

Allgemeine Dirichletreihen und Primzahlverteilung in arithmetischen Halbgruppen

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
vorgelegt von

Dipl.–Math. Tobias Bekehermes
aus Osnabrück

genehmigt von der
Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung
23.5.2003

Diese Arbeit wurde am Institut für Mathematik der TU Clausthal
erstellt.

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. J. Fertig
TU Clausthal

Hauptberichterstatte: Prof. Dr. L.G. Lucht
TU Clausthal

Berichterstatte: Prof. Dr. W. Klotz
TU Clausthal

Prof. Dr. W. Schwarz
Universität Frankfurt
am Main

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Arithmetische Halbgruppen	5
2.1	Definition und Beispiele	5
2.2	Arithmetische Funktionen	10
2.3	Elementare Eigenschaften der Halbgruppen	14
3	Allgemeine Dirichletreihen	19
3.1	Grundlegende Eigenschaften	19
3.2	Eine Integralformel für allgemeine Dirichletreihen	20
3.3	Zetafunktionen	23
4	Konvergenzsätze	31
4.1	Ein Konvergenzsatz für allgemeine Dirichletreihen	31
4.2	Anwendung des Konvergenzsatzes	39
4.3	Ein Konvergenzsatz für Laplace-Transformierte	41
4.4	Ein verallgemeinerter Primzahlsatz	46
5	Zur Reichweite von Newmans Methode	49
5.1	Argumente zur Fortsetzbarkeit der Methode	49
5.2	Liefert die Methode mehr als den Primzahlsatz?	54
6	Der Primzahlsatz mit Restglied	59
6.1	Eigenschaften der Zetafunktion	59
6.2	Primzahlsatz durch Integralformel	74

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. L.G. Lucht, der mein Interesse an der Zahlentheorie geweckt und gefördert und mich bei meiner Arbeit betreut und unterstützt hat. Herrn Dr. C. Elsholtz danke ich für Hinweise und Korrekturvorschläge sowie für seine außerordentlich hilfreichen Fähigkeiten bei der Literaturrecherche. Herrn D. Wäsch gilt mein Dank für Hinweise und seine Hilfe bei Computerproblemen. Bei allen Kolleginnen und Kollegen bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit, ebenso bei den Studierenden, die im Oberseminar Zahlentheorie die Entwicklung meiner Ergebnisse mitverfolgt haben. Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Eltern, die mich darin unterstützt haben, meine Studien nach meinen eigenen Neigungen und Interessen auszurichten.

Während ich diese letzten Zeilen meiner Arbeit schreibe, beginnt im Irak mit den ersten Angriffswellen ein neuer Golfkrieg. Der Mathematiker G.H. Hardy schrieb in seinem 1940 veröffentlichten Buch *A mathematician's apology*:

There is one comforting conclusion which is easy for a real mathematician. Real mathematics has no effects on war. No one has yet discovered any warlike purpose to be served by the theory of numbers or relativity, and it seems very unlikely that anyone will do so for many years.

Nur zu bald erwies die Entwicklung von Wissenschaft und Technik das Gegenteil. Im Gedenken an die Opfer von Gewalt und Krieg möge diese Arbeit friedlichen Zwecken dienen.

Clausthal-Zellerfeld, 20.03.2003

Notation

Für reelle Zahlen x bedeutet $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x . Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl s werden mit σ und t bezeichnet. Die Landau-Symbole o und \mathcal{O} sowie das Vinogradov-Symbol \ll werden wie üblich verwendet. Dabei steht $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ oder gleichwertig $f(x) \ll g(x)$ für Funktionen f und g mit $g > 0$, falls es eine Konstante $c > 0$ gibt mit $|f(x)| \leq cg(x)$ für alle x in einer Umgebung des angegebenen Häufungspunktes, meist für $x \rightarrow \infty$. Für Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : G \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $G \subseteq \mathbb{C}$ bedeutet die Bezeichnung $f(x) = o(g(x))$, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

existiert, jeweils für x gegen den angegebenen Häufungspunkt.

Die Schreibweise $f(x) \sim g(x)$ für $x \rightarrow \infty$ mit Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besagt, dass der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ist.

Mit λ sind immer Elemente der arithmetischen Halbgruppe Λ gemeint, mit β Basiselemente davon. Das neutrale Element von Λ ist λ_0 .

Zu ausgewählten Symbolen ist die Seite ihrer ersten Verwendung aufgeführt.

Arithmetische Funktionen		Dirichletreihen und holomorphe Funktionen	
$\mathbf{1}(\lambda)$	11	$\tilde{\mathbf{1}}(s)$	23
$\text{id}(\lambda)$	11	$\tilde{f}(s)$	19
$\mu_\Lambda(\lambda)$	11	$\Psi(s)$	47
$\mu(n)$	4	$\rho(s)$	25
Anzahlfunktionen, summatorische Funktionen und Restglieder		$\zeta_\Lambda(s)$	23
$L(x)$	6	Konstanten	
$\pi_\Lambda(x)$	6	A	6
$\psi_\Lambda(x)$	11	γ	6
$\psi_1(x)$	11	ϑ	3
$\psi_2(x)$	74	sonstige Symbole	
$\psi_3(x)$	74	(\circ)	6
$R(x)$	6	$\text{li } x$	57
$\vartheta_\Lambda(x)$	12		

Kapitel 1

Einleitung

Die natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, \dots$ bilden die Grundlage allen Rechnens. Bei der Multiplikation und Division spielen die Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, \dots$ eine besondere Rolle. Jede natürliche Zahl besitzt eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen. Die Primzahlen *erzeugen* die natürlichen Zahlen mit ihrer multiplikativen Struktur. Es gibt unendlich viele Primzahlen. Den Beweis dazu kannte bereits Euklid vor über zwei Jahrtausenden. 1896 bewiesen Hadamard und de la Vallée Poussin unabhängig voneinander eine genauere Aussage, den *Primzahlsatz*: Die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x ist asymptotisch gleich $x/\log x$.

Lässt man von den Primzahlen etwa die 2 weg und betrachtet die dann erzeugten Zahlen, so bleibt von den natürlichen Zahlen nur „die Hälfte“ übrig, die Menge der ungeraden Zahlen. Trotzdem bleibt der Primzahlsatz gültig. Denkbar ist ebenso, zu den Primzahlen andere reelle Zahlen, z.B. π , hinzuzufügen.

Zu der vorliegenden Arbeit hat die Frage geführt, welche Eigenschaften der natürlichen Zahlen für die Gültigkeit des Primzahlsatzes verantwortlich sind. Die additive Struktur ist nicht erforderlich, wie schon das Beispiel der ungeraden Zahlen andeutet. Speziell geht es um die Frage, ob eine multiplikative Halbgruppe, deren Elemente *ähnlich* verteilt sind wie die natürlichen Zahlen, auch *ähnlich* verteilte Primele-

mente besitzt, d.h. ob der Primzahlsatz gilt. Der Begriff „ähnlich“ lässt sich dabei quantifizieren. Bei den natürlichen Zahlen gibt es bis zu einer Größe x etwa x Zahlen, abgesehen von einem Fehler vom Betrage kleiner 1. Das obige Beispiel mit den ungeraden Primzahlen zeigt, dass man für den allgemeinen Fall die Asymptotik Ax mit einer Konstanten $A > 0$ zulassen sollte. Die Frage ist, welche Anforderungen man an den Fehler stellen muss, damit der Primzahlsatz noch gilt.

Es gibt prinzipiell zwei mögliche Schlussrichtungen: den Schluss von der Verteilung der Halbgruppenelemente auf die Verteilung der Erzeuger sowie umgekehrt von den erzeugenden Primelementen auf die Halbgruppe.

In der Mathematik, aber auch in der Praxis, treten zahlreiche allgemeinere Strukturen auf, in denen ähnlich wie mit den natürlichen Zahlen gerechnet wird. Beispiele gibt es etwa in der Algebra [KnZ01] wie auch in der Graphentheorie [Kno76], [KnK99], [KnW02]. Das einfachste Beispiel sind die Gaußschen Zahlen. Für solche Strukturen ist der Beweis des Primzahlsatzes von Interesse (vgl. die Beispiele in Abschnitt 2.1).

Die erste Verallgemeinerung des Primzahlsatzes geht auf Landau zurück, der 1903 einen Beweis des Primidealsatzes für algebraische Zahlkörper vorlegte [Lan03]. Aus der Sicht späterer abstrakter Primzahlsätze bildet der Primidealsatz einen Spezialfall [BaD69]. 1937 führte Beurling *verallgemeinerte Primzahlen* ein als eine Folge reeller Zahlen $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots$ mit $p_j \rightarrow \infty$ [Beu37]. Mit dem *Beurlingschen Primzahlsatz* zeigte er den Primzahlsatz für die Klasse so erzeugter Halbgruppen reeller Zahlen, deren Elementeanzahl $L(x)$ die Asymptotik

$$(1.1) \quad L(x) = Ax + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^\gamma x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit $A > 0$, $\gamma > 3/2$ erfüllt.

Die so definierte Klasse arithmetischer Halbgruppen ist sogar maximal im Hinblick auf die Verteilung der Halbgruppenelemente [Dia70b]. Die Ausdehnung auf abstrakte arithmetische Halbgruppen, die nur noch eine Normabbildung in die reellen Zahlen besitzen, wurde von Knopf-

macher eingeführt und zusammen mit anderen zu einer umfangreichen Theorie ausgebaut [Kno75], [KnZ01].

Zum Primzahlsatz gibt es eine Reihe äquivalenter Aussagen. Bei vielen davon spielt die Möbiusfunktion eine Rolle. Der Übergang zu arithmetischen Halbgruppen zeigt, dass diese Aussagen dort nicht unbedingt gleichwertig sind. Dies gibt den arithmetischen Halbgruppen eine weitere Bedeutung in der Möglichkeit, die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Formen des Primzahlsatzes besser zu verstehen.

Der Primzahlsatz für arithmetische Halbgruppen wurde mit verschiedenen Methoden bewiesen. Die klassische analytische Methode verwendet Taubersätze, etwa nach Ikehara–Landau. Die ersten Beweise des Beurlingschen Primzahlsatzes verwenden diese Vorgehensweise (vgl. etwa [BaD69]). Diese hat den Vorteil, dass sie keine Fortsetzung der Zetafunktion für Werte mit Realteil kleiner als 1 erfordert. Verlangt man ein strengeres Restglied in der asymptotischen Verteilung der Halbgruppenelemente in der Form

$$L(x) = Ax + \mathcal{O}(x^\vartheta) \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit $0 \leq \vartheta < 1$, so lässt sich auch die Zetafunktion fortsetzen und weitere analytische Methoden sind anwendbar, wie die Perronsche Integralformel (vgl. Satz 3.2 und Kapitel 6). Diese Voraussetzung entspricht Knopfmachers Axiom \mathcal{A} in [Kno75]. Auch elementare Methoden wurden auf arithmetische Halbgruppen übertragen [Ami61], [Mal61], [Weg66]. Dabei ist interessant, dass sie für einen weiten Bereich von Halbgruppen als einzige den Primzahlsatz mit Restglied liefern. Andererseits erfordern bislang alle elementaren Beweise in der asymptotischen Verteilung der Halbgruppenelemente ein strengeres Restglied als der analytisch bewiesene Beurlingsche Primzahlsatz. 1980 präsentierte Newman einen neuen Beweis des Primzahlsatzes für die natürlichen Zahlen, der mit sehr einfachen analytischen Methoden auskommt [New80]. Die Übertragung dieser Beweisidee auf arithmetische Halbgruppen ist wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit. So entsteht ein wesentlich vereinfachter Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Halbgruppen.

Kapitel 2 behandelt die grundlegenden Eigenschaften arithmetischer

Halbgruppen und darauf definierter arithmetischer Funktionen. Aufgrund gewisser Vorteile erhält in dieser Arbeit die additive Schreibweise der Halbgruppen den Vorzug.

In Kapitel 3 werden allgemeine Dirichletreihen eingeführt und untersucht. Insbesondere geht es um den Nachweis verschiedener Eigenschaften der zu einer arithmetischen Halbgruppe gehörenden Zetafunktion.

Kapitel 4 enthält die wesentlichen neuen Ergebnisse dieser Arbeit. Dies ist vor allem ein Konvergenzsatz für allgemeine Dirichletreihen über additiven arithmetischen Halbgruppen mit der zu (1.1) analogen Asymptotik $L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(x^{-\gamma}e^x)$, hier mit $\gamma > 1$. Der Beweis verwendet Ideen Newmans [New80]. Als wichtige Anwendung des Satzes folgt für $\gamma > 3/2$ die Konvergenz des Analogons der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$$

über die Möbiusfunktion μ . Im Fall der natürlichen Zahlen ist diese Aussage äquivalent zum Primzahlsatz. Für arithmetische Halbgruppen ist darüber wenig bekannt. Zhang zeigte, dass im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen die Konvergenz

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \mu(n) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

nicht äquivalent zum Primzahlsatz ist [Zha86], [Zha87].

Die Anwendung von Newmans Methode auf Laplace–Transformierte liefert einen weiteren Konvergenzsatz, aus dem der Primzahlsatz im Fall $\gamma > 2$ folgt. Dies stellt eine deutliche Vereinfachung des Beweises des Primzahlsatzes für diese Halbgruppen dar. Der Primzahlsatz gilt darüber hinaus auch für $3/2 < \gamma \leq 2$. Inwieweit sich Newmans Methode auch in diesem Bereich direkt zum Beweis des Primzahlsatzes anwenden lässt, ist Gegenstand von Kapitel 5.

Im Kapitel 6 schließlich führt die Anwendung der Perronschen Integralformel zu einem Primzahlsatz für additive arithmetische Halbgruppen mit $L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(e^{\vartheta x})$, $\vartheta < 1$. Das gefundene Restglied stellt sich dabei als bestmöglich heraus.

Kapitel 2

Arithmetische Halbgruppen

Die arithmetischen Halbgruppen stellen eine Verallgemeinerung der multiplikativen Halbgruppe der natürlichen Zahlen dar. Der wesentliche Unterschied zu den natürlichen Zahlen ist, dass sie nicht notwendig eine zweite Rechenoperation besitzen und ihre Elemente wesentlich allgemeiner verteilt sein können. Insbesondere sind sie im Allgemeinen nicht äquidistant verteilt wie die natürlichen Zahlen. Das Konzept der arithmetischen Halbgruppen wurde von Knopfmacher eingeführt [Kno75]. Es hat jeweils Vor- und Nachteile, arithmetische Halbgruppen additiv oder multiplikativ zu schreiben. Die additive Schreibweise ermöglicht die Definition allgemeiner Dirichletreihen ohne Verwendung des komplexen Logarithmus. Daher bietet sich diese Form für die vorliegende Arbeit an.

2.1 Definition und Beispiele

Definition 2.1. Es sei Λ eine abzählbare additive kommutative Halbgruppe mit neutralem Element λ_0 . Diese besitze eine Teilmenge B derart, dass jedes Element $\lambda \in \Lambda$ eine (bis auf die Reihenfolge) ein-

deutige Darstellung als Summe von Elementen aus B besitzt. Zu Λ gebe es eine Abbildung $|\cdot| : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

- (a) $|\lambda| = 0 \iff \lambda = \lambda_0$ für alle $\lambda \in \Lambda$,
- (b) $|\lambda + \mu| = |\lambda| + |\mu|$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$,
- (c) für jedes $x \in \mathbb{R}^+$ ist die Menge $\{\lambda \in \Lambda : |\lambda| \leq x\}$ endlich.

Dann heißt Λ *arithmetische Halbgruppe* und B ihre *Basis*. Die Abbildung $|\cdot|$ heißt *Norm* auf Λ . Die Elementanzahlfunktion sei

$$(2.1) \quad L(x) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} 1.$$

Die Basiselemente werden gezählt durch

$$\pi_\Lambda(x) := \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| \leq x}} 1.$$

Die arithmetische Halbgruppe Λ erfüllt die Eigenschaft (o), wenn gilt

$$(o) \quad L(x) = Ae^x + R(x)$$

mit $A > 0$ und einem Rest $R(x) = o(e^x)$ für $x \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2.1. An Stelle der Normabbildung wird in der Literatur oft auch eine Gradabbildung ∂ geschrieben.

Es ist möglich, dass verschiedene Halbgruppenelemente die gleiche Norm haben. In der Menge der Normwerte ist die Zerlegung in Normen der Basiselemente somit nicht mehr eindeutig. Es ist daher wesentlich, die Elemente von ihrer Norm zu unterscheiden. Die Basiselemente entsprechen den Primzahlen im multiplikativen Fall.

Welche Eigenschaften der arithmetischen Halbgruppe nachgewiesen werden können, hängt maßgeblich von der Größenordnung des Restes $R(x)$ ab. Im Folgenden liegt der Schwerpunkt der Untersuchungen auf arithmetische Halbgruppen mit

$$(2.2) \quad R(x) \ll \frac{e^x}{x^\gamma} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

mit einem $\gamma > 0$. Um technische Probleme für x nahe 0 zu vermeiden, kann es sinnvoll sein, stattdessen $R(x) \ll (1+x)^{-\gamma} e^x$ zu verlangen. Klar ist, dass jedes Λ , das (2.2) für ein $\gamma > 0$ erfüllt, dies auch für γ' mit $\gamma' < \gamma$ leistet. In Abhängigkeit von γ lassen sich unterschiedliche Aussagen über Λ und B beweisen. Weitergehende Aussagen lassen sich erzielen durch strengere Anforderungen an $R(x)$, etwa

$$R(x) \ll e^{\vartheta x} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

mit einem $\vartheta < 1$.

Die Wahl der Eulerschen Zahl e in (o) ist willkürlich. Entspricht Λ der obigen Definition mit

$$L(x) = Aq^x + o(q^x)$$

mit einem $q > 1$, so betrachte die Normabbildung $|\cdot|' : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$|\lambda|' = |\lambda| \log q.$$

Damit ist dann

$$L'(x) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda|' \leq x}} 1 = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x/\log q}} 1 = L\left(\frac{x}{\log q}\right) = Ae^x + o(e^x).$$

Die Eigenschaft (c) aus Definition 2.1, dass es nur endlich viele Halbgruppenelemente mit Norm kleiner gleich x gibt, folgt direkt aus (o). Speziell hat Λ keine Häufungspunkte mit endlicher Norm. Die Menge $\{|\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$ ist diskret.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der asymptotischen Elementanzahl von Λ und B , also von $L(x)$ und $\pi_\Lambda(x)$ für $x \rightarrow \infty$.

Arithmetische Halbgruppen sind von Bedeutung als abstrakter Oberbegriff für Strukturen, die sowohl in der Mathematik eine Rolle spielen, als auch in der Praxis auftreten können.

Beispiel 2.1. Das einfachste Beispiel, das auch in allen folgenden Überlegungen als Spezialfall immer enthalten ist, sind die natürlichen Zahlen. Durch Übergang zu

$$\Lambda := \{\log n : n \in \mathbb{N}\}$$

entsteht aus der multiplikativen Halbgruppe \mathbb{N} eine additive arithmetische Halbgruppe mit

$$L(x) = [e^x] = e^x + \mathcal{O}(1).$$

Dabei bezeichnet $[x]$ wie üblich die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x . Ihre Basiselemente sind die Logarithmen der Primzahlen.

Beispiel 2.2. Es bezeichne

$$\mathbb{Z}[i] := \{a + ib : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

die Gaußschen Zahlen mit der Norm

$$N(a + ib) := a^2 + b^2.$$

Die Anzahl der Gaußschen Zahlen mit Norm kleiner gleich x ist offenbar die Anzahl der Punkte des Einheitsgitters innerhalb des Kreises mit Radius \sqrt{x} um 0. Diese ist $\pi x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$. Durch Definition von

$$|a + ib| := \log N(a + ib),$$

erfüllt $\mathbb{Z}[i]$ die Eigenschaft (o) mit

$$L(x) = \pi e^x + \mathcal{O}(e^{x/2}).$$

Aufgrund des vergleichsweise guten Restgliedes lassen sich sowohl Satz 4.4 als auch Satz 6.8 zum Beweis des Primzahlsatzes für die Gaußschen Primzahlen verwenden. Ganz allgemein lässt sich so der Primidealsatz für algebraische Zahlkörper beweisen.

Beispiel 2.3. Viele Strukturen der Praxis lassen sich als arithmetische Halbgruppe auffassen, wann immer sich Objekte als Linearkombination von Elementen einer Basismenge beschreiben lassen. Man

denke sich etwa einen Rucksack mit gegebenem Volumen x , der mit Gepäckstücken aus einer gegebenen Menge gepackt werden soll. Die Volumina der zur Verfügung stehenden Gepäckstücke bilden die Basis der arithmetischen Halbgruppe, welche aus allen möglichen Rucksackfüllungen besteht. Die Addition in Λ stellt das Zusammenpacken zweier Rucksäcke dar. Das Volumen, das eine Rucksackfüllung einnimmt, entspricht ihrer Norm.

Das in dieser Arbeit untersuchte Problem entspricht dann der Frage, welche Schlüsse sich aus der Kenntnis über die asymptotische Anzahl von Rucksackfüllungen mit Volumen kleiner gleich x über die asymptotische Anzahl von Gepäckstücken mit Volumen kleiner gleich x ziehen lassen.

Das *Rucksackproblem* (in diesem Fall das *unbeschränkte Rucksackproblem*[MaT90]), das in vielen Anwendungen eine Rolle spielt, bezeichnet die Frage nach der optimalen Rucksackfüllung, wenn jedem Gepäckstück zusätzlich ein Wert zugeordnet wird. Die hier untersuchten Zusammenhänge betreffen dann die Anzahl *zulässiger* Rucksackfüllungen.

Die gleiche Situation ergibt sich bei einem Warenkorb, dessen Preis sich aus der Summe der Preise der enthaltenen Waren ergibt.

Auch die Anordnung von Datenblöcken unterschiedlicher Länge auf einem linearen Datenträger erzeugt eine arithmetische Halbgruppe.

Weitere additive Beispiele gibt es in der Algebra. Abweichend von den hier gemachten Voraussetzungen kommen dort oft nur ganzzahlige Normwerte vor. An Stelle von (\circ) wird dann das von Knopfmacher [Kno79] eingeführte Axiom $\mathcal{A}^\#$ verlangt:

$$L(n) = Aq^n + \mathcal{O}(q^{\nu n})$$

mit $A > 0$, $q > 1$ und $0 \leq \nu < 1$. Da dies nur an ganzzahligen Stellen verlangt wird, ergibt sich eine andere Klasse von Halbgruppen, als sie in dieser Arbeit untersucht werden. Dazu gehört das

Beispiel 2.4. Es sei q eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q[y]$ der Polynomring in y über dem endlichen Galois-Körper \mathbb{F}_q mit q Elementen. Die Teilmenge Λ aller normierten Polynome (Leitkoeffizient 1) bildet mit

der Multiplikation eine Halbgruppe. Die übliche Gradabbildung für Polynome stellt eine Norm mit den geforderten Eigenschaften dar. Dann bildet Λ eine arithmetische Halbgruppe mit

$$L(n) = q^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für das Folgende ist es hilfreich vorauszusetzen, dass die Elemente von Λ eine Anordnung besitzen, d.h. $\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ mit $|\lambda_m| \leq |\lambda_n|$ für $m < n$. Dies impliziert eine Anordnung von $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$. Summationen über Λ oder B seien in dieser Reihenfolge verstanden. Bei einer gegebenen Halbgruppe ist diese Anordnung nicht eindeutig, variiert aber höchstens in der Reihenfolge von je endlich vielen, aufeinander folgenden Elementen mit gleicher Norm. Bezüglich der Berechnung und Konvergenz von Summen spielt dies keine Rolle.

Bemerkung 2.2. Für natürliche Zahlen k und $\lambda \in \Lambda$ sei

$$k\lambda := \sum_{\nu=1}^k \lambda.$$

Außerdem werde $0 \cdot \lambda := \lambda_0$ gesetzt. Die eindeutige Basiszerlegung wird dann zu

$$\lambda = \sum_{\beta \in B} k(\lambda, \beta)\beta$$

mit nichtnegativen ganzen Zahlen $k(\lambda, \beta)$, die fast alle gleich 0 sind.

2.2 Arithmetische Funktionen

Definition 2.2. Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe. Eine Abbildung $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *arithmetische Funktion* auf Λ .

Zu zwei arithmetischen Funktionen f und g ist die *Faltung* $f * g$ definiert durch

$$f * g(\lambda) = \sum_{\substack{\mu, \nu \in \Lambda \\ \mu + \nu = \lambda}} f(\mu)g(\nu).$$

Die arithmetische Funktion ε mit

$$\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \lambda_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist das neutrale Element bezüglich der Faltung. Die zu f faltungsinverse Funktion f^{-1} existiert genau im Fall $f(\lambda_0) \neq 0$. Analog zur Möbiusfunktion wird die Funktion μ_Λ als das Faltungsinverse der konstanten Funktion $\mathbf{1}$ definiert und es gilt

$$\mu_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } \lambda = \beta'_1 + \cdots + \beta'_n, \\ & \beta'_\nu \in B, \text{ paarweise verschieden} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung $\text{id} : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $\text{id}(\lambda) = |\lambda|$ stellt das Analogon des natürlichen Logarithmus dar.

Analog zur von Mangoldt-Funktion ist $\Lambda_0 := \mu_\Lambda * \text{id}$ mit

$$\Lambda_0(\lambda) = \begin{cases} |\beta| & \text{falls } \lambda = k\beta \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \beta \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für die Untersuchung von B von Bedeutung. Die zugehörige summatorische Funktion wird mit

$$(2.3) \quad \psi_\Lambda(x) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda)$$

bezeichnet.

Eine andere wichtige arithmetische Funktion ist Λ_1 mit

$$(2.4) \quad \Lambda_1(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } \lambda = k\beta \text{ mit } k \in \mathbb{N}, \beta \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie analog

$$(2.5) \quad \psi_1(x) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_1(\lambda).$$

Bei der Vereinfachung von Beweisen findet außerdem die Funktion

$$(2.6) \quad \vartheta_\Lambda(x) := \sum_{\substack{\beta \in B \\ |\beta| \leq x}} |\beta|$$

Verwendung.

Nützlich für die Berechnung von Summen über arithmetische Funktionen ist das folgende

Lemma 2.1 (Partielle Summation). *Es seien $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion und $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar. Für reelle Zahlen $a \geq 0$ und $x \geq |\lambda_1|$ gilt dann*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(|\lambda|) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(x) - \int_a^x \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq u}} f(\lambda) g'(u) du.$$

Beweis. Zu a und x gibt es nichtnegative ganze Zahlen k, ℓ derart, dass für $\lambda_n \in \Lambda$ gilt

$$(2.7) \quad a < |\lambda_n| \leq x \iff k < n \leq \ell.$$

Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(|\lambda|) &= \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) g(|\lambda_n|) \\ &= \sum_{n=k}^{\ell} \left(\sum_{m=k}^n f(\lambda_m) - \sum_{m=k}^{n-1} f(\lambda_m) \right) g(|\lambda_n|) \\ &= \sum_{n=k}^{\ell} \sum_{m=k}^n f(\lambda_m) g(|\lambda_n|) - \sum_{n=k}^{\ell} \sum_{m=k}^{n-1} f(\lambda_m) g(|\lambda_n|) \\ &= \sum_{n=k}^{\ell} \sum_{m=k}^n f(\lambda_m) g(|\lambda_n|) - \sum_{n=k}^{\ell-1} \sum_{m=k}^n f(\lambda_m) g(|\lambda_{n+1}|) \\ &= \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) g(|\lambda_\ell|) - \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=k}^{\ell-1} \sum_{m=k}^n f(\lambda_m) (g(|\lambda_n|) - g(|\lambda_{n+1}|)) \\
&= \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) g(|\lambda_\ell|) \\
& - \sum_{n=k}^{\ell-1} \sum_{m=k}^n f(\lambda_m) \int_{|\lambda_n|}^{|\lambda_{n+1}|} g'(u) du \\
&= \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) g(|\lambda_\ell|) - \int_{|\lambda_k|}^{|\lambda_\ell|} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq u}} f(\lambda) g'(u) du \\
&= \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) g(x) - \sum_{n=k}^{\ell} f(\lambda_n) (g(x) - g(\lambda_\ell)) \\
& \quad \int_{|\lambda_k|}^{|\lambda_\ell|} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq u}} f(\lambda) g'(u) du \\
&= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(x) - \int_a^x \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a < |\lambda| \leq u}} f(\lambda) g'(u) du.
\end{aligned}$$

□

Die partielle Summation gehört zu den Standardtechniken der analytischen Zahlentheorie. Wird λ_n mit $|\lambda_n|$ identifiziert, so findet sich der entsprechende Beweis z.B. in [Sch69].

Folgerung 2.1. Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.1 gilt

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a \leq |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(|\lambda|) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a \leq |\lambda| \leq x}} f(\lambda) g(x) - \int_a^x \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ a \leq |\lambda| \leq u}} f(\lambda) g'(u) du.$$

Nachweis. Da die Menge der $|\lambda_n|$ diskret in \mathbb{R} ist, lässt sich (2.7) auch mit $a \leq |\lambda_n|$ erfüllen. Die Behauptung folgt dann analog. □

2.3 Elementare Eigenschaften der Halbgruppen

Anwendung der partiellen Summation ermöglicht einige grundlegende Abschätzungen von Summen über Halbgroupelemente. Das folgende Lemma behandelt die zur harmonischen Summe der natürlichen Zahlen analoge Summe.

Lemma 2.2. Für arithmetische Halbgruppen Λ mit (\circ) und $x > 0$ gilt

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|} \ll x.$$

Die Reihe divergiert für $x \rightarrow \infty$.

Beweis. Es ist

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|} = e^{-x} L(x) + \int_0^x e^{-u} L(u) du = \mathcal{O}(1) + \int_0^x A + o(1) du.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 2.3. Für arithmetische Halbgruppen mit (\circ) gilt

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) \ll x e^x.$$

Beweis. Einfache Abschätzung liefert

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) \leq \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} |\lambda| \leq x \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} 1 = x L(x) \ll x e^x,$$

wie behauptet. □

Lemma 2.4. Für arithmetische Halbgruppen Λ mit (\circ) ist

$$\psi_1(x) - \pi_\Lambda(x) \ll xe^{x/2}$$

für $x \rightarrow \infty$.

Im Folgenden bezeichne β ausschließlich Basiselemente von Λ . Es ist

$$\begin{aligned} \psi_1(x) - \pi_\Lambda(x) &= \sum_{k \geq 2} \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{B} \\ k|\beta| \leq x}} \frac{1}{k} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \pi_\Lambda\left(\frac{x}{k}\right) \\ &\leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} L\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{k_0}{2} L\left(\frac{x}{2}\right) \ll xe^{x/2}, \end{aligned}$$

wobei $k_0 = \lfloor \frac{x}{|\beta_1|} \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x/|\beta_1|$ ist. \square

Zur Vereinfachung von Beweisen sind folgende Äquivalenzen des Primzahlsatzes hilfreich.

Lemma 2.5. Für arithmetische Halbgruppen Λ mit (\circ) sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$(2.8) \quad \pi_\Lambda(x) \sim \frac{e^x}{x},$$

$$(2.9) \quad \psi_1(x) \sim \frac{e^x}{x},$$

$$(2.10) \quad \psi_\Lambda(x) \sim e^x \quad \text{und}$$

$$(2.11) \quad \vartheta_\Lambda(x) \sim e^x,$$

jeweils für $x \rightarrow \infty$.

Beweis. Wir führen den Ringschluss $(2.8) \Rightarrow (2.11) \Rightarrow (2.10) \Rightarrow (2.9) \Rightarrow (2.8)$ durch.

$(2.8) \Rightarrow (2.11)$:

Es ist

$$\begin{aligned} \vartheta_\Lambda(x) &= \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{B} \\ |\beta| \leq x}} |\beta| = x \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{B} \\ |\beta| \leq x}} 1 - \int_0^x \sum_{\substack{\beta \in \mathbf{B} \\ |\beta| \leq t}} 1 dt \\ &= x\pi_\Lambda(x) - \int_0^x \pi_\Lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Mit $\pi_\Lambda(x) = e^x/x + o(e^x/x)$ folgt daraus

$$\vartheta_\Lambda(x) = e^x + o(e^x) + \mathcal{O}\left(\int_{\lambda_1}^x \frac{e^t}{t} dt\right) = e^x + o(e^x).$$

$(2.11) \Rightarrow (2.10)$:

Die Folgerung ergibt sich aus

$$(2.12) \quad \psi_\Lambda(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \vartheta_\Lambda\left(\frac{x}{k}\right) = \vartheta_\Lambda(x) + \mathcal{O}\left(\vartheta_\Lambda\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

wobei neben der Monotonie von ϑ_Λ zu berücksichtigen ist, dass es sich hier nur um eine endliche Summe handelt.

(2.10) \Rightarrow (2.9):Es sei $\psi_\Lambda(x) = e^x + o(e^x)$. Für ψ_1 ergibt partielle Summation

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \frac{\Lambda_0(\lambda)}{|\lambda|} = \frac{1}{x} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) + \int_0^x \frac{\psi_\Lambda(u)}{u^2} du \\ &= \frac{\psi_\Lambda(x)}{x} + \int_0^x \frac{\psi_\Lambda(u)}{u^2} du.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\psi_1(x) - \frac{e^x}{x} &= \frac{\psi_\Lambda(x) - e^x}{x} + \int_0^x \frac{\psi_\Lambda(u)}{u^2} du \\ &= o\left(\frac{e^x}{x}\right) + \int_{\lambda_1}^x \frac{e^u + o(e^u)}{u^2} du \\ &= o\left(\frac{e^x}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\int_{\lambda_1}^x \frac{e^u}{u^2} du\right) = o\left(\frac{e^x}{x}\right).\end{aligned}$$

(2.9) \Rightarrow (2.8):Der letzte Schluss folgt sofort aus Lemma 2.4. □

Kapitel 3

Allgemeine Dirichletreihen

Die Verbindung zwischen der diskreten Halbgruppe und analytischen Funktionen stellen Dirichletreihen her. Dadurch wird es möglich, Erkenntnisse über die asymptotische Verteilung der Basiselemente mit analytischen Methoden zu gewinnen.

3.1 Grundlegende Eigenschaften

Definition 3.1. Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) und f eine arithmetische Funktion auf Λ . Für $s \in \mathbb{C}$ heißt die formale Reihe

$$\tilde{f}(s) := \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) e^{-|\lambda|s}$$

die *Dirichletreihe* von f .

Es lassen sich ausführliche Sätze über die Konvergenz allgemeiner Dirichletreihen zeigen. Für das weitere Vorgehen reicht der

Satz 3.1. Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) , f eine arithmetische Funktion auf Λ , $k \in \mathbb{N}_0$ und es gelte

$$f(\lambda) \ll |\lambda|^k \quad (\lambda \in \Lambda, |\lambda| \neq 0).$$

Dann konvergiert die Dirichletreihe $\tilde{f}(s)$ auf $\operatorname{Re} s > 1$ absolut und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Beweis. Für $s = \sigma + it$ und $\sigma > 1$ liefert partielle Summation

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} |f(\lambda) e^{-|\lambda|s}| &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} |f(\lambda)| e^{-|\lambda|\sigma} \\ &= e^{-x\sigma} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} |f(\lambda)| + \sigma \int_0^x e^{-u\sigma} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq u}} |f(\lambda)| du \\ &\leq e^{-x\sigma} c x^k L(x) + \sigma \int_0^x e^{-u\sigma} c u^k L(u) du \\ &\ll \frac{\sigma}{(1-\sigma)^{k+1}} x^k e^{(1-\sigma)x} \ll 1 \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Auf jeder kompakten Teilmenge der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$ ist die Konvergenz gleichmäßig, deshalb ist die durch die Reihe dargestellte Funktion holomorph. \square

Wie im Fall der klassischen Dirichletreihen über \mathbb{N} gilt das

Lemma 3.1. Für arithmetische Funktionen f und g gilt im Falle absoluter Konvergenz

$$(f * g)^\sim(s) = \tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s).$$

3.2 Eine Integralformel für allgemeine Dirichletreihen

Ziel dieses Abschnittes ist es, Partialsummen über die arithmetische Funktion $f(\lambda)$ einer allgemeinen Dirichletreihe zurückzuführen auf ein

Integral über die zugehörige analytische Funktion $\tilde{f}(s)$ längs einer Geraden mit konstantem Realteil. Dadurch werden für die Abschätzung der entsprechenden Summe Methoden der Funktionentheorie anwendbar. Die Integralformel findet später Anwendung im Beweis des Primzahlsatzes mit Restglied. Der folgende Satz stellt eine absolut konvergente Form der Integralformel dar, die erstmals von Perron für allgemeine Dirichletreihen bewiesen wurde [Per08].

Satz 3.2 (Integralformel). *Es sei $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion, deren Dirichletreihe auf $\operatorname{Re} s > 1$ absolut konvergiert. Für reelle $c > 1$ und $T > 2$ bezeichne v das orientierte Geradenstück von $c - iT$ nach $c + iT$. Weiter sei $f(c) \neq 0$. Für $x > 0$ gilt dann*

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} f(\lambda) (1 - e^{|\lambda| - x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_v \tilde{f}(s) \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds + \mathcal{O}\left(|\tilde{f}(c)| \frac{e^{xc}}{T}\right).$$

Beweis. Einsetzen der Definition von \tilde{f} liefert für das Integral (3.1)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_v \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) e^{-|\lambda|s} \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_v \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds.$$

Die Vertauschung von Integration und Summation ist zulässig wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Dirichletreihe $\tilde{f}(s)$ auf dem kompakten Geradenstück v .

Zur Auswertung des letzten Integrals betrachten wir den Kreis um 0 mit dem Radius $r = \sqrt{c^2 + T^2}$. Es bezeichne w_1 den Kreisbogen von $c - iT$ nach $c + iT$ mit Realteil kleiner als c und w_2 den Kreisbogen mit Realteil größer als c (Abbildung 3.1). Wegen $T > 2$ gilt auch $r > 2$. Abhängig von $|\lambda|$ und x treten zwei Fälle auf:

1. Fall: $x > |\lambda|$.

Der Integrand besitzt einfache Pole in $s = 0$ und $s = -1$ mit den Residuen 1 und $-e^{|\lambda| - x}$. Der Residuensatz liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_v \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds = 1 - e^{|\lambda| - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{w_1} \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds.$$

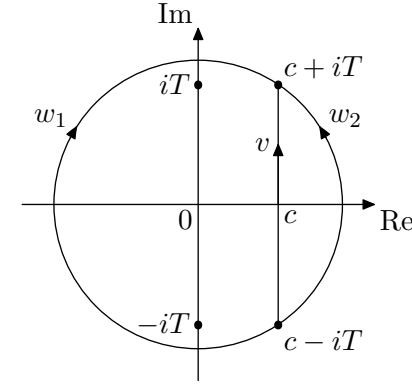


Abbildung 3.1: Integrationswege zum Beweis der Integralformel

Auf w_1 gilt $|e^{(x-|\lambda|)s}| \leq e^{(x-|\lambda|)c}$. Nach Wahl von r ist $|s+1| \geq r-1 \geq r/2$, das heißt

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \leq \left(\frac{r}{2}\right)^{-2}.$$

Dies liefert als Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{w_1} \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds &\ll \frac{1}{2\pi} \cdot e^{(x-|\lambda|)c} \left(\frac{r}{2}\right)^{-2} \cdot 2\pi r \\ &\ll \frac{e^{(x-|\lambda|)c}}{T}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x \leq |\lambda|$.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz kommt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_v \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{w_2} \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds \ll \frac{1}{2\pi} e^{(x-|\lambda|)c} r^{-2} 2\pi r \\ &\ll \frac{e^{(x-|\lambda|)c}}{T}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung liefert

$$\frac{1}{2\pi i} \int_v \frac{e^{(x-|\lambda|)s}}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 1 - e^{|\lambda|-x} + \mathcal{O}\left(\frac{e^{(x-|\lambda|)c}}{T}\right) & \text{für } x > |\lambda| \\ \mathcal{O}\left(\frac{e^{(x-|\lambda|)c}}{T}\right) & \text{für } x \leq |\lambda|. \end{cases}$$

Einsetzen in (3.1) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_v \tilde{f}(s) \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} f(\lambda)(1 - e^{|\lambda|-x}) + \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda) \mathcal{O}\left(\frac{e^{(x-|\lambda|)c}}{T}\right) \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} f(\lambda)(1 - e^{|\lambda|-x}) + \mathcal{O}\left(|\tilde{f}(c)| \frac{e^{xc}}{T}\right). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

3.3 Zetafunktionen

Aufgrund ihrer engen Verknüpfung mit der Verteilung der Basiselemente steht die Zetafunktion im Zentrum analytischer Untersuchungen einer arithmetischen Halbgruppe.

Definition 3.2. Die allgemeine Dirichletreihe

$$(3.2) \quad \zeta_\Lambda(s) := \tilde{\mathbf{1}}(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|s}$$

mit $s \in \mathbb{C}$ heißt *Zetafunktion*.

Im Folgenden sei $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Lemma 3.2. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) . Die Reihe $\zeta_\Lambda(s)$ konvergiert für $\sigma > 1$ absolut mit der Eulerproduktdarstellung*

$$(3.3) \quad \zeta_\Lambda(s) = \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \left(1 - e^{-|\beta|s}\right)^{-1}.$$

Sie stellt dort eine holomorphe Funktion dar und es gilt $\zeta_\Lambda(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1$. Die Reihe divergiert für $s = 1$.

Beweis. Konvergenz und Holomorphie ergibt sich aus Satz 3.1. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta_\Lambda(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|s} = \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k|\beta|s} = \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \left(1 - e^{-|\beta|s}\right)^{-1}.$$

Zusammen mit der Ungleichung $1 + x \leq e^x$ für $x \in \mathbb{R}$ liefert dies

$$\begin{aligned} |\zeta_\Lambda(s)| &= \left| \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \left(1 - e^{-|\beta|s}\right)^{-1} \right| \geq \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \left(1 + e^{-|\beta|\sigma}\right) \\ &\geq \prod_{\beta \in \mathbf{B}} \exp\left(-e^{-|\beta|\sigma}\right) = \exp\left(-\sum_{\beta \in \mathbf{B}} e^{-|\beta|\sigma}\right) > 0. \end{aligned}$$

Die letzte Reihe konvergiert als Teilreihe der absolut konvergenten Reihe (3.2). Dies zeigt die Nullstellenfreiheit. Die Divergenz in $s = 1$ kommt aus Lemma 2.2. \square

Anwendung von Satz 3.1 sowie gliedweise Differentiation von (3.2) liefert auf $\sigma > 1$ die Konvergenz der Reihen

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\Lambda(s) &= \frac{1}{\zeta_\Lambda(s)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_\Lambda(\lambda) e^{-|\lambda|s}, \\ \tilde{\text{id}}(s) &= -\zeta'_\Lambda(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} |\lambda| e^{-|\lambda|s}, \\ \tilde{\Lambda}_0(s) &= -\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Lambda_0(\lambda) e^{-|\lambda|s}. \end{aligned}$$

Diese stellen dort holomorphe Funktionen dar.

Für $\sigma > 1$ ergibt die Anwendung des Logarithmus auf das Eulerprodukt (3.3)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \log \zeta_\Lambda(s) i &= -\sum_{\beta \in \mathbf{B}} \log\left(1 - e^{-|\beta|s}\right) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbf{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k|\beta|s} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \Lambda_1(\lambda) e^{-|\lambda|s} \end{aligned}$$

mit der Koeffizientenfunktion Λ_1 aus (2.4). Es ist also $\log \zeta_\Lambda(s) = \tilde{\Lambda}_1(s)$.

Es bleibt zu untersuchen, auf welchen Bereich der komplexen Zahlen die Funktion $\zeta_\Lambda(s)$ meromorph fortgesetzt werden kann. Für $\sigma > 1$ liefert partielle Summation

$$(3.5) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} = L(x)e^{-xs} + s \int_0^x L(u)e^{-us} du.$$

Nach Voraussetzung über Λ ist $L(x) \ll e^x$, dies ergibt

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \zeta_\Lambda(s) &= s \int_0^\infty L(x)e^{-xs} dx = s \int_0^\infty (Ae^x + R(x)) e^{-xs} dx \\ &= s \int_0^\infty Ae^{x(1-s)} dx + s \int_0^\infty R(x)e^{-xs} dx \\ &= \frac{As}{s-1} + s \int_0^\infty R(x)e^{-xs} dx \\ (3.7) \quad &= \frac{A}{s-1} + A + s\rho(s) \end{aligned}$$

mit

$$(3.8) \quad \rho(s) = \int_0^\infty R(x)e^{-xs} dx.$$

In der Halbebene $\sigma > 1$ stellt ρ eine holomorphe Funktion dar, für deren n -te Ableitung

$$(3.9) \quad \rho^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty x^n R(x)e^{-xs} dx \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

gilt, wobei $\rho^{(0)} = \rho$ gesetzt wird.

Lemma 3.3. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) .*

(a) *Gilt*

$$R(x) \ll \frac{e^x}{x^\gamma} \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit $\gamma > n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so sind die Funktion $\rho(s)$ sowie ihre Ableitungen bis einschließlich $\rho^{(n)}(s)$ stetig fortsetzbar auf $\operatorname{Re} s = 1$, $s \neq 1$. Ist $\gamma > 3/2$, so gilt die Abschätzung

$$(3.10) \quad \rho'(s) \ll (\sigma - 1)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 1, \sigma > 1,$$

gleichmäßig in t .

(b) *Gilt*

$$R(x) \ll e^{\vartheta x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

mit einem $\vartheta < 1$, so ist $\rho(s)$ holomorph fortsetzbar auf $\operatorname{Re} s > \vartheta$.

Beweis. (a) Es kann $R(x) \ll (1+x)^{-\gamma} e^x$ für $x \in \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt werden. Mit $s = \sigma + it$ gilt dann wegen (3.9)

$$\rho^{(\nu)}(s) = \int_0^\infty x^\nu e^{-xs} \mathcal{O}\left(\frac{e^x}{(1+x)^\gamma}\right) dx$$

für $\nu \leq n$. Unter den gegebenen Voraussetzungen konvergiert dies Integral auch auf $\sigma = 1$ absolut. Daher stellt (3.9) dort eine stetige Fortsetzung von $\rho^{(\nu)}(s)$ dar.

Zum Beweis von (3.10) kann $\gamma < 2$ vorausgesetzt werden. Für $\sigma > 1$ und $3/2 < \gamma < 2$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-xs} x R(x) dx &\ll \int_0^\infty e^{-\sigma x} x \frac{e^x}{x^\gamma} dx = \int_0^\infty e^{-(\sigma-1)x} x^{2-\gamma-1} dx \\ &= (\sigma-1)^{\gamma-2} \Gamma(2-\gamma) \ll (\sigma-1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\rho(s) = \int_0^\infty e^{-xs} \mathcal{O}(e^{\vartheta x}) dx.$$

Für $\sigma > \vartheta$ konvergiert auch dieses Integral absolut, so dass $\rho(s)$ durch (3.8) dort holomorph fortgesetzt werden kann. \square

Wegen (3.7) ist mit Ausnahme des Punktes $s = 1$ die Fortsetzbarkeit der Funktion $\zeta_\Lambda(s)$ und ihrer Ableitungen gleichwertig mit der Fortsetzbarkeit von ρ und den entsprechenden Ableitungen. Dies liefert den

Satz 3.3. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) .*

(a) *Gilt*

$$R(x) \ll \frac{e^x}{x^\gamma}$$

mit $\gamma > n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so sind die Funktion $\zeta_\Lambda(s)$ sowie ihre Ableitungen bis einschließlich $\zeta_\Lambda^{(n)}(s)$ stetig fortsetzbar auf $\operatorname{Re} s = 1$, $s \neq 1$.

(b) *Gilt*

$$R(x) \ll e^{\vartheta x}$$

mit einem $\vartheta < 1$, so ist $\zeta_\Lambda(s)$ holomorph fortsetzbar auf $\operatorname{Re} s > \vartheta$ mit Ausnahme eines Pols erster Ordnung mit Residuum A in $s = 1$.

Wesentlich für die weiteren Beweise ist die Nullstellenfreiheit der Fortsetzung der Zetafunktion.

Satz 3.4. *Gilt $R(x) \ll x^{-\gamma} e^x$ mit $\gamma > 3/2$, so ist $\zeta_\Lambda(1 + it) \neq 0$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Zum Beweis siehe etwa [BaD69]. Die Grenze $\gamma > 3/2$ ist scharf. Dies zeigt das Beispiel einer arithmetischen Halbgruppe von Diamond [Dia70b]. Ein stetiges Analogon davon hatte bereits Beurling gefunden [Beu37].

Lemma 3.4. *Die Funktion $H : \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ sei definiert durch*

$$(3.11) \quad H(s) = -\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} - \frac{1}{s-1}.$$

Für $\gamma > 3/2$ ist H stetig fortsetzbar in $s = 1$ und es gilt

$$(3.12) \quad \frac{H(s) - H(1)}{s-1} \ll (\sigma-1)^{-\frac{1}{2}}$$

für $s \rightarrow 1$, $\operatorname{Re} s > 1$.

Für $\gamma > 2$ ist H darüber hinaus stetig fortsetzbar auf $\operatorname{Re} s = 1$ und es existiert der Grenzwert

$$(3.13) \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re} s \geq 1}} \frac{H(s) - H(1)}{s-1}$$

Beweis. Auf $\operatorname{Re} s > 1$ gilt für die logarithmische Ableitung der Zetafunktion

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} &= \frac{-\frac{A}{(s-1)^2} + \rho(s) + s\rho'(s)}{\frac{As}{s-1} + s\rho(s)} \\ &= \frac{-A + (s-1)^2\rho(s) + s(s-1)^2\rho'(s)}{As(s-1) + s(s-1)^2\rho(s)} \\ &= \frac{-1}{s-1} + \frac{A + (2s-1)\rho(s) + s(s-1)\rho'(s)}{As + s(s-1)\rho(s)}. \end{aligned}$$

Damit ist dort

$$H(s) = -\frac{A + (2s-1)\rho(s) + s(s-1)\rho'(s)}{As + s(s-1)\rho(s)}.$$

Dies lässt sich wegen Satz 3.3 durch

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re} s > 1}} \left(-\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} - \frac{1}{s-1} \right) = -\frac{A + \rho(1)}{A}$$

stetig in $s = 1$ fortsetzen.

Zu untersuchen bleibt der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-1} \left(-\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} - \frac{1}{s-1} + \frac{A + \rho(1)}{A} \right) \\ = \frac{-A + \frac{\rho(1)}{A}s\rho(s) + (s-1)\rho(s) - s\frac{\rho(s) - \rho(1)}{s-1} - s\rho'(s)}{As + s(s-1)\rho(s)}. \end{aligned}$$

Für $\gamma > 2$ ist dieser Ausdruck stetig in $s = 1$ fortsetzbar.

Für $\gamma > 3/2$ hängt das Verhalten dieses Ausdrucks für $s \rightarrow 1$ ab von den beiden Termen

$$\frac{\rho(s) - \rho(1)}{s - 1} \quad \text{und} \quad \rho'(s).$$

Diese können nach Lemma 3.3 nur durch $\mathcal{O}((\sigma - 1)^{-1/2})$ abgeschätzt werden. \square

Kapitel 4

Konvergenzsätze

Das Kernstück der vorliegenden Arbeit sind zwei Konvergenzsätze für allgemeine Dirichletreihen bzw. Laplace-Transformierte über arithmetischen Halbgruppen. Ihre Bedeutung liegt vor allem in der Anwendung auf spezielle, zahlentheoretisch interessante Funktionen. Dies liefert im ersten Fall die bedingte Konvergenz der Reihe über $\mu_\Lambda(\lambda)e^{-\lambda}$, im zweiten Fall den Primzahlsatz.

4.1 Ein Konvergenzsatz für allgemeine Dirichletreihen

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes von Newman auf arithmetische Halbgruppen dar. Gegenüber der ursprünglichen Version von Newman [New80] ist er außerdem dadurch allgemeiner, dass er unter einer geeigneten Differenzierbarkeitsbedingung in einem Punkt nur die stetige und nicht die holomorphe Fortsetzbarkeit der durch die Dirichletreihe definierten Funktion verlangt. Die Idee einer solchen Erweiterung wird bereits von Korevaar skizziert [Kor82]. Dafür liefert der Satz die Konvergenz der Reihe in nur einem Punkt (nämlich demjenigen, für den die Differenzierbarkeitsbedingung gilt) und nicht auf dem gesamten Rand der Konvergenzhalbene.

Satz 4.1. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit (\circ) , die $R(x) \ll (1+x)^{-\gamma}e^x$ für ein $\gamma > 1$ erfüllt. Weiter sei $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkt, so dass die Dirichletreihe $\tilde{f}(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)e^{-|\lambda|s}$ in $\operatorname{Re} s > 1$ absolut konvergiert und dort eine holomorphe Funktion darstellt. Lässt sich \tilde{f} stetig auf $\operatorname{Re} s = 1$ fortsetzen und existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re} s \geq 1}} \frac{\tilde{f}(s) - \tilde{f}(1)}{s - 1},$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)e^{-|\lambda|}$$

und ist gleich $\tilde{f}(1)$.

Bemerkung 4.1. Der Satz kann analog auch zum Nachweis der Konvergenz an anderen Punkten mit Realteil 1 formuliert werden.

Zum Beweis des Satzes sind Abschätzungen von Summen erforderlich, die zunächst in einigen Lemmata behandelt werden. Die Abschätzungen sind im Fall der natürlichen Zahlen recht trivial, da sich Summen über monotone Funktionen wegen der äquidistanten Verteilung der natürlichen Zahlen direkt durch ein Integral abschätzen lassen. Im Fall arithmetischer Halbgruppen sind die Abschätzungen gesondert zu behandeln. Die folgenden Rechnungen sind der Grund für die Einschränkung des Satzes auf $\gamma > 1$.

Lemma 4.1. *Die arithmetische Halbgruppe Λ erfülle die Voraussetzungen von Satz 4.1. Für festes $r > 0$ und alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \sigma \leq r$ gilt dann*

$$\left| \sigma e^{N\sigma} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)} - A \right| \ll \sigma(\sigma+1) \mathcal{O}(N^{1-\gamma}) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Beweis. Partielle Summation liefert

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)} = e^{-N(\sigma+1)} L(N) + (\sigma+1) \int_0^N e^{-u(\sigma+1)} L(u) du$$

$$= e^{-N(\sigma+1)}L(N) + A\frac{\sigma+1}{\sigma} - A\frac{\sigma+1}{\sigma}e^{-N\sigma} \\ + (\sigma+1) \int_0^N e^{-u(\sigma+1)}R(u) du.$$

Dies zeigt

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|(\sigma+1)} = A\frac{\sigma+1}{\sigma} + (\sigma+1) \int_0^\infty e^{-u(\sigma+1)}R(u) du.$$

Durch Differenzbildung entsteht

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)} = A\frac{\sigma+1}{\sigma}e^{-N\sigma} - e^{-N(\sigma+1)}L(N) \\ + (\sigma+1) \int_N^\infty e^{-u(\sigma+1)}R(u) du \\ = \frac{A}{\sigma}e^{-N\sigma} - e^{-N(\sigma+1)}R(N) \\ + (\sigma+1) \int_N^\infty e^{-u(\sigma+1)}R(u) du.$$

Der erste Summand liefert nach Multiplikation mit $\sigma e^{N\sigma}$ den konstanten Term A , wie behauptet.

Für den zweiten Summanden gilt

$$e^{N\sigma} \cdot e^{-N(\sigma+1)}R(N) = e^{N\sigma} \cdot e^{-N(\sigma+1)} \cdot \mathcal{O}(e^N(1+N)^{-\gamma}).$$

Dies zeigt die Behauptung für den zweiten Summanden.

Wegen $\sigma > 0$ ergibt sich für den letzten Summanden

$$\left| e^{N\sigma}(\sigma+1) \int_N^\infty e^{-u(\sigma+1)}R(u) du \right| \\ \leq e^{N\sigma}|\sigma+1| \int_N^\infty e^{-u(\sigma+1)}\mathcal{O}(e^u(1+u)^{-\gamma}) du \\ \ll (\sigma+1) \int_N^\infty (1+u)^{-\gamma}e^{(N-u)\sigma} du \ll (\sigma+1)N^{1-\gamma}.$$

Insgesamt folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.2. Die arithmetische Halbgruppe Λ erfülle die Voraussetzungen von Satz 4.1. Es sei $r > 0$ gegeben. Für ausreichend große N und alle $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $-r \leq \sigma < 0$ gilt dann

$$\left| \sigma e^{-|\sigma|N} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq N}} e^{-|\lambda|(1-|\sigma|)} + A \right| \ll |\sigma(1-|\sigma|)|\mathcal{O}(N^{1-\gamma}).$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 4.1 ergibt sich

$$-|\sigma|e^{-|\sigma|N} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq N}} e^{-|\lambda|(1-|\sigma|)} \\ = -|\sigma|A + \mathcal{O}(|\sigma|N^{-\gamma}) - |\sigma|A\frac{|\sigma|-1}{|\sigma|}e^{-|\sigma|N} \\ + A|\sigma|\frac{|\sigma|-1}{|\sigma|}e^{|\sigma|N}e^{-|\sigma|N} \\ - |\sigma|(1-|\sigma|)e^{-|\sigma|N} \int_0^N e^{-u(1-|\sigma|)}R(u) du \\ = -A + \mathcal{O}(|\sigma|N^{-\gamma}) + \mathcal{O}\left(\left|1-|\sigma|\right|e^{-|\sigma|N}\right) \\ - |\sigma|(1-|\sigma|)e^{-|\sigma|N} \int_0^N e^{-u(1-|\sigma|)}R(u) du.$$

Bis auf den letzten Term entspricht dies bereits der Behauptung. Für das verbleibende Integral gilt

$$e^{-|\sigma|N} \int_0^N e^{-u(1-|\sigma|)}R(u) du \\ \ll \int_0^N \frac{e^{(u-N)|\sigma|}}{(1+u)^\gamma} du \\ = \int_0^{N/2} \frac{e^{(u-N)|\sigma|}}{(1+u)^\gamma} du + \int_{N/2}^N \frac{e^{(u-N)|\sigma|}}{(1+u)^\gamma} du \\ \ll \int_0^{N/2} \frac{e^{(N/2-N)|\sigma|}}{(1+u)^\gamma} du + \int_{N/2}^N \frac{1}{(1+u)^\gamma} du$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-|\sigma|N/2} \int_0^{N/2} (1+u)^{-\gamma} du + \int_{N/2}^N (1+u)^{-\gamma} du \\
&\ll e^{-|\sigma|N/2} + \frac{(N+1)^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \frac{(N/2+1)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \\
&\ll N^{1-\gamma},
\end{aligned}$$

wie behauptet. \square

Beweis von Satz 4.1.

Die absolute Konvergenz ergibt sich aus Satz 3.1.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\tilde{f}(1) = 0$ angenommen werden. Dies lässt sich durch Modifikation von f an der Stelle λ_0 erreichen und beeinflusst die Konvergenz nicht. Weiter dürfen wir $|f(\lambda)| \leq 1$ für alle $\lambda \in \Lambda$ annehmen.

Die Partialsumme

$$S_N(s) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq N}} f(\lambda) e^{-|\lambda|s}$$

stellt eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion dar. Wir zeigen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |S_N(1) - \tilde{f}(1)| = 0.$$

Newmans Methode besteht darin, $S_N(1) - \tilde{f}(1)$ mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel zu approximieren [New80]. Dies macht es jedoch erforderlich, die Funktion

$$\frac{1}{z} (S_N(z+1) - \tilde{f}(z+1))$$

auf einem geschlossenen Weg um 0 zu integrieren. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist das nicht möglich. Dies ist aber auch nicht unbedingt erforderlich, wie bereits von Korevaar in einer Arbeit über den klassischen Primzahlsatz erwähnt wird [Kor82]. Wir verwenden eine Vereinfachung, die nur noch die Integration von $\tilde{f}(z+1)/z$ längs der imaginären Achse erfordert. Der Cauchysche Integralsatz liefert,

dass das Integral über $\tilde{f}(z+1)/z$ längs jedes geschlossenen Integrationsweges in der rechten Halbebene den Wert $0 = \tilde{f}(1)$ hat. Dabei ist der Übergang auf die imaginäre Achse aufgrund der Voraussetzungen erlaubt. Die Cauchysche Integralformel wenden wir nur für die ganze Funktion S_N an.

Für $r > 0$ bezeichne Γ den positiv orientierten Kreisweg um 0 mit Radius r . Dann sei Γ_+ der Teil von Γ mit positivem Realteil, Γ_- derjenige mit negativem Realteil sowie Γ_0 der geradlinige Weg von ir nach $-ir$ (Abbildung 4.1).

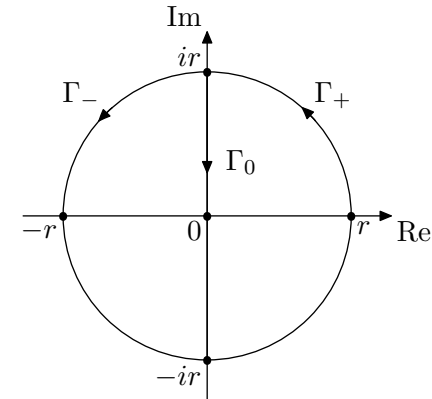


Abbildung 4.1: Integrationswege zum Beweis von Satz 4.1

Der Residuensatz liefert

$$(4.1) \quad 2\pi i S_N(1) = \int_{\Gamma} \frac{S_N(z+1)}{z} dz = \int_{\Gamma} S_N(z+1) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz.$$

Der zusätzliche Faktor e^{Nz} , der an der Stelle $z = 0$ den Wert 1 annimmt, beeinflusst das Residuum nicht. Ebenso wenig ändert sich der Wert des Integrals durch Addition des holomorphen Integranden $S_N(z) e^{Nz} z/r^2$. Diese Modifikation erleichtert die Abschätzung des Integranden.

Aus dem Cauchyschen Integralsatz kommt

$$0 = 2\pi i \tilde{f}(1) = \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_0} \tilde{f}(z) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz,$$

wobei der Integrand nach Voraussetzung auch auf Γ_0 , insbesondere in $z = 0$, stetig ist.

Fassen wir die Integrale zusammen, so erhalten wir

$$(4.2) \quad 2\pi i (\tilde{f}(1) - S_N(1)) = \int_{\Gamma_+} (\tilde{f}(z+1) - S_N(z+1)) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz$$

$$(4.3) \quad - \int_{\Gamma_-} S_N(z+1) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz$$

$$(4.4) \quad + \int_{\Gamma_0} \tilde{f}(z+1) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz.$$

Zu zeigen bleibt, dass durch ausreichend große Wahl von r und N die Integrale betragsmäßig beliebig klein werden. Es bezeichne σ den Realteil von z .

Abschätzung auf Γ_+ :

Auf dem Kreis $|z| = r$ gilt

$$(4.5) \quad \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} = \frac{2\sigma}{r^2}.$$

Für $\sigma > 0$ ist

$$(4.6) \quad |\tilde{f}(z+1) - S_N(z+1)| = \left| \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > N}} f(\lambda) e^{-|\lambda|(z+1)} \right| \leq \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)}.$$

Mit Hilfe von Lemma 4.1 lässt sich der Integrand $I(z)$ des Integrals (4.2) daher wie folgt abschätzen:

$$|I(z)| \leq \frac{2\sigma}{r^2} e^{N\sigma} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)} \ll \frac{1}{r^2} + \sigma(\sigma+1) \frac{N^{1-\gamma}}{r^2} \ll \frac{1}{r^2} + N^{1-\gamma}.$$

Für das Integral ergibt die Standardabschätzung über Länge mal Maximum

$$(4.7) \quad \left| \int_{\Gamma_+} I(z) dz \right| \ll \pi r \left(\frac{1}{r^2} + N^{1-\gamma} \right) \ll \frac{1}{r} + rN^{1-\gamma}.$$

Abschätzung auf Γ_- :

Für $\sigma < 0$ ist

$$(4.8) \quad |S_N(z)| \leq \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq N}} e^{-|\lambda|(\sigma+1)}.$$

Lemma 4.2 zusammen mit (4.5) liefert für den Integranden die Abschätzung

$$\left| S_N(z+1) e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) \right| \leq \frac{2c}{r^2} + \frac{2r(r+1)}{r^2} \mathcal{O}(N^{1-\gamma}).$$

Für das Integral ergibt sich

$$(4.9) \quad \left| \int_{\Gamma_-} S_N(z+1) \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz \right| \leq \frac{2c\pi}{r} + \mathcal{O}(rN^{1-\gamma}).$$

Abschätzung auf Γ_0 :

Nach Voraussetzung ist der Integrand auf Γ_0 beschränkt und stetig. Dann liefert das Riemann–Lebesgue–Lemma, dass das Integral

$$\int_{ir}^{-ir} \tilde{f}(1+it) \left(\frac{1}{it} + \frac{it}{r^2} \right) e^{iNt} dt$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ kann also immer ein $r > 0$ und dann ein N_0 derart gewählt werden, dass für alle $N > N_0$ gilt

$$|S_N(1) - \tilde{f}(1)| < \varepsilon.$$

Dies zeigt die behauptete Konvergenz. \square

4.2 Anwendung des Konvergenzsatzes

Die Anwendung des Konvergenzsatzes 4.1 auf spezielle Dirichletreihen ermöglicht Aussagen über die Konvergenz zahlentheoretisch interessanter Reihen.

Satz 4.2. *Es sei Λ eine additive arithmetische Halbgruppe mit (\circ) , wobei $R(x)$ der Bedingung $R(x) \ll (1+x)^{-\gamma} e^x$ für ein $\gamma > 3/2$ genüge. Dann konvergiert die Reihe*

$$(4.10) \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_{\Lambda}(\lambda) e^{-|\lambda|} = 0.$$

Bemerkung 4.2. Im Fall der natürlichen Zahlen, dort multiplikativ geschrieben in der Form

$$(4.11) \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu(n)}{n} = 0,$$

ist diese Aussage äquivalent zum Primzahlsatz. Der Äquivalenzbeweis geht zurück auf Landau [Lan11]. Er folgert aus (4.11) zunächst

$$(4.12) \quad \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$$

und daraus den Primzahlsatz. Im Falle arithmetischer Halbgruppen ist (4.12) aber nicht gleichwertig zum Primzahlsatz. Es ist bekannt, dass (4.12) für arithmetische Halbgruppen mit $\gamma > 1$ gilt [Zha86], [Zha87]. Der Primzahlsatz gilt im Allgemeinen aber nur für $\gamma > 3/2$ [BaD69], wie ein Gegenbeispiel mit $\gamma = 3/2$ zeigt [Dia70b]. Ein anderer Beweis [Wir92], der aus (4.11) erst $\psi_1(x) \sim e^x/x$ folgert (siehe Lemma 2.5), nutzt aber ebenfalls wie Landau die Asymptotik

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \leq x}} \tau(n) = x \log x + (2\gamma_{\mathbb{N}} - 1)x + \mathcal{O}(\sqrt{x})$$

der Teileranzahlfunktion $\tau = \mathbf{1} * \mathbf{1}$, wobei $\gamma_{\mathbb{N}}$ die Euler–Mascheroni–Konstante ist. Der Nachweis dieser Approximation macht Gebrauch

von der äquidistanten Verteilung der natürlichen Zahlen. Eine Übertragung auf arithmetische Halbgruppen [LuR01] verlangt die strengere Voraussetzung

$$L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(e^{\vartheta x})$$

mit $\vartheta < 1$.

Umgekehrt scheint es auch schwierig zu sein, die Konvergenz in (4.11) aus dem Primzahlsatz zu folgern. Der klassische Beweis [Lan99] nutzt ebenfalls die äquidistante Verteilung der natürlichen Zahlen aus.

Beweis von Satz 4.2.

Die zu betrachtende Dirichletreihe ist

$$(4.13) \quad \tilde{\mu}(s) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(\lambda) e^{-|\lambda|s} = \frac{1}{\zeta_{\Lambda}(s)}.$$

Nach (3.7) ist

$$\zeta_{\Lambda}(s) = \frac{A}{s-1} + A + s\rho(s),$$

wobei $\rho(s)$ für $\gamma > 1$ stetig auf $\operatorname{Re} s = 1$ fortgesetzt werden kann. Für $\gamma > 3/2$ besitzt $\zeta_{\Lambda}(s)$ dort nach Satz 3.4 außerdem keine Nullstellen. Diese Grenze ist scharf, wie das oben erwähnte Beispiel von Diamond zeigt. Die Voraussetzung $\gamma > 3/2$ geht daher an dieser Stelle entscheidend in den Beweis ein.

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist folglich

$$\frac{1}{\zeta_{\Lambda}(s)} = \frac{1}{\frac{A}{s-1} + A + s\rho(s)} = \frac{s-1}{A + A(s-1) + s(s-1)\rho(s)}$$

stetig auf $\operatorname{Re} s = 1$ fortsetzbar mit

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re} s \geq 1}} \frac{1}{\zeta_{\Lambda}(s)} = 0.$$

Weiter ist

$$\frac{\tilde{\mu}(s) - \tilde{\mu}(1)}{s-1} = \frac{1}{(s-1)\zeta_{\Lambda}(s)} = \frac{1}{(s-1)\left(\frac{A}{s-1} + A + s\rho(s)\right)}$$

$$= \frac{1}{A + \mathcal{O}(|s-1|)}$$

für $s \rightarrow 1$, $\operatorname{Re} s \geq 1$. Daher erfüllt die Dirichletreihe (4.13) die Voraussetzungen von Satz 4.1. Dieser liefert die Behauptung. \square

4.3 Ein Konvergenzsatz für Laplace-Transformierte

Newmans Satz lässt sich von Dirichletreihen auf Laplace- bzw. Mellin-Transformierte übertragen. Zum Beweis des Primzahlsatzes für \mathbb{N} wurde dies bereits von Korevaar durchgeführt [Kor82]. Wieder ist der erste Schritt ein Konvergenzsatz.

Satz 4.3. *Es sei $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf jedem kompakten Intervall, so dass die Laplace-Transformierte*

$$(4.14) \quad G(z) = \int_0^\infty F(t)e^{-zt} dt$$

auf der offenen Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ definiert und dort holomorph ist. Lässt sich $G(z)$ stetig auf $\operatorname{Re} z = 0$ fortsetzen und existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} z \geq 0}} \frac{G(z) - G(0)}{z},$$

so konvergiert das Integral

$$(4.15) \quad \int_0^\infty F(t) dt$$

und ist gleich $G(0)$.

Beweis. Wie beim Satz 4.1 beruht der Beweis auf der geeigneten Anwendung komplexer Integration.

Es ist keine Einschränkung, wenn wir

$$|F(t)| \leq 1$$

für $t > 0$ voraussetzen. Weiterhin können wir

$$G(0) = 0$$

voraussetzen. Dies lässt sich durch Modifikation von F auf einem kompakten Intervall erreichen, ohne dass die Existenz von (4.15) beeinflusst wird.

Für $N \in \mathbb{R}^+$ sei

$$(4.16) \quad G_N(z) = \int_0^N F(t)e^{-zt} dt.$$

Dann ist $G_N(z)$ auf ganz \mathbb{C} holomorph.

Wir zeigen

$$G_N(0) = \int_0^N F(t) dt \rightarrow G(0) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Es sei $r > 0$ und Γ der positiv orientierte, einfach geschlossene Kreisweg um 0 mit Radius r , Γ_+ der Teil von Γ mit positivem Realteil, Γ_- derjenige mit negativem Realteil. Γ_0 bezeichne den geradlinigen Weg von ir nach $-ir$. Dies entspricht den Bezeichnungen im Beweis von Satz 4.1 (vgl. Abbildung 4.1).

Die Cauchysche Integralformel liefert

$$(4.17) \quad G_N(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{G_N(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_W G_N(z)e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz.$$

Der zusätzliche Faktor e^{Nz} , der an der Stelle $z = 0$ den Wert 1 annimmt, beeinflusst das Residuum nicht. Ebenso wenig ändert sich der Wert des Integrals durch Addition des holomorphen Integranden $G_N(z)e^{Nz}/r^2$.

Für $G(0)$ kann aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes folgende Darstellung gewählt werden:

$$(4.18) \quad G(0) = 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_0} G(z)e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} \right) dz.$$

Der Integrand ist für $\operatorname{Re} z > 0$ holomorph und für $\operatorname{Re} z = 0$ stetig, das Integral hat daher den Wert 0. Zusammenfassung der Integrale liefert

$$(4.19) \quad 2\pi i(G(0) - G_N(0)) = \int_{\Gamma_+} (G(z) - G_N(z))e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\right) dz$$

$$(4.20) \quad + \int_{\Gamma_-} G_N(z)e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\right) dz$$

$$(4.21) \quad + \int_{\Gamma_0} G(z)e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\right) dz.$$

Zu zeigen bleibt, dass durch geeignete Wahl von r und N die Integrale betragsmäßig beliebig klein werden. Es bezeichne σ den Realteil von z .

Abschätzung auf Γ_+ :

Auf dem Kreis $|z| = r$ gilt

$$(4.22) \quad \frac{1}{z} + \frac{z}{r^2} = \frac{2\sigma}{r^2}.$$

Für $\sigma = \operatorname{Re} z > 0$ ist

$$(4.23) \quad |G(z) - G_N(z)| = \left| \int_N^\infty F(t)e^{-zt} dt \right| \leq \int_N^\infty e^{-\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} e^{-N\sigma}.$$

Auf Γ_+ lässt sich der Integrand $I(z)$ des Integrals (4.19) daher wie folgt abschätzen:

$$|I(z)| \leq \frac{1}{\sigma} e^{-N\sigma} e^{N\sigma} \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2}{r^2}.$$

Für das Integral ergibt sich

$$(4.24) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} I(z) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{r^2} \pi r = \frac{1}{r}.$$

Abschätzung auf Γ_- :

Für $\sigma = \operatorname{Re} z < 0$ ist

$$(4.25) \quad |G_N(z)| = \left| \int_0^N F(z)e^{-zt} dt \right| \leq \int_0^N e^{-\sigma t} dt$$

$$= -\frac{1}{\sigma} e^{-\sigma t} \Big|_0^N = \frac{1 - e^{-\sigma N}}{\sigma} < \frac{1}{|\sigma|} e^{-N\sigma}.$$

Für das Integral (4.20) längs Γ_- ergibt sich wieder mit (4.22) die Abschätzung

$$(4.26) \quad \left| \int_{\Gamma_-} G_N(z)e^{Nz} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{r^2}\right) dz \right| < \frac{1}{r}.$$

Abschätzung auf Γ_0 :

Der Integrand in (4.21) ist auf Γ_0 nach Voraussetzung stetig, also — bei gegebenem r — auch beschränkt. Das Riemann–Lebesgue–Lemma besagt, dass dieses Integral mit $N \rightarrow \infty$ gegen 0 geht.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ kann also immer r so gewählt werden, dass es ein N_0 gibt, mit dem für alle $N > N_0$ gilt

$$|G_N(0) - G(0)| < \varepsilon.$$

Dies zeigt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(0) = G(0) = \int_0^\infty F(t) dt,$$

wie behauptet. \square

Wesentlich zum Beweis des Primzahlsatzes ist die

Folgerung 4.1. Es sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ monoton wachsend, $f(x) \ll e^x$ für $x \in \mathbb{R}^+$, so dass die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx$$

wohldefiniert und holomorph ist auf der Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$. Hat F die Eigenschaften

- (a) für eine gewisse Konstante c kann die Funktion $h(s) := F(s) - \frac{c}{s-1}$ stetig auf $\operatorname{Re} s = 1$ fortgesetzt werden und

(b) es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ \operatorname{Re} s \geq 1}} \frac{h(s) - h(1)}{s - 1},$$

so gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x} = c.$$

Nachweis. Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$g(x) := e^{-x} f(x) - c.$$

Dann ist g beschränkt auf \mathbb{R}^+ und die zugehörige Laplace-Transformierte ist

$$\begin{aligned} G(z) &= \int_0^\infty (e^{-x} f(x) - c) e^{-zx} dx \\ &= F(z+1) - \frac{c}{z} = h(z+1). \end{aligned}$$

Damit erfüllt G die Voraussetzungen von Satz 4.3. Dieser liefert die Existenz des Integrals

$$(4.27) \quad \int_0^\infty (e^{-x} f(x) - c) dx = \int_0^\infty \frac{f(x) - ce^x}{e^x} dx.$$

Wir behaupten $f(x) \sim ce^x$ für $x \rightarrow \infty$.

Aus $f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$ folgt $F(s) \geq 0$ für alle reellen $s > 1$ und damit

$$c = \lim_{\substack{s \rightarrow 1 \\ s > 1}} (s-1)F(s) \geq 0.$$

Angenommen, es ist $\overline{\lim} e^{-x} f(x) > c$. Dann gibt es eine positive Konstante δ derart, dass für gewisse, beliebig große Zahlen y gilt

$$f(y) > (c + 2\delta)e^y.$$

Es folgt

$$f(x) > (c + 2\delta)e^y > (c + \delta)e^x \quad \text{für } y < x < y + a$$

mit $a = \log(c + 2\delta) - \log(c + \delta) > 0$. Dies liefert aber

$$\int_y^{y+a} \frac{f(x) - ce^x}{e^x} dx > \int_y^{y+a} \delta dx = a\delta$$

für dieselben Zahlen y , im Widerspruch zur Existenz von (4.27).

Analog führt $\underline{\lim} e^{-x} f(x) < c$ auf einen Widerspruch. Hier betrachten wir Intervalle $y - b < x < y$ mit $b > 0$, auf denen $f(x) < (c - \delta)e^x$ ist. Zusammenfassung liefert $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} f(x) = c$. \square

4.4 Ein verallgemeinerter Primzahlsatz

Folgerung 4.1 lässt sich zum Beweis des Primzahlsatzes für gewisse arithmetische Halbgruppen anwenden.

Satz 4.4. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe mit*

$$L(x) = Ae^x + \mathcal{O}\left(\frac{e^x}{x^\gamma}\right)$$

mit $A > 0$ und $\gamma > 2$. Dann gilt

$$\pi_\Lambda(x) \sim \frac{e^x}{x}$$

für $x \rightarrow \infty$.

Beweis. Wir zeigen den Primzahlsatz in der nach Lemma 2.5 äquivalenten Form

$$(4.28) \quad \psi_\Lambda(x) \sim e^x$$

für $x \rightarrow \infty$. Ziel ist die Anwendung von Folgerung 4.1 mit $f = \psi_\Lambda$. Als wichtige Voraussetzung erfüllt ψ_Λ die Tschebyscheff-Abschätzung

$$(4.29) \quad \psi_\Lambda(x) \ll e^x$$

für $x \rightarrow \infty$. Dies gilt allgemein für arithmetische Halbgruppen mit $\gamma > 1$ [Dia73].

Partielle Summation liefert

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leq x}} \Lambda_0(\lambda) e^{-s\lambda} = e^{-xs} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leq x}} \Lambda_0(\lambda) + s \int_0^x e^{-su} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \leq u}} \Lambda_0(\lambda) du.$$

Wegen (4.29) ist daher

$$-\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} = s \int_0^\infty \psi_\Lambda(x) e^{-sx} dx,$$

das heißt, die Laplace-Transformierte von ψ_Λ ist

$$\Psi(s) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)}.$$

Nach Lemma 3.4 erfüllt damit ψ_Λ die Voraussetzungen von Folgerung 4.1. Diese liefert

$$\psi_\Lambda(x) \sim x$$

für $x \rightarrow \infty$. □

Kapitel 5

Zur Reichweite von Newmans Methode

Newmans Methode angewandt auf $\zeta'_\Lambda(s)/\zeta_\Lambda(s)$ ermöglicht den Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Halbgruppen mit

$$L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(x^{-\gamma}e^x),$$

wobei $\gamma > 2$ ist. Der Primzahlsatz gilt jedoch darüber hinaus für $\gamma > 3/2$. In diesem Kapitel werden Möglichkeiten untersucht, die Methode auch im Bereich $\gamma \leq 2$ anzuwenden.

5.1 Argumente zur Fortsetzbarkeit der Methode

Im Fall $\gamma \leq 2$ lässt sich $\zeta'_\Lambda(s)/\zeta_\Lambda(s)$ nicht mehr auf $\operatorname{Re} s = 1$ fortsetzen, da $\zeta'_\Lambda(s)$ dort nicht existiert. An Stelle der stetigen Fortsetzbarkeit tritt eine Eigenschaft im quadratischen Mittel. Diese hat folgende Form: Für die Funktion

$$h(s) := -\frac{1}{s} \cdot \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} - \frac{1}{s-1}$$

gilt

$$(5.1) \quad \lim_{\substack{\sigma, \sigma' \rightarrow 1 \\ \sigma, \sigma' > 1}} \int_{-r}^r |h(\sigma + it) - h(\sigma' + it)|^2 dt = 0$$

für jedes $r \in \mathbb{R}^+$.

Verwendet man geeignete Versionen recht tief liegender Taubersätze, so reicht diese Eigenschaft zum Beweis des Primzahlsatzes aus [BaD69]. Bei Anwendung von Newmans Methode besteht das Problem in der Abschätzung des Integrals auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$. Dieses Vorgehen wird daher eine zusätzliche Voraussetzung erfordern, etwa in Form einer Art Differenzierbarkeitsbedingung an der Stelle $s = 1$ für

$$-\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} - \frac{1}{s-1}.$$

Es ist nicht erforderlich, auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ zu integrieren. Verschiebung des vertikalen Integrationsweges auf $\operatorname{Re} s = 1 + 1/N$ (dort ist $e^{N(s-1)}$ beschränkt) könnte unter Anwendung der Integralmittlereigenschaft zum Ziel führen. Problematisch bleibt der Punkt $s = 1$. Ließe sich die Eigenschaft (5.1) von h auf $\frac{h(s)-h(1)}{s-1}$ übertragen, so wäre dies zum Beweis des Primzahlsatzes ausreichend. Eine Abschätzung der Form

$$(5.2) \quad \frac{h(s) - h(1)}{s-1} \ll |s-1|^{-\frac{1}{2}} \quad s \rightarrow 1, \operatorname{Re} s > 1,$$

würde ebenfalls ausreichen (siehe Lemma 5.2).

Bislang gelingt mir nur eine Abschätzung durch $|\sigma - 1|^{-1/2}$ (siehe Lemma 3.4), was nicht ausreichend ist.

Ein möglicher Weg zur Anwendung von Newmans Methode im Fall $3/2 < \gamma \leq 2$ wird hier in Form einiger Lemmata skizziert.

Folgende Variante des Riemann–Lebesgue–Lemmas liefert die Abschätzung auf dem Integrationsweg parallel zur imaginären Achse, ohne jedoch der reellen Achse zu nahe zu kommen.

Lemma 5.1. *Es seien $c \in \mathbb{C}$, $0 < a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + c \left(\frac{1}{N} + it \right) \right) e^{iNt} dt = 0.$$

Beweis. Partielle Integration des ersten Summanden liefert

$$\int_a^b \frac{f(t)}{\frac{1}{N} + it} e^{iNt} dt = \frac{1}{iN} \frac{f(t)}{\frac{1}{N} + it} e^{iNt} \Big|_a^b - \frac{1}{iN} \int_a^b \left(\frac{f(t)}{\frac{1}{N} + it} \right)' e^{iNt} dt.$$

Der erste Ausdruck geht für $N \rightarrow \infty$ gegen 0. Wegen

$$\left(\frac{f(t)}{\frac{1}{N} + it} \right)' = \frac{f'(t) \left(\frac{1}{N} + it \right) - if(t)}{\left(\frac{1}{N} + it \right)^2} \ll \frac{1}{a^2}$$

ist der verbleibende Integrand beschränkt. Daher geht auch der zweite Ausdruck gegen 0.

Analog ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) c \left(\frac{1}{N} + it \right) e^{iNt} dt &= \frac{c}{iN} f(t) \left(\frac{1}{N} + it \right) e^{iNt} \Big|_a^b \\ &\quad - \frac{c}{iN} \int_a^b \left(f(t) \left(\frac{1}{N} + it \right) \right)' e^{iNt} dt. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation sehen wir auch hier, dass für $N \rightarrow \infty$ beide Summanden gegen 0 gehen. Zusammen ergibt sich die Behauptung. \square

Unter der strengeren Voraussetzung (5.2) liefert das folgende Lemma das gewünschte Ergebnis. Der Nachweis von (5.2) für die vorliegende Klasse arithmetischer Halbgruppen bleibt jedoch offen.

Lemma 5.2. *Es sei G eine auf $\operatorname{Re} s > 0$ holomorphe Funktion mit den Eigenschaften*

$$(5.3) \quad \lim_{\substack{\sigma, \sigma' \rightarrow 0 \\ \sigma, \sigma' > 0}} \int_{-\tau}^{\tau} |G(\sigma + it) - G(\sigma' + it)|^2 dt = 0$$

für alle $r \in \mathbb{R}^+$ und

$$(5.4) \quad G(s) \ll |s|^{\frac{1}{2}} \quad \text{für } s \rightarrow 0, \operatorname{Re} s > 0.$$

Für jedes feste $r \in \mathbb{R}^+$ gilt dann

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-r}^r G \left(\frac{1}{N} + it \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + \frac{\frac{1}{N} + it}{r^2} \right) e^{Nit} dt = 0.$$

Beweis. Wir zerlegen den Integrationsweg in drei Teile: einen sehr kurzen um $t = 0$ und die beiden verbleibenden Randstücke. Auf den Randstücken ermöglicht die Voraussetzung (5.3) eine Abschätzung. Wegen des Pols des Integranden in $s = 0$ ist für das Mittelstück die Voraussetzung (5.4) erforderlich.

Zur Abkürzung sei

$$u(s) := G(s) \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{r^2} \right).$$

Die Funktion u ist in $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph.

Es sei $\varepsilon > 0$.

Wegen (5.4) gibt es zu kleinem $\sigma_0 > 0$ ein $\tau_0 > 0$ und ein $C > 0$ so, dass für alle $s = \sigma + it$ mit $0 < \sigma < \sigma_0$ und $-\tau_0 < t < \tau_0$ gilt

$$|u(s)| \leq \frac{C}{\sqrt{|s|}}.$$

Wird

$$\tau := \min \left\{ \frac{\varepsilon^2}{12C}, \tau_0 \right\}$$

gewählt, so folgt

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \left| \int_{-\tau}^{\tau} u \left(\frac{1}{N} + it \right) e^{-iNt} dt \right| &\leq \int_{-\tau}^{\tau} C \left| \frac{1}{N} + it \right|^{-\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \int_{-\tau}^{\tau} \frac{C}{\sqrt{|t|}} dt = 4C\sqrt{\tau} \leq \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

für jedes $N > 0$.

Wegen (5.3) gibt es ein N_1 so, dass für alle $N, N_2 > N_1$ gilt

$$\int_{\tau}^r \left| G\left(\frac{1}{N} + it\right) - G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \right|^2 dt < \frac{\varepsilon^2}{36r \left(\frac{1}{\tau} + 1\right)^2}.$$

Die Höldersche Ungleichung für Integrale [HLP34] liefert daraus

$$\int_{\tau}^r \left| G\left(\frac{1}{N} + it\right) - G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \right| dt < \frac{\varepsilon}{6 \left(\frac{1}{\tau} + 1\right)}$$

für alle $N, N_2 > N_0$. Wir wählen ein solches N_2 fest. Dann gilt

$$(5.6) \quad \left| \int_{\tau}^r \left(G\left(\frac{1}{N} + it\right) - G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + \frac{\frac{1}{N} + it}{r^2} \right) e^{iNt} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Lemma 5.1 liefert die Existenz eines $N_3 > 0$ mit

$$\left| \int_{\tau}^r G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + \frac{\frac{1}{N} + it}{r^2} \right) e^{iNt} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{6}$$

für alle $N \geq N_3$.

Wir setzen $N_0 := \max\{N_1, N_3\}$. Für alle $N \geq N_0$ gilt dann

(5.7)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\tau}^r u\left(\frac{1}{N} + it\right) e^{iNt} dt \right| \\ & \leq \left| \int_{\tau}^r G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + \frac{\frac{1}{N} + it}{r^2} \right) e^{iNt} dt \right| \\ & \quad + \left| \int_{\tau}^r \left(G\left(\frac{1}{N} + it\right) - G\left(\frac{1}{N_2} + it\right) \right) \left(\frac{1}{\frac{1}{N} + it} + \frac{\frac{1}{N} + it}{r^2} \right) e^{iNt} dt \right| \\ & < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$(5.8) \quad \left| \int_{-r}^{-\tau} u\left(\frac{1}{N} + it\right) e^{iNt} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammenfassung von (5.5), (5.7) und (5.8) liefert

$$\left| \int_{-r}^r u\left(\frac{1}{N} + it\right) e^{iNt} dt \right| < \varepsilon$$

für $N > N_0$. □

5.2 Liefert die Methode mehr als den Primzahlsatz?

Newmans Methode, angewandt auf $\zeta'_{\Lambda}(s)/\zeta_{\Lambda}(s)$, liefert zunächst die Konvergenz des Integrals

$$(5.9) \quad \int_1^{\infty} \frac{\psi_{\Lambda}(x) - e^x}{e^x} dx.$$

Daraus folgt zwar der Primzahlsatz in der rein qualitativen Form

$$\psi_{\Lambda}(x) \sim e^x \quad \text{bzw.} \quad \pi_{\Lambda}(x) \sim \frac{e^x}{x},$$

doch im Prinzip beinhaltet diese Aussage mehr. Es ist möglich, dass eine arithmetische Halbgruppe den Primzahlsatz erfüllt, Newmans Methode aber nicht anwendbar ist, weil das betrachtete Integral (5.9) divergiert. Dies wird an einem Beispiel deutlich.

Ausgehend von den natürlichen Primzahlen \mathbb{P} ist die Konstruktion einer multiplikativen Halbgruppe einfacher. Es sei S eine Teilmenge von \mathbb{P} mit der Eigenschaft

$$(5.10) \quad \sum_{\substack{p \in S \\ p \leq x}} 1 \sim \frac{x}{\log^2 x}.$$

Mit $T \subseteq \mathbb{P}$ werde das Komplement von S in \mathbb{P} bezeichnet, so dass $S \cup T = \mathbb{P}$ eine disjunkte Zerlegung der Primzahlmenge liefert.

Die vollständig multiplikativen Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ seien erklärt durch

$$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \in S, \\ 0 & \text{für } p \in T, \end{cases} \quad g(p) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \in S, \\ 1 & \text{für } p \in T. \end{cases}$$

Dann sind f und g die charakteristischen Funktionen der Mengen

$$L = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 1\} \quad \text{bzw.} \quad M = \{n \in \mathbb{N} : g(n) = 1\},$$

und es gilt $f * g = \mathbf{1}$. Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat eine eindeutige Darstellung $n = \ell \cdot m$ mit $\ell \in L$ und $m \in M$.

Die Menge S hat die Eigenschaft

$$(5.11) \quad S(x) := \sum_{p \leq x} f(p) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in S}} 1 \sim \frac{x}{\log^2 x}.$$

Aus (5.11) folgt mit einer positiven Konstanten c (vgl. [Luc74], Satz 2)

$$(5.12) \quad L(x) := \sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in L}} 1 \sim c \frac{x}{\log^2 x}.$$

Daraus folgt

$$(5.13) \quad \left| \sum_{d > x} \frac{\mu(d) f(d)}{d} \right| = \left| \sum_{\substack{d > x \\ d \in L}} \frac{\mu(d)}{d} \right| \ll \sum_{\substack{d > x \\ d \in L}} \frac{1}{d} \\ \ll \frac{L(t)}{t} \Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{L(t)}{t^2} dt \ll \frac{1}{\log x}.$$

Es gilt

$$(5.14) \quad M(x) := \sum_{n \leq x} g(n) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1 = c^{-1} x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Dabei ist die Konstante c gegeben durch

$$c = \prod_{p \in S} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} > 0.$$

Zum Nachweis von (5.14) setzen wir $g = \mathbf{1} * h$ mit der multiplikativen Funktion $h = \mu * g$. Für $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$h(p^k) = g(p^k) - g(p^{k-1}) = \begin{cases} 0 & \text{für } p \in T \text{ oder } k > 1, \\ -1 & \text{für } p \in S \text{ und } k = 1. \end{cases}$$

Also ist $h = \mu f$ die faltungsinverse Funktion von f , d.h. es gilt $h * f = \mathbf{1}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{dm \leq x} h(d) = \sum_{d \leq x} h(d) \sum_{m \leq x/d} 1 = \sum_{d \leq x} h(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \\ &= x \sum_{d \leq x} \frac{h(d)}{d} + \mathcal{O}(1) \sum_{d \leq x} |h(d)| = x \sum_{\substack{d \leq x \\ d \in L}} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}(L(x)) \\ &= x \prod_{p \in S} \left(1 - \frac{1}{p}\right) - x \sum_{\substack{d > x \\ d \in L}} \frac{\mu(d)}{d} + \mathcal{O}(L(x)) \\ &= c^{-1} x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right), \end{aligned}$$

letzteres unter Verwendung von (5.13).

Für die von Mangoldt-Funktion $\Lambda = \mu * \log$ gilt $\Lambda(n) = \log p$ für $n = p^k$ mit $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$, für alle anderen $n \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda(n) = 0$. Es bezeichne

$$\psi_f(x) = \sum_{n \leq x} f(n) \Lambda(n), \quad \psi_g(x) = \sum_{n \leq x} g(n) \Lambda(n).$$

Dann besteht $\psi(x) := \psi_1(x) = \psi_f(x) + \psi_g(x)$. Divergiert das Integral

$$(5.15) \quad \int_1^\infty \frac{\psi_g(x) - x}{x^2} dx = \int_1^\infty \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx - \int_1^\infty \frac{\psi_f(x)}{x^2} dx,$$

so ist die Methode von Newman nicht anwendbar. Bekanntlich konvergiert das erste Integral auf der rechten Seite. Dagegen divergiert das zweite Integral: Dies folgt aus

$$\psi_f(x) = \sum_{p^k \leq x} f(p) \log p = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in S}} \log p + \mathcal{O}(\sqrt{x}) \sim S(x) \log x \sim \frac{x}{\log x}$$

durch Einsetzen, also

$$\int_1^T \frac{\psi_f(x)}{x^2} dx \sim \int_e^T \frac{dx}{x \log x} = \log \log T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty.$$

Könnte für ein (oder das vorliegende) Beispiel die Abschätzung (5.13) zu

$$(5.16) \quad \sum_{d>x} \frac{\mu(d) f(d)}{d} \ll \frac{1}{\log^2 x}$$

verschärft werden, so würde daraus auf gleichem Wege wie oben

$$M(x) = c^{-1}x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

folgen. Das würde zeigen, dass Newmans Methode angewandt auf $\zeta'_\Lambda(s)/\zeta_\Lambda(s)$ nicht auf $\gamma = 2$ ausgedehnt werden kann. Dies ist eventuell möglich, wenn man S mit

$$S(x) = \frac{x}{\log^2 x} + \mathcal{O}(x^\vartheta) \quad (\vartheta < 1)$$

wählt. Dies ist aufgrund der Hoheisel–Ingham–Sätze möglich. Gelingt es, daraus eine ähnlich gute Abschätzung für $L(x)$ zu gewinnen, könnte (5.16) durch komplexe Integration von $1/\zeta_L(s)$ folgen. Auf diese Möglichkeit wies Herr Schlage–Puchta freundlicherweise hin.

Die Konstruktion der Menge S mit (5.10) ist übrigens einfach möglich, wenn wir den Primzahlsatz für die natürlichen Zahlen etwa in der Form

$$\pi(x) = \text{li } x + \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log^3 x}\right)$$

mit dem durch

$$\text{li } x := \int_2^x \frac{du}{\log u}$$

definierten *Integrallogarithmus* voraussetzen.

Allgemein sei $M_1 \subseteq \mathbb{R}^+$ eine Menge, deren Elementanzahlfunktion für ausreichend große x die Eigenschaft

$$|M_1(x) - f(x)| \leq r(x)$$

mit stetigen und monoton wachsenden Funktionen $f, r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $1 < r(x) = o(f(x))$ erfüllt. Weiter sei eine stetige, monoton wachsende

Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit den Eigenschaften $g(x) = o(f(x))$ und $r(x) = o(g(x))$ derart gegeben, dass $|f(x) - g(x)|$ monoton wächst. Dann gibt es eine Teilmenge $M_2 \subseteq M_1$, für die gilt

$$(5.17) \quad |M_2(x) - g(x)| \leq 2r(x),$$

das heißt $M_2(x) \sim g(x)$.

Dazu werden zunächst sämtliche Elemente kleiner oder gleich x von M_1 in M_2 übernommen, bis erstmals

$$(5.18) \quad M_2(x) \geq g(x) + r(x)$$

ausfällt. Für dieses x ist $M_2(x) \leq g(x) + r(x) + 1$. Ab einem gewissen x_0 und bis x ist dann (5.17) erfüllt. Bezeichne mit y die kleinste reelle Zahl größer als x , für die $M_2(x) = g(y)$ ist. Im Intervall $]x, y[$ werden zu M_2 keine Elemente hinzugefügt. Aufgrund der Monotonie von g und r gilt dort

$$g(x) \leq g(y) = M_2(x) \leq g(x) + 2r(x),$$

also die Behauptung.

Alle Elemente größer gleich y aus M_1 werden in M_2 übernommen, bis für ein neues x die Bedingung (5.18) erfüllt ist. Im Intervall $[y, x]$ ist die obere Beschränkung nach Wahl von x erfüllt. Andererseits gilt dort

$$\begin{aligned} M_2(\xi) &= M_1(\xi) - M_1(y) + M_2(y) \geq f(\xi) - r(\xi) - M_1(y) + g(y) \\ &= g(\xi) + f(\xi) - g(\xi) - M_1(y) + g(y) - r(\xi) \\ &\geq g(\xi) + f(\xi) - g(\xi) - (f(y) + r(y) - g(y)) - r(\xi) \\ &\geq g(\xi) - r(y) - r(\xi) \geq g(\xi) - 2r(\xi). \end{aligned}$$

Die Behauptung ist also erfüllt. Danach wiederholt sich der Vorgang, indem zu M_2 nichts hinzugefügt wird bis zum nächsten entsprechenden y usw.

Anwendung auf $M_1 = \mathbb{P}$, $f(x) = \text{li } x$, $r(x) = x/\log^3 x$ und $g(x) = x/\log^2 x$ liefert das gewünschte Beispiel.

Kapitel 6

Der Primzahlsatz mit Restglied

Unter strengeren Voraussetzungen an die asymptotische Elementanzahl von Λ lässt sich auch der Primzahlsatz mit Restglied zeigen. Im Folgenden sei daher Λ eine arithmetische Halbgruppe mit

$$(6.1) \quad L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(e^{\vartheta x})$$

mit $A > 0$ und $\vartheta < 1$. Dies Restglied entspricht dem Restglied in Knopfmachers Axiom \mathcal{A} [Kno75].

6.1 Eigenschaften der Zetafunktion

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich über die Zetafunktion $\zeta_\Lambda(s)$ mehr aussagen. In Satz 3.3 wurde bereits die Fortsetzbarkeit behandelt. Weitere wichtige Aussagen betreffen die Nullstellenfreiheit der Fortsetzung. Die Beweise können meist analog wie bei der Riemannschen Zetafunktion geführt werden [Ayo63].

Lemma 6.1. *Für $s = \sigma + it$ mit $|t| \geq 3$ und*

$$(6.2) \quad \max \left\{ \frac{1 + \vartheta}{2}, 1 - \frac{1}{\log |t|} \right\} \leq \sigma \leq 2$$

gilt

$$(6.3) \quad \zeta_\Lambda(s) \ll \log |t| + |t|^\vartheta \quad \text{und} \quad \zeta'_\Lambda(s) \ll (\log |t| + |t|^\vartheta)^2.$$

Beweis. Eine Aufspaltung der Reihe $\zeta_\Lambda(s)$ bei x und getrennte Abschätzung der Teilsommen erleichtert die Abschätzung. Es sei zunächst $\sigma > 1$. Wir nutzen die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3. Mit den Gleichungen (3.5) und (3.7) ergibt sich

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| > x}} e^{-|\lambda|s} &= \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|s} - \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} \\ &= -\frac{L(x)}{e^{sx}} + A \frac{s}{s-1} e^{(1-s)x} + s \int_x^\infty \mathcal{O}(e^{(\vartheta-\sigma)u}) du. \end{aligned}$$

Die letzte Formel stellt eine für $\sigma > \vartheta$ meromorphe Funktion dar. Für $\zeta_\Lambda(s)$ liefert dort ($s \neq 1$) der Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \zeta_\Lambda(s) &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} - \frac{L(x)}{e^{sx}} + A \frac{s}{s-1} e^{(1-s)x} \\ &\quad + s \int_x^\infty \mathcal{O}(e^{(\vartheta-\sigma)u}) du \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} - \frac{Ae^x + \mathcal{O}(e^{\vartheta x})}{e^{sx}} + A \frac{s}{s-1} e^{(1-s)x} \\ &\quad + s \int_x^\infty \mathcal{O}(e^{(\vartheta-\sigma)u}) du \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} - Ae^{(1-s)x} + A \frac{s}{s-1} e^{(1-s)x} + \mathcal{O}(e^{(\vartheta-\sigma)x}) \\ &\quad + s \int_x^\infty \mathcal{O}(e^{(\vartheta-\sigma)u}) du \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} + \frac{A}{s-1} e^{(1-s)x} + \mathcal{O}\left(\left(1 + \frac{|s|}{\sigma - \vartheta}\right) e^{(\vartheta-\sigma)x}\right)$$

für $x \rightarrow \infty$. Für (beispielsweise) $\sigma > \frac{1+\vartheta}{2}$ ist auch $\frac{1}{\sigma-\vartheta}$ beschränkt. Wir wählen $x := \log |t|$. Unter den im Lemma genannten Einschränkungen an t und σ gilt dann

$$\left| e^{-|\lambda|s} \right| = e^{-|\lambda|\sigma} \leq e^{-|\lambda|(1-\frac{1}{\log|t|})} \leq \frac{e}{e^{|\lambda|}}$$

sowie

$$|t|^{1-\sigma} \leq |t|^{1-(1-\frac{1}{\log|t|})} = e$$

und daher

$$\frac{|t|^{1-(\sigma-\vartheta)}}{\sigma-\vartheta} \ll |t|^\vartheta$$

für $|t| \rightarrow \infty$. Für $\zeta_\Lambda(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\zeta_\Lambda(s)| &\ll \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|} + e^{(1-\sigma)x} + \frac{|s|}{\sigma-\vartheta} e^{(\vartheta-\sigma)x} \\ &\ll \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq \log|t|}} e^{-|\lambda|} + |t|^{1-\sigma} + |t|^{\vartheta-\sigma} + \frac{|t|^{1-(\sigma-\vartheta)}}{\sigma-\vartheta} \\ &\ll \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq \log|t|}} e^{-|\lambda|} + \frac{|t|^{1-(\sigma-\vartheta)}}{\sigma-\vartheta} \\ &\ll \log|t| + |t|^\vartheta, \end{aligned}$$

wobei zuletzt Lemma 2.2 angewandt wurde. Die Aussage über $\zeta'_\Lambda(s)$ kommt aus der Abschätzung von $\zeta_\Lambda(s)$ mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel. Dazu sei w der einfach geschlossene, positiv orientierte Kreisweg um s mit $|u-s| = \frac{1}{2(\log|t|+|t|^\vartheta)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\zeta'_\Lambda(s)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_w \frac{\zeta_\Lambda(u)}{(u-s)^2} du \right| \ll \frac{1}{2\pi} \int_w \frac{1}{4} |\zeta_\Lambda(u)| (\log|t| + |t|^\vartheta)^2 du \\ &\ll (\log|t| + |t|^\vartheta)^2, \end{aligned}$$

wie behauptet. \square

Lemma 6.2. Für reelles $t \neq 0$ gilt $\zeta_\Lambda(1+it) \neq 0$.

Beweis. Für $\sigma > 1$ kommt aus (3.4)

$$\zeta_\Lambda(s) = \exp \left(\sum_{\beta \in \mathbb{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k|\beta|s} \right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\zeta_\Lambda(\sigma+it)| &= \exp \left(\sum_{\beta \in \mathbb{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{k} e^{-k|\beta|s} \right) \right) \\ &= \exp \left(\sum_{\beta \in \mathbb{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k|\beta|\sigma} \cos(kt|\beta|) \right). \end{aligned}$$

Wesentlich für den Beweis dieses Lemmas ist die für alle $x \in \mathbb{R}$ gültige Ungleichung $3 + 4 \cos x + \cos 2x \geq 0$. Mit $x := k|\beta|t$ folgt für alle $\sigma > 1$ und $t \in \mathbb{R}$ dann

$$\begin{aligned} (6.7) \quad &\zeta_\Lambda(\sigma)^3 |\zeta_\Lambda(\sigma+it)|^4 |\zeta_\Lambda(\sigma+2it)| \\ &= \exp \left(\sum_{\beta \in \mathbb{B}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-k|\beta|\sigma} (3 + 4 \cos(kt|\beta|) + \cos(2kt|\beta|)) \right) \geq 1. \end{aligned}$$

Wegen des einfachen Pols bei $s=1$ ist $\zeta_\Lambda(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1}$ für $\sigma \rightarrow 1$. Hätte $\zeta_\Lambda(s)$ in $s=1+it_0$ mit $t_0 \neq 0$ eine Nullstelle, so wäre $\zeta_\Lambda(\sigma+it_0) \ll \sigma-1$ für $\sigma \rightarrow 1, \sigma > 1$. Das bedeutet

$$\lim_{\substack{\sigma \rightarrow 1 \\ \sigma > 1}} \zeta_\Lambda(\sigma)^3 \zeta_\Lambda(\sigma+it_0)^4 = 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu (6.7), da $\zeta_\Lambda(1+2it)$ stetig ist in $t=t_0$. \square

Lemma 6.3. Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass für $|t| \geq 3$ und

$$(6.8) \quad \max \left\{ \frac{1+\vartheta}{2}, 1 - \frac{\delta}{(\log|t| + |t|^\vartheta)^9} \right\} < \sigma \leq 2$$

gilt

$$|\zeta_\Lambda(s)| \gg \frac{1}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7}.$$

Beweis. Es sei $|t| \geq 3$ und zunächst $1 < \sigma \leq 2$. Dann folgt aus (6.7) mit $\zeta_\Lambda(\sigma) \ll \frac{1}{\sigma-1}$ und Lemma 6.1

$$\frac{1}{|\zeta_\Lambda(\sigma + it)|} \leq \zeta_\Lambda(\sigma)^{\frac{3}{4}} |\zeta_\Lambda(\sigma + 2it)|^{\frac{1}{4}} \ll (\sigma - 1)^{-\frac{3}{4}} (\log |t| + |t|^\vartheta)^{\frac{1}{4}}$$

und

$$(6.9) \quad \zeta_\Lambda(1 + it) - \zeta_\Lambda(\sigma + it) = - \int_1^\sigma \zeta'_\Lambda(u + it) du \ll (\sigma - 1) (\log |t| + |t|^\vartheta)^2.$$

Zusammenfassung dieser Abschätzungen liefert

$$\begin{aligned} |\zeta_\Lambda(1 + it)| &\geq |\zeta_\Lambda(\sigma + it)| - c_1(\sigma - 1) (\log |t| + |t|^\vartheta)^2 \\ &\geq c_2(\sigma - 1)^{\frac{3}{4}} (\log |t| + |t|^\vartheta)^{-\frac{1}{4}} - c_1(\sigma - 1) (\log |t| + |t|^\vartheta)^2 \end{aligned}$$

mit gewissen $c_1, c_2 > 0$. Speziell gilt dies für $\sigma = 1 + \frac{c_3}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^9}$ mit einem noch zu wählenden $c_3 > 0$, also

$$(6.10) \quad |\zeta_\Lambda(1 + it)| \geq \frac{c_2 c_3^{\frac{3}{4}} - c_1 c_3}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7} = \frac{c_4}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7}.$$

Durch ausreichend kleine Wahl von c_3 kann dabei $c_4 > 0$ erreicht werden.

Da (6.9) wegen Lemma 6.2 auch noch unter der Bedingung (6.8) gilt, folgt dort mit (6.10) weiter

$$\begin{aligned} |\zeta_\Lambda(\sigma + it)| &\geq \frac{c_4}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7} - c_1 |\sigma - 1| (\log |t| + |t|^\vartheta)^2 \\ &\geq \frac{c_4 - c_1 \delta}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7} = \frac{c_5}{(\log |t| + |t|^\vartheta)^7} \end{aligned}$$

mit $c_5 > 0$, falls δ genügend klein ist. \square

Da sich die Nullstellen meromorpher Funktionen in \mathbb{C} nirgends häufen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\zeta_\Lambda(s) \neq 0$ für $|t| \leq T$ und $1 - \varepsilon \leq \sigma \leq 1$, denn nach Lemma 6.2 liegen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = 1$ keine Nullstellen und $\zeta_\Lambda(s)$ ist stetig. Lemma 6.3 liefert die Nullstellenfreiheit von $\zeta_\Lambda(s)$ für (6.8) und $|t| \geq 3$. Kombination der Ergebnisse von Lemma 6.1 und Lemma 6.3 ergibt schließlich das

Lemma 6.4. *Es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass $\zeta_\Lambda(s) \neq 0$ gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit*

$$(6.11) \quad \sigma \geq \max \left\{ \frac{1 + \vartheta}{2}, 1 - \delta (\log(1 + |t|) + |t|^\vartheta)^{-9} \right\}.$$

Für solche s , die der zusätzlichen Bedingung $|t| \geq 3$ genügen, gilt

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll (\log |t| + |t|^\vartheta)^9.$$

Lemma 6.5. *Die logarithmische Ableitung der Zetafunktion, $\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)}$, hat in $s = 1$ einen einfachen Pol mit Residuum -1 .*

Beweis. Wie beim Beweis von Satz 3.4 ergibt sich

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} = \frac{-1}{s-1} + \frac{A + (s-1)\rho(s) + s(s-1)\rho'(s) + s\rho(s)}{As + s(s-1)\rho(s)}.$$

Dabei ist $\rho(s)$ auf $\sigma > \vartheta$ holomorph. \square

Bemerkung 6.1. Das bisherige Vorgehen reicht im Fall der natürlichen Zahlen bereits zur Anwendung der Integralformel aus. Bei arithmetischen Halbgruppen ist das anders, da die Abschätzungen für $\zeta_\Lambda(s)$ schlechter sind. Es sei zunächst $T > 3$ und

$$\alpha := \min \left\{ \frac{\delta}{2(\log |T| + |T|^\vartheta)^9}, \frac{1 - \vartheta}{2} \right\}$$

sowie $c := 1 + \alpha$. Dann gelten mit Ausnahme des Pols in $s = 1$ die oben aufgeführten Abschätzungen für $\zeta_\Lambda(s)$ und die logarithmische

Ableitung in dem Rechteck $1 - \alpha - iT, 1 + \alpha - iT, 1 + \alpha + iT, 1 - \alpha + iT$. Die Integralformel aus Satz (3.2) liefert

$$(6.12) \quad \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) \left(1 - e^{|\lambda|^{-x}}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \cdot \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds \\ + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\zeta'_\Lambda(c)}{\zeta_\Lambda(c)}\right| \frac{e^{xc}}{T}\right).$$

Wegen $\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma)}{\zeta_\Lambda(\sigma)} \ll \frac{1}{\sigma-1}$ ist $\frac{\zeta'_\Lambda(c)}{\zeta_\Lambda(c)} \ll \alpha^{-1}$. Damit ist der Fehlerterm in (6.12) von der Größenordnung $T^{9\vartheta-1}e^{xc}$. Für $\vartheta > 1/9$ ist dies von größerer Größenordnung als der (noch zu bestimmende) Hauptterm $\frac{1}{2}e^x$. Es ist daher erforderlich, bessere Abschätzungen bzw. Abschätzungen für größere Gebiete zu finden.

Lemma 6.6. *Es sei $\varepsilon > 0$, $T \geq 3$ und $s = \sigma + it$ mit $|t| \leq T$ und $|s-1| > \varepsilon$. Dann gilt*

$$\zeta_\Lambda(s) \ll_\varepsilon T$$

gleichmäßig für $\sigma \geq \max\{\frac{1}{2}, \frac{1+\vartheta}{2}\}$.

Beweis. Zur Abkürzung sei

$$\Delta(s) := \zeta_\Lambda(s) - \frac{A}{s-1}.$$

Aus (6.5) kommt

$$\Delta(s) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} + A \frac{e^{(1-s)x} - 1}{s-1} \\ + s \int_x^\infty \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)u}\right) du + \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right)$$

für $x \rightarrow \infty$. In dem bezeichneten Gebiet sind $\frac{1}{|1-s|}$, $\frac{|s|}{|1-s|}$ und $\frac{1}{\vartheta-\sigma}$ beschränkt. Partielle Summation liefert

$$\left| \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} e^{-|\lambda|s} \right| \leq L(x)e^{-\sigma x} + |s| \left| \int_0^x L(u)e^{-su} du \right|$$

$$\leq Ae^{(1-\sigma)x} + \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right) + A|s| \left| \int_0^x e^{(1-s)u} du \right| \\ + |s| \int_0^x \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)u}\right) du \\ \leq Ae^{(1-\sigma)x} + \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right) + A|s| \left| \frac{e^{(1-s)x}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right| \\ + |s| \mathcal{O}\left(\left| \frac{e^{(\vartheta-\sigma)x}}{\vartheta-\sigma} - \frac{1}{\vartheta-\sigma} \right|\right) \\ = Ae^{(1-\sigma)x} + \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right) + A \frac{|s|}{|1-s|} \mathcal{O}\left(e^{(1-\sigma)x} + 1\right) \\ + |s| \mathcal{O}(1).$$

Daraus folgt

$$|\Delta(s)| \leq Ae^{(1-\sigma)x} + A \left| \frac{s}{1-s} \right| \mathcal{O}\left(e^{(1-\sigma)x} + 1\right) + |s| \mathcal{O}(1) \\ + \frac{1}{|1-s|} \mathcal{O}\left(e^{(1-\sigma)x} + 1\right) + |s| \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right) + \mathcal{O}\left(e^{(\vartheta-\sigma)x}\right).$$

Zunächst sei $\sigma < 2$. Dann ist $s \ll T$. Wegen $\sigma > 1/2$ ergibt sich durch Einsetzen von $x := \log T$ daraus

$$\Delta(s) = \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) + \left| \frac{s}{1-s} \right| \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) + |s| \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left(T^{\frac{1}{2}}\right) + |s| \mathcal{O}(1) \\ \ll T.$$

Damit ist dort

$$(6.13) \quad \zeta_\Lambda(s) = \Delta(s) + \frac{A}{s-1} \ll T.$$

Für $\sigma > 1$ gilt $|\zeta_\Lambda(\sigma + it)| \leq |\zeta_\Lambda(\sigma)|$. Da außerdem $\zeta_\Lambda(\sigma)$ eine monoton fallende Funktion von σ ist, gilt (6.13) auch für $\sigma \geq 2$. \square

Lemma 6.7. *Es gibt eine Konstante $C > 0$ derart, dass für $1 < \sigma < 2$ die Ungleichung*

$$\left| \frac{1}{\zeta_\Lambda(s)} \right| < \frac{A}{\sigma-1} + C$$

gilt.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\zeta_\Lambda(s)} \right| &= \left| \prod_{\beta \in B} (1 - e^{-|\beta|s}) \right| \leq \prod_{\beta \in B} (1 + e^{-|\beta|\sigma}) \\
&\leq \prod_{\beta \in B} (1 + e^{-|\beta|\sigma} + e^{-2|\beta|\sigma} + e^{-3|\beta|\sigma} + \dots) \\
&= \prod_{\beta \in B} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k|\beta|\sigma} = \sum_{\lambda \in \Lambda} e^{-|\lambda|\sigma} = \zeta_\Lambda(\sigma) \\
&= \frac{A\sigma}{\sigma-1} + \sigma \int_0^{\infty} \mathcal{O}(e^{-(\vartheta-\sigma)x}) dx \\
&= A + \frac{A}{\sigma-1} + \sigma \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Die weiteren Abschätzungen für $\zeta_\Lambda(s)$ stützen sich auf zwei Sätze der Funktionentheorie. Die Beweise finden sich zum Beispiel in [Ayo63].

Satz 6.1. Es seien $s_0 \in \mathbb{C}$, $M > 1$ und $r > 0$. Es bezeichne K die Kreisscheibe $|s - s_0| \leq r$. Ist $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ auf K holomorph mit

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M$$

und hat f keine Nullstelle in der rechten Hälfte von K (d.h. $\operatorname{Re}(s - s_0) > 0$), so gilt

$$(6.14) \quad -\operatorname{Re} \left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right) < \frac{c_1 M}{r}$$

mit einem $c_1 > 0$.

Hat f eine Nullstelle ρ_0 im Bereich $|s - s_0| \leq 1/2r$, $\operatorname{Re}(s - s_0) \leq 0$, so gilt

$$(6.15) \quad -\operatorname{Re} \left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right) < \frac{c_1 M}{r} - \operatorname{Re} \frac{1}{s_0 - \rho_0}.$$

Satz 6.2. Es seien $s_0 \in \mathbb{C}$, $M > 1$ und $r > 0$. Es bezeichne K die Kreisscheibe $|s - s_0| \leq r$. Weiter sei $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ auf K holomorph mit

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M$$

und

$$\left| \frac{f'(s_0)}{f(s_0)} \right| < \frac{M}{r}.$$

Gilt $f(s) \neq 0$ für $s \in K$ mit $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 2r'$ für ein $0 < r' < r/4$, so besteht

$$(6.16) \quad \left| \frac{f'(s)}{f(s)} \right| < \frac{c_2 M}{r}$$

für $|s - s_0| \leq r'$.

Damit ist der Beweis des folgenden Satzes möglich, der in ähnlicher Form bereits in [Mül71] zu finden ist.

Satz 6.3. Es existiert ein $c > 0$ mit $\zeta_\Lambda(s) \neq 0$ für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 1 - \frac{c}{\log|t|}$ und $|t| \geq 2$.

Beweis. Es gilt für $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned}
(6.17) \quad \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma + 2it)}{\zeta_\Lambda(\sigma + 2it)} - 4\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma + it)}{\zeta_\Lambda(\sigma + it)} - 3\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma)}{\zeta_\Lambda(\sigma)} \right) \\
= \sum_{\lambda \in \Lambda} \Lambda_0(\lambda) e^{-|\lambda|\sigma} (\cos(-2|\lambda|t) + 4\cos(-|\lambda|t) + 3).
\end{aligned}$$

Da die Reihe nur positive Summanden enthält, folgt

$$(6.18) \quad -\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma + 2it)}{\zeta_\Lambda(\sigma + 2it)} \right) - 4\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma + it)}{\zeta_\Lambda(\sigma + it)} \right) - 3\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma)}{\zeta_\Lambda(\sigma)} \geq 0.$$

Angenommen, $\xi + i\eta$ ist eine Nullstelle von $\zeta_\Lambda(s)$ mit $\eta \geq 2$. (Der Fall $\eta \leq -2$ wird analog behandelt.) Für σ_0 gelte zunächst nur

$$2 \geq \sigma_0 \geq 1 + \frac{1}{(2\eta - 1)},$$

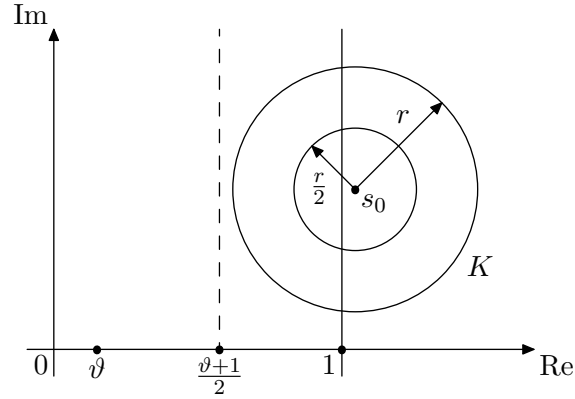


Abbildung 6.1: Kreisscheiben zur Bestimmung nullstellenfreier Gebiete von $\zeta_\Lambda(s)$ im Beweis von Satz 6.3

außerdem sei $s_0 := \sigma_0 + i\eta$ und $r = 1 - \frac{1+\vartheta}{2} = \frac{1-\vartheta}{2}$. Wir betrachten die Kreisscheibe K mit $|s - s_0| \leq r$.

Nach Lemma 6.6 gilt dort

$$\zeta_\Lambda(s) \ll t.$$

Zusammen mit Lemma 6.7 folgt

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s_0)} &\ll t \left(C + \frac{A}{\sigma_0 - 1} \right) \ll t \left(C + \frac{A}{(2\eta + 1)^{-1}} \right) \\ &\ll \eta(2\eta + 1) \ll \exp(c_3 \log \eta). \end{aligned}$$

In der rechten Hälfte von K hat $\zeta_\Lambda(s)$ nach Lemma 3.2 keine Nullstellen. Mit $M = c_4 \log \eta$ folgt aus Satz 6.1

$$-\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma_0 + i\eta)}{\zeta_\Lambda(\sigma_0 + i\eta)} \right) < c_5 \frac{\log \eta}{1 - \vartheta}$$

und analog

$$(6.19) \quad -\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma_0 + 2i\eta)}{\zeta_\Lambda(\sigma_0 + 2i\eta)} \right) < c_6 \frac{\log \eta}{1 - \vartheta}$$

mit Konstanten $c_5, c_6 > 0$.

Für die Lage von ξ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $\xi > \sigma_0 - \frac{1+\vartheta}{4}$.

Dann liefert Satz 6.1

$$(6.20) \quad -\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'_\Lambda(s_0)}{\zeta_\Lambda(s_0)} \right) < c_5 \frac{\log \eta}{1 - \vartheta} - \frac{1}{\sigma_0 - \xi}.$$

Für den dritten Term aus (6.18) gilt

$$-\frac{\zeta_\Lambda(\sigma_0)}{\zeta_\Lambda(\sigma_0)} \sim \frac{1}{\sigma_0 - 1} \quad \text{für } \sigma_0 \rightarrow 1.$$

Deswegen gilt für beliebiges, festes $\delta > 1$ bei geeigneter Wahl von σ_0 auch

$$(6.21) \quad -\frac{\zeta'_\Lambda(\sigma_0)}{\zeta_\Lambda(\sigma_0)} < \frac{\delta}{\sigma_0 - 1}.$$

Einsetzen von (6.19), (6.20) und (6.21) in (6.18) liefert

$$\begin{aligned} c_6 \frac{\log \eta}{1 - \vartheta} + 4c_5 \frac{\log \eta}{1 - \vartheta} - \frac{4}{\sigma_0 - \xi} + \frac{3\delta}{\sigma_0 - 1} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sigma_0 - \xi} &\leq \frac{3\delta}{\sigma_0 - 1} + (4c_5 + c_6) \frac{\log \eta}{1 - \vartheta}. \end{aligned}$$

Auflösung nach $1 - \xi$ liefert

$$1 - \xi \geq \frac{4 - 3\delta - (\sigma_0 - 1)(4c_5 + c_6) \frac{\log \eta}{1 - \vartheta}}{\frac{3\delta}{\sigma_0 - 1} + (4c_5 + c_6) \frac{\log \eta}{1 - \vartheta}}.$$

Wir wählen

$$\sigma_0 := 1 + \frac{c_7(1 - \vartheta)}{\log \eta},$$

wobei c_7 noch festgelegt wird. Dann ist

$$1 - \xi \geq \frac{(4 - 3\delta - 4(c_5 + c_6)c_7)(1 - \vartheta)}{(3\frac{\delta}{c_6} + 4(c_5 + c_6)) \log \eta} > \frac{c}{\log \eta}$$

mit einem $c > 0$, wenn δ und c_7 geeignet gewählt werden.

2. Fall: $\xi \leq \sigma_0 - \frac{1+\vartheta}{4}$.

Hier ist

$$\xi \leq \sigma_0 - \frac{1+\vartheta}{4} = 1 + \frac{c_7}{\log \eta} - \frac{1+\vartheta}{4},$$

also

$$1 - \xi \geq \frac{1+\vartheta}{4} - \frac{c_7}{\log \eta} \geq \frac{c_8}{\log \eta}$$

mit ausreichend kleinem $c_8 > 0$.

In beiden Fällen folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.8. Für $\sigma > 1$ und $|s - 1| > 1$ gilt

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Beweis. Unter Berücksichtigung von Lemma 2.3 liefert partielle Summation

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) e^{-|\lambda|s} \right| &\leq \left| e^{-xs} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) + \int_0^x s e^{-us} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq u}} \Lambda_0(\lambda) du \right| \\ &\leq e^{-x\sigma} \mathcal{O}(xe^x) + |s| \left| \int_0^x e^{-us} \mathcal{O}(ue^u) du \right| \\ &= \mathcal{O}(xe^{(1-\sigma)x}) + |s| \mathcal{O}\left(\left| \int_0^x ue^{(1-s)u} du \right| \right) \\ &= \mathcal{O}(xe^{(1-\sigma)x}) \\ &\quad + |s| \mathcal{O}\left(\left| \frac{x}{1-s} e^{(1-s)x} - \frac{1}{(1-s)^2} e^{(1-s)x} + \frac{1}{(1-s)^2} \right| \right). \end{aligned}$$

Grenzübergang $x \rightarrow \infty$ ergibt

$$\left| \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \right| \ll \frac{|s|}{|1-s|^2} \ll \frac{1}{|1-s|} \ll \frac{1}{\sigma-1}$$

in dem genannten Gebiet. \square

Analog zur Riemannschen Zetafunktion [Ayo63] beweisen wir den

Satz 6.4. Es gibt eine Konstante $c' > 0$ derart, dass für $|t| \geq 3$ und gleichmäßig für $1 - \frac{c'}{\log |t|} \leq \sigma < 2$ die Abschätzung

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll \log |t|$$

gültig ist.

Beweis. Es sei $t_0 > 3$ gegeben ($t_0 < -3$ analog) und

$$\sigma_0 := 1 + \frac{c_9}{\log t_0}, \quad s_0 := \sigma_0 + it_0 \quad \text{sowie} \quad r := \frac{1-\vartheta}{2},$$

wobei $c_9 > 0$ noch geeignet zu wählen ist. Wegen Lemma 6.6 gilt in der Kreisscheibe $|s - s_0| \leq r$ die Abschätzung $\zeta_\Lambda(s) \ll t$ und wegen Lemma 6.7 auch

$$\left| \frac{1}{\zeta_\Lambda(s_0)} \right| < C + \frac{A}{\sigma_0 - 1} \quad \text{für } 1 < \sigma_0 < 2.$$

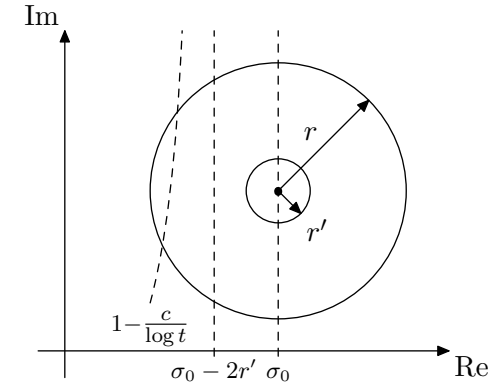


Abbildung 6.2: Gebiete zur Abschätzung von $\zeta'_\Lambda(s)/\zeta_\Lambda(s)$ im Beweis von Satz 6.4

Dort gilt daher

$$(6.22) \quad \frac{\zeta_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s_0)} \ll \frac{t}{\sigma_0 - 1} \ll t_0 \log t_0 \ll \exp(c_{10} \log t_0).$$

Aus Lemma 6.8 ergibt sich

$$(6.23) \quad \frac{\zeta'_\Lambda(s_0)}{\zeta_\Lambda(s_0)} \ll \frac{1}{\sigma_0 - 1} \ll \log t_0.$$

Wegen Satz 6.3 gilt

$$(6.24) \quad \zeta_\Lambda(s) \neq 0 \quad \text{für } \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t},$$

daher setzen wir

$$(6.25) \quad r' := \frac{c_{10}}{\log t_0}$$

mit $c_{10} > c_9$. Bei geeigneter Wahl von $c_9 > 0$ gilt

$$(6.26) \quad r' < \frac{1}{4}r \quad \text{und} \quad \frac{c_9}{\log t_0} - 2\frac{c_{10}}{\log t_0} > -\frac{c}{\log t}$$

für alle $|s - s_0| \leq r$.

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 mit $M = c_{11} \log t_0$ und einem $c_{11} > 0$ erfüllt, denn aus (6.22) folgt

$$\left| \frac{\zeta_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s_0)} \right| < e^M$$

und aus (6.23) kommt

$$\left| \frac{\zeta'_\Lambda(s_0)}{\zeta_\Lambda(s_0)} \right| < \frac{M}{r}.$$

Die Nullstellenfreiheit aus (6.24) liefert

$$\zeta_\Lambda(s) \neq 0 \quad \text{für } \sigma \geq \sigma_0 - 2r' \geq 1 + \frac{c_9}{\log t_0} - 2\frac{c_{10}}{\log t_0} > 1 - \frac{c}{\log t}.$$

Nach Satz 6.2 gilt daher

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll \log t_0$$

für $|s - s_0| \leq r' = \frac{c_{10}}{\log t_0}$, also insbesondere auch für $t = t_0$ und wegen

$$(6.26) \quad \text{für } \sigma \geq 1 - \frac{c'}{\log t} \quad \text{mit } c' = c_{10} - c_9 > 0. \quad \square$$

6.2 Beweis des Primzahlsatzes mit Hilfe der Integralformel

Das Vorgehen in diesem Abschnitt entspricht dem im Fall der natürlichen Zahlen [Ayo63]. Zum Beweis des Primzahlsatzes für die arithmetische Halbgruppe Λ wenden wir die Integralformel auf $\psi_\Lambda(x)$ an, wobei die zugehörige Dirichletreihe gerade die logarithmische Ableitung der Zetafunktion ist. Dies liefert eine Aussage über ein gewichtetes Mittel von ψ_Λ . Der nächste Schritt ist, daraus auf die Asymptotik von ψ_Λ zu schließen, welche äquivalent zum Primzahlsatz ist. Im multiplikativen Fall kommt Müller [Mül71] zum gleichen Ergebnis.

Es bezeichne

$$(6.27) \quad \psi_2(x) := \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) \left(1 - e^{|\lambda| - x}\right).$$

Dann ist

$$\psi_2(x) = e^{-x} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) \left(e^x - e^{|\lambda|}\right) = e^{-x} \int_0^x \psi_\Lambda(u) e^u du.$$

Zur Abkürzung werde mit

$$(6.28) \quad \psi_3(x) := \int_0^x \psi_\Lambda(u) e^u du$$

das gewichtete Integral über ψ_Λ bezeichnet.

Satz 6.5. *Es gibt eine Konstante $c > 0$ derart, dass*

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2}e^x + \mathcal{O}\left(e^x \exp\left(-cx^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

gilt.

Beweis. Zunächst sei $T > 3$. Es gibt ein $c_{13} > 0$ so, dass für $\alpha := c_{13}/\log T$ gilt $\alpha \leq \frac{1-\vartheta}{2}$ und

$$(6.29) \quad \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll \log T \ll \alpha^{-1}$$

$$\text{für } \begin{cases} \sigma = 1 - \alpha, & |t| \leq T \\ 1 - \alpha \leq \sigma \leq 1 + \alpha, & |t| = T. \end{cases} \quad \text{und}$$

Für $|t| > 3$ kommt dies aus Satz 6.3. Für $|t| \leq 3$ lässt sich mit der gleichen Begründung wie in der Herleitung von Lemma 6.4 ein c_{13} so klein wählen, dass dort für alle $s = 1 - \alpha + it$ die Abschätzung

$$(s-1) \frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll 1$$

gilt, also gleichwertig

$$\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \ll \frac{1}{|s-1|} \ll \alpha^{-1}.$$

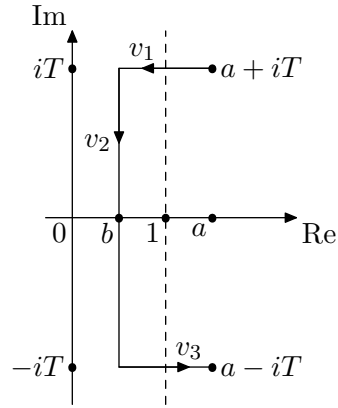


Abbildung 6.3: Integrationswege zur Anwendung der Integralformel

Es bezeichne $a := 1 + \alpha$ und $b := 1 - \alpha$. Weiter sei v_1 der geradlinige Integrationsweg von $a + iT$ nach $b + iT$, v_2 der von $b + iT$ nach $b - iT$ und v_3 der von $b - iT$ nach $a - iT$ (Abbildung 6.3).

Anwendung der Integralformel aus Satz 3.2 und des Residuensatzes liefert

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} -\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \cdot \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\zeta'_\Lambda(a)}{\zeta_\Lambda(a)}\right| \frac{e^{xa}}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^x + F_1 + F_2 + F_3 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\zeta'_\Lambda(a)}{\zeta_\Lambda(a)}\right| \frac{e^{xa}}{T}\right)$$

mit den Fehlertermen

$$F_\nu := \int_{v_\nu} -\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)} \cdot \frac{e^{xs}}{s(s+1)} ds, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Für $s \in v_1$ gilt $|s| \geq T$, $|s(s+1)| \geq T^2$ und $|e^{xs}| \leq e^{x(1+\alpha)}$. Unter Berücksichtigung von (6.29) und der Weglänge 2α folgt

$$F_1 \ll 2\alpha\alpha^{-1}e^{x(1+\alpha)}T^{-2} \ll \frac{e^{x(1+\alpha)}}{T^2}.$$

Analog gilt

$$F_3 \ll \frac{e^{x(1+\alpha)}}{T^2}.$$

Für $s \in v_2$ gilt $|s| \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + |t|)$, folglich $|s(s+1)| \geq \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + |t|)^2$. Zusammen mit (6.29) ergibt sich

$$\begin{aligned} |F_2| &\leq \int_{b+iT}^{b-iT} \left|\frac{\zeta'_\Lambda(s)}{\zeta_\Lambda(s)}\right| e^{x(1-\alpha)} \frac{1}{|s(s+1)|} ds \\ &\ll \int_0^T \alpha^{-1} e^{x(1-\alpha)} \frac{1}{(\frac{1}{2} + |t|)^2} dt \\ &\ll \log T e^{x(1-\alpha)} \int_0^T \frac{1}{(\frac{1}{2} + t)^2} dt \\ &\ll \log T e^{x(1-\alpha)} \left(1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + T}\right) \\ &\ll \log T e^{x(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Zusammenfassung ergibt

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{1}{2}e^x + \mathcal{O}\left(\frac{e^{x(1+\alpha)}}{T^2}\right) + \mathcal{O}\left(\log T e^{x(1-\alpha)}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\log T}{T} e^{x(1+\alpha)}\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x + \mathcal{O}\left(\log T e^{x(1-\alpha)} + \frac{\log T}{T} e^{x(1+\alpha)}\right). \end{aligned}$$

Durch geeignete Wahl von T lässt sich der Unterschied zwischen den beiden Restgliedern aufheben. Denn

$$\log T e^{x(1-\alpha)} \stackrel{!}{=} \frac{\log T}{T} e^{x(1+\alpha)}$$

ist äquivalent zu

$$\log T = 2\alpha x = 2 \frac{c_{13}}{\log T} x.$$

Es sei daher

$$T := \exp\left(c_{14} x^{\frac{1}{2}}\right)$$

mit einem entsprechenden $c_{14} > 0$. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \psi_2(x) &= \frac{1}{2} e^x + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}} e^{x(1-\alpha)}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^x + \mathcal{O}\left(x^{\frac{1}{2}} e^{x(1-\frac{c_{13}}{\log T})}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^x + \mathcal{O}\left(\exp\left(x\left(1 - \frac{c_{15}}{x^{\frac{1}{2}}}\right) + \frac{1}{2} \log x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} e^x + \mathcal{O}\left(\exp\left(x - c_{15} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \log x\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} e^x + \mathcal{O}\left(e^x \exp\left(-c x^{\frac{1}{2}}\right)\right), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Aus dem vorangehenden Satz kommt sofort

$$\psi_3(x) = e^x \psi_2(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \mathcal{O}\left(e^{2x} \exp\left(-c x^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Daraus folgt der Schluss auf die Asymptotik von ψ_Λ .

Satz 6.6. *Mit gewissen Konstanten $c, c' > 0$ besteht*

$$(6.30) \quad \psi_3(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + \mathcal{O}\left(e^{2x} \exp\left(-c x^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

genau dann, wenn

$$(6.31) \quad \psi_\Lambda(x) = e^x + \mathcal{O}\left(e^x \exp\left(-c' x^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

gilt.

Beweis. Wir schreiben die Behauptung für $\psi_3(\log x)$ und $\psi_\Lambda(\log x)$ um und folgen dem Beweis für die natürlichen Zahlen in [Ayo63]. Diese Darstellung entspricht dem Fall multiplikativer Halbgruppen. Die Aussagen werden dann zu

$$(6.32) \quad \psi_3(\log x) = \frac{1}{2} x^2 + \mathcal{O}\left(x^2 \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}} x\right)\right)$$

und

$$(6.33) \quad \psi_\Lambda(\log x) = x + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c' \log^{\frac{1}{2}} x\right)\right).$$

Wir folgern zunächst (6.33) aus (6.32).

Es gelte (6.32). Es ist

$$\psi_3(\log x) = \int_0^{\log x} \psi_\Lambda(u) e^u du = \int_1^x \psi_\Lambda(\log u) du.$$

Die Funktion h erfülle

$$(6.34) \quad 0 < h(x) < \frac{x}{2}.$$

Im Folgenden schreiben wir in der Regel den Funktionswert $h(x)$ ohne das Argument (x) . Da $\psi_\Lambda(\log x)$ eine monoton wachsende Funktion von x ist, gilt

$$(6.35) \quad \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \psi_\Lambda(\log u) du \leq \psi_\Lambda(\log x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi_\Lambda(\log u) du$$

Für die linke Seite gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \psi_\Lambda(\log u) du &= \frac{1}{h} (\psi_3(\log x) - \psi_3(\log(x-h))) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} x^2 + \mathcal{O}\left(x^2 \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}} x\right)\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x-h)^2 + \mathcal{O}\left(x^2 \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}}(x-h)\right)\right) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + hx - \frac{h^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^2 \exp(-c \log^{\frac{1}{2}} x)\right) \right. \\ \left. + \mathcal{O}\left(x^2 \exp(-c \log^{\frac{1}{2}}(x-h))\right) \right).$$

Da $\sqrt{\log x}$ eine monoton wachsende Funktion von x ist und nach (6.34)

$$\frac{1}{2}x < x-h < x$$

gilt, ist

$$\mathcal{O}\left(x^2 \exp(-c \log^{\frac{1}{2}}(x-h))\right) = \mathcal{O}\left(x^2 \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right).$$

Dies liefert

$$(6.36) \quad \frac{1}{h} \int_{x-h}^x \psi_{\Lambda}(\log u) du = x - \frac{h}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{h} \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right).$$

Analog ist

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi_{\Lambda}(\log u) du = \frac{1}{h} (\psi_3(\log(x+h)) - \psi_3(\log x)) \\ = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2}(x+h)^2 + \mathcal{O}\left(x^2 \exp(-c \log^{\frac{1}{2}}(x+h))\right) \right. \\ \left. - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(x^2 \exp(-c \log^{\frac{1}{2}} x)\right) \right).$$

Wie oben besteht $x < x+h < x + \frac{x}{2}$ und

$$\exp(-c \log^{\frac{1}{2}}(x+h)) < \exp(-c \log^{\frac{1}{2}} x).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi_{\Lambda}(\log u) du = x + \frac{h}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{h} \exp(-c \log^{\frac{1}{2}} x)\right) \\ (6.37) \quad = x + \frac{h}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{h} \exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right).$$

Es ist

$$\frac{\log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}{\log^{\frac{1}{2}} x} = \left(1 - \frac{\log 2}{\log x}\right)^{\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

für $x \geq 4$. Folglich ist

$$\exp\left(-c \log^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \ll \exp(-c_{16} \log^{\frac{1}{2}} x).$$

Aus (6.35), (6.36) und (6.37) folgt

$$(6.38) \quad \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{h} \exp(-c_{16} \log^{\frac{1}{2}} x)\right) - \frac{h}{2} \leq \psi_{\Lambda}(\log x) - x \quad \text{und} \\ \psi_{\Lambda}(\log x) - x \leq \frac{h}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^2}{h} \exp(-c_{16} \log^{\frac{1}{2}} x)\right).$$

Wählen wir

$$h(x) = \frac{x}{2} \exp(-c_{17} \log^{\frac{1}{2}} x),$$

so gilt mit geeignetem c_{17} auch $0 < h(x) < x/2$. Mit einem $c' > 0$ folgt dann aus (6.38)

$$\psi_{\Lambda}(\log x) - x \ll x \exp(-c' \log^{\frac{1}{2}} x).$$

Dies zeigt (6.33).

Andererseits gelte (6.31). Für $x > (c'/2)^2$ und eine gewisse Konstante c_0 ist dann

$$\psi_3(x) = \int_0^x \psi_{\Lambda}(u) e^u du \\ = \int_0^x e^{2u} du + c_0 + \int_{(c'/2)^2}^x \mathcal{O}(\exp(2u - c'\sqrt{u})) du \\ = \frac{1}{2} e^{2x} - 1 + c_0 + \mathcal{O}\left(\int_{(c'/2)^2}^x \left(2 - \frac{c'}{2\sqrt{u}}\right) \exp(2u - c'\sqrt{u}) du\right) \\ = \frac{1}{2} e^{2x} - 1 + c_0 + \mathcal{O}\left(\int_0^{2x-c'\sqrt{x}} e^t dt\right) \\ = \frac{1}{2} e^{2x} + \mathcal{O}(e^{2x} \exp(-c'\sqrt{x})).$$

Also gilt auch die Umkehrung. \square

Es fehlt noch der Schluss auf die asymptotische Anzahl der Basiselemente

Satz 6.7. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ und gewisse Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

$$(6.39) \quad \psi_\Lambda(x) = e^x + \mathcal{O}(e^x \exp(-c_1 x^r)),$$

$$(6.40) \quad \pi_\Lambda(x) = \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^x} \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}(e^x \exp(-c_2 x^r))$$

und

$$(6.41) \quad \psi_1(x) = \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^x} \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}(e^x \exp(-c_3 x^r)).$$

Bemerkung 6.2. Für genügend große x und eine Konstante a ist

$$\int_{e^{|\beta_1|}}^{e^x} \frac{du}{\log u} = \int_{|\beta_1|}^x \frac{e^t}{t} dt = \text{li}(e^x) + a.$$

Dabei ist β_1 das erste Basiselement bezüglich der Ordnung von Λ .

Beweis von Satz 6.7.

Zunächst zeigen wir die Äquivalenz von (6.40) und (6.41).

Nach Lemma 2.4 gilt

$$\psi_1(x) - \pi_\Lambda(x) \ll e^{\frac{x}{2}}$$

für $x \rightarrow \infty$. Wegen

$$\mathcal{O}\left(e^{\frac{x}{2}}\right) = \mathcal{O}\left(e^x \exp(-cx^r)\right)$$

entspricht dies der Behauptung.

Als nächstes schließen wir von (6.39) auf (6.41). Auch hier bietet sich wie beim Beweis von Satz 6.6 der Übergang von x zu $\log x$ an. Es gelte (6.39), also

$$\psi_\Lambda(\log x) = x + \mathcal{O}(x \exp(-c_1 \log^r x)).$$

Partielle Summation liefert

$$\begin{aligned} \psi_1(\log x) &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\beta_1| \leq |\lambda| \leq \log x}} \frac{\Lambda_0(\lambda)}{|\lambda|} \\ &= \frac{1}{\log x} \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\beta_1| \leq |\lambda| \leq \log x}} \Lambda_0(\lambda) + \int_{|\beta_1|}^{\log x} \frac{\psi_\Lambda(u)}{u^2} du \\ &= \frac{\psi_\Lambda(\log x)}{\log x} + \int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{\psi_\Lambda(\log v)}{v \log^2 v} dv. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{1}{\log u} du = \frac{x}{\log x} - \frac{e^{|\beta_1|}}{|\beta_1|} + \int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{du}{\log^2 u}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \psi_1(\log x) - \int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{1}{\log u} du &= \frac{\psi_\Lambda(\log x) - x}{\log x} + \frac{e^{|\beta_1|}}{|\beta_1|} + \int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{\psi_\Lambda(\log v) - v}{v \log^2 v} dv \\ &= \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x} \exp(-c_1 \log^r x)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\int_{e^{|\beta_1|}}^x \frac{v \exp(-c_1 \log^r v)}{v \log^2 v} dv\right) \\ &= \mathcal{O}\left(x \exp(-c_1 \log^r x)\right) + \mathcal{O}\left(\int_{e^{|\beta_1|}}^x \exp(-c_1 \log^r v) dv\right) \\ &= \mathcal{O}\left(x \exp(-c_1 \log^r x)\right) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\int_{e^{|\beta_1|}}^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \exp(-c_1 \log^r v) dv\right) \\ &= \mathcal{O}\left(x \exp(-c_1 \log^r x)\right) + \mathcal{O}(\sqrt{x}) \\ &\quad + \mathcal{O}\left((x - \sqrt{x}) \exp(-c_1 \log^r \sqrt{x})\right) \end{aligned}$$

$$\ll x \exp(-c_3 \log^r x).$$

Dies zeigt (6.41).

Umgekehrt gelte (6.41). Dann ist

$$\begin{aligned} \psi_\Lambda(x) &= \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_0(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ |\lambda| \leq x}} \Lambda_1(\lambda) |\lambda| \\ &= x \psi_1(x) - \int_{|\beta_1|}^x \psi_1(t) dt \\ &= x \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^x} \frac{du}{\log u} + x \mathcal{O}(e^x \exp(-c_3 x^r)) \\ &\quad - \int_{|\beta_1|}^x \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^t} \frac{du}{\log u} + \mathcal{O}(e^t \exp(-c_3 t^r)) dt \\ &= e^x + \mathcal{O}(e^x \exp(-c_1 x^r)). \end{aligned}$$

Dabei wurde zuletzt ausgenutzt, dass

$$x \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^x} \frac{du}{\log u} - \int_{|\beta_1|}^x \int_{e^{|\beta_1|}}^{e^t} \frac{du}{\log u} dt - e^x$$

konstant ist, wie durch Differentiation nach x gezeigt wird. \square

Zusammenfassung der Ergebnisse liefert schließlich den verallgemeinerten Primzahlsatz mit Restglied.

Satz 6.8. *Es sei Λ eine arithmetische Halbgruppe und es gelte*

$$L(x) = Ae^x + \mathcal{O}(e^{\vartheta x})$$

mit $A > 0$ und $\vartheta < 1$. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, dass

$$(6.42) \quad \pi_\Lambda(x) = \text{li}(e^x) + \mathcal{O}\left(e^x \exp\left(-cx^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

gilt für $x \rightarrow \infty$.

Bemerkung 6.3. Die Aussage von Satz 6.8 ist optimal in dem Sinne, dass das Restglied in (6.42) im Allgemeinen nicht verbessert werden kann. Ein entsprechendes Gegenbeispiel wurde von Montgomery angegeben [Mon00].

Literaturverzeichnis

- [Ami61] Amitsur, S.A.: *Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems*, Can. J. Math. **13** (1961), 83–109; **21** (1969), 1–5.
- [Ayo63] Ayoub, R.: *An Introduction to the Analytic Theory of Numbers*, American Mathematical Society, Providence, 1963.
- [Bal98] Balanzario, E.P.: *An example in Beurling's theory of primes*, Acta Arith. **82** (1998), 121–139.
- [BaD69] Bateman, P.T., Diamond, H.G.: *Asymptotic distribution of Beurling's generalized prime numbers*, Studies in Number Theory, 152–210, Math. Assoc. Amer., Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [Beu37] Beurling, A.: *Analyse de la loi asymptotique de la distribution des nombres premiers généralisés. I.*, Acta Math. **68** (1937), 255–291.
- [Dia69] Diamond, H.G.: *The Prime Number Theorem for Beurling's Generalized Numbers*, J. of Number Theory **1** (1969), 200–207.
- [Dia70a] Diamond, H.G.: *Asymptotic distribution of Beurling's generalized integers*, Illinois J. Math. **14** (1970), 12–28.
- [Dia70b] Diamond, H.G.: *A set of generalized numbers showing Beurling's theorem to be sharp*, Illinois J. Math. **14** (1970), 29–38.
- [Dia73] Diamond, H.G.: *Chebyshev estimates for Beurling generalized prime numbers*, Proceedings of the AMS, **39** (1973), 503–508.
- [Dia77] Diamond, H.G.: *When do Beurling generalized integers have a density?*, J. Reine Angew. Math. **295** (1977), 22–39.
- [Cha89] Chandrasekharan, K.: *Classical Fourier transforms*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1989.
- [Har40] Hardy, G.H.: *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, London, 1940.
- [HLP34] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge University Press, London, 1934.
- [KnK99] Knopfmacher, A., Knopfmacher, J.: *Arithmetical Semigroups Related to Trees and Polyhedra*, J. Combin. Theory, Ser. A, **86** (1999), 85–102.
- [Kno75] Knopfmacher, J.: *Abstract analytic number theory*, North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York, 1975.
- [Kno76] Knopfmacher, J.: *Arithmetic Properties of Finite Graphs and Polynomials*, J. Combin. Theory, Ser. B, **20** (1976), 205–215.
- [Kno79] Knopfmacher, J.: *Analytic arithmetic of algebraic function fields*, Marcel Dekker, New York, 1979.
- [KnZ01] Knopfmacher, J., Zhang, W.–B.: *Number theory arising from finite fields*, Marcel Dekker, New York, Basel, 2001.
- [KnW02] Knopfmacher, J., Warlimont, R.: *Arithmetical Semigroups Related to Trees and Polyhedra, II — Maps on Surfaces*, Math. Nachr. **235** (2002), 59–81.

- [Kor82] Korevaar, J.: *On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem*, Math. Intell. **4** (1982), 108–115.
- [Kör93] Körner, T.W.: *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Lan99] Landau, E.: *Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)/k = 0$* , Dissertation, Friedrich–Wilhelms–Universität Berlin, 1899.
- [Lan03] Landau, E.: *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes*, Math. Ann. **56** (1903), 645–670.
- [Lan09] Landau, E.: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig 1909; Nachdruck mit Ergänzungen von P.T. Bateman, Chelsea, New York, 1953.
- [Lan11] Landau, E.: *Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze der analytischen Zahlentheorie*, Sitzungsberichte Wien **120** (1911), 973–988.
- [Luc74] Lucht, L.G.: *Asymptotische Eigenschaften multiplikativer Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **266** (1974), 200–220.
- [Luc78] Lucht, L.G.: *Summen mit der Möbius-Funktion*, Math. Z. **159** (1978), 123–131.
- [Luc01] Lucht, L.G.: *Contributions to Abstract Analytic Number Theory*, Quaest. Math. **24** (2001), 309–322.
- [LuR01] Lucht, L.G., Reifenrath, K.: *Mean-value theorems in arithmetic semigroups*, Acta Math. Hungar. **93** (2001), 25–57.
- [Mal61] Malliavin, P.: *Sur le reste de la loi asymptotique de répartition des nombres premiers généralisés de Beurling*, Acta Math. **106** (1961), 281–298.
- [MaT90] Martello, S., Toth, P.: *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*, Wiley, Chichester, 1990.

- [Mon00] Montgomery, H.L.: *Beurling generalized primes*, Vortrag im Rahmen des Workshop on Analytic Number Theory, Goslar 4. April 2000; Zusammenfassung in *Mathematik–Bericht 2000/2: Conference Report Workshop on Analytic Number Theory*, Institut für Mathematik, TU Clausthal, Clausthal–Zellerfeld, 2000
- [Mül71] Müller, H.: *Über abstrakte Primzahlsätze mit Restglied*, Dissertation, FU Berlin, Berlin, 1971.
- [Mül77] Müller, H.: *Über die asymptotische Verteilung von Beurlingschen Zahlen*, J. Reine Angew. Math. **289** (1977), 181–187.
- [New80] Newman, D.J.: *Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem*, Amer. Math. Month. **87** (1980), 693–696.
- [New98] Newman, D.J.: *Analytic Number Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1998.
- [Nym49] Nyman, B.: *A General Prime Number Theorem*, Acta Math. **81** (1949), 299–307.
- [Per08] Perron, O.: *Zur Theorie der Dirichletschen Reihen*, J. Reine Angew. Math., **134** (1908), 95–143.
- [Rüh62] Rühls, F.: *Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
- [Sch69] Schwarz, W.: *Einführung in die Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, 1969.
- [Weg66] Wegmann, H.: *Beiträge zur Zahlentheorie auf freien Halbgruppen I und II*, J. Reine Angew. Math., **221** (1966), 20–43 und 150–159.
- [Wir92] Wirsing, E.: *Äquivalenzen zum Primzahlsatz*, unveröffentlichtes Memo, 1992.

- [Yos80] Yosida, K.: *Functional analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [Zha86] Zhang, W.-B.: *Asymptotic Distribution of Beurling's Generalized Prime Numbers and Integers*, Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1986.
- [Zha87] Zhang, W.-B.: *A generalization of Halász's theorem to Beurling's generalized integers and its application*, Illinois J. Math. **31**/4 (1987), 645–664.
- [Zha98] Zhang, W.-B.: *Mean-value theorems of multiplicative functions on additive arithmetic semigroups*, Math. Z. **229** (1998), 195–233.
- [Zha99] Zhang, W.-B.: *The prime element theorem on additive formations*, Math. Z. **231** (1999), 457–478.

Lebenslauf

- 15.9.1971 geboren in Osnabrück
Eltern: Ursula Bekehermes, geb. Hilder
Bernhard Bekehermes
Geschwister: Niko (1973) und Daniel (1975)
- 1978–1982 Grundschule Bohmte
1982–1984 Orientierungsstufe Bohmte
1984–1991 Gymnasium Bad Essen
27.05.1991 Abitur am Gymnasium Bad Essen
1991–1992 Zivildienst bei der Biologischen Station Minden–
Lübbecke
1992–2000 Studium der Technomathematik an der
TU Clausthal, Anwendungsfach Elektrotechnik
29.09.1994 Vordiplom
29.02.2000 Abschluss als Diplom–Mathematiker
2000–2003 Promotionsstudium an der TU Clausthal
2000–2002 gefördert durch ein Stipendium nach dem Gra-
duiertenfördergesetz
2002–2003 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Mathematik der TU Clausthal