



UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA DE TELECOMUNICACIÓN

PROYECTO DE FIN DE CARRERA

DETECCIÓN EN SISTEMAS MIMO DE ALTA  
DIMENSIÓN: DISEÑO CONJUNTO CON UN  
SISTEMA DE CODIFICACIÓN LDPC

Autor: Paloma Jimeno Sánchez-Patón

Tutor: Pablo Martínez Olmos

## *Agradecimientos*

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermano, y a mis compañeros de universidad, en especial a Adri, Cristina, Lucas y Víctor por vuestro apoyo y por llenar de buenos recuerdos mi paso por la universidad.

# Índice de contenido

1	INTRODUCCIÓN .....	8
1.1	Visión general del proyecto.....	9
2	COMUNICACIÓN MIMO .....	11
3	ESCENARIO .....	13
4	SOLUCIÓN ÓPTIMA MÁXIMA VEROSIMILITUD .....	16
5	SOLUCIONES PARA BAJA COMPLEJIDAD .....	18
5.1	Zero Forcing.....	18
5.1.1	Algoritmo.....	18
5.1.2	Complejidad .....	19
5.2	Minimum Mean Squared Error .....	19
5.2.1	Algoritmo.....	19
5.2.2	Complejidad .....	21
5.3	ZF con SIC .....	21
5.3.1	Algoritmo.....	21
5.3.2	Complejidad .....	22
5.4	MMSE con SIC.....	23
5.4.1	Algoritmo.....	23
5.4.2	Complejidad .....	23
5.5	MMSE LAS .....	23
5.5.1	Algoritmo.....	24
5.5.2	Complejidad .....	26
5.6	ZF con salida suave.....	27
5.6.1	Algoritmo.....	27
5.6.2	Complejidad .....	28
5.7	MMSE con salida suave (3).....	29
5.7.1	Algoritmo.....	29
5.7.2	Complejidad .....	29
5.8	Resumen complejidad y rendimiento .....	29
6	OBJETIVO DE ESTE PROYECTO.....	31
7	SIMULACIONES.....	31
7.1	Salida sin codificación para 10 antenas.....	32
7.2	Salida sin codificación para 25 antenas.....	33

7.3	Salida con codificación para 10 y 25 antenas.....	34
7.3.1	Salida del decodificador para 50, 30, 20, 10 y 5 iteraciones del BP con 10 antenas	34
7.3.2	Salida del decodificador para 50, 20 y 50 iteraciones del BP para 25 antenas..	40
8	CONCLUSIONES .....	44
	ANEXO1: CÓDIGOS LDPC.....	45
	ANEXO2: PROPIEDADES CANALES RICOS EN SCATTERING.....	50
	ANEXO3: COMPLEJIDAD PRODUCTO DE MATRICES.....	55
9	BIBLIOGRAFÍA.....	56

## ***Índice de figuras***

Figura 1. Representación esquemática de un sistema de comunicaciones MIMO .....	12
Figura 2. Estructura general de un sistema MIMO .....	13
Figura 3. Salida sin codificación para 10 antenas.....	32
Figura 4. Salida sin codificación para 25 antenas.....	33
Figura 5. Salida del decodificador LDPC con 50 iteraciones BP .....	35
Figura 6. Salida del decodificador LDPC con 30 iteraciones BP .....	35
Figura 7. Salida del decodificador LDPC con 20 iteraciones BP .....	36
Figura 8. Salida del decodificador LDPC con 10 iteraciones BP .....	36
Figura 9. Salida del decodificador LDPC con 5 iteraciones BP .....	37
Figura 10. ZF y MMSE con salida suave para 5 y 50 iteraciones BP .....	38
Figura 11. Detectores con salida dura para 5 y 50 iteraciones del BP .....	39
Figura 12. Detectores de salida dura con 50 iteraciones del BP y sin codificación.....	40
Figura 13. Salida del decodificador con 50 iteraciones BP.....	41
Figura 14. Salida del decodificador con 20 iteraciones BP.....	42
Figura 15. Salida del decodificador con 5 iteraciones BP.....	42
Figura 16. Gráfico de Tanner asociado a la matriz de chequeo de paridad H .....	46
Figura 17. Sistema MIMO operando en un entorno con scattering .....	50
Figura 18. Ensanchamiento de una senoide debido a dispersión Doppler .....	53

## ***Índice de tablas***

Tabla 1. Resumen detectores.....	30
Tabla 2. Revisión de los mensajes recibidos y enviados por los c-nodes en el paso 2 del algoritmo BP.....	47
Tabla 3. Paso 3 del algoritmo de decodificación descrito. Los v-nodes usan los mensajes de respuesta de los c-nodes para elegir el valor del bit en base a la mayoría.....	47

## *Acrónimos*

BER	Bit Error Rate
ISI	Inter-Symbol Interference
JC	Joint Coding
LAS	Likelihood Ascent Search
LDPC	Low Density Parity Check
LTE	Long Term Evolution
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MLD	Maximum Likelihood Detector
MMSE	Minimum Mean Square Error
QAM	Quadrature Amplitude Modulation
SDM	Space Division Multiplexing
SIC	Successive Interference Cancellation
SNR	Signal-to-Noise Ratio
V-BLAST	Vertical BLAST (Bell Laboratories Layered Space Time)
ZF	Zero Forcing



# 1 INTRODUCCIÓN

Las nuevas tecnologías de sistemas de comunicaciones inalámbricos requieren cada vez mayores tasas de datos y capacidad de la red.

Investigaciones en el ámbito de la Teoría de la Información han demostrado que es posible mejorar la eficiencia espectral, tanto para canales de banda ancha como de banda estrecha, cuando se tienen varias antenas en el lado del transmisor y del receptor, especialmente para entornos ricos en scattering (1). Esta técnica, que recibe el nombre de MIMO, Multiple Input Multiple Output, consigue mejorar la eficiencia espectral haciendo uso de Multiplexación por División en el Espacio (SDM). La Multiplexación por División en el Espacio consiste en el envío simultáneo de flujos de datos de las diferentes ramas de transmisión, de forma independiente sobre la misma frecuencia de portadora. De esta forma, se consigue un incremento lineal en la capacidad del canal que es proporcional al mínimo del número de antenas transmisoras y receptoras.

Además de las ganancias teóricas que se pueden alcanzar, la madurez actual de los sistemas SDM MIMO está permitiendo su incorporación en tecnologías inalámbricas de última generación como LTE. A través de sistemas *massive* MIMO compuestos por decenas de antenas, se pretenden conseguir numerosas ventajas, todas ellas descritas en (2), como por ejemplo reducir la potencia requerida en cada antena de  $\alpha 1/N_t$  a  $\alpha 1/N_t^2$  cuando el array de antenas sirve a un solo terminal.

En sistemas MIMO ricos en scattering, cuando se produce una transmisión, la señal transmitida desde la  $p$ -ésima antena transmisora encuentra diferentes caminos para alcanzar a la antena receptora  $q$ -ésima; normalmente un camino directo y varios indirectos a través de un número de reflexiones. Este fenómeno es conocido como *propagación multitrayecto*. Debido a él, la antena receptora  $q$ -ésima no sólo recibe la señal enviada por la antena  $p$ -ésima, sino por el resto de antenas transmisoras, ya que todas las señales fueron enviadas sobre la misma frecuencia de portadora. (3)

Es importante, por tanto, considerar diferentes algoritmos de detección MIMO para estos sistemas en los que múltiples transmisores mandan información a un único receptor multiantena interesado en recuperar todos los flujos de información.

Con vista a lo anterior, en este proyecto, se hace un análisis comparativo de algoritmos de detección, teniendo en cuenta una posterior etapa de codificación de canal LDPC. Aunque el detector de máxima verosimilitud MLD es óptimo para los sistemas MIMO SDM en términos de BER, su complejidad, que crece exponencialmente con el número de antenas, lo hace inaplicable para un número elevado de éstas. Debido a ello, se proponen algoritmos de detección subóptimos que establecen un balance entre rendimiento y complejidad. Concretamente, en este proyecto se han implementado 2 algoritmos de detección lineal, algoritmo ZF y MMSE, con salida dura y blanda; 2 algoritmos con cancelación sucesiva de interferencias, ZF y MMSE con SIC, con salida dura y un algoritmo basado en la búsqueda del vector de símbolos que origina un ascenso monotónico en la función de verosimilitud, LAS, con



salida dura. Pese a que en la literatura tradicional los detectores MIMO se han comparado mediante prestaciones de probabilidad de error de símbolo en detección, esto es, antes de del decodificador, en este proyecto se pretende demostrar que esto carece de sentido, y que aplicando un decodificador LDPC tras la etapa de detección con un detector de salida suave se consigue un rendimiento muy superior al de cualquier detector de salida dura. Esto se debe a que los sistemas modernos de codificación, capaces de alcanzar capacidad de canal, típicamente requieren una estimación suave de cada bit a la entrada. Por tanto, las consideraciones tradicionales de diseño de detectores MIMO han de reorientarse a estos requisitos. Referencia (4).

En este trabajo se ha realizado una exploración masiva de simulaciones con 10 y 25 antenas usando los métodos anteriormente citados, obteniéndose las siguientes conclusiones:

Cuando se mide el rendimiento en detección, antes del decodificador de canal, los algoritmos que proporcionan mejor rendimiento en términos de BER son los no lineales. En el caso de un sistema V-BLAST no codificado con modulación 16-QAM y 25 antenas tanto en el lado del transmisor como en el del receptor, se consigue una tasa de error de bit de  $2 \cdot 10^{-3}$  para una SNR de 26 dBs, empleando el algoritmo LAS.

Para el caso en el que existe codificación, se ha empleado una codificación LDPC (véase *anexo 1*) con una matriz de chequeo de paridad  $\mathbf{sH}(500,1000,3)$  y tasa  $\frac{1}{2}$ . Es importante destacar que la elección del codificador LDPC ha sido arbitraria, pues sólo se ha utilizado para comparar la estima de probabilidad a priori calculada para cada bit en función del detector MIMO. En ningún momento se ha buscado la mejor codificación posible. Dicho esto, y tras aplicar dicha codificación LDPC, se observa que, cuando se tiene una salida suave a la salida del detector, gracias a la codificación, se consigue reducir enormemente la tasa de error de bit, de forma que para el caso del ejemplo anterior se obtiene una BER de  $10^{-5}$  para una SNR de 20 dBs para el soft MMSE con un decodificador en el que sólo se realizan 5 iteraciones del algoritmo BP, *Belief Propagation*. Esto permite demostrar que la optimización del detector debe ir orientada a dar probabilidades suaves a la salida lo más cercanas posibles a las probabilidades reales *a posteriori*, pues, en este caso, aun usando un decodificador sencillo, en términos de pocas iteraciones del algoritmo BP, se pueden lograr tasas de error mucho menores a las que se logran para algoritmos de salida dura que, a priori, muestran un mejor rendimiento pero para los cuales la decodificación no aporta nada.

## 1.1 Visión general del proyecto

En esta sección se ofrece una visión general de los apartados de este proyecto:

- En el punto 2, se introduce una explicación básica del funcionamiento de un sistema de comunicaciones MIMO.
- Basándose en el funcionamiento del sistema MIMO descrito en el punto 2 y las propiedades de los canales de propagación ricos en scattering descritos en el anexo 2, en el punto 3 se describe el escenario en el cual se van a realizar las simulaciones.

- En el punto 4, basándose en el escenario descrito en el punto 3, se desarrolla teóricamente el algoritmo de detección de máxima verosimilitud MLD y se estudia su complejidad.
- En el punto 5, se desarrollan los algoritmos subóptimos ZF, MMSE, ZF con SIC, MMSE con SIC, LAS, ZF con salida suave y ZF con salida dura, y se analiza su complejidad y rendimiento.
- En el punto 6 se repasan los objetivos de este proyecto para tenerlos en cuenta a la hora de desarrollar los puntos 7 y 8.
- En el punto 7, se muestran los resultados obtenidos a la hora de aplicar los diferentes algoritmos subóptimos con diferentes tipos de decodificadores para los sistemas MIMO de 10x10 y 25x25. También se muestran los resultados obtenidos en el caso de que no exista codificación.
- En el punto 8 se indican las principales conclusiones extraídas de este proyecto

## 2 COMUNICACIÓN MIMO

Considérese un sistema de comunicaciones inalámbrico con  $N_t$  antenas TX y  $N_r$  antenas RX. La idea es transmitir diferentes flujos de datos de diferentes antenas transmisoras sobre la misma frecuencia de portadora (SDM). El símbolo transmitido por la  $p$ -ésima antena transmisora, en función del tiempo  $t$ , se denotará como  $s_p(t)$ . Cuando se produce una transmisión, la señal transmitida por la  $p$ -ésima antena transmisora encontrará diferentes caminos para alcanzar a la  $q$ -ésima antena receptora, en concreto, un camino directo y numerosos caminos indirectos a través de un número de reflexiones, propagación *multitrayecto*. (5)

Se supone que el ancho de banda del sistema,  $B$ , es elegido de tal forma que el retardo entre la primera y la última componente de multitrayecto en el receptor es menor que  $1/B$ . Este es el caso de un sistema de banda estrecha.

Para el sistema anterior, todas las componentes de multitrayecto entre la  $p$ -ésima antena TX y la  $q$ -ésima antena RX pueden reducirse a un único término,  $h_{qp}(t)$ . Dado que las señales de todas las antenas transmisoras son enviadas sobre la misma frecuencia de portadora, la  $q$ -ésima antena receptora no sólo recibirá la señal procedente de  $p$ , sino de las  $N_t$  antenas transmisoras. Esto se puede demostrar a partir de la siguiente ecuación, donde el ruido aditivo en el receptor se ha omitido para mayor claridad.

$$x_q(t) = \sum_{p=1}^{N_t} h_{qp}(t)s_p(t)$$

Para capturar las  $N_r$  señales recibidas en una ecuación, se utiliza la notación matricial. Con

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_{N_t}(t) \end{pmatrix}, \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{N_r}(t) \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) & \cdots & h_{1N_t}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) & \cdots & h_{2N_t}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_r1}(t) & h_{N_r2}(t) & \cdots & h_{N_rN_t}(t) \end{pmatrix},$$

Obtenemos que:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{s}(t)$$

Donde  $\mathbf{x}(t)$  será el vector que se recibe en el receptor. Este vector será la entrada del decisor MIMO sobre el que, a lo largo de este proyecto, se probarán diferentes algoritmos con el objetivo de recuperar el vector enviado,  $\mathbf{s}(t)$ , con la mayor fidelidad posible.

A modo de resumen, la siguiente figura muestra una representación esquemática de un sistema de comunicaciones MIMO:

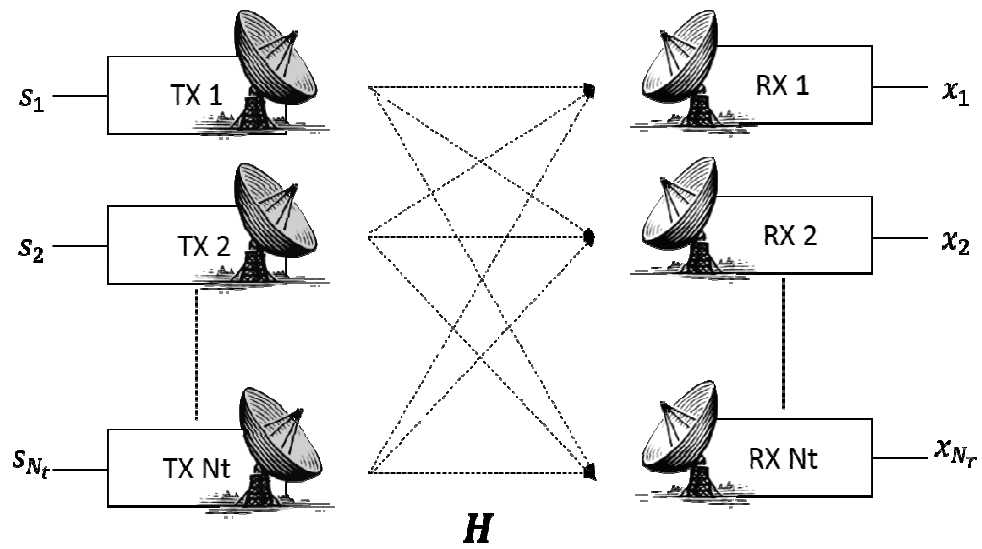


Figura 1. Representación esquemática de un sistema de comunicaciones MIMO

### 3 ESCENARIO

En este apartado se caracterizará el entorno en el cual se van a desarrollar las simulaciones. En él, se establece un modelo de señal equivalente en banda base para un sistema de comunicaciones MIMO. El modelo de canal será quasi-estático, es decir, se asume que la matriz de propagación del canal es constante durante una transmisión, por tanto, el modelo de canal poseerá desvanecimiento lento ( $T_s < T_c$ ). Por otro lado, se asume que el ancho de banda del canal de comunicaciones es tan estrecho que el canal puede considerarse plano en frecuencia, es decir, con desvanecimiento plano ( $B < B_c$ ). Véase Anexo 2 para una explicación más detallada de los parámetros que caracterizan al canal MIMO inalámbrico.

Este modelo de comunicaciones estará formado por  $N_t$  antenas TX y  $N_r$  antenas RX, donde  $N_t \leq N_r$  para que el sistema tenga solución. Su estructura general se detalla en la siguiente figura:

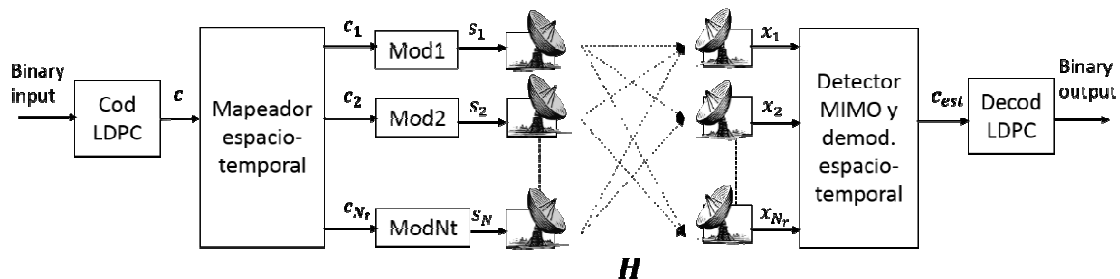


Figura 2. Estructura general de un sistema MIMO

En base a la estructura implementada en este proyecto se harán las siguientes consideraciones:

- *Sistema en lazo abierto.* El sistema se desarrolla en base a una técnica de *lazo abierto* donde el transmisor no tiene, a priori, conocimiento sobre la repuesta del canal.
- *Joint Coding (JC).* El sistema implementará una codificación JC, donde la secuencia binaria de entrada es, en primer lugar, codificada y luego demultiplexada en flujos que son modulados en su antena transmisora correspondiente. La ventaja de JC es que la codificación se realiza sobre la dimensión espacial y temporal, lo que permite conseguir un buen rendimiento de nuestro sistema.
- *Multiplexación por División en el Espacio (SDM).* Como ya se ha mencionado anteriormente, explotar la dimensión espacial haciendo uso de múltiples antenas a ambos lados del enlace de comunicaciones permite incrementar la eficiencia espectral de un sistema de comunicaciones MIMO. Así, es posible explotar la dispersión multitrayecto a través del uso de arquitecturas de procesamiento adecuadas. La arquitectura V-BLAST, Vertical BLAST, es un ejemplo. Ésta indica la forma en la que se realiza la detección en el lado del receptor, verticalmente, es decir, por instante de tiempo.

La secuencia de bits a la entrada se codifica siguiendo un algoritmo JC LDPC. Los códigos LDPC son códigos modernos, que permiten implementar un decodificador de bajo coste, con un rendimiento excelente que se acerca a la capacidad del canal cuando la longitud del código tiende a infinito (6). Además, los códigos LDPC muestran todo su potencial si el detector es de salida suave (véase Anexo 1). Puesto que una de las claves de este proyecto es mostrar que los códigos modernos se basan en entradas suaves, aunque sean imprecisas, resultando inútil dedicar un gran esfuerzo a diseñar un detector de salida dura, los códigos LDPC serán de gran utilidad.

En instantes discretos,  $T_s$ , el transmisor envía un vector de símbolos complejos  $N_t$ -dimensional  $\mathbf{s}$  sobre la misma frecuencia de portadora siguiendo un esquema SDM. Al llegar al receptor, se tiene un vector complejo  $N_r$ -dimensional  $\mathbf{x}$  sobre el que se aplicarán los algoritmos de detección adecuados siguiendo un esquema V-BLAST. El siguiente modelo de señal equivalente en banda base describe la relación entre  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Donde  $\mathbf{H}$  es la matriz compleja de propagación de dimensión  $N_r \times N_t$  y  $\mathbf{n}$  representa el vector de ruido complejo de dimensión  $1 \times N_r$ . Sus características estadísticas se definen a continuación.

- **Vector  $\mathbf{s}$**

Teniendo en cuenta la multiplexación espacial, se asume que la potencia total transmitida  $P_t$  se distribuye uniformemente entre todas las antenas transmisoras. Más exactamente, se asume que el vector  $\mathbf{s}$  está formado por variables aleatorias de media cero, incorreladas y con igual varianza,  $\sigma_s^2$ . La potencia total transmitida,  $E[\mathbf{s}^H \mathbf{s}] = N_t \sigma_s^2 = P_t$ . La matriz de covarianza viene dada por:

$$\mathbf{Q}_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H] = \sigma_s^2 \mathbf{I}_{N_t} = \frac{P_t}{N_t} \mathbf{I}_{N_t}$$

- **Vector  $\mathbf{n}$**

El vector  $\mathbf{n}$   $N_r$ -dimensional representa el ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN) de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media cero ( $\mu_n = 0$ ) y varianza  $\sigma_n^2$ . Esto significa que  $\mathbf{n}$  sigue una distribución normal compleja  $N_r$ -dimensional cuya función densidad de probabilidad se define a continuación:

$$p(\mathbf{n}) = \det(\pi \mathbf{Q}_n)^{-1} \exp(-(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^H \mathbf{Q}_n^{-1} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n))$$

Su matriz de covarianza se define como:

$$\mathbf{Q}_n = E[(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)(\mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}_n)^H] = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_r}$$

Además, se asume que los vectores  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{n}$  son independientes ( $E[\mathbf{s}\mathbf{n}^H] = \mathbf{0}$ ).

- **Matriz de canal  $\mathbf{H}$**

$\mathbf{H}$  es la matriz de propagación compleja de longitud  $N_r \times N_t$  que se asume constante durante una transmisión (canal cuasi-estático) y conocida en el receptor (a través del envío de secuencias de entrenamiento).

Dado que se asume un entorno rico en scattering, donde no existe componente de visión directa LOS, y con canal de banda estrecha, las componentes de  $\mathbf{H}$ , por el teorema central del límite, serán variables gaussianas circularmente complejas independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza unidad (ganancia media del canal  $P_c$  igual uno). Por cada transmisión, se llevará a cabo una realización independiente de  $\mathbf{H}$ .

- **Vector de salida  $\mathbf{x}$**

Con la información recopilada en los apartados anteriores podemos determinar la matriz de covarianza de  $\mathbf{x}$  para una determinada  $\mathbf{H}$ , haciendo uso de la independencia de  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{n}$  y de que tanto  $\mathbf{s}$  como  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{x}$  tienen media cero.

$$\mathbf{Q}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = E[(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})^H] = \mathbf{H}\mathbf{Q}_s\mathbf{H}^H + \mathbf{Q}_n = \sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_r}$$

- **SNR en el receptor**

La SNR media para la  $q$ -ésima componente de  $\mathbf{x}$ , sabiendo que  $P_c = 1$ , será:

$$\rho_q = \frac{E_s}{N_o} = \frac{\sigma_s^2(E[\mathbf{H}\mathbf{H}^H])_{qq}}{(\mathbf{Q}_n)_{qq}} = \frac{N_t\sigma_s^2P_c}{\sigma_n^2} = \frac{P_t}{\sigma_n^2}$$

Donde  $E_s$  representa la potencia media de señal por antena receptora,  $N_o$  representa la potencia media de ruido por antena receptora y  $(\cdot)_{qq}$  representa el  $(q, q)$ -ésimo elemento de la matriz correspondiente. Dado que la SNR por antena RX,  $\rho_q$ , es idéntica para las  $N_r$  antenas receptoras, podemos denotar la SNR como  $\rho$ .

Este apartado se ha desarrollado basado en las referencias (3) (7) (8).

## 4 SOLUCIÓN ÓPTIMA MÁXIMA VEROSIMILITUD

La solución óptima, en términos de BER, de nuestro sistema viene determinada por el detector de máxima verosimilitud, MLD. Este realiza una búsqueda sobre todos los posibles vectores  $\mathbf{s}$  transmitidos para determinar cuál es el que proporciona un mejor rendimiento y es más probable que haya sido transmitido. El algoritmo se define como: (9)

$$\mathbf{s}_{ml} = \arg_{\mathbf{s}_i \in \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_I\}} \min \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i\|^2$$

Donde como se observa, se lleva a cabo una búsqueda entre todos los vectores  $\mathbf{s}_i$  que pertenecen al conjunto de todos los posibles vectores transmitidos. El total de vectores entre los que se realiza la búsqueda es:

$$I = M^{N_t}$$

Donde  $M$  denota el número de puntos de la constelación y  $N_t$  el número de antenas transmisoras.

Queremos encontrar el vector  $\mathbf{s}_i$  del conjunto  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_I\}$  para el cual la probabilidad  $\Pr(\mathbf{s}_i/\mathbf{x})$  es máxima. Esta probabilidad recibe el nombre de *probabilidad a posteriori* (MAP). Encontrar tal vector que maximiza esta probabilidad nos asegura la minimización de la probabilidad de error. Cuando aplicamos el teorema de Bayes a la probabilidad anterior obtenemos:

$$\Pr(\mathbf{s}_i/\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}/\mathbf{s}_i)\Pr(\mathbf{s}_i)}{p(\mathbf{x})}$$

Donde  $p(\mathbf{x}/\mathbf{s}_i)$  es la función de densidad de probabilidad condicionada del vector observado en el receptor  $\mathbf{x}$  cuando se envió el vector  $\mathbf{s}_i$  en el transmisor y  $\Pr(\mathbf{s}_i)$  es la probabilidad de que el vector  $i$ -ésimo haya sido transmitido. Cuando no tenemos conocimiento "a priori" de que un determinado vector haya sido enviado, es mejor asumir que los vectores  $I$   $\mathbf{s}$  son equiprobables, luego  $\Pr(\mathbf{s}_i) = 1/I$ . Teniendo en cuenta esta condición y que el denominador no depende de  $\mathbf{s}_i$ , maximizar  $\Pr(\mathbf{s}_i/\mathbf{x})$  equivale a maximizar  $p(\mathbf{x}/\mathbf{s}_i)$ . Así, pasamos del método MAP al decisor de Máxima Verosimilitud (MLD).

Basado en el modelo de señal descrito en el punto 3 se puede demostrar que la función de densidad de probabilidad condicionada  $p(\mathbf{x}/\mathbf{s}_i)$  es una distribución normal compleja multidimensional. Asumiendo que se ha enviado  $\mathbf{s}_i$ , para un canal  $\mathbf{H}$  específico, la media de  $\mathbf{x}$  es  $\mathbf{H}\mathbf{s}_i$ . Esto lleva a la siguiente función de distribución:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{H}, \mathbf{s}_i) = \det(\pi\mathbf{Q})^{-1} \exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i)^H \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i))$$

Donde  $\mathbf{Q}$  es la matriz de covarianza que es igual a:

$$\mathbf{Q} = E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^H] = E[(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i)^H] = E[\mathbf{nn}^H] = \sigma_n^2 \mathbf{I}_{N_r}$$

La función densidad de probabilidad resultante es:



$$p(\mathbf{x}|\mathbf{H}, \mathbf{s}_i) = \frac{1}{(\pi\sigma_n^2)^{N_r}} \exp\left(-\frac{1}{\sigma_n^2} (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i)^H (\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i)\right)$$

Así, encontrar el máximo de la probabilidad condicional  $\Pr(\mathbf{s}_i/\mathbf{x})$  nos lleva a que:

$$\mathbf{s}_{ml} = \arg_{\mathbf{s}_i \in \{\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_I\}} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}, \mathbf{s}_i) = \arg_{\mathbf{s}_i \in \{\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_I\}} \min \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{s}_i\|^2$$

Maximizar la probabilidad condicionada  $\Pr(\mathbf{s}_i/\mathbf{x})$  equivale a minimizar la probabilidad de error. MLD es el **detector óptimo** en términos de BER cuando se asume que todos los vectores  $\mathbf{s}$  transmitidos son equiprobables.

Sin embargo, se tendrá que buscar entre los  $I = M^{N_t}$  posibles vectores  $\mathbf{s}$  transmitidos. Esto hace que la complejidad del detector crezca exponencialmente con el número de antenas transmisoras. Dado que MIMO ofrece mejor eficiencia espectral cuanto mayor es el número de antenas, esta situación hace que sea inviable implementar este detector para números elevados de antenas. Por ello, en los siguientes apartados se analizarán detectores subóptimos que ofrecen soluciones parecidas a la del MLD pero que poseen una complejidad menor.

## 5 SOLUCIONES PARA BAJA COMPLEJIDAD

Es muy importante que el decisor sea óptimo en términos de complejidad y rendimiento. Dado que es en el detector donde se produce el principal “cuello de botella” del sistema, no será posible implementar el MLD pues su complejidad es exponencial con el número de antenas. Por esta razón, se debe recurrir a detectores subóptimos que sacrifican su rendimiento para conseguir una complejidad menor a la del MLD. Estos son la base de estudio de este proyecto.

En este apartado se definirán los algoritmos en los que se basan dichos detectores y se llevará a cabo un estudio exhaustivo de la complejidad que estos atañen.

El desarrollo de los siguientes apartados está referenciado en base a (3)

### 5.1 Zero Forcing

#### 5.1.1 Algoritmo

La idea que se pone de manifiesto en los detectores lineales es pasar el vector recibido a través de un filtro  $\mathbf{W}$  o  $\mathbf{H}^\dagger$  construido usando un criterio basado en rendimiento.

El algoritmo Zero Forcing es una técnica MIMO lineal que tiene lugar en el receptor donde, asumiendo que la matriz  $\mathbf{H}$  es invertible ( $N_t = N_r$ ),  $\mathbf{H}$  se invierte y se estima el vector  $\mathbf{s}$  transmitido como:

$$\mathbf{s}_{est} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{x}$$

Si  $\mathbf{H}$  no es invertible, se puede determinar la *pseudo-inversa* de  $\mathbf{H}$  (denotada como  $\mathbf{H}^\dagger$ ) como:

$$\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$$

Si se asume que los elementos de  $\mathbf{H}$  son independientes e idénticamente distribuidos, la pseudo-inversa sólo existirá cuando  $N_t \leq N_r$ . Para  $N_t > N_r$ ,  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  es singular y la inversa no existe.

Cuando existe la pseudo-inversa, el vector estimado  $\mathbf{s}_{est}$  vendrá dado por:

$$\mathbf{s}_{est} = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{x} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{x} = \mathbf{s} + (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{n}$$

Denotando la  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{s}_{est}$  como  $(\mathbf{s}_{est})_i$ , el paso final consistirá en aproximar  $(\mathbf{s}_{est})_i$  al punto más cercano de la constelación.

La principal desventaja de Zero Forcing es que amplifica el ruido, especialmente para canales en los cuales  $(\mathbf{H}^H \mathbf{H})$  es grande, para los que  $\mathbf{H}^\dagger$  tiene mucha potencia. Para solucionar este problema en el apartado 5.2 se define el algoritmo MMSE.

### 5.1.2 Complejidad

El principal cuello de botella del algoritmo vendrá dado por el cálculo de la pseudo-inversa  $\mathbf{H}^\dagger$ .

#### 5.1.2.1 Cálculo de la pseudo-inversa

Según la ecuación descrita en el apartado anterior, la pseudo-inversa puede definirse como:

$$\mathbf{H}^\dagger = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$$

Donde las dimensiones de  $\mathbf{H}^\dagger$ ,  $\mathbf{H}^H$  y  $\mathbf{H}$  son  $N_t \times N_r$ ,  $N_t \times N_r$  y  $N_r \times N_t$  respectivamente. Para determinar la complejidad del cálculo de la pseudo-inversa, primero se tendrá que determinar la complejidad del producto  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ . Teniendo en cuenta sus dimensiones y la complejidad inherente al producto de dos matrices descrito en el anexo 3, este proceso tendrá una complejidad de  $N_t^2(N_r - 1)$  sumas complejas y  $N_t^2 N_r$  multiplicaciones complejas. Este producto da como resultado una matriz de dimensiones  $N_t \times N_t$ .

Ahora se necesita determinar la inversa de la matriz cuadrada  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ . Dado que la inversión directa de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de dimensiones  $N \times N$  tiene una complejidad de  $N^3$  sumas y  $N^3$  multiplicaciones, la inversión de la matriz cuadrada  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  tendrá una complejidad de  $N_t^3$  sumas y  $N_t^3$  multiplicaciones complejas.

Finalmente, la inversa de  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  se multiplicará por  $\mathbf{H}^H$ . Nuevamente, considerando sus dimensiones y la complejidad inherente al producto de dos matrices, su complejidad será igual a  $N_r(N_t - 1)N_t$  sumas complejas y  $N_t^2 N_r$  multiplicaciones complejas. Así, el cálculo de la pseudo-inversa tendrá una complejidad de  $N_t^3 + 2N_t^2(N_r - 1) + N_t(N_t - 1)N_r$  sumas complejas y  $N_t^3 + 2N_t^2 N_r$  multiplicaciones complejas. Si pasamos esta complejidad a términos de operaciones reales según lo descrito en el anexo 3 tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Complejidad}_1 \text{ZF} &= 4N_t^3 + 4N_t^2 N_r + 2N_t^2(N_r - 1) + 2N_t(N_t - 1)N_r \\ &= 4N_t^3 + N_t^2(8N_r - 2) - 2N_t N_r \quad \text{Sumas Reales} \end{aligned}$$

$$\text{Complejidad}_2 \text{ZF} = 4N_t^3 + 8N_t^2 N_r \quad \text{Multiplicaciones Reales}$$

Dado que  $N_t \leq N_r$ , el algoritmo ZF tendrá una complejidad  $O(N_t^2 N_r)$ . Si tenemos en cuenta que para transmitir un paquete necesitamos enviar  $N_s$  vectores de símbolos, la complejidad del algoritmo ZF por símbolo será  $N_s \cdot O(N_t^3) = O(N_t^2 N_r N_s)$ .

## 5.2 Minimum Mean Squared Error

### 5.2.1 Algoritmo

El detector MMSE intenta disminuir el incremento en el ruido del ZF teniendo a éste en cuenta a la hora de construir la matriz de filtro,  $\mathbf{W}$ . Para ello, trata de estimar el vector aleatorio  $\mathbf{s}$  basado en las observaciones de  $\mathbf{x}$  a través de una función  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  que minimiza el error cuadrático medio (MSE):

$$\mathcal{E}^2 = E[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})^H (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})] = E[(\mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))^H (\mathbf{s} - \mathbf{f}(\mathbf{x}))]$$

Es difícil obtener una función  $f(\mathbf{x})$  exacta, sin embargo si se restringe esta función a una función lineal de las observaciones, se puede lograr una solución exacta. Usando procesamiento lineal, se puede estimar el vector  $\mathbf{s}$  como:

$$\mathbf{s}_{est} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

Ahora, para obtener la solución lineal de mínimo error cuadrático medio,  $\mathbf{W}$  debe ser elegido de tal forma que minimice el error cuadrático medio  $\mathcal{E}^2$ :

$$\mathcal{E}^2 = E[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})^H(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})] = E[(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})^H(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})]$$

Asumiendo que  $\mathbf{a}^H\mathbf{a} = tr(\mathbf{a}\mathbf{a}^H)$ , donde  $tr(.)$  indica el *trace* de una matriz, se puede definir el error cuadrático medio como:

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})^H(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})] &= tr(E[(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})(\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{x})^H]) \\ &= tr(\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{sx}\mathbf{W}^H - \mathbf{W}\mathbf{Q}_{xs} + \mathbf{W}\mathbf{Q}_x\mathbf{W}^H) \end{aligned}$$

Donde  $\mathbf{Q}_s = E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]$ ,  $\mathbf{Q}_{sx} = E[\mathbf{s}\mathbf{x}^H]$ ,  $\mathbf{Q}_{xs} = E[\mathbf{x}\mathbf{s}^H]$  y  $\mathbf{Q}_x = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]$ . Basándose en el hecho de que la covarianza  $\mathbf{Q}_x$  es hermítica y semidefinida positiva, todos los autovalores de  $\mathbf{Q}_x$  son no-negativos de modo que podemos factorizarla como:

$$\mathbf{Q}_x = \mathbf{U}^H\mathbf{\Delta}_x\mathbf{U} = \mathbf{U}^H\mathbf{\Delta}_x^{1/2}\mathbf{\Delta}_x^{1/2}\mathbf{U} = (\mathbf{\Delta}_x^{1/2}\mathbf{U})^H\mathbf{\Delta}_x^{1/2}\mathbf{U} = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$$

Donde  $\mathbf{\Delta}_x$  es una matriz diagonal con los autovalores de  $\mathbf{Q}_x$  en su diagonal y  $\mathbf{A}$  es la "raíz cuadrada" de  $\mathbf{Q}_x$ . Se puede ahora definir el error cuadrático medio como:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^2 &= tr(\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{sx}\mathbf{W}^H - \mathbf{W}\mathbf{Q}_{xs} + \mathbf{W}\mathbf{Q}_x\mathbf{W}^H) \\ &= tr(\mathbf{Q}_s - \mathbf{Q}_{sx}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}^H - \mathbf{W}\mathbf{A}^H(\mathbf{A}^H)^{-1}\mathbf{Q}_{xs} + \mathbf{W}\mathbf{A}^H\mathbf{A}\mathbf{W}^H) \end{aligned}$$

Donde operando adecuadamente y aplicando las operaciones de simplificación necesarias se llega a que:

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}_{sx}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^H)^{-1} = \mathbf{Q}_{sx}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{Q}_{sx}\mathbf{Q}_x^{-1}$$

Teniendo en cuenta que  $(\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n})$  y que  $\mathbf{Q}_s = \sigma_s^2\mathbf{I}_{N_t}$ ,  $\mathbf{Q}_n = \sigma_n^2\mathbf{I}_{N_r}$  y  $\mathbf{Q}_x = \mathbf{H}\mathbf{Q}_s\mathbf{H}^H + \mathbf{Q}_n$  es invertible, con  $\mathbf{Q}_{sx} = \mathbf{Q}_s\mathbf{H}^H$  (dado que  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{n}$  se consideran independientes), se obtiene:

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q}_s\mathbf{H}^H(\mathbf{Q}_n + \mathbf{H}\mathbf{Q}_s\mathbf{H}^H)^{-1} = \sigma_s^2\mathbf{H}^H(\sigma_n^2\mathbf{I}_{N_r} + \sigma_s^2\mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1} = \mathbf{H}^H(\alpha\mathbf{I}_{N_r} + \mathbf{H}\mathbf{H}^H)^{-1}$$

Donde  $\alpha = \sigma_n^2/\sigma_s^2$ . Aplicando el lema de Inversión de Matrices se llega a que:

$$\mathbf{W} = (\alpha\mathbf{I}_{N_r} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H$$

Partiendo de este resultado se puede observar como se compensa el incremento de ruido de la solución del ZF (MMSE con  $\alpha = 0$ ).

### 5.2.2 Complejidad

La complejidad del algoritmo MMSE es del mismo orden que la complejidad del algoritmo ZF descrito en la sección anterior.

#### 5.2.2.1 Cálculo del vector $\mathbf{W}$

En este caso, el MMSE viene dado por la matriz  $\mathbf{W}$  que como mencionamos anteriormente es:

$$\mathbf{W} = (\alpha \mathbf{I}_{N_t} + \mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H$$

La complejidad de  $\mathbf{W}$  es la misma que la de  $\mathbf{H}^\dagger$  para el caso del algoritmo ZF, sólo que añadiendo  $N_t$  sumas reales de  $\alpha$  (esto es la suma de  $\alpha$  a la parte real de los elementos de la diagonal de  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ ). Esto lleva a una complejidad en el cálculo de  $\mathbf{W}$  de:

$$\text{Complejidad}_1 \text{MMSE} = 4N_t^3 + N_t^2(8N_r - 2) - 2N_t N_r + N_t \text{ sumas reales}$$

$$\text{Complejidad}_2 \text{MMSE} = 4N_t^3 + 8N_t^2 N_r \text{ multiplicaciones reales.}$$

Dado que  $N_t \leq N_r$ , el algoritmo MMSE tendrá una complejidad  $O(N_t^2 N_r)$ . Suponiendo que el envío de un paquete requiere la transmisión de  $N_s$  vectores de símbolos, la complejidad por símbolo vendrá dada por  $O(N_t^2 N_r N_s)$ , tal y como se obtuvo para el caso del detector ZF.

## 5.3 ZF con SIC

### 5.3.1 Algoritmo

Aunque las técnicas de detección lineal son atractivas desde el punto de vista de la complejidad computacional, éstas conducen a una degradación de la BER en términos de rendimiento. Para obtener un rendimiento superior se recurre a aproximaciones no lineales.

Hasta ahora se han descrito únicamente decisores lineales, ZF y MMSE, y, aunque estos presentan resultados buenos, si se quiere mejorar el rendimiento en detección será necesario el uso de decisores no lineales.

Si de alguna forma se pudiese decodificar el elemento más fiable del elemento transmitido  $\mathbf{s}$  y usarlo para mejorar la decodificación del resto de elementos de  $\mathbf{s}$ , se lograría un mejor rendimiento del sistema. Este principio se denomina *Successive Interference Cancellation* (SIC) y, en este caso, hace uso de la salida del decisor ZF.

Cuando aplicamos SIC, es muy importante para el rendimiento completo del sistema el orden en el que se detectan los componentes de  $\mathbf{s}$ . Para determinar un buen orden de detección, se usa la matriz de covarianza del error estimado  $\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est}$ . Ésta se define para el caso del ZF como:

$$\mathbf{Q} = E[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})^H (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})] = \sigma_n^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \equiv \sigma_n^2 \mathbf{P}$$

Donde  $\mathbf{P}$  es la pseudo-inversa, definida como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^\dagger (\mathbf{H}^\dagger)^H$$

Partiendo de esta definición, el elemento de  $\mathbf{s}_{est}$  con la mejor estimación será el elemento de la diagonal de  $\mathbf{P}$  menor, ya que será el estimado con la menor varianza de error. Dado que  $\mathbf{P}_{pp}$ ,  $p$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\mathbf{P}$ , es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de la fila  $p$  de  $\mathbf{H}^\dagger$ , buscar el mínimo de la suma de los elementos al cuadrado de cada fila de  $\mathbf{H}^\dagger$  es similar. Partiendo de esto se define el algoritmo de decodificación como:

1. Analizar la matriz  $\mathbf{H}^\dagger$  y encontrar la fila cuya suma de elementos al cuadrado sea menor, esto es, la  $p$ -ésima fila de  $\mathbf{H}^\dagger$ . Colocar la  $p$ -ésima fila de  $\mathbf{H}^\dagger$  como última fila y, correspondientemente, la  $p$ -ésima columna de  $\mathbf{H}$  como última columna.
2. Estimación del elemento correspondiente de  $\mathbf{s}$ . Para el caso del ZF:

$$(\mathbf{s}_{est})_p = \mathbf{w}^{N_t} \mathbf{x}$$

Donde  $\mathbf{w}^{N_t}$  equivale a la  $N_t$ -ésima fila de la  $\mathbf{H}^\dagger$  permutada del apartado anterior. Una vez determinado  $(\mathbf{s}_{est})_p$  se aproxima al símbolo más cercano de la constelación,  $(\mathbf{s}_{est,sliced})_p$ .

3. Así, mientras  $N_t - 1 > 0$ , se vuelve al paso 1, pero antes:
  - a.  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^{(N_t-1)} = (\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{N_t-1})$  y a partir de esta, se calcula la nueva  $\mathbf{H}^\dagger$ .
  - b.  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{h}_{N_t} (\mathbf{s}_{est,sliced})_p$
  - c.  $N_t \rightarrow N_t - 1$

### 5.3.2 Complejidad

Aunque los 3 pasos del algoritmo tienen complejidad, el que posee una complejidad mayor y supone el cuello de botella de este detector, es aquel en el cual se realiza el cálculo de la pseudo-inversa.

#### 5.3.2.1 Complejidad cálculo pseudo-inversa

Tal y como se dedujo en los apartados 6.1 y 6.2, la complejidad del cálculo de la pseudo-inversa viene dada por:  $O(N_t^2 N_r)$ .

Dado que el algoritmo es iterativo y las dimensiones de las matrices usadas disminuyen, la complejidad también disminuirá. De esta forma la complejidad total vendrá dada por:  $O(N_r(N_t^2 + (N_t - 1)^2 + (N_t - 2)^2 + \dots + 1))$ .

Para simplificar esta complejidad total se recurrirá al uso de series. Así, tendremos que:

$$N_r \sum_{p=1}^{N_t} p^2 = N_r \frac{N_t(N_t + 1)(2N_t + 1)}{6}$$

La complejidad del algoritmo será de:  $O(N_t^3 N_r)$ . Nuevamente, si se supone que el envío de un paquete requiere la transmisión de  $N_s$  vectores de símbolos, la complejidad por paquete vendrá dada por  $O(N_t^3 N_r N_s)$ .

## 5.4 MMSE con SIC

### 5.4.1 Algoritmo

Para llevar a cabo la Cancelación de Interferencia Sucesiva (SIC) utilizando la salida del decisor MMSE, el algoritmo de la sección 5.3 tendrá que sufrir algunos cambios. No obstante, la nueva matriz de covarianza del error  $\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est}$  se definirá como:

$$\mathbf{Q} = E[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})^H (\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})] = \sigma_n^2 (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \equiv \sigma_n^2 \mathbf{P}$$

Luego como se observa en la ecuación anterior  $\mathbf{P}$  es diferente de aquella que se definió para el algoritmo ZF con SIC. Teniendo en cuenta esto, el algoritmo MMSE con SIC se describe como:

1. Determinar el filtro MMSE,  $\mathbf{W}$  y, a partir de ahí, determinar  $\mathbf{P}$ . Encontrar el elemento más pequeño de la diagonal de  $\mathbf{P}$  (se supone que es la  $p$ -ésima entrada). Situar la  $p$ -ésima columna de  $\mathbf{H}$  como última columna y permutar la  $p$ -ésima fila de  $\mathbf{W}$  de igual forma.
2. Estimación del elemento correspondiente de  $\mathbf{s}$ . Para el MMSE:

$$(\mathbf{s}_{est})_p = \mathbf{w}^{N_t} \mathbf{x}$$

Donde  $\mathbf{w}^{N_t}$  equivale a la  $N_t$ -ésima fila de la  $\mathbf{W}$  permutada del apartado anterior. Una vez determinado  $(\mathbf{s}_{est})_p$  se aproxima al símbolo más cercano de la constelación,  $(\mathbf{s}_{est,sliced})_p$ .

3. Así, mientras  $N_t - 1 > 0$ , se vuelve al paso 1, pero antes:
  - a.  $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}^{(N_t-1)} = (\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{N_t-1})$  y a partir de esta, se calcula la nueva  $\mathbf{W}$ .
  - b.  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{h}_{N_t} (\mathbf{s}_{est,sliced})_p$
  - c.  $N_t \rightarrow N_t - 1$

### 5.4.2 Complejidad

La complejidad del algoritmo MMSE con SIC es la misma que la del algoritmo ZF con SIC del apartado 5.3.2.

## 5.5 MMSE LAS

Este detector, denominado de *Likelihood Ascent Search* (LAS) busca secuencias de vectores de bits que originen un ascenso monótonico en la función de verosimilitud hasta que ésta converja en un punto fijo tras un número finito de iteraciones. Sus principales ventajas con respecto a los detectores anteriores consisten en una complejidad media por bit lineal con el número de antenas y en que ofrece una solución cercana a la del detector MLD para números elevados de antenas.

Dado el sistema propuesto en el punto 3 donde se describía la señal recibida en el vector como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Si se descompone cada componente en parte real e imaginaria se obtiene:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_I + j\mathbf{x}_C, \quad \mathbf{s} = \mathbf{s}_I + j\mathbf{s}_Q, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_I + j\mathbf{n}_C, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_I + j\mathbf{H}_C$$

Ahora se define  $\mathbf{H}_r \in \mathbb{R}^{2N_r \times 2N_t}$ ,  $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^{2N_r \times 1}$ ,  $\mathbf{s}_r \in \mathbb{R}^{2N_t \times 1}$  y  $\mathbf{n}_r \in \mathbb{R}^{2N_r \times 1}$ . Así que ahora se puede escribir:

$$\mathbf{x}_r = \mathbf{H}_r \mathbf{s}_r + \mathbf{n}_r$$

Esta expresión es la que se usará para el resto de ecuaciones, aunque por comodidad se suprimirá el subíndice  $r$ . Con el modelo de sistema descrito arriba, la parte real de los símbolos de datos complejos ocupará las posiciones  $[s_1, \dots, s_{N_t}]$  mientras que la parte imaginaria ocupará las posiciones  $[s_{N_t+1}, \dots, s_{2N_t}]$ . Si se define  $\Psi$  como el conjunto de valores que puede tomar  $s_i$ , para una modulación 16-QAM como la que se ha utilizado en este proyecto, se tendrá que  $\Psi_i = \{-3, -1, 1, 3\}$ . Si se define ahora el espacio de señal  $2N_t$ -dimensional  $S$  como el producto cartesiano de  $\Psi_1$  a  $\Psi_{2N_t}$ , el vector que nos da la solución de máxima verosimilitud,  $\mathbf{d}_{ML}$ , viene dado por:

$$\mathbf{d}_{ML} = \arg_{\mathbf{d} \in S} \min \|\mathbf{x} - \mathbf{H}\mathbf{d}\|^2 = \arg_{\mathbf{d} \in S} \mathbf{d}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{d} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{d}$$

Siguiendo las referencias de (10) (11).

### 5.5.1 Algoritmo

Consiste en una secuencia de etapas de búsqueda de ascenso de la verosimilitud donde la verosimilitud aumenta monotónicamente con cada etapa de búsqueda. Cada etapa de búsqueda consiste en varias iteraciones, donde se actualiza un símbolo de una iteración a la siguiente hasta que se alcanza un mínimo local, momento en el que el algoritmo termina.

Para este caso,  $\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{W}\mathbf{x}$  donde  $\mathbf{W}$  es la solución del filtro MMSE. La función de coste de máxima verosimilitud después de la  $k$ -ésima iteración en una etapa de búsqueda viene dada por:

$$\mathcal{C}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)T} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{d}^{(k)} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{d}^{(k)}$$

Si se define la regla de actualización de un solo símbolo como:

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + \lambda_p^{(k)} \mathbf{e}_p$$

Donde  $\mathbf{e}_p$  es el vector todo ceros menos el elemento en la posición  $p$  que es uno y  $\lambda_p^{(k)} = \mathbf{d}^{(k+1)} - \mathbf{d}^{(k)}$ , y la matriz  $\mathbf{G}$  como:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}^T \mathbf{H}$$



Se puede escribir la diferencia de coste  $\Delta C_p^{k+1} = C_p^{(k+1)} - C_p^{(k)}$  como:

$$\Delta C_p^{(k+1)} = \lambda_p^{(k)2} (\mathbf{G})_{pp} - 2\lambda_p^{(k)} z_p^{(k)}$$

Donde  $(\mathbf{G})_{pp}$  es el  $(p,p)$ -ésimo elemento de  $\mathbf{G}$ . Si se define

$$a_p = (\mathbf{G})_{pp} \text{ y } l_p^{(k)} = |\lambda_p^{(k)}|$$

Se puede reescribir la ecuación anterior como:

$$\Delta C_p^{(k+1)} = l_p^{(k)} a_p - 2l_p^{(k)} |z_p^{(k)}| \text{sgn}(\lambda_p^{(k)}) \text{sgn}(z_p^{(k)})$$

Donde  $\text{sgn}(\cdot)$  denota la función signo. Para reducir la función de coste ML de iteración a iteración la diferencia de coste debe ser negativa. Usando este hecho y que  $a_p$  y  $l_p^{(k)}$  son cantidades no negativas, se puede concluir que:

$$\text{sgn}(\lambda_p^{(k)}) = \text{sgn}(z_p^{(k)})$$

Así que usando todo esto se puede reescribir nuevamente la función de diferencia de coste ML como:

$$F(l_p^{(k)}) = \Delta C_p^{(k+1)} = l_p^{(k)} a_p - 2l_p^{(k)} |z_p^{(k)}|$$

Por tanto, para que  $F(l_p^{(k)})$  sea negativo, se necesita que:

$$l_p^{(k)} < \frac{2 |z_p^{(k)}|}{a_p}$$

Bajo la restricción anterior y sabiendo que  $l_p^{(k)}$  está limitado a unos cuantos valores, podemos encontrar el  $l_p^{(k)}$  óptimo evaluando  $F(l_p^{(k)})$  para todos los posibles valores de  $l_p^{(k)}$  y viendo cuál produce el descenso mayor en la función de ML. Dado que esto tendría un elevado coste computacional, podemos determinar el  $l_p^{(k)}$  óptimo que minimiza  $F(l_p^{(k)})$  como:

$$l_{p,opt}^{(k)} = 2\text{round}\left(\frac{2 |z_p^{(k)}|}{a_p}\right)$$

Donde  $\text{round}(\cdot)$  es la función redondeo. Si el  $p$ -ésimo símbolo de  $\mathbf{d}^{(k)}$ ,  $d_p^{(k)}$ , se actualizase, entonces el nuevo valor del símbolo vendría dado por:

$$d_{approx_p}^{(k+1)} = d_p^{(k)} + l_p^{(k)} \text{sgn}(z_p^{(k)})$$

Sin embargo,  $d_{aprox_p}^{(k+1)}$  puede tomar valores sólo en el conjunto  $\Psi_p$ , así que es necesario chequear la posibilidad de que  $d_{aprox_p}^{(k+1)}$  sea mayor que  $M - 1$  ó menor que  $-(M - 1)$ . Esto es, si  $d_{aprox_p}^{(k+1)} > (M - 1)$ , la ecuación de ajuste es:

$$l_p^{(k)} = l_p^{(k)} - \text{sgn}(z_p^{(k)}) (d_{aprox_p}^{(k+1)} - (M - 1))$$

Y si  $d_{aprox_p}^{(k+1)} < -(M - 1)$ , la ecuación de ajuste es:

$$l_p^{(k)} = l_p^{(k)} - \text{sgn}(z_p^{(k)}) (d_{aprox_p}^{(k+1)} + (M - 1))$$

Si se define  $l_{aprox_{p,opt}}^{(k+1)}$  como el valor de las ecuaciones anteriores para  $l_{p,opt}^{(k)}$  se puede determinar que si  $F(l_{p,opt}^{(k)})$  es no positiva, entonces  $F(l_{aprox_{p,opt}}^{(k)})$  es también no positiva. Ahora, dado  $F(l_{aprox_{p,opt}}^{(k)})$ , para todo  $p$ ,

$$t = \arg \min_p F(l_{aprox_{p,opt}}^{(k)})$$

Si  $F(l_{aprox_{t,opt}}^{(k)}) < 0$ , la actualización para la  $(k+1)$ -ésima iteración es:

$$\mathbf{d}^{(k+1)} = \mathbf{d}^{(k)} + l_{t,opt}^{(k)} \text{sgn}(z_t^{(k)}) \mathbf{e}_t,$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} + l_{t,opt}^{(k)} \text{sgn}(z_t^{(k)}) \mathbf{g}_t$$

Siendo  $\mathbf{g}_t$  la  $t$ -ésima columna de  $\mathbf{G}$ . Si  $F(l_{aprox_{t,opt}}^{(k)}) \geq 0$ , el algoritmo termina dado que se ha alcanzado el mínimo local.

### 5.5.2 Complejidad

La complejidad del algoritmo LAS es debida a tres componentes: *i)* cálculo inicial de  $\mathbf{G}$ , *ii)* actualización de  $\mathbf{d}^{(k+1)}$  y  $\mathbf{z}^{(k+1)}$  en cada paso y *iii)* el número medio de pasos necesarios para alcanzar un punto fijo.

El cálculo de  $\mathbf{G}$  requiere la multiplicación de  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ . Teniendo en cuenta que  $\mathbf{H}^H$  tiene dimensión  $N_r \times N_t$  y  $\mathbf{H}$  tiene dimensión  $N_t \times N_r$ , la complejidad de este producto vendrá dada por  $O(N_t^2 N_r)$ , tal y como se demuestra en la sección 5.1.2.1.

Por otro lado, dado que únicamente se actualiza un bit por paso, la complejidad de actualización de  $\mathbf{d}^{(k+1)}$  y  $\mathbf{z}^{(k+1)}$  será de  $O(N_t)$ .

Por último, obteniendo el número medio de pasos necesarios para alcanzar un punto fijo en varias simulaciones del algoritmo LAS, se observó que el número medio de pasos era lineal con  $N_t$ .

De esta forma, se deduce que la complejidad del algoritmo LAS es de  $O(N_t^2 N_r)$ .

Además de la complejidad de arriba, la generación del vector inicial  $\mathbf{d}^{(0)}$  es la salida del detector MMSE, que tiene una complejidad de  $O(N_t^2 N_r)$ . Por tanto, la complejidad total del detector MMSE-LAS es  $O(N_t^2 N_r)$ . Si se supone que el envío de un paquete requiere la transmisión de  $N_s$  vectores de símbolos, la complejidad por paquete vendrá dada por  $O(N_t^2 N_t N_s)$ .

Si se compara esta complejidad con la de los detectores con SIC, tanto ZF como MMSE, se observa que mientras el detector LAS tiene una complejidad de  $O(N_t^2 N_r)$ , los detectores SIC tienen una complejidad de  $O(N_t^3 N_r)$ . Esto indica que el detector LAS tiene una ventaja en complejidad del orden de  $N_t$  con respecto a los SIC. Así, pese a que los dos ofrecen rendimientos similares para el orden de decenas de antenas, la baja complejidad del detector LAS permite que puede utilizarse con centenares de antenas en el lado del transmisor y del receptor, aumentando la capacidad del canal y consiguiendo valores cercanos a los obtenidos con detector ML en entornos en los que los detectores SIC serían inviables.

## 5.6 ZF con salida suave

La salida suave permite mejorar el rendimiento del sistema cuando se aplica un codificador adecuado. (3)

### 5.6.1 Algoritmo

Para ZF, la generación de los valores de decisión blandos se basa en la transformación del vector recibido  $\mathbf{x}$  del “espacio  $\mathbf{x}$ ” al “espacio  $\mathbf{s}$ ” de forma que la búsqueda del posible vector transmitido se realiza directamente en ese espacio. Se empieza definiendo la función densidad de probabilidad condicional del vector estimado  $\mathbf{s}$  para un canal  $\mathbf{H}$ , como:

$$p(\mathbf{s}_{est} | \mathbf{s}, \mathbf{H}) = \det(\pi \mathbf{Q})^{-1} \exp(-(\mathbf{s}_{est} - \mathbf{s})^H \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{s}_{est} - \mathbf{s}))$$

Donde  $\mathbf{Q}$  es la matriz de covarianza del error de estimación. Aunque generalmente ésta no puede asumirse diagonal puesto que los errores de estimación de las diferentes antenas están correlados, para la implementación de este proyecto sí se considerará diagonal a fin de reducir la complejidad.

La generación de los valores de salida suaves para ZF se basa en el principio de probabilidad máxima a posteriori (MAP). Supóngase que, en un instante de tiempo dado, se tienen  $N_b = N_t m$  bits, de forma que cada una de las  $N_t$  antenas envía un símbolo  $s_i$  formado por  $m = \log_2 M$  bits. Así, para cada una de las  $N_t$  antenas transmisoras, dado el bit  $b_k$  para  $k = 1, \dots, m$  del símbolo  $s_p$  transmitido por la  $p$ -ésima antena transmisora, el decodificador binario MAP símbolo a símbolo en el lado del receptor decide, condicionado al vector  $\mathbf{x}$  recibido, que el bit  $b_k$  de  $s_p$  fue “1” si:

$$\Pr(b_{k,p} = 1 | \mathbf{x}) > \Pr(b_{k,p} = 0 | \mathbf{x})$$

ó “0” en caso contrario.  $b_{k,p}$  indica el bit  $k$ -ésimo del símbolo transmitido por la antena  $p$ .

La regla anterior puede ser escrita de forma más compacta en función del Log-Likelihood Ratio (LLR) como:

$$L(b_{k,p}) = \ln \frac{\Pr(b_{k,p}=0|\mathbf{x})}{\Pr(b_{k,p}=1|\mathbf{x})}$$

Donde LLR  $\in \mathbb{R}^{N_b \times 1}$

Si se transfiere el problema al “espacio  $\mathbf{s}$ ”, dado  $\mathbf{m}$  la constelación

$$L(b_{k,p}) = \ln \frac{\Pr(b_{k,p} = 0|\mathbf{x})}{\Pr(b_{k,p} = 1|\mathbf{x})} = \ln \frac{\sum_{\mathbf{m}_i|b_{k,p}=0} \Pr(s_i|\mathbf{s}_{est_p})}{\sum_{\mathbf{m}_i|b_{k,p}=1} \Pr(s_i|\mathbf{s}_{est_p})}$$

Si se aplica ahora el teorema de Bayes y dado que todos los símbolos son equiprobables, se puede obtener:

$$L(b_{k,p}) = \ln \frac{\sum_{\mathbf{m}_i|b_{k,p}=0} \Pr(\mathbf{s}_{est_p} | s_i)}{\sum_{\mathbf{m}_i|b_{k,p}=1} \Pr(\mathbf{s}_{est_p} | s_i)}$$

Donde como se ha indicado, la matriz  $\mathbf{Q}$  será considerada diagonal, pudiendo determinar que:

$$\Pr(s_{est_p} | s_i) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\mathbf{Q})_{p,p}}} \exp\left(-\frac{(s_{est_p} - s_i)^2}{2(\mathbf{Q})_{p,p}}\right)$$

Procediendo de esta forma para las  $N_t$  antenas transmisoras se obtiene el LLR para los  $N_b$  bits transmitidos en ese instante de tiempo. Esto será la entrada del decodificador LDPC.

## 5.6.2 Complejidad

La complejidad de este algoritmo vendrá determinada principalmente por el cálculo de la matriz de covarianza de error  $\mathbf{Q}$  y la complejidad del algoritmo ZF a través del cual obtenemos  $\mathbf{s}_{est}$ .

### 5.6.2.1 Cálculo de la matriz $\mathbf{Q}$

La matriz de covarianza del error  $\mathbf{Q}$  para ZF se define como:

$$\mathbf{Q} = \sigma_n^2 (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1}$$

Luego la complejidad total vendrá dada por la complejidad del producto  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  y de su inversa. La complejidad del producto  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  es  $O(N_t^2 N_r)$ , tal y como se dedujo en el apartado 5.1.2.1. Por otro lado, la inversión de la matriz resultante del producto anterior, de tamaño  $N_r \times N_r$ , tendrá una complejidad de  $O(N_r^3)$ .

Basándose en lo anterior, la complejidad del cálculo de la matriz  $\mathbf{Q}$  será  $O(N_r^3 + N_t^2 N_r)$  donde sabiendo que  $N_t \leq N_r$ , se puede simplificar la complejidad como  $O(N_r^3)$ .

### 5.6.2.2 Complejidad total

Si a la complejidad inherente al cálculo de la matriz  $\mathbf{Q}$  se le suma la complejidad del detector ZF, esto es,  $O(N_t^2 N_r)$ , se obtiene que la complejidad total de este algoritmo es  $O(N_r^3)$ .

Si suponemos que el envío de un paquete requiere la transmisión de  $N_s$  vectores de símbolos, la complejidad por paquete vendrá dada por  $O(N_s N_r^3)$ .

## 5.7 MMSE con salida suave

Excepto por el hecho de que la matriz de covarianza de estimación del error  $\mathbf{Q}$  para MMSE es diferente que para ZF, los valores de decisión blanda para MMSE son similares y se pueden obtener sustituyendo la matriz  $\mathbf{Q}$  de ZF del apartado anterior por la matriz  $\mathbf{Q}$  de MMSE. Esta será igual a: (3)

$$\begin{aligned}\mathbf{Q} &= E[(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{est})^H] = E[(\mathbf{s} - \mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}))(\mathbf{s} - \mathbf{W}(\mathbf{H}\mathbf{s} + \mathbf{n}))^H] \\ &= E[(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{H})\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{n})(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{H})\mathbf{s} - \mathbf{W}\mathbf{n})^H] \\ &= \sigma_s^2(\mathbf{I} - \mathbf{W}\mathbf{H} - \mathbf{H}^H\mathbf{W}^H + \mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^H\mathbf{W}^H) + \sigma_n^2\mathbf{W}\mathbf{W}^H \\ &= [(\sigma_s^2\mathbf{I} - \sigma_s^2(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1})\mathbf{H}^H\mathbf{H})(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H}) - \sigma_s^2\mathbf{H}^H\mathbf{H} \\ &\quad + \sigma_s^2(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{H}\mathbf{H}^H\mathbf{H} + \sigma_n^2(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^H\mathbf{H})(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1} \\ &= \sigma_n^2(\alpha\mathbf{I} + \mathbf{H}^H\mathbf{H})^{-1}\end{aligned}$$

### 5.7.1 Algoritmo

Similar al del ZF

### 5.7.2 Complejidad

La complejidad de este algoritmo será similar a la del algoritmo ZF con salida suave del apartado anterior.

## 5.8 Resumen complejidad y rendimiento

En la siguiente tabla se muestra un resumen de las principales características de los detectores desarrollados.

Se incluye también información acerca de tiempos de ejecución para 25 antenas, tanto en el lado del transmisor como del receptor, con una secuencia de 100 bits sin codificar a la entrada del modulador y modulación 16-QAM. Se han realizado 1000 iteraciones de los algoritmos por cada valor de SNR, por tanto, para obtener el tiempo de ejecución por iteración se ha dividido el tiempo obtenido entre  $1000 * \text{length}(\text{vector SNR})$ , esto es,  $1000*20$ .

Detector	Ventajas	Inconvenientes	Complejidad	Tiempo de ejecución
<b>MLD</b>	Es el detector óptimo	Elevada complejidad	$O(M^{N_t})^1$	No termina
<b>ZF</b>	Baja complejidad	Para valores elevados de $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ amplifica el ruido	$O(N_t^2 N_r)$	0,00299 s
<b>MMSE</b>	Baja complejidad y compensación de ruido	Bajo rendimiento al ser lineal	$O(N_t^2 N_r)$	0,00402 s
<b>ZF con SIC</b>	Cancelación sucesiva de interferencias	Es el detector subóptimo de mayor complejidad	$O(N_t^3 N_r)$	0,0208 s
<b>MMSE con SIC</b>	Cancelación sucesiva de interferencias y mejor respuesta ante el ruido que el ZF	Es el detector subóptimo de mayor complejidad	$O(N_t^3 N_r)$	0,02269 s
<b>LAS</b>	Obtiene el vector de símbolos que maximiza la función verosimilitud	No llega a ser óptimo	$O(N_t^2 N_r)$	0,01826 s
<b>ZF con salida blanda</b>	Se tiene cierto conocimiento sobre la fiabilidad de los símbolos a la entrada del decodificador	Ninguna	$O(N_r^3)$	0,00941 s
<b>MMSE con salida blanda</b>	Se tiene cierto conocimiento sobre la fiabilidad de los símbolos a la entrada del decodificador	Ninguna	$O(N_r^3)$	0,017292 s

Tabla 1. Resumen detectores

<sup>1</sup> Donde M indica el número de símbolos de la constelación, para este caso 16.

## 6 OBJETIVO DE ESTE PROYECTO

El objetivo de este proyecto es demostrar que, si bien no existe un criterio claro para la optimización de detectores MIMO, sí se sabe que éste debe ir por el camino de las probabilidades suaves a la salida del detector, pues proporcionan conocimiento al decodificador acerca de la fiabilidad de los datos a su entrada.

Tradicionalmente, se ha hecho mucho hincapié en el estudio de los algoritmos de detección MIMO antes del decodificador de canal. En este proyecto se intenta demostrar que esto carece de sentido. Puesto que los códigos modernos sólo tienen buen rendimiento para entradas suaves (aunque sean imprecisas), resulta inútil dedicar mucho esfuerzo a diseñar un detector de salida dura cuando, empleando un detector más sencillo seguido de un decodificador se puede conseguir un rendimiento mucho mayor en términos de tasa de error de bit.

Una vez estimadas las probabilidades a priori para cada bit a la salida del detector, el decodificador usará este conocimiento previo de los datos a su entrada para mejorar el rendimiento del sistema. El decodificador usado en este proyecto es el LDPC, que al mostrar todo su potencial cuando el detector es de salida suave, permitirá que usando un detector muy sencillo y un decodificador de bajo coste, se consigan unas tasas de error de bit muy bajas, de forma, que cuando la longitud del código tienda a infinito, se pueda alcanzar tasas muy cercanas a la capacidad del canal.

## 7 SIMULACIONES

En los siguientes apartados se mostrarán las simulaciones obtenidas en este proyecto con la intención de encontrar las pautas que se deben seguir a la hora de diseñar detectores MIMO de baja complejidad que se adapten de forma eficiente a los sistemas de codificación modernos. Para ello, se han simulado los detectores ZF, MMSE, ZF con SIC, MMSE con SIC, LAS, ZF con salida suave y MMSE con salida suave para sistemas MIMO de 10x10 y 25x25, sin aplicar y aplicando codificación LDPC.

## 7.1 Salida sin codificación para 10 antenas

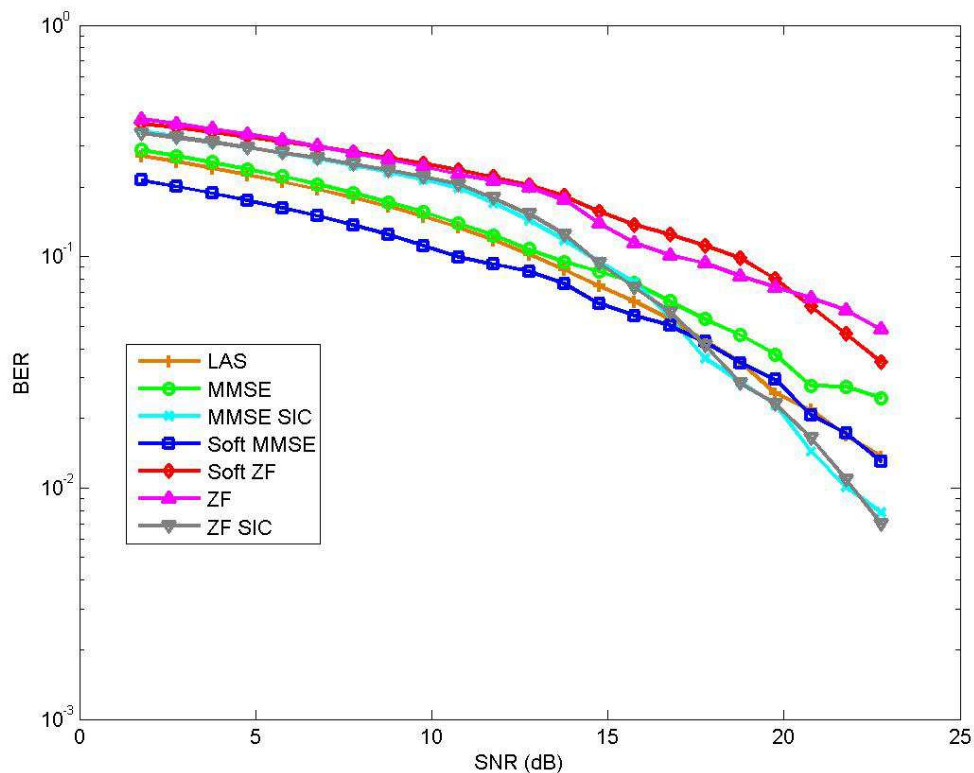


Figura 3. Salida sin codificación para 10 antenas

La gráfica anterior muestra la tasa media de error de bit en función de la SNR para 10 antenas, modulación 16-QAM y sin aplicar codificación. Para obtener dicha tasa media de error, se ha iterado 1000 veces por cada valor de SNR.

Para el rango de SNR comprendido entre 1 y 17 dBs, el detector MMSE con salida suave es el que ofrece mejor respuesta, seguido a 3dB de diferencia por el MMSE con salida dura y el LAS. A partir de estos 17 dBs, los detectores que mayores prestaciones ofrecen son los no lineales, en este caso, el ZF y el MMSE con cancelación de interferencias sucesivas (SIC) y el LAS. Es interesante destacar en la figura que si bien el algoritmo LAS posee una complejidad un orden de  $N_t$  inferior a la de los detectores SIC, su rendimiento es muy similar, llegando a ser incluso superior para valores bajos de SNR.

Finalmente, tal y como se dedujo en la teoría, el detector MMSE tanto con salida blanda como con salida dura, ofrece una respuesta mejor que la del ZF, pues compensa el incremento en el ruido que tiene lugar en éste durante la detección.

También es importante destacar que, como se observa en la figura, los detectores con salida blanda, a pesar de tener cierto conocimiento “a posteriori” de los símbolos enviados, no ofrecen una solución útil cuando no se aplica codificación, siendo sus resultados similares a los obtenidos con salida dura.



## 7.2 Salida sin codificación para 25 antenas

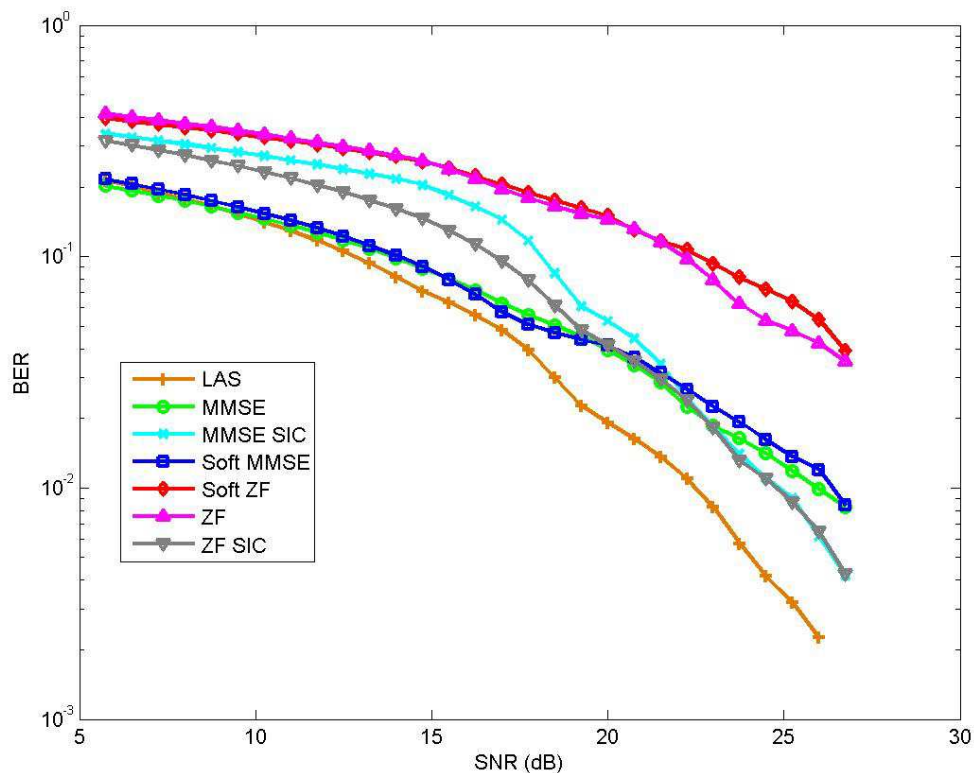


Figura 4. Salida sin codificación para 25 antenas

La siguiente gráfica muestra la tasa media de error de bit en función de la SNR para 25 antenas, modulación 16-QAM y sin aplicar codificación. Para obtener dicha tasa media de error, se ha iterado 1000 veces por cada valor de SNR.

Nuevamente, para valores de SNR comprendidos entre 5 y 20 dBs, se observa que el detector MMSE con salida suave junto con el LAS son los que ofrecen mejores resultados, siendo el primero inferior al segundo para valores de SNR comprendidos entre 10 y 20 dBs. Tras llegar a 20 dBs el detector LAS sigue siendo superior en rendimiento mientras que el detector MMSE con salida dura y suave se ve desplazado por los detectores ZF y MMSE SIC, que poseen un rendimiento mejor. Si comparamos esta figura con la del apartado anterior vemos que, mientras que para 10 antenas, a partir de 20dBs eran los detectores con cancelación de interferencias sucesivas los que nos ofrecían mejor rendimiento, en este caso, el mejor rendimiento viene dado por el detector LAS. Esto podría deberse a que para 10 antenas el espacio de posibilidades en el que se mueve el algoritmo LAS para intentar mejorar es menor que para 25 antenas.

En último lugar, encontramos el detector ZF, tanto con salida dura como con salida blanda, que al incrementar el ruido, es el que peor rendimiento ofrece.

Nuevamente se observa que: (i) el detector LAS, pese a tener una complejidad menor a la de los detectores SIC ofrece un rendimiento igual o superior que estos y (ii) que la respuesta del

detector ZF y MMSE es similar para salida blanda y para salida dura, por tanto, cuando no existe codificación, el detector con salida blanda no presenta ninguna ventaja.

### ***7.3 Salida con codificación para 10 y 25 antenas***

Como se dedujo en los apartados 7.1 y 7.2, el hecho de estar usando detectores con salida blanda no ofrece ninguna ventaja adicional al uso de detectores con salida dura.

Con el objetivo de demostrar que cuando se utiliza una codificación adecuada, el tomar valores suaves a la salida mejora sustancialmente el rendimiento del detector, incluso en el caso de usar decodificadores muy sencillos, se plantean las siguientes simulaciones.

En ellas se mostrarán los resultados obtenidos al aplicar sobre los detectores propuestos en los apartados anteriores decodificadores LDPC con distintos costes, esto es, para 5, 10, 20, 30 y 50 iteraciones del algoritmo *Belief Propagation* (véase anexo 1) para MIMO 10x10 y para 5, 20 y 50 iteraciones para MIMO 25x25.

#### *7.3.1 Salida del decodificador para 50, 30, 20, 10 y 5 iteraciones del BP con 10 antenas*

En la siguientes figuras se muestran las tasas medias de error de bit cuando se aplica una codificación LDPC con matriz de chequeo de paridad  $\mathbf{sH}(500,1000,3)$  de tasa  $\frac{1}{2}$  para 50, 30, 20, 10 y 5 iteraciones del algoritmo *Belief Propagation*. El sistema sobre el que se han realizado las simulaciones está formado por 10 antenas, tanto en el lado del transmisor como del receptor, adecuadamente separadas y con modulación 16QAM. Nuevamente es importante destacar que la codificación LDPC se ha elegido de manera arbitraria sólo para poder poner de manifiesto la importancia de comparar detectores MIMO a la salida de un codificador que pide de manera natural entradas suaves.

Las siguientes figuras muestran los resultados obtenidos para los diferentes tipos de decodificadores usados a la salida del detector.

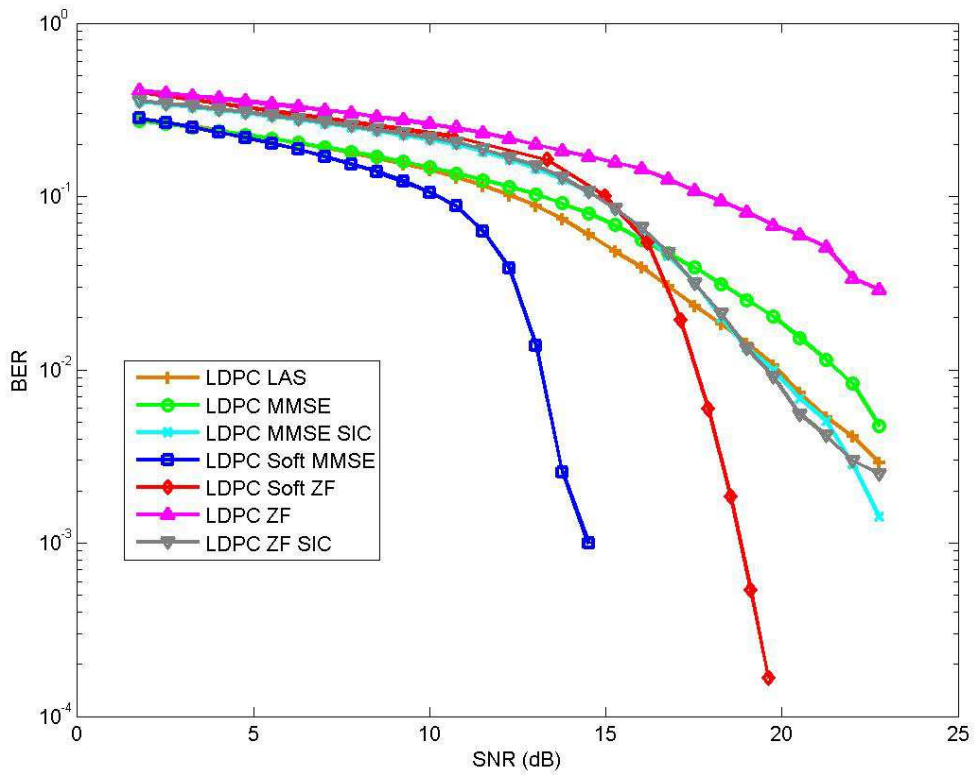


Figura 5. Salida del decodificador LDPC con 50 iteraciones BP

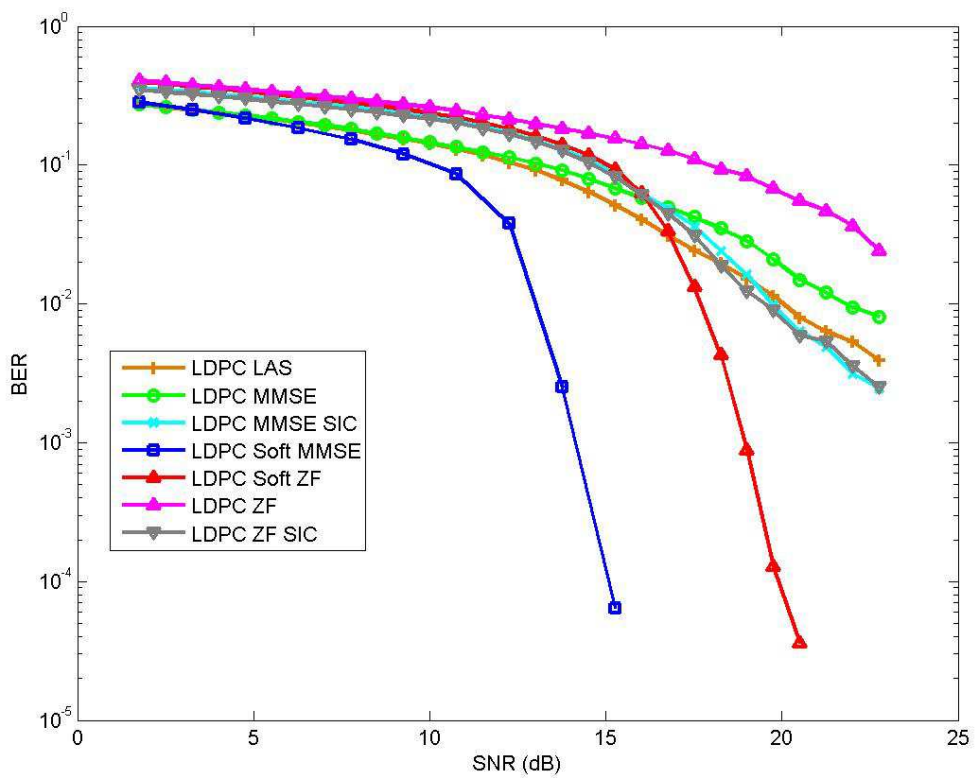


Figura 6. Salida del decodificador LDPC con 30 iteraciones BP

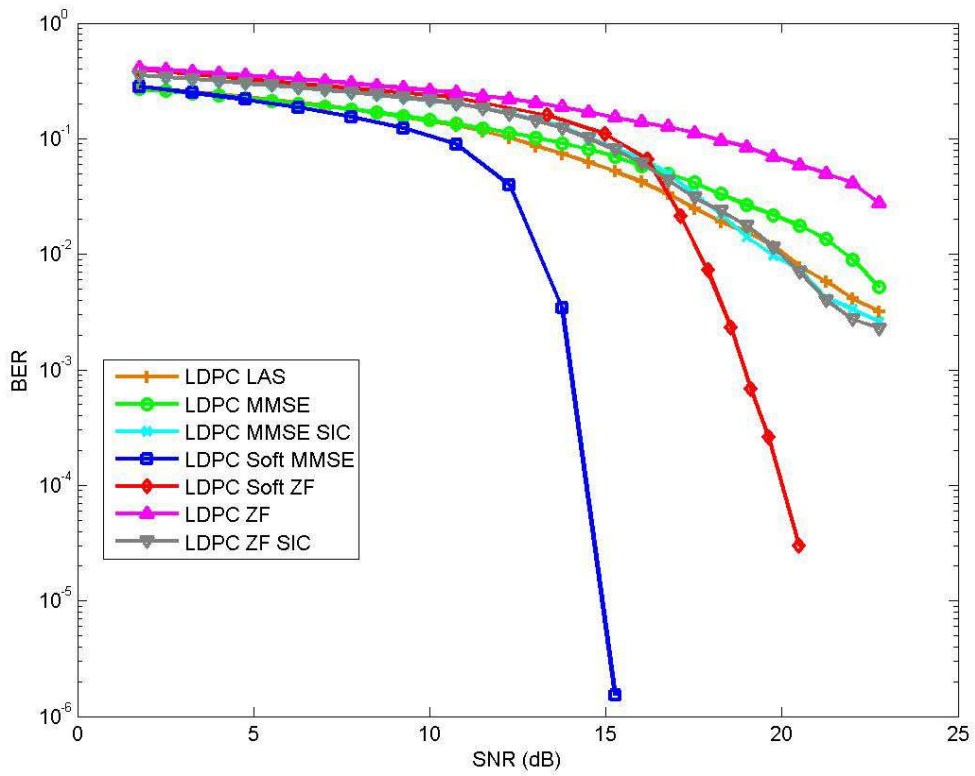


Figura 7. Salida del decodificador LDPC con 20 iteraciones BP

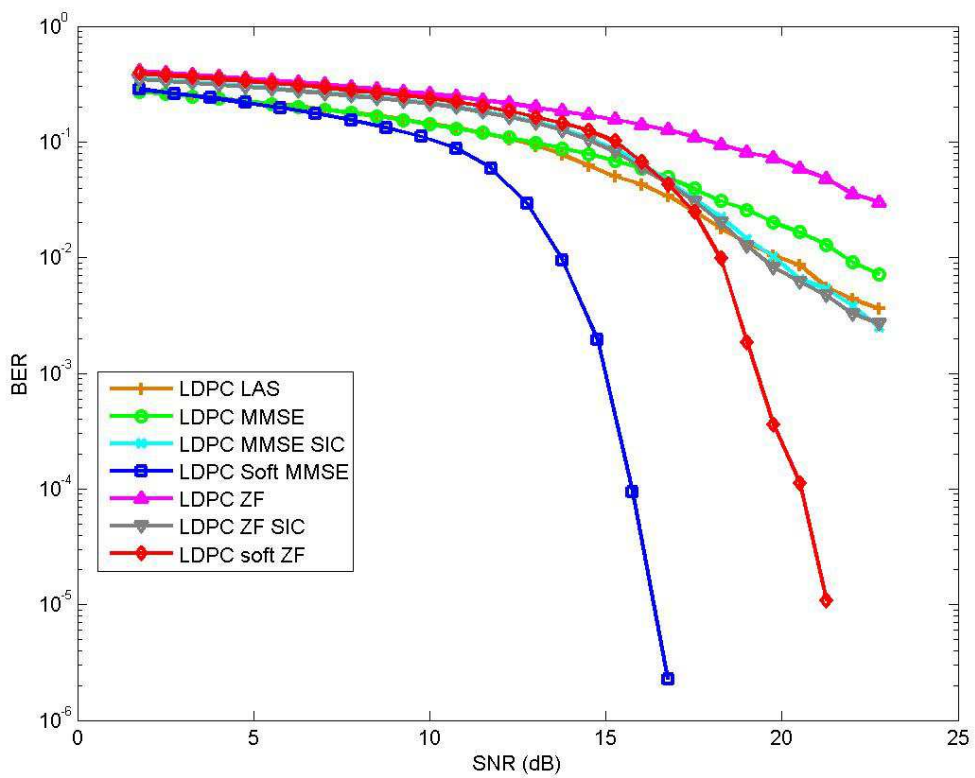


Figura 8. Salida del decodificador LDPC con 10 iteraciones BP

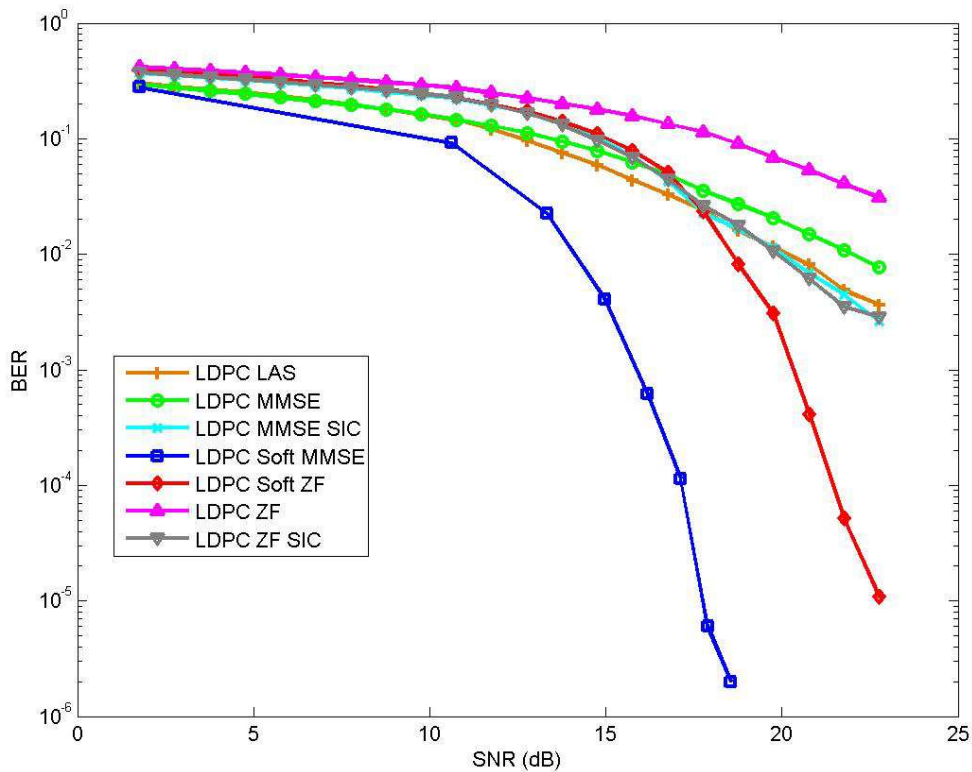


Figura 9. Salida del decodificador LDPC con 5 iteraciones BP

En las 5 figuras anteriores llama la atención como cuando se aplica codificación, los detectores de salida dura no parecen hacer decrecer la BER de manera significativa mientras que los de salida blanda mejoran muy significativamente su rendimiento. Esto se debe a que cuando se orienta el detector a dar probabilidades suaves a la salida lo más cercanas posibles a las probabilidades reales “a posteriori” se consiguen resultados muy buenos, de forma que para métodos sencillos como el MMSE, cuando se le aplica salida blanda y aun con sólo 5 iteraciones del algoritmo BP, se consigue una decodificación que es capaz de mejorar de forma evidente la combinación de un detector MIMO como el LAS de salida dura con una decodificación MIMO de entrada dura.

Si se observa la BER para el decodificador LDPC con 50 iteraciones del BP y con 5, tal y como muestra la siguiente gráfica, se llega a la conclusión de que:

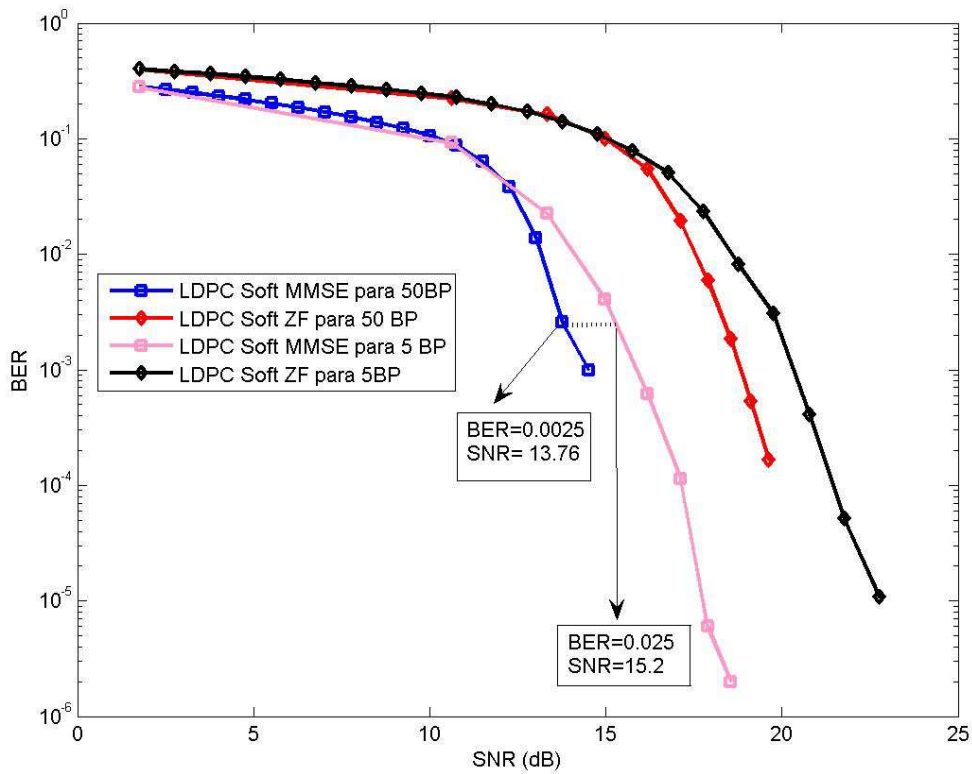


Figura 10. ZF y MMSE con salida suave para 5 y 50 iteraciones BP

Para el caso del MMSE con salida blanda, se ve como el uso del mejor y el peor decodificador, con 50 y 5 iteraciones del BP respectivamente, apenas penaliza en 1,5 dBs de ganancia el segundo con respecto al primero. Lo mismo se deduce para el caso del ZF.

Si se representan ahora los detectores con salida dura para el decodificador más complejo y el más sencillo, esto es, el de 50 iteraciones del BP y el de 5, como en la figura de abajo, se ve como los detectores con salida dura no se ven afectados por el decodificador usado.

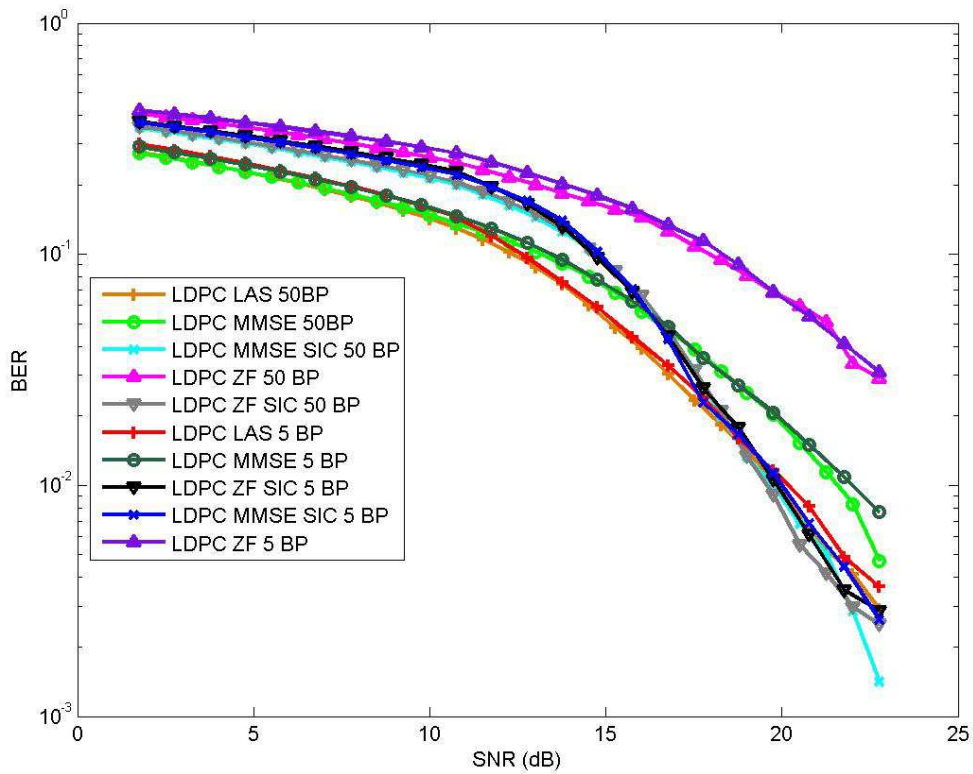


Figura 11. Detectores con salida dura para 5 y 50 iteraciones del BP

Finalmente, si se representan las tasas medias de error para los detectores de salida dura sin codificación y utilizando un decodificador de 50 iteraciones del algoritmo BP se observa que no se obtiene ninguna ventaja en el uso de la codificación, ya que en el mejor de los casos, como en el LAS de la figura siguiente, el uso de codificación con respecto al no uso, aporta un incremento en la ganancia de 3.5 dBs, una mejora muy poco significativa comparada con la de los detectores con salida blanda.

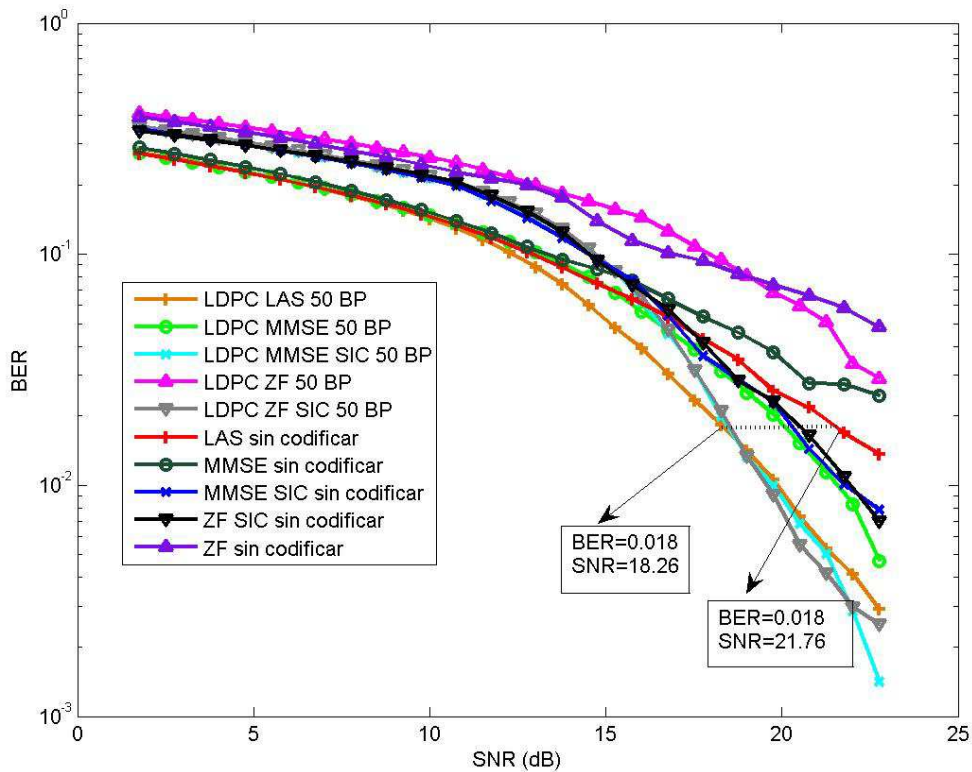


Figura 12. Detectores de salida dura con 50 iteraciones del BP y sin codificación

A modo de resumen se puede extraer que pese a que la optimización de detectores MIMO es compleja y no existe un criterio claro, esta optimización debe ir orientada a dar probabilidades suaves a la salida del detector para que éstas sean lo más cercanas posibles a las probabilidades reales a posteriori.

Para el caso del detector con salidas duras, la codificación no arroja ninguna luz puesto que los códigos modernos LDPC no están orientados a este tipo de entradas. Aquí, podría surgir la pregunta: entonces, ¿por qué no se utiliza un decodificador no LDPC que vaya mejor con entradas duras? Pues bien, los únicos códigos que nos permiten alcanzar la capacidad del canal son los códigos LDPC o los turbo y ambos requieren entradas suaves, por ello, no se hace uso de otro método de codificación. Si se comparan los resultados obtenidos para el decodificador con 50 iteraciones del BP y el caso en el que no existe codificación, se observa como en el caso más extremo la ganancia mejora en 3dBs, que si bien no está mal, dista mucho de los resultados obtenidos para los detectores de salida blanda.

### 7.3.2 Salida del decodificador para 50, 20 y 50 iteraciones del BP para 25 antenas

En las siguientes figuras se muestran las tasas medias de error de bit cuando se aplica una codificación LDPC con la misma matriz de chequeo de paridad que en el apartado anterior para 50, 20 y 5 iteraciones del algoritmo *Belief Propagation* con 25 antenas y modulación 16-QAM.



El objetivo es determinar si aumentando el número de antenas con codificación mejora el detector y si las conclusiones extraídas en el apartado anterior son extrapolables a este caso.

Las siguientes figuras muestran los resultados obtenidos para los diferentes tipos de decodificadores usados a la salida del detector.

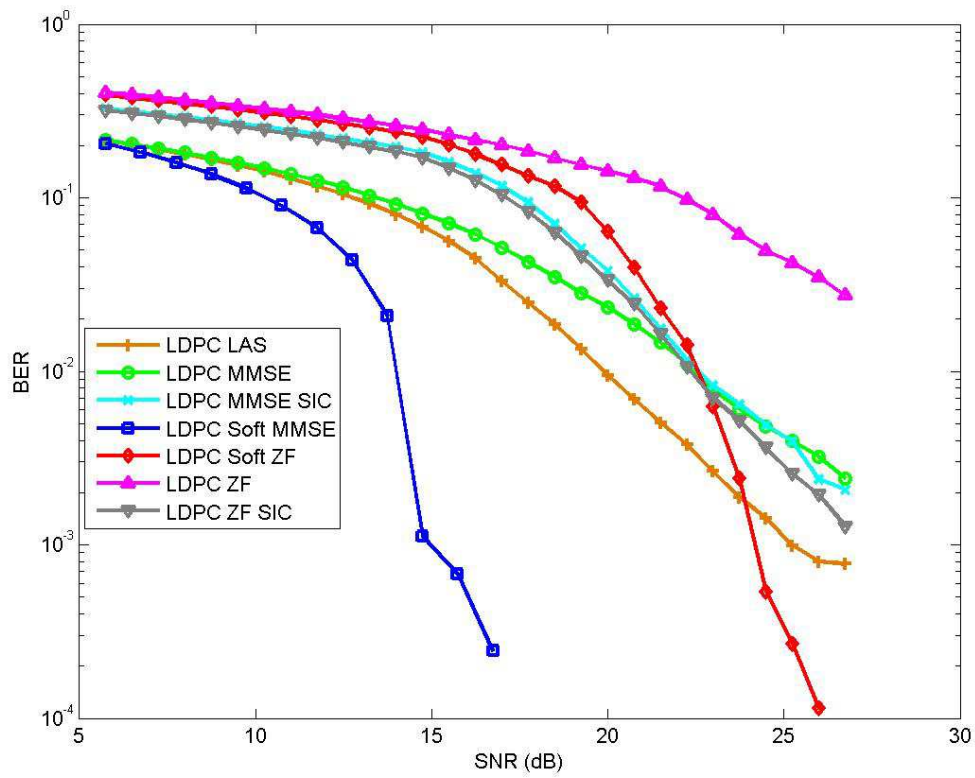


Figura 13. Salida del decodificador con 50 iteraciones BP

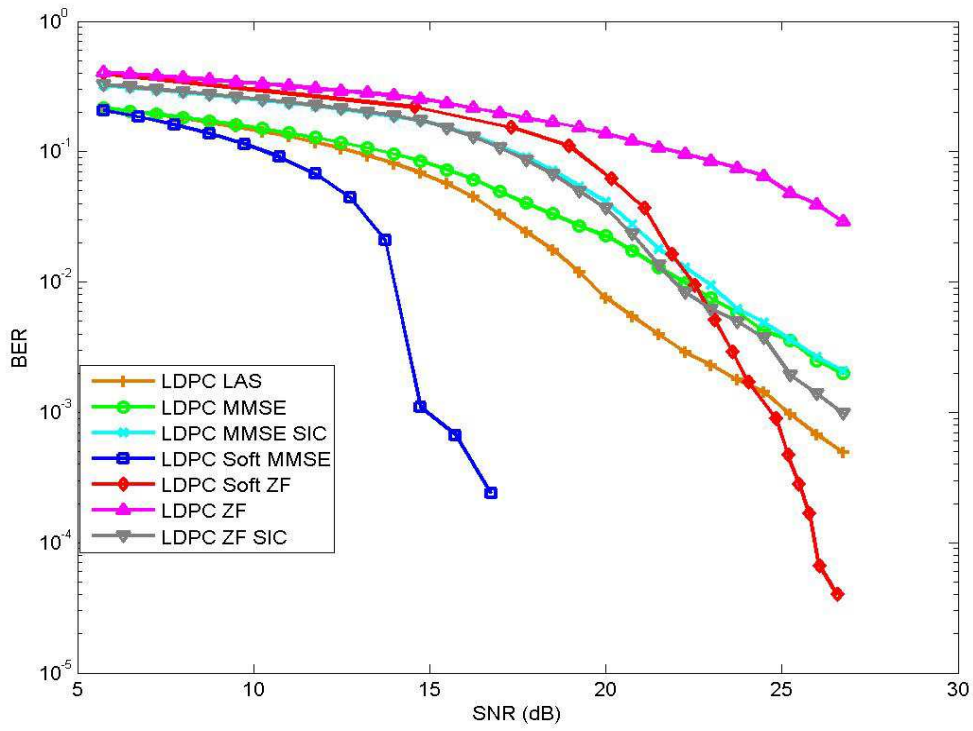


Figura 14. Salida del decodificador con 20 iteraciones BP

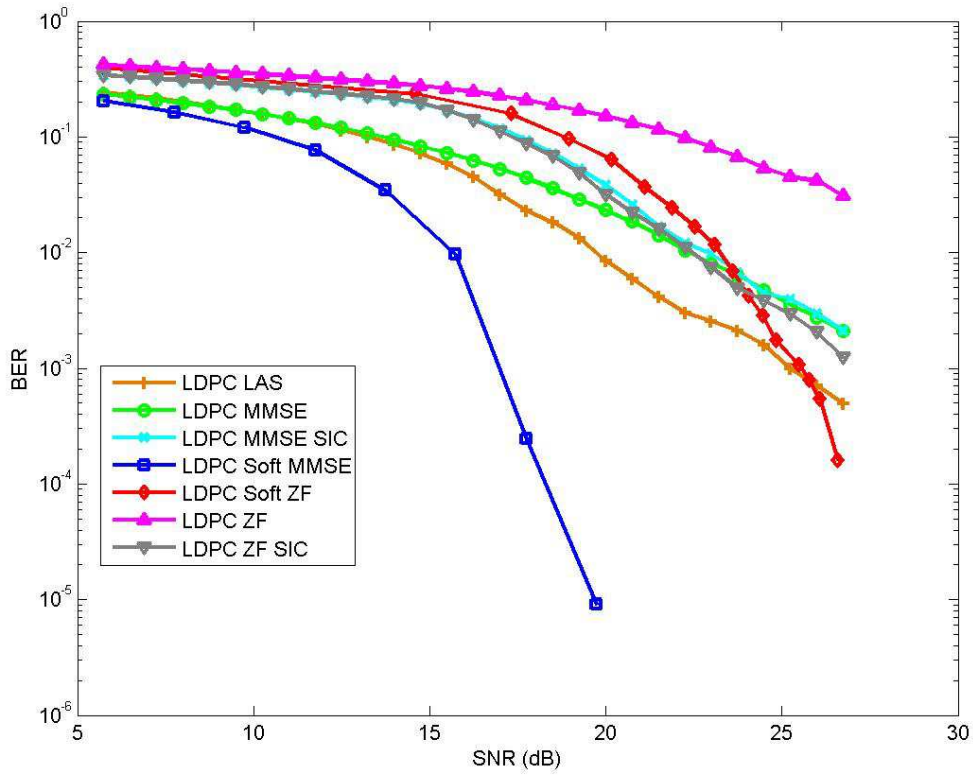


Figura 15. Salida del decodificador con 5 iteraciones BP

El comportamiento es similar al observado en el apartado anterior. Los detectores que utilizan salidas blandas mejoran al usar la decodificación, aun cuando el decodificador usado es muy sencillo, mientras que los detectores con salida dura se muestran indiferentes al decodificador empleado a la salida y apenas mejoran con respecto al caso en el que no se usaba decodificación.

## 8 CONCLUSIONES

Las principales conclusiones extraídas en este proyecto son:

- Aunque no exista un criterio claro para determinar el detector óptimo que proporcione la salida más próxima posible al detector de máxima verosimilitud, MLD, queda demostrado que este debe ir en el camino de tener probabilidades suaves a la entrada del decodificador que sean lo más cercanas posible a las probabilidades a posteriori reales. Teniendo en mente esta idea, el uso de decodificadores con mayor o menor coste, no afecta de manera significativa a la salida del sistema.
- Los decodificadores con entrada dura, al no tener ningún conocimiento previo sobre la fiabilidad de los símbolos a su entrada, no experimentarán apenas mejora con el uso de la decodificación. Además, debido a lo anterior, serán prácticamente independientes del decodificador usado.
- Con la decodificación blanda, detectores lineales de baja complejidad que venían ofreciendo rendimientos bajos cuando no se aplicaba codificación, dan resultados que superan “con creces” a los valores obtenidos con detectores no lineales de mayor complejidad y salida dura. Se cumple así la doble premisa que se buscaba: buen rendimiento y baja complejidad.
- El detector LAS, pese a tener una complejidad  $N_t$  veces inferior a la de los detectores SIC, gracias a la búsqueda de los vectores de símbolos que hacen incrementar monotónicamente la función de verosimilitud consigue resultados iguales o superiores a los ofrecidos por los métodos SIC. De forma que, el detector LAS puede ser usado para centenares de antenas, donde el SIC es inviable por su complejidad, obteniendo resultados próximos a los del MLD.
- A medida que aumenta el número de antenas de nuestro sistema MIMO, se obtiene un rendimiento peor en términos de BER del detector.

## ANEXO 1: Códigos LDPC

Los códigos de chequeo de paridad de baja densidad (LDPC) son un tipo de códigos bloque lineales. El nombre de baja densidad se debe al hecho de que la matriz de chequeo de paridad  $\mathbf{H}$ , es muy dispersiva, es decir, tiene muchos ceros comparados con la cantidad de unos.

La principal ventaja que ofrecen los códigos LDPC es que son códigos modernos capaces de acercarse a la capacidad del canal con una baja complejidad de codificación cuando son decodificados con algoritmos de decodificación iterativa, por ejemplo, el algoritmo *Belief Propagation*.

Dentro de los códigos LDPC se distinguen dos tipos: regulares y no regulares. En este proyecto se usarán códigos LDPC regulares, que se caracterizan porque todas las columnas y las filas de la matriz  $\mathbf{H}$  tienen un grado igual, es decir, la misma cantidad de 1s en todas las columnas y la misma cantidad de 1s en todas las filas. En los códigos irregulares, sin embargo, cada fila y cada columna tienen un grado diferente.

Los códigos LDPC se representan por su matriz de chequeo de paridad  $\mathbf{H}$ , la cual tiene dimensión  $m \times n$ . Sin embargo, estos también se pueden representar de manera efectiva a través de los gráficos de Tanner. Estos no sólo proporcionan una representación completa del código, sino que también ayudan a describir los algoritmos de decodificación que se detallarán a continuación. (12)

Los gráficos de Tanner están formados por nodos unidos entre sí y divididos en dos grupos: *nodos variables (v-nodes)* y *nodos de chequeo (c-nodes)*. Para una matriz  $\mathbf{H}$  de dimensión  $m \times n$ , el gráfico de Tanner asociado tendrá  $m$  nodos de chequeo (el número de bits de paridad) y  $n$  nodos variables (el número de bits de una palabra código). Así, el nodo de chequeo  $f_i$  está conectado al nodo variable  $c_j$  si el elemento  $h_{ij}$  de  $\mathbf{H}$  es un 1.

Si se tiene por ejemplo una matriz de chequeo de paridad  $\mathbf{H}$  de dimensión (8,4):

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El gráfico de Tanner asociado vendrá dado por:

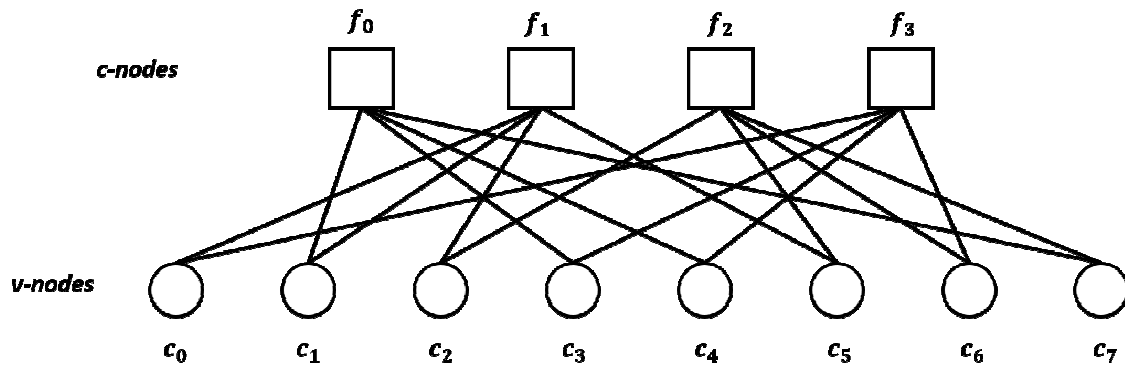


Figura 16. Gráfico de Tanner asociado a la matriz de chequeo de paridad  $H$

## DECODIFICACIÓN DE CÓDIGOS LDPC

La codificación LDPC permite alcanzar la capacidad de Shannon del canal cuando la longitud del código,  $n$  tiende a infinito. Sin embargo, dado que el coste de la decodificación es de  $O(n^2)$ , para longitudes de bloque muy grandes, la decodificación se convierte en extremadamente costosa. Para reducir esta complejidad se utilizan algoritmos iterativos en la decodificación que para  $n$  grandes, poseen un comportamiento cercano al del decodificador de máxima verosimilitud. (6)

Estos algoritmos fueron descubiertos de manera independiente varias veces, motivo por el cual reciben varios nombres. Los más comunes son *algoritmo Belief Propagation*, *algoritmo de paso de mensajes* y *algoritmo sum-product*. Para explicar este algoritmo, se introducirá una solución para decisiones duras primero para posteriormente implementar un algoritmo que funciona con decisiones blandas y con el que se consiguen los mejores resultados.

- **Decodificador decisión dura**

El algoritmo se explicará en base al código del ejemplo introducido en el apartado anterior. Una palabra recibida libre de error podría ser, p.e.,  $\mathbf{c} = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]$ . Se supone un canal BHC y que se recibe la palabra código con un error: el bit  $c_1$  se cambia a 1.

1. En el primer paso todos los nodos variables  $c_i$  envían un “mensaje” a sus nodos de chequeo  $f_j$  con el bit que ellos creen que es el correcto. En esta etapa, la única información que posee el nodo variable  $c_i$  es, el  $i$ -ésimo bit de  $\mathbf{c}$ ,  $y_i$ . Así, si por ejemplo  $c_0$  envía un mensaje conteniendo un 1,  $y_0(1)$ , a  $f_1$  y a  $f_3$ ,  $c_1$  envía un mensaje conteniendo  $y_1(1)$  a  $f_0$  y  $f_1$ , y así sucesivamente.
2. En el siguiente paso cada nodo de chequeo  $f_j$  calcula la respuesta a cada nodo variable al que está conectado. El mensaje de respuesta contiene el bit que  $f_j$  cree que es correcto para  $c_i$  asumiendo que todos los otros nodos variables conectados a  $f_j$  son correctos. Así, si  $f_0$  está conectado a  $c_1$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  y  $c_7$ , el mensaje que se envía a  $c_1$  es el valor que debe tomar  $c_1$  para cumplir la ecuación de chequeo  $c_1 \oplus c_3 \oplus c_4 \oplus c_7 = 0$ , el valor enviado a  $c_3$  es el valor que debe tomar  $c_3$  para cumplir la ecuación de

paridad anterior y así para  $c_4$  y  $c_7$ . Los resultados para el resto de nodos de chequeo se muestran en la siguiente tabla:

$c\text{-node}$	Recibido/enviado			
$f_0$	Recibido: $c_1 \rightarrow 1$ Enviado: $0 \rightarrow c_1$	$c_3 \rightarrow 1$ $0 \rightarrow c_3$	$c_4 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow c_4$	$c_7 \rightarrow 1$ $0 \rightarrow c_7$
$f_1$	Recibido: $c_0 \rightarrow 1$ Enviado: $0 \rightarrow c_0$	$c_1 \rightarrow 1$ $0 \rightarrow c_1$	$c_2 \rightarrow 0$ $1 \rightarrow c_2$	$c_5 \rightarrow 1$ $0 \rightarrow c_5$
$f_2$	Recibido: $c_2 \rightarrow 0$ Enviado: $0 \rightarrow c_2$	$c_5 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow c_5$	$c_6 \rightarrow 0$ $0 \rightarrow c_6$	$c_7 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow c_7$
$f_3$	Recibido: $c_0 \rightarrow 1$ Enviado: $1 \rightarrow c_0$	$c_3 \rightarrow 1$ $1 \rightarrow c_3$	$c_4 \rightarrow 0$ $0 \rightarrow c_4$	$c_6 \rightarrow 0$ $0 \rightarrow c_6$

Tabla 2. Revisión de los mensajes recibidos y enviados por los  $c$ -nodos en el paso 2 del algoritmo BP

Es importante notar que éste será el punto en el cual el algoritmo de decodificación terminará cuando se satisfagan todas las ecuaciones de chequeo.

3. Siguiente fase: los nodos variables reciben los mensajes de los nodos de chequeo y usan esta información adicional para decidir si su bit originario era correcto. Una forma de hacer esto es teniendo en cuenta el voto de la mayoría. Si se vuelve al caso de ejemplo, cada nodo variable tiene 3 fuentes de información concernientes a su bit. El bit recibido originariamente y dos sugerencias de los nodos de chequeo. La tabla 3 ilustra este paso. Una vez decidido, los nodos variables pueden enviar otro nodo con su decisión (dura) acerca del valor correcto del bit a los nodos de chequeo.

$v\text{-node}$	$y_i$ recibido	Mensajes de los nodos de chequeo		Decision
$c_0$	1	$f_1 \rightarrow 0$	$f_3 \rightarrow 1$	1
$c_1$	1	$f_0 \rightarrow 0$	$f_1 \rightarrow 0$	0
$c_2$	0	$f_1 \rightarrow 1$	$f_2 \rightarrow 0$	0
$c_3$	1	$f_0 \rightarrow 0$	$f_3 \rightarrow 1$	1
$c_4$	0	$f_0 \rightarrow 1$	$f_3 \rightarrow 0$	0
$c_5$	1	$f_1 \rightarrow 0$	$f_2 \rightarrow 1$	1
$c_6$	0	$f_2 \rightarrow 0$	$f_3 \rightarrow 0$	0
$c_7$	1	$f_0 \rightarrow 1$	$f_2 \rightarrow 1$	1

Tabla 3. Paso 3 del algoritmo de decodificación descrito. Los  $v$ -nodos usan los mensajes de respuesta de los  $c$ -nodos para elegir el valor del bit en base a la mayoría

4. Ir al paso 2.

En este ejemplo, la segunda ejecución del paso 2 terminaría el proceso dado que  $c_1$  ha votado 0 en su último paso. Esto corrige el error de transmisión, de forma que todas las ecuaciones de chequeo se satisfacen.

- **Decodificador decisión blanda**

La decodificación blanda de códigos LDPC, que está basada en el concepto de *belief propagation*, lleva a un mejor rendimiento en decodificación. Su idea es la misma que para la decodificación dura, salvo que en éste en vez de enviar los bits directamente, se envían las probabilidades a posteriori de cada uno de los bits,  $P_i = \Pr(c_i = 1|y_i)$ .

Se definen también:

- $q_{ij}$ , que es el mensaje enviado por el nodo variable  $c_i$  al nodo de chequeo  $f_j$ . Cada mensaje contiene siempre el par  $q_{ij}(0)$  y  $q_{ij}(1)$  que contienen la cantidad de certeza de que  $y_i$  sea "0" ó "1".
- $r_{ji}$  es un mensaje enviado por el nodo de chequeo  $f_j$  al nodo variable  $c_i$ . Nuevamente hay un  $r_{ji}(0)$  y un  $r_{ji}(1)$  que indica la cantidad (actual) de creencia de que  $y_i$  sea "0" ó "1".

Los pasos en este caso son:

1. Todos los nodos variables envían sus mensajes  $q_{ij}$ . Puesto que no hay información disponible en este paso,  $q_{ij}(1) = P_i$  y  $q_{ij}(0) = 1 - P_i$ .
2. Los nodos de chequeo calculan sus mensajes de respuesta  $r_{ji}$ :

$$r_{ji}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \prod_{i' \in V_j \setminus i} (1 - 2q_{i'j}(1)) \quad r_{ji}(1) = 1 - r_{ji}(0)$$

Se calcula la probabilidad de que haya un número par de 1's entre los nodos variables a excepción de  $c_i$  (eso significa  $V_j \setminus i$ ).

3. Los nodos variables actualizan los mensajes de respuesta que envían a los nodos de chequeo. Esto se hace según las ecuaciones:

$$q_{ij}(0) = K_{ij}(1 - P_i) \prod_{j' \in C_i \setminus j} r_{j'i}(0)$$

$$q_{ij}(1) = K_{ij}P_i \prod_{j' \in C_i \setminus j} r_{j'i}(1)$$

Donde  $K_{ij}$  es una constante elegida de forma que se asegure que  $q_{ij}(0) + q_{ij}(1) = 1$ .  $C_i \setminus j$  ahora indica todos los nodos de chequeo salvo  $f_j$ .



En este punto los nodos variables también actualizan su estimación actual  $\hat{c}_i$  de su variable  $c_i$ . Esto se hace calculando las probabilidades de 0 y 1 y eligiendo la mayor. Las ecuaciones usadas:

$$Q_i(0) = K_i(1 - P_i) \prod_{j \in C_i} r_{ji}(0)$$

$$Q_i(1) = K_i P_i \prod_{j \in C_i} r_{ji}(1)$$

Son similares a las usadas para calcular  $q_{ij}(b)$ , sin embargo, ahora se usa la información de todos los nodos de chequeo.

$$\hat{c}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Q_i(1) > Q_i(0) \\ 0 & \text{el resto} \end{cases}$$

Si la palabra código estimada cumple las ecuaciones de chequeo de paridad el algoritmo termina. Si no, se asegura la terminación a través de un número máximo de iteraciones (esto es lo que se hace variar en el decodificador empleado en este proyecto).

#### 4. Ir al paso 2

El algoritmo de decodificación propuesto será muy cercano a cero para longitudes de bloque grandes. Para prevenir esto, es posible pasar al dominio logarítmico y convertir las multiplicaciones en sumas. Esto resultará en un algoritmo más estable dado que las sumas son menos costosas que las multiplicaciones.

## ANEXO 2: Propiedades de los canales ricos en scattering

La máxima eficiencia espectral se consigue cuando los canales individuales entre cada antena transmisora y receptora pueden considerarse independientes. En la práctica, esto ocurre cuando nos situamos en entornos ricos en scattering, donde, preferiblemente, no existe un camino de comunicación directa, LOS, entre transmisor y receptor. (1)

En estos entornos, durante una transmisión, se producirán múltiples reflexiones, de forma que la señal enviada por una antena transmisora dada recorrerá distintos caminos hasta alcanzar la antena receptora destino. Este efecto se conoce como propagación *multitrayecto*. Además, el movimiento del usuario y/o los objetos hará que cada uno de estos caminos tenga su propio ángulo de salida, retardo, ángulo de llegada y potencia variante con el tiempo. Debido a la interferencia constructiva y destructiva de las componentes de *multitrayecto*, la señal recibida podrá variar en función de la frecuencia, la localización y el tiempo. Estas variaciones se denominan *desvanecimiento* (fading). (3)

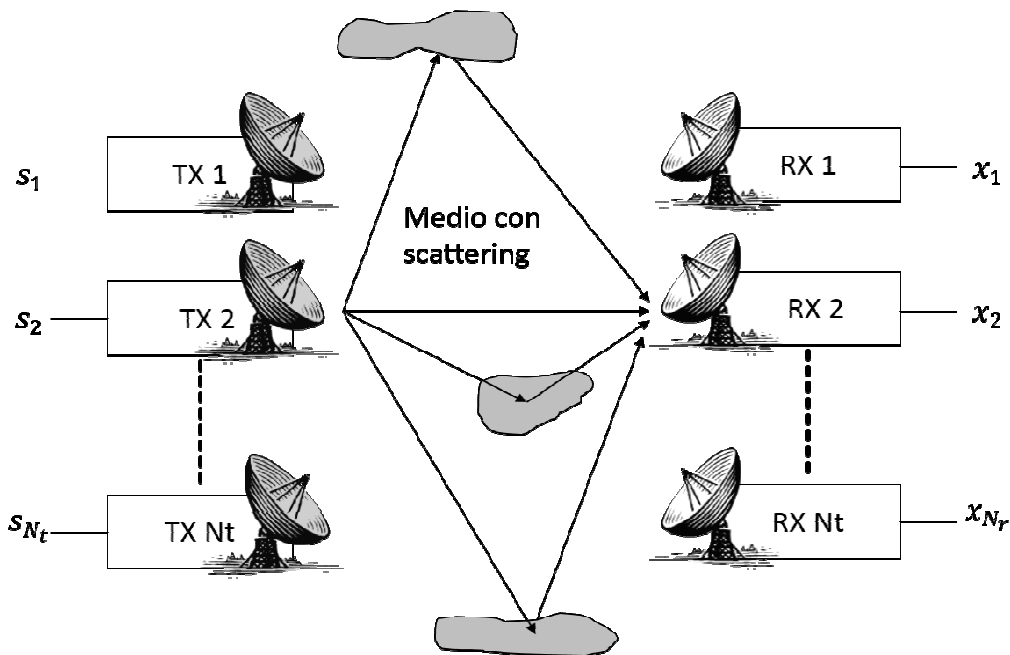


Figura 17. Sistema MIMO operando en un entorno con scattering

En un sistema SDM, todas las antenas TX transmiten simultáneamente sobre la misma frecuencia de portadora por lo que la señal recibida en una antena RX  $q$  consistirá en una combinación lineal de las  $N_t$  antenas transmisoras. Por ello, cuando consideramos la contribución de la  $p$ -ésima antena transmisora, debido al multitrayecto, la  $q$ -ésima antena RX almacenará una suma de copias de la señal TX original escaladas y desplazadas en fase, donde la  $i$ -ésima copia, recibida a tiempo  $t$ , experimentó un retardo temporal de  $\tau_{i,qp}(t)$ . De esta forma, para un sistema MIMO operando a una frecuencia de portadora  $f_c$ , la función de

transferencia equivalente en banda base de la p-ésima antena TX a la q-ésima antena RX en el dominio del tiempo está definida por:

$$g_{qp}(t, \tau) = \sum_{i=0}^{N_m(t)-1} \gamma_{i,qp}(t) \exp(-j\phi_{i,qp}(t)) \delta(\tau - \tau_{i,qp}(t))$$

Donde  $N_m(t)$  es el número de componentes de multitrayecto a tiempo  $t$ , y  $\gamma_{i,qp}(t)$  y  $\tau_{i,qp}(t)$  son la ganancia y el retardo, respectivamente, de una señal que viaja a través del camino  $i$ -ésimo de la antena TX  $p$  a la antena RX  $q$  a tiempo  $t$ . Además,  $\delta(t)$  representa la función delta de Dirac y  $\phi_{i,qp}(t) = 2\pi f_c \tau_{i,qp}(t)$ . Nótese que  $c$  representa la velocidad de la luz,  $f_c = c/\lambda$  y  $\tau_{i,qp}(t) = d_{i,qp}/c$ .

La función de transferencia del canal  $g_{qp}(t, \tau)$  puede ser interpretada físicamente como la respuesta del canal en la q-ésima antena RX en tiempo  $t$  a un impulso de señal de la p-ésima antena TX que fue enviado  $t - \tau$  segundos en el pasado. Por ello,  $g_{qp}(t, \tau)$  se denomina *respuesta al impulso* del canal equivalente en banda base de la p-ésima antena TX a la q-ésima antena RX en tiempo  $t$ . Como se observa, el multitrayecto originará dispersión en el tiempo de la respuesta del canal.

En este punto, sería interesante introducir un número de parámetros interesantes a la hora de caracterizar la respuesta al impulso del canal en el dominio del tiempo:

- *Perfil de potencia en función del retardo (PDP)*. Se define como la potencia de la respuesta al impulso del canal en función de  $\tau$ . Para una respuesta al impulso del canal específica entre la p-ésima antena TX y la q-ésima antena RX,  $g_{qp}(t, \tau)$ , viene dado por:

$$P_{qp}(t, \tau) = \sum_{i=0}^{N_m(t)-1} |\gamma_{i,qp}(t)|^2 \delta(\tau - \tau_{i,qp}(t))$$

- *Retardo medio (mean excess delay)*. Se define como el primer momento del PDP y, para un canal específico  $g_{qp}(t, \tau)$ , viene dado por:

$$\bar{\tau}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_{qp}(t, \tau) \tau d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{qp}(t, \tau) d\tau} = \frac{\sum_{i=0}^{N_m(t)-1} |\gamma_{i,qp}(t)|^2 \tau_{i,qp}(t)}{\sum_{i=0}^{N_m(t)-1} |\gamma_{i,qp}(t)|^2}$$

- *Dispersión del retardo rms (rms delay spread)*. Se define como la raíz cuadrada del segundo momento central del PDP.

$$\tau_d(t) = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} P_{qp}(t, \tau) (\tau - \bar{\tau}(t))^2 d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} P_{qp}(t, \tau) d\tau}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N_m(t)-1} |Y_{i,qp}(t)|^2 (\tau - \bar{\tau}(t))^2}{\sum_{i=0}^{N_m(t)-1} |Y_{i,qp}(t)|^2}}$$

La arquitectura de los sistemas de comunicaciones inalámbricos depende del ámbito para el cual hayan sido concebidos y, como tal, el rango esperado de dispersión del retardo tiene gran influencia en el diseño del sistema. Si el valor medio de dispersión del retardo es suficientemente pequeño comparado con el período de símbolo de las señales transmitidas, entonces todos las componentes de multitrayecto llegan durante un intervalo de señal. De esta forma, los símbolos consecutivos no interfieren los unos con los otros. Por otro lado, si el período de símbolo es pequeño comparado con la dispersión del retardo, entonces los símbolos interferirán los unos con los otros dando lugar a Interferencia InterSimbólica (ISI).

Para la introducción de algunos parámetros que permiten caracterizar al canal, es conveniente determinar la función de transferencia del canal en el dominio de la frecuencia, *respuesta en frecuencia*. Esta se obtiene realizando la Transformada de Fourier de la respuesta al impulso en el dominio del tiempo:

$$g_{qp}^F(f, t) = F\{g_{qp}(f, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g_{qp}(t, \tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

De la ecuación anterior se deduce que la atenuación del canal es fuertemente dependiente de la frecuencia. Esto puede ser explicado por el hecho de que la fase de una componente de multitrayecto, observada en el receptor, es dependiente de la frecuencia. Como resultado, para algunas frecuencias las componentes multitrayecto se suman constructivamente mientras que para otras se suman destructivamente. Por tanto, la respuesta en frecuencia fluctúa en función de la frecuencia. Se dice, por tanto, que el canal presenta *desvanecimiento selectivo en frecuencia* (frequency-selective fading).

Un parámetro para cuantificar la fluctuación de los canales inalámbricos sobre la frecuencia es la *correlación en frecuencia*. Ésta define la correlación entre la respuesta del canal a diferentes frecuencias. Si elegimos dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ , ampliamente separadas, pertenecientes a la banda de frecuencias de interés y calculamos la correlación para  $\Delta f$ , siendo  $\Delta f$  la separación en frecuencia, si el valor de correlación es elevado, el canal experimentará una atenuación muy similar en todo ese rango, con lo cual se puede considerar que la respuesta en frecuencia del canal para ese rango de frecuencias es plana. Cuando esto ocurre, a la separación en frecuencia  $\Delta f$  se la denomina *ancho de banda de coherencia*  $B_c$ . Si la función de correlación para  $\Delta f$  está por encima de 0.9, el ancho de banda de coherencia medio es aproximadamente:

$$B_c \approx \frac{1}{50\tau_d}$$

Donde  $\tau_d$  es el valor promedio de la dispersión del retardo rms. Si se relaja la definición de forma que la función de correlación de frecuencia sea superior a 0.5, el ancho de banda de coherencia se define como:

$$B_c \approx \frac{1}{5\tau_d}$$

Así, de las ecuaciones anteriores se obtiene que la dispersión del retardo rms y el ancho de banda de coherencia son inversamente proporcionales. Basándonos en esta relación, podemos determinar cómo influyen ambos en la arquitectura de un sistema de comunicaciones inalámbrico. Si una transmisión de señal ocupa un ancho de banda menor que  $B_c$ , la función de transferencia del canal que está influenciando la transmisión es aproximadamente plana en frecuencia. Se dice que el sistema presenta *desvanecimiento plano* (flat fading) y, es por tanto denominado sistema *en banda estrecha*. Cuando el ancho de banda del transceptor es considerablemente mayor que  $B_c$ , la respuesta del canal en frecuencia experimenta fluctuaciones que necesitan ser ecualizadas para obtener una detección adecuada. En este caso, se dice que el sistema presenta *desvanecimiento selectivo en frecuencia* (frequency-selective fading) y, es por tanto denominado sistema *en banda ancha*.

Por otro lado, cuando el usuario y/o los objetos se mueven durante la transmisión de un paquete, se origina un ensanchamiento en frecuencia de la respuesta en frecuencia del canal. Este fenómeno recibe el nombre de *dispersión Doppler* y origina *dispersión en frecuencia* y *desvanecimiento selectivo en el tiempo*. Debido a la dispersión en frecuencia, si, por ejemplo, se transmite una senoide de frecuencia  $f_c$ , el retorno contendrá frecuencias en el rango:  $(f_c - \max(f_{Doppler}), f_c + \max(f_{Doppler}))$ , tal y como muestra la siguiente figura:

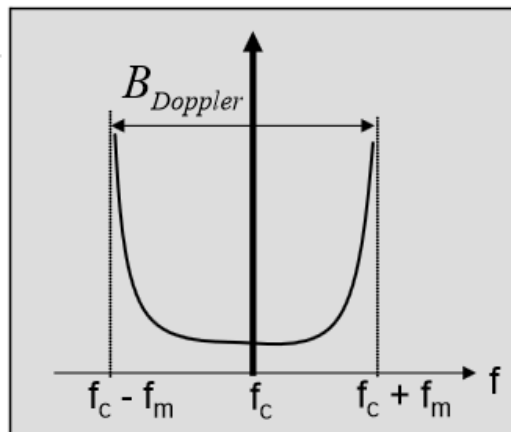


Figura 18. Ensanchamiento de una senoide debido a dispersión Doppler

Por otro lado, relacionado con el desvanecimiento selectivo en el tiempo, se define el *tiempo de coherencia*,  $T_c$  que es el tiempo en el cual el canal de comunicación puede considerarse estático en el tiempo. Este viene dado por:

$$T_c \approx \frac{9}{16\pi f_m}$$

Donde  $f_m$  es la frecuencia Doppler máxima definida por  $f_m = v/\lambda$ ,  $v$  es la velocidad a la que se mueve el usuario u objeto y  $\lambda$  es la longitud de onda.

Basándonos en la definición de tiempo de coherencia podemos analizar nuevamente el comportamiento de un sistema de comunicaciones inalámbricas. Si el tiempo de coherencia,

$T_c$ , es mayor que el período de símbolo,  $T_s$ , la respuesta al impulso del canal se puede considerar constante para una transmisión. Este fenómeno se conoce como *desvanecimiento lento* (slow fading). Si por el contrario, el tiempo de coherencia es menor que el período de símbolo, la respuesta al impulso del canal tomará diferentes amplitudes en función del tiempo y este cambio ocurrirá más rápido que la transmisión. Este fenómeno se conoce como *desvanecimiento rápido* (fast fading).

Resumiendo, en entornos indoor ricos en scattering nuestra señal se verá afectada por:

- Propagación multitrayecto: que producirá dispersión en el tiempo y desvanecimiento selectivo en frecuencia (desvanecimiento plano y selectivo en frecuencia). Viene caracterizado por la *dispersión del retardo* y el *ancho de banda de coherencia*.
- Movimiento relativo entre transmisor y/o objetos que producirá dispersión en frecuencia y desvanecimiento selectivo en el tiempo (desvanecimiento rápido y desvanecimiento lento). Viene caracterizado por el *tiempo de coherencia* y la *frecuencia Doppler máxima*

Los parámetros especificados anteriormente, permiten caracterizar un entorno de propagación particular. Por ello, son usados para el modelado estocástico del canal que se describe en la sección 3 de este proyecto.

### **ANEXO 3: Complejidad producto de matrices**

En este apartado se describen algunas de las reglas que se han utilizado para describir la complejidad de los detectores implementados en este proyecto. En concreto, se indica la complejidad inherente al producto de dos matrices y cómo pasar de sumas y multiplicaciones complejas a sumas y multiplicaciones reales.

La *complejidad de un producto de matrices* es la siguiente. Dadas dos matrices **A** y **B** (reales o complejas) con dimensiones  $C \times D$  y  $E \times D$ , el producto de ambas hace que el elemento  $(i, l)$ -ésimo de la matriz resultante venga dado por:

$$\mathbf{a}^i \mathbf{b}_l = \sum_{k=1}^D a_{ik} b_{kl}$$

Donde  $\mathbf{a}^i$  representa la  $i$ -ésima fila de la matriz **A**,  $\mathbf{b}_l$  denota la  $l$ -ésima columna de **B** y  $a_{ik}$  y  $b_{kl}$  la posición del  $k$ -ésimo elemento de su fila y de su columna, respectivamente. Así, para obtener un elemento de la matriz resultante, se deben hacer  $D - 1$  sumas y  $D$  multiplicaciones. La matriz resultante tendrá dimensión  $C \times E$  por tanto, se realizarán un total de  $C(D - 1)E$  sumas y  $CDE$  multiplicaciones para multiplicar estas dos matrices **A** y **B**.

Para pasar de *sumas y multiplicaciones complejas a sumas y multiplicaciones reales*, es fácil darse cuenta que una suma compleja consiste en dos sumas reales (la suma de las componentes real e imaginaria) mientras que una multiplicación compleja puede escribirse de dos formas diferentes:

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad),$$

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j((a + b)(c + d) - ac - bd)$$

La primera opción consiste en 4 multiplicaciones reales y 2 sumas reales mientras que la segunda consiste en 3 multiplicaciones reales y 5 sumas reales. Puesto que el coste de una suma es menor al de una multiplicación, se elegirá la segunda opción.

## 9 BIBLIOGRAFÍA

1. **Tse, David y Viswanath, Pramod.** *Fundamentals of Wireless Communications*. s.l.: Cambridge University Press, 2003.
2. *Scaling up MIMO: opportunities and challenges with very large arrays.* **Rusek, Fredrik, Tufvesson, Fredrik y Edfors, Ove.** s.l. : IEE Signal Processing Magazine, 2013, Vol. 30.
3. *MIMO OFDM for Wireless LANs.* **Zelst, A. Van.** Department of Electrical Engineering, Eindhoven University of Technology : <http://www.avzelst.nl/dissertation-avanzelst.pdf>, Abril 2004.
4. **Urbanke y Richardson.** *Modern Coding Theory*.
5. **Sharony, Jacob.** *Introduction to Wireless MIMO - Theory and Applications*. IEE LI : s.n., Noviembre 2006.
6. **Leiner, Bernhard M.J.** *LDPC Codes-a brief tutorial*. Abril 2005.
7. **(MIMO), Introduction to Multiple Output Multiple Input.** Institute of Communications Engineering. National Sun Yat-Sen University : s.n., Marzo 2006.
8. *Introduction to MIMO.* 1MA142\_0e\_introduction\_to\_MIMO.pdf : Rohde & Schwarz.
9. **Artés Rodríguez, Antonio y Pérez González, Fernando.** *Comunicaciones Digitales*. 2012.
10. *A Low-Complexity Near-ML Performance Achieving Algorithm for Large MIMO Detection.* **K. Mohammed, Saif, Chockalingam, A. y Sundar Rajan, B.** IEEE International Symposium Toronto (Canada) : s.n., Julio 2008.
11. *A Low-Complexity Detector for Large MIMO Systems and Multicarrier CDMA Systems.* **Vishnu Vardhan, K., K. Mohammed, Saif y Sundar Rajan, B.** s.l. : IEE Journal, Abril 2008, Vol. 26.
12. *INGENIARE-Revista Chilena de Ingeniería.* 1, Enero-Abril 2009, Vol. 17.