

90283.00
(2882)

AYZA c.2

celeste

Edición provisional

Jorge Somoza


900024488 - BIBLIOTECA CEPAL

POBLACIONES TEORICAS

Serie B, n° 20
1965.

//

6968 ✓

AYYA

CENTRO LATINOAMERICANO DE DEMOGRAFIA

Sede: José M. Infante, 9. Casilla 91
Teléfono, 495071. Santiago, (Chile)

Subsede: Facultad de Ciencias Económicas y Sociales,
Ciudad Universitaria Rodrigo Faccio
Casilla, 5249. San José (Costa Rica.)

I. Definición de conceptos fundamentales

1. El número de habitantes de una población es función del momento que se considere. Para representarlo se utiliza la letra N mayúscula; la variable tiempo se representa con la letra t minúscula. Conforme con una convención corriente en matemáticas, el número de habitantes de una población en el momento t, se escribe así:

$$N(t)$$

Por su naturaleza se trata de una función no-negativa

$$N(t) \geq 0$$

que puede tomar sólo valores enteros 0, 1, 2, Es pues, discontinua. Por comodidad en el tratamiento analítico, sin embargo, vamos a suponer que $N(t)$ es una función continua y derivable.

Conviene recordar que algo parecido se hace con la función l_x de la tabla de vida. A pesar de que intuitivamente reconocemos que sólo puede tomar valores enteros y ser, consecuentemente, una función discontinua, adoptamos por conveniencia la hipótesis de que es continua y derivable.

La falsedad de la hipótesis no acarrea ningún inconveniente en la práctica; pero conviene tener presente que trabajamos con conceptos idealizados que no se corresponden estrictamente con la realidad.

La forma analítica que se asigna a $N(t)$ es algo que no examinaremos ahora, ni tampoco en este curso, salvo para dos casos particulares: $N(t) = \text{constante}$ y $N(t) = N_0 e^{\rho t}$ (ley exponencial, donde N_0 y ρ son parámetros).

Es frecuente atribuir a $N(t)$ las formas siguientes:

a) $N(t) = P_n(t)$; donde P_n es un polinomio de grado n . Corrientemente se hace $n = 1, 2$ o 3

b) $N(t) = a + bt + ct^2 + d \lg . t$ ^{1/}

Esta forma fue utilizada por Pearl para describir la población de Estados Unidos entre 1790 y 1910. Comparando los resultados obtenidos con ella con los provenientes de un $P_3(t)$, aquéllos fueron más satisfactorios.

c) $N(t) = \frac{N(\infty)}{1 + e^{-Pt}}$; logística de Verhulst-Pearl. ^{2/}
donde $N(\infty)$ y P son parámetros

2. Con el propósito de facilitar la comprensión de los conceptos y funciones que se presentan en esta primera parte, se examinarán los valores que toman esas funciones en el caso de dos poblaciones: una teórica, de la cual se conoce la forma analítica de la $N(t)$; la otra real, de la que se conocen los valores de $N(t)$ para fechas determinadas.

En el primer caso la forma analítica de $N(t)$ es el siguiente polinomio de tercer grado:

$$N(t) = 6\,000 + 234.t + 9.t^2 + 2.t^3$$

Para valores seleccionados de t , el valor de $N(t)$ resulta:

t	N(t)
0	6 000
1	6 245
2	6 520
3	6 837

En el segundo caso los valores conocidos de la función $N(t)$, que corresponden a la población de Chile, son:

^{1/} Pearl, Raymond, Studies in Human Biology, Williams y Wilkins Co., Baltimore, 1924.

^{2/} Lotka, Alfred A., Théorie Analytique des Associations Biologiques, Hermann et Cie., París, 1939 Deuxième Partie.

Variable auxiliar s	Fecha	t_s	Población $N(t_s)$
0	1 - I-1954	0.000000	6 742 837
1	1 - I-1955	1.000000	6 868 238
2	1 - IV-1955	1.246575	6 897 660
3	2 - IV-1955	1.249315	6 896 007
4	1 - VII-1955	1.495890	6 930 244
5	7 - VII-1955	1.512323	6 932 440
6	14 - VII-1955	1.531506	6 934 981
7	15 - VII-1955	1.534246	6 935 346
8	16 - VII-1955	1.536986	6 935 714
9	1 - VIII-1955	1.580822	6 941 566

3. Por ser $N(t)$ una función continua puede afirmarse que su integral entre dos momentos, t_0 y t_n , existe.

Veamos qué interpretación cabe atribuir a esta integral. Empecemos por considerarla como el límite de la suma S_n definida así,

$$S_n = N(\tau_1) (t_1 - t_0) + N(\tau_2) (t_2 - t_1) + \dots + N(\tau_n) (t_n - t_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n N(\tau_i) (t_i - t_{i-1}) \text{ o, más brevemente escribiendo}$$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

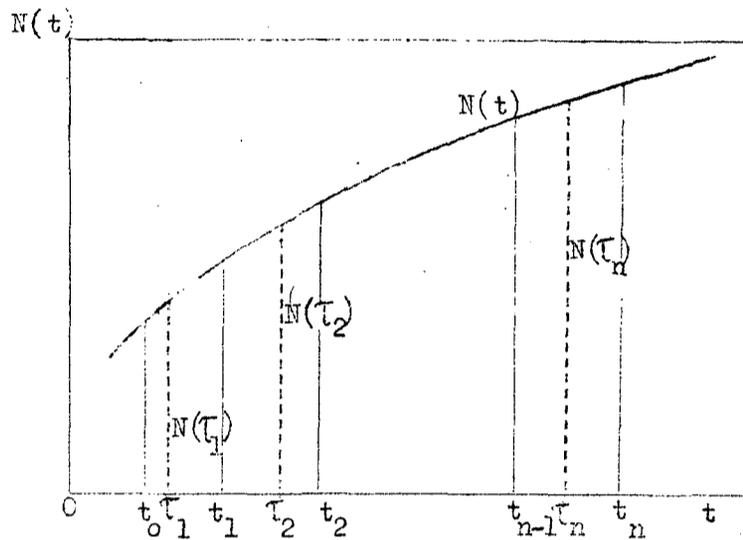
$$S_n = \sum_{i=1}^n N(\tau_i) \Delta t_{i-1} \quad \text{siendo } t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$$

cuando el número de subdivisiones (n) del intervalo t_0, t_n tiende a ∞ y la mayor de las subdivisiones Δt_i tiende a cero, es decir,

$$\int_{t_0}^{t_n} N(u) \cdot du = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n N(\tau_i) \Delta t_{i-1}$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$\Delta t_i \rightarrow 0$$



Conceptualmente S_n representa, en forma aproximada, el tiempo vivido (número de personas multiplicado por intervalo de tiempo) entre t_0 y t_n . La aproximación es tanto mayor cuanto mayor sea el número de subdivisiones y cuanto menor sea la más grande de ellas.

En el límite, cuando el número de intervalos tiende a infinito y el mayor de ellos a 0, se tiene la integral de $N(t)$ entre t_0 y t_n , que representa como S_n , pero en forma exacta, el tiempo vivido entre t_0 y t_n , o el número de personas-año.

La forma analítica de $N(t)$ determinará la de su integral.

En la práctica se presenta el problema de cálculo de la integral de valores numéricos de $N(t)$ conocidos para ciertos valores de t . Se resuelve por los métodos de integración numérica (regla de los trapecios, de Simpson, etc.)

Cálculo de la Integral de $N(t_0)$

1er. caso: $N(t) = 6\,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$

$$\int_{t_0}^{t_s} N(t) dt = 6\,000 (t_s - t_0) + \frac{234}{2} (t_s^2 - t_0^2) + \frac{9}{3} (t_s^3 - t_0^3) + \frac{2}{4} (t_s^4 - t_0^4)$$

t_0	t_s	Δt_0	$\int_{t_0}^{t_s} N(t) dt$	$\bar{N}(t_0, t_s)$
1	2	1	6 379.5	6 379.5
2	4	2	13 692.0	6 846.0

2° caso: Estimar $\int_{t_s}^{t_{s+1}} N(u) \cdot du$ de Chile entre dos fechas sucesivas

s	Fecha t_s	Población $N(t_s)$	Intervalo Δt_s (Años)	Tiempo vivido ^{a/} $\frac{N(t_s)+N(t_{s+1}))}{2} \Delta t_s$	Población media $\bar{N}(t_s, t_{s+1})$
0	0.000000	6 742 837			
1	1.000000	6 863 238	1.000000	6 805 538	6 805 538
2	1.246575	6 897 660	0.246575	1 697 335 163	6 882 949
3	1.249315	6 895 007	0.002740	18 624	6 897 834
4	1.495890	6 930 244	0.246575	1 705 023	6 914 126
5	1.512328	6 932 440	0.016438	113 674	6 931 342
6	1.531506	6 934 981	0.019178	133 127	6 933 711
7	1.534246	6 935 341	0.002740	18 725	6 935 164
8	1.536986	6 935 714	0.002740	18 726	6 935 530
9	1.580822	6 941 566	0.043836	303 912	6 938 640

a/ Aproximadamente igual a $\int_{t_s}^{t_{s+1}} N(u) \cdot du$

4. Definimos la población media, número medio de habitantes entre t_0 y t_n por el cociente entre la integral de $N(t)$, desde t_0 a t_n y la diferencia $t_n - t_0$. La designamos $\bar{N}(t_0, t_n)$ o $N(\bar{t})$.

$$\bar{N}(t_0, t_n) = N(\bar{t}) = \frac{\int_{t_0}^{t_n} N(u) \cdot du}{t_n - t_0} = \frac{\int_{t_0}^{t_n} N(u) \cdot du}{\Delta t_0}$$

$$t_0 \leq \bar{t} \leq t_n$$

Su forma es la de la media aritmética. Queda en evidencia si se escribe:

$$\bar{N}(t_0, t_n) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0 \\ t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, \text{ y} \\ t_0 \leq \tau \leq t_n}} \frac{\sum_{i=1}^n N(\tau_i) \Delta t_{i-1}}{\sum_{i=1}^n \Delta t_{i-1}} = N(\tau)$$

Observamos que el $\lim_{t_0 \rightarrow t} \bar{N}(t_0, t) = N(t)$

5. La diferencia finita de la función $N(t)$ en el intervalo t_0, t_1 la designamos $\Delta_{t_0, t_1} N(t)$.

$$\Delta_{t_0, t_1} N(t) = N(t_1) - N(t_0) \quad t_1 > t_0$$

Representa el número de individuos en que aumenta o disminuye la población entre t_0 y t_1 . Es positiva en el primer caso; negativa en el segundo.

Cálculo de las diferencias finitas de $N(t_s)$

1er. caso, $N(t_s) = P_3(t_s)$

(Diferencias sucesivas)

t_s	$N(t_s)$	$\Delta_{t_s, t_{s+1}} N(t_s)$	$\Delta_{t_s, t_{s+1}, t_{s+2}}^2 N(t_s)$	$\Delta_{t_s, \dots, t_{s+3}}^3 N(t_s)$
0	6 000			
1	6 245	245	30	
2	6 520	275	42	12
3	6 837	317	54	12
4	7 200	371		

2° caso: Población de Chile

s	Fecha t_s	Intervalo Δt_s t_s, t_{s+1}	Población $N(t_s)$	Aumento por intervalo $\Delta N(t_s)$ t_s, t_{s+1}	Aumento anual $\Delta N(t_s)$ t_s, t_{s+1} en miles
0	0.000000		6 742 837		
1	1.000000	1.000000	6 863 238	125 401	125.4
2	1.246575	0.246575	6 897 660	29 422	117.3
3	1.249315	0.002740	6 898 007	347	128.5
4	1.495890	0.246575	6 930 244	32 237	130.7
5	1.512320	0.016438	6 932 440	2 196	133.0
6	1.531506	0.019178	6 934 981	2 541	132.3
7	1.534246	0.002740	6 935 346	365	135.2
8	1.536986	0.002740	6 935 714	368	136.3
9	1.580822	0.043836	6 941 566	5 852	133.6

6. La diferencia dividida de la función $N(t)$ en el intervalo t_0, t_1 la designamos

$$\Delta_{t_0, t_1} N(t) = \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta N(t)}{\Delta t_0}$$

Representa el número de individuos en que aumenta o disminuye la población por unidad de tiempo (año), con arreglo a lo observado entre t_0 y t_1 y suponiendo que el cambio es proporcional al tiempo. Podría llamarse crecimiento medio o proporcional anual en función del intervalo t_0, t_1 . Cuando la población crece con el tiempo la diferencia dividida de $N(t)$ es positiva, y negativa cuando disminuye.

Cálculo de la diferencia dividida de N(t)

1er. caso, $N(t) = P_3(t)$

t_0	t_s	$\Delta N(t)$ t_0, t_s	Δt_0	$\Delta N(t)$ t_0, t_s
1	2	275	1	275
2	4	689	2	344

2° caso: Población de Chile

t_0	t_s	$\Delta N(t)$ t_0, t_s	$t_s - t_0$	$\Delta N(t)$ t_0, t_s (en miles)
1.534246	1.512328	- 2 906	- 0.021918	132.7
1.534246	1.531506	- 365	- 0.002740	135.2
1.534246	1.536986	368	0.002740	136.3
1.534246	1.580822	6 220	0.046576	133.5

7. La derivada de la función $N(t)$ en t la designamos:

$$\frac{d N(t)}{dt} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{N(t_1) - N(t)}{t_1 - t} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow t \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\overset{\Delta}{N}(t)}{\Delta t} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \overset{\Delta}{N}(t)_{t, t_1}$$

Es el límite de la diferencia dividida de $N(t)$ cuando Δt tiende a cero. Como aquélla, este límite representa el número de individuos en que aumenta o disminuye la población por unidad de tiempo. Tal límite existe por hipótesis y es por definición la derivada de la función $N(t)$. Lo designamos densidad anual de aumento (o disminución) en t . Es positivo si N crece y negativo si decrece.

El problema de calcular la derivada si no se conoce la forma analítica de la función, se resuelve mediante procedimientos de derivación numérica.

Cálculo de la derivada de $N(t_s)$

1er. caso: $N(t_s) = P_3(t_s)$

$$\frac{d}{dt} N(t) = 234 + 13.t + 6.t^2$$

t	$\frac{d}{dt} N(t)$	$\Delta_{t,t+1} N(t)$	$\Delta_{2,4} N(t)$
0	234	245	
1	250	275	
2	294	317	
3	342	371	344
4	402		

2° caso: Población de Chile. Determinar la derivada de $N(t_0)$ para el 15-VII-1955,

$$t = 1,5342, \text{ como límite de } t_{0,t_s} \Delta N(t)$$

Si se representa con $f(t/t_s, t_{s+1}, \dots, t_n)$ el valor que toma para t el polinomio de interpolación de grado $n-s$ que reproduce los valores de la función en los puntos t_s, t_{s+1}, \dots, t_n , y se utiliza el procedimiento de interpolación de Aitken, los cálculos pueden indicarse de la siguiente forma:

s	t	t_s	$t_s - t$	$f(t) = \Delta_{t,t_s} N(t)$	$f(t/t_s, t_{s+1})$	$f(t/t_s, t_{s+1}, t_{s+2})$	$f(t/t_s, t_{s+1}, t_{s+2}, t_{s+3})$
1	1.534246	1.512328	-0.021918	132.7			
2	1.534246	1.531506	-0.002740	135.2	135.6	135.8	
3	1.534246	1.536986	0.002740	136.3	135.8	135.8	135.8
4	1.534246	1.580822	0.046676	133.5	136.5		

8. El cociente

$$\frac{\Delta_{t_0, t_1} N(t)}{\bar{N}(t_0, t_1)}$$

se designa $r(t_0, t_1)$ y se denomina tasa anual media de crecimiento (o disminución) de la población. Podría también designarse tasa anual proporcional.

El numerador representa el número de individuos en que aumenta o disminuye la población por año, con arreglo a lo observado entre t_0 y t_1 suponiendo que el cambio es proporcional al tiempo; al dividir ese número por la población media \bar{N} , se obtiene el crecimiento medio anual por individuo.

Si entre t_0 y t_1 la población crece, luego $r(t_0, t_1) > 0$. Si $r(t_0, t_1) < 0$ significa que la población disminuye entre t_0 y t_1 .

Cálculo de la tasa anual media de crecimiento $r(t_0, t_s)$

1er. caso: $N(t) = P_3(t)$

t_0	t_s	$\Delta_{t_0, t_s} N(t)$	$\bar{N}(t_0, t_s)$	$r(t_0, t_s)$
1	2	275	6 379.5	0.04311
2	4	344	6 846.0	0.05025

2º caso: Población de Chile

15 de julio .455 t_0	Fechas seleccionadas t_s	Crecimiento medio anual $\frac{\Delta N(t)}{t_s - t_0}$	Población media $\bar{N}(t_0, t_s)$	Tasa anual media de crecimiento $r(t_0, t_s)$
1.534246	1.512328	132.7	6 933 893	0.01914
1.534246	1.531506	135.2	6 935 164	0.01949
1.534246	1.536966	136.3	6 935 530	0.01965
1.534246	1.580822	133.5	6 938 456	0.01924

9. El límite de la expresión anterior cuando $t_0 \rightarrow t$

$$\lim_{t_0 \rightarrow t} r(t_0, t) = \lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{\frac{\Delta N(t)}{t_0, t}}{\bar{N}(t_0, t)} = \frac{\frac{d}{dt} N(t)}{N(t)} = r(t)$$

es la tasa anual instantánea de crecimiento (o disminución) de la población. Representa, como $r(t_0, t)$, el crecimiento (o disminución), por individuo, en un año, en función de t . Si es positiva la población crece en t ; si es negativa disminuye.

Se puede también, obviamente, escribir

$$r(t) = \frac{d}{dt} \log_e N(t)$$

La tasa instantánea es equivalente a la derivada del logaritmo natural de $N(t)$. Tiene particular importancia en lo que veremos más adelante.

Si la forma analítica de $N(t)$ es conocida; el cálculo $r(t)$ se hace mediante procedimientos conocidos en cálculo de derivación. Si no es conocida, puede obtenerse un valor aproximado elaborando una derivación numérica.

Cálculo de la tasa anual instantánea de crecimiento $r(t)$

1er. caso: $N(t) = P_3(t)$

t	$\frac{d}{dt} N(t)$	$\bar{N}(t)$	$r(t)$	$r(t_1, t_2)$	$r(t_2, t_4)$
0	234	6 000	0.03900		
1	258	6 245	0.04131		
2	294	6 520	0.04509	0.04311	
3	342	6 837	0.05002		0.05025
4	402	7 208	0.05577		

2° caso: Población de Chile. Determinar $r(t)$ para el 15-VII-1955, $t = 1.5342$, como límite de:

$$\frac{\Delta N(t)}{t, t_s} \quad \text{cuando } t_s \rightarrow t.$$

$$\bar{N}(t, t_s)$$

t	t_s	$t_s - t$	$r(t, t_s)$	$r(t/t_s, t_{s+1})$	$r(t/t_s, t_{s+1}, t_{s+2})$	$r(t/t_s, t_{s+1}, t_{s+2}, t_{s+3})$
1.534246	1.512328	-0.021918	0.01914			
1.534246	1.531506	-0.002740	0.01949	0.01954	0.01957	
1.534246	1.536986	0.002740	0.01965	0.01957	0.01958	0.01957
1.534246	1.580822	0.046576	0.01924	0.01968		

Se emplea una notación y un procedimiento similares a los presentados en el cuadro de la página 9.

10. Si la población $N(t)$ es cerrada su incremento (o disminución) entre dos momentos, t_0 y t_1 , se deberá a la diferencia entre los nacimientos y las muertes producidas durante ese intervalo.

Designaremos el número de nacimientos ocurridos entre t_0 y t_1

$$B(t_0, t_1)$$

y el de muertes:

$$D(t_0, t_1)$$

Podrá escribirse, en consecuencia,

$$\int_{t_0}^{t_1} N(t) = N(t_1) - N(t_0) = B(t_0, t_1) - D(t_0, t_1)$$

Pudiendo ser su valor positivo, negativo o nulo según sea $B(t_0, t_1) > D(t_0, t_1)$; $B(t_0, t_1) < D(t_0, t_1)$ o $B(t_0, t_1) = D(t_0, t_1)$, respectivamente. $B(t_0, t_1)$ y $D(t_0, t_1)$ son, por su naturaleza, cantidades positivas (o nulas).

11. Si el número de nacimientos $B(t_0, t_1)$ ocurridos entre t_0 y t_1 , se divide por la amplitud del intervalo, $t_1 - t_0 = \Delta t_0$, tomada en valor absoluto, se obtiene una estimación de los nacimientos de un año en función de los producidos entre t_0 y t_1 . A ese valor se lo designa número medio anual de nacimientos en función de t_0, t_1 . Es por definición

$$\frac{B(t_0, t_1)}{\Delta t_0}$$

$$\Delta t_0 > 0$$

Como, según se ha visto, $B(t_0, t_1)$ debe ser un número positivo (o nulo), el número medio anual de nacimientos es forzosamente también positivo (o nulo).

12. Si el número de muertes $D(t_0, t_1)$ ocurridas, entre t_0 y t_1 se divide por la amplitud del intervalo $t_1 - t_0 = \Delta t_0$, tomada en valor absoluto, se obtiene una estimación de las muertes de un año en función de las producidas entre t_0 y t_1 . A ese valor se lo designa número medio anual de muertes en función de t_0, t_1 . Es por definición:

$$\frac{D(t_0, t_1)}{\Delta t_0}$$

$$\Delta t_0 > 0$$

Como $D(t_0, t_1)$ debe ser un número positivo (o nulo) el número medio anual de defunciones es forzosamente también positivo (o nulo).

13. Ejemplos

1^{er} caso: $P_3(t) = 6\ 000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$

$$\begin{aligned} \Delta_{t,t+1} P_3(t) &= \Delta_1 P_3(t) = 234 [(t+1)-t] + 9 [(t+1)^2 - t^2] + 2 [(t+1)^3 - t^3] \\ &= 245 + 24t + 6t^2 = B(t,t+1) - D(t,t+1) \end{aligned}$$

$\Delta t = 1$

t	$\Delta_1 P_3(t)$
0	245
1	275
2	317
3	371

El aumento anual de la población, es decir, la diferencia entre el número de nacimientos y muertes tiene la forma: $245 + 24t + 6t^2$, un polinomio de segundo grado.

Si $\Delta t = 2$, resulta $\Delta_2 P_3(t) = 520 + 60t + 12t^2$

En general si $\Delta t = h$

$$\begin{aligned} \Delta_h P_3(t) &= 234(h) + 9 [(t+h)^2 - t^2] + 2 [(t+h)^3 - t^3] \\ &= (234h + 9h^2 + 2h^3) + t(18h + 6h^2) + t^2 6h. \end{aligned}$$

La forma de B y D no está determinada. Puede hacerse, por ejemplo, $B = 3D$ y de ahí deducirse:

$$\begin{aligned} B(t,t+1) &= 367.5 + 36t + 9t^2 \\ D(t,t+1) &= 122.5 + 12t + 3t^2 \\ \Delta_1 P_3(t) &= 245.0 + 24t + 6t^2 \end{aligned}$$

Como ésta hay, desde luego, infinidad de soluciones; la adoptamos para nuestro ejemplo.

En general, para $\Delta t = h$, se tendrá

$$B(t, t+h) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta P_3(t)}{h}$$

$$D(t, t+h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta P_3(t)}{h}$$

Las formas particulares que toma $\frac{\Delta P_3(t)}{h}$ para $h = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ son:

$$\frac{\Delta P_3(t)}{h} = (234h + 9h^2 + 2h^3) + t(18h + 6h^2) + t^2 6h$$

$$h = 2 \quad \frac{\Delta P_3(t)}{2} = 520 + 60t + 12t^2$$

$$h = 1 \quad \frac{\Delta P_3(t)}{1} = 245 + 24t + 6t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \quad \frac{\Delta P_3(t)}{\frac{1}{2}} = 119.5 + 10.5t + 3t^2$$

$$h = \frac{1}{4} \quad \frac{\Delta P_3(t)}{\frac{1}{4}} = 59.09375 + 4.875t + 1.5t^2$$

$$\text{De donde } B(t, t+2) = 780 + 90t + 18t^2$$

$$B(t, t+1) = 367.5 + 36t + 9t^2$$

$$B(t, t+\frac{1}{2}) = 179.25 + 15.75t + 4.5t^2$$

$$B(t, t+\frac{1}{4}) = 88.640625 + 7.3125t + 2.25t^2$$

14. El límite del número medio anual de nacimientos en función de t_0, t cuando $t_0 \rightarrow t$ se designa densidad anual de nacimientos en t o simplemente densidad de nacimiento en t , si puede sobreentenderse que la medida es anual. Se simboliza con $B(t)$.

$$B(t) = \lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{B(t_0, t)}{t - t_0} = \lim_{\substack{\Delta t_0 \rightarrow 0 \\ t_0 \rightarrow t}} \frac{B(t_0, t)}{\Delta t_0}$$

Como el número medio anual de nacimientos se trata de una función que toma sólo valores positivos (o es nula).

15. El límite del número medio anual de muertes en función de t_0, t cuando $t_0 \rightarrow t$ se designa densidad anual de muertes en t o, simplemente densidad de muertes en t . Se simboliza $D(t)$.

$$D(t) = \lim_{t_0 \rightarrow t} \frac{D(t_0, t)}{t - t_0} = \lim_{\substack{\Delta t_0 \rightarrow 0 \\ t_0 \rightarrow t}} \frac{D(t_0, t)}{\Delta t_0}$$

Al igual que el número medio anual de muertes, toma sólo valores positivos (o es nulo).

16. Relación entre la densidad anual de crecimiento $\left(\frac{d}{dt} N(t)\right)$ y la densidad de nacimientos y muertes.

Se ha visto que

$$\Delta_{t_0, t} N(t) = B(t_0, t) - D(t_0, t)$$

Si se divide por $\Delta t_0 = t - t_0$, se tiene

$$\Delta_{t_0, t} N(t) = \frac{B(t_0, t)}{\Delta t_0} - \frac{D(t_0, t)}{\Delta t_0}$$

o sea, la diferencia dividida de la función $N(t)$, el crecimiento medio anual de la población, es igual a la diferencia entre el número medio anual de nacimientos y el número medio anual de muertes.

En el límite, para $\Delta t \rightarrow 0$, se tiene:

$$\frac{d}{dt} N(t) = B(t) - D(t)$$

La densidad anual de aumento (o disminución) en t es igual a la diferencia entre la densidad de nacimientos y de muertes en ese momento.

17. Ejemplos

1^{er} caso
$$P_3(t) = 6\,000 + 234t + 9t^2 + 2t^3$$

$$\frac{d}{dt} N(t) = 234 + 18t + 6t^2 = B(t) - D(t)$$

Si hacemos, como antes, $B = 3D$, se tiene:

$$B(t) = \frac{3}{2} \frac{d}{dt} N(t) \quad y$$

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} N(t)$$

tenemos una posible solución de la forma de $B(t)$ y $D(t)$.

Puede ser interesante comprobar que con los valores de nacimientos medios anuales para $t = 1$ y $h = 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, se puede estimar el valor de $B(1)$ que, conforme con lo anterior, es:

$$B(t) = 351 + 27t + 9t^2$$

$$B(1) = 387$$

2º caso

Determinar la densidad media anual de nacimientos y defunciones para el 15-VIII-1955, $t = 1.5342$, como límite de la expresión: $\frac{B(t_0, t)}{\Delta t_0}$, cuando

t_0 tiende a t y Δt_0 tiende a 0.

s	t_0	t_s	$t_s - t_0$	$\frac{f(t_s) = B(t_0, t_s)}{\Delta t_0}$	$f(t/t_s, t_{s+1})$	$f(t, t_s, t_{s+1}, t_{s+2})$	$f(t_0/t_s, \dots, t_{s+3})$
							(en miles)
0	1.534246	1.512328	-0.021918	223.7			
1	1.534246	1.531506	-0.002740	227.8	228.4	228.8	
2	1.534246	1.536986	0.002740	230.0	228.9	229.0	228.9
3	1.534246	1.580822	0.046576	224.7	230.3		

s	t	t_s	$t_s - t_0$	$\frac{f(t_s) = D(t, t_s)}{\Delta t}$	$f(t/t_s, t_{s+1})$	$f(t/t_s, t_{s+1}, t_{s+2})$	$f(t/t_s, \dots, t_{s+3})$
							en miles
0	1.534246	1.512328	-0.021918	90.9			
1	1.534246	1.531506	-0.002740	91.2	91.2	91.7	
2	1.534246	1.536986	0.002740	92.3	91.8	91.8	91.7
3	1.534246	1.580822	0.046576	91.3	92.4		

18. El cociente

$$\frac{B(t_0, t_1)}{\Delta t_0} \div \bar{N}(t_0, t_1) = \frac{B(t_0, t_1)}{\int_{t_0}^{t_1} N(u) du}$$

se designa $b(t_0, t_1)$ y se denomina tasa anual media de natalidad.

El numerador representa el número medio anual de nacimientos; el denominador la población media del período t_0, t_1 . El cociente, por lo tanto, es una medida anual de la natalidad por individuo.

La $b(t_0, t_1)$ es necesariamente positiva (o nula)

19. El cociente

$$\frac{D(t_0, t_1)}{\Delta t_0} \div \bar{N}(t_0, t_1)$$

se designa $d(t_0, t_1)$ y se denomina tasa anual media de mortalidad.

El numerador representa el número medio anual de muertes; el denominador la población media del período t_0, t_1 . El cociente, en consecuencia, es una medida anual de la mortalidad por individuo.

La $d(t_0, t_1)$ es necesariamente positiva o nula.

20. El límite de $b(t_0, t)$ cuando $t_0 \rightarrow t$ es la tasa anual instantánea de natalidad en el momento t . Se escribe:

$$b(t) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t \\ \Delta t_0 \rightarrow 0}} b(t_0, t) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t \\ \Delta t_0 \rightarrow 0}} \frac{B(t_0, t)}{\Delta t_0} \div \bar{N}(t_0, t) = \frac{B(t)}{N(t)}$$

Es necesariamente positiva o nula.

21. El límite de $d(t_0, t)$ cuando $t_0 \rightarrow t$ es la tasa anual instantánea de mortalidad en el momento t . Se designa $d(t)$. Es

$$d(t) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t \\ \Delta t_0 \rightarrow 0}} d(t_0, t) = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow t \\ \Delta t_0 \rightarrow 0}} \frac{D(t_0, t)}{\Delta t_0} \div \bar{N}(t_0, t) = \frac{D(t)}{N(t)}$$

Es necesariamente positiva o nula.

22. En el punto 16 se vio que existe la siguiente relación entre la densidad anual de crecimiento, de nacimientos y de muertes:

$$\frac{d}{dt} N(t) = B(t) - D(t)$$

Dividiendo por $N(t)$, límite de $\bar{N}(t_0, t)$ para $t_0 \rightarrow t$, se obtiene:

$$r(t) = b(t) - d(t)$$

23. Ejemplos

1^{er} caso: $N(t) = P_3(t)$

Cálculo de $b(1, t)$				$t = 3, 2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}$		
t_0	t	Δt_0	$\int_{t_0}^t N(u) \cdot du$	$\bar{N}(t_0, t)$	$\frac{B(t_0, t)}{\Delta t_0}$	$b(t_0, t)$
1	3	2	13 054.000	6 527.00	444.00	0.06803
1	2	1	6 379.500	6 379.50	412.50	0.06466
1	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3 155.406	6 310.81	399.00	0.06322
1	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1 569.393	6 277.57	392.81	0.06257

Cálculo de $b(t)$		$B(t) = 351 + 27t + 9t^2$	
t	$B(t)$	$N(t)$	$b(t)$
0	351	6 000	0.05850
1	387	6 245	0.06197
2	441	6 520	0.06764
3	513	6 837	0.07503

2° caso: Población de Chile

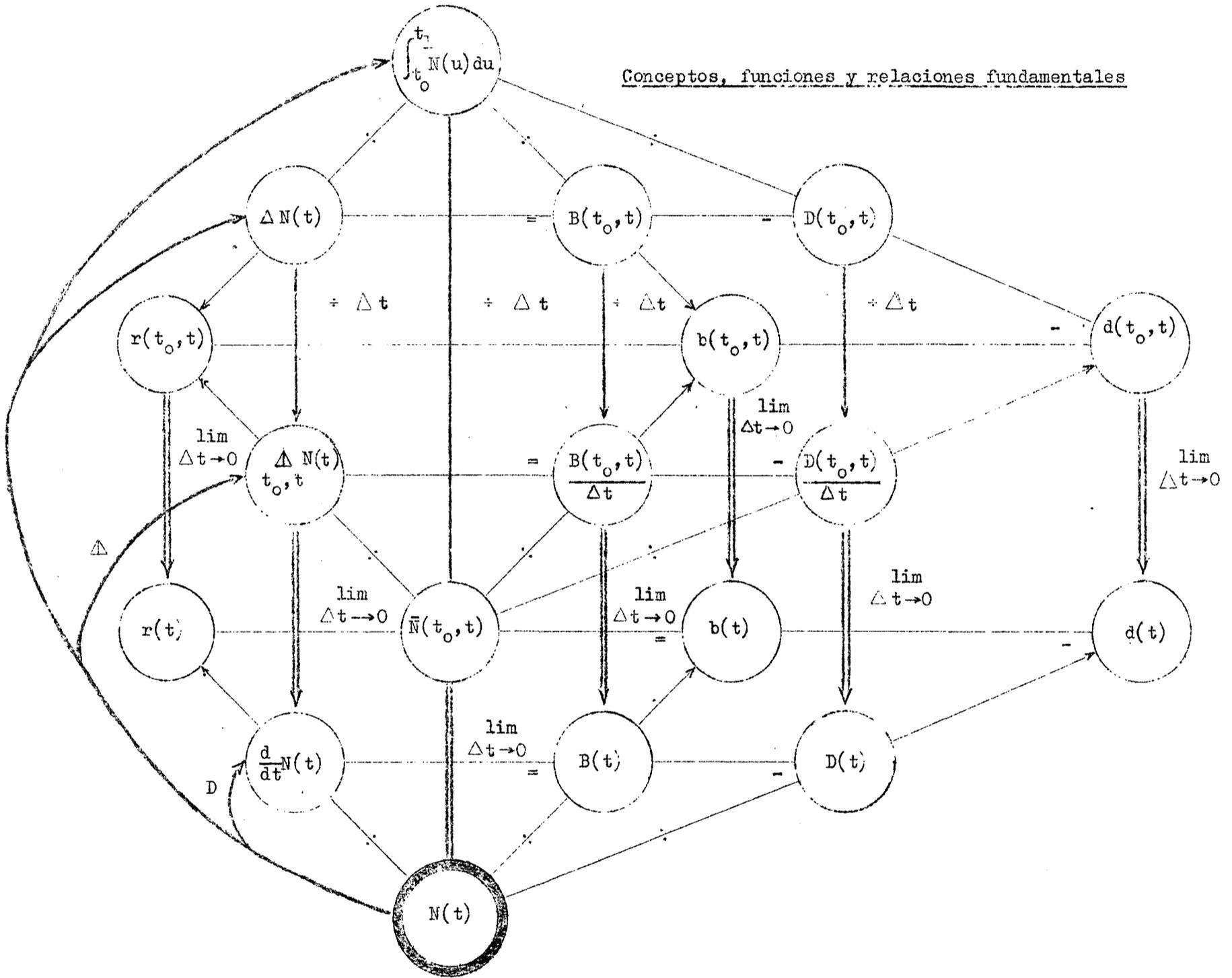
CALCULO DE TASAS ANUALES MEDIAS DE NATALIDAD Y MORTALIDAD

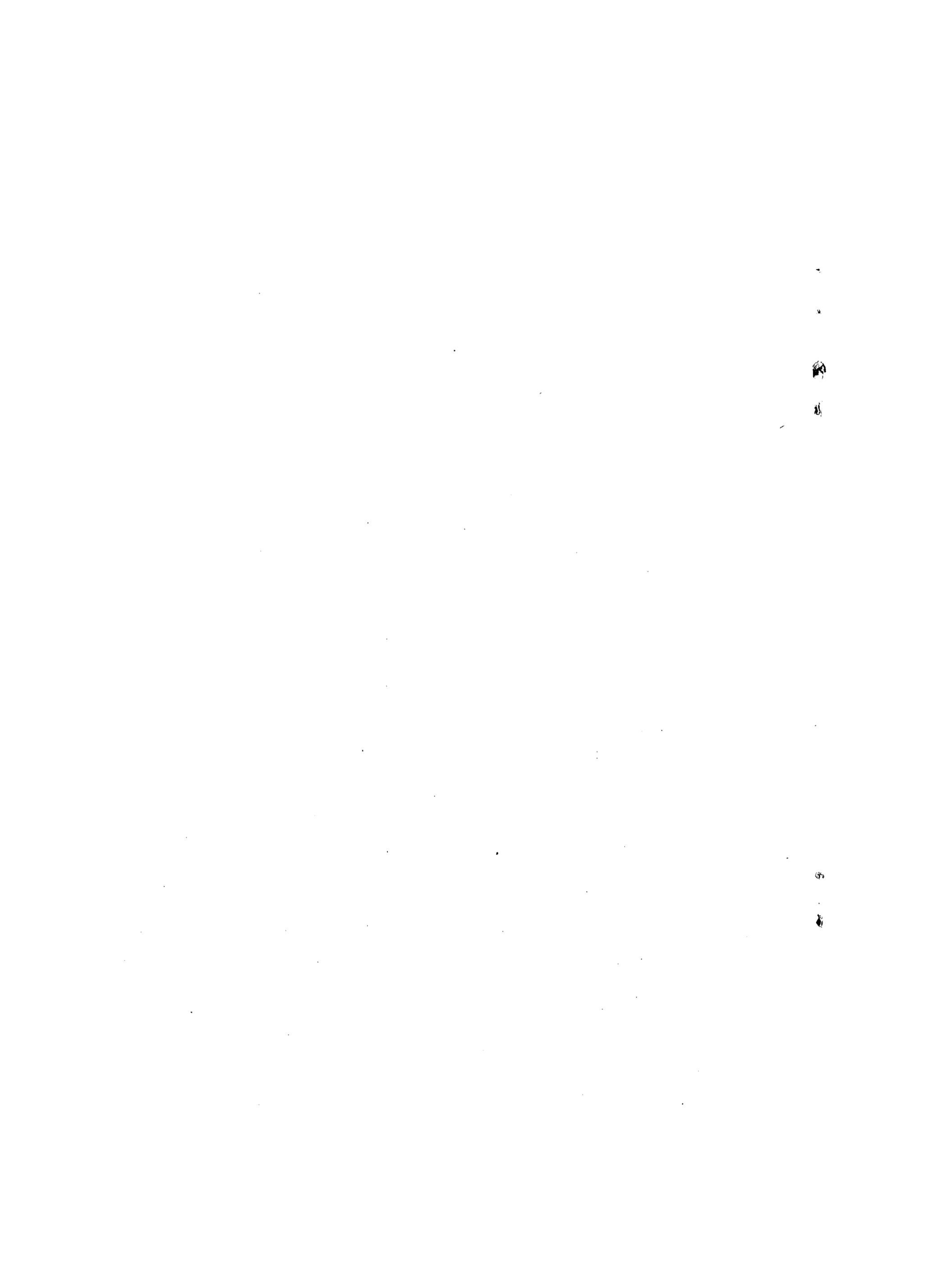
Variable auxiliar	t_s	Δt_s	$\frac{B(t_s, t_{s+1})}{\Delta t_s}$	$\frac{D(t_s, t_{s+1})}{\Delta t_s}$	$\bar{N}(t_s, t_{s+1})$	$b(t_s, t_{s+1})$	$d(t_s, t_{s+1})$	
1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0.000000		(En miles)					
		1.000000	209.9	84.5	6 805 538	0.0308	0.0124	
1	1.000000	0.246575	207.3	88.0	6 882.949	0.0301	0.0128	
2	1.246575	0.002740	201.9	73.3	6 897 834	0.0293	0.0106	
3	1.249315	0.246575	206.6	75.9	6 914 126	0.0299	0.0110	
4	1.495890	0.016438	226.1	92.2	6 931 342	0.0326	0.0133	
5	1.512328	0.019178	223.1	90.8	6 933 711	0.0322	0.0131	
6	1.531506	0.002740	227.8	92.6	6 935 164	0.0328	0.0134	
7	1.534246	0.002740	230.0	93.7	6 935 530	0.0332	0.0135	
8	1.536986	0.043836	224.9	91.3	6 938 640	0.0324	0.0132	
9	1.580822							

CALCULO DE LA TASA ANUAL INSTANTANEA DE NATALIDAD Y MORTALIDAD PARA EL 15-VII-1955

$B_{15-VII-55}$	=	228.9	(calculado en pág. 19)
$D_{15-VII-55}$	=	91.7	(calculado en pág. 19)
$N_{15-VII-55}$	=	6 935 346	
$b_{15-VII-55}$	=	0.0330	
$d_{15-VII-55}$	=	0.0132	
$r_{15-VII-55}$	=	0.0198	

Conceptos, funciones y relaciones fundamentales





24. Hasta aquí no se ha considerado la edad de los individuos. Sólo se ha hablado del total $N(t)$, la descomposición del aumento o disminución $B(t) - D(t)$ y relaciones derivadas de estos conceptos. Se introducirá en lo que sigue esa variable.

El número de individuos en la población $N(t)$ con edades comprendidas entre x_0 y x_1 se designa

$$N^{(t)}(x_0, x_1)$$

si se estudia la situación en un momento determinado, es decir, un valor dado de t , puede escribirse simplemente

$$N(x_0, x_1)$$

sobreentendiendo que el número de personas está referido a t . No debe perderse de vista, sin embargo, que el número de personas en un intervalo de edad x_0, x_1 depende no sólo de esas edades sino también del momento que se considere (t), es una función del tiempo (t) y de la edad (x).

La edad x se considera siempre, en estas expresiones medida exactamente, es decir, como en las tablas de vida.

La proporción entre el número de individuos de menos de x años y el número total de individuos en la población, se designa

$$c^{(t)}(x) = \frac{N^{(t)}(0, x)}{N^{(t)}(0, \omega)}$$

Con ω se indica la edad menor para la cual $\omega_0 = 1$. Se tiene en particular

$$c^{(t)}(0) = 0 \text{ por ser } N^{(t)}(0, 0) = 0, \text{ y}$$

$$c^{(t)}(\omega) = 1$$

La diferencia entre dos valores de $c^{(t)}(x)$

$$c^{(t)}(x_1) - c^{(t)}(x_0) = c^{(t)}(x_1, x_0)$$

en que $x_1 \geq x_0$

representa la proporción entre el número de personas con edades entre x_0 y x_1 con respecto al total de la población.

Para $x_0 = x_1$ es $C^{(t)}(x_0, x_0) = 0$; si es $x_0 = 0$ y $x_1 = \omega$, $C^{(t)}(x_0, x_1) - C^{(t)}(0, \omega) = 1$

25. La diferencia dividida de la función $C^{(t)}(x)$ entre x_0 y x_1 se simboliza $c^{(t)}(x_0, x_1)$

$$c^{(t)}(x_0, x_1) = \frac{\Delta C^{(t)}(x)}{\Delta x_0} = \frac{C^{(t)}(x_1) - C^{(t)}(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{C^{(t)}(x_0, x_1)}{\Delta x_0}$$

y se representa la proporción media de distribución por edades entre x_0 y x_1

26. El límite de la proporción media de distribución por edades cuando x_0 tiende hacia x_1 , o $\Delta x_0 \rightarrow 0$, se escribe

$$c(x_1) = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow x_1 \\ \Delta x_0 \rightarrow 0}} \frac{\Delta C^{(t)}(x)}{\Delta x_0} = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow x_1 \\ \Delta x_0 \rightarrow 0}} \frac{C^{(t)}(x_1) - C^{(t)}(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\substack{x_0 \rightarrow x_1 \\ \Delta x_0 \rightarrow 0}} \frac{C^{(t)}(x_0, x_1)}{\Delta x_0}$$

y se llama densidad instantánea, o simplemente densidad de distribución por edades a la edad x_1 .

En tanto que la proporción media de distribución por edades, es una función de x_0 y x_1 , la distribución instantánea de densidad es sólo función de la edad x_1 .

27. Es obvio que la función $c^{(t)}(x)$ es una primitiva de la densidad $c^{(t)}(x)$, es decir:

$$C^{(t)}(x) = \int_0^x c^{(t)}(u) du$$

como se comprueba calculando la derivada de $C^{(t)}(x)$

$$\frac{d}{dx} C^{(t)}(x) = c^{(t)}(x)$$

28. Es necesario incorporar a esta altura las funciones de la tabla de vida que como se sabe permiten medir las probabilidades de muerte y de supervivencia según la edad de las personas. Se adopta la notación empleada por Lotka que difiere de la notación internacional de los actuarios.

Se designa $p(x)$, la probabilidad que tiene un recién nacido de alcanzar la edad x ; lo que con la notación habitual se escribe:

$${}_x p_0 = \frac{l_x}{l_0}$$

Se supone además que $l_0 = 1$. Por lo tanto es también cierto que

$$p(x) = l_x$$

Lotka emplea la letra L_0 para designar la esperanza de vida al nacer.

$$L_0 = \int_0^{\omega} p(x) dx \quad e_0^o = \int_0^{\omega} \frac{l_x}{l_0} dx$$

Resumiendo:

Concepto	Notación	
	Lotka	Actuarial
Probabilidad de sobrevivir de 0 a x	$p(x)$	${}_x p_0$
Población estacionaria total	L_0	T_0
Esperanza de vida al nacer	L_0	e_0^o

29. Ejemplos

Se consideran las siguientes relaciones:

$$N(o, x) = T_o - T_x$$

$$N(o, \omega) = T_o$$

$$C(x) = \frac{N(o, x)}{N(o, \omega)} = \frac{T_o - T_x}{T_o}$$

$$\Delta_{x_0, x_1} C(x) = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{T_o - T_{x_1}}{T_o} - \frac{T_o - T_{x_0}}{T_o}}{x_1 - x_0} = \frac{T_{x_0} - T_{x_1}}{T_o(x_1 - x_0)} = c(x_0, x_1)$$

$$\frac{d}{dx} C(x) = \frac{d}{dx} \frac{T_o - T_x}{T_o} = -\frac{1}{T_o} \frac{d}{dx} T_x$$

como $\frac{d}{dx} T_x = -\frac{1}{x}$

resulta $\frac{d}{dx} C(x) = \frac{1}{T_o x}$, valor al que puede también llegarse calculando el lí-

mite de $\Delta_{x_1, x} C(x)$ para $x_1 \rightarrow x$

a) Cálculo de la densidad media de distribución por edades entre x_0 y x_1

Tabla de vida de Estados Unidos, 1949-1951

$$T_0 = 6\ 807\ 222$$

$$l_{20} = 95\ 366$$

x_0	x_1	Δx_0	T_{x_0}	T_{x_1}	$c(x_0)$ $T_0 - T_{x_0} / T_0$	$c(x_1)$ $T_0 - T_{x_1} / T_0$	$\Delta c(x_0, x_1)$
18	20	2	5 673 956	4 882 985	0.25462	0.28268	0.01403
19	20	1	4 978 412	4 882 985	0.26866	0.28268	0.01402
20	21	1	4 882 985	4 787 683	0.28268	0.29668	0.01400
20	22	2	4 882 985	4 692 513	0.28268	0.31066	0.01399

b) Determinar $c(20)$ con los datos anteriores

$$c(19,20) = 0.01402$$

$$c(20,21) = 0.01400$$

$$c(20) = \frac{l_{20}}{T_0} = \frac{95\ 366}{6\ 807\ 222} = 0.01401$$

30. Determinación del número de individuos $N^{(t)}(x_0, x_1)$ con edades entre x_0 y x_1 en un momento dado t , en las condiciones establecidas en los puntos anteriores (población representada por una función continua y derivable; cerrada y sometida a mortalidad constante por edades).

El conjunto de personas considerado proviene de los nacimientos ocurridos entre dos momentos, T_0 y T_1 ; es decir: $B(T_0, T_1)$, donde $T_1 > T_0$.

La relación entre T , x y t es obviamente la siguiente, siendo x_1 la mayor entre las dos edades límites consideradas ($x_1 > x_0$)

$$T_0 = t - x_1$$

$$T_1 = t - x_0$$

La relación de supervivencia aplicable al conjunto de nacimientos $B(T_0, T_1)$ para obtener el número de sobrevivientes en el momento t es:

$${}_x P_{x_0, (\tau_1 - \tau_0)} = P_b = \frac{\tau_1 - \tau_0 \cdot l_{x_0}}{(\tau_1 - \tau_0) \cdot l_0} = \frac{\Delta \tau \cdot l_{x_0}}{\Delta \tau \cdot l_0}$$

Se ha adoptado un símbolo para representar la relación de supervivencia en cuestión que muestra explícitamente: el intervalo entre las edades x_1 y x_0 ($x_1 - x_0 = \tau_1 - \tau_0$); la indicación de estas mismas edades ($x_1 = x_0 + \tau_1 - \tau_0$) y la significación de la relación (A), relación ésta aplicable a un conjunto de personas de igual edad, en el caso particular a los nacimientos ocurridos entre τ_0 y τ_1 , a fin de determinar el número esperado de sobrevivientes en un momento dado, en t y con edades x_0, x_1 , en el mismo caso.

El producto $B(\tau_0, \tau_1)$ por la relación presentada P_b da el número de personas en t con edades entre x_0 y x_1 .

$$N^{(t)}(x_0, x_1) = B(\tau_0, \tau_1) P_b = B(\tau_0, \tau_1) \frac{\Delta \tau \cdot l_{x_0}}{\Delta \tau \cdot l_0}$$

$$N^{(t)}(x_0, x_1) = B(\tau_0, \tau_1) \cdot \frac{1}{l_0} \cdot \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta \tau} l_t \, dt}{\Delta \tau}$$

$$N^{(t)}(x_0, x_1) = B(\tau_0, \tau_1) \cdot \frac{1}{l_0} \cdot \frac{l \cdot \Delta \tau}{\Delta \tau}; \quad t - \tau_1 = x_0 \leq \xi \leq x_1 = t - \tau_0$$

El número de personas en t con edades entre x_0 y x_n es igual, obviamente, a la suma

$$N^{(t)}(x_0, x_n) = N^{(t)}(x_0, x_1) + N^{(t)}(x_1, x_2) + \dots + N^{(t)}(x_{n-1}, x_n)$$

sobrevivientes, respectivamente, de los nacimientos ocurridos entre τ_0 y τ_n :

$$B(\tau_0, \tau_1) + B(\tau_1, \tau_2) + \dots + B(\tau_{n-1}, \tau_n)$$

siendo $\tau_0 = t - x_0$ $\tau_1 = t - x_1$... $\tau_n = t - x_n$

De un modo aproximado podemos escribir:

$$N^{(t)}(x_0, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} N^{(t)}(x_i, x_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} B(\tau_i, \tau_{i+1}) p(\xi_i)$$

siendo $t - \tau_{i+1} \leq x_i \leq t - \tau_i$; lo que puede también escribirse, poniendo

$$\Delta \tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$$

$$N^{(t)}(x_0, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{B(\tau_i, \tau_{i+1})}{|\Delta \tau_i|} p(\xi_i) \cdot |\Delta \tau_i|$$

El límite de esta expresión cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta \tau_i \rightarrow 0$ vale:

$$N^{(t)}(x_0, x_n) = \int_{x_0}^{x_n} B(t-x) p(x) dx$$

pues

$$\lim_{\Delta \tau_i \rightarrow 0} \frac{B(\tau_i, \tau_{i+1})}{|\Delta \tau_i|} = B(\tau_i) = B(t-x_i)$$

$$\tau_{i+1} \rightarrow \tau_i$$

$$\lim p(\xi_i) = p(t - \tau_i) = p(x_i)$$

$$\Delta \tau_i \rightarrow 0$$

$$\lim |\Delta \tau_i| = \lim |\Delta x_i|$$

En particular, para $x_0 = 0$ y $x_n = \omega$, el número total de habitantes de la población vale

$$N^{(t)}(0, \omega) = \int_0^{\omega} B(t-x) p(x) dx$$

Por otra parte de: $N^{(t)}(x_0, x_n) = B(\tau_0, \tau_n) p(\xi)$ siendo $x_0 \leq \xi \leq x_n$

se deduce dividiendo por $\Delta \tau_0$:

$$\frac{N^{(t)}(x_0, x_n)}{\Delta \tau_0} = \frac{B(\tau_0, \tau_n)}{\Delta \tau_0} p(\xi)$$

y el límite de esta expresión, para $\Delta \tau_0 \rightarrow 0$, da la densidad de individuos a la edad x_0 , $N^{(t)}(x_0)$ en función de la densidad de nacimientos en el momento

$\tau_0 = t - x_0$. Es decir

$$N^{(t)}(x_0) = B(t - x_0) p(x_0)$$

Ya que si $\tau_n \rightarrow \tau_0$; $\Delta \tau_0 \rightarrow 0$, $x_n \rightarrow x_0$, $x_n = t - \tau_n$, y $\xi \rightarrow x_0$; ($x_0 \leq \xi \leq x_n$).

31. Puede ahora, sin perderse generalidad, darse otra forma a las funciones $C(x)$ y $c(x)$ definidas anteriormente

$$C^{(t)}(x) = \frac{N^{(t)}(0, x)}{N^{(t)}(0, \omega)} = \frac{\int_0^x B(t-x) p(x) dx}{N^{(t)}(0, \omega)}$$

$$c^{(t)}(x) = \frac{d}{dx} C^{(t)}(x) = \frac{B(t-x) p(x)}{N^{(t)}(0, \omega)} = \frac{N^{(t)}(x)}{N^{(t)}(0, \omega)}$$

La densidad de distribución a la edad x es igual al cociente de la densidad de individuos a la misma edad y el total de personas en la población.

De aquí se deduce fácilmente

$$N^{(t)}(0, \omega) = \frac{B(t-x) p(x)}{c^{(t)}(x)}$$

igualdad que se utilizará más adelante.

32. El número de muertes anuales esperadas de la población con edades entre x_0 y x_n en t , es:

$$D^{(t)}(x_0, x_n) = \sum_{i=0}^{n-1} B(\tau_i, \tau_{i+1}) \frac{\Delta \tau_i^{L_i} x_i}{\Delta \tau_i \cdot \tau_0} \Delta \tau_i^{m_i} x_i$$

$$\tau_i = t - x_i \quad \Delta \tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i = -(x_{i+1} - x_i) = -\Delta x_i$$

$$|\Delta \tau_i| = |\Delta x_i|$$

por aplicación directa de la tasa central de mortalidad por edades $\Delta x_i \mu_{x_i}$.

El límite de $D^{(t)}(x_0, x_n)$ si el número de subdivisiones del intervalo x_0, x_n tiende a ∞ , ($n \rightarrow \infty$) pero x_n constante (no x_n) da:

$$D^{(t)}(x_0, x_n) = \int_{x_0}^{x_n} B(t-x) p(x) \mu(x) dx$$

lo que se ve con claridad si se observa que:

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{B(t_i, t_{i+1})}{\Delta t_i} = B(t_i) = B(t-x_i) \quad \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta x_i \mu_{x_i} = \mu_{x_i}$$

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\Delta t_i \cdot L_{x_0}}{\Delta t_i \cdot l_0} = p(x_i) \quad |\Delta t_i| = |\Delta x_i|$$

$$dt_i = dx_i$$

33. Si las edades consideradas comprenden el intervalo $0, \omega$ se tiene

$$D^{(t)}(0, \omega) = D(t) = \int_0^{\omega} B(t-x) p(x) \mu(x) dx$$

que según se ha definido antes es la densidad anual de muertes en t .

Teniendo en cuenta el valor de $\mu(x)$, es decir

$$\mu(x) = - \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx}$$

puede escribirse:

$$D^{(t)}(0, \omega) = D(t) = - \int_0^{\omega} B(t-x) \frac{dp(x)}{dx} dx$$

Se define: $D^{(t)}(x) = \frac{d}{dx} D^{(t)}(0, x) = B(t-x) p(x) \mu(x)$ Densidad anual de muertes a la edad x en t .

33. Poblaciones malthusianas

Sea ahora una población con tasa instantánea de crecimiento y con ley de mortalidad constante. Es decir, adoptamos las siguientes dos hipótesis:

$$(1) \quad r(t) = r \quad \text{constante}$$

$$(2) \quad p(x) \quad \text{independiente del tiempo}$$

Se puede demostrar que la densidad de distribución por edades, $c^{(t)}(x)$, es constante en el tiempo, esto es, la población tiene una distribución por edades estables.

$$c^{(t)}(x) = c(x) \quad \text{independiente del tiempo}$$

Recordemos estas tres relaciones presentadas anteriormente.

$$(A) \quad r(t) = \frac{d}{dt} \log N(t)$$

$$(B) \quad N(t) = \int_0^{\omega} B(t-x) \cdot p(x) \cdot dx$$

$$(C) \quad N(t) \cdot c^{(t)}(x) = B(t-x) p(x) = N^{(t)}(x)$$

Demostración:

De (1) y (A) resulta:

$$N(t) = N(c) \cdot e^{rt} \quad (a)$$

De (2) y (a) resulta:

$$\frac{p(b)}{p(a)} = \frac{c^{(t_1)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)} \quad (b)$$

De (B) y (a) resulta:

$$B(t) = B(c) \cdot e^{r \cdot t} \quad (c)$$

De (C) para $x = a$ y $x = b$ resulta:

$$\frac{B(t_0-a) p(a)}{B(t_0-b) p(b)} = \frac{c^{(t_0)}(a)}{c^{(t_0)}(b)} \quad (d)$$

De (c) y (d) resulta

$$\frac{p(b)}{p(a)} = \frac{c^{(t_0)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)} \quad (e)$$

De (b) y (e) resulta

$$c^{(t_1)}(b) = c^{(t_0)}(b)$$

----- ### -----

Cada uno de los pasos anteriores se consideran a continuación.

$$(1) \quad r(t) = r \quad (A) \quad r(t) = \frac{d}{dt} \log N(t)$$

$$d \log N(t) = r \cdot dt$$

$$\log N(t) - \log N(a) = r(t-a)$$

$$\log N(t) = \log N(a) - ra + rt$$

$$\text{si } K = \log N(a) - ra \quad \log N(t) = K + rt$$

$$N(t) = e^{K+rt}$$

$$N(0) = e^K$$

$$\therefore N(t) = N(0) \cdot e^{rt} \quad (a)$$

----- ### -----

$$(2) \quad p(x) \text{ constante} \quad (a) \quad N(t) = N(0) \cdot e^{rt}$$

La probabilidad de sobrevivir de a a b es por lo tanto constante y vale $\frac{p(b)}{p(a)}$.

Si se considera la población en 2 momentos, t_0 y t_1 , tales que $t_1 - t_0 = b - a$ el cociente de la densidad a la edad b en t_1 y la densidad a la edad a en t_0 es igual a la probabilidad anterior, conforme con la hipótesis. Es decir,

$$\frac{p(b)}{p(a)} = \frac{N^{(t_1)}(b)}{N^{(t_0)}(a)}$$

Conforme con (a) y (c) se tiene, a partir de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \frac{p(b)}{p(a)} &= \frac{N^{(t_1)}(b)}{N^{(t_0)}(a)} = \frac{N(t_1) \cdot c^{(t_1)}(b)}{N(t_0) \cdot c^{(t_0)}(a)} = \frac{N(0) \cdot e^{rt_1} c^{(t_1)}(b)}{N(0) \cdot e^{rt_0} c^{(t_0)}(a)} = \\ &= e^{r(t_1-t_0)} \frac{c^{(t_1)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} = e^{r(b-a)} \frac{c^{(t_1)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} \end{aligned} \quad (b)$$

-----###-----

Se parte de (a) y (B). Desarrollando $B(t-x)$ en serie de Taylor se tiene:

$$(i) \quad B(t-x) = B(t) - x \cdot B'(t) + \frac{x^2}{2!} B''(t) - \dots$$

Reemplazando el desarrollo de $B(t-x)$ en (B) e igualando (a) con (B) resulta:

$$(ii) \quad N(0) \cdot e^{rt} = B(t) \int_0^{\omega} p(x) \cdot dx - B'(t) \int_0^{\omega} x \cdot p(x) \cdot dx + \frac{B''(t)}{2!} \int_0^{\omega} x^2 \cdot p(x) \cdot dx - \dots$$

Designando $L_n = \int_0^{\omega} x^n \cdot p(x) \cdot dx$ y multiplicando ambos miembros por e^{rh} se obtiene:

$$(iii) \quad N(0) \cdot e^{(t+h)r} = L_0 \cdot B(t) \cdot e^{rh} - L_1 \cdot B'(t) \cdot e^{rh} + \frac{L_2}{2!} B''(t) \cdot e^{rh} - \dots$$

Por otra parte $N(t+h)$ vale, según (ii):

$$(iv) \quad N(0) \cdot e^{(t+h)r} = L_0 \cdot B(t+h) - L_1 \cdot B'(t+h) + \frac{L_2}{2!} B''(t+h) - \dots$$

Haciendo (iv) = (iii) se tiene:

$$(v) \quad 0 = L_0 [B(t+h) - B(t) \cdot e^{rh}] - L_1 [B'(t+h) - B'(t) \cdot e^{rh}] + \frac{L_2}{2!} [B''(t+h) - B''(t) \cdot e^{rh}] - \dots$$

Para que la (v) se verifique debe ser $B^{(n)}(t+h) = B^{(n)}(t) \cdot e^{rh}$ para $n = 0, 1, 2, \dots$ lo que equivale a decir que la $B(t)$ es la función exponencial:

$$B(t) = B(0) \cdot e^{rt} \quad (c)$$

Según (c) y (a)

$$N(t_0) = \frac{B(t_0-a) p(a)}{c^{(t_0)}(a)}$$

$$N(t_0) = \frac{B(t_0-b) p(b)}{c^{(t_0)}(b)}$$

$$\therefore \frac{B(t_0-a) p(a)}{B(t_0-b) p(b)} = \frac{c^{(t_0)}(a)}{c^{(t_0)}(b)} \quad (d)$$

----- // -----

De (d) y (c)

$$\frac{B(t_0-a) p(a)}{B(t_0-b) p(b)} = \frac{B(0) \cdot e^{r(t_0-a)} p(a)}{B(0) \cdot e^{r(t_0-b)} p(b)} = \frac{c^{(t_0)}(a)}{c^{(t_0)}(b)}$$

simplificando

$$\frac{p(b)}{p(a)} = \frac{c^{(t_0)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)} \quad (e)$$

----- // -----

$$(b) \quad \frac{p(b)}{p(a)} = \frac{c^{(t_1)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)}$$

$$(c) \quad \frac{p(b)}{p(a)} = \frac{c^{(t_0)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)}$$

igualando

$$\frac{c^{(t_1)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)} = \frac{c^{(t_0)}(b)}{c^{(t_0)}(a)} e^{r(b-a)}$$

simplificando

$$\therefore c^{(t_1)}(b) = c^{(t_0)}(b)$$

34. La fecundidad como función de la edad

Hemos definido antes $B(t)$, densidad anual de nacimientos en el instante t . Clasificaremos ahora estos nacimientos según la edad de la madre y podremos escribir, llamando x_0 y x_n los límites, inferior y superior respectivamente, del período reproductivo de la vida (población femenina) así

$$B(t) = B^{(t)}(x_0, x_n) = B(x_0, x_n) \text{ si puede sobreentenderse, pero no olvidarse, que es función de } t.$$

Una partición del conjunto de edades x_0, x_n sea, por ejemplo, $x_0, x_1; x_1, x_2; x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n$; la que nos permite escribir:

$$B(x_0, x_n) = B(x_0, x_1) + B(x_1, x_2) + \dots + B(x_{n-1}, x_n)$$

Cada uno de estos subconjuntos de nacimientos, definidos en función de la edad de la madre, es excluyente con los otros, y la suma de todos ellos da la densidad de nacimientos en t .

Supondremos que $B(x_0, x)$ ($x \geq x_0$) es una función continua y derivable de x , la edad de las madres. Indica, obviamente, la densidad anual de nacimientos en t , provenientes de mujeres con menos de x años.

35. Existe, por hipótesis, el límite para $h \rightarrow 0$, que escribimos $B(x)$

$$B(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta B(x_0, x)}{x, x+h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(x_0, x+h) - B(x_0, x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(x, x+h)}{h}$$

Se designe densidad anual de nacimientos, en t , de mujeres de edad x . Es, por lo tanto,

$$B(x_0, x) = \int_{x_0}^x B(x) \cdot dx, \text{ siempre sobreentendiendo que}$$

t es un dato fijo. (Se ve que $B(x_0, x_0) = 0$; $B(x_0, x_0) \neq B(x_0)$).

36. Definimos la tasa media anual de fecundidad entre las edades x y x+n de las mujeres en el momento t, que simbolizamos ${}_n f_x^{(t)}$,

$${}_n f_x^{(t)} = \frac{R(x, x+n)}{N(x, x+n)} = \frac{\int_x^{x+n} B(x) \cdot dx}{\int_x^{x+n} N(x) \cdot dx} = \frac{\int_x^{x+n} B(x) \cdot dx}{N(t) \int_x^{x+n} c(x) dx}$$

como el cociente entre (a) la densidad anual de nacimientos en t, provenientes de mujeres de edades entre x y x+n, y (b) el número de mujeres, en t, de edades entre x y x+n.

En todas estas relaciones las funciones N, C y c se refieren a la población femenina.

37. El límite ${}_n f_x$ para $n \rightarrow 0$ se designa $\phi(x)$

$$\phi(x) = \lim_{n \rightarrow 0} {}_n f_x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+n} B(x) dx}{\int_x^{x+n} N(x) dx} = \frac{B(x)}{N(x)} = \frac{R(x)}{N(t) \cdot c(x)}$$

Se denomina tasa instantánea anual de fecundidad en x, en el momento t. Ponemos como antes $\phi(x)$ en lugar de lo más correcto $\phi^{(t)}(x)$.

Puede escribirse en consecuencia:

$$B(x) = N(x) \phi(x)$$

38. En la población estacionaria, en la que - según se ha visto - $N(x) = l_x$, se tiene:

$$B(x) = l_x \cdot \phi(x)$$

$$B(x_0, x) = \int_{x_0}^x B(x) \cdot dx = \int_{x_0}^x l_x \phi(x) dx$$

Para $x = x_n$, se tiene, en particular:

$$B(x_0, x_n) = \int_{x_0}^{x_n} l_x \phi(x) dx$$

Representa la densidad anual de nacimientos en el momento t ocurridos a todas las mujeres de la población estacionaria, la que, por otra parte, se sabe que vale l_0 y que es independiente de t . Es pues

$$l_0 = \int_{x_0}^{x_n} l_x \phi(x) dx$$

De donde, dividiendo ambos miembros por l_0 ,

$$1 = \int_{x_0}^{x_n} p(x) \cdot \phi(x) \cdot dx$$

39. La integral $R_0 = \int_{x_0}^{x_n} p(x) \cdot \phi(x) \cdot dx$ se denomina tasa neta de reproducción y se escribe R_0 . Interpretada de acuerdo con la significación que tiene $p(x)$ en este caso (densidad de distribución por edades excepto un factor constante $p(x) = c(x) \cdot e_0^0$), R_0 representa la densidad anual de nacimientos en t conforme con la distribución por edades de la población estacionaria y la ley de fecundidad $\phi(x)$ que podrá ser o no la de la población estacionaria. Si lo es, $R_0 = 1$, si no lo es R_0 podrá ser $R_0 \geq 1$. Volveremos sobre el sentido de R_0 más adelante.

40. En la población estacionaria puede interpretarse l_0 no sólo del modo que lo hemos hecho hasta aquí, como $B(t)$, sino también para los fines del análisis que sigue, como el conjunto de nacimientos a que da vida una generación de l_0 mujeres, nacidas a lo largo de un año, al cabo de su vida fértil.

Como antes, puede efectuarse una clasificación del conjunto $B(t) = l_0$ en subconjuntos atendiendo a las edades de las madres:

$$l_0 = B(x_0, x_n) = B(x_0, x_1) + B(x_1, x_2) + \dots + B(x_{n-1}, x_n),$$

definirse una función, continua y derivable, $B(x_0, x)$ que represente el número de hijos tenidos por la generación analizada durante el tramo de vida x_0, x ; definirse la densidad de nacimientos a la edad x como la derivada, con respecto a x , de $B(x_0, x)$ y finalmente interpretarse $\frac{f}{n \cdot x}$ como el cociente entre el número de nacimientos producidos por la generación considerada a lo largo del período de vida $x, x+n$, y el tiempo vivido entre las edades x y $x+n$ por las mujeres de la generación l_x , y su límite para $n \rightarrow 0$, como la función $\psi(x)$, idéntica a la anterior.

41. Con esta interpretación

$$B(x_0, x_n) = \int_{x_0}^{x_n} l_x \psi(x) dx$$

da el número de hijos que tiene una generación de mujeres a través de toda su vida reproductiva (x_0, x_n). En el caso de la población estacionaria su valor es l_0 , igual al número inicial de mujeres de la generación considerada.

Dividiendo por l_0 se tiene

$$1 = \int_{x_0}^{x_n} p(x) \psi(x) dx$$

Cada componente de la generación l_0 produce, a lo largo de su vida reproductiva, un número de hijos igual a 1.

El sentido de la tasa neta de reproducción, como índice de remplazo de una generación por la que la sucede, surge claro con esta interpretación.

42. Partamos de la tasa neta de reproducción

$$R_0 = \int_{x_0}^{x_n} p(x) \psi(x) dx$$

Si la mortalidad entre 0 y x_n es nula, es decir, si $p(x) = 1$ para $x \leq x_n$, se tiene

$$R_0(p(x)=1) = \int_{x_0}^{x_n} \psi(x) dx$$

una función que depende sólo de la fecundidad.

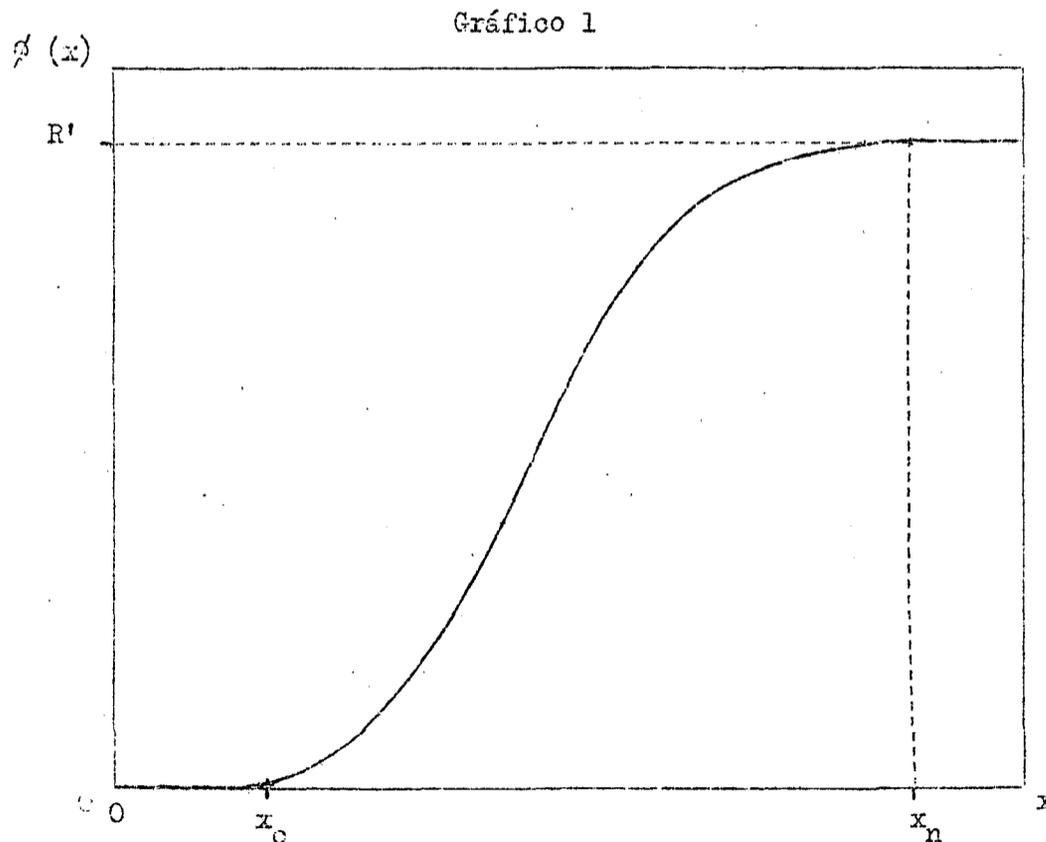
Designaremos $\phi(x)$ la integral:

$$\phi(x) = \int_{x_0}^x \psi(x) dx$$

Para $x = x_n$ $\phi(x_n) = \int_{x_0}^{x_n} \psi(x) dx$ se denomina tasa bruta de reproducción

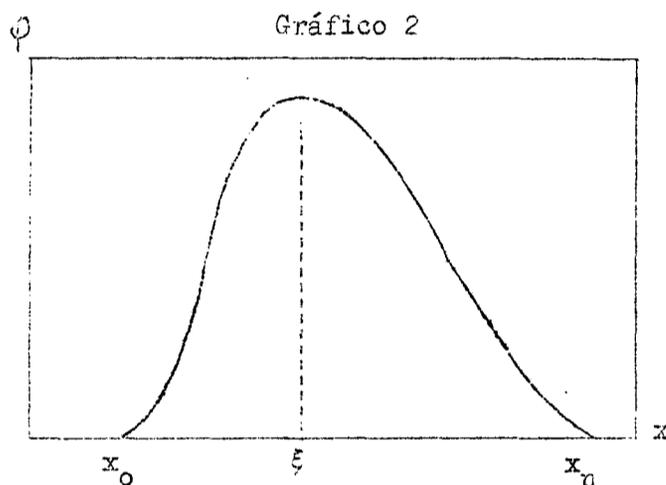
(se escribe R') y, conforme con lo anterior, representa el número de hijos por mujer tenidos entre las edades x_0 y x_n , los límites del período reproductivo de la vida, conforme con el supuesto de que la mortalidad femenina es nula ($p(x)=1$) antes de la edad x_n .

43. La función $\phi(x)$, primitiva de $\psi(x)$ (positiva o nula) es nula entre $0 \leq x \leq x_0$; crece entre $x_0 < x < x_n$ y toma el valor R' para $x \geq x_n$. Por tratarse de una función acumulativa, con esas características, su forma es:



La $\Delta_{x, x+h} \phi(x) = \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$ da el número medio de hijos entre las edades x y $x+h$.

$$\text{El } \lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{x, x+h} \phi(x) = \frac{d}{dx} \phi(x) = \phi'(x)$$



La función $\phi(x)$ toma una forma como la indicada en el gráfico 2, con un máximo en, digamos ξ . En esa edad $\phi(\xi)$ máximo, la $\frac{d}{dx} \phi(x)$ será nula y la $\phi(x)$ tendrá punto de inflexión.

Entre x_0 y ξ , $\phi(x)$ creciente, $\phi'(x) > 0$ y $\phi(x)$ será convexa.

Entre ξ y x_n , $\phi(x)$ decreciente, $\phi'(x) < 0$ y $\phi(x)$ será cóncava.

En $x = \xi$, $\phi(x)$ máxima, $\phi'(x) = 0$ y $\phi(x)$ tendrá un punto de inflexión.

44. Se ha definido ${}_n^f x$

$${}_n^f x = \frac{\int_x^{x+n} N(x) \cdot \phi'(x) dx}{\int_x^{x+n} N(x) \cdot dx} = \phi(\xi)$$

$$x \leq \xi \leq x+n$$

como podría haberse anticipado.

45. De $B(x) = N(t) c(x) \varphi(x)$

se deduce $\frac{B(x)}{N(t)} = c(x) \varphi(x)$

Integrando entre 0 y ω

$$\int_0^{\omega} \frac{B(x)}{N(t)} dx = \frac{1}{N(t)} \int_0^{\omega} B(x) dx = \frac{B(t)}{N(t)} = b(t)$$

$$\therefore b(t) = \int_0^{\omega} c(x) \varphi(x) dx = \varphi(\xi) \int_0^{\omega} c(x) dx = \varphi(\xi) \quad 0 \leq \xi \leq \omega$$

$$b(t) = \varphi^{(t)}(\xi)$$

46. Conviene destacar semejanzas, entre funciones de mortalidad y fecundidad. Acabamos de ver $b(t) = \varphi(\xi)$, expresión semejante a $d(t) = \mu(\xi)$. Veamos otras.

$$\int_0^x l_x \mu(x) dx = {}_x d_0 \quad \text{Número de muertes, entre } l_0, \text{ desde } 0 \text{ hasta } x.$$

$$\int_0^x l_x \varphi(x) dx = B(0, x) \quad \text{Número de hijos tenidos, entre } l_0, \text{ desde } 0 \text{ hasta } x.$$

$$\int_0^x p(x) \mu(x) dx = {}_x q_0 \quad \text{probabilidad de morir entre } 0 \text{ y } x$$

$$\int_0^x p(x) \varphi(x) dx = R(x) \quad \text{Número de hijos tenidos entre } 0 \text{ y } x \text{ por cada mujer de una generación } l_0.$$

$${}_{\omega} q_0 = 1$$

$$R(x_n) = R_0 \quad \text{Tasa neta de reproducción.}$$

— # —

