J. Ignacio Peña
Departamento de Economía. Universidad Carlos III de Madrid

MEDIDAS DE VOLATILIDAD EN MERCADOS FINANCIEROS (*)

Resumen.—1. *Introducción*.—2. *Modelo para la varianza condicional o volatilidad:* 2.1. El enfoque tradicional. 2.2. Los Modelos de Heterocedasticidad Condicional. 2.3. Los contrastes de ajuste de los modelos.—3. *Los modelos Garch y la valoración de opciones*.—4. *Conclusiones*.—*Bibliografía*.

RESUMEN

ESTE trabajo presenta alguno de los más recientes avances desarrollados en el área de modelización de la volatilidad de datos financieros. Se discuten los nuevos modelos para la modelización estadística del riesgo financiero, mediante los modelos GARCH y sus extensiones. Finalmente se presentan las consecuencias que la utilización de estos modelos tienen para la valorización de opciones.

1. INTRODUCCION

El análisis de la volatilidad de las rentabilidades de los activos negociados en los mercados financieros es un área de creciente interés. En los últimos años un volumen considerable de investigación ha explorado las

(*) Trabajo financiado en parte por la DGICYT, proyecto PS90-0014.

características estadísticas de las series de precios que este tipo de mercados genera. Este trabajo revisa una parte de esa literatura, haciendo especial hincapié en los modelos para la varianza condicional de series de rendimientos de un activo financiero.

Ya es bien conocido que la volatilidad (riesgo) tiene una evolución temporal predecible en muchos mercados financieros, y como ejemplo podemos citar el reciente trabajo de revisión de la literatura de Bollerslev y colaboradores (1992), en donde se citan unos 200 artículos que estiman modelos GARCH o similares para tratar de recoger esa heterocedasticidad observada en los datos.

La aplicación de estos conceptos a la valoración de activos no se ha hecho esperar y muestra de ello son los recientes trabajos que usan modelos GARCH para valorar opciones, modificando el modelo de Black-Scholes. Esta línea de trabajo se discute en los artículos de Duan (1991), Engle y Mustafa (1992) y Poon y Ho (1992) y se comentará en detalle más adelante.

El objetivo de este trabajo es exponer un selectivo (y por tanto limitado) «estado del arte» sobre estas cuestiones y está estructurado del modo siguiente. En la sección 2 se presentan los modelos tradicionales para la evaluación de la volatilidad y su relación con los nuevos desarrollos, de los cuales el modelo ARCH es el ejemplo más característico. El apartado 3 comenta en detalle la aplicación de los modelos GARCH a la valoración de opciones y se concluye con el apartado 4.

2. MODELOS PARA LA VARIANZA CONDICIONAL O VOLATILIDAD

En los últimos años se ha producido una gran cantidad de investigación sobre el problema de la modelización del riesgo de los activos financieros. Hay ya varias revisiones de esta literatura, entre las que destacaríamos las de Pagan y Schwert (1990), Nijman y Palm (1991), Engle (1991), Granger (1991) y el ya mencionado de Bollerslev, Chou y Kroner (1992).

2.1. El enfoque tradicional

Conviene recordar cuál era el enfoque tradicional para la modelización de la volatilidad de las rentabilidades de un activo financiero. La conocida observación de Mandelbrot (1963) de que cambios (de precios)

grandes en mercados financieros solían ser seguidos de cambios grandes (de cualquier signo) y lo mismo con cambios pequeños, señalaba la existencia de esa tendencia a la agrupación de la volatilidad de los mercados y, por tanto, su variabilidad en el tiempo (heterocedasticidad).

Los participantes en los mercados, reconociendo que la volatilidad podía variar en el tiempo, han usado durante mucho tiempo medidas del tipo

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_{t-i}^2 \qquad [1]$$

para reflejar ese riesgo dependiente del tiempo, que denominaremos como σ_t^2, y donde ε_t podían ser los errores de predicción del algún modelo ajustado a los datos o bien directamente los rendimientos del activo. Los agentes elegían p en función de sus impresiones sobre la velocidad de cambio de la volatilidad, pero, en general, daban el mismo peso a la información más reciente y a la más antigua. Una extensión de este enfoque se expone en French y colaboradores (1987), que sugieren estimar la volatilidad mensual si se dispone de datos diarios de la siguiente forma:

$$\sigma_{mt}^2 = \sum_{i=1}^{N_t} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{N_t-1} \varepsilon_t \, \varepsilon_{t+1} \qquad [2]$$

donde N_t es el número efectivo de días de mercado al mes, σ_{mt}^2 la varianza del mes m y los ε_t son las rentabilidades diarias del mes m. Nótese la presencia del término de productos cruzados que trata de corregir la posible presencia de contratación asíncrona o efecto Fisher, cuyas consecuencias sobre las series financieras se exponen por ejemplo en Peña (1992a).

2.2. Los modelos de heterocedasticidad condicional

Los modelos anteriores y otros similares que podrían derivarse presentan el inconveniente de su carácter *ad hoc*, al no tener en cuenta las características estadísticas específicas de cada serie. Para tratar de solucionar esta situación Engle (1982) propone los modelos ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticy) que generalizan los modelos [1] y [2], permitiendo que el orden de retardo p, el peso relativo de cada observación y una volatilidad de base se incorporen al modelo y se elijan usando los datos en vez de fijarse *a priori*. Ello da lugar al modelo ARCH(P) de la forma

$$\sigma_t^2 = \alpha_o + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \qquad [3]$$

donde los parámetros α_o, α_i y p se estiman usando procedimientos maximoverosímiles.

Si incluimos también una formulación general para la media condicional, una representación general para una serie de rendimientos puede ser

$$Y_t | I_{t-1} \sim D(\mu_t, \sigma_t^2) \qquad [4]$$

donde I_{t-1} es el conjunto de información relevante y D es una función de densidad condicional adecuada (Normal, Student T, Mixturas, etc.).

Las generalizaciones del esquema ARCH inicial no se han hecho esperar, y entre ellas destacaríamos los modelos GARCH (p, q) de Bollerslev (1986), de la forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_o \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad [5]$$

Tanto los modelos ARCH como los GARCH imponen una serie de restricciones en los parámetros para garantizar que la varianza sea siempre positiva, que son del tipo α_o, α_i, $\beta_i > 0$. Para garantizar la estabilidad del modelo una condición adicional es

$$\sum_{i=1}^{q} \beta_i + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j < 1 \qquad [6]$$

Sin embargo, en la práctica no es infrecuente que los parámetros estimados se encuentren en zonas próximas a la no estacionariedad, dando lugar a los modelos GARCH integrados (IGARCH), véase Engle y Bollerslev (1986), lo cual implica que las innovaciones de este proceso tienen influencia permanente, de modo similar a lo que ocurre con los modelos ARIMA. El desarrollo de contrastes de raíces unitarias para la varianza está aún en sus comienzos, aunque ya hay resultados, Lumsdaine (1990), que sugieren que transformaciones simples de los procedimientos clásicos de contraste (Dickey-Fuller, etc.) pueden ser de utilidad.

Una limitación de los modelos ARCH y GARCH es que presentan restricciones en los parámetros y además la varianza depende sólo de la magnitud de las ε_t, pero no de su signo. Trabajos anteriores, Black (1976), Christie (1982), sugieren que los rendimientos de las acciones están negativamente correlacionados con los cambios en su volatilidad. Es decir, la volatilidad tiende a subir si los rendimientos son menores de lo esperado y a bajar si los rendimientos son mayores de lo esperado, probablemente debido a la presencia de efectos de apalancamiento que ocasionen que el riesgo previsto varíe diferentemente según el signo de la innovación.

Para tratar de superar estos inconvenientes Nelson (1991) propone el modelo GARCH Exponencial o EGARCH, donde la varianza es una función asimétrica de las innovaciones;

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_o + \sum_{i=1}^{q} \beta_j \ln\sigma_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_k \left(\theta\psi_{t-k} + (|\psi_{t-k}| - 2\pi^{0,5})\right) \qquad [7]$$

donde

$$\psi_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} \qquad [8]$$

Esta formulación tiene la ventaja de garantizar siempre que la varianza es positiva, no impone restricciones en los parámetros y permite efectos asimétricos y no lineales de las innovaciones sobre la varianza de la serie (lineales sobre el logaritmo).

Un desarrollo adicional que puede incorporarse a cualquiera de los modelos anteriores es el ARCH-M de Engle, Lilien y Robins (1987). La idea está basada en el modelo de Merton (1980), que postula una relación entre los rendimientos esperados de una cartera y su varianza condicional, de la forma:

$$\mu_t | I_{t-1} = G(\sigma_t^2, \delta) \qquad [9]$$

donde δ puede interpretarse como el coeficiente de aversión relativa al riesgo de un agente representativo y, por tanto, el rendimiento en exceso de una activo o cartera, siguiendo la formulación [9] puede interpretarse como una prima de riesgo variable en el tiempo. Es decir, si un activo se hace más arriesgado, los inversores exigirán un mayor rendimiento.

El modelo general para la media y la varianza condicional bajo este supuesto, podría formularse como

$$y_t = F_1(\mu_t) + F_2(\sigma_t^2, \delta) + \varepsilon_t \qquad [10]$$

donde F_1 puede ser cualquiera de las formulaciones lineales o no lineales propuestas recientemente en la literatura como las discutidas en Tong (1990) o Granger y Terasvista (1992) (vease Peña, 1992b, para una revisión crítica de las mismas) y F_2 suele ser una función lineal o logarítmica, con la varianza condicional especificada de modo adecuado.

En los últimos años se han propuesto nuevas extensiones y modificaciones del modelo GARCH básico, entre las que cabría citar el ARCH Semiparamétrico (SPARCH) de Engle y González (1991), el ARCH No Lineal (NARCH) de Engle y Ng (1991), el ARCH estructural (STARCH) de Harvey, Ruiz y Sentana (1992) y varios otros cuyas potencialidades están todavía por explorar. De cualquier forma, parece claro que todos estos trabajos apuntan a la necesidad y el interés de modelizar adecuadamente la evolucion temporal de la volatilidad de las variables financieras, superando los planteamientos simplistas como los de la ecuación [1] ya mencionados.

2.3. Los contrastes de ajuste de los modelos

Cualquiera de los modelos anteriores debería someterse a algún tipo de contraste específico de ajuste con respecto a la volatilidad (varianza condicional) «real». El problema obvio es que ésta en principio es inobservable, ya que hay infinitos conjuntos de información que pueden condicionar el valor esperado de esta variable aleatoria. Sin embargo, si admitimos que la varianza puede definirse como la esperanza del cuadrado de las innovaciones con respecto al conjunto de información relevante (que contenga, por ejemplo, sólo valores retardados de las innnovaciones) y podemos escribirlo como

$$E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1}) = \sigma_t^2 \qquad [11]$$

una posibilidad para estudiar el acuerdo entre los valores estimados de la volatilidad y los «teóricos» ha sido propuesta por Pagan y Sabau (1987), que sugieren un contraste basado en la siguiente regresión:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha + \beta\hat{\sigma}_t^2 + V_t \qquad [12]$$

es decir, entre las innovaciones estimadas y la varianza ajustada por cualquiera de los métodos anteriores. Si el estimador de la varianza es insesgado, entonces $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ y pueden realizarse contrastes de hipótesis de la forma habitual. Adicionalmente, el R^2 de esta regresión puede utilizarse como una medida de la bondad del ajuste de cada posible especificación de la varianza condicional y, por tanto, para señalar el modelo de mejor ajuste. Aplicaciones y modificaciones de este criterio se discuten en Sabau (1988) y Pagan y Schwert (1990).

3. LOS MODELOS GARCH Y LA VALORACION DE OPCIONES

Uno de los elementos fundamentales en la valoración de opciones dentro del marco de Black-Scholes es la volatilidad del activo subyacente, que se supone constante. Sin embargo, hay ya abundante evidencia que sugiere que la volatilidad de los activos financieros no es constante en el tiempo y que incluso puede ser no estacionaria. La incorporación de esta regularidad empírica observada a los modelos de valoración de opciones está siendo objeto de varias investigaciones cuyos resultados resumimos a continuación.

Supongamos que el precio del activo subyacente lo denotamos por S_t y que su rentabilidad durante un período de tiempo sigue una distribución condicional lognormal con media y varianza condicionales que denotaremos como μ_t y σ_t^2 respectivamente,

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \mu_t + \varepsilon_t \qquad [13]$$

donde

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2) \qquad [14]$$

y supondremos que la varianza sigue una estructura GARCH como [5].

Duan (1991) demuestra, usando el principio de valoracion neutral del riesgo, que la media condicional en [13] está negativamente correlacionada con la varianza condicional, es decir:

$$\mu_t = r_c - 0{,}5\sigma_t^2 \quad [15]$$

tal que

$$r_c \equiv \ln(1 + r) \quad [16]$$

donde r es el tipo de interés libre de riesgo a un período que asumiremos constante a lo largo de la vida de la opción. Si se acepta el principio de neutralidad al riesgo, el valor de una opción de compra *(call)* será igual al valor actual del valor a la expiración esperado de la opción, descontado al tipo de interés sin riesgo.

Por tanto, una opción de compra europea con precio de ejercicio X y fecha de expiración T, tendrá el siguiente valor en el momento t:

$$C_t^{GH} = e^{-r_c(T-t)} E[\max(S_T - X, 0) \mid I_t] \quad [17]$$

donde S_T es el precio del activo subyacente en la fecha de expiración, que puede escribirse como

$$S_T = S_T \exp\left(r_c (T-t) - 0{,}5 \sum_{s=t+1}^{T} \sigma_s^2 + \sum_{s=t+1}^{T} \varepsilon_s\right) \quad [18]$$

Los valores de la varianza condicional y las innovaciones se pueden computar en cada momento del tiempo, dados los valores de los parámetros correspondientes, y así pueden obtenerse n precios a la expiración. El estimador del precio de la opción con GARCH se calcula como

$$\hat{C}_t^{GH}(n) = n^{-1} e^{r_c(T-t)} \sum_{i=1}^{n} \max[S_{T,i} - X, 0] \quad [19]$$

y puede demostrarse que éste es un estimador consistente de [17].

Si recordamos que el modelo de valoración de Black-Scholes para una *call* europea es

$$C_t^{BS} = S_t N(d_t) - Xe^{-r_c(T-t)} N(d_t - \sigma\sqrt{T-t}) \quad [20]$$

donde

$$d_t = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{k}\right) + \left(r_c + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad [21]$$

el término σ en [20] y [21] es la desviación típica incondicional de las rentabilidades del activo subyacente. Nótese que este valor o su cuadrado, la varianza, puede calcularse sobre el modelo GARCH del modo siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_o}{1 - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j - \sum_{i=1}^{q} \beta_i} \quad [22]$$

puede verse, por tanto, que el modelo B-S es un caso particular del modelo de opciones GARCH, con la restricción $p = q = 0$. Dicho de otra forma, B-S asume que la volatilidad no tiene inercia ni memorias de ningún tipo. Esta restricción podría ser uno de los motivos de la regularidad empírica observada, Gultekin y colaboradores (1982), de que el modelo B-S tienda a infravalorar las opciones sobre activos de baja volatilidad y a sobrevalorar opciones sobre activos con alta volatilidad.

También hay que señalar que si se emplea el modelo B-S para estimar las volatilidades «implícitas», Rubinstein (1985), esa volatilidad es alta para i) opciones de compra *out-of-the-money* y con fecha de ejercicio cercana, ii) opciones de compra *at-the-money* con fecha de ejercicio lejana y iii) opciones de compra con precios de ejercicio bajos.

De momento hay escasas aplicaciones empíricas del modelo de opciones GARCH (OGARCH). El estudio más extenso que conocemos lo han desarrollado Poon y Ho (1992), que utilizan datos diarios de opciones de compra del London Trade Options Market sobre veinte acciones desde marzo de 1988 hasta febrero de 1989. Sus conclusiones preliminares sugieren que el uso del modelo OGARCH supera al B-S al reducir los sesgos en la valoración de opciones ocasionados por la proximidad de la fecha de expiracion de la opción. Aunque tanto B-S como OGARCH muestran una tendencia a sobrevalorar las opciones con fecha de expiración lejana y a infravalorar las de fecha cercana, este sesgo es menor en el caso OGARCH.

Sin embargo, no hay diferencias apreciables entre ambos modelos en otros casos; ambos modelos tienen una tendencia a sobrevalorar las opciones, especialmente las de bajo precio. Asimismo, ambos modelos sobrevaloran las opciones *deep-out-the-money* y esta sobrevaloración disminuye cuando la opción se mueve hacia *deep-in-the-money.*

Parece, por tanto, claro que se necesitan muchos más estudios con modelos de la familia GARCH para conocer su potencialidad real a la hora de la valoración de opciones. Este es una área de la Economía Financiera que seguramente conocerá un notable desarrollo en los próximos tiempos.

4. CONCLUSIONES

La modelización de la volatilidad financiera es uno de los temas que mayor atención ha recibido en los últimos años en la literatura de Economía Financiera. Las razones hay que buscarlas en la creciente inestabilidad de los mercados financieros, que hacen urgente el comprender los factores que ocasionan esas variaciones en el riesgo y cómo pueden modelizarse y, si es posible, predecirse. Los modelos GARCH y sus extensiones son un primer paso en esa dirección, que promete ser una de las áreas de mayor interés para el inmediato futuro.

Asimismo, las consecuencias que estos hechos tienen para los modelos establecidos de valoración de activos, tanto en un contexto tradicional (CAPM, APT, CCAPM) como en lo referente a la valoración de activos derivados, es razonable pensar que también serán objeto de un estudio cada vez más generalizado.

BIBLIOGRAFIA

BLACK, F.: «Studies in Stock Price Volatility Changes», *Proceedings of the 1976 Business Meeting of the Business and Economic Statistics Section,* American Statistical Association, 177-181, 1976.

BOLLERSLEV, T.: «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity», *Journal of Econometrics,* 31, 307-327, 1986.

BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y., y KRONER, K. F.: «ARCH Modeling in Finance», *Journal of Econometrics,* 52, 5-59, 1992.

CHRISTIE, A.: «The Stochastic Behavior of Common Stock Variances». *Journal of Financial Economics,* 10, 407-432, 1982.

DUAN, J. C.: «The GARCH Option Pricing Model», *Proceedings 18th European Finance Association Conference,* vol. II, Rotterdam, 1991.

ENGLE, R.: «Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of the Variance of UK Inflation», *Econometricà,* 50, 987-1008, 1982.

— «Statistical Models for Financial Volatility», *Working Paper,* Department of Economics, University of California, San Diego, 1991.

ENGLE, R., y BOLLERSLEV, T.: «Modelling the Persistence of Conditional Variances», *Econometric Reviews,* 5, 1-50, 81-87, 1987.

ENGLE, R.; LILIEN, D. M., y ROBBINS, R. P.: «Estimating Time Varying Risk Premia in the Term structure: The ARCH-M model», *Econometrica,* 55, 391-407, 1987.

ENGLE, R., y NG, V.: «Measuring and testing the Impact of News on Volatility», *Working Paper,* Department of Economics, University of California, San Diego, 1991.

ENGLE, R., y GONZÁLEZ-RIVERA, G.: «Semiparametric ARCH Models», *Journal of Business and Economic Statistics,* 9, 345-360, 1991.

ENGLE, R. F., y MUSTAFA, C.: «Implied ARCH models from options prices», *Journal of Econometrics,* 52, 289-311, 1992.

FRENCH, K. R.; SCHWERT, G. W., y STAMBAUGH, R. F.: «Expected Stock returns and Volatility», *Journal of Financial Economics,* 19, 3-29, 1987.

GRANGER, C. W. J., y TERASVISTA, T.: *Modelling Dynamic Nonlinear Relationships,* Oxford University Press, 1992.

GRANGER, C. W. J.: «Forescasting Stock Market Prices: Lessons for Forecasters», *Working Paper,* Department of Economics University of California, San Diego, 1991.

GULTEKIN, B.; ROGALSKI, R., y TINIC, S.: «Option pricing model estimates: some empirical results», *Financial Management,* 11, 58-69, 1982.

HARVEY, A.; RUIZ, E., y SENTANA, E.: «Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances», *Journal of Econometrics,* 52, 62-74, 1992.

LUMSDAINE, R. L.: «Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH (1,1) and IGARCH (1,1) models», *Working Paper,* Department of Economics, Harvard University, 1990.

MANDELBROT, B.: «The Variation of Certain Speculative Prices», *Journal of Business,* 36, 394-419, 1963.

MERTON, R. C.: «On Estimating thc Expected Return on the Market», *Journal of Financial Economics,* 8, 323-361, 1980.

NELSON, D.: «Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach», *Econometrica,* 59, 347-370, 1991.

NIJMAN, T. C., y PALM, F.: «Recent Developments in Modeling Volatility in Financial Data», *Working Paper,* Center for Economic Research, Tilburg University, 1991.

PAGAN, A., y SCHWERT, G. W.: «Alternative Models for Conditional Stock Volatility», *Journal of Econometrics,* 45, 267-290, 1990.

PAGAN, A. R., y SABAU, H.: «Consistency tests for Heteroskedastic and Risk Models», *Working Paper,* University of Rochester, 1987.

PEÑA, J. I.: «Contratación asíncrona, Riesgo Sistemático y Contrastes de Eficiencia», *Cuadernos Económicos de ICE,* 50, 81-89, 1992a.

PEÑA, J. I.: «Nuevos Modelos Estadísticos para el Análisis de Mercados Financieros», DT 92-11, Universidad Carlos III de Madrid, 1992b.

POON, S., y HO, T.: «The GARCH Option Pricing Model: UK Evidence», *Proceedings 19th European Finance Association Conference*, vol. IV, Lisbon, 1992.

RUBINSTEIN, M.: «Nonparametric tests of alternative option pricing models», *Journal of Finance*, 40, 455-480, 1985, 1988.

SABAU, H.: *Some Theoretical Aspects of Economic Inference with Heteroskedastic Models*, doctoral dissertation, Australian National University.

TONG, H.: *Non-linear time series*, Oxford University Press, 1990.