\ E &\geq 0 \\ F &\geq 0 \\ \text{rango}(E) &= 1 \\ \text{rango}(F) &= 1 \\ \text{rango}(Z) &= 2 \end{aligned} \quad (11.10)$$

Aquí, hemos descompuesto  $p$  y  $q$  para incluir tanto la generación como las demandas nodales. A su vez, este modelo se puede convexificar relajando las restricciones de tipo rango = 1. Esto da como resultando un problema de optimización semidefinida.

Las variables originales pueden ser recuperadas teniendo en cuenta que cada matriz semidefinida se puede factorizar de la siguiente forma:

$$X = \sum_{i=0}^n \lambda M_i M_i^T \quad (11.11)$$

Allí,  $\lambda_i$  son los eigenvalores y  $M_i$  sus correspondientes eigenvectores. La matriz de rango 1 que más se aproxima a  $X$  estará dada entonces por  $X \approx \lambda_0 M_0 M_0^T$  en donde  $\lambda_0$  es el máximo eigenvalor (el cual es positivo porque la matriz es semidefinida) y el vector  $x$ , tal que,  $X = xx^T$  estará dado por la siguiente relación:

$$x = \sqrt{\lambda_0} M_0 \quad (11.12)$$

en donde  $\|M_0\| = 1$ .

## 11.4. Aproximación cónica de segundo orden

Las aproximaciones SOC son una alternativa más eficiente computacionalmente para solucionar el problema de flujo de carga en sistemas de distribución radial. La formulación se basa en el flujo de potencia por las líneas, tal y como se muestra en la FIGURA NRO. 11.2

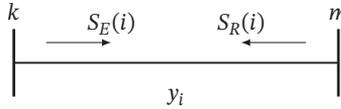


FIGURA NRO. 11.2. Flujo de carga en un tramo de línea de distribución.

En esta figura,  $i = (km)$  enumera las líneas o tramos de línea,  $y_i$  es la admitancia de la línea,  $S_F$  corresponde al flujo de potencia en el nodo de envío y  $S_E$  representa el flujo visto desde el nodo de recibo. Además, tenemos las siguientes relaciones de flujo en donde todas las variables están definidas sobre los complejos

$$\begin{aligned} S_{E(i)} &= v_k(y_i(v_k - v_m))^* \\ S_{R(i)} &= v_m(y_i(v_m - v_k))^* \end{aligned} \quad (11.13)$$

Ahora, definimos un nuevo conjunto de variables nodales  $u_k = \|v_k\|^2$  y variables de rama  $w_i = v_k v_m^*$ , las cuales nos generan el siguiente conjunto de ecuaciones afin

$$\begin{aligned} S_{E(i)} &= y_i^* u_k - w_i y_i^* \\ S_{R(i)} &= y_i^* u_m - w_i^* y_i^* \end{aligned} \quad (11.14)$$

Nótese que  $w_i$  es una variable real asociada a cada línea, mientras que  $u_k$  es real y se asocia a cada nodo. Luego, relacionamos estas dos variables, multiplicando la restricción no convexa por  $w_i^*$ , como sigue:

$$\begin{aligned} w_i &= v_k v_m^* \\ w_i w_i^* &= v_k v_m^* v_k^* v_m \\ \|w_i\|^2 &= \|v_k\|^2 \|v_m\|^2 \\ \|w_i\|^2 &= u_k u_m \end{aligned} \quad (11.15)$$

Después, relajamos la restricción para obtener un equivalente SOC usando la metodología mostrada en el capítulo seis, asociada a las restricciones hiperbólicas:

$$\begin{aligned} \|w_i\|^2 &\leq u_k u_m \\ \left\| \begin{pmatrix} 2w_i \\ u_k - u_m \end{pmatrix} \right\| &\leq u_k + u_m \end{aligned} \quad (11.16)$$

El modelo se completa con las ecuaciones de balance de energía nodal, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 & \min P_L \\
 & P_L \geq \text{real} \left( \sum_i S_{F(i)} + S_{R(i)} \right) \\
 & U_1 = 1 \\
 & S_{E(i)} = y_i^* u_k - w_i y_i^* \\
 & S_{R(i)} = y_i^* u_m - w_i^* y_i^* \quad (11.17) \\
 & S_G - S_D = A^+ S_E + A^- S_R \\
 & \|S_G\| \leq S_{max} \\
 & \left\| \begin{pmatrix} 2w_i \\ u_k - u_m \end{pmatrix} \right\| \leq u_k + u_m \\
 & \text{real}(S_E + S_R) \geq 0
 \end{aligned}$$

En esta,  $A^+$  son los términos positivos de la matriz de incidencia nodo-rama y  $A^-$  son los términos negativos. El modelo se puede completar incluyendo restricciones de cargabilidad de las líneas y potencia activa máxima, entre otras posibles variantes. Las variables originales se encuentran fácilmente a partir de  $u$  y  $w$ , así:

$$\begin{aligned}
 v_k &= \sqrt{u_k} \\
 \theta_{km} &= \text{angulo}(w_i), \text{ con } i = (km) \quad (11.18)
 \end{aligned}$$

Existen múltiples variantes a esta metodología, pero en todos los casos se parte de la aproximación hiperbólica de las restricciones no convexas<sup>2</sup>.

## 11.5. Linealización usando cálculo de Wirtinger

Otra forma de considerar las ecuaciones de flujo de carga es mediante una linealización realizada directamente sobre los complejos [36]. Para esto utilizamos el concepto de derivada de Wirtinger.

**Definición 11.3. Derivadas de Wirtinger.** Dada una función compleja  $f = u(x, y) + jv(x, y)$  con  $z = x + jy$ , definimos la derivada simple y la derivada conjugada de Wirtinger como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{j}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{j}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11.19)
 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En [35] se pueden encontrar más detalles.

Nótese que, aunque similares a las derivadas convencionales, los operadores de Wirtinger no son derivadas en el sentido de las condiciones de Cauchy-Riemann. Este tipo de operadores permiten analizar de forma directa las funciones no analíticas, como las que se presentan en el flujo de carga.

**Teorema 11.2.** Las derivadas de Wirtinger cumplen con las reglas comunes de diferenciación en relación a la suma, el producto y la composición de dos funciones (Ver [37]),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(f+g)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \\
 \frac{\partial(f+g)}{\partial z^*} &= \frac{\partial f}{\partial z^*} + \frac{\partial g}{\partial z^*} \\
 \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial z} &= f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \\
 \frac{\partial(f \cdot g)}{\partial z^*} &= f \frac{\partial g}{\partial z^*} + g \frac{\partial f}{\partial z^*}
 \end{aligned}
 \tag{11.20}$$

Además,  $z$  y  $z^*$  pueden considerarse constantes cuando hacemos la derivada respecto a la otra variable, como si se tratase de derivadas parciales.

$$\frac{\partial}{\partial z} z^* = \frac{\partial}{\partial z^*} z = 0
 \tag{11.21}$$

**Ejemplo 11.1.** Las condiciones del Teorema 11.2 se pueden demostrar fácilmente usando la Definición 11.3. Sea  $f(z) = kz$ , en donde  $k \in \mathbb{R}$  es una constante, las derivadas de Wirtinger son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial k(x+jy)}{\partial x} - j \frac{\partial k(x+jy)}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (k - j(jk)) = k
 \end{aligned}
 \tag{11.22}$$

De igual forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial k(x+jy)}{\partial x} + j \frac{\partial k(x+jy)}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (k + j(jk)) = 0
 \end{aligned}
 \tag{11.23}$$

■

**Ejemplo 11.2.** Consideremos la función  $f = \sqrt{zz^*}$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z^*}{2\sqrt{zz^*}} \\ \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{z}{2\sqrt{zz^*}}\end{aligned}\tag{11.24}$$

■

Las derivadas de Wirtinger pueden ser usadas en funciones analíticas y no analíticas, en el primer caso, podemos evidenciar directamente las condiciones de Cauchy-Riemman, como se formaliza en el siguiente teorema.

**Teorema 11.3.** Las condiciones de Cauchy-Riemman se pueden escribir en función de las derivadas de Wirtinger[38], de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0\tag{11.25}$$

Evidentemente, la ecuación 11.5 no cumple con esta condición y, por tanto, podemos concluir que la función es no analítica. Sin embargo, podemos establecer una linealización alrededor de un punto de operación determinado.

**Lema 11.1.** Dada una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  posiblemente no holomorfa, podemos establecer una linealización alrededor de un punto  $z_0$ , dada por:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial z^*} \Delta z^*\tag{11.26}$$

Esta es completamente equivalente a la linealización obtenida después de separar la función en parte real e imaginaria.

**DEMOSTRACIÓN.** Separamos a  $f$  como  $f = u(x, y) + jv(x, y)$  y aplicamos las definiciones de derivadas de Wirtinger, a saber:

$$\begin{aligned}u(x, y) + jv(x, y) &= u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{j}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\Delta u(x, y) + j\Delta v(x, y)) + \\ &\frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{j}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) (\Delta u(x, y) - j\Delta v(x, y))\end{aligned}\tag{11.27}$$

Esta se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= u(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y\end{aligned}\tag{11.28}$$

Esto corresponde a la linealización sobre los reales, separando la función en parte real e imaginaria.  $\square$

Como consecuencia de este resultado, la linealización de Wirtinger no es más que una forma conveniente de calcular la derivada directamente sobre los complejos. Además, es una expresión más simple a la hora de ser implementada en lenguajes como Matlab o Python, los cuales admiten variables complejas.

Ahora, aplicamos esta linealización a la ecuación 11.5 y obtenemos la siguiente ecuación:

$$S^* = HV_N^* + MV_N + T \quad (11.29)$$

en donde

$$\begin{aligned} H &= \text{diag}(Y_{N0} \cdot v_0) + \text{diag}(Y_{NN} \cdot V_{N0}) \\ M &= \text{diag}(V_{N0}^*) \cdot Y_{NN} \\ T &= -\text{diag}(V_{N0}) \cdot (Y_{NN} \cdot V_{N0}^*) \end{aligned} \quad (11.30)$$

Esta aproximación se decanta en una restricción afin que puede ser incluida en cualquier modelo de optimización convexa; por ejemplo, en el problema de flujo de carga óptimo, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \min \text{ real}([v_0, V]^H Y [v_0, V]) \\ S^* - S_D^* &= HV_N^* + MV_N + T \\ \|S_k\| &\leq S_{k(max)} \\ \|v_k - 1\| &\leq 0.1 \\ \text{real}(S_k) &\leq P_{k(max)} \end{aligned} \quad (11.31)$$

en donde  $S_{k(max)}$  es la capacidad de la máquina síncrona o convertidor  $k$  y  $P_{k(max)}$  es su máxima capacidad de generación de potencia activa.

## 11.6. Lecturas complementarias

Las aproximaciones convexas pueden ser usadas en diferentes modelos de operación, tales como el flujo de carga óptimo y el despacho económico. El uso de una u otra aproximación depende de la aplicación, del tiempo disponible para el cálculo y de la precisión esperada. La aproximación SDP suele ser más precisa que la cónica de segundo orden y esta, a su vez, suele ser más precisa que la linealización. Sin embargo, el tiempo computacional suele mejor en la versión lineal que en las demás versiones. Una presentación más formal tanto de la aproximación semidefinida como de la aproximación cónica de segundo orden puede encontrarse en [39], [40] y [41]. La formulación lineal del flujo en el caso trifásico y desbalanceado se encuentra en [36]. Otras linealizaciones disponibles en la literatura son [42], [43] y [44]. En particular, [45] presenta la aplicación de una de estas linealizaciones en el flujo de carga óptimo

para sistemas de distribución desbalanceados. Las redes DC también son sujetas a este tipo de análisis; por ejemplo, en [46], se presenta una linealización del flujo de carga tanto en redes DC multiterminal como en micro-redes DC; y en [47], se muestra la formulación secuencial de este problema.

## 11.7. Ejercicios

Considere un sistema de distribución cuyos parámetros se presentan en la TABLA NRO. 11.1 en donde todos los datos están dados por unidad y los valores de demanda y capacidad de generación están asociados al nodo de recibo.

Envío	Recibo	$r_{km}$	$x_{km}$	$p_D$	$q_D$	$s_{max}$
1	2	0.0045	0.0026	3.0	1.0	0
2	3	0.0034	0.0036	0	0	5.0
3	4	0.0020	0.0023	8.5	4.0	
4	5	0.0013	0.0008	0	0	2.0

**TABLA NRO. 11.1.** *Parámetros de un sistema de distribución.*

1. Calcule la matriz  $Y_{BUS}$  y demuestre que la parte real es semidefinida positiva.
2. Demostrar que la ecuación de pérdidas es convexa.
3. Calcular el flujo de carga óptimo usando una aproximación semidefinida.
4. Calcular el flujo de carga óptimo usando una aproximación cónica de segundo orden.
5. Calcular el flujo de carga óptimo usando una linealización de Wirtinger. Comparar con el resultado de los puntos anteriores en cuanto a precisión y tiempo de cálculo.

# 12

## CAPÍTULO DOCE

# DINÁMICA Y ESTABILIDAD DE SISTEMAS ELÉCTRICOS

*Los problemas de control son inherentes a la operación de sistemas de potencia, estos problemas pueden modelarse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales están sujetas a ser analizadas mediante la teoría de Lyapunov. Sin embargo, encontrar funciones de Lyapunov es un reto, incluso en problemas lineales. Este capítulo muestra el uso de herramientas de optimización convexa con el fin de encontrar este tipo de funciones.*

## **12.1. Dinámica en sistemas eléctricos**

Los sistemas de potencia deben funcionar constantemente, integrando una gran cantidad de componentes con diferentes tipos de dinámicas; esto implica una variedad de problemas de control y operación en tiempo real. Estos problemas son complejos, debido al elevado número de variables y a la interacción entre distintos subsistemas, más aún, en el caso de la integración de energías renovables y elementos de almacenamiento de energía. En esta sección presentaremos solo dos problemas básicos,

con modelos simplificados. No obstante, las técnicas a presentar en este capítulo son generales para problemas más complejos.

El principal elemento que añade dinámica a un sistema de potencia es la máquina síncrona, cuyo modelo simplificado se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} M \frac{d\omega}{dt} &= p_M - p_E(\delta) - \xi \Delta\omega \\ \frac{d\delta}{dt} &= \omega \end{aligned} \tag{12.1}$$

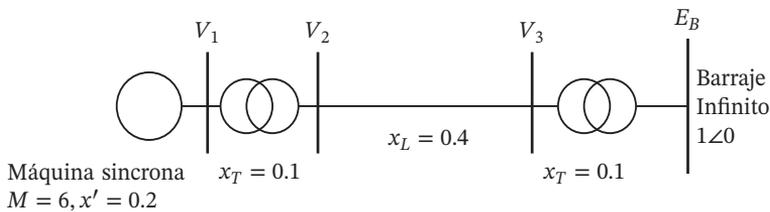
En la anterior ecuación,  $M$  es la constante de inercia,  $p_M$  es la potencia mecánica,  $p_E$  es la potencia eléctrica (la cual depende del ángulo del par),  $\xi$  es la constante de amortiguamiento y  $(\omega, \delta)$  son la frecuencia y el ángulo del par, respectivamente. En general, la potencia eléctrica es una función no lineal; sin embargo, es posible usar un modelo lineal para pequeñas variaciones de generación y demanda.

**Ejemplo 12.1.** Una máquina síncrona se conecta a un barraje infinito, como se muestra en la FIGURA NRO. 12.1, en donde las tensiones tanto del barraje como del generador son 1 pu. En este caso, la potencia eléctrica está dada por:

$$p_{\max} \text{sen}(\delta) \tag{12.2}$$

Su linealización permite un modelo de pequeña señal alrededor de un punto de operación  $(\omega_0, \delta_0)$ , como se muestra a continuación:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\xi/M & -p_{\max} \cos(\delta_0)/M \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\omega \\ \Delta\delta \end{pmatrix} \tag{12.3}$$



**FIGURA NRO. 12.1.** Ejemplo de una máquina síncrona conectada a un barraje infinito.



**Ejemplo 12.2.** La turbina, el gobernador de velocidad, la excitación y demás elementos de control añaden dinámica al sistema que se puede representar, en el caso

múltimáquina, como un sistema lineal de la siguiente forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (12.4)$$

Aquí,  $x$  son las variables de estado y  $u$  son las variables de control. El problema de control de área amplia consiste en determinar la forma de realimentar  $u$  con el fin de llevar al sistema a un punto estable deseado. ■

**Ejemplo 12.3.** Otro problema importante es el análisis de estabilidad en micro-redes DC. En este caso, consideramos una micro-red, representada por un grafo orientado  $\mathcal{G} = \{\mathcal{N}, \mathcal{E}\}$ , en donde  $\mathcal{N}$  es el conjunto de nodos del sistema y  $\mathcal{E} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  son los enlaces existentes. En su versión más simple, los cables son representados por el efecto resistivo y los convertidores por el efecto capacitivo más la inyección de potencia. De esta forma, la dinámica del sistema tiene la siguiente estructura:

$$c_k \frac{dv_k}{dt} = \frac{p_k - \xi_k(v_k - 1)}{v_k} - \sum_{m=1}^n g_{km} v_m \quad (12.5)$$

Allí,  $c_k$  es la capacitancia asociada al convertidor,  $p_k$  es la potencia generada o consumida,  $\xi$  es la constante del control primario y  $g_{km}$  es la matriz de admitancia nodal. ■

El análisis dinámico de sistemas de potencia consiste en determinar el punto de equilibrio del mismo y las condiciones para las cuales el sistema se mantiene estable. Esto se puede realizar mediante el cálculo de los eigenvalores en un estudio denominado estabilidad de pequeña señal. No obstante, la no linealidad inherente a los modelos hace necesario el uso de técnicas de estabilidad transitoria y, en particular, de la teoría de estabilidad de Lyapunov.

## 12.2. Análisis de sistemas dinámicos

Consideramos un sistema dinámico de la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (12.6)$$

en donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $\dot{x} = dt/xt$ ).

**Definición 12.1.** Un punto  $x_0$  es un equilibrio asociado al sistema dinámico 12.6, si  $f(x_0) = 0$ , además:

- Decimos que este punto es Lyapunov estable, si para  $\forall \epsilon > 0$  existe un  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , tal que si  $\|x(t) - x_0\| \leq \delta$  entonces  $\|x(t)\|, \forall t \geq 0$ .

- Decimos que el punto es asintóticamente estable, si es Lyapunov estable y además  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ .
- Finalmente, decimos que es inestable, si no es Lyapunov estable.

Informalmente, el sistema es estable en un punto  $x_0$ , si  $x(t)$  nunca evoluciona hacia infinito y se queda en una región  $\mathcal{B} \ni x_0$ . En el caso en que  $x \rightarrow x_0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , entonces decimos que es asintóticamente estable; finalmente, si se va hacia infinito entonces el sistema es inestable. La FIGURA NRO. 12.2 muestra estos tres casos.

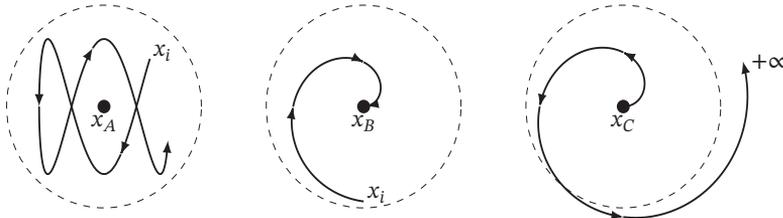


FIGURA NRO. 12.2. Estabilidad de un punto de equilibrio asociado a un sistema dinámico autónomo.

Una forma de analizar la estabilidad en un sistema dinámico es haciendo uso del teorema de Lyapunov, el cual presentamos en su forma más simple a continuación.

**Teorema 12.1.** Sea  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^n$  un conjunto y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable en todos los puntos de  $\mathcal{B}$  con  $f(x_0) = 0$  para un  $x_0 \in \mathcal{B}$ . Suponga que existe una función  $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  diferenciable en  $\mathcal{B}$  que satisface lo siguiente (ver [48] §2.9):

$$\begin{aligned}
 V(x_0) &= 0 \\
 V(x) &> 0, \quad \forall x \neq x_0 \\
 \dot{V}(x) &\leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{B}
 \end{aligned}
 \tag{12.7}$$

Entonces podemos decir que  $f$  es estable. Además, si  $\dot{V}(x) < 0$ , el sistema es asintóticamente estable.

Las condiciones asociadas a este teorema son suficientes pero no necesarias. Así pues, una función que no cumpla las tres condiciones no implica que el sistema sea inestable; en cambio, puede implicar que requerimos buscar otra función de Lyapunov.

Encontrar funciones Lyapunov es un reto desde el punto de vista teórico y práctico. En la mayoría de los casos, se recurre a la experiencia y la intuición física asociada al modelo. Otra forma de encontrar funciones de Lyapunov en problemas lineales y polinómicos es mediante el uso de optimización cónica como mostramos a continuación.

### 12.3. Inecuaciones matriciales

El uso de programación semidefinida en problemas de control lineal recibe el nombre de LMI (*linear matrix inequalities*). Esta es una herramienta muy versátil para diseñar controladores incluyendo restricciones y condiciones de optimalidad. En esta sección solo presentaremos ejemplos básicos.

**Ejemplo 12.4.** En el caso de un sistema lineal  $\dot{x} = Ax$  podemos usar una forma cuadrática como función de Lyapunov, a saber:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T H x \quad (12.8)$$

Esta cumple las dos primeras condiciones del teorema de Lyapunov para  $x_0 = 0$ , si  $H = H^T > 0$ . La tercera condición se puede determinar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T H \dot{x} + \dot{x}^T H x \\ &= x^T H A x + x^T A^T H x \\ &= x^T (H A + A^T H) x \leq 0 \\ \therefore H A + A^T H &\leq 0 \end{aligned} \quad (12.9)$$

Así que el problema asociado a encontrar una función de Lyapunov del sistema lineal  $\dot{x} = Ax$ , puede ser resuelto mediante el siguiente problema de factibilidad sobre un *spectraedro*.

$$\begin{aligned} H A + A^T H &\leq 0 \\ H &\geq 0 \end{aligned} \quad (12.10)$$

Si queremos una matriz  $H$  definida positiva (y no solo semidefinida) entonces podemos usar un valor  $\mu > 0$  constante que genere el siguiente conjunto convexo

$$\begin{aligned} H A + A^T H &\leq 0 \\ H &\geq \mu I \end{aligned} \quad (12.11)$$

En la anterior expresión,  $I$  es la matriz identidad. En caso de encontrar una solución factible entonces podemos afirmar que el sistema es asintóticamente estable. ■

**Ejemplo 12.5.** Queremos diseñar un control lineal de la forma  $u = Kx$  que establezca el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (12.12)$$

Para ello, definimos una función de Lyapunov cuadrática tal y como en el ejemplo

12.1. Conforme a lo anterior, encontramos el siguiente conjunto de restricciones:

$$\begin{aligned} H(A + BK) + (A + BK)^T H &\leq 0 \\ H &\geq \mu I \end{aligned} \quad (12.13)$$

Este sistema es no-convexo ya que tanto  $H$  como  $K$  son incógnitas. Para encontrar una representación convexa, premultiplicamos por  $Q = H^{-1}$  (aprovechando que  $H$  es definida positiva y, por tanto, tiene inversa) y definimos una nueva variable  $Y = KQ$ . Esto permitirá obtener el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} AQ + BY + QA^T + Y^T B^T &\leq 0 \\ Q &\geq \mu I \end{aligned} \quad (12.14)$$

Si existe una solución factible, esta puede ser determinada usando SDP. La matriz  $K$  se recupera fácilmente a partir de  $Q$  usando la definición. ■

**Ejemplo 12.6.** Consideremos ahora un sistema dinámico  $\dot{x} = Ax + Bu$  y un conjunto de condiciones iniciales  $x_0$  en el interior de un elipsoide, definido por

$$\mathcal{E}_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0^T Q^{-1} x_0 \leq 1, Q > 0\} \quad (12.15)$$

Ahora bien, si deseamos diseñar un control  $u = Kx$  que lleve el sistema a cero y que además, se mantenga restringido  $\|u\| \leq \mu$  para cualquier valor inicial dentro del elipsoide  $\mathcal{E}_0$ , entonces usamos el complemento de Shur para representar esta restricción de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & Q \end{pmatrix} \succ 0 \quad (12.16)$$

Luego, restringimos el control y obtendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \mu \\ (Kx)^T (Kx) &\leq \mu^2 \\ (YQ^{-1}x)^T (YQ^{-1}x) &\leq \mu^2 \\ x^T Q^{-1} Y^T Y Q^{-1} x &\leq \mu^2 \\ 1 - x^T \left( \frac{Q^{-1} Y^T Y Q^{-1}}{\mu^2} \right) x &\geq 0 \end{aligned} \quad (12.17)$$

Usamos nuevamente el complemento de Shur para obtener la siguiente restricción:

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & Z \end{pmatrix} \succ 0 \quad (12.18)$$

Con

$$Z = \left( \frac{Q^{-1}Y^T Y Q^{-1}}{\mu^2} \right)^{-1} \quad (12.19)$$

Este corresponde a un elipsoide que se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{E}_z = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0^T Z^{-1} x_0 \leq 1, Z > 0\} \quad (12.20)$$

Ahora queremos que  $\mathcal{E}_z \subseteq \mathcal{E}_0$ , de donde concluimos:

$$\begin{aligned} Q^{-1} &\geq Z^{-1} \\ Q^{-1} - \frac{Q^{-1}Y^T Y Q^{-1}}{\mu^2} &\geq 0 \\ \mu I - Y^T Y Q^{-1} &\geq 0 \\ \mu Q - Y^T Y &\geq 0 \\ \begin{pmatrix} Q & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} &> 0 \end{aligned} \quad (12.21)$$

Si añadimos esta última restricción, podemos asegurar que el control se encuentra restringido para cualquier condición inicial en el elipsoide  $\mathcal{E}_0$ . ■

## 12.4. Funciones de Lyapunov usando suma de polinomios cuadráticos

La técnica de SOS puede ser utilizada para generar función de Lyapunov en problemas polinómicos. Consideremos un sistema no-lineal en una variable

$$\dot{x} = p(x) \quad (12.22)$$

Aquí,  $p(x)$  es un polinomio con coeficientes reales. Ahora, definimos una función de Lyapunov  $V(x) = m(x)^T Q m(x) \in \text{SOS}$ , tal que  $V(0) = 0$ . De esta forma, cumplimos las dos primeras condiciones para garantizar estabilidad en el sentido de Lyapunov. En este punto, solo debemos comprobar que la derivada sea negativa, es decir:

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad (12.23)$$

Una forma de garantizarlo es haciendo que  $-\dot{V} \in \text{SOS}$ . Esto nos genera una serie de restricciones semidefinidas. El procedimiento es simplemente formular estas restricciones. En caso de encontrar una solución factible, podemos garantizar que el sistema sea estable.

**Ejemplo 12.7.** Analicemos la estabilidad del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - x^2y \\ \dot{y} &= -y + x^3 \end{aligned} \tag{12.24}$$

Para ello, proponemos una función de Lyapunov de forma  $V = m(x, y)^T Q m(x, y)$ , con

$$m(x, y) = (x^2, xy, y^2)^T \tag{12.25}$$

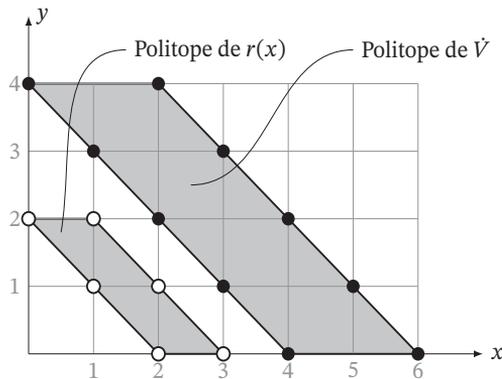
Esta resulta en el siguiente polinomio, evidentemente SOS, a saber:

$$V(x, y) = q_{11}x^4 + q_{33}y^4 + 2q_{12}x^3y + 2q_{23}xy^3 + 2q_{13}x^2y^2 + q_{22}x^2y^2 \tag{12.26}$$

cuya derivada está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2q_{12}x^6 - 4q_{11}x^4 - 4q_{33}y^4 - 8q_{12}x^3y - 4q_{11}x^5y + 4q_{13}x^5y \\ &\quad - 8q_{23}xy^3 + 2q_{22}x^5y - 8q_{13}x^2y^2 - 6q_{12}x^4y^2 - 4q_{13}x^3y^3 \\ &\quad - 4q_{22}x^2y^2 - 2q_{22}x^3y^3 - 2q_{23}x^2y^4 + 6q_{23}x^4y^2 + 4q_{33}x^3y^3 \end{aligned} \tag{12.27}$$

Es claro que la derivada forma un polinomio de orden mayor que  $V$ ; no obstante, el número de variables asociadas al problema de optimización sigue siendo igual ( $3 \times 3$  en este caso). El problema consiste entonces en determinar las restricciones del modelo y convertirlas en un polinomio de la forma  $\dot{V} = r(x, y)^T W r(x, y)$ . El politopo de Newton asociado se presenta en la FIGURA NRO. 12.3.



**FIGURA NRO. 12.3.** Politopo de Newton asociado a la derivada de  $V$ .

De este polinomio podemos determinar los monomios que necesitamos en  $r(x)$ , a saber:

$$r(x, y) = (x^2, x^3, x^2y, xy^2, y^2, xy)^T \tag{12.28}$$

Formulamos el sistema de restricciones equivalentes y las solucionamos mediante cvx. El resultado es

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.29)$$

Este resulta de la siguiente condición, a saber:

$$\dot{V} = -4(x^2 + y^2)^2 < 0 \quad (12.30)$$

Dado lo anterior, garantizamos que el punto  $(0, 0)$  es un equilibrio asintóticamente estable. ■

La mayoría de problemas cuadráticos están sujetos a ser analizados mediante esta simple metodología. El mayor reto está en la formulación del problema de optimización equivalente ya que el número de restricciones puede aumentar significativamente.

## 12.5. Estabilidad en sistemas gradientes

La dinámica de las micro-redes en DC pueden ser representadas por sistemas gradiente, como se demostró en [49]. En este caso, el uso de conceptos de optimización convexa garantizan no solo estabilidad sino la existencia del equilibrio. A continuación, mostraremos los principales teóricos al respecto.

**Definición 12.2. Sistema gradiente estrictamente convexos.** Decimos que un sistema dinámico es gradiente y estrictamente convexo, si su dinámica puede ser representada como

$$M(x) \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (12.31)$$

en donde  $M > 0$  y  $\phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa.

**Teorema 12.2.** Considere un sistema gradiente estrictamente convexo en un espacio  $\Omega$ , entonces podemos asegurar que existe un punto de equilibrio  $x_0 \in \Omega$  el cual es único. Además, este punto es asintóticamente estable.

**DEMOSTRACIÓN.** Primeramente, nótese que el equilibrio está dado por los puntos que cumplen la condición

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (12.32)$$

la cual corresponde al mínimo de la función  $\phi(x)$ . Este punto es el único mínimo global debido a que la función es estrictamente convexa.

Si  $\tilde{\phi}$  es el punto óptimo entonces podemos proponer la siguiente función, la cual cumple directamente las dos primeras condiciones del teorema de Lyapunov:

$$V(x) = \phi(x) - \tilde{\phi} \quad (12.33)$$

La tercera condición resulta de la siguiente forma:

$$\dot{V} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^T M(x)^{-1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) < 0 \quad (12.34)$$

Esta resulta en una función negativa. Cabe anotar que  $M(x) > 0$  y, por tanto, podemos garantizar que la inversa existe.  $\square$

**Ejemplo 12.8.** Consideremos una micro-red DC con dos terminales de potencia constante  $p_1$  y  $p_2$  y un terminal con tensión constante  $v_0$ . Los demás nodos fueron eliminados mediante la técnica de reducción de Kron, por lo que la matriz de admitancia nodal  $g_{km}$  es de tamaño  $3 \times 3$ . El modelo dinámico del sistema puede ser representado como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} c_1 \frac{dv_1}{dt} &= \frac{p_1}{v_1} - g_{10}v_0 - g_{11}v_1 - g_{12}v_2 \\ c_2 \frac{dv_2}{dt} &= \frac{p_2}{v_2} - g_{20}v_0 - g_{21}v_1 - g_{22}v_2 \end{aligned} \quad (12.35)$$

Este sistema tiene una estructura gradiente con  $M = \text{diag}(c_1, c_2) > 0$  y  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por:

$$\phi(v_1, v_2) = -p_1 \ln(v_1) - p_2 \ln(v_2) + g_{10}v_0v_1 + g_{20}v_0v_2 + \frac{1}{2}g_{11}v_1^2 + 2g_{12}v_1v_2 + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (12.36)$$

Así,  $v_0, p_1$  y  $p_2$  son constantes en el modelo. Esta función es fuertemente convexa siempre que su hessiana sea definida positiva, es decir,

$$\begin{pmatrix} p_1/v_1^2 & 0 \\ 0 & p_2/v_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (12.37)$$

Cabe anotar que la segunda matriz es semidefinida debido a las propiedades de la  $Y_{BUS}$ . Esto significa que el sistema es gradiente y fuertemente convexo si  $p_1 \geq 0$  y  $p_2 \geq 0$ , lo cual se ajusta a nuestra intuición del problema. De esta índole, esperamos que el sistema sea estable cuando la generación sea suficiente. En caso de que el sistema tenga cargas de potencia constante, entonces podemos generar un subespacio  $\Omega$  que cumpla con la condición 12.37. En este espacio, podemos garantizar existencia del equilibrio y la estabilidad transitoria.  $\blacksquare$

## 12.6. Lecturas complementarias

Existe una completa literatura en el uso de LMI en problemas de control de sistemas lineales. De hecho, gran parte del desarrollo de control robusto se debe al uso de esta herramienta. En [50] se presenta un resumen completo de la técnica, la cual ha sido utilizada en diferentes problemas de sistemas de potencia, por ejemplo, en el control de área amplia como se presenta en [51]. El uso de SOS para encontrar funciones de Lyapunov en sistemas polinómicos puede ser encontrado en [17] y el análisis de sistemas gradiente fuertemente convexos se presenta en [49].

## 12.7. Ejercicios

1. Diseñar un control lineal que establezca el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3u_1 - 4u_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_1 - x_2 - x_3 - 2u_1 + 4u_2 \\ \dot{x}_3 &= 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4u_1 + u_2 \end{aligned} \quad (12.38)$$

2. Mostrar el comportamiento dinámico del sistema en lazo cerrado usando la función ODE45 de Matlab para diferentes condiciones iniciales, tales que  $|x_0| < 2$ .
3. Demostrar estabilidad del siguiente sistema dinámico usando el criterio de Lyapunov. Usar una función polinomial SOS con  $p(x) = [x^2, y^2, xy, x, y]$ . Usar `cvx` para encontrar los coeficientes del polinomio correspondiente.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + x \cdot y \\ \dot{y} &= -x - x^2 \end{aligned} \quad (12.39)$$

RECOMENDACIÓN: usar `muPad` o `Maple` para evitar cálculos engorrosos.

4. Mostrar el comportamiento dinámico del sistema usando la función ODE45 de Matlab o su equivalente en Python.
5. Considere una red con tres nodos como la que se presentó en el ejemplo 11.8, cuya matriz de admitancia nodal está dada por

$$\begin{pmatrix} 132 & -79 & -49 \\ -79 & 151 & -64 \\ -49 & -69 & 124 \end{pmatrix} \quad (12.40)$$

Determine si el sistema es estable en los puntos de equilibrio, asociados a las siguientes potencias:

- $p_1 = 5, p_2 = 3$

- $p_1 = -5, p_2 = 3$
- $p_1 = 5, p_2 = -3$
- $p_1 = -5, p_2 = -3$

Determine la región de atracción en caso de ser estable.

# 13

## CAPÍTULO TRECE

# CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO

*Muchos problemas asociados a la operación de sistemas de potencia son en realidad problemas de control discreto, los cuales pueden ser solucionados mediante la técnica de control predictivo, basado en el modelo. Esta es una estrategia que aprovecha las propiedades de los problemas convexos para garantizar convergencia y unicidad del óptimo global, transformando el problema discreto de control en uno de optimización en tiempo real. Este capítulo muestra una breve introducción a la teoría básica de control predictivo y presenta algunas aplicaciones en la operación de sistemas de potencia.*

## **13.1. La estrategia de *receding horizon***

Cualquier problema de control puede ser discretizado en el tiempo para obtener un modelo con la siguiente estructura:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), \rho(k)) \quad (13.1)$$

Allí,  $x$  corresponde a las variables de estado;  $u$ , a las variables de control; y  $\rho$ , a los parámetros y entradas externas del sistema. Nuestro objetivo es llevar a  $x(t) \rightarrow x_{ref}$

y para ello convertimos el problema de control en uno de optimización sobre un horizonte de tiempo  $T$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 13.1. La idea básica detrás del control predictivo se denomina *receding horizon* y consiste en cerrar el lazo de control, ejecutando la acción  $u(k)$  en el instante  $k$  y recalculando el modelo con la nueva predicción en la ventana  $[k + 1, k + 1 + T]$ .

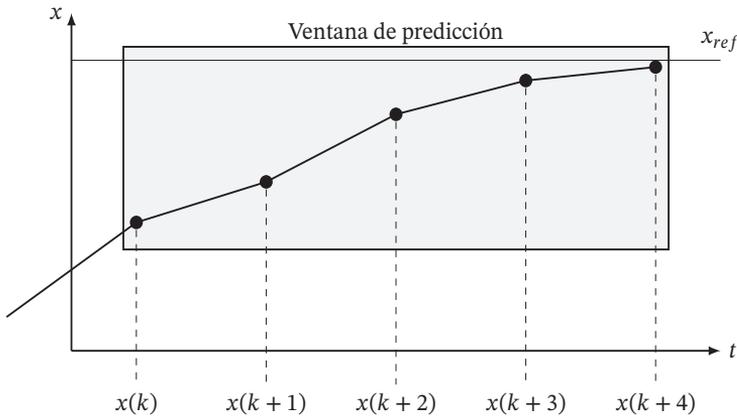


FIGURA NRO. 13.1. Esquema básico de la estrategia de receding horizon.

El esquema completo se muestra en la FIGURA NRO. 13.2, en donde se toman mediciones del sistema real, las cuales son utilizadas para generar una predicción de los parámetros futuros del sistema. Esta predicción se realiza sobre una ventana de tiempo igual a la ventana del proceso de optimización, en donde se determinan las variables de control  $u(k)$ . La principal característica del control predictivo basado en el modelo, es que la predicción se hace con el mismo modelo del sistema, es decir, con la ecuación 13.1. No obstante, la estrategia de *receding horizon* puede ser usada en un contexto más amplio. Por ejemplo, podemos considerar un problema de operación de un sistema con alta penetración de generación eólica y solar fotovoltaica. En este caso, podemos integrar diferentes elementos, presentados en el capítulo nueve, en donde la medición se realiza por medio de un estimador de estado y la optimización por medio de un despacho económico. La etapa de predicción se puede realizar mediante cualquier técnica inteligente como redes neuronales o mediante modelos auto-regresivos.

Una ventaja de este acercamiento a los problemas operativos consiste en que podemos aprovechar las ventajas de los modelos de optimización convexa en cada una de las etapas. Por ejemplo, el modelo de optimización, al ser convexo, puede garantizar unicidad en la solución y convergencia en tiempo real. Igualmente, puede incluir restricciones estocásticas o de robustez, las cuales permiten tener en cuenta la variabilidad del recurso primario y de la demanda. Igualmente, la estimación y la predicción puede realizarse mediante modelos de optimización convexa; principalmente, mediante el método de mínimos cuadrados. Cada uno de estos problemas se presentaron en el capítulo nueve. Por tanto, en lo que resta de este

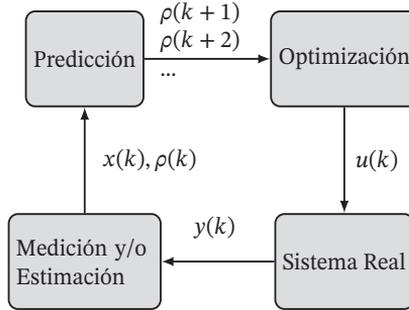


FIGURA NRO. 13.2. Metodología de receding horizon.

capítulo, nos concentraremos en el caso de control predictivo lineal, donde la etapa de predicción y de optimización se realizan con un mismo modelo lineal.

### 13.2. Control predictivo basado en el modelo

En este caso, estamos interesados en encontrar un control para el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (13.2)$$

en donde cada  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  y las matrices  $A, B, C$  tienen las dimensiones adecuadas.

El objetivo de control es hacer que  $y \rightarrow y_{ref}$ , en donde  $y_{ref}$  es una referencia determinada, la cual puede depender del tiempo (problema de *tracking*). La idea básica del control predictivo, basado en el modelo (MPC), es resolver el siguiente problema de optimización en un horizonte finito  $N$ , como se mostró en la FIGURA NRO. 13.1,

$$J(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=k+1}^{k+N-1} (y(k+m) - r(k+m))^T (y(k+m) - r(k+m)) + u(k+m)^T Q u(k+m) \quad (13.3)$$

En esta ecuación, tenemos que  $Q \geq 0$ . Hasta este punto, se trata de un control en lazo abierto. Sin embargo, ejecutamos solamente la acción de control  $u(k)$  y recalculamos el problema de optimización para el instante  $k+1$  usando la idea de *receding horizon*. El problema de optimización resultante es de programación cuadrática y, por tanto, convexo.

En general, podemos representar el problema de optimización en un horizonte

finito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ &\vdots \\ x(k+N) &= Ax(k+N-1) + Bu(k+N-1) \end{aligned} \quad (13.4)$$

Por ejemplo, para un horizonte  $N = 5$ , tendríamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ x(k+2) &= A(Ax(k) + Bu(k)) + Bu(1) = A^2x(k) + ABu(k) + Bu(k+1) \\ &\vdots \\ x(k+5) &= A^5x(k) + A^4Bu(k) + A^3Bu(k+1) + \\ &\quad A^2Bu(k+2) + ABu(k+3) + Bu(k+4) \end{aligned} \quad (13.5)$$

En forma matricial, tenemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \\ x(k+3) \\ x(k+4) \\ x(k+5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ A^4 \\ A^5 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ AB & B & 0 & 0 & 0 \\ A^2B & AB & B & 0 & 0 \\ A^3B & A^2B & AB & B & 0 \\ A^4B & A^3B & A^2B & AB & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ u(k+3) \\ u(k+4) \end{pmatrix} \quad (13.6)$$

Cabe recordar que cada  $x$  es en realidad un vector  $y$ , por tanto, la matriz puede resultar de grandes dimensiones. Ahora, podemos relacionar las salidas  $y$  con las entradas  $u$ , como sigue:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ y(k+3) \\ y(k+4) \\ y(k+5) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \end{pmatrix} x(k) + \\ &\begin{pmatrix} CB & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & 0 \\ CA^2B & CAB & CB & 0 & 0 \\ CA^3B & CA^2B & CAB & CB & 0 \\ CA^4B & CA^3B & CA^2B & CAB & CB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ u(k+3) \\ u(k+4) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Lo anterior, se podría escribir en forma compacta, de la siguiente forma:

$$Y = [F]X_m + [G]U \quad (13.8)$$

en donde  $Y = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+N)]^T$ ,  $U = [u(k), u(k+1), \dots, u(k+N-1)]^T$  y  $X_m$  son los estados medidos en la iteración actual. Definimos ahora  $R = [y_{ref}(k +$

1),  $y_{ref}(k+2), \dots, y_{ref}(k+N)$ ] y  $W = [u_{ref}(k+1), u_{ref}(k+2), \dots, u_{ref}(k+N)]$ ; por consiguiente, el problema de optimización resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min J(k) &= \frac{1}{2}(R - Y)^T(R - Y) + \frac{1}{2}(U - W)^T Q(U - W) \\ Y &= FX_m + GU \end{aligned} \quad (13.9)$$

Claramente, este corresponde a un problema de optimización convexa. Ahora, la principal ventaja de MPC es la posibilidad de incluir restricciones de desigualdad de la forma  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  y  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ , las cuales son también convexas.

**Ejemplo 13.1.** Queremos determinar el valor de  $u_{ref}$  a partir de  $y_{ref}$ . Para ello, partimos de la ecuación en el punto de equilibrio, a saber:

$$x_{ref} = Ax_{ref} + Bu_{ref} \quad (13.10)$$

Luego, reorganizamos la ecuación y multiplicamos por  $C$  para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{ref} &= Ax_{ref} + Bu_{ref} \\ (I - A)x_{ref} &= Bu_{ref} \\ x_{ref} &= (I - A)^{-1}Bu_{ref} \\ Cx_{ref} &= C(I - A)^{-1}Bu_{ref} \\ (C(I - A)^{-1}B)^{-1}y_{ref} &= u_{ref} \end{aligned} \quad (13.11)$$

De esta forma, obtenemos  $U$  y  $W$ , supeditados a que sus inversas existan<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} R &= I_N \otimes y_{ref} \\ U &= I_N \otimes u_{ref} \end{aligned} \quad (13.12)$$

donde  $I_N$  es la matriz unitaria de tamaño  $N$  (i.e el horizonte de predicción) y  $\otimes$  es el producto de Kronecker. ■

**Ejemplo 13.2.** Deseamos solucionar el problema de optimización asociado a MPC sin considerar restricciones de desigualdad. Para ello, planteamos el siguiente lagrangeano:

$$\mathcal{L}(Y, U, \lambda) = \frac{1}{2}(R - Y)^T(R - Y) + \frac{1}{2}(U - W)^T Q(U - W) + \lambda^T(FX_m + GU - Y) \quad (13.13)$$

Este presenta las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned} R - Y + \lambda &= 0 \\ QU - QW + G^T \lambda &= 0 \\ FX_m + GU - Y &= 0 \end{aligned} \quad (13.14)$$

<sup>1</sup>Si la matriz  $C(I - A)^{-1}B$  existe y no es singular entonces el sistema puede tener una realización mínima y, por tanto, es controlable y observable.

Ahora, podemos simplificar el control, como sigue:

$$U = (G^T G + Q)^{-1} (QW + G^T R - G^T F X_m) \quad (13.15)$$

Cabe recordar que en este resultado solo tomamos los primeros elementos del vector  $U$ , los cuales corresponden al control que ejecutaremos en la iteración actual. ■

### 13.3. Modelo incremental con acción integral

Una acción integral sobre el modelo dinámico puede mejorar la respuesta del sistema, disminuyendo el error de estado estable y rechazando posibles ruidos en las señales de entrada. Estos ruidos son comunes en aplicaciones de electrónica de potencia debido a la conmutación de los convertidores. Consideremos el siguiente sistema discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (13.16)$$

En este momento, definimos  $\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$ , ya que el modelo toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) + Bu(k-1) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (13.17)$$

Ahora, incluimos una acción integral sobre este modelo precisando  $z(k) = u(k-1)$  y aumentando el modelo, como sigue:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B\Delta u(k) + Bz(k) \\ z(k+1) &= z(k) + \Delta u(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (13.18)$$

de donde obtenemos un nuevo sistema dinámico, de la forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ I \end{pmatrix} \Delta u(k) \\ y(k) &= (C \ 0) \begin{pmatrix} x(k) \\ z(k) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13.19)$$

El problema de optimización en un horizonte de predicción  $N$  es similar al caso anterior, a saber:

$$\begin{aligned} \min J(k) &= \frac{1}{2} (R - Y)^T P (R - Y) + \frac{1}{2} \Delta u^T Q \Delta u \\ Y &= Fx_m + G\Delta u \end{aligned} \quad (13.20)$$

Este último posee las siguientes condiciones de optimalidad:

$$\begin{aligned} PY - PR - \lambda &= 0 \\ Q\Delta u + G^T\lambda &= 0 \\ Fx_m + G\Delta u - Y &= 0 \end{aligned} \quad (13.21)$$

de donde obtenemos el siguiente control:

$$\Delta u = (G^T P G + Q)^{-1} G^T P (R - F x_m) \quad (13.22)$$

con  $R = I_N \otimes y_{ref}$ .

### 13.4. Análisis de estabilidad

La estabilidad de un sistema lineal puede ser fácilmente analizada considerando la teoría de punto fijo. Tendremos presente un sistema lineal de la siguiente forma:

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (13.23)$$

Un punto de equilibrio de este sistema corresponde al punto fijo del mapa  $T(x) = Ax$ .

**Teorema 13.1.** El sistema lineal dado por 13.23 es estable si  $\|A\| \leq 1$ .

Sin embargo, el MPC es un control no lineal y, por tanto, necesitamos analizar la estabilidad del sistema discreto,

$$x(k+1) = f(x(k)) \quad (13.24)$$

con  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuo y  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ . Usamos entonces la teoría de Lyapunov.

**Teorema 13.2. Teorema de Lyapunov para sistemas discretos.** Considere el sistema discreto 13.24 y asuma que existe una función  $V : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que:

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \\ V(x) &\geq 0, \forall x \in \mathcal{D}, x \neq 0 \\ V(f(x)) - V(x) &\leq 0, \forall x \in \mathcal{D} \end{aligned} \quad (13.25)$$

Entonces, el punto  $x_k = 0$  es estable en el sentido de Lyapunov. Además, si la función de Lyapunov es tal que  $V(f(x)) - V(x) < 0$  entonces el sistema es asintóticamente estable.

Usaremos este teorema para analizar la estabilidad del MPC bajo condiciones ideales, esto significa que el modelo de predicción es exacto. Consideremos dos

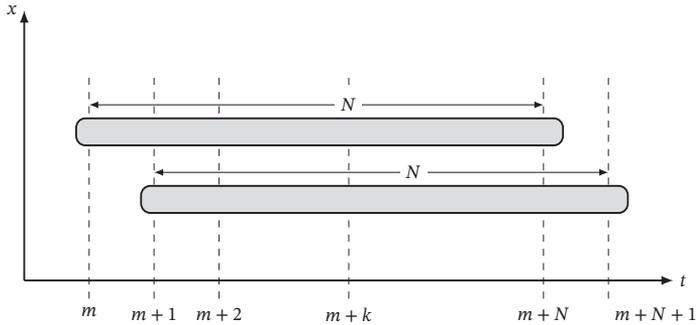


FIGURA NRO. 13.3. Estrategia de receding horizon.

iteraciones arbitrarias  $m$  y  $m + 1$  con sus respectivos horizontes de tiempo, como se muestra en la FIGURA NRO. 13.3. Por facilidad, asumimos que todos los estados son medibles, es decir,  $Y = X$  y la función objetivo  $V$  se puede separar a lo largo del horizonte de control, de la siguiente forma:

$$V(m) = \min J(m + 1) + J(m + 2) + \dots + J(m + N) \quad (13.26)$$

En la siguiente iteración tenemos

$$V(m + 1) = \min J(m + 2) + J(m + 3) + \dots + J(m + N) + J(m + N + 1) \quad (13.27)$$

La función  $V$  cumple las dos primeras condiciones para ser una función de Lyapunov, veamos si cumple la tercera condición:

$$V(m + 1) - V(m) = J(m + N + 1) - J(m + 1) \quad (13.28)$$

Esta resta es negativa si  $J(m + N + 1) = 0$ , ya que  $J > 0$  por lo tanto, añadimos una restricción adicional en el problema de optimización, de tal forma que en el último punto del horizonte de predicción el valor se haga cero, entonces

$$V(m + 1) \leq V(m) - J(x(m), \Delta u(m)) < V(m) \quad (13.29)$$

Usando el teorema de Lyapunov para sistemas discretos, podemos concluir que el sistema es estable. El problema de optimización resultante en la iteración  $m$  es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min V(m) &= \sum_{k=1}^N J(x(m+k), \Delta u(m+k)) \\ X &= Fx_m + G\Delta u \\ x(m+N) &= 0 \end{aligned} \quad (13.30)$$

La única dificultad consiste en garantizar que el problema de optimización sea factible. Si el problema es factible entonces podemos asegurar estabilidad en el sentido de Lyapunov.

### 13.5. Lecturas complementarias

Existe una literatura amplia sobre control predictivo, basado en el modelo. Gran parte del material presentado en este capítulo está inspirado en el trabajo de [52], en donde se da una mirada completa al problema lineal incluyendo restricciones, análisis de estabilidad y acción integral. Una revisión actualizada tanto de la teoría como de las aplicaciones se presenta en [53], mientras que en [54] se analiza el caso de MPC con un solo paso de predicción, un enfoque común en aplicaciones de electrónica de potencia.

### 13.6. Ejercicios

Considere un sistema discreto con matrices  $A$  y  $B$ , dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} -0.1357 & 0.3715 & 0.4748 \\ 0.0323 & -0.1713 & -0.4240 \\ 0.2117 & 0.1501 & 0.0870 \end{pmatrix} \quad (13.31)$$

$$B = \begin{pmatrix} -0.0861 & 0.2588 & 0.2811 \\ -0.1909 & 0.4952 & -0.3042 \\ -0.2362 & -0.3134 & 0.4924 \end{pmatrix} \quad (13.32)$$

Asuma que todas las variables pueden ser medidas directamente.

1. Diseñar una estrategia de control predictivo considerando diferentes horizontes de predicción. Analizar el comportamiento dinámico en cada caso.
2. Diseñar ahora una estrategia de control predictivo incluyendo acción integral. Mostrar la respuesta en el tiempo para diferentes horizontes de predicción.
3. Considere ahora el caso en que  $\|\Delta u\| \leq 1$ .
4. Analizar la estabilidad del sistema.
5. Analizar la respuesta del sistema considerando diferentes factores de peso. Ofrecer una conclusión.

## **CUARTA PARTE**

### **ALGORITMOS DE SOLUCIÓN**

# 14

## CAPÍTULO CATORCE

# MÉTODO DEL GRADIENTE

ptos preliminares

*En este capítulo, se presenta el método del gradiente para la solución de problemas convexos sin restricciones. Aunque existen múltiples variantes del método, estudiaremos únicamente la versión básica pues esta es suficiente en problemas prácticos. Así mismo, presentamos algunas propiedades que permiten garantizar convergencia.*

## 14.1. Conceptos preliminares

Antes de analizar los algoritmos de optimización para problemas sin restricciones, recordemos algunos conceptos básicos de cálculo diferencial e integral.

**Teorema 14.1. Teorema del valor medio.** Consideremos una función diferenciable  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y un segmento  $\Gamma = [x_A, x_B] \in \Omega$ , entonces debe existir un punto  $x_C$ , tal que

$$f(x_B) - f(x_A) = \nabla f(x_C)^T (x_A - x_B) \quad (14.1)$$

Bajo estas condiciones, tenemos que

$$|f(x_A) - f(x_B)| \leq \left( \sup_{x_C \in \Gamma} \|\nabla f(x_C)\| \right) \|x_A - x_B\| \quad (14.2)$$

**Teorema 14.2. Teorema fundamental del cálculo.** La integral de línea de un campo gradiente es independiente de la trayectoria, es decir,

$$\int_{x_A}^{x_B} \nabla f(x)^T dl(x) = f(x_A) - f(x_B) \quad (14.3)$$

Una consecuencia de este último teorema es que, para una trayectoria lineal entre los puntos  $x$  y  $y$ , tenemos lo siguiente:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \nabla f(x + t(y-x))^T (y-x) dt \quad (14.4)$$

**Definición 14.1. [Condición de Lipschitz.** Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz continua si para cualquier par de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $y \in \mathbb{R}^n$ , se cumple que:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \gamma \|x - y\| \quad (14.5)$$

en donde  $\gamma$  es una constante positiva.

**Ejemplo 14.1.** Algunas funciones Lipschitz continuas son:

- Una función afín  $f(x) = Ax - b$  porque  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|A\| \|x - y\|$ .
- La función  $f(x) = x^2$  en el intervalo  $[-2, 2]$ , ya que  $\|f(x) - f(y)\| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| \leq 4|x-y|$  para cualquier par de puntos, tal que en  $[-2, 2]$ . En este caso, decimos que la función es localmente Lipschitz continua. Además, se puede notar que la función podría tener otra constante  $\gamma$  diferente.
- $f(x) = -\ln(x)$  es Lipschitz continua, para comprobarlo, podemos hacer uso del teorema del valor medio.



## 14.2. Método del gradiente

Estamos interesados en dar solución al siguiente problema de optimización sin restricciones:

$$\text{mín } f(x) \quad (14.6)$$

en donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa, continua y diferenciable. Es claro que el óptimo se obtiene cuando el gradiente de  $f$  es 0 y, por tanto, resulta lógico definir el siguiente algoritmo que llamaremos *método del gradiente*:

$$x^{k+1} = x^k - t^k \nabla f(x^k) \quad (14.7)$$

En este, el superíndice denota la iteración,  $\nabla f(x^k)$  es el gradiente de la función evaluada en el punto  $x^k$  (de ahí el nombre del método) y  $t^k$  es un paso que se puede elegir con diferentes criterios; algunos de ellos heurísticos, que dan origen a diferentes versiones del método. Consideremos inicialmente cuatro posibles estrategias:

1. Paso constante: en esta estrategia, se selecciona un valor fijo de  $t^k = t^0$  para todas las iteraciones.
2. Paso variable: en esta estrategia, podemos cambiar el paso mediante una regla heurística, por ejemplo,

$$t^k = t^0 / \sqrt{k+1} \quad (14.8)$$

3. Paso óptimo: en esta estrategia, definimos un proceso de optimización en una variable como

$$t^k = \underset{t}{\operatorname{argmin}} \{f(x^k - t \nabla f(x^k))\} \quad (14.9)$$

4. *Backtracking*: esta estrategia es similar a la de paso óptimo, aunque con una estructura más simple. Escogemos un valor de  $t_0$  (por ejemplo,  $t^0 = 1$ ) y reducimos iterativamente el valor  $t^k$  hasta que

$$f(x^{k+1}) < f(x^k) - \alpha t^k \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad (14.10)$$

El paso tiene un efecto importante en la convergencia del método del gradiente ya que un paso muy pequeño puede hacer que la convergencia sea lenta mientras que un paso grande puede generar oscilaciones e incluso incremento en la función objetivo. El valor de  $t_k$  depende por tanto del tipo de problema; sin embargo, podemos definir valores genéricos en casos particulares, por ejemplo, cuando el gradiente de la función es Lipschitz continua y cuando además es fuertemente convexa.

**Ejemplo 14.2.** Consideremos el siguiente problema de optimización en  $\mathbb{R}^2$ , a saber:

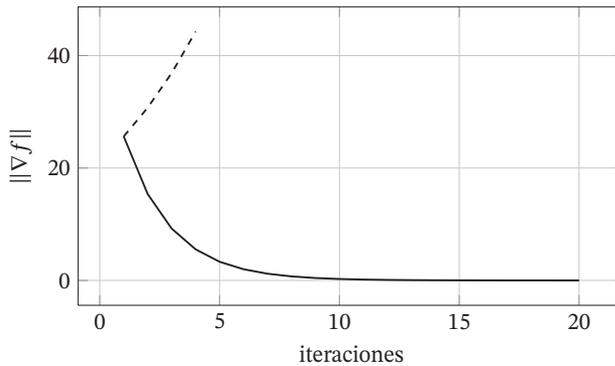
$$\min f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 8)^2 \quad (14.11)$$

Su óptimo es evidentemente (10, 8). Sin embargo, queremos usar el método del gradiente para encontrar este punto, partiendo de una aproximación inicial  $x = (0, 0)$ . En ese caso, el paso del algoritmo está dado por

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2(x_1^k - 10) \\ 2(x_2^k - 8) \end{pmatrix} \quad (14.12)$$

donde  $k$  representa la iteración y  $t$  es el paso fijo del método.

Usamos diferentes pasos para analizar la tasa de convergencia. La FIGURA NRO. 14.1 muestra la convergencia del algoritmo en dos casos:  $t = 0.8$  y  $t = 1.1$ . La línea



**FIGURA NRO. 14.1.** Convergencia del método del gradiente para  $f(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^2 + (x_2 - 8)^2$ .

sólida corresponde a  $t = 0.8$  mientras que la línea punteada corresponde a  $t = 1.1$ . En el primer caso converge al óptimo mientras que en el segundo diverge.

Podemos observar la importancia de elegir adecuadamente el paso del algoritmo, ya que un paso muy grande puede ocasionar divergencia y un paso pequeño puede hacer que el número de iteraciones aumente significativamente.

A continuación, se presenta el código en Python<sup>1</sup>. Se invita al estudiante a tomar este ejemplo como base e implementar otros problemas de optimización sin restricciones. Es importante evitar el uso de paquetes de variables simbólicas para calcular el gradiente. Es preferible calcular el gradiente manualmente e implementarlo como una función con el fin de reducir el tiempo computacional, asociado a calcular el gradiente simbólicamente.

```
import numpy as np

def grad(x):
    dx0 = 2*(x[0]-10)
    dx1 = 2*(x[1]-8)
    return np.array([dx0,dx1])

x = np.array([0,0]) # punto inicial
t = 0.8           # paso
for k in range(20):
    g = grad(x)
    x = x - g*t
    print(np.linalg.norm(g))
```

<sup>1</sup>Es importante tener en cuenta que los vectores de Python inician en cero y, por tanto,  $x[0]$  corresponde a  $x_1$  y  $x[1]$  corresponde a  $x_2$

En las siguientes secciones, presentaremos algunos métodos para establecer el paso de algoritmo y garantizar convergencia. Estos métodos son solo una introducción al problema, ya que existe una amplia literatura al respecto. En particular, estamos interesados en análisis generales que puedan servir para cualquier tipo de función convexa con el mínimo de propiedades adicionales.

### 14.2.1. Funciones con gradiente Lipschitz

Para analizar la convergencia del método del gradiente, necesitamos primero algunas propiedades asociadas a las funciones continuas con gradiente Lipschitz.

**Teorema 14.3.** Una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa y de clase  $C^1$  cuyo gradiente sea  $\gamma$ -Lipschitz continuo cumple las siguientes desigualdades para cualquier par de puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

$$0 \leq f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x) \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2 \quad (14.13)$$

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{1}{2\gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \quad (14.14)$$

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T(x - y) \geq \frac{1}{\gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \quad (14.15)$$

DEMOSTRACIÓN. La parte izquierda de la desigualdad 14.13 corresponde a las condiciones de primer orden, presentadas en el capítulo cuatro, Teorema 4.1. Solo necesitamos entonces demostrar la parte derecha. Para ello, partimos de una aplicación directa de las propiedades de la norma

$$f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x) \leq \|f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x)\| \quad (14.16)$$

Ahora, usamos la expresión 14.4 y observamos que,

$$\begin{aligned} & \|f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T(y - x)\| = \\ & \left\| \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x))^T(y - x) dt - \nabla f(x)^T(y - x) \int_0^1 dt \right\| \\ & = \left\| \int_0^1 \nabla f(x + t(y - x))^T(y - x) - \nabla f(x)^T(y - x) dt \right\| \quad (14.17) \\ & \leq \int_0^1 \|\nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x)\| \|x - y\| dt \leq \int_0^1 t\gamma \|x - y\|^2 dt \\ & \leq \frac{\gamma}{2} \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Dado lo anterior, queda demostrada la primera desigualdad.

Para la segunda desigualdad, definimos una nueva función  $\phi(y) = f(y) - \nabla f(x)^T y$ , la cual es convexa si  $f$  es convexa (la función solo depende de  $y$ , así que, para un valor fijo de  $x$ , el término  $\nabla f(x)^T y$  es una función afín). Además,  $\nabla \phi(x)$  es Lipschitz si  $\nabla f(x)$  también lo es. En vista de estas propiedades, tomamos dos puntos arbitrarios  $x$  y  $y$  tal que  $y - x = 1/\gamma \nabla \phi(y)$  y aplicamos la desigualdad 14.13.

$$\begin{aligned}
 \phi(x) - \phi(y) - \nabla \phi(y)^T (x - y) &\leq \frac{\gamma}{2} \|y - x\|^2 \\
 \phi(x) - \phi(y) + \frac{1}{\gamma} \nabla \phi(y)^T \nabla \phi(y) &\leq \frac{\gamma}{2} \left\| \frac{1}{\gamma} \nabla \phi(y) \right\|^2 \\
 \phi(x) &\leq \phi(y) - \frac{1}{2\gamma} \|\nabla \phi(y)\|^2 \\
 f(x) - \nabla f(x)^T x &\leq f(y) - \nabla f(x)^T y - \frac{1}{2\gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2
 \end{aligned} \tag{14.18}$$

Esta corresponde a la segunda desigualdad. Ahora, intercambiamos los puntos  $x, y$  y sumamos los resultados, a saber:

$$\begin{aligned}
 f(x) - \nabla f(x)^T x &\leq f(y) - \nabla f(x)^T y - \frac{1}{2\gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 \\
 f(y) - \nabla f(y)^T y &\leq f(x) - \nabla f(y)^T x - \frac{1}{2\gamma} \|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|^2 \\
 \therefore (\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) &\geq \frac{1}{\gamma} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2
 \end{aligned} \tag{14.19}$$

Con lo anterior, queda demostrada la tercera desigualdad. □

Usando estas propiedades, podemos analizar la convergencia del método del gradiente.

**Teorema 14.4.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función convexa con gradiente  $\gamma$ -Lipschitz entonces el algoritmo del gradiente tiene un límite superior cuadrático dado por

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \beta \|\nabla f(x^k)\|^2 \tag{14.20}$$

con un paso óptimo  $t = 1/\gamma$  y  $\beta = 1/2\gamma$ .

DEMOSTRACIÓN. Usamos el resultado presentado en la ecuación 14.13 en dos puntos

consecutivos del método  $y = x^{k+1}$  y  $x = x^k$ , a saber:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) - f(x^k) - \nabla f(x^k)^T (x^{k+1} - x^k) &\leq \frac{\gamma}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x^{k+1} - x^k) + \frac{\gamma}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (-t \nabla f(x^k)) + \frac{\gamma(t^2)}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \left( \frac{\gamma(t^2)}{2} - t \right) \|\nabla f(x^k)\|^2
 \end{aligned} \tag{14.21}$$

Luego, definimos  $\beta = -\gamma t^2/2 + t$  el cual tiene un máximo en  $t = 1/\gamma$  con un valor  $\beta = 1/2\gamma$ . Con este valor, podemos asegurar que  $f(x^{k+1})$  es siempre más pequeño que  $f(x^k)$ , hasta que  $\|\nabla f(x)\| = 0$ . Este último corresponde a un punto óptimo.  $\square$

### 14.2.2. Funciones fuertemente convexas con gradiente Lipschitz

El método del gradiente tiene un mejor comportamiento cuando la función a minimizar tiene gradiente Lipschitz y, además, es fuertemente convexa. Recordemos que una función es fuertemente convexa cuando  $g(x) = f(x) - \mu/2 \|x\|^2$  también lo es. Esto a su vez implica lo siguiente:

**Lema 14.1.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función fuertemente convexa entonces

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^T (x - y) \geq \mu \|x - y\|^2 \tag{14.22}$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $g(x) = f(x) - \mu/2 \|x\|^2$  es convexa entonces podemos usar la ecuación 4.10 del capítulo cuatro:

$$(\nabla g(x) - \nabla g(y))^T (x - y) \geq 0 \tag{14.23}$$

Solo basta reemplazar  $g$  y simplificar la ecuación teniendo en cuenta la forma del gradiente  $\nabla g(x) = \nabla f(x) - \mu x$ .  $\square$

Con este resultado, podemos establecer las propiedades de convergencia de las funciones fuertemente convexas:

**Teorema 14.5.** El método de gradiente tiene una tasa de convergencia lineal para funciones convexas con gradiente Lipschitz la cual está dada por

$$\|r^k\| \leq (\xi)^k \|r^0\| \tag{14.24}$$

en donde

$$\xi = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^2} \leq 1 \tag{14.25}$$

siendo  $r^k = x^k - \bar{x}$ , con  $\bar{x}$  el óptimo global de  $f$ .

DEMOSTRACIÓN. Nos interesa saber qué tan alejados estamos de la solución óptima  $\bar{x}$  para un punto arbitrario  $x^k$  en el proceso iterativo; definimos una nueva variable  $r^k = x^k - \bar{x}$  partiendo de la ecuación 14.7, como sigue:

$$\begin{aligned} x^{k+1} - \bar{x} &= x^k - \bar{x} - t^k \nabla f(x^k) \\ r^{k+1} &= r^k - t^k \nabla f(x^k) \end{aligned} \quad (14.26)$$

Usamos la norma-2 para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|r^{k+1}\|^2 &= \|r^k - t^k \nabla f(x^k)\|^2 \\ \|r^{k+1}\|^2 &= \|r^k\|^2 - 2t^k \nabla f(x^k)^T r^k + \|t^k \nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned} \quad (14.27)$$

Ahora, usamos la expresión 14.15 sobre los puntos  $(x^k, \bar{x})$  teniendo en cuenta que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ :

$$-\nabla f(x^k)^T (x^k - \bar{x}) \leq -\frac{1}{\gamma} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad (14.28)$$

Aquí, hemos multiplicado por -1 para poder reemplazar en la ecuación 14.27 y obtener lo siguiente:

$$\|r^{k+1}\|^2 \leq \|r^k\|^2 + \left(\frac{-2t}{\gamma} + (t)^2\right) \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad (14.29)$$

Dado lo anterior, podemos concluir que  $t \leq 2/\gamma$  para asegurar que el radio de convergencia decrezca. Supongamos ahora que, además, la función  $f$  es fuertemente convexa en cuyo caso, debido a la expresión 14.22, tenemos que  $\|\nabla f(x^k)\| \geq \mu \|r^k\|$  y, por tanto,

$$\|r^{k+1}\|^2 \leq \left(1 - \left(\frac{\mu}{\gamma}\right)^2\right) \|r^k\|^2 \quad (14.30)$$

Luego, definimos  $\xi = 1 - (\mu/\gamma)^2$  y analizamos cómo se desarrolla esta relación durante el proceso iterativo, veamos:

$$\begin{aligned} \|r^1\|^2 &\leq \xi \|r^0\|^2 \\ \|r^2\|^2 &\leq \xi \|r^1\|^2 \leq \xi^2 \|r^0\|^2 \\ \|r^3\|^2 &\leq \xi \|r^2\|^2 \leq \xi^3 \|r^0\|^2 \\ &\vdots \\ \|r^k\|^2 &\leq \xi^k \|r^0\|^2 \end{aligned} \quad (14.31)$$

Gracias a lo anterior, queda demostrado el teorema. □

A este tipo de comportamiento lo llamamos convergencia lineal, ya que la función se ve como una línea recta en una escala logarítmica. Nótese que la convergencia del método depende de la condición inicial  $r^0$ . Podemos hacer el algoritmo más eficiente actualizando el valor de  $t^k$  de forma iterativa. Por ejemplo, es posible usar una regla del tipo  $t^k = 2/(\gamma\sqrt{k})$ , la cual hace que el valor de  $\alpha$  decrezca en cada interacción y mejora la tasa de convergencia. Una demostración más formal de este resultado se puede encontrar en [9]

### 14.3. Método del gradiente con paso óptimo

Una forma efectiva de elegir un paso  $t^k$  es usando el método de gradiente descendente:

$$t^k = \underset{s>0}{\operatorname{argmin}} f(x^k + s\Delta x^k) \quad (14.32)$$

Esto significa resolver un problema de optimización (en una variable) por cada iteración. De esta forma, el método se mueve de forma óptima en cada iteración a expensas de un mayor esfuerzo computacional. La eficiencia del método depende de la capacidad de resolver el problema en una variable, dado por 14.32. Una forma relativamente simple es usando la información de la hessiana  $\mathcal{H}_f(x)$ . En este caso, la función se puede aproximar a un polinomio de Taylor de grado dos:

$$f(x + s\Delta x) \approx f(x) + s(\nabla f(x))^T \Delta x + \frac{s^2}{2} \Delta x^T (\mathcal{H}_f(x))^T \Delta x \quad (14.33)$$

Teniendo en cuenta la ecuación 14.32, el paso óptimo está dado por

$$t^k = \frac{\Delta x^T \Delta x}{\Delta x^T (\mathcal{H}_f(x)) \Delta x} \quad (14.34)$$

La principal desventaja de este método es el costo computacional de calcular la hessiana.

Otra forma de resolver el sub-problema 14.32 corresponde al método de la región dorada. En este método, asumimos que la función objetivo es convexa aunque no necesariamente diferenciable<sup>2</sup> y esta posee un mínimo  $\bar{x}$  en el intervalo  $[a, b]$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 14.2. Nótese que en las siguientes iteraciones solo se genera un nuevo punto para evaluar la función objetivo.

Sabemos por tanto, que  $f(x)$  es decreciente en el intervalo  $[a, \bar{x}]$  y creciente en el intervalo  $[\bar{x}, b]$ . Ahora, generamos dos nuevos puntos  $x_1, x_2$  dados por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} x_1 &= b - \tau(b - a) \\ x_2 &= a + \tau(b - a) \end{aligned} \quad (14.35)$$

<sup>2</sup>El método se puede extender a funciones unimodales, ver [55] para mas detalles.

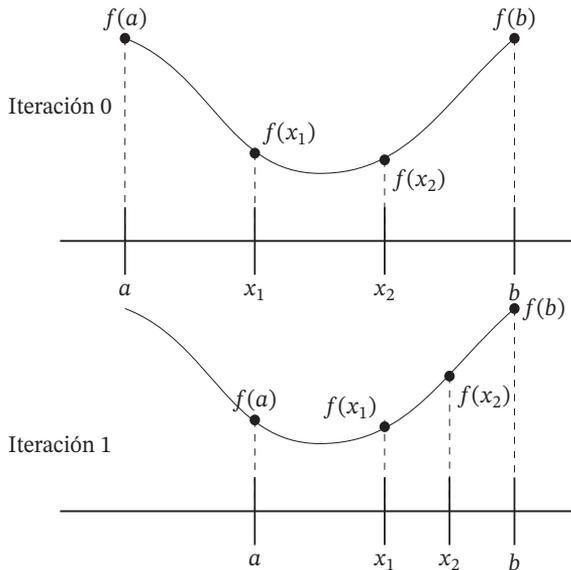


FIGURA NRO. 14.2. Primeras iteraciones del método de la región dorada.

Posteriormente, evaluamos la función objetivo en estos nuevos puntos. Si  $f(x_2) > f(x_1)$  entonces el óptimo se encuentra en el intervalo  $[a, x_2]$  mientras que, en caso contrario, el óptimo se encuentra en el intervalo  $[x_1, b]$ . El método continúa en el intervalo correspondiente al redefinir nuevos puntos internos  $[x_1, x_2]$ . El valor de  $\tau$  lo elegimos de forma que se mantenga una proporción constante en el intervalo generado, a saber:

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_1}{b - a} = \tau \quad (14.36)$$

Es fácil demostrar que este valor corresponde a la región dorada con

$$\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618 \quad (14.37)$$

La propiedad clave de esta relación es que en cada iteración necesitamos generar solo un nuevo punto, ya que el otro corresponde a  $x_1$  o bien a  $x_2$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 14.2.

### 14.3.1. Comportamiento oscilatorio

En algunos casos, la solución del método del gradiente genera un comportamiento en zig-zag, especialmente, en el caso del método del gradiente descendente. Para analizar

este comportamiento, partimos de un punto  $x = x^k$  el cual tiene un espacio tangente  $T_{x^k}f$ , dado por

$$(\nabla f(x^k))^T v = 0 \quad (14.38)$$

El método del gradiente descendiente se mueve en este espacio, en busca del paso  $t^k$  que minimice la función 14.32. El nuevo punto  $x$  estará sobre la línea  $x^k + s\Delta x^k$  la cual pertenece a  $T_{x^k}f$ , de tal forma que  $\partial f/\partial s = 0$ , es decir,

$$\frac{\partial f(s)}{\partial s} = (\nabla f(x))^T \frac{\partial x}{\partial s} = (\nabla f(x^{k+1}))^T \Delta x^k = 0 \quad (14.39)$$

La dirección  $v = x^k - x^{k+1}$  pertenece al espacio tangente del nuevo punto,  $T_{x^{k+1}}f$  como se muestra en la FIGURA NRO. 14.3. Dicho de otra forma, los gradientes  $\nabla f(x^k)$  y  $\nabla f(x^{k+1})$  son perpendiculares. Esto genera, evidentemente, un comportamiento en zig-zag que puede retrasar la convergencia del método. Denotamos  $T_x f$  como el espacio tangente de  $f$  en el punto  $x$ . Este análisis muestra la importancia de estudiar la geometría del problema.

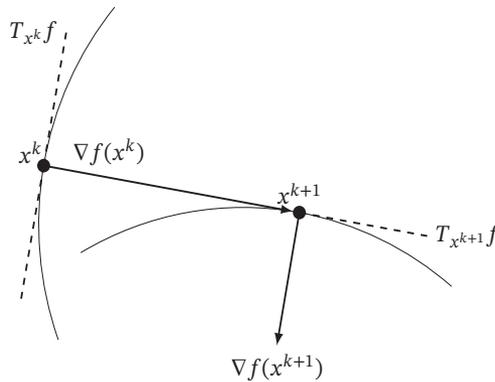


FIGURA NRO. 14.3. Comportamiento en zig-zag del método de gradiente descendiente.

#### 14.4. Lecturas complementarias

Las propiedades de convergencia de los métodos del gradiente han sido estudiadas en [9] y [56] entre otros libros clásicos. Un análisis más simplificado se puede encontrar en [8] y en [57]. Aplicaciones de estos métodos en sistemas de potencia se encuentran en [28] y en [31]. Se invita al estudiante a realizar diferentes ejercicios en cualquier lenguaje de programación y probar con diferentes valores del paso y puntos iniciales.

## 14.5. Ejercicios

1. Determinar el mínimo del siguiente problema de optimización usando el método del gradiente, a saber:

$$f(x) = x - \ln(x) \quad (14.40)$$

Usar diferentes puntos iniciales y pasos fijos. Mostrar un gráfico de convergencia para cada caso.

2. Resolver el siguiente problema de optimización:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(x - \bar{x}) \quad (14.41)$$

En el presente problema,  $H$  es una matriz simétrica y definida positiva (usar una matriz de tamaño  $2 \times 2$  y un punto  $\bar{x}$ ). Usar el método de gradiente con paso fijo y con paso óptimo (note que el gradiente de  $f$  es Lipschitz). Usar varias matrices  $H$  con diferentes grados de excentricidad y diferentes puntos iniciales. Mostrar la grafica de convergencia en cada caso. Analizar el mismo problema pero ahora la matriz  $H$  es de  $100 \times 100$ . Concluir al respecto.

3. Resolver el siguiente problema de optimización usando el método de gradiente descendente.

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \|A \cdot x + b\|^2 + \sum e^{c_i \cdot x_i} \quad (14.42)$$

En este,  $x \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$  es una matriz aleatoria, tal que,  $0 \leq a_{ij} \leq 0.1$ ; y  $b$  y  $c \in \mathbb{R}^{100}$  son vectores generados aleatoriamente, tal que  $0 \leq b_i \leq 1$ ,  $0 \leq c_i \leq 1$ . Usar los siguientes métodos para el paso de optimización en una variable: a) método de la región dorada, b) ajuste cuadrático, c) paso constante. Comparar la convergencia del método en cada caso.

4. Resolver el siguiente problema de optimización usando los métodos de gradiente con paso fijo y paso óptimo. Mostrar la convergencia desde diferentes puntos iniciales en el dominio de la función. Concluir al respecto.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -\ln(x_1 x_3 - x_2^2) \quad (14.43)$$

5. El método del gradiente también puede ser utilizado en funciones matriciales. Considere, por ejemplo, el siguiente problema de optimización

$$\min f(X) = \|AX - B\|_F^2 \quad (14.44)$$

Allí,  $X, B$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices cuadradas y  $\|\cdot\|_F^2$  representa la norma de Frobenius al cuadrado. Estudiar las propiedades de esta norma, incluida la derivada, la cual está dada por

$$\frac{\partial \|X\|_F^2}{\partial X} = 2X \quad (14.45)$$

Como se puede observar, esta derivada es una matriz, así que el método del gradiente debe ser formulado en función de matrices y no vectores, como en el caso de  $\mathbb{R}^n$ . Resolver el problema de optimización correspondiente a

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 8 & -2 & 15 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.46)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \quad (14.47)$$

Mostrar el gráfico de convergencia. Tener cuidado con el uso del método de la cadena en funciones matriciales. Recordar que la multiplicación matricial no es conmutativa. Comparar el resultado final usando `cvx`.

# 15

## CAPÍTULO QUINCE

# MÉTODO NEWTON

*Este capítulo muestra la aplicación del método de Newton para solucionar problemas de optimización tanto irrestrictos como con restricciones de igualdad. Se inicia con el análisis del método en el problema clásico de hallar las raíces de un sistemas de ecuaciones algebraicas. Posteriormente, se presenta la aplicación del método a problemas de optimización matemática irrestrictos y con restricciones afines.*

## 15.1. Método de Newton

Aunque el método de Newton fue inicialmente concebido para solucionar problemas algebraicos; este puede ser usado en problemas de optimización, aprovechando que las condiciones de optimalidad de KKT tienen la forma de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un sistema de ecuaciones algebraicas, tal que cada  $f_i$  es continuo y diferenciable; el método de Newton busca encontrar las soluciones  $f(x) = 0$  por medio de linealizaciones sucesivas, como se muestra en la FIGURA NRO. 15.1. Para el caso de una variable, el método parte de una aproximación inicial  $x_0$  y se dirige en la dirección de la derivada hasta encontrar un punto de corte  $x_1$ . En este

punto, se recalcula la derivada y se repite el proceso hasta alcanzar una solución con una tolerancia aceptable  $\|f(x)\| \leq \epsilon$ . En el caso más general, el método toma una aproximación dada por el espacio tangente a  $f$  usando una aproximación en polinomios de Taylor, de la siguiente forma:

$$f(x) \approx f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)})\Delta x = 0 \tag{15.1}$$

En este,  $Df(x^{(0)})$  representa el jacobiano de  $f$ , evaluado en el punto  $x^{(0)}$ . El método consiste en aplicar iterativamente el siguiente paso de Newton:

$$x \leftarrow x - [Df(x)]^{-1}f(x) \tag{15.2}$$

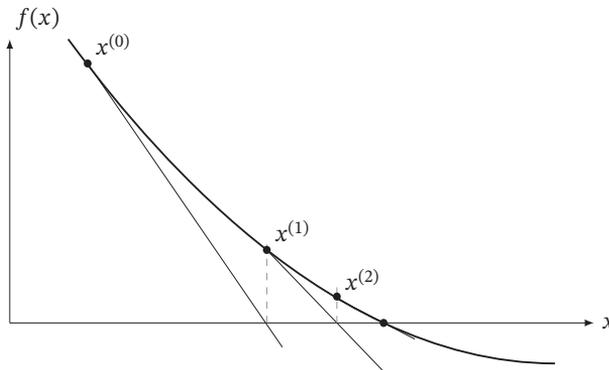


FIGURA NRO. 15.1. Diagrama esquemático del funcionamiento del método de Newton-Raphson.

**Ejemplo 15.1.** Consideremos el siguiente sistema no lineal de ecuaciones:

$$f_1(x, y) = x^2 + 2xy + 5y + 10 = 0 \tag{15.3}$$

$$f_2(x, y) = y^2 + x^2 - 25 = 0 \tag{15.4}$$

Se trata de un sistema no lineal de ecuaciones y, por tanto, no podemos garantizar que existe una única solución. En este caso, se tienen cuatro posibles soluciones, como se muestra en la FIGURA NRO. 15.2.

El jacobiano tiene la siguiente estructura:

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 2y & 2x + 5 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \tag{15.5}$$

Y, por tanto, el paso de Newton es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ y^{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ y^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x^k + 2y^k & 2x^k + 5 \\ 2x^k & 2y^k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x^k, y^k) \\ f_2(x^k, y^k) \end{pmatrix} \tag{15.6}$$

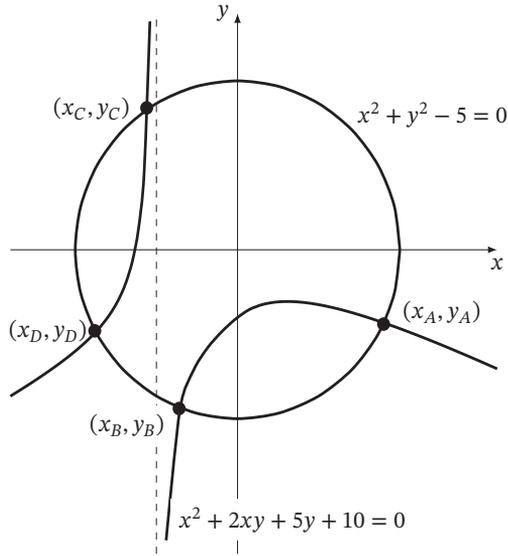


FIGURA NRO. 15.2. Posibles soluciones del sistema dado por las ecuaciones 15.3 y 15.4.

en donde  $k$  representa la iteración (no confundir el superíndice con un exponente). Una solución numérica al problema es  $x_A = 4.5078$ ,  $y_B = -2.1633$ . No obstante, existen al menos cuatro soluciones, marcadas en la FIGURA NRO. 15.2. La convergencia está estrechamente relacionada al punto inicial; así, puntos iniciales en el cuarto cuadrante tienden a converger a  $x_A, y_A$ . Además, se tiene una asíntota en el eje negativo, marcada con una línea punteada en la figura; esta produce una singularidad y hace que la función sea discontinua. Se invita al lector a programar el algoritmo y experimentar con diferentes condiciones iniciales. A partir de este simple ejemplo, podemos concluir que existen dificultades asociadas a la convergencia y unicidad de la solución en este tipo de problemas. Afortunadamente, los problemas de optimización convexa permiten garantizar convergencia en caso de que la función sea Lipchitz continua y fuertemente convexa. ■

El mayor esfuerzo computacional asociado al método es el cálculo de la inversa del jacobiano. No obstante, este esfuerzo se ve compensado con una convergencia cuadrática.

## 15.2. Método de Newton en problemas de optimización

El método de Newton puede ser usado para encontrar el valor de  $x$  que hace que  $\nabla f(x) = 0$ . Para ello expandimos la función  $\nabla f(x)$  alrededor de un punto  $x^k$  truncando en la componente lineal, como sigue:

$$\nabla f(x) = \nabla f(x^k) + \mathcal{H}_f(x^k)(x - x^k) \quad (15.7)$$

En esta ecuación,  $\mathcal{H}_f$  es el jacobiano de  $\nabla f(x)$  que a su vez corresponde a la hessiana de  $f$ . El paso de Newton está dado por

$$x^{k+1} = x^k - [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \nabla f(x^k) \quad (15.8)$$

Nótese que en funciones fuertemente convexas podemos garantizar la existencia de  $H_f^{-1}$ , la cual es definida positiva. El método también se puede interpretar como la solución asociada a la aproximación cuadrática de la función  $f$ . Consideremos una expansión en polinomios de Taylor de la función  $f$  alrededor de un punto  $x$ , así:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \mathcal{H}_f(x) \Delta x \quad (15.9)$$

Deseamos encontrar el vector  $\Delta x$  que minimice la función  $f(x + \Delta x)$ . Como se puede observar, es diferente del método del gradiente con paso óptimo. En aquel método, la dirección estaba fijada por el gradiente y solo se requería buscar el paso adecuado; mientras que, en este caso, tanto la dirección como la magnitud son optimizados. El valor óptimo  $\Delta x$  está dado por la siguiente expresión:

$$\nabla f(x) + \mathcal{H}_f(x) \Delta x = 0 \quad (15.10)$$

Este corresponde evidentemente al paso de Newton, a saber:

$$\Delta x = -[\mathcal{H}_f(x)]^{-1} \nabla f(x) \quad (15.11)$$

Una desventaja del método de Newton, en comparación con el método del gradiente, es que en cada iteración necesitamos calcular la inversa de  $\mathcal{H}_f$  lo cual supone un costo computacional elevado. Múltiples aplicaciones en ingeniería eléctrica están basadas en simplificaciones de esta matriz.

**Ejemplo 15.2.** Resolver el siguiente problema de optimización convexa en una variable, usando el método de Newton:

$$\min f(x) = x - \ln(x) \quad (15.12)$$

El gradiente y la hessiana de esta función son:

$$\nabla f(x) = f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \quad (15.13)$$

$$\mathcal{H}_f(x) = f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad (15.14)$$

Dado lo anterior, el paso de Newton es el siguiente:

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} \quad (15.15)$$

La solución óptima asociada a este problema es  $x = 1$ . ■

**Ejemplo 15.3.** Consideremos el siguiente problema en una variable:

$$f(y) = f(\alpha x + \beta) = (\alpha y + \beta) - \ln(\alpha y + \beta) \quad (15.16)$$

Este corresponde al problema original, pero con un cambio de variable  $x = \alpha y + 8$ . El gradiente y la hessiana de esta nueva función son:

$$f'(y) = \alpha f'(x) \quad (15.17)$$

$$f''(y) = \alpha^2 f''(x) \quad (15.18)$$

Por consiguiente, el paso de Newton puede expresarse como

$$\begin{aligned} y^{k+1} &= y^k - \frac{f'(y^k)}{f''(y^k)} \\ y^{k+1} &= y^k - \frac{\alpha f'(x^k)}{\alpha^2 f''(x^k)} \\ \alpha y^{k+1} &= \alpha y^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} \\ x^{k+1} &= x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)} \end{aligned} \quad (15.19)$$

Dicho de otro modo, el paso de Newton es equivalente al paso de la función  $f(x)$  sin importar el valor de  $\alpha$ . ■

La convergencia del método de Newton se puede estudiar mediante el teorema de Kantarovich. Sin embargo, en funciones con hessiana Lipschitz se puede hacer un análisis más general y simplificado [9].

**Teorema 15.1.** Para  $f(x)$  fuertemente convexa con hessiana Lipschitz tenemos lo siguiente:

$$\mathcal{H}_f(x) \succ \mu I \quad (15.20)$$

$$\|\mathcal{H}_f(x) - \mathcal{H}_f(y)\| \leq M \|x - y\| \quad (15.21)$$

Bajo estas condiciones el método de Newton tiene una convergencia al menos cuadrática.

DEMOSTRACIÓN. Definamos una función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $g(t) = \nabla f(tx + (1-t)y)$  de donde,

$$g'(t) = \mathcal{H}_f(tx + (1-t)y)(x - y) \quad (15.22)$$

De esta forma, podemos escribir el gradiente en función de la hessiana, a saber:

$$\nabla f(x^k) = \int_0^1 \mathcal{H}_f(\tilde{x} + t(x^k - \tilde{x}))(x^k - \tilde{x}) dt \quad (15.23)$$

en donde  $\tilde{x}$  es la solución óptima. Así, el paso de Newton toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (x^{k+1} - \tilde{x}) &= (x^k - \tilde{x}) - [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 \mathcal{H}_f(\tilde{x} + t(x^k - \tilde{x}))(x^k - \tilde{x}) dt \\ &= [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 \mathcal{H}_f(x^k)(x^k - \tilde{x}) dt - \\ & \quad [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 \mathcal{H}_f(\tilde{x} + t(x^k - \tilde{x}))(x^k - \tilde{x}) dt \\ &= [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + t(x^k - \tilde{x}))) (x^k - \tilde{x}) dt \end{aligned} \quad (15.24)$$

Ahora, definimos  $r^k = x^k - \tilde{x}$  con lo que obtenemos la siguiente representación:

$$r^{k+1} = [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k)) r^k dt \quad (15.25)$$

Luego, tomamos la norma

$$\begin{aligned}
\|r^{k+1}\| &= \left\| [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \int_0^1 (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k))r^k dt \right\| \\
&\leq \left\| [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \right\| \left\| \int_0^1 (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k))r^k dt \right\| \\
&\leq \left\| [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \right\| \int_0^1 \left\| (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k))r^k \right\| dt \\
&\leq \left\| [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \right\| \int_0^1 \left\| (\mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k)) \right\| \|r^k\| dt
\end{aligned} \tag{15.26}$$

puesto que la hessiana es Lipschitz entonces tenemos lo siguiente:

$$\left\| \mathcal{H}_f(x^k) - \mathcal{H}_f(\tilde{x} + tr^k) \right\| \leq M \|r^k\| \tag{15.27}$$

Y, por tanto,

$$\|r^{k+1}\| \leq \left\| [\mathcal{H}_f(x^k)]^{-1} \right\| \left( \frac{M \|r^k\|^2}{2} \right) \tag{15.28}$$

Ahora bien, como la función es fuertemente convexa entonces obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_f(x^k) &> \mu I \\
I &> \mu [\mathcal{H}_f(x)]^{-1} \\
1/\mu &\geq \left\| [\mathcal{H}_f(x)]^{-1} \right\|
\end{aligned} \tag{15.29}$$

De esta índole, la relación de convergencia toma la siguiente forma:

$$\|r^{k+1}\| \leq \frac{M}{2\mu} \|r^k\|^2 \tag{15.30}$$

Lo anterior constituye una convergencia cuadrática siempre que  $\|r\| \leq 1$ .  $\square$

En [9] se presenta un análisis sin el requerimiento de que la función sea fuertemente convexa. En cualquier caso, se evidencia dos características del método de Newton: primero, la convergencia es mucho mas rápida que los métodos de gradiente cuya convergencia es lineal; y segundo, esta convergencia solo puede ser garantizada en puntos suficientemente cercanos al óptimo. Esto significa que una buena estrategia de optimización puede consistir en el uso del gradiente en las primeras iteraciones, dada la facilidad numérica del método. Posteriormente, se puede finalizar con un paso de Newton cuando la solución esté lo suficientemente cercana al óptimo.

### 15.3. Restricciones de igualdad

Consideremos ahora en caso de un problema con restricciones de igualdad, a saber:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ Ax = b \end{aligned} \quad (15.31)$$

En este, las condiciones de optimalidad están dadas por:

$$\begin{aligned} \nabla f(x) + A^T \lambda &= 0 \\ Ax - b &= 0 \end{aligned} \quad (15.32)$$

El paso de Newton es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_f(x^k) & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) - A^T \lambda^k \\ -Ax^k + b \end{pmatrix} \quad (15.33)$$

Debemos actualizar tanto el valor de  $x$  como el de  $\lambda$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + \Delta x^k \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \Delta \lambda^k \end{aligned} \quad (15.34)$$

Este puede ser simplificado teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f \Delta x^k + A^T (\lambda^{k+1} - \lambda^k) &= -\nabla f(x^k) - A^T \lambda^k \\ \mathcal{H}_f \Delta x^k + A^T \lambda^{k+1} &= -\nabla f(x^k) \end{aligned} \quad (15.35)$$

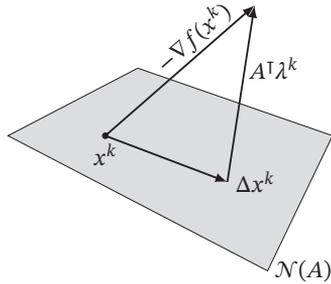
De esta forma, podemos actualizar directamente  $\lambda$ , es decir,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_f(x^k) & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) \\ b - Ax^k \end{pmatrix} \quad (15.36)$$

Bajo esta representación, el método puede ser interpretado como una proyección del gradiente sobre el espacio afin  $Ax - b = 0$ , como se muestra esquemáticamente en la FIGURA NRO. 15.3, en donde  $-\nabla f(x^k)$  es la dirección del gradiente -asociado al problema irrestricto- y  $A^T \lambda^{k+1}$  es un vector perpendicular al espacio nulo de  $A$  -representado como  $\mathcal{N}(A)$ -. Esto se demuestra fácilmente teniendo en cuenta que  $(A^T \lambda^k)^T \cdot v = 0, \forall v \in \mathcal{N}(A)$ . Por tanto,  $A \Delta x^k \in \mathcal{N}(A)$  generará un nuevo punto factible y el gradiente proyectado será  $-\nabla f(x^k) - A^T \lambda^k$ .

**Ejemplo 15.4.** Consideremos el siguiente problema de optimización con restricciones de igualdad, a saber:

$$\begin{aligned} \min (x_0 + 3x_1)^2 + x_2^2 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 1 \end{aligned} \quad (15.37)$$



**FIGURA NRO. 15.3.** Diagrama esquemático que representa la proyección del gradiente  $\nabla f(x^k)$  sobre el espacio nulo de  $A$ .

cuya solución óptima es  $x = (-1.5, 0.5, 0.0)^T$ . El gradiente y la hessiana, asociados a este problema, son

$$\begin{aligned} \nabla f &= \begin{pmatrix} 2x_0 + 6x_1 \\ 6x_0 + 18x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{H}_f &= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.38)$$

La matriz  $A$  es simplemente un vector de unos y  $b = 1$ .

La implementación en Python requiere de funciones asociadas tanto a la función objetivo como a las restricciones y al gradiente. El método puede iniciar de un punto infactible sin afectar significativamente su convergencia. A continuación, se muestra el código en Python, en donde usamos la librería `numpy` para resolver el sistema lineal, resultante del paso de Newton.

```
import numpy as np

def F(x):
    "Funcion objetivo"
    return (x[0]+3*x[1])**2 + x[2]**2

def G(x):
    "Gradiente"
    return [2*(x[0]+3*x[1]), 6*(x[0]+3*x[1]), 2*x[2]]

def R(x):
    "Restriccion"
    return [x[0]+x[1]+x[2]-1]

M = np.array([[2, 6, 0, 1], [6, 18, 0, 1], [0, 0, 2, 1], [1, 1, 1, 0]])
x = [100, 0, 5] # punto inicial
```

```

n_iter = 3      # numero de iteraciones

for i in range(n_iter):
    N = G(x)+R(x)
    D = np.linalg.solve(M,N)
    x = x - D[0:3]
    print(F(x), R(x))
print('Resultado final x:', x)
print('Variable dual :', D[3])

```

Nótese que la variable dual no requiere ser actualizada ni inicializada. ■

## 15.4. Restricciones de desigualdad

Analicemos primero los problemas de optimización con restricciones en forma de hipercubo, es decir,

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \end{aligned} \quad (15.39)$$

En este caso,  $f$  es una función convexa, diferenciable y con gradiente Lipschitz. Evidentemente, el espacio de soluciones se puede representar como sigue:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{\min} \leq x \leq x_{\max}\} \quad (15.40)$$

Por tanto, podemos establecer una función indicatriz del conjunto  $\Omega$ , así:

$$I_{\Omega}(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Omega \\ +\infty & x \notin \Omega \end{cases} \quad (15.41)$$

De forma que el problema de optimización se pueda representar de la siguiente forma:

$$\min f(x) + I_{\Omega}(x) \quad (15.42)$$

Quisiéramos encontrar un método similar al del gradiente aprovechando que este problema es irrestricto. Sin embargo, notamos que la función  $I_{\Omega}$ , aunque convexa (si incluimos a  $+\infty$  en el dominio), no es diferenciable. Dicho de otro modo, no podemos encontrar el gradiente convencional. Obviamente, requerimos un acercamiento levemente distinto, como se mostrará en el siguiente capítulo.

## 15.5. Lecturas complementarias

Este capítulo solo muestra una pequeña introducción a los métodos de Newton tanto en problemas algebraicos como en problemas de optimización matemática. En [2], se presenta un análisis completo del método de Newton para hallar soluciones a problemas de la forma  $f(x) = 0$ . Igualmente, se presentan múltiples ejercicios numéricos. El análisis de convergencia del método se basa en el trabajo de [9] y [56]. En [8] también se presenta un análisis más simple con ejemplos y ejercicios numéricos.

## 15.6. Ejercicios

1. Resolver el siguiente problema de optimización con una variable usando el método de Newton, a saber:

$$\min f(x) = x^4 - 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 10 \quad (15.43)$$

Mostrar la convergencia del método y la solución obtenida, partiendo de los siguientes puntos iniciales:  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 1/10$ ,  $x_0 = -10$  y  $x_0 = 5$ . Ofrecer una conclusión al respecto.

2. Resolver el siguiente problema de optimización convexa usando el método de Newton:

$$\min x^2 + 2xy + y^2 - 16 \quad (15.44)$$

Partir de diferentes puntos iniciales. Mostrar la convergencia en cada caso. Comparar con el método del gradiente.

3. Resolver el siguiente problema usando el método de Newton:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} \|Ax + b\|^2 + \sum e^{c_i x_i} \quad (15.45)$$

En este,  $x \in \mathbb{R}^{100}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{100 \times 100}$ . Inventarse un ejemplo aleatorio tal que  $0 \leq a_{ij} \leq 0.1$ ,  $0 \leq b_i \leq 1$ ,  $0 \leq c_i \leq 1$ .

4. Resolver el siguiente problema de optimización usando el método de Newton

$$\begin{aligned} \min f(x) &= \sum x_i \ln(x_i) \\ Ax &= b \end{aligned} \quad (15.46)$$

En este,  $A \in \mathbb{R}^{50 \times 100}$  (inventarse el problema aleatoriamente). Mostrar la convergencia del método así como la factibilidad en cada iteración (puede medir la factibilidad usando una función de la forma  $\phi(x) = \|Ax - b\|$ , la cual es 0 cuando  $x$  es factible).

5. Podemos usar el método de Newton para solucionar problemas matricial, en donde  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Basado en esto, considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \|X\|_F^2 \\ AX = B \end{aligned} \quad (15.47)$$

en donde,  $\|\cdot\|_F^2$  es la norma de Frobenius al cuadrado,  $X$  es una matriz de  $3 \times 3$  y  $A, B$  son las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.48)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.49)$$

Tener en cuenta que el gradiente es una matriz, entonces, ¿qué estructura tiene la hessiana? Recordar que la multiplicación matricial no es conmutativa, así que el método de la cadena debe ser aplicado con la precaución de no modificar el orden de la multiplicación. Comprobar el resultado usando cvxpy.

# 16

## CAPÍTULO DIECISÉIS

# MÉTODO DE PUNTOS INTERIORES

*En este capítulo, trataremos el método de puntos interiores, el cual permite solucionar problemas de optimización con restricciones de igualdad y desigualdad. El método se extiende a problemas de optimización cónica de segundo orden y a problemas de optimización semidefinida. Igualmente, se presenta la metodología para encontrar puntos iniciales factibles.*

## 16.1. Métodos de puntos interiores

Probablemente, los métodos más utilizados para solucionar problemas convexos son los de puntos interiores. El origen de estos métodos se remonta al trabajo de John Von Neumann a mediados del siglo XX aunque fue en la década de los 80 en donde se demuestra su utilidad práctica para resolver problemas convexos de gran tamaño [9]. En este capítulo, estudiaremos la filosofía básica del método; para ello, consideramos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g(x) = Ax - b = 0 \\ h_i(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{16.1}$$

En este caso,  $f$  y  $h_i$  son convexas y  $g$  es una función afín. Consideramos ahora la función indicatriz, definida de la siguiente forma:

$$I(x) = \begin{cases} 0 & h_i(x) \leq 0 \\ +\infty & h_i(x) > 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

Entonces, el problema de optimización puede ser representado como

$$\min f(x) + I(x), \text{ con } g(x) = 0 \quad (16.3)$$

Nuestro objetivo es acercarnos a la solución de este problema mediante una aproximación de  $I(x)$ . Una de estas aproximaciones es la barrera logarítmica.

### 16.1.1. Método de barrera logarítmica

Definimos una función  $\phi(x)$ , llamada barrera logarítmica, como sigue:

$$\phi_i(x) = -\ln(-h_i(x)) \quad (16.4)$$

La idea básica del método de puntos interiores es que la función indicatriz puede ser aproximada por la función  $\phi(x)$  de la siguiente forma:

$$I(x) \approx \sum_i s\phi_i(x) \quad (16.5)$$

en donde  $s > 0$ .

La FIGURA NRO. 16.1 muestra la forma de la función. Esta toma valores muy cercanos a 0 cuando  $x \leq 0$  y valores muy grandes para  $x > 0$ . De esta forma, se aproxima a la función indicatriz y se hace más precisa la aproximación a medida que  $s \rightarrow 0$ .

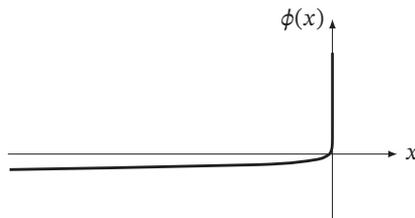


FIGURA NRO. 16.1. Función de barrera logarítmica.

Si  $x$  es un punto factible en el interior del conjunto de soluciones entonces  $h_i(x) \leq 0$  y, por tanto,  $-\ln(-h_i(x)) < \infty$ . Ahora, al multiplicar por un número  $s$ , lo suficientemente pequeño, obtenemos un valor cercano a 0. En cambio, si  $h(x) > 0$

entonces el logaritmo nos dará inmediatamente un valor infinito. Desde luego, la aproximación de esta función va a depender del valor de  $s$ , así que la idea es partir de valores positivos y disminuir iterativamente este valor hasta que obtengamos una solución lo suficientemente cercana al óptimo.

La ventaja de la función  $\phi$  sobre la función indicatriz es que la primera es continua y derivable dos veces, veamos:

$$\nabla\phi_i(x) = \frac{-1}{h_i(x)} \nabla h_i(x) \quad (16.6)$$

$$\mathcal{H}_\phi(x) = \frac{1}{h_i(x)^2} \nabla h_i(x) \nabla^\top h_i(x) - \frac{1}{h_i(x)} \mathcal{H}_{h_i}(x) \quad (16.7)$$

Con estas funciones, podemos usar el método de Newton para darle solución al problema aproximado. Consideremos un modelo convexo con una única restricción de desigualdad. El problema aproximado, por tanto, se puede solucionar usando el método de Newton, aplicado sobre el siguiente sistema no lineal:

$$\nabla f(x) + s\nabla\phi(x) + A^\top\lambda = 0 \quad (16.8)$$

cuyo paso de Newton para un punto interior factible  $x^k$  es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_f(x^k) + s\mathcal{H}_\phi(x^k) & A^\top \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) - s\nabla\phi(x^k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

El nuevo punto  $x^{k+1}$  es primal factible con respecto al problema original pues pertenece al interior relativo del espacio de soluciones,  $h_i(x^{k+1}) < 0$ ,  $g(x^{k+1}) = 0$ . El método consiste entonces en actualizar el valor  $x^{k+1}$  y reducir iterativamente  $s$  con el objetivo de que el problema aproximado se acerque al problema original, considerando puntos en el interior relativo del espacio de soluciones. Este es el método básico de puntos interiores. Su principal dificultad radica en el cálculo de las derivadas asociadas a la barrera. No obstante, muchos problemas presentan características que permiten una implementación más sistemática.

**Ejemplo 16.1.** Veamos la implementación del método en Python, para el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } & x_0 + x_1 \\ & x_0^2 + x_1^2 \leq 25 \end{aligned} \quad (16.10)$$

Primero, debemos definir las funciones que vamos a usar mas adelante.

```
import numpy as np
def f(x):
    "Funcion objetivo"
    return x[0]+x[1]
```

```

def g(x):
    "Restriccion"
    return x[0]**2 + x[1]**2 - 25

def Gr_f(x):
    "Gradiente de la funcion objetivo"
    return np.array([1,1])

def Gr_g(x):
    "Gradiente de la restriccion"
    return np.array([2*x[0],2*x[1]])

def Gr_B(x):
    "Gradiente de la barrera logaritmica"
    return -1/g(x)*Gr_g(x)

def H_f(x):
    "Hessiana de la funcion objetivo"
    return np.array([[0,0],[0,0]])

def H_g(x):
    "Hessiana de la restriccion"
    return np.array([[2,0],[0,2]])

def H_B(x):
    "Hessiana de la barrera logaritmica"
    return 1/(g(x)**2)*np.array([[4*x[0]**2,4*x[0]*x[1]],
                                  [4*x[0]*x[1],4*x[1]**2]])-1/g(x)*H_g(x)

```

Nótese que, en este caso, se tiene un problema sin restricción de igualdad y, por tanto, el paso de Newton depende solo de  $x$ . El método consiste en evaluar el paso de Newton y reducir el valor de  $s$  (en este caso  $s^{k+1} = 0.9s^k$ ).

```

x = [1,1] # punto inicial factible
s = 10   # valor inicial de la barrera
for i in range(70):
    G = -Gr_f(x)-s*Gr_B(x)
    H = H_f(x)+s*H_B(x)
    dx = np.linalg.solve(H,G)
    x += dx
    print(np.round(x,3), np.round(f(x),3))
    s = s*0.9

```

Existen múltiples variantes al método, así como formas más eficientes de reducir el valor de  $s$ . Sin embargo, la estructura básica del algoritmo es la misma. ■

**Ejemplo 16.2.** En muchos casos, la principal dificultad está en la formulación de la hessiana, asociada a la barrera logaritmica. Consideremos el siguiente problema de

optimización

$$\begin{aligned} \min f(x, y) &= x + y \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 25 \leq 0 \end{aligned} \quad (16.11)$$

En este caso, el gradiente de la función objetivo y de la restricción están dados por

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (1, 1)^T \\ \nabla g(x, y) &= (2x, 2y)^T \end{aligned} \quad (16.12)$$

La hessiana de la función objetivo es  $\mathcal{H}_f = 0$  mientras que la hessiana de la restricción es una matriz constante dada por  $\mathcal{H}_g = \text{diag}(2, 2)$ . Por tanto, la hessiana de la barrera estará dada por

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{g(x, y)} \nabla g(x, y) \nabla g(x, y)^T - \frac{1}{g(x, y)^3} \mathcal{H}_g \quad (16.13)$$

es decir,

$$\mathcal{H}_\phi = \frac{1}{g(x, y)} \begin{pmatrix} 4x^2 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{g(x, y)^3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (16.14)$$

■

**Ejemplo 16.3.** Los problemas de optimización cónica de segundo orden tienen una estructura que facilitan la aplicación del método de barrera logarítmica. Consideremos el siguiente problema SOC, a saber:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ \|Ax + b\| \leq \alpha^T x + \beta \end{aligned} \quad (16.15)$$

Ahora, por facilidad, definimos las siguientes variables asociada a la restricción SOC:

$$\begin{aligned} u &= Ax + b \\ g &= \|u\| - \alpha^T x - \beta \end{aligned} \quad (16.16)$$

El gradiente de la restricción es, por tanto, el siguiente:

$$\nabla g = \frac{1}{\|u\|} A^T u - \alpha \quad (16.17)$$

Y la función hessiana está dada por

$$\mathcal{H}_g = \frac{1}{\|u\|} A^T A - \frac{1}{\|u\|^3} (A^T u)(A^T u)^T \quad (16.18)$$

Estas funciones permiten implementar fácilmente los métodos de barrera logarítmica así como el primal dual. Como puede observarse, en este punto, tenemos el gradiente y la hessiana de la restricción, las cuales son usadas para calcular las correspondientes derivadas de la barrera tal y como se mostró en 16.6 y 16.7. ■

**Ejemplo 16.4.** El método de puntos interiores puede ser extendido a problemas de optimización semidefinida. Consideremos el modelo básico presentado a continuación:

$$\begin{aligned} \text{mín } & \text{tr}(CX) \\ & \text{tr}(AX) = b \\ & X \geq 0 \end{aligned} \tag{16.19}$$

La restricción afin puede ser fácilmente incluida en la función objetivo mediante una serie de multiplicadores de Lagrange. La restricción SDP la aproximamos mediante la siguiente barrera logarítmica:

$$\phi(x) = -\ln(\det(X)) \tag{16.20}$$

Nótese que el determinante será positivo siempre que  $X \geq 0$  y, por tanto, la función logaritmo estará definida sobre los reales. El problema resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{mín } & \text{tr}(CX) - s \ln(\det(X)) \\ & \text{tr}(AX) = b \end{aligned} \tag{16.21}$$

La solución de este problema se puede establecer fácilmente usando el método de Newton. Recordar que la derivada  $\ln(\det(X))$  es simplemente  $X^{-1}$ . ■

### 16.1.2. Método primal-dual

Ahora, el dual del problema aproximado es el siguiente:

$$\mathcal{W}_{ap}(\lambda) = \inf \left\{ f(x) + s \sum_i \phi_i(x) + \lambda^T(Ax - b) \right\} \tag{16.22}$$

Como se puede observar, no se requiere multiplicador de Lagrange asociado a  $\phi_i$  debido a que esta función hace parte de la función objetivo en el problema aproximado, mientras que el dual del problema original es

$$\mathcal{W}(\lambda, \mu) = \inf \left\{ f(x) + \lambda^T(Ax - b) + \sum_i \mu_i h_i(x) \right\} \tag{16.23}$$

Dado lo anterior, buscamos valores  $\lambda, \mu$  que cumplan con el criterio de optimalidad tanto en el modelo aproximado como en el modelo original:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) + A^T \lambda + \sum_i \frac{-s}{h_i(x)} \nabla h_i(x) &= 0 \\ \nabla f(x) + A^T \lambda + \sum_i \mu_i^T \nabla h_i(x) &= 0\end{aligned}\quad (16.24)$$

Ahora, definimos  $\mu_i = -s/h_i(x)$  como un punto dual factible tanto en el problema original como en el problema aproximado porque  $s > 0$  y  $h_i(x) < 0$ . Debemos recordar que la factibilidad del dual está dada por  $\mu \geq 0$ . Dicho de otro modo, un punto  $(x, \lambda, \mu)$  es primal y dual factible si además de cumplir con la condición de optimalidad; solo necesita cumplir con las condiciones de complementariedad para que sea un óptimo del problema original, es decir,  $\mu_i h_i(x) = 0$ . Sin embargo, nuestro problema aproximado cumple con  $\mu_i h_i(x) = s$  así que nuestra estrategia será nuevamente hacer  $s$  más pequeño mediante un acercamiento continuo en el interior del espacio de soluciones. Sin embargo, esta vez, usando tanto el primal como el dual. Esta modificación al método de puntos interiores es llamado primal-dual. Para un punto  $x^k, \lambda^k, \mu^k$  el sistema de ecuaciones resultante será entonces:

$$\begin{aligned}\nabla f(x) + A^T \lambda + \text{diag}(\mu) \nabla h(x) &= 0 \\ Ax &= b \\ h(x) &\leq 0 \\ \text{diag}(\mu) h(x) &= -s\end{aligned}\quad (16.25)$$

De esta índole, el paso de Newton será el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_f(x^k) + \sum \mu \mathcal{H}_h(x^k) & Dh(x^k)^T & A^T \\ -\text{diag}(\mu) Dh(x^k) & -\text{diag}(h(x^k)) & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_{dual} \\ r_{cent} \\ r_{primal} \end{pmatrix}\quad (16.26)$$

en donde  $Dh$  agrupa cada uno de los gradientes de  $h$ , así:

$$Dh(x) = (\nabla h_1(x)^T, \dots, \nabla h_m(x)^T)^T \quad (16.27)$$

Conforme a lo anterior, los vectores  $r$  están dados por:

$$\begin{aligned}r_{dual} &= \nabla f(x^k) + Dh(x^k) \mu + A^T \lambda^k \\ r_{cent} &= -\text{diag}(\mu) h(x^k) + s \vec{1} \\ r_{primal} &= Ax^k - b\end{aligned}\quad (16.28)$$

Si el punto inicial es factible, desde el punto de vista del primal y del dual, entonces  $r_{primal} = r_{dual} = 0$ .

**Ejemplo 16.5.** Consideremos un problema de programación lineal con la siguiente forma canónica:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{16.29}$$

Entonces, el paso de Newton estará dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & I & A^T \\ -\text{diag}(\mu) & -\text{diag}(x) & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \mu \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \text{diag}(\mu)x + s\vec{1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16.30}$$

Parece contradictorio usar el método de puntos interiores en un problema de programación lineal, ya que la barrera logarítmica hace que el problema sea no lineal. No obstante, ha sido ampliamente demostrado, desde el punto de vista teórico y práctico, que el método de puntos interiores es más eficiente que el método simplex para problemas de gran tamaño. Es por ello que la gran mayoría de paquetes comerciales usan métodos de puntos interiores. ■

## 16.2. Problemas de factibilidad

Un problema de factibilidad consiste en encontrar una solución factible en el espacio de soluciones. Este tipo de problemas aparecen en la fase de preprocesamiento de un algoritmo de optimización (para encontrar un punto interior inicial), pero también en diferentes problemas prácticos. El problema consiste en encontrar un punto  $x$  que satisfaga las restricciones

$$\begin{aligned} Ax - b &= 0 \\ h_i(x) &\leq 0 \end{aligned} \tag{16.31}$$

Para ello, definimos el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum s_i \\ & Ax - b = 0 \\ & h_i(x) \leq s_i \\ & s_i \geq 0 \end{aligned} \tag{16.32}$$

Si la solución óptima de este problema es  $s_i = 0$  entonces el problema original tiene solución factible. En caso contrario, el problema es vacío.

### 16.3. Lecturas complementarias

La mayoría de paquetes de optimización matemática usan el método de punto interior como base, tanto en los problemas de programación lineal como no lineal. Esto se debe a las propiedades de convergencia asociadas a la barrera logarítmica, las cuales a su vez están relacionadas con el concepto de funciones auto-concordantes presentado en [9].

### 16.4. Ejercicios

Resolver los siguientes problemas de optimización usando el método de puntos interiores

1. Problema simple en una variable:

$$\begin{aligned} \min x^2 \\ x \geq 5 \end{aligned} \quad (16.33)$$

2. Problema con restricciones cuadráticas:

$$\begin{aligned} \min x + 3y \\ x^2 + y^2 \leq 10 \end{aligned} \quad (16.34)$$

3. Problema de optimización cónica de segundo orden:

$$\begin{aligned} \min 18x_1 - 3x_2 \\ \|Ax + b\| \leq \alpha^\top + \beta \end{aligned} \quad (16.35)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -9 \\ -13 & -6 \end{pmatrix} \quad (16.36)$$

$$b = (45 \ -15)^\top$$

$$\alpha = (0 \ 1)^\top \quad (16.37)$$

$$\beta = 164$$

4. Problema de optimización semidefinida:

$$\begin{aligned} \min \operatorname{tr}(CX) \\ X \geq 0 \end{aligned} \quad (16.38)$$

con

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad (16.39)$$

5. Comprobar los resultados usando `cvx` o `cvxpy`.

# 17

## CAPÍTULO DIECISIETE

# MÉTODOS PROXIMALES

*Este capítulo introduce al lector en los algoritmos distribuidos para solucionar problemas de optimización convexa. Estos algoritmos permiten solucionar problemas con restricciones de igualdad y desigualdad, bajo una estructura similar a la del método del gradiente. El enfoque distribuido permite una implementación basada en procesamiento paralelo, la cual puede hacer que el algoritmo sea eficiente en términos de tiempo de cálculo a pesar de que su convergencia sea lenta en términos del número de iteraciones.*

## 17.1. Métodos de proyección

Iniciemos con algunas definiciones necesarias para desarrollar el método.

**Definición 17.1.** Llamamos Envolvente de Moreau de la función  $f$ , denotado como  $M_f$ , a la siguiente función convexa:

$$M_f(u) = \inf_{x \in \Omega} \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} \quad (17.1)$$

**Definición 17.2.** Llamamos operador proximal  $\text{prox}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con factor de

penalización  $\mu \geq 0$  a la siguiente función:

$$\text{prox}_f(u) = \underset{x \in \Omega}{\text{argmin}} \left\{ f(x) + \frac{\mu}{2} \|x - u\|^2 \right\} \quad (17.2)$$

Si no se menciona el factor  $\mu$  entonces se asume  $\mu = 1$ .

El operador nos puede ser útil para solucionar problemas de la forma

$$\underset{x \in \Omega}{\min} f(x) \quad (17.3)$$

En este tipo de problemas,  $f$  es una función convexa, diferenciable, con gradiente Lipschitz, y  $\Omega$  es un conjunto convexo con interior no vacío [58]. La forma usual de atacar el problema es usando la función indicatriz.

**Lema 17.1.** El óptimo de  $M_f(u)$  es el mismo de  $f$ .

DEMOSTRACIÓN. Tomamos el ínfimo de  $M_f$  y usamos las propiedades correspondientes en todos los casos  $u \in \Omega$ ,  $x \in \Omega$ , veamos:

$$\begin{aligned} \inf_u \{M_f(u)\} &= \inf_u \left\{ \inf_x \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} \right\} \\ &= \inf_x \inf_u \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} \\ &= \inf_x f(x) \end{aligned} \quad (17.4)$$

□

**Ejemplo 17.1.** El operador proximal, aplicado sobre la función indicatriz, genera la proyección de  $u$  sobre el conjunto  $\Omega$ , como se muestra esquemáticamente en la FIGURA NRO. 17.1. En este caso,  $\text{prox}_\Omega(y_A) = y_A$ , mientras que  $\text{prox}_\Omega(y_B) = x_R$ .

$$\text{prox}_\Omega(u) = \underset{x \in \Omega}{\text{argmin}} \left\{ I_\Omega(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} = \underset{x \in \Omega}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} \quad (17.5)$$

Es decir que si  $u \in \Omega$ , entonces  $u = x$  (la distancia mínima es 0), mientras que si  $u \notin \Omega$ , entonces nos dará la distancia mínima entre  $y$  y el borde del conjunto  $\Omega$ . Calculado término a término obtenemos lo siguiente:

$$\text{prox}_\Omega(u) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \text{ con } p_k = \begin{cases} x_{\min(k)} & u_k \leq x_{\min(k)} \\ x_k & x_{\min(k)} < u_k < x_{\min(k)} \\ x_{\max(k)} & u_k \geq x_{\max(k)} \end{cases} \quad (17.6)$$

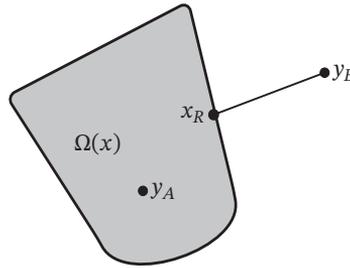


FIGURA NRO. 17.1. Diagrama del operador de proyección sobre un conjunto convexo  $\Omega$ .

**Ejemplo 17.2.** Determinar el operador proximal restringido al conjunto  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = b\}$  con  $a \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \text{prox}_\Omega(u) &= \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} \\ &= \underset{x}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - u\|^2, a^\top x = b \right\} \\ &= u + \frac{b - a^\top u}{\|a\|^2} a \end{aligned} \quad (17.7)$$

En este caso, si  $u \in \Omega$  entonces  $\text{prox}(u) = u$ , mientras que, en el caso contrario,  $\text{prox}(u)$  es la mínima distancia desde el punto  $u$  hasta el hiperplano  $\Omega$ , la cual se calcula en la dirección perpendicular al hiperplano. ■

**Teorema 17.1.** Dada una función estrictamente convexa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene que

$$\text{prox}_f(u) = \underset{x \in \Omega}{\operatorname{argmin}} \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 \right\} = u \quad (17.8)$$

en el punto óptimo. Es decir, el óptimo de  $f$  corresponde a un punto fijo  $u = \text{prox}_f(u)$ .

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en que  $f$  es una función continua y diferenciable; en este caso, el operador proximal se puede encontrar con la siguiente condición de optimalidad:

$$\nabla f(x) + (x - u) = 0 \quad (17.9)$$

Cuando  $u = \tilde{x}$  (siendo  $\tilde{x}$  el óptimo del  $f$ ) entonces  $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ , es decir, que el

óptimo de  $f$  es el mismo óptimo del operador proximal. Si la función es estrictamente convexa entonces el óptimo de  $f$  es único.

Analicemos ahora el caso en que  $f$  es convexa y no diferenciable. Calculamos el envolvente de Moreau de la función  $f$  pero evaluado en un punto  $u + hv$  con  $v$  un vector arbitrario y  $h$  un escalar:

$$\begin{aligned} M_f(u + hv) &= \inf_{x \in \Omega} \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - u - hv\|^2 \right\} \\ &\leq f(x) + \frac{1}{2} \|x - u - hv\|^2 \\ &\leq f(x) + \frac{1}{2} \|x - u\|^2 - hv^\top(x - u) + \frac{h^2}{2} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (17.10)$$

Esta desigualdad se cumple para todo  $x \in \Omega$ . En particular, si consideramos el caso  $x = \text{prox}_f(u)$ , entonces

$$\begin{aligned} M_f(u + hv) &\leq M_f(u) + hv^\top \text{prox}_f(u) + \frac{h^2}{2} \|v\|^2 \\ \frac{M_f(u + hv) - M_f(u)}{h} &\leq v^\top \text{prox}_f(u) - hv^\top u + \frac{h}{2} \|v\|^2 \end{aligned} \quad (17.11)$$

Luego, tomamos el límite cuando  $h \rightarrow 0$ . Este límite existe bajo las condiciones antes mencionadas de la función  $f$ , veamos:

$$v^\top (\nabla M_f(u)) \leq v^\top (\text{prox}_f(u) - u) \quad (17.12)$$

Esta desigualdad se debe cumplir para cualquier vector  $v$  (por ejemplo  $+v$  y  $-v$ ) y, por tanto,

$$\nabla M_f(u) = \text{prox}_f(u) - u \quad (17.13)$$

Cabe mencionar que  $M_f$  es diferenciable a pesar de que  $f$  no lo sea. Entonces, el óptimo de  $M_f$  se produce en  $\nabla M_f(u) = 0$ . Esto significa que

$$\text{prox}_f(u) = u \quad (17.14)$$

Dicho de otro modo, el óptimo de la función  $M_f$  corresponde a un punto fijo del operador proximal.  $\square$

El operador proximal es una especie de gradiente descendente sobre una versión continua y diferenciable de la función  $f$ , usando el siguiente paso:

$$x_{k+1} = \text{prox}_f(x_k) \quad (17.15)$$

Este algoritmo tiene buenas propiedades de convergencia aunque, como veremos más adelante, puede ser más lento que los algoritmos convencionales. Si el espacio de soluciones  $\Omega \neq \emptyset$  entonces  $x_{k+1}$  está bien definido (nunca es infinito). Ahora, como  $x_{k+1}$  hace que  $f(x) + 1/2 \|x - x_k\|^2$  sea mínimo, entonces

$$f(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2, \quad \forall x \in \Omega \quad (17.16)$$

En particular, para  $x = x_k$ ,

$$f(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq f(x_k) \quad (17.17)$$

Es decir,  $f(x_{k+1})$  está más cerca del óptimo  $\bar{x}$  que  $f(x_k)$ , veamos:

$$f(x_{k+1}) - f(\bar{x}) \leq f(x_k) - f(\bar{x}) - \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \quad (17.18)$$

Dado lo anterior, podemos intuir que la función objetivo se hace más pequeña hasta alcanzar el óptimo.

**Ejemplo 17.3.** Consideremos el siguiente problema de optimización

$$\min \left\{ \frac{1}{2}x^2, \text{ con } 1 \leq x \leq 10 \right\} \quad (17.19)$$

El óptimo de este problema es  $f(x) = 1/2$  y se presenta en  $\bar{x} = 1$ , como se muestra en la FIGURA NRO. 17.2.

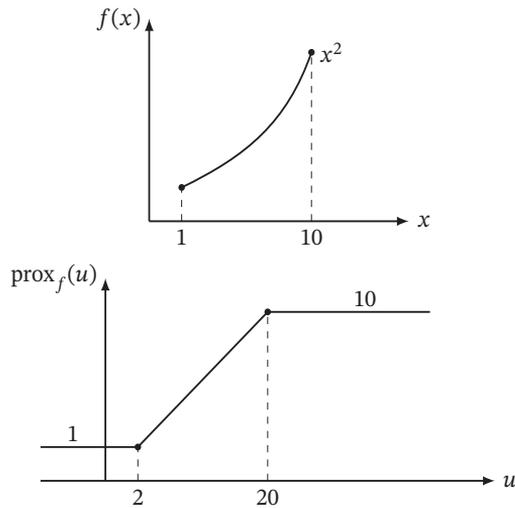
El operador proximal está dado por

$$\text{prox}_f(u) = \underset{1 \leq x \leq 10}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}|x - u|^2 \right\} \quad (17.20)$$

Es fácil representar explícitamente el resultado del operador, a saber:

$$\text{prox}_f(u) = \begin{cases} u/2 & 2 \leq u \leq 20 \\ 10 & u \geq 20 \\ 1 & u \leq 2 \end{cases} \quad (17.21)$$

Ahora, usamos la iteración correspondiente partiendo de un punto arbitrario, por



**FIGURA NRO. 17.2.** Gráfico de la función  $f(x)$  para el problema 3 y operador proximal correspondiente.

ejemplo,  $x_0 = 100$ :

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 100 \\
 x_1 &= \text{prox}_f(100) = 10 \\
 x_2 &= \text{prox}_f(10) = 5 \\
 x_3 &= \text{prox}_f(5) = 2.5 \\
 x_4 &= \text{prox}_f(2.5) = 1.25 \\
 x_5 &= \text{prox}_f(1.25) = 1 \\
 x_6 &= \text{prox}_f(1) = 1
 \end{aligned} \tag{17.22}$$

Nótese que el operador proximal es continuo y definido en todo el espacio. ■

La iteración del método proximal para una función convexa y diferenciable es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \text{prox}_f(x_k) = \operatorname{argmin} \left\{ f(x) + \frac{\mu}{2} \|\bar{x} - x_k\|^2 \right\} \\
 \cdot 0 &= \nabla f(\bar{x}) + \mu(\bar{x} - x_k) = 0 \\
 \bar{x} &= x_k - \frac{1}{\mu} \nabla f(\bar{x}) \\
 x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{\mu} \nabla f(x_{k+1})
 \end{aligned} \tag{17.23}$$

Como se puede observar, el gradiente está evaluado en  $x_{k+1}$  y no en  $x_k$  como es usual. Una interpretación interesante del método es presentada en [58]. Consideremos un sistema dinámico dado por el flujo de la función gradiente, a saber:

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = -\nabla f(x) \quad (17.24)$$

Esta función no lineal tiene un punto de equilibrio estable en  $x = \bar{x}$  (esto se puede demostrar fácilmente usando el teorema de Lyapunov). Por tanto, el paso del método representa una discretización de la ecuación diferencial usando el método de Euler.

## 17.2. Método de multiplicadores alternados

En esta sección, estudiaremos el método de multiplicadores alternados o ADMM (*alternating direction method of multipliers*). Deseamos minimizar una función de la forma  $f(x) + g(z)$  usando un algoritmo de tipo proximal. Para ello, planteamos el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) + g(z) \\ x = z \end{aligned} \quad (17.25)$$

Luego, definimos una función lagrangeana aumentada:

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x) + g(z) + y^\top(x - z) + \frac{1}{2} \|x - z\|^2 \quad (17.26)$$

Esta función es similar al lagrangeano convencional excepto por el término cuadrático. Este se hace cero cuando  $x = z$ , es decir, cuando el punto es factible. Reescribimos esta función de la siguiente forma equivalente:

$$\mathcal{L}(x, y, z) = f(x) + g(z) + \frac{1}{2} \|x - z + y\|^2 - \frac{1}{2} \|y\|^2 \quad (17.27)$$

Ahora, buscamos minimizar esta función tal y como en el método de los multiplicadores de Lagrange; sin embargo, esta vez usamos una estrategia iterativa similar al método de Gauss-Seidel, es decir, hacemos la operación dejando temporalmente algunas variables fijas, veamos:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \operatorname{argmin}_x \mathcal{L}(x, y, z), \quad \text{con } (y, z) \text{ fijos} \\ y_{k+1} &= \operatorname{argmin}_y \mathcal{L}(x, y, z), \quad \text{con } (x, z) \text{ fijos} \\ z_{k+1} &= \operatorname{argmin}_z \mathcal{L}(x, y, z), \quad \text{con } (x, y) \text{ fijos} \end{aligned} \quad (17.28)$$

La primera expresión toma la siguiente forma –debemos recordar que  $(y_k, x_k)$  son constantes para este paso–:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \operatorname{argmin} \left\{ f(x) + \frac{1}{2} \|x - z + y\|^2 \right\} \\ &= \operatorname{prox}_f(z - y) \end{aligned} \quad (17.29)$$

En este punto, procedemos de igual forma con las variables  $(x, y)$  y obtenemos la siguiente iteración:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \operatorname{prox}_f(z_k - y_k) \\ z_{k+1} &= \operatorname{prox}_g(x_{k+1} + y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + x_{k+1} - z_{k+1} \end{aligned} \quad (17.30)$$

Como se puede observar, cada paso proximal depende de una sola función:  $f$  en el caso de  $x$  y  $g$  en el caso de  $y$ . Esto permite que el algoritmo pueda dar solución a problemas con restricciones de desigualdad y hace que  $g(z)$  sea la función indicatriz. Cuando se alcance un punto fijo, entonces  $x = z$ . Lo anterior demuestra que se cumple la restricción que hemos impuesto artificialmente.

En aquellos casos de problemas con restricciones de igualdad,

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + g(z) \\ \text{s.t.} \quad & Ax + Bz = c \end{aligned} \quad (17.31)$$

Así, el algoritmo toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \operatorname{argmin}_x \left\{ f(x) + \frac{\mu}{2} \|Ax + Bz_k - c + y_k\|^2 \right\} \\ z_{k+1} &= \operatorname{argmin}_z \left\{ g(z) + \frac{\mu}{2} \|Ax_{k+1} + Bz - c + y_k\|^2 \right\} \\ y_{k+1} &= y_k + Ax_{k+1} + Bz_{k+1} - c \end{aligned} \quad (17.32)$$

En este,  $\mu > 0$  puede ser variable a lo largo del proceso iterativo con el fin de acelerar la convergencia. Los operadores proximales de funciones convexas individuales son relativamente fáciles de calcular por lo que este algoritmo es adecuado para solucionar problemas distribuidos.

### 17.3. Algoritmos distribuidos

Existen múltiples variantes de los algoritmos distribuidos en problemas de optimización y control; en esta sección, presentamos un algoritmo básico llamado

*consensus* el cual es adecuado para solucionar problemas de optimización con la siguiente estructura:

$$\min \sum_{i=1}^N f_i(x) \quad (17.33)$$

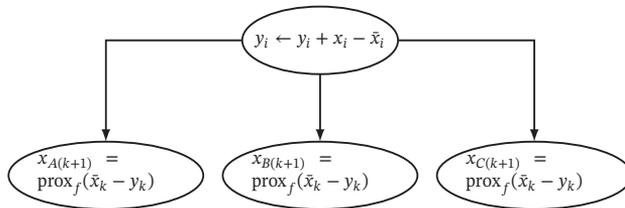
En este, el subíndice  $i$  indica una posible partición de las variables de decisión. El método de consensus se basa en definir una restricción de consenso que genera el siguiente problema equivalente:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \\ x_1 = x_2 = \dots = x_i = x_N \end{aligned} \quad (17.34)$$

Ahora, aplicamos un algoritmo basado en el mismo razonamiento del método de ADMM, a saber:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)} &= \text{prox}_f(\bar{x}_k - y_k) \\ y_{i(k+1)} &= y_{i(k)} + x_{i(k+1)} - \bar{x}_{i(k+1)} \end{aligned} \quad (17.35)$$

En el anterior algoritmo,  $\bar{x}$  son las variables que se quedan fijas para calcular las variables  $i$ . La ventaja de este método es que permite separar fácilmente un problema complejo en varios problemas más simples y usar programación en paralelo. Desde luego, diferentes particiones generan desempeños diferentes del algoritmo. La FIGURA NRO. 17.3 muestra un ejemplo para un problema que puede ser dividido en tres subproblemas  $i = \{A, B, C\}$ . También, es posible diseñar algoritmos descentralizados en donde cada nodo se comunique únicamente con nodos cercanos, sin necesidad de un nodo común.



**FIGURA NRO. 17.3.** Algoritmo de consenso en un problema separado en  $i = \{A, B, C\}$ .

Cada operador proximal supone un sub-problema de optimización el cual debe ser solucionado eficientemente. El éxito del método radica en encontrar formas eficiente de resolver cada uno de estos sub-problemas.

**Ejemplo 17.4.** El problema clásico de despacho económico de plantas térmicas puede

ser solucionado fácilmente usando un algoritmo de *consensus*, a saber:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i^N \frac{a_i}{2} p_i^2 + b_i p_i \\ & \sum_i^N p_i = d \\ & p_{i(\min)} \leq p_i \leq p_{i(\max)} \end{aligned} \quad (17.36)$$

Definimos una función  $f_i(p_i)$  para cada planta térmica, de la siguiente forma:

$$f_i(p_i) = \begin{cases} \frac{a_i}{2} p_i^2 + b_i p_i & p_{i(\min)} \leq p_i \leq p_{i(\max)} \\ +\infty & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (17.37)$$

El lagrangeano aumentado tiene la siguiente estructura:

$$\mathcal{L}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^N f_i(p_i) + \lambda \left( \sum p_i - d \right) + \frac{\mu}{2} \left\| \sum p_i - d \right\|^2 \quad (17.38)$$

En esta,  $\lambda$  es el multiplicador de Lagrange y las restricciones de desigualdad están incluidas en la definición de la función  $f$ . Reescribimos  $\mathcal{L}$  definiendo una nueva variable  $\Delta d = \sum p_i - d$ :

$$\mathcal{L}(p, \lambda) = \sum_{i=1}^N f_i(p_i) + \frac{\mu}{2} \|\Delta d\|^2 + (1/\mu)\lambda \Delta d - \frac{1}{2\mu} \|\lambda\|^2 \quad (17.39)$$

Si se emplea el mismo razonamiento del método de ADMM, se separan los problemas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)} &= \text{prox}_{f_i}(p_i - (\lambda + \Delta d)) \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \mu \Delta d \end{aligned} \quad (17.40)$$

Aquí,  $i$  representa las plantas térmicas y  $k$  la iteración. Nótese que cada planta  $i$  recibe información local  $(p_i, \lambda_i)$  además de dos variables globales  $\Delta d, \lambda$ . El operador proximal puede ser fácilmente establecido teniendo en cuenta que es un problema de optimización en una variable. Aunque este algoritmo puede ser más lento que los algoritmos convencionales, su utilidad radica en la posibilidad de separar el problema por áreas de operación y solucionar el problema correspondiente a cada área, de forma independiente. En mercados competitivos, esto puede ser importante debido a que cada área de operación puede corresponder a un operador de red diferente; así, el algoritmo de consensus permite solucionar el problema de despacho económico sin que los agentes tengan la información de sus competidores. ■

## 17.4. Lecturas complementarias

Los métodos distribuidos están tomando fuerza en las aplicaciones asociadas a la operación de sistemas eléctricos. Esto se debe a que algunos modelos operativos promueven esquemas distribuidos, los cuales pueden mejorar la seguridad y confiabilidad del sistema. Igualmente, la operación en ambiente de mercado implica una preocupación permanente por la información que puede ser compartida entre agentes del mercado. En [58] se muestra una mirada completa a los algoritmos proximales desde un enfoque computacional. Un análisis más formal puede encontrarse en [59] capítulo 27. Un ejemplo de aplicación en un problema eléctrico se muestra en [60].

## 17.5. Ejercicios

1. Demuestre que la ecuación diferencial

$$\frac{d\phi(x)}{dt} = -\nabla f(x) \quad (17.41)$$

Esta tiene un punto de equilibrio estable en  $x = \bar{x}$ , en donde  $f$  es una función fuertemente convexa (usar el criterio de Lyapunov). Mostrar el paso de la iteración para resolver numéricamente esta ecuación diferencial usando los métodos de Forward/Backward-Euler.

2. Solucionar el siguiente problema usando el comando quadprog de Matlab

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \\ & a \leq x \leq b \end{aligned} \quad (17.42)$$

con

$$Q = \begin{pmatrix} 4328 & 2096 & 2480 & 3136 \\ 2096 & 2628 & 1720 & 2712 \\ 2480 & 1720 & 1700 & 2200 \\ 3136 & 2712 & 2200 & 3512 \end{pmatrix} \quad (17.43)$$

$$c = (17064 \ 14352 \ 11420 \ 17168)^T \quad (17.44)$$

$$a = (-5 \ -3 \ -4 \ -4)^T \quad (17.45)$$

$$b = (7 \ 5 \ 7 \ 6)^T \quad (17.46)$$

3. Implementar un programa en Matlab o Python para solucionar el problema anterior usando un algoritmo proximal o un algoritmo ADMM. Comparar los resultados en términos de la función objetivo.
4. Solucionar el problema de despacho económico de plantas térmicas usando un algoritmo distribuido ADMM para los datos de la TABLA NRO. 17.1 y una demanda de 800MW.

Unidad	$a$	$b$	$P_{\min}$	$P_{\max}$
A	0.120	90	50	250
B	0.090	60	50	250
C	0.096	80	50	300
D	0.080	70	50	200

**TABLA NRO. 17.1.** Unidades térmicas para el problema 5.

5. Comprobar el resultado usando `cvx` o `cvxpy`.

## REFERENCIAS

- [1] L. H. Loomis and S. Sternberg, *Advanced calculus*. NY: World scientific, Harvard University, 2014.
- [2] J. H. Hubbard and B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra And Differential Forms A Unified Approach*. NY: Prentice Hall, 1999.
- [3] J. de Loera, R. Hemmecke, and M. Koppe, *Algebraic and geometric ideas in the theory of discrete optimization*. NY: MOS-SIAM series on optimization, 2013.
- [4] M. Bazaraa, J. Jarvis, and H. Sherali, *Linear programming and network flows*. NY: Wiley, 2010.
- [5] E. Castillo, A. Conejo, P. Pedregal, R. Garcia, and N. Alguacil, *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia*. Castilla, España: Universidad De Castilla-La Mancha, 2002.
- [6] D. Luenberger, *Optimization by vector space methods*. Stanford: Wiley professional paperback series, 1969.
- [7] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, 1st ed. Yokohama, Japan: Yokohama Publishers, 2009, vol. 1.
- [8] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge, UK: Cambridge university Press, 2004.
- [9] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Programming Volume I: Basic course*. Berlin, Germany: Springer, 2008.
- [10] S. Axler, F. Gehring, and K. Ribet, *Linear algebra done wright*, 2nd ed. New York, NY: Springer, 2009.

- [11] H. Wolkowicz, S. Romesh, and V. Lieven, *Handbook of Semidefinite Programming Theory, Algorithms and Applications*. New York, NY: Springer US, 2000.
- [12] M. F. Anjos and J. B. Lasserre, *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*. NY: Springer US, 2012.
- [13] A. Ben-Tal, L. El-Ghaoui, and A. Nemirovski, *Robust Optimization*. NY: Princeton University Press, 2009.
- [14] P. Kall and S. W. Wallace, *Stochastic Programming: second edition*. NY: John Wiley and Sons, 2003.
- [15] J. Jacob and P. Protter, *Probability essentials: second edition*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [16] B. L. Gorissen, İhsan Yanikoğlu, and D. den Hertog, “A practical guide to robust optimization,” *Omega*, vol. 53, pp. 124–137, 2015. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305048314001698>.
- [17] G. Blekherman, P. Parrillo, and R. A. Thomas, *Semidefinite optimization and convex algebraic geometry*. NY: SIAM, 2013.
- [18] R. Varga, *Gersgorin and His Circles*, 1st ed. Berlin, Germany: Springer, 2004.
- [19] S. Poljak and Z. Tuza, “The expected relative error of the polyhedral approximation of the maxcut problem,” *Operations Research Letters*, vol. 16, no. 4, pp. 191–198, 1994. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016763779490068X>
- [20] C. Helmberg, *Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization*. ZIB, 2000.
- [21] H. Benson and U. Saglam, “Mixed-integer second-order cone programming: A survey,” *Informs tutorials in operation research, Theory Driven by Influential Applications*, Oct 2014.
- [22] H. D. Sherali and C. H. Tuncbilek, “A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique,” *Jour. of Gl. Opt.*, vol. 2, no. 1, pp. 101–112, Mar 1992. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/BF00121304>.
- [23] T. Tao, *An introduction to measure theory*, 1st ed. New York, NY: Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2010, vol. 126.
- [24] L. Vancenberghet and S. Boyd, *Semidefinite programming*. NY: SIAM Review, 1996.
- [25] R. Cominetti, F. Facchinei, and J. Lasserre, *Modern Optimization Modelling Techniques*. Berlin, Germany: Springer Basel, 2012.
- [26] J.-C. Castano, A. Garcés, and O. Fosso, “A quadratic convex approximation for the short-term hydrothermal dispatch,” *IEEE PowerTech 2019-Milano Italia*, 2019.

- [27] I. Valencia, *Optimal Operation of Multiple Microgrids and Distributed Resources Under The Concept Of Virtual Power Plant Using Convex Optimization. Tesis de maestría*. Pereira, Colombia: Maestría en Ingeniería Eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira, 2018.
- [28] A. Wood and B. Wollenberg, *Power Generation, Operation and Control*, 2nd ed. New York, NY: John Wiley and Sons, 1996.
- [29] J. D. Molina and H. Rudnick, “Transmission of electric energy: a bibliographic review,” *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 8, no. 3, pp. 245–258, June 2010.
- [30] M.-A. Rios, J.-C. Castaño, A. Garces, and A. Molina-Cabrera, “Phase balancing in power distribution systems: A heuristic approach based on group-theory,” in *2019 IEEE Milan PowerTech*, June 2019, pp. 1–6.
- [31] D. Kothari and J. Dhillon, *Power system optimization*. New Delhi, India: Prentice Hall of India, 2006.
- [32] M. Giral, *Modelo de optimización convexa para la gestión de la demanda de la energía eléctrica en Colombia en el marco de redes inteligentes. Tesis de maestría*. Bogotá, Colombia: Maestría en Ingeniería Electrónica. Universidad Santo Tomas, 2018.
- [33] A. Garces and L. Rodriguez-Garcia, “An approach for nodal admittance matrix real-time estimation on dc microgrids,” in *2019 IEEE Gr. Tech. Conf. (GreenTech)*, April 2019, pp. 1–4.
- [34] F. Flanigan, *Complex Variables*. NY: Dover Books on Mathematics, 2010.
- [35] F. Capitanescu, “Critical review of recent advances and further developments needed in ac optimal power flow,” *Elec. Po. Syst. Res.*, vol. 136, pp. 57–68, 2016. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779616300141>
- [36] A. Garces, W. Gil-Gonzalez, and O. D. Montoya, “Wirtinger’s calculus for the load flow in power distribution grids,” in *2018 IEEE ANDESCON*, Aug 2018, pp. 1–5.
- [37] R. Hunger, *An introduction to complex differentials and complex differentiability*. Reporte técnico, Technische Universitat Munchen, Associate Institute for Signal Processing, 2007.
- [38] R. Fischer, *Appendix A: Wirtinger Calculus, in Precoding and Signal Shaping for Digital Transmission*. John Wiley and Sons, Ltd, 2005, pp. 405–413. [Online]. Available: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/0471439002.app1>.
- [39] S. H. Low, “Convex relaxation of optimal power flow-part i: Formulations and equivalence,” *IEEE Trans. on Contr. of Net. Syst.*, vol. 1, no. 1, pp. 15–27, March 2014.
- [40] S. Bose, S. Low, T. Teeraratkul, and B. Hassibi, “Equivalent relaxations of optimal power flow,” *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–1, 2014.

- [41] D. K. Molzahn and I. A. Hiskens, “Convex relaxations of optimal power flow problems: An illustrative example,” *IEEE Trans. on Circ. and Syst. I: Reg. P.*, vol. 63, no. 5, pp. 650–660, May 2016.
- [42] A. Garces, “A linear three-phase load flow for power distribution systems,” *IEEE Trans. on Pow. Syst.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–2, 2015.
- [43] S. Bolognani and S. Zampieri, “On the existence and linear approximation of the power flow solution in power distribution networks,” *IEEE Trans. on Pow. Syst.*, vol. PP, no. 99, pp. 1–10, 2015.
- [44] J. Marti, H. Ahmadi, and L. Bashualdo, “Linear power-flow formulation based on a voltage-dependent load model,” *IEEE Trans. on Pow. Del.*, vol. 28, no. 3, pp. 1682–1690, July 2013.
- [45] A. Garces, “A quadratic approximation for the optimal power flow in power distribution systems,” *Elec. Pow. Syst. Res.*, vol. 130, pp. 222–229, 2016. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037877961500276X>.
- [46] O. D. Montoya, L. Grisales-Noreña, D. Gonzalez-Montoya, C. Ramos-Paja, and A. Garces, “Linear power flow formulation for low-voltage dc power grids,” *Electr. Pow. Syst. Res.*, vol. 163, pp. 375–381, 2018. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378779618301962>
- [47] O. D. Montoya, W. Gil-Gonzalez, and A. Garces, “Optimal power flow on dc microgrids: A quadratic convex approximation,” *IEEE Trans. on Circ. and Syst. II: Ex. Br.*, vol. 66, no. 6, pp. 1018–1022, June 2019.
- [48] L. Perko, *Diferential equations and dynamical systems*. Berlin, Germany: Springer, 2001.
- [49] A. Garces, “Stability analysis of dc-microgrids: A gradient formulation,” *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, vol. 30, no. 6, pp. 985–993, Dec 2019. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s40313-019-00525-3>
- [50] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, The Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [51] S. M. V. Gasca, S. P. Londoño, and A. G. Ruiz, “Robust wide area control in power systems using linear matrix inequalities,” in *2016 IEEE PES Trans. Distribution Conf. and Expos.-Lat. Am. (PES T D-LA)*, Sep. 2016, pp. 1–6.
- [52] J. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*. London, England: Prentice Hall, 1994.
- [53] D. Q. Mayne, “Model predictive control: Recent developments and future promise,” *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 2967–2986, 2014. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0005109814005160>

- [54] C. Muller, D. E. Quevedo, and G. C. Goodwin, “How good is quantized model predictive control with horizon one?,” *IEEE Trans. on Autom. Cont.*, vol. 56, no. 11, pp. 2623–2638, Nov 2011.
- [55] D. Bertsekas, *Convex Optimization Algorithms*. Belmont, MA: Massachusetts Institute of Technology, Athena Scientific, 2015.
- [56] Y. Nesterov and A. Nemirovskii, *Interior point polynomial algorithms in convex programming*, 1st ed., ser. 10. Philadelphia, PA: SIAM studies in applied mathematics, 1994, vol. 1.
- [57] D. Luenberger and Y. Ye, *Linear and Nonlinear Programming*. Stanford: Springer, 2008.
- [58] N. Parikh and S. Boyd, *Proximal algorithms*. Stanford, CA: Now, Foundations and Trends in Optimization, 2013.
- [59] H. Bauschke and P. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. London, England: Springer, 2010.
- [60] G. Chen and Q. Yang, “An admm-based distributed algorithm for economic dispatch in islanded microgrids,” *IEEE Trans. on Ind. Inform.*, vol. 14, no. 9, pp. 3892–3903, Sep. 2018.

## ÍNDICE ALFABÉTICO

- ínfimo, inf, 30
- óptimo global, 28, 68
- óptimo local, 28
  
- bola, 57
  
- complemento de Shur, 109
- composición de funciones convexas, 64
- Condición de Lipschitz, 224
- condiciones de optimalidad, 75
- condiciones de primer orden, 73
- condiciones de segundo orden, 79
- condiciones de Slater, 93
- condiciones KKT, 97
- conjunto convexo, 53
- conjunto ordenado, 29
- cono convexo, 60, 105
- criterio de la primera derivada, 38
- criterio de la segunda derivada, 39
  
- desigualdad de Jensen, 61
- determinante, 107
- dual, 89
- Dualidad débil, 92
- dualidad débil, 49
  
- dualidad fuerte, 92
  
- eficiencia de Pareto, 129
- elipsoide, 57
- epigrafo, 63
- espacio afin, 35
- espacio lineal, 34
- Espectraedro, 110
  
- forma cuadrática, 32
- fronteras de un conjunto, 30
- función cóncava, 61
- función continua, 32
- función convexa, 61
- función dual, 88
- función estrictamente convexa, 69
- función fuertemente convexa, 70
- función indicatriz, 32
- función monótona, 31
  
- hiperplanos de separación, 82
  
- intersección de conjuntos convexos, 55
  
- KKT: Karush–Kuhn–Tucker, 97
  
- mapa no expansivo, 58

- matriz semidefinida, 34
- modelo convexo, 65
- monótonamente creciente,
  - monótonamente decreciente, 31
- multiplicador de Lagrange, 40
- norma, 36
- norma dual, 124
- Norma inducida, 37
- Norma matricial, 37
- optimización multiobjetivo, 129
- Optimización polinomial, 136
- optimización robusta, 125
- poliedro, 47
- politopo, 47, 56
- Politopo de Newton, 142
- producto interior o escalar, 36
- programación lineal (forma canónica), 43
- programación semidefinida, 106
- punto interior en PL, 256
- punto interior SDP, 254
- regiones planas, 28
- SDP, 106
- solución única, 69
- SOS, 137
- subdiferencial, 80
- subespacio lineal, 35
- subgradiente, 80, 82
- suma de Minkowski, 143
- suma de polinomios cuadráticos, 60
- supremo,sup, 30
- Teorema de la representación, 47
- Teorema de Weyl, 47
- Teorema del valor medio, 223
- Teorema fundamental del cálculo, 224
- traza, 107
- unicidad de la solución, 69

La optimización matemática es una herramienta clave en la operación y el análisis dinámico de los sistemas eléctricos modernos, con una amplia aplicación, que va desde problemas de despacho económico y flujo de carga óptimo, hasta el diseño de controles centralizados y análisis de estabilidad. Además de su aplicación práctica, los problemas de optimización responden a preguntas teóricas tales como la unicidad y globalidad de la solución, así como la convergencia de los algoritmos y la equivalencia entre el problema primal y dual. Las preguntas descritas pueden ser respondidas usando el paradigma de optimización convexa. Aunque la mayoría de problemas en sistemas eléctricos no son convexos, es posible generar aproximaciones convexas buscando un balance entre precisión y complejidad del modelo. Por ello, es fundamental contar con una adecuada fundamentación teórica y un conocimiento real del sistema a optimizar.

Así pues, este libro ha sido diseñado bajo la premisa del balance entre teoría y aplicación, con un enfoque autocontenido partiendo de lo teórico a lo práctico. El libro está dividido en cuatro secciones, a saber: La primera trata de la fundamentación teórica necesaria para abordar el resto del texto. En la segunda parte, se presentan conceptos complementarios tales como optimización cónica y suma de polinomios cuadráticos. En la tercera sección, se aborda la aplicación en diferentes problemas de operación y análisis dinámico de sistemas eléctricos. En la sección final, se analizan algoritmos de optimización convexa y su implementación en Python.

Los ejemplos y ejercicios fueron diseñados con esmero, esperando que sean valiosos para que el conocimiento del estudiante puede trascender de lo teórico a lo práctico y viceversa.

**Facultad de Ingenierías**  
Colección Textos Académicos

eISBN: 978-958-722-465-8

ISBN: 978-958-722-466-5

