

MODELAGEM MATEMÁTICA DA DINÂMICA TEMPORAL DO HLB EM CITROS

GUILHERME AUGUSTO BRAGA¹

SÔNIA TERNES²

RAPHAEL GUSTAVO D'ALMEIDA VILAMIU³

ALEXANDRE CASTRO⁴

MARIANA VALERIO DA SILVA⁵

FRANCISCO FERRAZ LARANJEIRA⁶

RESUMO: O Huanglongbing (HLB) é considerado atualmente a mais grave doença da citricultura nacional, devido aos enormes prejuízos econômicos que pode causar. Este trabalho apresenta um modelo matemático epidemiológico para avaliar a evolução temporal da doença considerando o sistema planta (citros) - inseto vetor (*Diaphorina citri*). Com base na literatura determinou-se faixas de variação para os parâmetros biológicos do modelo. A partir da criação de cenários de simulação verificou-se numericamente algumas condições que favorecem a evolução da doença.

PALAVRAS-CHAVE: modelo matemático, simulação, HLB, citros, *Diaphorina Citri*.

MATHEMATICAL MODELLING OF TEMPORAL DYNAMICS OF CITRUS HLB

ABSTRACT: The Huanglongbing (HLB) is currently considered the most serious disease of citrus in Brazil, due to its potential for causing economic damage. This paper presents a mathematical model to evaluate the epidemiological evolution of the disease considering the system plant (citrus) - insect vector (*Diaphorina citri*). Ranges of variation were determined for the biological parameters of the model, based on the literature. From simulation scenarios it was found numerically some conditions that can favor the evolution of the disease.

KEYWORDS: mathematical modeling, simulation, HLB, citrus, *Diaphorina Citri*.

1. INTRODUÇÃO

O Brasil é um dos maiores produtores de citros do mundo, negócio que gera mais de 400 mil empregos, sendo o Estado de São Paulo responsável por 80% da produção nacional de laranja (BELASQUE JR et al.,2010). Devido a essa importância econômica, a presença de doenças como o *Huanglongbing* ou HLB (ex *greening*) em plantações gera enormes preocupações.

Identificado inicialmente na China, os primeiros relatos da presença da HLB no Brasil datam de 2004, nos pomares do Estado de São Paulo (TEIXEIRA et al.,2010). O HLB é caracterizado pela presença da bactéria *Candidatus Liberibacter spp.*, que é transmitida para a planta

¹Graduando em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, guilhermeab@cnptia.embrapa.br

²Matemática Aplicada, Embrapa Informática Agropecuária, sonia@cnptia.embrapa.br

³Matemático Aplicado, Embrapa Informática Agropecuária, vilamiu@gmail.com

⁴Físico, Embrapa Informática Agropecuária, acastro@cnptia.embrapa.br

⁵Graduanda em Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, marianavs@cnptia.embrapa.br

⁶Engenheiro Agrônomo, Embrapa Mandioca e Fruticultura, chico@cnpmf.embrapa.br

pelo psíldeo (*Diaphorina Citri*), inseto presente nos pomares brasileiros desde a década de 40 (FUNDECITRUS, 2011).

Este trabalho apresenta um modelo matemático compartimental determinístico para analisar a dinâmica temporal da doença, considerando o sistema planta - psíldeo. Com base no sistema de equações diferenciais ordinárias que descreve o modelo, foram criados cenários de simulação e avaliadas algumas condições que podem favorecer a evolução temporal da doença no campo.

2. MODELO MATEMÁTICO

A inexistência de modelos matemáticos para avaliação do sistema citros - HLB é atribuída à complexidade da transmissão do patógeno pelo inseto vetor e é vista na literatura atual (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 2010) como um desafio a ser alcançado a longo-prazo. Assim, com base nos trabalhos de Ross (BACAËR, 2010) e Vandermeer e Power (1990) para estudos da transmissão da malária em humanos e de doenças na cultura do milho, respectivamente, desenvolveu-se um modelo matemático compartimental determinístico para descrever a dinâmica da propagação do HLB no sistema citros - psíldeo *Diaphorina Citri*. Para tal, o modelo considera a fase de incubação da doença na planta, período desde a infecção da planta pelo psíldeo infectado, até o aparecimento de sintomas.

A Figura 1 apresenta os compartimentos considerados no modelo, que são descritos matematicamente pelo sistema de equações diferenciais em (1).

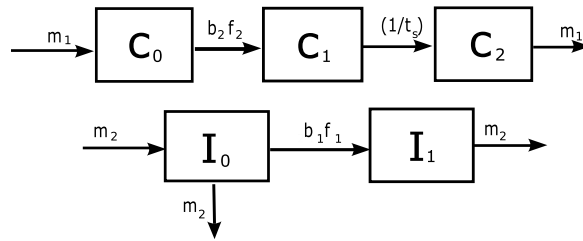


Figura 1: Modelo Matemático

Dessa maneira, o modelo normalizado proposto é formado pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = N_2 b_2 f_2 i_1 (1 - c_1 - c_2) - \frac{1}{t_s} c_1, \\ \frac{dc_2}{dt} = \frac{1}{t_s} c_1 - m_1 c_2, \\ \frac{di_1}{dt} = N_1 b_1 f_1 (1 - i_1) (c_1 + c_2) - m_2 i_1, \end{cases} \quad (1)$$

onde: N_1 e N_2 são as densidades de populações de plantas de citros e insetos por unidade de produção (UP), respectivamente (ambos assumidos constantes); c_1 é a população de plantas em estado de incubação da doença; c_2 é a população de plantas sintomáticas; i_1 é a população de Insetos infectados com HLB; b_1 é a frequência de visitas que um psíldeo realiza por planta; b_2 é a frequência de visitas que uma planta recebe por inseto; f_1 é a probabilidade de aquisição de HLB pelo inseto; f_2 é a probabilidade de transmissão de HLB do inseto para a planta; m_1 é a taxa de remoção de plantas infectadas; m_2 é a taxa de mortalidade do inseto; t_s é o tempo de incubação na planta.

3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O sistema de equações descrito em (1) em regime estacionário possui dois pontos de equilíbrio da forma $P_i = (c_1, c_2, i_1)$, tal que $P_1 = (0, 0, 0)$ é a solução trivial, e a solução não trivial é dada por $P_2 = (c_1^*, c_2^*, i_1^*)$, onde:

$$c_1^* = \frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s) N_1 N_2 - m_1^2 m_2 t_s}{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + 2b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 + (b_1 f_1 m_1^2 t_s + b_1 f_1 m_1) N_1};$$

$$c_2^* = \frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 - m_1 m_2}{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1^2 t_s^2 + 2b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 + (b_1 f_1 m_1^2 t_s + b_1 f_1 m_1) N_1};$$

$$i_1^* = -\frac{(b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 N_2 - m_1 m_2}{((b_1 b_2 f_1 f_2 m_1 t_s + b_1 b_2 f_1 f_2) N_1 + b_2 f_2 m_1 m_2 t_s + b_2 f_2 m_2) N_2}.$$

Para a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio (EDELSTEIN-KESHET, 1988) foi construída a matriz Jacobiana calculada no pontos P_1 e P_2 . Utilizando-se os critérios de Routh-Hurwitz (EDELSTEIN-KESHET, 1988) sobre as matrizes jacobianas resultantes foram obtidas expressões complexas, que impossibilitam a interpretação biológica dos resultados obtidos analiticamente. Desta forma, optou-se por avaliar a estabilidade dos pontos de equilíbrio por meio de simulações numéricas.

4. ANÁLISE NUMÉRICA DO MODELO

A Tabela 1 mostra os valores usados nas simulações para os parâmetros do modelo, com base na literatura. Ainda, a partir da análise dimensional dos parâmetros, tem-se que $b_1 = (p'p)/N_2$ e $b_2 = p/N_2$, onde p é a proporção de plantas visitadas (com psilídeos) e p' é o número de psilídeos por planta visitada, com p e p' dados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores dos parâmetros usados nas simulações

Parâmetros	Valores	Referência
N_1	2000 Plantas/UP	(FUNDECITRUS, 2010)
p	0.40	(LARANJEIRA, 2011) ⁷
p'	1.52	(LARANJEIRA, 2011) ⁷
f_1	0.30 – 0.43	(NASCIMENTO, 2010)
f_2	0.6833	(CAPOOR, RAO, VISWANATH, 1974)
m_2	$1/4 - 1/3$ meses ⁻¹	(FUNDECITRUS, 2011)
t_s	6 – 18 meses	(BELASQUE JR et al, 2010)

As simulações numéricas foram realizadas com o uso do software MATLAB, versão 7.8.0 (R2009a), a partir do sistema de equações diferenciais dado em (1). Para observar a dinâmica da incidência da doença considerando como condição inicial um talhão de citros sem infestação, utilizou-se $c_1 = c_2 = 0.0$ e $i_1 = 1.0$, e $N_2 = 1000$.

Visando avaliar o comportamento da dinâmica do sistema em relação à taxa de retirada de plantas infectadas por unidade de tempo, representado no modelo pelo parâmetro m_1 , foram analisados dois cenários: $m_1 = 0.0$ e $m_1 = 0.2$.

⁷LARANJEIRA, Francisco Ferraz (Engenheiro Agrônomo, Embrapa Mandioca e Fruticultura). Comunicação pessoal, 2011.

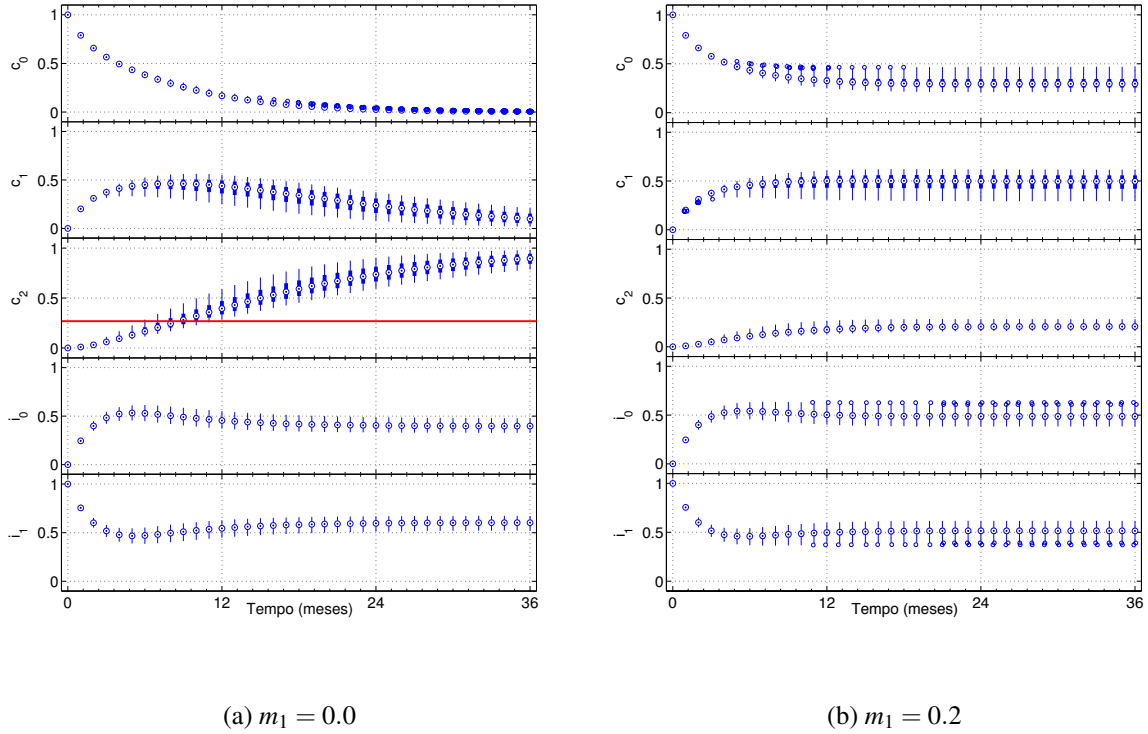


Figura 2: Resultado das dinâmicas geradas por LHS usando os parâmetros definidos na Tabela 1, $N_2 = 1000$ e $m_1 = 0.0$ (a) e $m_1 = 0.2$ (b).

5. RESULTADOS E CONCLUSÕES

Para cada um dos cenários foram realizadas 1000 simulações por LHS (*Latin Hypercube Sampling*), de forma a obter o comportamento geral da dinâmica para os valores dos parâmetros variáveis da Tabela 1 (f_1 , m_2 e t_s). O resultado da simulação está representado na Figura 2, cuja análise deixa clara a importância de se remover as plantas infectadas.

Se a remoção não ocorre ($m_1 = 0.0$), em menos de 2 anos mais de 95% da plantação estará infectada. Analisando o cenário onde $m_1 = 0.2$, verifica-se uma mudança drástica na dinâmica geral, uma vez que o ponto de equilíbrio médio será $(0.295, 0.495, 0.210)$, ou seja, em média o equilíbrio será alcançado com 29.5% da população de plantas saudáveis, 49.5% das plantas estarão infectadas em estado latente e 21% serão sintomáticas.

Pela análise das simulações percebe-se que a dinâmica do patossistema está intrinsicamente influenciada pela taxa de remoção das plantas infectadas. Comparando com a Instrução Normativa no. 53 (MAPA, 2008) que determina a eliminação das plantas da unidade de produção quando o resultado da análise das amostras laboratoriais for positivo e a UP apresentar mais de 28% de plantas assintomáticas, o modelo mostra que, quando $c_2(t) = 0.28$, a população de plantas saudáveis será de apenas 30%. Tal resultado pode ser inferido pela Figura 2a, onde a linha vermelha determina $c_2(t) = 0.28$.

Em trabalhos futuros pretende-se refinar o processo de parametrização do modelo com o uso de dados provenientes de novos experimentos biológicos. Ainda, será analisada a variação da distribuição etária das plantas decorrentes do processo de replantio, o que impacta diretamente na produção da fazenda.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq pela concessão da bolsa PIBIC sob a qual o trabalho está sendo desenvolvido.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACAËR, N. **A short history of mathematical population dynamics**. Bondy, France: Springer, 2010.

BELASQUE JR, J.; YAMAMOTO, P.T.; MIRANDA, M.P.D.; BASSANEZI, R.B.; AYRES, A.J.; BOVÉ, J.M.. Controle do huanglongbing no estado de São Paulo, Brasil . **Citrus Research & Technology**, Cordeirópolis, v. 31, p. 53–63. 2010.

CAPOOR, S.P.; RAO, D.G.; VISWANATH, S.M.. Greening Disease of citrus in the Deccan Trap Country and its relationship with the vector, *Diaphorina citri* Kuwayama. **Proceedings of the 6th Conference of the Internacional Organization of Citrus Virologists**, p. 43–49. 1974.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Birkhäuser mathematics series. 1988.

FUNDECITRUS. GREENING: Profissionais discutem os avanços no manejo da doença. **Citricultor**. n. 1, p. 13–14, 2010.

FUNDECITRUS. Controle da *Diaphorina citri*. **Guia técnico**. 2011.

MAPA. **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento: Instrução Normativa No. 53, de 16 de outubro de 2008**. Disponível em: <<http://www.legisweb.com.br/legislacao/?legislacao=569432>>. Acesso em: 18 Agosto.2011.

NASCIMENTO, F. E. D. **Estudos sobre aquisição e concentração de *Candidatus Liberibacter asiaticus* e *Candidatus Liberibacter americanus* em *Diaphorina citri* Kuwayama**. Dissertação de Mestrado. Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2010.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL. **Strategic planning for the Florida citrus industry: addressing citrus greening disease**. Washington, DC: The National Academies Press, 2010. 326 p. Disponível em: <<http://www.nap.edu/catalog/12880.html>>. Acesso em: 10 jun. 2011.

TEIXEIRA, D.D.C.; WULFF, N.A.; LOPES, S.A.; YAMAMOTO, P.T.; MIRANDA, M.P.D.; SPOSITO, M.B.; JUNIOR, J.B.; BASSANEZI, R.B.. Caracterização e etiologia das bactérias associadas ao *huanglongbing*. **Citrus Research & Technology**. Cordeirópolis, v. 31, n. 2, p. 115–128, 2010.

VANDERMEER, J.; POWER, A.. An epidemiological model of the corn stunt system in central america. **Ecological Modelling**, v. 52, p. 235–248. 1990.