



Universidad  
Carlos III de Madrid

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y  
Teoría de Estructuras

PROYECTO FIN DE CARRERA

USO DE MATERIALES  
COMPUESTOS EN EL DISEÑO DE  
UN ÁRBOL DE TRANSMISIÓN

Autor: Shengyu Wang

Tutor: Dr. Prof. Carlos Navarro Ugena

Leganés, Diciembre de 2014



Título: USO DE MATERIALES COMPUESTOS EN EL DISEÑO DE  
UN ÁRBOL DE TRANSMISIÓN

Autor: Shengyu Wang

Director: Dr. Prof. Carlos Navarro Ugena

### EL TRIBUNAL

Presidente: \_\_\_\_\_

Vocal: \_\_\_\_\_

Secretario: \_\_\_\_\_

Realizado el acto de defensa y lectura del Proyecto Fin de Carrera el día \_\_ de  
\_\_\_\_\_ de 20\_\_ en Leganés, en la Escuela Politécnica Superior de la Universidad  
Carlos III de Madrid, acuerda otorgarle la CALIFICACIÓN de

VOCAL

SECRETARIO

PRESIDENTE

# AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi Tutor de Proyecto, Prof. Carlos Navarro, de haberme dado el conocimiento de los materiales compuestos y la oportunidad de realizar este interesante proyecto.

Agradezco a mis padres, a mi novia y a mis amigos, por el apoyo durante estos años de estudio.

Agradezco a mi compañera Ana, por la ayuda durante la realización del proyecto.

Por último agradecer a todos los profesores que he encontrado en la Universidad Carlos III, por la sólida formación que me han dado.

# RESUMEN

---

El presente proyecto tiene por objetivo el diseño de un árbol de transmisión tubular utilizando los materiales compuestos, dada su importancia para la aplicación en la industria automovilística como sustituto de los árboles de transmisión convencional.

Al sustituir el material convencional como el acero por los materiales compuestos, se consigue hasta un 50% de la reducción del peso del árbol, sin modificar el comportamiento estructural del mismo. Asimismo, la posibilidad que ofrecen los materiales compuestos de seleccionar el número de láminas, la orientación del refuerzo de las mismas, su secuencia de apilamiento, etc., permiten un mejor aprovechamiento estructural del mismo.

Para conseguir un diseño factible con máxima reducción del peso, el primer paso es la selección de los posibles materiales compuestos para el diseño del árbol. Una vez seleccionados los materiales, se debe estudiar las cargas que sufre dicho árbol. Para determinar el comportamiento del árbol frente al estado de cargas, se construye un modelo matemático basado en la teoría clásica de laminados.

Para obtener un diseño óptimo, que aproveche mejor las propiedades estructurales del material, se ha desarrollado el programa OPTIEJE, mediante el software Matlab.

Una vez obtenido el diseño analítico optimizado, se realiza un modelo de elementos finitos del mismo mediante el programa ANSYS. Dicho análisis numérico incluye un análisis estático para determinar el estado tensional y de deformación en dicho elemento mecánico, un análisis modal del mismo para determinar la frecuencia natural y un análisis de pandeo para determinar la resistencia a pandeo del árbol de transmisión. Este análisis por el MEF permite, además, determinar la validez del diseño de la unión adhesiva.

El paso final es la comparación de los resultados obtenidos por el diseño analítico y los obtenidos por la simulación por el MEF, así como la determinación del error cometido y la viabilidad del diseño.

**Palabras clave:** árbol de transmisión, materiales compuestos, programa de optimización OPTIEJE, método de los elementos finitos, reducción de peso.

# ABSTRACT

---

This document is mandated to design a tubular drive shaft with composite materials, given its importance for the application in the automotive industry as a substitute for traditional metallic drive shaft.

Replacing conventional materials like steel by composite materials, a 50% weight reduction is archived without modifying performance of the drive shaft. Furthermore, composite materials offer the possibility of the selection of the number of layers, fiber orientation of each layer and stacking sequence, which allow a better exploitation of structural proprieties of these materials.

In order to obtain an optimum design of the drive shaft with maximum weight saving this document begins with a composite material selection. Then the loads should to be defined once the materials are selected. To study the drive shaft's behavior against the loads a mathematic model based on the classical laminate theory is built.

To find out an optimum design that takes maximum advantages of the structural proprieties of the material, a Matlab based algorithm will be used.

Once obtained an analytical optimized design, a finite elements analysis will be realized using the software ANSYS. The mentioned analysis contains a static analysis to study the stress and deformation results of the mechanical element; a modal analysis of this element to find out the natural frequency, a buckling analysis to find out the buckling capacity of the drive shaft. Furthermore, the finite elements analysis allows to determine the validity of the adhesive bonding.

Finally a comparison of the analytic results and the ANSYS results is necessary to determine the error between both method and the feasibility of the design

**Keywords:** drive shaft, composite materials, optimization algorithm, finite elements method, weight reduction.

# ÍNDICE GENERAL

---

Notaciones	Página	1
1. Introducción	Página	4
1.1. Antecedentes	Página	4
1.2. Objetivo del proyecto	Página	6
2. Los Materiales Compuestos	Página	15
2.1. Introducción	Página	15
2.2. Ventajas e inconvenientes	Página	17
2.3. Constituyentes	Página	18
2.3.1. Fibras	Página	19
2.3.1.1. Fibra de vidrio	Página	19
2.3.1.2. Fibra de carbono	Página	21
2.3.1.3. Fibra de boro	Página	23
2.3.1.4. Fibra de Kevlar	Página	25
2.3.2. Matrices	Página	26
2.3.2.1. Resinas de Poliéster insaturado	Página	28
2.3.2.2. Resinas Epoxi	Página	29
2.3.2.3. Resinas de Viniléster	Página	30
3. El Árbol de Transmisión	Página	32
3.1. Introducción	Página	32
3.2. Parámetros y especificaciones	Página	34
3.2.1. Capacidad de transmisión del par	Página	36
3.2.2. Resistencia a pandeo	Página	37
3.2.3. Frecuencia natural	Página	38
4. Árbol de Transmisión de Materiales Compuestos	Página	40
4.1. Hipótesis del problema	Página	40
4.2. Selección de materiales	Página	38
4.3. Criterios de rotura	Página	43
4.3.1. Criterio de máxima tensión	Página	44
4.3.2. Criterio de máxima deformación	Página	45

4.3.3. Criterio de Tsai-Hill	Página	46
4.3.4. Criterio de Tsai-Wu	Página	47
4.4. Capacidad de transmisión del par	Página	48
4.4.1. Ley de Hooke generalizada	Página	48
4.4.2. Teoría clásica de laminados	Página	50
4.4.3. Constantes ingenieriles	Página	52
4.5. Resistencia a pandeo	Página	53
4.6. Frecuencia natural	Página	54
4.7. Efectos higrotérmicos	Página	55
4.8. Proceso de fabricación	Página	57
4.9. Coeficiente de seguridad	Página	60
5. Unión horquilla-árbol	Página	62
5.1. Diseño de la horquilla	Página	62
5.1.1. Análisis MEF de la horquilla	Página	63
5.2. Diseño de la unión	Página	67
5.2.1. Diseño analítico	Página	69
5.2.2. Análisis por el MEF de la unión	Página	74
6. Optimización del Diseño	Página	79
6.1. Métodos de optimización	Página	79
6.1.1. Algoritmo genético	Página	80
6.1.2. Optimización por enjambre de partículas	Página	81
6.1.3. Desarrollo del programa myPSO	Página	84
6.2. Desarrollo del programa OPTIEJE	Página	86
6.2.1. Funciones del programa OPTIEJE	Página	89
6.3. Resultados para Carbono/Epoxi	Página	97
6.4. Resultados para Vidrio/Epoxi	Página	98
7. Análisis por MEF	Página	100
7.1. Introducción	Página	100
7.2. Modelado de materiales compuestos	Página	102
7.3. Análisis estático	Página	103
7.3.1. Desplazamientos	Página	105
7.3.2. Tensión de Von-Mises	Página	106
7.4. Análisis modal	Página	107

7.5. Análisis de pandeo	Página 108
8. Discusión de Resultados	Página 111
8.1. Comparación de resultados	Página 111
8.2. Tensiones y deformaciones	Página 112
9. Conclusiones y Trabajos Futuros	Página 116
9.1. Conclusiones	Página 116
9.2. Trabajos futuros	Página 117
10. Referencia	Página 118
Anexo 1. Guía del programa OPTIEJE	Página 121
Anexo 2. Resultados del programa OPTIEJE	Página 128
Anexo 3. Código fuente del programa OPTIEJE	Página 132
Anexo 4. Código fuente del programa myPSO	Página 154
Anexo 5. Dimensiones de la horquilla	Página 166
Anexo 6. Modelado de laminados mediante el SHELL181	Página 168

# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 2.1 Materias primas que componen un material compuesto	Página	18
Tabla 2.2 Propiedades de diferentes fibras de vidrio	Página	20
Tabla 2.3 Propiedades de diferentes fibras de carbono	Página	22
Tabla 2.4 Propiedades de la fibra de boro	Página	24
Tabla 2.5 Propiedades de diferentes fibras de Kevlar	Página	25
Tabla 2.6 Clasificación de diferentes matrices	Página	26
Tabla 2.7 Propiedades de los materiales más comunes	Página	31
Tabla 3.1 Parámetros del diseño de un árbol de transmisión	Página	36
Tabla 4.1 Ventajas e Inconvenientes de fibras y matrices	Página	42
Tabla 4.2 Propiedades mecánicas de los materiales compuestos	Página	43
Tabla 5.1 Propiedades mecánicas de la aleación de aluminio	Página	63
Tabla 5.2 Propiedades del adhesivo IPCO 9923	Página	70
Tabla 5.3 Especificaciones del diseño de la unión	Página	70
Tabla 6.1 Diseño óptimo del laminado	Página	81
Tabla 6.2 Población de posiciones	Página	85
Tabla 6.3 Población de velocidades	Página	85
Tabla 6.4 Resultados obtenidos por los distintos métodos	Página	88
Tabla 6.5 Diseño óptimo de carbono/epoxi USN150	Página	97
Tabla 8.1 Parámetros del diseño elegido	Página	111
Tabla 8.2 Comparación de resultados	Página	111

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1.1 Materiales utilizados en un coche de la marca BMW	Página	5
Figura 1.2 Árbol de transmisión metálico	Página	5
Figura 1.3 Esquema de Renault Espace Quadra	Página	6
Figura 1.4 Árbol de transmisión de materiales compuestos	Página	6
Figura 1.5 Árbol cilíndrico	Página	7
Figura 1.6 Árbol escalonado	Página	7
Figura 1.7 Árbol ranurado	Página	8
Figura 1.8 Árbol tubular	Página	8
Figura 1.9 Árbol acodado	Página	8
Figura 1.10 Árbol de transmisión de fibra de carbono	Página	12
Figura 2.1 Esquema general de los materiales compuestos	Página	15
Figura 2.2 Tipos de materiales compuestos	Página	16
Figura 2.3 Características específicas de diferentes fibras	Página	19
Figura 3.1 Acoplamiento del árbol de transmisión	Página	33
Figura 3.2 Despiece de un árbol de transmisión con junta cardan	Página	33
Figura 3.3 Árbol de transmisión telescópico	Página	33
Figura 3.4 Velocidad crítica de los árboles de transmisión	Página	34
Figura 3.5 Esquema general de un árbol de transmisión	Página	35
Figura 3.6 Métodos de la unión	Página	35
Figura 3.7 Un eje de transmisión sometido a torsión y flexión	Página	36
Figura 3.8 Pandeo torsional de un tubo	Página	37
Figura 3.9 Idealización de un eje a una viga biapoyada	Página	39
Figura 4.1 Viga antes y después de deformarse	Página	41
Figura 4.2 Direcciones materiales en una lámina	Página	43
Figura 4.3 Envolturas de los criterios de rotura	Página	48
Figura 4.4 Ángulo de la fibra	Página	50
Figura 4.5 Criterio de signos	Página	50
Figura 4.6 Solicitaciones de un árbol de transmisión	Página	52
Figura 4.7 Mapa de la distribución de HR en España	Página	55

Figura 4.8 Perfil del contenido específico de humedad	Página	55
Figura 4.9 Funcionamiento de Filament Winding	Página	58
Figura 4.10 Fabricación de piezas no circulares	Página	59
Figura 4.11 Máquina CNC para realizar Filament Winding	Página	59
Figura 4.12 Fijación de piezas en máquinas de Filament Winding	Página	59
Figura 5.1 Modelo real de la horquilla	Página	62
Figura 5.2 Modelado de la horquilla	Página	62
Figura 5.3 Vista de la horquilla	Página	63
Figura 5.4 Mallado de la horquilla	Página	64
Figura 5.5 Aplicación de la carga y sujeción de la horquilla	Página	64
Figura 5.6 Horquilla bajo carga	Página	65
Figura 5.7 Distribución de la deformación equivalente	Página	65
Figura 5.8 Máxima deformación equivalente	Página	66
Figura 5.9 Distribución de tensiones equivalentes	Página	66
Figura 5.10 Máxima tensión equivalente	Página	67
Figura 5.11 Modos de rotura en una unión atornillada	Página	69
Figura 5.12 Esquema y nomenclaturas de la unión horquilla-tubo	Página	69
Figura 5.13 Longitud de la unión igual a 10 mm	Página	71
Figura 5.14 Distribución de la tensión cortante con $L=10$ mm	Página	71
Figura 5.15 Longitud de la unión igual a 20 mm	Página	72
Figura 5.16 Distribución de la tensión cortante con $L=20$ mm	Página	72
Figura 5.17 Longitud de la unión igual a 30 mm	Página	73
Figura 5.18 Distribución de la tensión cortante con $L=30$ mm	Página	73
Figura 5.19 Mallado del conjunto horquilla-árbol	Página	75
Figura 5.20 Vista ampliada del mallado	Página	75
Figura 5.21 Distintos métodos de mallado	Página	76
Figura 5.22 Aplicación de la carga y sujeción de horquilla-árbol	Página	76
Figura 5.23 Tensiones cortantes en el plano x-y del conjunto	Página	77
Figura 5.24 Tensiones cortantes en el plano x-y de la unión	Página	77
Figura 5.25 Tensión cortante máximo y mínimo en la unión	Página	78
Figura 5.26 Comparación de la tensiones cortantes	Página	78
Figura 6.1 Esquema del funcionamiento del GA	Página	82
Figura 6.2 Esquema del funcionamiento del PSO	Página	83

Figura 6.3 Resultados obtenidos por el ANGULOALEATORIO	Página	89
Figura 6.4 Esquema del programa OPTIEJE	Página	96
Figura 6.5 Resultado de USN150 en Matlab	Página	97
Figura 7.1 Selección de los puntos de Gauss	Página	102
Figura 7.2 Elemento SHELL181 de ANSYS	Página	103
Figura 7.3 Aplicación de cargas y fijación del árbol	Página	104
Figura 7.4 Aplicación del par	Página	104
Figura 7.5 Desplazamiento del diseño [±45/0 <sub>2</sub> /±45/0 /±45/0 <sub>2</sub> /45] <sub>S</sub>	Página	105
Figura 7.6 Desplazamiento del diseño [0 <sub>2</sub> /±45/0 <sub>2</sub> /±45/±45/ 0/45] <sub>S</sub>	Página	105
Figura 7.7 Tensión Von-Mises del diseño [±45/0 <sub>2</sub> /±45/0 /±45/0 <sub>2</sub> /45] <sub>S</sub>	Página	106
Figura 7.8 Tensión Von-Mises del diseño [0 <sub>2</sub> /±45/0 <sub>2</sub> /±45/±45/ 0/45] <sub>S</sub>	Página	106
Figura 7.9 Fijación del árbol para el análisis modal	Página	107
Figura 7.10 Primera frecuencia natural de [±45/0 <sub>2</sub> /±45/0 /±45/0 <sub>2</sub> /45] <sub>S</sub>	Página	107
Figura 7.11 Primera frecuencia natural de [0 <sub>2</sub> /±45/0 <sub>2</sub> /±45/±45/ 0/45] <sub>S</sub>	Página	108
Figura 7.12 Deformada de pandeo de [±45/0 <sub>2</sub> /±45/0 /±45/0 <sub>2</sub> /45] <sub>S</sub>	Página	109
Figura 7.13 Deformada de pandeo de [0 <sub>2</sub> /±45/0 <sub>2</sub> /±45/±45/ 0/45] <sub>S</sub>	Página	109
Figura 8.1 Distribución de la tensión 11 a lo largo del espesor	Página	112
Figura 8.2 Distribución de la tensión 22 a lo largo del espesor	Página	113
Figura 8.3 Distribución de la tensión 12 a lo largo del espesor	Página	113
Figura 8.4 Distribución de la def. 11 a lo largo del espesor	Página	114
Figura 8.5 Distribución de la def. 22 a lo largo del espesor	Página	114
Figura 8.6 Distribución de la def. 12 a lo largo del espesor	Página	115

# NOTACIONES

---

$[A_{ij}]$	Matriz de rigidez extensional
$ A $	Determinante de la matriz de rigidez extensional
$[a_{ij}]$	Matriz inversa de la matriz de rigidez extensional
$a$	Radio promedio de la capa de material adhesivo
$\alpha$	Coefficiente de dilatación térmica
$A$	Área de la sección del árbol de transmisión
$[B_{ij}]$	Matriz de acoplamiento
$[b_{ij}]$	Matriz inversa de la matriz de acoplamiento
$\beta$	Coefficiente de expansión higroscópica
$C$	Contenido de humedad
$C_{\infty}$	Contenido de humedad en el ambiente
$C_0$	Contenido de humedad inicial
$[D_{ij}]$	Matriz de rigidez flexional
$[d_{ij}]$	Matriz inversa de la matriz de rigidez flexional
$d_0$	Diámetro exterior del árbol de transmisión
$d_i$	Diámetro interior del árbol de transmisión
$\theta$	Ángulo de la fibra
$E$	Módulo elástico
$E_{11}$	Módulo elástico de las láminas en dirección longitudinal
$E_{22}$	Módulo elástico de las láminas en dirección transversal
$E_x$	Módulo elástico del laminado en dirección longitudinal
$E_y$	Módulo elástico del laminado en dirección transversal
$\{\varepsilon_{ij}\}$	Vector de deformaciones en eje material
$\{\varepsilon'_{ij}\}$	Vector de deformaciones en eje global
$\{\varepsilon^0\}$	Vector de deformaciones en el plano

## NOTACIONES

$\{\varepsilon\}$	Vector de deformaciones total
$f_n$	Frecuencia natural
$G$	Módulo cortante
$G_{12}$	Módulo cortante en dirección 1-2
$G_{23}$	Módulo cortante en dirección 2-3
$I$	Momento de inercia
$J$	Momento de inercia polar
$\{\kappa\}$	Vector de curvatura
$L$	Longitud del árbol de transmisión
$M$	Momento de flexión
$\{M\}$	Vector de momentos mecánicos
$\{M^T\}$	Vector de momentos por la temperatura
$\{M^M\}$	Vector de momentos por la humedad
$\{M^E\}$	Vector de momentos equivalentes
$\{N\}$	Vector de fuerzas mecánicas
$\{N^T\}$	Vector de fuerzas por la temperatura
$\{N^M\}$	Vector de fuerzas por la humedad
$\{N^E\}$	Vector de fuerzas equivalentes
$N_{cr}$	Velocidad crítica
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\nu_{12}$	Coefficiente de Poisson mayor
$\nu_{21}$	Coefficiente de Poisson menor
$[Q_{ij}]$	Matriz de rigidez de la lámina en eje material
$[\bar{Q}_{ij}]$	Matriz de rigidez de la lámina en eje global
$r_o$	Radio exterior del árbol de transmisión
$r_i$	Radio interior del árbol de transmisión
$\rho$	Densidad

## NOTACIONES

$S$	Tensión cortante máxima
$S_1^t$	Límite a tracción en dirección longitudinal
$S_1^c$	Límite a compresión en dirección longitudinal
$S_2^t$	Límite a tracción en dirección transversal
$S_2^c$	Límite a compresión en dirección transversal
$S_{12}$	Tensión cortante máxima en dirección 1-2
$S_{23}$	Tensión cortante máxima en dirección 2-3
$\{\sigma_{ij}\}$	Vector de tensiones en eje material
$\{\sigma'_{ij}\}$	Vector de tensiones en eje global
$\{\sigma\}_k$	Vector de tensiones en eje material para la lámina k
$\{\bar{\sigma}\}$	Vector de tensiones promedias
$T$	Par de torsión
$T_{\max}$	Par máximo de torsión
$T_{cr}$	Capacidad a pandeo
$t$	Espesor de la pared del árbol de transmisión
$t_{\text{lámina}}$	Espesor de la lámina
$\tau_a$	Tensión cortante en el material adhesivo
$\eta$	Espesor de la capa adhesiva
CLT	Teoría clásica de laminados
HR	Humedad relativa

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1 ANTECEDENTES

A lo largo de la historia, los avances tecnológicos han estado íntimamente ligados al descubrimiento y/o desarrollo de los nuevos materiales. Las nuevas tecnologías exigen una mejora continua de los materiales para que soporten mayores solicitaciones y que garanticen su integridad durante su vida útil en servicio. Los materiales compuestos, como otros materiales tales como los metálicos o los cerámicos, se han convertido en materiales con presencia habitual en las actividades cotidianas, los vehículos, el transporte, los deportes, etc.

Hoy en día, los materiales compuestos avanzados como carbono, vidrio, boro o Kevlar están ampliamente utilizados en las industrias donde la reducción del peso es un factor crítico, como la industria aeronáutica, aeroespacial o la industria automovilística. Debido a la alta resistencia específica y la alta rigidez específica que poseen los materiales compuestos, pueden lograr las mismas prestaciones que los materiales metálicos con un peso mucho menor. En el sector aeronáutico la sustitución del aluminio por los materiales compuestos supone una reducción de peso del 20-30% [1]. En el avión comercial modelo Boeing 787 se ha empleado gran cantidad de materiales compuestos en el fuselaje, las alas, los timones de dirección y de profundidad y la carcasa de los motores. Por otro lado, el uso de los materiales compuestos en los aviones es un objetivo medioambiental. La UE establece como objetivo para el año 2020 una reducción progresiva [2] de hasta un 50% del consumo de combustible por pasajero y kilómetro, siendo un 20% responsabilidad del desarrollo de nuevos motores cada vez más eficientes y el resto, el 30%, correspondiente a la utilización masiva de estructuras de carbono CFRP más ligeras y aerodinámicas que las actuales.

En los automóviles el uso de los materiales compuestos implica sustituir el acero, que tiene una densidad de  $7860 \text{ kg/m}^3$  por la fibra de carbono, un material mucho más ligero, con una densidad alrededor de  $1600 \text{ kg/m}^3$ , por lo tanto se puede lograr una reducción de peso del 40-60%. Según un informe hecho por los investigadores de la Universidad Jaume I [3], si se reduce 100 kg el peso total de un vehículo, el consumo disminuye entre 0,12-0,15 l/100 km, dependiendo del tipo de motor. Por otro lado, si se reduce el 20% del peso total de un vehículo, las emisiones de  $\text{CO}_2$  disminuirían 0,5 ton/año, para la conducción en las ciudades. La figura muestra los materiales empleados en un vehículo de marca Porsche, se puede observar que en la parte del chasis se ha empleado la fibra de carbono para reducir el peso del vehículo.

## INTRODUCCIÓN

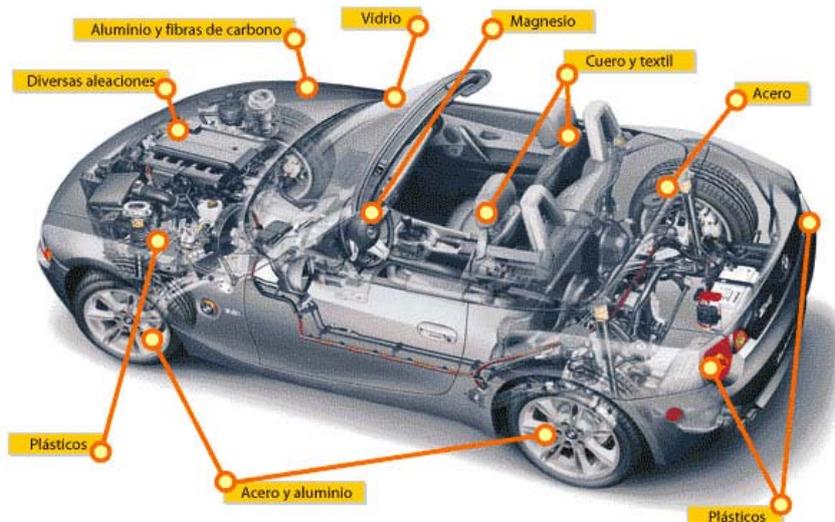


Figura 1.1 Materiales utilizados en un coche de la marca BMW [4]

Otro uso interesante de los materiales compuestos es el diseño y la fabricación de árboles de transmisión para los vehículos. Casi todos los vehículos llevan árbol de transmisión. Este elemento estructural se encarga de transmitir potencia desde la caja de cambios hasta el diferencial. Actualmente, para los vehículos deportivos o vehículos de competición, la reducción del peso del árbol de transmisión se ha convertido en una parte importante en la reducción del peso total del vehículo.

Más del 70% de los árboles de transmisión metálicos están constituidos por dos semiejes, unidos por un cojinete de soporte central [7]. La complejidad del diseño conduce a un rendimiento bajo de la transmisión del par, un aumento del peso del vehículo y por lo tanto un mayor consumo energético.

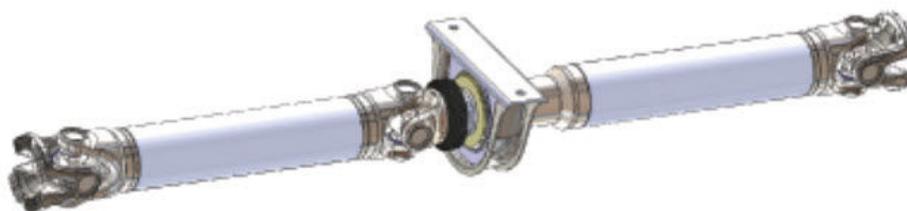


Figura 1.2 Árbol de transmisión metálico [8]

Desde el año 1988 la empresa GKN Technology ha estado desarrollando el uso de la fibra de carbono en la fabricación de árboles de transmisión. Con este material fabrican árboles de transmisión de una sola pieza, consiguiendo que el peso se reduzca desde los 10 kg (fabricado con acero) hasta los 2,7 kg (fabricado con fibra de carbono). Varios modelos de coches cuentan ya con un árbol de transmisión fabricado con materiales compuestos, como el Renault Espace Quadra, el Toyota Mark I o el Audi A4/A8 Quattro [7]. La siguiente figura ilustra el esquema del modelo Renault Espace Quadra:

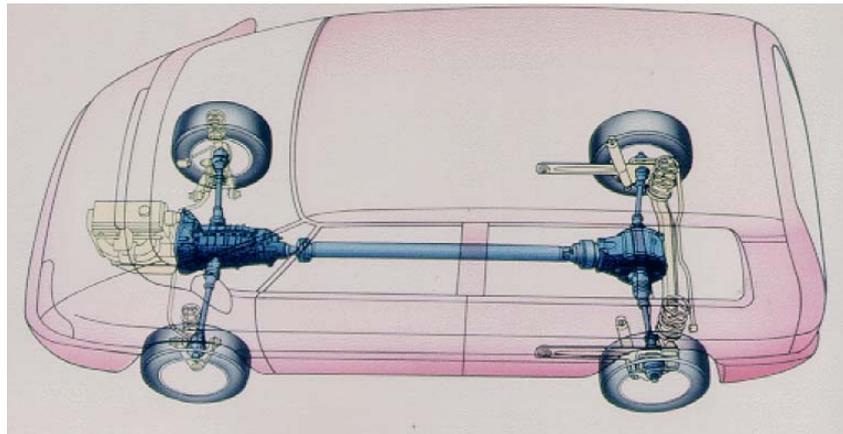


Figura 1.3 Esquema de Renault Espace Quadra [7]

El Renault Espace Quadra es una versión especial del modelo Renault Espace, debido a que ofrece la tracción 4x4, mientras que la versión normal es de tracción delantera. Este modelo fue lanzado en el año 1988, siendo el pionero en la aplicación de los materiales compuestos para la producción de vehículos. Nótese que el árbol de transmisión está constituido por una sola pieza. El uso del árbol de transmisión de materiales compuestos en este modelo especial permite reducir el número de modificaciones necesarias en el bastidor. La reducción del ruido y la vibración también es considerable debido a la ausencia del cojinete del soporte central. Este árbol de transmisión de materiales compuestos pesa 5 kg, frente a los 10 kg de un árbol metálico.

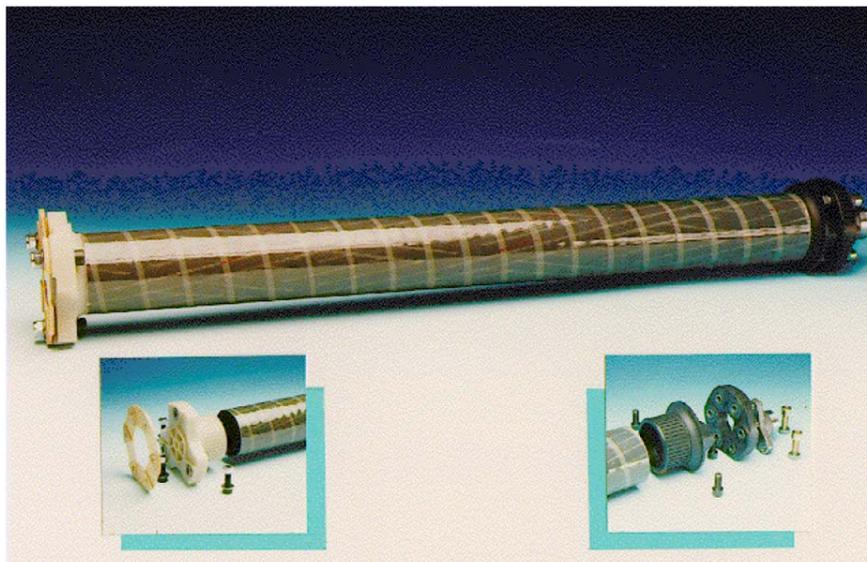


Figura 1.4 Árbol de transmisión de materiales compuestos [7]

## 1.2 OBJETIVO DEL PROYECTO

Como se ha mencionado en el apartado anterior, el árbol de transmisión es un elemento estructural común en los vehículos, y se encarga de transmitir la potencia y el giro desde la caja de cambios hasta el diferencial. El hecho de transmitir potencia convierte al árbol de transmisión en una parte crítica y fundamental del diseño mecánico. Una optimización en el diseño de este

componente, ya sea reduciendo el peso, las vibraciones que produce, las fuerzas o momentos que soporta, permite lograr un vehículo tanto o más eficaz a la hora de soportar las correspondientes sollicitaciones, pero con mejores condiciones estructurales, mayor seguridad en el servicio y menor coste de fabricación. En este punto es donde entran los materiales compuestos, como herramientas que permiten la optimización de una gran cantidad de elementos estructurales, en el caso de este proyecto, de los arboles de transmisión.

En este proyecto se pretende diseñar un árbol de transmisión para automóvil utilizando los materiales compuestos. En primer lugar, se debe elegir la tipología estructural del árbol. Existen varios tipos de árboles [13], que se describirán a continuación:

- **Árbol cilíndrico:** este árbol tiene una forma perfectamente cilíndrica, y sirve para casos en los que el par a transmitir no es muy elevado. La fabricación de este tipo de árbol es sencilla, pudiendo variar la posición de apoyos, cojinetes, etc.

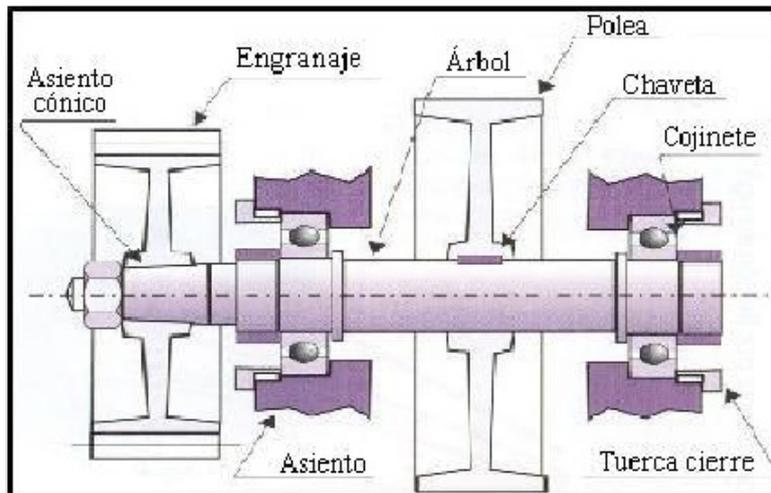


Figura 1.5 Árbol cilíndrico

- **Árbol escalonado:** este tipo de árbol se caracteriza por tener varios diámetros a lo largo de su longitud. Debido a esta característica, los árboles escalonados son capaces de soportar diferentes momentos torsores, dependiendo del diámetro que tenga cada sección.

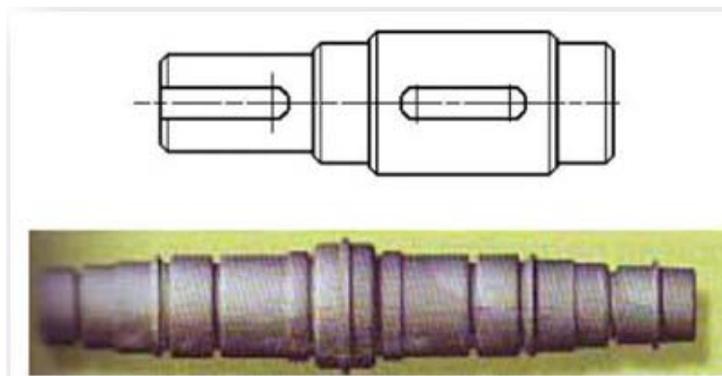


Figura 1.6 Árbol escalonado

## INTRODUCCIÓN

- **Árbol ranurado o con talladuras especial:** este tipo de árbol presenta ranuras en su exterior. Normalmente tiene una longitud pequeña y sirve sobre todo para transmitir par elevado.

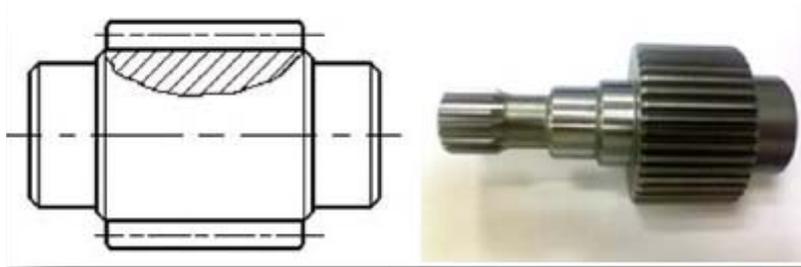


Figura 1.7 Árbol ranurado

- **Árbol tubular:** este tipo de árbol se caracteriza por su menor momento de inercia. Otro interés de este tipo de árbol es que permite el paso de otro árbol de diámetro menor por su interior.



Figura 1.8 Árbol tubular

- **Árbol acodado:** este tipo de árbol se utiliza cuando se quiere convertir un movimiento alternativo a un movimiento giratorio y viceversa. Se diferencia del resto de los árboles porque no presenta forma cilíndrica, sino forma acodada.



Figura 1.9 Árbol acodado

Entre todas las tipologías estructurales citadas, los dos mejores candidatos para el árbol de transmisión son: el cilíndrico y el tubular. El árbol

escalonado queda descartado debido a que el par a transmitir es uniforme a lo largo del árbol. El árbol ranurado queda descartado debido a que el árbol que se va a diseñar tendrá una longitud elevada. El árbol acodado queda descartado debido a que no existe conversión de movimiento alternativo a movimiento giratorio y viceversa.

Entre los dos candidatos, la tipología estructural del árbol que se ha elegido es la tubular, debido a tres razones principales:

- **Menor inercia rotacional:** según las expresiones 1.1 y 1.2:

$$\begin{array}{l} \text{Árbol} \\ \text{cilíndrico} \end{array} \quad I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\pi r^2 L \rho r^2 = \frac{1}{2}\pi r^4 L \rho \quad (1.1)$$

$$\begin{array}{l} \text{Árbol} \\ \text{tubular} \end{array} \quad I = \frac{1}{2}m(r_o^2 + r_i^2) = \frac{1}{2}\pi(r_o^2 - r_i^2)L\rho(r_o^2 + r_i^2) \quad (1.2) \\ = \frac{1}{2}\pi(r_o^4 - r_i^4)L\rho$$

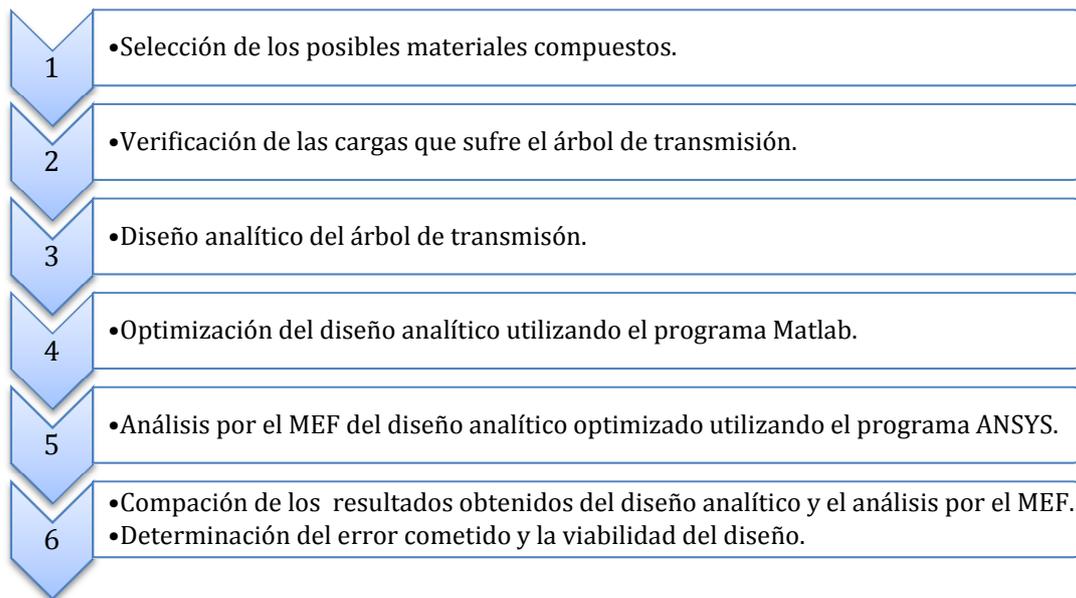
Siendo L la longitud del árbol de transmisión,  $r_o$  el radio exterior del árbol,  $r_i$  el radio interior del árbol y  $\rho$  la densidad del material con el que está fabricado el árbol.

Cuando el espesor de la pared del árbol es pequeño, caso que corresponde a los árboles de materiales compuestos, la masa del mismo se reduce considerablemente, por lo tanto la inercia rotacional de un árbol tubular es mucho más pequeña que un árbol cilíndrico. Esto se traduce a que, para el mismo motor, se puede obtener una mayor aceleración con un árbol tubular que con un árbol cilíndrico.

- **Menor coste de materia prima:** debido a la sección hueca, un árbol de transmisión tubular necesita menos materias primas para su fabricación. Con un diseño adecuado, se puede conseguir un árbol tubular que tenga las mismas propiedades estructurales que un árbol cilíndrico.
- **Menor consumo de energía:** debido a la baja inercia rotacional de un árbol de transmisión tubular, el motor puede conseguir la misma tracción con menor consumo de energía. Este punto resulta de gran interés para casi todas las ingenierías.

Una vez seleccionada la tipología estructural del árbol, se puede comenzar el proceso de diseño siguiendo los siguientes pasos:

## INTRODUCCIÓN



Nótese que la optimización del diseño es un paso fundamental del proyecto. Los materiales compuestos se diferencian de los metales porque posean un fuerte carácter anisótropo. Es decir, las propiedades varían radicalmente según las direcciones. Este fenómeno conduce al concepto de 'Diseñar el material'. Los diseñadores, según sus necesidades, pueden diseñar el laminado modificando una o varias de las siguientes variables:

- Número de láminas.
- Espesor de cada lámina.
- Orientación de las fibras.
- Secuencia de apilamiento.

Nótese que las distintas variables de entrada pueden conducir a un número infinito de combinaciones. Cada combinación corresponde a un posible diseño del árbol de transmisión, y lógicamente no todas las combinaciones conducen a una solución válida. Se puede clasificar los diseños en tres tipos:

- Diseño no factible.
- Diseño factible no óptimo.
- Diseño factible y óptimo.

Interesa obtener mediante los métodos de optimización un diseño factible y óptimo, dado que un diseño factible pero no óptimo conlleva varios problemas, como el desaprovechamiento del material, exceso de peso, aumento de volumen, etc. Por lo tanto encontrar un de estas condiciones que cumpla todas las especificaciones y que tenga el menor peso posible es una misión fundamental.

Existen numerosas investigaciones para obtener el diseño óptimo de los materiales compuestos. Rangaswamy et al. [9] utiliza el algoritmo genético para hallar el número de láminas óptimo y la secuencia de apilamiento óptima de un árbol de transmisión de materiales compuestos. La función objetivo es el peso del árbol de transmisión, que corresponde a la fórmula 1.3:

$$m = \rho \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L \quad (1.3)$$

Las restricciones que impone Rangaswamy son:

- La capacidad de transmisión del par del árbol debe ser mayor que el par máxima generado por el motor.
- La resistencia a pandeo del árbol debe ser mayor que el par máxima generado por el motor.
- La frecuencia natural del árbol debe ser mayor que la velocidad máxima de giro del árbol.

Una vez determinadas la función objetivo y las restricciones, el algoritmo genético genera la primera solución aleatoria y, mediante la simulación de la teoría de la evolución, el algoritmo genético es capaz de generar soluciones cada vez 'más perfectas'. Mediante este método de optimización, Rangaswamy consigue un árbol de transmisión constituido de Carbono/Epoxi de 1,13 kg, que corresponde a una reducción del peso de un 86,9%, frente a un árbol convencional.

Para hallar la mejor secuencia de apilamiento de un árbol de transmisión de materiales compuestos, Manjunath et al. [10] utiliza la optimización por enjambres de partículas (PSO). La función objetivo y las restricciones son las mismas que las de Rangaswamy, sin embargo, el método de optimización es distinto.

El método utilizado por Manjunath consiste en la simulación numérica del comportamiento de las abejas, que siempre tratan de localizar la región con mayor densidad de flores.

Este algoritmo también genera una solución inicial aleatoria, que corresponde a un grupo de partículas que vuelan libremente en el espacio, en cada iteración, cada partícula cambia la dirección y la velocidad del vuelo, para la búsqueda de una mejor solución. Mediante este método de optimización, Manjunath consigue un árbol de transmisión constituido de Boro/Epoxi de 1,25 kg, que corresponde a una reducción del peso de un 85,47%, frente a un árbol convencional.

Basado en las investigaciones anteriores, se ha desarrollado el programa OPTIEJE, mediante el software Matlab, para la búsqueda del diseño óptimo. Aunque cada diseñador utiliza un método diferente de optimización, el procedimiento general es similar y se refleja en el siguiente esquema:

## INTRODUCCIÓN

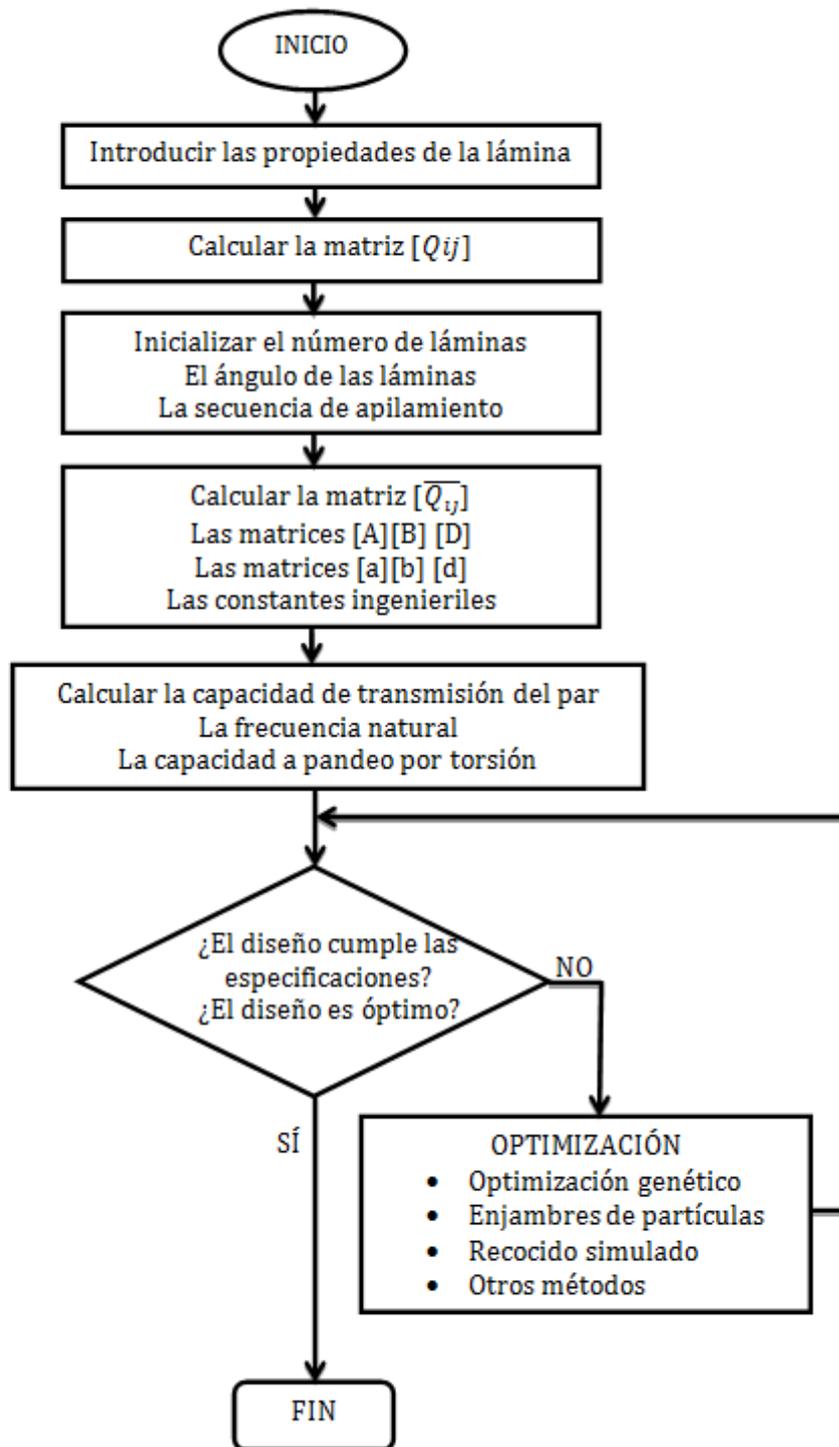


Figura 1.10 Esquema general de los métodos de optimización

A diferencia de los métodos citados, que utilizan un algoritmo de optimización complejo, la idea principal del OPTIEJE es muy simple:

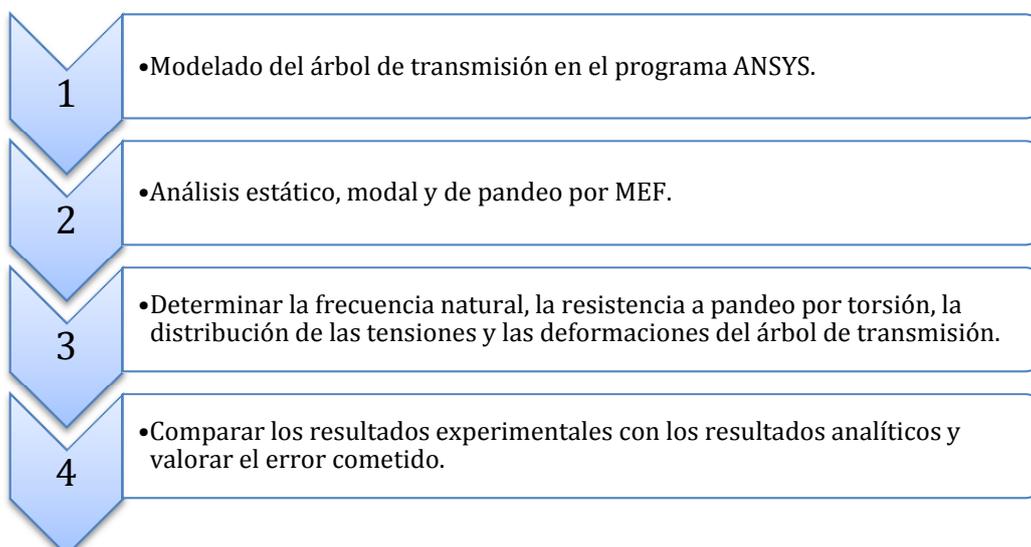
- En cada iteración genera una solución aleatoria.
- Comprobar si esta solución cumple o no todas las especificaciones del diseño, en caso afirmativo, almacenarla en la base de datos.

- Una vez terminadas todas las iteraciones, encontrar la mejor solución entre el conjunto de soluciones factibles.

Esta idea sencilla y clara convierte el OPTIEJE en un programa robusto, ya que su algoritmo permite una fácil modificación, para introducir nuevas funciones que requiere el usuario. A continuación se describirán algunas de las aportaciones del OPTIEJE.

En primer lugar, aunque los métodos utilizados por Rangaswamy y Manjunath permiten encontrar el diseño óptimo, sin embargo, los resultados obtenidos son muy teóricos. Nótese que la secuencia de apilamiento obtenida por el algoritmo genético es  $[-56/-51/74/-82/67/70/13/44/\overline{-75}]_s$ , mientras que la secuencia obtenida por el PSO es  $[58/61/-32/-82/-75/-29/21/63]_s$ , las dos secuencias crean gran dificultad a la hora de fabricación. El OPTIEJE, a diferencia de los dos métodos anteriores, busca soluciones óptimas más realistas, ya que ofrece la posibilidad de restringir las orientaciones de las fibras en ángulos de  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  y  $90^\circ$ , la razón de elegir estos ángulos se explicará en el capítulo 6. Además, el programa OPTIEJE incorpora los efectos higrotérmicos en el cálculo del laminado. Este hecho convierte el OPTIEJE en un programa más potente y realista a la hora de diseñar los árboles de transmisión. Otra aportación del OPTIEJE es que su uso no está restringido para este proyecto, sino el usuario puede introducir cualquier material que quiere utilizar, y diseñar un árbol de transmisión de cualquier tamaño, velocidad máxima, par máximo, etc.

Una vez obtenido un diseño óptimo, sería conveniente realiza un análisis por el método de los elementos finitos (MEF). Para realizar este análisis es necesario modelar el árbol en un programa de simulación 3-D. En este proyecto el programa ANSYS es utilizado para llevar a cabo el análisis MEF. Si se ha realizado el modelado correctamente cuidando los detalles como el tipo de sujeción, el efecto de la gravedad, la aplicación de cargas, etc., el programa debe dar un resultado aproximado a la realidad, reduciendo el tiempo y el coste de realizar ensayos experimentales. En este proyecto, se siguen los siguientes pasos para llevar a cabo este análisis:



# CAPÍTULO 2

## LOS MATERIALES COMPUESTOS

---

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos están constituidos por dos o más componentes. A nivel macroscópico, son diferentes de las aleaciones. En caso de las aleaciones, los distintos materiales pueden ser combinados a nivel microscópico, siendo homogéneo a nivel macro, mientras que los materiales compuestos son generalmente no homogéneos a este nivel.

Estas son algunas consideraciones para definir con exactitud a que se refiere al hablar de materiales compuestos [14]:

- En primer lugar el material compuesto, debe ser expresamente fabricado por la mano del hombre. De este modo queda fuera de nuestra definición una larga lista de materiales compuestos naturales, tales como los que componen nuestros huesos, las masas arbóreas, etc.
- En segundo lugar, tal como entendemos los materiales compuestos, estos no deben tener continuidad fenomenológica, de modo que los materiales cerámicos, por ejemplo, a pesar de estar compuestos por varios componentes cristalinos o amorfos, no son considerados materiales compuestos ya que estos son continuos fenomenológicamente hablando.
- Finalmente, el hormigón armado, a pesar de estar construido expresamente por el hombre y tener discontinuidad fenomenológica, no se considera tampoco objeto de nuestro estudio, porque este sistema es un material clásico en la Ingeniería Civil.

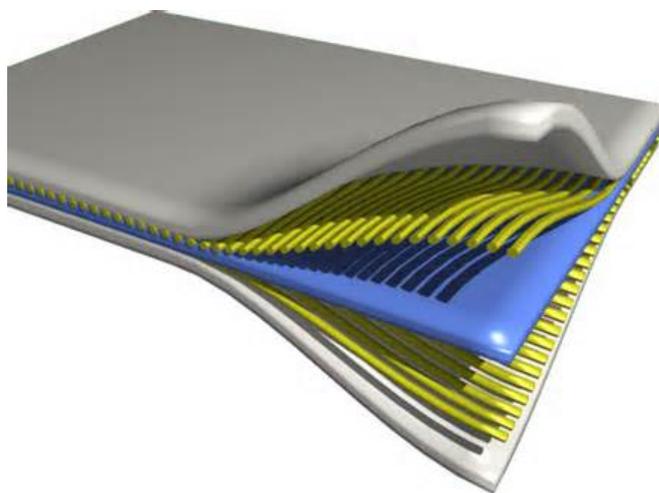


Figura 2.1 Esquema general de los materiales compuestos [14]

La Figura 2.1 muestra un esquema de los materiales compuestos. El material compuesto está constituido por matriz y fibra. Normalmente la matriz tiene menor rigidez y resistencia, sirve como una senda en la cual se alojan las fibras de refuerzo. La matriz puede ser de tipo cerámico, polimérico o metálico. Una matriz cerámica proporciona gran dureza pero es frágil; una matriz polimérica tiene normalmente menor módulo de Young y resistencia pero mayor ductilidad; una matriz metálica tiene módulo y resistencia intermedios, con buena ductilidad. Un material compuesto presenta propiedades mecánicas y físicas especiales y mejores que las de sus componentes, ya que combina las mejores propiedades de éstos y suprime sus defectos.

Según el uso requerido, las fibras pueden ser de tipo continuo o discontinuo, direccional o no direccional o de tejido, como se muestra en la figura 2.2. Los diferentes tipos se desarrollan a partir de las distintas necesidades requeridas para su aplicación. Las fibras largas con muy alta esbeltez se denominan fibras continuas. Mientras, otros utilizan fibras cortas con esbeltez de cientos a miles. La orientación de la fibra puede ser predeterminada o al azar. Las fibras pueden estar paralelas (fibra unidireccional), con un determinado ángulo (fibra cruzada o tejido), o tener varias direcciones determinadas (multidireccional).

Dentro de estos tipos de materiales compuestos, el laminado adquiere un gran uso en la industria. Un laminado es un material compuesto formado por distintas láminas o láminas. Cada lámina puede tener distinta dirección y material para optimizar el comportamiento aprovechando las ventajas de cada material. Por ejemplo, una mezcla de fibras de vidrio y de carbono reduce el coste total del conjunto, dado que la fibra de vidrio tiene bajo coste de fabricación, lo que contrarresta el alto coste de la fibra de carbono. Por otro lado, las propiedades mecánicas del conjunto mejoran gracias a la alta resistencia de la fibra de carbono.

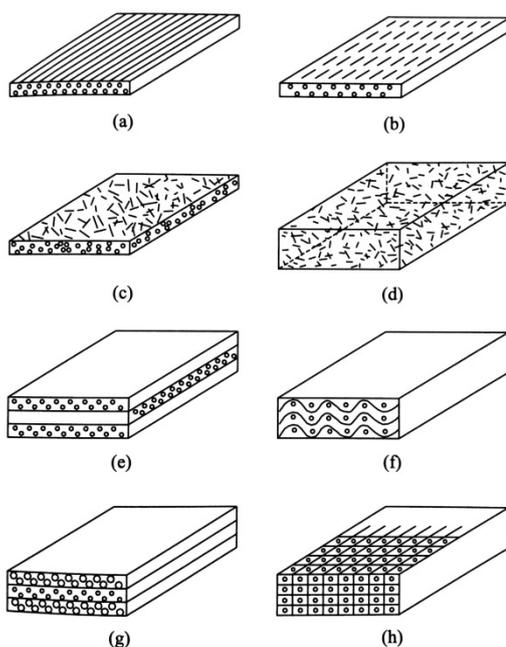


Figura 2.2 Tipos de materiales compuestos [15]:

- (a) Lámina unidireccional con fibra continua.
- (b) Lámina unidireccional con fibra discontinua.
- (c) Orientación no direccional en el plano.
- (d) Orientación no direccional en el volumen.
- (e) Laminado.
- (f) Tejido.
- (g) Laminado con distintas fibras.
- (h) Tejido en 3D.

## 2.2 VENTAJAS E INCONVENIENTES

Los materiales compuestos presentan las siguientes ventajas [17]:

- Alta resistencia y rigidez específica.
- Alta resistencia a impacto.
- Mayor resistencia a fatiga.
- Mayor resistencia a corrosión.
- Mayor capacidad de amortiguación.
- Buena conductividad térmica.
- Menor coeficiente de dilatación, por lo tanto, mayor estabilidad dimensional frente a la variación de temperatura.
- Posibilidad de adaptar el material el esfuerzo requerido gracias a la anisotropía.
- Versatilidad en el diseño de formas complicadas.

Entre éstas, la alta resistencia y rigidez específica son las dos ventajas fundamentales. El uso de los materiales compuestos en los automóviles, a parte de la reducción del consumo de energía, permite que los vehículos lleven más dispositivos electrónicos de control de la conducción, porque el aumento de peso debido a estos dispositivos puede equilibrarse gracias a la reducción de peso debida a la utilización de materiales compuestos en otras piezas.

Los materiales compuestos, a pesar de las ventajas, presentan los siguientes inconvenientes:

- La caracterización mecánica de una estructura de materiales compuestos es más complicada que la de una estructura metálica.
- El diseño de los materiales compuestos es complicado dada la gran variedad de combinaciones posibles entre distintos materiales, secuencia de apilamiento y la orientación.
- El coste de fabricación es mayor que el de los materiales convencionales.
- La reparación resulta muy difícil.

Además debido al proceso de fabricación, los materiales compuestos suele presentar los siguientes defectos [15]:

- Intersticios: son burbujas producidas durante el proceso de fabricación. Normalmente es el aire alojado en la interfaz entre la resina y la fibra, que no ha sido evacuado, o el vapor producido durante el calentamiento o dilución de la resina.
- Deslaminación: es la separación entra la fibra y la matriz. Sus principales causas son:
  - El material de refuerzo no ha sido tratado adecuadamente.

- Cantidad de adhesivo insuficiente.
- Nivel de adhesividad insuficiente en la interfaz.
- Proceso de curación no adecuado.
- En Filament Winding, si transcurre demasiado tiempo entre la colocación de una lámina y la consecutiva, es posible que se produzca la deslaminación.
- Impureza: puede ser un pequeño coágulo de la resina, los polvos introducidos durante el proceso de laminación, etc.
- Deformación de la fibra: es un problema muy típico en los materiales compuestos con matriz de resina termoplástica. Si el coeficiente de dilatación térmica de la matriz es grande, cuando se enfría el conjunto la matriz se contrae y ejerce presión sobre las fibras produciendo una deformación de las mismas.

## 2.3 CONSTITUYENTES

Como se indica en la introducción, un material compuesto presenta dos elementos principales: fibra y matriz. La combinación adecuada de la fibra y la matriz conduce a unos materiales con mejores propiedades. Además de fibra y matriz existen otros tipos de componentes, como cargas y aditivos. La siguiente tabla muestra las materias primas que componen un material compuesto:

<b>FIBRAS</b>	<b>Fibras cerámicos</b> (Carburo de silicio)
	<b>Fibras metálicas</b>
	<b>Fibras inorgánicas</b> (Carbono, Vidrio, Boro)
	<b>Fibras Orgánicas</b> (Aramida, Polietileno)
<b>MATRICES</b>	<b>Matrices inorgánicas</b> (Cemento, Geopolímeros, Yeso)
	<b>Matrices termoestables</b> (Epoxi, Viniléster, Poliéster, Fenólica, Esteres cianato, Bismaleimidias, Polimidias, Polieteramida)
	<b>Matrices termoplásticas</b> (ABS, Polipropileno, Policarbonato, Acetato, PBT, Polieterimida, PET, Nilón, Poliamida, PEEK, PEKK, PAI, PAS)
<b>NÚCLEOS</b>	<b>Nidos de Abeja</b> (Aluminio, Nomex, Polipropileno)
	<b>Espumas</b> (Poliuretano, Poliestireno, PVC)
	Sándwich tejido 3D, Madera de balsa
<b>ADHESIVOS</b>	Epoxi, Poliuretano, Acrílicos
<b>RECUBRIMIENTOS</b>	Cerámicos, Fenólicos, Epoxi+Arena, Intumescentes, Mats

Tabla 2.1 Materias primas que componen un material compuesto [16]

### 2.3.1 FIBRAS

En los materiales compuestos, el material de refuerzo puede tener forma de partículas, nanotubos, fibras cortas, fibras continuas u hojas. En este proyecto son de particular interés las fibras continuas, siendo éstas las utilizadas en el proceso de fabricación Filament Winding. Casi todas las fibras utilizadas son de diámetro muy pequeño, ya que en esta forma adquieren mayor resistencia y rigidez. Griffith midió la resistencia a tracción de la fibra de vidrio de distintos diámetros y observó que a menor diámetro, mayor resistencia (1500 MPa a diámetro = 2  $\mu\text{m}$ , 1700 MPa a diámetro = 20  $\mu\text{m}$ ). Existe otra razón por la que el diámetro ha de ser pequeño: durante el proceso de fabricación, las fibras tienen que tener suficiente flexibilidad, siendo la flexibilidad [17] la inversa de la rigidez  $EI$ , según la siguiente ecuación:

$$\text{FLEXIBILIDAD} = \frac{1}{EI} = \frac{64}{\pi d^4 E} \quad (2.1)$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad (2.2)$$

La ecuación (2.1) indica que la flexibilidad disminuye rápidamente al aumentar el diámetro. La siguiente figura muestra una comparación de las características específicas de diferentes fibras:

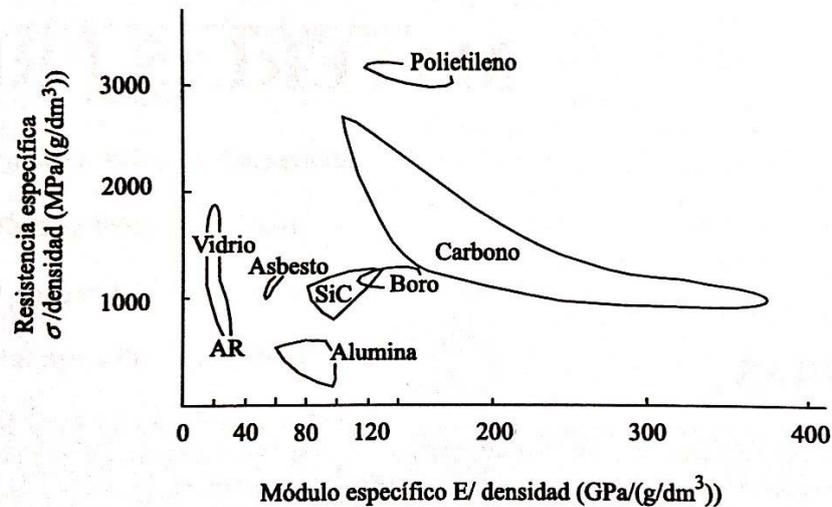


Figura 2.3 Características específicas de diferentes fibras [16]

#### 2.3.1.1 FIBRA DE VIDRIO

La fibra de vidrio es un material hecho de finas fibras de vidrio. Es un material ligero, extremadamente fuerte y robusto. Aunque la resistencia y la rigidez específica son algo más bajas que las de la fibra de carbono, la fibra de vidrio es mucho menos frágil y las materias primas son mucho más baratas. El vidrio es la fibra más antigua y más utilizada a lo largo de la historia. Los primeros estudios ingenieriles de materiales compuestos se hicieron acerca de la fibra de vidrio y han sido fabricadas desde los años 30.

En general, el vidrio se compone de arena de cuarzo, sosa, sulfato de sodio, potasio, feldespatos y varios aditivos. Las características, y con ellas la clasificación de las fibras de vidrio, se definen por la combinación de materias primas y sus proporciones. Los tipos más comunes de fibras de vidrio son:

- Vidrio E (Eléctrico): representa más del 90% de los refuerzos y tiene buenas propiedades eléctricas.
- Vidrio A (sodio-cálcico): es menos resistente y tiene un módulo más bajo que el vidrio E. Sin embargo, tiene gran resistencia química.
- Vidrio C (Químico): tiene una alta resistencia química.
- Vidrio S (Resistencia): tiene resistencia y módulo de elasticidad muy superiores a los demás. Se emplea en estructuras que sufren gran tensión por ejemplo en la industria aeronáutica.
- Vidrio D (Dieléctrico): con sus altas propiedades dieléctricas se utiliza sobre todo en la construcción de materiales electrónicos de telecomunicación, fabricación de radares y ventanas electromagnéticas.

Las fibras de vidrio son útiles debido a su alta relación entre el área superficial y el peso. Sin embargo, su gran superficie hace que sean mucho más susceptibles al ataque químico. Al atrapar el aire en su interior, las fibras de vidrio presentan un buen aislamiento térmico, con una conductividad térmica del orden de 0,05 w/mK.

La resistencia del vidrio se suele ensayar con las fibras recién fabricadas. Las fibras más finas son las más fuertes porque son más dúctiles. Cuanto más se raya la superficie, menos tenacidad tienen. Debido a que el vidrio tiene una estructura amorfa, sus propiedades no varían según las direcciones longitudinal y transversal de la fibra. La humedad es un factor importante para la resistencia, debido a que las fibras de vidrio adsorben fácilmente la humedad. Esto puede causar la aparición de grietas microscópicas y defectos superficiales, disminuyendo la tenacidad.

En contraste con la fibra de carbono, la de vidrio permite mayor alargamiento antes de su rotura. La viscosidad del vidrio fundido es muy importante en el proceso de fabricación. Durante la fabricación, la viscosidad debe ser relativamente baja. Si es demasiado alta, la fibra se romperá durante el estirado. Sin embargo, si la viscosidad es demasiado baja, se formarán gotas en lugar de hilos.

Se dispone de una tabla de las propiedades de los dos tipos de fibra de vidrio más utilizados, que son el vidrio E y el vidrio S:

Designación	Vidrio E	Vidrio S
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2580	460
Tensión de rotura (MPa)	3440	20

Esfuerzo de compresión (MPa)	1080	1600
Coefficiente expansión térmica ( $10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ )	5,4	2,9

Tabla 2.2 Propiedades de diferentes fibras de vidrio [26]

Como un resumen de lo anterior, se puede afirmar que la fibra de vidrio presenta las siguientes **ventajas**:

- Impermeabilidad eléctrica y térmica.
- Alta resistencia a corrosión.
- Resistencia a inflamación.
- Alta resistencia a tracción.
- Bajo coste.

Presenta los siguientes **inconvenientes**:

- Densidad alta comparando con otros materiales como la fibra de carbono, lo que incrementa el peso y el volumen total de la pieza para lograr el mismo comportamiento.
- Baja resistencia a fatiga.
- Bajo modulo elástico.
- Baja resistencia a abrasión.

### 2.3.1.2 FIBRA DE CARBONO

La fibra de carbono es un material de alta resistencia y rigidez con un contenido igual o mayor al 90% de carbono. Una fibra de carbono está construida por finos filamentos de 5-10  $\mu\text{m}$  de diámetro [18]. Tiene propiedades mecánicas similares al acero y es tan ligera como la madera o el plástico. La mayor aplicación de esta fibra es la fabricación de materiales compuestos, en la mayoría de los casos con una matriz de polímeros termoestables. Normalmente, la resina que utiliza es epoxi, aunque también puede asociarse con el poliéster o el viniléster.

La fibra de carbono se creó en 1879 [22], cuando Edison sacó una patente para la fabricación de filamentos de carbono adecuados para su uso en lámparas eléctricas. Sin embargo, fue en la década de los 60 cuando se inició la producción comercial con éxito, ya que los requisitos de la industria aeroespacial, especialmente para aviones militares, necesitaban de un material ultraligero con buenas propiedades mecánicas. En las últimas décadas, las fibras de carbono han encontrado una amplia aplicación en la aviación comercial y civil, la industria o el transporte. Las fibras de carbono se utilizan en materiales compuestos con una matriz de peso ligero. La fibra de carbono es el material ideal para aplicaciones en las que la resistencia y la rigidez, el menor peso, y la resistencia a fatiga excepcional son requisitos críticos. También se pueden utilizar en ocasiones donde la alta temperatura, inercia química y la alta amortiguación son importantes.

La fibra de carbono se obtiene del proceso de carbonización como se muestra en la figura 2.4. La fibra de carbono ha sido descrita como una fibra que contiene al menos el 90% de carbono obtenido por la pirólisis controlada de las fibras apropiadas. El término "fibra de grafito" se utiliza para describir fibras de carbono que tienen más del 99% de carbono. Se utilizan grandes variedades de fibras llamadas precursores para producir fibras de carbono de diferentes morfologías y diferentes características específicas. Los precursores más relevantes son: poliacrilonitrilo (PAN), fibras celulósicas, o algunas fibras fenólicas.

Las fibras de carbono se fabrican mediante la pirólisis controlada de precursores orgánicos en forma fibrosa. Consiste en un tratamiento térmico del precursor, que elimina el oxígeno, nitrógeno e hidrógeno para formar fibras de carbono. Las propiedades mecánicas de las fibras de carbono se mejoran mediante la orientación y el aumento de la cristalinidad. La mejor manera de lograr esto es comenzar con un precursor altamente orientado y luego mantener la orientación inicial durante el proceso de estabilización y carbonización a través de la tensión.

Igual que la fibra de vidrio, existen varios tipos de fibra de carbono, según la temperatura del tratamiento:

- La fibra de carbono de alto módulo (HM) es la más rígida y requiere una mayor temperatura en el tratamiento.
- La fibra de carbono de alta resistencia (HS) es la más fuerte y se carboniza a una temperatura que proporciona la mayor resistencia.
- El último tipo de fibra de carbono (III) es la más barata; la rigidez es menor que las anteriores pero la resistencia es aceptable. Este tipo requiere de la temperatura más baja en el tratamiento.

Se dispone de una tabla de las propiedades de diferentes fibras de carbono:

Designación	Alta Resistencia (HR)	Alto Módulo (HM)	Tipo III
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	1740-1760	1810-1870	1820
Módulo de elasticidad (GPa)	230	390	290
Resistencia a tracción (GPa)	2,6-5	2,1-2,7	3,1
Elongación a la rotura (%)	2	0,7	1,1
Módulo específico	130	210	160
Coefficiente expansión térmica (10 <sup>-6</sup> /°C)	2,56	2,56	2,56

Tabla 2.3 Propiedades de diferentes fibras de carbono [14]

Como un resumen de lo anterior, se puede afirmar que la fibra de carbono tiene las siguientes **ventajas**:

- Muy elevada resistencia mecánica y elevados módulos de elasticidad.
- Baja densidad comparada con otros materiales, como la fibra de vidrio.
- Alta resistencia a la variación de la temperatura, conservando su forma, si se utiliza matriz termoestable.
- Gran aislamiento térmico, bajo coeficiente de expansión térmica.
- Resistencia a agentes externos.
- Buena resistencia a fatiga.

Entre sus **inconvenientes** destacan:

- Alto coste de fabricación.
- Baja resistencia a impacto.
- Elevada conductividad eléctrica.

### 2.3.1.3 FIBRA DE BORO

Esta fibra fue introducida por primera vez por Talley en 1959 [23]. En la producción comercial de fibras de boro, se utiliza el método de deposición química de vapor (CVD). En el CVD el material se deposita en un filamento delgado. El material crece en este sustrato y produce un filamento más grueso. El tamaño del filamento final obtenido por CVD es tal que no se puede lograr por otros métodos convencionales de producción. La resistencia y el módulo de la fibra dependen de la densidad y el tamaño del material depositado. Según el sustrato utilizado se distinguen dos tipos de fibras de boro:

- *Fibras de boro obtenidas a partir de la deposición en **sustrato de tungsteno**.*

Este tipo es el más utilizado a pesar de que su coste es relativamente elevado, debido al alto coste del sustrato de tungsteno. El alambre se calienta eléctricamente en atmósfera de hidrógeno y pasa por una serie de reactores en los que se obtiene boro por descomposición de tricloruro, depositándose el boro sobre el alambre.

Este proceso dura alrededor de dos minutos. Durante este proceso, los átomos se difunden hacia el núcleo de tungsteno para producir la reacción de forma completa y, con ello, la producción de  $WB_4$  y  $W_2B_5$ . Inicialmente se utiliza la fibra de tungsteno de diámetro 0,012 mm, que aumenta a 0,1 a 0,2 mm de diámetro después del proceso. Este paso induce tensiones residuales significativas en la fibra. El núcleo se somete a compresión y la capa de boro se somete a tensión. La fibra de boro obtenida por este proceso alcanza resistencias de rotura a tracción de 3,5 GPa, módulos elásticos de 406 GPa y pesos específicos de 2,6 kg/dm<sup>3</sup>.

- *Fibras de boro obtenidas a partir de la deposición en **substrato de carbono**.*

Este tipo es más económico que el anterior, debido a que el coste del sustrato es menor. Sin embargo este proceso es bastante complicado ya que durante las primeras etapas de deposición del filamento de boro se presenta unos esfuerzos residuales debido al crecimiento de las deformaciones de los sustratos. Este crecimiento de las deformaciones puede llegar a superar la deformación a rotura del sustrato de carbono, provocando daños en las superficies internas de los filamentos de boro.

Debido al elevado coste, el uso de estas fibras está limitado a aplicaciones de alta tecnología como pueden ser componentes para vehículos espaciales, aplicaciones militares o aeronáuticas.

Se dispone de una tabla de las propiedades de diferentes fibras de carbono:

Designación	Fibra de Boro
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	2570
Módulo de elasticidad (GPa)	400
Resistencia a tracción (GPa)	3,6
Elongación a la rotura (%)	0,7
Módulo específico	155
Coefficiente expansión térmica (10 <sup>-6</sup> /°C)	4,9

Tabla 2.4 Propiedades de la fibra de boro [14]

Entre sus **ventajas** destacan:

- Alta resistencia mecánica y modulo de elasticidad.
- La densidad es un 1/4 del acero.
- Buena resistencia a compresión.
- Buena resistencia a alta temperatura si trabaja en ambiente de gas noble.

También presentan los siguientes **inconvenientes** [15]:

- Si trabaja en el aire, a temperatura superior a 500 °C su resistencia disminuye considerablemente.
- Es un material relativamente activo, reacciona con la matriz con facilidad, la solución es aplicar B<sub>4</sub>C, SiC.

### 2.3.1.4 FIBRA DE KEVLAR

El Kevlar es una aramida, su nombre proviene de la abreviatura de poliamida aromática. Igual que los filamentos de nylon, los filamentos de Kevlar se realizan mediante la extrusión del precursor a través de un orificio. Las fibras de Kevlar son más fuertes y más rígidas en la dirección axial que en la dirección transversal. El precursor del Kevlar es muy estable tanto química como térmicamente. Hoy en día, hay tres grupos de Kevlar, que son:

- Kevlar 29
- Kevlar 49
- Kevlar 149

La siguiente tabla muestra las diferencias en las propiedades de los tres grupos de Kevlar:

Designación	Kevlar 29	Kevlar 49	Kevlar 149
Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	1440	1440	1470
Módulo de elasticidad (GPa)	83	131	86
Resistencia a tracción (GPa)	3,6	3,6-4,1	3,4
Elongación a la rotura (%)	4,0	2,8	2,0
Módulo específico	41	88	179
Coefficiente expansión térmica (10 <sup>-6</sup> /°C)	-2	-2	-2

Tabla 2.5 Propiedades de diferentes fibras de Kevlar [14]

El módulo elástico y la resistencia a tracción del Kevlar 29 son comparables a los de la fibra de vidrio (tipo S o E). Sin embargo, su densidad es casi la mitad que la del vidrio. Por lo tanto, si no se necesita alguna característica especial de las fibras de vidrio, se puede sustituir la fibra de vidrio por la de Kevlar 29 cuando se desea una estructura más ligera. Además, si se necesita reducir más el peso de la estructura, manteniendo las propiedades mecánicas, se puede recurrir a las fibras de Kevlar 49 o de Kevlar 149. Sin embargo, el coste de las fibras de Kevlar es mucho mayor que el de las fibras de vidrio.

El Kevlar tiene otras ventajas a parte de las mencionadas. Tiene un coeficiente de expansión térmica pequeño, al igual que las fibras de carbono, lo que le da estabilidad frente a la variación de temperatura. A diferencia de las fibras de carbono, el Kevlar es muy resistente al impacto y el daño por abrasión. Gracias a estas características, la fibra de Kevlar puede utilizarse como capa protectora de laminados constituidos por otros materiales.

A pesar de las ventajas, las fibras de Kevlar tienen las siguientes desventajas: absorben fácilmente la humedad, por lo que los materiales compuestos constituidos por Kevlar son más sensibles con respecto al medio ambiente. Además, aunque la resistencia a la tracción y el módulo son altos, la resistencia a compresión es relativamente baja. Finalmente, el Kevlar es un material muy difícil de mecanizar.

Como un resumen de lo anterior, se puede afirmar que las fibras de Kevlar presentan las siguientes **ventajas**:

- Densidad baja, por lo que la resistencia específica es mayor que las fibras de vidrio, carbono o de boro.
- Rigidez excepcional.
- Elevada resistencia a impacto.
- Alta resistencia química.

Pero presenta dos **inconvenientes** principales:

- Baja resistencia a compresión.
- Baja resistencia a tensión cortante.

Los dos inconvenientes imposibilitan su uso como material para el eje de transmisión.

### 2.3.2 MATRICES

En la Tabla 2.3 se muestran las principales matrices utilizadas para la formación de los materiales compuestos.

INORGÁNICAS	Cemento, Geopolímeros, Yeso Matrices cerámicas Matrices metálicas	
ORGÁNICAS	Termoestables	Epoxi, Viniléster, Poliéster, Fenólica, Esteres cianato, Bismaleimidias, Poliamidas, Polieteramida
	Termoplásticas	ABS, Polipropileno, Policarbonato, Acetato, PBT, Polieterimida, PET, Nilón, Poliamida, PEEK, PEKK, PAI, PAS

Tabla 2.6 Clasificación de diferentes matrices [14]

En este proyecto se estudian principalmente las matrices orgánicas. Estas matrices son compuestos orgánicos de elevado peso molecular, producto de reacciones de polimerización por adición o condensación de diferentes compuestos de base.

Las matrices orgánicas se distinguen en dos grupo: las termoestables y las termoplásticas. La principal diferencia entre los dos tipos de matrices es:

- Las matrices termoestables no se ablanda con el calor. Cuando las matrices termoestables se calientan por primera vez, bien sea la resina epoxi o la de poliéster, se produce una reacción química llamada degradación, que hace que el material se endurece permanentemente.
- Las matrices termoplásticos se ablanda con el calor y se puede moldear para darle una gran variedad de formas, cuando se enfría vuelve a endurecerse, manteniendo sus características iniciales. Este proceso de ablandamiento y endurecimiento puede repetirse varias veces sin que el material modifique sus propiedades.

**La matriz termoestable** más usada hoy en día es la resina de poliéster, seguida por viniléster y epoxi. Las resinas termoestables son más utilizadas porque antes del curado, estando a temperatura ambiente, se mantienen en estado líquido. Esto permite una fácil impregnado de las fibras de refuerzo tales como la fibra de vidrio, la fibra de carbono, o la fibra de Kevlar [24].

Debido a que a temperatura ambiente las resinas termoestables se mantienen en estado líquido, se puede eliminar fácilmente el aire en su interior durante la fabricación. Esta característica permite también la fabricación por molde vacío. A parte de la facilidad de fabricación, las resinas termoestables ofrecen una excelente relación propiedades-precio.

Dentro de las propiedades de las resinas termoestables destacan:

- Excelente resistencia a disolventes y corrosivos.
- Resistencia al calor y la alta temperatura.
- Resistencia a la fatiga.
- Elasticidad elevada.
- Excelente adherencia.
- Buena calidad de la superficie.

El proceso de curado de la resina termoestable es un proceso irreversible. Es decir, una vez que se forma un material compuesto termoestable, no se puede devolver a su estado original. Debido a esto, el reciclaje de materiales compuestos termoestables es extremadamente difícil. La propia resina termoestable no es reciclable, sin embargo, existen métodos que eliminan la resina mediante la pirólisis y son capaces de recuperar la fibra de refuerzo.

**Las matrices termoplásticas** son otro grupo de matrices muy utilizadas. Muchos productos termoplásticos utilizan fibras discontinuas cortas como material de refuerzo, tales como la fibra de vidrio o la fibra de carbono. Las fibras discontinuas mejoran las propiedades del material, sin embargo, las propiedades mecánicas no son comparables a los materiales compuestos reforzados con fibras continuas. Las resinas termoplásticas tienen algunas ventajas y desventajas distintas que las resinas termoestables. Dentro de las ventajas se deben destacar dos principales:

En primer lugar, muchas resinas termoplásticas tienen mayor resistencia al impacto que las resinas termoestables (en ocasiones puede llegar a ser diez veces mayor). La otra ventaja importante de los compuestos termoplásticos es la reversibilidad. Nótese que las resinas termoplásticas, a temperatura ambiente, se encuentran en estado sólido. Con el aumento de la temperatura estas resinas se funden produciendo un cambio físico reversible.

No obstante, debido a que la resina termoplástica se encuentra en estado sólido en la naturaleza, es mucho más difícil la realización de la impregnación de las fibras de refuerzo. Se precisa por un lado un calentamiento hasta el punto de fusión, y por otro lado ejercer una presión para impregnar completamente las fibras. Este proceso es complicado y necesita maquinarias y herramientas específicas que normalmente son muy caras.

### 2.3.2.1 RESINAS DE POLIÉSTER INSATURADO

Las resinas de poliéster insaturado se obtienen por la condensación de ácidos insaturados. Desde los años 30, las resinas de poliéster insaturado se han utilizado ampliamente para la fabricación de productos. Estas resinas se pueden combinar con varios tipos de refuerzos, tales como las fibras de carbono, las de vidrio o las de boro. El curado se realiza mediante el uso de los iniciadores. Dependiendo de los diferentes tipos de iniciadores y aditivos, se consiguen productos termoestables con propiedades químicas y mecánicas muy distintas.

El uso de poliésteres insaturados y aditivos tales como el estireno reduce la viscosidad de la resina. La resina líquida se convierte en un sólido por la reacción de reticulación, en la que se crea una red tridimensional formada por la unión de las diferentes cadenas poliméricas homogéneas. Después de la reticulación, las moléculas adquieren mayor rigidez, ya que los movimientos de relajación se encuentran impedidos.

Las resinas de poliéster son termoestables y, como otras resinas, curan de forma exotérmica. Por lo tanto, el uso excesivo de catalizador puede causar la carbonización o incluso el encendido de la resina durante el proceso de curado. El exceso de catalizador también puede causar que el producto fracture o forme una masa gomosa.

La resina de poliéster insaturado sufre una fuerte retracción del 8% después del proceso del curado. Además, la adhesión no es muy fuerte, y la resistencia a agentes químicos es baja. Se utiliza como adhesivo en piezas no estructurales. A pesar de los inconvenientes se deben mencionar las siguientes ventajas:

- Buena mojabilidad de las fibras.
- Alta dureza después de la curación.
- Transparente, brillante.
- Curación a temperatura ambiente.
- Buena resistencia a temperaturas altas.

### 2.3.2.2 RESINAS EPOXI

Las resinas epoxi han sido ampliamente adaptadas para muchos usos a parte de la fabricación de materiales compuestos con fibra de refuerzo. Hoy en día, los adhesivos de epoxi se venden en todas las ferreterías, y la resina epoxi se utiliza como aglutinante en encimeras o revestimientos para suelos. Sin embargo, todavía se están llevando a cabo investigaciones para ampliar el uso de este material. Las resinas epoxi se utilizan en:

- Adhesivos de uso general.
- Como aglutinante en los cementos.
- Las espumas rígidas.
- Revestimientos antideslizantes.
- Solidificar superficies arenosas para la extracción de petróleo.
- Materiales compuestos con fibra de refuerzo.

En el caso de los materiales compuestos con fibra de refuerzo, la resina de epoxi se utiliza como matriz para mantener de manera eficiente la fibra en su lugar. Las resinas de epoxi son compatibles con casi todas las fibras comunes, tales como la fibra de vidrio, la fibra de carbono o la fibra de aramida. Existen varios métodos para la fabricación de material compuesto con resina epoxi, algunos de estos son:

- Filament Winding.
- Pultrusión.
- Moldeo por compresión.
- Preimpregnado y autoclave.
- Infusión al vacío.

Comparado con otras resinas termoestables o termoplásticas tradicionales, las resinas epoxi tienen las siguientes ventajas, que son:

- Baja retracción.
- Excelente resistencia a la humedad.
- Excelente resistencia química.
- Buenas propiedades eléctricas.
- Buena resistencia mecánica y a la fatiga.
- Resistencia al impacto.
- Vida útil larga.

Las resinas son de polímeros termoestables, donde la molécula de resina contiene uno o más grupos epóxido. La composición química se puede ajustar para modificar el peso molecular y la viscosidad según la necesidad de las aplicaciones.

Las resinas epoxi se curan con la adición de un agente que se denomina endurecedor. Probablemente el endurecedor más común está basado en las aminas. A diferencia de las resinas de poliéster o de viniléster, donde solo se necesita una pequeña proporción (1-3%) del catalizador, las resinas epoxi generalmente requieren una proporción mucho mayor del endurecedor, que frecuentemente se encuentra en torno a una proporción de 1: 1 o 2: 1.

Cuando la resina epoxi está impregnada en la fibra se crean los denominados epoxi preimpregnados. Con los epoxis preimpregnados la resina se encuentra en un estado pegajoso, pero no curado. Esto permite que las láminas de preimpregnado puedan ser cortadas, apiladas o colocadas en un molde. Con el aumento de la temperatura y la presión, el material preimpregnado se cura. Los epoxis preimpregnados se deben mantener a temperaturas bajas para evitar el curado prematuro.

### 2.3.2.3 RESINAS DE VINILÉSTER

Las resinas viniléster poseen unas propiedades físicas y químicas intermedias a las de las resinas de poliéster y las resinas epoxi. Sin embargo, el coste de estas resinas es mayor. El doble enlace de vinilo contribuye a una buena flexibilidad de la resina. Esta flexibilidad produce piezas resistentes frente a los impactos y cargas repetitivas, evitando la aparición de fisuras.

Las resinas viniléster presenta una excelente resistencia a la humedad y los disolventes orgánicos. Sin embargo, presentan menor resistencia a los ácidos que las resinas de poliéster. Las resinas de viniléster son más resistentes que las resinas de poliésteres y las resinas epoxi. Normalmente, las resinas viniléster trabajan con fibras de vidrio. Sin embargo, actualmente las fibras de carbono está adquiriendo más uso.

Debido a la dureza de las partículas de viniléster, las resinas viniléster no tienen una calidad superficial tan buena como la de las resinas de poliéster. El doble enlace conduce a una retracción fuerte, lo cual también introduce un impacto negativo en la calidad de la superficie.

La relación resistencia-peso es muy buena y, debido a su baja densidad (aproximadamente  $1800 \text{ kg/m}^3$ ), se sustituye frecuentemente a las metálicas, que tienen una densidad cinco veces superior. El módulo elástico de las resinas de viniléster es aproximadamente igual que el de las resinas de poliéster.

Aunque el coste de las resinas de viniléster es mayor que las de poliéster y epoxi, su aplicación es de especial interés cuando la no aparición de fisuras es un factor importante.

Como un resumen de lo anterior, las principales características de este grupo de resinas son:

- Buenas propiedades mecánicas.
- Excelente resistencia a la fatiga.

LOS MATERIALES COMPUESTOS

- Excelente fluidez, lo que facilita su impregnado y moldeo.
- Adhesión fuerte.
- Resistente a la corrosión, incluso en agua caliente.
- Buena resistencia al fuego.

Aunque las resinas viniléster poseen las buenas propiedades mecánicas y resistencia química del epoxi, y los beneficios del poliéster tales como la baja viscosidad y el fácil secado, sufre una retracción del 5-10% después del curado.

La siguiente tabla muestra las propiedades mecánicas de los materiales más comunes.

<i>Material</i>	<i>Density <math>\rho</math></i> [ $10^3 \text{ kg/m}^3$ ] ( $\text{lb/in}^3$ )]	<i>Modulus <math>E_1</math></i> [GPa (Msi)]	<i>Specific stiffness <math>E_1/\rho g</math></i> [ $10^6 \text{ m}$ ]	<i>Tensile strength <math>X^t</math></i> [MPa (ksi)]	<i>Specific strength <math>X^t/\rho g</math></i> [ $10^3 \text{ m}$ ]
<b>Metals</b>					
Steel (SAE 1010)	7.8 (0.284)	207 (30)	2.68	365 (53)	4.68
Steel (AISI 4340)	7.8 (0.284)	207 (30)	2.68	1515 (220)	19.4
Al (6061-T6)	2.7 (0.097)	69 (10)	2.60	310 (45)	11.5
Al (7178-T6)	2.7 (0.097)	69 (10)	2.60	537 (78)	19.9
Stainless (AISI 440 H&T)	7.8 (0.284)	196 (28.5)	2.54	1790 (260)	22.9
Titanium alloy (Ti-6Al-4O)	4.5 (0.163)	110 (16)	2.53	1068 (155)	23.7
<b>Fibers (axial properties)</b>					
AS4	1.80 (0.065)	235 (34)	13.1	3600 (522)	200
T300	1.76 (0.064)	231 (33)	13.1	3650 (530)	208
P100S	2.15 (0.078)	724 (105)	33.7	2250 (319)	102
IM8	1.8 (0.065)	310 (45)	17.2	5170 (750)	287
Boron	2.6 (0.094)	385 (55.8)	14.8	3800 (551)	146
Kevlar 49	1.44 (0.052)	124 (18)	8.61	3620 (525)	251
SCS-6	3.3 (0.119)	400 (58.0)	12.1	3500 (507)	106
Nicalon	2.55 (0.092)	180 (28)	7.06	2000 (290)	78.4
Alumina	3.95 (0.143)	379 (55)	9.60	1590 (230)	40.1
S-2 Glass	2.46 (0.090)	86.8 (12.6)	3.53	4590 (665)	186
E-Glass	2.58 (0.093)	69 (10.0)	2.69	3790 (550)	134
Sapphire	3.97 (0.143)	435 (63)	11.0	3600 (522)	90.7
<b>Matrix materials</b>					
Epoxy	1.38 (0.050)	4.6 (0.67)	0.33	58.6 (8.5)	4.25
Polyimide	1.46 (0.053)	3.5 (0.5)	0.24	103 (15)	7.05
Copper	8.9 (0.32)	117 (17)	1.31	400 (58)	4.50
Silicon carbide	3.2 (0.116)	400 (58)	12.5	310 (45)	9.69

Tabla 2.7 Propiedades de los materiales más comunes [15]

# CAPÍTULO 3

## EL ÁRBOL DE TRANSMISIÓN

---

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Se define un eje de transmisión como un elemento cilíndrico de sección circular que transmite un momento de giro y que puede llevar montados distintos elementos mecánicos de transmisión de potencia. Normalmente cuando un eje está sometido a torsión y transmite potencia, le llamamos árbol. En caso contrario, se llama eje. Un árbol de transmisión puede sufrir distintos tipos de cargas, las cuales pueden ser:

- Flexión
- Tracción/Compresión
- Torsión

Cuando sufre únicamente una de estas cargas se denomina carga simple, cuando hay una combinación de éstas se denomina carga compuesta.

A parte de transmitir el giro y la potencia, el árbol de transmisión de un vehículo debe cumplir las siguientes misiones [17]:

- Transmisión de la torsión y la potencia.
- Soportar el máximo par de torsión generado por el motor.
- Soportar altas velocidades de giro.
- Adaptarse a la variación constante de los ángulos entre la transmisión, el diferencial y los ejes.
- Adaptarse a la variación de longitud producida por la reacción frente a la torsión, la deflexión del calzado, el frenado, etc.

Un árbol de transmisión convencional normalmente está constituido por dos semiejes unidos por una junta central. La junta está fijada al bastidor del vehículo y un rodamiento central es utilizado para suavizar el giro del árbol. Sin embargo esta construcción es pesada. Si el árbol de transmisión tiene menor longitud o está fabricado por un material más avanzado, como los materiales compuestos, puede prescindirse de la junta central y del rodamiento, reduciendo el peso total. La figura 3.1 muestra el acoplamiento del árbol de transmisión con la caja de cambio y el diferencial.

## EL ÁRBOL DE TRANSMISIÓN

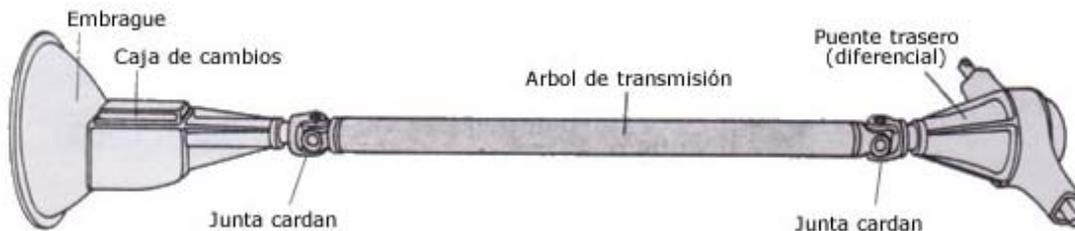


Figura 3.1 Acoplamiento del árbol de transmisión [28]

El uso de la junta cardan permite que la caja de cambios y el diferencial estén a distinto nivel vertical. Para los camiones, este punto resulta de gran importancia. La figura 3.2 muestra un esquema más detallado del árbol de transmisión, incluyendo las piezas de la junta cardan.

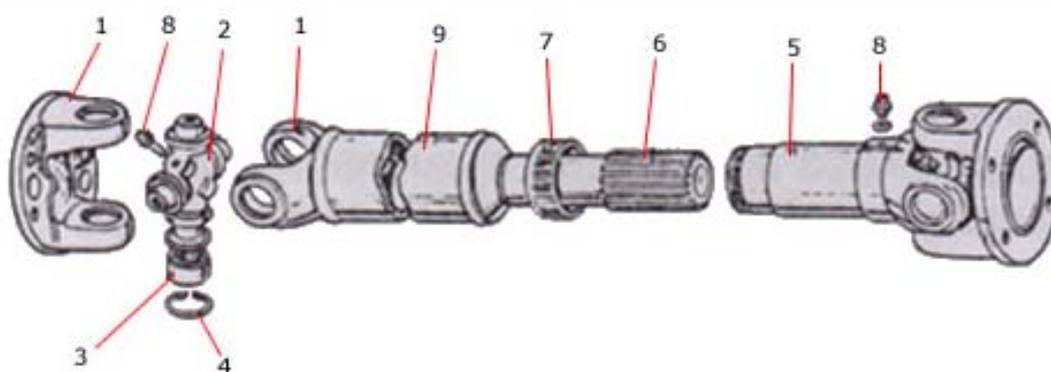


Figura 3.2 Despiece de un árbol de transmisión con junta cardan [28]

1. horquillas
2. Cruceta
3. Cojinetes de agujas
4. Bridas de retención
5. Manguito
6. Estriado
7. Casquillo guardapolvo
8. Engrasadores
9. Tubo de la transmisión

El uso de la junta cardan soluciona el problema de desnivel. Y mediante un árbol de transmisión telescópico se logra la adaptación a la variación de la longitud del mismo.

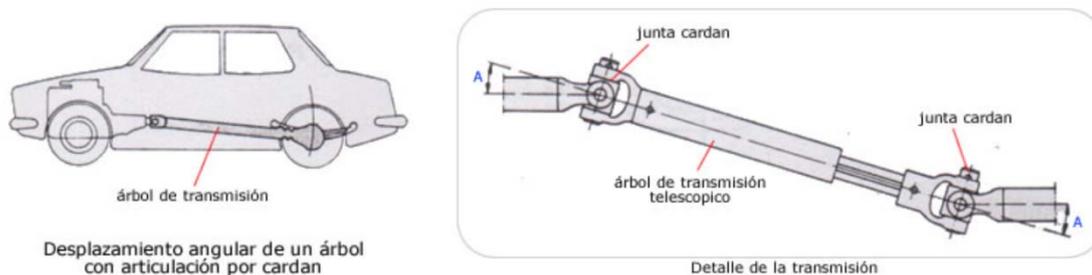


Figura 3.3 Árbol de transmisión telescópico [28]

## 3.2 PARÁMETROS Y ESPECIFICACIONES

Un árbol de transmisión para automóvil, como el que se muestra en la figura 3.5, transmite potencia de la caja de cambios al diferencial. La capacidad de transmisión del par debe ser superior al máximo par transmitido por el árbol de transmisión, siendo en este caso 3500 N·m y la frecuencia natural del árbol debe ser mayor que la máxima frecuencia soportada por el árbol, siendo en este caso 9000 rpm [29], para evitar el fenómeno de resonancia. La resonancia aparece cuando la velocidad de giro es igual a la frecuencia natural de vibración, la cual es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud ( $L$ ) del árbol y proporcional a la raíz cuadrada de la rigidez específica ( $E/\rho$ ), siendo  $E$  el módulo de elasticidad del material.

Debido a la limitación de espacio disponible, normalmente el diámetro exterior del árbol de transmisión no excede los 100 mm, por lo que en este proyecto se toma este valor como el diámetro exterior de diseño. La limitación del diámetro hace que la frecuencia natural de un eje metálico, de longitud máxima de 1,25 m, no pueda superar las 8000 rpm. Normalmente la mayoría de los árboles metálicos están constituidos por dos piezas para aumentar la frecuencia natural. Sin embargo, esta configuración es complicada y pesada debido a las tres juntas universales y el rodamiento del soporte central. Además produce ruidos y vibraciones que se transmiten al vehículo a través del rodamiento central.

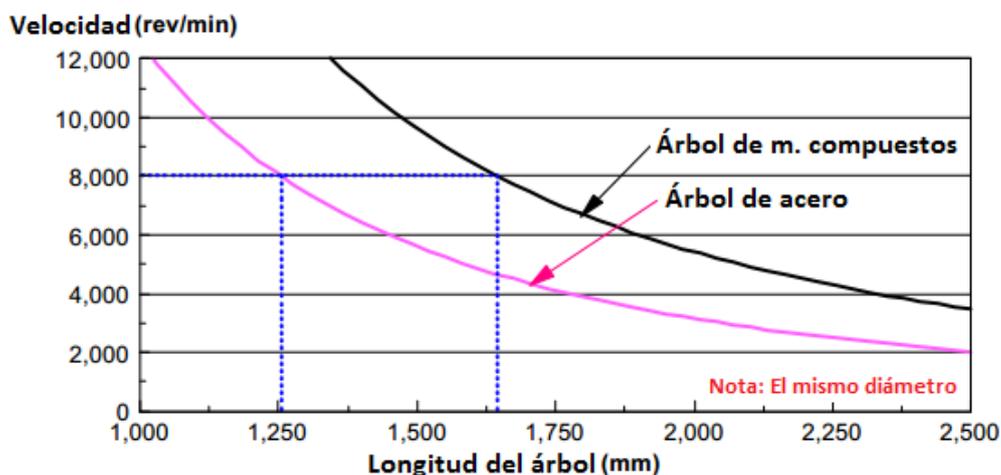


Figura 3.4 Velocidad crítica de los árboles de transmisión [7]

Si se sustituye el acero por la fibra de carbono, la frecuencia natural puede aumentar el doble, porque la rigidez específica de la fibra de carbono es cuatro veces superior que la del acero o la del aluminio. Aprovechando esta propiedad es totalmente viable la fabricación de un árbol de una sola pieza. Además, un árbol de transmisión de material compuesto presenta ventajas como:

- Menor peso
- Menor vibración
- Menor ruido

## EL ÁRBOL DE TRANSMISIÓN

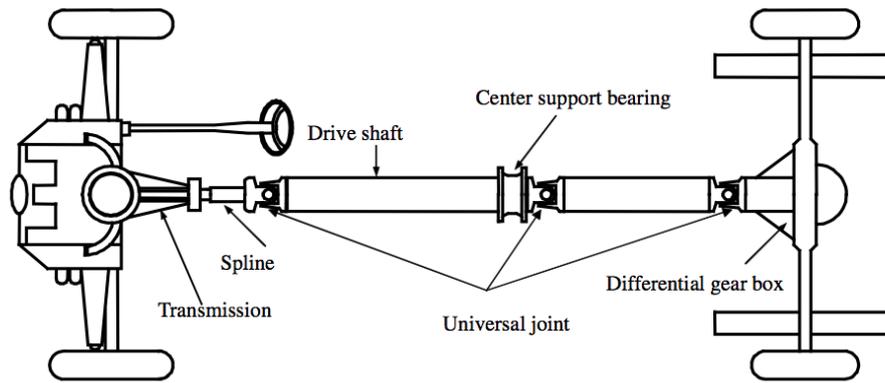


Figura 3.5 Esquema general de un árbol de transmisión [15]

No obstante, la unión entre el tubo de los materiales compuestos y la junta metálica es un punto bastante crítico, existiendo distintas soluciones para obtener una unión rígida y fiable, siendo algunos de los métodos:

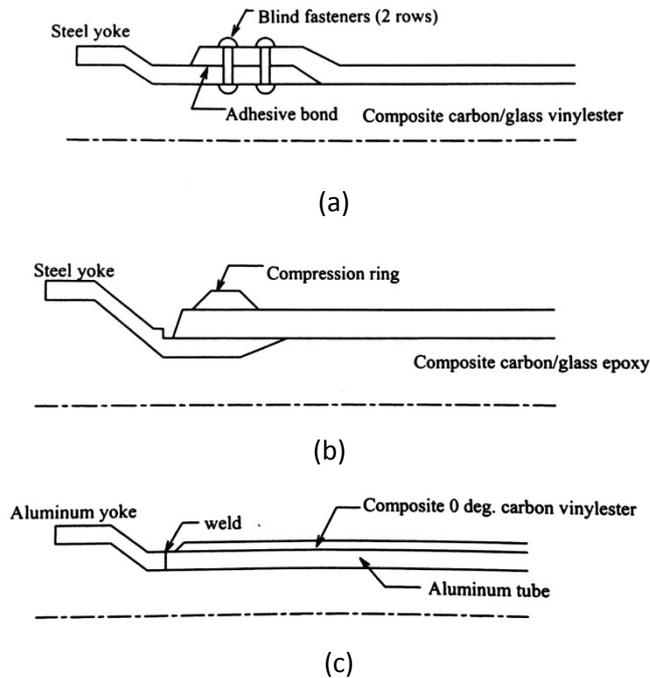


Figura 3.6 Métodos de la unión [15]: (a) Diseño Hércules; (b) Diseño Ciba-Geigy; (c) Diseño Dana-MMFG.

El diseño Hércules consiste en taladrar tanto la horquilla de acero como el tubo de materiales compuestos, y fijarlos mediante remaches. El diseño Ciba-Geigy no necesita la realización de taladros, ya que en este caso se produce la fijación mediante un anillo de compresión. El diseño Dana-MMFG utiliza un tubo interior de aluminio unido con la horquilla de aluminio mediante soldadura, y cubierto por una capa de fibra de carbono/viniléster. En el capítulo 5 se explicarán con detalle los métodos de la unión.

Según lo anterior, los parámetros de diseño del árbol de transmisión para este proyecto son:

Concepto	Notación	Unidad	Valor
Par máximo	$T_{\max}$	N·m	3500
Velocidad crítica	$N_{cr}$	rpm	9000
Longitud	L	mm	1500
Diámetro exterior	$d_o$	mm	100

Tabla 3.1 Parámetros del diseño de un árbol de transmisión

Partiendo de los parámetros, se calculan las especificaciones que debe cumplir el árbol de transmisión para garantizar la seguridad en la utilización.

### 3.2.1 CAPACIDAD DE TRANSMISIÓN DEL PAR

Un árbol de transmisión genérico puede sufrir simultáneamente cargas de torsión y de flexión, caso que corresponde a un eje que transmite potencia sobre el que está montada una rueda de dentado recto, como se muestra en la figura 3.7. En este caso general, las tensiones normales y cortantes que sufre el eje se puede sacar a partir de las cargas.

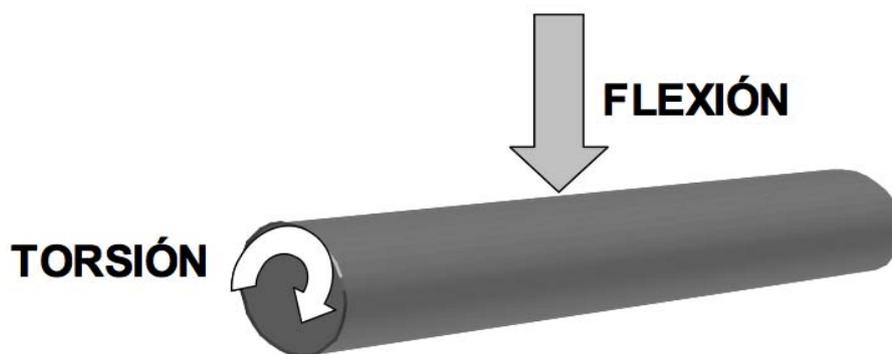


Figura 3.7 Un árbol de transmisión sometido a torsión y flexión [8]

$$\text{FLEXIÓN:} \quad \sigma_x = \frac{Md}{2I} = \frac{32M}{\pi d^3} \quad (3.1)$$

$$\text{TORSIÓN} \quad \tau_{xy} = \frac{Td}{2J} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (3.2)$$

Donde M es el momento de flexión, I es el momento de inercia, J es el momento polar de inercia, T es el par de torsión y d es el diámetro del árbol de transmisión.

Si se especifica el problema para un árbol de transmisión de un automóvil, la carga de flexión desaparecerá. Además el eje tiene forma de tubo para agilizar el peso, por lo que la tensión cortante se convierte en:

$$\tau_{xy} = \frac{16Ttd_0}{\pi(d_0^4 - d_i^4)} \quad (3.3)$$

Siendo  $t$  el espesor de la pared de árbol,  $d_o$  el diámetro exterior y  $d_i$  el diámetro interior del árbol.

Si se igualan la tensión cortante ( $\tau_{xy}$ ) a la tensión máxima cortante ( $S$ ) del eje, se obtendrá la capacidad de transmisión del par de torsión:

$$\text{Capacidad transmisión del par} = S \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{16td_0} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 RESISTENCIA A PANDEO

El pandeo es un fenómeno de inestabilidad elástica que puede darse en elementos esbeltos sometidos a compresión, y que se manifiesta por la aparición de importantes desplazamientos transversales a la dirección principal de compresión. El pandeo torsional se produce cuando la estructura está sometida exclusivamente a torsión, como se muestra en la figura 3.8, caso que corresponde a un árbol de transmisión. En este caso la tensión cortante resulta extremadamente crítica comparada con las tensiones normales, y el cálculo de la tensión cortante crítica es imprescindible para evitar el fenómeno de pandeo.

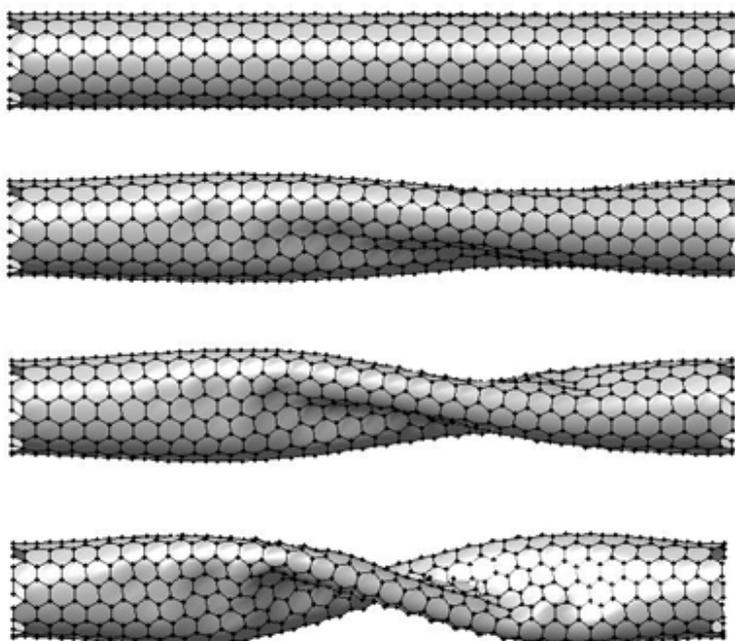


Figura 3.8 Pandeo torsional de un tubo [31]

En este proyecto se sigue la teoría de Timoshenko [30] para hallar la tensión cortante crítica. Según esta teoría, si se cumple que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{L^2 t}{(2r)^3} > 5.5, \quad (3.5)$$

el eje se define como eje largo, en el caso contrario el eje se define como eje corto o medio. Los árboles de transmisión para automóvil generalmente se consideran ejes largos porque tienen una longitud muy elevada comparada con su diámetro.

Para el eje largo, la tensión cortante crítica según la teoría de la viga de Timoshenko, es:

$$\tau_{cr} = \frac{E}{3\sqrt{2}(1-v^2)^{3/4}} (t/r)^{3/2} \quad (3.6)$$

Donde E es el módulo de elasticidad de material que se utiliza para el diseño del eje de transmisión.

Para el eje corto y medio, la tensión cortante crítica es:

$$\tau_{cr} = \frac{4.39E}{(1-v^2)} (t/r)^2 \sqrt{1 + 0.0257(1-v^2)^{3/4} \frac{L^3}{(rt)^{1.5}}} \quad (3.7)$$

La relación entre la resistencia a pandeo y la tensión cortante crítica es:

$$T_{cr} = \tau_{cr} 2\pi r^2 t \quad (3.8)$$

### 3.2.3 FRECUENCIA NATURAL

El árbol de transmisión por un lado conecta con la caja de cambios y, por otro lado, conecta con el diferencial mediante las juntas universales. Tanto la caja de cambios como el diferencial están fijados al bastidor, por lo que en este caso se puede idealizar la estructura como una viga elástica biarticulada sometida a vibración lateral.

Como se ha mencionado en el apartado anterior, la frecuencia natural del eje de transmisión es un parámetro crítico para evitar el fenómeno de la resonancia, la cual puede producir la fisura o fractura del eje. La técnica más realista de cálculo es modelar la viga a partir de la teoría de elasticidad, seguido por la aplicación del método de los elementos finitos (MEF).

El modelo empleado es el de viga elástica de Euler-Bernoulli (E-B). Este modelo sólo considera el efecto de flexión. La ecuación fundamental es:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (3.9)$$

Siendo A el área de la sección del árbol de transmisión.

Resolviendo esta ecuación con las condiciones de frontera dadas, la frecuencia natural sale:

$$f_n = \frac{\pi p^2}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$
(3.10)

donde  $p=1, 2, 3, \dots$

Cuando  $p=1$  se obtiene la frecuencia natural de primer modo de vibración.

Para obtener la velocidad crítica de giro  $N_{cr}$ , se utiliza la siguiente expresión:

$$N_{cr} = 60f_n$$
(3.11)

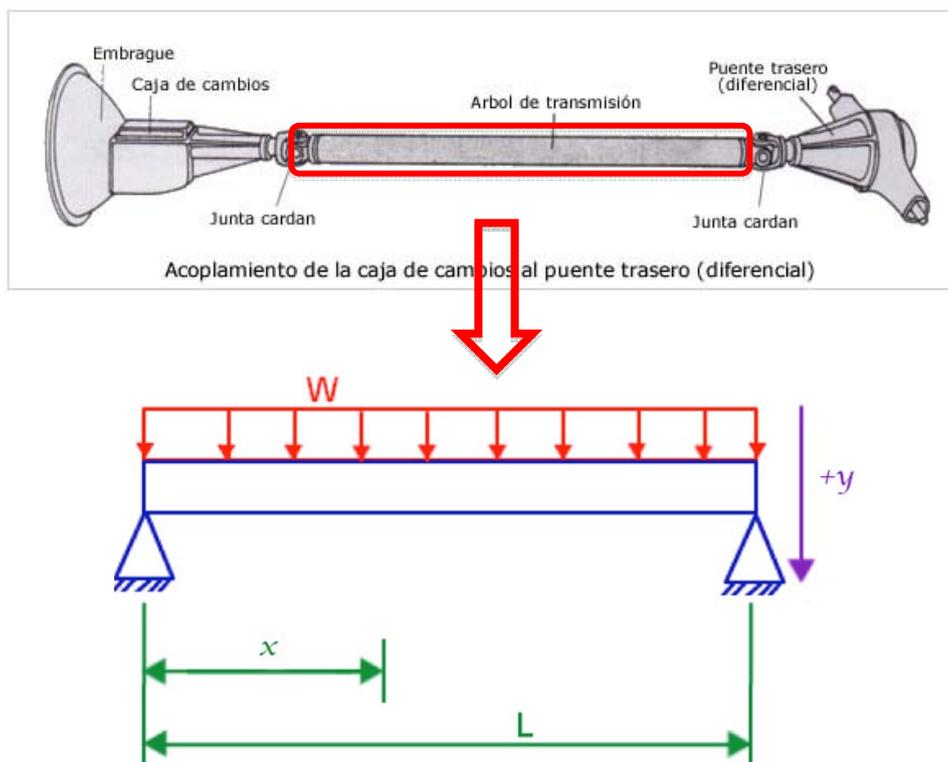


Figura 3.9 Idealización de un eje a una viga biapoyada [28]

# CAPÍTULO 4

## ÁRBOL DE TRANSMISIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS

---

### 4.1 HIPÓTESIS DEL PROBLEMA

Para el diseño del árbol de transmisión de materiales compuestos, se utiliza la teoría clásica de laminados (CLT). Esta teoría es la más clásica que proporciona un gran facilidad para el cálculo de laminados [32]. Sin embargo, para poder emplear esta teoría, se tiene que asumir una serie de hipótesis.

En primer lugar, se supone que la pared del árbol de transmisión es un laminado delgado dado que, tanto el diámetro como el espesor, son despreciables frente a su largo. También se admitirá que se cumplen las hipótesis de Kirchhoff para placas delgadas, que consisten en:

1. Las rectas perpendiculares al plano medio antes de que el laminado se deforme, siguen permaneciendo rectas una vez que el laminado se haya deformado.
2. Las rectas perpendiculares al plano medio no experimentan ningún tipo de deformación longitudinal (el laminado no cambia de espesor)
3. Las rectas perpendiculares al plano medio permanecen perpendiculares a la superficie que adquiere dicho plano una vez que el laminado flecte.

Por tanto, las secciones planas ortogonales al plano medio del laminado siguen siendo planas y ortogonales a la superficie que adquiere dicho plano una vez que el laminado haya flectado, según se muestra en la figura 4.1.

Las siguientes hipótesis también se tienen en cuenta:

- El comportamiento del material se supone elástico lineal.
- Las láminas se encuentran trabajando solidariamente unas a otras.
- No existen tensiones fuera del plano de cada lámina ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ), las láminas trabajan en condiciones de tensión plana.

Aparte de las hipótesis anteriores, hay que asumir las siguientes hipótesis simplificativas para este proyecto en concreto, que consisten en:

- A. La velocidad de giro es uniforme a lo largo del árbol de transmisión. Por lo tanto, la fuerza centrífuga es uniforme a lo largo del árbol.

- B. Las cargas de servicio no producen variación del diámetro de la sección o la variación es despreciable. El incumplimiento de esta hipótesis implica un cambio del espesor del laminado, por lo tanto la pérdida de validez de la segunda hipótesis de Kirchhoff.
- C. El árbol está perfectamente equilibrado, no existe excentricidad. Si existiera una excentricidad, el momento de inercia del árbol cambiaría, variando la frecuencia natural del árbol.

Bajo estas hipótesis se construye un modelo matemático para el diseño analítico del árbol de transmisión. Los resultados analíticos se compararán con los resultados obtenidos en una simulación 3-D y se valorará el error cometido. Si el error es inaceptable, hay que asumir la invalidez del empleo de la CLT para este caso y utilizar otras teorías, tales como la teoría de primer orden, la teoría de segundo orden o la teoría de tercer orden (teoría de Reddy). La dificultad del cálculo va ascendiendo según vaya aumentando el orden de la teoría.

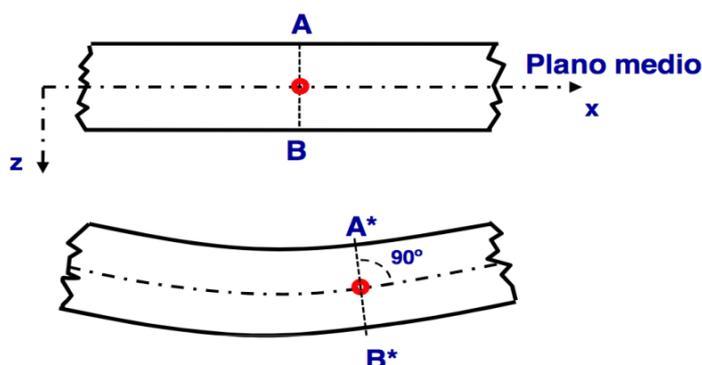


Figura 4.1 Viga antes y después de deformarse [32]

## 4.2 SELECCIÓN DE MATERIALES

En el capítulo 2 se han presentado los materiales compuestos más empleados en la industria, cada material tiene sus ventajas e inconvenientes, las cuales se reflejan en la siguiente tabla:

<b>FIBRA</b>		
MATERIAL	VENTAJA	INCONVENIENTE
F. Vidrio	-Impermeabilidad eléctrica y térmica -Alta resistencia a corrosión -Resistencia a inflamación -Alta resistencia a tracción -Bajo coste	-Densidad alta -Baja resistencia a fatiga -Bajo modulo elástico -Baja resistencia a abrasión
F. Carbono	-Muy elevada resistencia mecánica -Elevado modulo de elasticidad -Baja densidad -Alta resistencia a la variación de la temperatura -Buena resistencia a fatiga	-Alto coste de fabricación -Baja resistencia a impacto -Elevada conductividad eléctrica

ÁRBOL DE TRANSMISIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS

F. Boro	-Alta resistencia mecánica -Alto modulo de elasticidad -Baja densidad -Buena resistencia a compresión	-A altas temperaturas empeora su comportamiento -Material muy activo -Elevado coste
F. Kevlar	-Baja densidad -Rigidez excepcional -Elevada resistencia al impacto -Alta resistencia química	-Baja resistencia a compresión -Baja resistencia a tensión de cortadura
<b>MATRIZ</b>		
Poliéster	-Buena mojabilidad de las fibras -Alta dureza después de la curación -Transparente, brillante -Curación a temperatura baja -Resistencia a temperatura alta	-Retracción elevada después del secado -Adhesión débil -Resistencia a agentes químicas baja
Epoxi	-Fuerte adhesión -Baja retracción, estabilidad dimensional -Propiedad química estable, buena resistencia a corrosión -Fácilmente aplicable, no necesita una presión muy elevada -Buena impermeabilidad	-Necesita endurecedor -Proceso de secado más complicado
Viniléster	-Buenas propiedades mecánicas -Resistencia química -Baja viscosidad -Fácil secado	-Adhesión moderada -Fuerte retracción después del secado

Tabla 4.1 Ventajas e Inconvenientes de fibras y matrices

Dada la especialidad del problema, el árbol de transmisión requiere una alta estabilidad dimensional frente a la variación de la temperatura, buena resistencia a agentes exteriores y alta resistencia a compresión para garantizar un uso correcto y seguro. En este caso, el coste de fabricación no es un factor especialmente crítico, debido a que este tipo de árbol de transmisión se utiliza sobre todo en vehículos de media-alta gama y en vehículos de competición.

Descartamos poliéster y viniléster como material de la matriz porque sufre una retracción fuerte después del secado. Por otro lado, la adhesión a los sustratos no es tan fuerte como el caso del epoxi.

Descartamos la fibra de Kevlar por la baja resistencia a compresión y a cortadura, al igual que descartamos la fibra de boro por su reactividad con la matriz y variación del comportamiento frente a la variación de la temperatura.

Por lo tanto, las posibles combinaciones Fibra/Matriz son:

- Fibra de vidrio/Epoxi
- Fibra de carbono/Epoxi

La siguiente tabla muestra las propiedades de los dos materiales seleccionados. El USN150 es un material compuesto de Carbono/Epoxi y el UGN de Vidrio/Epoxi. Las direcciones materiales de una lámina se muestra en la figura 4.2:

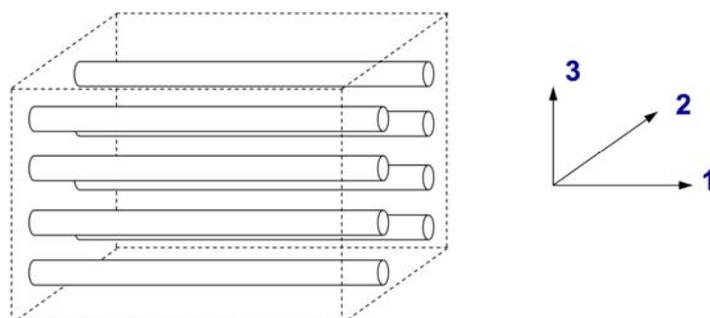


Figura 4.2 Direcciones materiales en una lámina [32]

Concepto		Unidad	Carbono/Epoxi (USN150)	Vidrio/Epoxi (UGN150)
Módulo de elasticidad en dirección 1	$E_1$	GPa	131,6	43,3
Módulo de elasticidad en dirección 2 y 3	$E_2, E_3$	GPa	8,20	14,7
Módulo de cortante en plano 23	$G_{23}$	GPa	3,5	3,4
Módulo de cortante en plano 13 y 12	$G_{13}, G_{12}$	GPa	4,5	4,4
Coef. de Poisson en plano 12 y 13	$\nu_{12}, \nu_{13}$	---	0,282	0,3
Coef. de dilatación térmica en dirección 1	$\alpha_1$	$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	-0,9	6,3
Coef. de dilatación térmica en dirección 2	$\alpha_2$	$\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$	27	19
Coef. de expansión higroscópico en dirección 1	$\beta_1$	---	0	0,01
Coef. de expansión higroscópico en dirección 2	$\beta_2$	---	0,4	0,29
Resistencia a la tracción en dirección 1	$S_1^t$	MPa	2000	1050
Resistencia a la compresión en dirección 1	$S_1^c$	MPa	1400	700
Resistencia a la tracción en dirección 2 y 3	$S_2^t, S_3^t$	MPa	61	65
Resistencia a la compresión en dirección 2 y 3	$S_2^c, S_3^c$	MPa	130	120
Resistencia al cortante en plano 23	$S_{23}$	MPa	40	65
Resistencia al cortante en plano 13 y 12	$S_{13}, S_{12}$	MPa	70	40
Densidad	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	1550	2100
Espesor de la lámina	$t_{lámina}$	mm	0,125	0,125

Tabla 4.2 Propiedades mecánicas de los materiales compuestos [15]

## 4.3 CRITERIOS DE ROTURA

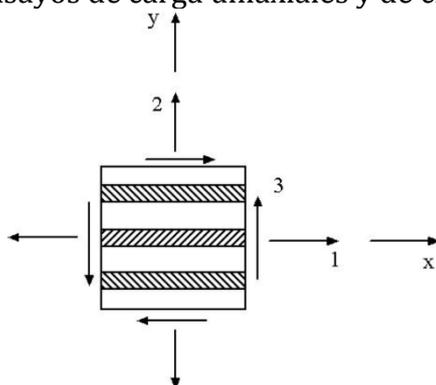
En cuanto a la rotura de los elementos estructurales realizados con materiales compuestos, existen varios modos de fallo, siendo los más comunes:

1. Deslaminación: los materiales compuestos fabricados a base de diferentes láminas apiladas tienden a deslaminarse. La rigidez a flexión de un panel con deslaminaciones se reduce significativamente, aun cuando visualmente estas deslaminaciones no se detecten.
2. Fallo de la matriz a compresión: realmente es un fallo de la matriz por cortante puesto que la superficie de fractura forma un ángulo con la dirección de carga lo que evidencia la naturaleza de este tipo de fallo.
3. Fallo de las fibras a compresión: este modo de fallo se ve muy afectado por el comportamiento a cortante de la matriz y por las imperfecciones del proceso de fabricación del material (desalineamiento de fibras y existencia de huecos).
4. Fallo de la matriz a tracción: la superficie de fractura que resulta de este tipo de fallo es ortogonal a la dirección de carga, y dicha superficie puede ser fácilmente observada.
5. Fallo de las fibras a tracción: este modo de fallo tiene un carácter “explosivo”, pues se libera una gran cantidad de energía y, en estructuras que no tengan la posibilidad de redistribuir las cargas, este fallo causa una rotura catastrófica.

Para determinar la rotura de láminas existen diversos criterios. Los criterios más empleados son el criterio de tensión máxima, el criterio de deformación máxima, el criterio de Tsai-Hill y el criterio de Tsai-Wu [33], los cuales se describirán a continuación.

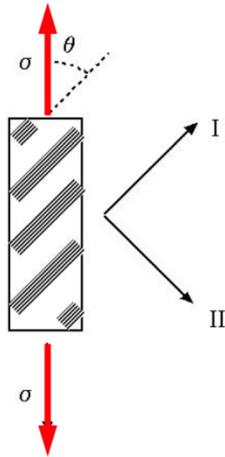
### 4.3.1 CRITERIO DE MÁXIMA TENSION

Este criterio se basa en suponer que la lámina no rompe si las tensiones dentro de la lámina, expresadas en unos ejes que coincidan con la dirección de las fibras, son menores que las resistencias respectivas, obtenidas de unos ensayos de carga uniaxiales y de cizalladura pura:



$$\begin{aligned}
 -Xc < \sigma_1 < Xt \\
 -Yc < \sigma_2 < Yt \\
 |\tau_a| < S
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Si las cargas no están aplicadas en ejes de ortotropía, el criterio adquiere una forma más general:



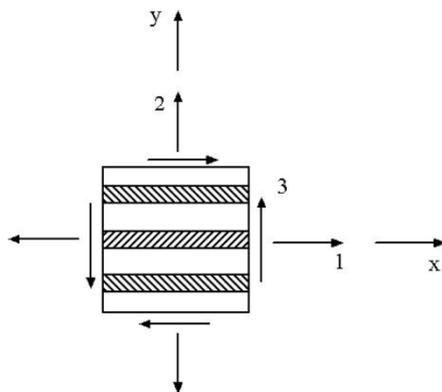
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \cos^2 \theta \\ \sigma_2 &= \sigma \sin^2 \theta \\ \tau_{12} &= -\sigma \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.2)$$

Por lo que para un caso general, el criterio de tensión máxima tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_{rotura} = \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{Xc}{\cos^2 \theta} \\ \frac{Xc}{\sin^2 \theta} \\ \frac{Xc}{\sin \theta \cos \theta} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

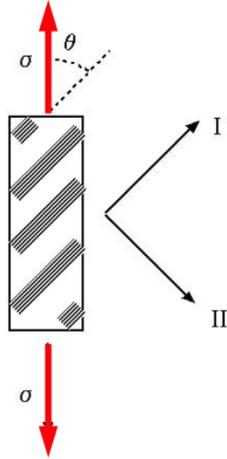
### 4.3.2 CRITERIO DE MÁXIMA DEFORMACIÓN

Según este criterio, las deformaciones longitudinales y de corte en el interior de la lámina no deben superar unos determinados valores:



$$\begin{aligned} -X\epsilon c < \epsilon_1 < X\epsilon t \\ -Y\epsilon c < \epsilon_2 < Y\epsilon t \\ |\gamma_{12}| < S\epsilon \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si las cargas no están aplicadas en ejes de ortotropía, el criterio de rotura equivalente, expresado en tensiones, pasaría a ser:



$$\begin{aligned} \sigma &< \frac{X}{\cos^2 \theta - \nu_{12} \sin^2 \theta} \\ \sigma &< \frac{Y}{\sin^2 \theta - \nu_{21} \cos^2 \theta} \\ \sigma &< \frac{S}{\sin \theta \cos \theta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Debe tenerse cuenta que, a diferencia de lo que sucede con el criterio de la tensión máxima, este criterio considera el efecto Poisson.

### 4.3.3 CRITERIO DE TSAI-HILL

Para los materiales anisótropos, Hill estableció un criterio de plastificación que está basado en el criterio de Von Mises, interviniendo una serie de parámetros de plastificación F, G, H, L, M y N. Su expresión genérica es:

$$\begin{aligned} (G + H)\sigma_x^2 + (F + H)\sigma_y^2 + (F + G)\sigma_z^2 - 2H\sigma_x\sigma_y \\ - 2G\sigma_x\sigma_z - 2F\sigma_y\sigma_z + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{xz}^2 + 2N\tau_{yx}^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

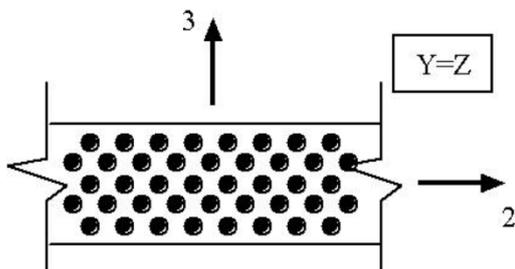
Donde:

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \\ 2L &= \frac{1}{S_{yz}^2} \\ 2M &= \frac{1}{S_{xz}^2} \\ 2N &= \frac{1}{S_{yx}^2} \end{aligned} \quad (4.7)$$

El criterio de Tsai-Hill queda expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^2}\sigma_x^2 + \frac{1}{Y^2}\sigma_y^2 - \frac{1}{Z^2}\sigma_z^2 - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_x\sigma_y - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_x\sigma_z \\ - \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}\right)\sigma_y\sigma_z + \frac{1}{S_{yz}^2}\tau_{yz}^2 + \frac{1}{S_{xz}^2}\tau_{xz}^2 + \frac{1}{S_{yx}^2}\tau_{yx}^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si se trata de una lámina unidireccional trabajando en tensión plana según el plano 1-2 (fibras orientadas en la dirección 1) y admitiendo que  $Z=Y$ , el criterio se convierte en:



$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} \leq 1$$

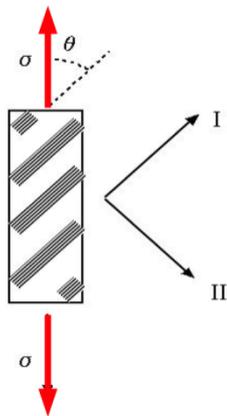
$$X = X_t \text{ si } \sigma_1 > 0$$

$$X = X_c \text{ si } \sigma_1 < 0$$

$$Y = Y_t \text{ si } \sigma_2 > 0$$

$$Y = Y_c \text{ si } \sigma_2 < 0$$
(4.9)

Si las cargas no están aplicadas en ejes de ortotropía, el criterio de rotura equivalente expresado en tensiones pasaría a ser:



$$\frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma^2}$$
(4.10)

#### 4.3.4 CRITERIO DE TSAI-WU

El criterio de Tsai-Wu es más complicado y menos conservador que el criterio de Tsai-Hill, sin embargo, se aproxima más a los resultados experimentales. Tiene la siguiente forma:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1$$
(4.11)

Donde:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}$$

$$F_6 = 0$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$$

$$F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c}$$

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}$$
(4.12)

En ausencia de otra información se suele estimar el parámetro  $F_{12}$  mediante la siguiente ecuación :

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}} ; -0,5 < F_{12}^* < 0 \quad (4.13)$$

Entre los cuatro criterios de rotura, el criterio de tensión máxima y de deformación máxima son los más apropiados para comportamientos frágiles, típicamente para el primer cuadrante de la envolvente de rotura. Los criterios basados en una teoría de rotura interactiva, tales como el de Tsai-Hill o Tsai-Wu, se aplican más para comportamientos dúctiles bajo esfuerzos cortantes o de compresión.

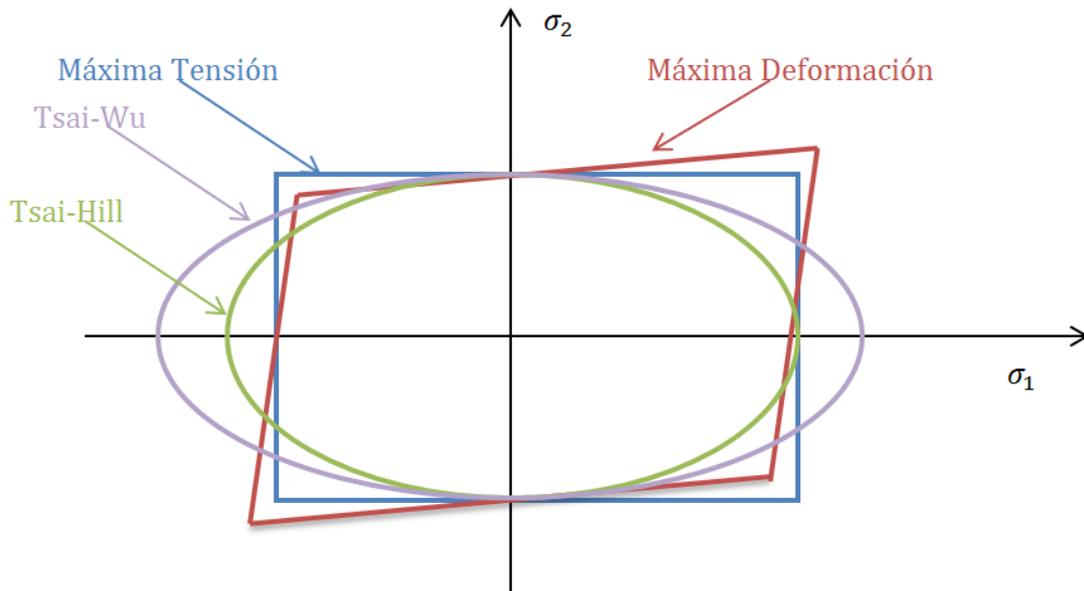


Figura 4.3 Envoltentes de los criterios de rotura

Según la figura 4.2 el criterio de máxima tensión es más conservador que el criterio de máxima deformación en el primer y tercer cuadrante, y menos conservador en el segundo y cuarto cuadrante. El criterio de Tsai-Hill es más conservador que el criterio de Tsai-Wu en general. Para el proyecto se emplea el criterio de Tsai-Hill para determinar la rotura de las láminas. La elección de un criterio conservador garantiza la seguridad del diseño. Para el proyecto se considera la rotura total del árbol cuando se rompe la primera lámina.

## 4.4 CAPACIDAD DE TRANSMISIÓN DEL PAR

### 4.4.1 LEY DE HOOKE GENERALIZADA

La ley de Hooke generalizada crea una relación lineal de tensión-deformación para un material anisótropo a partir de la teoría de elasticidad. Esta ley se puede expresar en forma matricial según la siguiente expresión:

$$\{\sigma_{ij}\} = [Q_{ij}]\{\varepsilon_{ij}\} \text{siendo } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.14)$$

Donde  $[Q_{ij}]$  recibe el nombre de la matriz de rigidez. Para un material genérico, esta matriz tiene 36 componentes para definir completamente el material, según la expresión 4.15:

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Sin embargo, por consideraciones energéticas, la matriz de rigidez es simétrica:

$$[Q_{ij}] = [Q_{ji}] \text{ siendo } i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4.16)$$

En este diseño, dado que el espesor de la pared del árbol de transmisión es pequeño, y no está aplicada ninguna fuerza fuera del plano, el problema se puede simplificar a un problema de tensión plana. En estado de tensión plana, la ley de Hooke generalizada se simplifica y se puede expresar en la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [Q] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Y la matriz de rigidez, después de la simplificación, tiene la siguiente forma:

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La matriz  $[Q_{ij}]$  está expresada en ejes locales. Para convertir esta matriz en ejes globales se necesita operar con la matriz de transformación de forma que:

$$\{\sigma'_{ij}\} = [\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon'_{ij}\} \text{ siendo } i, j = 1, 2, 6 \quad (4.19)$$

Donde:

$$[\bar{Q}_{ij}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Operando, sale que:

$$\begin{aligned}
 \overline{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2; \\
 \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})c^2s^2 + Q_{12}(c^4 + s^4); \\
 \overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})cs^3; \\
 \overline{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})c^2s^2; \\
 \overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})sc^3; \\
 \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})c^2s^2 + Q_{66}(c^4 + s^4);
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

En las expresiones anteriores:  $c=\cos\theta$   $s=\sen\theta$ .

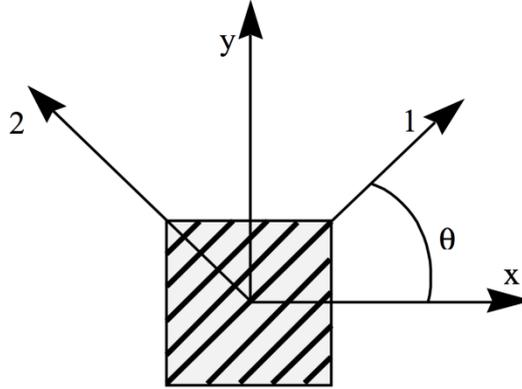


Figura 4.4 Ángulo de la fibra [32]

## 4.4.2 TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADOS

Según la teoría clásica de las placas laminadas, la ecuación constitutiva se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

La forma completa de la anterior expresión es:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{4.23}$$

Las fuerzas y los momentos están acoplados por la matriz  $[B]$ . Están definidos por unidad de longitud del lado sobre el que actúan y los sentidos positivos son los que se indican en la figura 4.4. Dado que los momentos dependen de las coordenadas del punto de la placa, aparecen esfuerzos cortantes, expresados por unidad de longitud.

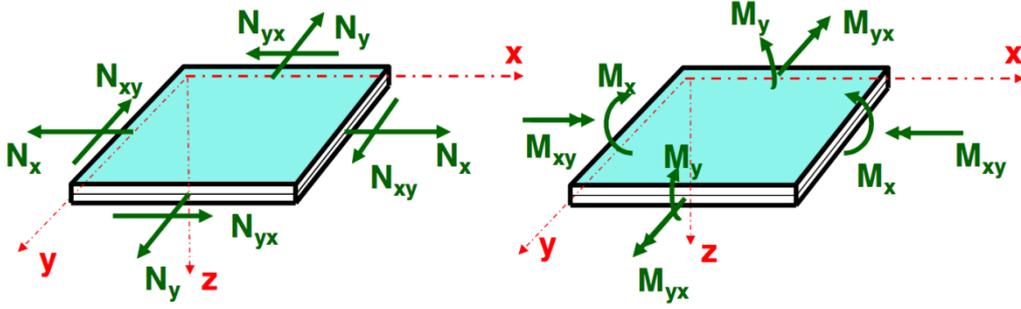


Figura 4.5 Criterio de signos [32]

Según la expresión 4.23, las fuerzas y los momentos están acoplados por la matriz  $[B]$ . Esta ligadura complica el cálculo, sin embargo, si se trata de un laminado simétrico respecto al plano medio del laminado en cuestión, se cumple que:

$$[B_{ij}] = 0 \quad (4.24)$$

Bajo la condición 4.24, la matriz  $[B]$  es nula y las fuerzas y los momentos se pueden calcular separadamente:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} [A_{ij}] &= \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k t_k \\ [B_{ij}] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D_{ij}] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Se pueden hallar las deformaciones a partir de los esfuerzos invirtiendo las expresiones 4.25 y 4.26:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.30)$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.31)$$

A partir de los cálculos anteriores, se sacan las tensiones en cada lámina en ejes globales, según la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Donde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Para hallar las tensiones de cada lámina en los ejes locales, se aplica la matriz de transformación inversa:

$$\{\sigma\}_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} \{\sigma\}'_k \quad (4.34)$$

Las fuerzas que sufre un árbol de transmisión con sección hueca, sometido al par torsor y considerando la fuerza centrífuga, resultan:

$$\begin{aligned} N_x &= 0 \\ N_y &= 2t\rho r^2\omega^2 \\ N_{xy} &= \frac{T}{2\pi r} \end{aligned} \quad (4.35)$$

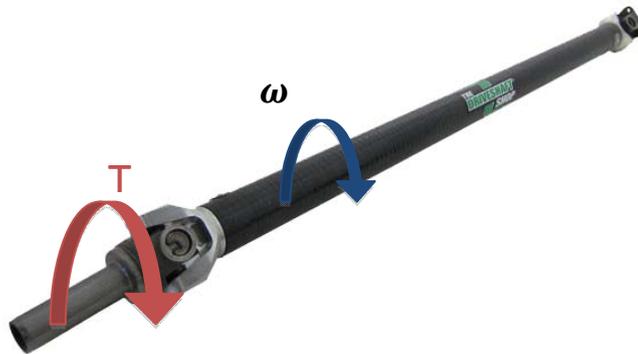


Figura 4.6 Solicitaciones de un árbol de transmisión [8]

### 4.4.3 CONSTANTES INGENIERILES

Para poder sacar las constantes ingenieriles del laminado, hace falta calcular la tensión media del laminado  $\{\bar{\sigma}\}$  de la siguiente forma:

$$\{\bar{\sigma}\} = \frac{1}{h} \{N\} = \frac{1}{h} [A] \{\varepsilon^0\} \quad (4.36)$$

Invirtiendo la ecuación 4.36 se sacan las deformaciones del plano medio del laminado:

$$\{\varepsilon^0\} = h[a] \{\bar{\sigma}\} \quad (4.37)$$

Aplicando sólo  $\bar{\sigma}_x$  ( $\bar{\sigma}_y=0$  y  $\bar{\tau}_{xy}=0$ ), se calcula la constante  $E_x$ :

$$E_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{\varepsilon_x^0} = \frac{1}{ha_{11}} = \frac{|A|}{h(A_{22}A_{66} - A_{26}^2)} \quad (4.38)$$

Aplicando sólo  $\bar{\sigma}_y$  ( $\bar{\sigma}_x=0$  y  $\bar{\tau}_{xy}=0$ ), se calcula la constante  $E_y$ :

$$E_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{\varepsilon_y^0} = \frac{1}{ha_{22}} = \frac{|A|}{h(A_{11}A_{66} - A_{16}^2)} \quad (4.39)$$

Aplicando sólo  $\bar{\tau}_{xy}$  ( $\bar{\sigma}_x=0$  y  $\bar{\sigma}_y=0$ ), se calcula la constante  $G_{xy}$ :

$$G_{xy} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{\gamma_{xy}^0} = \frac{1}{ha_{66}} = \frac{|A|}{h(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)} \quad (4.40)$$

Donde  $|A|$  es la determinante de la matriz  $[A_{ij}]$ , y tiene la siguiente expresión:

$$|A| = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)A_{66} + 2A_{12}A_{26}A_{16} - A_{11}A_{26}^2 - A_{22}A_{16}^2 \quad (4.41)$$

## 4.5 RESISTENCIA A PANDEO

En el capítulo 3 se ha calculado la resistencia a pandeo de un árbol de transmisión convencional según la teoría de la viga de Timoshenko. Según esta teoría, para un eje largo, la resistencia a pandeo tiene la siguiente forma:

$$T_{CR} = (2\pi r^2 t) \tau_{CR} = (2\pi r^2 t) \frac{1}{3\sqrt{2}(1 - \nu^2)^{3/4}} E \left(\frac{t}{r}\right)^{3/2} \quad (4.42)$$

Sin embargo, esta ecuación no puede aplicarse directamente en un eje de transmisión de materiales compuestos, porque no son materiales isótropos como los metales, si no tiene propiedades ortótropas. Una variante de esta ecuación, ampliamente utilizada por los diseñadores, tiene la siguiente forma:

$$T_{CR} = (2\pi r^2 t)\tau_{CR} = (2\pi r^2 t)(0,272)(E_x E_y^3)^{0,25} \left(\frac{t}{r}\right)^{3/2} \quad (4.43)$$

Se observa la coherencia que guardan las dos ecuaciones. Según la ecuación 4.43, la resistencia a pandeo depende fuertemente del espesor y el módulo elástico en la dirección circunferencial.

## 4.6 FRECUENCIA NATURAL

La fórmula para calcular la frecuencia natural de un eje de materiales compuestos, tiene la misma forma que los ejes convencionales. En el capítulo 3 se ha calculado la frecuencia natural según el modelo de Euler-Bernoulli (E-B):

$$f_n = \frac{\pi p^2}{2L^2} \sqrt{\frac{E_x I_x}{\rho A}} = \frac{\pi p^2}{2L^2} \sqrt{\frac{E_x \pi (r_0^4 - r_i^4)}{4\rho A}} \quad (4.44)$$

$p=1$  cuando se trata de la frecuencia natural del primer modo de vibración.

Para obtener la velocidad crítica de giro  $N_{cr}$ , se utiliza la siguiente expresión:

$$N_{cr} = 60f_n \quad (4.45)$$

En este proyecto, sólo interesa estudiar la frecuencia natural del primer modo de vibración, dado que esta frecuencia es la más baja. Una vez obtenido su valor, se puede buscar rápidamente los restantes, multiplicándolo por el factor  $p^2$ , siendo  $p=2,3,4...$ etc. De esta manera, la frecuencia del segundo modo es cuatro veces mayor que la del modo fundamental, la frecuencia del tercer modo es nueve veces mayor, así sucesivamente.

Por otro lado, debido a que la frecuencia del primer modo de vibración es la más baja, con que la máxima frecuencia de funcionamiento (o la máxima velocidad de giro) del árbol no supere este valor, se puede garantizar la validez del árbol para el resto de los modos de vibración.

## 4.7 EFECTOS HIGROTÉRMICOS

La mayoría de los materiales compuestos con resina epoxi requieren un proceso de curado para adquirir las propiedades mecánicas deseadas. La temperatura del curado de las resinas epoxi varía entre los 100 °C y los 150°C. Durante este proceso la resina se cura desprendiendo la humedad contenida. Cuando el laminado se saca del horno la diferencia entre la temperatura y la humedad de los dos entornos introduce unas tensiones en el laminado. Este efecto se denomina efecto higrotérmico. Generalmente para cuantificar el efecto higrotérmico se hacen las dos siguientes suposiciones:

- La temperatura del curado es la temperatura para la que las fibras están libres de tensión.
- El contenido de humedad es nulo dentro del horno.

Para hallar el contenido de humedad dentro de un material compuesto se parte del contenido máximo de humedad  $C_{\infty}$  [15], que se obtiene con la siguiente ecuación:

$$C_{\infty} = a \left( \frac{HR}{100} \right)^b \quad (4.46)$$

Donde HR significa humedad relativa y los valores típicos de a y b para los materiales carbono/epoxi son  $a=0,015$  y  $b=1$ . El siguiente mapa muestra la humedad relativa típica en el territorio de España. Se supone que el árbol de transmisión se comercializa en toda España, por lo que se toma una humedad relativa promedio igual a  $HR=70\%$ , por lo tanto:

$$C_{\infty} = 0,015 \left( \frac{70}{100} \right)^1 = 0,0105 \quad (4.47)$$



Figura 4.7 Mapa de la distribución de HR en España [34]

Sin embargo, normalmente la humedad máxima no es absorbida totalmente por el laminado. La humedad contenida en una lámina depende del espesor del laminado, la posición de la lámina dentro del laminado, el tiempo de exposición y el coeficiente de difusión. Típicamente la humedad contenida en un laminado tiene el siguiente perfil:

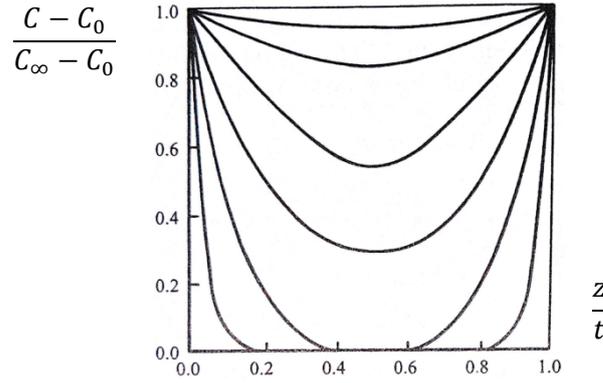


Figura 4.8 Perfil del contenido específico de humedad [15]

Con un coeficiente de difusión de humedad bajo y un tiempo de difusión corto, la concentración de la humedad dentro del laminado disminuye rápidamente. En caso contrario, se obtiene una distribución más uniforme del contenido de humedad.  $C_0$  es el contenido de humedad inicial (en este caso se supone que su valor es cero), y se toma un valor promedio de  $C/C_\infty = 0,5$ . Con la fórmula 4.48 se saca que el contenido de humedad del laminado es igual a 0,005.

Se toma 20 °C como la temperatura de servicio, y 120 °C como la temperatura del curado.

Para incorporar el efecto higrotérmico en la teoría clásica de laminado se recurre al concepto de cargas equivalentes:

$$\{N^E\} = \{N^{MEC}\} + \{N^T\} + \{N^M\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa\} \quad (4.48)$$

$$\{M^E\} = \{M^{MEC}\} + \{M^T\} + \{M^M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa\} \quad (4.49)$$

Donde las cargas generadas por la temperatura y la humedad se hallan por la siguiente forma:

$$\{N^T\} = \Delta T \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \{\alpha\}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (4.50)$$

$$\{N^M\} = C \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \{\beta\}_k (z_k - z_{k-1}) \quad (4.51)$$

$$\{M^T\} = \frac{\Delta T}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \{\alpha\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (4.52)$$

$$\{M^M\} = \frac{C}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]_k \{\beta\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (4.53)$$

Dado que se trata de laminados simétricos, la matriz  $[B]$  es nula y las deformaciones y curvaturas se pueden calcular separadamente según las fórmulas 4.28 y 4.29, sustituyendo la carga mecánica por la carga equivalente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Nx^E \\ Ny^E \\ Nxy^E \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Mx^E \\ My^E \\ Mxy^E \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

Por lo tanto, para sacar el estado de tensiones de cada lámina en ejes globales se utiliza la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Para convertir las tensiones en ejes globales a ejes locales, se utiliza la expresión 4.34.

$$\{\sigma\}_k = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \{\sigma'\}_k \quad (4.34)$$

Con el estado tensional de cada lámina en ejes materiales se puede aplicar el criterio de rotura para determinar la validez del diseño. Como ya se ha comentado se utilizará el criterio de Tsai-Hill.

## 4.8 PROCESO DE FABRICACIÓN

Para la fabricación del árbol de transmisión, el método común es el proceso de Filament Winding. El proceso de Filament Winding consta de una mandril metálico que hace función de molde interior, el mandril realiza un movimiento de rotación sobre su eje, sobre el cual se aplica las materias primas mediante un cabezal que desplaza longitudinalmente, dando ida y vueltas. Variando la velocidad de ese movimiento se puede conseguir distintos ángulos de enrollamiento. El espesor de la pared de la tubería se consigue mediante el número de avances que realiza el cabezal.

Existen dos maneras de realizar el proceso que son el proceso húmedo (Wet Winding) y el proceso seco (Dry Winding). En el proceso húmedo las fibras pasan por un depósito de resinas inmediatamente antes de ser enrollado. En el proceso seco se utiliza las fibras preimpregnadas. Ambos procesos requieren un curado para adquirir las propiedades deseadas. Generalmente el proceso húmedo permite utilizar los materiales menos costoso mientras que el proceso seco produce un producto con la resina mejor distribuido dentro del laminado.

La figura 4.8 muestra un esquema del funcionamiento de este proceso, en el que las fibras pasan previamente por un depósito de resinas, antes de ser bobinado. El carril mueve a lo largo de la guía y, mediante el movimiento giratorio del mandril se consigue el enrollamiento.

Mediante el proceso de Filament Winding, se puede conseguir una gran variedad de productos, tales como:

- Palos de golf.
- Componentes de bicicleta.
- Árbol de transmisión.
- Mástiles de barcos.
- Fuselajes de aviones.
- Depósito de gas o de agua.

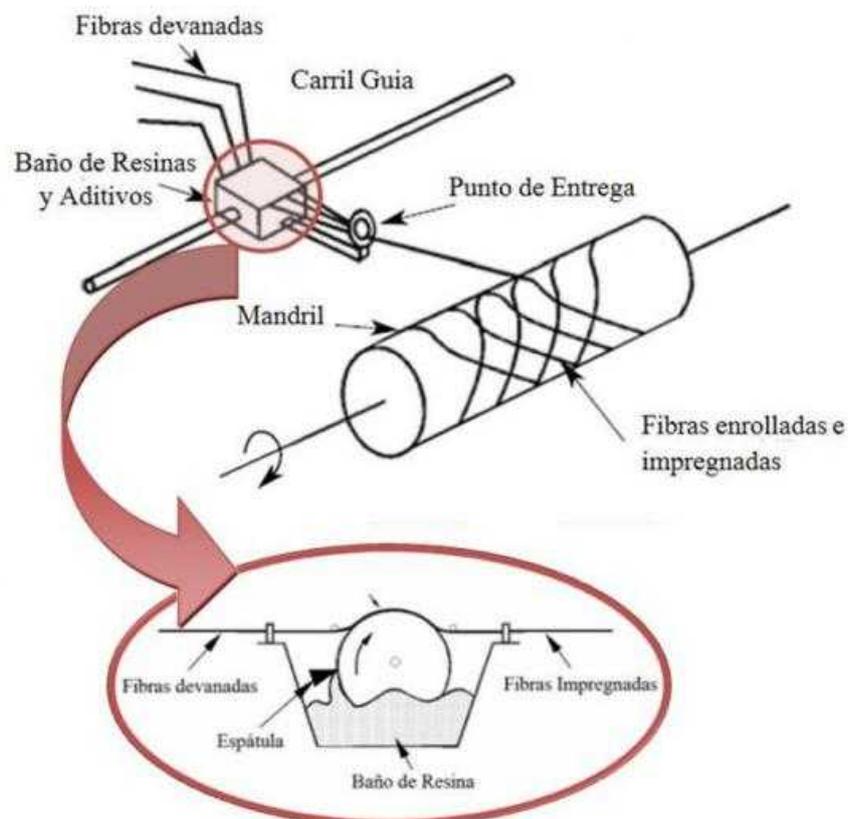


Figura 4.9 Funcionamiento de Filament Winding [35]

El Filament Winding presenta ventajas sobre todo en los productos que tiene sección hueca. Las ventajas principales son:

- Peso: una ventaja clave para el proceso de Filament Winding es que, dado que todos los productos tienen sección hueca, son extremadamente ligeros, comparados con las resistencias mecánicas que poseen. Además, productos ligeros significa menor coste de materia prima, de transporte y de almacenamiento.

- **Diseño:** debido a que este proceso permite un cambio sencillo en el diseño y el proceso de fabricación, se puede conseguir gran variedad de productos con distinta flexibilidad, rigidez y resistencias.
- **Automatización:** el proceso de Filament Winding se puede realizar en alta velocidad, utilizando máquinas controladas por el ordenador (CNC), para la producción rápida de lotes uniformes. Además, la incorporación de la técnica CNC permite la fabricación de piezas de geometría no circulares, para las aplicaciones más sofisticadas. Dado que el proceso puede ser altamente automatizado, permite la producción en escala de piezas complejas, lo que disminuye el coste de fabricación.
- **Rentabilidad:** mediante el uso de materiales de bajo costo y la automatización del proceso, los costos de producción se reducen sustancialmente. Este proceso requiere menos material, menos trabajo, y menor coste de transporte, comparado con otros métodos de fabricación.

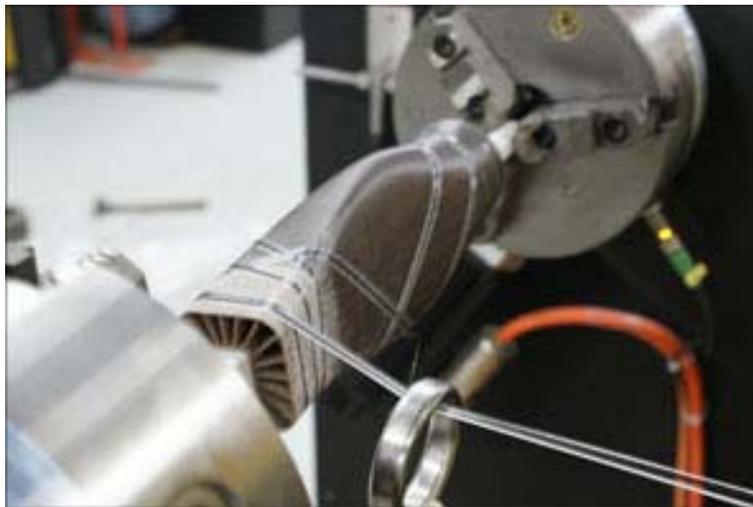


Figura 4.10 Fabricación de piezas no circulares [36]

Las dos figuras muestran una máquina de Filament Winding que permite la fabricación automatizada de piezas de materiales compuestos:



Figura 4.11 Máquina CNC para realizar Filament Winding [37]

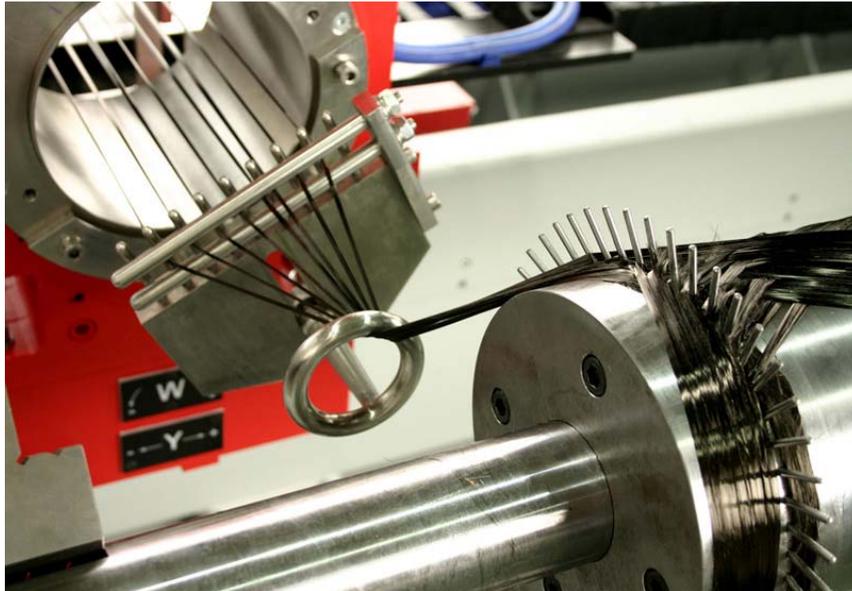


Figura 4.12 Fijación de piezas en máquinas de Filament Winding [37]

## 4.9 COEFICIENTE DE SEGURIDAD

En casi todos los diseños industriales, para garantizar un uso seguro del producto diseñado, se emplea un coeficiente de seguridad. Este coeficiente sirve sobre todo para los casos no preventivos u ocasionales donde pueda haber una carga impulsiva muy grande, o una sobrecarga que exceda al límite establecido, por ejemplo un impacto de una bicicleta contra una pared, o un exceso de pasajeros en un ascensor. En estos casos, si no se ha empleado el coeficiente de seguridad o se ha empleado un coeficiente inadecuado, puede producirse la rotura catastrófica de la estructura, perjudicando la seguridad de los usuarios.

Los valores usados como coeficiente de seguridad, por lo general, provienen de la experiencia empírica o práctica, normalmente están tabulados y contemplados en las normas o literaturas. Pero también se puede aplicar según la experiencia personal del diseñador, en este caso deben tenerse en cuenta varios aspectos, como por ejemplo:

- Frecuencia de uso
- Posibilidad de fallo
- Conocimiento del comportamiento mecánico del material
- Conocimiento del comportamiento a fractura del material
- Grado de importancia de la pieza (ej.: no se utiliza el mismo coeficiente para una pieza estructural que para una pieza no estructural)
- Tipo de uso o servicio (ej.: no se utiliza el mismo coeficiente para un cable para tender la ropa que para un cable para sostener un ascensor)

Como el árbol de transmisión es un elemento estructural crítico, que se encarga de la transmisión de potencia, el coeficiente de seguridad que se va a utilizar también es un aspecto crítico en el diseño. Debido a que el autor de este

proyecto no posee experiencia suficiente para establecer un coeficiente de seguridad adecuado, la determinación de este coeficiente se basará en las investigaciones realizadas por otros autores. A continuación se describirán algunos coeficientes de seguridad utilizados en el diseño de árbol de transmisión:

- Jack A. en su libro *Mechanical Design of Machine Elements and Machines* [38] utiliza un coeficiente de 1.5 para el diseño de un árbol de acero AISI 4340.
- Chowdhuri su obra *Design Analysis of an Automotive Composite Drive Shaft* [39] utiliza un coeficiente de 2 para el árbol de acero y un coeficiente de 3 para el árbol de materiales compuestos.
- R. Srinivasa et al. en la obra *Design of Automobile Driveshaft using Carbon/Epoxy and Kevlar/Epoxy Composites* [40] utiliza un coeficiente de 3 para el árbol de acero y un coeficiente de 6 para el árbol de materiales compuestos
- Gumjadi Sanjay et al. en la obra *Optimal Design and Analysis of a Composite Drive Shaft for an Automobile* [41] utiliza un coeficiente de 2 para el árbol tanto de acero como de materiales compuestos
- Asmamaw Gebresilassie en su obra *Design and Analysis of Composite Drive Shaft for Rear-Wheel Drive Engine* [42] utiliza un coeficiente de 3 para el árbol de materiales compuestos.
- Bhirud Pankaj et al. en la obra *Analysis of drive shaft* [43] utiliza un coeficiente de 2 para el árbol tanto de acero como de materiales compuestos.

Basado en las investigaciones citadas, se decide tomar un valor de 2,5 para el coeficiente de seguridad. Este coeficiente no es demasiado agresivo ni demasiado conservador. Siempre se debe tener en cuenta que, un objetivo fundamental del diseño es la reducción del peso del árbol, un coeficiente demasiado elevado hace que el tamaño del árbol aumente considerablemente, por lo tanto, el peso del mismo. El empleo de este coeficiente garantiza, por un lado, la seguridad del elemento estructural durante el servicio, por otro lado, el aprovechamiento del material.

# CAPÍTULO 5

## UNIÓN HORQUILLA-ÁRBOL

---

### 5.1 DISEÑO DE LA HORQUILLA

El árbol de transmisión no puede transmitir la potencia sin la colaboración de la horquilla. Para estudiar la unión entre la horquilla-árbol, hace falta un estudio previo de la horquilla.

La horquilla es una parte de la junta universal que tiene la función de transmitir el par desde la caja de cambios hasta el árbol de transmisión. Un diseño adecuado garantiza la eficiencia en la transmisión de cargas y la seguridad estructural. El diseño se realizará mediante el programa de simulación numérica ANSYS WORKBENCH. La figura 5.5 muestra el modelo real y la figura 5.6 muestra el modelado de la horquilla.



Figura 5.1 Modelo real de la horquilla [48]

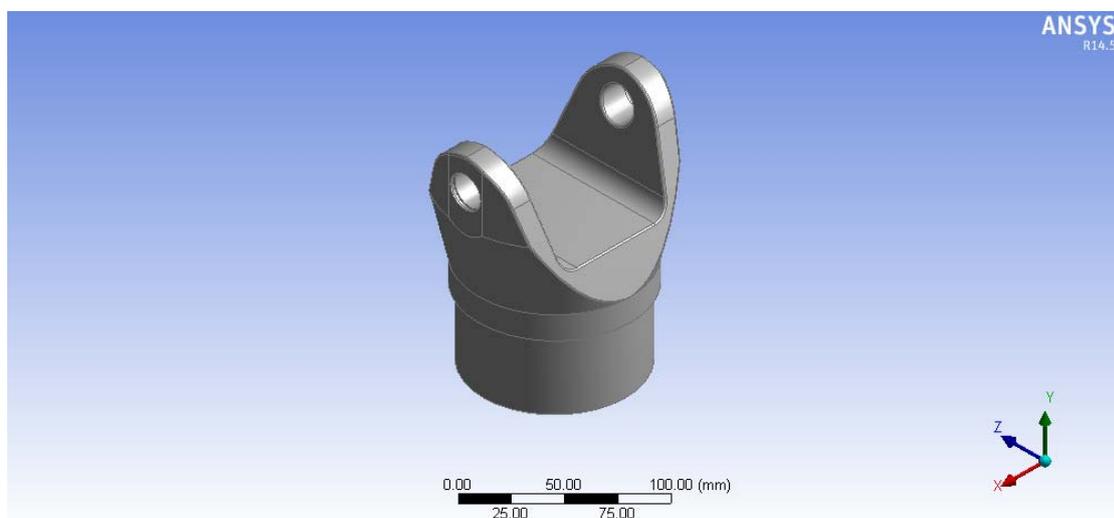


Figura 5.2 Modelado de la horquilla

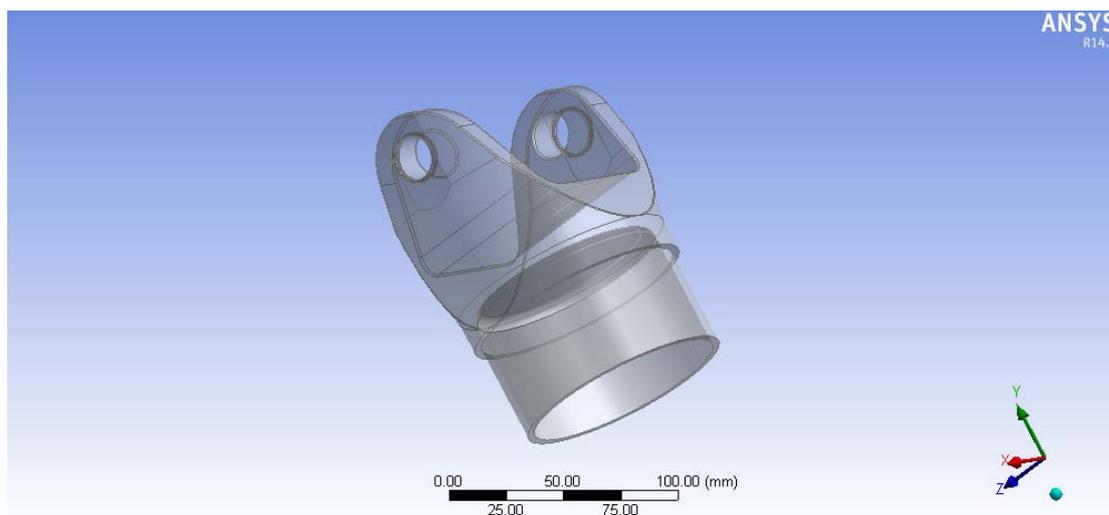


Figura 5.3 Vista de la horquilla

La aleación de aluminio es elegida para el diseño de la horquilla, con el objetivo de minimizar el peso del conjunto horquilla-árbol. Generalmente se utiliza el acero para la fabricación de la horquilla, sin embargo, el acero tiene una densidad elevada ( $9,8 \text{ kg/m}^3$ ) frente a la de la aleación de aluminio (alrededor de  $2,8 \text{ kg/m}^3$ ). No obstante, la sustitución del acero por el aluminio implica un cambio de las propiedades mecánicas de la horquilla, por lo tanto es necesario un análisis para determinar el comportamiento mecánico de la misma, mediante el método de los elementos finitos. Las propiedades estructurales de la aleación de aluminio se muestran en la siguiente tabla:

Aleación de aluminio 6061 T6	
Densidad ( $\text{kg/m}^3$ )	2770
Módulo a tracción (GPa)	71
Coefficiente de Poisson	0,33
Módulo a cortante (GPa)	26,7
Resistencia a tracción (MPa)	280
Resistencia a compresión (MPa)	280
Tensión de rotura (MPa)	310

Tabla 5.1 Propiedades mecánicas de la aleación de aluminio [46]

### 5.1.1 ANÁLISIS MEF DE LA HORQUILLA

Una vez terminado el modelado de la horquilla, se realiza un análisis por el método de los elementos finitos de la misma. El primer paso de este análisis es el mallado.

El tamaño de la malla para la horquilla es 0,005, este mallado fino permite obtener información más detallada de la distribución de tensiones o de deformación. Para la cruceta se ha empleado un mallado grueso de tamaño de 0,2, dado que no interesa, para este proyecto, conocer su comportamiento estructural.

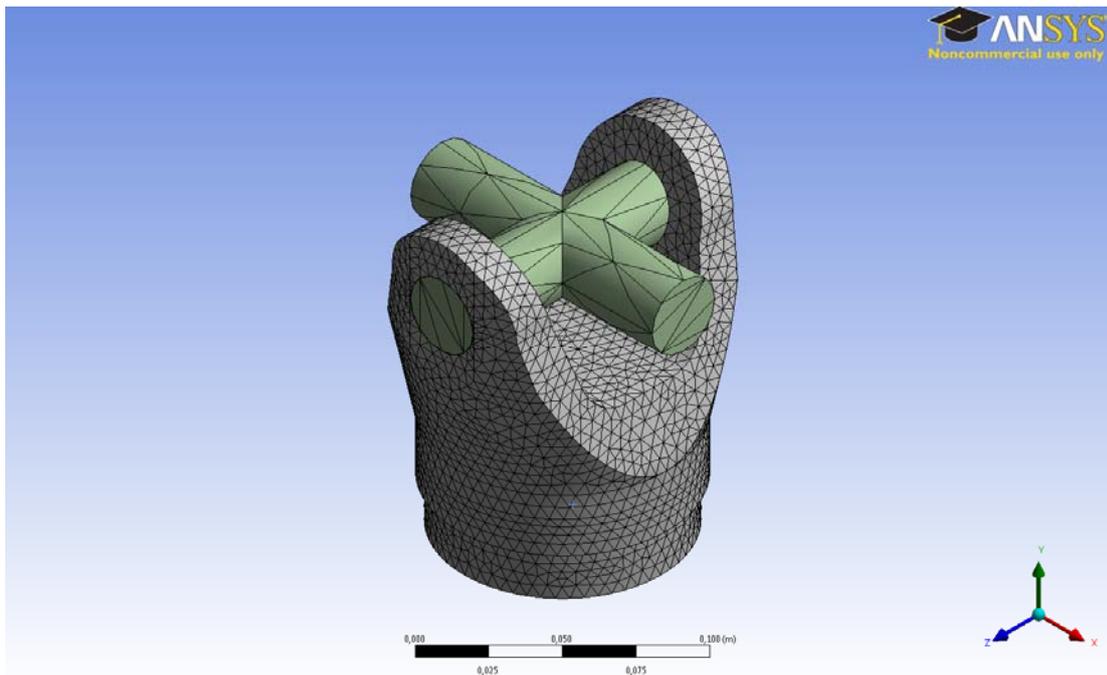


Figura 5.4 Mallado de la horquilla

La horquilla se debe diseñar para la máxima carga de servicio, que en corresponde a un par de 3500 N·m. Esta carga es aplicada a través de la cruceta, como se muestra en la figura 5.5. Para la fijación de la horquilla, se restringe los seis grados de libertad en la base de la misma. El peso de la horquilla, diseñada de aluminio, es 1,37 kg.

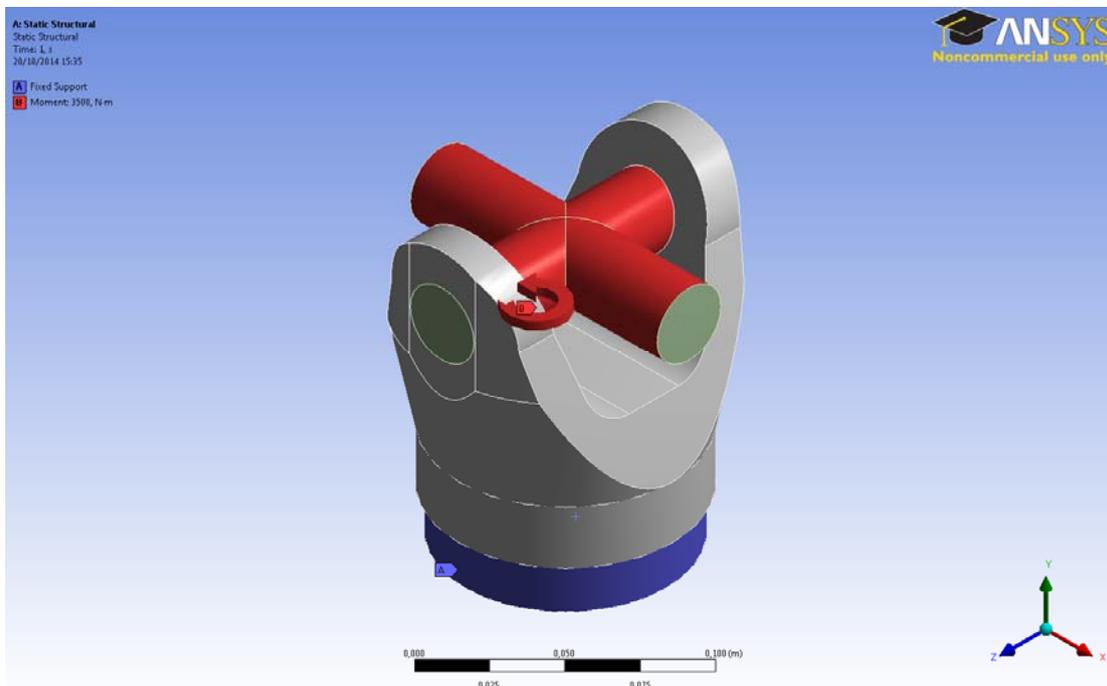


Figura 5.5 Aplicación de la carga y sujeción de la horquilla

La figura 5.6 muestra la deformación total del conjunto cruceta-horquilla bajo la carga de servicio. Para una mejor visualización, se ocultará la cruceta, dejando visible sólo la horquilla.

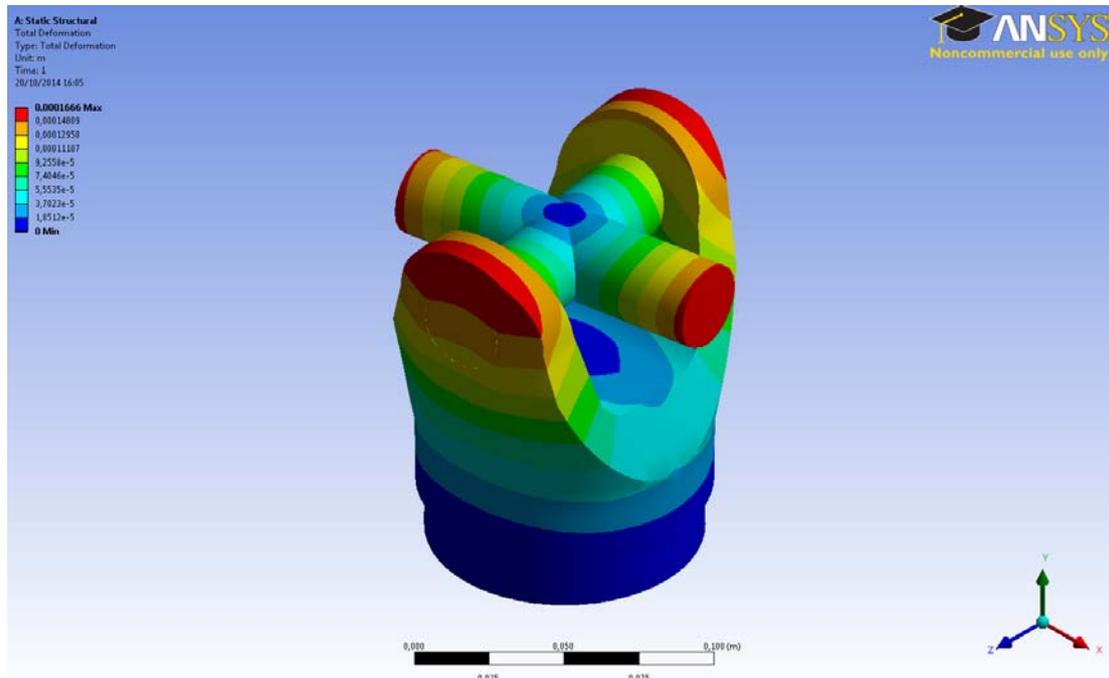


Figura 5.6 Horquilla bajo carga

En la figura 5.7 se muestra la distribución de la deformación equivalente en la horquilla. La máxima deformación se produce cerca de la base de la horquilla y tiene un valor de  $21,08 \times 10^{-4}$ . En la figura 5.8 se muestra una vista ampliada que permite visualizar el punto donde se produce la máxima deformación.

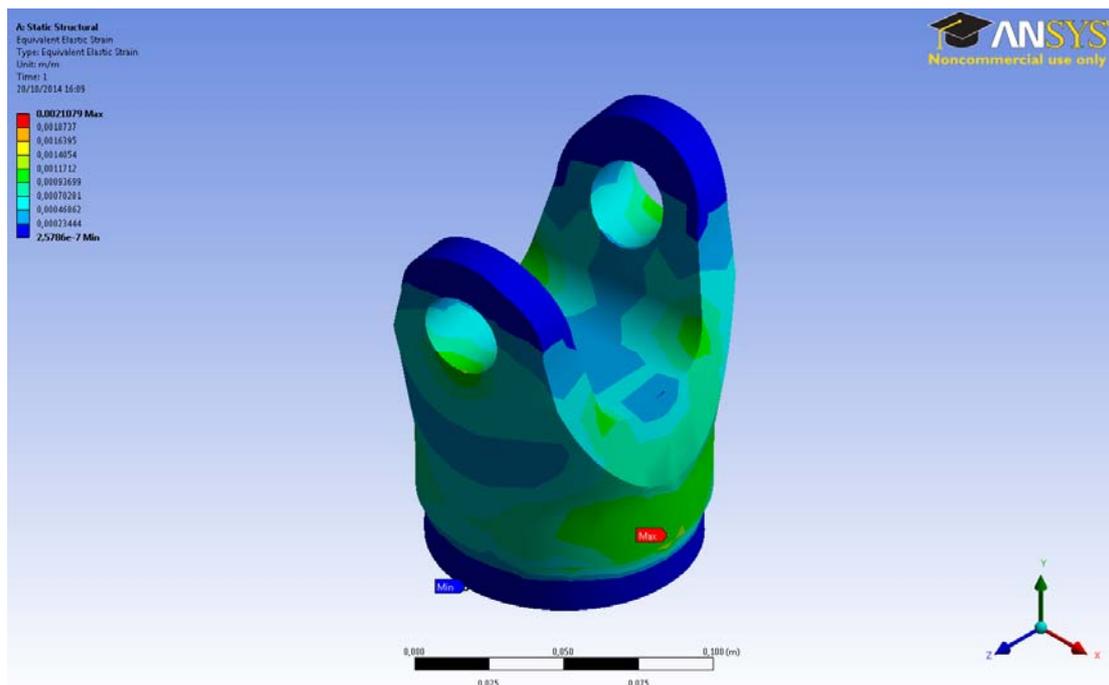


Figura 5.7 Distribución de la deformación equivalente

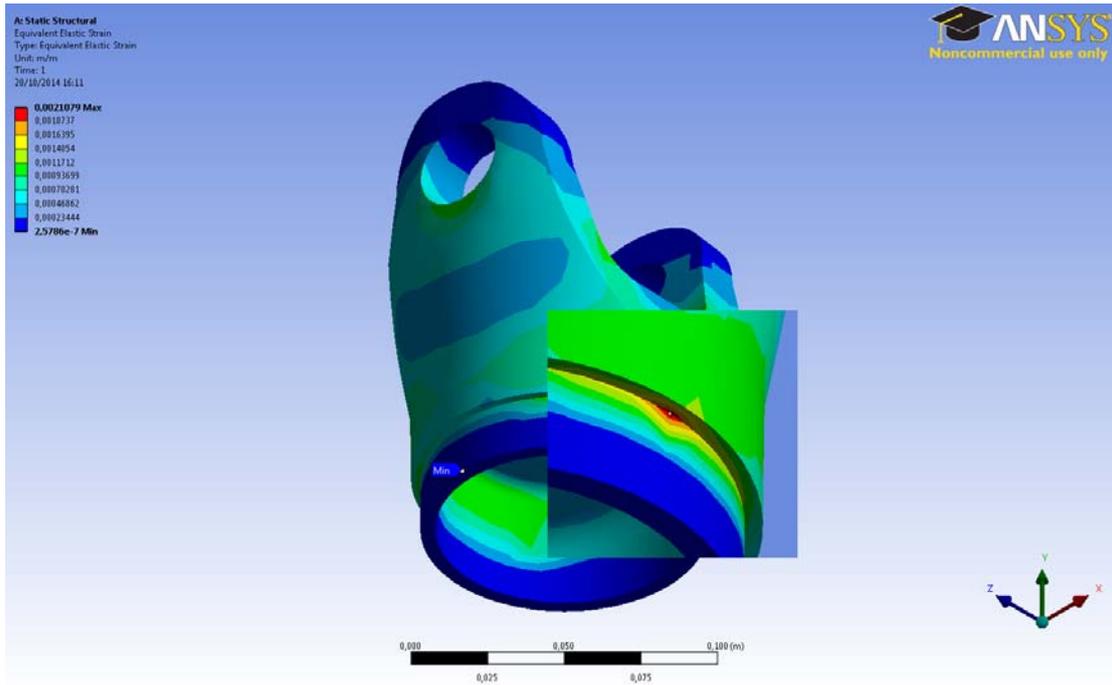


Figura 5.8 Punto donde se produce la máxima deformación equivalente

En la figura 5.9 se muestra la distribución de tensiones equivalentes de Von Mises en la horquilla. La máxima tensión se produce cerca de la base de la horquilla y tiene un valor de 123,3 MPa. Este valor está mucho debajo de la resistencia a tracción de la aleación de aluminio (280 MPa), por lo tanto se puede concluir que el diseño de la horquilla con este material es válido.

En la figura 5.8 se muestra una vista ampliada que permite visualizar el punto donde se produce la máxima tensión.

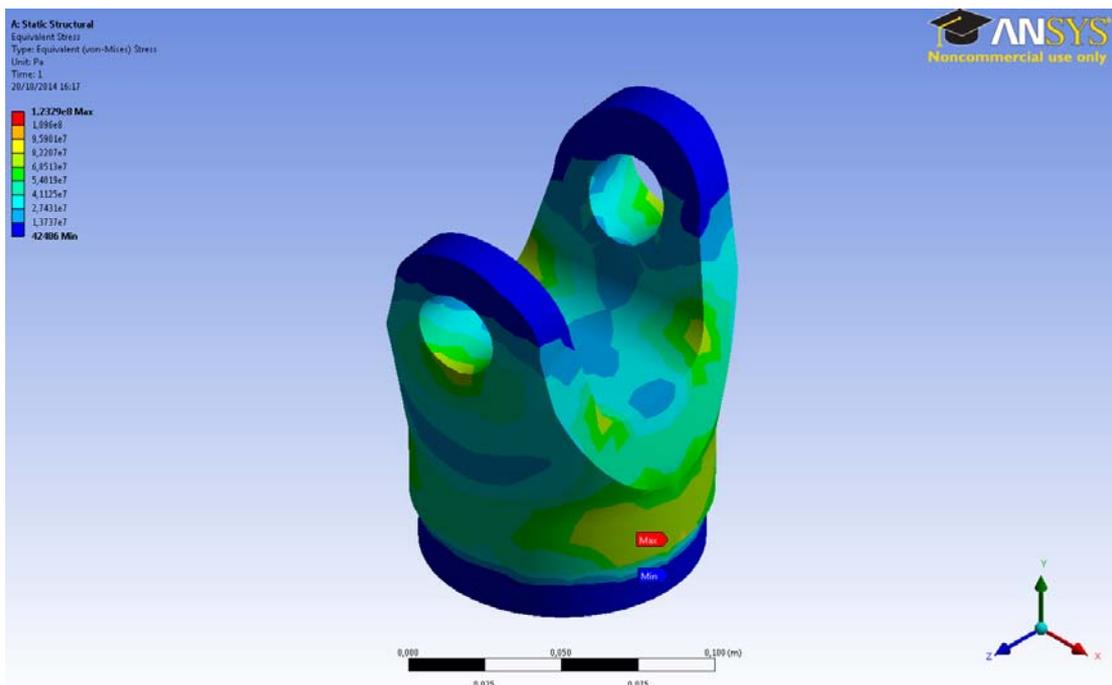


Figura 5.9 Distribución de tensiones equivalentes

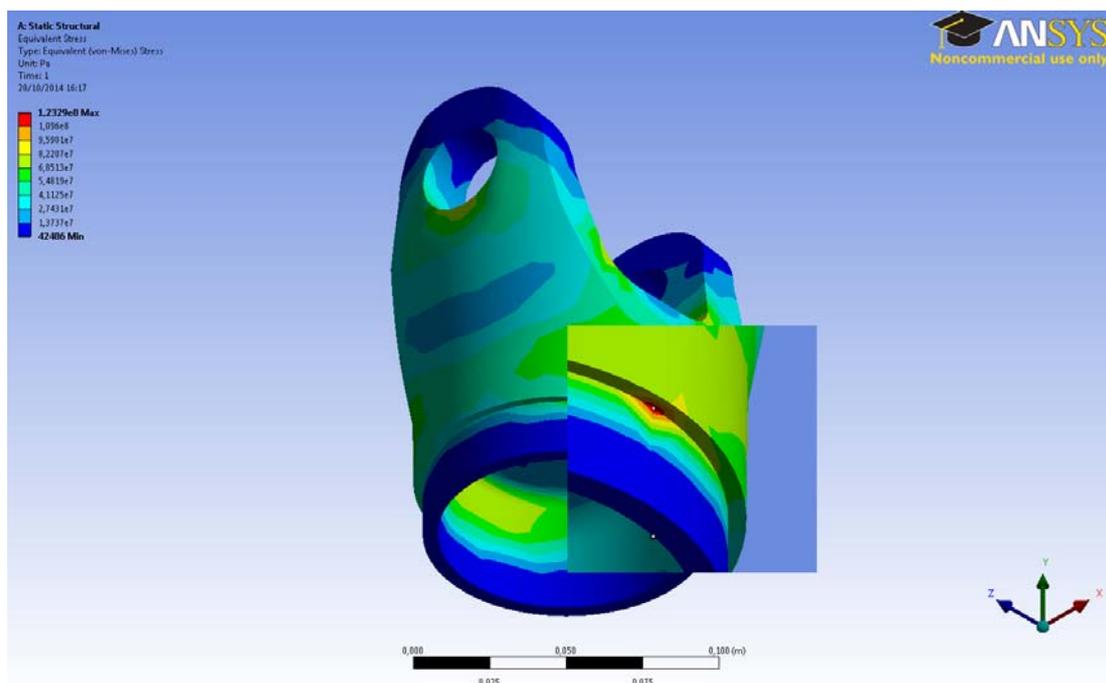


Figura 5.10 Punto donde se produce la máxima tensión equivalente

Una vez terminado el diseño de la horquilla, se puede realizar el diseño de la unión horquilla-árbol, que se describirá a continuación.

## 5.2 DISEÑO DE LA UNIÓN

La unión de los materiales compuestos se realiza principalmente mediante dos tipos de métodos, que son la unión atornillada y la unión adhesiva. En la práctica se utiliza uno de estos dos métodos o la combinación de ambos según las aplicaciones. Teóricamente las uniones adhesivas pueden ser aplicadas en todo tipo de materiales compuestos, sin embargo, muchas aplicaciones evitan unión adhesiva cuando las piezas están sometidas a grandes tensiones. Hay otros casos en los que la sección a unir es tan grande que se precisan máquinas y métodos específicos de curado, en estos casos las uniones atornilladas son elegidas por ser más económicas.

En la ingeniería aeronáutica es frecuente utilizar la combinación de ambos métodos, mientras que en la ingeniería automovilística se utiliza principalmente la unión adhesiva [44]. En el caso de los árboles de transmisión de materiales compuestos, la mayoría de los diseñadores utiliza la unión adhesiva para no introducir concentración de tensiones y mantener la integridad estructural del árbol. Por ejemplo, Mohammad Reza et al. utilizan la unión adhesiva para un árbol de Carbono/Epoxi con horquilla de acero inoxidable. Won Tae Kim y Dai Gil Lee estudian el comportamiento de la unión adhesiva frente a distintas configuraciones de las superficies a unir. R. Poul et al. utilizan la unión adhesiva en un árbol de transmisión para el sistema impulsor de un avión. Para información más detallada véase las referencias [45], [46] y [47].

A continuación se describen las principales características de cada uno de los dos métodos:

**Uniones atornilladas:** pernos, remaches hechos de titanio, de acero inoxidable y de aluminio son utilizados para este tipo de unión. Antes de aplicar la unión atornillada se deben tomar las siguientes consideraciones:

- Los taladros en materiales compuestos interrumpen la integridad estructural de la fibra, debilitando localmente las resistencias mecánicas en los alrededores.
- Las concentraciones de tensión introducidas por el taladro y la fuerza de apriete pueden causar la delaminación, degradando las propiedades mecánicas del material.
- Posible corrosión galvánica en las uniones.
- Facilita la absorción de la humedad en las uniones.
- El peso de las piezas metálicas para la unión atornillada.

**Uniones adhesivas:** los materiales adhesivos más empleados son la resina epoxi, acrílicos y uretanos. Dentro de estos tres materiales, la resina epoxi es especialmente adecuada cuando los materiales compuestos a unir son de matriz epoxi. Generalmente este tipo de uniones no necesita un taladro o mecanizado previo. Sin embargo, se precisa una preparación cuidadosa de las superficies a unir para conseguir una buena calidad de unión, que consiste en:

- Limpieza de la superficie: esta limpieza garantiza la eliminación de todo tipo de contaminantes que se encuentra en la superficies de los sustratos. La presencia de los contaminantes repercute negativamente en la adhesión y el mojado del adhesivo, produciendo fallo de la unión. Para esta limpieza se utilizan solventes orgánicos o limpiadores acuosos.
- Pre-tratamiento de las superficies: el pre-tratamiento tiene por objeto la eliminación de la capa que se encuentra firmemente unida a la material base, para mejorar el mojado y la adhesión del adhesivo.
- Post-tratamiento: este tratamiento consiste en conjunto de productos químicos que se utilizan con el adhesivo durante la fase de aplicación. Tiene por objeto la creación de superficies activadas para el adhesivo, la generación de superficies compatibles con la resina o reducir la rugosidad de la superficie.

A la hora de la elección un método de unión en este proyecto, se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las cargas que transmite un árbol de transmisión no son excesivamente elevadas.
- El tamaño del árbol es relativamente pequeño.
- Es importante la minimización del peso.
- Siendo un elemento estructural crítico de un automóvil, se trata de evitar o disminuir al máximo el fenómeno concentración de tensiones, para evitar posibles fallos producidos por ello.

Como comentado anteriormente, los taladros introducen concentración de tensiones e interrumpen la integridad estructural de la pieza. Normalmente los concentradores de tensiones son puntos más débiles de la estructura. La figura 5.1 muestra los distintos modos de rotura en una unión atornillada. Tomando las anteriores consideraciones, se elige la unión adhesiva para el diseño.

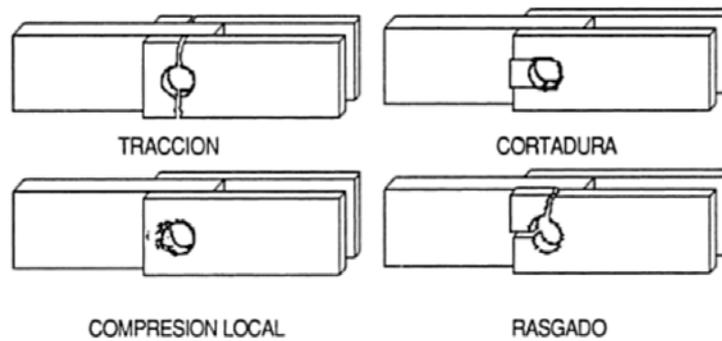


Figura 5.11 Modos de rotura en una unión atornillada [14]

## 5.2.1 DISEÑO ANALÍTICO

Para obtener la ecuación dominante de la distribución de la tensión cortante en una unión adhesiva se hacen dos hipótesis para simplificar el cálculo [Adams and Peppiatt, 1977]:

- El material adhesivo está sometido solo a tensión cortante  $\tau_{r\theta}$ .
- Las estructuras a unir están sometidas solo a tensión cortante  $\tau_{\theta z}$ .

La ecuación dominante que se obtiene bajo estas dos hipótesis es válida también para los materiales ortotrópicos. La figura 5.1 muestra un esquema de la unión horquilla-árbol y las nomenclaturas.

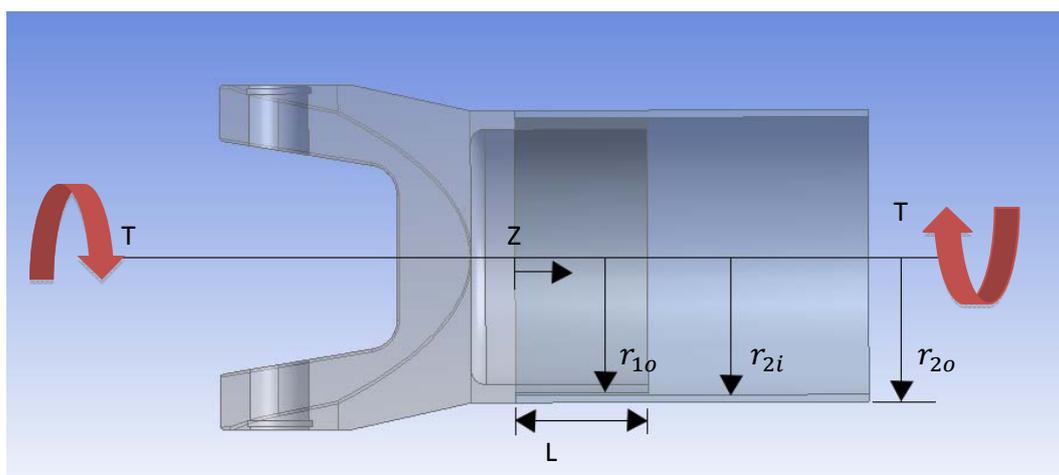


Figura 5.12 Esquema y nomenclaturas de la unión horquilla-tubo

Las propiedades del árbol:	$G_2, J_2, \tau_{2i}, \gamma_{2i}$
Las propiedades del adhesivo:	$G_a, \tau_a, \gamma_a$
Las propiedades de la horquilla:	$G_1, J_1, \tau_{1o}, \gamma_{1o}$

$$r_a \text{ es el radio promedio del adhesivo: } r_a = \frac{r_{1o} + r_{2i}}{2} \quad (5.1)$$

$$\eta \text{ es el espesor del adhesivo: } \eta = r_{2i} - r_{1o} \quad (5.2)$$

Dai Gil Lee et al [15] define la ecuación dominante de la distribución de tensión cortante de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{2\pi a^2 r_{1o} G_a}{G_1 J_1 \eta} \quad (5.3)$$

$$\Phi = \frac{G_2 J_2 r_{1o}}{G_2 J_2 r_{1o} + G_1 J_1 r_{2i}} \quad (5.4)$$

$$\alpha = \left(\frac{\delta}{\Phi}\right)^{0,5} \quad (5.5)$$

$$\tau_a = \frac{T\alpha}{2\pi r_a} \left\{ \left[ \frac{1 - \Phi(1 - \cosh \alpha L)}{\sinh \alpha L} \right] \cosh \alpha z - \Phi \sinh \alpha z \right\} \quad (5.6)$$

Para la unión se utiliza el material adhesivo IPCO 9923. Es una resina epoxi que tiene las siguientes propiedades:

IPCO 9923	
Módulo a tracción (GPa)	1,30
Módulo a cortante (GPa)	0,46
Resistencia a tracción (MPa)	39,5
Resistencia a cortante (MPa)	30
Máxima deformación por cortante (%)	23,5
Coefficiente Poisson	0,41
Temperatura de curado (°C)	80,0
Tiempo de curado (min)	270

Tabla 5.2 Propiedades del adhesivo IPCO 9923 [15]

La siguiente tabla muestra las especificaciones del problema:

	Adhesivo (IPCO 9923)	Árbol (USN150)	Horquilla (Aluminio)
Módulo a cortante (GPa)	0,46	21,34	26,69
Momento inercia polar ( $10^{-6} \text{m}^4$ )	---	1,905	9,818
Espesor (mm)	$\eta$	3	3
Radio interior (mm)	$47 - \eta$	47	$44 - \eta$
Radio exterior (mm)	47	50	$47 - \eta$

Tabla 5.3 Especificaciones del diseño de la unión

Las variables a diseñar son la longitud de la unión  $L$  y el espesor del material adhesivo  $\eta$ . Mediante el algoritmo UNION desarrollado en Matlab se puede visualizar los resultados para varias situaciones, que se muestra a continuación:

**Caso 1: Cuando la longitud de la unión es igual a 10 mm.**

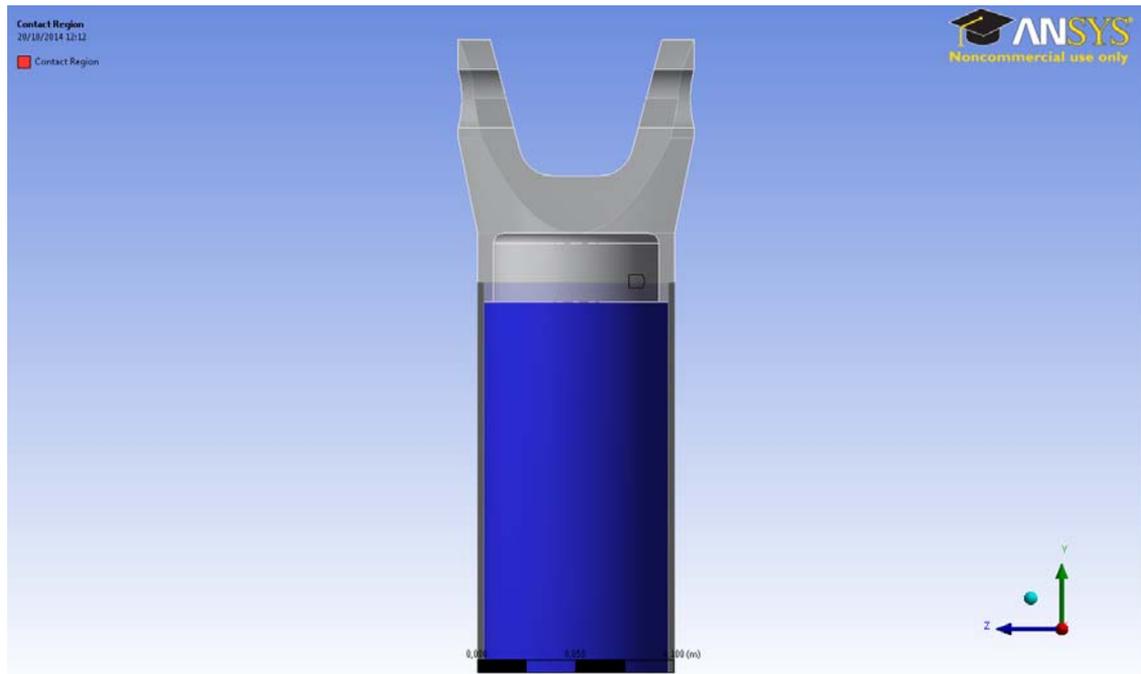


Figura 5.13 Longitud de la unión igual a 10 mm

Para esta longitud de la unión se analiza la distribución de tensiones cortantes para los distintos espesores que corresponden a 0,1 mm, 0,5 mm y 1mm.

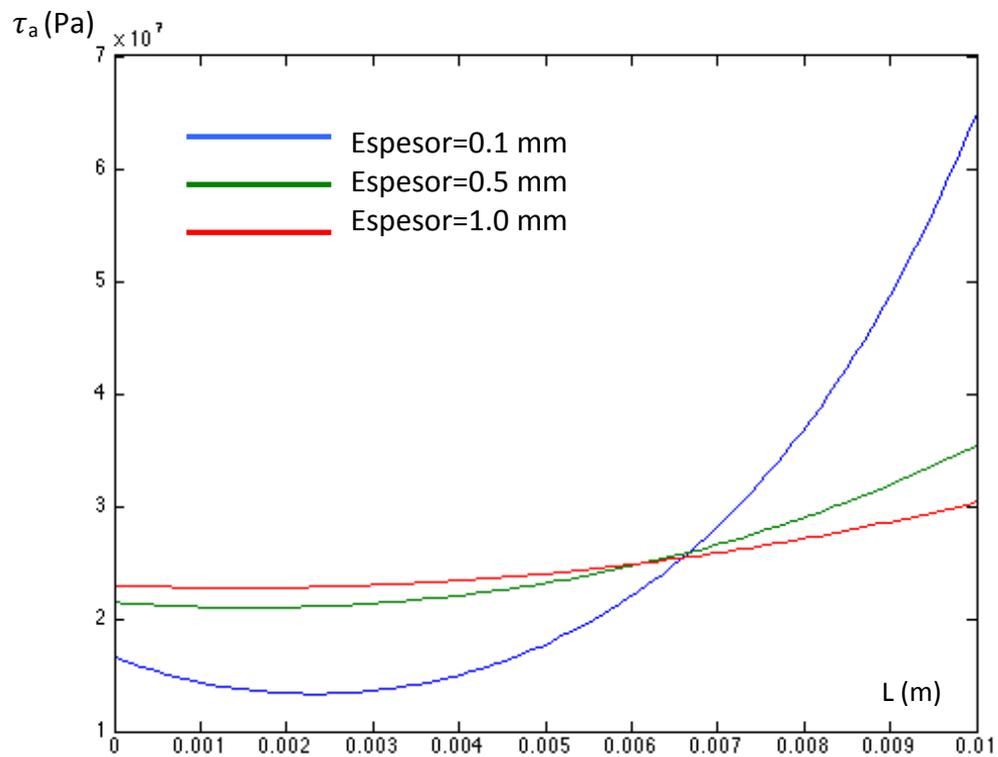


Figura 5.14 Distribución de la tensión cortante con L=10 mm

Caso 2: Cuando la longitud de la unión es igual a 20 mm.

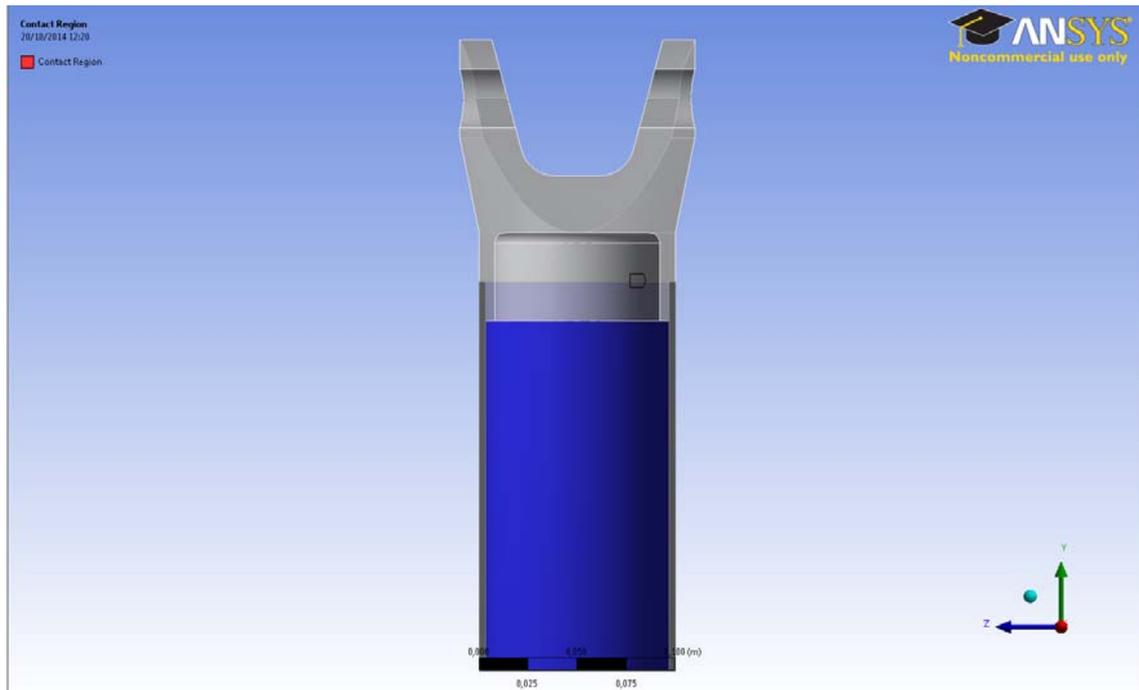


Figura 5.15 Longitud de la unión igual a 20 mm

Igual que el caso anterior, para esta longitud de la unión se analiza la distribución de tensiones cortantes para los distintos espesores que corresponden a 0,1 mm, 0,5 mm y 1mm.

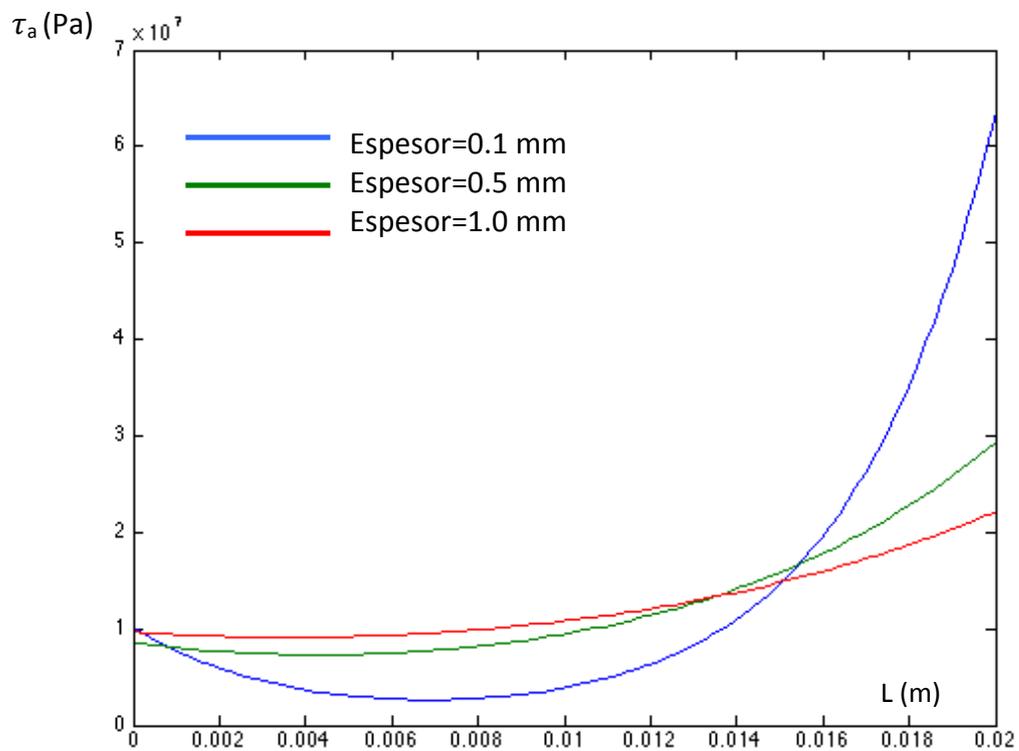


Figura 5.16 Distribución de la tensión cortante con L=20 mm

Caso 3: Cuando la longitud de la unión es igual a 30 mm.

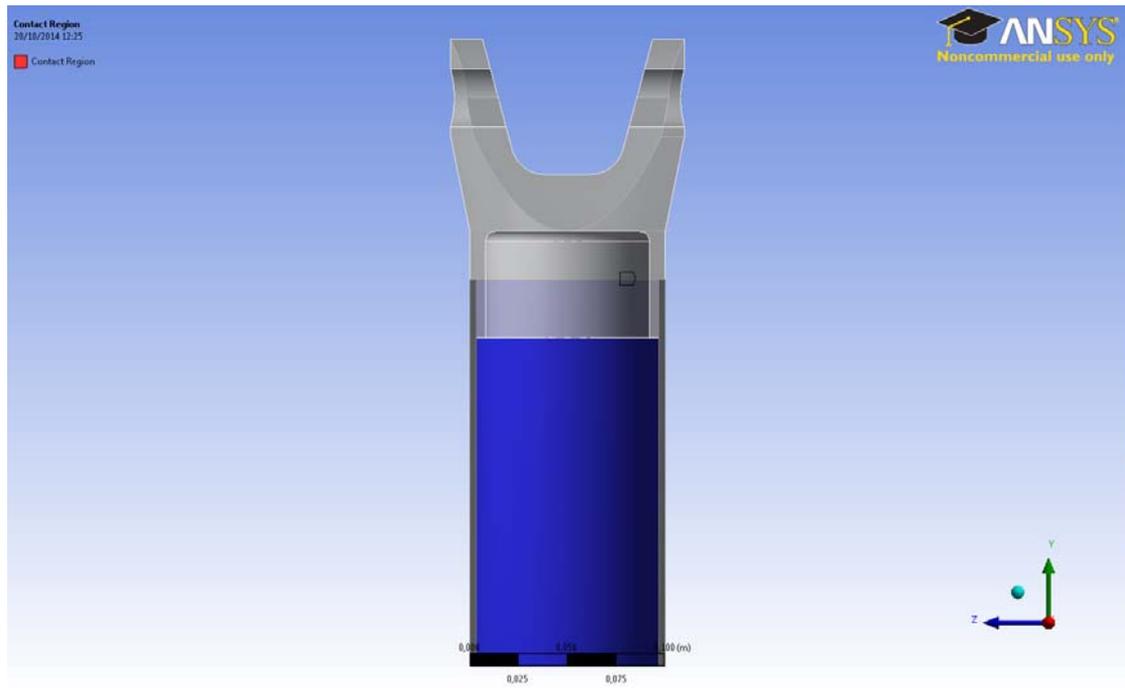


Figura 5.17 Longitud de la unión igual a 30 mm

Igual que los dos casos anteriores, para esta longitud de la unión se analiza la distribución de tensiones cortantes para los distintos espesores que corresponden a 0,1 mm, 0,5 mm y 1mm.

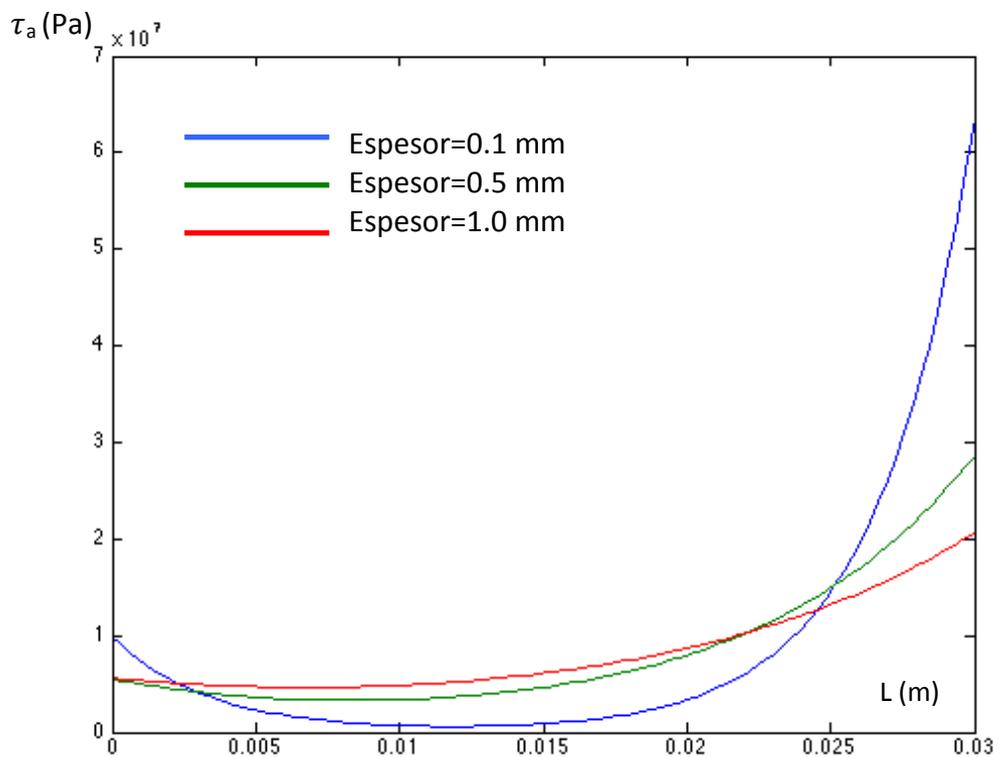


Figura 5.18 Distribución de la tensión cortante con L=30 mm

## CONCLUSIÓN:

La figura 5.14 muestra el caso en que la longitud de la unión es igual a 10 mm, se puede observar que ninguno de los espesores cumple el requisito del diseño ( $\tau_a \leq s_a \leq 29,8 \text{ MPa}$ ).

La figura 5.16 muestra el caso en que la longitud de la unión es igual a 20 mm, con el espesor igual 0,5 mm, la unión cumple el requisito. Sin embargo, el valor de la máxima tensión cortante con esta longitud está muy cerca de la resistencia a cortante del material adhesivo (28 MPa frente 29,8 MPa). Si se aumenta el espesor a 1 mm, la máxima tensión cortante disminuye a 21 MPa, valor que cumple el requisito del diseño y ofrece un margen de seguridad razonable, por lo que se considera como una posible solución.

Si se aumenta la longitud de la unión a 30 mm, que corresponde a la figura 5.18, los valores de la máxima tensión cortante no varían apenas, simplemente se obtiene una distribución más uniforme de las tensiones cortantes.

**Según las anteriores observaciones, se elige L=20 mm para la longitud de la unión y  $\eta=1$  mm para el espesor de la capa del adhesivo.**

## 5.2.2 ANÁLISIS POR EL MEF DE LA UNIÓN

Una vez terminado el diseño analítico, conviene realizar un análisis por el MEF, para comprobar la validez del diseño realizado. En este análisis la creación del mallado es un punto crítico, a la hora de realizar este proceso es conveniente tener en cuenta las siguientes precauciones:

- Para poder obtener información más detallada en la zona cercana de la unión, el mallado en esta zona debe ser lo suficientemente fino.
- Para analizar el comportamiento de la capa del adhesivo, se ha de crear un mallado para esta capa.
- Para reducir el coste computacional, en las zonas lejos de la unión, el mallado puede ser grueso, ya que no interesa conocer su detalle.

Tomando las anteriores consideraciones, se realiza el mallado, que se muestra en la figura 5.19:

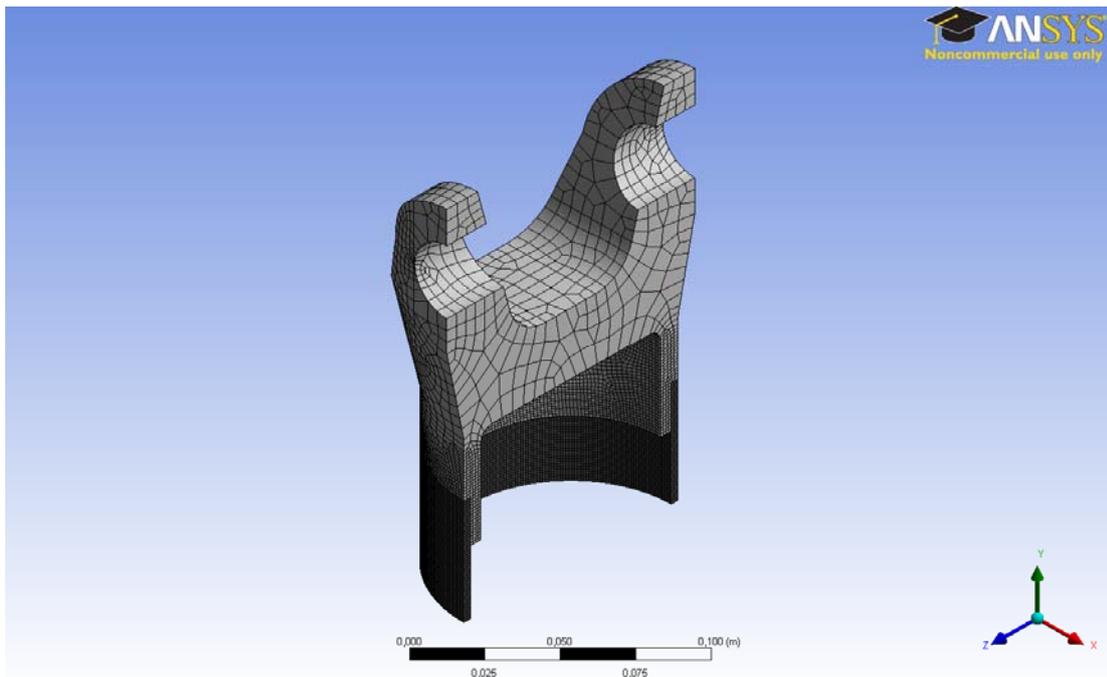


Figura 5.19 Mallado del conjunto horquilla-árbol

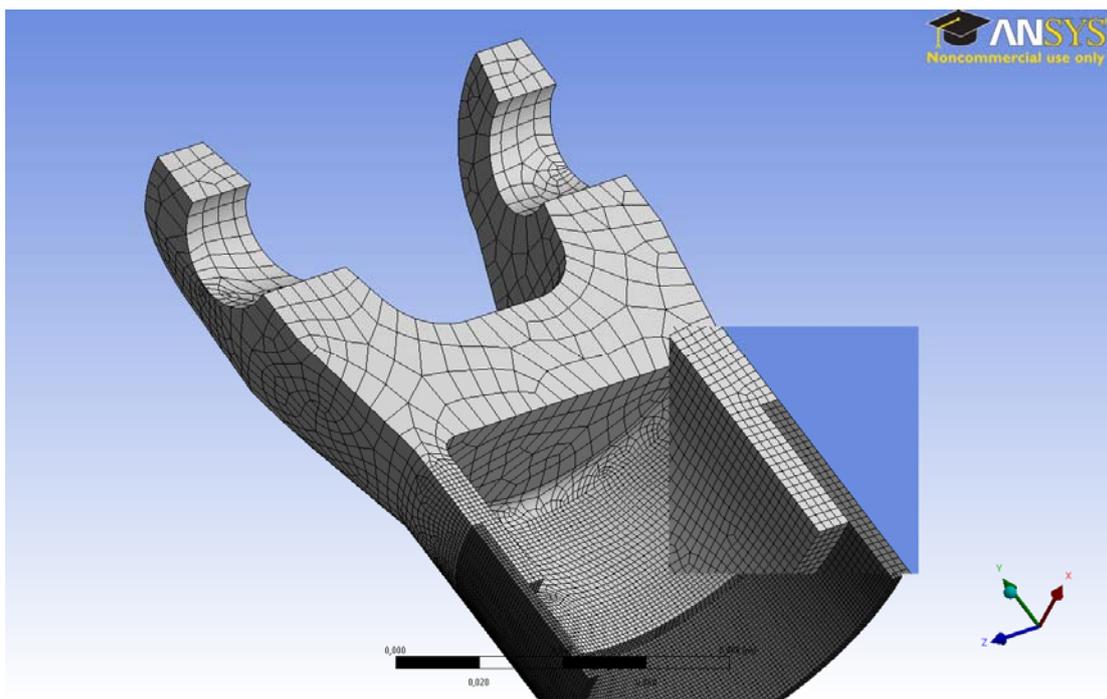


Figura 5.20 Vista ampliada del mallado

El mallado mostrado en la figura 5.20 se consigue mediante los tres tipos de mallados:

- A: para la horquilla se crea un mallado mediante el método Hex-dominant. Con este método, la mayoría de las mallas creadas es de elemento hexágono. Cuando la geometría es complicada para la utilización de los elementos hexágonos, se utilizan los tetraedros.
- B: para el árbol se crea un mallado con el elemento hexágono, el tamaño de la malla es fina (0,001 m) para obtener información más detallada.

- C: para la capa del adhesivo se crea un mallado mediante el método Contact Sizing. Con este método, el programa identifica automáticamente la unión entre dos piezas y crea un mallado de ella. El tamaño de la malla es definido por el usuario, en este caso se ha tomado un valor de 0,001 m.

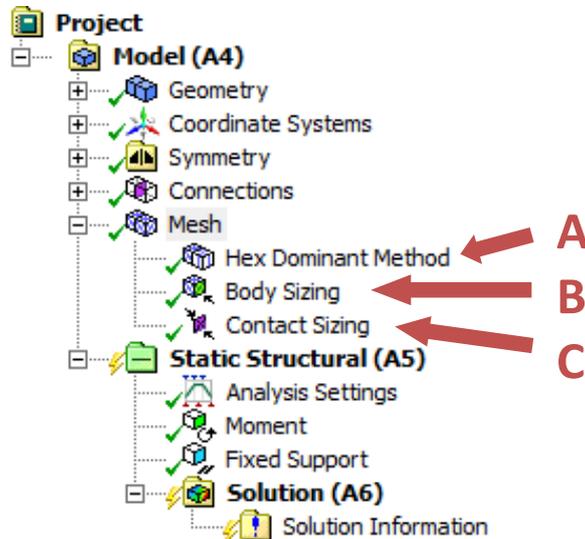


Figura 5.21 Distintos métodos de mallado

El par de 3500 N·m se aplica en la cruceta, para aproximarlos mejor a la realidad. Para la sujeción del conjunto, se han modelado un trozo del árbol y se limitan los seis grados de libertad en el extremo libre, como se muestra en la figura 5.22. El extremo debe estar suficiente lejos de la unión para conseguir una buena aproximación a la realidad.

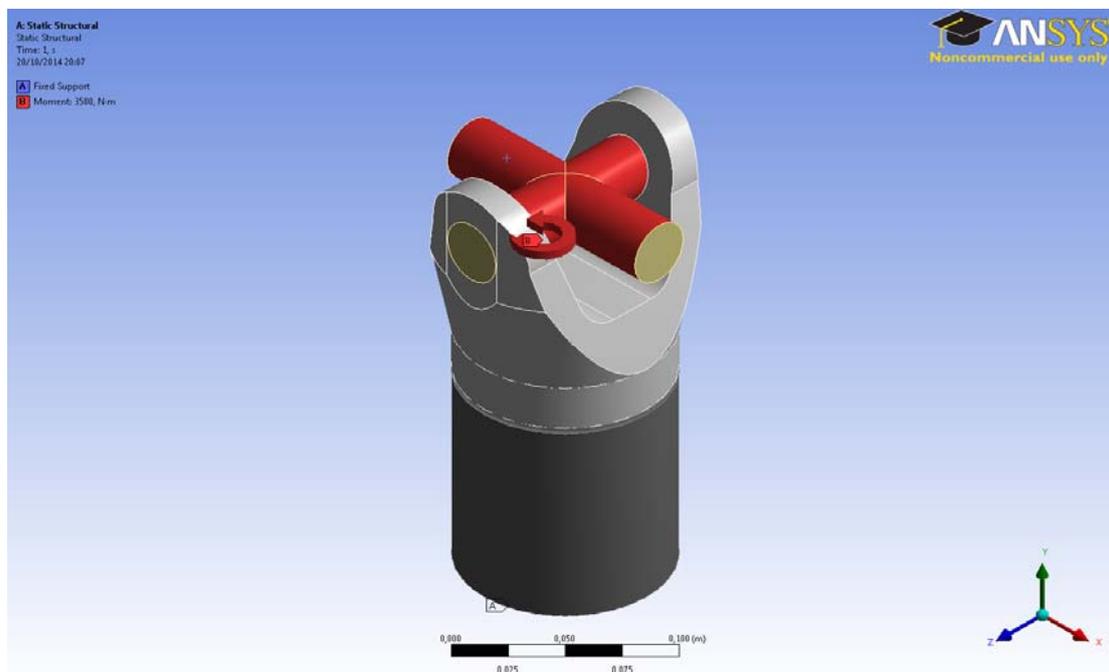


Figura 5.22 Aplicación de la carga y sujeción del conjunto horquilla-árbol

La figura 5.23 muestra la distribución de tensiones cortantes en el plano x-y del conjunto horquilla-árbol. Sin embargo, solo interesa conocer el estado tensional de la capa del adhesivo, por lo que se ocultarán la horquilla y el árbol, dejando visible solo la capa del adhesivo, que se muestra en la figura 5.24

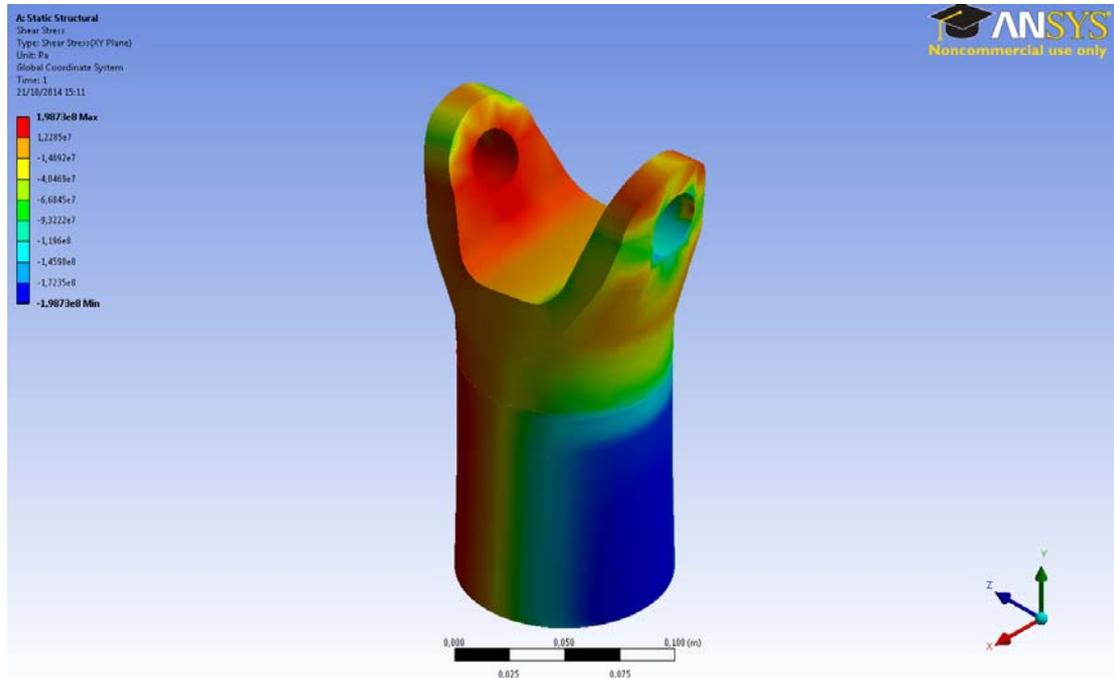


Figura 5.23 Distribución de tensiones cortantes en el plano x-y del conjunto

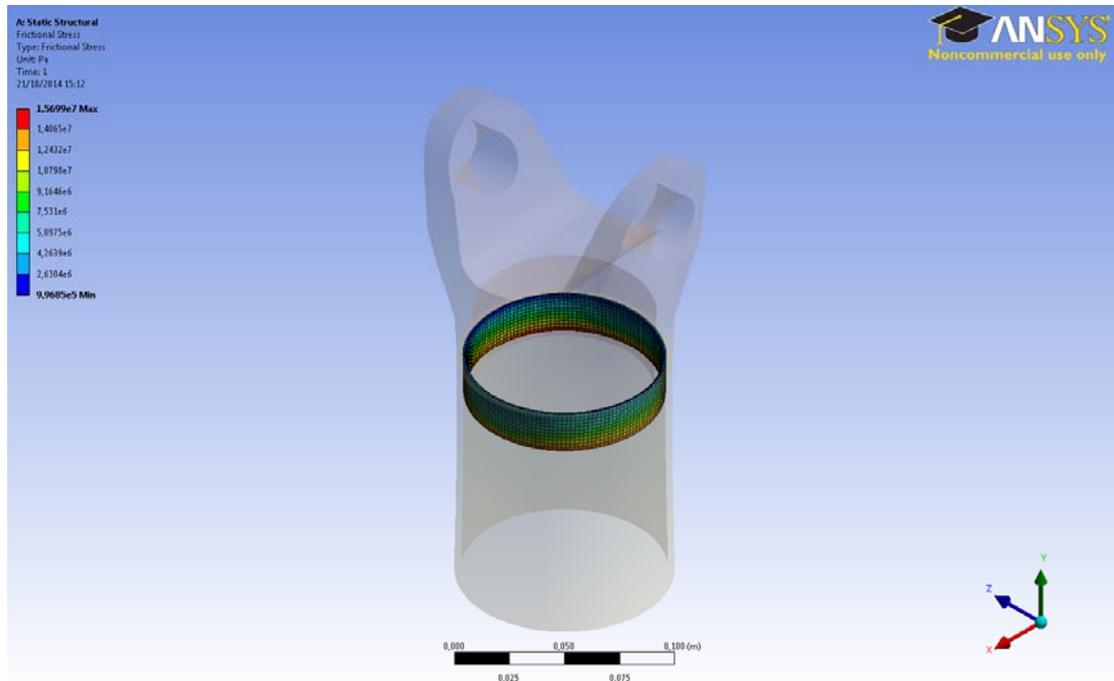


Figura 5.24 Distribución de tensiones cortantes en el plano x-y de la unión

Mediante la herramienta Contact Tool de ANSYS WORKBENCH se puede visualizar detalladamente la distribución de tensiones cortantes en la capa del adhesivo, que se muestra en la figura 5.25. Además, el programa indica el punto donde se produce la máxima tensión cortante, que corresponden a 15,7 MPa.

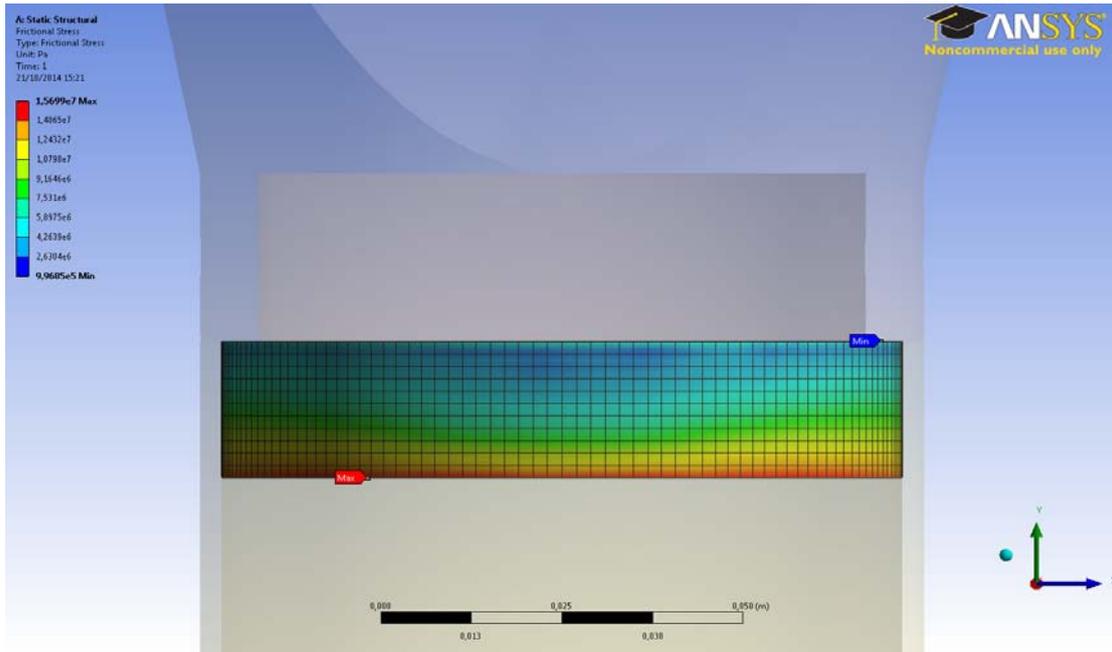


Figura 5.25 Tensión cortante máximo y mínimo en la unión

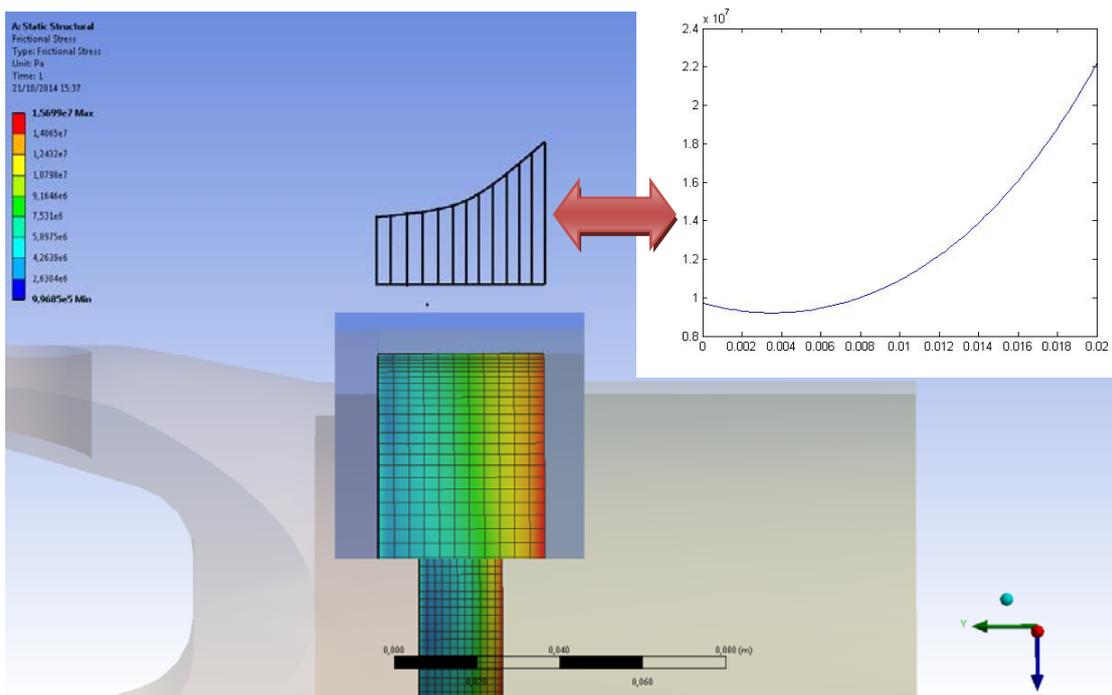


Figura 5.26 Comparación de la distribución de tensiones cortantes

Aunque entre la máxima tensión cortante obtenida por la simulación numérica (15,7 MPa) y la obtenida por el diseño analítico (21 MPa) existe una diferencia de un 25%, sin embargo, los dos valores están debajo del límite establecido (30 MPa). Además, se observa una analogía entre la distribución de tensiones cortantes obtenida por los dos métodos, como se muestra en la figura 5.26. Tomando las anteriores consideraciones, se puede afirmar la validez del diseño de la unión.

# CAPÍTULO 6

## OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

---

### 6.1 MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN

La optimización se puede definir como la ciencia encargada de determinar las mejores soluciones a problemas matemáticas que frecuentemente modelan una realidad física. En la ingeniería, la mayoría de los problemas son de tipo multidimensional y no lineal, con variables continuas o discretas. Mediante la optimización, se puede hallar la solución óptima que se ajuste mejor a las características del problema físico.

El primer paso de la optimización es la definición de los objetivos de la optimización, las variables a optimizar y las restricciones. Un problema de optimización puede tener uno o varios objetivos individuales, según la ecuación 6.1:

$$\min/\max F(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)] \quad (6.1)$$

La ecuación 6.1 se denomina función objetivo,  $n$  es el número de éstas y  $x$  es el conjunto de variables de diseño. Cuando  $n = 1$  se trata de optimización mono-objetivo y, en el caso contrario, se trata de optimización multi-objetivo. En problemas de optimización de materiales compuestos, un objetivo muy común es la minimización de peso, aunque existen otros objetivos tales como la maximización de rigidez, la minimización de coste, etc.

Un problema de optimización puede estar o no restringido. Por ejemplo, la ecuación 6.1 no está restringida, ya que los variables pueden tomar cualquier valor. Si se añade la siguiente restricción, el problema se convierte en optimización con restricción:

$$-5 \leq x_i \leq 5, \text{ para } i = 1 \dots n \quad (6.2)$$

En este caso las variables sólo pueden tomar valores que estén dentro del intervalo  $[-5,5]$ . En la ingeniería, un problema de optimización de materiales compuestos siempre está restringido, bien sea la mínima resistencia que debe tener, la rigidez, el tamaño, etc.

Existen numerosos métodos de optimización. Se puede establecer una clasificación preliminar diferenciando por un lado los métodos de optimización local y, por otro lado, los métodos de optimización global.

Los métodos locales buscan la mejor solución alrededor de un punto inicial, por lo que trabajan con una gran dependencia del punto de arranque del problema. Además, los algoritmos más importantes dentro de este grupo utilizan la información del gradiente, tales como los métodos Quasi-Newton y los métodos Least-Squares. Dado que en la ingeniería la mayoría de los problemas es

de tipo no lineal (por lo que la derivación es complicada o no derivable), este grupo de métodos se utiliza con menor frecuencia.

Otro grupo de métodos son los de optimización global. Este grupo de métodos presenta una gran independencia de la naturaleza del espacio de soluciones. Es capaz de encontrar la solución óptima global, atravesando el espacio de búsqueda. Dada esta característica y la naturaleza del problema de los materiales compuestos, en este proyecto se centra en los métodos de optimización global.

En general, la convergencia de los métodos de optimización global es más lenta que la de optimización local, debido a que exploran de forma exhaustiva el espacio de soluciones, despreciando las características locales del espacio. Por lo tanto, a la hora de elegir un método de optimización global, ha de tener en cuenta el coste computacional que conlleva. Si un método converge a velocidad muy baja o no puede converger al terminar las iteraciones, es conveniente cambiar a otro método, para lograr mayor eficiencia. A continuación se describirán algunos de los métodos de optimización global más utilizados.

### 6.1.1 ALGORITMO GENÉTICO

El Algoritmo Genético es uno de los métodos adaptativos que pueden usarse para resolver problemas de búsqueda y optimización. Está basado en el proceso de evolución de la naturaleza. Las poblaciones evolucionan en la naturaleza de acuerdo a los principios de la selección natural y la supervivencia de los más fuertes. El Algoritmo Genético, como su nombre indica, es capaz de generar soluciones para problemas del mundo real. Los principios básicos del Algoritmo Genético fueron establecidos por Holland (1975) [49] y se encuentran descritos en varios textos. Este método de optimización consiste en: hallar de qué parámetros depende el problema, codificarlos en un cromosoma, y aplicar los métodos de la evolución: selección y reproducción con intercambio de información y alteraciones que generan diversidad.

El algoritmo genético es de probada eficacia en caso de querer calcular funciones no derivables (o de derivación muy compleja) aunque se uso es posible con cualquier función. A la hora de utilizar este método hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones [50]:

- Si la función a optimizar tiene muchas raíces máximas/mínimas locales se requerirán más iteraciones del algoritmo para asegurar el máximo /mínimo global.
- Si la función a optimizar contiene varios puntos muy cercanos en valor al óptimo, solamente se puede asegurar que se encontrará uno de ellos (no necesariamente el óptimo).

La figura 6.1 muestra el esquema del funcionamiento de un algoritmo genético [51] para el diseño de un árbol de transmisión:

Mediante este método de optimización, autores como Rangaswamy et al. [6.3] realizó la optimización del diseño de un árbol de transmisión para un automóvil. El resultado se refleja en la siguiente tabla:

	Láminas	Espesor(mm)	Secuencia óptima
Vidrio /Epoxi	17	0,4	[46/-64/-15/-13/39/-84/-28/20/ $\sqrt{-27}$ ] <sub>s</sub>
Carbono /Epoxi	17	0,12	[-56/-51/74/-82/67/70/13/44/ $\sqrt{-75}$ ] <sub>s</sub>

Tabla 6.1 Diseño óptimo del laminado [9]

## 6.1.2 OPTIMIZACIÓN POR ENJAMBRE DE PARTÍCULAS

La optimización por enjambre de partículas (PSO) es una técnica adaptativa desarrollada por el Dr. Eberhart y el Dr. Kennedy en 1995, inspirada en el comportamiento social de las aves [52].

La optimización por enjambre de partículas comparte muchas técnicas computacionales evolucionarias con los algoritmos genéticos (GA). El proceso se inicializa con una población inicial aleatoria, y la búsqueda de la solución óptima se realiza según avanzan las generaciones. Sin embargo, a diferencia de los algoritmos genéticos, la optimización por enjambre de partículas no necesita operadores de cruce y de mutación. Las posibles soluciones, llamadas partículas, vuelan por el espacio de búsqueda siguiendo las partículas óptimas actuales.

Cada partícula realiza un seguimiento de sus coordenadas en el espacio de búsqueda, que se asocian con la mejor posición actual (**fitness**). El valor de la mejor posición actual se denomina **pbest**, y será almacenado también en la base de datos. Cuando una partícula vecina de la posición óptima actual encuentra una posición mejor, almacena la nueva posición óptima con el nombre de **lbest**. A medida que se descubren nuevas y mejores posiciones, éstas pasan a orientar los movimientos de las partículas. Cuando una partícula ha recorrido todo el espacio de búsqueda, la posición óptima global se almacena con el nombre de **gbest**.

El método de PSO consiste en que, en cada paso de tiempo, se produce un cambio de la velocidad de cada partícula. La aceleración de cada partícula se genera a partir de un término aleatorio.

En los últimos años, la optimización por enjambre de partículas ha sido aplicada en muchas investigaciones y aplicaciones ingenieriles. Está demostrado que la optimización por enjambre de partículas obtiene mejores resultados de forma más rápida y más económica comparado con otros métodos.

La figura 6.2 muestra el esquema del funcionamiento de la optimización por enjambre de partículas [53] para el diseño de un árbol de transmisión.

**ALGORITMO GENETICO**

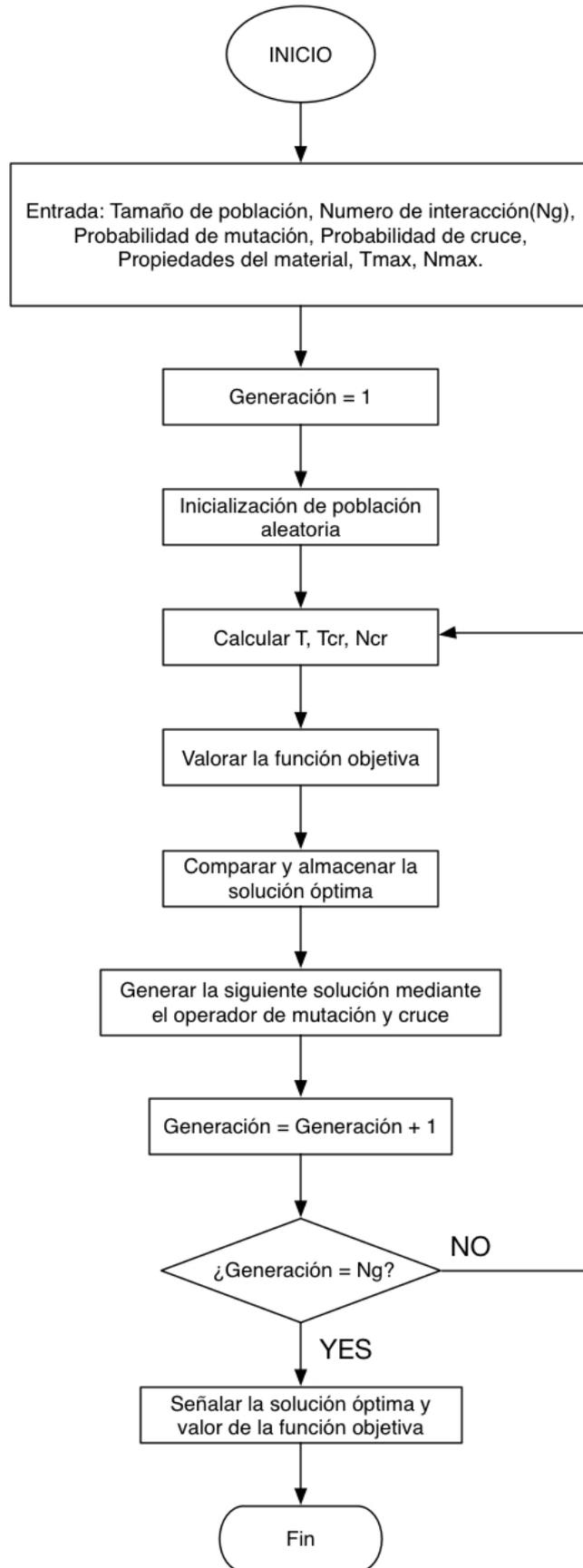


Figura 6.1 Esquema del funcionamiento del GA

OPTIMIZACION POR ENJAMBRE DE PARTICULAS

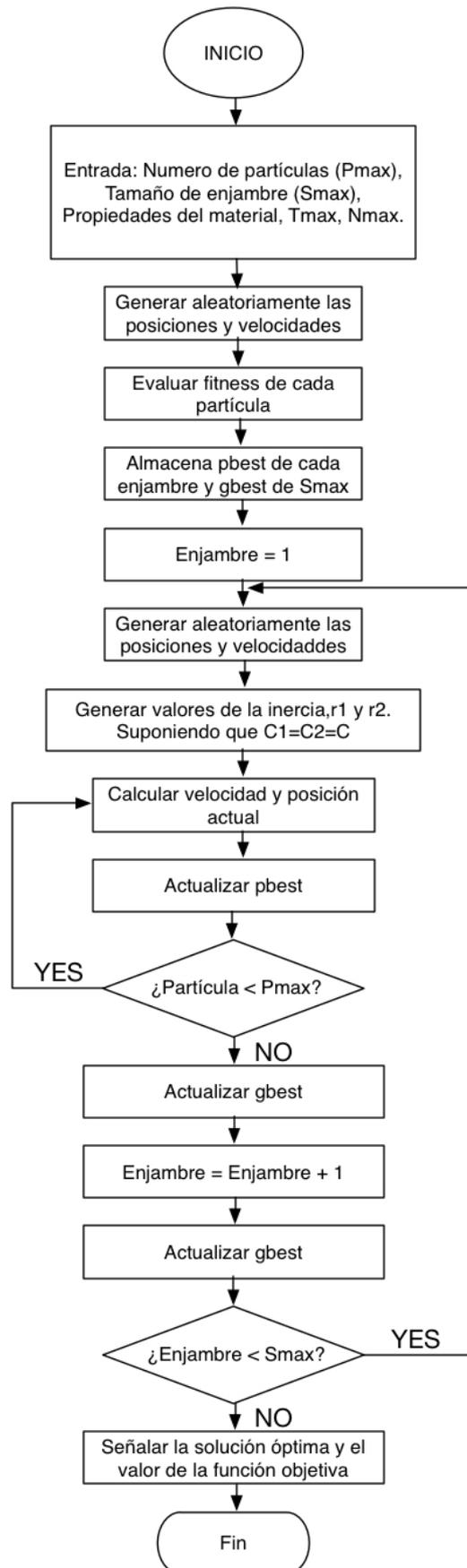


Figura 6.2 Esquema del funcionamiento del PSO

### 6.1.3 DESARROLLO DEL PROGRAMA myPSO

Tanto el algoritmo genético (GA) como la optimización por enjambre de partículas (PSO) pueden adaptarse al diseño de los materiales compuestos. Los dos métodos son de optimización global y pueden utilizarse para problemas no lineales o de variables discretas. La diferencia está en que el algoritmo genético requiere la codificación de las variables de diseño en un cromosoma, mientras que la optimización de enjambre de partículas no requiere este paso. Para este proyecto, se elige la PSO para el diseño del árbol de transmisión de materiales compuestos.

La optimización por enjambre de partículas, como se explica en el apartado anterior, consiste en la simulación del comportamiento social de las abejas en la búsqueda de la región con más densidad de flores. Las abejas empiezan por una búsqueda aleatoria, durante la búsqueda, cada abeja conoce su mejor posición y la mejor posición del resto, las abejas cambiarán la dirección y la velocidad de búsqueda para seguir al "líder", que conoce la mejor posición global. Dichas frases, traducidas al lenguaje de programación, conlleva a las siguientes consideraciones:

- a) Al empezar el programa hay que crear una población inicial aleatoria, cada partícula de la población representa una posible solución.
- b) La mejor posición es la solución que minimiza/maximiza la función objetivo, condicionada por las restricciones del diseño.
- c) En cada iteración hay que calcular el valor de la función objetivo de cada solución, compararlo con el resto de las soluciones.
- d) Hay que almacenar la mejor solución global para que el resto de la población pueda comparar con ella.
- e) Si una solución no minimiza/maximiza la función objetivo, se tiene que cambiar su posición y velocidad, según una regla determinada.
- f) Hay que establecer una regla del cambio de posición y velocidad.

Tomando las anteriores consideraciones se puede empezar el diseño del programa myPSO. El programa se desarrolla mediante el software Matlab. Las variables a optimizar es el número de láminas y la secuencia de apilamiento, suponiendo que el laminado es simétrico. La función objetivo establecida para este proyecto es el peso del árbol de transmisión, que corresponde a la siguiente ecuación:

$$m = \rho \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L \quad (6.3)$$

Las restricciones del diseño se reflejan a continuación:

$$m = \begin{cases} \infty, & T_{cr} < T_{max} \\ \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L, & T_{cr} \geq T_{max} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$m = \begin{cases} \infty, & N_{cr} < N_{max} \\ \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L, & N_{cr} \geq N_{max} \end{cases} \quad (6.5)$$

$$m = \begin{cases} \infty, & \text{Si se ha producido rotura} \\ \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L, & \text{Si no se ha producido la rotura} \end{cases} \quad (6.6)$$

Las expresiones 6.4, 6.5 y 6.6 significan: si la resistencia a pandeo es menor que el par máximo de servicio, el valor de la función objetivo tiende a infinito; si la frecuencia natural es menor que la velocidad máxima de giro, el valor de la función objetivo tiende a infinito; si se ha producido rotura en alguna de las láminas, el valor de la función objetivo tiende a infinito. Como el objetivo es minimizar el peso del árbol, cuando ocurre uno o varios de los tres casos anteriores, significa que el diseño no cumple las especificaciones, el peso se hace infinito y por lo tanto esta solución queda descartada.

Para poder evaluar la función objetivo, el modelo matemático desarrollado en el capítulo 4 se ha trasladado completamente al programa myPSO. Al introducir las propiedades del material y las configuraciones del laminado, el programa es capaz de calcular automáticamente las matrices ABD y sus matrices inversas, las constantes ingenieriles, las tensiones y deformaciones en cada lámina, la resistencia a pandeo, la frecuencia natural, etc. Además, el programa ejecuta las restricciones y calcula el valor de la función objetivo de forma automática.

Para obtener el número óptimo de láminas y la secuencia óptima de apilamiento, se ha planteado la siguiente estrategia: el número de lámina se aumenta desde los 10 hasta los 32 (experimentalmente se determina que por debajo de 10 láminas es imposible conseguir un diseño factible, mientras que con 32 láminas se puede garantizar la existencia del diseño factible [9]). Para cada número de láminas se realiza una optimización por enjambre de partículas, en la que se obtiene la mejor secuencia de apilamiento. Una vez determinada la optimización para todos los números de láminas, el diseño óptimo es aquello que conduce al menor peso del árbol.

Según el procedimiento anterior, al iniciar el programa myPSO, se crea un grupo de secuencias aleatorias de 10 láminas, que corresponde a la población inicial de posiciones. Por ejemplo:

$x_1$	Secuencia 1	[3/-5/7/9/35] <sub>s</sub>
$x_2$	Secuencia 2	[12/-20/2/9/15] <sub>s</sub>
$x_3$	Secuencia 3	[-24/43/-54/2/13] <sub>s</sub>
...	...	...
$x_N$	Secuencia N	[ $x_{N,1}/x_{N,2}/x_{N,3}/x_{N,4}/x_{N,5}$ ] <sub>s</sub>

Tabla 6.2 Población de posiciones

Simultáneamente se crea una población aleatoria de velocidades, que tiene las mismas dimensiones de la población de posiciones, por ejemplo:

$v_1$	velocidad 1	[4/54/-7/3/21] <sub>s</sub>
$v_2$	velocidad 2	[32/-12/53/-9/0] <sub>s</sub>
$v_3$	velocidad 3	[36/-8/78/-43/22] <sub>s</sub>
...	...	...
$v_N$	velocidad N	[ $x_{N,1}/x_{N,2}/x_{N,3}/x_{N,4}/x_{N,5}$ ] <sub>s</sub>

Tabla 6.3 Población de velocidades

En cada iteración, cada  $x_i$  se renueva dependiendo de dos valores, el primero es el óptimo local (**pbest**) obtenido por el  $x_i$ , el segundo es el óptimo global (**gbest**) obtenido entre todos los  $x$ . La renovación se realiza según las siguientes ecuaciones:

$$v_{i,j}(t+1) = wv_{i,j}(t) + c_1r_1[p_{i,j} - x_{i,j}(t)] + c_2r_2[p_{g,j} - x_{i,j}(t)] \quad (6.7)$$

$$x_{i,j}(t+1) = x_{i,j}(t) + v_{i,j}(t+1), j=1,2,\dots,\text{Número de láminas} \quad (6.8)$$

En las ecuaciones anteriores,  $N$  es el tamaño de la población, normalmente se toma un valor entre 40 y 100.  $w$  es el factor de inercia, un valor típico es 0,5.  $c_1$  y  $c_2$  son los factores de aprendizaje, normalmente se toman el valor de 2.  $r_1$  y  $r_2$  son números aleatorios entre 0 y 1, generados por el programa.

Siguiendo las anteriores instrucciones, se ha desarrollado el programa myPSO, para su código fuente véase el anexo 4. Mediante este programa, se ha obtenido un diseño óptimo que tiene 22 láminas y un peso de 1,95 kg, con la secuencia de apilamiento [-13/-55/19/-21/38/4/57/-39/-33/17/46]s. Las variables utilizadas para esta operación se reflejan a continuación:

- Tamaño de población: 50
- Número máximo de iteración: 100
- $c_1=c_2=2$
- $w=0,5$

Sin embargo, el coste computacional de utilizar este método es muy elevado, nótese que se ha llevado 80 minutos para obtener el resultado anterior. Además, la secuencia de apilamiento obtenida no es la más deseada, ya que es una configuración poco realista. En la práctica, la orientación de las fibras se restringe frecuentemente a ángulos de  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  y  $90^\circ$  para facilitar la fabricación. Sin embargo, debido a la naturaleza del método de PSO, es muy difícil implantar la restricción de ángulos.

Visto lo anterior, se ha decidido desarrollar otro programa más robusto, que permite la restricción de ángulos; y computacionalmente más económico, que utiliza un método de optimización más simple.

## 6.2 DESARROLLO DEL PROGRAMA OPTIEJE

El OPTIEJE surge de la necesidad de desarrollar un programa más rápido, robusto y económico. En el apartado anterior se ha mencionado que, para facilitar la fabricación, la orientación de las fibras se restringe frecuentemente a ángulos de  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  y  $90^\circ$ . En un árbol de transmisión de materiales compuestos, las láminas orientadas según un ángulo  $0^\circ$  ofrecen mayor resistencia a flexión, por lo tanto conducen a una frecuencia natural mayor. Aquellas orientadas a ángulos  $\pm 45^\circ$  ofrecen mayor resistencia a tensión cortante, mientras que las orientadas con un ángulo  $90^\circ$  ofrecen mayor resistencia a pandeo [54].

En el apartado anterior también se ha mencionado que, dada la naturaleza de los métodos de optimización interactiva, la restricción de los ángulos resulta

de gran dificultad. Por lo tanto, el programa OPTIEJE utilizará un método de optimización más simple, basándose en la búsqueda aleatoria. Es decir, el programa busca la solución óptima dentro de una población de soluciones generadas aleatoriamente.

El OPTIEJE comparte muchas ideas con el myPSO, por ejemplo:

- El OPTIEJE también está desarrollado en Matlab.
- Ambos programas tienen una base de datos donde se almacenan las propiedades de los dos materiales mencionados anteriormente.
- En ambos programas, el usuario puede introducir un nuevo material que quiere utilizar.
- Ambos programas trabajan con laminados simétricos.
- La función objetivo es la misma para ambos programas.
- Las restricciones son las mismas para ambos programas.
- Ambos programas calculan las matrices ABD y sus matrices inversas, las constantes ingenieriles, las tensiones y deformaciones en cada lámina, la resistencia a pandeo, la frecuencia natural, etc.

Sin embargo, existen muchas diferencias entre los dos programas:

- La mayor diferencia entre el myPSO y el OPTIEJE está en que, al iniciar el OPTIEJE se genera aleatoriamente una secuencia de apilamiento que sólo contiene los ángulos de  $0^\circ, \pm 45^\circ$  o  $90^\circ$ . Los ángulos  $+45^\circ$  y  $-45^\circ$  siempre aparecen juntos, excepto en el caso cuando uno de ellos esté en el plano medio del laminado.
- En cada iteración, el OPTIEJE genera una solución, y evalúa la validez de esta solución.
- Dado que el OPTIEJE genera una solución en cada iteración, el tamaño de la población es igual al número de iteraciones. Por ejemplo, si la población tiene un tamaño de 30000, el número de iteraciones que realizará el OPTIEJE sería también 30000.
- En cada iteración, la nueva solución generada no tiene ninguna relación con la anterior, por lo tanto no es un método interactivo.
- El OPTIEJE crea una matriz donde se almacenan todas las soluciones factibles. Una vez terminadas las iteraciones, el programa busca la solución óptima entre todas las soluciones factibles, según el criterio impuesto por el usuario. Para este proyecto, el criterio impuesto es el mínimo peso.

Experimentalmente se ha comprobado que, mediante el programa OPTIEJE, se puede conseguir un diseño óptimo en un tiempo muy corto. Por ejemplo, para el material Carbono/Epoxi, después de 30000 iteraciones, se han obtenido el número óptimo de láminas (24 láminas) y la secuencia óptima de apilamiento ( $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$ ), en solo 2 minutos. La reducción

del tiempo y el coste computacional es excepcional mediante la utilización del programa OPTIEJE.

No obstante, la rapidez y el bajo coste computacional no se logran gratuitamente. Como se trata de un método puramente probabilístico, el tamaño de la población es un factor crítico. Si el tamaño de la población es muy pequeño, la probabilidad de encontrar la solución óptima disminuye. Si el tamaño de la población es excesivo, el coste computacional y el tiempo de cálculo se aumentan. Experimentalmente se determina que con un tamaño de población entre [20000,50000] se puede garantizar el encuentro de la solución óptima.

El programa OPTIEJE tiene otra versión variante denominada ANGULOALEATORIO, esta versión nació para comprobar la validez del OPTIEJE. El ANGULOALEATORIO, como su propio nombre indica, genera los laminados con ángulos aleatorios de las fibras. A parte de esta diferencia, el resto de la estructura de ambos programas es idéntica. Por lo tanto, si se puede comprobar la validez del ANGULOALEATORIO, la validez del OPTIEJE quedará comprobado automáticamente.

El razonamiento es el siguiente: se introducen el mismo material y las mismas especificaciones del diseño en el myPSO y el ANGULOALEATORIO, aunque los dos programas utilizan distintos métodos de optimización, los resultados obtenidos deben ser coherentes. Si realmente ocurre esto, se puede afirmar la validez del programa ANGULOALEATORIO, por lo tanto, la del OPTIEJE. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por los dos métodos:

	Láminas	Peso(kg)	Secuencia óptima
myPSO	22	1,95	[-13/-55/19/-21/38/4/57/-39/-33/17/46]s
ANGULOALEATORIO	22	1,95	[-14/27/28/-18/10/41/36/-59/-36/-36/-19]s

Tabla 6.4 Resultados obtenidos por los distintos métodos

Como el ANUGLOALEATORIO trabaja con cualquier ángulo, la posibilidad de encontrar una solución óptima global es mucho menor que cuando trabaja solo con  $0^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$  y  $90^\circ$ , por lo tanto hay que aumentar el número de iteraciones. En este caso se ha empleado una población de 80000 soluciones posibles. El tiempo que tardó esta búsqueda es 5 minutos, frente a los 80 minutos que tardó el myPSO. Aunque las dos secuencias de apilamiento obtenidas no son idénticas, el peso y el número de láminas salen lo mismo mediante los dos métodos. Dado que el objetivo de la optimización es el mínimo peso, ambos resultados pueden considerarse como solución óptima. La figura 6.3 muestra el resultado obtenido por el ANGULOALEATORIO en Matlab.

Después de esta comprobación se puede afirmar que: el programa OPTIEJE, a pesar de su gran simplicidad, garantiza el encuentro de la solución óptima de forma rápida y efectiva, reduciendo el coste computacional y el tiempo de procedimiento. En el siguiente apartado se mostrarán detalladamente todas las funciones del programa OPTIEJE.

## OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

```
Quiere realizar las iteraciones? SI=1,NO=0 >> 1
%%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----%%
Maximo numero de iteracion >>80000
LOS RESULTADOS MEJORES SON:
  No.Iteracion      Peso      I.Seguridad      No.Lamina      Tcr      Ncrbe
Columns 1 through 4
      16744.00      1.95      1.08      22.00
Columns 5 through 6
      3605.79      9111.18
Secuencia de apilamiento
-14.00
 27.00
 28.00
-18.00
 10.00
 41.00
 36.00
-59.00
-36.00
-36.00
-19.00
-19.00
-36.00
-36.00
-59.00
 36.00
 41.00
 10.00
-18.00
 28.00
 27.00
-14.00
*****
* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *
*****
```

Figura 6.3 Resultados obtenidos por el ANGULOALEATORIO

### 6.2.1 FUNCIONES DEL PROGRAMA OPTIEJE

La optimización mediante el programa OPTIEJE se divide en dos etapas fundamentales, que se explicarán a continuación:

#### PRIMERA ETAPA:

- Tener una base de datos de los materiales seleccionados.

```
*****
** Este es un programa para el diseno y optimizacion de **
** un arbol de transmision de materiales compuestos **
** Autor: Shengyu Wang **
** Tutor: Dr.Prof. Carlos Navarro **
** Universidad Carlos III de madrid **
*****
ATENCION:SE SUPONE QUE EL LAMINADO ES SIMETRICO
Por favor,seleccione el material
1 Carbono/Epoxi USN150
2 Vidrio/Epoxi UGN150
3 Otro material
Por favor,elija su opcion >>|
```

- Permitir que el usuario introduzca otro material que no está en la base de datos.

```

Por favor,introduzca las propiedades del material >>
E,G,Xc,Xt,Yc,Yt,S estan expresados en Pa >>
E1 =
E2 =
E3 =
n12 =
n13 =
n23 =
G12 =
G13 =
G23 =
Densidad =
Xt=
Xc=
Yt=
Yc=
S=
Espesor=
alfa es el coef. de dilatacion termica
alfa1=
alfa2=
beta es el coef. de expansion higroscopica
beta1=
beta2= |
    
```

- Poder generar aleatoriamente una solución inicial incluyendo:
  - Número de láminas.
  - Orientación de cada lámina.
  - Secuencia de apilamiento.

```

Por favor, elija una de las dos siguientes opciones
1. Conozco el numero de laminas y la secuencia de la laminacion
2. Generar estos valores aleatoriamente
Opcion >>2
Numero de laminas generado aleatoriamente es >>
    14
    
```

```

La secuencia generada aleatoriamente es >>
    90
    0
    0
    0
    45
   -45
    90
    90
   -45
    45
    0
    0
    0
    90
    
```

- Permitir que el usuario introduzca manualmente estas entradas.

```
Por favor, elija una de las dos siguientes opciones
1. Conozco el numero de laminas y la secuencia de la laminacion
2. Generar estos valores aleatoriamente
Opcion >>1
Numero de laminas >>
Secuencia de apliamento COMPLETA. Ej: [0 -45 90 -45 0] >> |
```

- Almacenar las entradas en la base de datos.
- Pedir al usuario los parámetros de diseño, que incluyen:
  - Velocidad máxima de giro en rpm.
  - Par máximo a transmitir por el árbol.
  - Diámetro exterior del árbol.
  - Longitud del árbol.
  - Temperatura de curado.
  - Temperatura de servicio.
  - Contenido de humedad.
  - Coeficiente de seguridad.

```
Por favor,introduzca las especificaciones del eje
Introduzca la velocidad maxima (RPM) del eje >>
Introduzca el momento torsor maximo (Nm) del eje >>
Introduzca el diametro exterior (m) del eje >>
Introduzca la longitud (m) del eje >>
Introduzca la temperatura de curado >>
introduzca la temperatura de servicio (menor que la temperatura de curado) >>
Introduzca el contenido de humedad en % >>
Introduzca el coeficiente de seguridad >>
```

- Calcular, según la teoría clásica de laminados, los siguientes valores:
  - Las matrices ABD.
  - Las matrices abd.
  - Fuerzas y momentos aplicados.
  - Fuerzas debido a la temperatura.
  - Fuerzas debido a la humedad.
  - Tensiones en el eje material de cada lámina.
  - Deformación en el eje material de cada lámina.
  - Constantes ingenieriles.
  - Velocidad crítica (frecuencia natural).
  - Resistencia a pandeo.
  - Peso del árbol.

## OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

Para el ejemplo, se suponen los siguientes datos:

- Velocidad máxima de giro en rpm = 9000 rpm
- Par máximo a transmitir por el árbol = 3500 N.m
- Diámetro exterior del árbol = 0.1 m
- Longitud del árbol = 1,5 m
- Temperatura de curado = 120 °C
- Temperatura de servicio = 20 °C
- Contenido de humedad = 0,5%
- Coeficiente de seguridad = 2,5
- Número de láminas = 16
- Secuencia de apilamiento = [90/45/-45/0/0/45/-45/90]<sub>s</sub>

La matriz A es

```
1.2370e+008  1.8785e+007      0
1.8785e+007  9.2696e+007      0
              0              0  2.2608e+007
```

La matriz B es

```
1.8190e-012 -1.7053e-013      0
-1.7053e-013              0      0
              0              0 -5.6843e-014
```

La matriz D es

```
3.5300e+001  2.0317e+000  4.8441e-001
2.0317e+000  2.5450e+001  4.8441e-001
4.8441e-001  4.8441e-001  3.0073e+000
```

La matriz a es

```
8.3408e-009 -1.6903e-009  1.4325e-043
-1.6903e-009  1.1130e-008 -4.8639e-044
1.4325e-043 -4.8639e-044  4.4233e-008
```

La matriz b es

```
-4.4394e-022  9.0243e-023  5.6974e-023
1.4242e-022 -2.2327e-023 -1.9345e-023
-1.0659e-023 -1.5142e-023  8.4025e-022
```

La matriz d es

```
2.8513e-002 -2.1955e-003 -4.2393e-003
-2.1955e-003  3.9582e-002 -6.0223e-003
-4.2393e-003 -6.0223e-003  3.3418e-001
```

Constantes ingenieries (Pa)

```
Ex      Ey      Gxy
6.8510e+010  5.1339e+010  1.2919e+010
```

## OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

Fuerzas exteriores resultantes (N)

Nxx	Nyy	Nxy
0	1.2047e+004	2.2282e+005

Fuerzas debido a la temperatura (N)

Nxx	Nyy	Nxy
-3.9586e+004	-2.4859e+005	0

Fuerzas debido a la humedad (N)

Nxx	Nyy	Nxy
3.7570e+004	1.8539e+005	0

Velocidad critica (RPM) segun teoria Bernoulli-Euler  
9.6751e+003

La capacidad de pandeo (Nm) del eje es  
2.7015e+003

\*\*\*\*\*  
\* Tcr<Tmax SE PRODUCIRA PANDEO POR TORSION \*  
\*\*\*\*\*

Tensiones en las laminas en ejes 1-2

SIG11	SIG22	TAU12
-7.4681e+007	-7.3657e+005	-4.4351e+007
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
6.0692e+008	-3.1817e+007	-2.8600e+006
-6.7370e+008	2.6578e+007	2.8600e+006
-7.4681e+007	-7.3657e+005	-4.4351e+007
-7.4681e+007	-7.3657e+005	-4.4351e+007
-6.7370e+008	2.6578e+007	2.8600e+006
6.0692e+008	-3.1817e+007	-2.8600e+006
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
7.8991e+006	-4.5022e+006	4.4351e+007
-7.4681e+007	-7.3657e+005	-4.4351e+007

Deformaciones de las laminas en ejes 1-2

EPS11	EPS22	GAM12
-5.6591e-004	6.9637e-005	-9.8559e-003
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
4.6798e-003	-5.1761e-003	-6.3555e-004
-5.1761e-003	4.6798e-003	6.3555e-004
-5.6591e-004	6.9637e-005	-9.8559e-003
-5.6591e-004	6.9637e-005	-9.8559e-003
-5.1761e-003	4.6798e-003	6.3555e-004
4.6798e-003	-5.1761e-003	-6.3555e-004
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
6.9637e-005	-5.6591e-004	9.8559e-003
-5.6591e-004	6.9637e-005	-9.8559e-003

- Identificar, según el criterio de rotura de Tsai-Hill, si se ha producido la rotura en cada lámina.
- Calcular, según el criterio de rotura de Tsai-Hill, el margen de seguridad de cada lámina.
- Confirmar la validez del diseño. Éste podrá considerarse válido en caso de que se cumplan las tres condiciones:
  - No se ha producido la rotura en ninguna lámina.
  - Velocidad crítica mayor que la velocidad máxima de servicio.
  - Resistencia a pandeo mayor que el par máximo de servicio.

Factor de seguridad segun el criterio Tsai-Hill

Lamina	Indice de seguridad
1.00	0.13
2.00	0.13
3.00	0.13
4.00	0.13
5.00	0.99
6.00	0.37
7.00	0.13
8.00	0.13
9.00	0.37
10.00	0.99
11.00	0.13
12.00	0.13
13.00	0.13
14.00	0.13

```
*****
* SE PRODUCIRA ROTURA SEGUN EL CRITERIO DE TSAI-HILL *
*****
LO SIENTO! EL ARBOL NO CUMPLE TODAS LAS ESPECIFICACIONES
Su peso (Kg) es
    1.26
```

## SEGUNDA ETAPA:

- Preguntar al usuario si quiere iniciar el proceso de optimización.
- En caso afirmativo, preguntar el número de iteraciones deseadas.

```
Quiere realizar la optimizacion? SI=1,NO=0 >> 1
%%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----%%
Maximo numero de iteracion >>|
```

- Realizar el proceso de optimización.
- Avisar al usuario, una vez terminada la optimización, si se ha encontrado o no la solución óptima.
- En caso afirmativo, mostrar la siguiente información:

## OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

- Peso del árbol.
  - Margen de seguridad.
  - Número de láminas.
  - Velocidad crítica (frecuencia natural).
  - Resistencia a pandeo.
  - Secuencia de apilamiento.
- Mostrar todos los valores anteriormente mencionados en la pantalla de Matlab.

```
%%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----%%
Maximo numero de iteracion >>30000
LOS RESULTADOS MEJORES SON:
  No.Iteracion      Peso      I.Seguridad      No.Lamina      Tcr      Ncrbe
    2509.00         2.13         1.06         24.00      5473.05      9299.55
   11437.00         2.13         1.06         24.00      5473.05      9299.55

Secuencia de apilamiento
  45.00          0
 -45.00          0
  45.00          0
 -45.00         45.00
  45.00        -45.00
 -45.00          0
   0             0
   0         45.00
   0        -45.00
   0         45.00
   0        -45.00
  45.00         45.00
  45.00         45.00
   0        -45.00
   0         45.00
   0        -45.00
   0         45.00
   0             0
 -45.00          0
  45.00        -45.00
 -45.00         45.00
  45.00          0
 -45.00          0
  45.00          0
```

Todas las funciones mencionadas se ve reflejadas en el siguiente esquema:

# OPTIMIZACIÓN DEL DISEÑO

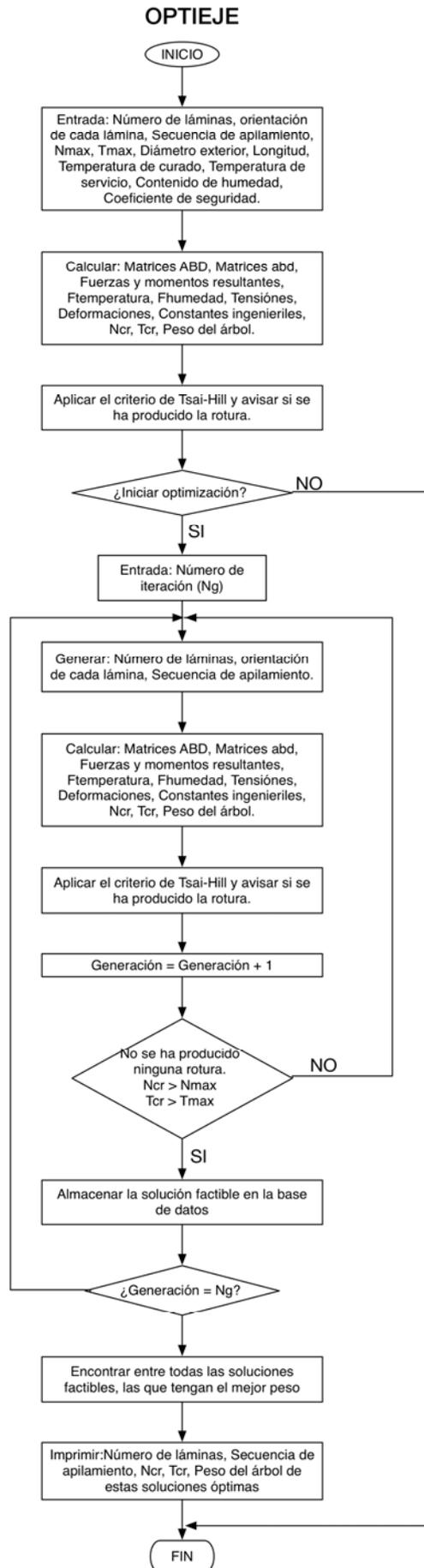


Figura 6.4 Esquema del programa OPTIEJE

## 6.3 RESULTADOS PARA CARBONO/EPOXI

Para el material Carbono/Epoxi (USN150), los diseños óptimos después de 30000 iteraciones, considerando las especificaciones del diseño y las condiciones higrotérmicos, son:

RESULTADOS PARA USN150	
Número de láminas	24
Peso (Kg)	2,13
Coefficiente de seguridad	2,5
Margen de seguridad	6%
Resistencia a pandeo (N·m)	5473
Velocidad crítica (rpm) (frecuencia natural)	9299
Secuencia de apilamiento	$[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$ $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$

Tabla 6.5 Diseño óptimo de carbono/epoxi USN150

LOS RESULTADOS MEJORES SON:

No. Iteracion	Peso	I. Seguridad	No. Lamina	Tcr	Ncrbe
244.00	2.13	1.06	24.00	5473.05	9299.55
435.00	2.13	1.06	24.00	5473.05	9299.55

Secuencia de apilamiento

45.00	0
-45.00	0
0	45.00
0	-45.00
45.00	0
-45.00	0
0	45.00
45.00	-45.00
-45.00	45.00
0	-45.00
0	0
45.00	45.00
45.00	45.00
0	0
0	-45.00
-45.00	45.00
45.00	-45.00
0	45.00
-45.00	0
45.00	0
0	-45.00
0	45.00
-45.00	0
45.00	0

Figura 6.5 Resultado de USN150 en Matlab

El índice de seguridad es la inversa del valor que se obtiene al aplicar el criterio de Tsai-Hill con el coeficiente de seguridad de 2,5.

$$\text{Indice de seguridad} = \left( \frac{2,5^2 \sigma_1^2}{X^2} - \frac{2,5 \sigma_1 2,5 \sigma_2}{X^2} + \frac{2,5^2 \sigma_2^2}{Y^2} + \frac{2,5^2 \tau_{12}^2}{S^2} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned} X &= X_t \text{ si } \sigma_1 > 0 \\ X &= X_c \text{ si } \sigma_1 < 0 \\ Y &= Y_t \text{ si } \sigma_2 > 0 \\ Y &= Y_c \text{ si } \sigma_2 < 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Si dentro de un laminado, no se ha producida la rotura de ninguna lámina, entonces se cumple que:

$$\frac{2,5^2 \sigma_1^2}{X^2} - \frac{2,5 \sigma_1 2,5 \sigma_2}{X^2} + \frac{2,5^2 \sigma_2^2}{Y^2} + \frac{2,5^2 \tau_{12}^2}{S^2} \leq 1 \quad (6.10)$$

Por lo tanto, en este caso el índice de seguridad es un número mayor o igual que 1, y refleja la seguridad del diseño. Un índice mayor indica que el diseño está lejos de la rotura, por lo tanto tiene mayor seguridad.

Nótese que existe más de un diseño óptimo, sin embargo cabe destacar que el número óptimo de láminas para estos resultados es 24. Los dos laminados están formados por diez láminas de 0°, ocho láminas de 45° y seis láminas de -45°. La capacidad de transmisión del par y la frecuencia natural (velocidad crítica) son idénticas para estas dos secuencias de apilamiento.

Para determinar el efecto de la secuencia de apilamiento de estas dos soluciones se llevará el modelo a un programa de simulación ANSYS. Si en el programa la secuencia de apilamiento no produce ninguna variación de las propiedades mecánicas del árbol, se puede afirmar que las soluciones son todas válidas y óptimas.

## 6.4 RESULTADOS PARA VIDRIO/EPOXI

Para el material Vidrio/Epoxi (UGN150), después de aplicar 30000 iteraciones no se encuentra ninguna solución factible. Un análisis más profundo muestra que este material no es capaz de cumplir todas las especificaciones del diseño, especialmente no puede lograr la frecuencia natural requerida.

```
%%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----%%
Maximo numero de iteracion >>30000
LO SIENTO, NO SE HA ENCONTRADO UN RESULTADO OPTIMO
```

El material Vidrio/Epoxi UGN150 tiene una densidad mayor que el USN150, sin embargo, su módulo elástico es menor que el del UGN150. Según la ecuación 4.44, esta diferencia hace que disminuya considerablemente la frecuencia natural de un árbol de transmisión hecho con el material USN150.

$$f_n = \frac{\pi p^2}{2L^2} \sqrt{\frac{E_x I_x}{\rho A}} = \frac{\pi p^2}{2L^2} \sqrt{\frac{E_x \pi (r_0^4 - r_i^4)}{4 \rho A}} \quad (4.44)$$

p=1 cuando se trata de la primera frecuencia natural.

Experimentalmente se determina que un árbol de transmisión construido con dicho material y que cumple las siguientes especificaciones del diseño:

- Capacidad de transmisión del par mayor que el par máximo.
- Resistencia a pandeo de torsión mayor que el par máximo.
- No rompe ninguna lamina según el criterio de Tsai-Hill con un coeficiente de seguridad igual a 2,5,

solo puede llegar a una velocidad máxima del giro de 6700 rpm.

Visto este resultado, el Vidrio/Epoxi (UGN150) queda descartado como el material para el diseño del árbol de transmisión, ya que no puede satisfacer todas las especificaciones del diseño.

Una vez obtenidos los diseños óptimos mediante el cálculo analítico, es conveniente realizar un análisis por el método de los elementos finitos, para comprobar la validez de estos diseños. En el siguiente capítulo se explicará detalladamente el procedimiento para realizar un análisis por el MEF, utilizando el programa ANSYS.

# CAPÍTULO 7

## ANÁLISIS POR EL MEF

---

### 7.1 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 6 se ha obtenido, mediante un modelo matemático y un programa de optimización, dos diseños óptimos del árbol de transmisión. En este capítulo, se realizará un análisis por el método de los elementos finitos para comprobar la validez del diseño analítico.

El método de los elementos finitos surgió por la necesidad de resolver problemas complejos de elasticidad de materiales y de estructuras, sobre todo en la ingeniería civil y aeronáutica. Su desarrollo empezó con la obra de A. Hrennikoff [55] y R. Courant. [56]. En China, en los años 50 y 60, basándose en los cálculos de la construcción de presas, K. Feng propuso un método numérico sistemático para resolver ecuaciones diferenciales parciales. El método se llama Método de Diferencias Finitas, basado en el principio de variación, que era otro método independiente del método de los elementos finitos.

Aunque los métodos utilizados por estos investigadores son diferentes, comparten una característica esencial: la discretización de un dominio continuo en sub-dominios discretos mediante mallas. Los sub-dominios normalmente se denominan elementos. Hrennikoff discretiza el dominio mediante un tipo de celosía, mientras que Courant divide el dominio en subregiones triangulares para resolver ecuaciones diferenciales parciales elípticas de segundo orden (EDP), las cuales surgieron del problema de la torsión en un cilindro. La idea de Courant se obtiene a partir de los resultados anteriores desarrollados por Rayleigh, Ritz y Galerkin, y su contribución fue revolucionaria.

La idea de subdividir un dominio entero en partes más simples tiene varias ventajas:

- Representación precisa de geometrías complejas.
- Permite la utilización de distintos materiales en una misma.
- Representación sencilla de la solución global.
- Captura de los efectos locales.

Un trabajo típico del método de los elementos finitos incluye:

1. Dividir el dominio del problema en un conjunto de subdominios. Cada subdominio es representado por una serie de ecuaciones de elemento, asociadas al problema original.

2. Ensamblar sistemáticamente todas las ecuaciones de elemento en un sistema global de ecuaciones. El sistema global de ecuaciones se puede resolver con métodos ya conocidos, obteniendo un resultado numérico.

En la primera etapa, las ecuaciones de elementos son simples y sólo permiten la aproximación local al problema completo. Las ecuaciones del problema original son frecuentemente ecuaciones diferenciales parciales (EDP). El proceso, en términos simples, es un procedimiento que minimiza el error de aproximación mediante el ajuste de las funciones de prueba en las EDPs. El proceso elimina todas las derivadas espaciales de la EDP, transformándola en un conjunto de ecuaciones algebraicas para los problemas de estado estacionario, y en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias para los problemas transitorios.

Las ecuaciones transformadas son las ecuaciones de los elementos anteriormente mencionados. Las ecuaciones algebraicas que surgen de los problemas de estado estacionario se resuelven mediante métodos de álgebra lineal, mientras que las ecuaciones diferenciales ordinarias que surgen de los problemas transitorios se resuelven por integración numérica, utilizando técnicas convencionales, tales como el método de Euler.

En la segunda etapa, un sistema global de ecuaciones se genera a partir de las ecuaciones de elementos. Esta generación se realiza mediante la transformación de coordenadas de los nodos locales de los subdominios a los nodos globales del dominio. El proceso se realiza frecuentemente por el software MEF.

En el capítulo anterior, se han obtenido los diseños óptimos y se han calculado las especificaciones del diseño, que incluyen la resistencia a pandeo y la frecuencia natural del árbol de transmisión. El diseño analítico se ha llevado aproximadamente cien horas de trabajo (veinte horas para la construcción del modelo matemático basado en la CLT, cuarenta horas para el desarrollo del programa myPSO, cuarenta horas para el desarrollo y la mejora del programa OPTIEJE).

En este capítulo, el modelo se introducirá en un software de simulación numérica, denominado ANSYS Mechanical APDL, para realizar un análisis por el método de los elementos finitos. Este análisis llevará unas veinte horas de trabajo. Sumando las cuarenta horas de trabajo para el análisis de la unión horquilla-árbol, el tiempo total empleado para el análisis por el MEF es de aproximadamente sesenta horas.

En los siguientes apartados se realizará una serie de análisis por el MEF para cada uno de los dos diseños calculados en el capítulo 6, que incluye:

- Un análisis estático que evalúa la resistencia bajo las cargas de servicio.
- Un análisis modal que evalúa la frecuencia natural del árbol.
- Un análisis de pandeo que evalúa la resistencia a pandeo.

Los tres análisis permiten al usuario obtener una idea más clara del comportamiento mecánico del árbol de transmisión diseñado, visualizando las deformaciones del mismo bajo la carga de servicio, los modos de vibración o los modos de pandeo.

Sin embargo, cabe destacar que un análisis por el MEF resuelve un diseño, pero no lo optimiza. Es decir, el programa de simulación numérica es capaz de indicar al usuario la validez o no del diseño, pero no ofrecerá un plan de mejora o de optimización. El usuario tiene que optimizar el diseño basándose en el cálculo analítico o el modelo matemático. En este sentido, la misión fundamental de este análisis es comprobar la validez del diseño analítico.

## 7.2 MODELADO DE MATERIALES COMPUESTOS

Para el modelado del árbol de transmisión de materiales compuestos se utiliza el elemento SHELL181. Este elemento es adecuado para el análisis de estructuras laminadas finas. EL SHELL181 es un elemento 3-D con cuatro nodos que permite el modelado de los materiales compuestos. Este elemento tiene seis grados de libertad, que son los desplazamientos y giros de los ejes XYZ. La opción triangular degenerada sólo debe utilizarse como elementos de relleno en la generación de mallas.

Los elementos SHELL181 se adaptan bien a los problemas lineales de gran rotación, o a los problemas no lineales de gran deformación. En los análisis no lineales el cambio de espesor se tiene en cuenta. Cuando se utilizan los elementos SHELL181 para resolver una geometría, el usuario puede asignar el número de puntos de Gauss o punto de integración (1, 3, 5, 7 o 9) distribuidos a lo largo del espesor de cada lámina. Cuando el número es 1, el punto de Gauss se sitúa en el plano medio del espesor. Cuando el número es 3 o superior, se sitúa un punto de Gauss en la cara superior y otro en la cara inferior de la lámina, el resto de los puntos se distribuyen uniformemente a lo largo del espesor. En la casilla señalada en la figura 7.1 el usuario puede seleccionar el número de puntos de Gauss.

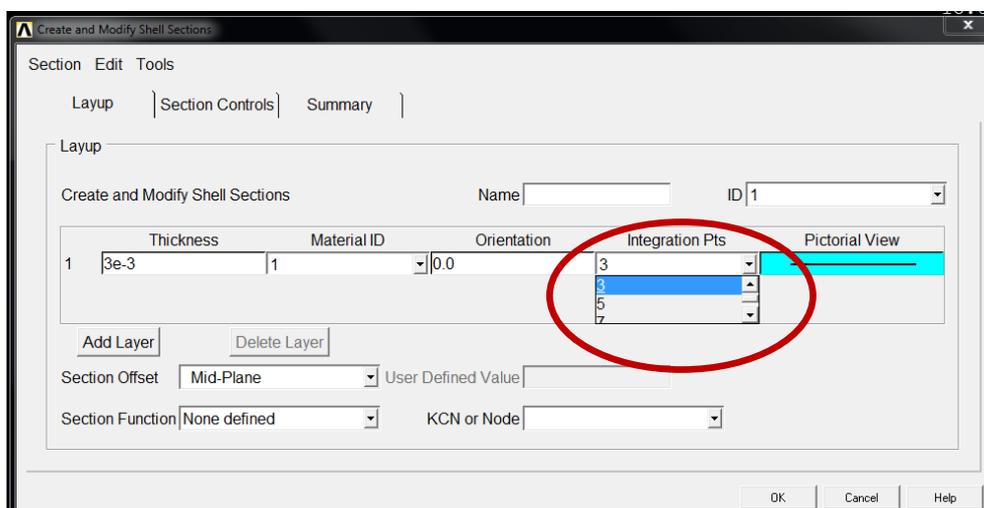


Figura 7.1 Selección de los puntos de Gauss

En este proyecto se emplea la configuración predeterminada, que ofrece 3 puntos de Gauss para cada lámina. Sin embargo, cuando se produce la deformación plástica de la estructura, el número de puntos de Gauss asciende automáticamente a un mínimo de 5, para adaptarse mejor a la plasticidad.

El modelado de un laminado con SHELL181 es sencillo. Introduciendo el espesor y el ángulo de cada lámina se calculan automáticamente las propiedades del laminado.

Cuando se utiliza el elemento SHELL181, hay que tener en cuenta que los elementos de área nula no están permitidos. Esto ocurre con mayor frecuencia cuando los elementos no están numerados correctamente. Los elementos de espesor nulo en cualquier esquina tampoco están permitidos. En el anexo 4 se muestra una introducción sobre el modelado de un material compuesto en ANSYS, utilizando el elemento SHELL181.

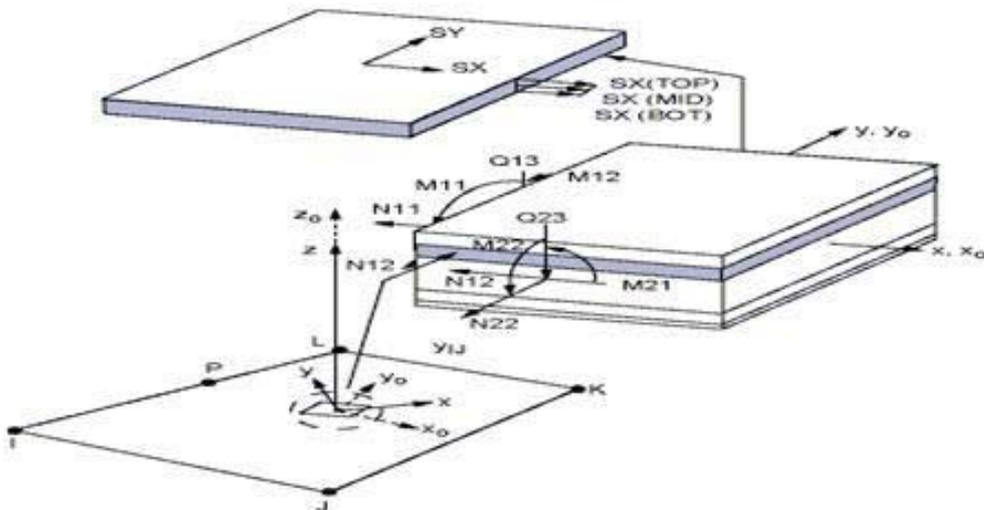


Figura 7.2 Elemento SHELL181 de ANSYS [57]

## 7.3 ANÁLISIS ESTÁTICO

El análisis estático trabaja con condiciones de equilibrio de una pieza sometida a cargas. El análisis estático puede ser lineal o no lineal, dado que ANSYS permite todo tipo de no linealidades, tales como grandes deformaciones, plasticidad, fluencia, elementos de contacto, etc. Un análisis estático sirve para determinar las tensiones, deformaciones, desplazamientos y fuerzas en una estructura sometida a cargas estáticas.

Los resultados de un análisis estático dan una idea clara de cómo se comporta la estructura frente a las cargas aplicadas, indicando el coeficiente de seguridad según distintos criterios de rotura. Mediante este análisis los diseñadores pueden evitar el fallo de una estructura antes de construir una pieza real.

Para analizar el comportamiento del árbol de transmisión bajo cargas estáticas, se ha modelado el árbol en el programa ANSYS. El árbol está fijado rígidamente por un extremo, restringiendo los seis grados de libertad, como se muestra en la figura 7.3. Para la aplicación del par de 3500 N·m, dado que el ANSYS no permite aplicar el par sobre las líneas, se ha creado un punto ficticio situado en el centro del extremo libre. Este punto está ligado rígidamente con el extremo libre, como se muestra en la figura 7.4. Cualquier carga que se aplica sobre este punto se transmitirá al extremo libre del árbol. Mediante este método, se consigue la aplicación del par en las líneas.

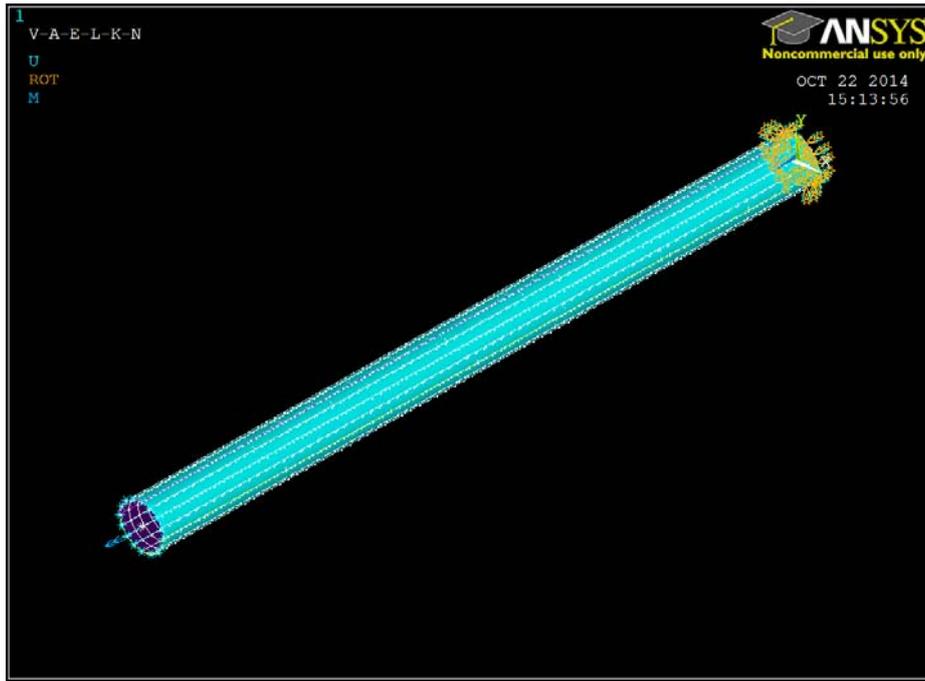


Figura 7.3 Aplicación de cargas y fijación del árbol

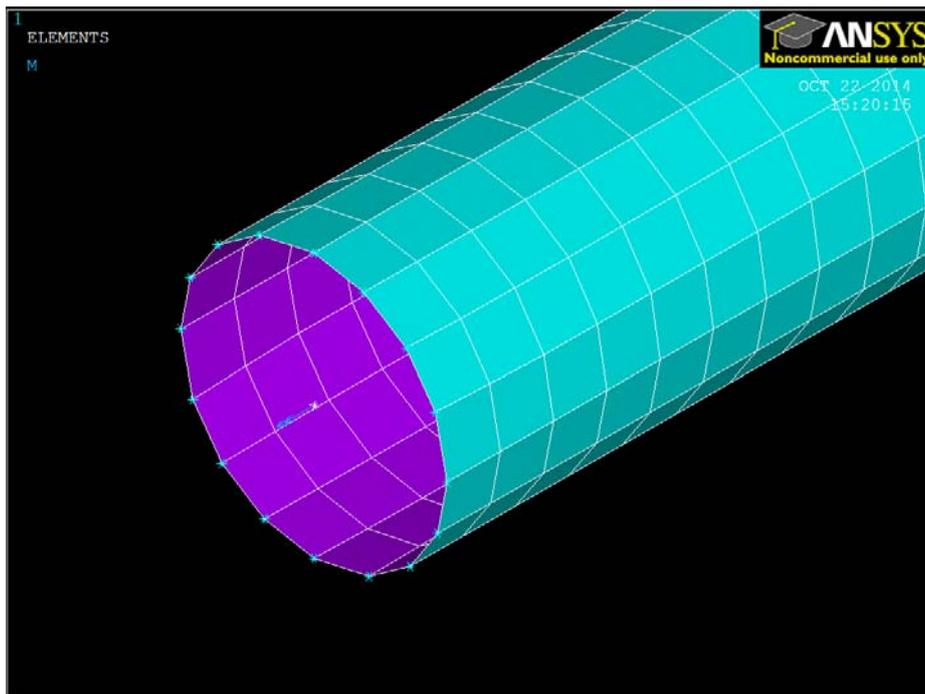


Figura 7.4 Aplicación del par

A continuación se mostrará una serie de resultados obtenidos por el análisis estático.

### 7.3.1 DESPLAZAMIENTOS

Las dos siguientes figuras muestran los desplazamientos de cada uno de los dos diseños. Nótese que el resultado es coherente con las cargas introducidas. El mayor desplazamiento se produce en el extremo libre, donde se aplica el par. En el otro extremo no se ha producido ningún desplazamiento, debido a que están restringidos los seis grados de libertad en esta sección.

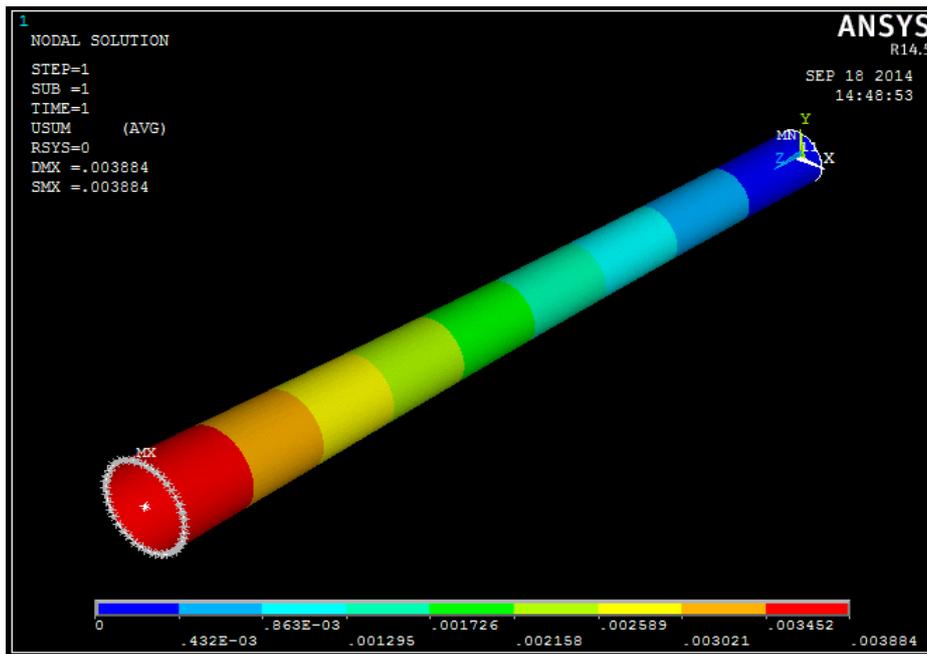


Figura 7.5 Desplazamiento del diseño  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$

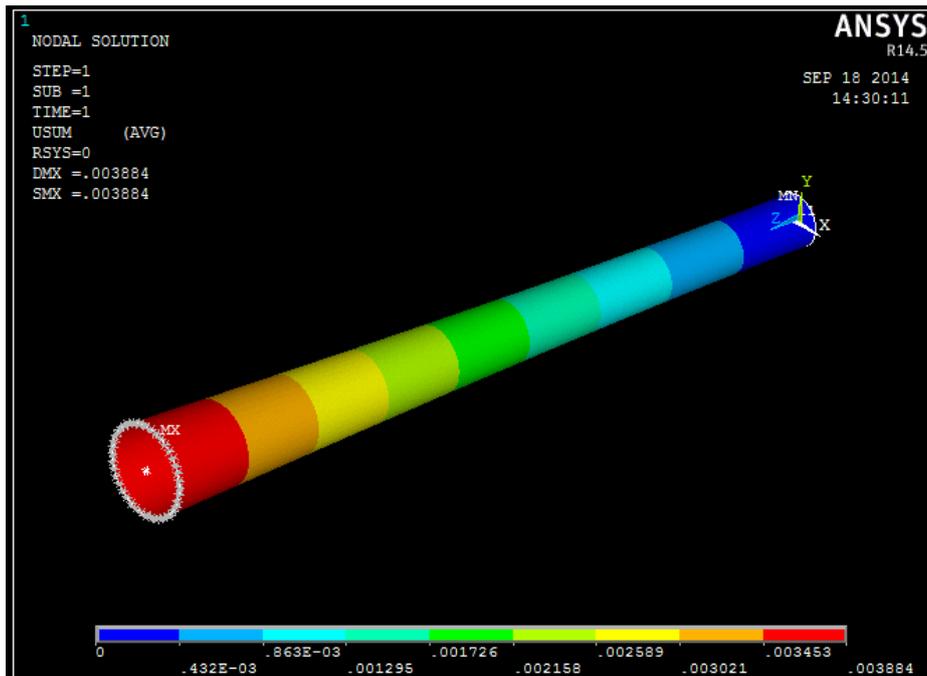


Figura 7.6 Desplazamiento del diseño  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$

### 7.3.2 TENSIÓN DE VON-MISES

Las dos siguientes figuras muestra la distribución de tensiones equivalentes de Von Mises de cada uno de los dos diseños. Nótese que igual como el caso de los desplazamientos, la distribución de tensiones equivalentes de Von-Mises obtenida para los dos casos son prácticamente idénticas y adquiere un valor de 169 MPa.

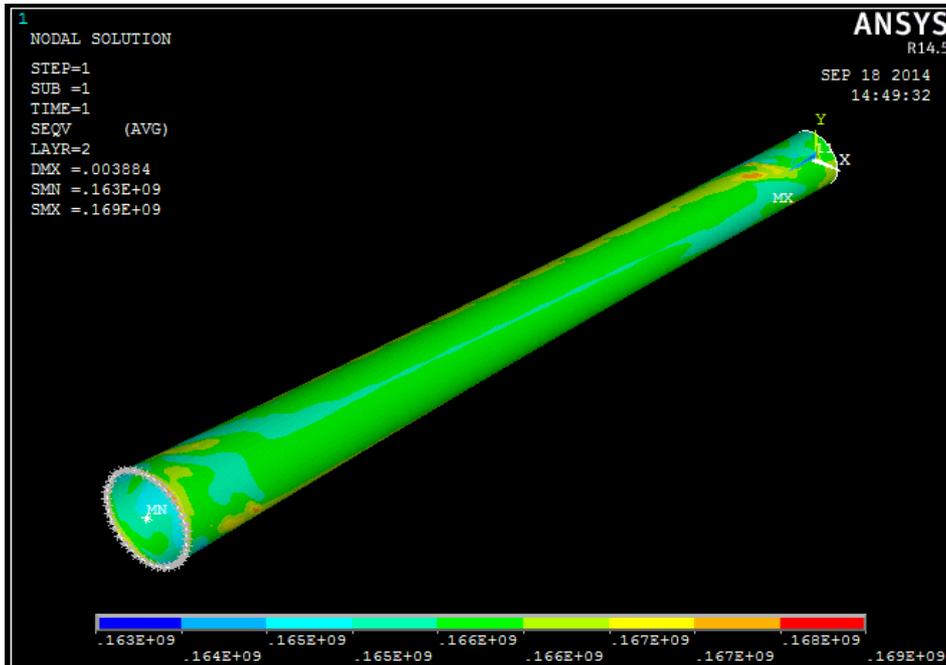


Figura 7.7 Tensión Von-Mises del diseño  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0 /\pm 45/0_2 /45]_S$

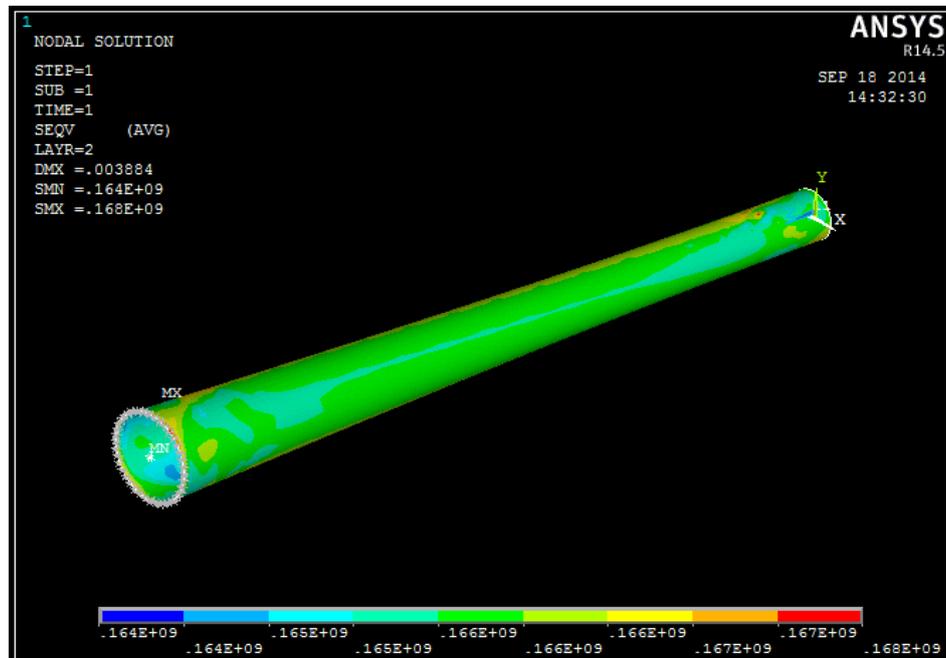


Figura 7.8 Tensión Von-Mises del diseño  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/ 0/45]_S$

## 7.4 ANÁLISIS MODAL

El análisis modal sirve para determinar las frecuencias naturales de las estructuras. Un análisis modal correcto evita el posible fenómeno de resonancia. En el programa ANSYS, para realizar este análisis se deben sujetar los dos extremos del árbol y dejar que vibre libremente bajo la carga gravitatoria. Existen varios modos de vibración, en este proyecto sólo interesa el primer modo de vibración y su correspondiente frecuencia, debido a que para los siguientes modos de vibración, la correspondiente frecuencia será mayor que la del primer modo. A continuación se muestra la fijación del árbol y los resultados obtenidos mediante el análisis modal.

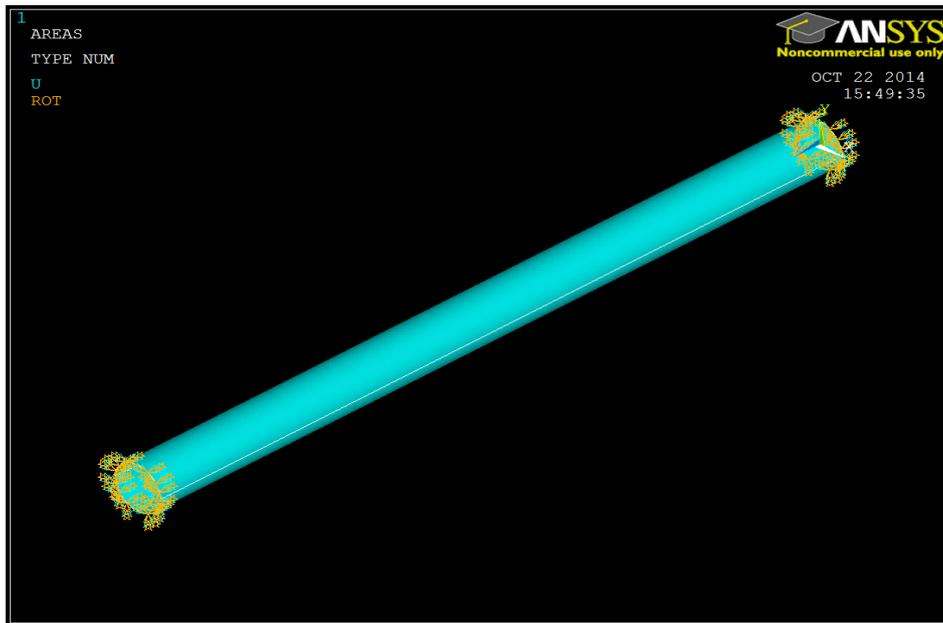


Figura 7.9 Fijación del árbol para el análisis modal

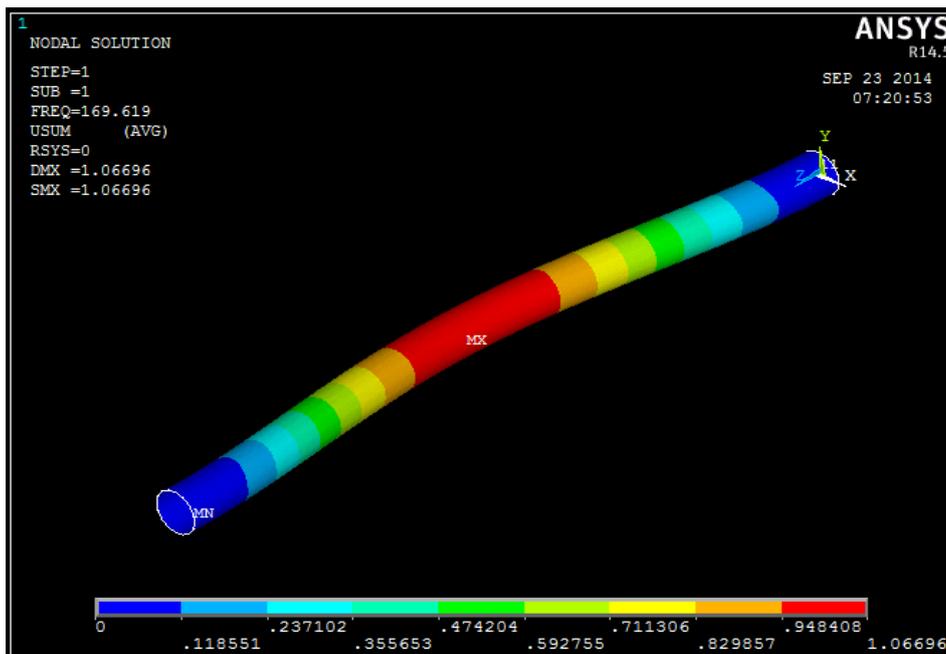


Figura 7.10 Primera frecuencia natural de  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$

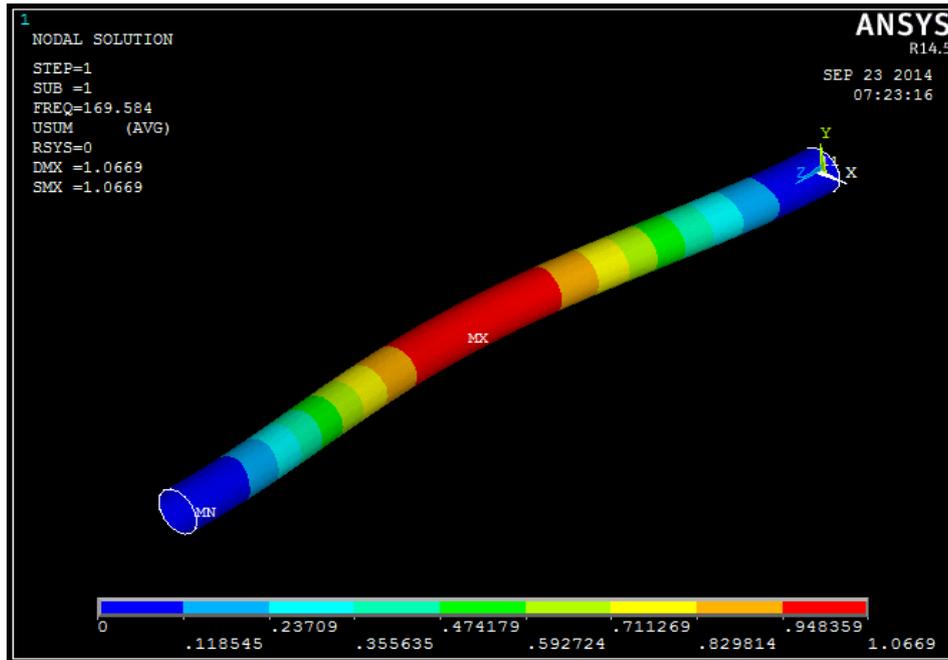


Figura 7.11 Primera frecuencia natural de  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$

Nótese que para los dos casos, la frecuencia natural del primer modo de vibración es aproximadamente 170 Hz, que corresponde a 10200 rpm. Según este resultado, la secuencia de apilamiento tiene muy poca influencia sobre la frecuencia natural.

## 7.5 ANÁLISIS DE PANDEO

El programa ANSYS permite realizar el análisis de pandeo para determinar la resistencia a pandeo y visualizar los distintos modos de pandeo. En el diseño de un árbol de transmisión este análisis resulta muy importante, la resistencia a pandeo tiene que ser mayor que la carga a transmitir para evitar el fallo del mismo.

En un análisis de pandeo, la resistencia a pandeo de una pieza estructural es igual a la carga aplicada, multiplicada por el factor de pandeo. Por ejemplo, si se aplica un par de 200 N·m y el factor de pandeo obtenido es igual a 8, la resistencia a pandeo es igual a  $8 \cdot 200 = 1600$  N·m. Las dos figuras siguientes muestran el primer modo de pandeo y el factor de pandeo de la secuencia  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$  y  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$ , respectivamente.

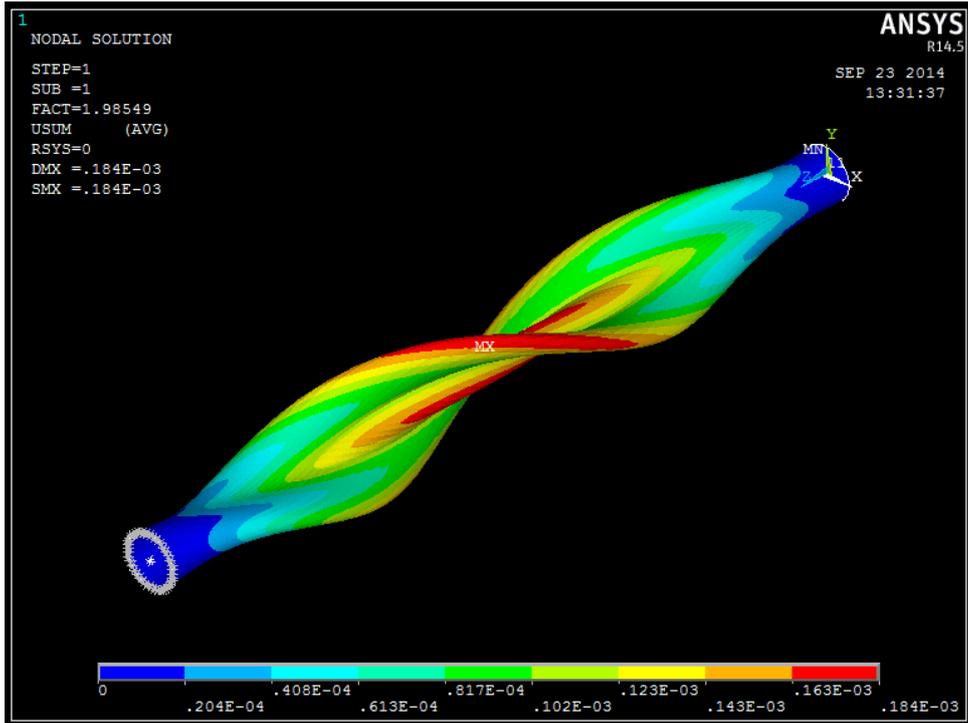


Figura 7.12 Deformada de pandeo de  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$

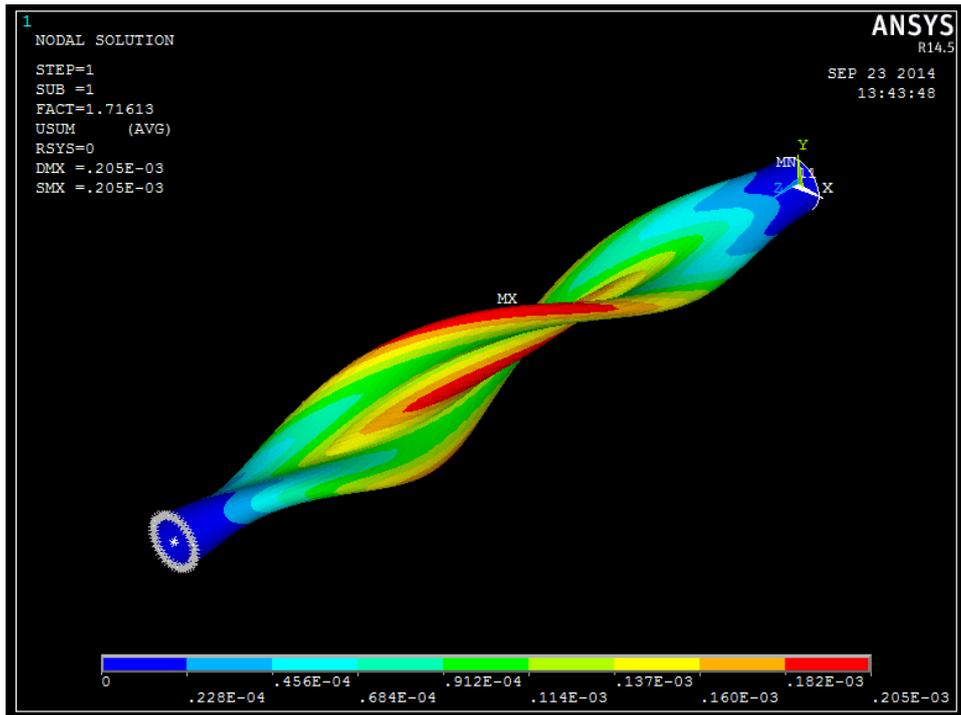


Figura 7.13 Deformada de pandeo de  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$

Los resultados obtenidos resultan distintos para las dos secuencias de apilamiento:

- Resistencia a pandeo de la secuencia  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$

$$N_{cr} = 3500 \text{ N}\cdot\text{m} * 1,98 = 6930 \text{ N}\cdot\text{m}$$

- Resistencia a pandeo de la secuencia  $[0_2/\pm 45/0_2/\pm 45/\pm 45/0/45]_S$

$$N_{cr} = 3500 \text{ N}\cdot\text{m} * 1,76 = 6160 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Según los análisis anteriores, el árbol de transmisión de materiales compuestos con la secuencia  $[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_S$ , tiene mejores propiedades mecánicas, especialmente en cuanto a la resistencia a pandeo, por lo que se elegirá esta secuencia como diseño óptimo.

# CAPÍTULO 8

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

### 8.1 COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En los capítulos anteriores se ha llevado a cabo un diseño analítico del árbol de transmisión, basado en la teoría clásica de laminados, y un análisis por el método de los elementos finitos. El modelo matemático del diseño analítico es trasladado al programa Matlab, realizando la optimización del diseño. Los resultados muestran que no es viable la fabricación de un árbol con el material UGN150 (Vidrio/Epoxi) consiguiendo que se cumplan todas las especificaciones del diseño. Sin embargo, con el material USN150 (Carbono/Epoxi) este diseño es viable. Además, durante el proceso de optimización se observa la coexistencia de varios diseños óptimos con características similares. Para observar la diferencia entre los diseños óptimos, el modelo se lleva al programa de simulación ANSYS y se observa que la secuencia de apilamiento tiene un efecto considerable en la resistencia a pandeo. Finalmente, uno de los dos diseños se ha elegido como el diseño óptimo del árbol de transmisión. La siguiente tabla muestra los parámetros del diseño elegido:

DISEÑO ÓPTIMO	
Material utilizado	Carbono/Epoxi USN150
Número de láminas	24
Peso (kg)	2,13
Coefficiente de seguridad	2,5
Margen de seguridad	6%
Resistencia a pandeo (N·m)	5473
Velocidad crítica (rpm) (frecuencia natural)	9299
Secuencia de apilamiento	$[\pm 45/0_2/\pm 45/0/\pm 45/0_2/45]_s$

Tabla 8.1 Parámetros del diseño elegido

La siguiente tabla muestra una comparación de los resultados analíticos y resultados por el MEF del diseño:

	Analítico	MEF	Error
Frecuencia natural	9299	10140	8,3%
Resistencia a pandeo	5473	6930	21%

Tabla 8.2 Comparación de resultados

Según los análisis, los resultados obtenidos por el MEF resultan mayores que los resultados analíticos en general. En el caso de la frecuencia natural, el resultado por MEF es un 8,3% mayor que el resultado analítico. En el caso de la resistencia a pandeo el resultado es un 21% mayor que el resultado analítico. La

diferencia entre los resultados analíticos y los obtenidos por el MEF puede ser causada por la simplificación del modelo real. La elección entre los distintos modelos idealizados también influye en los resultados en el cálculo analítico. Debido a que el error cometido está dentro del rango aceptable y que los resultados obtenidos por el MEF muestran que el diseño cumple todas las especificaciones del diseño sin producir rotura, se considera que el diseño es válido.

Según este diseño, el peso del árbol de material compuesto es 2,13 kg, mientras que un árbol convencional de acero tiene un peso de 9,8 kg. Por lo tanto, la sustitución del acero por el material Carbono/Epoxi USN150 supone una reducción del peso de 78,6%.

A continuación se mostrará la distribución de tensiones y deformaciones en ejes materiales a lo largo del espesor del laminado.

## 8.2 TENSIONES Y DEFORMACIONES

Para el diseño óptimo obtenido en el apartado anterior, el programa OPTIEJE calcula las distribuciones de tensiones y de deformaciones a lo largo del espesor. Los resultados calculados están expresados en ejes materiales y se mostrarán a continuación.

La figura 8.1 muestra la distribución de tensiones normales en dirección longitudinal ( $\sigma_{11}$ ) a lo largo de espesor.

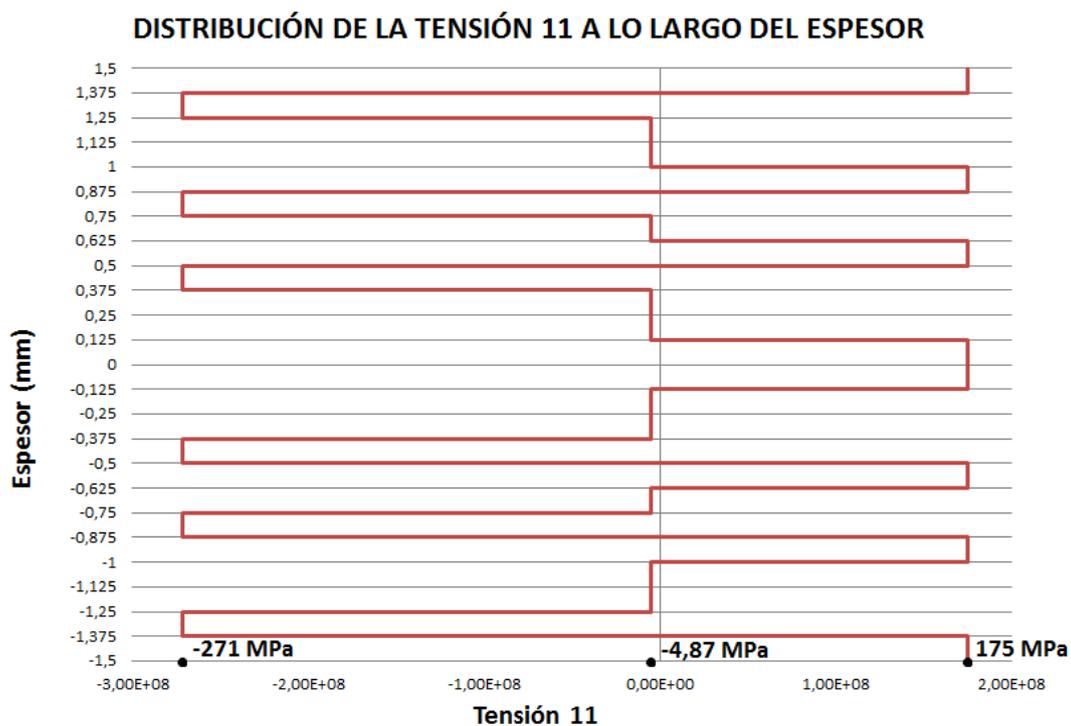


Figura 8.1 Distribución de tensiones 11 a lo largo del espesor

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La figura 8.2 muestra la distribución de tensiones normales en dirección transversal ( $\sigma_{22}$ ) a lo largo de espesor.

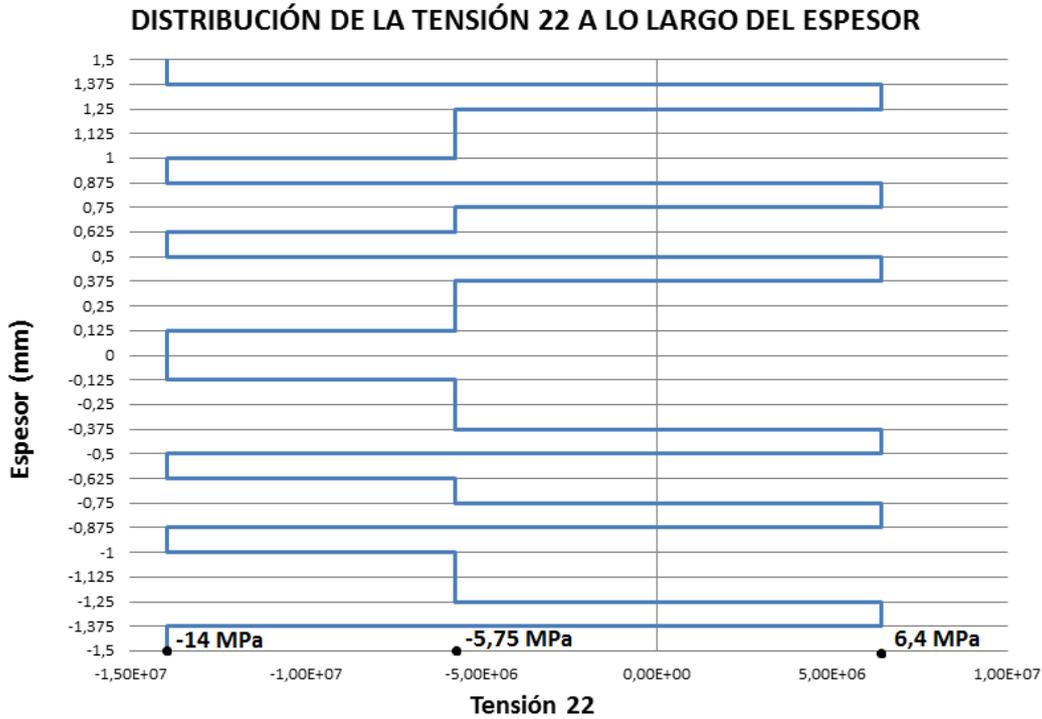


Figura 8.2 Distribución de la tensiones 22 a lo largo del espesor

La figura 8.3 muestra la distribución de tensiones cortantes ( $\tau_{12}$ ) a lo largo de espesor.

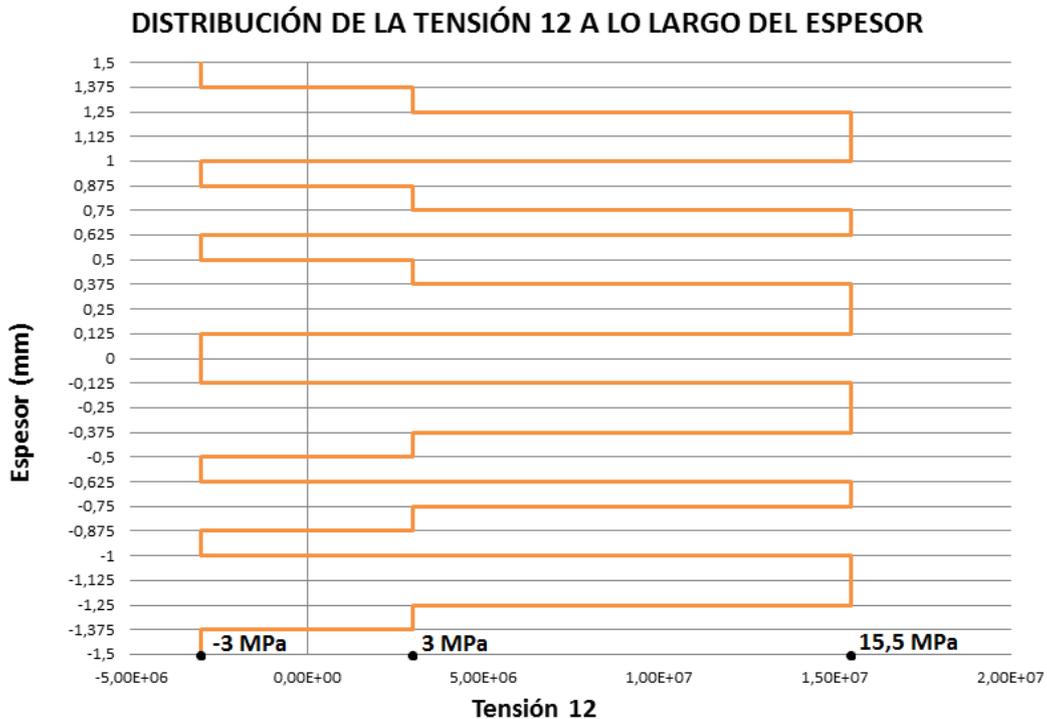


Figura 8.3 Distribución de la tensiones 12 a lo largo del espesor

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La figura 8.4 muestra la distribución de deformaciones normales en la dirección longitudinal ( $\epsilon_{11}$ ) a lo largo de espesor.

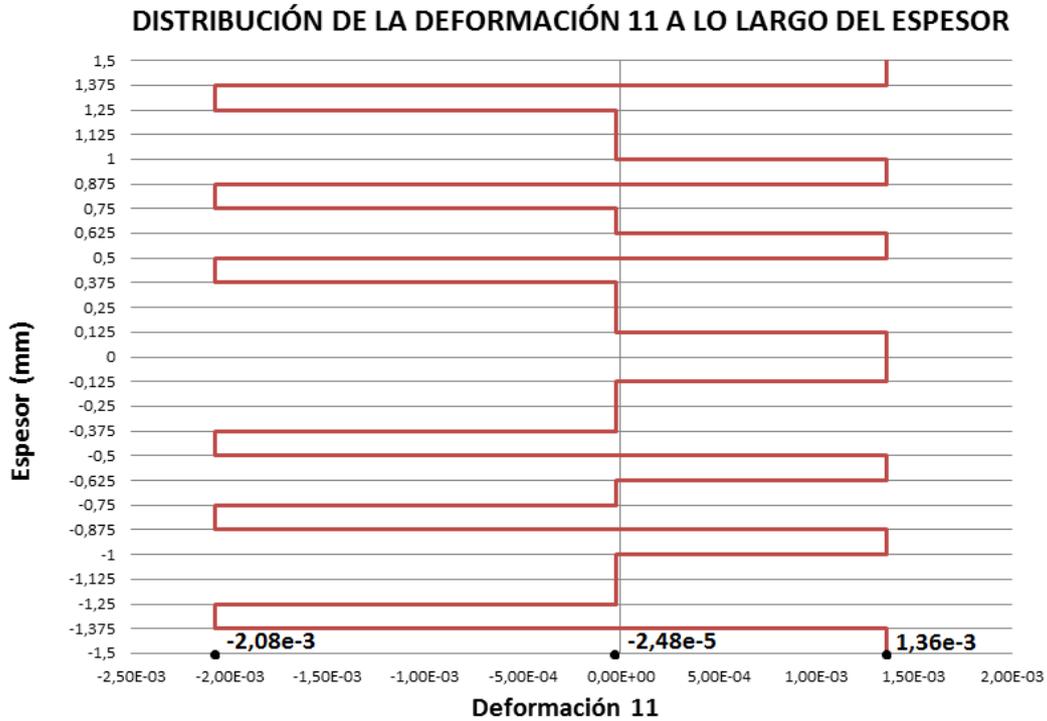


Figura 8.4 Distribución de la deformaciones 11 a lo largo del espesor

La figura 8.5 muestra la distribución de deformaciones normales en la dirección transversal ( $\epsilon_{22}$ ) a lo largo de espesor

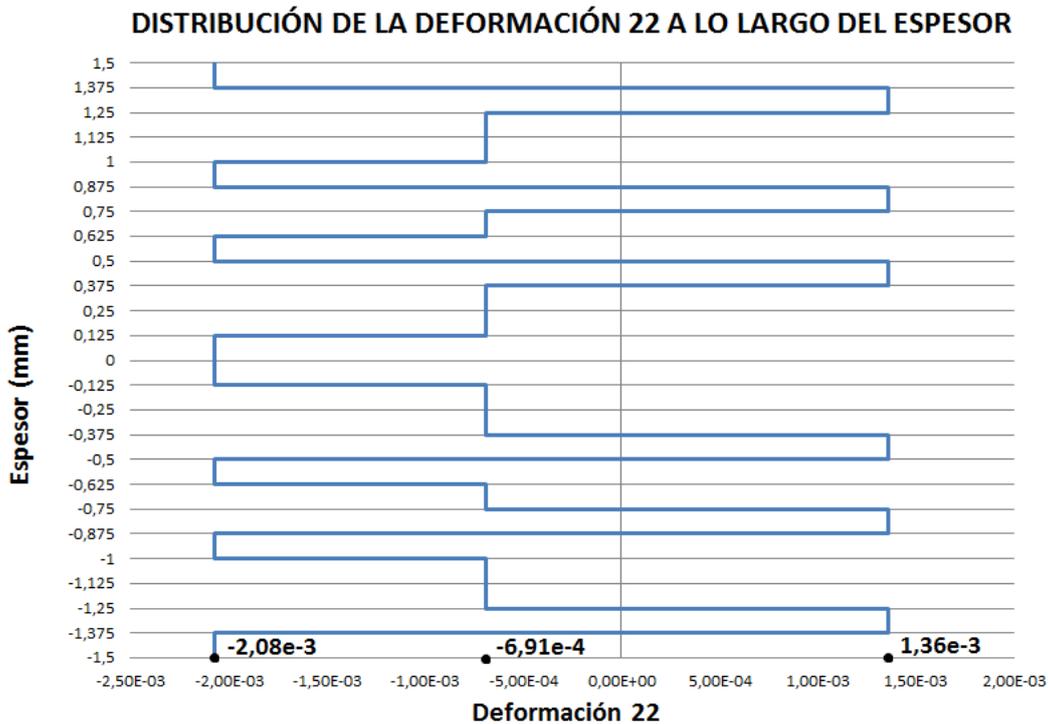


Figura 8.5 Distribución de la deformaciones 22 a lo largo del espesor

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La figura 8.6 muestra la distribución de deformaciones tangenciales ( $\gamma_{12}$ ) a lo largo de espesor.

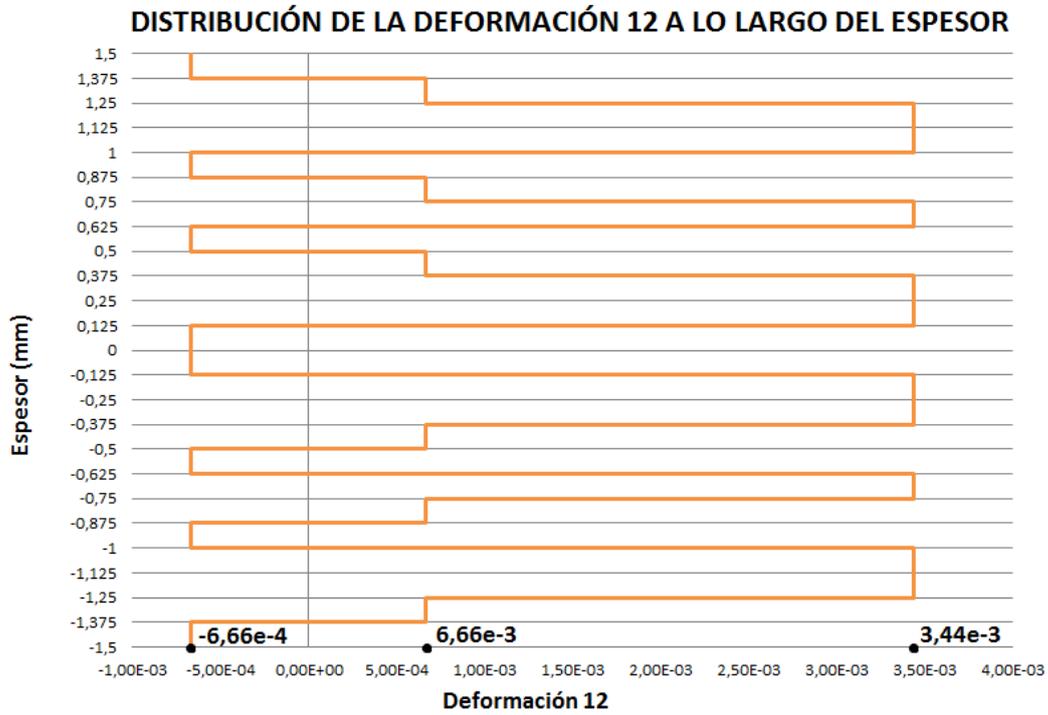


Figura 8.6 Distribución de la deformaciones 12 a lo largo del espesor

# CAPÍTULO 9

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

---

### 9.1 CONCLUSIONES

Tras realizar los distintos estudios que se exponen en los capítulos anteriores, se obtienen las siguientes conclusiones:

En primer lugar, mediante el uso del material compuesto Carbono/Epoxi USN150, se ha diseñado exitosamente un árbol de transmisión tubular ultraligero que tiene un peso de 2,13 kg, mientras que un árbol convencional hecho de acero pesa 10 kg. La reducción del peso es de un 78,7%.

A la hora de diseñar un elemento estructural con los materiales compuestos, hay que realizar una selección cuidadosa del material, ya que cada tipo de materiales compuestos presenta propiedades mecánicas muy distintas. La elección inadecuada del material podría causar, en el caso extremo, el fracaso del diseño, como lo que ha ocurrido con el material Vidrio/Epoxi UGN150.

Aunque los materiales compuestos presentan muchas ventajas, estos materiales dificultan más el diseño que los materiales convencionales. Las variables de entrada, tales como el número de láminas, la orientación de las fibras o la secuencia de apilamientos, conducen a un número infinito de combinaciones posibles. Por lo tanto, a la hora de diseñar con los materiales compuestos, la optimización resulta un aspecto fundamental. Un diseño no optimizado produciría muchos problemas, tales como el desaprovechamiento del material o el sobredimensionado del elemento estructural.

En cuanto a la optimización, existen numerosos métodos. Cada método tiene sus propias ventajas e inconvenientes, y llevará un coste computacional muy distinto. Durante el desarrollo de los programas myPSO y OPTIEJE, se han observado varios aspectos importantes que se comentará a continuación:

La primera observación es que la optimización por enjambre de partículas tiene un coste computacional elevado. Para un mismo problema, este método necesita un tiempo de procedimiento mucho más largo que otros métodos más simples.

Además, se observa que los métodos más avanzados no son necesariamente más eficientes que los métodos más básicos. La elección de un método de optimización u otro, tiene que basarse en la naturaleza del problema. El programa OPTIEJE, desarrollado con un método muy básico, consigue una

eficiencia excelente y una reducción considerable del coste computacional, comparado con el myPSO.

Una vez obtenido el diseño óptimo mediante los cálculos analíticos y el proceso de optimización, se ha realizado un análisis por el MEF para comprobar la validez del diseño analítico. Se comparan los resultados analíticos y los resultados obtenidos por el método de los elementos finitos. El error cometido en la velocidad crítica es de un 8,2%. El error cometido en la resistencia a pandeo es de un 21%. Dado que el error cometido está dentro del rango razonable, y los resultados obtenidos por el MEF muestran que el diseño cumple todas las especificaciones sin producir rotura, se considera que el diseño analítico es válido.

## 9.2 TRABAJOS FUTUROS

A partir de los datos e información recopilados en este proyecto se sugieren como futuras líneas de trabajo:

1. Selección y prueba de otros materiales compuestos para el diseño del árbol de transmisión.
2. Diseño híbrido que combina la fibra de carbono y la fibra de vidrio, para equilibrar el alto coste de la fibra de carbono y la falta de rigidez de la fibra de vidrio.
3. Diseño híbrido que combina los materiales compuestos y los materiales metálicos como el aluminio, titanio o magnesio, para optimizar el comportamiento del árbol de transmisión.
4. Diseñar el árbol de transmisión de otras tipologías estructurales.
5. Estudio del efecto de un impacto sobre el árbol de transmisión cuando éste se encuentra girando. Por ejemplo, el impacto de una piedra cuando el árbol gira a velocidad máxima.
6. Estudio profundo del efecto de la secuencia de apilamiento sobre el comportamiento del árbol de transmisión.
7. Estudio del comportamiento del árbol en fatiga.
8. Estudio de la viabilidad de emplear la unión atornillada en este caso, evaluando los efectos introducidos por las concentraciones de tensión.
9. Estudio detallado de los modos de fallo y el comportamiento a rotura del árbol de transmisión fabricado con materiales compuestos.
10. Desarrollo de otros métodos de optimización, para mejorar la eficiencia.

# CAPÍTULO 10

## REFERENCIAS

---

- [1] Jun Shen, Huai Qing Xie. Investigation and application of composite materials in aerospace structures. 2006. ISBN: 1003-0999-2006-05-0048-07
- [2] European Commission, Research & Innovation of Transport. Reduction of CO<sub>2</sub>. [http://ec.europa.eu/research/transport/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/research/transport/index_en.htm)
- [3] Muñoz, C.; Sanfélix, J.; Franco, V.; Garraín, D.; Vidal, R.; Justel, D. Estimación de la reducción del consumo de combustible en vehículos como consecuencia de la reducción del peso. *En XIV Congreso de Ingeniería de Proyectos (AEIPRO)*, Madrid, 30 de junio, 1 y 2 Julio 2010, p. 2357-2368
- [4] Fibra de carbono: guía básica para conocer uno de los materiales más importantes de la F1 actual.  
<http://www.caranddriverthef1.com/formula1/articulos/2013/06/06/75555-fibra-de-carbono-f1-tecnico-los-materiales-compuestos>
- [5] Materiales compuestos: una tecnología Madura, Carlos González.  
<http://www.madrimasd.org/informacionIdi/analisis/analisis/analisis.asp?id=38324>
- [6] Empleo de los materiales compuestos en un coche de marca Porsche.  
<http://todosobrecoches.blogspot.com.es/2011/04/material-de-fabricacion-de-coches.html>
- [7] Dr. Andrew Pollard, *GKN Technology, Wolverhampton, UK*. Polymer matrix composites in driveline applications
- [8] Árbol de transmisión para vehículos y maquinaria  
<http://www.directindustry.es/prod/eugen-klein-gmbh/arboles-transmision-vehiculos-maquinaria-92319-913731.html>
- [9] Rangaswamy, T.; Vijayrangan, S. (2005). Optimal sizing and stacking sequence of composite drive shafts. *Materials science, Vol. 11 No 2. India*.
- [10] S. Suresh, P. B. Sujit and A.K. Rao. Particle Swarm Optimization Approach for Multi-Objective Composite Box-Beam Design. *Composite Structures, Volume 81, Issue 4, December 2007, Pages 598–605*
- [11] Árboles de transmisión tubular.  
<http://h2ocooling.com/cooling-tower-part/driveshafts/addax-drive-shaft-composite-coupling/>
- [12] Árboles de transmisión cilíndrico

<http://xiaochen1.cn.tsb2b.com/company/sell/itemid-5397.shtml>

[13] Sulbarán Andrés, García Miguel, Rodríguez David. Árboles y ejes trabajo final. <https://zh.scribd.com/doc/98420863/Arboles-y-ejes-TRABAJO-FINAL>

[14] Materiales compuestos, Volumen 1. Editado por Antonio Miravete. *Editorial Reverté, S.A. ISBN: 978-84-921349-8-4. Página xxxi.*

[15] Dai Gil Lee and Nam Pyo Suh. Axiomatic design and fabrication of composite- structures. Applications in Robots, Machine Tools, and Automobiles. *Oxford -University Press. 2006. ISBN: 9780195178777*

[16] Global demand for composite materials to surge by 2015  
<http://www.aerospace-technology.com/news/newsglobal-demand-composite-material-surge-by-2015-report>

[17] Gummadi Sanjay, Akula Jagadeesh Kumar. Optimum design and analysis of a composite drive shaft for an automobile. *ISRN: BTH-ATM-EX—2007/D-09--SE*

[18] Introducción de la fibra de carbono.  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Fibra\\_de\\_carbono](http://es.wikipedia.org/wiki/Fibra_de_carbono)

[19] Rosa Menéndez, Propiedades y evolución histórica de los materiales de carbón. *Departamento de Química de Materiales, Instituto Nacional del Carbón, CSIC,*

[20] PERFIGLASS LTDA. Materias primas, poliéster.  
<http://perfiglassltda.com/pdfS/Matriz.pdf>

[21] Antonio Miravete. Los nuevos materiales en la construcción. *Un vol. De 394 págs. ISBN: Z-2222-94 (1994).*

[22] Carbon fibers. April, 2004 - Raghavendra R. Hegde, Atul Dahiya, M. G. Kamath (Monika Kannadaguli & Haoming Rong)

[23] Fabricación de la fibra de boro.  
[http://nptel.ac.in/courses/101104010/lecture2/2\\_5.htm](http://nptel.ac.in/courses/101104010/lecture2/2_5.htm)

[24] Todd Johnson. Thermoplastic vs Thermoset Resins. The Difference In Two Resins Used In FRP Composites  
<http://composite.about.com/od/aboutcompositesplastics/a/Thermoplastic-Vs-Thermoset-Resins.htm>

[25] Resinas de poliéster  
[http://www.tecnoenpol.com/resinas\\_poliester.html](http://www.tecnoenpol.com/resinas_poliester.html)

[26] Introducción a Viniléster  
<http://www.moldedfiberglass.com/materials/vinyl-ester-resins>

## REFERENCIAS

- [27] Propiedades de las fibras de vidrio.  
[http://es.wikipedia.org/wiki/Fibra\\_de\\_vidrio](http://es.wikipedia.org/wiki/Fibra_de_vidrio)
- [28] Esquema del árbol de transmisión.  
<http://elmundodelautomovil.wikispaces.com/Partes+del+automóvil>
- [29] Dai Gil Lee, Hak Sung Kim, Jong Woon Kim, Jin Kook Kim. Design and manufacture of an automotive hybrid aluminum/composite drive shaft. *Composite Structures* 63 (2004) 87–99. 2004
- [30] Timoshenko & Gere. Theory of elastic stability. *McGraw Hill*. 1963.
- [31] Torsional buckling. Simulation of Water inside Carbon Nanotubes  
<http://alum.sharif.ir/~mohsensadeghi/works.html>
- [32] Dr. Prof. Carlos Navarro. Elasticidad y Resistencia de materiales II.
- [33] Diseño y análisis de materiales compuestos. Stephen W.Tsai. *Editorial Reverté. S.A.*
- [34] Humedad relativa de España  
[http://www.ign.es/espmap/mapas\\_clima\\_bach/Mapa\\_clima\\_07.htm](http://www.ign.es/espmap/mapas_clima_bach/Mapa_clima_07.htm)
- [35] Esquema del proceso de Filament Winding.  
<http://autorneto.com/referencia/hazlo-tu-mismo/proceso-de-enrollado-de-filamentos-filament-winding/>
- [36] Fabricación de piezas no circulares mediante Filament Winding.  
<http://mccleananderson.com/index.cfm?pid=31&pageTitle=What-is-Filament-Winding?>
- [37] Máquinas CNC de Filament Winding  
<http://www.mikrosam.com.mk/filament/maw20fb4/maw20fb4.html>
- [38] Jack A. Collins, Henry R. Busby, George H. Staab. *Mechanical Design of Machine Elements and Machines. Capítulo 8, página 380*
- [39] M.A.K. Chowdhuri, R.A. Hossain. Design Analysis of an Automotive Composite Drive Shaft. *International Journal of Engineering and Technology Vol.2(2), 2010, 45-48*
- [40] R. Srinivasa Moorthy, Yonas Mitiku & K. Sridhar. Design of Automobile Driveshaft using Carbon/Epoxy and Kevlar/Epoxy Composites. *American Journal of Engineering Research (AJER)*. e-ISSN : 2320-0847 p-ISSN : 2320-0936 Volume-02, Issue-10, pp-173-179
- [41] Gummadi Sanjay, Akula Jagadeesh Kumar, Optimal Design and analysis of a composite drive shaft for an automobile. *ISRN: BTH-AMT-EX-2007/D-09--SE*

## REFERENCIAS

- [42] Asmamaw Gebresilassie. Design and analysis of Composite Drive Shaft for Rear-Wheel Drive Engine. *International Journal of Engineering and Technology*. ISSN 2229-5518
- [43] Bhirud Pankaj Prakash, Bimlesh Kumar Sinha. Analysis of drive shaft. *International Journal of Mechanical and Production Engineering*, ISSN: 2320-2092, Volume- 2, Issue- 2, Feb.-2014
- [44] Joining Composites, Nov 15, 2002, Machine Design.  
<http://machinedesign.com/basics-design/joining-composites>
- [45] Mohammad Reza Khoshravan, Amin Paykani, Aidin Akbarzadeh. Design and modal analysis of composite drive shaft for automotive application. *International Journal of Engineering Science and Technology (IJEST)*. ISSN : 0975-5462 Vol. 3 No. 4 April 2011 2549
- [46] Won Tae Kim & Dai Gil Lee. Torque transmission capabilities of adhesively bonded tubular lap joints for composite drive shafts. *Composite Structures* 30 (1995) 229-240. ISSN:0263-8223/95/S9.50
- [47] R. Poul, P. Růžička, D. Hanus, K. Blahouš. Design of Carbon Composite Driveshaft for Ultralight Aircraft Propulsion System. *Czech Technical University Publishing House. Acta Polytechnica Vol. 46 No. 5/2006*
- [48] Modelo comercial de un árbol de transmisión de materiales compuestos.  
<http://www.driveshaftshop.com/import-driveshafts/subaru/subaru-04-07-sti-6-speed-r180-rear-1-piece-carbon-fiber-driveshaft>
- [49] Algoritmo genético.  
<http://www.sc.ehu.es/ccwbayes/docencia/mmcc/docs/temageneticos.pdf>
- [50] Pedro L. Iglesias Rey; F. Javier Martínez Solano; Vicente S. Fuertes Miquel; Rafael Pérez García. Algoritmo genético modificado para diseño de redes de abastecimiento de agua. *IV SEREA - Seminário Hispano-Brasileiro sobre Sistemas de Abastecimento Urbano de Água João Pessoa (Brasil), 8 a 10 de novembro de 2004*
- [51] T.Rangaswamy, S. Vijayarangan, Optimal design and analysis of automotive composite drive shaft. *ISSN 1392-1320 Materials Science. Vol. 11, No. 2. 2005*
- [52] James Kennedy' and Russell Eberhart. Particle Swarm Optimization. *Purdue School of Engineering and Technology Indianapolis, IN 46202-5160*
- [53] Manjunath K, S. Mohan kumar, Channakeshava K. R. Optimization of ply stacking sequence of composite drive shaft using particle swarm algorithm. *Journal of Engineering Science and Technology Vol. 6, No. 3 (2011) 323 - 331* © School of Engineering, Taylor's University

## REFERENCIAS

[54] M. A. Badie, A. Mahdi, A. R. Abutalib, E. J. Abdullah and R. Yonus. Automotive composite driveshafts: investigation of the design variables effects. *International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 3, No.2, 2006, pp. 227-237

[55] Hrennikoff, Alexander (1941). "Solution of problems of elasticity by the framework method". *Journal of applied mechanics* 8.4: 169–175.

[56] Courant, R. (1943). "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations". *Bulletin of the American Mathematical Society* 49: 1–23.

[57] Descripción del elemento Shell 181.

<http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/5326/fichero/Anexo+3+Elemento+tipo+Shell+181+de+ANSYS.pdf>

# ANEXO 1

## GUÍA DEL PROGRAMA OPTIEJE

---

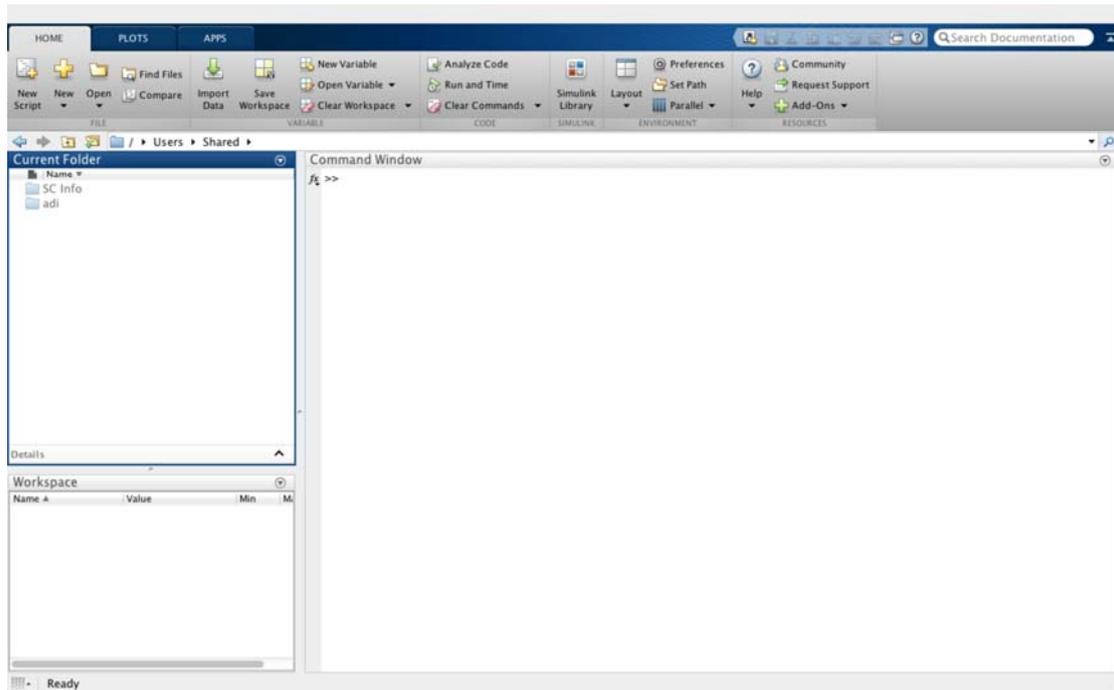
El programa OPTIEJE es un conjunto de algoritmos escritos en el entorno Matlab para el cálculo y la optimización de un árbol de transmisión de materiales compuestos. El algoritmo principal basado en la teoría clásica de laminados permite calcular:

- Matrices ABD del laminado y sus matrices inversas  $abd$ .
- Las fuerzas mecánicas
- Las fuerzas por la temperatura
- Las fuerzas por la humedad
- Tensiones en cada lámina en eje material
- Deformaciones en cada lámina en eje material
- Constantes ingenieriles
- Velocidad crítica (primera frecuencia natural)
- Resistencia a pandeo
- Criterio de rotura Tsai-Hill con el coeficiente de seguridad requerido
- El peso del árbol de transmisión

El algoritmo de optimización genera una cantidad de soluciones aleatorias, selecciona los resultados factibles según las especificaciones dadas, compara entre los resultados factibles y almacena los resultados con menor peso y mayor coeficiente de seguridad.

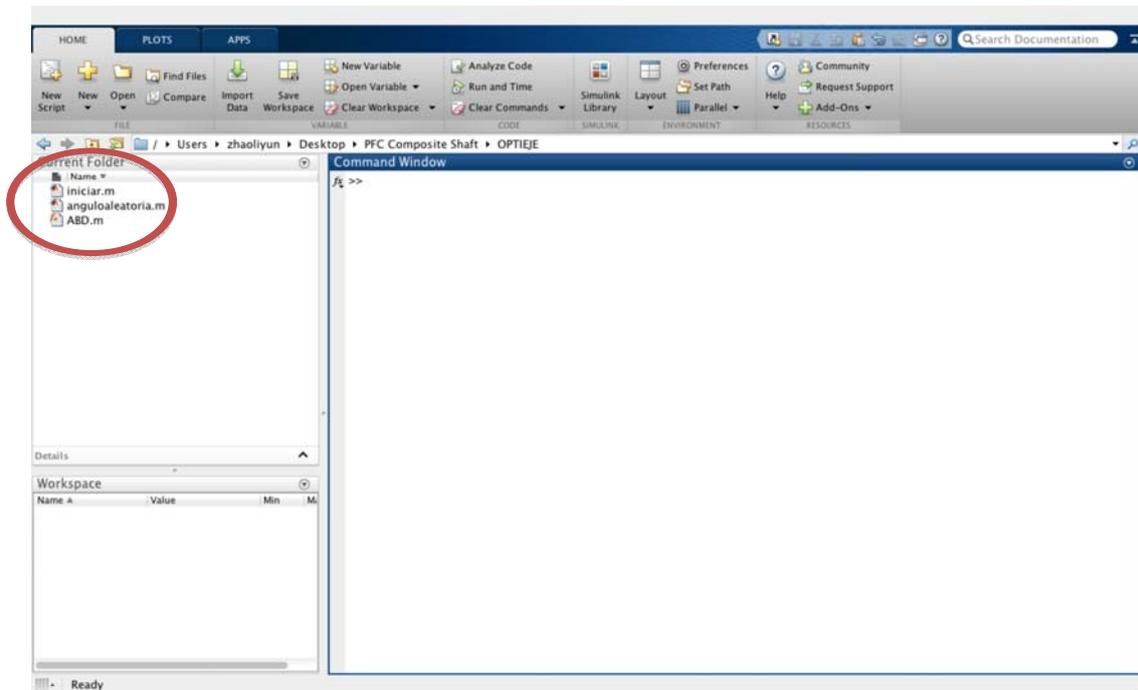
Para poder utilizar el programa OPTIEJE es necesario tener instalado Matlab en el ordenador. Las siguientes figuras muestran los pasos a seguir para utilizar el programa.

## 1. Abre el programa Matlab

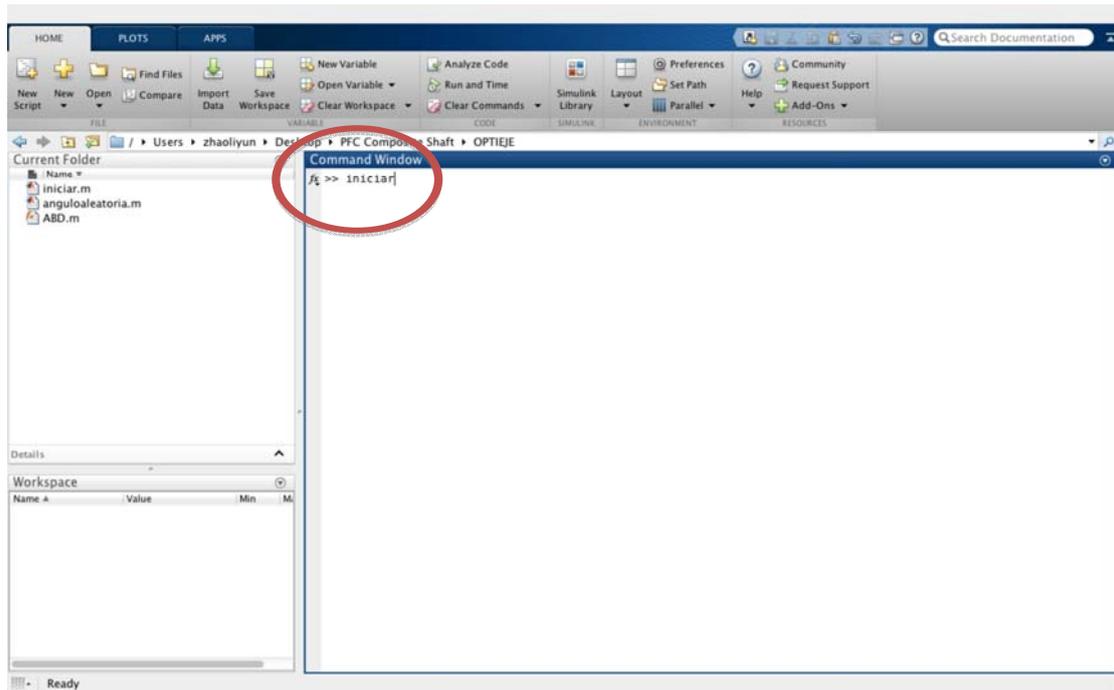


## 2. Cambio el directorio a la carpeta OPTIEJE

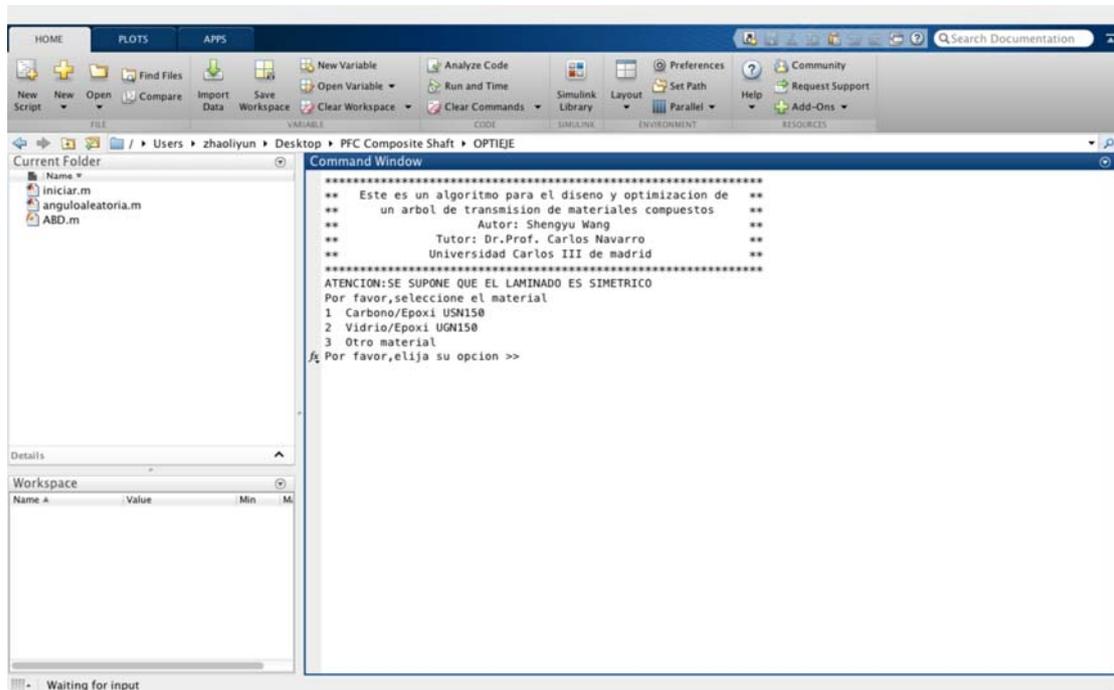
En la carpeta hay tres archivos, **iniciar.m** es el programa que trabaja solo con ángulos de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $\pm 45^\circ$ . **anguloaleatorio.m** trabaja con cualquier ángulo dentro del intervalo de  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .



3. Para iniciar el programa teclé 'iniciar' en la pantalla principal de Matlab.

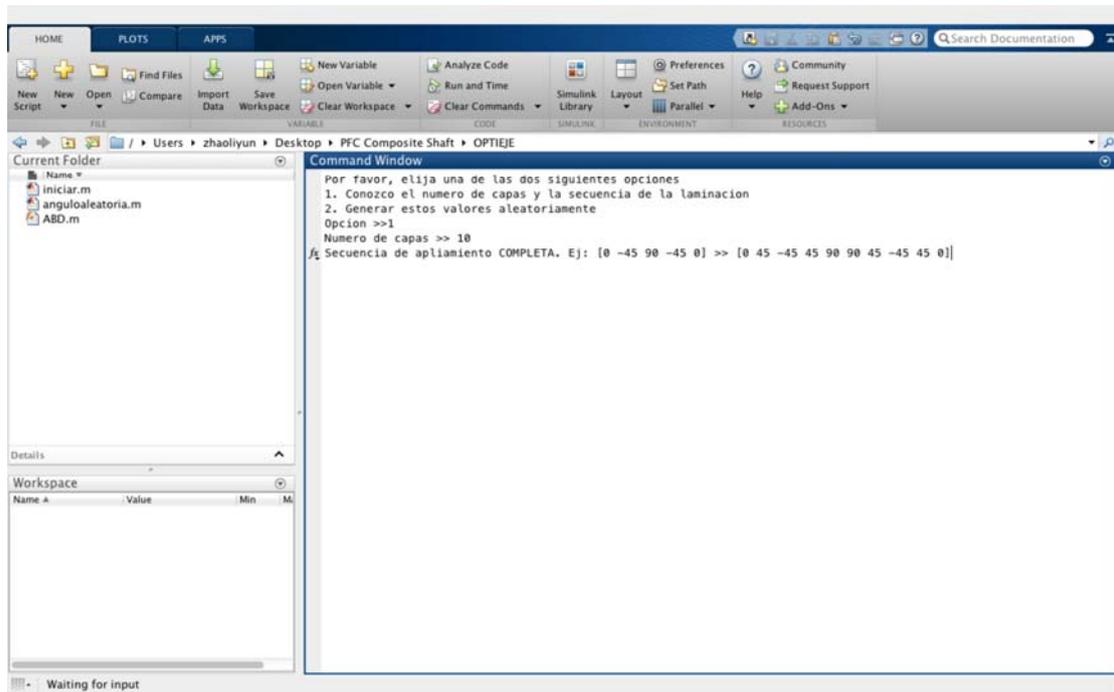


4. Elegir entre los materiales almacenados o introducir manualmente un nuevo material. En este caso se elije el material 1

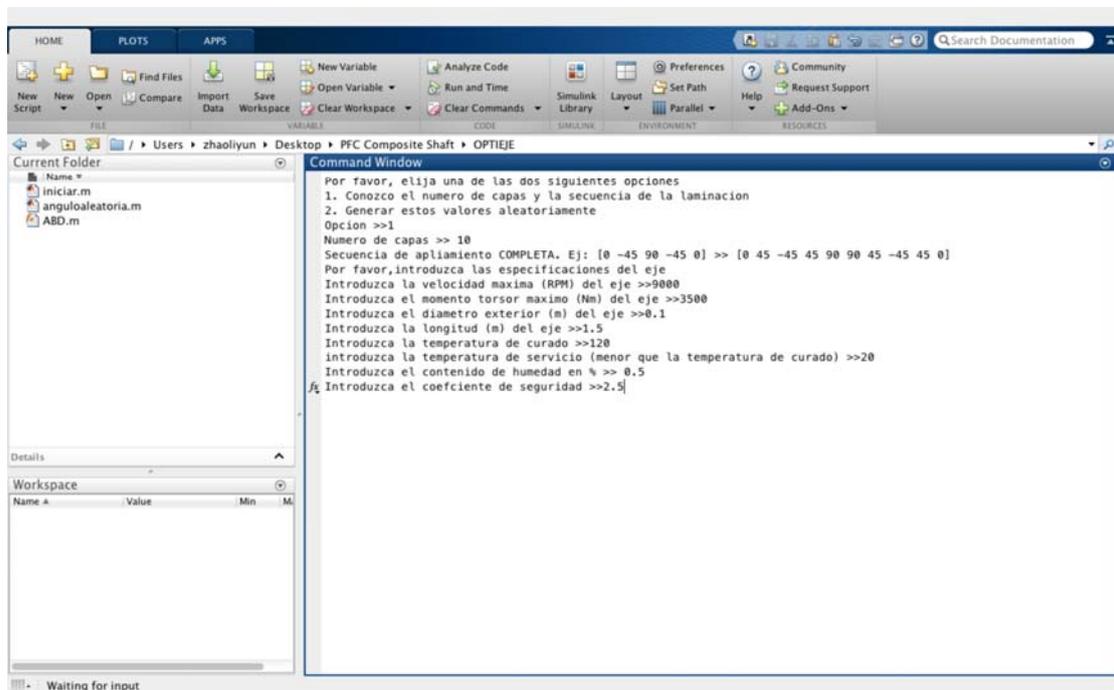


## ANEXO 1

5. Elegir entre introducir manualmente una secuencia de apilamiento o generar una secuencia de apilamiento aleatoria. En este caso se introduce una secuencia de apilamiento.

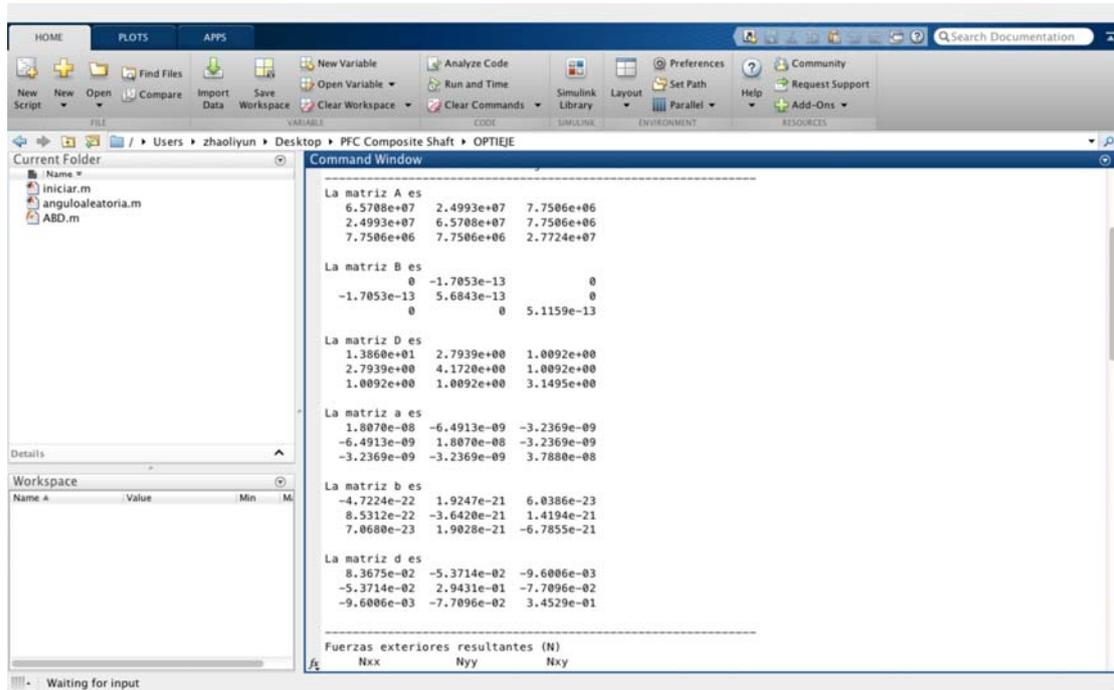


6. El programa pide los parámetros del diseño.



## ANEXO 1

7. A partir de los datos introducidos el programa realiza varios cálculos mencionados anteriormente.



The screenshot shows a software interface with a Command Window displaying the following matrix calculations:

```
La matriz A es
6.5708e+07  2.4993e+07  7.7506e+06
2.4993e+07  6.5708e+07  7.7506e+06
7.7506e+06  7.7506e+06  2.7724e+07

La matriz B es
0 -1.7053e-13  0
-1.7053e-13  5.6843e-13  0
0 0 5.1159e-13

La matriz D es
1.3860e+01  2.7939e+00  1.0092e+00
2.7939e+00  4.1720e+00  1.0092e+00
1.0092e+00  1.0092e+00  3.1495e+00

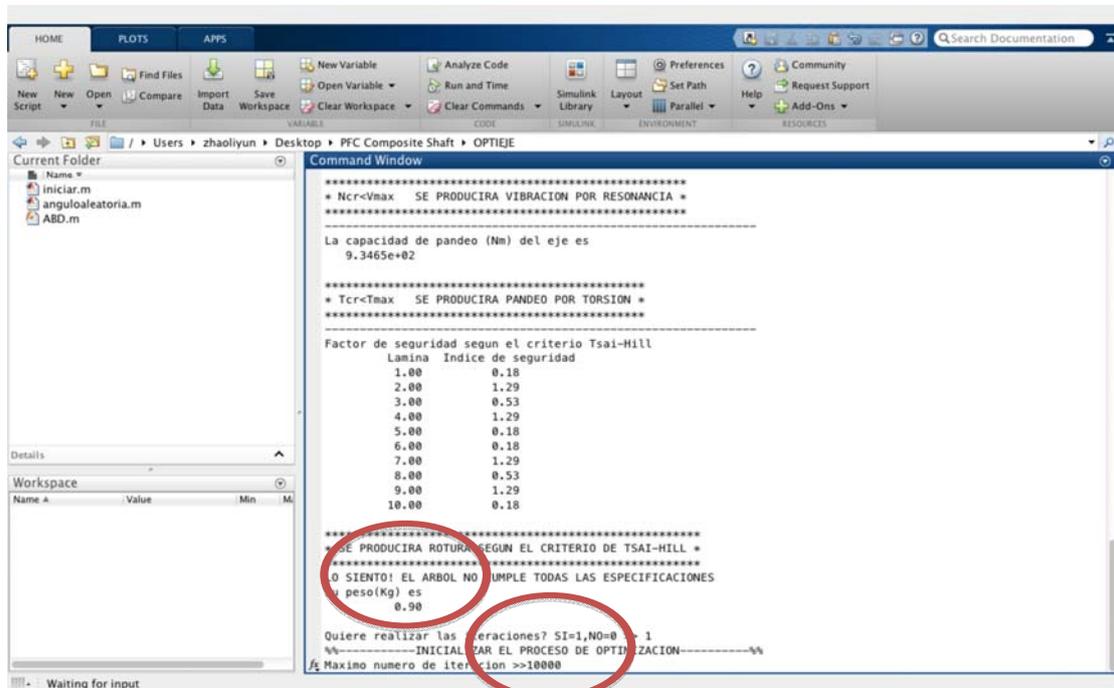
La matriz a es
1.8070e-08 -6.4913e-09 -3.2369e-09
-6.4913e-09  1.8070e-08 -3.2369e-09
-3.2369e-09 -3.2369e-09  3.7880e-08

La matriz b es
-4.7224e-22  1.9247e-21  6.8386e-23
8.5312e-22 -3.6420e-21  1.4194e-21
7.0680e-23  1.9028e-21 -6.7855e-21

La matriz d es
8.3675e-02 -5.3714e-02 -9.6006e-03
-5.3714e-02  2.9431e-01 -7.7096e-02
-9.6006e-03 -7.7096e-02  3.4529e-01

Fuerzas exteriores resultantes (N)
Nxx Nyy Nxy
```

8. Si el diseño no cumple las especificaciones el programa avisa al usuario y pregunta si quiere realizar iteraciones.



The screenshot shows a software interface with a Command Window displaying the following warning message and table:

```
*****
* Ncr<Vmax SE PRODUCIRA VIBRACION POR RESONANCIA *
*****

La capacidad de pandeo (Nm) del eje es
9.3465e+02

*****
* Tcr<Tmax SE PRODUCIRA PANDEO POR TORSION *
*****

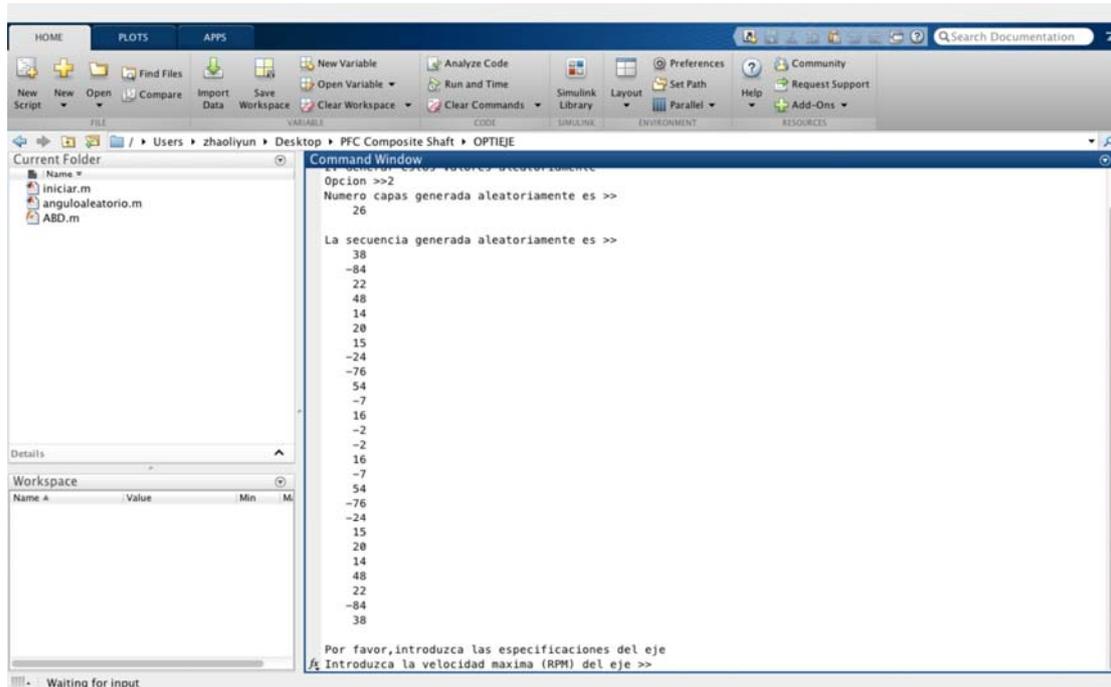
Factor de seguridad segun el criterio Tsai-Hill
Lamina Indice de seguridad
1.00 0.18
2.00 1.29
3.00 0.53
4.00 1.29
5.00 0.18
6.00 0.18
7.00 1.29
8.00 0.53
9.00 1.29
10.00 0.18

*****
* SE PRODUCIRA ROTURA SEGUN EL CRITERIO DE TSAI-HILL *
*****
¡ O SIENTO! EL ARBOL NO CUMPLE TODAS LAS ESPECIFICACIONES
peso(Kg) es
0.90

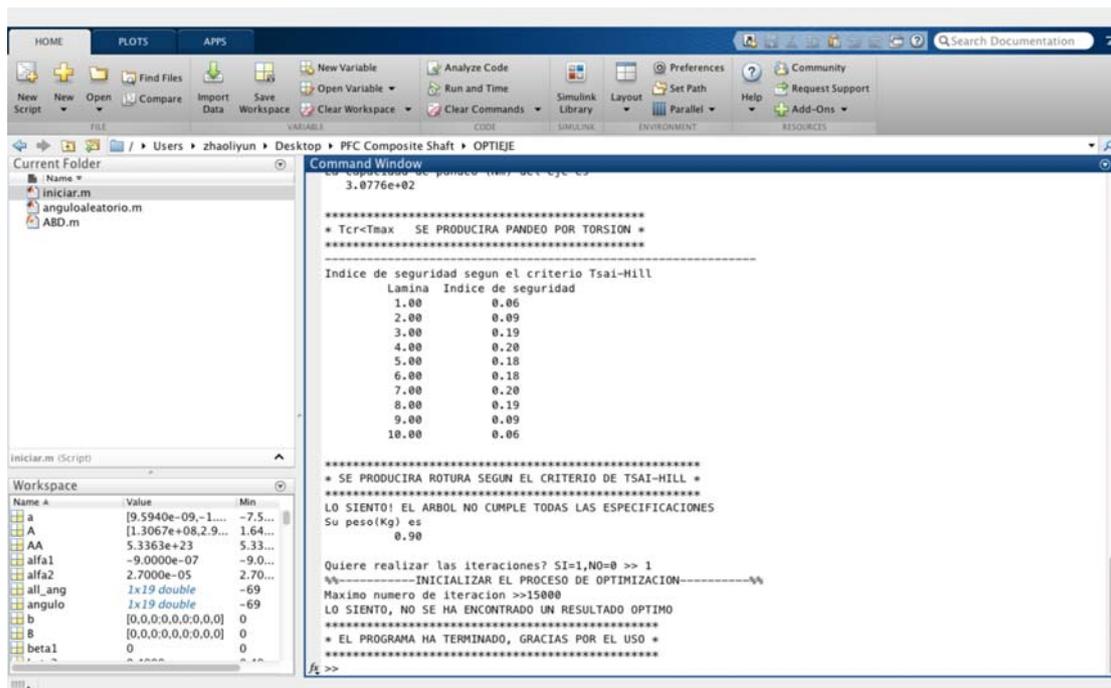
Quiere realizar las iteraciones? SI=1,NO=0 1
%-----INICIAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----%
Maximo numero de iteracion >>10000
```



11. En este caso se elige general aleatoriamente una secuencia, la secuencia generada no tiene limitación del ángulo.



12. El resto de los pasos son idénticos que el anterior programa, se salta los pasos y llega al paso la iteración. Puede ocurrir el caso de que después de N iteraciones no salen ninguna solución factible. En estos casos se puede aumentar el número de iteración. Si al aumentar mucho el número de iteración no se da aún ningún resultado factible, es debido a que el diseño no puede cumplir todas las especificaciones del diseño. El usuario tiene revisar el diseño y vuelve a intentar.



# ANEXO 2

## RESULTADOS DEL PROGRAMA OPTIEJE

En el anexo 2 se muestran los resultados calculados por el programa OPTIEJE del diseño estudiado en los apartados anteriores.

Numero de láminas >> 24

Secuencia de apliamento: [45 -45 0 0 45 -45 0 45 -45 0 0 45]s

Velocidad maxima (RPM) del eje >>9000

Momento torsor maximo (Nm) del eje >>3500

Diametro exterior (m) del eje >>0.1

Longitud (m) del eje >>1.5

Temperatura de curado >>120

Temperatura de servicio (menor que la temperatura de curado) >>20

Contenido de humedad en % >> 0.5

Coeficiente de seguridad >>2.5

-----  
La matriz A es

2.3668e+08	5.8511e+07	7.7506e+06
5.8511e+07	8.1667e+07	7.7506e+06
7.7506e+06	7.7506e+06	6.5064e+07

La matriz B es

-7.2760e-12	2.7285e-12	0
2.7285e-12	1.8190e-12	0
0	0	1.8190e-12

La matriz D es

1.6381e+02	4.8295e+01	5.3689e+00
4.8295e+01	6.6123e+01	5.3689e+00
5.3689e+00	5.3689e+00	5.3210e+01

La matriz a es

5.1365e-09	-3.6634e-09	-1.7548e-10
-3.6634e-09	1.4998e-08	-1.3502e-09
-1.7548e-10	-1.3502e-09	1.5551e-08

La matriz b es

4.1022e-22	-4.1129e-22	6.1068e-24
-4.2846e-22	4.4642e-23	8.4884e-23
8.1409e-24	8.2345e-23	-5.4075e-22

La matriz d es

7.7822e-03	-5.6666e-03	-2.1346e-04
-5.6666e-03	1.9375e-02	-1.3831e-03
-2.1346e-04	-1.3831e-03	1.8955e-02

Fuerzas exteriores resultantes (N)

Nxx	Nyy	Nxy
0	2.0652e+04	2.2282e+05

Fuerzas debido a la temperatura (N)

Nxx	Nyy	Nxy
-1.3668e+05	-2.1523e+05	-2.0229e+04

Fuerzas debido a la humedad (N)

Nxx	Nyy	Nxy
1.1702e+05	1.6333e+05	1.5501e+04

Tensiones en las láminas en ejes 1-2

	SIG11	SIG22	TAU12
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-4.8745e+06	-5.7524e+06	1.5467e+07	
-2.7147e+08	6.4042e+06	2.9986e+06	
1.7514e+08	-1.3961e+07	-2.9986e+06	

Deformaciones de las laminas en ejes 1-2

ANEXO 2

EPS11	EPS22	GAM12
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.4758e-05	-6.9111e-04	3.4372e-03
-2.0765e-03	1.3607e-03	6.6635e-04
1.3607e-03	-2.0765e-03	-6.6635e-04

---

Constantes ingenieries (Pa)

Ex	Ey	Gxy
6.4895e+10	2.2226e+10	2.1434e+10

---

Velocidad critica (RPM) segun teoria Bernoulli-Euler  
9.2995e+03

---

La capacidad de pandeo (Nm) del eje es  
5.4731e+03

---

Coefficiente de seguridad segun el criterio Tsai-Hill

Lamina	Indice de seguridad
1.00	6.29
2.00	2.90
3.00	1.06
4.00	1.06
5.00	6.29
6.00	2.90
7.00	1.06
8.00	6.29

ANEXO 2

9.00	2.90
10.00	1.06
11.00	1.06
12.00	6.29
13.00	6.29
14.00	1.06
15.00	1.06
16.00	2.90
17.00	6.29
18.00	1.06
19.00	2.90
20.00	6.29
21.00	1.06
22.00	1.06
23.00	2.90
24.00	6.29

Su peso(kg) es  
2.13

# ANEXO 3

## CÓDIGO FUENTE DEL PROGRAMA OPTIEJE

---

### PROGRAMA OPTIEJE

```

%Este es un programa para disenar un arbol de transmision de
materiales
%compuestos, la base toerica es la teoria clasica de laminado, el
criterio
%de rotura empleado es el de Tsai-Hill. Debido al porceso de
fabricacion y
%consideraciones de la optimizacion del diseno, el laminado es
simetrico y
%los angulos de las fibras estan limitados en 0 90 y +-45 grados. Sin
%embargo con pequena modificacion este programa puede servir para
todo tipo
%de laminas y cualquier angulo de las fibras.
clc;
close all;
clear all;
digits(32);
format short e;
disp('*****
')
disp('**      Este es un programa para el diseno y optimizacion de
**')
disp('**      un arbol de transmision de materiales compuestos
**')
disp('**              Autor: Shengyu Wang
**')
disp('**              Tutor: Dr.Prof. Carlos Navarro
**')
disp('**              Universidad Carlos III de madrid
**')
disp('*****
')
disp('ATENCION:SE SUPONE QUE EL LAMINADO ES SIMETRICO')
disp('Por favor,seleccione el material')
disp('1  Carbono/Epoxi USN150')
disp('2  Vidrio/Epoxi UGN150')
disp('3  Otro material')
comm=input('Por favor,elija su opcion >>');
clc;

%Propiedad mecanica de USN150
if comm==1
    E1=131.6E+9;
    E2=8.2E+9;
    E3=E2;
    n21=0.281;
    n31=n21;

```

### ANEXO 3

```

n23=0.3;
G12=4.5E+09;
G13=G12;
G23=3.5E+09;
Dens=1550;
Xt=2000E+06;
Xc=1400E+06;
Yt=61E+06;
Yc=130E+06;
SHEAR=40E+06;
t=125E-6;
alfa1=-0.9E-6;
alfa2=27E-6;
beta1=0;
beta2=0.4;
dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];

%Propiedad mecanica de UGN150
elseif comm==2
    E1=43.3E+9;
    E2=14.7E+9;
    E3=E2;
    n21=0.3;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.4E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=2100;
    Xt=1050E+06;
    Xc=700E+06;
    Yt=65E+06;
    Yc=120E+06;
    SHEAR=65E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=6.3E-6;
    alfa2=19E-6;
    beta1=0.01;
    beta2=0.29;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];

else
    %Introduce manualmente las propiedades si no es ninguno de los
    %materiales anteriores
    disp('Por favor,introduzca las propiedades del material >>')
    disp('E,G,Xc,Xt,Yc,Yt,S estan expresados en Pa >>')
    E1=input('E1 = ');
    E2= input('E2 = ');
    E3= input('E3 = ');
    n21= input('n12 = ');
    n31= input('n13 = ');
    n23= input('n23 = ');
    G12= input('G12 = ');

```

### ANEXO 3

```

G13= input('G13 = ');
G23= input('G23 = ');
Dens= input('Densidad = ');
Xt=input('Xt= ');
Xc=input('Xc= ');
Yt=input('Yt= ');
Yc=input('Yc= ');
SHEAR=input('S= ');
t=input('Espesor= ');
disp('alfa es el coef. de dilatacion termica');
alfa1=input('alfa1= ');
alfa2=input('alfa2= ');
disp('beta es el coef. de expansion higroscopica');
beta1=input('beta1= ');
beta2=input('beta2= ');
dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];
end

%Se puede generar aleatoriamente una secuencia de laminacion o
%introducirla manualmente
disp('Por favor, elija una de las dos siguientes opciones')
disp('1. Conozco el numero de laminas y la secuencia de la
laminacion')
disp('2. Generar estos valores aleatoriamente')
eleccion=input('Opcion >>');
if eleccion==1
    n=input('Numero de laminas >> ');
    angulo=input('Secuencia de apliamento COMPLETA. Ej: [0 -45 90 -
45 0] >> ');
else
    %numero aleatorio de laminas, como minimo 10 laminas y maximo 32
    capa=randi([10 32],1,1);
    if rem(capa,2)==0
        nvar=capa/2+1; %numero de variable si hay numero par de
laminas
    else
        nvar=(capa+1)/2+1; %numero de variable si hay numero impar de
laminas
    end
    %Limitamos los angulos en 0 90 o pareja de +-45 grados, y creo un
%secuencia aleatoria con estos angulos
    angulo=zeros(1,nvar-1);
    cont=1;
    while cont<=nvar-1
        a=[0 45 90];
        b=randi(3,1,1);
        ang=a(b);
        angulo(1,cont)=ang;
        if cont<nvar-1
            if ang==45
                angulo(1,cont+1)=(-ang);
                cont=cont+1;
            end
        end
        cont=cont+1;
    end
end
%SI NO QUIERE LIMITAR LOS ANGULOS, ACTIVE EL SIGUIENTE CODIGO

```

### ANEXO 3

```

%angulo=randi([-90 90],[nvar-1],1)';

%creo una inversion del vector angulo para generar
automaticamente la
%secuencia total de la lamina simetrica
invangulo=fliplr(angulo);
%algoritmo para generar generar automaticamente la
%secuencia total de la lamina simetrica
if rem(capa,2)==0
    for k=nvar:capa
        angulo(k)=invangulo(k-(capa/2));
    end
else
    for k=nvar:capa
        angulo(k)=invangulo(k-((capa-1)/2));
    end
end
%monitorizo las informaciones
disp('Numero de laminas generado aleatoriamente es >> ');
disp(capa);
disp('La secuencia generada aleatoriamente es >> ');
disp(angulo');
end
disp('Por favor,introduzca las especificaciones del eje')
omega=input('Introduzca la velocidad maxima (RPM) del eje >>');
torsormax=input('Introduzca el momento torsor maximo (Nm) del eje
>>');
diametro=input('Introduzca el diametro exterior (m) del eje >>');
long=input('Introduzca la longitud (m) del eje >>');
temper1=input('Introduzca la temperatura de curado >>');
temper2=input('introduzca la temperatura de servicio (menor que la
temperatura de curado) >>');
temper=temper2-temper1;
humedad=input('Introduzca el contenido de humedad en % >> ');
humedad=humedad/100;
FS=input('Introduzca el coeficiente de seguridad >>');
radio=diametro/2;
cargas=[omega,torsormax,diametro,long,temper,humedad,FS,radio];
%Llamo la funcion ABD para calcular las propiedades del arbol de
%transmision
FF=ABD(angulo,E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,t,SHE
AR,omega,radio,torsormax,long,FS,dilatacion,temper,expansion,humedad)
;

ite=input('Quiere realizar la optimizacion? SI=1,NO=0 >> ');
if ite==1

    disp('%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----
--%');
    maxit=input('Maximo numero de iteracion >>');
    contador=1;
    resultado=ones(38,maxit);
    for iga=1:maxit
        capa=randi([10 32],1,1);
        if rem(capa,2)==0
            nvar=capa/2+1;
        else
            nvar=(capa+1)/2+1;
        end
        angulo=zeros(1,nvar-1);
        cont=1;

```

ANEXO 3

```

while cont<=nvar-1
    a=[0 45 90];
    b=randi(3,1,1);
    ang=a(b);
    angulo(1,cont)=ang;
    if cont<nvar-1
        if ang==45
            angulo(1,cont+1)=(-ang);
            cont=cont+1;
        end
    end
    cont=cont+1;
end
invangulo=fliplr(angulo);
if rem(capa,2)==0
    for k=nvar:capa
        angulo(k)=invangulo(k-(capa/2));
    end
else
    for k=nvar:capa
        angulo(k)=invangulo(k-((capa-1)/2));
    end
end

all_ang = angulo;
N=length(all_ang);
h=zeros(N+1);
h(N+1)=N*t/2;
lstf=zeros(3*N,3);
Ntemp=zeros(3,1);
Nhume=zeros(3,1);

for k = 1 : N
    %matriz de rigidez
    S = [1/E1      -n21/E1      -n31/E1      0      0      0;
        -n21/E1    1/E2        -n23/E2      0      0      0;
        -n31/E1    -n23/E2      1/E3        0      0      0;
        0          0          0          1/G23    0      0;
        0          0          0          0        0      1/G13;
        0          0          0          0        0      0      1/G12];

    C = inv(S);
    Q = zeros(3,3);
    Q(1,1) = C(1,1) - (C(1,3))^2 / C(3,3);
    Q(2,2) = C(2,2) - (C(2,3))^2 / C(3,3);
    Q(1,2) = C(1,2) - C(1,3)*C(2,3) / C(3,3);
    Q(2,1) = Q(1,2);
    Q(3,3) = C(6,6);

    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;

```

### ANEXO 3

```

T(3,2)=m*n;
T(3,3)=m^2-n^2;

%transformamos la matriz de rigidez
q=zeros(3,3);
q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
q(3,3)=2*Q(3,3);

q=T\q*T;
for i = 1:3
    q(i,3)=q(i,3)/2;
end
lstf(3*k-2:3*k,1:3)=q(1:3,1:3);
h(k)=(k-N/2-1)*t;
Ntempk=q*dilatacion*t;
Ntemp=Ntemp+Ntempk;
Nhumek=q*expansion*t;
Nhume=Nhume+Nhumek;
end

%Calculamos las matriz A B y D
A=zeros(3,3);
B=zeros(3,3);
D=zeros(3,3);
for i=1:3
    for j=1:3
        q(1:3,1:3)=lstf(1:3,1:3);
        A(i,j) = q(i,j) * (h(2) - h(1));
        B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(2)^2 - h(1)^2));
        D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(2)^3 - h(1)^3));

        for k = 2 : N
            q(1:3,1:3) = lstf(3*k-2:3*k,1:3);
            A(i,j) = q(i,j) * (h(k+1) - h(k)) + A(i,j);
            B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(k+1)^2 - h(k)^2)) + B(i,j);
            D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(k+1)^3 - h(k)^3)) + D(i,j);
        end
    end
end

%calculamos las matriz a b y d
LamnStf=zeros(6,6);
a=zeros(3,3);
b=zeros(3,3);
d=zeros(3,3);
LamnStf(1:3,1:3)=A(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,4:6)=D(1:3,1:3);
LamnStf(1:3,4:6)=B(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,1:3)=B(1:3,1:3);
LamnCmp=inv(LamnStf);
a(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,1:3);
b(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,4:6);
d(1:3,1:3)=LamnCmp(4:6,4:6);

%calculamos las fuerzas exteriores resultantes
Nx=0;
radian=2*pi*omega/60;
Ny=2*Dens*t*N*(radio*radio)*(radian*radian);
Nxy=torsormax/(2*pi*(radio*radio));
fuerza=[Nx Ny Nxy]';

```

### ANEXO 3

```

Ntemp=temper*Ntemp;
Nhume=humedad*Nhume;
fuerza=fuerza+Ntemp+Nhume;
deform=a*fuerza;

%Calculamos las tensiones de cada lamina en eje global
%Creo una matriz tension para almacenar las tensiones de cada
lamina
SIG=zeros(3,N);
for k = 1 : N
    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;
    %transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);
    q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
    q(3,3)=2*Q(3,3);
    q=T\q*T;
    for i = 1:3
        q(i,3)=q(i,3)/2;
    end
    sigmaglobal=q*deform;
    sigmalocal=T*sigmaglobal;
    for i=1:3
        SIG(i,k)=sigmalocal(i);
    end
end
%Calculamos las constantes ingenieriles
AA=(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2)*A(3,3)+2*A(1,2)*A(2,3)*A(1,3)-
A(1,1)*(A(2,3)^2)-A(2,2)*(A(1,3)^2);
Ex=AA/((t*N)*(A(2,2)*A(3,3)-A(2,3)^2));
Ey=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(3,3)-A(1,3)^2));
Gxy=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2));
%calculamos el momento torsor critico y la frecuencia critica
Tcr=(2*pi*(radio*radio)*t*N*0.272*((Ex*(Ey^3))^0.25)*((t*N/radio)^1.5
));
Ncrbe=(60*pi/(2*(long^2))*((Ex*(radio^4-((radio-
t*N)^4))/(4*(radio^2-((radio-t*N)^2))*Dens))^0.5));
%Aplicamos el criterio de rotura Tsai-Hill con FS a cada lamina
FS1=zeros(1,N);
for i=1:N
    if SIG(1,i)>0
        X=Xt;
    else
        X=Xc;
    end
    if SIG(2,i)>0
        Y=Yt;
    else
        Y=Yc;
    end
end

```

ANEXO 3

```

end
sig1=SIG(1,i);
sig2=SIG(2,i);
sig12=SIG(3,i);
FS1(1,i)=1/(((sig1*FS)^2/(X*X))-
(sig2*sig1*FS*FS/(X*X))+((sig2*FS)^2/(Y*Y))+((sig12*FS)^2/(SHEAR^2)))
;
end
fail=min(FS1(1,:));
peso=Dens*pi*0.25*((2*radio)^2-(2*(radio-t*N))^2)*long;

if fail>=1 && Tcr>=torsormax && Ncrbe>=omega
    resultado(1,contador)=iga;
    resultado(2,contador)=peso;
    resultado(3,contador)=fail;
    resultado(4,contador)=N;
    resultado(5,contador)=Tcr;
    resultado(6,contador)=Ncrbe;
    for i=1:N
        resultado(i+6,contador)=angulo(i);
    end
    contador=contador+1;
end
end

%algoritmo para encontrar los mejores resultados dentro de la
poblacion
%resultadofinal es una matriz que contiene todos los resultados
%factibles con su peso, factor de seguridad, numero de
iteraccion,y
%secuencia de laminacion

if max(resultado(:,1))>1
    norotura=0;
    for i=1:maxit
        if resultado(3,i)>1
            norotura=norotura+1;
        end
    end
end
resultadofinal=ones(38,norotura);
for i=1:38
    for j=1:norotura
        resultadofinal(i,j)=resultado(i,j);
    end
end
%matrizminpeso es una matriz que contiene todos los resultados
%con el menor peso con su factor de seguridad, numero de
iteraccion,y
%secuencia de laminacion
pesoptimo=0;
cont1=1;
minpeso=min(resultadofinal(2,:));
for i=1:norotura
    if resultadofinal(2,i)<=minpeso
        pesoptimo=pesoptimo+1;
    end
end
end
matrizminpeso=ones(38,pesoptimo);
for i=1:norotura
    if resultadofinal(2,i)<=minpeso
        matrizminpeso(:,cont1)=resultadofinal(:,i);
    end
end

```

ANEXO 3

```

        cont1=cont1+1;
    end
end
%como en la matrizminpeso todos los resultados tiene el mismo
peso
%que es el menor peso,seleccionaremos los resultados con mayor
factor de
%seguridad
hilloptimo=0;
cont2=1;
maxhill=max(matrizminpeso(3,:));
for i=1:pesoptimo
    if matrizminpeso(3,i)>=maxhill
        hilloptimo=hilloptimo+1;
    end
end
matrizmaxhill=ones(38,hilloptimo);
for i=1:pesoptimo
    if matrizminpeso(3,i)>=maxhill
        matrizmaxhill(:,cont2)=matrizminpeso(:,i);
        cont2=cont2+1;
    end
end
cont3=0;
for i=1:38
    if matrizmaxhill(i,1)~=1
        cont3=cont3+1;
    end
end
optimoresult=ones(cont3,hilloptimo);
for i=1:cont3
    for j=1:hilloptimo
        optimoresult(i,j)=matrizmaxhill(i,j);
    end
end
end
disp('LOS RESULTADOS MEJORES SON:');
disp('  No.Iteracion      Peso      I.Seguridad      No.Lamina
Tcr      Ncrbe')
disp(optimoresult(1:6,:));
disp('Secuencia de apilamiento')
disp(optimoresult(7:cont3,:));
disp('*****')
disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
disp('*****')
else
    disp('LO SIENTO, NO SE HA ENCONTRADO UN RESULTADO OPTIMO')
    disp('*****')
    disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
    disp('*****')
end
else
    disp('*****')
    disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
    disp('*****')
end
end

```

## SUBFUNCIÓN ABD

```

function FF =
ABD(angulo,E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,t,SHEAR,
omega,radio,torsormax,long,FS,dilatacion,temper,expansion,humedad)
format short e;
all_ang = angulo;
N=length(all_ang);
h=zeros(N+1);
h(N+1)=N*t/2;
lstf=zeros(3*N,3);
Ntemp=zeros(3,1);
Nhume=zeros(3,1);
for k = 1 : N
    %matriz de rigidez
    S = [1/E1      -n21/E1      -n31/E1      0      0      0;
         -n21/E1   1/E2         -n23/E2      0      0      0;
         -n31/E1   -n23/E2      1/E3         0      0      0;
         0          0          0          1/G23   0      0;
         0          0          0          0        1/G13   0;
         0          0          0          0        0      1/G12];

    C = inv(S);
    Q = zeros(3,3);
    Q(1,1) = C(1,1) - (C(1,3))^2 / C(3,3);
    Q(2,2) = C(2,2) - (C(2,3))^2 / C(3,3);
    Q(1,2) = C(1,2) - C(1,3)*C(2,3) / C(3,3);
    Q(2,1) = Q(1,2);
    Q(3,3) = C(6,6);

    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;

    %transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);
    q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
    q(3,3)=2*Q(3,3);
    q=T\q*T;
    for i = 1:3
        q(i,3)=q(i,3)/2;
    end
    lstf(3*k-2:3*k,1:3)=q(1:3,1:3);
    h(k)=(k-N/2-1)*t;
    Ntempk=q*dilatacion*t;
    Ntemp=Ntemp+Ntempk;
    Nhumek=q*expansion*t;
    Nhume=Nhume+Nhumek;
end

```

### ANEXO 3

```

%Calculamos las matriz A B y D
A=zeros(3,3);
B=zeros(3,3);
D=zeros(3,3);
    for i=1:3
        for j=1:3
            q(1:3,1:3)=lstf(1:3,1:3);
            A(i,j) = q(i,j) * (h(2) - h(1));
            B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(2)^2 - h(1)^2));
            D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(2)^3 - h(1)^3));

            for k = 2 : N
                q(1:3,1:3) = lstf(3*k-2:3*k,1:3);
                A(i,j) = q(i,j) * (h(k+1) - h(k)) + A(i,j);
                B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(k+1)^2 - h(k)^2)) + B(i,j);
                D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(k+1)^3 - h(k)^3)) + D(i,j);
            end
        end
    end

%calculamos las matriz a b y d
LamnStf=zeros(6,6);
a=zeros(3,3);
b=zeros(3,3);
d=zeros(3,3);
LamnStf(1:3,1:3)=A(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,4:6)=D(1:3,1:3);
LamnStf(1:3,4:6)=B(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,1:3)=B(1:3,1:3);
LamnCmp=inv(LamnStf);
a(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,1:3);
b(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,4:6);
d(1:3,1:3)=LamnCmp(4:6,4:6);

disp('-----')
disp(' ')
disp('La matriz A es ');
disp(A);
disp('La matriz B es ');
%disp('*Para los laminados simetricos, La matriz B es nula ');
disp(B);
disp('La matriz D es ');
disp(D);
disp('La matriz a es ');
disp(a);
disp('La matriz b es ');
%disp('*Para los laminados simetricos, La matriz b es nula ');
disp(b);
disp('La matriz d es ');
disp(d);
%calculamos las fuerzas exteriores resultantes
Nx=0;
radian=2*pi*omega/60;
Ny=2*Dens*t*N*(radio*radio)*(radian*radian);
Nxy=torsormax/(2*pi*(radio*radio));
fuerza=[Nx Ny Nxy]';
Ntemp=temper*Ntemp;
Nhume=humedad*Nhume;
disp('-----')
disp(' ')

```

ANEXO 3

```

disp('Fuerzas exteriores resultantes (N)');
disp('      Nxx      Nyy      Nxy ');
disp(fuerza);
disp('Fuerzas debido a la temperatura (N)');
disp('      Nxx      Nyy      Nxy ');
disp(Ntemp);
disp('Fuerzas debido a la humedad (N)');
disp('      Nxx      Nyy      Nxy ');
disp(Nhume);
fuerza=fuerza+Ntemp+Nhume;
deform=a*fuerza;

%Calculamos las tensiones de cada lamina en eje global
%Creo una matriz tension para almacenar las tensiones de cada lamina
SIG=zeros(3,N);
DEF=zeros(3,N);
for k = 1 : N
%hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;
%transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);
    q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
    q(3,3)=2*Q(3,3);
    q=T\q*T;
    for i = 1:3
        q(i,3)=q(i,3)/2;
    end
    eps11=m*m*deform(1,1)+n*n*deform(2,1)+m*n*deform(3,1);
    eps22=n*n*deform(1,1)+m*m*deform(2,1)-m*n*deform(3,1);
    gam12=2*(-m*n*deform(1,1)+m*n*deform(2,1)+(m*m-
n*n)*deform(3,1)/2);
    deformlocal=[eps11;eps22;gam12];
    sigmaglobal=q*deform;
    sigmalocal=T*sigmaglobal;
    for i=1:3
        SIG(i,k)=sigmalocal(i);
        DEF(i,k)=deformlocal(i);
    end
end
disp('-----')
disp(')
disp('Tensiones en las laminas en ejes 1-2')
disp('      SIG11      SIG22      TAU12');
disp(SIG');
disp('-----')
disp(')
disp('Deformaciones de las laminas en ejes 1-2')
disp('      EPS11      EPS22      GAM12');
disp(DEF');

```

### ANEXO 3

```

%Calculamos las constantes ingenieriles
AA=(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2)*A(3,3)+2*A(1,2)*A(2,3)*A(1,3)-
A(1,1)*(A(2,3)^2)-A(2,2)*(A(1,3)^2);
Ex=AA/((t*N)*(A(2,2)*A(3,3)-A(2,3)^2));
Ey=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(3,3)-A(1,3)^2));
Gxy=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2));
consing=[Ex Ey Gxy];
disp('-----
')
disp('Constantes ingenieriles (Pa)');
disp('          Ex          Ey          Gxy');
disp(consing);

%calculamos el momento torsor critico y la frecuencia critica
Tcr=(2*pi*(radio*radio)*t*N*0.272*((Ex*(Ey^3))^0.25)*((t*N/radio)^1.5
));
Ncrbe=(60*pi/(2*(long^2))*((Ex*(radio^4-((radio-t*N)^4))/(4*(radio^2-
((radio-t*N)^2))*Dens))^0.5));
disp('-----
')
disp('Velocidad critica (RPM) segun teoria Bernoulli-Euler');
disp(Ncrbe);
if Ncrbe<omega
    disp('*****')
    disp('* Ncr<Vmax SE PRODUCIRA VIBRACION POR RESONANCIA *')
    disp('*****')
end
disp('-----
')
disp('La capacidad de pandeo (Nm) del eje es');
disp(Tcr);
if Tcr<torsormax
    disp('*****')
    disp('* Tcr<Tmax SE PRODUCIRA PANDEO POR TORSION *')
    disp('*****')
end

%Aplicamos el criterio de rotura Tsai-Hill con FS a cada lamina
FS1=zeros(2,N);
for i=1:N
    if SIG(1,i)>0
        X=Xt;
    else
        X=Xc;
    end
    if SIG(2,i)>0
        Y=Yt;
    else
        Y=Yc;
    end
    sig1=SIG(1,i);
    sig2=SIG(2,i);
    sig12=SIG(3,i);
    FS1(1,i)=i;
    FS1(2,i)=1/(((sig1*FS)^2/(X*X))-
(sig2*sig1*FS*FS/(X*X))+((sig2*FS)^2/(Y*Y))+((sig12*FS)^2/(SHEAR^2)))
;
end
fail=min(FS1(2,:));
format bank;

```

```

disp('-----')
disp('Factor de seguridad segun el criterio Tsai-Hill');
disp('      Lamina  Indice de seguridad');
disp(FS1);
if fail<1

disp('*****')
disp('* SE PRODUCIRA ROTURA SEGUN EL CRITERIO DE TSAI-HILL
*')

disp('*****')
end
if fail>=1 && Tcr>=torsormax && Ncrbe>=omega
disp('ENHORABUENA! EL ARBOL CUMPLE TODAS LAS
ESPECIFICACIONES')
FF=Dens*pi*0.25*((2*radio)^2-(2*(radio-t*N))^2)*long;
disp('Su peso(Kg) es');
disp(FF);
else
disp('LO SIENTO! EL ARBOL NO CUMPLE TODAS LAS
ESPECIFICACIONES')
FF=Dens*pi*0.25*((2*radio)^2-(2*(radio-t*N))^2)*long;
disp('Su peso(Kg) es');
disp(FF);
end
end

```

## PORGRAMA ANGULOALEATORIO

```

%Este es una version variante del programa OPTIEJE, este programa nos
puede
%generar laminas con cualquier angulo entre el rango de [-90,90]
grados.
clc;
close all;
clear all;
digits(32);
format short e;
disp('*****')
disp('
Este es un programa para el diseno y optimizacion de
')
disp('
un arbol de transmision de materiales compuestos
')
disp('
Autor: Shengyu Wang
')
disp('
Tutor: Dr.Prof. Carlos Navarro
')
disp('
Universidad Carlos III de madrid
')
disp('*****')
disp('ATENCION:SE SUPONE QUE EL LAMINADO ES SIMETRICO')
disp('Por favor,seleccione el material')
disp('1 Carbono/Epoxi USN150')
disp('2 Vidrio/Epoxi UGN150')
disp('3 Otro material')
comm=input('Por favor,elija su opcion >>');

```

```
clc;
```

```
%Propiedad mecanica de USN150
```

```
if comm==1
    E1=131.6E+9;
    E2=8.2E+9;
    E3=E2;
    n21=0.281;
    n31=n21;
    n23=0.281;
    G12=4.5E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=1550;
    Xt=2000E+06;
    Xc=1400E+06;
    Yt=61E+06;
    Yc=130E+06;
    SHEAR=40E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=-0.9E-6;
    alfa2=27E-6;
    beta1=0;
    beta2=0.4;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';
```

```
%Propiedad mecanica de UGN150
```

```
elseif comm==2
    E1=43.3E+9;
    E2=14.7E+9;
    E3=E2;
    n21=0.3;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.4E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=2100;
    Xt=1050E+06;
    Xc=700E+06;
    Yt=65E+06;
    Yc=120E+06;
    SHEAR=65E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=6.3E-6;
    alfa2=19E-6;
    beta1=0.01;
    beta2=0.29;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';
```

```
else
```

```
    %Introduce manualmente las propiedades si no es ninguno de los
    %materiales anteriores
    disp('Por favor, introduzca las propiedades del material >>')
    disp('E,G,Xc,Xt,Yc,Yt,S estan expresados en Pa >>')
    E1=input('E1 = ');
    E2= input('E2 = ');
```

ANEXO 3

```

E3= input('E3 = ');
n21= input('n21 = ');
n31= input('n31 = ');
n23= input('n23 = ');
G12= input('G12 = ');
G13= input('G13 = ');
G23= input('G23 = ');
Dens= input('Densidad = ');
Xt=input('Xt= ');
Xc=input('Xc= ');
Yt=input('Yt= ');
Yc=input('Yc= ');
SHEAR=input('S= ');
t=input('Espesor= ');
disp('alfa es el coef. de dilatacion termica');
alfa1=input('alfa1= ');
alfa2=input('alfa2= ');
disp('beta es el coef. de expansion higroscopica');
beta1=input('beta1= ');
beta2=input('beta2= ');
dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
expansion=[beta1,beta2,0]';
end

%Se puede generar aleatoriamente una secuencia de laminacion o
%introducirla manualmente
disp('Por favor, elija una de las dos siguientes opciones')
disp('1. Conozco el numero de laminas y la secuencia de la
laminacion')
disp('2. Generar estos valores aleatoriamente')
eleccion=input('Opcion >>');
if eleccion==1
    n=input('Numero de laminas >> ');
    angulo=input('Secuencia de apliamiento COMPLETA. Ej:[30 -26 88 -
26 30] >> ');
else
    %numero aleatorio de laminas, como minimo 10 laminas y maximo 32
    capa=randi([20 26],1,1);
    if rem(capa,2)==0
        nvar=capa/2+1; %numero de variable si hay numero par de
laminas
    else
        nvar=(capa+1)/2+1; %numero de variable si hay numero impar de
laminas
    end
    %generamos angulos aleatorias dentro del intervalo de [-90,90]
grados
    angulo=randi([-90 90],(nvar-1),1)';

    %creo una inversion del vector angulo para generar
automaticamente la
    %secuencia total de la lamina simetrica
    invangulo=fliplr(angulo);
    %algoritmo para generar generar automaticamente la
    %secuencia total de la lamina simetrica
    if rem(capa,2)==0
        for k=nvar:capa
            angulo(k)=invangulo(k-(capa/2));
        end
    else

```

ANEXO 3

```

        for k=nvar:capa
            angulo(k)=invangulo(k-((capa-1)/2));
        end
    end
    %monitorizo las informaciones
    disp('Numero de laminas generado aleatoriamente es >> ');
    disp(capa);
    disp('La secuencia generada aleatoriamente es >> ');
    disp(angulo');
end
disp('Por favor,introduzca las especificaciones del eje')
omega=input('Introduzca la velocidad maxima (RPM) del eje >>');
torsormax=input('Introduzca el momento torsor maximo (Nm) del eje
>>');
diametro=input('Introduzca el diametro exterior (m) del eje >>');
long=input('Introduzca la longitud (m) del eje >>');
temper1=input('Introduzca la temperatura de curado >>');
temper2=input('introduzca la temperatura de servicio (menor que la
temperatura de curado) >>');
temper=temper2-temper1;
humedad=input('Introduzca el contenido de humedad en % >> ');
humedad=humedad/100;
FS=input('Introduzca el coeficiente de seguridad >>');
radio=diametro/2;

%Llamo la funcion ABD para calcular las propiedades del arbol de
%transmision
FF=ABD(angulo,E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,t,SHE
AR,omega,radio,torsormax,long,FS,dilatacion,temper,expansion,humedad)
;
ite=input('Quiere realizar las iteraciones? SI=1,NO=0 >> ');

if ite==1
    %Inicializamos el proceso de iteracion
    disp('%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----
--%');
    maxit=input('Maximo numero de iteracion >>');
    contador=1;
    resultado=ones(38,maxit);
    maxtorsor=ones(5,maxit);
    for iga=1:maxit
        maxtorsor(1,iga)=iga;
        capa=randi([20 26],1,1);
        if rem(capa,2)==0
            nvar=capa/2+1;
        else
            nvar=(capa+1)/2+1;
        end
        angulo=randi([-90 90],[nvar-1,1]);
        invangulo=fliplr(angulo);
        if rem(capa,2)==0
            for k=nvar:capa
                angulo(k)=invangulo(k-(capa/2));
            end
        else
            for k=nvar:capa
                angulo(k)=invangulo(k-((capa-1)/2));
            end
        end
    end

    all_ang = angulo;

```

ANEXO 3

```

N=length(all_ang);
h=zeros(N+1);
h(N+1)=N*t/2;
lstf=zeros(3*N,3);
Ntemp=zeros(3,1);
Nhume=zeros(3,1);

for k = 1 : N
    %matriz de rigidez
    S = [1/E1      -n21/E1      -n31/E1      0      0      0;
         -n21/E1      1/E2      -n23/E2      0      0      0;
         -n31/E1      -n23/E2      1/E3      0      0      0;
         0      0      0      1/G23      0      0;
         0      0      0      0      1/G13      0;
         0      0      0      0      0      1/G12];

    C = inv(S);
    Q = zeros(3,3);
    Q(1,1) = C(1,1) - (C(1,3))^2 / C(3,3);
    Q(2,2) = C(2,2) - (C(2,3))^2 / C(3,3);
    Q(1,2) = C(1,2) - C(1,3)*C(2,3) / C(3,3);
    Q(2,1) = Q(1,2);
    Q(3,3) = C(6,6);

    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;

    %transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);
    q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
    q(3,3)=2*Q(3,3);

    q=T\q*T;
    for i = 1:3
        q(i,3)=q(i,3)/2;
    end
    lstf(3*k-2:3*k,1:3)=q(1:3,1:3);
    h(k)=(k-N/2-1)*t;
    Ntempk=q*dilatacion*t;
    Ntemp=Ntemp+Ntempk;
    Nhumeq=q*expansion*t;
    Nhume=Nhume+Nhumeq;
end

%Calculamos las matriz A B y D
A=zeros(3,3);
B=zeros(3,3);
D=zeros(3,3);
for i=1:3

```

### ANEXO 3

```

for j=1:3
    q(1:3,1:3)=lstf(1:3,1:3);
    A(i,j) = q(i,j) * (h(2) - h(1));
    B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(2)^2 - h(1)^2));
    D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(2)^3 - h(1)^3));

    for k = 2 : N
        q(1:3,1:3) = lstf(3*k-2:3*k,1:3);
        A(i,j) = q(i,j) * (h(k+1) - h(k)) + A(i,j);
        B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(k+1)^2 - h(k)^2)) + B(i,j);
        D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(k+1)^3 - h(k)^3)) + D(i,j);
    end
end
end

%calculamos las matriz a b y d
LamnStf=zeros(6,6);
a=zeros(3,3);
b=zeros(3,3);
d=zeros(3,3);
LamnStf(1:3,1:3)=A(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,4:6)=D(1:3,1:3);
LamnStf(1:3,4:6)=B(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,1:3)=B(1:3,1:3);
LamnCmp=inv(LamnStf);
a(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,1:3);
b(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,4:6);
d(1:3,1:3)=LamnCmp(4:6,4:6);

%calculamos las fuerzas exteriores resultantes
Nx=0;
radian=2*pi*omega/60;
Ny=2*Dens*t*N*(radio*radio)*(radian*radian);
Nxy=torsormax/(2*pi*(radio*radio));
fuerza=[Nx Ny Nxy]';
Ntemp=temper*Ntemp;
Nhume=humedad*Nhume;
fuerza=fuerza+Ntemp+Nhume;
deform=a*fuerza;

%Calculamos las tensiones de cada lamnia en eje global
%Creo una matriz tension para almancenar las tensiones de cada
lamina
SIG=zeros(3,N);
for k = 1 : N
    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;
    %transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);

```

ANEXO 3

```

q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
q(3,3)=2*Q(3,3);
q=T\q*T;
for i = 1:3
    q(i,3)=q(i,3)/2;
end
sigmaglobal=q*deform;
sigmalocal=T*sigmaglobal;
for i=1:3
    SIG(i,k)=sigmalocal(i);
end
end
%Calculamos las constantes ingenieriles
AA=(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2)*A(3,3)+2*A(1,2)*A(2,3)*A(1,3)-
A(1,1)*(A(2,3)^2)-A(2,2)*(A(1,3)^2);
Ex=AA/((t*N)*(A(2,2)*A(3,3)-A(2,3)^2));
Ey=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(3,3)-A(1,3)^2));
Gxy=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2));
%calculamos el momento torsor critico y la frecuencia critica
Tcr=(2*pi*(radio*radio)*t*N*0.272*((Ex*(Ey^3))^0.25)*((t*N/radio)^1.5
));
Ncrbe=(60*pi/(2*(long^2))*((Ex*(radio^4-((radio-
t*N)^4))/(4*(radio^2-((radio-t*N)^2))*Dens))^0.5));
%Aplicamos el criterio de rotura Tsai-Hill con FS a cada lamina
FS1=zeros(1,N);
for i=1:N
    if SIG(1,i)>0
        X=Xt;
    else
        X=Xc;
    end
    if SIG(2,i)>0
        Y=Yt;
    else
        Y=Yc;
    end
    sig1=SIG(1,i);
    sig2=SIG(2,i);
    sig12=SIG(3,i);
    FS1(1,i)=1/(((sig1*FS)^2/(X*X))-
(sig2*sig1*FS*FS/(X*X))+((sig2*FS)^2/(Y*Y))+((sig12*FS)^2/(SHEAR^2)))
;
end
fail=min(FS1(1,:));
peso=Dens*pi*0.25*((2*radio)^2-(2*(radio-t*N))^2)*long;

if fail>=1 && Tcr>=torsormax && Ncrbe>=omega
    resultado(1,contador)=iga;
    resultado(2,contador)=peso;
    resultado(3,contador)=fail;
    resultado(4,contador)=N;
    resultado(5,contador)=Tcr;
    resultado(6,contador)=Ncrbe;
    for i=1:N
        resultado(i+6,contador)=angulo(i);
    end
    contador=contador+1;
end
end

```

### ANEXO 3

```

%algoritmo para encontrar los mejores resultados dentro de la
poblacion
%resultadofinal es una matriz que contiene todos los resultados
%factibles con su peso, factor de seguridad, numero de
iteraccion,y
%secuencia de laminacion

if max(resultado(:,1))>1
norotura=0;
for i=1:maxit
    if resultado(3,i)>1
        norotura=norotura+1;
    end
end
resultadofinal=ones(38,norotura);
for i=1:38
    for j=1:norotura
        resultadofinal(i,j)=resultado(i,j);
    end
end
%matrizminpeso es una matriz que contiene todos los resultados
%con el menor peso con su factor de seguridad, numero de
iteraccion,y
%secuencia de laminacion
pesoptimo=0;
cont1=1;
minpeso=min(resultadofinal(2,:));
for i=1:norotura
    if resultadofinal(2,i)<=minpeso
        pesoptimo=pesoptimo+1;
    end
end
matrizminpeso=ones(38,pesoptimo);
for i=1:norotura
    if resultadofinal(2,i)<=minpeso
        matrizminpeso(:,cont1)=resultadofinal(:,i);
        cont1=cont1+1;
    end
end
%como en la matrizminpeso todos los resultados tiene el mismo
peso
%que es el menor peso,seleccionaremos los resultados con mayor
factor de
%seguridad
hilloptimo=0;
cont2=1;
maxhill=max(matrizminpeso(3,:));
for i=1:pesoptimo
    if matrizminpeso(3,i)>=maxhill
        hilloptimo=hilloptimo+1;
    end
end
matrizmaxhill=ones(38,hilloptimo);
for i=1:pesoptimo
    if matrizminpeso(3,i)>=maxhill
        matrizmaxhill(:,cont2)=matrizminpeso(:,i);
        cont2=cont2+1;
    end
end
cont3=0;
for i=1:38

```

ANEXO 3

```

        if matrizmaxhill(i,1)~=1
            cont3=cont3+1;
        end
    end
    optimoresult=ones(cont3,hilloptimo);
    for i=1:cont3
        for j=1:hilloptimo
            optimoresult(i,j)=matrizmaxhill(i,j);
        end
    end
    disp('LOS RESULTADOS MEJORES SON:');
    disp('   No.Iteracion           Peso           I.Seguridad           No.Lamina
Tcr           Ncrbe')
    disp(optimoresult(1:6,:));
    disp('Secuencia de apilamiento')
    disp(optimoresult(7:cont3,:));
    disp('*****')
    disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
    disp('*****')
    else
        disp('LO SIENTO, NO SE HA ENCONTRADO UN RESULTADO OPTIMO')
        disp('*****')
        disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
        disp('*****')
    end
else
    disp('*****')
    disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
    disp('*****')
end
end

```

# ANEXO 4

## CÓDIGO FUENTE DEL PROGRAMA myPSO

---

### PROGRAM myPSO

```

clc;
close all;
clear all;
digits(32);
format short e;
disp('*****
')
disp('** Este es un algoritmo para el diseno y optimizacion de
**')
disp('** un arbol de transmision de materiales compuestos
**')
disp('** Autor: Shengyu Wang
**')
disp('** Tutor: Dr.Prof. Carlos Navarro
**')
disp('** Universidad Carlos III de madrid
**')
disp('*****
')
disp('ATENCIÓN:SE SUPONE QUE EL LAMINADO ES SIMETRICO')
disp('Por favor,seleccione el material')
disp('1 Carbono/Epoxi USN150')
disp('2 Vidrio/Epoxi UGN150')
disp('3 Otro material')
comm=input('Por favor,elija su opcion >>');

%Propiedad mecanica de USN150
if comm==1
    E1=131.6E+9;
    E2=8.2E+9;
    E3=E2;
    n21=0.281;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.5E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=1550;
    Xt=2000E+06;
    Xc=1400E+06;
    Yt=61E+06;
    Yc=130E+06;
    SHEAR=40E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=-0.9E-6;

```

## ANEXO 4

```

    alfa2=27E-6;
    beta1=0;
    beta2=0.4;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];

%Propiedad mecanica de UGN150
elseif comm==2
    E1=43.3E+9;
    E2=14.7E+9;
    E3=E2;
    n21=0.3;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.4E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=2100;
    Xt=1050E+06;
    Xc=700E+06;
    Yt=65E+06;
    Yc=120E+06;
    SHEAR=65E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=6.3E-6;
    alfa2=19E-6;
    beta1=0.01;
    beta2=0.29;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];

else
    %Introduce manualmente las propiedades si no es ninguno de los
    %materiales anteriores
    disp('Por favor,introduzca las propiedades del material >>')
    disp('E,G,Xc,Xt,Yc,Yt,S estan expresados en Pa >>')
    E1=input('E1 = ');
    E2= input('E2 = ');
    E3= input('E3 = ');
    n21= input('n12 = ');
    n31= input('n13 = ');
    n23= input('n23 = ');
    G12= input('G12 = ');
    G13= input('G13 = ');
    G23= input('G23 = ');
    Dens= input('Densidad = ');
    Xt=input('Xt= ');
    Xc=input('Xc= ');
    Yt=input('Yt= ');
    Yc=input('Yc= ');
    SHEAR=input('S= ');
    t=input('Espesor= ');
    disp('alfa es el coef. de dilatacion termica');
    alfa1=input('alfa1= ');
    alfa2=input('alfa2= ');

```

## ANEXO 4

```

disp('beta es el coef. de expansion higroscopica');
beta1=input('beta1= ');
beta2=input('beta2= ');
dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
expansion=[beta1,beta2,0]';

propiedad=[E1,E2,E3,n21,n31,n23,G12,G13,G23,Dens,Xt,Xc,Yt,Yc,SHEAR,t,
alfa1,alfa2,beta1,beta2];
end

%Se puede generar aleatoriamente una secuencia de laminacion o
%introducirla manualmente
disp('Por favor, elija una de las dos siguientes opciones')
disp('1. Conozco el numero de laminas y la secuencia de la
laminacion')
disp('2. Generar estos valores aleatoriamente')
eleccion=input('Opcion >>');
if eleccion==1
    n=input('Numero de laminas >> ');
    angulo=input('Secuencia de apliamiento COMPLETA. Ej: [0 -45 90 -
45 0] >> ');
else
    %numero aleatorio de laminas, como minimo 10 laminas y maximo 32
    capa=randi([10 32],1,1);
    if rem(capa,2)==0
        nvar=capa/2+1; %numero de variable si hay numero par de
laminas
    else
        nvar=(capa+1)/2+1; %numero de variable si hay numero impar de
laminas
    end
    angulo=randi([-90 90],[nvar-1],1)';

    %creo una inversion del vector angulo para generar
automaticamente la
    %secuencia total de la lamina simetrica
    invangulo=fliplr(angulo);
    %algoritmo para generar generar automaticamente la
    %secuencia total de la lamina simetrica
    if rem(capa,2)==0
        for k=nvar:capa
            angulo(k)=invangulo(k-(capa/2));
        end
    else
        for k=nvar:capa
            angulo(k)=invangulo(k-((capa-1)/2));
        end
    end
    %monitorizo las informaciones
    disp('Numero de laminas generado aleatoriamente es >> ');
    disp(capa);
    disp('La secuencia generada aleatoriamente es >> ');
    disp(angulo)';
end
disp('Por favor, introduzca las especificaciones del eje')
omega=input('Introduzca la velocidad maxima (RPM) del eje >>');
torsormax=input('Introduzca el momento torsor maximo (Nm) del eje
>>');
diametro=input('Introduzca el diametro exterior (m) del eje >>');
long=input('Introduzca la longitud (m) del eje >>');
temper1=input('Introduzca la temperatura de curado >>');

```

## ANEXO 4

```

temper2=input('introduzca la temperatura de servicio (menor que la
temperatura de curado) >>');
temper=temper2-temper1;
humedad=input('Introduzca el contenido de humedad en % >> ');
humedad=humedad/100;
FS=input('Introduzca el coeficiente de seguridad >>');
radio=diámetro/2;
cargas=[omega,torsormax,diámetro,long,temper,humedad,FS,radio];
%Llamo la funcion ABD para calcular las propiedades del arbol de
%transmision

disp('*****
');
disp('*****
');
ite=input('Quiere realizar la optimizacion? SI=1,NO=0 >>');

if ite==1
    disp('%-----INICIALIZAR EL PROCESO DE OPTIMIZACION-----
--%');
    M=input('Maximo numero de iteracion >>');
    disp('Un numero de particulas entre (40-100) es adecuado');
    N=input('Numero de particulas >>');
    c1=2;
    c2=2;
    w=0.5;
    format long;

for capa=12:30

    if rem(capa,2)==0
        nvar=capa/2+1;
    else
        nvar=(capa+1)/2+1;
    end

%-----INICIALIZACION-----%
%-----Creamos una poblacion aleatoria de soluciones-----%
for i=1:N
    x=randi([-90 90],[nvar-1,i]);
end
invangulo=fliplr(x);
for i=1:N
    if rem(capa,2)==0
        for k=nvar:capa
            x(i,k)=invangulo(i,k-(capa/2));
        end
    else
        for k=nvar:capa
            x(i,k)=invangulo(i,k-((capa-1)/2));
        end
    end
end

%-----Creamos una poblacion aleatoria de velocidades-----%
for i=1:N
    v=randi([-90 90],[nvar-1,i]);
end
invangulo=fliplr(v);
for i=1:N

```

```

if rem(capa,2)==0
    for k=nvar:capa
        v(i,k)=invangulo(i,k-(capa/2));
    end
else
    for k=nvar:capa
        v(i,k)=invangulo(i,k-((capa-1)/2));
    end
end
end

%-----INICIALIZAMOS EL FITNESS DE CADA PARTICULA, Y LOS VALORES Pi Y
Pg
for i=1:N
    p(i) = fitness(x(i,:),comm,propiedad,cargas);
    y=x;
end

%-----INICIALIZAMOS EL pg QUE ES LA MEJOR SOLUCION GLOBAL-----%
pg = x(N,:);
for i=1:(N-1)
    if
fitness(x(i,:),comm,propiedad,cargas)<fitness(pg,comm,propiedad,carga
s)
        pg=x(i,:);
    end
end
for t=1:M
    for i=1:N
        v(i,:)=w*v(i,)+c1*rand*(y(i,:)-x(i,))+c2*rand*(pg-x(i,:));
        x(i,:)=x(i,)+v(i,);
        if fitness(x(i,:),comm,propiedad,cargas)<p(i)
            p(i)=fitness(x(i,:),comm,propiedad,cargas);
            y(i,:)=x(i,);
        end
        if p(i)<fitness(pg,comm,propiedad,cargas)
            pg=y(i,);
        end
    end
    Pbest(t)=fitness(pg,comm,propiedad,cargas);
end
xm = pg';
fv = fitness(pg,comm,propiedad,cargas);
disp(x);
disp(v);
disp(pg);
disp(fv);
end
else
    disp('*****')
    disp('* EL PROGRAMA HA TERMINADO, GRACIAS POR EL USO *')
    disp('*****')
end
end

```

## FUNCIÓN FITNESS (FUNCIÓN OBJETIVO)

```
function F = fitness(x,comm,propiedad,cargas)
```

## ANEXO 4

```

%-----INTRODUCIMOS LAS CARGAS Y PROPIEDADES A LA FUNCION fitness-----
--%
if comm==1
    E1=131.6E+9;
    E2=8.2E+9;
    E3=E2;
    n21=0.281;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.5E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=1550;
    Xt=2000E+06;
    Xc=1400E+06;
    Yt=61E+06;
    Yc=130E+06;
    SHEAR=40E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=-0.9E-6;
    alfa2=27E-6;
    beta1=0;
    beta2=0.4;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';

elseif comm==2
    E1=43.3E+9;
    E2=14.7E+9;
    E3=E2;
    n21=0.3;
    n31=n21;
    n23=0.3;
    G12=4.4E+09;
    G13=G12;
    G23=3.5E+09;
    Dens=2100;
    Xt=1050E+06;
    Xc=700E+06;
    Yt=65E+06;
    Yc=120E+06;
    SHEAR=65E+06;
    t=125E-6;
    alfa1=6.3E-6;
    alfa2=19E-6;
    beta1=0.01;
    beta2=0.29;
    dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
    expansion=[beta1,beta2,0]';

else
    E1=propiedad(1);
    E2=propiedad(2);
    E3=propiedad(3);
    n21=propiedad(4);
    n31=propiedad(5);
    n23=propiedad(6);
    G12=propiedad(7);
    G13=propiedad(8);
    G23=propiedad(9);
    Dens=propiedad(10);

```

ANEXO 4

```

Xt=propiedad(11);
Xc=propiedad(12);
Yt=propiedad(13);
Yc=propiedad(14);
SHEAR=propiedad(15);
t=propiedad(16);
alfa1=propiedad(17);
alfa2=propiedad(18);
beta1=propiedad(19);
beta2=propiedad(20);
dilatacion=[alfa1,alfa2,0]';
expansion=[beta1,beta2,0]';
end

omega=cargas(1);
torsormax=cargas(2);
%diametro=cargas(3);
long=cargas(4);
temper=cargas(5);
humedad=cargas(6);
FS=cargas(7);
radio=cargas(8);

all_ang = x;
N=length(all_ang);
h=zeros(N+1);
h(N+1)=N*t/2;
lstf=zeros(3*N,3);
Ntemp=zeros(3,1);
Nhume=zeros(3,1);
for k = 1 : N
    %matriz de rigidez
    S = [1/E1      -n21/E1      -n31/E1      0      0      0;
        -n21/E1    1/E2        -n23/E2      0      0      0;
        -n31/E1    -n23/E2      1/E3        0      0      0;
        0          0          0          1/G23    0      0;
        0          0          0          0        1/G13    0;
        0          0          0          0          0      1/G12];

    C = inv(S);
    Q = zeros(3,3);
    Q(1,1) = C(1,1) - (C(1,3))^2 / C(3,3);
    Q(2,2) = C(2,2) - (C(2,3))^2 / C(3,3);
    Q(1,2) = C(1,2) - C(1,3)*C(2,3) / C(3,3);
    Q(2,1) = Q(1,2);
    Q(3,3) = C(6,6);

    %hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;

```

## ANEXO 4

```

%transformamos la matriz de rigidez
q=zeros(3,3);
q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
q(3,3)=2*Q(3,3);
q=T\q*T;
for i = 1:3
    q(i,3)=q(i,3)/2;
end
lstf(3*k-2:3*k,1:3)=q(1:3,1:3);
h(k)=(k-N/2-1)*t;
Ntempk=q*dilatacion*t;
Ntemp=Ntemp+Ntempk;
Nhumeq=q*expansion*t;
Nhume=Nhume+Nhumeq;
end

%Calculamos las matriz A B y D
A=zeros(3,3);
B=zeros(3,3);
D=zeros(3,3);
for i=1:3
    for j=1:3
        q(1:3,1:3)=lstf(1:3,1:3);
        A(i,j) = q(i,j) * (h(2) - h(1));
        B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(2)^2 - h(1)^2));
        D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(2)^3 - h(1)^3));

        for k = 2 : N
            q(1:3,1:3) = lstf(3*k-2:3*k,1:3);
            A(i,j) = q(i,j) * (h(k+1) - h(k)) + A(i,j);
            B(i,j) = 1/2*(q(i,j) * (h(k+1)^2 - h(k)^2)) + B(i,j);
            D(i,j) = 1/3*(q(i,j) * (h(k+1)^3 - h(k)^3)) + D(i,j);
        end
    end
end

%calculamos las matriz a b y d
LamnStf=zeros(6,6);
a=zeros(3,3);
LamnStf(1:3,1:3)=A(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,4:6)=D(1:3,1:3);
LamnStf(1:3,4:6)=B(1:3,1:3);
LamnStf(4:6,1:3)=B(1:3,1:3);
LamnCmp=inv(LamnStf);
a(1:3,1:3)=LamnCmp(1:3,1:3);

%calculamos las fuerzas exteriores resultantes
Nx=0;
radian=2*pi*omega/60;
Ny=2*Dens*t*N*(radio*radio)*(radian*radian);
Nxy=torsormax/(2*pi*(radio*radio));
fuerza=[Nx Ny Nxy]';
Ntemp=temper*Ntemp;
Nhume=humedad*Nhume;
fuerza=fuerza+Ntemp+Nhume;
deform=a*fuerza;

%Calculamos las tensiones de cada lamina en eje global
%Creo una matriz tension para almacenar las tensiones de cada lamina

```

```

SIG=zeros(3,N);
DEF=zeros(3,N);
for k = 1 : N
%hallamos la matriz de transformacion
    m = cosd (all_ang(k));
    n = sind (all_ang(k));
    T = zeros(3,3);
    T(1,1)=m^2;
    T(1,2)=n^2;
    T(1,3)=2*m*n;
    T(2,1)=n^2;
    T(2,2)=m^2;
    T(2,3)=-2*m*n;
    T(3,1)=-m*n;
    T(3,2)=m*n;
    T(3,3)=m^2-n^2;
%transformamos la matriz de rigidez
    q=zeros(3,3);
    q(1:2,1:2)=Q(1:2,1:2);
    q(3,3)=2*Q(3,3);
    q=T\q*T;
    for i = 1:3
        q(i,3)=q(i,3)/2;
    end
    eps11=m*m*deform(1,1)+n*n*deform(2,1)+m*n*deform(3,1);
    eps22=n*n*deform(1,1)+m*m*deform(2,1)-m*n*deform(3,1);
    gam12=2*(-m*n*deform(1,1)+m*n*deform(2,1)+(m*m-
n*n)*deform(3,1))/2);
    deformlocal=[eps11;eps22;gam12];
    sigmaglobal=q*deform;
    sigmalocal=T*sigmaglobal;
    for i=1:3
        SIG(i,k)=sigmalocal(i);
        DEF(i,k)=deformlocal(i);
    end
end
%Calculamos las constantes ingenieriles
AA=(A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)^2)*A(3,3)+2*A(1,2)*A(2,3)*A(1,3)-
A(1,1)*(A(2,3)^2)-A(2,2)*(A(1,3)^2);
Ex=AA/((t*N)*(A(2,2)*A(3,3)-A(2,3)^2));
Ey=AA/((t*N)*(A(1,1)*A(3,3)-A(1,3)^2));
%calculamos el momento torsor critico y la frecuencia critica
Tcr=(2*pi*(radio*radio)*t*N*0.272*((Ex*(Ey^3))^0.25)*((t*N/radio)^1.5
));
Ncrbe=(60*pi/(2*(long^2))*((Ex*(radio^4-((radio-t*N)^4))/(4*(radio^2-
((radio-t*N)^2))*Dens))^0.5));
FS1=zeros(2,N);
for i=1:N
    if SIG(1,i)>0
        X=Xt;
    else
        X=Xc;
    end
    if SIG(2,i)>0
        Y=Yt;
    else
        Y=Yc;
    end
    sig1=SIG(1,i);
    sig2=SIG(2,i);
    sig12=SIG(3,i);

```

#### ANEXO 4

```
    FS1(1,i)=i;
    FS1(2,i)=1/(((sig1*FS)^2/(X*X))-
(sig2*sig1*FS*FS/(X*X))+((sig2*FS)^2/(Y*Y))+((sig12*FS)^2/(SHEAR^2)))
;
end
    fail=min(FS1(2,:));
    if fail>=1 && Tcr>=torsormax && Ncrbe>=omega
        F=Dens*pi*0.25*((2*radio)^2-(2*(radio-t*N))^2)*long;
    else
        F=9999999999;
    end
end
```

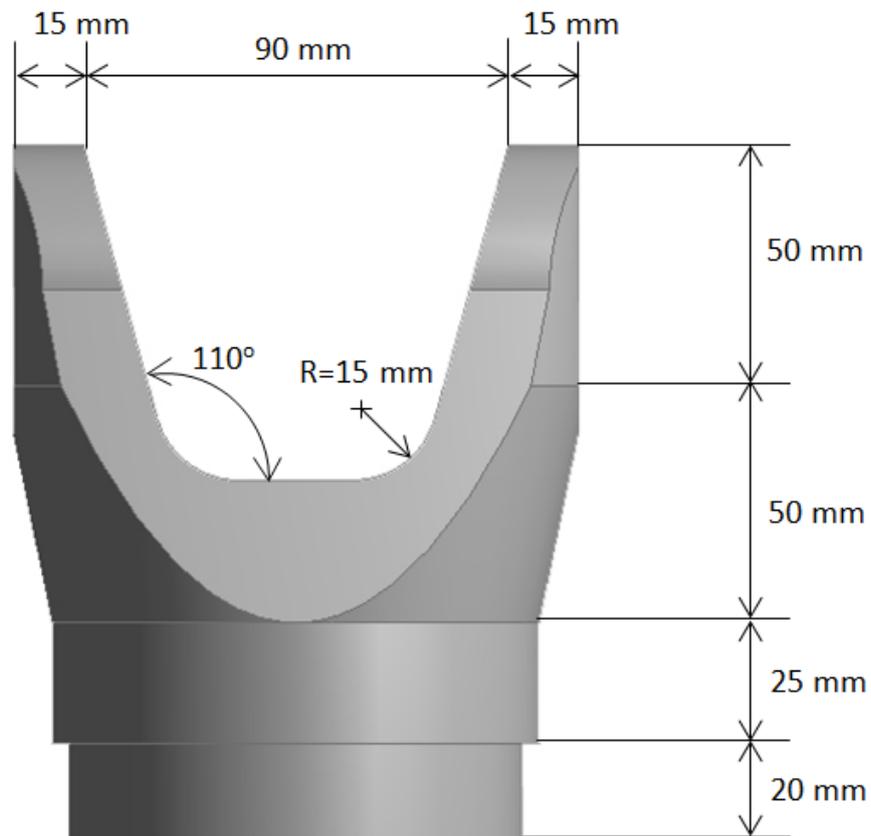
# ANEXO 5

## DIMENSIONES DE LA HORQUILLA

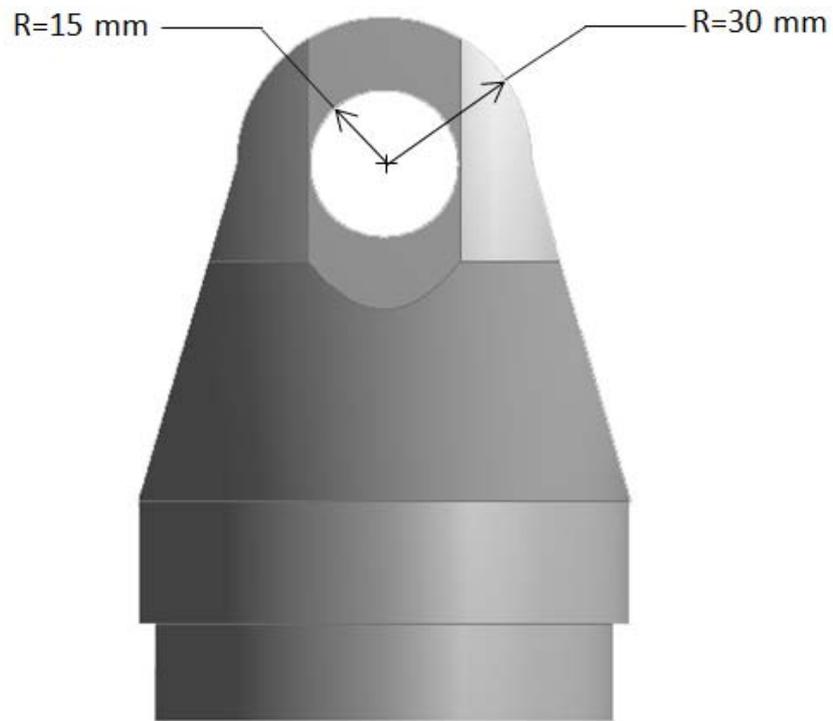
---

En este anexo se muestra las dimensiones de la horquilla.

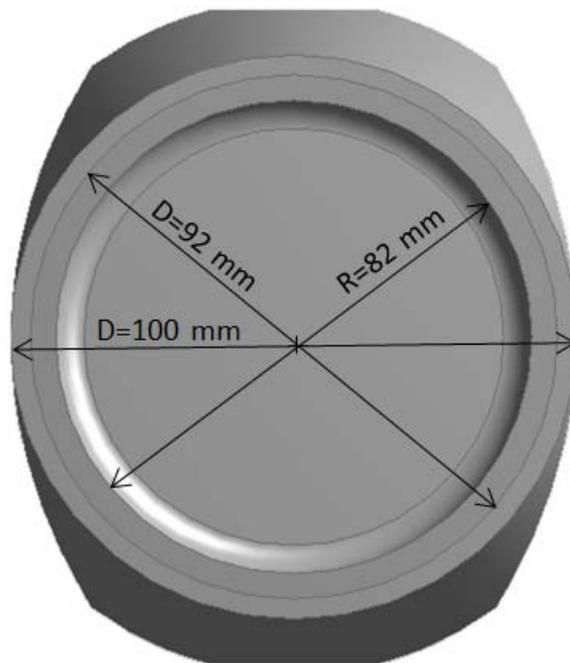
VISTA DE ALZADO:



VISTA DE PERFIL:



VISTA DE PLANTA INFERIOR:



# ANEXO 6

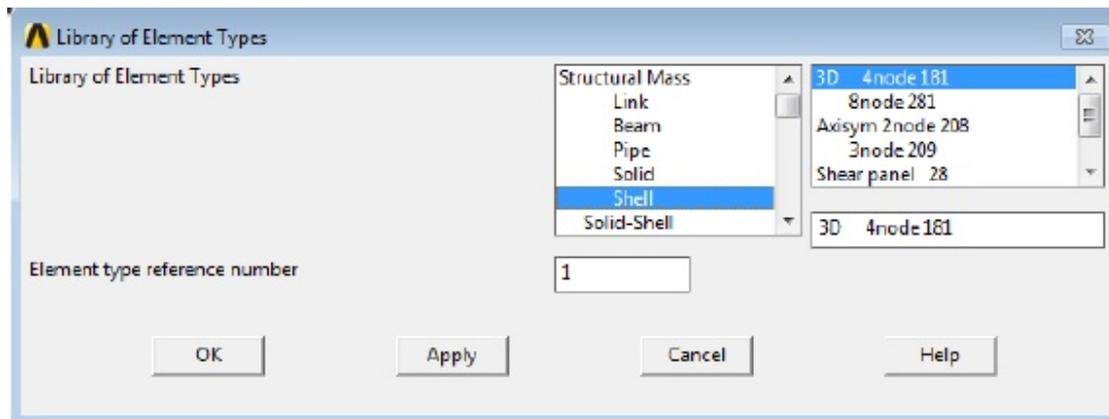
## MODELADO DE LAMINADOS MEDIANTE EL SHELL181

---

En este anexo se muestra una introducción sobre el modelado de un material compuesto mediante el uso del elemento SHELL181.

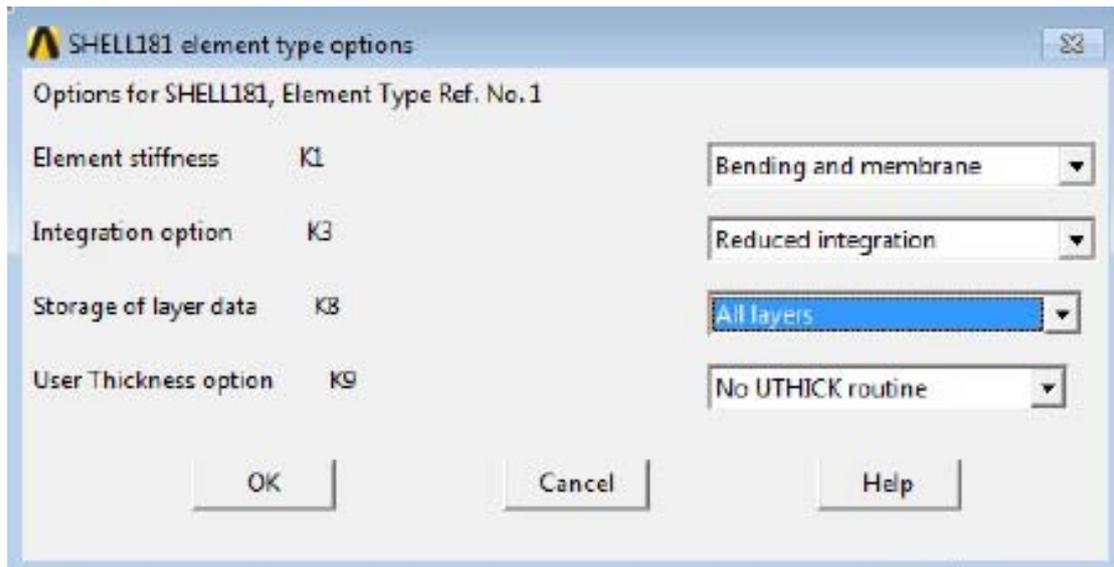
En primero lugar, se debe seleccionar el tipo de elemento, que en este caso al SHELL181:

1. Dirigirse a **MAIN MENU – PREPROCESSOR – ADD/EDIT/DELECT.**
2. Seleccionar **ADD.**
3. Seleccionar **SHELL – 3D 4NODE181.**
4. Seleccionar **OK.**



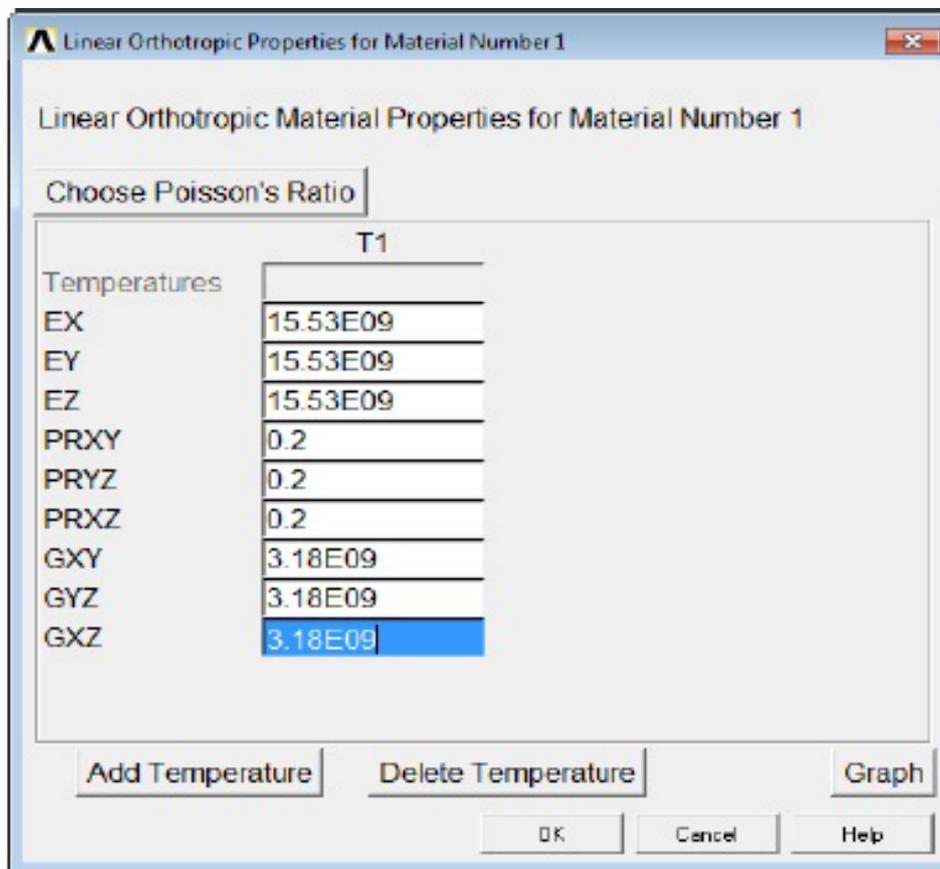
Mediante el elemento SHELL181 se puede modelar un laminado de hasta 255 láminas. La principal ventaja es que no requiere construir un modelo CAD lámina a lámina. El siguiente paso es modificar las propiedades del SHELL181.

5. Dirigirse a **MAIN MENU – PREPROCESSOR – ELEMENT TYPE – ADD/EDIT/DELETE.**
6. Seleccionar **OPCIONES.**
7. En la casilla **STORAGE OF LAYER DATA**, seleccionar **ALL LAYERS.**
8. Seleccionar **OK.**



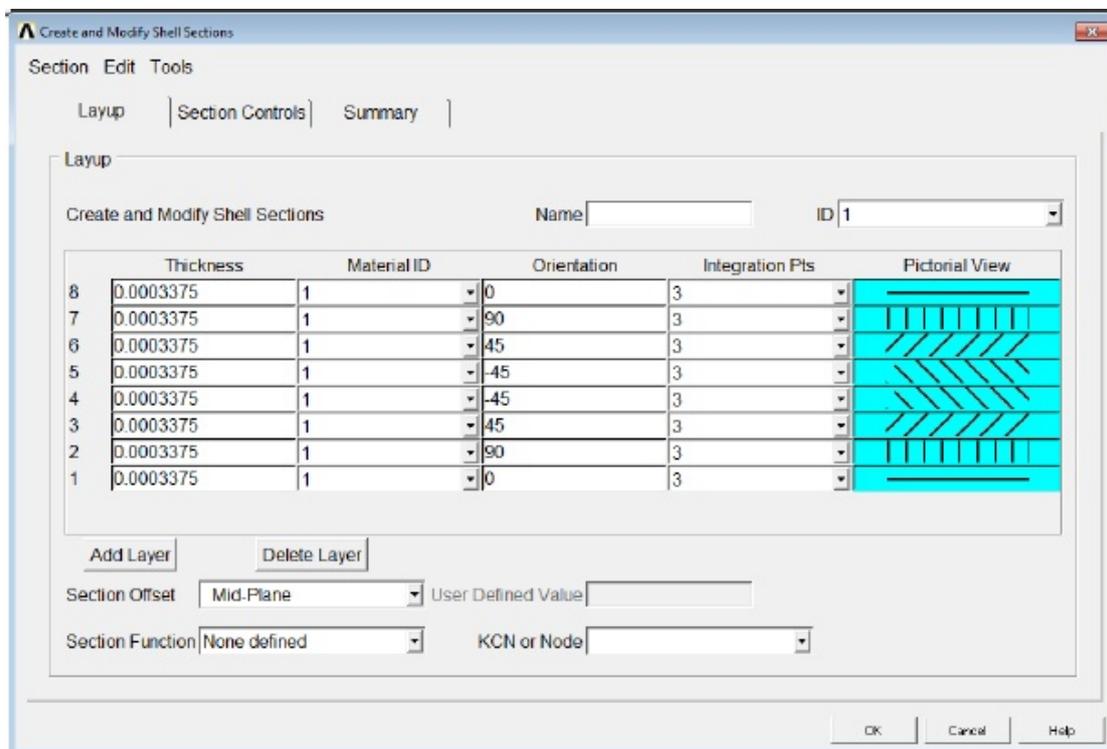
El paso 7 permite el almacenamiento de los resultados en todo el laminado. El siguiente paso es introducir las propiedades del material.

9. Dirigirse a **MAIN MENU - PREPROCESSOR - MATERIAL PROPERTIES - STRUCTURAL - LINEAR - ELASTIC - ORTHOTROPIC**.
10. En la tabla que aparece, rellenar todos los valores, como se muestra a continuación:



Hasta el paso 10, el programa sigue considerando el material como un material isótropo, dado que no se ha introducido ninguna información sobre laminado hasta ahora. Por lo tanto el siguiente paso es introducir los parámetros del laminado, tales como el número de láminas, las orientaciones y la secuencia de apilamiento.

11. Dirigirse a **MAIN MENU – PREPROCESSOR – SECTIONS – SHELL – LAY-UP – ADD/EDIT**.
12. En la pantalla que aparece, introducir el ángulo de cada lámina, el espesor de cada lámina, el número de láminas y el material de cada lámina. Nótese que el programa permite la aplicación de distinto material en cada lámina, esto proporciona muchas posibilidades del diseño. Nótese que el programa no entiende un laminado simétrico, es decir, para un laminado  $[0/90/45/-45]_s$ , se debe introducir la secuencia completa, que es  $[0/90/45/-45/-45/45/90/0]$ . Se toma esta misma secuencia de apilamiento y un espesor de la lámina de 0,3375 mm para el ejemplo.

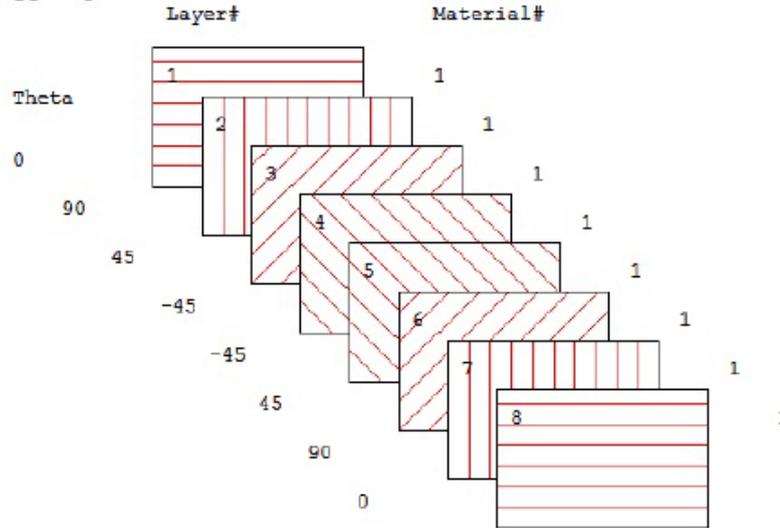


Introduciendo los datos como se muestra en la figura anterior, se obtiene un laminado de ocho láminas con la secuencia de apilamiento  $[0/90/45/-45/-45/45/90/0]$ . Una vez finalizado el modelado del laminado, ANSYS permite visualizar el laminado con la orientación de cada lámina.

13. Dirigirse a **MAIN MENU – PREPROCESSOR – SECCIONES – SHELL – LAY-UP – PLOT SECTION**.
14. En **PLOT SECTION WITH ID**, seleccionar **1**.

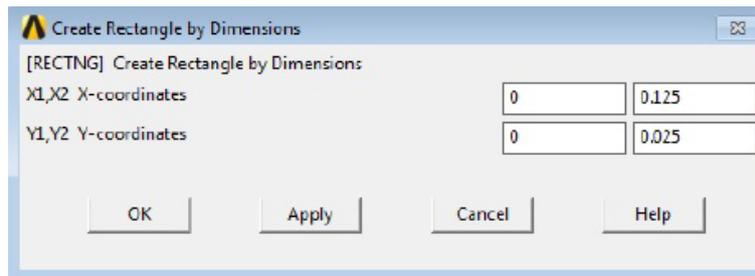
ANEXO 6

```
LAYER STACKING
ELEM   =   0
SECT   =   1
LAYERS :
TOTAL  =   8
SHOWN  :
FROM   1 TO 8
```



Una vez terminada la definición del laminado, el modelado de la pieza es idéntico como el de las piezas de materiales convencionales. En este proyecto se muestra un ejemplo sencillo de una probeta de dimensión  $0,125 \times 0,025 \text{ m}^2$ . Nótese que no hace falta introducir el valor del espesor, debido a que ya se ha introducido anteriormente con el modelado del laminado.

15. Dirigirse a **MAIN MENU - PREPROCESSOR - MODELING - CREATE - AREAS - RECTANGLE - BY DIMENSIONS**.
16. En la pantalla que aparece, introducir **0.125** en la casilla **X1,X2 X-COORDINATES**, y **0.025** en la casilla **Y1,Y2 Y-COORDINATES**.



El resultado es una probeta constituido de material compuesto, que tiene ocho láminas de 0,3375 mm y una dimensión de  $0,125 \times 0,025 \text{ m}^2$ .