



## **TESIS DOCTORAL**

# ***Metodología para la determinación del factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico***

**Autor:**

***D. Ramón Alberto Gutiérrez Moizant***

**Directoras:**

**Dra. Dña. María Beatriz Ramírez Berasategui**

**Dra. Dña. Ester Olmeda Santamaría**

**Tutora:**

**Dra. Dña. María Beatriz Ramírez Berasategui**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA**





## TESIS DOCTORAL

### **Metodología para la determinación del factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico**

***Autor:***

*D. Ramón Alberto Gutiérrez Moizant*

**Directoras:**

**Dra. Dña. María Beatriz Ramírez Berasategui**

**Dra. Dña. Ester Olmeda Santamaría**

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente:

Vocal:

Secretario:

Calificación:

Leganés, de de



*“El investigador sufre las decepciones, los largos meses pasados en una dirección equivocada, los fracasos. Pero los fracasos son también útiles, porque, bien analizados, pueden conducir al éxito. Y para el investigador no existe alegría comparable a la de un descubrimiento, por pequeño que sea...”*

*Alexander Fleming*



## *Agradecimientos*

En mi primer lugar me gustaría agradecer al director del departamento de Ingeniería Mecánica Dr. Vicente Díaz López y al responsable de área Dr. José Luis San Román García, por brindarme la oportunidad de seguir con mi formación académica e investigadora, y por poner a disposición todos los medios y recursos que han sido necesarios para la realización del presente trabajo.

Una mención muy especial a mis directoras, la Dra. María Beatriz Ramírez Berasategui y la Dra. Ester Olmeda Santamaría, por su constante dedicación y apoyo en la consecución de la presente tesis doctoral.

Al personal técnico del Departamento de Ingeniería Mecánica, por su trabajo y dedicación en la preparación de las herramientas, que hicieron posible la realización de los ensayos experimentales.

A todos mis compañeros del grupo MECATRAN por el buen trato recibido a lo largo de todos estos años.

Deseo también expresar todo mi agradecimiento y afecto a mi familia, por su apoyo incondicional.

A todos ellos mi más sincero respeto y admiración, muchas gracias.





# *Abstract*

The engineering models are based on simplifications and idealizations of the real situation that have an effect on their accuracy. The degree of veracity of these models depends on how similar are the ideal boundary conditions to the real ones. Therefore, before the model being used in the calculation of the design stress to determine its safety factor, it must be verified that its predictions correspond with the analyzed situation.

The experimental validation allows quantifying the degree of distortion of the simplified model with respect to the reality. For this purpose, it must be considered that the magnitudes of the theoretical model and the experimental test are not unique, but that they are the best estimates of all the possible values; i.e. it implies the identification and quantification of all the potential sources of uncertainty. If the uncertainties are not taken into account, the acceptance of the predictive model depends exclusively on the designer's experience being thus a subjective validation that could be erroneous.

The subjective assessment of the engineer, based on experience is necessary, but may not be the only tool used in the validation of results. This is the reason why many researchers and international committees have been working on the development of the fundamental concepts and the necessary terminology for model validation and verification. Nevertheless, there is still no unified approach of the statistical parameters to be used, but in any case, they have to consider predictions and experimental observations in probabilistic terms.

Nowadays, the so-called safety factor commonly used at an engineering level, has also joined the philosophy of considering that the parameters involved in its calculus, have some degree of uncertainty. In this new approach to safe design, it is known as statistical or probabilistic safety factor.

In the present thesis, a methodology that innovates the current concept of safety factor is proposed, as it optimizes the accuracy of the load or the design stress that ensure the minimum magnitude of the safety factor, according to the probability of failure selected.

The proposed methodology is a novel procedure that links the result of the experimental validation of the predictive model, with the expression of the probabilistic safety factor. To do so, a statistical magnitude commonly used in interlaboratory comparisons is used, that allows to validate the theoretical model and verify if the model overestimates or underestimates the real case.

For the calculus of the statistical magnitude of validation, an uncertainty model has been generated that takes into account the uncertainty of the magnitudes in the theoretical model as well as its differences with the real case under study.

This methodology is applied to a real case, in which 5 sections of circular tube, with different diameters are compressed by diametrically opposed axial loads. The internationally accepted concepts of the guide for the expression of the uncertainty of measurement as well as Monte Carlo simulations are used, both for the calculus of uncertainty and the generation of additional information. The theoretical two-dimensional model is verified together with its underestimating tendency and the minimum safety factor is determined with the imposed safety conditions, according to the probability of failure assigned.

Finally, it is shown that the validation result influences the calculation of the safety factor, when predictions tend to underestimate the real situation, since it increases the probability of failure. Furthermore, it is verified that the introduction of statistical validation into the expression of the probabilistic safety factor, enables that the predictions together with the global uncertainty, never exceed the value of the maximum allowable stress.

# *Resumen*

Los modelos ingenieriles están fundamentados en simplificaciones e idealizaciones de la situación real, que afectan a su exactitud. Son modelos cuyo grado de veracidad depende de cuan semejantes sean las condiciones de contorno ideales de las reales. Por lo tanto, antes de ser utilizados en el cálculo de la tensión de diseño para determinar el factor de seguridad del mismo, debe comprobarse que las estimaciones realizadas con el modelo empleado se corresponden con la situación analizada.

La validación experimental permite cuantificar el grado de distorsión del modelo simplificado con respecto a la realidad. Para realizar esta cuantificación, ha de considerarse que las magnitudes del modelo teórico y del ensayo experimental, no son únicas, sino que son la mejor estimación de todos los posibles valores atribuibles a ambas; es decir, implica la identificación y cuantificación de todas las potenciales fuentes de incertidumbre. Si las incertidumbres no son tomadas en cuenta, el criterio de aceptación del modelo predictivo, depende de la experiencia de quien diseña, siendo esto una valoración subjetiva que puede resultar errónea.

La valoración subjetiva del ingeniero basada en la experiencia es necesaria, pero no puede ser la única herramienta empleada en la comparación de resultados. Es por ello que, en la actualidad, numerosos investigadores, así como comités internacionales, han estado trabajando en el desarrollo de los conceptos fundamentales y la terminología necesaria para la validación de modelos. Sin embargo, aún no existe un enfoque unificado de cuáles son los parámetros estadísticos que se deben usar, que en todo caso, deberán considerar que las predicciones y las observaciones experimentales, deben expresarse en términos probabilísticos.

Actualmente, el denominado factor de seguridad de uso común a nivel ingenieril, también se ha sumado a la filosofía empleada en la validación experimental, ya que considera que los parámetros involucrados en su estimación, poseen cierto grado de incertidumbre. A este

nuevo enfoque de diseño seguro, se le conoce como factor de seguridad estadístico o probabilístico.

En la presente tesis doctoral, se propone una metodología que pretende innovar el concepto actual del factor de seguridad, con miras a mejorar el nivel de confianza de la carga o la tensión de diseño que asegura la obtención del factor de seguridad mínimo, de acuerdo a la probabilidad de fallo seleccionada.

La metodología planteada es un procedimiento novedoso que vincula el resultado de la validación experimental del modelo predictivo, con la expresión del factor de seguridad probabilístico. Para ello, se ha introducido un estadístico de validación, de uso común en la comparación entre laboratorios, que permite validar el modelo teórico y que, además, ayuda a definir si el modelo sobre-estima o sub-estima el caso real.

Para el cálculo del estadístico de validación, primero se ha elaborado un modelo de incertidumbre, que toma en cuenta tanto la aportación de las variables del modelo, como la debida al incumplimiento de las condiciones de contorno ideales.

Esta metodología se aplica a un caso real, en el que 5 secciones de tubo circular, con diferentes diámetros son comprimidos por cargas axiales diametralmente opuestas.

Se aplican los conceptos metrológicos expuestos en la guía para la expresión de la incertidumbre de medida, internacionalmente aceptados y se utilizan simulaciones tipo Monte Carlo, tanto para el cálculo de incertidumbre, como para la generación de información adicional.

Se comprueba que el modelo cumple con los requisitos de aceptación planteados en este trabajo de investigación. Al mismo tiempo, se verifica la tendencia de dicho modelo y se le relaciona con el factor de seguridad mínimo, de manera que la carga de diseño calculada garantiza que se cumplen con las condiciones de seguridad impuestas, de acuerdo con la probabilidad de fallo asignada.

Finalmente, se demuestra que el resultado de la validación afecta al cálculo del factor de seguridad cuando las predicciones tienden a sub-estimar la situación real, ya que aumenta la probabilidad de fallo. Además, se verifica cómo la introducción del estadístico de validación en la expresión del factor de seguridad probabilístico, obliga a que las predicciones en conjunto con la incertidumbre global, nunca superen el valor de la tensión máxima admisible.

# Índice General

ÍNDICE DE FIGURAS.....	V
ÍNDICE DE TABLAS .....	IX
<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>11</b>
<i>Introducción y Objetivos .....</i>	<i>11</i>
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>15</b>
<b>2. Estado del arte .....</b>	<b>15</b>
2.1. La incertidumbre de medida y el factor de seguridad.....	15
2.2. Factores que influyen sobre el factor de seguridad.....	21
2.2.1. Incertidumbre de las propiedades del material .....	21
2.2.2. Incertidumbre del modelo teórico seleccionado.....	24
2.3. Verificación y validación experimental.....	26
2.3.1. Validación ingenieril .....	28
2.3.2. Métodos para la validación del modelo teórico.....	29
2.3.2.1. Validación univariante .....	32
2.3.2.2. Validación multivariante.....	34
2.3.2.3. Validación alternativa .....	37
2.4. Aplicación del concepto de incertidumbre en el diseño ingenieril .....	38
2.5. Técnicas experimentales en ingeniería.....	39
2.6. Introducción a la medición de la deformación con galgas extensométricas resistivas .....	40
2.7. Fuentes de error en mediciones con galgas extensométricas resistivas .....	47
2.7.1. Error debido a la temperatura .....	48
2.7.2. Error debido a la no linealidad del puente de Wheatstone.....	54
2.7.3. Error debido a la sensibilidad transversal.....	55
2.7.4. Error debido a la alineación .....	58
2.8. Distribución de tensiones en anillos circulares.....	59
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>69</b>
<b>3. Metodología .....</b>	<b>69</b>

3.1. Procedimiento general para la determinación del factor de seguridad.....	69
3.2. Materiales.....	74
3.3. Equipos.....	77
3.3.1. Máquina de ensayos .....	77
3.3.2. Equipo de adquisición de datos.....	78
3.4. Procedimiento experimental .....	80
3.5. Determinación de las constantes elásticas del material .....	83
3.6. Modelo de incertidumbre de las constantes elásticas .....	87
3.7. Determinación de las deformaciones principales con su incertidumbre .....	88
3.8. Calculo del factor de concentración de tensiones experimental y de su incertidumbre.....	91
3.9. Cálculo del factor de concentración de tensiones teórico y de su incertidumbre ..	94
3.10. Mejora de las predicciones teóricas a través de un modelo de incertidumbre .....	96
3.11. Identificación de las fuentes de incertidumbre .....	97
3.12. Algoritmo de ajuste utilizado en la regresión.....	98
3.13. Estadístico utilizado en la validación experimental del modelo .....	100
3.14. Indicador de la consistencia de los resultados experimentales con el tamaño de la muestra analizada.....	102
3.15. Verificación del comportamiento del modelo que ha sido validado.....	105
3.16. Factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico	107
3.17. Procedimiento de optimización para la obtención del factor de seguridad probabilístico .....	117
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>123</b>
<b>4. Resultados.....</b>	<b>123</b>
4.1. Resultados de las constantes elásticas del material .....	124
4.2. Resultados de la validación experimental .....	125
4.2.1. Modelo experimental.....	125
4.2.2. Modelo teórico.....	134
4.2.3. Comparación de las predicciones con los resultados experimentales .....	136
4.2.4. Consistencia de los resultados experimentales con la muestra estudiada.....	139
4.3. Resultado de la verificación del comportamiento del modelo validado .....	141
4.4. Resultados del factor de seguridad probabilístico basado en la validación experimental .....	143
<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>155</b>

<b>5. Conclusiones</b> .....	<b>155</b>
<b>REFERENCIAS</b> .....	<b>159</b>
<b>ANEXOS</b> .....	<b>165</b>





# Índice de Figuras

Figura 2-1. Distribución de la tensión aplicada $\sigma$ y la resistencia del material $S$ .....	18
Figura 2-2. Propagación de distribuciones por el MMC.....	19
Figura 2-3. Sistema con distintos modos de fallo e igual confiabilidad [9] .....	20
Figura 2-4. Ejemplo de gráfica de tensión-deformación .....	22
Figura 2-5. Propagación de las incertidumbres del modelo teórico, según GUM y MMC [13, 24] .....	25
Figura 2-6. Esquema del proceso de verificación y validación [5].....	27
Figura 2-7. Posibles relaciones entre validación y aplicación.....	28
Figura 2-8. Ejemplo de aplicación del análisis univariante. La línea continua representa la respuesta del modelo teórico con las barras de incertidumbre expandida, y los puntos los valores experimentales [4] .....	30
Figura 2-9. Ejemplo de aplicación del método multivariable para dos repuestas correlacionadas [4] .....	31
Figura 2-10. Ejemplo de representación de los valores experimentales y teóricos con sus respectivas incertidumbres expandidas [37] .....	33
Figura 2-11. Ejemplo de representación de los valores experimentales y teóricos con una incertidumbre global [37] .....	34
Figura 2-12. Tabla estadística de la distribución $\chi^2$ [39] .....	36
Figura 2-13. Representación de la validación propuesta por Luis [40] .....	37
Figura 2-14. Aplicación de la técnica fotoelástica en conjunto con la extensométrica [53] 40	
Figura 2-15. Puente de Wheatstone equilibrado [54] .....	43
Figura 2-16. Puente de Wheatstone desequilibrado [54] .....	44
Figura 2-17. Esquema de un circuito de cuarto de Puente para una medición remota .....	47
Figura 2-18. Ejemplo del gráfico de deformación aparente y variación del factor de galga con la temperatura [61] .....	50
Figura 2-19. Ejemplo de la rotación de la curva de deformación aparente de una galga extensométrica pensada para ensayar aluminio, utilizada en latón [55].....	51
Figura 2-20. Variación del factor de galga con la temperatura para el constantán (A-alloy) y aleación isoelástica (D-alloy) [61] .....	53
Figura 2-21. Esquema de circuitos comúnmente utilizados en equipos comerciales [63]..	55

Figura 2-22. Roseta de dos galgas extensométricas dispuestas a 90°, en un estado de tensión biaxial.....	57
Figura 2-23. Anillo sometido a compresión [69].....	59
Figura 2-24. Obtención de la solución de las tensiones presentes en el anillo a partir de la superposición de las tensiones de un disco y las tensiones uniformemente distribuidas de la superficie interna.....	61
Figura 2-25. Círculo de Mohr para hacer coincidir las tensiones radiales con la tensión uniformemente distribuida.....	62
Figura 3-1. Proceso global para la determinación del factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico.....	70
Figura 3-2. Factor de concentración de tensiones experimental.....	72
Figura 3-3. Punto crítico de un anillo circular.....	73
Figura 3-4. Esquema de la ubicación de las galgas extensométricas en la superficie del tubo.....	75
Figura 3-5. Representación esquemática del error de alineación en la instalación.....	76
Figura 3-6. Fijación de los tubos a la máquina de ensayos.....	78
Figura 3-7. Hardware del System 7000.....	79
Figura 3-8. Conexión de los cables al equipo de adquisición System 7000.....	79
Figura 3-9. Montaje del tubo 2 en la máquina de ensayos.....	80
Figura 3-10. Resistor y valor de la deformación simulada utilizada en la calibración.....	81
Figura 3-11. Panel de control de la máquina de ensayos.....	82
Figura 3-12. Extracción de probetas de sección rectangular a partir de los tubos.....	83
Figura 3-13. Probeta plana para la determinación de las constantes elásticas.....	84
Figura 3-14. Sujeción de la probeta a la máquina de ensayos.....	85
Figura 3-15. Programa de control y adquisición de la máquina de ensayos de tracción modelo INSTRON.....	86
Figura 3-16. Aleatoriedad de la incertidumbre de los parámetros de entrada en el cálculo de $E$ y $\nu$ .....	87
Figura 3-17. Representación del factor de concentración de tensiones experimental $K_E$ , con las incertidumbres experimentales.....	92
Figura 3-18. Procedimiento de Monte Carlo adaptable para el cálculo y evaluación de la incertidumbre teórica del factor de concentración de tensiones, según GUM [24].....	95
Figura 3-19. Índice de compatibilidad propuesto para la validación experimental del modelo.....	101
Figura 3-20. Método de Bootstrapping aplicado en conjunto con el índice de compatibilidad $E_N$ .....	104

Figura 3-21. Ejemplo del histograma de los índices de compatibilidad medios $\bar{E}_N$ de un modelo sub-estimador en el intervalo $[-1, 1]$ .....	106
Figura 3-22. Ejemplo del histograma de los índices de compatibilidad medios $\bar{E}_N$ de un modelo sobre-estimador en el intervalo $[-1, 1]$ .....	106
Figura 3-23. Representación gráfica del índice de compatibilidad empleado en la validación experimental, para un modelo compatible con el resultado experimental ( $E_N < 1$ ) .....	108
Figura 3-24. Representación gráfica del índice de compatibilidad empleado en la validación experimental, para un modelo no compatible con el resultado experimental ( $E_N > 1$ ) .....	108
Figura 3-25. Representación ideal en donde el modelo representa de manera exacta a la realidad.....	109
Figura 3-26. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo ideal.....	110
Figura 3-27. Influencia del factor de cobertura $k$ en el factor de seguridad .....	112
Figura 3-28. Representación de la tensión real de un modelo con tendencia sub-estimadora.....	113
Figura 3-29. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo que tiende a sub-estimar la realidad .....	114
Figura 3-30. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad de un modelo sub-estimador que ha sido corregido .....	115
Figura 3-31. Representación de la tensión real de un modelo con tendencia sobre-estimadora.....	116
Figura 3-32. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo que tiende a sobre-estimar la realidad.....	117
Figura 3-33. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad.....	118
Figura 3-34. Esquema del proceso iterativo para la obtención del factor de seguridad mínimo, en función de las tensiones.....	119
Figura 3-35. Proceso iterativo para la obtención del factor de seguridad mínimo, en función de las cargas .....	120
Figura 4-1. Relación tensión-deformación observada en la caracterización de la probeta 2, perteneciente al tubo 2.....	124
Figura 4-2. Evolución de los errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al tubo 2.....	126
Figura 4-3. Evolución de las tensiones tangenciales experimentales en el tubo 2.....	127

Figura 4-4. Representación de la matriz de covarianza de las tensiones experimentales pertenecientes al tubo 2 .....	128
Figura 4-5. Evolución de las incertidumbres relativas del eje $Y$ ( $\sigma_P$ ) en función de la tensión del tubo 2.....	129
Figura 4-6. Evolución de las incertidumbres relativas del eje $X$ ( $4P/\pi LD$ ) en función de la tensión del tubo 2 .....	130
Figura 4-7. Distribución del factor de concentración de tensiones a lo largo del tubo .....	131
Figura 4-8. Distribución del factor de concentración de tensiones a lo largo del tubo .....	133
Figura 4-9. $K_{MC}$ con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (Tubo 2) .....	134
Figura 4-10. Diferencias entre los resultados experimentales y teóricos en conjunto con la incertidumbre expandida.....	138
Figura 4-11. Distribución de las $ \bar{E}_N $ muestras de Boostrapping .....	140
Figura 4-12. Nueva distribución de las $ \bar{E}_N $ muestras de Boostrapping.....	141
Figura 4-13. Resultado de la distribución de los $\bar{E}_N$ sin valor absoluto, que informan de la tendencia sub-estimadora del modelo utilizado.....	142
Figura 4-14. Histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para $k=2$ .....	146
Figura 4-15. Histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para $k=3$ .....	147
Figura 4-16. Histograma de frecuencias de las cargas admisible y de diseño del tubo 1, para $k=4$ .....	149
Figura 4-17. Evolución del factor de seguridad en función de la probabilidad de fallo .....	150
Figura 4-18. Superposición de los histograma de frecuencias de la tensión de diseño del tubo 1, para $k=2$ del modelo ideal y del modelo real-estimado.....	152
Figura 4-19. Superposición de los histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para $k=2$ del modelo ideal y del modelo real estimado.....	153

# Índice de Tablas

Tabla 2-1. Incertidumbre expandida en máquinas de ensayo universales de bajo ciclo [27]	23
Tabla 2-2. Límite elástico de distintos materiales e incertidumbre expandida para un nivel de confianza de 95% [28]	24
Tabla 3-1. Designación y dimensiones de los tubos utilizados ( $R_e=355$ MPa)	74
Tabla 3-2. Características técnicas de las galgas utilizadas en los ensayos	77
Tabla 3-3. Medidas finales de las probetas rectangulares obtenidas a partir de los tubos	84
Tabla 3-4. Fuentes de error en la medición con galgas extensométricas resistivas [55]	89
Tabla 3-5. Varianza de las galgas extensométricas	90
Tabla 3-6. Parámetros asociados al modelo teórico y experimental	98
Tabla 4-1. Módulos de Young y coeficientes de Poisson de las probetas	125
Tabla 4-2. Factor de concentración de tensiones de las rosetas #2 y #4	127
Tabla 4-3. Incertidumbre del factor de concentración de tensiones experimental	131
Tabla 4-4. Evolución de la incertidumbre debida al promediado longitudinal en función de $L/D$	132
Tabla 4-5. Factor de concentración de tensiones teórico con su incertidumbre	135
Tabla 4-6. Resultados finales de la validación experimental del modelo teórico	136
Tabla 4-7. Factor de concentración de tensiones crítico con su incertidumbre	143
Tabla 4-8. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 95.45% ( $k=2$ )	144
Tabla 4-9. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 99.73% ( $k=3$ )	147
Tabla 4-10. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 99.994% ( $k=4$ )	148



# *CAPÍTULO 1*

## *Introducción y Objetivos*

---

El objetivo de cualquier modelo ingenieril, es el de predecir el comportamiento de un sistema simple o muy complejo, de acuerdo a unas condiciones de contorno específicas. Para ello, el ingeniero realiza de forma más o menos consciente la simplificación del sistema real, de acuerdo a ciertos parámetros considerados como muy determinantes o que afectan en gran medida a la respuesta del sistema.

Si bien estos modelos continúan siendo útiles en muchas aplicaciones, otros problemas ingenieriles requieren de cálculos más realistas, en donde, se deja a un lado la ingeniería determinista para dar paso a una ingeniería más elegante y precisa, en donde se tiene en cuenta la incertidumbre de las variables involucradas [1, 2, 3].

Al identificar y cuantificar todas las fuentes de incertidumbre, se consigue tener un mejor conocimiento del sistema que se pretende diseñar. Esto permite al ingeniero decidir si el modelo a utilizar es válido o debe modificarse, actuando directamente sobre la precisión de las variables de mayor influencia o incluyendo nuevas variables [4]. La consideración de nuevas variables, no siempre es tarea fácil. Es por ello que en esta tesis doctoral, se propone

aproximar las predicciones a la situación real, a través de un modelo de incertidumbre teórico que ha de acompañar a las predicciones, en donde se considera una fuente adicional de incertidumbre, debido al incumplimiento de la situación ideal representada por el modelo teórico. De esta manera, dependiendo de las condiciones de contorno, la teoría puede asemejarse más a la realidad.

La exactitud del modelo ingenieril se ve mermada por las simplificaciones realizadas, por tanto, la utilidad del mismo depende de cuan semejantes sean las condiciones de contorno ideales de las reales. Esto hace que, obligatoriamente se tenga que verificar o validar las predicciones realizadas con el modelo a través de ensayos experimentales [4, 5].

La mayoría de parámetros que conforman el modelo ingenieril pueden ser medibles, o en su defecto, pueden estimarse a partir de otros sub-parámetros cuya identificación y cuantificación es posible. La magnitud real de los parámetros no puede conocerse a ciencia cierta, debido básicamente a que nada es exacto. Al considerar que los valores de los parámetros que afectan directa o indirectamente a las predicciones realizadas con el modelo, no son únicos, sino que tienen una naturaleza estocástica, la cual puede acotarse con cierto grado de confianza en un conjunto finito de posibles valores fácilmente atribuibles a cada parámetro; resulta indudable que la respuesta del sistema tanto real como predictivo no puede ser única, ya que existe cierto grado de incertidumbre.

Para la validación del modelo teórico, se debe utilizar una herramienta que considere la esperanza media de las predicciones y de los resultados experimentales, con sus respectivas incertidumbres. En esta tesis doctoral se propone utilizar, como herramienta para la validación, el estadístico conocido como índice de compatibilidad, empleado comúnmente en la comparación entre resultados de laboratorio [6]. Con este estadístico se plantea que cuando el resultado de la comparación entre las predicciones y la realidad está entre cero y uno, se puede asegurar que ambos resultados son compatibles, de acuerdo al nivel de confianza exigido [6].

Para validar el modelo teórico es necesario obtener una información estadística sustancial [4]. La obtención de una población de datos experimentales significativa, suele ser un proceso costoso, tanto de tiempo como de recursos.

Dado que la potencia de cálculo de los ordenadores actuales ha permitido reducir el coste computacional asociado a simulaciones u otras aplicaciones, en esta tesis doctoral se propone



la utilización de la técnica conocida como Bootstrapping [7]. El Bootstrapping permite la generación de información adicional a través de simulaciones realizadas al azar, a partir de los resultados de la validación, expresados por el índice de compatibilidad. De esta manera, aún cuando la muestra estudiada sea baja, es posible obtener una información estadística importante [8].

Se concluirá que el modelo teórico reproduce a la realidad, si los límites de la información estadística generada, a partir del resultado de la validación, para un nivel de confianza del 95%, está comprendida entre cero y uno. De esta manera, el ingeniero tendrá a su disposición un indicador que le permite comprobar la consistencia de los resultados obtenidos con el tamaño de la muestra analizada.

Con la herramienta de validación planteada en esta tesis doctoral, en conjunto con el procedimiento de generación de sub-muestras virtuales a partir de la muestra analizada, se proporciona al ingeniero una herramienta que le permitirá obtener una mayor cantidad de resultados, visualizar la distribución de los mismos sin necesidad de asumir una distribución de probabilidad y que le ayudará en la toma de decisiones cuando al menos en una de las muestras analizadas, las predicciones no se correspondan con los resultados experimentales.

Para predecir la fiabilidad del sistema real a través del modelo teórico, se utiliza el denominado factor de seguridad [9]. El factor de seguridad es una herramienta utilizada ampliamente en ingeniería, que relaciona la resistencia del material con la tensión debida al esfuerzo al que estará sometido. Originalmente, el factor de seguridad englobaba todo lo desconocido del problema real planteado, y cuanto mayor fuera su valor, mayor era el grado de desconocimiento que se tenía del problema. Por tanto, se consideraba que el modelo real no fallaría, si el factor de seguridad estimado a través del modelo predictivo era mayor que la unidad [10].

Como ya se ha comentado, la solución analítica o numérica del modelo que pretende predecir la situación real, posee cierto grado de incertidumbre, por lo tanto, el factor de seguridad no puede ser calculado considerando las variables involucradas como deterministas, sino estocásticas [9]. Es por ello, que se ha propuesto relacionar el concepto de factor de seguridad con la incertidumbre, y a esto se le conoce como factor de seguridad estadístico o probabilístico [10].

El factor de seguridad probabilístico, contempla la incorporación de las incertidumbres de la tensión de diseño y de la resistencia del material. Al introducir la probabilidad en el concepto original del factor de seguridad, se ha logrado justificar el porqué del valor del factor de seguridad seleccionado. El valor del factor de seguridad probabilístico dependerá de la probabilidad de fallo seleccionada [11] o en términos metrológicos del factor de cobertura asociado al nivel de confianza.

Al incorporar las incertidumbres de la tensión de diseño y de la resistencia del material, en la expresión del factor de seguridad; se podría decir que lo que aleja al factor de seguridad de la unidad, no es producto del desconocimiento del sistema o a la inexperiencia del diseñador, sino de la cuantificación de los factores de influencia en el comportamiento del caso a analizar.

Calcular el factor de seguridad a través de la probabilidad no es nada nuevo, sin embargo, falta una conexión entre el paso previo al cálculo de dicho factor, y es que antes debe adaptarse y validarse el modelo a unas condiciones de ensayo específicas.

Por otro lado, el concepto actual del factor de seguridad basado en el análisis de la incertidumbre, no asegura la obtención del valor mínimo de dicho factor asociado a la probabilidad de fallo asignada, ya que debe conocerse a priori la magnitud de la carga o de la tensión de diseño.

Por lo dicho anteriormente, **el objetivo principal de esta tesis doctoral será el de desarrollar una metodología para la determinación del factor de seguridad probabilístico, basado en la validación experimental del modelo teórico.**

Para ello, es necesario alcanzar los siguientes **objetivos específicos**:

- **Diseñar un modelo de incertidumbre que mejore las predicciones del modelo de tensión bidimensional, aplicado al caso real.**
- **Validar el modelo mediante un estadístico objetivo que ayude al ingeniero a la toma de decisiones.**
- **Analizar la influencia que tiene el resultado de la validación experimental del modelo ingenieril, sobre el factor de seguridad probabilístico.**

# *CAPÍTULO 2*

## *Estado del arte*

---

### **2.1. La incertidumbre de medida y el factor de seguridad**

---

La palabra incertidumbre se refiere al desconocimiento que existe sobre un valor en particular. Por otro lado, la incertidumbre de medida, no implica duda sobre la validez de un resultado; por el contrario, es una indicación cuantitativa de la calidad del mismo, de manera que puede tenerse una idea de su confiabilidad [12].

La incertidumbre de la medición es una forma de expresar que el resultado obtenido no es único, sino que existe un número finito de valores dispersos que podrían ser razonablemente atribuidos al mensurando [13]. Por tanto, el mensurando no representa el valor verdadero, sino la mejor estimación del mismo, en donde todas las componentes de la incertidumbre contribuyen a la dispersión.

Absolutamente todo lo que nos rodea posee cierto grado de incertidumbre [14]. Por ende, no tiene sentido que a nivel ingenieril no sea considerada la naturaleza estocástica de las

variables involucradas en el diseño. Llegados a este punto, surge la siguiente cuestión: ¿qué define a un diseño como seguro?

Pueden existir dos extremos, uno que sea económicamente aceptable, pero que no cumpla con los requisitos mínimos exigido ni con las normas de seguridad. Y otro totalmente opuesto en donde no se tenga en cuenta el gasto que supone y se sobredimensione en exceso [14].

Para solucionarlo, se ha definido una relación conocida como factor de seguridad. A nivel ingenieril el factor de seguridad ( $FS$ ) es la relación que existe entre la resistencia del material ( $S$ ) y la máxima tensión ( $\sigma$ ) a la que estará sometido el componente a diseñar (Ecuación 2-1) [9].

$$FS = \frac{S}{\sigma} \quad \text{Ecuación 2-1}$$

Alternativamente, puede expresarse dicho factor como la relación entre la carga máxima que puede soportar el material ( $P_A$ ) y la carga o los esfuerzos a los que estará sometido ( $P_D$ ) [9]:

$$FS = \frac{P_A}{P_D} \quad \text{Ecuación 2-2}$$

Por tanto, si se conoce con exactitud tanto la ubicación del punto crítico de la pieza, como además la resistencia admisible del material utilizado, el fallo del componente se producirá si el factor de seguridad es menor o igual que la unidad [10]. Sin embargo, un valor del factor de seguridad superior a la unidad no garantiza que el componente no falle, es decir, no debe confundirse la definición tradicional del factor de seguridad con la fiabilidad [11]. Aunque como se verá más adelante, ambos conceptos necesariamente deben relacionarse, de manera que el diseño sea lo más óptimo posible.

Muchas veces el valor del factor de seguridad está basado en la experiencia de quien diseña. Es por ello, que algunos autores lo cataloguen como un factor de ignorancia [15]. Básicamente, el factor de seguridad engloba todo lo desconocido, ya que en la realidad, absolutamente todos los aspectos del diseño tienen cierto grado de incertidumbre [10].

Es en este punto donde el concepto de incertidumbre y el de factor de seguridad se relacionan. Básicamente, lo que aleja al factor de seguridad de la unidad es el grado de

desconocimiento que se tiene de todo lo que engloba al problema en sí, ya que lo que siempre se busca en el diseño es tener cierto margen de seguridad [16]. Por otro lado, la incertidumbre no debe entenderse como el no saber, en el sentido de ignorar, sino como un concreto no saber a qué atenerse [17] .

Por tanto, se puede decir que el factor de seguridad se utiliza en el diseño ingenieril debido a [9]:

- La incertidumbre de los esfuerzos a los que estará sometida la pieza o el componente a diseñar.
- La variación estadística de las propiedades tanto geométricas como mecánicas del material empleado en el diseño.
- Las diferencias entre el caso real y el modelo teórico seleccionado.
- El nivel de responsabilidad del elemento a diseñar.

Los factores de seguridad más empleados van desde 1.2 hasta 3 [18], este último de uso común en la ingeniería civil. En la determinación de estos factores no se han utilizado técnicas analíticas que justifiquen el valor numérico empleado. Dichos valores están basados en la experiencia acumulada durante los años o el nivel de responsabilidad del componente o la estructura diseñada [18].

El concepto de factor de seguridad es necesario, pero hay que dilucidar si ese margen de seguridad se debe al desconocimiento de lo que sucede; o por el contrario es la consecuencia de la cuantificación de las incertidumbres de todos los elementos que tienden a aumentar su valor. Es por ello, que recientemente se está hablando de diseñar en función de la incertidumbre, es decir, cuantificar y desglosar las fuentes de incertidumbre que tienden a alejar el caso real del modelo ideal [9].

Por tanto, el factor de seguridad puede definirse, no como el ratio entre dos únicos valores, sino como la relación entre dos esperanzas matemáticas. Expresar el factor de seguridad de forma estadística es necesario, debido a que la tensión en sí es una variable con una incertidumbre asociada, así como también lo son las propiedades del material y la carga aplicada. Esta manera de expresar el factor de seguridad, da al ingeniero una mejor idea de cómo de conservador está siendo en el diseño que se esté realizando [10].

Cuando se analiza el factor de seguridad de manera estadística se relaciona su concepto con la probabilidad de fallo [10]. Para entender este enfoque, se debe considerar que tanto la resistencia del material  $S$  como la tensión aplicada  $\sigma$  pueden ser expresadas a través de distribuciones normales (Figura 2-1). Partiendo de esta idea, no importa que tan alejados estén los valores medios entre sí, siempre existirá una pequeña zona en donde ambas distribuciones se cruzan, y donde el área resultante representa una zona potencialmente propensa al fallo [10].

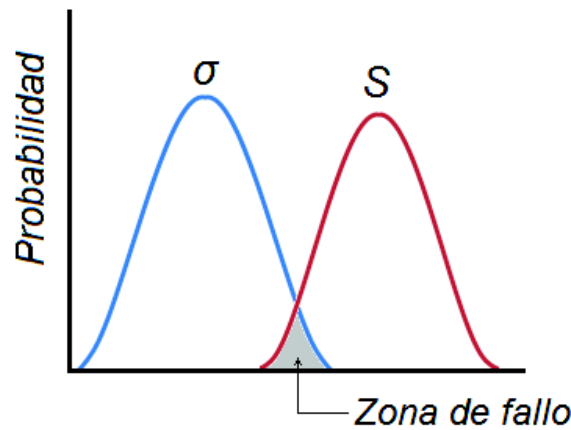


Figura 2-1. Distribución de la tensión aplicada  $\sigma$  y la resistencia del material  $S$

La zona de fallo vendría dada por la diferencia entre el valor medio de ambas distribuciones, es decir,  $S - \sigma = z$ . Considerando las incertidumbres de ambas distribuciones,  $u(S)$  y  $u(\sigma)$ , y normalizando, Ullman [10] define una nueva variable  $t_z$  que representa la probabilidad de fallo.

$$t_z = \frac{S - \sigma}{\sqrt{u^2(S) + u^2(\sigma)}} \quad \text{Ecuación 2-3}$$

El valor de  $t_z$  puede extraerse directamente de la tabla de la distribución normal, en función del grado de confiabilidad deseado. Por tanto, el factor de seguridad estadístico quedaría expresado de la siguiente manera [10]:

$$FS = 1 + t_z \frac{\sqrt{\left[\frac{u(S)}{S}\right]^2 + \left[\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right]^2 - \left\{t_z^2 \left[\frac{u(S)}{S}\right]^2 \left[\frac{u(\sigma)}{\sigma}\right]^2\right\}}}{1 - t_z^2 \left[\frac{u(S)}{S}\right]^2} \quad \text{Ecuación 2-4}$$

La expresión anterior expresa el factor de seguridad en función de los cuadrados de los coeficientes de variación, asociados a  $S$  y  $\sigma$ , y del estadístico  $t_z$ , perteneciente al nivel de confianza exigido. De este modo, se relaciona el factor de seguridad con la fiabilidad, de manera que siempre que se calcule dicho factor, debe de especificarse para qué nivel de confianza es válido.

Con miras a la optimización del diseño ingenieril, Qu y Haftka [19], proponen calcular el factor de seguridad como el valor mínimo requerido  $P_{SF}$ , perteneciente a la probabilidad de fallo demandada. Estos autores plantean calcular el factor de seguridad mínimo  $P_{SF}$ , a través de la propagación de la incertidumbre de las variables involucradas en el cálculo (carga, sección transversal, límite elástico, etc) por medio de simulaciones de tipo Monte Carlo (MMC). La propagación se realiza a través de la función de distribución de probabilidad, que le ha sido asignada a cada variable (Figura 2-2).

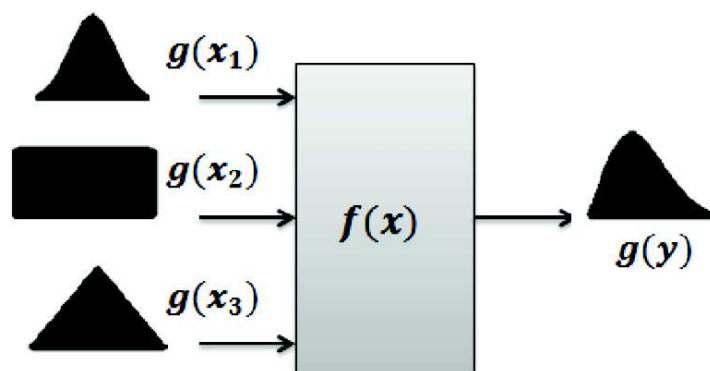


Figura 2-2. Propagación de distribuciones por el MMC

El procedimiento propuesto por Qu y Haftka [19] calcula múltiples valores del factor de seguridad  $P_{SF}$ , para  $M$  reiteraciones de Monte Carlo. Los potenciales factores de seguridad seleccionados, serán los  $n$  valores de  $P_{SF}$  más bajos del total de reiteraciones efectuadas, previa ordenación de los mismo en orden creciente. Conociendo la probabilidad de fallo  $P_r$ , el factor de seguridad según esta teoría, será el valor más alto de las  $n = P_r M$  muestras de mínimos calculados [19].

Relacionar la probabilidad con el concepto de factor de seguridad puede producir mejoras significativas en los sistemas que presentan distintos modos de fallo [9]. Por ejemplo, si un sistema está compuesto por distintos elementos, y cada uno ha sido calculado de acuerdo a un factor de seguridad común, puede ser que a pesar de tener el mismo factor de seguridad, su fiabilidad sea distinta.

En estos casos, es mejor ajustar cada modo de fallo con respecto al nivel de confianza exigido (Figura 2-3). Para ello, se ha de realizar la calibración de los niveles de fiabilidad con uno de los factores de seguridad, previamente testado. De esta manera, existirá un factor de seguridad distinto para cada modo de fallo, pero la fiabilidad será la misma, evitándose con ello el innecesario sobredimensionamiento [9].

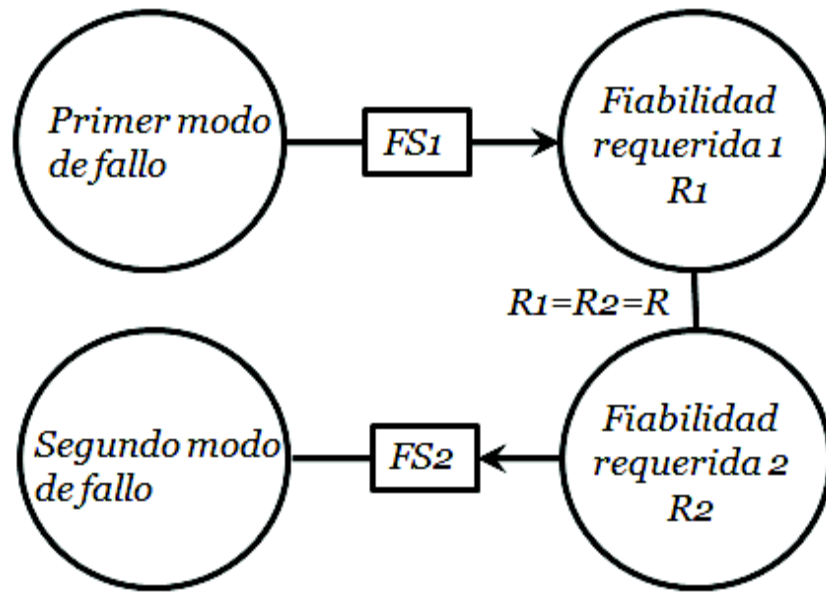


Figura 2-3. Sistema con distintos modos de fallo e igual confiabilidad [9]

Los dos puntos de vista del factor de seguridad analizados anteriormente difieren en el planteamiento, pero la metodología es la misma. En ambos se consideran las incertidumbres de los parámetros que definen al factor de seguridad, y ambos calculan dicho factor a partir de la zona más crítica, es decir, donde las distribuciones se cruzan (Figura 2-1).

Elishakoff [18] plantea el enfoque del cálculo del factor de seguridad desde otro punto de vista, digamos un poco controvertido debido al concepto original de las incertidumbres. Elishakoff propone estimarlo empleando la lógica difusa.

Antes de entrar con más detalle en el trabajo de Elishakoff [18], hay que tener claro las diferencias que existen entre la probabilidad y la lógica difusa.

La probabilidad se refiere a la ocurrencia de ciertos eventos bien definidos dentro de un conjunto claro de posibilidades. La probabilidad surge de la cuestión de si se produce o no un evento [20]. Por otro lado, la lógica difusa mide el grado de verdad, es decir, el grado en el que



se produce el evento, no sí se produce. La lógica difusa cuantifica las similitudes de un evento con respecto a otro, cuando sus propiedades no están claramente definidas [21].

En la lógica difusa se utiliza el concepto de posibilidad de una variable para estudiar la incertidumbre de dicha variable [22]. Se basa en la idea de que un evento imposible es también poco probable, pero no ocurre lo contrario [23].

La posibilidad de un evento en lógica difusa viene dada por el intervalo [0,1]. Por equivalencia, surge el concepto de necesidad, que no es más que la distancia entre el valor difuso de la variable  $\mu$  y la unidad, es decir  $1 - \mu$ . La posibilidad y la necesidad, podrían entenderse en cierta manera como los límites superior e inferior de la probabilidad [18, 22]. La propuesta de Elishakoff se basa en la aceptación de la equivalencia antes mencionada [18], en donde, la necesidad aplicada al factor de seguridad en términos de tensión sería: encontrar el valor de tensión que sea menor que la tensión admisible, con la restricción de que el factor de seguridad sea superior a 1.

Elishakoff [18] no deja del todo claro la ventaja que tendría expresar las incertidumbres de acuerdo a los conceptos de necesidad y posibilidad de la lógica difusa, en comparación con el método tradicional, es decir, según la GUM [13, 24]. Por otro lado, hay que tener presente que a la incertidumbre se le relaciona con el grado de certeza, por tanto, la lógica difusa no puede ser compatible con la incertidumbre [21].

## **2.2. Factores que influyen sobre el factor de seguridad**

---

Como ya se ha comentado en el apartado anterior, la determinación estadística del factor de seguridad implica el conocimiento de la incertidumbre de los esfuerzos, las propiedades del material y del modelo teórico seleccionado. A continuación, se trata analizar cada uno de estos parámetros.

### **2.2.1. Incertidumbre de las propiedades del material**

Los fabricantes de materiales se rigen por unos estándares internacionales que establecen los criterios mínimos de aceptación, de acuerdo a la composición química del material y a sus

propiedades mecánicas. A continuación, se describen las normas y recomendaciones para la determinación de las propiedades de los materiales metálicos.

La norma ASTM E8M-01 [25], establece una metodología para el ensayo de materiales metálicos a tracción, específicamente, los métodos para determinar el límite elástico, la resistencia a la tracción (última) y el límite de rotura (Figura 2-4). Los procedimientos allí descritos comprenden las dimensiones de la probeta a ensayar y la presentación de resultados de las distintas propiedades que hayan sido calculadas.

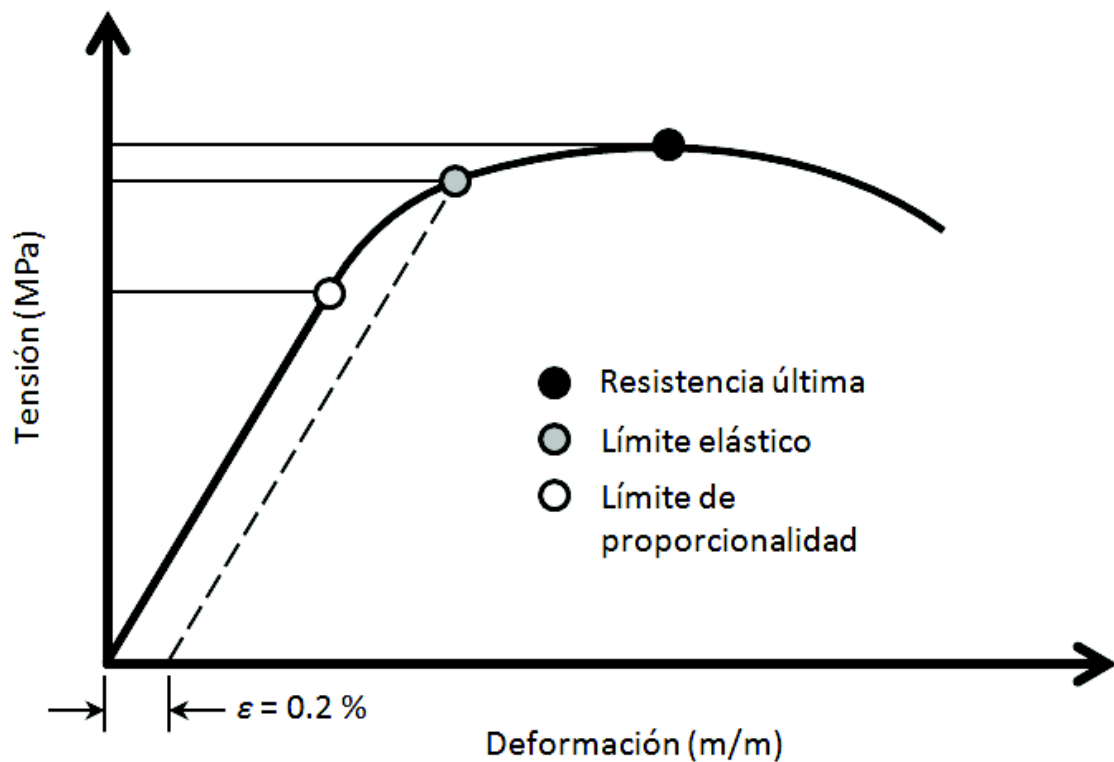


Figura 2-4. Ejemplo de gráfica de tensión-deformación

A causa de la gran variedad de máquinas de ensayo, elementos de medición y equipos de adquisición que hay en la actualidad; la norma ASTM E8M-01 deja por parte del analista el cálculo de las incertidumbres asociadas a la instrumentación utilizada, ya que estas son sensibles a las condiciones de ensayo [25]. No obstante, si contempla la determinación de la incertidumbre debida a la repetibilidad del total de ensayos efectuados.

A nivel europeo los ensayos de tensión de materiales metálicos se rigen de acuerdo a la norma EN-10002-1 [26]. Al igual que en la norma ASTM [25], en la EN-10002-1 se describen los procedimientos para la obtención de las propiedades del material. Además, se dan una serie

de recomendaciones para el cálculo de las incertidumbres, de acuerdo a los procedimientos descritos en la guía para la expresión de la incertidumbre de medida [13].

En este mismo oreen de ideas, el instituto nacional de medida del Reino Unido (NPL) presenta en su página web un manual de buenas prácticas de libre acceso, para la identificación y determinación de las incertidumbres en los ensayos de materiales, de acuerdo a las normas de estandarización de la comunidad europea [27]. En dicho manual se puede encontrar la incertidumbre de las distintas máquinas de ensayo (Tabla 2-1), así como también la incertidumbre de los distintos instrumentos de medida (Extensómetros, micrómetros y termopares).

**Tabla 2-1. Incertidumbre expandida en máquinas de ensayo universales de bajo ciclo [27]**

Clase de Máquina	Incertidumbre expandida, U, % ( $k=2$ )
0.5	$\pm 0.44$
1	$\pm 0.88$
2	$\pm 1.75$
3	$\pm 2.61$

Se ha hecho una revisión de las hojas de especificaciones del material perteneciente a distintos proveedores, y se ha comprobado que a pesar de que existen normas y recomendaciones, los fabricantes no proporcionan el grado de incertidumbre de cada una de las propiedades mecánicas. Se presta mucho más atención al cumplimiento de las tolerancias geométricas del material a suministrar. Básicamente, la información de las propiedades mecánicas facilitada en la hoja de especificaciones suministradas con el material, es el resultado de la aplicación de los procedimientos descritos en la norma ASTM E8M-01 [25]. Sin embargo, no se tiene en consideración las recomendaciones que se hacen en la misma con respecto al cálculo de las incertidumbres.

En la mayoría de los proyectos ingenieriles se diseña evitando la deformación permanente más que la ruptura en sí. En estos casos, la información necesaria por parte del diseñador para el cálculo del factor de seguridad es el límite elástico. Sí se desconoce la incertidumbre de la resistencia admisible del material suministrado, es recomendable determinarla de forma experimental.

La determinación experimental del límite elástico requiere del uso de herramientas de análisis de datos, en donde se evite en lo posible las simplificaciones o suposiciones.

Matusevich [28] propone una nueva metodología (no contemplada en ninguna de las normas vistas hasta ahora), para la determinación del límite elástico, en donde se cuantifica el peso que tiene cada una de las varianzas de los puntos experimentales sobre el resultado final de dicho límite. Para ello, este autor realiza el ajuste de la pendiente fuerza-desplazamiento a través de los mínimos cuadrados totales ponderados [29].

Matusevich [28] aplicó su metodología a los registros de fuerza-desplazamiento de distintos materiales, disponibles en la página web del instituto nacional de medida del Reino Unido [30]. De los resultados obtenidos por dicho autor se puede concluir que: la incertidumbre expandida del límite elástico para un nivel de confianza del 95%, no supera el 1.1% del valor del límite elástico (Tabla 2-2).

**Tabla 2-2. Límite elástico de distintos materiales e incertidumbre expandida para un nivel de confianza de 95% [28]**

Material	$S_y$ MPa	$U(S_y)$ MPa	$U(S_y)$ %
	( $\epsilon = 0.2$ %)	( $k=2$ )	
Nimonic 75	309.6	3.2	1.03%
Nimonic 75	308.4	3.1	1.01%
Acero austenítico 13%	337	3.6	1.07%
Acero inoxidable 316L	260.1	2.8	1.08%
Acero recubierto	562.7	5.8	1.03%
Lámina de acero DX56	162.8	1.7	1.04%
Hoja de aluminio AA5182	396.5	4	1.01%
Hoja de aluminio AA1050	30.08	0.32	1.06%
Hoja de aluminio AA5182	134.4	1.4	1.04%
Lámina de acero DX56	163.9	1.7	1.04%

Cuando no se disponga del valor de la incertidumbre del límite elástico, esta se puede estimar de forma conservadora a partir de los resultados obtenidos por Matusevich [28], es decir, se puede asumir una incertidumbre expandida de 1.1% como mínimo.

### 2.2.2. Incertidumbre del modelo teórico seleccionado

A nivel ingenieril se emplean factores de seguridad que tienen como objetivo final, evitar el fallo de los elementos y componentes diseñados. Se puede decir que el concepto original del

factor de seguridad, nace de la necesidad de garantizar la integridad estructural del diseño, teniendo en cuenta su resistencia mecánica. Para ello, se expresa el factor de seguridad como el ratio entre la resistencia admisible del componente o estructura, con respecto a las solicitaciones reales a las que estará sometida durante su periodo de servicio.

Para el cálculo del factor de seguridad, el ingeniero plantea un modelo analítico (Ecuaciones diferenciales) o numérico (Elementos finitos) con miras a predecir el comportamiento del elemento o la estructura a diseñar, de acuerdo a ciertas condiciones de contorno.

Los modelos predictivos utilizados, se basan en simplificaciones en donde se tiene en consideración las entradas que más afectan a la salida del sistema. Debido a las simplificaciones hechas y a la incertidumbre de las variables involucradas, existe una incertidumbre inherente al modelo utilizado [4, 5].

La incertidumbre del modelo está compuesta: por una incertidumbre debida a la variabilidad de los parámetros del modelo y otra correspondiente a la imprecisión del mismo [31]. La primera fuente de incertidumbre del modelo, puede estimarse a través de la ley de propagación de incertidumbres [13] o mediante simulaciones de Monte Carlo [24] (Figura 2-5).

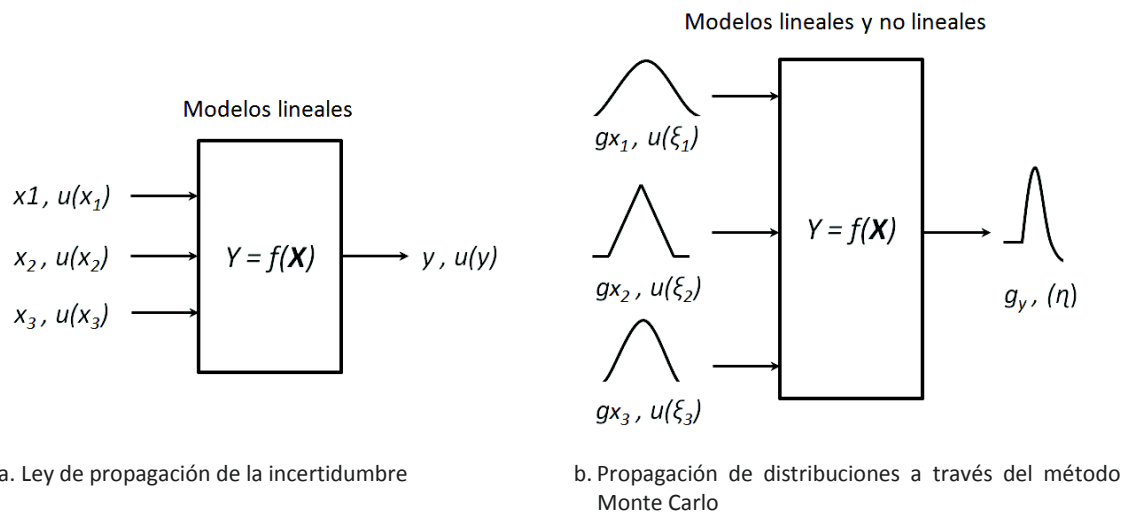


Figura 2-5. Propagación de las incertidumbres del modelo teórico, según GUM y MMC [13, 24]

La elección de uno u otro método de propagación de incertidumbre, depende de la complejidad del modelo utilizado (Lineal o no lineal), así como también del tipo de modelo (analítico o numérico). Por otro lado, la segunda fuente de incertidumbre se refiere a la imprecisión del modelo predictivo, que sólo puede estimarse a través de la validación experimental del mismo [4, 5, 31].

Antes de utilizar el modelo teórico, se debe verificar su validez. Esto sólo es posible si se consideran las fuentes de incertidumbre anteriormente mencionadas. A continuación, se describen las técnicas estadísticas para la verificación y validación de los modelos predictivos, que pueden ser aplicados a nivel ingenieril.

### 2.3. Verificación y validación experimental

---

En la aceptación o rechazo de un modelo predictivo se debe hacer un análisis pormenorizado inicial de las posibles fuentes de error. Esto obliga al diseñador a identificar y cuantificar todas las fuentes de incertidumbres asociadas, tanto al modelo como al ensayo experimental.

Una vez identificadas las potenciales fuentes de incertidumbre, se ha de proceder a la comprobación del modelo. La confirmación del modelo predictivo puede hacerse, o bien con otro modelo previamente testado, o bien a través de un ensayo experimental.

Cuando se compara un modelo numérico de elementos finitos con un modelo matemático, de acuerdo a un nivel de precisión establecido, se dice que se está realizando una *verificación* del modelo numérico [4]. Por otro lado, cuando se desea determinar el grado de exactitud del modelo analítico o numérico, con respecto a la realidad, se dice que se está realizando la *validación* del modelo [32].

El termino validación puede tener distintas definiciones o enfoques dependiendo del autor. El concepto dado por Liu [32], se refiere a cualquier modelo en general (matemático o numérico). En cambio, el resto de autores sólo emplean esta definición con modelos numéricos [4, 33, 34].

Resulta interesante el esquema de validación y verificación propuesto en el informe LA-14167-MS de Los Alamos [5], el cual está representado en la Figura 2-6. Se puede ver como la comparación entre el modelo matemático y la realidad la catalogan como confirmación. La verificación y la validación, están referidas a la comparación del modelo matemático con el numérico, y el numérico con el experimental, respectivamente.

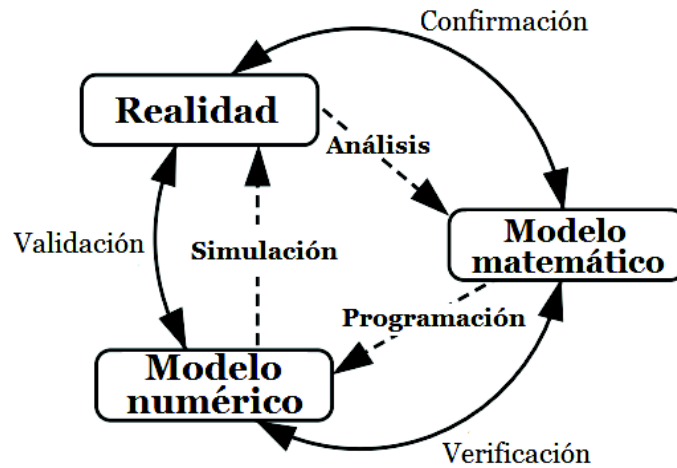


Figura 2-6. Esquema del proceso de verificación y validación [5]

A pesar de que los conceptos fundamentales y la terminología empleada en la validación de modelos, ha sido intensamente estudiada y analizada por sociedades y comités internacionales como la ASME [35], aún no existe un enfoque unificado de cuáles son los parámetros estadísticos que se deben usar. Lo que sí está claro, es que se deben incluir las incertidumbres, tanto de las predicciones como de las observaciones experimentales [32].

Los procesos de verificación y validación requieren una medida cuantitativa de las distancias entre: lo estimado a través del modelo utilizado y lo observado experimentalmente. Para la aceptación del modelo no vale una simple representación gráfica entre lo estimado y lo observado; aunque si es necesaria ya que da una idea global a lo largo de todo el espacio examinado [4]. Por tanto, se podría decir que la aceptación del modelo pasa por dos fases:

- Una subjetiva, en donde no se tiene en cuenta las incertidumbres presentes. Consiste en la representación gráfica entre lo pronosticado por el modelo y lo observado experimentalmente (no sirve como herramienta de validación [32]).
- Y otra de cuantificación, en donde se comparan los resultados teóricos con los experimentales, con sus respectivas incertidumbres expandidas de acuerdo con el nivel de confianza exigido [4].

Aun cuando se compruebe el grado de concordancia entre lo teórico y lo experimental, el diseñador debe decidir qué valor o valores son aceptables, es decir, debe ser subjetivo [4].

William Oberkampf [36] presenta tres posibles casos que se pueden presentar durante la validación o verificación de un modelo (Figura 2-7):

- Superposición completa: el campo de aplicación del modelo está dentro de los límites de la zona de validación (Figura 2-7a).
- Superposición parcial: ocurre cuando una parte de los resultados calculados con el modelo está dentro de los límites de la zona de aceptación (Figura 2-7b). Cuando esto sucede, se considera que no existe suficiente evidencia estadística para rechazar el modelo propuesto, es decir, no puede declararse no válido.
- Diferencia y decisión: se da cuando las estimaciones hechas con el modelo están fuera de la zona de aceptación (Figura 2-7c). En este caso, el diseñador debe decidir si el modelo ha de mejorarse o si es aceptado debido a que el error está acotado y es relativamente bajo.

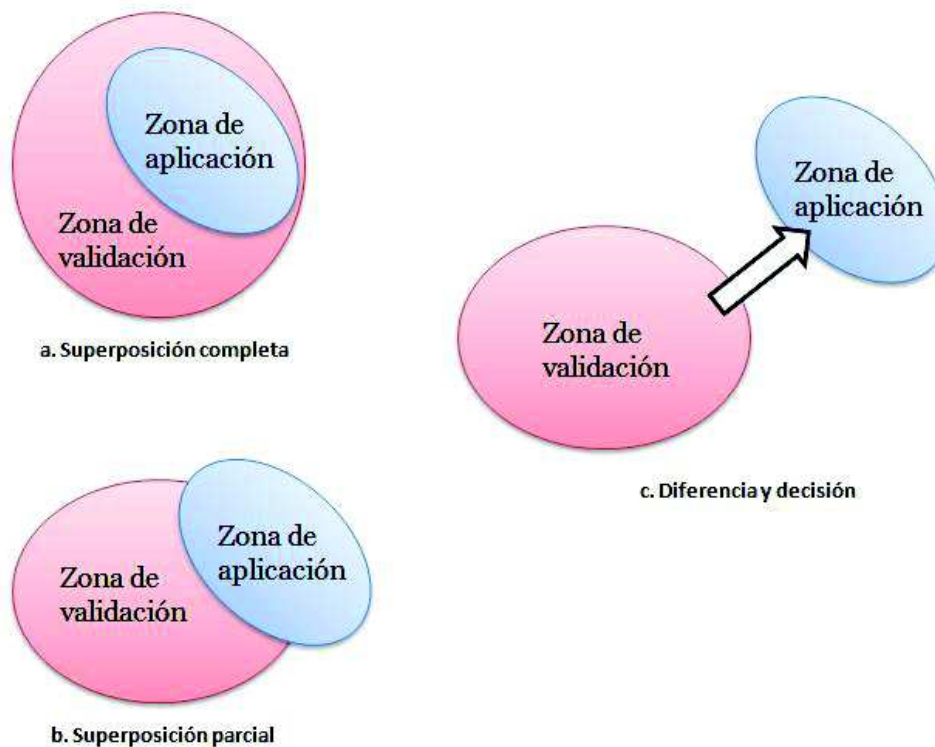


Figura 2-7. Posibles relaciones entre validación y aplicación

### 2.3.1. Validación ingenieril

Cuando se trabaja con modelos ingenieriles hay que tener presente, que estos intentan predecir de forma aproximada el comportamiento de un elemento o sistema, de acuerdo a un nivel de error considerado como aceptable [33]. Estos modelos desde el punto de vista de la validación estadística, pueden ser considerados no válidos, aun cuando cumplan con la



tolerancia exigida para su aplicación [4]. Dichos modelos en la categoría anteriormente descrita (Apartado 2.3), estarían en el caso de diferencia y decisión (Figura 2-7c).

Las diferencias observadas entre el modelo ingenieril y el ensayo experimental podrían ser fácilmente atribuidas a las simplificaciones hechas sobre el modelo, ya que resulta imposible conocer con total certeza todas las solicitaciones presentes y todos los parámetros involucrados.

La introducción de nuevas variables al modelo no es tarea fácil, es por ello, que la imprecisión puede ser considerada como una fuente adicional de incertidumbre [4], que únicamente puede conocerse refrendando el modelo con resultados experimentales [31].

Además de cuantificar las diferencias observadas, se debe proporcionar un nivel de confianza [32]. El nivel de confianza empleado en la validación generalmente está entre 90 y 95% [4, 36]; nunca superior, debido a que se corre el riesgo de aceptar un modelo que no es un buen estimador de la realidad.

### **2.3.2. Métodos para la validación del modelo teórico**

La validación estadística de los modelos predictivos puede clasificarse de acuerdo a la cantidad de respuestas contrastadas [32]. Cuando se hace la comparación entre un resultado teórico y uno experimental, con sus respectivas incertidumbres expandidas de acuerdo con el nivel de confianza exigido; al método de validación se le denomina *univariante*. En el análisis *univariante* se pueden verificar múltiples respuestas del sistema, pero se asume que cada respuesta es independiente, es decir, no existe correlación entre resultados.

Por otro lado, algunos autores [4, 33, 34, 36], consideran que sí en un experimento se obtienen múltiples datos, como por ejemplo una medida en función del tiempo, existirá una correlación entre resultados que debería verificarse. A este tipo de análisis se le conoce como *multivariante* y sirve para dar una visión global del sistema.

Un modelo validado por un análisis univariante puede que resulte rechazado si se le realiza un tratamiento multivariante y viceversa. Es por ello, que se recomienda realizar ambos análisis [37].

El análisis univariante permite localizar los puntos débiles de las predicciones realizadas, que se presentan en aquellas zonas en las que el resultado teórico no coincide con la realidad

[34]. Por ejemplo, en la Figura 2-8 se muestra la evolución entre la relación desplazamiento-fuerza ( $X/F$ ) de un muelle con respecto al tiempo ( $t$ ). Se quiere comparar un modelo teórico representado por la línea continua con resultados experimentales. Puede verse que se ha optado por representar la incertidumbre experimental y teórica, como una incertidumbre combinada perteneciente a las predicciones del modelo teórico, a través de barras de error (En el apartado siguiente se explicará el porqué se representa la incertidumbre de esta manera). Como se puede apreciar, los resultados experimentales próximos a  $t=1.5$  s están fuera de los límites de la incertidumbre combinada, mientras que el resto no.

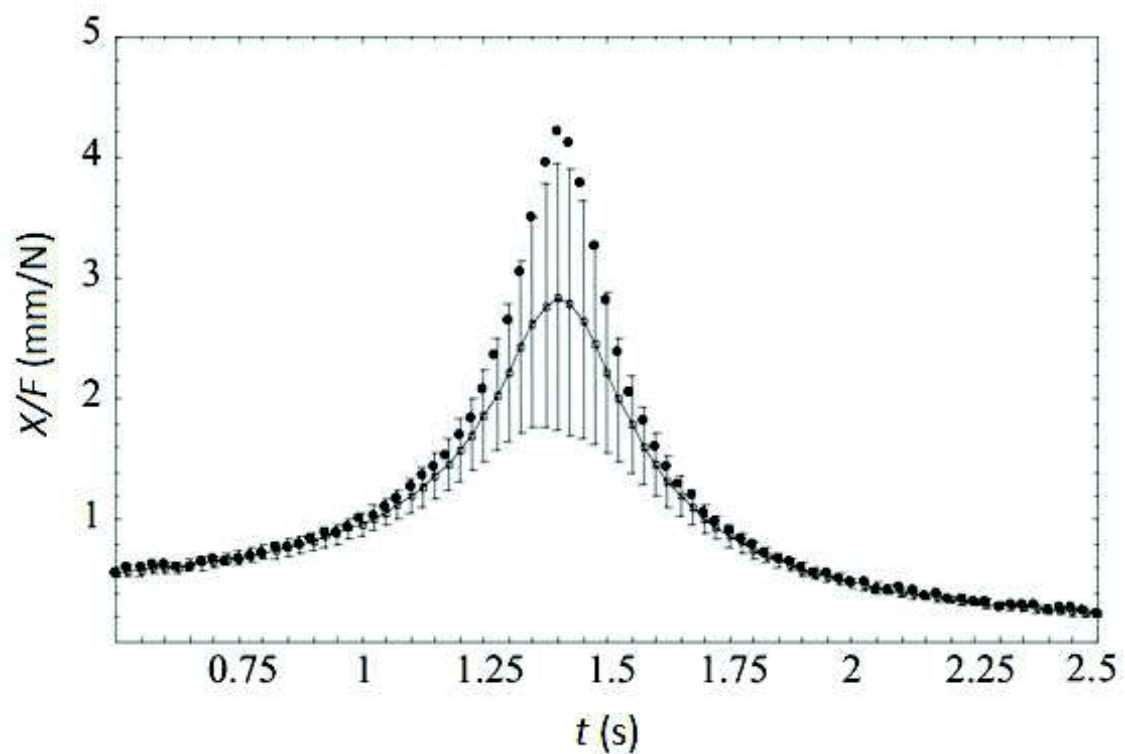


Figura 2-8. Ejemplo de aplicación del análisis univariante. La línea continua representa la respuesta del modelo teórico con las barras de incertidumbre expandida, y los puntos los valores experimentales [4]

Al existir zonas en donde los resultados teóricos y experimentales no se corresponden, hay que decidir si se acepta o rechaza el modelo. En estos casos, el análisis multivariante al considerar que los resultados no son independientes sino que están correlacionados, permite dar una visión global del sistema, ayudando a dilucidar la validez de las predicciones [37].

En la Figura 2-9 se muestra la representación gráfica del análisis multivariante aplicado al ejemplo anterior. Para tratar de disipar las dudas generadas por el análisis univariante, se ha de testar el modelo tomando en cuenta la correlación existente entre resultados. En este caso se ha optado por considerar la correlación entre los  $X/F$ , para  $t=1$  y  $t=1.5$  (Figura 2-9). La

incertidumbre debida a la correlación se representa a través de superficies en forma de elipse, que rodean el punto de intersección entre los valores que están correlacionados. Dichas elipses son simétricas con respecto a las predicciones del modelo que se quiere validar [37].

Al existir correlación entre ambos resultados, la función de probabilidad se denomina conjunta multivariante, y se asume normalmente distribuida [37]. Las elipses mostradas representan los niveles de confianza de 25%, 50%, 75%; mientras que la de línea discontinua se corresponde con el 95%.

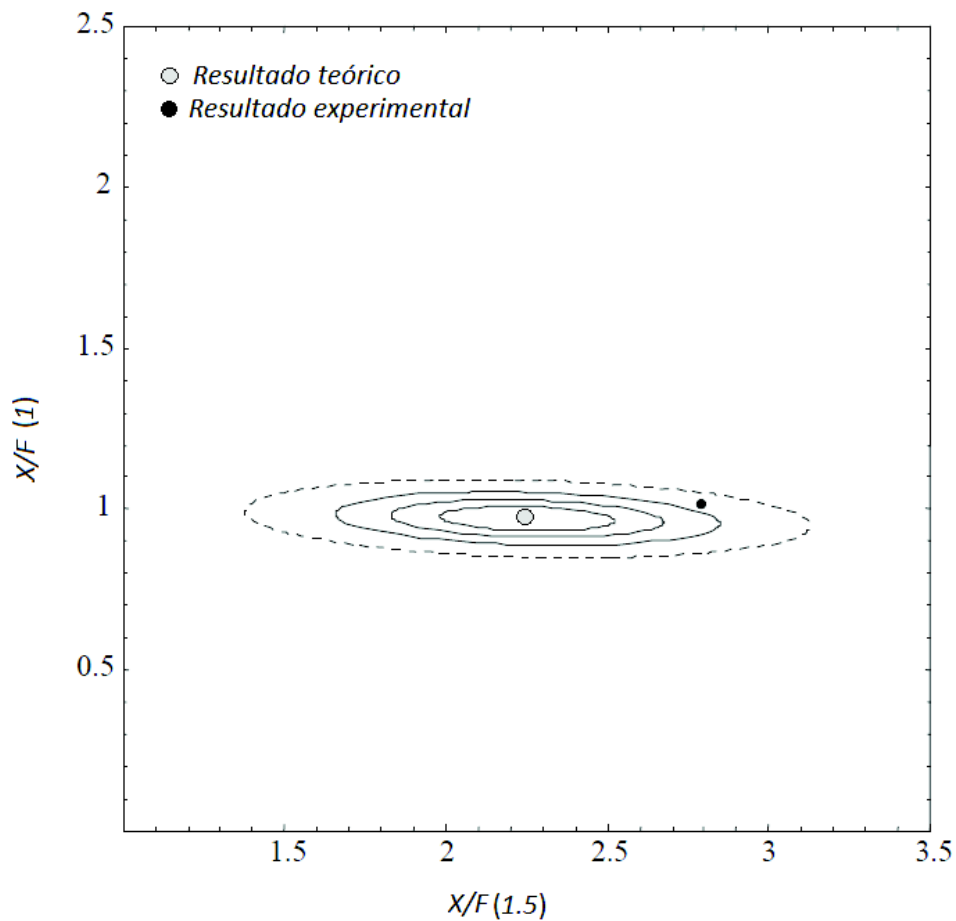


Figura 2-9. Ejemplo de aplicación del método multivariable para dos repuestas correlacionadas [4]

A pesar de que el punto  $X/F$  para  $t=1.5$  s no pasó el análisis univariante; al considerar que existe correlación entre puntos sucesivos (Figura 2-9), las predicciones si se corresponden con los resultados experimentales. Esto debido a que el resultado teórico está dentro de la zona delimitada por la elipse, correspondiente a un nivel de confianza del 95%.

Cuando en una validación se presente un caso como el expuesto en el ejemplo anterior, debe extenderse el análisis multivariante a todas las predicciones que se quieran validar, con el fin de esclarecer si se acepta o rechaza el modelo [38].

A continuación se describen estos métodos de validación, así como otros métodos alternativos.

### 2.3.2.1. Validación univariante

Para la validación o verificación de un modelo cuya respuesta sea considerada como univariante, se puede utilizar el método gráfico propuesto por Hills [4]. En donde, se grafican de manera simultánea, tanto los valores estimados con el modelo como los del ensayo experimental. Se deben incluir las incertidumbres de ambos, es decir, la incertidumbre debida a la propagación de cada uno de los parámetros involucrados en el modelo  $u(y_{Model})$ , así como la incertidumbre experimental  $u(y_{Exp})$ . Dichas incertidumbres serán asociadas al modelo teórico, como:

$$U(y_{Global}) = k \sqrt{u^2(y_{Model}) + u^2(y_{Exp})} \quad \text{Ecuación 2-5}$$

De manera que si los resultados experimentales ( $y_{Exp}$ ) están entre los límites marcados por los valores teóricos y la incertidumbre global ( $y_{Model} \pm U(y_{Global})$ ), se considerará que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar el modelo teórico propuesto.

La estimación de una incertidumbre global, asociada al modelo teórico evita los falsos positivos [37]. Por ejemplo, si se opta por representar los resultados teóricos y los experimentales con sus respectivas incertidumbres expandidas, puede ser que los intervalos de confianza se solapen (Figura 2-10). A simple vista se podría concluir que tanto las predicciones como los resultados experimentales, están representado el mismo mesurando.

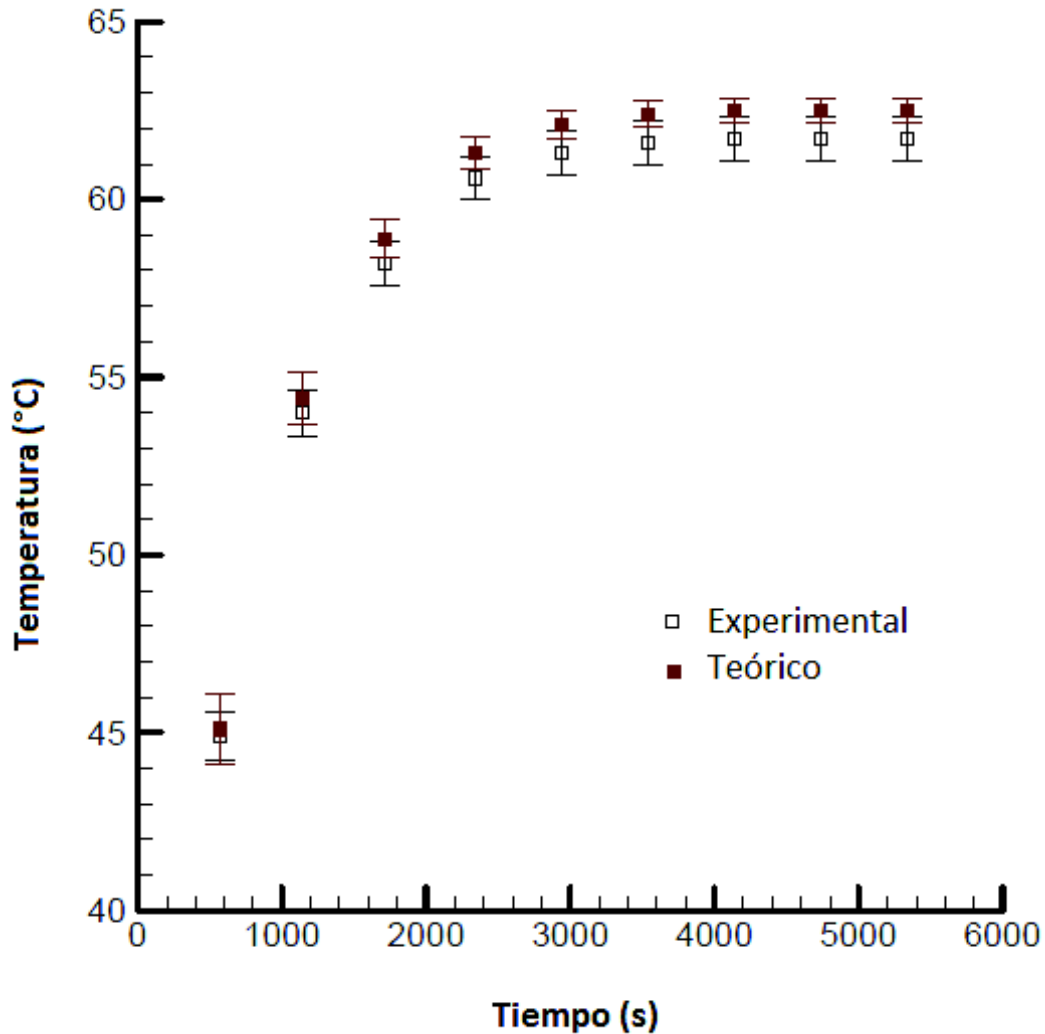


Figura 2-10. Ejemplo de representación de los valores experimentales y teóricos con sus respectivas incertidumbres expandidas [37]

Las incertidumbres del modelo teórico y el experimental pueden ser consideradas independientes [37], por tanto, sus varianzas pueden combinarse en una incertidumbre global (Ecuación 2-5).

Al representar nuevamente los valores del ejemplo anterior, pero esta vez con la incertidumbre global expandida asociada a los resultados teóricos (Figura 2-11); puede observarse que para el mismo nivel de confianza, existen puntos experimentales que están fuera de los límites de aceptación.

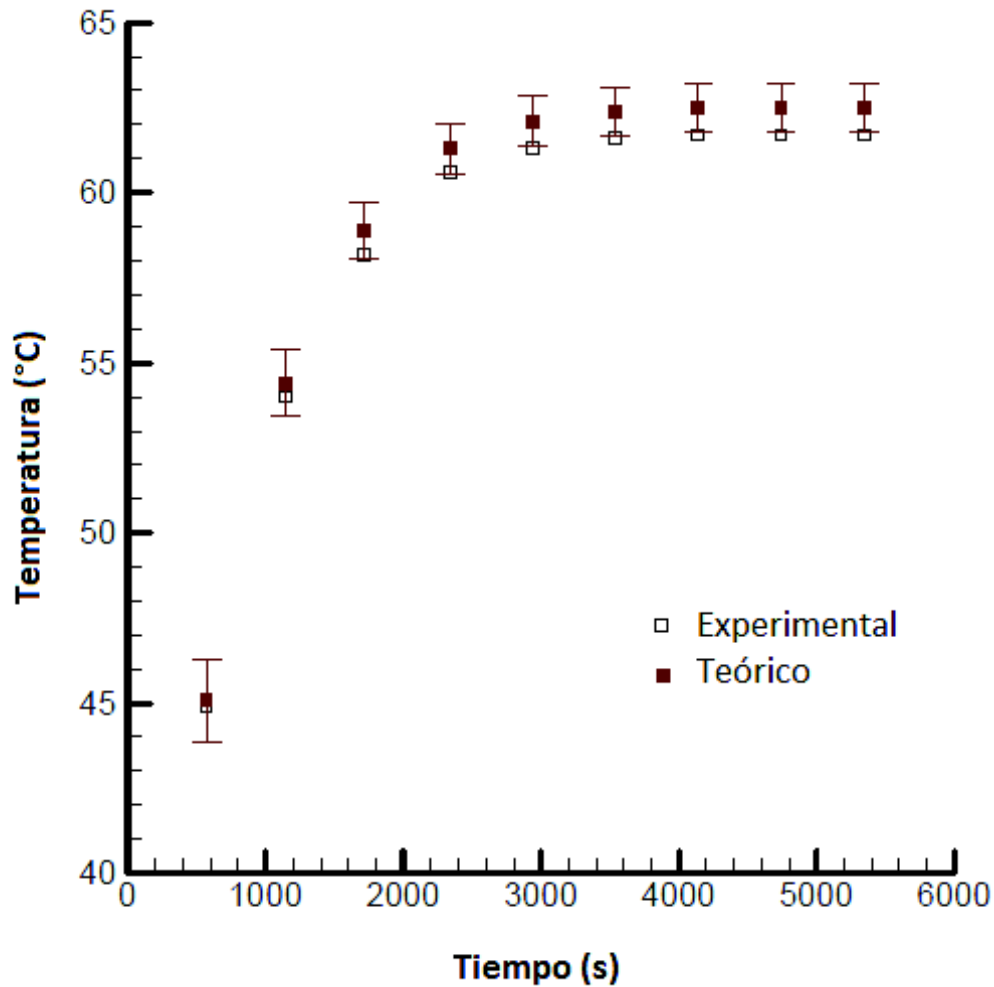


Figura 2-11. Ejemplo de representación de los valores experimentales y teóricos con una incertidumbre global [37]

El método gráfico propuesto por Hills [4] mostrado en el ejemplo de la Figura 2-11, resulta bastante intuitivo, y es adecuado si la cantidad de datos a analizar es pequeña o de un tamaño tal que permita constatar de manera visual el modelo teórico objeto de estudio.

### 2.3.2.2. Validación multivariante

Como ya se ha mencionado en el apartado 2.3.2, no basta con realizar un análisis univariante del modelo. También es necesario considerar las correlaciones de los resultados a través de un análisis multivariante [34].

Para el análisis multivariante se asume que la incertidumbre global del modelo, puede ser modelada por medio de una función de distribución normal multivariante [4].

Para este tipo de función los contornos de probabilidad constantes, son modelados a través de elipses simétricas con respecto al valor teórico (Figura 2-9). El estadístico que define los límites de los contornos de las elipses de probabilidad ( $r^2$ ), construidas a partir de las predicciones y los resultados experimentales, se calcula a través de la siguiente expresión [4]:

$$r^2 = [y_{1(Exp)} - \bar{y}_{1(Model)} \cdots y_{n(Exp)} - \bar{y}_{n(Model)}] V^{-1} \begin{bmatrix} y_{1(Exp)} - \bar{y}_{1(Model)} \\ \vdots \\ y_{n(Exp)} - \bar{y}_{n(Model)} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación 2-6}$$

Donde,  $y_{i(Exp)}$ ,  $i = 1, \dots, n$  representa el valor experimental para cada punto  $i$  analizado.  $\bar{y}_{i(Model)}$  es el valor calculado con el modelo a validar y  $V$  es la matriz de covarianza de tamaño  $n \times n$  [33].

Para evaluar la Ecuación 2-6 primero se deben generar muestras aleatorias mediante simulaciones de Monte Carlo, en donde se asume que la incertidumbre global univariante del modelo teórico ( $u(y_{Global})$ ) es de tipo normal [33]. Con las muestras generadas se calcula la matriz de covarianza  $V$  y finalmente se procede al cálculo del estadístico  $r^2$ .

Puesto que se asume que la distribución de los valores es de tipo normal, el resultado de  $r^2$  se compara con el estadístico  $r_{crítico}^2$  (Ecuación 2-7), estimado a través de la distribución  $\chi^2$  [4]. Por tanto, el valor crítico del estadístico que define los límites de la elipse de probabilidad, para el nivel de confianza requerido es [4]:

$$r_{crítico}^2 = l_{1-\alpha}^2(n) \quad \text{Ecuación 2-7}$$

Donde  $l$  es el valor asociado a un nivel de confianza de  $100(1-\alpha)\%$  para los  $n$  puntos experimentales, de acuerdo a la distribución  $\chi^2$  [4]. El parámetro  $n$  representa los grados de libertad de la distribución  $\chi^2$ ; mientras que  $r_{crítico}^2$  vendría a ser en términos metrológicos, el factor de cobertura asociado al nivel de confianza requerido para la validación.

Si el valor de  $r^2$  calculado con la Ecuación 2-6 es menor que  $r_{crítico}^2$  (Ecuación 2-7), se considera que no hay suficiente evidencia estadística para rechazar el modelo teórico propuesto [4].

Por ejemplo, supóngase que se quieren verificar 10 estimaciones realizadas a través de modelo teórico con resultados experimentales, donde se sospecha que existe una correlación



entre los resultados. El estadístico definido a través de la Ecuación 2-7, para un nivel de confianza del 95% será:

$$r^2_{crítico} = l^2_{0.95}(10)$$

n	Nivel de confianza												
	0'9995	0'995	0'9875	0'975	0'95	0'875	0'85	0'8	0'75	0'7	0'65	0'6	0'55
1	12'115	7'8794	6'2385	5'0239	3'8415	2'3535	2'0722	1'6424	1'3233	1'0742	0'8735	0'7083	0'5707
2	15'201	10'597	8'7641	7'3778	5'9915	4'1589	3'7942	3'2189	2'7726	2'4079	2'0996	1'8326	1'5970
3	17'731	12'838	10'861	9'3484	7'8147	5'7394	5'3170	4'6416	4'1083	3'6649	3'2831	2'9462	2'6430
4	19'998	14'860	12'762	11'143	9'4877	7'2140	6'7449	5'9886	5'3853	4'8784	4'4377	4'0446	3'6871
5	22'106	16'750	14'544	12'832	11'070	8'6248	8'1152	7'2893	6'6257	6'0644	5'5731	5'1319	4'7278
6	24'102	18'548	16'244	14'449	12'592	9'9917	9'4461	8'5581	7'8408	7'2311	6'6948	6'2108	5'7652
7	26'018	20'278	17'885	16'013	14'067	11'326	10'748	9'8032	9'0371	8'3834	7'8061	7'2832	6'8000
8	27'867	21'955	19'478	17'535	15'507	12'636	12'027	11'030	10'219	9'5245	8'9094	8'3505	7'8325
9	29'667	23'589	21'034	19'023	16'919	13'926	13'288	12'242	11'389	10'656	10'006	9'4136	8'8632
10	31'419	25'188	22'558	20'483	18'307	15'198	14'534	13'442	12'549	11'781	11'097	10'473	9'8922
11	33'138	26'757	24'056	21'920	19'675	16'457	15'767	14'631	13'701	12'899	12'184	11'530	10'920
12	34'821	28'300	25'530	23'337	21'026	17'703	16'989	15'812	14'845	14'011	13'266	12'584	11'946
13	36'477	29'819	26'985	24'736	22'362	18'939	18'202	16'985	15'984	15'119	14'345	13'636	12'972
14	38'109	31'319	28'422	26'119	23'685	20'166	19'406	18'151	17'117	16'222	15'421	14'685	13'996
15	39'717	32'801	29'843	27'488	24'996	21'384	20'603	19'311	18'245	17'322	16'494	15'733	15'020
16	41'308	34'267	31'250	28'845	26'296	22'595	21'793	20'465	19'369	18'418	17'565	16'780	16'042
17	42'881	35'718	32'644	30'191	27'587	23'799	22'977	21'615	20'489	19'511	18'633	17'824	17'065
18	44'434	37'156	34'027	31'526	28'869	24'997	24'155	22'760	21'605	20'601	19'699	18'868	18'086
19	45'974	38'582	35'399	32'852	30'144	26'189	25'329	23'900	22'718	21'689	20'764	19'910	19'107
20	47'498	39'997	36'760	34'170	31'410	27'376	26'498	25'038	23'828	22'775	21'826	20'951	20'127
21	49'010	41'401	38'113	35'479	32'671	28'559	27'662	26'171	24'935	23'858	22'888	21'992	21'147
22	50'510	42'796	39'458	36'781	33'924	29'737	28'822	27'301	26'039	24'939	23'947	23'031	22'166
23	51'999	44'181	40'794	38'076	35'172	30'911	29'979	28'429	27'141	26'018	25'006	24'069	23'185
24	53'478	45'558	42'124	39'364	36'415	32'081	31'132	29'553	28'241	27'096	26'063	25'106	24'204
25	54'948	46'928	43'446	40'646	37'652	33'247	32'282	30'675	29'339	28'172	27'118	26'143	25'222
26	56'407	48'290	44'762	41'923	38'885	34'410	33'429	31'795	30'435	29'246	28'173	27'179	26'240
27	57'856	49'645	46'071	43'195	40'113	35'570	34'574	32'912	31'528	30'319	29'227	28'214	27'257
28	59'299	50'994	47'375	44'461	41'337	36'727	35'715	34'027	32'620	31'391	30'279	29'249	28'274
29	60'734	52'335	48'674	45'722	42'557	37'881	36'854	35'139	33'711	32'461	31'331	30'283	29'291
30	62'160	53'672	49'967	46'979	43'773	39'033	37'990	36'250	34'800	33'530	32'382	31'316	30'307
35	69'197	60'275	56'365	53'203	49'802	44'753	43'640	41'778	40'223	38'859	37'623	36'475	35'386
40	76'096	66'766	62'665	59'342	55'758	50'424	49'244	47'269	45'616	44'165	42'848	41'622	40'459
50	89'560	79'490	75'039	71'420	67'505	61'647	60'346	58'164	56'334	54'723	53'258	51'892	50'592
60	102'70	91'952	87'184	83'298	79'082	72'751	71'341	68'972	66'981	65'226	63'628	62'135	60'713
80	128'26	116'32	110'99	106'63	101'88	94'709	93'106	90'405	88'130	86'120	84'284	82'566	80'927
100	153'16	140'17	134'34	129'56	124'34	116'43	114'66	111'67	109'14	106'91	104'86	102'95	101'11
120	177'60	163'65	157'37	152'21	146'57	137'99	136'06	132'81	130'05	127'62	125'38	123'29	121'28

Figura 2-12. Tabla estadística de la distribución  $\chi^2$  [39]

El resultado de  $r^2_{crítico}$  se extrae directamente de la tabla estadística de la distribución  $\chi^2$  (Figura 2-12). El modelo será considerado válido, si el estadístico de evaluación  $r^2$  determinado a través Ecuación 2-6 es:

$$r^2 < 18.307$$



### 2.3.2.3. Validación alternativa

Un método alternativo de validación experimental es el propuesto por Luis [40]. El método de Luis consiste en graficar las diferencias entre los valores calculados con el modelo y los resultados experimentales (Residuos), en conjunto con la incertidumbre global de dicha diferencia  $U(y_{Global})$ .

El autor plantea que si las predicciones  $y_{Model}$  y los resultados experimentales  $y_{Exp}$  representan el mismo mesurando, la media de los residuos es cero con una incertidumbre expandida simétrica. De manera que el resultado experimental se relaciona con las predicciones del modelo teórico de la siguiente manera:

$$y_{Exp} = y_{Model} \pm U(y_{Global}) \quad \text{Ecuación 2-8}$$

Para aceptar o rechazar el modelo, los residuos deben estar dentro de los límites de la incertidumbre global expandida para un nivel de confianza del 95%. Por tanto, se considera que el modelo es un buen estimador de la realidad, cuando menos del 5% del total de residuos quedan fuera de los límites de la incertidumbre global.

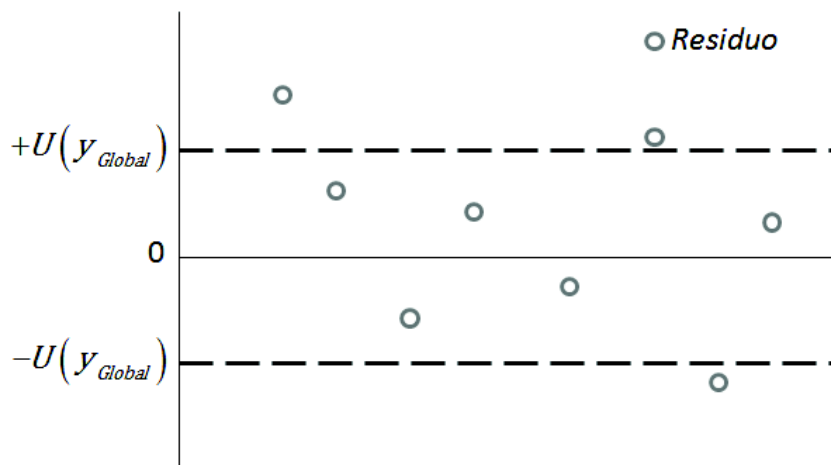


Figura 2-13. Representación de la validación propuesta por Luis [40]

## 2.4. Aplicación del concepto de incertidumbre en el diseño ingenieril

---

La reciente aceptación de la naturaleza poco determinista del diseño en la ingeniería, ha provocado un aumento del número de investigaciones que incorporan el concepto de incertidumbre al diseño de elementos, tanto simples como complejos [41].

La mayoría de las investigaciones están enfocadas a la optimización del diseño ingenieril. Las distintas estrategias y métodos propuestos, plantean la caracterización de la incertidumbre de todos los elementos que afectan al diseño, de manera que se puedan gestionar otras fuentes de incertidumbre que en algunos casos resultan ambiguas o difusas [41].

Los estudios realizados hasta la fecha engloban diferentes ramas de la ingeniería, teniendo un mayor auge en la Geotecnia, seguida de la ingeniería Civil, de Organización, Química y muy poco en la Ingeniería Mecánica. A continuación, se proporciona una breve descripción de los diferentes estudios que incorporan el concepto de incertidumbre en el diseño ingenieril.

Barbosa [42] plantea relacionar la probabilidad de fallo con el factor de seguridad empleado en los duques de escollera, a través del conocimiento de la incertidumbre de los materiales utilizados en su fabricación.

Duncan [43] señala que en geotecnia es habitual calcular el factor de seguridad, basado en la experiencia de quién diseña, y que muchas veces el valor de dicho factor es común entre sistemas. Advierte que dicha práctica carece de toda lógica, ya que no se debería utilizar el mismo factor de seguridad, sin antes analizar el grado de incertidumbre inherente a cada sistema. Duncan al igual que otros autores [14, 44] propone que antes de dimensionar el factor de seguridad, se realice un análisis de probabilidad de fallo

Fenómenos con gran aleatoriedad como el impacto de las olas en las estructuras costeras [45] o el efecto de los esfuerzos en el dimensionamiento de las turbinas eólicas marinas [46], así como también la naturaleza estocástica del gas bajo la superficie [47], han sido incorporados al diseño a través de funciones de probabilidad, permitiendo justificar la magnitud del factor de seguridad empleado.

Los procesos industriales también se han ido sumando a esta filosofía de trabajo, en donde no siempre es posible la asignación de una función de distribución de probabilidad a las

variables involucradas. La incorporación de la lógica difusa aplicada a sistemas complejos muestra importantes ventajas con respecto a los análisis deterministas clásicos [48]. No obstante, la propagación de las incertidumbres a través de esta técnica aún no está internacionalmente aceptada.

Existen investigaciones orientadas a la síntesis de procesos, plantas de producción y distribución [49, 50]. Se han desarrollado algoritmos muy complejos, que plantean minimizar las pérdidas a partir del análisis de las incertidumbres [49]. Las fuentes de incertidumbre consideradas en estas investigaciones, contemplan entre otros: las condiciones ambientales, la demanda del producto, los costos y la eficiencia. También han sido incorporadas en el diagnóstico y el remplazo de componentes en actividades de mantenimiento [51], mejora de tiempos de entrega y stock disponible en empresas de distribución [52].

## **2.5. Técnicas experimentales en ingeniería**

---

Existen diferentes instrumentos utilizados a nivel ingenieril, que ayudan a la toma de decisiones, tanto en tareas de mantenimiento, como en verificación del comportamiento de modelos físicos.

En la medición de deformaciones es de uso común la fotoelasticidad, las galgas extensométricas y la correlación digital de imágenes. Dependiendo del estado tensional y de la zona a analizar se emplea una técnica u otra. Un error que se comete muchas veces es tratar de catalogar a las técnicas existentes, es decir, buscar cual es la mejor o decir que una es mejor que otra. Debe entenderse que las técnicas actuales no compiten entre ellas, al contrario se complementan (Figura 2-14).

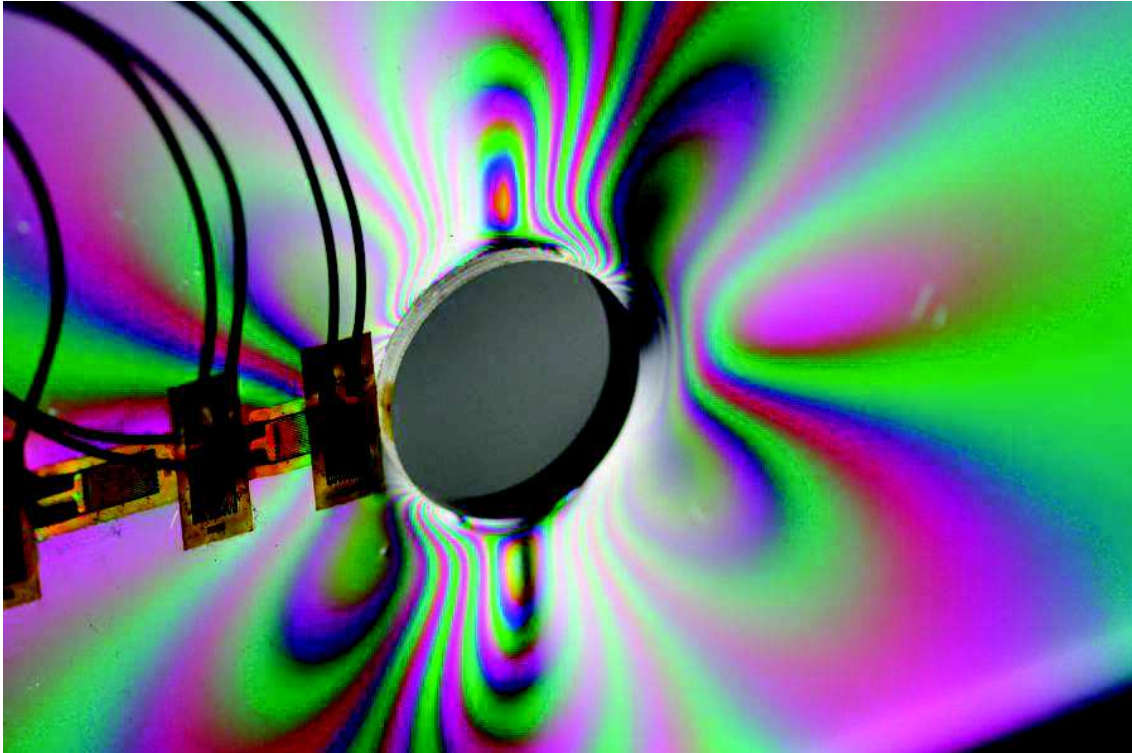


Figura 2-14. Aplicación de la técnica fotoelástica en conjunto con la extensométrica [53]

En este trabajo de investigación la zona a estudiar no presenta gradientes de deformación significativos, por tanto se ha optado por utilizar las técnicas extensométricas para medir las deformaciones en los especímenes objeto de estudio.

La extensometría ha sido empleada durante años, lo que la convierte en una técnica más que contrastada, en donde cada una de las variables que afectan a la medición están controladas. A continuación se expone una breve descripción de la técnica, así como de los posibles errores que el analista debe considerar, para que las mediciones sean realizadas con la mayor precisión posible.

## 2.6. Introducción a la medición de la deformación con galgas extensométricas resistivas

En 1856 el profesor William Thomson (Lord Kelvin) realizó numerosos experimentos con el fin de investigar las propiedades electromecánicas de los materiales. Uno de sus descubrimientos es el principio de funcionamiento de las galgas extensométricas. William

observó que la resistencia eléctrica de un hilo metálico varía cuando se le aplica una tensión mecánica [54].

La resistencia de un material conductor se define como [55]:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad \text{Ecuación 2-9}$$

Donde  $R$  es la resistencia del conductor,  $\rho$  es la resistividad del material,  $L$  es la longitud del alambre y  $A$  es el área del conductor.

Si se deriva la Ecuación 2-9 con respecto a la resistencia, se tiene que:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \quad \text{Ecuación 2-10}$$

Si se asume que el conductor es de sección circular, la Ecuación 2-10 quedaría:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - 2 \frac{dD}{D} \quad \text{Ecuación 2-11}$$

Por resistencia de materiales se sabe que el coeficiente de Poisson es [56]:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\frac{dD}{D}}{\frac{dL}{L}}$$

Sustituyendo en la Ecuación 2-11 se tiene que:

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \frac{dL}{L} + \frac{d\rho}{\rho} \quad \text{Ecuación 2-12}$$

El cambio, en la resistencia eléctrica con respecto a la variación de la longitud se le conoce como factor de galga  $F$ :

$$F = \frac{dR/R}{dL/L} = (1 + 2\nu) + \frac{d\rho/\rho}{dL/L} \quad \text{Ecuación 2-13}$$

La variación de la resistencia eléctrica depende de dos factores tal y como se puede ver en la Ecuación 2-13. El primer término de la ecuación se refiere al efecto geométrico y el segundo al efecto piezoresistivo del material. En la mayoría de los metales los efectos geométricos

tienen mayor repercusión en el factor de galga, mientras que en los semiconductores dominan los efectos piezoresistivos [57].

El factor de galga solo puede ser determinado experimentalmente, debido a que la variación de la resistividad depende de la deformación [57]. Anteriormente se pensaba que la resistividad no variaba, por lo tanto el factor de galga solo dependía del cambio en la geometría del conductor. Teóricamente, considerando solo los cambios en la forma del sensor producto de una carga aplicada, es decir, los efectos geométricos, el factor de galga del níquel (coeficiente de Poisson de 0.31) es de 1.6 cuando experimentalmente tiene un valor de aproximadamente -12 [54].

Reordenando la Ecuación 2-13, se obtiene que la deformación que sufre la galga extensométrica es:

$$dL/L = \frac{dR/R}{F}$$

$$\varepsilon = \frac{dR/R}{F}$$

Ecuación 2-14

Por tanto conociendo el factor de galga y la variación de su resistencia eléctrica, se puede saber la deformación que sufre el espécimen, justo debajo del área en donde se encuentra adherida la galga extensométrica.

La galga extensométrica resistiva, es una herramienta simple y versátil para el análisis estructural. Se asemeja a las especificaciones del instrumento de medida de deformación ideal, definido por la NACA (Ahora conocida como NASA) [54].

Para medir las variaciones de resistencia eléctrica en las galgas extensométricas, se suele utilizar el puente de Wheatstone. Este dispositivo, está compuesto por cuatro resistencias conectadas en cada uno de los ramales, una fuente de alimentación y un galvanómetro (Figura 2-15).

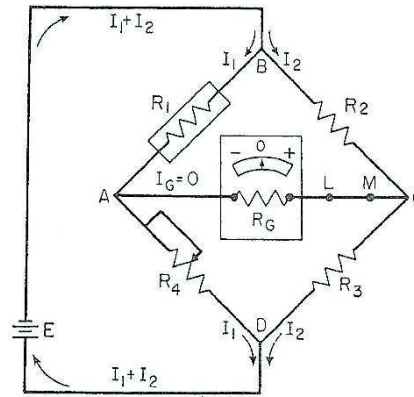


Figura 2-15. Puento de Wheatstone equilibrado [54]

Con un arreglo adecuado, es decir, con resistencias cuyos valores sean muy similares, es posible balancear el puente de manera que la corriente que fluye por el ramal del galvanómetro sea cero, permitiendo la obtención de una expresión matemática que relaciona las cuatro resistencias [54].

Se dice que el puente se encuentra equilibrado cuando la salida de voltaje es nula, y esto se cumple cuando la relación entre las resistencias de ramales adyacentes es la misma (Ecuación 2-15).

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad \text{Ecuación 2-15}$$

Supóngase que  $R_1$  es una galga extensométrica, de manera que:

$$R_1 = \frac{R_2}{R_3} R_4 \quad \text{Ecuación 2-16}$$

Las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  tendrán iguales características y la  $R_4$  será una resistencia variable, de manera que se pueda ajustar su valor para cumplir con la condición de puente equilibrado (Figura 2-15). Al producirse una variación en la longitud de la galga extensométrica como resultado de una sollicitación mecánica, la resistencia  $R_1$  cambiará desequilibrando el puente.

En este punto se puede variar la resistencia  $R_4$  para volver a la condición del puente equilibrado. De manera que conociendo el valor de la resistencia variable  $R_4$  antes y después de desequilibrar el puente, se puede calcular la magnitud de  $R_1$  para los mismos estados a través de la Ecuación 2-16. La diferencia entre los estados final e inicial, se tomará como la

respuesta de la galga debido a la deformación experimentada, a este método se le conoce como balance nulo [54].

Si en lugar de reajustar la resistencia  $R_4$  después de producirse el desequilibrio del puente, se toma el valor de la lectura del galvanómetro como medida directa de la variación de la resistencia de la galga extensométrica, se dice que el puente es de medida directa o de referencia desequilibrada.

Ambos métodos parten de un valor de referencia, el de balance nulo es adecuado para mediciones estáticas y dinámicas de baja frecuencia. El de medida directa puede ser utilizado tanto en mediciones estáticas como dinámicas [58]. La ventaja de utilizar el de balance nulo radica en la eliminación de la no linealidad, ya que la medida se toma en función del valor de la resistencia que equilibra el puente, antes y después de producirse la deformación de la galga. No obstante, resulta poco práctico reajustar el valor de la resistencia para equilibrar el puente cada vez que se registre una deformación, sobre todo en mediciones dinámicas. Debido a esto, los equipos modernos utilizan un puente de Wheatstone de medida directa [55].

En el de medida directa, es necesario conocer la expresión de la señal de salida para el caso en el que el puente se encuentra desequilibrado, debido a que en este estado la Ecuación 2-15 deja de ser válida.

En la Figura 2-16 se muestra el esquema del puente de Wheatstone desequilibrado. Para resolverlo se utiliza la segunda ley de Kirchhoff, la cual dice que en toda malla la suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico es igual a cero.

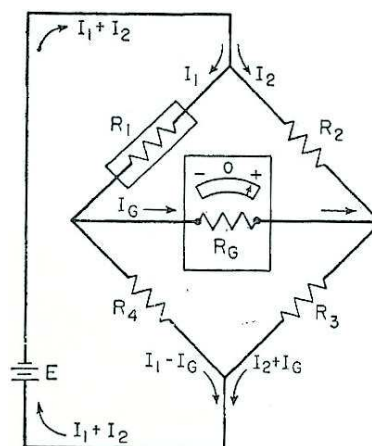


Figura 2-16. Puente de Wheatstone desequilibrado [54]



El circuito de la Figura 2-16 está compuesto por tres mallas. La primera es la formada por la fuente de alimentación  $E$  y las resistencias  $R_1$  y  $R_4$ . La segunda malla es la integrada por las resistencias  $R_1$ ,  $R_G$  y  $R_2$ , y la última malla es las que forman las resistencias  $R_4$ ,  $R_G$  y  $R_3$ .

De manera que si todas las resistencias de los ramales del puente son iguales  $R$ , y una de ellas varía  $\Delta R$  e ignorando las no linealidades, la señal de salida será [54]:

$$I_G = \frac{E \Delta R}{4R(R + R_G)} \quad \text{Ecuación 2-17}$$

Y recordando que:

$$\frac{\Delta R}{R} = F \varepsilon$$

La salida de corriente de  $\frac{1}{4}$  de puente vendría dada por la Ecuación 2-18.

$$I_G = \frac{EF \varepsilon}{4(R + R_G)} \quad \text{Ecuación 2-18}$$

Cuando la señal de salida se calcula de esta manera se dice que el circuito es sensible a la corriente [55].

Considerando la ley de Ohm, se puede expresar la respuesta del sistema como la impedancia de carga detectada por el circuito, que es el caso en el que en vez de utilizar un galvanómetro para medir la señal se emplee un voltímetro, entonces:

$$E_0 = I_G R_G$$

$$E_0 = \frac{EF \varepsilon R_G}{4(R + R_G)}$$

La diferencia de potencial eléctrico cuando  $I_G = 0$ , se obtiene calculando el límite de  $E_0$  cuando  $R_G$  tiende a  $\infty$  [54].

$$E'_0 = \lim_{R_G \rightarrow \infty} (E_0) = \frac{\frac{d}{dR_G} (EF \varepsilon R_G)}{\frac{d}{dR_G} [4(R + R_G)]}$$

$$E'_0 = \frac{EF \varepsilon}{4} \quad \text{Ecuación 2-19}$$

Si se utiliza la Ecuación 2-19 para medir la respuesta del sistema, se dice que el circuito es sensible al voltaje [55].

Por otro lado, cuando se utilizan galgas extensométricas, se necesita ajustar la sensibilidad del instrumento utilizado, de manera que este registre un valor acorde con la deformación que experimenta la galga. Para ello, se necesita calibrar el equipo de medida.

La calibración del equipo generalmente se hace a través de la conexión de un resistor en paralelo con la galga extensométrica, en donde, se simula una deformación provocada por el cierre del circuito, que idealmente es:

$$\varepsilon_S = \frac{-R_G}{F(R_G + R_C)} \quad \text{Ecuación 2-20}$$

Donde  $\varepsilon_S$  es la deformación simulada a compresión provocada por la conexión del resistor  $R_C$  al ramal activo. Dado que todas las resistencias son conocidas, es posible calcular la deformación  $\varepsilon_S$ , que deberá ser mayor que la obtenida a través del equipo.

Esto debido a que en las mediciones experimentales con galgas extensométricas, al menos uno de los ramales activos del puente de Wheatstone se encuentra lo suficientemente alejado del equipo de medición, con lo cual la resistencia del cable introduce un error. En estas circunstancias la medida registrada por el equipo será menor que la experimentada por el sensor, en proporción con la cantidad de cable utilizado en la instalación [59].

Considerando el caso más sencillo correspondiente a la conexión de  $\frac{1}{4}$  de puente, se puede realizar la instalación empleando tres cables de igual longitud y sección, en donde uno de los cables se utilizará para compensar o simular una deformación (Figura 2-17). Con esto se logra compensar el error debido a la resistencia del cable, pero sólo a bajas deformaciones ( $2000 \mu\varepsilon$ ), ya que la diferencia entre calibrar la galga instalando el resistor en paralelo con la misma o en paralelo con la galga de compensación (Dummy) resulta imperceptible.

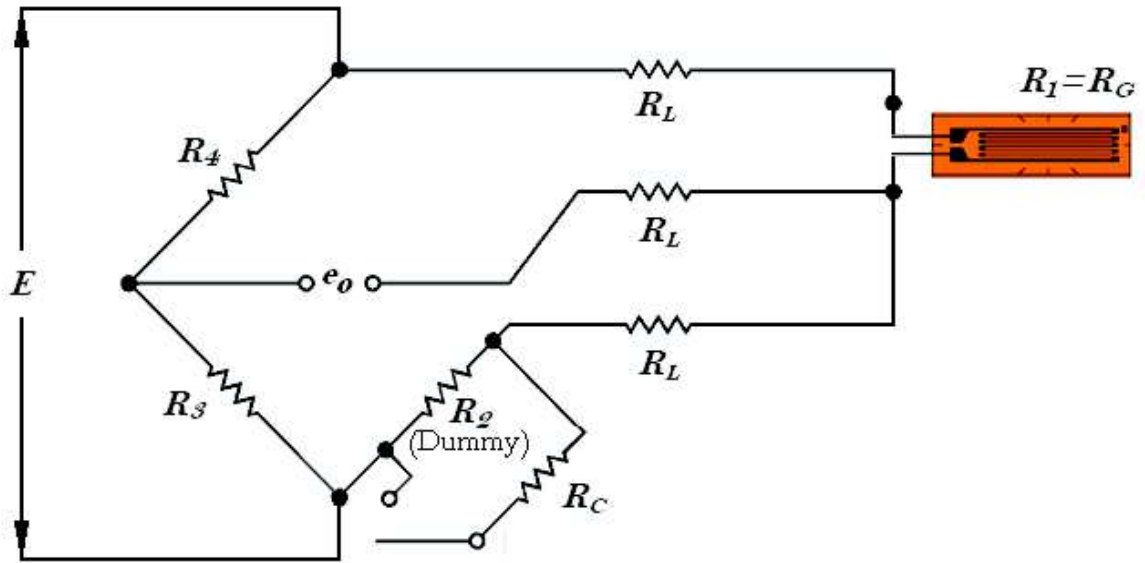


Figura 2-17. Esquema de un circuito de cuarto de Puento para una medición remota

La deformación simulada es atenuada multiplicando la Ecuación 2-20 por la relación existente entre la resistencia de la galga y la resistencia total del ramal del circuito [59]. Por tanto la deformación simulada atenuada es:

$$\varepsilon_{SA} = \varepsilon_S \cdot \frac{R_G}{R_G + R_L} \quad \text{Ecuación 2-21}$$

Una vez ajustada la ganancia del equipo, el error que introduce la resistencia del cable es eliminado para el resto de mediciones posteriores. El equipo de medición calculará la deformación corregida  $\varepsilon_C$  por el efecto de los cables para cualquier deformación  $\varepsilon$ , a través de la siguiente expresión [60]:

$$\varepsilon_C = \varepsilon \cdot \frac{R_G + R_L}{R_G} \quad \text{Ecuación 2-22}$$

## 2.7. Fuentes de error en mediciones con galgas extensométricas resistivas

### 2.7.1. Error debido a la temperatura

Idealmente, las galgas extensométricas resistivas están fabricadas con el objetivo de transmitir la deformación que experimenta el espécimen al que se encuentren adheridas, sin que se vean afectadas por las condiciones del contorno. Desafortunadamente, la galga está alejada de la definición de sensor ideal, debido en gran parte a su principio de funcionamiento.

La relación del cambio en la galga extensométrica conocida como factor de galga, se deriva de la Ecuación 2-9, la cual relaciona la resistividad del alambre con su forma física. El sensor al ser un material conductor, tiene un coeficiente de temperatura que modifica su resistencia eléctrica en función de las variaciones de la temperatura. Su forma física también depende de la temperatura ya que todos los materiales poseen un coeficiente de expansión térmica. Todo esto hace que si no se toma en cuenta las variaciones de la temperatura o no se tiene un control sobre la misma, las deformaciones producidas por dichos cambios conocidas como deformaciones aparentes, puedan llegar a ser mayores que las inducidas por la fuerza aplicada [55].

La resistividad eléctrica y las diferencias entre los coeficientes de expansión térmica, de la galga extensométrica y de la pieza donde se encuentre instalada, originan la deformación aparente [61]. Ambas contribuciones se pueden sumar algebraicamente, esto da como resultado que la respuesta de la galga extensométrica por el cambio en la temperatura, expresada en términos de deformación sea:

$$\varepsilon_{T/0} = \frac{\left[ \beta_G + F_G \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) (\alpha_S - \alpha_G) \right] \Delta T}{F_I} \quad \text{Ecuación 2-23}$$

Donde:

$\varepsilon_{T/0}$  = Deformación aparente debida a la variación de la temperatura para un factor de galga  $F_I$ .

$F_I$  = Factor de galga utilizado en el equipo de medición.

$\beta_G$  = Coeficiente de temperatura de la rejilla de la galga extensométrica.

$F_G$  = Factor de galga suministrado por el fabricante.

$\nu_0$  = Coeficiente de Poisson (0.285) del material utilizado en la calibración de la galga extensométrica.

$\alpha_S$  = Coeficiente de expansión térmica del sustrato.

$\alpha_G$  = Coeficiente de expansión térmica de la rejilla de la galga extensométrica.

$\Delta T$  = Variación de la temperatura con respecto a la temperatura inicial del ensayo o temperatura de referencia (normalmente 24 °C).

$K_t$  = Coeficiente de sensibilidad transversal de la galga extensométrica.

En la expresión anterior se incluye el término  $(1 + K_t)/(1 - \nu_0 K_t)$ , referido a la corrección por sensibilidad transversal, esto se debe a que la expansión térmica en la galga extensométrica es biaxial. Mientras que el factor de galga  $F_G$  se calcula como la sensibilidad de la galga a una deformación uniaxial, con una relación entre las deformaciones principales de  $1/\nu_0$ .

La deformación aparente es la mayor y más grave fuente de error en mediciones con galgas extensométricas [55, 62]. Si la temperatura de ensayo está controlada, pero se aleja de la temperatura a la cual la galga no presenta ningún error por deformación aparente, es necesario realizar correcciones numéricas directamente sobre los datos adquiridos, ya que afortunadamente la deformación provocada por la variación térmica se añade a la ocasionada por una tensión mecánica.

Utilizando la Ecuación 2-23, se puede sustraer la deformación aparente de la deformación total, ya que la deformación total será la suma de la deformación por temperatura y la deformación debida a la carga aplicada.

Muchos factores afectan la deformación aparente de la galga extensométrica, alguno de ellos son: material y forma de la pieza a ensayar, material de la galga y lote, sensibilidad transversal, adhesivo utilizado y el procedimiento de instalación [55]. Por tanto, nunca es posible predecir con exactitud la respuesta térmica de cualquier galga extensométrica, incluso en el supuesto de que el material de la pieza a analizar sea el mismo que el utilizado por el fabricante para calibrar la galga [61].

Lo más recomendable en cualquier caso es ensayar la galga extensométrica adherida a la pieza que posteriormente se va a analizar, en un estado libre de cualquier tensión tanto mecánica como térmica, y obtener su deformación aparente. Aunque, en mediciones donde la precisión requerida sea aproximadamente  $\pm 10$  %, la corrección del error por temperatura se puede hacer utilizando la ecuación que aparece en la hoja de datos de la galga extensométrica [55].

En la corrección del error por temperatura, se asume que la temperatura inicial del ensayo es la misma que la temperatura de referencia utilizada por el fabricante. Por tanto, la deformación aparente puede ser estimada a partir del gráfico suministrado por el fabricante (Figura 2-18). Algebraicamente, la deformación corregida por temperatura resultará de la diferencia entre la deformación registrada y la deformación aparente  $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} - \epsilon_{T/0}$ .

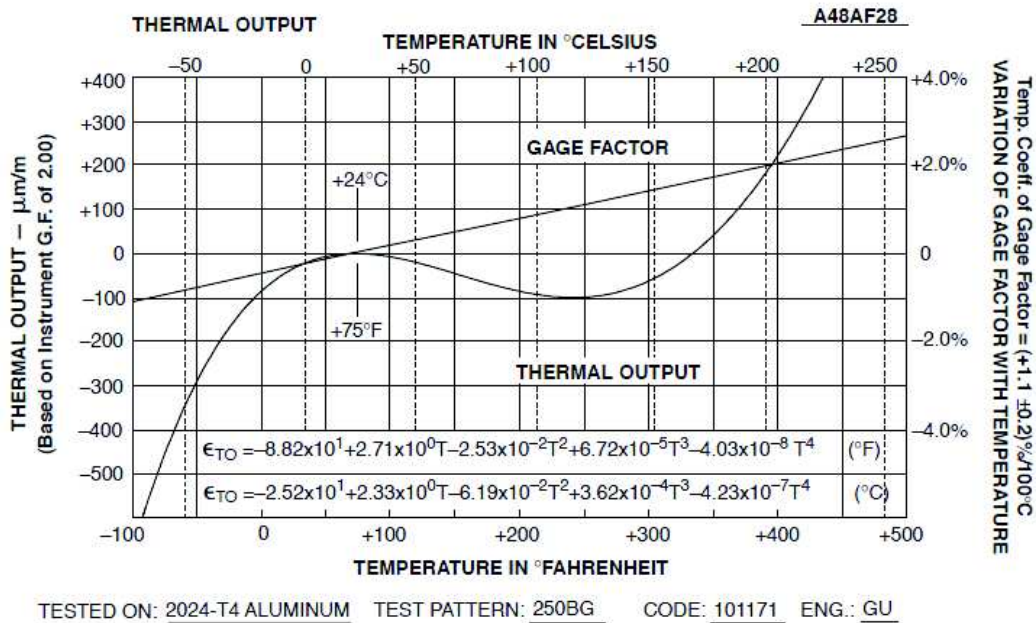


Figura 2-18. Ejemplo del gráfico de deformación aparente y variación del factor de galga con la temperatura [61]

Si el factor utilizado en el ensayo  $F_I$  difiere del estándar ( $F^* = 2.0$ ), no se puede emplear directamente la curva de calibración suministrada por el fabricante, debido a que varía en concordancia con el factor de galga. Para ajustar la curva de calibración al factor de galga utilizado en el equipo de medición, es decir para calcular la deformación aparente ajustada  $\epsilon'_{T/0}$ , se ha de emplear la siguiente expresión [61]:

$$\epsilon'_{T/0} = \epsilon_{T/0} \frac{F^*}{F_I} \tag{Ecuación 2-24}$$

Otro factor a tener en cuenta es el material a ensayar. La curva de deformación aparente se realiza con un tipo de material que puede diferir del que se quiera analizar. En estos casos, dependiendo del coeficiente de expansión térmica, se puede rotar la curva original bien en sentido horario, si el coeficiente de expansión térmica es menor que el empleado por el fabricante o anti-horario en caso contrario (Figura 2-19) [62].

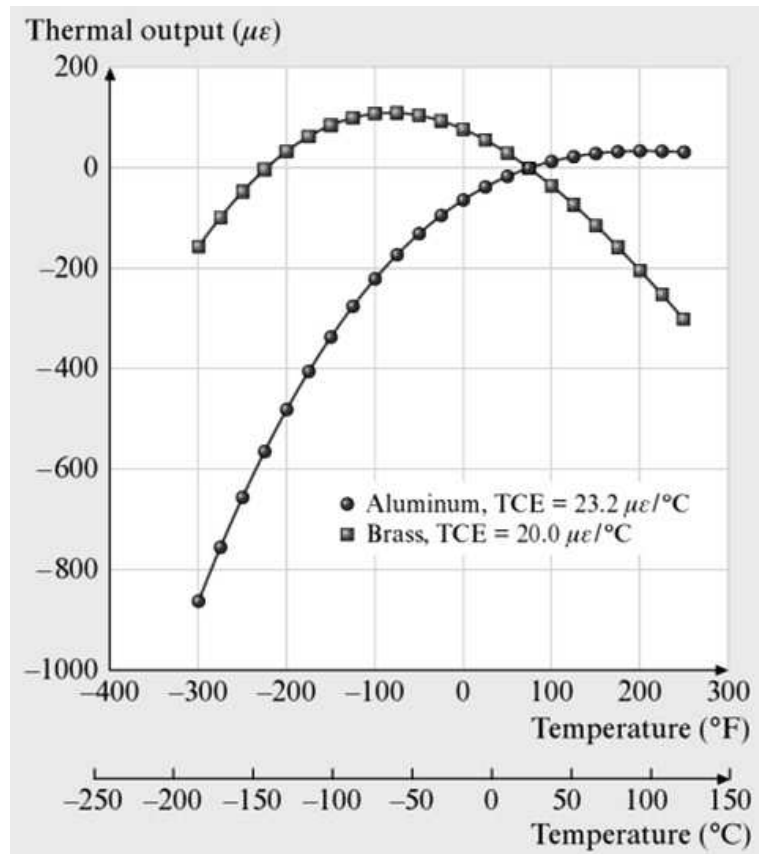


Figura 2-19. Ejemplo de la rotación de la curva de deformación aparente de una galga extensométrica pensada para ensayar aluminio, utilizada en latón [55]

El efecto de la rotación de la curva de deformación aparente, puede predecirse cuantitativamente describiendo la Ecuación 2-23, en función del material utilizado por el fabricante (A) y el material al que estará adherida la galga extensométrica (B). Aceptando que el factor de galga  $F_G = F_I$ , se tiene que:

$$\varepsilon_{T/0(A)} = \left[ \frac{\beta_G}{F_G} - \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_G \right] + \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_{S(A)} \Delta T \quad \text{Ecuación 2-25}$$

$$\varepsilon_{T/0(B)} = \left[ \frac{\beta_G}{F_G} - \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_G \right] + \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_{S(B)} \Delta T \quad \text{Ecuación 2-26}$$

En las dos ecuaciones anteriores, el primer término es común en ambas, por lo que si se reescribe la Ecuación 2-25 en función de  $\left[ \frac{\beta_G}{F_G} - \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_G \right]$  y se sustituye en la Ecuación 2-26, se obtiene una expresión que relaciona ambas deformaciones aparentes:

$$\varepsilon_{T/0(B)} = \varepsilon_{T/0(A)} - \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_{S(A)} \Delta T + \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) \alpha_{S(B)} \Delta T$$

$$\varepsilon_{T/0(B)} = \varepsilon_{T/0(A)} + \left( \frac{1 + K_t}{1 - \nu_0 K_t} \right) (\alpha_{S(B)} - \alpha_{S(A)}) \Delta T \quad \text{Ecuación 2-27}$$

Para el caso de galgas extensométricas de constantán, la corrección del factor de sensibilidad transversal está muy cercano a la unidad, por lo que la Ecuación 2-27 puede simplificarse a [61]:

$$\varepsilon_{T/0(B)} = \varepsilon_{T/0(A)} + (\alpha_{S(B)} - \alpha_{S(A)}) \Delta T \quad \text{Ecuación 2-28}$$

Donde:

$\varepsilon_{T/0(B)}$  = Deformación aparente de la galga extensométrica en el material a ensayar.

$\varepsilon_{T/0(A)}$  = Deformación aparente de la galga extensométrica suministrada por el fabricante.

$\alpha_{S(B)}$  = Coeficiente de expansión térmica del material a ensayar.

$\alpha_{S(A)}$  = Coeficiente de expansión térmica del material utilizado por el fabricante.

$\Delta T$  = Variación de la temperatura con respecto a la temperatura estándar o de referencia.

La Ecuación 2-28 permite transformar la deformación aparente de cualquier material que se desee ensayar, con respecto al material utilizado por el fabricante, para galgas extensométricas de constantán. En caso de tener una galga de un material diferente, se debe utilizar la Ecuación 2-27. En ambos casos, se debe tener presente que la precisión de la aproximación dependerá de cuán diferentes sean los coeficientes de expansión térmica de ambos materiales [55, 62].

En la hoja de datos de la galga extensométrica (Figura 2-20), también se representa la variación del factor de galga con la temperatura. Dependiendo tanto del material de la galga extensométrica, como de la temperatura del ensayo y de la precisión requerida, la corrección del factor de galga puede llegar a ser muy importante [61].



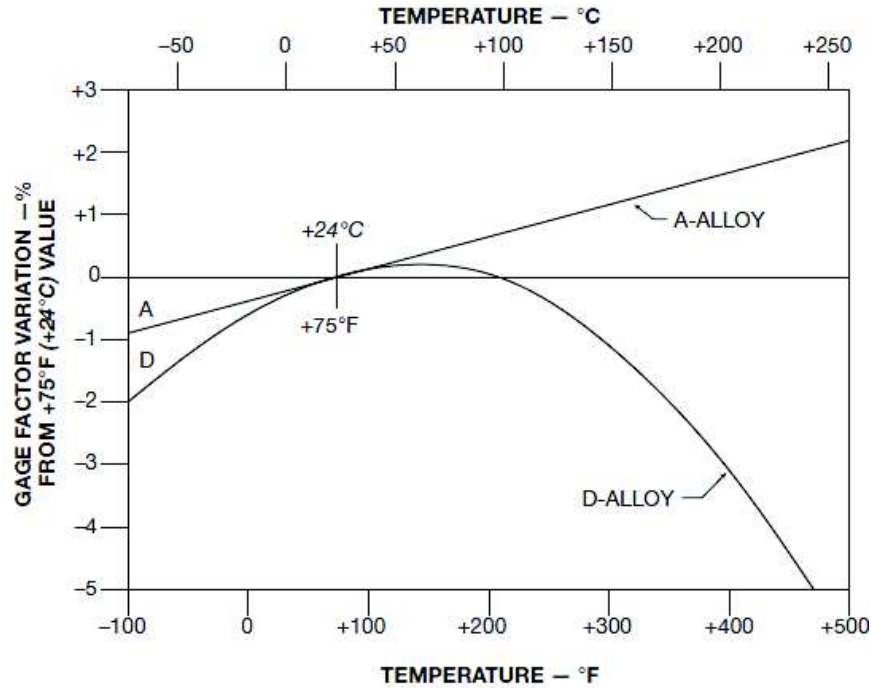


Figura 2-20. Variación del factor de galga con la temperatura para el constantán (A-alloy) y aleación isoelástica (D-alloy) [61]

Como el objetivo de medir es acercarse en lo posible al valor verdadero, siempre que la temperatura del ensayo sea diferente que la temperatura de referencia utilizada por el fabricante para determinar el factor de galga, los datos registrados por el equipo de medición deberán ser corregidos [55].

La variación del factor de galga, se calcula con la siguiente expresión [55]:

$$\Delta F(\%) = \alpha_G(T_e - T_c) \quad \text{Ecuación 2-29}$$

Donde:

- $\Delta F(\%) =$  Variación del factor de galga en porcentaje.
- $\alpha_G =$  Coeficiente de temperatura del factor de galga.
- $T_e =$  Temperatura del ensayo.
- $T_c =$  Temperatura de referencia utilizada por el fabricante para calcular el factor de galga.

Conocida la variación del factor de galga, el factor de galga modificado  $F(T_e)$  para la temperatura de ensayo es [61]:

$$F(T_e) = F_I \left( 1 + \frac{\Delta F(\%)}{100} \right) \quad \text{Ecuación 2-30}$$

Para obtener la deformación corregida  $\varepsilon_{T_e}$  debida a la variación del factor de galga con la temperatura, simplemente se multiplica la deformación medida  $\varepsilon$  por la relación de los factores de galga, es decir:

$$\varepsilon_{T_e} = \varepsilon \frac{F_I}{F(T_e)} \quad \text{Ecuación 2-31}$$

Si se combinan los errores producidos tanto por la deformación aparente como por la variación del factor de galga, es posible corregir la deformación medida considerando ambas aportaciones. Diciendo que  $\varepsilon = \hat{\varepsilon}$  y recordando que  $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon} - \varepsilon_{T/0}$ , la Ecuación 2-31 quedaría de la siguiente manera:

$$\varepsilon_{T_e} = (\hat{\varepsilon} - \varepsilon_{T/0}) \frac{F_I}{F(T_e)} \quad \text{Ecuación 2-32}$$

La Ecuación 2-32, permite corregir la deformación registrada por el equipo de medición para un factor de galga estándar  $F_I = F^*$ .

## 2.7.2. Error debido a la no linealidad del puente de Wheatstone

La mayoría de los equipos de medición con galgas extensométricas emplean el puente de Wheatstone desequilibrado o de medida directa, en donde generalmente la condición inicial es la del puente en absoluto equilibrio [55]. La deformación experimentada por el espécimen se relaciona con la variación del voltaje en el puente, es decir con la cantidad de desequilibrio que presenta el puente. Por lo tanto, dependiendo de las condiciones estará presente una no linealidad, debido a que la variación del voltaje o la respuesta del circuito no es una función lineal del cambio en las resistencias eléctricas [63].

Generalmente, la no linealidad es relativamente baja, y siempre que no se supere el límite de elasticidad del material, el error provocado puede ser despreciado. El porcentaje de error es aproximadamente igual a la deformación expresada en porcentaje, es decir para una deformación de 10000  $\mu\varepsilon$  el error provocado por la no linealidad del circuito es del 1 % [63].

Comúnmente los equipos de medición basados en el puente de Wheatstone desequilibrado, operan de dos maneras: amplificando la respuesta del puente que posteriormente puede visualizarse en una pantalla (Figura 2-21a), o anulando la señal de salida a través de la inyección de una señal de igual magnitud (Figura 2-21b).

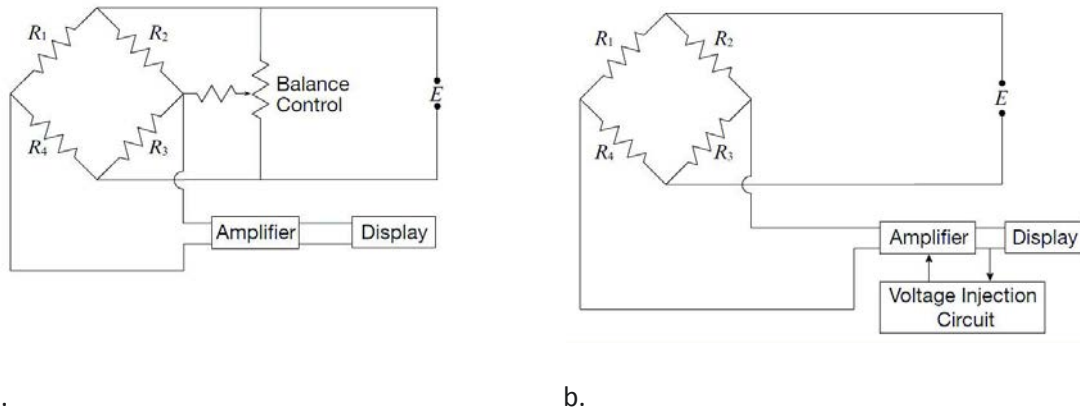


Figura 2-21. Esquema de circuitos comúnmente utilizados en equipos comerciales [63]

En ambos casos, si se utiliza un amplificador con una alta impedancia y la fuente de alimentación es de voltaje constante, el error de la no linealidad es idéntico y se puede expresar de forma general a través de la expresión que se muestra a continuación [63].

$$\frac{E_0}{E} = k\varepsilon(1 - \eta), mV/V \tag{Ecuación 2-33}$$

En donde,  $k$  es una constante que se determina a partir del factor de galga y del número de ramales activos del puente; y  $\eta$  representa la no linealidad causada por la variación de la corriente que circula a través de los ramales del puente de Wheatstone. Para saber las correcciones necesarias para diferentes arreglos del puente consúltese [63].

### 2.7.3. Error debido a la sensibilidad transversal

La sensibilidad transversal es la medida de la respuesta de la galga extensométrica a una deformación perpendicular a su eje de medida [64]. Es una respuesta no deseada, que depende de la distribución de las tensiones presentes en la zona ocupada, pudiendo llegar a valores importantes, incluso a bajas deformaciones [55].

Las galgas extensométricas se calibran en un estado de tensión uniaxial, sobre un material con un coeficiente de Poisson de 0.285. Por tanto, si se recrean las mismas condiciones que las empleadas por el fabricante para calcular el factor de galga, el error inducido por la sensibilidad transversal es nulo, ya que el factor de galga así calculado incluye tal efecto [65].

Por otro lado, es necesario corregir el valor medido debido al error inducido por la sensibilidad transversal si [65]:

- El material a ensayar tiene un coeficiente de Poisson distinto.
- El estado de las tensiones no es uniaxial.
- En un estado de tensión uniaxial, la galga extensométrica no está alineada con la dirección principal.

En general, las galgas extensométricas tienen dos factores de galga  $F_a$  y  $F_t$  referidos al factor de galga axial y transversal, respectivamente. Los cuales son determinados en un estado de deformación uniaxial, con la galga extensométrica alineada en la dirección de la tensión principal [54]. Tomando en cuenta los dos factores de galga, la respuesta de la galga extensométrica a cualquier variación de su longitud inicial, se puede expresar como:

$$\frac{\Delta R}{R} = F_a \varepsilon + F_t \varepsilon_t \quad \text{Ecuación 2-34}$$

Donde  $\varepsilon$  y  $\varepsilon_t$  representan la deformación en dirección axial y transversal, respectivamente. Relacionando los factores de galga transversal y longitudinal, se introduce el factor  $K_t = F_t/F_a$  conocido como factor de sensibilidad transversal [54]. Por consiguiente, la ecuación anterior quedaría de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta R}{R} = F_a (\varepsilon + K_t \varepsilon_t) \quad \text{Ecuación 2-35}$$

Recordando que la variación de la resistencia de la galga extensométrica, en concordancia con la deformación que experimenta es  $\Delta R/R = F\varepsilon$ , y que la deformación transversal de un material homogéneo  $\varepsilon_t$  en un estado de tensión uniaxial, se relaciona con la deformación longitudinal  $\varepsilon$  a través del coeficiente de Poisson  $\nu_0$  ( $\varepsilon_t = -\nu_0\varepsilon$ ); se tiene que el factor de galga en realidad es:

$$F = F_a (1 - \nu_0 K_t) \quad \text{Ecuación 2-36}$$

Por tanto, la supuesta deformación  $\varepsilon_F$  que resulta de utilizar el factor de galga del fabricante, para cualquier campo de deformación será [54]:

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta R/R}{F} = \frac{F_a(\varepsilon + K_t \varepsilon_t)}{F_a(1 - \nu_0 K_t)} = \frac{\varepsilon + K_t \varepsilon_t}{1 - \nu_0 K_t} \quad \text{Ecuación 2-37}$$

Cuando la sensibilidad transversal de la galga extensométrica no es igual a cero, el error relativo existente entre la supuesta deformación  $\varepsilon_F$  y el valor verdadero  $\varepsilon$ , expresado en porcentaje es:

$$n_\varepsilon = \frac{\varepsilon_F - \varepsilon}{\varepsilon} \times 100 = \frac{k_t \left( \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon} + \nu_0 \right)}{1 - \nu_0 K_t} \times 100 \quad \text{Ecuación 2-38}$$

Es evidente que si la deformación  $\varepsilon_t = -\nu_0 \varepsilon$ , condición que corresponde a un estado de tensión uniaxial, la Ecuación 2-38 se convierte en cero. También, se puede deducir que el porcentaje de error por sensibilidad transversal aumenta con los valores absolutos de  $k_t$  y  $\varepsilon_t/\varepsilon$ , cuando ambos son positivos o negativos [65].

El efecto de la sensibilidad transversal debería siempre ser considerado en un análisis experimental con campos de tensión biaxiales, al menos que se pueda demostrar que el efecto que tiene sensibilidad transversal sobre los datos adquiridos es mínimo, y que por tanto puede despreciarse.

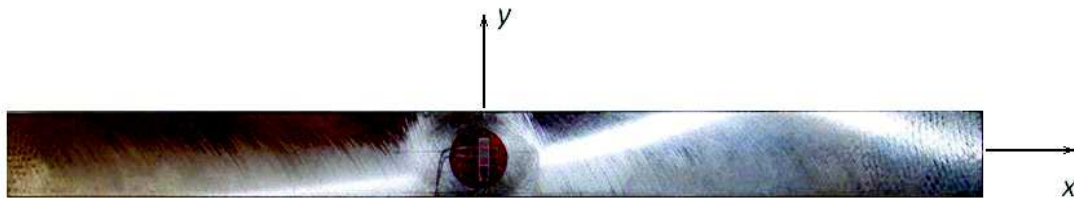


Figura 2-22. Roseta de dos galgas extensométricas dispuestas a 90°, en un estado de tensión biaxial

Considerando una roseta con dos galgas extensométricas situadas a 90°, alineadas a unos ejes cualquiera (Figura 2-22), las deformaciones indicadas por las galgas extensométricas según la Ecuación 2-39 serán:

$$\hat{\varepsilon}_x = \frac{\varepsilon_x + K_t \varepsilon_y}{1 - \nu_0 K_t} \quad \text{Ecuación 2-39}$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \frac{\varepsilon_y + K_t \varepsilon_x}{1 - \nu_0 K_t} \quad \text{Ecuación 2-40}$$

Donde  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_y$ , representan las deformaciones reales en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Despejando ambas deformaciones de las expresiones anteriores y operando, se tiene que las deformaciones corregidas por sensibilidad transversal para este tipo de rosetas son:

$$\varepsilon_x = \frac{(1 - \nu_0 K_t)(\hat{\varepsilon}_x - K_t \hat{\varepsilon}_y)}{1 - K_t^2} \quad \text{Ecuación 2-41}$$

$$\varepsilon_y = \frac{(1 - \nu_0 K_t)(\hat{\varepsilon}_y - K_t \hat{\varepsilon}_x)}{1 - K_t^2} \quad \text{Ecuación 2-42}$$

### 2.7.4. Error debido a la alineación

Las galgas extensométricas se adhieren sobre líneas de referencia previamente realizadas en el material que se desee ensayar. En la mayoría de los casos existirán errores de alineación que dependerán de la pericia del operador. Si las guías de centrado de la galga extensométrica no coinciden con las líneas de referencia, la medida captada a través de la las mismas presentará un error en concordancia con dicha desalineación.

En general, cuando una galga extensométrica se encuentra en un estado de deformación biaxial e ignorando el efecto de la sensibilidad transversal, la magnitud del error depende de tres factores [66]:

- La razón entre el máximo y mínimo algebraico de las deformaciones principales máximas y mínimas ( $\varepsilon_p/\varepsilon_q$ ).
- El ángulo  $\phi$  entre la deformación máxima principal y el eje de deformación que se pretende medir.
- El error angular de montaje  $\beta$ , entre el eje de la galga extensométrica después de adherirla a la superficie y el eje de deformación que se pretende medir.

El error en la deformación medida, debido al mal alineamiento de la galga extensométrica, puede expresarse como:

$$n_a = \varepsilon_{(\phi \pm \beta)} - \varepsilon_\phi \quad \text{Ecuación 2-43}$$

Donde  $\varepsilon_\phi$  es la deformación verdadera en la línea tomada como referencia, situada a un ángulo  $\phi$  del eje de deformación principal, mientras que  $\varepsilon_{(\phi \pm \beta)}$  es la deformación medida por la galga extensométrica con un error angular de montaje  $\pm\beta$  con respecto al eje de referencia.

Cuando se quiere determinar las tensiones principales partiendo del previo conocimiento de sus direcciones, se utiliza una roseta con dos galgas extensométricas a  $90^\circ$  alineada con los ejes principales. Por tanto, si existe un error de alineación con respecto a dichos ejes, las deformaciones medidas serán erróneas.

En estos casos el error de alineación puede tomarse como una fuente de error independiente del resto de errores que puedan estar presentes. Sin embargo, si el eje de la galga se encuentra muy desfasado del eje principal, es necesario realizar una transformación de la deformación, con lo cual la deformación a transformar debe ser la ya corregida por las distintas fuentes de error [67].

## 2.8. Distribución de tensiones en anillos circulares

El estudio de las tensiones en anillos circulares sometidos a cargas de compresión (Figura 2-23), ha estado enfocado a la formulación y a la validación de los modelos de tensión plana, que han sido desarrollados a partir de la teoría de la elasticidad.

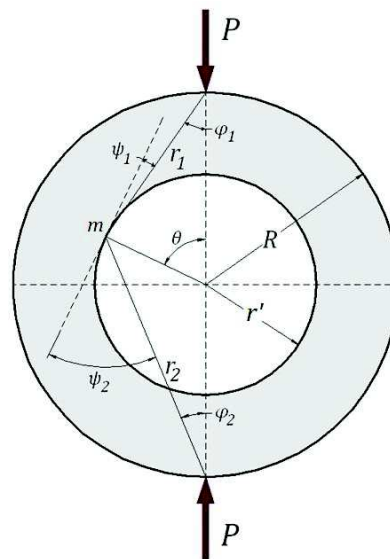


Figura 2-23. Anillo sometido a compresión [69]

Las aportaciones más significativas en cuanto al desarrollo del modelo analítico han sido las de Timoshenko [68, 69], en donde no solo se explica cómo deducir el modelo de tensión del anillo basado en la teoría de la elasticidad, sino que también se compara con el de resistencia de materiales. No obstante, el modelo desarrollado por dicho autor es válido sólo cuando la

relación entre los diámetros, interior y exterior del anillo es de 0.5, y en los puntos críticos del mismo (Punto de aplicación de la carga y a  $90^\circ$  con respecto a esta).

Nelson [70] planteó un modelo basado en las mismas consideraciones hechas por Timoshenko. Nelson demostró que es posible utilizar un modelo de tensión plana para analizar tubos sometidos a compresión, siempre que la carga esté aplicada uniformemente a lo largo de la longitud del cilindro. No obstante, el modelo es válido sólo en los puntos no pertenecientes a la zona de contacto.

También otros investigadores como Batista [71] y Durelli [72], presentaron los resultados teóricos para diferentes configuraciones de anillos, basados en la relación entre los diámetros interno  $d$  y externo  $D$  ( $\rho=d/D$ ). Durelli [72] en su artículo, presenta una serie de gráficos en donde se relaciona la evolución de las tensiones alrededor del anillo, con la relación de diámetros  $\rho$  comprendida entre  $0.1 \leq \rho \leq 0.9$ .

La precisión de la tensión proveniente de la interpolación las gráficas aportadas por Durelli [72], puede verse afectada por el valor de la relación  $\rho$ . Un modelo físico difícilmente puede presentar un valor de  $\rho$  igual a los de las gráficas del artículo de dicho autor. Además, es necesario disponer de un modelo teórico que permita propagar las incertidumbres de las variables involucradas, con miras a realizar su validación con resultados experimentales.

Por lo dicho anteriormente, a continuación se presenta el desarrollo del modelo de tensión plana para el caso del anillo sometido a compresión propuesto por Timoshenko [68, 69], basado en los fundamentos de la teoría de la elasticidad, el cual ha sido resuelto por Chianese [73] y que es el modelo utilizado en la presente tesis doctoral.

La solución analítica de un anillo circular concéntrico con dos cargas alineadas y diametralmente opuestas (Figura 2-24a), se obtiene a partir de la superposición de dos estados de tensión conocidos. El primero referente a la solución de un disco sometido a compresión (Figura 2-24b) y el segundo a las tensiones presentes en un anillo libre de carga (Figura 2-24c) [69].



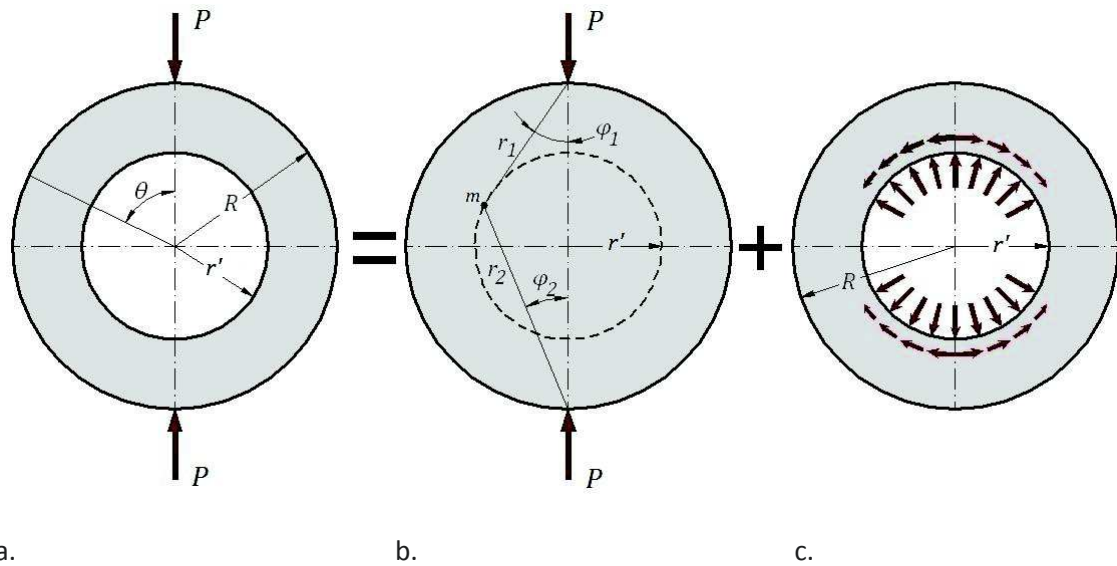


Figura 2-24. Obtención de la solución de las tensiones presentes en el anillo a partir de la superposición de las tensiones de un disco y las tensiones uniformemente distribuidas de la superficie interna

La distribución de tensión en el disco a compresión (Figura 2-24b) se resuelve por la superposición de una tensión uniforme de magnitud [69]:

$$\sigma_u = \frac{2P}{\pi l d} = \frac{P}{\pi l R} \quad \text{Ecuación 2-44}$$

Y dos distribuciones radiales en las direcciones  $r_1$  y  $r_2$  [69],

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= -\frac{2P}{\pi l} \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \\ \sigma_{r2} &= -\frac{2P}{\pi l} \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 2-45}$$

Las tensiones circunferenciales, radiales y cortantes presentes en el radio  $r'$  del disco (Figura 2-24b), se obtienen a partir de la suma algebraica de la tensión uniforme  $\sigma_u$  y de las tensiones radiales  $\sigma_{r1}$  y  $\sigma_{r2}$ , previa transformación a través del círculo de Morh (Figura 2-25).

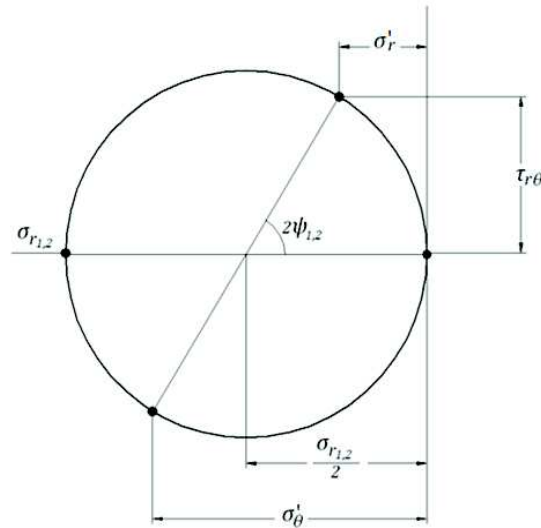


Figura 2-25. Círculo de Mohr para hacer coincidir las tensiones radiales con la tensión uniformemente distribuida

Por tanto, las expresiones de las tensiones presentes en el disco serán:

$$\sigma'_r = \sigma_{r1} \left( \frac{1 - \cos 2\psi_1}{2} \right) + \sigma_{r2} \left( \frac{1 - \cos 2\psi_2}{2} \right) = \sigma_{r1} \text{sen}^2 \psi_1 + \sigma_{r2} \text{sen}^2 \psi_2$$

$$\sigma'_\theta = \sigma_{r1} \left( \frac{1 + \cos 2\psi_1}{2} \right) + \sigma_{r2} \left( \frac{1 + \cos 2\psi_2}{2} \right) = \sigma_{r1} \text{cos}^2 \psi_1 + \sigma_{r2} \text{cos}^2 \psi_2$$

Ecuación 2-46

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_{r1} \text{sen} 2\psi_1 + \sigma_{r2} \text{sen} 2\psi_2}{2}$$

La tensión en dirección radial, tangencial y la tensión cortante en el punto  $m$  de la Figura 2-24b, viene dada por la superposición de las ecuaciones Ecuación 2-44 y Ecuación 2-46:

$$\sigma_r = \sigma_u + \sigma'_r = \frac{2P}{\pi l R} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \text{sen}^2 \psi_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \text{sen}^2 \psi_2 \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_u + \sigma'_\theta = \frac{2P}{\pi l R} \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \text{cos}^2 \psi_1 - \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \text{cos}^2 \psi_2 \right)$$

Ecuación 2-47

$$\tau_{r\theta} = \frac{P}{\pi l R} \left( \frac{\cos \varphi_1}{r_1} \text{sen} 2\psi_1 + \frac{\cos \varphi_2}{r_2} \text{sen} 2\psi_2 \right)$$

De la Figura 2-23, se deducen las siguientes relaciones:

$$r_1^2 = r'^2 \sin^2 \theta + (R - r' \cos \theta)^2$$

$$r_2^2 = r'^2 \sin^2 \theta + (R + r' \cos \theta)^2$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R - r' \cos \theta}{r_1}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R + r' \cos \theta}{r_2}$$

$$\sin \psi_1 = \cos(\theta + \varphi_1)$$

$$\sin \psi_2 = \cos(\theta - \varphi_1)$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{r' \sin \theta}{r_1}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{r' \sin \theta}{r_2}$$

Sustituyendo éstas relaciones en la Ecuación 2-47 se consigue expresar las tensiones en función del radio  $r'$  y del ángulo  $\theta$ . Las soluciones deducidas representarían la distribución de tensiones existente en toda la línea punteada del disco de la Figura 2-24b, cuyo radio es igual al radio interno del anillo (Figura 2-24a). Las tensiones quedarían expresadas de la siguiente manera:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta - \frac{r'}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{r'}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \operatorname{sen}^2 \theta}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \operatorname{sen}^2 \theta}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

Ecuación 2-48

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \operatorname{sen} \theta \left[ \frac{\left(1 - \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta - \frac{r'}{R}\right)}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 - 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} + \frac{\left(1 + \frac{r'}{R} \cos \theta\right) \left(\cos \theta + \frac{r'}{R}\right)}{\left[\left(\frac{r'}{R}\right)^2 + 1 + 2 \frac{r'}{R} \cos \theta\right]^2} \right] \right\}$$

Al realizar un agujero concéntrico en el disco de radio  $r'$ , se generan fuerzas normales y cortantes distribuidas alrededor del agujero, que pueden ser expresadas en forma de series de Fourier [74].

Dichas fuerzas deben ser iguales a las fuerzas presentes en el interior del anillo (Figura 2-24c), de manera que puedan cancelarse unas con otras. Por consiguiente, las componentes de las tensiones, tanto radial  $\sigma_r$  como cortante  $\tau_{r\theta}$  de la Ecuación 2-48, pueden ser expresadas por la siguiente suma infinita [73]:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi lR} \left\{ -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \rho^{n-2} [\rho^n (n-2) - n] \cos n\theta \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi lR} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} n \rho^{n-2} (1 - \rho^2) \sin n\theta$$

Ecuación 2-49

Donde  $\rho = r'/R$ , y  $n$  es un número par.

La distribución de tensiones en un anillo libre de carga (Figura 2-24c) se deducen sustituyendo la función de tensión desarrollada por Michell [75] en las ecuaciones de las tensiones correspondientes un sistema de coordenadas polares [74]:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi lR} \left\{ c_0 r^{-2} + 2d_0 - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)(n-2)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} + (n+2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi lR} \left\{ -c_0 r^{-2} + 2d_0 + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} + (n-2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\}$$

Ecuación 2-50

$$\tau_r = \frac{2P}{\pi lR} \sum_{n=2}^{\infty} n [(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)d_n r^n - (n+1)c'_n r^{-n-2} - (n-1)d'_n r^{-n}] \sin n\theta$$

Donde  $n$  es un valor par.

En la Ecuación 2-50, el elemento  $r$  representa la relación entre cualquier punto  $x$  de la sección transversal del anillo y el radio exterior  $R$  de dicho anillo, de manera que  $r = x/R$ .

Cuando  $r = \rho$ , las tensiones calculadas con la Ecuación 2-50 serían las presentes en la superficie interna del mismo, mientras que cuando  $r = R/R$  las tensiones son las pertenecientes al radio externo del anillo. Para que las tensiones radiales y cortantes sean iguales, es necesario calcular los coeficientes  $c_0, d_0, c_n, d_n, c'_n$  y  $d'_n$  que verifican dicha condición.

La tensión en el interior del anillo (Figura 2-24c) tiene que ser igual y opuesta a la tensión presente en el disco (Figura 2-24b) para el mismo radio. Igualando los componentes de la tensión radial  $\sigma_r$  de las ecuaciones Ecuación 2-49 y Ecuación 2-50 para un valor de  $r = \rho$ , y recordando que las fuerzas se cancelan por ser iguales y opuestas, se tiene [73]:

$$\frac{1}{2} = \frac{c_0}{\rho^2} + 2d_0 \quad \text{Ecuación 2-51}$$

La superficie exterior del anillo de la Figura 2-24c se encuentra libre de tensión y no existen fuerzas exteriores, por tanto si se sustituye el valor de  $r = R/R$  en la expresión de la tensión radial  $\sigma_r$  de la Ecuación 2-50 se tiene [73]:

$$0 = c_0 + 2d_0 \quad \text{Ecuación 2-52}$$

Resolviendo las ecuaciones Ecuación 2-51 y Ecuación 2-52 de manera conjunta, se consiguen los coeficientes  $c_0$  y  $d_0$ :

$$c_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} \right)$$

$$d_0 = -\frac{1}{4} \left( \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} \right)$$

Para que las fuerzas se cancelen unas con otras, es necesario calcular el resto de coeficientes presentes en la suma infinita de la Ecuación 2-50, es decir, los coeficientes del  $\cos n\theta$  y  $\sin n\theta$ , ya que estos términos representan las fuerzas normales y cortantes que actúan en la superficie tanto interior como exterior del anillo [74].

Recordando que en la superficie interna del disco cuyo radio es igual al radio interno del anillo, las tensiones de ambos son iguales y que además en la superficie externa del anillo la tensión es nula. Se obtienen cuatro ecuaciones que servirán para calcular el resto de coeficientes que verifican tales condiciones. Los coeficientes fueron obtenidos por Chianese [73] y se muestran a continuación:

$$c_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left[ n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1) - n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 \right]$$

$$d_n = \frac{1}{2(n+1)D} \left[ n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 + n \left( \frac{1}{\rho^2} - 1 \right) - (\rho^{2n} - 1) \right]$$

$$c'_n = \frac{1}{2(n+1)D} [n(\rho^2 - 1) + (\rho^{2n} - 1)]$$

$$d'_n = \frac{1}{2(n-1)D} \left[ n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 - (\rho^{2n} - 1) \right]$$

Donde:

$$D = n^2 \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right)^2 - \left( \rho^n - \frac{1}{\rho^n} \right)^2$$

Finalmente, superponiendo los dos estados de tensión que son: la tensión en el disco (Ecuación 2-48) y la tensión en el anillo (Ecuación 2-50). Se obtiene que la distribución de tensiones del anillo sometido a compresión es [73]:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1\rho^2}{2r^2} \left( \frac{1-r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta - r)^2}{(r^2 + 1 - 2r \cos \theta)^2} \right. \\ & - \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta + r)^2}{(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^2} \\ & - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+1)(n-2)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} \\ & \left. + (n+2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1\rho^2}{2r^2} \left( \frac{1+r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(r^2 + 1 - 2r \cos \theta)^2} \right. \\ & - \frac{(1+r \cos \theta) \sin^2 \theta}{(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n r^{n-2} \\ & + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c'_n r^{-n-2} \\ & \left. + (n-2)(n-1)d'_n r^{-n}] \cos n\theta \right\} \end{aligned}$$

Ecuación 2-53

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & \frac{2P}{\pi l R} \left\{ \frac{(1-r \cos \theta)(\cos \theta + r) \sin \theta}{(r^2 + 1 - 2r \cos \theta)^2} \right. \\ & + \frac{(1+r \cos \theta)(\cos \theta + r) \sin \theta}{(r^2 + 1 + 2r \cos \theta)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)c_n r^{n-2} \\ & \left. + (n+1)d_n r^n - (n+1)c'_n r^{-n-2} - (n-1)d'_n r^{-n}] n \sin n\theta \right\} \end{aligned}$$





# *CAPÍTULO 3*

## *Metodología*

---

### **3.1. Procedimiento general para la determinación del factor de seguridad**

---

A continuación, se muestra de manera esquemática la metodología propuesta en este trabajo de investigación, para la determinación del factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo analítico.

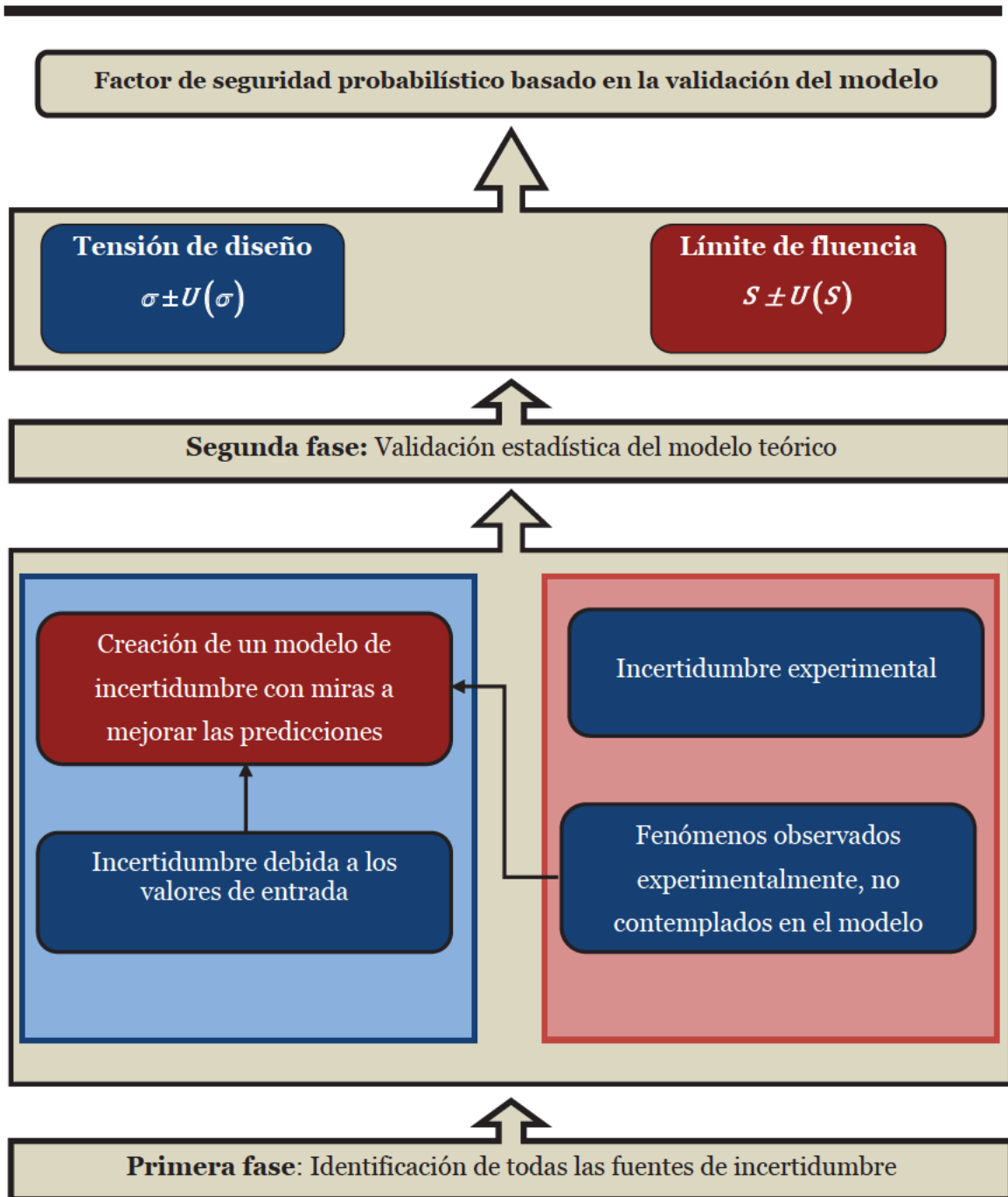


Figura 3-1. Proceso global para la determinación del factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico

En la primera fase, se ha realizado un estudio pormenorizado del error asociado al ensayo experimental y al modelo teórico definido en el apartado 2.8. Dicho estudio ha permitido la identificación de todas las posibles fuentes de incertidumbre presentes.

Para el ensayo experimental se han preparado 5 tubos de acero sin costura, instrumentados con galgas extensométricas. A estos tubos, se les ha aplicado una carga de

compresión por medio de una máquina de ensayos universal, perteneciente al departamento de ingeniería mecánica de la universidad Carlos III de Madrid.

Para el cálculo de las incertidumbres se han tomado en cuenta, tanto las incertidumbres propias de la instrumentación empleada, como también las debidas al comportamiento estocástico acotado de las variables que definen al modelo.

Adicionalmente, se ha incluido una fuente adicional de incertidumbre que acompaña a las predicciones. Esta incertidumbre se debe a la imprecisión generada por las simplificaciones del modelo, y ha permitido cuantificar cuan alejado está la muestra analizada, del caso ideal planteado por el modelo teórico.

La introducción de una fuente adicional de incertidumbre, no afecta a las predicciones realizadas con el modelo teórico, ya que no se han incorporado nuevas variables al modelo. Sin embargo, los límites de los posibles valores fácilmente atribuibles al resultado teórico, varían de acuerdo a las condiciones de ensayo.

En la segunda fase, se ha realizado la validación del modelo teórico del apartado 2.8 con los resultados experimentales. Para ello, se ha utilizado un nivel de confianza de 95% de acuerdo con las recomendaciones de Hills y Oberkampf [4, 36].

La validación del modelo se ha hecho a través de la determinación de la pendiente experimental (Figura 3-2), conocida como factor de concentración de tensiones [69] y definida como:

$$K_E = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\frac{4P}{\pi LD}} \quad \text{Ecuación 3-1}$$

Donde:

$P$ = carga aplicada

$L$ = Longitud del tubo

$D$ = Diámetro del tubo

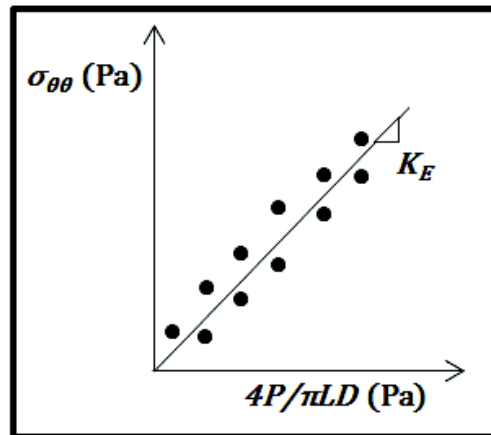


Figura 3-2. Factor de concentración de tensiones experimental

Para el cálculo de la pendiente se ha tenido en cuenta el comportamiento heterogéneo de las varianzas de ambos ejes cartesianos. Para ello, se ha utilizado el método de los mínimos cuadrados totales ponderados [29].

Con la determinación de la pendiente experimental se ha logrado que la contrastación del modelo teórico se reduzca a un análisis univariante (Apartado 2.3.2.1). En donde, se ha comparado el factor de concentración de tensiones experimental con el planteado por el modelo teórico.

Debido a que en los procesos de verificación y validación de modelos, los niveles de confianza están claramente definidos [4, 36]. Se ha propuesto como estadístico de validación, el índice de compatibilidad  $E_N$ , de uso común en la comparación entre laboratorios [6]. Con esto se ha logrado que los límites de aceptación del modelo estén siempre acotados entre 0 y 1 (Apartado 3.13).

Dado que en la literatura no se ha encontrado ningún procedimiento que ayude a decidir si se acepta o rechaza el modelo, cuando en al menos una de las muestras ensayadas no se cumplen los criterios de aceptación, se ha desarrollado un nuevo procedimiento, que es adecuado cuando la muestra analizada es pequeña y que facilita la toma de decisiones.

El procedimiento de decisión propuesto es un indicador de la consistencia de los resultados experimentales con el tamaño de la muestra analizada. En dicho procedimiento se ha utilizado una técnica de re-muestreo con reposición conocida como Bootstrapping [7]. Con esta técnica de re-muestreo no es necesario conocer la distribución de probabilidad asociada a los resultados, ya que la misma se construye a partir de la muestra analizada.

El procedimiento propuesto ha permitido verificar cómo afecta el incumplimiento de los criterios de aceptación de al menos una de las muestras analizadas, al resultado global obtenido. Todo esto para un nivel de confianza del 95%.

Una vez que se ha validado el modelo, el siguiente paso ha sido el cálculo del factor de seguridad probabilístico. La incertidumbre teórica ha sido calculada teniendo en consideración el punto crítico del anillo, que se encuentra ubicado en el diámetro interno del mismo, alineado con la carga (Figura 3-3).

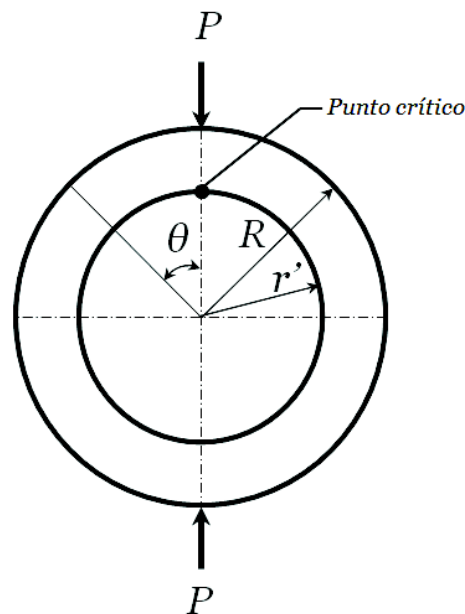


Figura 3-3. Punto crítico de un anillo circular

Se ha seleccionado el límite elástico del material como el parámetro de diseño que regirá el cálculo del factor de seguridad. El valor del límite elástico ha sido tomado directamente de la hoja especificaciones suministrada con los tubos. Dado que la incertidumbre del límite elástico, no figuraba en la hoja de especificaciones del material ensayado, esta ha sido estimada considerando los resultados obtenidos por Matusevich [28].

El procedimiento propuesto para el cálculo del factor de seguridad basado en el análisis de la incertidumbre, ha permitido la obtención del factor de seguridad mínimo de acuerdo con la probabilidad de fallo requerida. Tomando en cuenta, el resultado obtenido en la validación experimental del modelo teórico.

A continuación se describe con más detalle, los materiales y métodos que han sido empleados para la adecuación del procedimiento propuesto en esta tesis doctoral.

## 3.2. Materiales

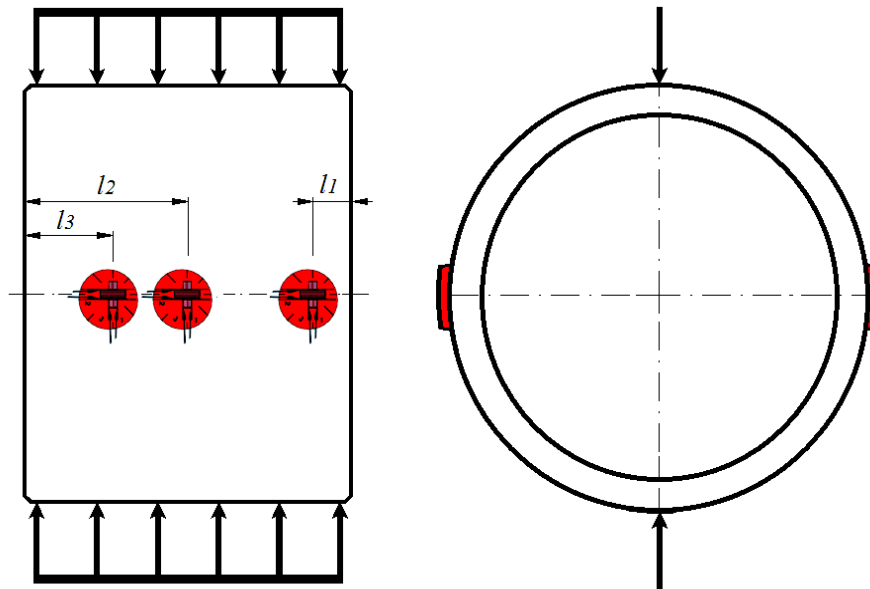
Para la validación del modelo se han seleccionado 5 tubos de acero al carbono sin costura, tipo E-355 según la norma EN-10294-1, previamente mecanizados para asegurar la concentricidad entre las paredes externas e internas de los mismos. Las medidas finales de los distintos especímenes, así como también la carga aplicada se muestran en la Tabla 3-1.

Dado que en la verificación o validación del modelo, lo que importa es cotejar las predicciones hechas con los resultados experimentales; no ha sido necesario aplicar un esfuerzo cercano al máximo permisible. Por tanto, los valores de carga mostrados en la Tabla 3-1 han asegurado que en ningún momento se ha alcanzado el límite elástico. Dichos valores han sido calculados con la Ecuación 2-50.

Tabla 3-1. Designación y dimensiones de los tubos utilizados ( $R_e=355$  MPa)

Tubo	Diámetro externo $D$ (mm)	Diámetro interno $d$ (mm)	Longitud $L$ (mm)	$\rho=d/D$	Carga aplicada $P$ (kN)
1	75.73	60.08	99.25	0.793	21.19
2	98.47	82.32	87.68	0.836	13.14
3	125.68	107.58	79.98	0.856	14.07
4	149.60	132.82	80.08	0.888	10.06
5	233.49	205.62	80.50	0.881	17.86

Dado que las direcciones principales de las deformaciones son conocidas (dirección circunferencial y longitudinal del tubo), se han utilizado rosetas con dos galgas dispuestas a  $90^\circ$ , alineadas a dichos ejes (Figura 3-4).



(Roseta #1)  $l_1 \approx 7.5 \text{ mm}$   
 (Roseta #2 y #4)  $l_2 \approx L/2$   
 (Roseta #3)  $l_3 \approx L/2 - l_1$

Figura 3-4. Esquema de la ubicación de las galgas extensométricas en la superficie del tubo

Se han instalado un total 4 rosetas con una configuración de  $\frac{1}{4}$  de puente [76], de las cuales 3 estaban posicionadas en una misma cara, de acuerdo a las longitudes  $l_i$  mostradas en la Figura 3-4. La roseta #4 se ha fijado en la cara opuesta, justo en la mitad de la longitud ( $l_2$ ). Esta disposición ha permitido, por un lado verificar a través de las rosetas #2 y #4 la simetría de la carga con respecto al plano medio que corta la cara frontal del tubo, y por otro lado la distribución de las tensiones a lo largo de su longitud.

Para posicionar las galgas se ha realizado una línea guía a lo largo de toda la longitud del tubo, lo que ha permitido medir el ángulo de desfase  $\beta$  entre la línea de centrado de la galga extensométrica y la línea guía (Figura 3-5). Para ello, se ha utilizado un goniómetro digital calibrado de resolución  $\pm 0.05^\circ$ . Los desfases observados han sido mínimos, comprendidos entre  $-0.6^\circ \leq \beta \leq 1^\circ$ .

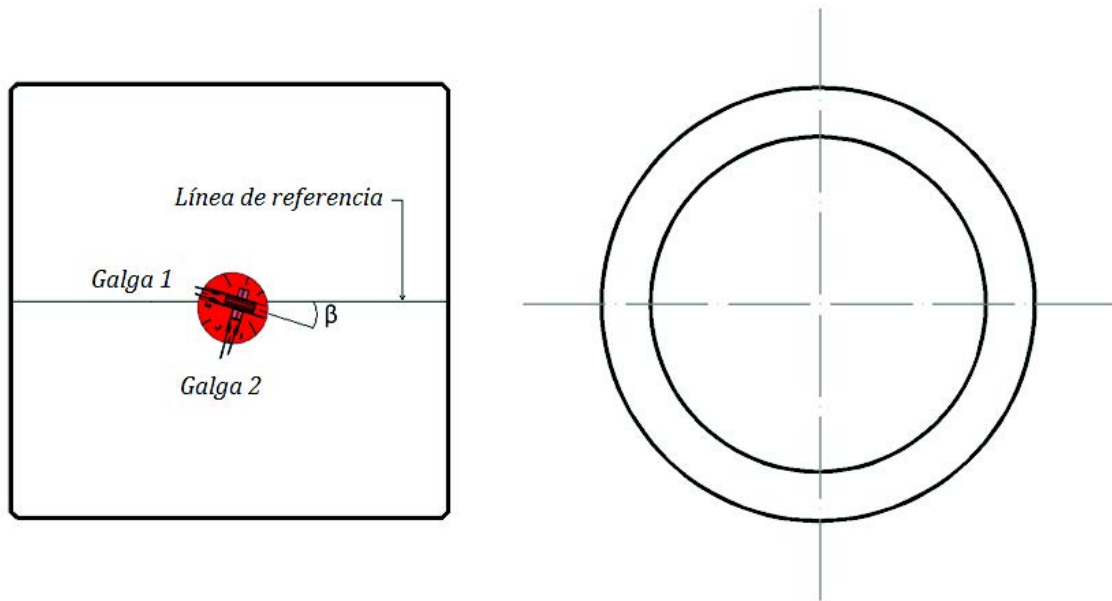


Figura 3-5. Representación esquemática del error de alineación en la instalación

Para la selección de la longitud de galga se ha tenido en cuenta el promedio de deformaciones que esta realiza. Se ha comparado la tensión circunferencial teórica  $\sigma_{\theta\theta}$  (Ecuación 2-50), para una longitud de galga de 0 y 6 mm. La diferencia entre ambos resultados, para el peor de los casos que sería el tubo con mayor curvatura (Diámetro interno del Tubo 1), no ha superado el 0.5 %.

Asimismo, la Ecuación 2-50 será integrada entre el ángulo de abrazado que forma la galga en la superficie del tubo, para posteriormente poder ser comparada con los resultados experimentales.

En la Tabla 3-2, se muestran las características técnicas de la roseta con galgas extensométricas dispuestas a  $90^\circ$ , utilizadas en el proceso de validación del modelo teórico.



Tabla 3-2. Características técnicas de las galgas utilizadas en los ensayos

Tipo de roseta	FCA-6-11
Longitud de galga	6 mm
Ancho de la rejilla	2.4 mm
Diámetro de la base	14 mm
Espesor de la base	0.03 mm
Material de la rejilla	Cu-Ni
Resistencia eléctrica	$120 \pm 0.5 \Omega$
Factor de galga	$2.10 \pm 1 \%$
Compensación de temperatura para	$11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Sensibilidad transversal	-0.1 %
Condiciones de evaluación	23 °C, 50 % HR
Material utilizado por el fabricante	SS 400
Coefficiente de expansión térmica del material testado	$11 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
Coefficiente de temperatura del factor de galga	$+0.1 \pm 0.05 \%/10^{\circ}\text{C}$
Deformación aparente por temperatura para $F^*=2$	$\varepsilon_{app} = -29.7 + 2.73T - 7.23 \times 10^{-2}T^2 + 5.30 \times 10^{-4}T^3 - 1.40 \times 10^{-6}T^4$
Tolerancia de la deformación aparente	$\pm 0.85 (\mu\text{m}/\text{m})/^{\circ}\text{C}$

### 3.3. Equipos

#### 3.3.1. Máquina de ensayos

Para el ensayo de compresión de los tubos se ha utilizado una máquina de ensayos y calibraciones electromecánica, perteneciente al departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid. Posee una célula de carga de 50 kN y una resolución en la indicación de la fuerza de 0.001 kN, y ha sido catalogada como una máquina clase 1 según la norma UNE-EN ISO-7500-1 por la empresa Microtest.

Se encuentra ubicada en una sala climatizada, lo que ha permitido tener un control de la temperatura (alrededor de 23 °C). La medición de la temperatura se ha realizado en la superficie de cada uno de los tubos, con un pirómetro óptico calibrado de resolución de  $\pm 1$  °C.

Para la aplicación de la carga de compresión ha sido necesario el diseño y fabricación de un plato de compresión, una barra de sujeción y un útil inferior. La Figura 3-6 muestra la fijación de los tubos a la máquina de ensayos.

El plato de compresión se encuentra conectado a la célula de carga y transmite la fuerza derivada del desplazamiento del puente móvil al tubo. Por otro lado, la barra de sujeción sirve para fijar al tubo sobre el útil inferior que reposa sobre la bancada. Además, permite centrar e impedir el deslizamiento del tubo con la aplicación de la carga.

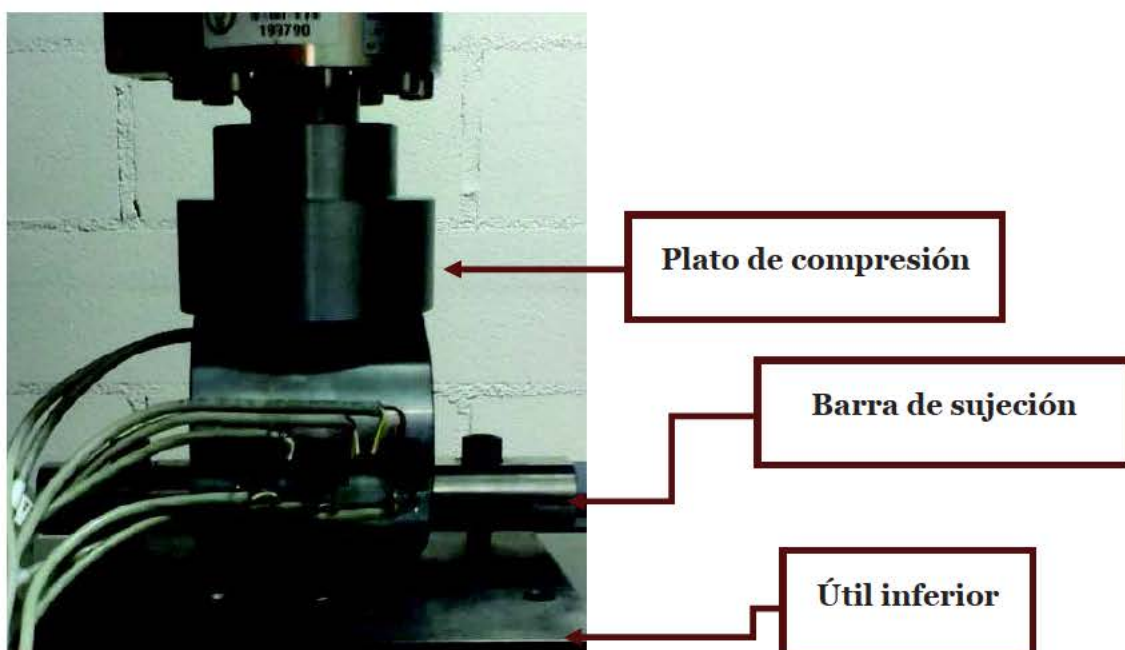


Figura 3-6. Fijación de los tubos a la máquina de ensayos

### 3.3.2. Equipo de adquisición de datos

La adquisición de datos se realizó a través de la utilización de dos equipos, el propio de la máquina de ensayos SCM3000 y el System 7000 de Vishay. Esto debido a que en un estudio previo a la realización de los ensayos, se observó que cuando se registran datos simultáneamente en los 8 canales que posee el equipo de la máquina de ensayos (SCM3000), la frecuencia de muestreo no permanece constante. Además, aunque dicho equipo permite el registro de deformaciones, es necesario una instrumentación externa adicional, en concreto un amplificador y acondicionador de señal, y de varios puentes de Wheatstone.

Es por ello, que se ha optado por registrar las fuerzas con el SCM3000, en donde se ha asignado como variable de control la fuerza aplicada. Por otro lado, el registro de las deformaciones ha sido realizado con el System 7000 de Vishay.

El System 7000 (Figura 3-7) posee una resolución de  $0.5 \mu\epsilon$  y puede registrar hasta 2048 muestras por segundo. Además, se pueden configurar todas las combinaciones del puente de Wheatstone, para galgas extensométricas de 120, 350 y 1000  $\Omega$  [77].



Figura 3-7. Hardware del System 7000

Con este equipo (Figura 3-7) se puede alimentar y completar el puente del circuito, realizar la calibración de la galga (Shunt Calibration), amplificar y acondicionar la señal, y todo esto sin necesidad de instrumentación especial adicional. Sólo se necesita un cable que disponga de un pin Ethernet Rj45 conectado a las galgas extensométricas y una fuente de alimentación (Figura 3-8).

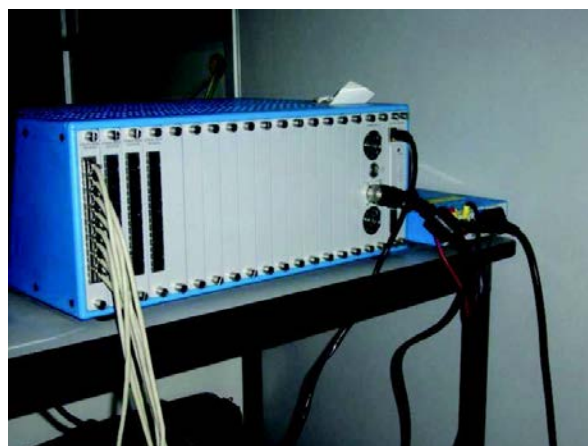


Figura 3-8. Conexión de los cables al equipo de adquisición System 7000

La velocidad de muestreo, tanto de las fuerzas como de las deformaciones, ha sido fijada en 10 Hz, debido a que está es la máxima velocidad de registro del SCM3000.

### 3.4. Procedimiento experimental

A continuación se describen cada uno de los pasos seguidos para la realización del diseño experimental:

1. Dado que en la calibración de las galgas extensométricas, éstas deben estar a las condiciones ambientales de ensayo durante al menos 72 horas [64], se ha tomado este tiempo como referencia para el inicio de las pruebas. Las 72 horas se han contabilizado a partir de la introducción de los tubos y de la instrumentación en la sala de ensayos.
2. Pasadas 72 horas, se encendió el equipo de adquisición System 7000 para que alcanzará la temperatura de estabilización (mínimo 30 min) [77].
3. Se procedió a la instalación de los tubos en la máquina de ensayos (Figura 3-9).

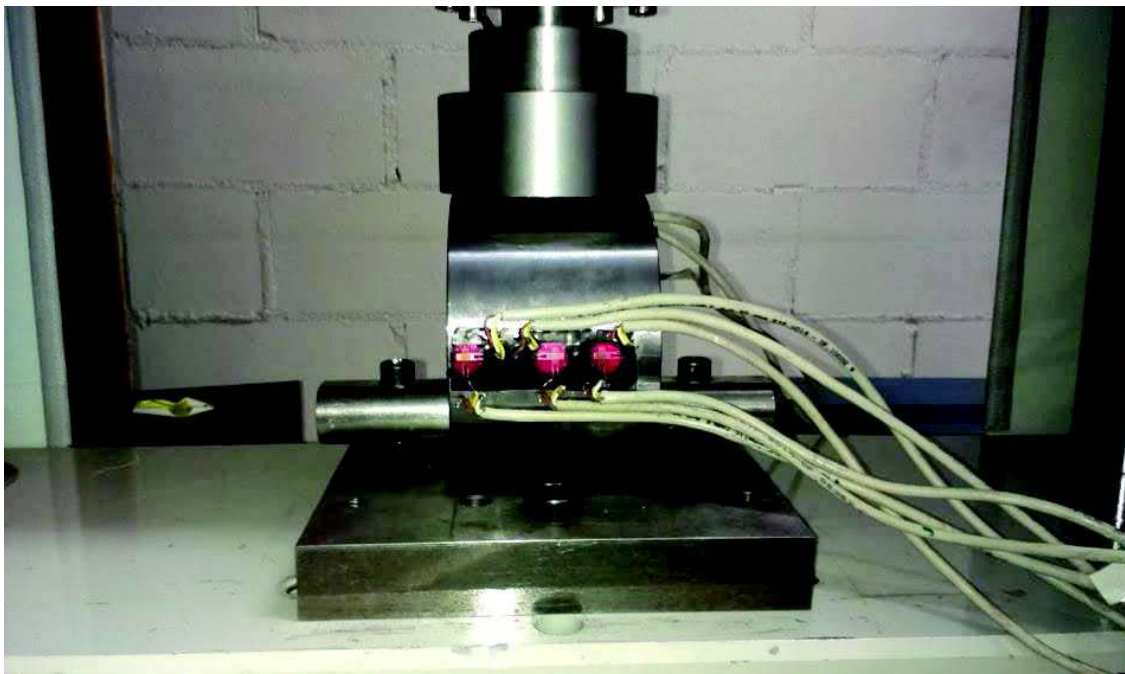


Figura 3-9. Montaje del tubo 2 en la máquina de ensayos

4. Se conectaron los cables de las galgas extensométricas al módulo de adquisición System 7000.

5. Con el mando manual de la máquina de ensayos se movió el puente móvil, de manera que la distancia entre el plato de compresión y los tubos fuera lo mínimo posible ( $\approx 1$  mm).

6. Se procedió a la toma de cero en ambos equipos de adquisición, para el SCM3000 la toma del cero fuerza y del punto de partida del puente móvil, y para el System 7000 el cero deformación.

7. Se realizó la calibración virtual de cada una de las galgas de forma automática, con un resistor de  $5940 \Omega \pm 0.1\%$  y un factor de galga de 2 se simularon  $10000 \mu\epsilon$  (Figura 3-10).

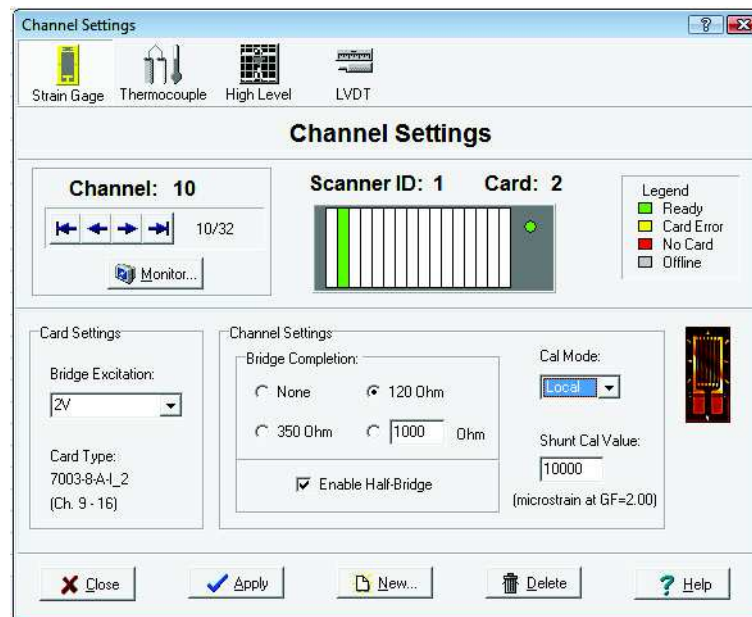


Figura 3-10. Resistor y valor de la deformación simulada utilizada en la calibración

8. Se midió la temperatura de la superficie del tubo con un pirómetro óptico calibrado (resolución =  $\pm 1$  °C) y se apuntó el valor.

9. Sin aplicar ninguna carga, se inició la adquisición de datos de deformación con el System 7000, y se verificó que las deformaciones eran constantes y cercanas a cero.

10. Pasados aproximadamente 10 segundos, se dio inicio a la aplicación sucesiva de la carga con una velocidad fija de 50 N/s (Figura 3-11). En este punto se contrastó que la evolución de las deformaciones era similar.



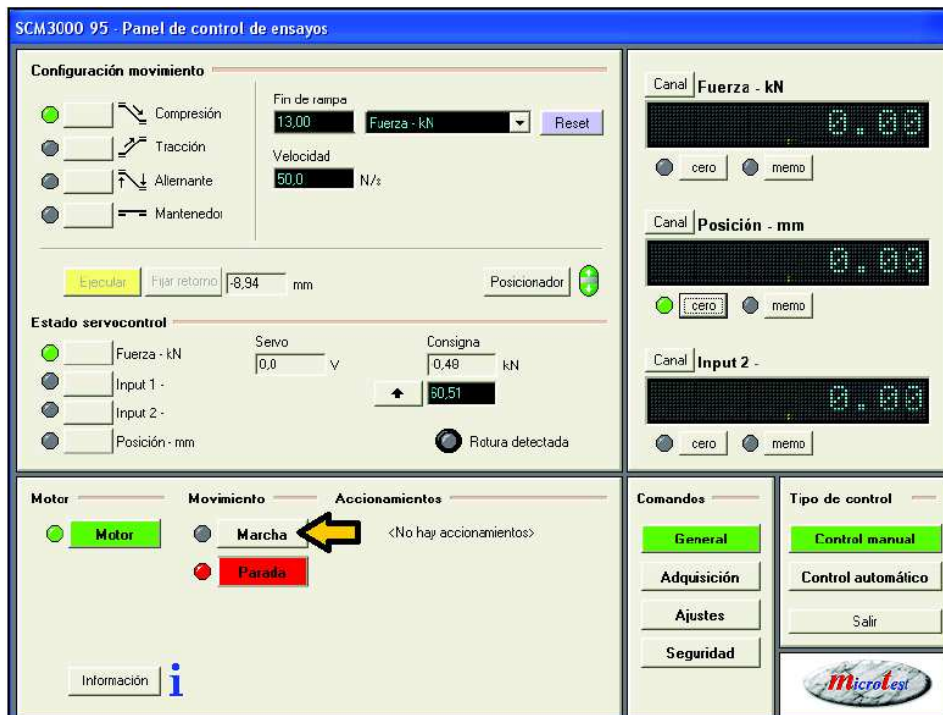


Figura 3-11. Panel de control de la máquina de ensayos

11. Alcanzada la carga máxima, esta se mantuvo estable durante aproximadamente 10 s y se verificó que las deformaciones permanecieran más o menos constantes.

12. Se suprime la carga y el puente móvil retorna a la posición de referencia. Seguidamente, se comprueba si las deformaciones han descendido a valores cercanos a cero, así como también si no presentan picos de deformación.

13. Finalizada la adquisición de datos por parte del System 7000, se procedió a medir nuevamente la temperatura del tubo y se apuntó su valor.

14. Se repitieron todos los puntos a partir del número 6, un total de 9 veces.

15. Con el control manual de la máquina de ensayos se movió el puente móvil para poder desmontar el tubo.

16. Finalizan los 10 ensayos y se completa la serie.

Se han realizado un total de 50 ensayos, es decir 1 serie de 10 repeticiones por tubo.

### 3.5. Determinación de las constantes elásticas del material

La inmensa mayoría de modelos ingenieriles utilizan las tensiones como patrón de medida. El modelo del anillo sometido a compresión (Apartado 2.8), es un modelo de tensión, en donde las variables de influencia son la carga y la geometría del anillo. Por tanto, las deformaciones experimentadas por las galgas extensométricas deben ser transformadas en tensiones, para luego poder ser comparadas con las predicciones del modelo teórico.

La conexión entre las deformaciones y las tensiones se hace a través de la ley de Hooke generalizada (Ecuación 3-2). En donde se establece, que las tensiones principales  $\sigma_p$  y  $\sigma_Q$ , dependen de las deformaciones principales  $\varepsilon_p$  y  $\varepsilon_Q$ , y además, de las constantes elásticas  $\nu$  y  $E$  (Coeficiente de Poisson y modulo de Young, respectivamente).

$$\sigma_p = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_p + \nu\varepsilon_Q) \quad \text{Ecuación 3-2}$$

$$\sigma_Q = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_Q + \nu\varepsilon_p) \quad \text{Ecuación 3-3}$$

Es por ello, que se ha procedido a calcular dichas constantes en cada uno de los tubos, a partir de probetas planas extraídas del material sobrante, de acuerdo con la norma la ASTM [25] (Figura 3-12). Su determinación se ha realizado siguiendo las recomendaciones de las normas ASTM [78, 79].

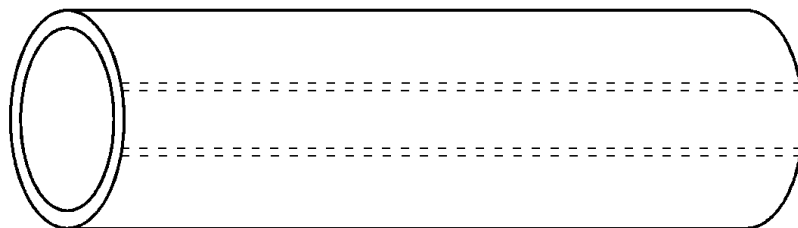


Figura 3-12. Extracción de probetas de sección rectangular a partir de los tubos

Las medidas finales de las probetas planas se muestran en la Tabla 3-3. Tanto el ancho como el espesor fueron medidos con un calibre digital de resolución  $\pm 0.01$  mm. La longitud final ha sido medida con una cinta métrica de resolución 1 mm. La carga máxima aplicada se ha determinado a partir de la resistencia a la fluencia suministrada por el fabricante ( $R_e=355$

MPa), para un factor de seguridad de 1.5. Se ha tomado como carga común para cada una de las probetas, la correspondiente a la de menor sección, es decir, la probeta número 1 (59 kN).

**Tabla 3-3. Medidas finales de las probetas rectangulares obtenidas a partir de los tubos**

Número de Tubo	Número de Probeta	Ancho (mm) ±0.01 mm	Espesor (mm) ±0.01 mm	Longitud (mm) ±0.5 mm
1	1	19.92	12.49	233
2	2	20.03	14.03	233
3	3	19.99	14.40	234
4	4	20.08	12.73	235.5
5	5	19.99	14.62	231.5

Se ha adherido una roseta similar a las empleadas en los ensayos de los tubos, alineando una de las galgas con la dirección longitudinal de la probeta. Para fijar la roseta se han marcado cada una de las probetas con un rayador de metal y una escuadra de precisión, que aseguraba la correcta alineación de las galgas con las direcciones principales, no apreciándose error alguno por mala alineación. En la Figura 3-13 se muestra a manera de ejemplo una de las probetas con la roseta rectangular adherida.



**Figura 3-13. Probeta plana para la determinación de las constantes elásticas**

Los ensayos de tracción sobre las probetas planas, fueron realizados por el Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Carlos III de Madrid. Las probetas han sido fijadas a la máquina de ensayos a través mordazas de cuña hidráulicas (Figura 3-14). Al igual que los ensayos realizados sobre los tubos, se han utilizado 2 equipos de adquisición, el de la máquina de ensayos (INSTRON 8800) y el Vishay 5000 encargado de registrar las deformaciones de las galgas extensométricas. La velocidad de adquisición de ambos equipos ha sido fijada en 10 Hz.





Figura 3-14. Sujeción de la probeta a la máquina de ensayos

En la Figura 3-15 se puede observar a modo de ejemplo, la gráfica de fuerza en función del tiempo de uno de los ensayos de las probetas planas. En total se han realizado 5 ciclos de carga, a una velocidad fija tanto en la aplicación de la fuerza como en la supresión de la misma de 0.3 mm/min; cumpliendo de esta manera con las exigencias de la norma ASTM [78] que recomienda aplicar como mínimo 3 ciclos de carga y emplear una velocidad de aplicación de la fuerza que garantice una exactitud adecuada del ensayo.

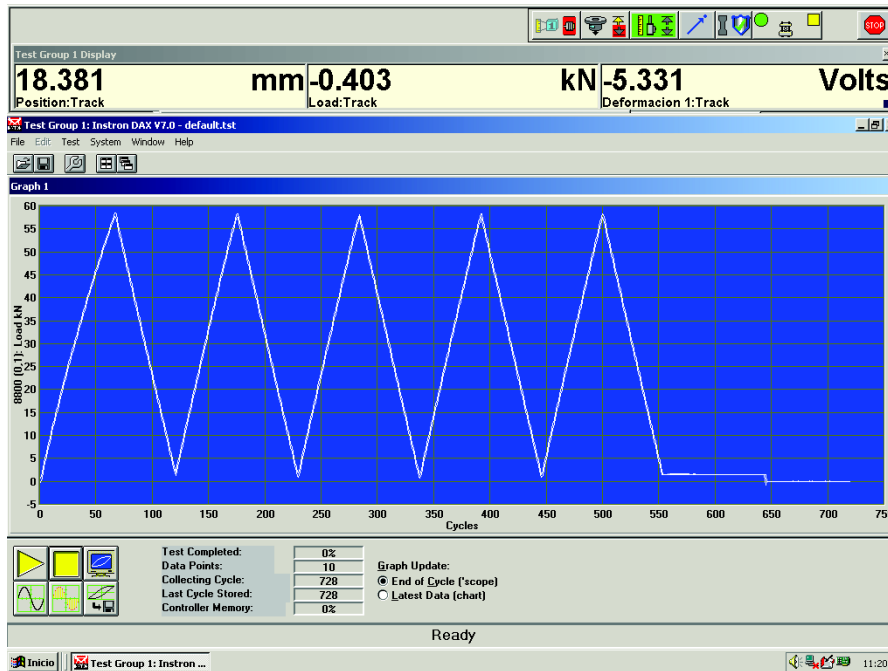


Figura 3-15. Programa de control y adquisición de la máquina de ensayos de tracción modelo INSTRON

Las normas ASTM antes nombradas, sólo consideran en el cómputo general de la incertidumbre, la debida a la desviación estándar de la media del total de ensayos y la variación de la pendiente, determinada a través de los mínimos cuadrados ordinarios. Quedando por parte del investigador la introducción de una tercera fuente, asociada a la instrumentación utilizada.

La determinación del módulo de Young y del coeficiente de Poisson, no pueden hacerse únicamente considerando la desviación estándar de la media, ya que el resultado obtenido sólo estaría informando de la repetibilidad del ensayo o del nivel de incertidumbre [4]. Por tanto, se estaría obviando la influencia de los parámetros de entrada sobre la incertidumbre total.

Por otro lado, tanto ASTM [78] como el manual de buenas prácticas del UNCERT [80] realizan un ajuste por mínimos cuadrados, en donde se obvia el peso que puede tener la incertidumbre de los parámetros de entrada en el cálculo de la desviación estándar de la pendiente, en concreto de la fuerza y el desplazamiento o en su defecto la deformación. Es decir, la desviación estándar de la pendiente únicamente toma en cuenta la variación entre puntos consecutivos a través de los residuos [78].

Sin embargo, la UNCERT [80] incrementa la incertidumbre final por medio de una incertidumbre combinada, compuesta por el resto de parámetros involucrados en el cálculo.

No obstante, hay una pérdida importante de información en cuanto a la varianza de la pendiente de la recta, debido a que se asume que las fuerzas y las deformaciones están exentas de varianza, algo que no es cierto.

Es por ello que en este trabajo de investigación se aplicará el método de los mínimos cuadrados ponderados [29], de manera que se considerará el comportamiento aleatorio de la varianza de los ejes cartesianos (Figura 3-16). Logrando con ello, que el resultado de las constantes elásticas esté acompañado de una incertidumbre combinada, formada por la desviación estándar y la incertidumbre de las pendientes.

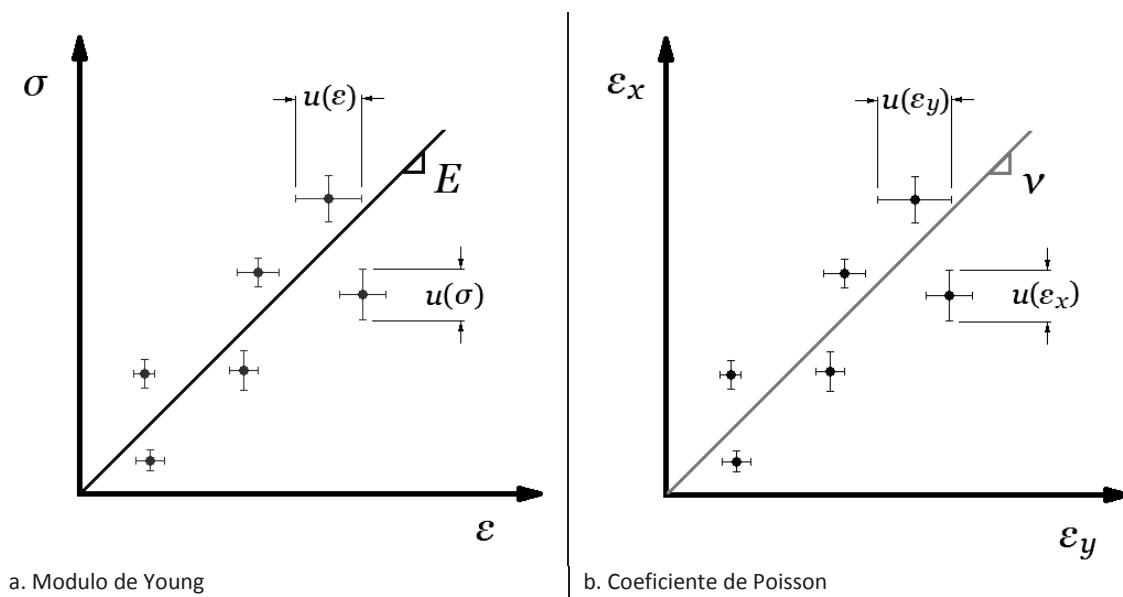


Figura 3-16. Aleatoriedad de la incertidumbre de los parámetros de entrada en el cálculo de  $E$  y  $\nu$

### 3.6. Modelo de incertidumbre de las constantes elásticas

Las fuentes de incertidumbre presentes en el cálculo del módulo de Young  $E$ , son la tensión y la deformación (Ecuación 3-4).

$$E = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_Q}$$

Ecuación 3-4

La tensión  $\sigma_p = P/A$  viene definida por la carga aplicada  $P$  y el área de la sección transversal  $A$  de la sección rectangular. Por tanto, la varianza combinada de la tensión será [80]:

$$u_c^2(\sigma_p) = u^2(P) + u^2(A) \quad \text{Ecuación 3-5}$$

Donde:

$$u^2(P) = \frac{0.44}{100} P, \text{ para una máquina de clase 1 [80].}$$

$$u^2(A) = [L \cdot u(b)]^2 + [b \cdot u(L)]^2$$

La determinación de la incertidumbre de las deformaciones se explica en el apartado 3.7

### 3.7. Determinación de las deformaciones principales con su incertidumbre

Para determinar la varianza de la deformación se ha empleado el modelo de error e incertidumbre de Montero [81], el cual se basa en los errores propios de la técnica extensométrica. La deformación libre de error, se consigue sustrayendo cada uno de los errores propios que acompañan a la técnica extensométrica [55]. Por tanto, la deformación corregida ha sido calculada con la siguiente expresión:

$$\varepsilon_i = \hat{\varepsilon}_i - E_W - E_T - E_{TS} \quad \text{Ecuación 3-6}$$

Tabla 3-4. Fuentes de error en la medición con galgas extensométricas resistivas [55]

**Error debido a la no linealidad del puente Wheatstone**

$$E_w = \hat{\varepsilon}_i - \frac{2\hat{\varepsilon}_i}{2 - F\hat{\varepsilon}_i}$$

Ecuación 3-7

$\varepsilon_i$ : Deformación indicada por el equipo de adquisición

F: Factor de galga

**Error debido a la temperatura**

$$E_T = \frac{2}{F[1 + \alpha_G(T_E - T_c)]} \cdot [\varepsilon_{T/0} + (\alpha_{s(B)} - \alpha_{s(A)}) \cdot (\Delta T)]$$

Ecuación 3-8

2: Factor de galga empleado por el fabricante para estimar la deformación aparente

$\alpha_G$ : Coeficiente de temperatura del factor de galga

$\varepsilon_{T/0}$ : Deformación aparente de la galga extensométrica para un factor de galga de 2

$\alpha_{s(B)}$ : Coeficiente de expansión térmica del material a ensayar

$\alpha_{s(A)}$ : coeficiente de expansión térmica del material utilizado por el fabricante

$\Delta T$ : Variación de temperatura con respecto a la temperatura estándar o de referencia

**Error debido a la sensibilidad transversal**

$$E_{TS,X} = \frac{K_t}{1 - K_t^2} \cdot [\hat{\varepsilon}_x (v_0 - K_t) + \hat{\varepsilon}_y (1 - v_0 K_t)]$$

Ecuación 3-9

$$E_{TS,Y} = \frac{K_t}{1 - K_t^2} \cdot [\hat{\varepsilon}_y (v_0 - K_t) + \hat{\varepsilon}_x (1 - v_0 K_t)]$$

Ecuación 3-10

$\hat{\varepsilon}_x, \hat{\varepsilon}_y$ : Deformaciones sin corregir pertenecientes a las galgas 1 y 2 de la roseta rectangular

$K_t$ : Factor de sensibilidad transversal

$v_0$ : 0.285

Y la varianza combinada de la deformación corregida ha sido formulada de la siguiente manera:

$$u_c^2(\varepsilon_i) = u^2(\hat{\varepsilon}_i) + u^2(E_{W,i}) + u^2(E_{T,i}) + u^2(E_{TS,i})$$

Ecuación 3-11

En la Tabla 3-5 se muestran las expresiones de la varianza de cada uno de los componentes de la Ecuación 3-11, según la investigación realizada por Montero [81].

Tabla 3-5. Varianza de las galgas extensométricas

Varianza	Formula
De la no adquisición	$u^2(\hat{\varepsilon}_i) = \frac{a^2}{3}$ $a=0.5 \mu\varepsilon$
De la no linealidad del puente	$u^2(E_{w,i}) = \left[ \frac{\partial E_{w,i}}{\partial \hat{\varepsilon}_i} u(\hat{\varepsilon}_i) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{w,i}}{\partial F} u(F) \right]^2$
De la temperatura	$u^2(E_{T,i}) = \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial F} u(F) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial \alpha_G} u(\alpha_G) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial T_E} u(T_E) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial T_c} u(T_c) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial \varepsilon_{T/0}} u(\varepsilon_{T/0}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial \alpha_{s(B)}} u(\alpha_{s(B)}) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{T,i}}{\partial \alpha_{s(A)}} u(\alpha_{s(A)}) \right]^2$
De la sensibilidad transversal	$u^2(E_{TS,i}) = \left[ \frac{\partial E_{TS,i}}{\partial v_0} u(v_0) \right]^2 + \left[ \frac{\partial E_{TS,i}}{\partial K_t} u(K_t) \right]^2 + \left[ \left  \frac{\partial E_{TS,i}}{\partial \hat{\varepsilon}_x} u(\hat{\varepsilon}_x) \right  + \left  \frac{\partial E_{TS,i}}{\partial \hat{\varepsilon}_y} u(\hat{\varepsilon}_y) \right  \right]^2$

Dado que las direcciones principales de las deformaciones son conocidas, se ha considerado que el ángulo de desfase  $\beta$  que forma la galga extensométrica con la dirección principal, representa el giro necesario para transformar las deformaciones corregidas  $\varepsilon_i$  en deformaciones principales (Ecuación 3-12) [67].

$$\varepsilon_{p,q} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \pm \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\cos(2\beta)} \tag{Ecuación 3-12}$$

Finalmente, la varianza combinada de la deformación máxima y mínima (Ecuación 3-13),  $\varepsilon_p$  y  $\varepsilon_q$ , respectivamente, se ha calculado aplicando la ley de propagación de incertidumbre [13] a la Ecuación 3-12.

$$u^2(\varepsilon_{p,q}) = \left[ \frac{\partial \varepsilon_{p,q}}{\partial \varepsilon_1} u(\varepsilon_1) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varepsilon_{p,q}}{\partial \varepsilon_2} u(\varepsilon_2) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \varepsilon_{p,q}}{\partial \beta} u(\beta) \right]^2 \tag{Ecuación 3-13}$$

### 3.8. Calculo del factor de concentración de tensiones experimental y de su incertidumbre

Para la validación experimental del modelo teórico es necesario conocer en la medida de lo posible, todas las fuentes de incertidumbre asociadas a los instrumentos y equipos utilizados en el ensayo. El modelo teórico de tensión circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  de la Ecuación 2-43, puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{4P}{\pi ID} K \quad \text{Ecuación 3-14}$$

Donde  $K$  es un parámetro Adimensional (Ecuación 3-15), conocido como factor de concentración de tensiones [69]. Dicho factor depende de la relación entre los diámetros interno y externo del anillo  $\rho$ , y del ángulo  $\theta$  que forma el punto de aplicación de la carga con cualquier otro punto alrededor del anillo, donde se quiera calcular la tensión (Figura 3-3) [68, 69, 73, 82].

$$K = \frac{1}{2} - \frac{1\rho^2}{2r^2} \left( \frac{1+r^2}{1-\rho^2} \right) - \frac{(1-r\cos\theta)\sin^2\theta}{(r^2+1-2r\cos\theta)^2} - \frac{(1+r\cos\theta)\sin^2\theta}{(r^2+1+2r\cos\theta)^2} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ n(n-1)c_n r^{n-2} + (n+2)(n+1)d_n r^n + n(n+1)c_n' r^{-n-2} + \right. \quad \text{Ecuación 3-15}$$

$$\left. + (n-2)(n-1)d_n' r^{-n} \right] \cos n\theta$$

Expresar el modelo teórico de esta manera ha permitido validar el factor de concentración de tensiones  $K$ , en lugar de cada valor de tensión circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$ . Por tanto, se ha definido un factor de concentración de tensiones experimental  $K_E$ , como la pendiente resultante entre la tensión circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  y la relación  $4P/\pi ID$  (Ecuación 3-1).

Como ya se ha mencionado con anterioridad, la comparación de los valores experimentales y teóricos debe incluir sus respectivas incertidumbres. Es por ello que para el cálculo de la pendiente experimental y su incertidumbre  $K_E \pm u(K_E)$ , se ha utilizado el método de los mínimos cuadrados totales ponderados expuesto en el apartado 3.12. Con esto, se ha logrado

verificar el peso que tiene la heterogeneidad de las varianzas de los puntos experimentales, pertenecientes a ambos ejes cartesianos, sobre la pendiente final.

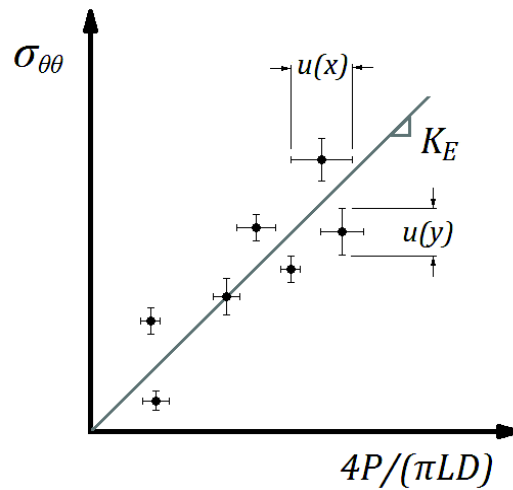


Figura 3-17. Representación del factor de concentración de tensiones experimental  $K_E$ , con las incertidumbres experimentales

Para realizar el ajuste con esta técnica, primero se ha calculado las varianzas tanto de la tensión  $\sigma_{\theta\theta}$  como de la relación  $4P / \pi ID$ , que representan los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente.

El cálculo de la tensión circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  se ha hecho a partir de las deformaciones principales, resultantes de la medición con galgas extensométricas (Ecuación 3-12). Para ello, se ha aplicado la ley de Hooke's generalizada (Ecuación 3-2). Donde se ha tomado  $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_p$  y las deformaciones mínima y máxima ( $\varepsilon_Q$  y  $\varepsilon_p$ ), son las deformaciones longitudinal y circunferencial, respectivamente (Ecuación 3-12).

Se ha aplicado la ley de propagación de incertidumbres [13] a la Ecuación 3-2, para obtener la expresión de la varianza combinada de la tensión circunferencial  $\sigma_p$ , la cual es:

$$u^2(\sigma_p) = \left[ \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_p} u(\varepsilon_p) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \sigma_p}{\partial \varepsilon_Q} u(\varepsilon_Q) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \sigma_p}{\partial E} u(E) \right]^2 + \left[ \frac{\partial \sigma_p}{\partial \nu} u(\nu) \right]^2 + 2 \frac{\partial \sigma_p}{\partial E} \frac{\partial \sigma_p}{\partial \nu} u(E, \nu)$$

Ecuación 3-16

Donde,



$$u(E, v) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (E_i - E)(v_i - v)$$

Para calcular la varianza del eje  $x$  ( $4P / \pi l D$ ) se ha aplicado la ley de propagación de incertidumbres [13], en donde, además se ha tomado en cuenta la correlación existente entre la longitud  $L$  y el diámetro  $D$ , debido a que han sido medidos con el mismo pie de rey. Por tanto, su varianza combinada queda expresada de la siguiente manera [83]:

$$u^2(x) = \left[ \frac{\partial X}{\partial P} u(P) \right]^2 + \left[ \left| \frac{\partial X}{\partial L} u(L) \right| + \left| \frac{\partial X}{\partial D} u(D) \right| \right]^2 \quad \text{Ecuación 3-17}$$

Una vez determinadas las varianzas  $u^2(\sigma_p)$  y  $u^2(x)$ , se ha procedido a calcular el factor de concentración de tensiones experimental  $K_{E,i}$ , para cada uno de los  $n=10$  ensayos realizados sobre cada tubo, según el método descrito en el apartado 3.12

Seguidamente, se ha calculado el factor de concentración de tensiones promedio  $\bar{K}_{E,r}$  de cada una de las rosetas que han sido instaladas en los tubos (Ecuación 3-18).

$$\bar{K}_{E,r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{E,i} \quad \text{Ecuación 3-18}$$

Y su incertidumbre asociada (Ecuación 3-21), que considera tanto la incertidumbre procedente de los 10 análisis de regresión realizados (Ecuación 3-19), así como también la debida a la desviación experimental de la media (Ecuación 3-20).

$$u(\bar{K}_E) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u(K_{E,i}) \quad \text{Ecuación 3-19}$$

$$s^2(\bar{K}_{E,r}) = \frac{\sum_{i=1}^n (K_{E,i} - \bar{K}_{E,r})^2}{n(n-1)} \quad \text{Ecuación 3-20}$$

$$u(\bar{K}_{E,r}) = \sqrt{u(\bar{K}_E)^2 + s^2(\bar{K}_{E,r})} \quad \text{Ecuación 3-21}$$

Finalmente, se ha calculado su incertidumbre expandida con un factor de cobertura  $k=2$ , para un nivel de confianza de aproximadamente 95%, según el anexo G de la GUM [13] (Ecuación 3-22).

$$U(\bar{K}_{E,r}) = 2u(\bar{K}_{E,r}) \quad \text{Ecuación 3-22}$$

La instalación de las galgas extensométricas a lo largo de cada uno de los tubos (Figura 3-4), ha permitido verificar como afecta la relación longitud vs diámetro, a la uniformidad de las tensiones circunferenciales  $\sigma_{\theta\theta}$ . Hay que recordar que el modelo teórico es una simplificación de la realidad, en donde se supone que cada rebanada del tubo experimenta igual tensión.

Para cuantificar como afecta dicha relación, se ha procedido a calcular un factor de concentración de tensiones experimental promedio ( $\bar{K}_E$ ), formado por los  $\bar{K}_{E,r}$  de cada una de las rosetas. Además, se ha estimado la incertidumbre asociada a dicho promedio, considerando que todos sus posibles valores pueden estar entre el mínimo y máximo factor  $\bar{K}_{E,r}$  calculado, asumiendo una distribución de tipo rectangular (Ecuación 3-23) [24].

$$u(\bar{K}_{E,av}) = \frac{\bar{K}_{E,r \max} - \bar{K}_{E,r \min}}{\sqrt{12}} \quad \text{Ecuación 3-23}$$

De esta manera,  $u(\bar{K}_{E,av})$  será un indicador de cuan alejado está el tubo analizado de la condición ideal del modelo teórico. El error asociado a la no uniformidad de la tensión circunferencial, se ha sido considerado nulo con varianza equiprobable  $u^2(\bar{K}_{E,av})$ .

### 3.9. Cálculo del factor de concentración de tensiones teórico y de su incertidumbre

En la comparación del factor de concentración de tensiones teórico con el modelo experimental, se ha tomado en consideración que la información suministrada por las galgas extensométricas, en realidad es un promedio de lo que sucede justo debajo de ellas. Por tanto, el factor de concentración de tensiones teórico ha sido expresado en función del ángulo de abrazado, que ocupa la galga sobre la superficie de cada uno de los tubos (Ecuación 3-24).

$$\bar{K} = \frac{1}{\Delta\phi} \int_{\Delta\phi} K d\phi$$

Ecuación 3-24

La resolución de la Ecuación 3-24, requiere el desarrollo de la suma infinita de la Ecuación 3-15. Por otro lado, la aplicación de la ley de propagación de incertidumbres es poco factible, debido a que la expresión no es fácilmente derivable.

Por lo dicho en el párrafo anterior, se ha decidido calcular el factor de concentración de tensiones teórico con su incertidumbre, a través de la implementación del procedimiento de Monte Carlo adaptable, según la GUM [24].

El procedimiento de Monte Carlo adaptable desarrollado en la presente tesis doctoral se muestra en la Figura 3-18.

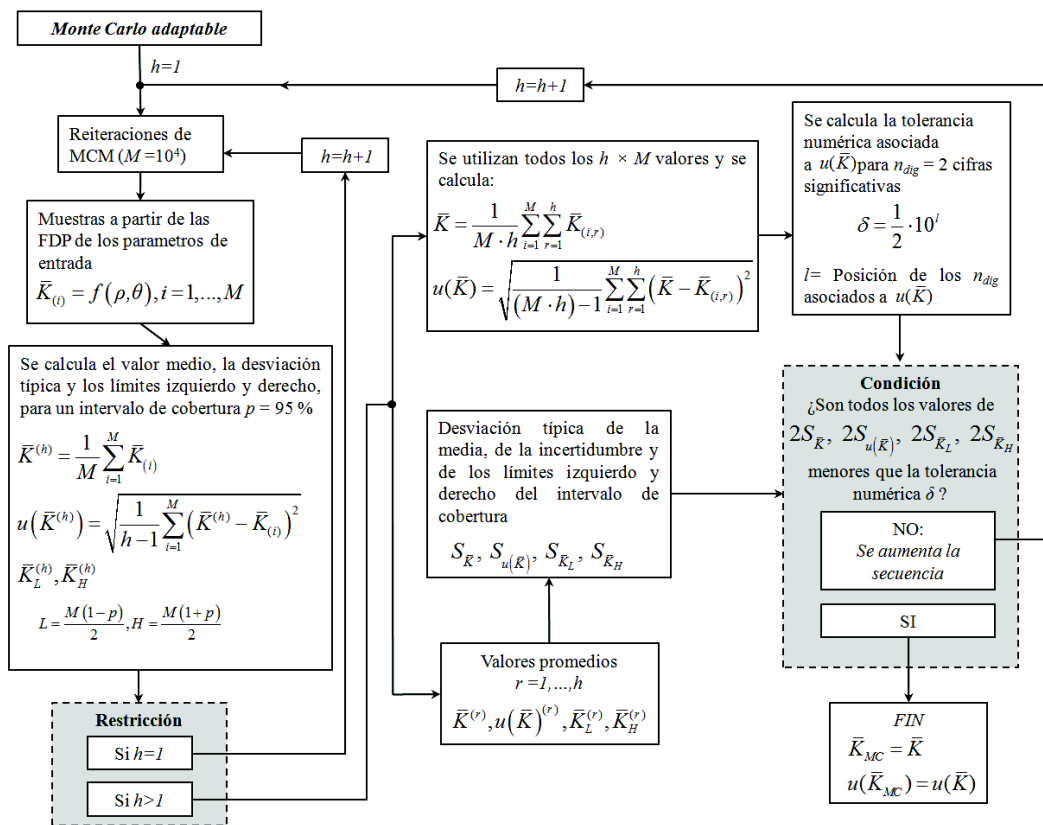


Figura 3-18. Procedimiento de Monte Carlo adaptable para el cálculo y evaluación de la incertidumbre teórica del factor de concentración de tensiones, según GUM [24]

El procedimiento de Monte Carlo adaptable consiste en la realización de un número creciente de reiteraciones ( $h$ ) de Monte Carlo, hasta que los resultados de interés, en este caso  $\bar{K}$ , se hayan estabilizado en sentido estadístico [24].

En el sentido más estricto del procedimiento, se dice que el resultado numérico se ha estabilizado cuando: tanto el doble de su desviación típica, como de su incertidumbre, y de sus límites derecho e izquierdo, pertenecientes al intervalo de cobertura seleccionado  $(2s_K, 2s_{u(K)}, 2s_{K_L}, 2s_{K_H})$  son inferiores que la tolerancia numérica asociada a la desviación típica de  $u(\bar{K})$ . Según la GUM [24] la tolerancia numérica es  $\delta=0.5 \cdot 10^l$ .

Donde  $l$  representa la posición de la cifras significativas  $n_{dig}$  consideradas como imprescindibles, asociadas a  $u(\bar{K})$ . En este caso se ha considerado que la incertidumbre teórica  $u(\bar{K})$  tendrá  $n_{dig} = 2$  cifras significativas.

Una vez alcanzada la tolerancia exigida, se utilizan todos los  $h \times M$  valores obtenidos del modelo para calcular  $\bar{K}$  y  $u(\bar{K}_{MC})$ , para un intervalo de cobertura de aproximadamente 95%, es decir, para  $k = 2$  [24]. Esto debido, a que las funciones de probabilidad de las variables del modelo ( $D$ ,  $d$  y  $\theta$ ) son normales, ya que se cuenta con los certificados de calibración de los instrumentos utilizados en su caracterización.

### 3.10. Mejora de las predicciones teóricas a través de un modelo de incertidumbre

Las posibles variaciones del factor de concentración de tensiones experimental a lo largo de la longitud del tubo, se deben a efectos reales no contemplados en el modelo teórico. Dependiendo de la relación longitud vs diámetro ( $L/D$ ), la distribución tiende a ser más uniforme, acercándose a la condición ideal del modelo analizado.

Incluir dichas variaciones directamente en el modelo, a través de la introducción de nuevas variables no es tarea fácil. En su defecto, se ha optado por mejorar las predicciones realizadas a través de un modelo de incertidumbre, compuesto por las incertidumbres propias del modelo teórico  $u(\bar{K}_{MC})$  (Apartado 3.9) y la incertidumbre debida al promediado de los  $\bar{K}_{E,r}$  a lo largo del tubo (Ecuación 3-23).

La incertidumbre combinada del modelo teórico en realidad será:

$$u(\bar{K}) = \sqrt{u^2(\bar{K}_{MC}) + u^2(\bar{K}_{E,av})}$$

Ecuación 3-25

De esta manera, el valor calculado por el modelo teórico no se ve afectado y se mejora el rango de posibles valores que pueden ser fácilmente asociados al resultado teórico, cuando el modelo experimental se aleja del caso ideal.

### 3.11. Identificación de las fuentes de incertidumbre

La validación o verificación de cualquier modelo teórico requiere la identificación y cuantificación de las incertidumbres asociadas a los resultados experimentales y a las predicciones realizadas con dicho modelo.

Para identificar las fuentes de incertidumbre, hay que tomar en cuenta todos los parámetros que son necesarios para la correcta realización del ensayo experimental. No solo basta con considerar los que directamente afectan a la respuesta del sistema, sino los que forman parte de cada una de las correcciones realizadas en el tratamiento de datos; como por ejemplo las fuentes potenciales de error inherentes a la técnica de medición que se esté empleando.

En la Tabla 3-6 se muestran cada uno de las variables involucradas en el ensayo experimental llevado a cabo en esta tesis doctoral. El número de los subíndices, por ejemplo el de la temperaturas  $T_{E,i}$ , se corresponde con la numeración de cada uno de los tubos de la Tabla 3-1.

Tabla 3-6. Parámetros asociados al modelo teórico y experimental

Variable	Valor	Unidades	Tolerancia	Semirango ( $\alpha$ )	Incertidumbre ( $u$ )
$F$	2.10	Adimensional	$\pm 1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$5.77 \times 10^{-3}$
$K_t$	$1.00 \times 10^{-3}$	Adimensional	$-1.00 \times 10^{-3}$	$1.00 \times 10^{-3}$	$5.77 \times 10^{-4}$
$\alpha_G$	$1.00 \times 10^{-2}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	$\pm 5.00 \times 10^{-5}$	$5.00 \times 10^{-5}$	$2.89 \times 10^{-5}$
$\nu_0$	0.285	Adimensional	$\pm 1.00 \times 10^{-2}$	$1.00 \times 10^{-2}$	$5.77 \times 10^{-3}$
$\beta$	$-1.05 \times 10^{-2} \leq \beta \leq 1.75 \times 10^{-2}$	Radianes	$\pm 8.73 \times 10^{-4}$	-	$9.60 \times 10^{-4}$
$L$	Ver Tabla 3-1	mm	$\pm 1.00 \times 10^{-1}$	-	$2.15 \times 10^{-2}$
$D$	Ver Tabla 3-1	mm	$\pm 5.00 \times 10^{-1}$	-	$2.89 \times 10^{-2}$
$T_{E,1}$	21				
$T_{E,2}$	21				
$T_{E,3}$	23	$^{\circ}\text{C}$	$\pm 1.00$	1.00	$5.77 \times 10^{-1}$
$T_{E,4}$	25				
$T_{E,5}$	21				
$\varepsilon_{T/0,1}$	$3.80 \times 10^{-1}$				
$\varepsilon_{T/0,2}$	$3.80 \times 10^{-1}$				
$\varepsilon_{T/0,3}$	$8.96 \times 10^{-1}$	$\mu\text{m}/\text{m}$	-	-	$8.50 \times 10^{-1}$
$\varepsilon_{T/0,4}$	1.09				$(\mu\text{m}/\text{m})/^{\circ}\text{C}$
$\varepsilon_{T/0,5}$	$3.80 \times 10^{-1}$				
$P$	Ver Tabla 3-1	kN	-	-	$2.5 \times 10^{-3}P$
$T_C$	23	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	-	-	-
$\alpha_{s(A)}$	$11.8 \times 10^{-6}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	-	-	-
$\alpha_{s(B)}$	$11.7 \times 10^{-6}$	$^{\circ}\text{C}^{-1}$	-	-	-

### 3.12. Algoritmo de ajuste utilizado en la regresión

Para el cálculo tanto de las constantes elásticas del material (Apartado 3.5), como del factor de concentración de tensiones experimental (Apartado 3.8), se ha utilizado el algoritmo propuesto por Williamson-York [29] basado en el método de los mínimos cuadrados totales ponderados.

El algoritmo de Williamson-York [29] es método iterativo que sirve para estimar la línea de mejor ajuste, cuando los puntos pertenecientes a ambos ejes cartesianos tienen incertidumbre y además, esta no es constante. Es un algoritmo ampliamente utilizado, debido a que se ha demostrado que la pendiente estimada a través del mismo tiende hacia la solución correcta [84, 85, 86].

Para aplicar el método de los mínimos cuadrados totales ponderados, primero se deben calcular las varianzas presentes en el ajuste de la pendiente. Además, se debe asignar un valor inicial a la pendiente, que puede ser calculado a través del método de los mínimos cuadrados convencionales u ordinarios [84].

Una vez estimadas las varianzas de los ejes X e Y ( $v_i$  y  $u_i$ ), el siguiente paso es calcular la repercusión que tiene la varianza de cada uno de los puntos sobre la pendiente inicial  $b$ , es decir el peso (Ecuación 3-26).

$$W_i = \frac{1}{v_i + (b^2 u_i)} \quad \text{Ecuación 3-26}$$

Seguidamente, se calcula la media ponderada tanto del eje X como del eje Y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_i W_i X_i}{\sum_i W_i} \quad \text{Ecuación 3-27}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_i W_i Y_i}{\sum_i W_i}$$

Y se computa la desviación de cada uno de los puntos (Ecuación 3-28), con respecto a la media ponderada.

$$X'_i = X_i - \bar{X} \quad \text{Ecuación 3-28}$$

$$Y'_i = Y_i - \bar{Y}$$

Finalmente, se procede a recalcular el nuevo valor de la pendiente (Ecuación 3-29).

$$b_N = \frac{\sum_i W_i z_i Y'_i}{\sum_i W_i z_i X'_i} \quad \text{Ecuación 3-29}$$

Donde,

$$z_i = W_i \left[ (v_i X'_i) + (K_w u_i Y'_i) \right]$$

El proceso de cálculo se repite hasta que la diferencia entre el valor de la nueva pendiente  $b_N$ , con respecto a su inmediato anterior  $b_i$ , sea inferior a la tolerancia impuesta. En este trabajo de investigación la tolerancia ha sido fijada en  $10^{-6}$ . De esta manera, se ha asegurado una alta precisión en el resultado final.

Una vez lograda la convergencia de la pendiente, se calcula su varianza con la siguiente expresión [29]:

$$u^2(b_N) = Q^2 \sum_i W_i^2 (X_i'^2 v_i + Y_i'^2 u_i)$$

Donde:

$$Q = \frac{1}{\sum_i W_i \left[ \frac{X_i' Y_i'}{b'} + 4 z_i' (z_i - X_i') \right]}$$

$$z_i' = z_i - \bar{z}$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_i W_i z_i}{\sum_i W_i}$$

### 3.13. Estadístico utilizado en la validación experimental del modelo

La validación experimental de cualquier modelo, requiere la cuantificación de las diferencias observadas y de sus incertidumbres. Sólo de esta manera, se puede verificar si las predicciones reproducen con cierta fidelidad las condiciones de ensayo [4, 5]. Todo proceso de validación o verificación que ignore las incertidumbres, se le considera una validación subjetiva basada en la experiencia del analista [3, 36].

La determinación del factor de concentración de tensiones experimental  $\bar{K}_E$  (Apartado 3.13), ha permitido reducir el caso estudiado a una validación univariante (Apartado 2.3.2.1). En donde, se compara el factor de concentración de tensiones teórico con la pendiente experimental.



Dado que los límites de confianza asociados a las validaciones experimentales están claramente definidos (90 – 95%) [4, 36]. En este trabajo de investigación se propone utilizar el índice de compatibilidad  $E_N$ , empleado comúnmente en la inter-comparación de laboratorios [6], como herramienta estadística para la aceptación o rechazo del modelo analizado (Ecuación 3-30).

$$E_N = \frac{|\bar{K} - \bar{K}_E|}{k \cdot \sqrt{u^2(\bar{K}) + u^2(\bar{K}_E)}} = \frac{|Error|}{U(Error)} \quad \text{Ecuación 3-30}$$

La representación gráfica del índice de compatibilidad de la Ecuación 3-30, se muestra en la Figura 3-19.

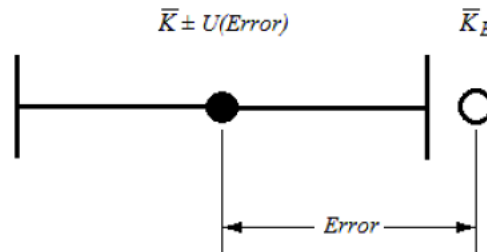


Figura 3-19. Índice de compatibilidad propuesto para la validación experimental del modelo

Para aceptar el modelo teórico es necesario que el valor experimental, que en este caso es el factor de concentración de tensiones  $\bar{K}_E$ , se encuentre ubicado entre los límites del valor teórico en conjunto con la incertidumbre global, es decir,  $\bar{K} \pm U(Error)$ . Cuando esto sucede, el valor del estadístico  $E_N$  estará comprendido entre 0 y 1.

Se dirá que el modelo teórico reproduce los resultados experimentales, sí  $E_N < 1$ . Con la condición de que las incertidumbres sean estimadas de acuerdo a la guía para la expresión de la incertidumbre de medida [13, 24], según la norma ISO 13528:2005 [6].

Un valor de  $E_N$  mayor que la unidad indica que no existe un solapamiento entre la diferencia observada y la incertidumbre expandida asociada; que es el caso representado en la Figura 3-19. Por tanto, se concluye que los resultados no son compatibles, es decir, no representan al mismo mesurando.

Nótese, que la relación entre el índice de compatibilidad  $E_N$  y el valor del estadístico  $z_{crítico}$  de una distribución normal, se expresa de la siguiente manera [6]:

$$E_N = \frac{|Error|}{U(Error)} = \frac{|\bar{K} - \bar{K}_E|}{k \cdot \sqrt{u^2(\bar{K}) + u^2(\bar{K}_E)}} = \frac{z_{crítico}}{k} \quad \text{Ecuación 3-31}$$

Donde:

$$z_{crítico} = \frac{|\bar{K} - \bar{K}_E|}{\sqrt{u^2(\bar{K}) + u^2(\bar{K}_E)}}$$

Es por ello, que al emplear la incertidumbre expandida del error en el denominador, como en el  $E_N$ , en lugar de la incertidumbre típica como en el caso del  $z_{crítico}$ , el rango de aceptación del modelo analizado quedará comprendido entre 0 y 1.

### 3.14. Indicador de la consistencia de los resultados experimentales con el tamaño de la muestra analizada

En la verificación y validación experimental se dice que no existe evidencia estadística para rechazar el modelo, cuando al menos una de las predicciones coincide con los resultados experimentales [4].

En efecto cuando esto sucede, se suele realizar un análisis un poco más completo, en donde se considera que la varianza entre puntos consecutivos no es independiente [87], sino que cada punto está correlacionado [34]. Aunque también, se podría utilizar el método de validación propuesto por Luis [40] descrito en el apartado 2.3.2.3.

Considérese el caso en el que se ha realizado la validación de un modelo, a través de la comparación con resultados experimentales, provenientes de la preparación de una muestra experimental comprendida entre 5 y 10 especímenes. ¿Qué se debe hacer sí en al menos una de las muestras analizadas, los resultados experimentales y teóricos no son compatibles?

No se ha encontrado en la literatura una metodología que ayude a responder la cuestión antes planteada. Es por ello, que en este apartado se propone un nuevo procedimiento que sirve para verificar como afectan los resultados fallidos, a los intervalos de cobertura del global analizado. Para ello, se ha utilizado una técnica de re-muestreo que ha permitido construir la distribución de probabilidad, en función de los resultados obtenidos; que en conjunto con el estadístico de validación expuesto en el apartado anterior, ha ayudado a decidir si se aceptaba el modelo o si era necesario repetir los ensayos o aumentar la muestra analizada.

La técnica de re-muestreo propuesta para la obtención de un indicador de la consistencia de los resultados experimentales con el tamaño de la muestra analizada, es la conocida como Bootstrapping [7].

El Bootstrapping es una técnica de re-muestreo con reposición que consiste en la generación de sub-muestras adicionales, a partir de la muestra estudiada [88]. Es un método sencillo, ideal cuando el tamaño de la muestra es pequeña [89]. Permite la construcción de los intervalos de cobertura asociados a los resultados, sin necesidad de atribuir una función de probabilidad.

Al utilizar dicha técnica en conjunto con el estadístico de la Ecuación 3-30, se dirá que el modelo teórico coincide con los resultados experimentales, si los límites del promedio de todos los índices de compatibilidad calculados, están comprendidos entre 0 y 1, para un intervalo de cobertura perteneciente a un nivel de confianza del 95%.

La aplicación de la técnica descrita, aplicada a los índices  $E_N$  de los 5 tubos estudiados se detalla a continuación:

- Se generan  $B = 10\,000$  muestras con reposición a partir de los 5  $|E_N|$  obtenidos, según Hesterberg [8].
- Se calcula el estadístico de interés, en este caso se ha seleccionado la media del total de los índices de compatibilidad  $(|\bar{E}_N|)$ .
- Se ordenan las  $|\bar{E}_N|$  muestras calculadas en orden creciente y se representa su distribución de frecuencias [89], así como también se calculan sus límites inferior  $\bar{E}_{NL}$  y superior  $\bar{E}_{NH}$  para un intervalo de cobertura de  $100p\%$  (Ecuación 3-30).

$$\bar{E}_{NL} = |\bar{E}_{N(r)}|$$

$$\bar{E}_{NH} = |\bar{E}_{N(r+q)}|$$

Ecuación 3-32

Donde:

$$r = (n - q) / 2$$

$$q = pn$$

$$p = 0.95$$

El término  $r$  debe ser entero, en caso de no serlo, se ha de tomar el valor entero a partir de la expresión  $r = (n - q + 1) / 2$ , según GUM [24].

La Figura 3-20 muestra el diagrama de flujo del procedimiento de aceptación de los resultados, planteado en esta tesis doctoral.

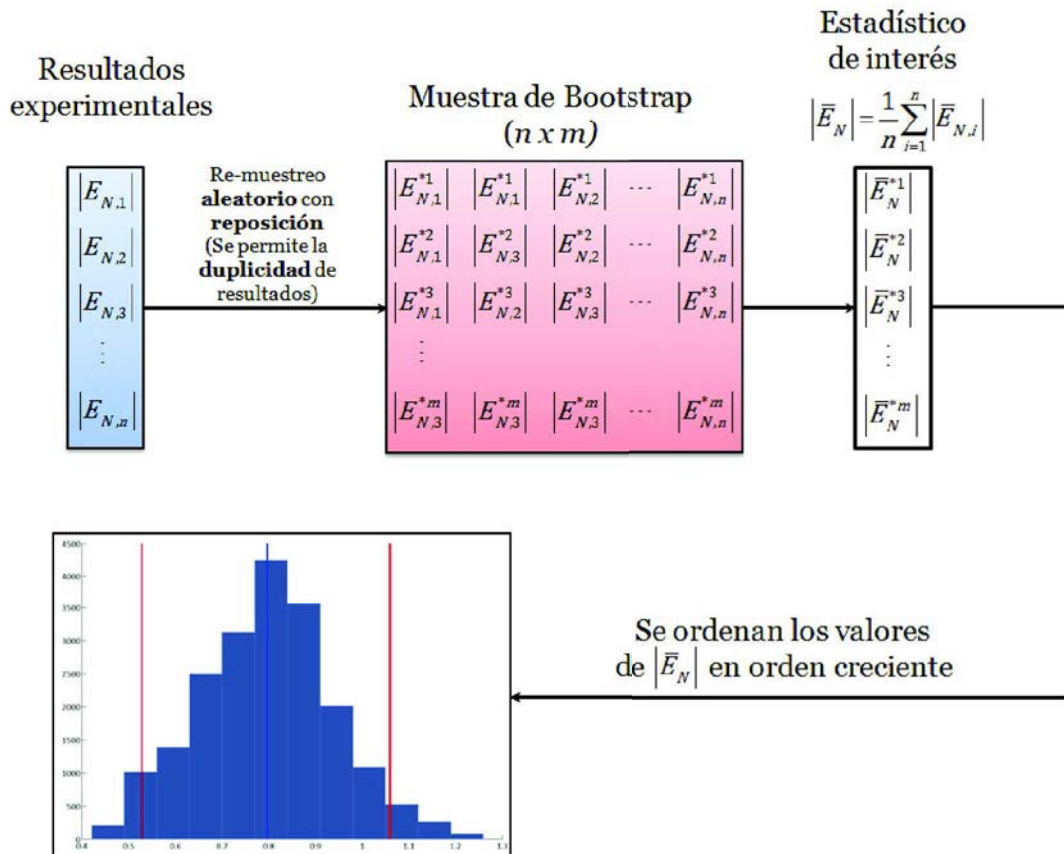


Figura 3-20. Método de Bootstrapping aplicado en conjunto con el índice de compatibilidad  $E_N$

---

### 3.15. Verificación del comportamiento del modelo que ha sido validado

---

El procedimiento de validación propuesto en esta tesis doctoral consta de dos fases. En la primera, se comprueba la consistencia de los resultados experimentales con el tamaño de la muestra analizada, y en la segunda se verifica la tendencia de comportamiento del modelo teórico.

En la primera fase (Apartado 3.14), se busca minimizar el riesgo de aceptar un modelo que no es un buen estimador de la realidad. Para ello, se ha propuesto realizar un re-muestreo con reposición en valor absoluto del total de  $E_N$  obtenidos, logrando reducir el rango de aceptación un 50%. Esto debido básicamente a que el intervalo de aceptación, está comprendido entre 0 y 1 en lugar de -1 y 1.

Una vez que se ha cumplido con el criterio de aceptación planteado en el apartado anterior; el siguiente paso consiste en analizar el tipo de comportamiento mostrado por el modelo, con miras a determinar si tiende a sobre-estimar o sub-estimar el caso real.

Para analizar el comportamiento del modelo teórico, en esta tesis doctoral se propone repetir el re-muestreo con reposición del Apartado 3.14, pero esta vez sin el valor absoluto de todos los  $E_N$  disponibles, de manera que permita comprobar cómo afecta la tendencia exhibida al cálculo del factor de seguridad.

El procedimiento para la definición del tipo del comportamiento del modelo, previamente aceptado, se define a continuación:

- Se calcula el valor de los índices de compatibilidad (Ecuación 3-30) sin valor absoluto.
- Se repite el re-muestro con reposición descrito anteriormente (Apartado 3.14).
- Se observa la posición del valor medio de los  $\bar{E}_N$  en el intervalo [-1,1].

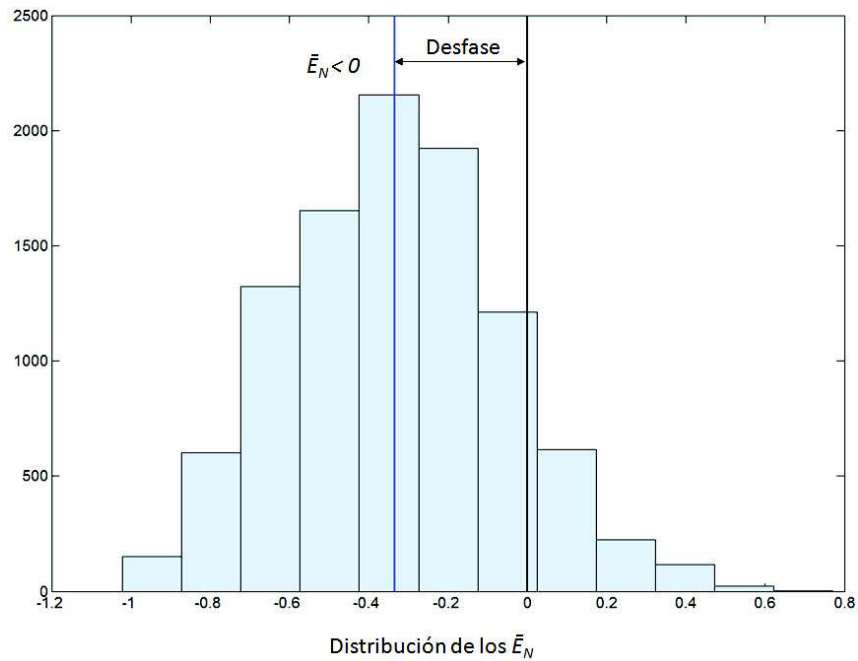


Figura 3-21. Ejemplo del histograma de los índices de compatibilidad medios  $\bar{E}_N$  de un modelo sub-estimador en el intervalo  $[-1, 1]$

En este trabajo de investigación se dirá que el modelo es sub-estimador si la media de los índices de compatibilidad  $\bar{E}_N$  de la validación sin valor absoluto, está comprendida entre -1 y 0 (Figura 3-21). Por el contrario, se indicará que el modelo es sobre-estimador si la media se sitúa entre 0 y 1 (Figura 3-24).

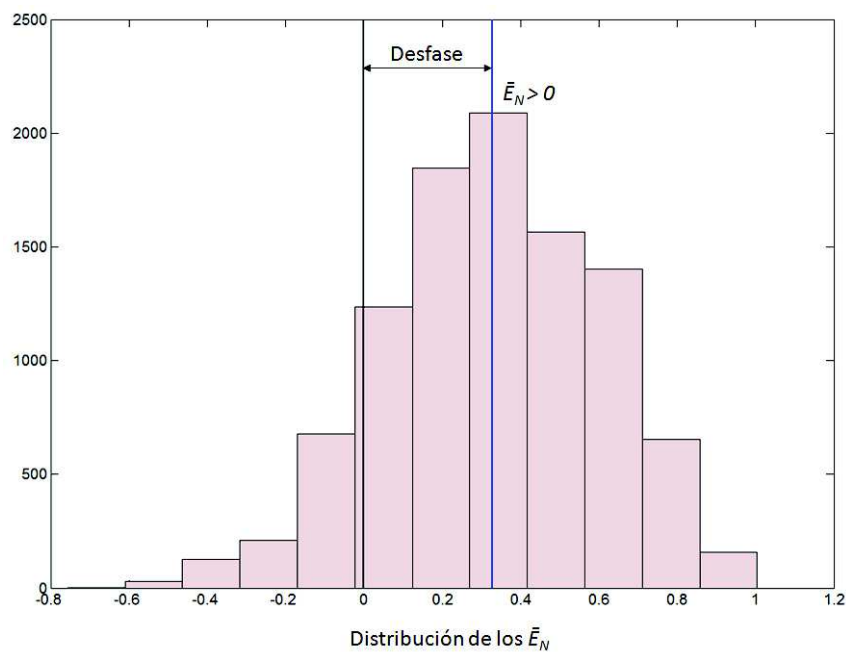


Figura 3-22. Ejemplo del histograma de los índices de compatibilidad medios  $\bar{E}_N$  de un modelo sobre-estimador en el intervalo  $[-1, 1]$

### 3.16. Factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico

La definición clásica del factor de seguridad considera a las variables involucradas como deterministas (Ecuación 3-33) [9].

$$FS = \frac{S}{\sigma} \quad \text{Ecuación 3-33}$$

Por tanto, si la tensión de diseño  $\sigma$  es igual a la resistencia del material  $S$ , el factor de seguridad es igual a la unidad (Ecuación 3-34).

$$\begin{aligned} \sigma - S &= 0 \\ FS &= 1 \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3-34}$$

Esta definición no tiene en cuenta la naturaleza probabilística de las variables involucradas. Sí se considera el comportamiento aleatorio acotado de las variables ( $\sigma$  y  $S$ ), expresado a través de sus incertidumbres ( $u(\sigma)$  y  $u(S)$ ), su diferencia tendrá una incertidumbre asociada (Ecuación 3-35).

$$\begin{aligned} Diff &= \sigma - S \\ u(Diff) &= \sqrt{u^2(\sigma) + u^2(S)} \end{aligned} \quad \text{Ecuación 3-35}$$

La diferencia entre la tensión admisible y la tensión de diseño, podría relacionarse con la incertidumbre global expresada a través de  $u(Diff)$ . Dado que el estadístico de validación  $E_N$  ya considera esta relación (Apartado 3.13), se propone relacionar dicha magnitud con el factor de seguridad.

Hay que recordar que el índice de compatibilidad expresa si dos magnitudes representan a un mismo mesurando. Para ello, se calcula el ratio entre el valor absoluto de la diferencia de ambas magnitudes, con la incertidumbre combinada expandida por medio de un factor de cobertura  $k$ , para a un nivel de confianza  $p = (1 - \alpha) \cdot 100\%$ . Por tanto, el índice de compatibilidad aplicado a la Ecuación 3-35 queda expresado de la siguiente manera:

$$E_N = \frac{|\sigma - S|}{k\sqrt{u^2(\sigma) + u^2(S)}} = \frac{|\sigma - S|}{k \cdot u(\sigma_{Global})} \quad \text{Ecuación 3-36}$$

Donde,  $u(\sigma_{Global}) = u(Diff)$

Recuérdese que en la validación de modelos propuesta en el apartado 3.13, un valor de  $E_N < 1$  indica que la diferencia en conjunto con su incertidumbre expandida, están representando al mismo mesurando (Figura 3-23).

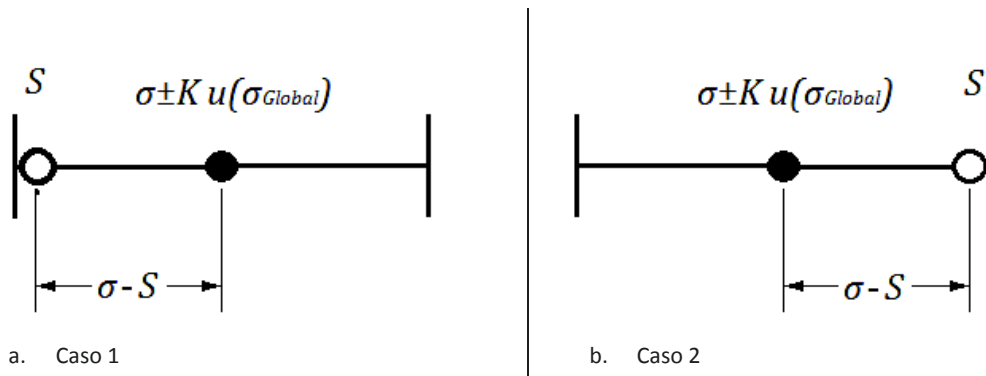


Figura 3-23. Representación gráfica del índice de compatibilidad empleado en la validación experimental, para un modelo compatible con el resultado experimental ( $E_N < 1$ )

Mientras que si  $E_N > 1$ , se dice que el modelo teórico no se corresponde con el ensayo experimental (Figura 3-24).

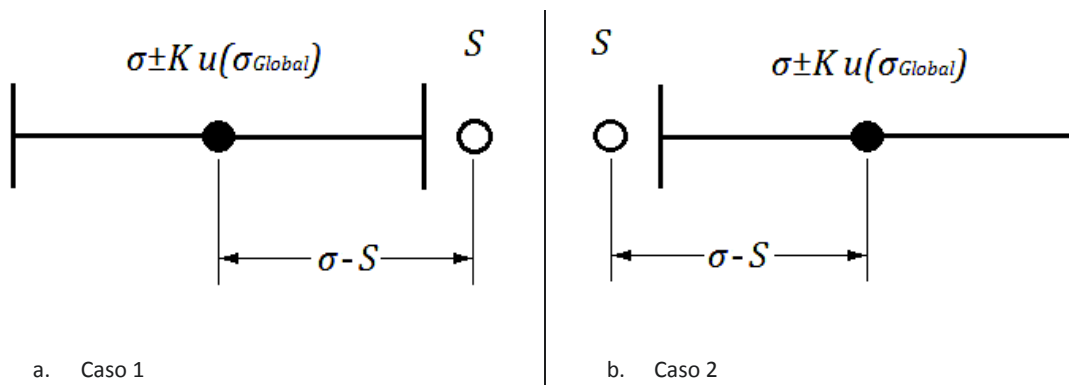


Figura 3-24. Representación gráfica del índice de compatibilidad empleado en la validación experimental, para un modelo no compatible con el resultado experimental ( $E_N > 1$ )

En conjunto con el nuevo estadístico de validación, en esta tesis doctoral se ha propuesto que se calcule el valor promedio del total de índices de compatibilidad de muestras ensayadas, según el procedimiento expuesto en el apartado 3.14. Así pues, se concluirá que el modelo es



un buen estimador de la realidad, si el índice de compatibilidad promedio  $|\bar{E}_N|$  en conjunto con sus límites superior  $\bar{E}_{NH}$  e inferior  $\bar{E}_{NL}$  es menor que 1.

La condición ideal en la validación experimental es aquella en la que el modelo representa fielmente la situación real. En este caso, las esperanzas matemáticas de la tensión de diseño  $\sigma$  y de la resistencia admisible  $S$ , son exactamente iguales (Figura 3-25). No obstante, es poco probable que se pueda tener un modelo, en donde la media de las predicciones sea exactamente igual que la media experimental.

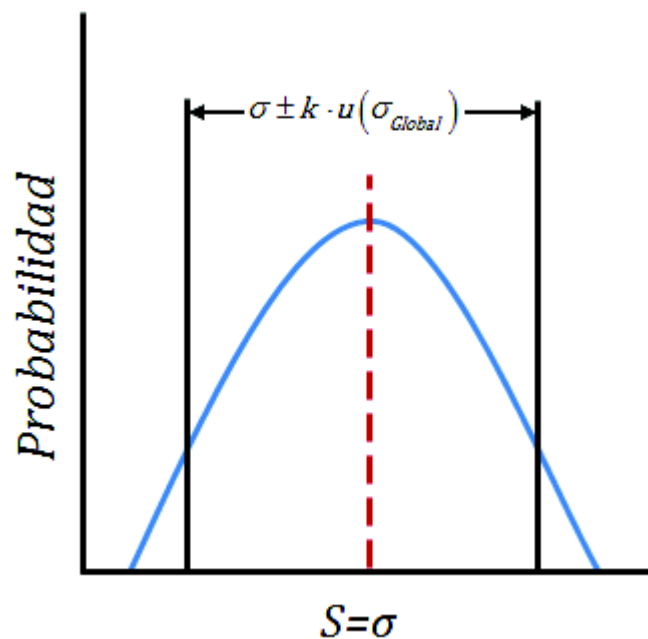


Figura 3-25. Representación ideal en donde el modelo representa de manera exacta a la realidad

El cálculo del factor de seguridad estadístico ya contempla la introducción de las incertidumbres, calculadas a partir del modelo teórico y de la resistencia admisible del material [9, 10, 15]. Sin embargo, no tiene en cuenta si el modelo es un buen estimador de la realidad.

Es por ello que en esta tesis doctoral se propone relacionar la validación del modelo teórico (Apartado 3.13-3.15) con el factor de seguridad estadístico, con el objetivo de mejorar su exactitud, de manera que se pueda caracterizar el factor de seguridad en función del resultado de la validación. Para ello, se ha de analizar el comportamiento que ha exhibido el modelo en el proceso de validación (Apartado 3.15), es decir, si tiende a sobre-estimar o sub-estimar el caso real (Caso 1 y caso 2 de la Figura 3-23, respectivamente).

Desde el punto de vista de la seguridad estructural al ser el comportamiento de la tensión de diseño y de la resistencia del material de tipo probabilístico, existe una incertidumbre global expandida  $k \cdot u(\sigma_{Global})$  asociada que no puede ser ignorada. Partiendo de la suposición idealizada en la que el modelo representa de manera exacta a la situación real (Figura 3-25); para estar del lado de la seguridad, es decir, para que el componente a diseñar se comporte de acuerdo con la probabilidad de fallo seleccionada, la tensión de diseño en conjunto con la incertidumbre global expandida  $\sigma \pm k \cdot u(\sigma_{Global})$  debe desplazarse hacia la izquierda, de manera que los límites definidos por la expresión  $\sigma \pm k \cdot u(\sigma_{Global})$  no sobrepasen la resistencia admisible  $S$  (Figura 3-26) para un nivel de confianza dado.

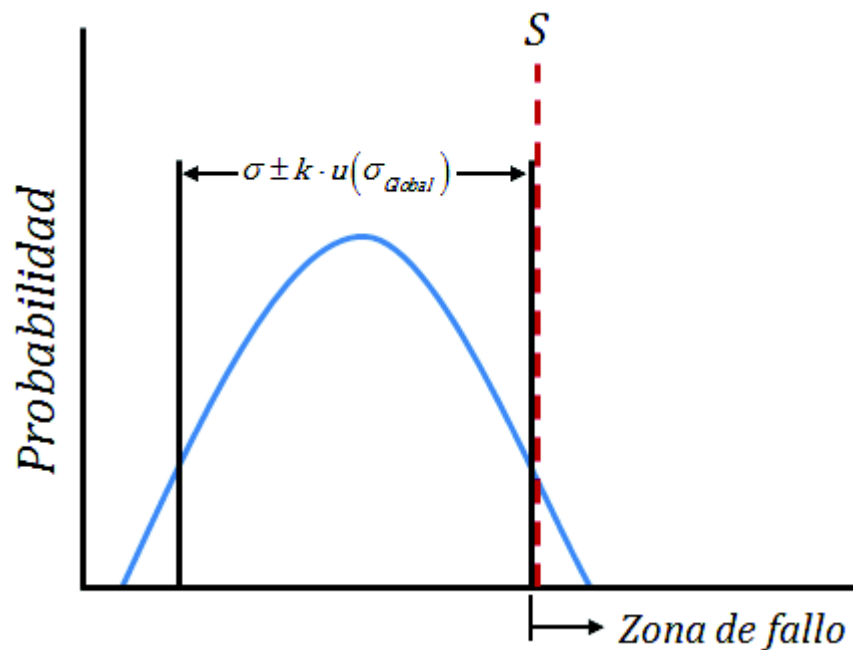


Figura 3-26. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo ideal

En la Figura 3-26 puede apreciarse que la condición extrema para que el diseño sea seguro, se presentará cuando la resistencia admisible  $S$  coincida con el límite superior de la distribución de probabilidad  $\sigma \pm k \cdot u(\sigma_{Global})$ . Esta condición hará que el índice de compatibilidad de la Ecuación 3-39, sin valor absoluto sea  $E_N = -1$ .

Continuando con el estado ilustrado en la Figura 3-26, se puede relacionar el concepto de factor de seguridad con el índice de compatibilidad para esta situación. Para ello, primero se ha de reescribir la Ecuación 3-36, obviando el valor absoluto y además se dirá que en este

estado,  $E_N = E_{N(FS)}$ . Donde,  $E_{N(FS)} = -1$  ó  $-E_{N(FS)} = 1$ . Por consiguiente, se tiene que para el cálculo del factor de seguridad, el índice de compatibilidad a utilizar será:

$$-E_{N(FS)} = \frac{\sigma - S}{k \cdot u(\sigma_{Global})} \rightarrow E_{N(FS)} = \frac{S - \sigma}{k \cdot u(\sigma_{Global})} \quad \text{Ecuación 3-37}$$

Seguidamente, se ha de expresar la resistencia admisible del material  $S$  en función del resto de términos que componen la Ecuación 3-37:

$$S = \sigma + E_{N(FS)} [k \cdot u(\sigma_{Global})] \quad \text{Ecuación 3-38}$$

Sustituyendo la Ecuación 3-38 en la Ecuación 3-33 y operando se tiene que el factor de seguridad probabilístico basado en la validación del modelo teórico (Ecuación 3-39), depende: de la tensión de diseño  $\sigma$ , del índice de compatibilidad que garantiza la condición mostrada en la Figura 3-26 ( $E_{N(FS)}$ ) y del factor de cobertura  $k$  perteneciente a un nivel de confianza de  $p = (1 - \alpha) \cdot 100 \%$ . Donde  $\alpha/2$  representa la probabilidad de fallo, acorde con el factor de cobertura  $k$  seleccionado.

$$FS = \frac{\sigma + \{E_{N(FS)} [k \cdot u(\sigma_{Global})]\}}{\sigma} = 1 + \left[ E_{N(FS)} \cdot \frac{k \cdot u(\sigma_{Global})}{\sigma} \right] \quad \text{Ecuación 3-39}$$

Si el modelo teórico representa exactamente a la situación real, el valor del índice de compatibilidad  $E_{N(FS)}$  de la Ecuación 3-39 será igual a la unidad (Debido a que ya se ha considerado el signo negativo de dicho factor en esta expresión). Por tanto, el factor de seguridad probabilístico para un modelo ideal es:

$$FS = \frac{\sigma + [k \cdot u(\sigma_{Global})]}{\sigma} = 1 + \left[ \frac{k \cdot u(\sigma_{Global})}{\sigma} \right] \quad \text{Ecuación 3-40}$$

Tal y como se puede apreciar en la Ecuación 3-40 lo que aleja al factor de seguridad de la unidad, es el ratio entre las fuentes de incertidumbres contenidas en  $u(\sigma_{Global})$  y la tensión de diseño  $\sigma$ . El factor de cobertura  $k$  aleja al valor medio de la tensión de diseño  $\sigma$ , del valor extremo representado por la resistencia admisible  $S$ , de acuerdo con la probabilidad de fallo exigida (Figura 3-27). Por lo tanto, hay que tener presente que un factor de seguridad superior

a la unidad, no garantiza que el elemento o sistema diseñado no falle, ya que depende de la probabilidad de fallo que siempre estará presente. Sin embargo, esta puede minimizarse a través del factor de cobertura  $k$ .

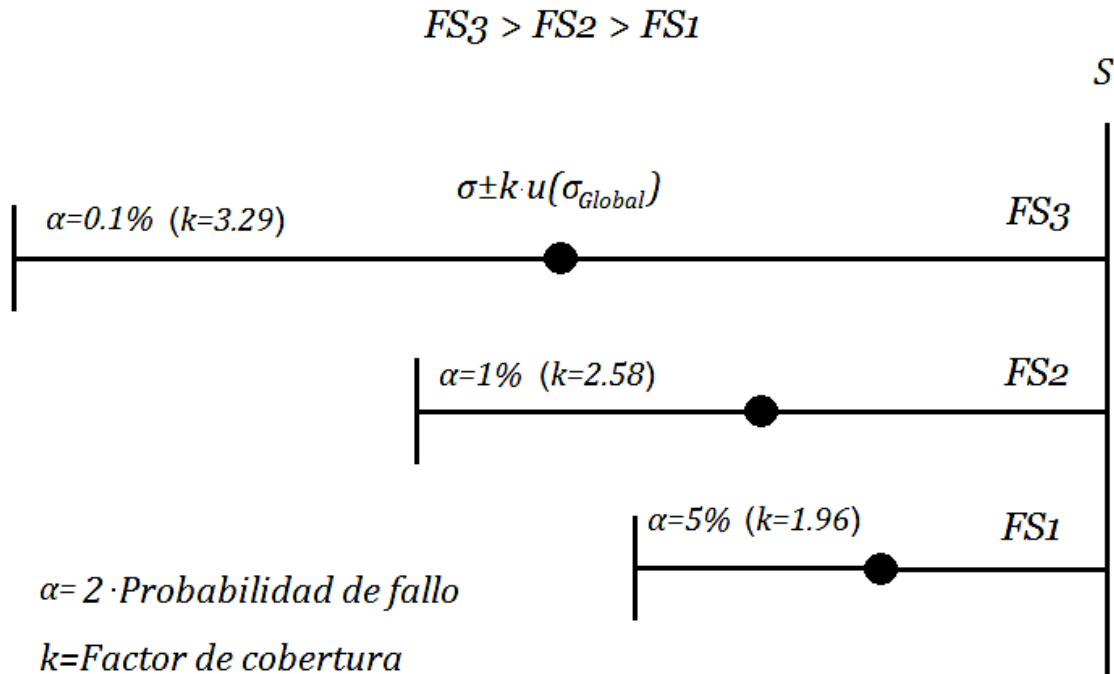


Figura 3-27. Influencia del factor de cobertura  $k$  en el factor de seguridad

La mayoría de los modelos validados según los procedimientos descritos en los apartados 3.13-3.15, seguramente presentarán un índice de compatibilidad medio  $\bar{E}_N$  (Apartado 3.15) distinto de cero. Por tanto, la condición ideal representada en la Figura 3-26 deja de ser válida.

Para explicar cómo afecta el argumento expuesto en el párrafo anterior al cálculo del factor de seguridad, en la Figura 3-28 se representa la tensión real en conjunto con la incertidumbre global expandida  $\sigma_{real} \pm k \cdot u(\sigma_{Global})$  y la resistencia admisible  $S$ ; aunque esta vez para un modelo que a pesar de ser un buen estimador de la realidad, tiende a sub-estimar la tensión existente.

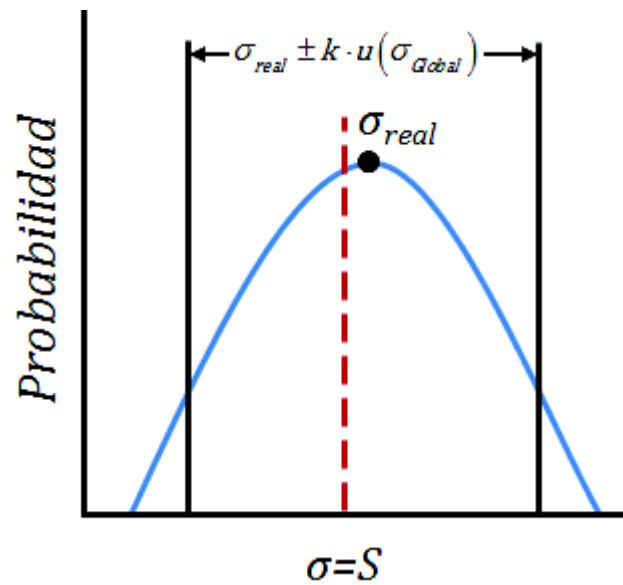


Figura 3-28. Representación de la tensión real de un modelo con tendencia sub-estimadora

La Figura 3-28 muestra el desfase entre la tensión real experimentada ( $\sigma_{real}$ ) y la resistencia admisible del material ( $S$ ). El desfase es debido a que el modelo sub-estimador pronostica que la tensión experimentada será menor de lo que realmente es. Por tanto, tal y como muestra la figura anterior, puede darse el caso en que la tensión  $\sigma_{real}$  sobrepase el valor de  $S$ .

Sí, como en la situación ideal anterior se desplaza la tensión real experimentada en conjunto con la incertidumbre global expandida  $\sigma_{real} \pm k \cdot u(\sigma_{Global})$  hacia la izquierda, debido al desfase inicial (Figura 3-28), la probabilidad de fallo aumentará ya que la resistencia del material  $S$  quedará dentro de la zona de seguridad (Figura 3-29).

Como se puede ver en la Figura 3-29 el desfase en la condición inicial (Figura 3-28) genera una situación insegura, que repercute de forma negativa en el cálculo del factor de seguridad, con lo cual la Ecuación 3-40 deja de ser válida.

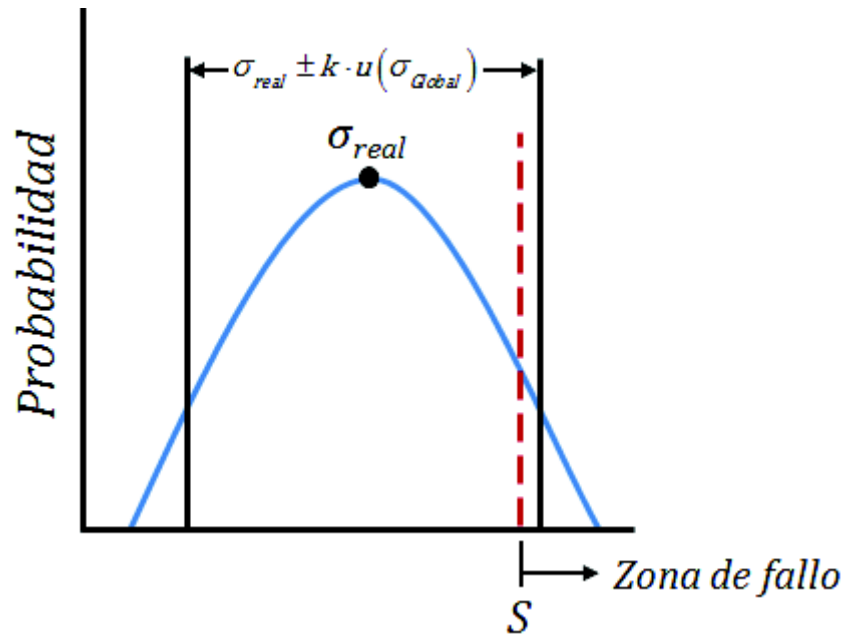


Figura 3-29. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo que tiende a sub-estimar la realidad

En este trabajo de investigación se propone incluir el desfase existente entre la situación real ( $\sigma_{real}$ ) y la ideal ( $\sigma$ ), expresada a través del índice de compatibilidad de validación, en el cálculo del factor de seguridad, cuando el modelo sea sub-estimator de la realidad. En este caso, se mayorará el valor  $E_{N(FS)}$  de la Ecuación 3-39, de manera que la condición para un diseño seguro sea:

$$E_{N(FS)} = 1 + \bar{E}_N \quad \text{Ecuación 3-41}$$

Al considerar la tendencia del modelo en el cálculo del factor de seguridad, establecida por la ubicación del  $\bar{E}_N$  medio en el histograma de distribución de probabilidad (Apartado 3.15), se consigue corregir la diferencia entre la tensión existente y la estimada,  $\sigma_{real}$  y  $\sigma$ , respectivamente, cuando el modelo tiende a sub-estimar la realidad.

La condición de diseño seguro para un modelo sub-estimator de tensión corregido se muestra en la Figura 3-30.

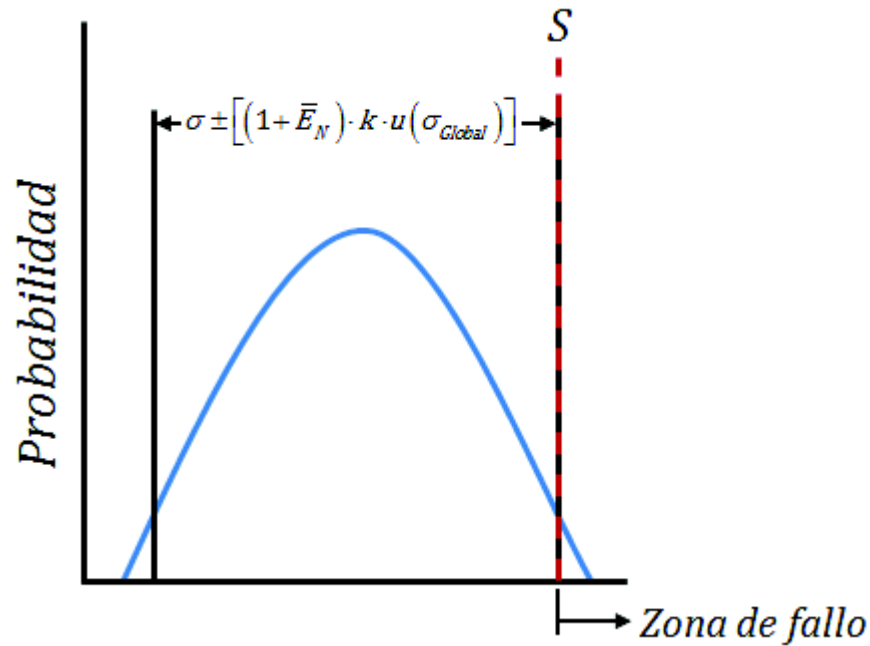


Figura 3-30. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad de un modelo sub-estimador que ha sido corregido

Tal y como se puede ver en la Figura 3-30 la introducción del índice de compatibilidad medio de comportamiento ( $\bar{E}_N$ ) permite ampliar los límites de la incertidumbre global, en proporción con la divergencia observada en la validación, consiguiendo que el modelo se aproxime mucho más a la condición ideal. En metrología, esto sería equivalente a considerar que el instrumento de medida utilizado presenta un error de exactitud, que debe ser tomado en cuenta de forma sistemática a la hora de presentar el resultado de la medición.

Finalmente, al sustituir la Ecuación 3-41 en la Ecuación 3-39, se obtiene el factor de seguridad probabilístico para un modelo con tendencia sub-estimadora de tensión (Ecuación 3-42).

$$FS = 1 + \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot \frac{k \cdot u(\sigma_{Global})}{\sigma} \right] \quad \text{Ecuación 3-42}$$

Al expresar el factor de seguridad de esta manera, se consigue que su valor sea calculado teniendo presente el desfase del modelo teórico y se corrige la diferencia estadística inicial entre la tensión real ( $\sigma_{real}$ ) y la del modelo ( $\sigma$ ). Por tanto, para la condición de diseño

seguro, la resistencia del material  $S$  estará situada como mínimo en el límite superior del valor

$$\sigma \pm \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot \frac{k \cdot u(\sigma_{Global})}{\sigma} \right], \text{ de acuerdo con el nivel de confianza requerido (Figura 3-30).}$$

La Ecuación 3-42 puede reescribirse en términos de carga de diseño  $P_D$  y carga máxima admisible del límite elástico  $P_A$ , sin que esto implique una pérdida de fiabilidad. Por tanto, el factor de seguridad en función de las cargas queda expresado de la siguiente manera:

$$FS = 1 + \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot \frac{k \cdot u(P_{Global})}{P_D} \right] \quad \text{Ecuación 3-43}$$

Donde:

$$u(P_{Global}) = \sqrt{u^2(P_A) + u^2(P_D)} \quad \text{Ecuación 3-44}$$

Por otro lado, para modelos con comportamiento sobre-estimador de tensión (Figura 3-31), la tensión real ( $\sigma_{real}$ ) será menor que la calculada mediante el modelo ( $\sigma$ ) y por lo tanto menor que la resistencia admisible ( $S$ ). En consecuencia, la posible diferencia estadística ente  $\sigma_{real}$  y  $\sigma$  observada en la validación, puede obviarse, ya que no representa una situación de peligro (Figura 3-32). En este caso el factor de seguridad puede calcularse con la Ecuación 3-40.

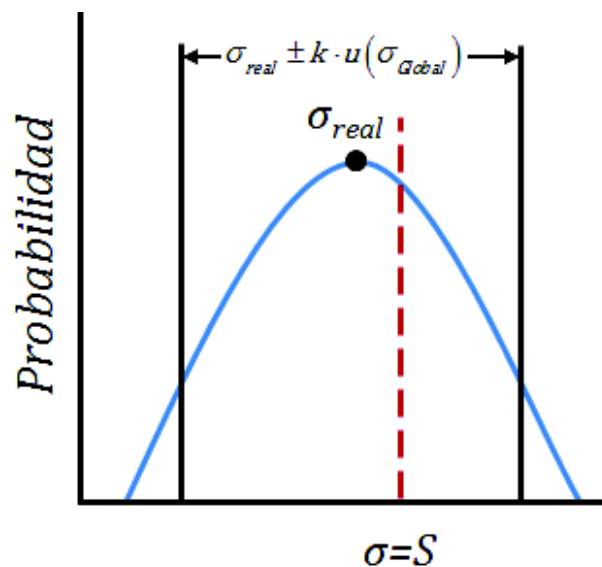


Figura 3-31. Representación de la tensión real de un modelo con tendencia sobre-estimadora



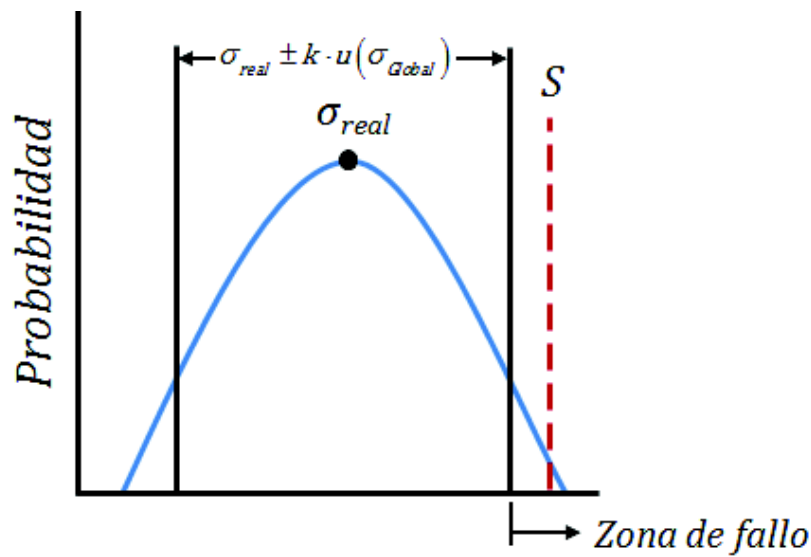


Figura 3-32. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad con un modelo que tiende a sobre-estimar la realidad

En esta tesis doctoral los argumentos descritos hasta ahora, han permitido establecer un procedimiento para el cálculo de la carga de diseño, que asegura la obtención del factor de seguridad probabilístico mínimo. Para ello, se ha considerado las incertidumbres presentes y la tendencia de las predicciones del modelo, expresadas a través del índice de compatibilidad medio  $\bar{E}_N$  del total de muestras analizadas, logrando un aumento justificado de la fiabilidad del diseño.

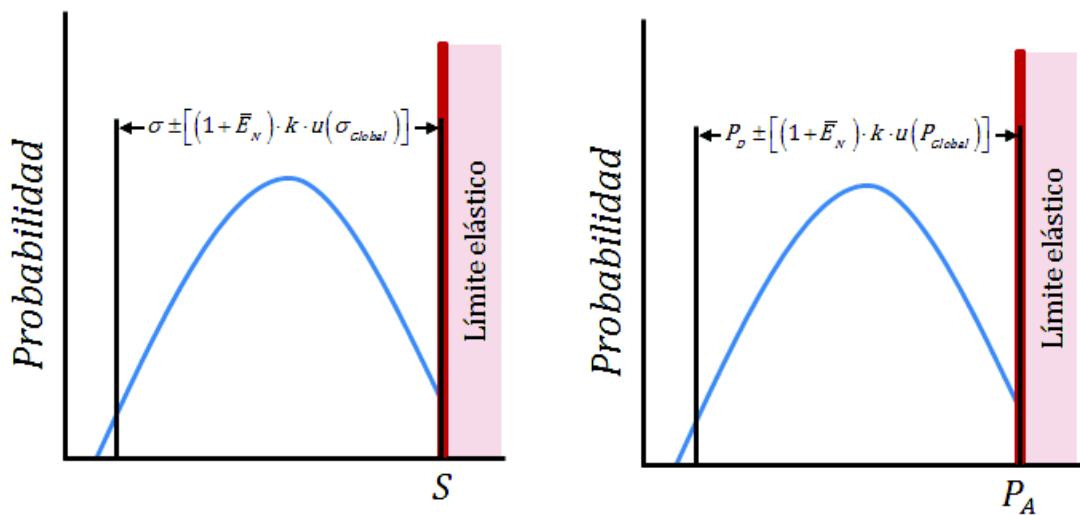
El procedimiento para el cálculo de la carga de diseño, que permite la obtención del factor de seguridad probabilístico basado en la validación previa del modelo, se explica en el siguiente apartado.

### 3.17. Procedimiento de optimización para la obtención del factor de seguridad probabilístico

El procedimiento para el cálculo del factor de seguridad propuesto en el apartado 3.16 ofrece dos caminos muy similares, de acuerdo a si se utilizan las tensiones (Ecuación 3-42) o las fuerzas (Ecuación 3-43). Sin embargo, hay que considerar lo siguiente: Si el objetivo del diseño es calcular el factor de seguridad correspondiente a unas condiciones de carga establecidas, se

puede utilizar cualquiera de las expresiones mostradas con anterioridad, ya que no hay ventaja de una sobre la otra. Por otra parte, si se pretende calcular el factor de seguridad mínimo a partir de la resistencia del material  $S$ , su incertidumbre  $u(S)$  y la tensión de diseño proveniente de un modelo analítico o numérico, previamente validado de acuerdo con los procedimientos expuestos en los apartados 3.13-3.15, la estimación del factor de seguridad puede resultar muy diferente en cuanto a agilidad de cálculo se refiere.

Para el cálculo del factor de seguridad es necesario que la magnitud de las solicitaciones permitan estar del lado de la seguridad, es decir, la carga o la tensión de diseño en conjunto con la incertidumbre global expandida (de acuerdo con la probabilidad de fallo requerida), no debe exceder el límite elástico (Figura 3-33).



a. Factor de seguridad en función de las tensiones

b. Factor de seguridad en función de las cargas

**Figura 3-33. Representación de la condición de seguridad, para el cálculo del factor de seguridad**

Conocer los esfuerzos que garantizan un factor de seguridad que cumple con los criterios de fiabilidad, requiere la implementación de un proceso iterativo, en donde el objetivo es minimizar al factor de seguridad. Dicho proceso debe ser capaz de determinar las cargas o las tensiones según proceda, en conjunto con sus respectivas incertidumbres, de manera que en cada iteración se verifique si se cumplen los criterios de seguridad ilustrados en la Figura 3-33.

Para la optimización del factor de seguridad hay que tener presente que, tanto la incertidumbre de la carga como la de la tensión, son funciones que dependen de los esfuerzos presentes. Por tanto, el tiempo consumido en el cálculo del factor de seguridad estará marcado por las variables involucradas (Fuerzas o tensiones), así como también por el

procedimiento utilizado para la estimación de las incertidumbres (Ley de propagación de incertidumbres o método Monte Carlo). Los procedimientos para la obtención del factor de seguridad mínimo, se esquematizan a continuación.

En la Figura 3-34 se muestra el proceso iterativo para el cálculo del factor de seguridad mínimo, en función de las tensiones (Ecuación 3-42).

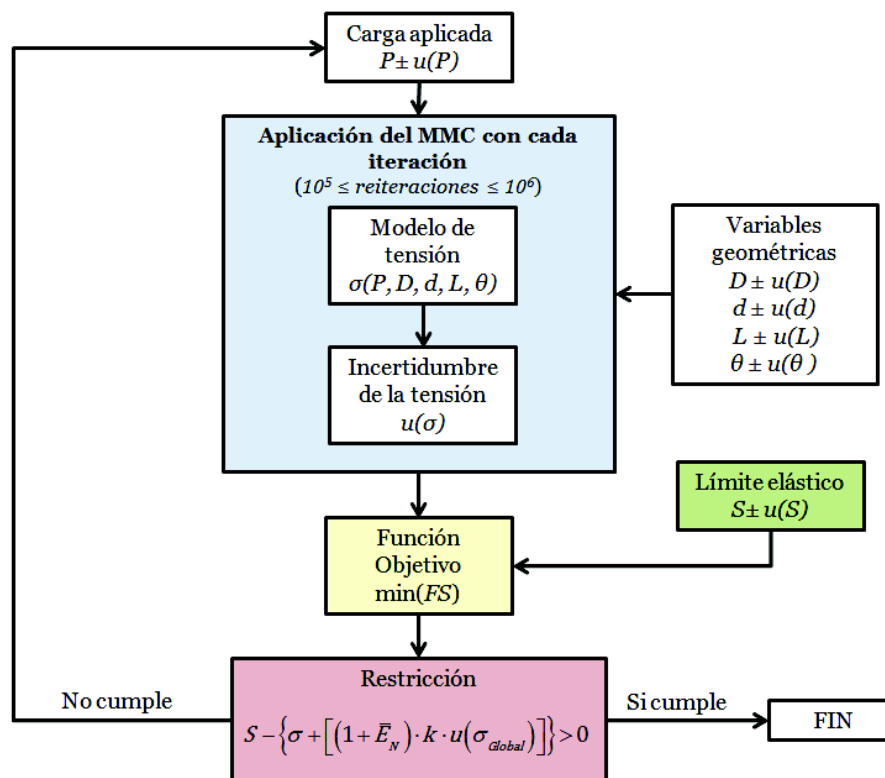


Figura 3-34. Esquema del proceso iterativo para la obtención del factor de seguridad mínimo, en función de las tensiones

El esquema de la Figura 3-34 muestra el procedimiento general para la optimización del factor de seguridad, aplicado al modelo teórico objeto de estudio en esta tesis doctoral (Apartado 2.8). Nótese, que tanto las variables geométricas, como lo son el diámetro exterior  $D$ , el diámetro interior  $d$ , la longitud del tubo  $L$  y el ángulo  $\theta$ ; con sus respectivas incertidumbres, son valores fijos que no cambian con cada iteración. Lo mismo sucede con la resistencia admisible del material en conjunto con su incertidumbre ( $S \pm u(S)$ ). La única variable que se irá ajustando con cada iteración para la obtención del factor de seguridad mínimo, es la carga aplicada  $P$ .

Para el inicio del proceso de cálculo (Figura 3-34) primero ha de asignarse un valor de carga  $P$  que origine una tensión de diseño  $\sigma$  mucho mayor que la resistencia del material  $S$ . Una vez calculada la tensión de diseño  $\sigma$ , el siguiente paso consiste en la evaluación de su incertidumbre, que al ser una función que depende de la tensión de diseño propiamente dicha irá cambiando con cada iteración. En este punto, hay que tener en cuenta que: como la evaluación de la incertidumbre de la tensión de diseño implica la propagación de distribuciones a través del método Monte Carlo, según GUM [24], en cada iteración se han de realizar entre  $10^5$  y  $10^6$  reiteraciones para obtener  $u(\sigma)$ , lo que aumenta considerablemente el tiempo de cálculo.

Por otro lado, en la Figura 3-35 se esquematiza el procedimiento para la obtención del factor de seguridad mínimo, pero esta vez en función de las cargas de diseño  $P_D$  y la carga admisible  $P_A$  (Ecuación 3-43). En este caso, se ha utilizado el modelo de tensión para calcular la carga admisible  $P_A$  con su incertidumbre  $u(P_A)$ , a partir de las variables geométricas y de la resistencia admisible  $S$ .

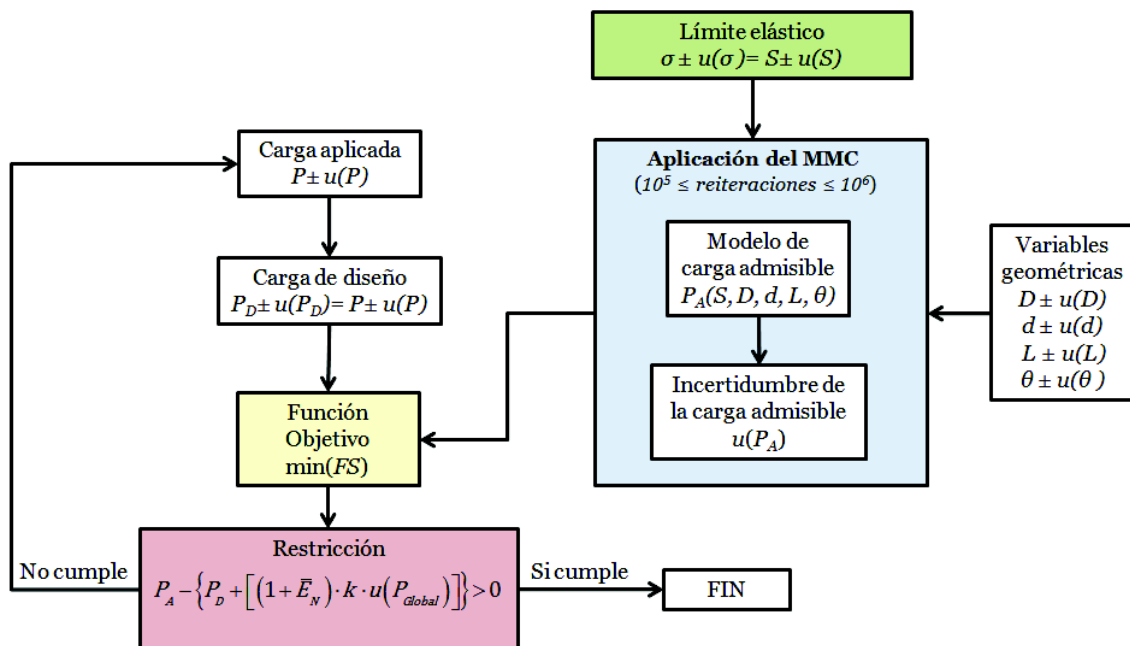


Figura 3-35. Proceso iterativo para la obtención del factor de seguridad mínimo, en función de las cargas

Como puede apreciarse en la Figura 3-35 a diferencia del procedimiento anterior (Figura 3-34), la tensión de diseño  $\sigma$  ya no forma parte del proceso iterativo. De esta manera, la aplicación del método Monte Carlo (entre  $10^5$  y  $10^6$  reiteraciones) se realiza sólo una vez, lo que implica un tiempo de cálculo global mucho menor que el correspondiente al

procedimiento esquematizado en la Figura 3-34, ya que el proceso iterativo se reduce a únicamente ir adecuando la carga de diseño  $P_D$  para cumplir con la restricción impuesta.

Por lo dicho anteriormente, en esta tesis doctoral se ha utilizado el procedimiento mostrado en la Figura 3-35, logrando que el cálculo del factor de seguridad probabilístico mínimo haya sido realizado con la menor cantidad de operaciones posible.



# *CAPÍTULO 4*

## *Resultados*

---

En este capítulo se presentan todos los resultados previos y necesarios, que aseguran la obtención del factor de seguridad mínimo, basado en el análisis de la incertidumbre. Este capítulo ha sido estructurado de la siguiente manera:

En la primera parte, se mostrarán los resultados de las propiedades elásticas de las probetas que han sido extraídas de los tubos, según lo expuesto en el apartado 3.5. Seguidamente, se expondrán los resultados de la validación experimental del modelo teórico (Apartado 2.8), de acuerdo la nueva metodología planteada (Apartado 3.13-3.15). Al final, se presentarán los valores de los factores de seguridad mínimos, para distintos niveles de confianza, verificando además la influencia que tiene el resultado obtenido en la validación experimental del modelo sobre dicho factor.

## 4.1. Resultados de las constantes elásticas del material

Las propiedades elásticas de los tubos ensayados, en concreto de los módulos de Young y los coeficientes de Poisson, han sido calculadas según lo expuesto en el apartado 3.5.

La determinación de dichas constantes, con el método de los mínimos cuadrados totales ponderados (Apartado 3.12), ha permitido considerar la heterogeneidad de los parámetros de entrada y el peso que tienen sobre la incertidumbre de la pendiente [84]. De esta manera, se consigue que la curva de mejor ajuste, con su respectiva incertidumbre, se obtenga minimizando los residuos tanto en el eje vertical como en el horizontal (recuérdese que existen incertidumbres en ambos ejes cartesianos). La Figura 4-1, muestra la fuerte relación lineal entre la tensión y la deformación longitudinal ( $r^2=0.9999$ ), observada en la probeta 2, extraída del mismo cilindro de donde se mecanizó el tubo 2.

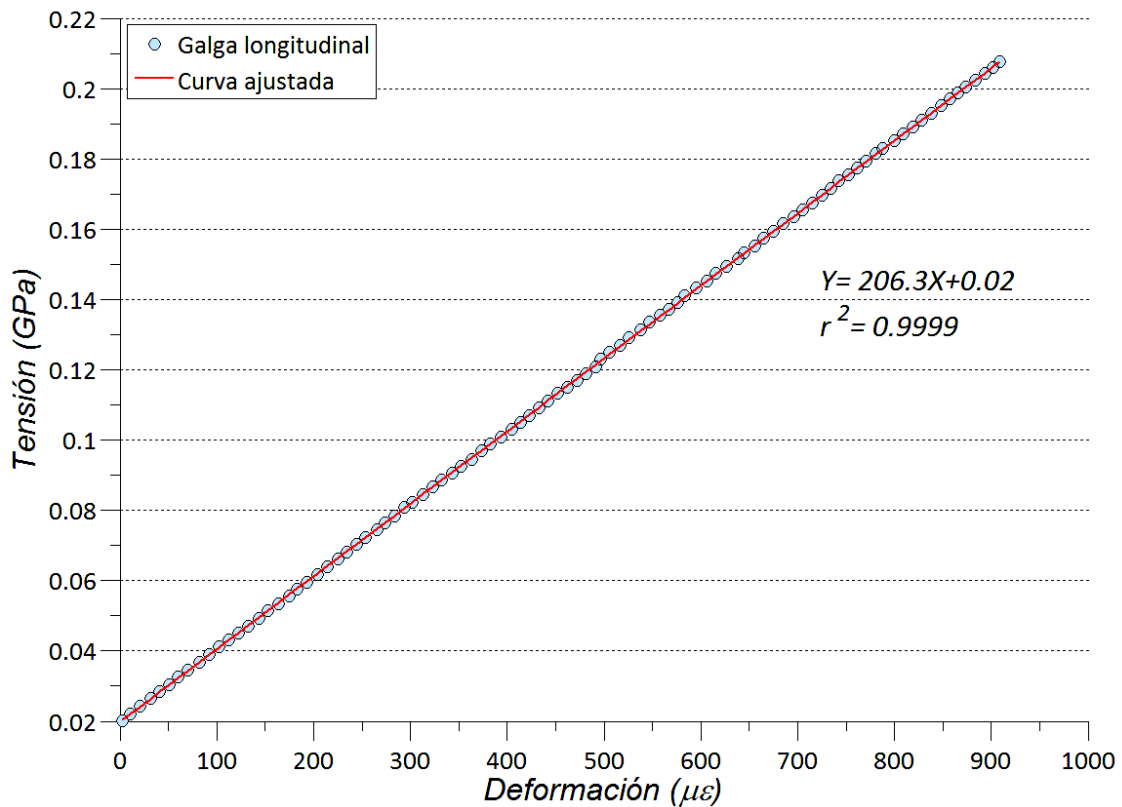


Figura 4-1. Relación tensión-deformación observada en la caracterización de la probeta 2, perteneciente al tubo 2

En toda la muestra analizada, no se han observado diferencias significativas en el cálculo de la pendiente, entre los mínimos cuadrados ordinarios y los mínimos cuadrados totales ponderados (inferiores al 0.2%). Por otro lado, se ha observado que la incertidumbre tipo A, es decir, la debida a la repetibilidad; es la que mayor peso tiene sobre la incertidumbre



combinada final de ambas constantes elásticas. La incertidumbre tipo A puede ser hasta 4 veces mayor que la debida a la del ajuste de la pendiente. Esto explica el porqué la norma ASTM [78], deja al usuario el cálculo de la componente de incertidumbre tipo B, y computa la incertidumbre de las constantes elásticas, considerando únicamente la desviación experimental de la media del total de ensayos efectuados. Según los resultados obtenidos en esta tesis doctoral, la componente tipo B podría obviarse.

Los resultados tanto del módulo de Young ( $E$ ) como del coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) de las probetas ensayadas se muestran en la Tabla 4-1, siendo  $u(E)$  y  $u(\nu)$  sus respectivas incertidumbres.

Tabla 4-1. Módulos de Young y coeficientes de Poisson de las probetas

	Probeta 1	Probeta 2	Probeta 3	Probeta 4	Probeta 5
$E$ (GPa)	217.6	206.3	211.9	213.0	206.6
$u(E)$ (GPa)	$1.9 \times 10^0$	$6.1 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-1}$	$4.8 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-1}$
$\nu$	0.3010	0.3000	0.3043	0.2909	0.2893
$u(\nu)$	$2.03 \times 10^{-4}$	$2.00 \times 10^{-4}$	$2.05 \times 10^{-4}$	$2.98 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-4}$

Los resultados obtenidos muestran que, a pesar de que los tubos son del mismo material, conviene suponer para el análisis detallado que se va a realizar, que sus constantes elásticas no son las mismas, en especial los módulos de Young. Aún así, la consideración de material isótropo y homogéneo puede ser aplicada, ya que se analizará el modelo teórico sobre cada tubo.

## 4.2. Resultados de la validación experimental

### 4.2.1. Modelo experimental

La validación experimental del modelo teórico ha sido realizada tal y como se ha explicado en el apartado 3.13. Para ello ha sido necesario extraer todos los errores inherentes a la técnica de medición utilizada, que en este caso ha sido la extensometría.

Se han calculado los errores expuestos en la Tabla 3-4, para los 5 tubos y se ha observado que en ningún caso, los errores son mayores a  $1 \mu\epsilon$ , lo que representa aproximadamente el 1% de la deformación máxima registrada. A modo de ejemplo, en la Figura 4-2 se muestra la evolución de los errores registrados en el tubo 2; obsérvese que la mayor aportación al error total es el debido a la temperatura de ensayo, con un valor cercano a  $0.6 \mu\epsilon$ . Aun sabiendo que dichos errores eran mínimos, han sido tomados en cuenta y sustraídos de las deformaciones registradas. Esto con miras a obtener una elevada exactitud en la determinación del factor concentración de tensiones experimental  $K_E$ .

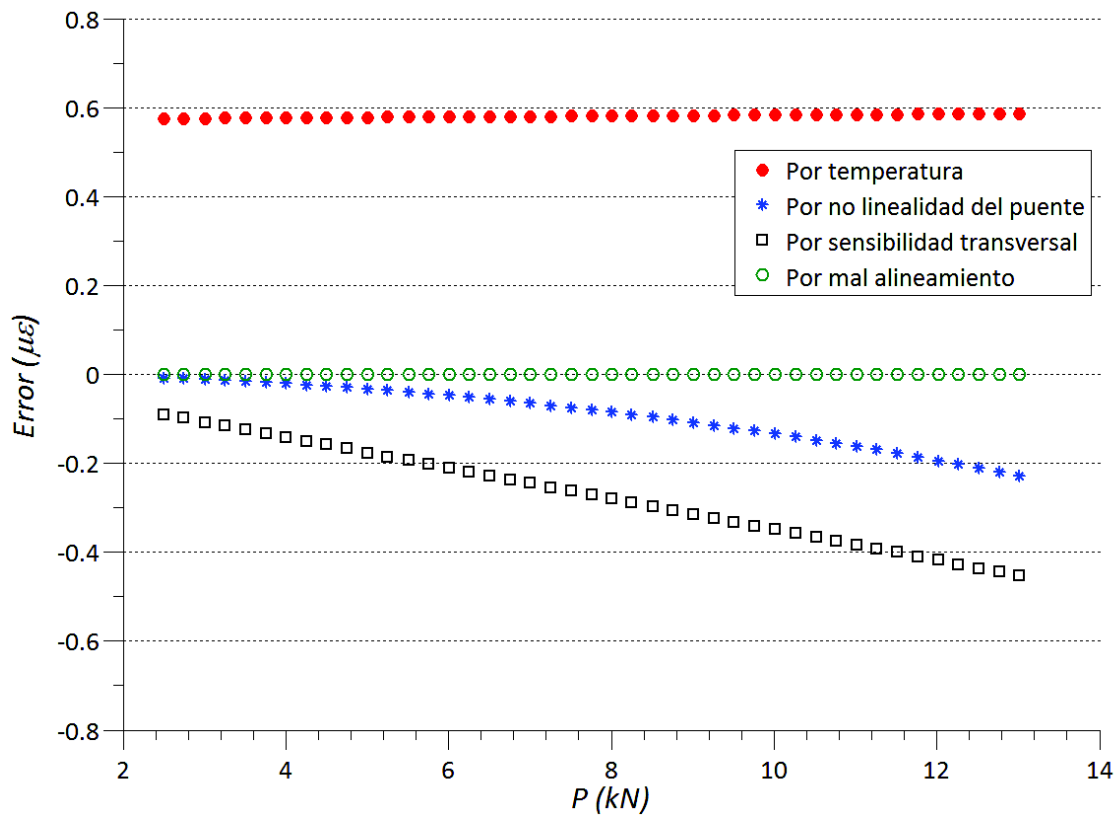


Figura 4-2. Evolución de los errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al tubo 2

Una vez corregidas las deformaciones, se ha procedido al cálculo de las deformaciones principales con la Ecuación 3-12, para posteriormente calcular las tensiones tangenciales experimentales  $\sigma_p$  con la Ecuación 3-2.

Seguidamente, se han graficado las tensiones tangenciales experimentales  $\sigma_p$  en conjunto con la relación  $4P / \pi ID$ . Tal y como se esperaba, se ha observado para todos los tubos una relación lineal entre ambas, de manera que la pendiente resultante ha de representar al factor

de concentración de tensiones experimental  $K_E$ . La Figura 4-3 muestra la evolución de las tensiones, calculadas a partir del promedio de todas las deformaciones medidas en el tubo 2.

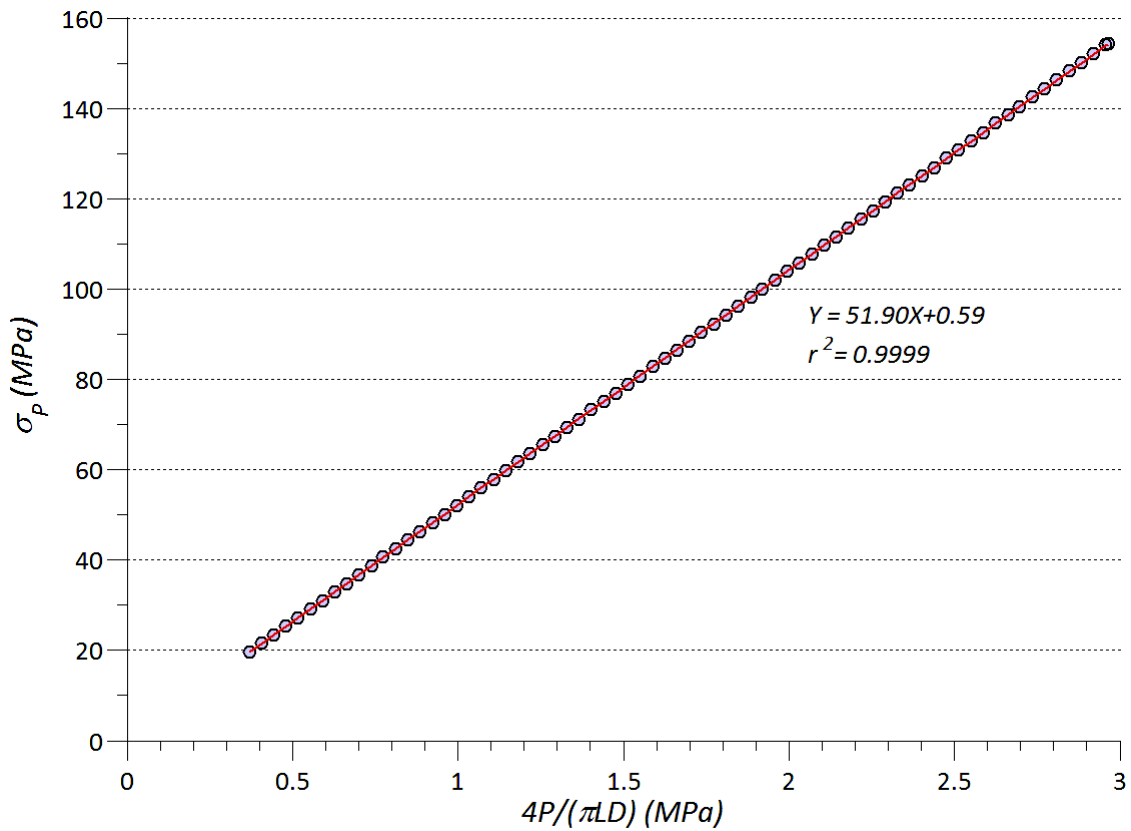


Figura 4-3. Evolución de las tensiones tangenciales experimentales en el tubo 2

Con los factores de concentración de tensiones experimentales de las rosetas #2 y #4 (Figura 3-4), se ha verificado la simetría de la carga con respecto al plano medio del frontal de cada uno de los tubos. Los resultados de las rosetas #2 y #4, para todos los tubos se muestran en la Tabla 4-2.

Tabla 4-2. Factor de concentración de tensiones de las rosetas #2 y #4

	Tubo 1 ( $\rho=0.793$ )	Tubo 2 ( $\rho=0.836$ )	Tubo 3 ( $\rho=0.856$ )	Tubo 4 ( $\rho=0.888$ )	Tubo 5 ( $\rho=0.881$ )
Roseta #2	30.38	51.53	64.66	114.02	101.21
Roseta #4	30.35	51.52	64.40	113.99	101.19
$\%Dif = 100 \frac{max - min}{max}$	0.10	0.01	0.40	0.03	0.02

Como se puede apreciar en Tabla 4-2, la diferencia porcentual máxima se sitúa por debajo del 0.5 %. Por tanto, se puede decir que el montaje efectuado y las condiciones de ensayo, han

permitido que la distribución de las tensiones alrededor de los tubos sea lo más simétrica posible.

La obtención de la pendiente experimental  $K_E$ , se ha realizado a través de los mínimos cuadrados totales ponderados (Apartado 3.12). La aplicación de esta técnica de regresión, requiere la previa verificación de los elementos que componen la matriz de covarianza, tanto de todos los elementos pertenecientes al eje X como los del eje Y.

Los mínimos cuadrados totales ponderados, pueden emplearse si se comprueba que los elementos que conforman la diagonal de la matriz de covarianza son desiguales y, además, que la correlación entre las observaciones sucesivas, puede obviarse [90]. Es por ello, que en esta tesis doctoral se ha generado la matriz de covarianza de ambos ejes cartesianos ( $X = 4P / \pi LD$ ,  $Y = \sigma_p$ ), antes de calcular el factor de concentración de tensiones experimental  $K_E$ , en donde se ha verificado que se cumpliera con los requerimientos propios de la técnica de regresión antes nombrada.

La Figura 4-4, muestra la representación gráfica de la matriz de covarianza de las tensiones experimentales, pertenecientes al tubo 2, generada a partir de 500 simulaciones de Monte Carlo.

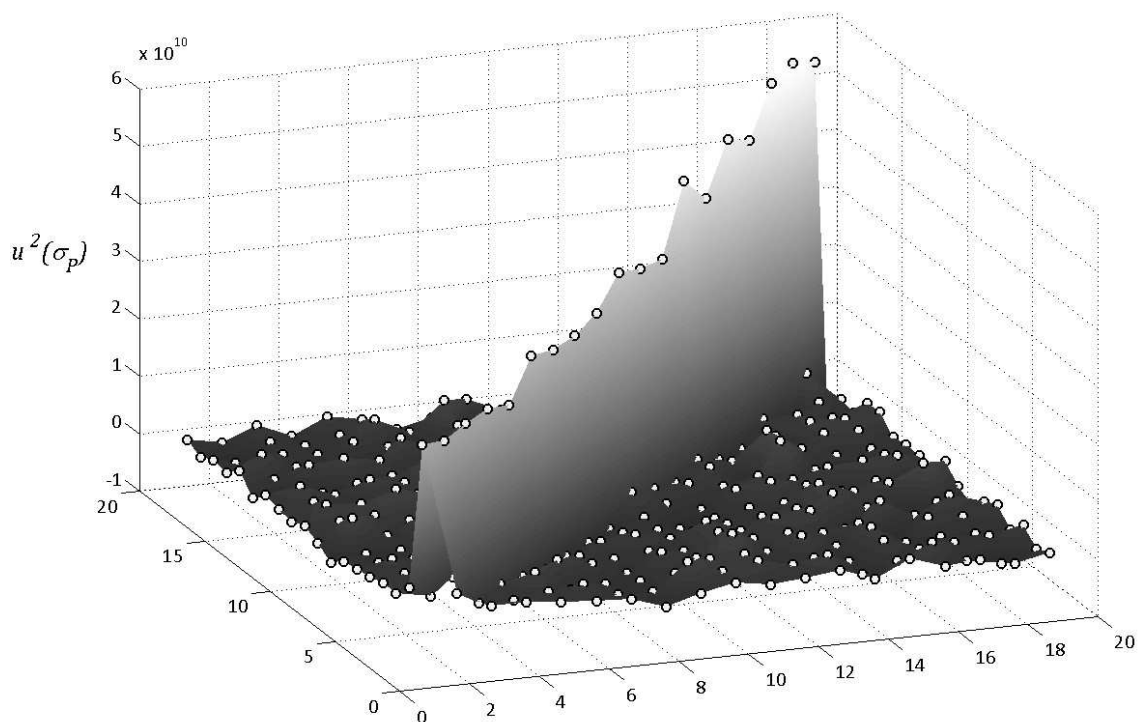


Figura 4-4. Representación de la matriz de covarianza de las tensiones experimentales pertenecientes al tubo 2

Los ejes X e Y de la Figura 4-4, representan el número de filas y columnas de la matriz de covarianza; mientras que en el eje Z, se representa el valor propiamente dicho de la covarianza entre puntos sucesivos de tensión  $\sigma_p$ . Puede apreciarse el comportamiento dominante y creciente de los elementos que conforman la diagonal, que además es superior que el del resto de elementos que conforman la matriz. Similar comportamiento se ha observado en la covarianza del eje X, para todos los tubos que han sido ensayados.

Para verificar la precisión de los datos experimentales, se ha calculado la incertidumbre relativa de los términos involucrados en el cálculo del factor de concentración de tensiones experimental, es decir, de la tensión  $\sigma_p$  y de la relación  $4P / \pi LD$ . La Figura 4-5, muestra la evolución de la incertidumbre relativa porcentual de la tensión experimental, con respecto a la tensión propiamente dicha experimentada por el tubo 2.

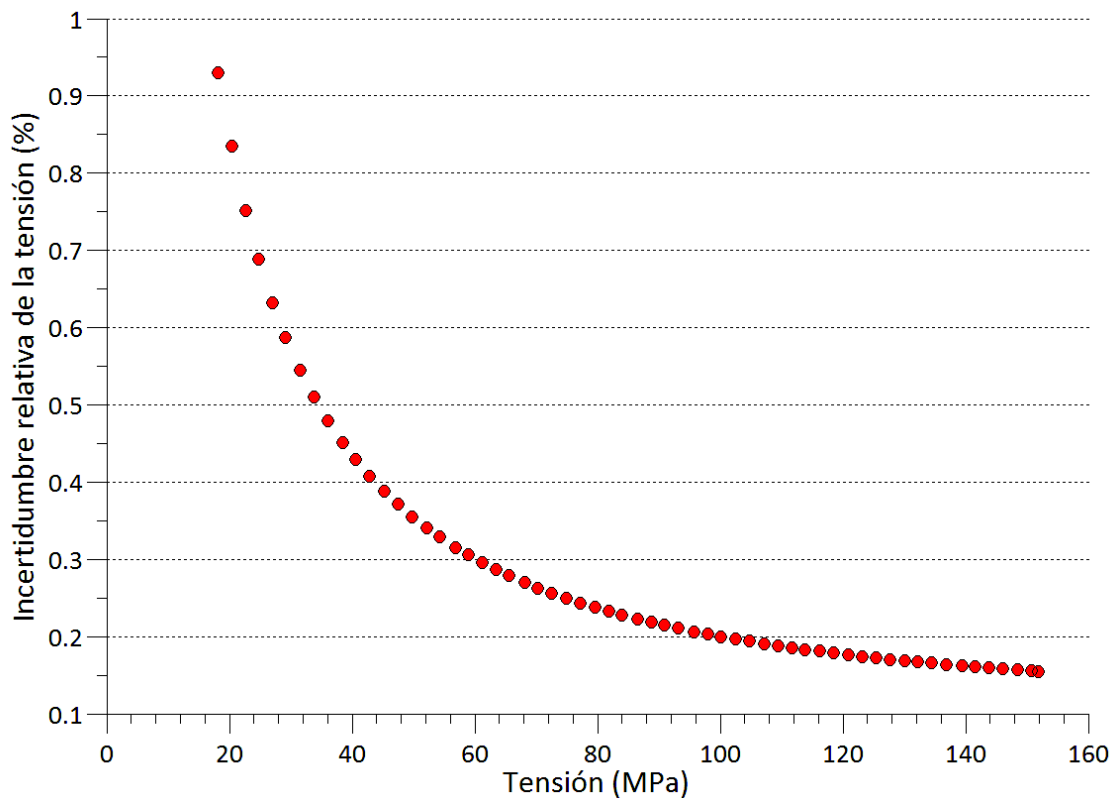


Figura 4-5. Evolución de las incertidumbres relativas del eje Y ( $\sigma_p$ ) en función de la tensión del tubo 2

Como puede apreciarse en la Figura 4-5, la incertidumbre en términos relativos nunca llega a superar el 1%. A medida que aumenta la tensión, la incertidumbre relativa disminuye exponencialmente, llegando a estar por debajo del 0.2% para valores de tensión superiores a 100 MPa. Por tanto, a pesar de que la incertidumbre de la tensión aumenta conforme se incrementa la carga, su valor es ínfimo en comparación con la tensión registrada.

La Figura 4-6, muestra la evolución de las incertidumbres relativas pertenecientes al eje X ( $4P/\pi LD$ ), en función de la tensión experimental para el caso del tubo 2. Se ha observado que la incertidumbre relativa porcentual de la relación  $4P/\pi LD$ , siempre se sitúa por debajo del 0.3%. Por tanto, se podría decir que ha permanecido casi invariable, ya que su valor pasa de aproximadamente 0.2514% (20 MPa) a 0.2503% (150 MPa), lo que representa un descenso del 0.0011%.

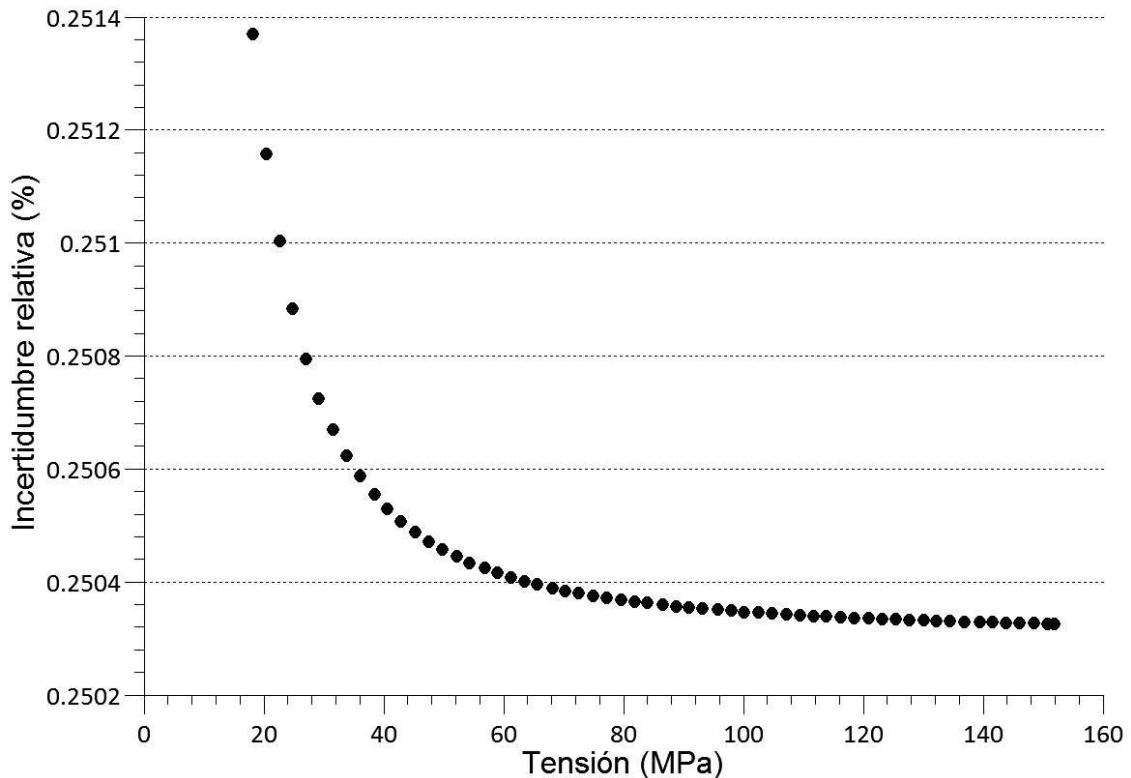


Figura 4-6. Evolución de las incertidumbres relativas del eje X ( $4P/\pi LD$ ) en función de la tensión del tubo 2

La Tabla 4-3, muestra las incertidumbres presentes en el modelo experimental. Puede apreciarse que la incertidumbre del análisis de regresión  $u(\bar{K}_E)$ , en la mayoría de los casos supera a la de la repetibilidad  $s^2(\bar{K}_{E,r})$ . Esto demuestra que las condiciones de contorno de los ensayos experimentales estaban controladas, asegurando con ello una alta calidad en los resultados obtenidos.

Tabla 4-3. Incertidumbre del factor de concentración de tensiones experimental

Tubo	Incetudumbre de la pendiente $u(\bar{K}_E)$	Desviación experimental de la media $s^2(\bar{K}_{E,r})$	Incetudumbre combinada $u(\bar{K}_{E,r})$
	Ecuación 3-19	Ecuación 3-20	Ecuación 3-21
1	0.15	0.17	0.22
2	0.12	0.10	0.16
3	0.17	0.04	0.17
4	0.18	0.12	0.22
5	0.06	0.31	0.32

Por otro lado, la instalación de las galgas extensométricas a lo largo de cada uno de los tubos (Figura 3-4), ha permitido verificar cómo afecta la relación longitud vs diámetro a la uniformidad de las tensiones circunferenciales  $\sigma_{\theta\theta}$ . Hay que recordar que el modelo teórico es una simplificación de la realidad, en donde se supone que cada rebanada del tubo experimenta igual tensión. La Figura 4-7 muestra la distribución del factor de concentración de tensiones experimental  $K_E$ , para los tubos con la mayor y menor relación  $L/D$ .

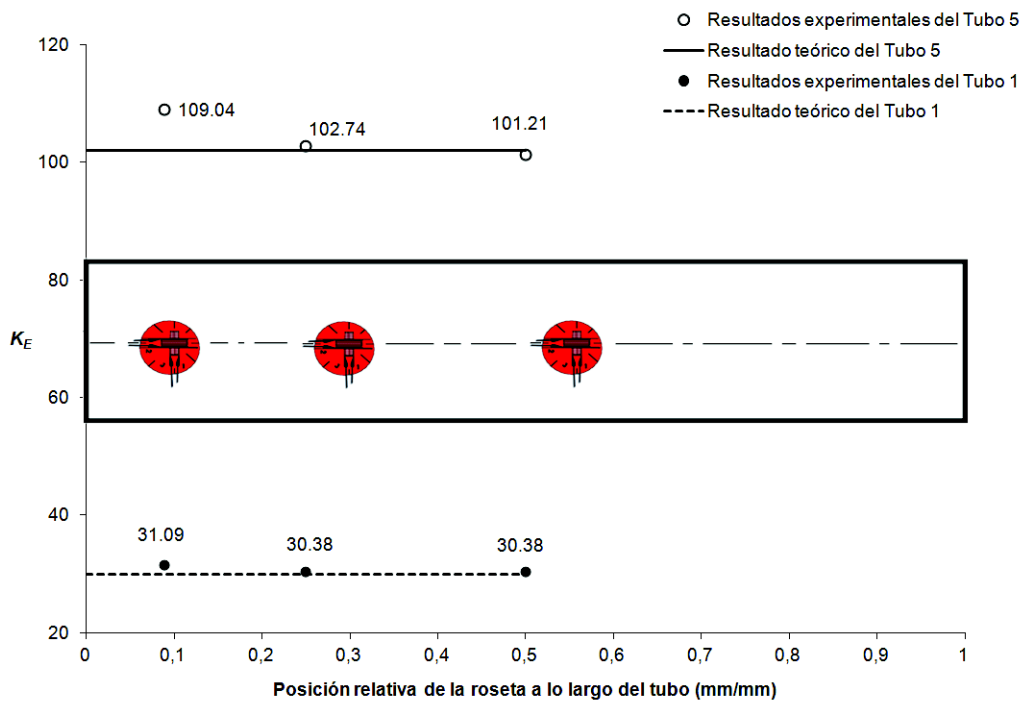


Figura 4-7. Distribución del factor de concentración de tensiones a lo largo del tubo

Tal y como puede apreciarse en la Figura 4-7, el tubo 5 es el que ha presentado menor uniformidad entre resultados. Se ha observado que a medida que la relación entre la longitud

del tubo y su diámetro exterior decrece, los resultados experimentales entre rosetas de un mismo tubo, tienden a ser más dispares. Esto puede deberse al efecto negativo que tiene la proximidad al borde, en la distribución uniforme de la carga aplicada y por ende en la homogeneidad del factor de concentración de tensiones experimental  $K_E$ .

Como ya se ha explicado en el apartado 3.8, para cuantificar como afecta la relación  $L/D$  a la suposición de la distribución uniforme de las tensiones circunferenciales a lo largo del tubo, se ha procedido a calcular un factor de concentración de tensiones experimental promedio ( $\bar{K}_E$ ) para cada tubo, formado por todos los  $\bar{K}_{E,r}$  de cada una de las rosetas. Conjuntamente, se ha estimado una incertidumbre asociada a dicho promedio, denominada  $u(\bar{K}_{E,av})$ , que nos informará de cuan alejado está el tubo analizado de la condición ideal representada por el modelo teórico. Para ello, se ha considerado que todos los posibles valores atribuibles a  $\bar{K}_E$  pueden estar entre el mínimo y máximo factor  $\bar{K}_{E,r}$ . La Tabla 4-4 muestra los valores finales de la incertidumbre denominada  $u(\bar{K}_{E,av})$ , en función de la relación  $L/D$ .

**Tabla 4-4. Evolución de la incertidumbre debida al promediado longitudinal en función de  $L/D$**

Tubo	Relación $L/D$	Incertidumbre debida al promediado longitudinal $u(\bar{K}_{E,av})$
		Ecuación 3-23
1	1.31	0.22
2	0.89	0.45
3	0.64	0.80
4	0.54	1.02
5	0.36	2.26

Los resultados mostrados en la Tabla 4-4, informan que probablemente exista una relación entre el valor de  $L/D$  y la incertidumbre debida al promediado longitudinal  $u(\bar{K}_{E,av})$  (Tabla 4-4). Puede apreciarse que la distribución de las tensiones circunferenciales a lo largo del tubo se hace más homogénea, a medida que aumenta la magnitud de la relación  $L/D$ , ya que el valor de  $u(\bar{K}_{E,av})$  se acerca más a cero.



Cuando la relación  $L/D$  disminuye, el valor de  $u(\bar{K}_{E,av})$  llega incluso a superar la incertidumbre combinada  $u(\bar{K}_{E,r})$ , formada por la suma cuadrática de  $u(\bar{K}_E)$  y  $s^2(\bar{K}_{E,r})$  (Ver Tabla 4-3). Por tanto, la incorporación de  $u(\bar{K}_{E,av})$  en la incertidumbre final, asociada al modelo teórico, mejorará las predicciones hechas con el mismo (Apartado 3.10), ya que permitirá ampliar los límites de los posibles valores fácilmente atribuibles al mismo, cuando se incumpla la situación idealizada representada por el modelo teórico. La evolución de  $u(\bar{K}_{E,av})$  en función de la relación  $L/D$ , se muestra en la Figura 4-8.

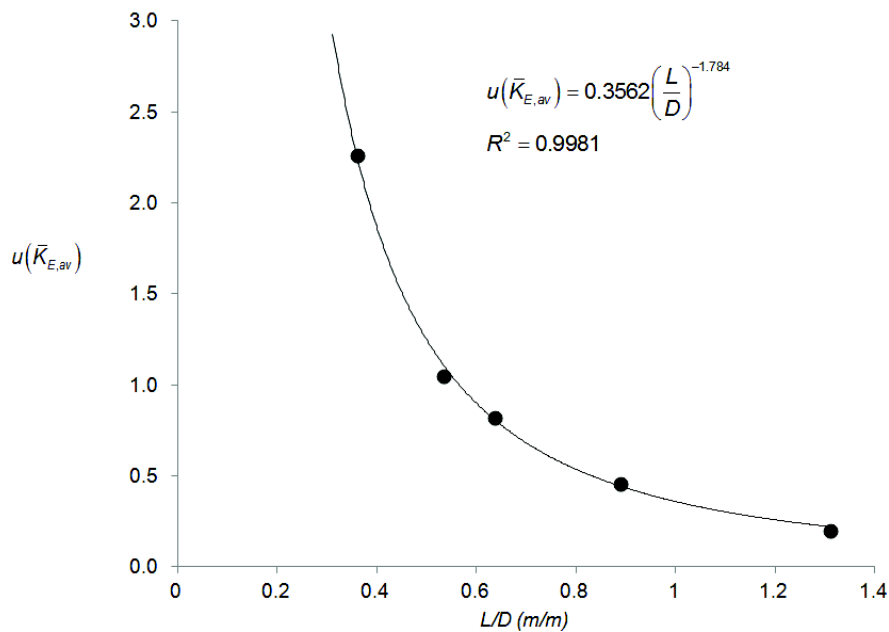


Figura 4-8. Distribución del factor de concentración de tensiones a lo largo del tubo

A raíz de los resultados obtenidos en esta tesis doctoral, se ha observado que la incertidumbre debida al incumplimiento de la supuesta distribución uniforme de la tensión circunferencial, a lo largo de los tubos  $u(\bar{K}_{E,av})$ , puede aproximarse a través de una función exponencial, con un factor de regresión  $R^2=0.9981$  (Figura 4-8). También, puede verse que sólo cuando el valor de la longitud del tubo se acerque a infinito, la aportación de la componente de incertidumbre  $u(\bar{K}_{E,av})$  podría despreciarse.

### 4.2.2. Modelo teórico

Para la estimación del factor de concentraciones teórico  $K_{MC}$ , se ha implementado un procedimiento de Monte Carlo adaptable (Apartado 3.9). Este procedimiento ha permitido la obtención de dichos factores para cada uno de los tubos, en conjunto con los límites superior e inferior para un nivel de confianza de aproximadamente 95%. La Figura 4-9, muestra el histograma de frecuencia del factor de concentración de tensiones teórico para el tubo 2, obtenido a través de la realización iterativa del procedimiento de Monte Carlo adaptable (Esquematizado en la Figura 3-18) un total de 135 veces.

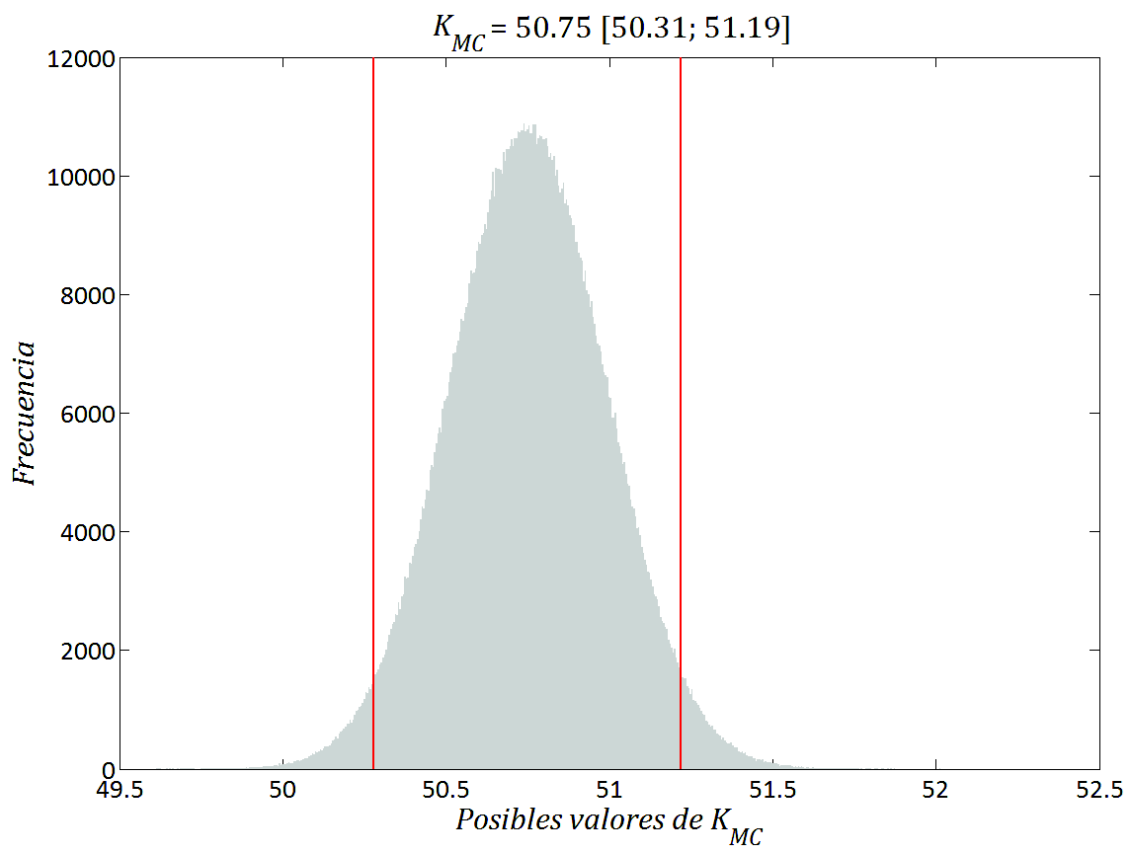


Figura 4-9.  $K_{MC}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (Tubo 2)

El histograma de la figura anterior ha sido realizado considerando únicamente el comportamiento aleatorio de las variables propias del modelo teórico (Diámetro exterior  $D$ , diámetro interior  $d$  y ángulo  $\theta$ ).

Como ya se ha visto en el apartado anterior, la distribución de la tensión a lo largo del tubo, puede relacionarse con las predicciones realizadas con el modelo teórico (Ecuación 3-15 y Ecuación 3-24), a través de un modelo de incertidumbre (Apartado 3.10), de manera que las

incertidumbres de las predicciones consideren el efecto borde, cuantificado a través de  $u(\bar{K}_{E,av})$ . Con esto, se consigue que el modelo teórico se ajuste mejor a la situación real, sin necesidad de incluir nuevas variables, es decir, las predicciones no se ven directamente afectadas, sino que se amplían los límites de la incertidumbre final.

Las predicciones realizadas a través del modelo teórico ( $\bar{K} = K_{MC}$ ), con sus respectivas incertidumbres, en conjunto con  $u(\bar{K}_{E,av})$  y la incertidumbre combinada final  $u(\bar{K})$  (Ecuación 3-25), se muestran en la Tabla 4-5.

Tabla 4-5. Factor de concentración de tensiones teórico con su incertidumbre

Tubo	Relación de radios $\rho$	Factor de concentración de tensiones $\bar{K}$	Incertidumbre		
			De las variables propias del modelo $u(\bar{K}_{MC})$	Del promediado longitudinal $u(\bar{K}_{E,av})$	Combinada final de las predicciones $u(\bar{K})$
1	0.793	29.97	0.15	0.22	0.27
2	0.836	50.75	0.22	0.45	0.53
3	0.856	67.79	0.27	0.80	0.85
4	0.888	116.98	0.47	1.02	1.13
5	0.881	102.25	0.30	2.26	2.28

La componente de incertidumbre asociada al modelo teórico exhibe una dependencia con la relación de radios  $\rho$ . Se ha observado que cuando  $\rho$  aumenta, también lo hace  $\bar{K}$  y  $u(\bar{K}_{MC})$ . Esto se debe a que a medida que el tubo se hace más fino, cualquier pequeña variación en la relación de radios  $\rho$ , incrementa notablemente el valor de  $\bar{K}$ , con lo cual la distancia entre los límites de todos los posibles valores se acrecienta. Un ejemplo claro de la sensibilidad del modelo con la relación de radios  $\rho$ , se observa al comparar los valores de  $\bar{K}$  de los tubos 4 y 5. Nótese que en este caso el valor de  $\rho$  pasa de 0.888 a 0.881, lo que representa una variación del 0.8%, mientras que el factor de concentración de tensiones pasa de 116.98 a 102.25, que es una variación de 14.4%.

Por otro lado, la incertidumbre combinada asociada al modelo teórico  $u(\bar{K})$ , la cual toma en cuenta tanto las aportaciones de las variables propias del modelo  $u(\bar{K}_{MC})$ , como la

incertidumbre experimental debida a la distribución longitudinal de las tensiones circunferenciales en los tubos  $u(\bar{K}_{E,av})$ , indica que la incertidumbre de las predicciones será mayor en tubos con diámetros muy grandes en comparación con su longitud, y que además sean de pared fina.

### 4.2.3. Comparación de las predicciones con los resultados experimentales

Los resultados experimentales y teóricos, y sus respectivas incertidumbres expandidas para un nivel de confianza de aproximadamente 95%, en conjunto con los resultados del estadístico de validación propuesto ( $E_N$ ), se presentan en la Tabla 4-6.

Tabla 4-6. Resultados finales de la validación experimental del modelo teórico

	Tubo 1 ( $\rho=0.793$ ) ( $L/D=1.31$ )	Tubo 2 ( $\rho=0.836$ ) ( $L/D=0.89$ )	Tubo 3 ( $\rho=0.856$ ) ( $L/D=0.64$ )	Tubo 4 ( $\rho=0.888$ ) ( $L/D=0.54$ )	Tubo 5 ( $\rho=0.881$ ) ( $L/D=0.36$ )
$\bar{K}_E$	30.61	51.90	66.18	116.01	104.33
$U(\bar{K}_E)$	0.44	0.31	0.35	0.43	0.63
$\bar{K}$	29.97	50.75	67.79	116.98	102.25
$U(\bar{K})$	0.53	1.05	1.69	2.25	4.56
$Error = \bar{K} - \bar{K}_E$	-0.64	-1.15	1.61	0.97	-2.08
$\%Error = 100 \frac{Error}{\bar{K}}$	-2.13	-2.26	2.37	0.83	-2.03
$E_N = \frac{ Error }{U(Error)}$	0.92	1.05	0.93	0.42	0.45

Los porcentajes de error arrojados en la validación, en términos absolutos, no han superado el 2.5%, siendo dichos valores similares a los resultados obtenidos por otros autores [70, 82]. Cuando en la validación experimental se considera únicamente el porcentaje de error como herramienta de validación, el criterio de aceptación dependerá exclusivamente de la experiencia del ingeniero, que tendrá que evaluar si dicho error puede ser considerado como

aceptable, siendo esto una validación subjetiva, denominada validación ingenieril [4] (Apartado 2.3.1).

Es por ello que en esta tesis doctoral se propone el estadístico  $E_N$  para ayudar al analista a considerar si el modelo se ajusta a la realidad, considerando las incertidumbres presentes en la validación y en las variables involucradas. Se proporciona así una herramienta objetiva que, además, permite normalizar los límites de aceptación del modelo teórico, que deberán estar comprendidos entre cero y uno.

Los valores de  $E_N$  mostrados en la Tabla 4-6, indican que únicamente en el tubo 2 no existe un solapamiento entre la diferencia observada (*Error*) y la incertidumbre expandida asociada ( $U(\text{Error})$ ), debido a que el índice de compatibilidad  $E_N$  es mayor que 1.

El estadístico de validación  $E_N$  en conjunto con el modelo de incertidumbre propuesto en esta tesis doctoral, asociado a las predicciones del modelo teórico (Apartado 3.10); indica que en el caso del tubo 2, ninguna rebanada del tubo comprendida entre la ubicación de las rosetas a lo largo del mismo (Figura 3-4) se comporta como pronostica el modelo teórico. Por tanto, si la validación del modelo dependiera únicamente del resultado del tubo 2, habría que decir que las predicciones no se ajustan a los valores experimentales y por consiguiente se rechazaría el modelo.

En la Figura 4-10, se muestra la representación gráfica del índice de compatibilidad  $E_N$ , perteneciente a los resultados de la validación experimental. Nótese, que en lugar de representar los resultados experimentales y los teóricos con sus respectivas incertidumbres, de manera independiente ( $\bar{K} \pm U(\bar{K})$ ,  $\bar{K}_E \pm U(\bar{K}_E)$ ); se ha optado por seguir las recomendaciones de Hills [4], de manera que se ha calculado una incertidumbre global, que ha sido asociada a las predicciones del modelo teórico (Ecuación 4-1).

$$u(K_{Global}) = k \cdot \sqrt{u^2(\bar{K}) + u^2(\bar{K}_E)}$$

Ecuación 4-1

Con esto se evitan los falsos positivos, cuando existe cierto grado de concordancia entre los límites de ambas distribuciones, ya que el solapamiento de los límites, no quiere decir que necesariamente las predicciones sean coincidentes con los resultados experimentales (Véase el apartado 2.3.2.1).

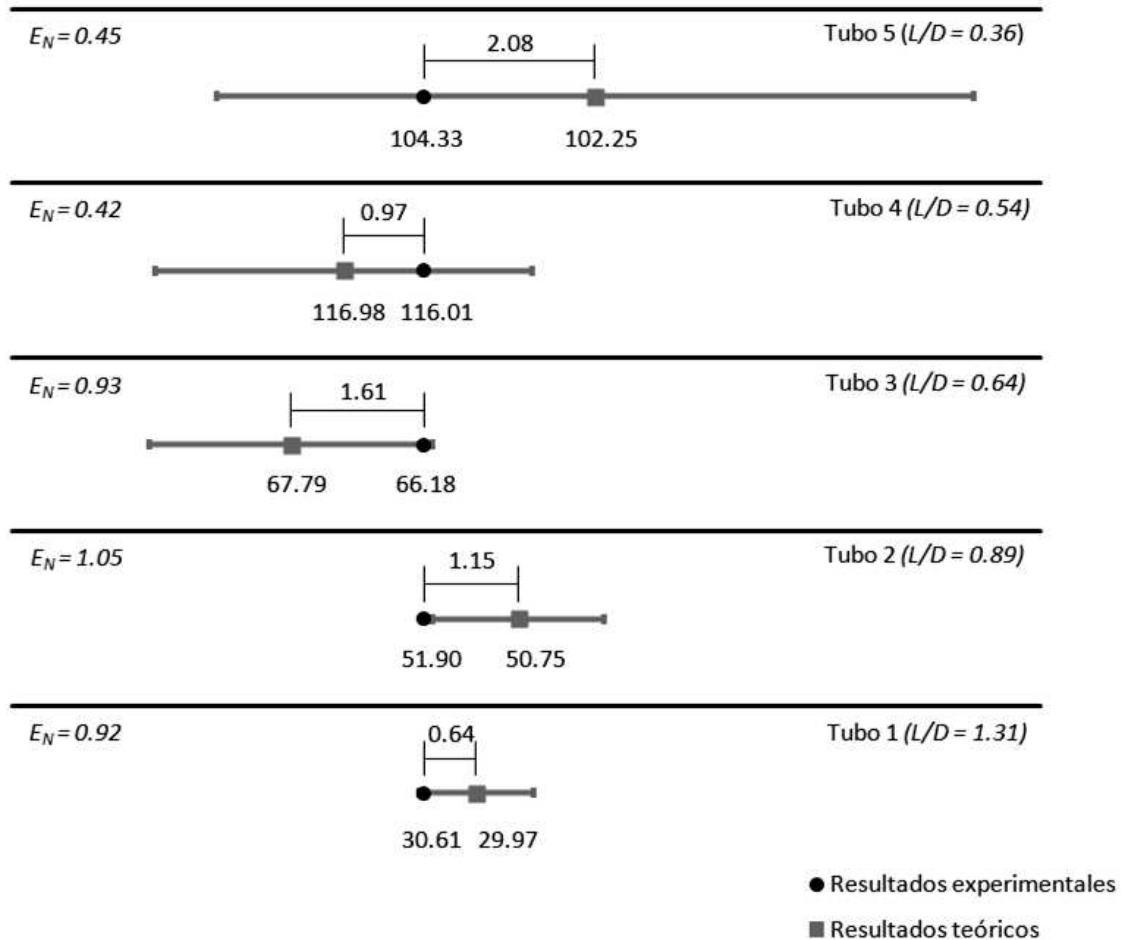


Figura 4-10. Diferencias entre los resultados experimentales y teóricos en conjunto con la incertidumbre expandida

Tal y como puede apreciarse en la Figura 4-10, cuando el resultado experimental está dentro de los límites de la incertidumbre global expandida, asociada al resultado teórico, se dice que el modelo teórico es válido para el nivel de confianza seleccionado, que en este caso ha sido de 95%.

También, puede apreciarse como los límites de la incertidumbre aumentan a medida que la relación  $L/D$  disminuye. De acuerdo con los  $E_N$  obtenidos, los tubos con relaciones  $L/D$  mayores, se ajustan de mejor manera al modelo experimental.

Esto puede interpretarse como una contrariedad, ya que a medida que el tubo se hace más largo, debería parecerse mucho más al modelo ideal. No obstante, hay que tener presente que la contribución de la incertidumbre debida al promediado longitudinal  $u(\bar{K}_{E,av})$ , decrece cuando  $L/D$  aumenta y se incrementa rápidamente cuando sucede lo contrario. Por tanto, mientras más se acerque el modelo real al ideal, cualquier pequeña variación de los resultados experimentales hará que la diferencia con respecto a las predicciones sea mayor que la incertidumbre combinada de ambas. Es decir, la preparación del ensayo y las condiciones de contorno deben ser controladas al máximo, de manera que el objetivo sea minimizar el error.

#### 4.2.4. Consistencia de los resultados experimentales con la muestra estudiada

En casos como el analizado en esta tesis doctoral, en donde la muestra considerada es pequeña y al menos uno de los ensayos no se corresponde con las predicciones del modelo teórico, el procedimiento de generación de sub-muestras con reposición (Bootstrapping) propuesto en el apartado 3.14, puede ayudar a cuantificar el peso que tiene el mal resultado sobre el comportamiento global de la muestra. Con la aplicación de este procedimiento, se han obtenido los límites de cobertura de la media  $(|\bar{E}_N|)$  de todos los índices de compatibilidad  $E_N$  mostrados en la Tabla 4-6.

La Figura 4-11 muestra el valor medio de los índices de compatibilidad y sus límites de cobertura, de acuerdo al procedimiento descrito en el apartado 3.14, a partir de los 5 tubos que han sido ensayados. Tal y como puede verse, el valor de  $|\bar{E}_N|$  y sus límites inferior y superior  $(\bar{E}_{NL}, \bar{E}_{NH})$  están por debajo de la unidad. Con lo cual, se puede concluir que el modelo teórico coincide con el experimental, a pesar de que el primero no se ajusta a los resultados del tubo 2, según las condiciones de aceptación exigidas.

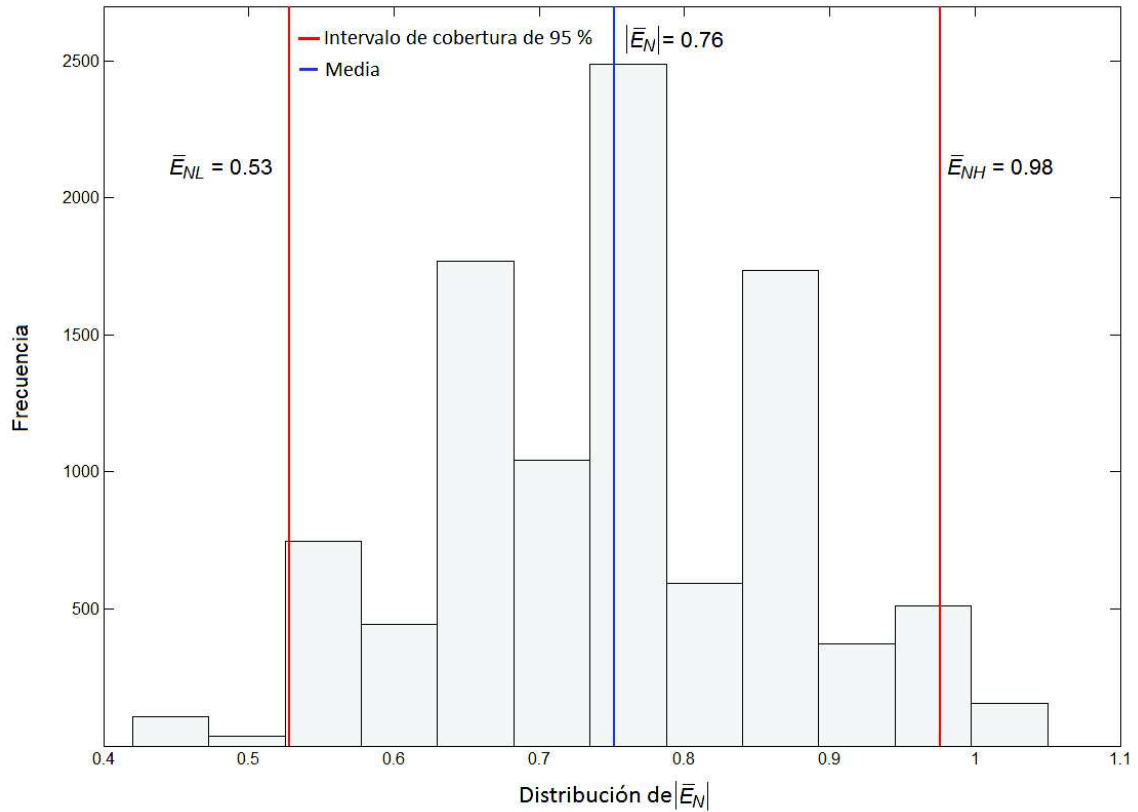


Figura 4-11. Distribución de las  $|\bar{E}_N|$  muestras de Bootstrapping

Para demostrar la utilidad del criterio de aceptación propuesto en esta tesis doctoral, se ha procedido a preparar un nuevo espécimen del mismo cilindro, de donde fue sustraído el tubo 2. De manera que se han aumentado las muestras estudiadas de 5 a 6 tubos.

Las dimensiones del tubo 6 son  $D=99.93$  mm,  $d=85.76$  mm y  $L=100.55$ mm. Se han realizado un total de 10 ensayos, con una carga de 12 kN, de donde se han obtenido los factores de concentración de tensiones experimental y teórico  $\bar{K}_E=78.44\pm 0.53$  y  $\bar{K}=77.73\pm 0.99$ , respectivamente; con un índice de compatibilidad  $E_N=0.63$ .



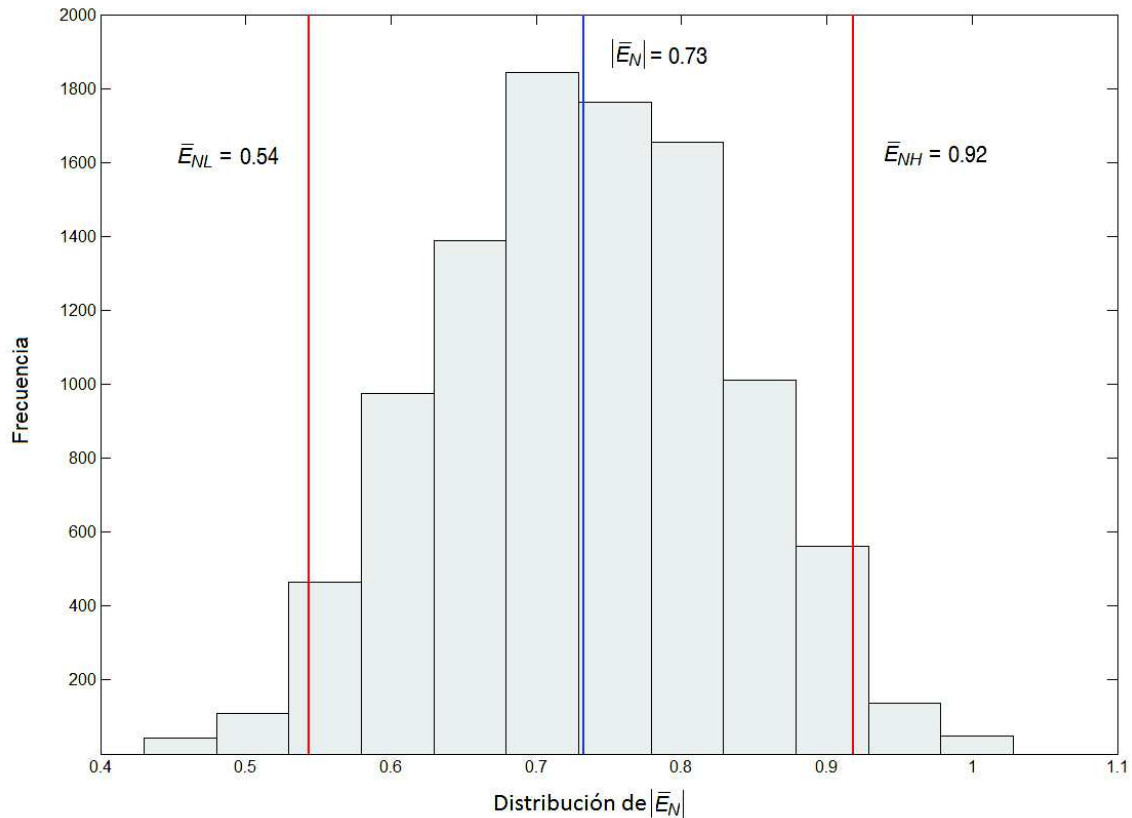


Figura 4-12. Nueva distribución de las  $|\bar{E}_N|$  muestras de Bootstrapping

El histograma de frecuencias de los 6 tubos testados (Figura 4-12) presenta una distribución mejor definida que la correspondiente a la de los 5 tubos iniciales (Figura 4-11). A medida que aumente la cantidad de muestras experimentales, la tendencia del histograma de submuestras generadas con el Bootstrapping se acercará a una normal. Puede apreciarse como el límite superior  $\bar{E}_{NH}$  ha pasado de 0.98 (Figura 4-11) a 0.92 (Figura 4-12). Por tanto, se puede decir que el modelo teórico (Ecuación 3-15), en conjunto con el modelo de incertidumbre propuesto (Ecuación 3-25), reproduce las condiciones de ensayo para un nivel de confianza del 95%.

### 4.3. Resultado de la verificación del comportamiento del modelo validado

El análisis del comportamiento del modelo teórico propuesto por Chianese (Apartado 2.8), según la metodología desarrollada en el apartado 3.15; ha permitido verificar la tendencia de

dicho modelo, a través del histograma de frecuencias de los índices de compatibilidad medios  $\bar{E}_N$ , esta vez sin valor absoluto. El histograma de la verificación del comportamiento de todos los tubos que han sido testados se muestra en la siguiente figura.

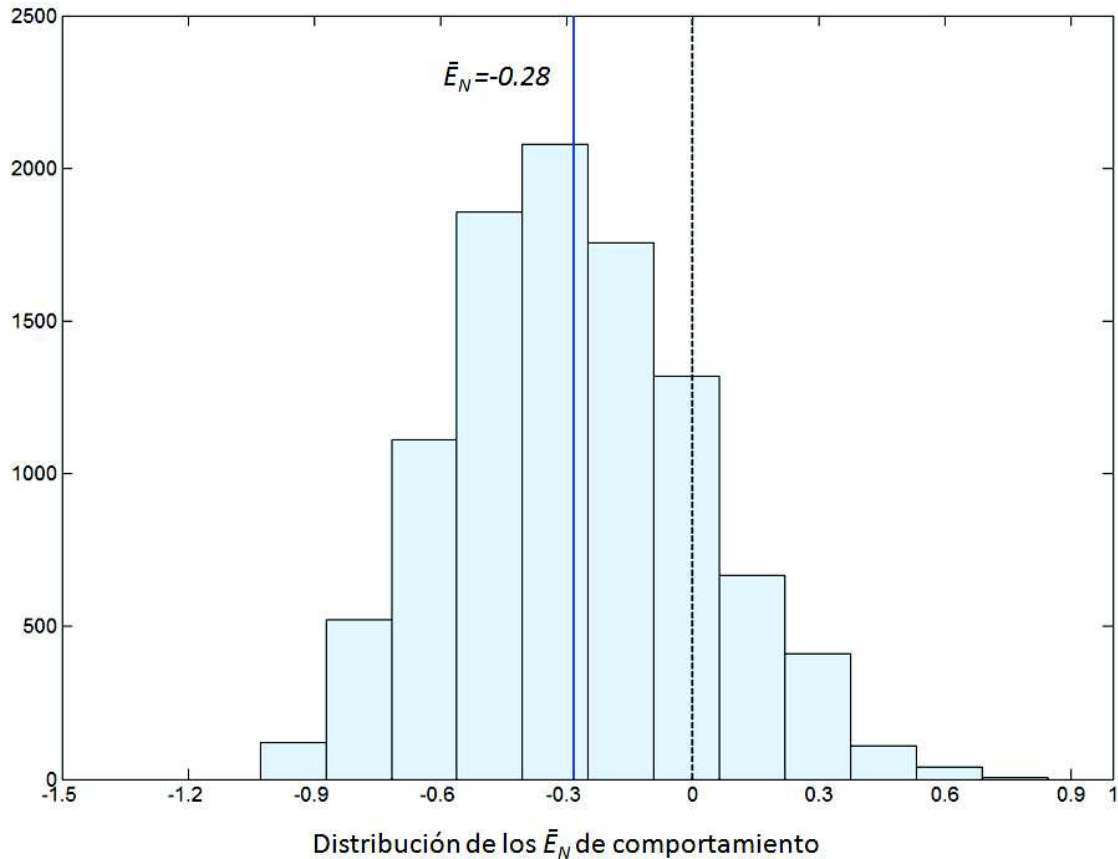


Figura 4-13. Resultado de la distribución de los  $\bar{E}_N$  sin valor absoluto, que informan de la tendencia sub-estimadora del modelo utilizado

La distribución de los  $\bar{E}_N$  mostrada en la Figura 4-13, informa que el modelo teórico presenta una tendencia sub-estimadora, con un desfase con respecto a la condición ideal de validación ( $\bar{E}_N = 0$ ) de -0.28. Como ya se ha comentado en el apartado 3.16, un modelo con comportamiento sub-estimador representa una situación de peligro, ya que la tensión experimentada en conjunto con la incertidumbre global, puede sobrepasar el valor de la resistencia admisible (véase la Figura 3-32). Por tanto, la restricción  $P_A - \left\{ P_D + \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot k \cdot u(P_{Global}) \right] \right\} > 0$  mostrada en el diagrama de flujo de la Figura 3-35, que garantiza la obtención del factor de seguridad mínimo, ha sido determinada incorporando el valor de  $\bar{E}_N$  que hace que se cumpla con la condición ideal, es decir  $\bar{E}_N = 0.28$ .

## 4.4. Resultados del factor de seguridad probabilístico basado en la validación experimental

Una vez conocidas las incertidumbres del modelo teórico, previamente validado de acuerdo con lo propuesto en los apartados 3.13-3.15; ha sido posible estimar el factor de seguridad, que permite estar en una zona segura y evita el sobredimensionamiento.

El cálculo del factor de seguridad basado en el análisis de la incertidumbre, implica el cumplimiento de la restricción  $P_A - \left\{ P_D + \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot k \cdot u(P_{Global}) \right] \right\} > 0$ . Para ello, previamente ha de estimarse la carga  $P_D$  que evita la plastificación de la zona crítica (Figura 3-3). La carga de diseño depende del factor de concentración de tensiones teórico  $\bar{K}_{crítico}$ , perteneciente a dicha zona. Por tanto, ha sido necesario el cálculo de  $\bar{K}_{crítico}$ , con sus respectivas incertidumbres, incluida la debida al promediado longitudinal (Tabla 4-7). El cálculo del factor de concentración de tensiones y su incertidumbre  $u(\bar{K}_{MC}^{int})$ , ha sido realizado a través del procedimiento de Monte Carlo adaptable (Figura 3-18) según GUM [24].

Tabla 4-7. Factor de concentración de tensiones crítico con su incertidumbre

$\bar{K}_{MC}^{int}$	$u(\bar{K}_{MC}^{int})$	$u(\bar{K}_{E,av})$	$u(\bar{K}_{crítico}) = \sqrt{u^2(\bar{K}_{MC}^{int}) + u^2(\bar{K}_{E,av})}$
65.93	0.27	0.22	0.35
105.62	0.42	0.45	0.61
137.76	0.55	0.80	0.97
229.68	0.98	1.02	1.41
202.54	0.54	2.26	2.32

La carga admisible  $P_A$  ha sido calculada a través de la Ecuación 3-14 en donde  $\sigma_{\theta\theta} = S = 355$  MPa (dato suministrado por el proveedor del material). La incertidumbre de la carga admisible ha sido hallada aplicando la ley de propagación de incertidumbre [13] a la Ecuación 3-14.

Al no poseer información acerca de la incertidumbre del límite elástico, se ha estimado su valor a partir de los resultados del amplio estudio realizado por Matusevich [28], sobre los datos de fuerza-deformación de distintos materiales publicados en la página web del instituto

nacional de medida del Reino Unido [30]. La incertidumbre expandida estimada por Matusevich en ninguno de los materiales estudiados superó el 1.1% del valor del límite elástico (Ver Tabla 2-1). Sin embargo, la incertidumbre calculada por dicho autor no considera la aportación debida a la repetibilidad. Por otro lado, en el manual de buenas prácticas para la identificación y determinación de las incertidumbres en los ensayos de materiales, perteneciente al instituto nacional de medida del Reino Unido [27] se presenta el resultado de un ensayo de tracción realizado sobre una probeta de acero galvanizado, en donde una de las componentes de la incertidumbre combinada final del límite elástico, es la repetibilidad. En dicho estudio, la incertidumbre expandida para un nivel de confianza del 95%, resultó ser del 1.3% del valor del límite elástico.

Por lo dicho anteriormente, con miras a estar del lado de la seguridad, en esta tesis doctoral se ha supuesto una incertidumbre relativa del límite elástico del 2%, para un nivel de confianza del 95%.

Las cargas admisibles  $P_A$  y de diseño  $P_D$ , con sus respectivas incertidumbres, fueron calculadas según el análisis del factor de seguridad del apartado 3.16, basado en la previa validación del modelo teórico utilizado. Para ello, fue necesario la implementación del proceso de optimización que garantiza las condiciones de seguridad mínimas, el cual ha sido representado en la Figura 3-35 (Apartado 3.17).

En la Tabla 4-8 se presentan los resultados de las cargas anteriormente nombradas, en conjunto con sus respectivas incertidumbres y los factores de seguridad mínimos, para un nivel de confianza del 95.45%. Las estimaciones realizadas, corresponden a una máquina de ensayos universales clase 3 ( $U=\pm 2.61\%$  [80]).

**Tabla 4-8. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 95.45% ( $k=2$ )**

	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>	<b>Tubo 4</b>	<b>Tubo 5</b>
$P_A$ (kN)	31.584	22.644	20.205	14.447	25.655
$u(P_A)$ (kN)	0.360	0.264	0.249	0.171	0.394
$P_D$ (kN)	30.218	21.654	19.298	13.812	24.359
$u(P_D)$ (kN)	0.394	0.283	0.252	0.180	0.318
Factor de seguridad ( $F_s$ )	1.045	1.046	1.047	1.046	1.053

En la Tabla 4-8 puede apreciarse que los factores de seguridad obtenidos para cada tubo son muy similares, sin embargo las cargas tanto admisibles  $P_A$  como de diseño  $P_D$  no los son. Esto es debido a que el procedimiento utilizado para el cálculo del factor de seguridad, determina las cargas necesarias que garantizan que la tensión de diseño  $\sigma$ , en conjunto con la incertidumbre global expandida  $U(\sigma_{Global})$ , no sobrepase el valor de tensión del límite elástico  $S$ . Por tanto, si se sustituyen los valores de carga de la Tabla 4-8 en la ecuación analítica correspondiente a la tensión circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  (Ecuación 2-53), se puede corroborar que efectivamente las tensiones de diseño ( $\sigma = \sigma_{\theta\theta}$ ) de todos los tubos son similares ( $\sigma_{\theta\theta} \approx 340 \text{ MPa}$ ), excepto en el tubo 5 ( $\sigma_{\theta\theta} = 337 \text{ MPa}$ ).

La diferencia entre el factor de seguridad del tubo 5 con respecto al resto se debe a la magnitud de su incertidumbre global, que no permite obtener un factor de seguridad menor que  $FS = 1.053$ . Recuérdese que el tubo 5 es el que presenta el mayor valor de incertidumbre del factor de concentración de tensiones crítico  $u(\bar{K}_{crítico})$  (Tabla 4-7), debido a la variación de dicho factor a lo largo de la longitud del tubo, que ha sido nombrada  $u(\bar{K}_{E,av})$ . Como consecuencia, la carga admisible  $P_A$  perteneciente a este tubo es la que mayor variabilidad presenta ( $u(P_A) = 0.394$ ), llegando incluso a superar al tubo con mayor carga admisible (Tubo 1).

Lo dicho anteriormente influye en el valor final del factor de seguridad mínimo, ya que todos los posibles valores de  $P_A$ , que permiten la obtención de un factor de seguridad similar al del resto de tubos, tendrían que estar en una zona más acotada. Por tanto, para que el factor de seguridad sea similar se debe usar un factor de cobertura  $k$  menor, lo que implica una probabilidad de fallo mayor que la correspondiente a un nivel de confianza del 95.45%.

A continuación, se muestra el histograma de frecuencias de todos los posibles valores que puede tomar la carga de diseño, para el caso del tubo 1 (Figura 4-14). El histograma ha sido generado con  $10^6$  simulaciones de Monte Carlo, a partir de los resultados expuestos en la Tabla 4-8.

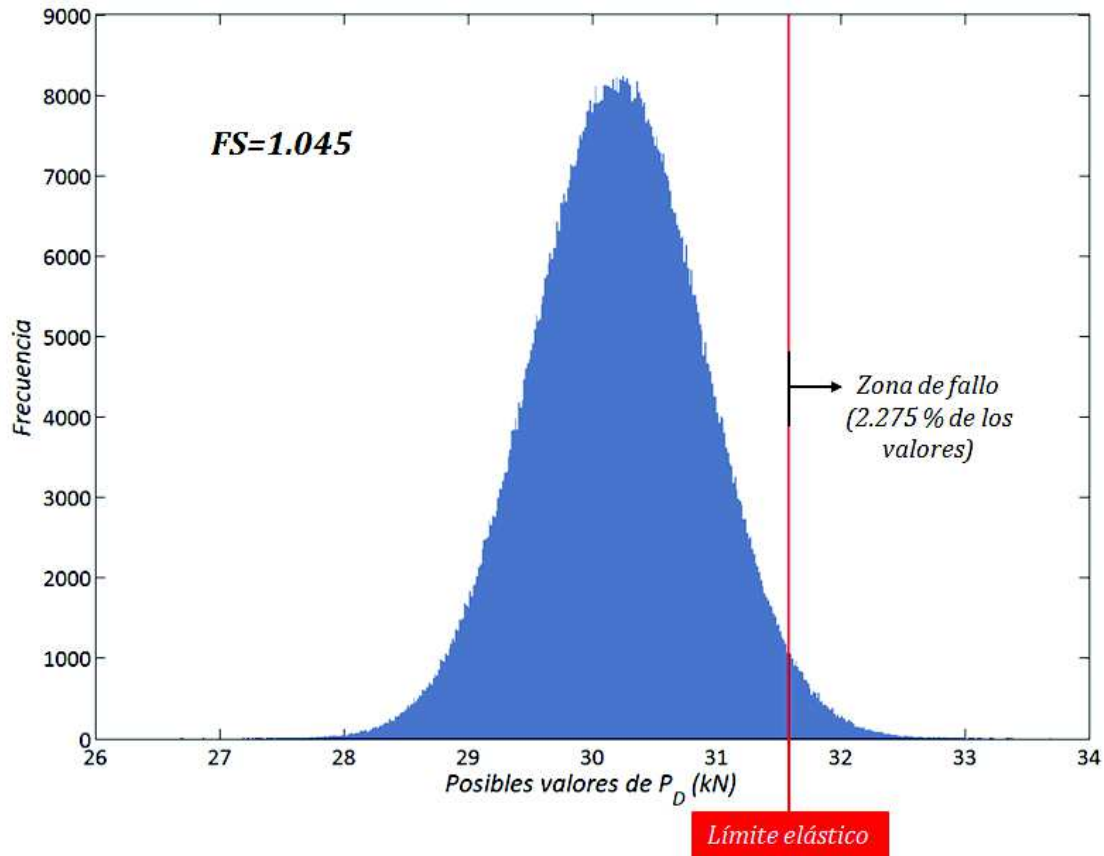


Figura 4-14. Histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para  $k=2$

Tal y como puede apreciarse en la Figura 4-14 para un factor de cobertura de  $k=2$ , en el 2.275% de los casos la carga de diseño puede superar a la carga admisible. Esto quiere decir, que probablemente entre 2 y 3 de cada 100 tubos ensayados, la tensión generada superará al valor del límite elástico.

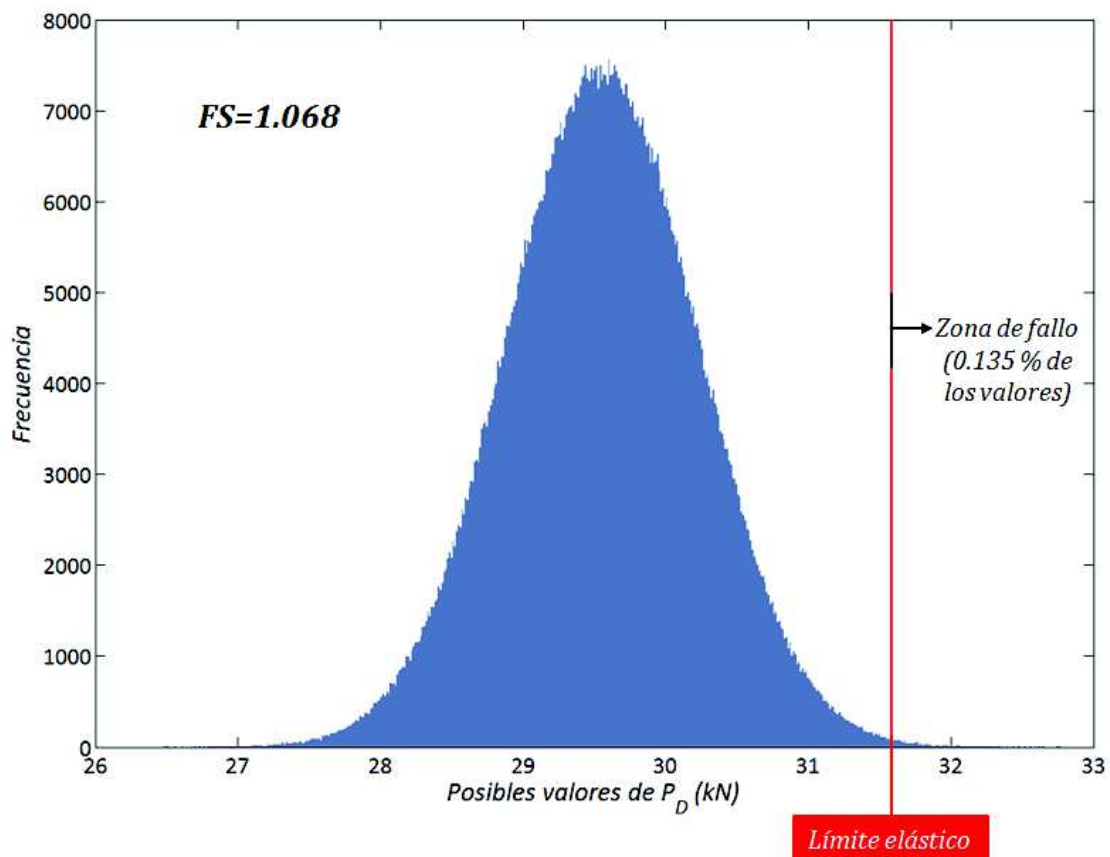
Los factores de seguridad obtenidos con la metodología propuesta garantizan que la tensión generada en la zona crítica de los tubos no superara el valor del límite elástico, de acuerdo con la probabilidad de fallo seleccionada, definida a través del factor de cobertura  $k$ . Es por ello que se ha querido cuantificar el impacto que tiene la elección del factor de cobertura  $k$ , sobre el valor del factor de seguridad mínimo. La Tabla 4-9 muestra el factor de seguridad en conjunto con las cargas de diseño y sus respectivas incertidumbres, para un nivel de confianza del 99,73% ( $k=3$ ).

Tabla 4-9. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 99.73% ( $k=3$ )

	Tubo 1	Tubo 2	Tubo 3	Tubo 4	Tubo 5
$P_D$ (kN)	29.559	21.177	18.861	13.505	23.731
$u(P_D)$ (kN)	0.386	0.276	0.246	0.176	0.310
Factor de seguridad ( $F_s$ )	1.068	1.069	1.071	1.070	1.081

En la Tabla 4-9 se muestran únicamente los valores de la carga de diseño con su incertidumbre, en conjunto con los factores de seguridad resultantes; esto se debe a que las cargas admisibles con sus respectivas incertidumbres, para cada tubo, son las mismas que las mostradas en la Tabla 4-8, ya que no dependen del factor de seguridad sino del valor del límite elástico ( $S \pm u(S)$ ).

Adicionalmente, se ha generado el histograma de frecuencias correspondiente a la carga de diseño para el mismo tubo analizado anteriormente (Figura 4-15).

Figura 4-15. Histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para  $k=3$ 

Puede apreciarse en la Figura 4-15 que, como era de esperar, al aumentar el valor del factor de cobertura se produce un descenso de la probabilidad de fallo. Esto es debido a que la carga

de diseño  $P_D$  se desplaza hacia la izquierda a medida que se acrecientan los límites de la incertidumbre global expandida  $k \cdot u(P_{Global})$ . Así pues, para un nivel de confianza de 99.73% (Figura 4-15), la probabilidad de fallo decrece aproximadamente un 2.14% con respecto a la mostrada en la Figura 4-14, correspondiente a un nivel de confianza del 95.45%.

La diferencia relativa porcentual entre los factores de seguridad para  $k=2$  y  $k=3$ , (Figura 4-14 y Figura 4-15, respectivamente), es de aproximadamente 2.2%. Dicho porcentaje de variación hace que se pase de tener a una probabilidad 27 fallos por cada 1 000 tubos ensayados para  $k=2$ , a entre 1 y 2 fallos por cada 1 000 tubos para  $k=3$ .

Siguiendo con el análisis del efecto que tiene la elección del factor de cobertura  $k$  en la estimación de la carga de diseño y por tanto en la magnitud del factor de seguridad, se ha procedido a calcular el factor de seguridad mínimo perteneciente a un nivel de confianza del 99.994% ( $k=4$ ), o lo que es igual, para una probabilidad de fallo de 0.003% (Tabla 4-10).

**Tabla 4-10. Resultados finales del análisis del factor de seguridad para un nivel de confianza del 99.994% ( $k=4$ )**

	<b>Tubo 1</b>	<b>Tubo 2</b>	<b>Tubo 3</b>	<b>Tubo 4</b>	<b>Tubo 5</b>
$P_D$ (kN)	28.915	20.710	18.432	13.205	23.115
$u(P_D)$ (kN)	0.377	0.270	0.241	0.172	0.302
Factor de seguridad ( $F_s$ )	1.092	1.093	1.096	1.094	1.109

Comparando los resultados de la Tabla 4-10 con los expuestos en la Tabla 4-8 y en la Tabla 4-9, puede apreciarse que los valores de la carga de diseño  $P_D$  en conjunto con su incertidumbre  $u(P_D)$ , disminuyen como consecuencia de aplicar un factor de cobertura mayor. Al aumentar el factor de cobertura  $k$  se acrecienta la distancia entre la esperanza media de la carga de diseño  $P_D$  y el valor límite de la carga admisible  $P_A$ . Nótese además, como la incertidumbre de la carga de diseño  $u(P_D)$  en todos los tubos, resulta menor que los analizados anteriormente. Esto se debe a que la incertidumbre  $u(P_D)$  es una función directa de  $P_D$ , por lo tanto, es de esperar que a medida que disminuya la magnitud de la carga de diseño, también lo haga su incertidumbre. No obstante, el factor de cobertura empleado, hace que se considere un mayor porcentaje de todos los posibles valores fácilmente atribuibles a la carga de diseño, ubicados más hacia los extremos de la campana de distribución de probabilidad. En la Figura 4-16 se muestra el histograma de frecuencias de la carga de diseño, perteneciente al resultado del tubo 1 (Tabla 4-10).



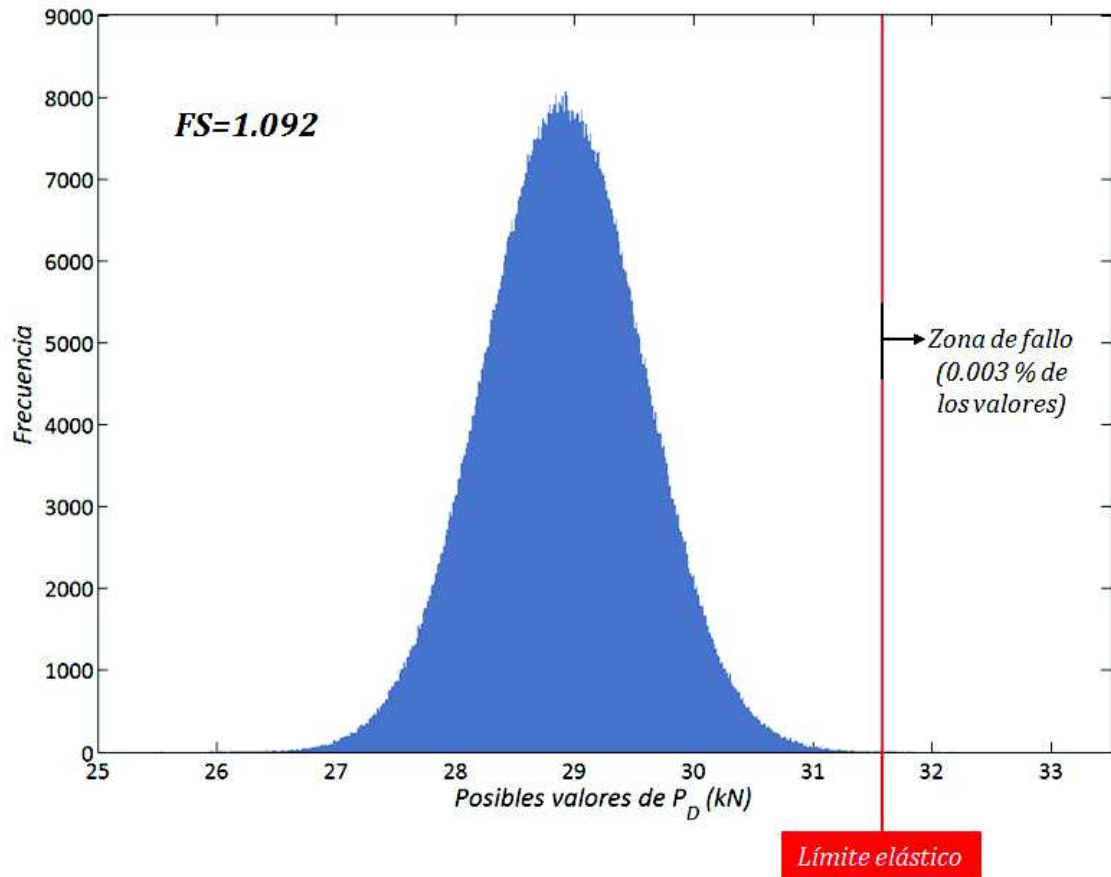


Figura 4-16. Histograma de frecuencias de las cargas admisibles y de diseño del tubo 1, para  $k=4$

Un factor de cobertura de 4 desviaciones estándar (Figura 4-16) nos informa que en sólo 3 de cada 100 000 ensayos, la zona crítica del tubo probablemente experimentará una tensión superior a la del límite elástico del material. Si lo comparamos con el resultado correspondiente al nivel de confianza anterior, con una variación relativa del factor de seguridad un poco mayor al 2.2%, se pasa de tener en torno a 2 fallos por cada 1000, a 1 fallo por aproximadamente 33 000 tubos ensayados.

Se puede ir aumentando el factor de cobertura  $k$  de manera que el factor de seguridad se acerque a un valor en particular. En la Figura 4-17 se muestra la evolución del factor de seguridad en función de la probabilidad de fallo en escala logarítmica de base 10. Esto permite tener una idea general, de la probabilidad de fallo asociada a cada factor de seguridad, correspondiente al modelo teórico utilizado en esta tesis doctoral.

Los factores de seguridad basados en la metodología propuesta permiten vincular dicho factor al conocimiento que se tiene del problema a estudiar. Como ya se ha visto, este puede asociarse a la probabilidad de fallo de la pieza o estructura a diseñar, tomando en cuenta todas las fuentes de incertidumbres presentes, previa validación y adaptación del modelo teórico a la

condición real. La elección de la probabilidad de fallo dependerá de la aplicación del componente a diseñar, de acuerdo con la normativa vigente.

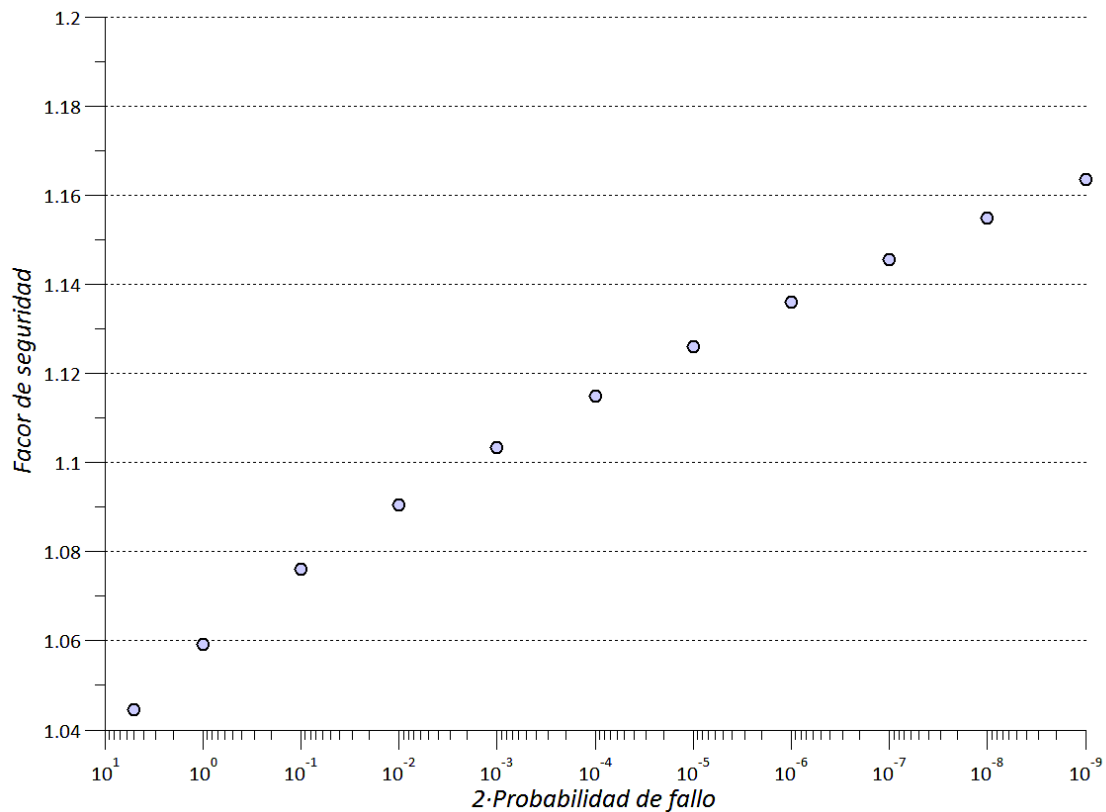


Figura 4-17. Evolución del factor de seguridad en función de la probabilidad de fallo

Al aplicar la metodología propuesta a un diseño en particular, es posible crear una gráfica del factor de seguridad en función de la probabilidad de fallo, como la mostrada en la Figura 4-17. De manera que, si las condiciones de contorno no varían de un diseño con respecto a otro posterior, se puede seleccionar el factor de seguridad acorde con la probabilidad de fallo exigida directamente de la gráfica generada. Dado que el factor de seguridad seleccionado ya tiene en cuenta la naturaleza estocástica de las variables involucradas, se puede calcular la tensión de diseño directamente con la Ecuación 3-33.

Los factores de seguridad representados en la Figura 4-17, están por debajo de los valores comúnmente utilizados en ingeniería, que oscilan entre 1.2 y 3 [18]. No obstante, en diseños mucho más complejos, es posible que los factores de seguridad estén en el rango antes mencionado.

La metodología planteada permite justificar el valor del factor de seguridad, tomando en consideración las incertidumbres presentes. Esta metodología plantea la validación experimental previa del modelo teórico empleado, y la posterior verificación de la tendencia

de comportamiento de las predicciones, según las recomendaciones expuestas en el apartado 3.15. La validación experimental del modelo facilita la cuantificación de las incertidumbres vinculadas al ensayo en sí, no contempladas en el modelo teórico. Por otro lado, la incorporación del índice de compatibilidad  $\bar{E}_N$ , en la expresión del factor de seguridad (Ecuación 3-42 y Ecuación 3-43), permite considerar la tendencia de comportamiento observado en el proceso de validación experimental.

Por lo dicho anteriormente, se ha querido verificar la importancia que tiene sobre el factor de seguridad, la inclusión de:

- La componente de incertidumbre asociada a la adaptación del modelo teórico a la condición real, expresada en este caso a través de  $u(\bar{K}_{E,av})$ .
- El valor del índice de compatibilidad  $\bar{E}_N$  de comportamiento, para un modelo con tendencia sub-estimadora (Figura 3-28 del apartado 3.15).

Para ello, se ha repetido el cálculo de los factores de seguridad mínimo para un factor de cobertura  $k=2$ .

Se ha observado que la omisión de la componente de incertidumbre  $u(\bar{K}_{E,av})$  en la incertidumbre final del modelo teórico  $u(\bar{K}_{crítico})$ , produce un aumento de la probabilidad de fallo, que pasa de 2.275% a 2.52% para el tubo 1 y 4.96% para el tubo 5. Por tanto, se puede decir que a medida que la relación entre la longitud del tubo con respecto a su diámetro exterior ( $L/D$ ) disminuye, resulta más evidente la influencia de dicha componente de incertidumbre en la probabilidad de fallo final.

Por otro lado, en la Figura 4-18 se muestra el histograma de frecuencias de la tensión de diseño ( $\sigma$ ) correspondiente al tubo 1, para un factor de cobertura  $k=2$ . Las cargas empleadas en la estimación del factor de seguridad ideal ( $FS_{ideal}$ ) han sido calculadas ignorando la tendencia sub-estimadora de tensión del modelo que ha sido validado ( $\bar{E}_N = -0.28$ ). Para ello, se ha introducido el valor de  $\bar{E}_N = 0$  en la restricción  $P_A - \left\{ P_D + \left[ (1 + \bar{E}_N) \cdot k \cdot u(P_{Global}) \right] \right\} > 0$  mostrada en el diagrama de flujo de la Figura 3-35. Al histograma resultante se le ha superpuesto la distribución de los posibles valores reales de la tensión experimentada, que han sido estimados considerando el desfase observado en la validación.

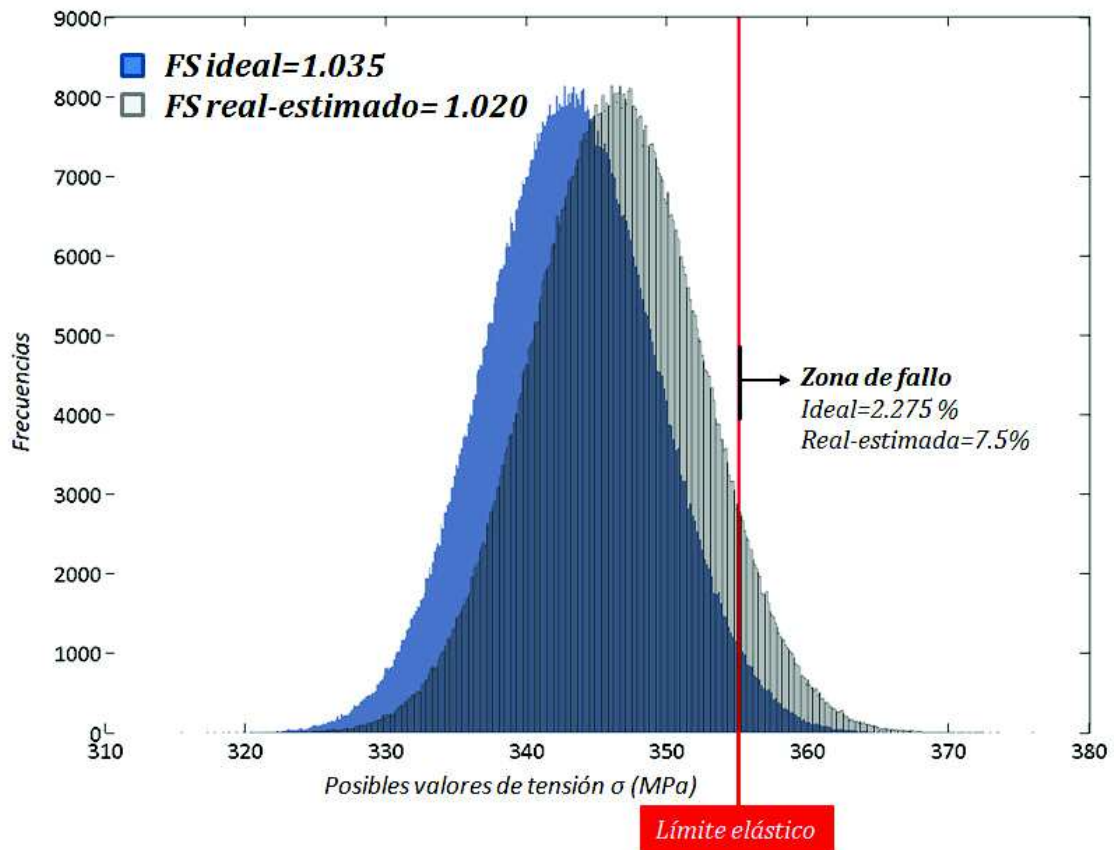


Figura 4-18. Superposición de los histograma de frecuencias de la tensión de diseño del tubo 1, para  $k=2$  del modelo ideal y del modelo real-estimado.

En la figura anterior puede verse que la omisión de la tendencia sub-estimadora del modelo produce el aumento de la probabilidad de fallo estimada, que pasa de 2.275% a 7.5%. Dicho aumento se debe a que el modelo tiende a sub-estimar la tensión experimentada, por lo tanto indica que se puede aplicar más carga de la que realmente soporta el componente. El modelo ideal pronostica que para un factor de cobertura de  $k=2$ , por cada 100 tubos ensayados se tendrían entre 2 y 3 fallos, cuando la realidad es que con los valores de carga  $P_d$  calculados con dicho modelo, es más probable tener 8 fallos por cada 100.

Al considerar la tendencia sub-estimadora del modelo teórico en el cálculo del factor de seguridad, las cargas de diseño estimadas son ajustadas, en función del desfase observado en la validación del modelo. La incorporación del índice de compatibilidad de comportamiento, produce el ensanchamiento de la base de la campana de distribución de todos los posibles valores atribuibles a las predicciones de  $P_d$ , y por consiguiente, de las tensiones pronosticadas (Figura 4-19). Al considerar que la magnitud de la incertidumbre global del modelo con tendencia sub-estimadora es mayor que la del modelo ideal, el primero exige un mayor

desplazamiento del valor promedio de la carga de diseño con respecto al valor extremo (Límite elástico). Es por ello, que el factor de seguridad del modelo sub-estimador corregido es mayor que el del modelo considerado como ideal. De esta manera, las cargas de diseño calculadas con el modelo sub-estimador corregido, aseguran el cumplimiento de la probabilidad de fallo seleccionada.

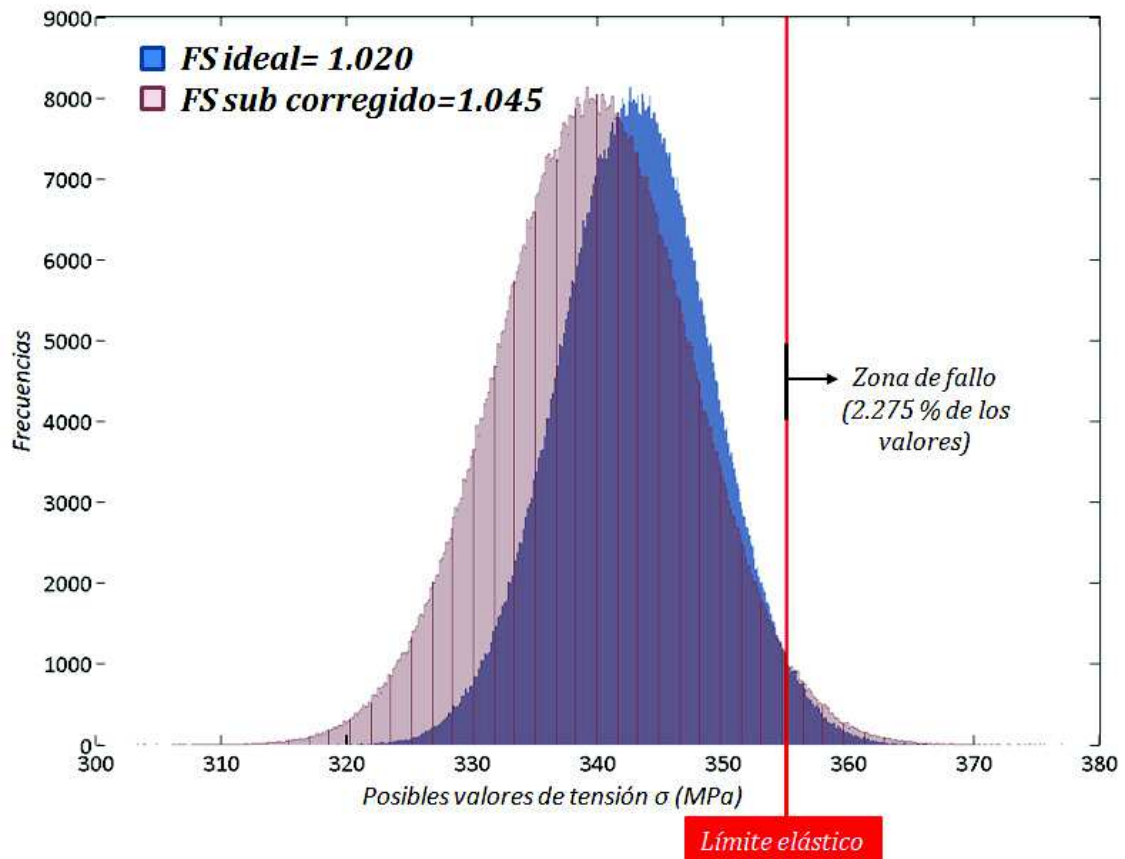


Figura 4-19. Superposición de los histograma de frecuencias de la carga de diseño del tubo 1, para  $k=2$  del modelo ideal y del modelo real estimado.



# CAPÍTULO 5

## *Conclusiones*

---

La investigación desarrollada en esta tesis doctoral ha permitido elaborar una nueva metodología para el cálculo del factor de seguridad probabilístico, basado en la validación experimental previa del modelo analítico.

La metodología ha sido aplicada a un modelo de tensión bidimensional, el cual ha sido contrastado con resultados experimentales, provenientes de los ensayos realizados sobre una muestra de 5 tubos, con diferentes características geométricas. Una vez culminada la validación, se ha relacionado el comportamiento del modelo observado en dicho proceso, con la expresión del factor de seguridad probabilístico, a través del estadístico de validación denominado índice de compatibilidad ( $E_N$ ), de uso común en la comparación entre laboratorios [6].

Como resultado de la presente investigación, se propone esta metodología para el cálculo del factor de seguridad probabilístico, que consta de los siguientes pasos:

- *Identificación y cuantificación de todas las posibles fuentes de incertidumbre, de las variables del modelo y de las condiciones de ensayo.* Esto permite tener un mayor conocimiento del problema a través del análisis de las variables de mayor influencia del sistema.

- *Adaptación de las predicciones a las condiciones de contorno del ensayo experimental.*

La adaptación se realiza a través de un modelo de incertidumbre, en donde se pueden introducir nuevas fuentes de incertidumbre no contempladas en las variables del modelo teórico, debido al incumplimiento de las condiciones ideales planteadas por el mismo.

- *Validación de las predicciones con el estadístico de validación  $E_N$ , en valor absoluto.* El índice de compatibilidad ( $E_N$ ), ha demostrado ser una herramienta objetiva de validación, ya que relaciona la diferencia entre las predicciones y las observaciones experimentales, con la incertidumbre expandida de ambas. Al ser adimensional, permite unificar los criterios de aceptación del total de comparaciones experimentales realizadas, que deben estar comprendidas entre 0 y 1.

- *Comprobación de la consistencia de los resultados obtenidos con el tamaño de la muestra analizada, a través de la técnica de re-muestreo con reposición conocida como *Bootstrapping* [7].* Con la aplicación de esta técnica se generan resultados adicionales a partir de la muestra analizada, que permite construir la distribución de probabilidad en función de los resultados de la validación, sin necesidad de asignar una función de distribución. De esta manera, a pesar de que cada ensayo es independiente, en la validación final se considera cómo afecta cada resultado al global. Para ser aceptado sus límites correspondientes a un nivel de confianza del 95%, deben estar entre 0 y 1.

Con la ayuda de este procedimiento, en esta tesis doctoral se ha podido verificar que a pesar de que en 1 de los 5 tubos analizados, las predicciones no son compatibles con las observaciones experimentales, el modelo puede ser aceptado, ya que los límites del intervalo de cobertura de todas las muestras analizadas no han superado la unidad.

- *Verificación del comportamiento sobre-estimador o sub-estimador del modelo, a través de la elaboración de un histograma de frecuencias de todos los  $E_N$  obtenidos, pero esta vez sin valor absoluto.* El análisis de comportamiento del modelo validado ha revelado que las predicciones tienden a sub-estimar la realidad; por tanto, se ha considerado que el modelo teórico no cumple con la condición ideal para el cálculo del factor de seguridad, ya que una tendencia sub-estimadora representa una situación de peligro potencial.

- *Vincular el resultado de la verificación del comportamiento sobre-estimador o sub-estimador del modelo, con el factor de seguridad probabilístico.* De esta manera, tal y como se ha demostrado en los resultados obtenidos en esta tesis doctoral, en modelos con tendencia sub-estimadora de la realidad, la introducción del  $\bar{E}_N$  provoca un aumento del valor del factor



de seguridad probabilístico, debido al mayor distanciamiento entre la carga de diseño y la carga admisible del material, producto del aumento de los límites de la incertidumbre global expandida.

La metodología propuesta proporciona al ingeniero una serie de herramientas que le ayudan en la toma de decisiones, y que le permiten ajustar el factor de seguridad a un valor mínimo, cuando se posee una amplia información del problema.

Se plantea, como trabajo futuro, llevar a cabo el desarrollo de la metodología propuesta en sistemas ingenieriles complejos, de manera que se pueda:

*Verificar* la sensibilidad del sistema, a través de la identificación de las fuentes de incertidumbre que pueden ser propagadas con simulaciones de tipo Monte Carlo.

*Optimizar* el diseño considerando el resultado de validación, en donde el objetivo sea modificar la precisión de los parámetros que hacen mínimo al estadístico de validación  $E_N$ .

*Relacionar* los resultados de la validación de las distintas variables que afectan al sistema, ya que son normalizadas con el estadístico de validación  $E_N$ .

*Analizar* la obtención de distintos factores de seguridad para cada elemento del sistema acorde a una probabilidad de fallo global, en lugar de un factor de seguridad común.



# Referencias

- [1] Elishakoff, I., 2013. Recent developments in applied mechanics with uncertainties. *4th Inverse problems, design and optimization symposium (IPDO-2013)*.
- [2] Elishakoff, I. and M. Ohsaki., 2010. *Optimization and anti-optimization of structures under uncertainty*. World Scientific Publishing Company, Incorporated, Singapore.
- [3] Sebastian, C., Hack,E., et al., 2012. An approach to the validation of computational solid mechanics models for strain analysis. *SAGE Publications. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 48, pp 36-47.
- [4] Hills, R. G. and Trucano,T. G., 1999. Statistical validation of engineering and scientific models: background. Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Report no.SAND99-1256.
- [5] Ben, H., T., W. Scott Doebbling, et al. (2004). Concepts of model verification and validation. *Los Alamos National Laboratory, LA-14167-MS, 27*.
- [6] ISO 13528:2005, Statistical methods for use in proficiency testing by interlaboratory comparisons.
- [7] Efron, B., 1979. Bootstrap methods: another look at the Jackknife. *JSTOR. The Annals of Statistics*, vol. 7, pp 1-26.
- [8] Hesterberg, T., 2014. What teachers should know about the bootstrap: resampling in the undergraduate statistics curriculum. *arXiv Preprint arXiv:1411.5279*.
- [9] Elishakoff, I., 2001. *Interrelation between safety factors and reliability*. National Aeronautics and Space Administration, Glenn Research Center.
- [10] D. Ullman, 2009. *The Mechanical Design Process*. McGraw-Hill Education.
- [11] Ching, J., 2009. Equivalence between reliability and factor of safety. *Elsevier. Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 24, pp 159-171.
- [12] Sáez Ruiz S., and Font Avila L., 2001. *Incertidumbre de la medición: Teoría y práctica*. Venezuela.
- [13] JCGM 100:2008, 2008. *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of the uncertainty in measurement*. Joint Committee for Guides in Metrology.
- [14] Hoek, E., 2000. Factor of safety and probability of failure. *Rocscience*, pp 1-14.

- [15] Elishakoff, I., 2005. Stochasticity and safety factors: part 1. Random Actual stress and deterministic yield stress. *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 23, pp 321-331.
- [16] R. L. Norton, 1999. *Diseño De Máquinas*. México: Pearson Prentice Hall.
- [17] Gutiérrez, C., S., 1984. Probabilidad, posibilidad, verdad e incertidumbre. *Estadística Española*, vol. 104, pp 5-22.
- [18] Elishakoff, I. and Ferracuti, B., 2006. Fuzzy Sets based interpretation of the safety factor. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, pp 2495-2512.
- [19] Qu, X., and R. T. Haftka., 2003. Design Under uncertainty using monte carlo simulation and probabilistic sufficiency factor. *ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp 3-12.
- [20] Sanjaa, B.; Tsoozol, P., 2007. Fuzzy and probability. *International Forum on Strategic Technology (IFOST 2007)*, pp 141-143.
- [21] Hájek, P., L. Godo, et al., 1995. Fuzzy Logic and probability. *Morgan Kaufmann Publishers Inc.*, pp 237-244.
- [22] H. J. Zimmermann, 2001. *Fuzzy set theory—and its applications*. Springer Netherlands.
- [23] Zadeh, L., 1978. *Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility*. *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1. pp 3-28.
- [24] JCGM 101:2008, 2008. *Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”. Propagation of distributions using a Monte Carlo method*. Joint Committee for Guides in Metrology.
- [25] ASTM E8M-01, 2001. Standard Test methods for tension testing of metallic materials [Metric]. ASTM International, West Conshohocken, PA.
- [26] European Committee for Standardization, 2001. Metallic materials - tensile testing - Part 1: method of test at ambient temperature.
- [27] W, G., 2000. Manual of codes of practice for the determination of uncertainties in mechanical tests on metallic materials. *UNCERT COP. 7*. [Consulta: 04-11-2014]. Disponible en: <http://www.npl.co.uk/upload/pdf/cop09.pdf>.
- [28] Matusевич, A., Massa, J., et al., 2013. Computation and uncertainty evaluation of offset yield strength. *Journal of Testing and Evaluation*, vol. 41, pp 217-230.
- [29] Williamson, J. H., 1968. Least-squares fitting of a straight line. *Canadian Journal of Physics*, vol. 46, pp 1845-1847.
- [30] National Physical Laboratory. *Tensile Testing - standards and TENSTAN*. [Consulta: 15-01-2015]. Disponible en: <http://www.npl.co.uk/science-technology/engineered-materials/research/mechanical/tensile-testing-standards-and-tenstand>.

- [31] Aughenbaugh, J. M. and Paredis, C., 2006. Why are Intervals and imprecision important in engineering design?. *Georgia Institute of Technology*, pp 1-22.
- [32] Liu, Y., Chen, W., et al., 2011. Toward a better understanding of model validation metrics. *Journal of Mechanical Design*, vol. 133, pp 1-13.
- [33] Chen, W., Baghdasaryan, L., et al., 2004. Model Validation via uncertainty propagation and data transformations. *AIAA Journal*, vol. 42, pp 1406-1415.
- [34] Rebba, R. and Mahadevan, S., 2006. Validation of models with multivariate output. *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 91, pp 861-871.
- [35] Schwer, L. E., 2007. An overview of the PTC 60/V&V 10: guide for verification and validation in computational solid mechanics. *Springer. Engineering with Computers*, vol. 23, pp 245-252.
- [36] Oberkampf, W. L. and Barone, M. F., 2006. Measures of agreement between computation and experiment: validation metrics. *Journal of Computational Physics*, vol. 217, pp 5-36.
- [37] Hills, R. G. and Trucano, T. G., 2002. Statistical validation of engineering and scientific models: a Maximum likelihood based metric. Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, Report no. SAND2001-1783.
- [38] Rencher, A. C., 2003. *Methods of multivariate analysis*. John Wiley & Sons.
- [39] Espejo, P. Fernández F., et al., 2006. *Estadística descriptiva y probabilidad: Teorías y problemas*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.
- [40] Luis, S. J. and McLaughlin, D., 1992. A Stochastic approach to model validation. *Elsevier. Advances in Water Resources*, vol. 15, pp 15-32.
- [41] Wei, C., Chris, P., et al., 2012. Design under uncertainty. *Journal of Mechanical Design*, vol. 134, pp 1-2.
- [42] Barbosa, M., Morris, D., et al., 1989. Factor of safety and probability of failure of rockfill embankments. *Thomas Telford. Geotechnique*, vol. 39, pp 471-483.
- [43] Duncan, J. M., 2000. Factors of safety and reliability in Geotechnical engineering. *American Society of Civil Engineers. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 126, pp 307-316.
- [44] Niu, W., 2014. Determination of slope safety factor with analytical solution and searching critical slip surface with genetic-traversal random method. *Hindawi Publishing Corporation. The Scientific World Journal*, vol. 2014, pp 1-13.
- [45] Lee, C. and Kwon, H. J., 2009. Reliability analysis and evaluation of partial safety factors for random wave overtopping. *Springer. KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 13, pp 7-14.

- [46] Márquez-Domínguez, S. and Sorensen, J. D., 2012. Fatigue Reliability and calibration of fatigue design factors for offshore wind turbines. *Molecular Diversity Preservation International. Energies*, vol. 5, pp 1816-1834.
- [47] Chung, I., Cho, W., et al., 2003. Stochastic hydraulic safety factor for gas containment in underground storage caverns. *Journal of Hydrology*, vol. 284, pp 77-91.
- [48] Guang-yuan, W., Wen-quan, W., et al., 1987. Generalized reliability of engineering systems. *Second International Fuzzy Systems association Congress*.
- [49] Pistikopoulos, E. and Ierapetritou, M., 1995. Novel approach for optimal process design under uncertainty. *Elsevier. Computers & Chemical Engineering*, vol. 19, pp 1089-1110.
- [50] Chen, J., L. Su, et al., 2008. Study on the choice of safety factor of stochastic lead time inventory model of distribution system. *IEEE*, vol. 2, pp 2973-2978.
- [51] Mocko, G. M. and Paasch, R., 2005. Incorporating uncertainty in diagnostic analysis of mechanical systems. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Mechanical Design*, vol. 127, pp 315-325.
- [52] Simchi-Levi, D. and Zhao, Y., 2005. Safety stock positioning in supply chains with stochastic lead times. *INFORMS. Manufacturing & Service Operations Management*, vol. 7, pp 295-318.
- [53] MEAM.Design. [Consulta: 28-06-2015]. Disponible en:  
<https://alliance.seas.upenn.edu/~medesign/wiki/index.php/Courses>.
- [54] Perry, C., and Lissner, H., 1955. *The Strain gage primer*. . New York: McGraw Hill Book Company, Inc.
- [55] Watson, R. B., 2008. *Bonded Electrical resistance strain gages*. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics.
- [56] Beer, F. P., Johnston, E. R, et al., 2007. *Mecánica de materiales*. McGraw-Hill Interamericana.
- [57] Wymyslowski, A., M. Santo-Zamik, et al., 2004. Numerical Simulation and experimental verification of the piezoresistivity phenomenon for the printed thick-film piezoresistors. *Thermal and Mechanical Simulation and Experiments in Microelectronics and Microsystems (EuroSimE 2004)*, pp 359-366.
- [58] Murray, W., and Miller, W., 1992. *The Bonded electrical resistance strain gage: an introduction*. Oxford University Press.
- [59] Vishay Micro-Measurements, 2004. Shunt calibration of strain gage instrumentation. *Tech Note TN-514*, 11064, pp 1-20.
- [60] National Instruments, 1998. Strain gauge measurement – a tutorial. *Application Note 078*, 341023C-01, pp 1-12.

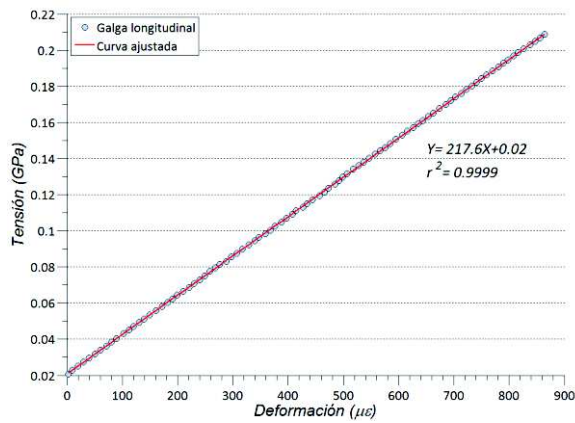
- [61] Vishay Micro-Measurements, 2010. Strain gage thermal output and gage factor variation with temperature. *Tech Note TN-504-1*, 11054, 35-47.
- [62] Watson, R. B., and C. C. Perry., 2002. The intelligent use of strain gage thermal output. *SEM Annual Conference & Exposition on Experimental and Applied Mechanics*.
- [63] Vishay Micro-Measurements, 2010. Errors due to Wheatstone bridge nonlinearity. *Tech Note TN-507-1*, 11057, pp 77-81.
- [64] ASTM Standard E251, 2009. Standard test methods for performance characteristics of metallic bonded resistance strain gages. ASTM International, West Conshohocken, PA.
- [65] Vishay Micro-Measurements, 2010. Errors due to transverse sensitivity in strain gages. *Tech Note TN-509*, 11059, pp 91-99.
- [66] Vishay Micro-Measurements, 2010. Errors due to misalignment of strain gages. *Tech Note TN-511*, 11061, pp 107-111.
- [67] Vishay Micro-Measurements, 2008. Strain gage rosettes: selection, application and data reduction. *Tech Note TN-515*, 11065, pp 151-161.
- [68] Timoshenko, S., 1910. Stresses in a circular ring compressed by two opposing forces. *Proceedings Kiev Polytechnic Institute*, vol. 9, pp 21-37.
- [69] Timoshenko, S., 1922. On the Distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *Philosophical Magazine Series 6*, vol. 44, pp 1014-1019.
- [70] Carl. W. N., 1939. Stresses and displacements in a hollow circular cylinder. Thesis, *University of Michigan*.
- [71] Batista, M., and Usenik, J., 1996. Stresses in a circular ring under two forces acting along a diameter. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 31, pp 75-78.
- [72] Durelli, A. J. and Lin, Y. H., 1986. Stresses and displacements on the boundaries of circular rings diametrically loaded. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pp 213-219.
- [73] Chianese, R. B. and Erdlac, R. J., 1988. The general solution to the distribution of stresses in a circular ring compressed by two forces acting along a diameter. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 41, pp 239-247.
- [74] Timoshenko, S., and Goodier, J., 1975. *Teoría de la elasticidad*. 2da edición. Bilbao: Urmo.
- [75] Michell, J. H., 1899. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates. *Proceedings London Mathematical Society*, vol. s1-31. pp 100-124.
- [76] Vishay Micro-Measurements 2010. The three-wire quarter-bridge circuit. 11092, pp 221-223.
- [77] Vishay Micro-Measurement, 2006. StrainSmart® Data acquisition system. 11271. pp 1-7.

- [78] ASTM E111 - 04, 2004. Standard Test method for Young's modulus, tangent modulus, and chord modulus. ASTM International, West Conshohocken, PA.
- [79] ASTM E132-04, 2010. Standard test method for Poisson's ratio at room temperature. ASTM International, West Conshohocken, PA.
- [80] National Physical Laboratory. *Uncertainties in mechanical testing (UNCERT)*. [Consulta: 15-01-2015]. Disponible en: <http://www.npl.co.uk/science-technology/engineered-materials/research/mechanical/uncertainties-in-mechanical-testing-uncert>.
- [81] Montero, W., Farag, R., et al., 2011. Uncertainties associated with strain-measuring systems using resistance strain gauges. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 46, pp 1-13.
- [82] Ripperger, E. A. and Davids, N., 1947. Critical Stresses in a circular ring. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, vol. 112, pp 619-628.
- [83] EA-4/02 M: 2013, 2013. *Evaluation of the uncertainty of measurement in calibration*.
- [84] Cantrell, C. A., 2008. Technical note: review of methods for linear least-squares fitting of data and application to atmospheric chemistry problems. *Atmospheric Chemistry and Physics*, vol. 8, pp 5477-5487.
- [85] Riu, J. and Rius, F. X., 1995. Univariate Regression models with errors in both axes. *Wiley Online Library. Journal of Chemometrics*, vol. 9, pp 343-362.
- [86] Duer, W. C., Ogren, P. J., et al., 2008. Comparison of ordinary, weighted, and generalized least-squares straight-line calibrations for LC-MS-MS, GC-MS, HPLC, GC, and enzymatic assay. *Journal of Analytical Toxicology*, vol. 32, pp 329-338.
- [87] Liu, Y., Chen, W., et al., 2011. Toward a better understanding of model validation metrics. *American Society of Mechanical Engineers. Journal of Mechanical Design*, vol. 133, pp 13.
- [88] Hesterberg, T. C., 1998. Simulation and bootstrapping for teaching statistics. *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*. pp 44-52.
- [89] Carpenter, J. and Bithell, J., 2000. Bootstrap confidence intervals: when, which, what? a practical guide for medical statisticians. *Statistics in Medicine*. vol. 19, pp 1141-1164
- [90] J. O. Rawlings, S. G. Pantula, et al., 1998. *Applied Regression analysis: a research Tool*. Springer Science & Business Media.

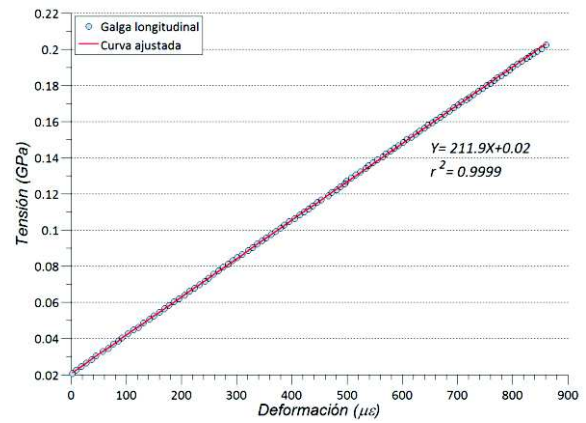


# Anexos

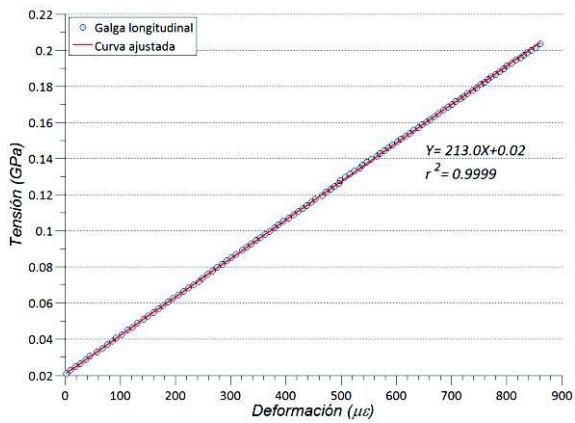
## Curvas de tensión-deformación de las probetas empleadas en la caracterización de los tubos ensayados



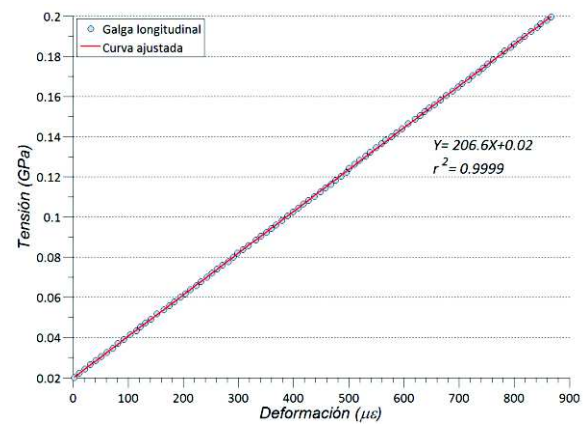
A1. Probeta 1 (Tubo 1)



A2. Probeta 3 (Tubo 3)

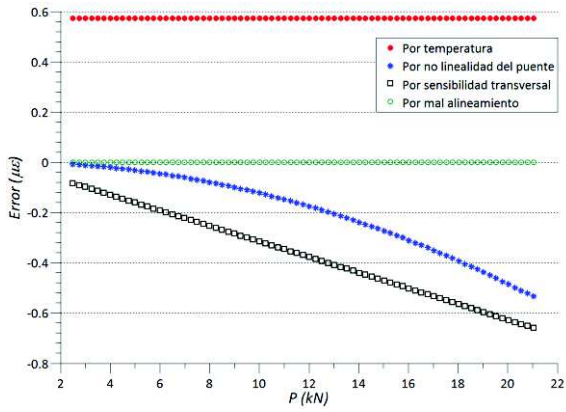


A3. Probeta 4 (Tubo 4)

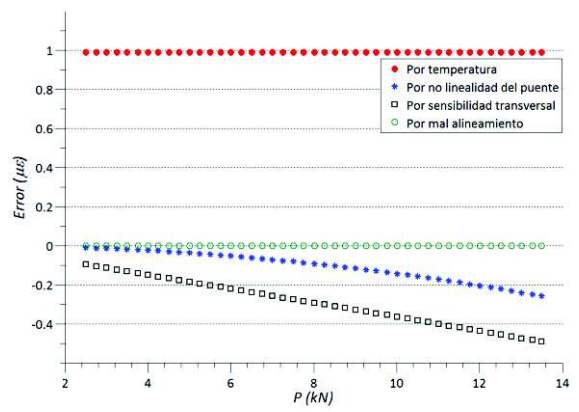


A4. Probeta 5 (Tubo 5)

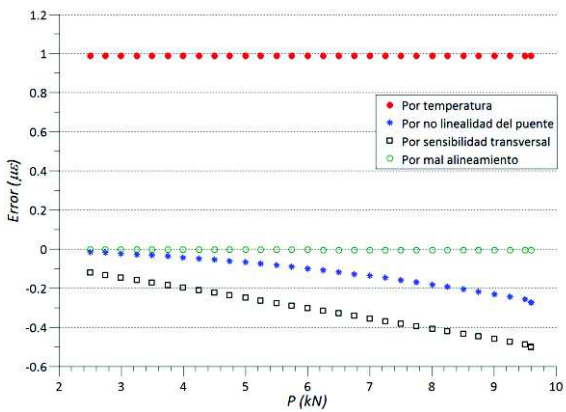
## Evolución de los errores propios de la técnica extensométrica



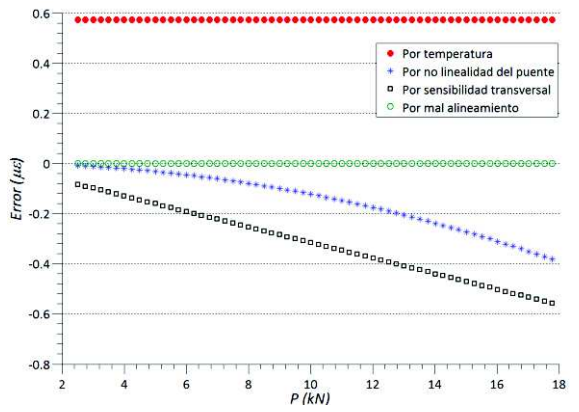
A5. Errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al **tubo 1**



A6. Errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al **tubo 3**

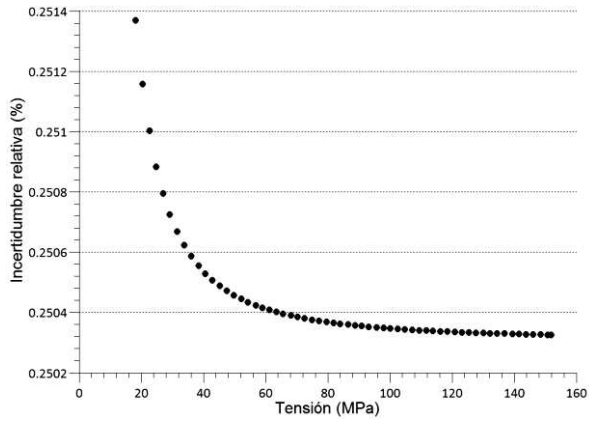


A7. Errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al **tubo 4**

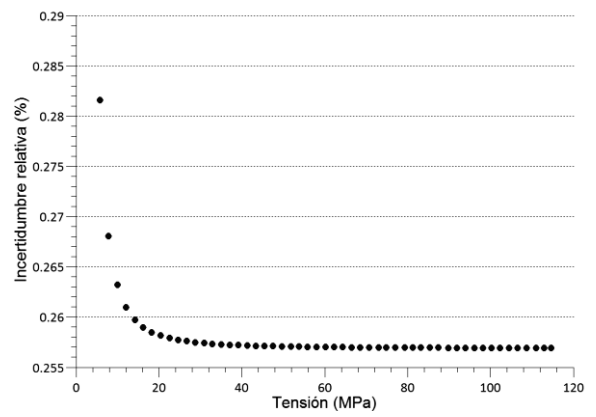


A8. Errores máximos de las galgas extensométricas en función de la carga aplicada al **tubo 5**

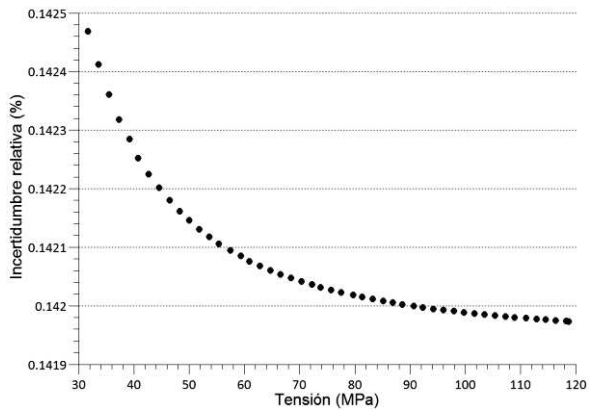
## Evolución de las incertidumbres relativas del eje X ( $4P/\pi LD$ ) en función de la tensión



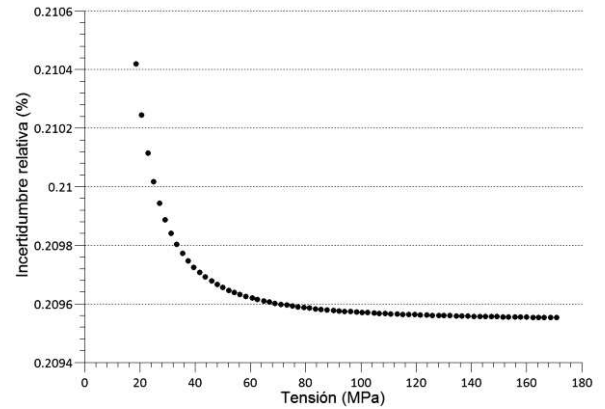
A9. Evolución en el tubo 1



A10. Evolución en el tubo 3

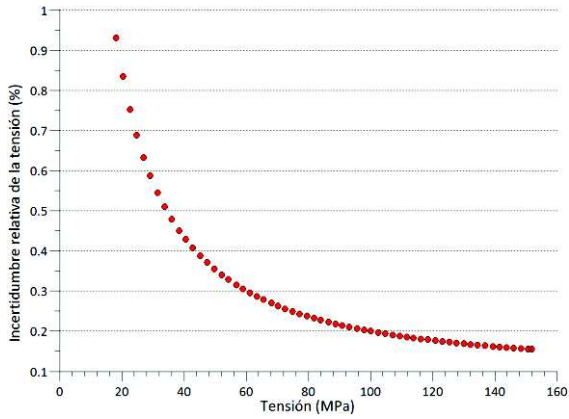


A11. Evolución en el tubo 4

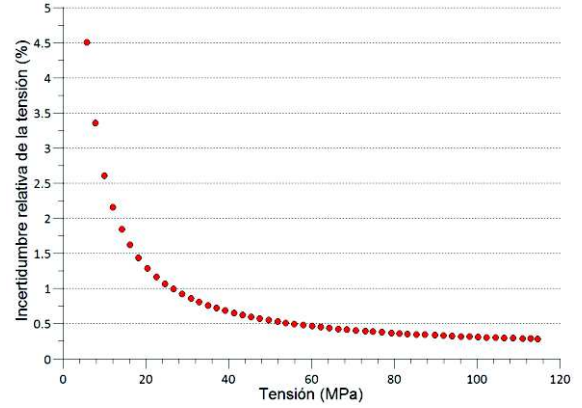


A12. Evolución en el tubo 5

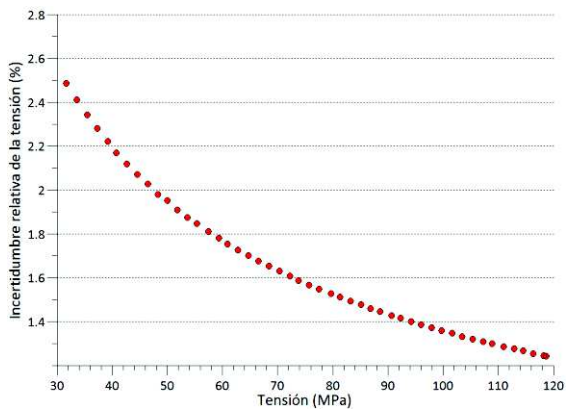
## Evolución de las incertidumbres relativas del eje Y ( $\sigma_P$ ) en función de la tensión



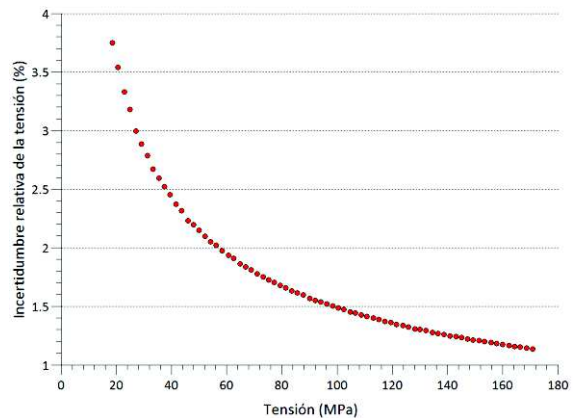
A13. Evolución en el tubo 1



A14. Evolución en el tubo 3



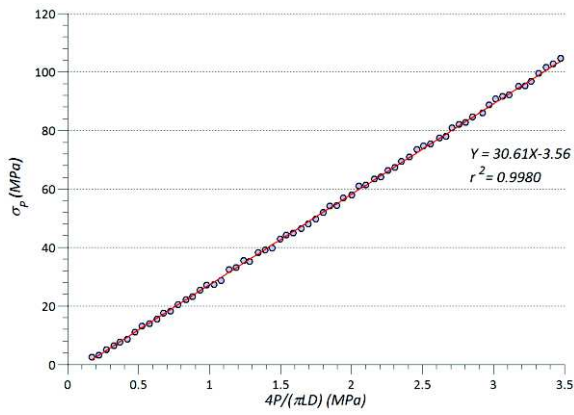
A15. Evolución en el tubo 4



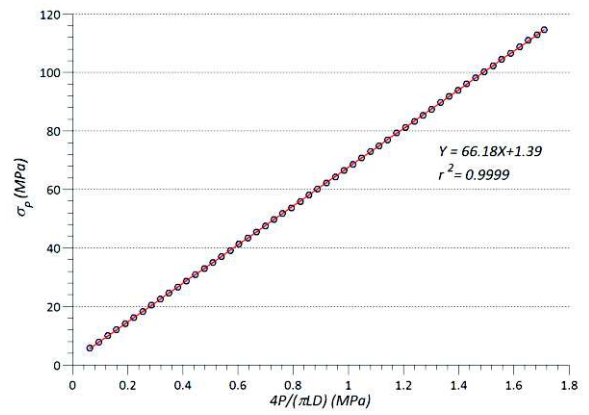
A16. Evolución en el tubo 5

## Evolución de las tensiones tangenciales experimentales ( $\sigma_p$ ) en función de la relación ( $4P/\pi LD$ )

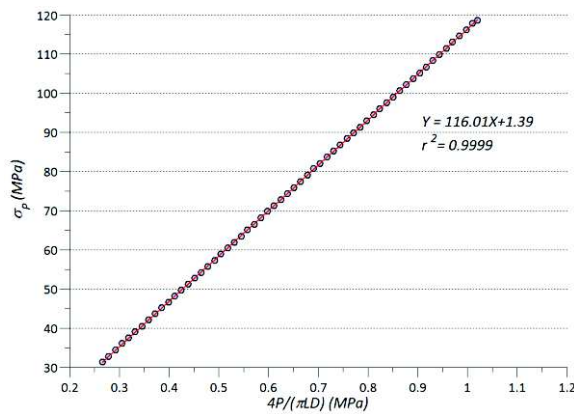
---



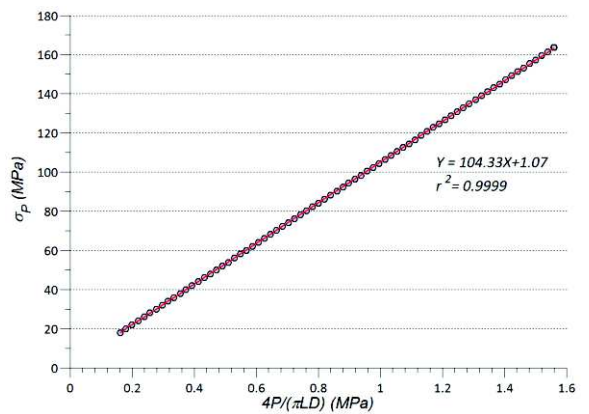
A17. Evolución de las tensiones en el **tubo 1**



A18. Evolución de las tensiones en el **tubo 3**



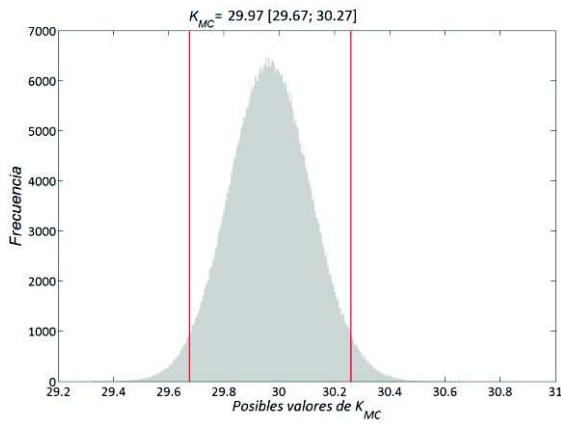
A19. Evolución de las tensiones en el **tubo 4**



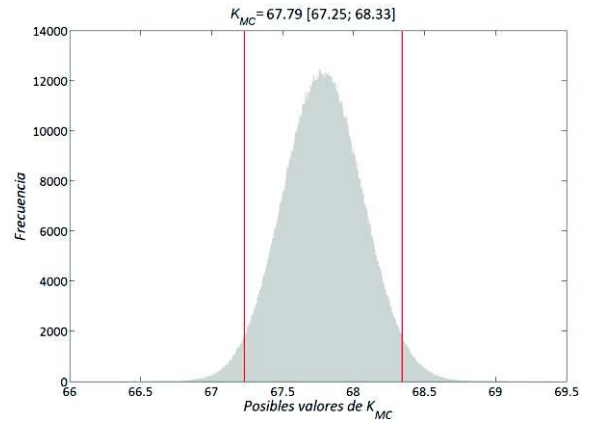
A20. Evolución de las tensiones en el **tubo 5**

## Factor de concentración de tensiones teórico $K_{MC}$ , obtenido a través de la implementación del procedimiento de Monte Carlo adaptable

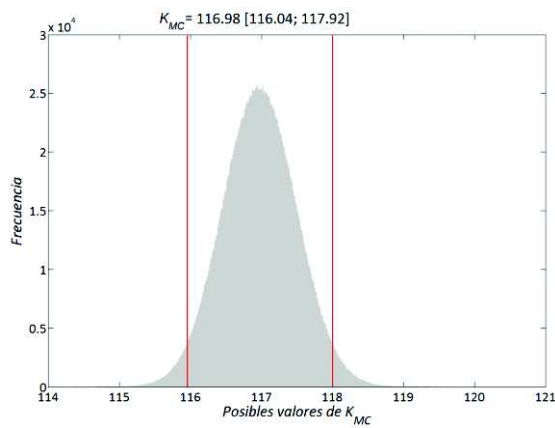
---



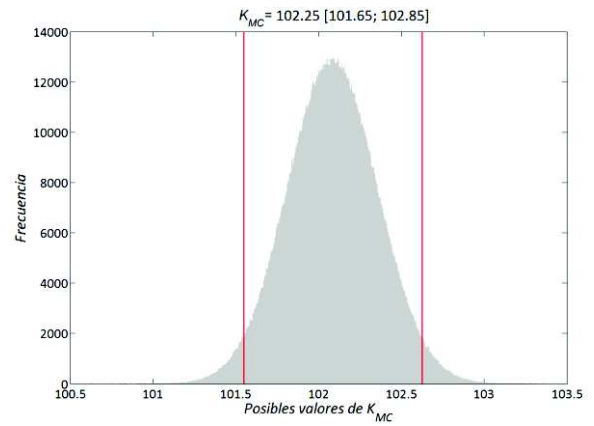
A21.  $K_{MC}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 1**)



A22.  $K_{MC}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 3**)



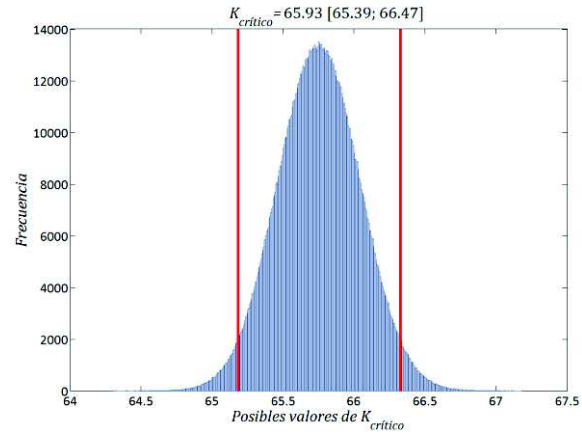
A23.  $K_{MC}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 4**)



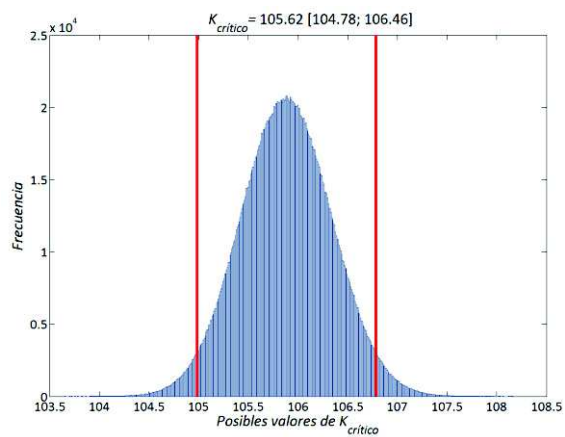
A24.  $K_{MC}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 5**)

## Factor de concentración de tensiones crítico $K_{crítico}$ , obtenido a través de la implementación del procedimiento de Monte Carlo adaptable

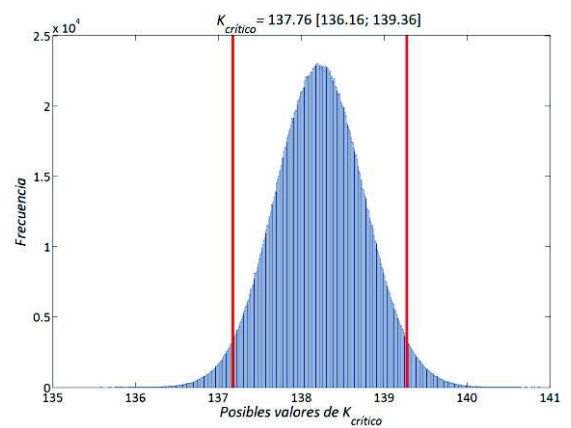
---



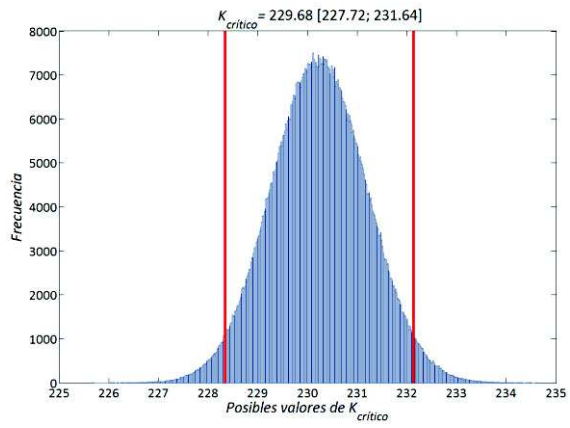
A25.  $K_{crítico}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 1**)



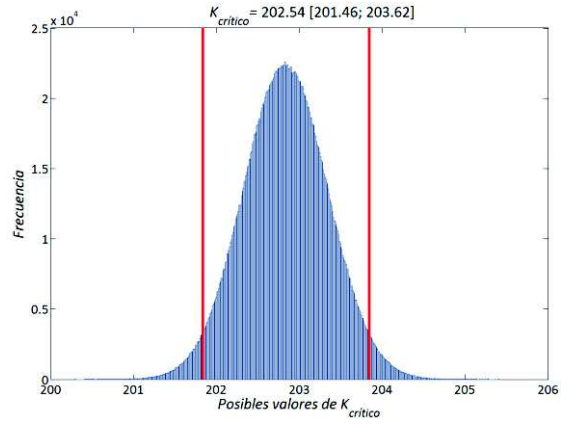
A26.  $K_{crítico}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 2**)



A27.  $K_{crítico}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 3**)



A28.  $K_{critico}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 4**)



A29.  $K_{critico}$  con sus límites superior e inferior para un nivel de confianza del 95% (**Tubo 5**)