

PATRICE RIVARD

**SUR LA THÉORIE DES DÉRIVÉES
HYPERBOLIQUES**

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques
pour l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2011

Résumé

La notion de dérivée hyperbolique est bien connue en théorie géométrique des fonctions et s'applique aux fonctions appartenant à la classe, dite de *Schur*, des fonctions f qui sont analytiques dans le disque unité $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ et telles que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Une fonction appartenant à cette classe est appelée une *fonction de Schur*. Le but principal de cette thèse est de présenter une nouvelle théorie, celle des *dérivées hyperboliques d'ordre supérieur* d'une fonction de Schur. Dans ce nouveau contexte, la dérivée hyperbolique précédente est maintenant considérée comme la dérivée hyperbolique d'ordre un.

Différentes applications de ces nouvelles dérivées seront explorées et nous aborderons, notamment, des problèmes d'interpolation : étant donnés des points distincts dans le disque unité, on veut déterminer les fonctions de Schur qui font correspondre ces points vers des points images aussi donnés, tout en ayant des dérivées prescrites aux points initiaux. Nous nous intéresserons à ces problèmes d'interpolation exprimés en termes des dérivées hyperboliques plutôt qu'en termes des dérivées classiques.

De plus, certains résultats classiques de l'analyse complexe seront considérés dans le contexte des dérivées hyperboliques. D'une part, cela permettra de les généraliser dans certains cas et, d'autre part, d'interpréter certains d'entre eux en vertu des dérivées hyperboliques, fournissant ainsi des démonstrations plus géométriques de ces résultats. En particulier, une version du théorème de Schwarz–Pick sera donnée pour les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur et également une version analogue du lemme de Dieudonné. Finalement, le cas du lemme de Rogosinski sera aussi traité et nous en donnerons une démonstration différente en utilisant les nouveaux outils développés dans cette thèse.

Avant-propos

Je tiens d'abord à remercier ma directrice de recherche, le professeur Line Baribeau, pour son aide tout au long de mes études doctorales. Le Département de mathématiques et de statistique mérite aussi toute ma reconnaissance pour l'aide générale qui m'a été apportée au cours de mes études. Un grand merci aussi à mes amis dévoués dont la présence et le support ont été indispensables. Finalement, je voudrais également remercier le Fonds Québécois en Recherche Naturelle et en Technologies (FQRNT), ainsi que le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRSNG) pour leur appui financier respectif.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Résumé | ii |
| Avant-propos | iii |
| Table des matières | iv |
| Liste des tableaux | vi |
| Introduction | 1 |
| 1 La géométrie hyperbolique | 2 |
| 1.1 Le modèle du disque de Poincaré | 2 |
| 1.2 Quelques classes de fonctions | 4 |
| 1.3 Quelques caractéristiques géométriques du modèle du disque de Poincaré | 7 |
| 1.3.1 Les isométries du modèle de Poincaré | 7 |
| 1.3.2 Quelques formules pour la distance hyperbolique dans \mathbb{D} | 10 |
| 1.3.3 Les géodésiques du disque de Poincaré | 11 |
| 1.3.4 Le théorème de Schwarz–Pick | 14 |
| 2 Les différences divisées hyperboliques | 15 |
| 2.1 Les différences divisées | 15 |
| 2.1.1 Interpolation par des polynômes | 15 |
| 2.1.2 Méthode d’interpolation de Newton | 17 |
| 2.2 Les différences divisées hyperboliques | 18 |
| 2.2.1 Définition et propriétés | 18 |
| 2.2.2 Problème de Nevanlinna–Pick | 26 |
| 2.2.3 Un bref aperçu historique du problème de Nevanlinna–Pick . . . | 36 |
| 3 Les dérivées hyperboliques | 40 |
| 3.1 Différences divisées hyperboliques à un paramètre | 40 |
| 3.1.1 Définition et propriétés | 40 |
| 3.2 Les dérivées hyperboliques d’ordre supérieur | 42 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.2.1 | Définition et propriétés | 42 |
| 3.2.2 | Formule récursive pour les dérivées hyperboliques | 46 |
| 4 | Interpolation généralisée | 55 |
| 4.1 | Problème d'interpolation d'Hermite | 55 |
| 4.2 | Problème d'interpolation avec les dérivées hyperboliques | 58 |
| 5 | Quelques applications des dérivées hyperboliques | 71 |
| 5.1 | Un théorème de Schwarz–Pick pour les dérivées hyperboliques | 71 |
| 5.2 | Un lemme de Dieudonné pour les dérivées hyperboliques | 76 |
| 5.3 | Lemme de Rogosinski | 82 |
| | Conclusion | 85 |
| | Bibliographie | 87 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Tableau des différences divisées. | 17 |
| 2.2 | Tableau des différences divisées hyperboliques. | 23 |
| 2.3 | Tableau des différences divisées hyperboliques à partir de la définition des différences divisées. | 23 |
| 2.4 | Tableau des différences divisées hyperboliques. | 27 |
| 2.5 | Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du problème de Nevanlinna–Pick. | 30 |
| 2.6 | Tableau des différences divisées hyperboliques. | 31 |
| 3.1 | Tableau des différences divisées hyperboliques à un paramètre d’une fonction f | 44 |
| 4.1 | Tableau des différences divisées dans le cas du problème d’interpolation d’Hermite. | 57 |
| 4.2 | Tableau des différences divisées hyperboliques incluant les dérivées hyperboliques. | 59 |
| 4.3 | Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas des dérivées hyperboliques | 61 |
| 4.4 | Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes. | 69 |
| 5.1 | Tableau des différences divisées hyperboliques pour le lemme de Dieudonné généralisé. | 78 |
| 5.2 | Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du lemme de Dieudonné–Pick généralisé. | 80 |
| 5.3 | Tableau des différences divisées hyperboliques pour le lemme de Rogosinski–Pick. | 83 |

Introduction

Le but de ce travail est de faire la présentation d'une théorie nouvelle qui concerne essentiellement les fonctions de la classe de Schur, c'est-à-dire les fonctions qui sont analytiques dans le disque unité et qui sont de module inférieur ou égal à un. L'étude de ces fonctions se fera dans une géométrie particulière, qui est bien adaptée au disque unité, et qui est connue sous l'appellation générale de *géométrie hyperbolique*. Évidemment le modèle que nous utiliserons est le modèle du disque de Poincaré. Le premier chapitre résumera les résultats essentiels qui seront nécessaires pour comprendre les aspects géométriques de ce travail. Le second chapitre sera consacré aux différences divisées hyperboliques. Nous verrons les propriétés importantes de ces dernières et leur utilisation dans la résolution d'un problème d'interpolation : le *problème de Nevanlinna–Pick*. Dans le troisième chapitre, nous introduirons la notion de *dérivée hyperbolique d'ordre supérieur*, qui découle naturellement des différences divisées hyperboliques. À l'aide de ce nouveau type de dérivées, nous allons considérer des problèmes d'interpolation qui les font intervenir. Au quatrième chapitre, nous étudierons de quelle manière il est possible de les résoudre. Nous terminerons par la généralisation de résultats célèbres en analyse complexe impliquant les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Ce cinquième chapitre mettra donc en évidence la portée de cette théorie et l'intérêt qu'elle apporte afin de déterminer des versions analogues pour les dérivées hyperboliques de certains résultats classiques : théorème de Schwarz–Pick et le lemme de Dieudonné. Nous verrons aussi comment il est possible d'utiliser les dérivées hyperboliques afin de donner une nouvelle preuve du lemme de Rogosinski. Mentionnons également qu'une partie du contenu original de cette thèse correspond aux articles [2], [23] et [24].

Chapitre 1

La géométrie hyperbolique

Le présent travail est basé essentiellement sur un type particulier de géométrie : la géométrie hyperbolique. Nous utiliserons principalement le modèle du disque de Poincaré. Afin de favoriser une meilleure compréhension de ce qui suivra, nous allons donc rappeler les notions fondamentales.

1.1 Le modèle du disque de Poincaré

Soit \mathbb{C} le plan complexe et notons par $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le modèle du disque de Poincaré. Il s'agit donc du disque unité ouvert dans \mathbb{C} . Nous utiliserons également la notation \mathbb{T} pour désigner le cercle unité de même que les notations suivantes :

$$\bar{\mathbb{D}} := \mathbb{D} \cup \mathbb{T}, \quad \hat{\mathbb{D}} := \bar{\mathbb{D}} \cup \{\infty\}.$$

Dans ce qui suit nous présenterons les éléments essentiels permettant de construire une métrique dans \mathbb{D} . Nous désignerons les courbes continûment différentiables sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, où \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels, par $\mathcal{C}^1([a, b])$. Soit $\gamma(t) = x(t) + iy(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1([a, b])$. Notons $dx := x'(t) dt$ et $dy := y'(t) dt$. Si $d\xi := dx + i dy$, alors l'élément de longueur de la courbe peut s'écrire $|d\xi|$, où $|d\xi| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Une *fonction de densité* est une fonction à valeurs réelles qui est continue et strictement positive. En considérant les courbes qui sont de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, c'est-à-dire continûment différentiables par morceaux, et à l'aide d'une fonction de densité, on peut définir la notion de distance entre deux points. Si on se restreint à \mathbb{D} , nous avons la définition suivante.

Définition 1.1.1. Soient $z, w \in \mathbb{D}$. Alors la *métrique hyperbolique* ρ dans \mathbb{D} est définie

par

$$\rho(z, w) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2}, \quad (1.1)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes γ continûment différentiables par morceaux joignant le point z au point w .

La métrique hyperbolique est donc définie en utilisant la fonction de densité $\lambda(\xi) := 2/(1-|\xi|^2)$.

La proposition qui suit permet d'établir que ρ définie précédemment est bien une métrique dans \mathbb{D} .

Proposition 1.1.2. *Soit ρ définie par (1.1). Alors ρ est une métrique dans \mathbb{D} .*

Démonstration. Soient $z, w \in \mathbb{D}$. Clairement, on a que $\rho(z, w) = \rho(w, z)$. Nous allons maintenant montrer que ρ satisfait l'inégalité triangulaire. Considérons donc $v \in \mathbb{D}$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe γ_1, γ_2 , des courbes continûment différentiables qui relient respectivement les points z, v et v, w , telles que

$$\rho(z, v) \geq \int_{\gamma_1} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} - \varepsilon, \quad \rho(v, w) \geq \int_{\gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} - \varepsilon.$$

Alors, il est clair que

$$\begin{aligned} 2\varepsilon + \rho(z, v) + \rho(v, w) &\geq \int_{\gamma_1} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} + \int_{\gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \\ &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \\ &\geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \\ &= \rho(z, w), \end{aligned}$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes γ continûment différentiables par morceaux reliant z et w . En laissant $\varepsilon \rightarrow 0$, le résultat suit. Il nous reste à montrer que $\rho(z, w) = 0$ si et seulement si $z = w$. Si $z = w$, alors il est évident que $\rho(z, w) = 0$. Réciproquement, nous allons montrer que si $z \neq w$, alors $\rho(z, w) > 0$. Considérons un disque fermé centré en z et de rayon $r > 0$, que l'on note par $\overline{D(z, r)} \subset \mathbb{D}$, de telle sorte que $w \notin \overline{D(z, r)}$. Par continuité, on peut supposer que $\frac{2}{1-|\xi|^2} \geq \lambda_0 > 0$ pour tous les points appartenant à $\overline{D(z, r)}$. Pour toute courbe γ reliant z à w , on a que $\frac{2}{1-|\xi|^2} \geq \lambda_0$ sur la section $\bar{\gamma}$ de

γ , contenue dans $\overline{D(z, r)}$, dont la longueur euclidienne est au moins r . Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho(z, w) &= \inf \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \\ &> \int_{\bar{\gamma}} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \geq \lambda_0 r > 0. \end{aligned}$$

■

1.2 Quelques classes de fonctions

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à certaines classes de fonctions qui ont un intérêt de près ou de loin avec la géométrie hyperbolique et le disque unité.

La première classe de fonctions qui est primordiale pour ce travail est la classe \mathcal{H} des fonctions analytiques du disque unité dans lui-même.

$$\mathcal{H} := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ holomorphe dans } \mathbb{D}\};$$

Nous considérerons également une autre classe de fonctions, qui inclut la classe précédente, appelée la *classe de Schur*, notée \mathcal{S} , et définie par

$$\mathcal{S} := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\mathbb{D}} : f \text{ holomorphe dans } \mathbb{D}\}.$$

On dira qu'une fonction appartenant à la classe de Schur est une *fonction de Schur*. En utilisant le principe du maximum, la classe \mathcal{S} est la classe \mathcal{H} à laquelle on a ajouté les constantes unimodulaires. Un autre type particulier de fonctions joue un rôle fondamental dans la théorie géométrique des fonctions. Il s'agit des *automorphismes*. De façon générale, on peut s'intéresser aux automorphismes pour n'importe quel domaine Ω . Dans le cas présent, nous allons étudier les automorphismes du disque unité. Il s'agit dans ce cas des fonctions holomorphes et bijectives du disque unité sur lui-même. Ainsi, les automorphismes sont en particulier des applications conformes, c'est-à-dire qu'ils préservent les angles.

Avant de donner une forme explicite à ces fonctions, voici un résultat célèbre de l'analyse complexe qui nous sera utile par la suite.

Lemme de Schwarz. *Soit $f \in \mathcal{H}$ telle que $f(0) = 0$. Alors,*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \mathbb{D}. \quad (1.2)$$

et

$$|f'(0)| \leq 1. \quad (1.3)$$

Il y a égalité en (1.2), ou bien en (1.3) pour un $z \neq 0$, si et seulement si $f(z) = e^{i\theta}z$ pour un certain $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pour une démonstration de ce résultat on peut consulter [8]. La proposition suivante franchit un premier pas dans la détermination des automorphismes du disque unité.

Proposition 1.2.1. *Soit g un automorphisme de \mathbb{D} tel que $g(0) = 0$. Alors,*

$$g(z) = e^{i\theta}z,$$

où $\theta \in [0, 2\pi]$.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Schwarz pour montrer la proposition. En effet, on peut appliquer le lemme à g et on obtient ainsi que $|g(z)| \leq |z|$, pour $z \in \mathbb{D}$. De même, en appliquant le lemme à g^{-1} on obtient que $|g^{-1}(w)| \leq |w|$, pour $w \in \mathbb{D}$. En prenant $w = g(z)$, on a que $|z| \leq |g(z)|$. Ainsi, $|g(z)| = |z|$. Toujours selon le lemme de Schwarz, comme on a égalité, cela implique que $g(z) = e^{i\theta}z$, pour un $\theta \in [0, 2\pi]$. ■

Le théorème qui suit nous offre une caractérisation complète des automorphismes du disque unité.

Théorème 1.2.2. *Les automorphismes de \mathbb{D} sont les fonctions $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de la forme*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (1.4)$$

où $|a| < 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Démonstration. Posons $g(z) := (z - a)/(1 - \bar{a}z)$. Il est clair que $g \in \mathcal{H}$. En effet, pour $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$, $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, on a

$$|e^{i\theta_0} - a| = |e^{-i\theta_0} - \bar{a}| = |1 - \bar{a}e^{i\theta_0}|.$$

Ceci entraîne donc que $|g(e^{i\theta_0})| = 1$. Par le principe du maximum, il suit que $|g(z)| \leq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. Nous allons maintenant montrer que g est bijective. Montrons d'abord

qu'elle est injective. Soient $z, w \in \mathbb{D}$. Alors,

$$\begin{aligned} g(z) = g(w) &\Leftrightarrow \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \\ &\Leftrightarrow (z-w) = |a|^2(z-w) \\ &\Leftrightarrow (z-w)(1-|a|^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = w. \end{aligned}$$

Aussi, g est surjective. En effet, la fonction inverse g^{-1} est donnée par

$$g^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Par conséquent, g est bien un automorphisme du disque unité. Ceci implique également que f est un automorphisme de \mathbb{D} . En effet, en multipliant g par une constante unimodulaire $e^{i\theta}$, pour un certain $0 \leq \theta \leq 2\pi$, ceci provoque seulement une rotation de l'image de la fonction.

Réciproquement, supposons que h est un automorphisme de \mathbb{D} . Posons $a := h^{-1}(0)$. Alors, $h \circ g^{-1}$ est un automorphisme de \mathbb{D} et $(h \circ g^{-1})(0) = 0$. Par la proposition 1.2.3, $(h \circ g^{-1})(z) = e^{i\theta}z$ pour un $\theta \in [0, 2\pi]$. Ainsi, on obtient que $h(z) = e^{i\theta}g(z)$ et $h(z)$ est bien de la forme (1.4). ■

Si f est un automorphisme, alors il découle facilement du théorème 1.2.2 que $f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ et f peut s'étendre continûment sur $\bar{\mathbb{D}}$. Plus précisément, on a le résultat élémentaire qui suit.

Proposition 1.2.3. *Soit f un automorphisme du disque unité. Alors, f est continue sur $\bar{\mathbb{D}}$ et $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ est un homéomorphisme qui préserve l'orientation.*

Nous terminons cette section par une dernière classe de fonctions qui jouera un rôle prépondérant dans ce travail : la classe regroupant les fonctions constituées d'un produit fini d'automorphismes. On appelle ces fonctions des *produits de Blaschke*.

Un *produit de Blaschke* B de degré $n \geq 1$ est une fonction de la forme

$$B(z) := e^{i\theta} \prod_{j=1}^n \frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}, \quad |z_j| < 1, \theta \in \mathbb{R}.$$

Les constantes unimodulaires sont considérées comme des produits de Blaschke de degré zéro. Pour $n \geq 0$, nous allons noter la classe des produits de Blaschke de degré n par \mathcal{B}_n .

Il est clair qu'un produit de Blaschke B appartient à la classe de Schur et possède aussi les propriétés particulières suivantes :

- (i) B est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$;
- (ii) $|B(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{T}$;
- (iii) B a un nombre fini de zéros dans \mathbb{D} .

Ces propriétés caractérisent complètement les produits de Blaschke, comme le théorème qui suit le montre

Théorème 1.2.4 (Fatou). *Soit f une fonction analytique sur \mathbb{D} et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Supposons que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. Alors, f est un produit de Blaschke de degré fini.*

Démonstration. Comme f est analytique sur \mathbb{D} , continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ et unimodulaire sur \mathbb{T} , alors f possède un nombre fini de zéros dans \mathbb{D} , par le principe des zéros isolés. Soit B , le produit de Blaschke formé à partir des zéros de f , comptés selon la multiplicité. Alors f/B et B/f sont analytiques dans \mathbb{D} , continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et unimodulaires sur \mathbb{T} . Par le principe du maximum, $|f/B| \leq 1$ et $|B/f| \leq 1$ sur $\overline{\mathbb{D}}$. Ainsi, $f/B = \lambda$ sur $\overline{\mathbb{D}}$, où $|\lambda| = 1$. Ceci montre que f est bien un produit de Blaschke de degré fini, comme voulu. ■

1.3 Quelques caractéristiques géométriques du modèle du disque de Poincaré

1.3.1 Les isométries du modèle de Poincaré

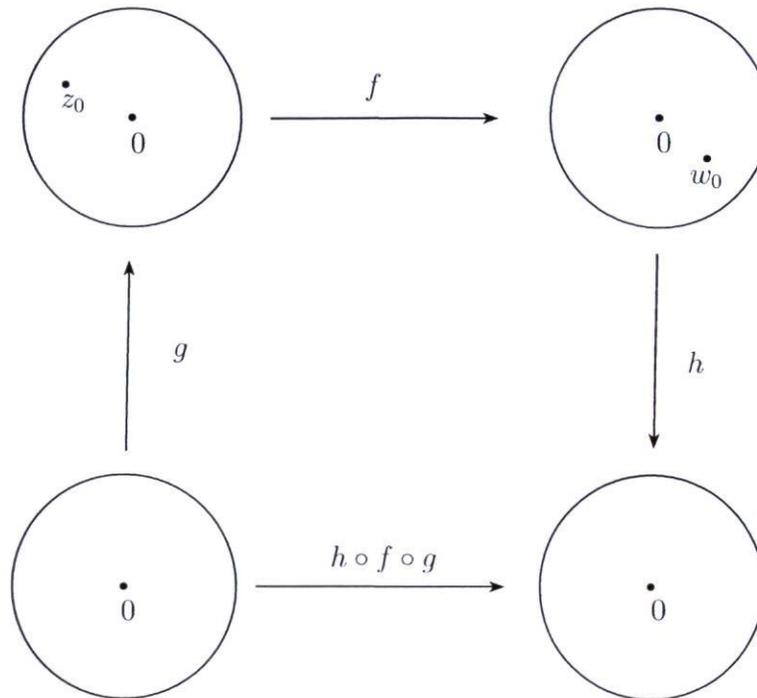
Le prochain résultat que nous allons voir, le *lemme de Pick*, est essentiel pour caractériser la classe des fonctions qui sont des isométries dans le disque unité, au sens de la géométrie hyperbolique, c'est-à-dire qui préservent les distances par rapport à la métrique hyperbolique. Il s'agit aussi d'une version plus forte du lemme de Schwarz.

Lemme de Pick. *Soit $f \in \mathcal{H}$. Alors on a*

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1. \quad (1.5)$$

Il y a égalité en (1.5) pour un $z \in \mathbb{D}$ si et seulement si f est un automorphisme de \mathbb{D} , auquel cas l'égalité a lieu pour tout $z \in \mathbb{D}$.

Démonstration. Fixons $z_0 \in \mathbb{D}$ et posons $w_0 := f(z_0)$. Soient $g(z)$ et $h(z)$ des automorphismes du disque unité qui envoient respectivement 0 vers z_0 et w_0 vers 0 (voir la figure qui suit).



Explicitement, g et h seront définis de la façon suivante :

$$g(z) := \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad h(w) := \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}.$$

De cette façon, $h \circ f \circ g(z)$ envoie 0 vers 0.

En utilisant la règle de dérivation en chaîne et (1.3), on a

$$|(h \circ f \circ g)'(0)| = |h'(w_0)f'(z_0)g'(0)| \leq 1. \quad (1.6)$$

Ainsi, $|f'(z_0)| \leq 1/|g'(0)h'(w_0)|$. Comme $g'(z) = (1 - |z_0|^2)/(1 + \bar{z}_0 z)^2$ et $h'(w) = (1 - |w_0|^2)/(1 - \bar{w}_0 w)^2$, en substituant $g'(0) = 1 - |z_0|^2$ et $h'(w_0) = 1/(1 - |w_0|^2)$, nous

obtenons

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

Comme z_0 est arbitraire, alors (1.5) est vrai pour tout $|z| < 1$. Si f est un automorphisme du disque unité, alors $h \circ f \circ g$ est aussi un automorphisme. D'après la proposition 1.2.1, il suit que $h \circ f \circ g(z)$ est alors une rotation. Il y aura ainsi égalité en (1.6) et conséquemment en (1.5).

Réciproquement, s'il y a égalité en (1.5) pour un $z \in \mathbb{D}$, on aura que $|(h \circ f \circ g)'(0)| = 1$. La proposition 1.2.1 entraîne que $h \circ f \circ g(z) = e^{i\theta}z$ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$. Ainsi, il s'agit d'un automorphisme. En composant par h^{-1} à gauche et par g^{-1} à droite, on a que f est un automorphisme du disque unité. ■

À l'aide du lemme de Pick, nous sommes maintenant en mesure de montrer que les automorphismes du disque unité sont des isométries dans le modèle du disque de Poincaré. Dans ce qui suit, nous noterons par $\mathcal{L}(\gamma)$, la longueur d'une courbe continûment différentiable par morceaux γ .

Théorème 1.3.1. *Soient f un automorphisme de \mathbb{D} et γ une courbe continûment différentiable par morceaux. Alors,*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(f(\gamma)).$$

Démonstration. Posons $\omega := f(\xi)$. D'après le lemme de Pick, il y a égalité en (1.5). Cette dernière peut s'écrire comme suit

$$\left| \frac{d\omega}{d\xi} \right| = \frac{1 - |\omega|^2}{1 - |\xi|^2}.$$

Sous forme différentielle on obtient

$$\frac{|d\omega|}{1 - |\omega|^2} = \frac{|d\xi|}{1 - |\xi|^2}.$$

Finalement,

$$\mathcal{L}(f(\gamma)) = \int_{f \circ \gamma} \frac{2|d\omega|}{1 - |\omega|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1 - |\xi|^2} = \mathcal{L}(\gamma). ■$$

1.3.2 Quelques formules pour la distance hyperbolique dans \mathbb{D}

Évidemment, il serait utile de déterminer explicitement des formules pour calculer la distance hyperbolique. C'est ce que nous ferons dans cette section. Mais avant, voici une définition qui nous sera utile par la suite.

Définition 1.3.2. Soient $z, w \in \mathbb{D}$. La *distance pseudo-hyperbolique* entre les points z et w , notée $p(z, w)$, est définie par

$$p(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|.$$

Voici maintenant les formules utiles permettant de calculer directement la distance hyperbolique entre des points du disque unité.

Théorème 1.3.3. Soient ρ la métrique hyperbolique définie par (1.1) et $z, w \in \mathbb{D}$. Alors on a

- (i) $\rho(z, w) = \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right)$;
- (ii) $\tanh \frac{1}{2} \rho(z, w) = p(z, w)$;
- (iii) $\cosh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$;
- (iv) $\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$.

Démonstration. Nous allons démontrer la première formule. Les autres se déduisent des propriétés des fonctions trigonométriques hyperboliques. Fixons $z, w \in \mathbb{D}$. Supposons dans un premier temps que $w = 0$. Considérons une rotation g telle que $g(z) = |z|$. Comme g est un automorphisme, alors il préserve la distance hyperbolique : $\rho(z, w) = \rho(g(z), g(w)) = \rho(|z|, 0) = \rho(0, |z|)$. Soit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $0 \leq t \leq 1$, une courbe continûment différentiable par morceaux dans \mathbb{D} avec $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = |z|$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)| dt}{1 - |\gamma(t)|^2} = \int_0^1 \frac{2\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt}{1 - (x^2(t) + y^2(t))} \\ &\geq \int_0^1 \frac{2x'(t) dt}{1 - x^2(t)} = \int_0^1 \frac{x'(t) dt}{1 - x(t)} + \int_0^1 \frac{x'(t) dt}{1 + x(t)} \\ &= \log \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \end{aligned}$$

D'après ce calcul, il apparaît clairement que la borne est atteinte par la courbe $\gamma_0(t) = |z|t$, qui représente le segment joignant le point 0 à $|z|$. Il suit donc que $\rho(0, |z|) = \log((1 + |z|)/(1 - |z|))$.

De façon générale, si on prend deux points quelconques $z, w \in \mathbb{D}$ et si on considère l'automorphisme $g(z) = (z - w)/(1 - \bar{w}z)$, alors $g(w) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \rho(z, w) = \rho(0, g(z)) &= \log \left(\frac{1 + |g(z)|}{1 - |g(z)|} \right) \\ &= \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule (1). Les autres formules se démontrent à partir de (1), car elles sont toutes équivalentes à cette dernière. ■

La formule (1) du théorème 1.3.3 permet de voir que la distance $\rho(0, z)$ tend vers ∞ lorsque $|z|$ tend vers 1. Ainsi, les points appartenant à la frontière de \mathbb{D} sont situés à l'infini dans le modèle du disque de Poincaré. Afin de considérer les points particuliers appartenant au cercle unité, nous utiliserons désormais la définition suivante

$$\rho(z, w) := \begin{cases} \infty & \text{si } z \in \mathbb{D}, w \in \mathbb{T}; \\ \infty & \text{si } w \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}; \\ \infty & \text{si } z, w \in \mathbb{T} \text{ et } z \neq w; \\ 0 & \text{si } z, w \in \mathbb{T} \text{ et } z = w. \end{cases} \quad (1.7)$$

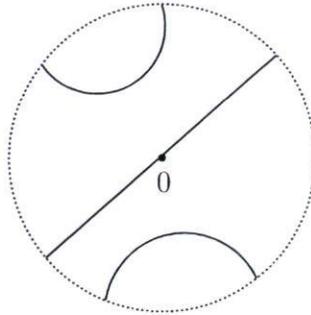
1.3.3 Les géodésiques du disque de Poincaré

Pour évaluer la distance entre deux points, z et w disons, il faut considérer toutes les courbes continûment différentiables par morceaux reliant z et w et prendre l'infimum de la longueur de ces courbes. Nous verrons que dans le cas du modèle du disque de Poincaré, il existe une unique courbe qui relie les points z et w et telle que sa longueur mesurée entre ces points correspond exactement à la distance entre z et w . On appelle ce type particulier de courbe des *géodésiques hyperboliques*. Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 1.3.4. Une *géodésique* est une courbe γ continûment différentiable par morceaux dont la longueur mesurée entre deux points de celle-ci correspond à la distance entre ces points. Les géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré sont appelées les *géodésiques hyperboliques* ou les *lignes hyperboliques*.

Les automorphismes du disque unité sont en particulier des transformations de Möbius. En plus de préserver les angles, ils envoient les cercles généralisés sur des cercles généralisés. Ces propriétés sont fondamentales dans l'obtention du résultat qui suit.

Théorème 1.3.5. *Les géodésiques hyperboliques du modèle du disque de Poincaré sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle unité \mathbb{T} et les diamètres de \mathbb{D} .*



Démonstration. Soient $z, w \in \mathbb{D}$. Nous allons montrer qu'il existe une unique courbe reliant z et w dont la longueur correspond à la distance hyperbolique entre ces deux points. Considérons g , un automorphisme de \mathbb{D} tel que $g(w) = 0$ et $g(z) > 0$. Comme g préserve la distance hyperbolique et envoie les cercles orthogonaux au cercle unité vers des cercles orthogonaux au cercle unité, il est suffisant de montrer que le segment de droite qui relie 0 et $g(z)$ est l'unique courbe de longueur minimale entre 0 et $g(z)$. Comme le segment de droite est situé sur un diamètre, on aura ainsi montré que ces derniers sont des géodésiques et plus généralement les cercles orthogonaux au cercle unité. En effet, les diamètres peuvent être vus comme étant des cercles orthogonaux au cercle unité et passant par l'infini.

Pour $0 \leq t \leq 1$, considérons $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, une courbe continûment différentiable par morceaux dans \mathbb{D} telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = g(z)$. Alors, $\alpha(t) = \text{Re}(\gamma(t)) = x(t)$, où $\text{Re}(\gamma(t))$ est la partie réelle de $\gamma(t)$, définit une courbe dans \mathbb{D} reliant 0 à $g(z)$ le long de l'axe réel. Ainsi,

$$\int_{\alpha} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} = \int_0^1 \frac{2|x'(t)| dt}{1-|x(t)|^2} \leq \int_0^1 \frac{2|x'(t)| dt}{1-|\gamma(t)|^2} \leq \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)| dt}{1-|\gamma(t)|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2}.$$

Si $y(t_0) \neq 0$ pour un t_0 quelconque, alors $|\gamma(t)| > |x(t)|$ sur un intervalle ouvert contenant t_0 et l'inégalité précédente est stricte. Dans ce cas, la longueur de la courbe $\alpha(t)$ est strictement plus petite que celle de $\gamma(t)$. De plus, si $\alpha(t)$ est décroissante sur un intervalle quelconque, alors on peut réduire l'intégrale en enlevant les intervalles où $\alpha(t)$ commence et se termine au même point. On peut donc conclure que la courbe qui va minimiser l'intégrale est la courbe $\gamma(t)$ qui est réelle et non-décroissante. Dans ce cas, l'unique courbe obtenue est le segment de droite reliant 0 à $g(z)$.

■

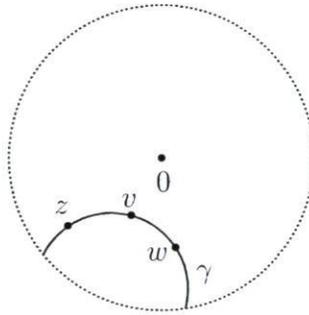
Remarque 1.3.6. Si f est un automorphisme de \mathbb{D} et si γ est la géodésique hyperbolique reliant les points z_0 et z_1 , alors $f \circ \gamma$ est la géodésique hyperbolique reliant les points $f(z_0)$ et $f(z_1)$. Ainsi, les automorphismes préservent les géodésiques hyperboliques.

Les géodésiques hyperboliques possèdent une propriété importante qui concerne le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire associée à la métrique hyperbolique.

Proposition 1.3.7. Soient $z, w \in \mathbb{D}$ et γ la géodésique hyperbolique passant par z et w . Alors on a

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w),$$

pour tout v appartenant à γ et situé entre z et w .



Démonstration. Si on note par γ_1, γ_2 et γ_3 les segments géodésiques hyperboliques situés respectivement entre z et v , v et w ainsi que z et w . On obtient

$$\rho(z, v) = \int_{\gamma_1} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} \text{ et } \rho(v, w) = \int_{\gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2}.$$

Ainsi, comme

$$\int_{\gamma_1} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} + \int_{\gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} = \int_{\gamma_3} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2},$$

il est clair que $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$.

■

1.3.4 Le théorème de Schwarz–Pick

Un célèbre résultat de l'analyse complexe et de la géométrie hyperbolique est le *théorème de Schwarz–Pick*. Ce dernier est un pilier fondamental permettant l'élaboration de la nouvelle théorie contenue dans ce travail. Nous verrons dans les prochains chapitres à quel point il est essentiel, en regard de son utilisation dans plusieurs résultats. Son énoncé est assez simple et son interprétation géométrique est la suivante : il affirme que les fonctions analytiques du disque unité dans lui-même, c'est-à-dire les fonctions appartenant à la classe \mathcal{H} , sont des contractions, en vertu de la géométrie hyperbolique. Il permet de caractériser complètement les isométries dans le modèle de Poincaré : les automorphismes de \mathbb{D} sont les uniques isométries dans cette géométrie et dans ce modèle particulier.

Théorème de Schwarz–Pick. *Soient $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique et $z, w \in \mathbb{D}$. Alors on a*

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w). \quad (1.8)$$

Il y a égalité en (1.8) pour une paire de points distincts z, w si et seulement si f est un automorphisme de \mathbb{D} .

Démonstration. Soit γ la géodésique hyperbolique reliant z et w . On a que $f \circ \gamma$ est une courbe reliant les points $f(z)$ et $f(w)$. Posons $\omega = f(\xi)$. Le lemme de Pick et la définition de la métrique hyperbolique entraînent que

$$\begin{aligned} \rho(f(z), f(w)) &\leq \int_{f \circ \gamma} \frac{2|d\omega|}{1-|\omega|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|f'(\xi)||d\xi|}{1-|f(\xi)|^2} \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{2|d\xi|}{1-|\xi|^2} = \rho(z, w). \end{aligned}$$

L'égalité tient en (1.8) pour une paire de points distincts z, w si et seulement si f est un automorphisme de \mathbb{D} . En effet, ceci découle directement du lemme de Pick et de la préservation des géodésiques par les automorphismes. ■

Chapitre 2

Les différences divisées hyperboliques

Dans ce deuxième chapitre, nous allons introduire un concept fondamental pour ce travail : il s'agit des *différences divisées hyperboliques*. Cette appellation s'inspire des *différences divisées*, fort connues en analyse numérique et qui possèdent de nombreuses applications. L'ajout de l'adjectif *hyperbolique* illustre la nature même de ces quantités faisant ainsi le lien entre la géométrie hyperbolique et ces objets classiques.

2.1 Les différences divisées

2.1.1 Interpolation par des polynômes

Les polynômes, des fonctions de la forme

$$p_n(z) := c_0 + c_1z + \cdots + c_nz^n,$$

où n est un entier positif et $c_0, c_1, \dots, c_n, z \in \mathbb{C}$, sont certainement la classe de fonctions la plus connue. Une des raisons expliquant le fait que les polynômes sont des objets intéressants est sans aucun doute leur facilité de calcul. En effet, l'intégration et la dérivation de ces derniers sont faciles à déterminer et donnent comme résultat toujours des polynômes. Ces deux opérations font en sorte que l'on demeure dans la même classe de fonctions.

Les polynômes sont intimement liés, dans un certain sens, aux fonctions continues.

En effet, une telle fonction peut être approchée par un polynôme d'aussi « près » que l'on veut. Il s'agit, bien sûr, du théorème de Weierstrass.

Théorème de Weierstrass. *Soit f une fonction continue à valeurs complexes définie sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un polynôme p , défini sur $[a, b]$, tel que*

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Dans ce qui suit, nous allons donner un bref aperçu d'un problème connu depuis fort longtemps : pour une fonction à valeurs complexes donnée, connue en quelques points, déterminer un polynôme prenant les mêmes valeurs que la fonction en ces points. Il s'agit de ce qu'on appelle un *problème d'interpolation*. Plus précisément, nous allons nous intéresser à l'*interpolation polynomiale*. Des mathématiciens tels que I. Newton et J.-L. Lagrange y ont d'ailleurs laissé leur marque, puisque les principales méthodes de résolution de ce problème portent leur nom.

Étant donnés des points distincts $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et f une fonction à valeurs complexes définie sur un ensemble contenant les points $\{z_0, \dots, z_n\}$, on considère la problématique suivante : on veut construire un polynôme p de degré inférieur ou égal à n qui satisfait

$$p(z_i) = f(z_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.1)$$

Il est possible de donner un fondement théorique à la solution du problème précédent et le théorème qui suit nous assure de l'existence d'une solution et de son unicité.

Théorème 2.1.1. *Étant donnés des points distincts $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et f une fonction à valeurs complexes définie sur un ensemble contenant les points $\{z_0, \dots, z_n\}$, alors il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$p(z_j) = f(z_j), \quad j = 0, \dots, n. \quad (2.2)$$

Démonstration. Supposons qu'il existe deux polynômes p_1 et p_2 de degrés inférieurs ou égaux à n qui satisfont (2.2). Posons $p = p_1 - p_2$. Alors p est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Aussi, on a que $p(z_j) = 0$ pour $j = 0, \dots, n$. Donc p possède $n + 1$ zéros. Il suit du théorème fondamental de l'algèbre que $p \equiv 0$. En ce qui concerne l'existence, on construit directement le polynôme qui interpole les points donnés :

$$p(z) = \sum_{j=0}^n f(z_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{z - z_k}{z_j - z_k}.$$

■

2.1.2 Méthode d'interpolation de Newton

Une autre méthode permettant de déterminer explicitement la solution du problème d'interpolation (2.2), basée sur ce qu'on nomme les *différences divisées*, est appelée la *méthode d'interpolation de Newton*. Dans ce qui suit, nous allons donc présenter ces différences particulières et la méthode de résolution de notre problème qui s'y rattache.

Voici la définition classique des différences divisées.

Définition 2.1.2. Soient $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ des points distincts et f une fonction à valeurs complexes définie sur un ensemble contenant les points $\{z_0, \dots, z_n\}$. La *différence divisée d'ordre zéro* de f , par rapport à z_i , notée $f[z_i]$, est donnée par

$$f[z_i] = f(z_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Les *différences divisées d'ordre k* par rapport à $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k}$, notées $f[z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k}]$, sont définies récursivement par

$$f[z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k}] = \frac{f[z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_{i+k}] - f[z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k-1}]}{z_{i+k} - z_i}. \quad (2.3)$$

On peut déterminer facilement les différences divisées à l'aide d'un tableau. Le tableau 2.1 illustre la manière de le faire dans le cas de la différence divisée d'ordre 3.

| z_i | $f(z_i)$ | $f[z_i, z_{i+1}]$ | $f[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}]$ | $f[z_i, z_{i+1}, z_{i+2}, z_{i+3}]$ |
|-------|----------|-------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| z_0 | $f(z_0)$ | $f[z_0, z_1]$ | $f[z_0, z_1, z_2]$ | $f[z_0, z_1, z_2, z_3]$ |
| z_1 | $f(z_1)$ | $f[z_1, z_2]$ | $f[z_1, z_2, z_3]$ | |
| z_2 | $f(z_2)$ | $f[z_2, z_3]$ | | |
| z_3 | $f(z_3)$ | | | |

TABLEAU 2.1 – Tableau des différences divisées.

Par induction, on voit que

$$\begin{aligned} f[z_0, z_1, \dots, z_n] &= \sum_{j=0}^n \frac{f(z_j)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n (z_j - z_k)} \\ &= \frac{f(z_0)}{(z_0 - z_1) \dots (z_0 - z_n)} + \dots + \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0) \dots (z_n - z_{n-1})}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Cette représentation montre que $f[z_0, \dots, z_n]$ est symétrique par rapport à ses arguments, c'est-à-dire

$$f[z_0, \dots, z_n] = f[z_{\sigma(0)}, \dots, z_{\sigma(n)}],$$

où

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

est une permutation. La *formule d'interpolation de Newton* suivante

$$\begin{aligned} p(z) &= f[z_0] + f[z_0, z_1](z - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](z - z_0)(z - z_1) + \dots \\ &\quad + f[z_0, z_1, \dots, z_n](z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

nous donne exactement le polynôme interpolant recherché satisfaisant la condition (2.2) et qui est exprimé en termes des différences divisées. En utilisant (2.4), quelques calculs nous permettent de voir que $p(z_i) = f(z_i)$ pour $i = 0, \dots, n$.

La construction du polynôme (2.5) est facilement déterminée en utilisant le tableau 2.1. En effet, il suffit de prendre le premier élément de chaque colonne, c'est-à-dire la diagonale supérieure du tableau. La méthode d'interpolation de Newton qui utilise les différences divisées nous donne ainsi une façon élégante de construire le polynôme interpolant.

2.2 Les différences divisées hyperboliques

2.2.1 Définition et propriétés

La notion de *différence divisée hyperbolique* est un sujet assez récent qui tire son origine d'un article de A. F. Beardon et D. Minda paru en 2004 [6]. Elle a d'abord été introduite sous le nom de *quotient de la différence hyperbolique*. Le sujet fut également

traité en 2007 par P. Rivard dans [22] et on y retrouve une extension de même qu'une généralisation des résultats de Beardon et Minda. Finalement, ces travaux ont été repris par L. Baribeau, P. Rivard et E. Wegert en 2009 [2] dont nous présentons les éléments essentiels dans cette section.

Avant d'aborder les différences divisées hyperboliques, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.2.1. Soient $z, w \in \widehat{\mathbb{D}}$. On définit

$$[z, w] := \begin{cases} \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} & \text{si } z, w \in \overline{\mathbb{D}}, \bar{w}z \neq 1; \\ w & \text{si } z = w \in \mathbb{T}; \\ \infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le lemme qui suit, dont la preuve est un calcul élémentaire, présente quelques identités concernant la définition précédente.

Lemme 2.2.2. On a

(i)

$$[e^{i\theta}z, e^{i\theta}w] = e^{i\theta}[z, w], \quad z, w \in \widehat{\mathbb{D}}, \theta \in \mathbb{R}; \quad (2.6)$$

(ii)

$$[[z, a], a] = z, \quad a \in \mathbb{D}, z \in \widehat{\mathbb{D}}. \quad (2.7)$$

Il est également intéressant de considérer la quantité donnée à la définition 2.2.1 en faisant varier z et en fixant w . Nous avons le lemme élémentaire suivant.

Lemme 2.2.3. Pour $a \in \mathbb{D}$, l'application $z \mapsto [z, a]$ est un automorphisme du disque unité, qui est égal à son propre inverse.

Démonstration. Il est clair par définition que l'application est holomorphe et le reste découle de (2.7). ■

Voici maintenant la définition des *différences divisées hyperboliques*.

Définition 2.2.4. Soit $f \in \mathcal{S}$ et fixons k points distincts $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$. Posons

$$\Delta^0 f(z) := f(z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

On définit récursivement pour $j = 1, \dots, k$ la *différence divisée hyperbolique d'ordre j* de la fonction f avec les paramètres z_1, \dots, z_j , notée $\Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j)$, comme suit

$$\Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j) := \frac{[\Delta^{j-1} f(z; z_1, \dots, z_{j-1}), \Delta^{j-1} f(z_j; z_1, \dots, z_{j-1})]}{[z, z_j]}, \quad (2.8)$$

pourvu que $\Delta^{j-1} f(z; z_1, \dots, z_{j-1}) \notin \mathcal{B}_0$. En $z = z_j$, le quotient du côté droit de l'équation (2.8) doit être interprété comme une limite. Si $\Delta^{j-1} f(z; z_1, \dots, z_{j-1}) \in \mathcal{B}_0$, on définit

$$\Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j) := \Delta^{j-1} f(z_j; z_1, \dots, z_{j-1}).$$

Afin de montrer que la définition précédente a un sens, nous allons faire en détails l'analyse du cas de la différence divisée hyperbolique d'ordre un d'une fonction de Schur. Remarquons que le cas de l'ordre un est essentiellement ce que l'on retrouve dans les travaux de Beardon et Minda [6].

Introduisons d'abord l'opérateur $\Delta_{z_1}^1$ qui agit sur les fonctions appartenant à la classe de Schur :

$$\Delta_{z_1}^1 f(z) := \Delta^1 f(z; z_1).$$

Nous allons montrer dans ce qui suit que l'opérateur $\Delta_{z_1}^1$ est un opérateur de \mathcal{S} dans \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \Delta_{z_1}^1 : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ f &\mapsto \Delta_{z_1}^1 f, \end{aligned}$$

autrement dit pour $f \in \mathcal{S}$, la fonction $z \mapsto \Delta_{z_1}^1 f(z)$ appartient également à la classe de Schur.

Théorème 2.2.5. Fixons $z_1 \in \mathbb{D}$. Alors pour $f \in \mathcal{S}$, on a $\Delta_{z_1}^1 f \in \mathcal{S}$.

Démonstration. Nous avons explicitement pour $f \in \mathcal{S}$

$$\Delta_{z_1}^1 f(z) = \Delta^1 f(z; z_1) = \frac{[f(z) \cdot f(z_1)]}{[z, z_1]}. \quad (2.9)$$

Soit $f \in \mathcal{B}_0$. Dans ce cas, il existe $|\lambda| = 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \lambda$. D'après la définition précédente, $\Delta_{z_1}^1 f(z) = \lambda$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. Si $f \in \mathcal{H}$, alors la fonction $\Delta_{z_1}^1 f$

est holomorphe dans \mathbb{D} . En effet, sur $\mathbb{D} \setminus \{z_1\}$, le résultat est clair. De plus, la fonction, $\Delta_{z_1}^1 f$ possède une singularité enlevable en $z = z_1$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_1} \Delta^1 f(z, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{[f(z), f(z_1)]}{[z, z_1]} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z)} \frac{1 - \overline{z_1}z}{z - z_1} \\ &= \frac{f'(z_1)(1 - |z_1|^2)}{1 - |f(z_1)|^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Il nous reste maintenant à montrer que $|\Delta_{z_1}^1 f(z)| \leq 1$, pour tout $z \in \mathbb{D}$. On a

$$\begin{aligned} |[f(z), f(z_1)]| &= \tanh \frac{1}{2} \rho(f(z), f(z_1)) \\ &\leq \tanh \frac{1}{2} \rho(z, z_1) \\ &= |[z, z_1]|. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente découle du théorème de Schwarz–Pick et du fait que la fonction $x \mapsto \tanh x$ est monotone croissante. Finalement, on a bien que $\Delta_{z_1}^1 f \in \mathcal{S}$, pour tout $f \in \mathcal{S}$. ■

Le théorème montre en particulier que la différence divisée hyperbolique d'ordre un d'une fonction de Schur est bien définie.

Sous les mêmes hypothèses que la définition 2.2.4, introduisons maintenant la notation opératorielle $\Delta_{z_1, \dots, z_j}^j$ qui agit sur $f \in \mathcal{S}$ de la façon suivante :

$$\Delta_{z_1, \dots, z_j}^j f(z) := \Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j) \quad z \in \mathbb{D}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.11)$$

On peut maintenant récrire la définition de $\Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j)$ comme

$$\Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j) = \Delta_{z_j}^1 (\Delta_{z_1, \dots, z_{j-1}}^{j-1} f)(z), \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.12)$$

La proposition qui suit montre que l'image par l'opérateur $\Delta_{z_1, \dots, z_j}^j$ d'une fonction de Schur est également une fonction de Schur.

Théorème 2.2.6. *Fixons k points distincts $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$. Alors pour $f \in \mathcal{S}$, on a $\Delta_{z_1, \dots, z_j}^j f \in \mathcal{S}$, pour $j = 1, \dots, k$.*

Démonstration. Nous allons montrer le résultat par induction sur j . Pour $j = 1$, on a montré précédemment que $\Delta_{z_1}^1 f \in \mathcal{S}$ pour $f \in \mathcal{S}$. Supposons que le résultat est vrai pour j . Alors on a, pour $z \in \mathbb{D}$

$$\Delta_{z_1, \dots, z_{j+1}}^{j+1} f(z) = \Delta_{z_{j+1}}^1 (\Delta_{z_1, \dots, z_j}^j f)(z).$$

Ainsi, par l'hypothèse d'induction et le cas $j = 1$, il suit que $\Delta_{z_1, \dots, z_{j+1}}^{j+1} f \in \mathcal{S}$. ■

Le lemme qui suit nous donne une formule d'inversion pour le cas de la différence divisée hyperbolique d'ordre un, ce qui montre que pour $z_1 \in \mathbb{D}$ l'opérateur $\Delta_{z_1}^1$ est surjectif.

Lemme 2.2.7. *Soient $g \in \mathcal{S}$ et $z_1, w_1 \in \mathbb{D}$. Alors il existe une unique fonction $f \in \mathcal{H}$ telle que $\Delta_{z_1}^1 f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $f(z_1) = w_1$. Cette fonction est donnée par*

$$f(z) = [[z, z_1] \cdot g(z), w_1]. \quad (2.13)$$

Démonstration. Supposons que $f \in \mathcal{H}$ soit telle que $\Delta_{z_1}^1 f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $f(z_1) = w_1$. Alors par le lemme 2.2.2 et en utilisant (2.7), on a

$$\begin{aligned} f(z) &= [[f(z), w_1], w_1] = [[f(z), f(z_1)], w_1] = [[z, z_1] \cdot \Delta^1 f(z; z_1), w_1] \\ &= [[z, z_1] \cdot g(z), w_1]. \end{aligned}$$

et ainsi f satisfait (2.13). Réciproquement, le lemme 2.2.3 nous garantit que la fonction f donnée par (2.13) est bien définie, holomorphe dans \mathbb{D} et satisfait $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. De plus,

$$f(z_1) = [[z_1, z_1] \cdot g(z_1), w_1] = [0, w_1] = w_1,$$

et, encore une fois, par le lemme 2.2.2,

$$\Delta^1 f(z; z_1) = \frac{[f(z), f(z_1)]}{[z, z_1]} = \frac{[[z, z_1] \cdot g(z), w_1], w_1}{[z, z_1]} = \frac{[z, z_1] \cdot g(z)}{[z, z_1]} = g(z). \quad \blacksquare$$

Les différences divisées hyperboliques se transposent également dans un tableau, dans le cas où elles sont définies par (2.8). Le tableau 2.2 montre le cas particulier du calcul de $\Delta^3 f(z; z_1, z_2, z_3)$.

| z_i | $f(z_i)$ | Ordre un | Ordre deux | Ordre trois |
|-------|----------|------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| z_1 | $f(z_1)$ | | | |
| | | $\Delta^1 f(z_2; z_1)$ | | |
| z_2 | $f(z_2)$ | | $\Delta^2 f(z_3; z_1, z_2)$ | |
| | | $\Delta^1 f(z_3; z_1)$ | | $\Delta^3 f(z; z_1, z_2, z_3)$ |
| z_3 | $f(z_3)$ | | $\Delta^2 f(z; z_1, z_2)$ | |
| | | $\Delta^1 f(z; z_1)$ | | |
| z | $f(z)$ | | | |

TABLEAU 2.2 – Tableau des différences divisées hyperboliques.

Il serait intéressant maintenant de comparer en détails la façon dont on construit respectivement les différences divisées et les différences divisées hyperboliques. Le tableau 2.2 permet de constater une première différence notable entre les différences divisées hyperboliques et les différences divisées. En effet, les premières sont construites en utilisant le premier élément de chaque colonne, nommé *entrée principale*, ce qui n'est pas le cas des secondes (voir tableau 2.1).

Si nous avons défini les différences divisées hyperboliques de la même manière que les différences divisées, nous obtiendrions le tableau 2.3, dans lequel nous avons traité le cas $k = 2$. Par commodité, nous plaçons cette fois-ci la fonction f sur la première ligne.

| z_i | $f(z_i)$ | Ordre un | Ordre deux |
|-------|----------|---|--|
| z | $f(z)$ | | |
| | | $\Delta_{z_1}^1 f(z) = \frac{[f(z), f(z_1)]}{[z, z_1]}$ | |
| z_1 | $f(z_1)$ | | $\Delta_{z_1, z_2}^2 f(z) = \frac{[\Delta_{z_1}^1 f(z), \Delta_{z_2}^1 f(z_1)]}{[z, z_2]}$ |
| | | $\Delta_{z_2}^1 f(z_1) = \frac{[f(z_1), f(z_2)]}{[z_1, z_2]}$ | |
| z_2 | $f(z_2)$ | | |

TABLEAU 2.3 – Tableau des différences divisées hyperboliques à partir de la définition des différences divisées.

Le premier désavantage de définir les différences divisées hyperboliques de cette façon est le fait que maintenant la fonction $z \mapsto \Delta_{z_1, z_2}^2 f(z)$ n'est plus holomorphe dans \mathbb{D} . En effet, le point z_2 n'est plus une singularité enlevable. Aussi, il n'est désormais plus

possible d'utiliser le théorème de Schwarz–Pick, puisque maintenant au numérateur, nous avons deux fonctions différentes : l'une dont le paramètre est z_1 et l'autre dont le paramètre est z_2 . Nous perdons ainsi deux éléments essentiels qui structuraient la théorie des différences divisées hyperboliques et qui donnaient les propriétés recherchées. La définition que nous avons donnée et la manière de construire les différences divisées hyperboliques sont fondamentales et assurent tout le support théorique nécessaire afin que celles-ci soient bien définies, comme nous l'avons démontré dans ce qui précède. Nous verrons au chapitre 4 les conséquences importantes que la définition des différences divisées hyperboliques amènent dans la résolution de problèmes d'interpolation.

Depuis le début de cette section, nous avons traité des fonctions appartenant à la classe de Schur, c'est-à-dire les fonctions analytiques dans le disque unité dont le module est inférieur ou égal à un. Une sous-classe importante de cette dernière est celle constituée par les produits de Blaschke. La ressemblance entre les produits de Blaschke et les polynômes est tout à fait remarquable. Considérons d'abord les zéros respectifs de ces fonctions. En effet, un polynôme de degré n possède exactement n zéros, en accord avec la multiplicité, dans \mathbb{C} . Il en va de même pour les produits de Blaschke : un produit de degré n possède exactement n zéros, selon la multiplicité, tous dans le disque unité. Un autre lien intéressant entre les deux classes de fonctions, concerne le rôle majeur que chacun joue : les polynômes pour les fonctions continues à valeurs complexes et les produits de Blaschke pour les fonctions de la classe de Schur. Dans le premier cas, le théorème de Weierstrass mettait en évidence ce rôle important, en montrant que les polynômes sont denses dans la classe des fonctions continues sur un intervalle. Dans le cas des produits de Blaschke on retrouve le résultat suivant.

Théorème de Carathéodory. *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors il existe une suite de produits de Blaschke qui converge simplement vers f .*

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [11].

Le prochain résultat montrera une fois de plus le lien étroit qui unit les polynômes et les produits de Blaschke. En effet, les différences divisées hyperboliques caractérisent complètement les produits de Blaschke : une fonction de Schur est un produit de Blaschke de degré $n > k$ si et seulement si la différence divisée hyperbolique d'ordre k de la fonction est un produit de Blaschke de degré $n - k$ et sera de degré $n \leq k$ si et seulement si la différence divisée hyperbolique d'ordre k de la fonction est un produit de Blaschke de degré zéro. Ainsi, les différences divisées hyperboliques agissent sur les produits de Blaschke de la même façon que les dérivées d'ordre supérieur sur les polynômes, c'est-à-dire en demeurant dans la classe de fonctions correspondante, tout en diminuant le degré.

Théorème 2.2.8. *Fixons des points distincts $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{D}$ et considérons l'opérateur $\Delta^k : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ défini par*

$$\Delta^k f(z) := \Delta^k f(z; z_1, \dots, z_k).$$

Alors, $f \in \mathcal{S}$ est un produit de Blaschke de degré $n > k$ si et seulement si $\Delta^k f$ est un produit de Blaschke de degré $n - k$ et f est un produit de Blaschke de degré $n \leq k$ si et seulement si $\Delta^k f$ est un produit de Blaschke de degré zéro.

Démonstration. Nous allons utiliser l'induction sur k pour montrer le résultat. Supposons que $k = 1$. D'après la définition, si $f \in \mathcal{B}_0$, alors $\Delta^1 f \in \mathcal{B}_0$. Supposons que $f \in \mathcal{H}$. Alors, on a

$$\Delta_{z_1}^1 f(z) = \Delta^1 f(z; z_1) = \frac{[f(z) \cdot f(z_1)]}{[z, z_1]}.$$

D'après le théorème 2.2.5, le lemme 2.2.3 et la proposition 1.2.3, f est continue sur $\overline{\mathbb{D}}$ si et seulement si $\Delta_{z_1}^1 f$ possède cette propriété. Aussi pour $z \in \mathbb{T}$, $|f(z)| = 1$ si et seulement si $|\Delta_{z_1}^1 f(z)| = 1$. Il est clair par le lemme 2.2.3 aussi que f possède un nombre fini de zéros dans \mathbb{D} si et seulement si $\Delta_{z_1}^1 f$ possède un nombre fini de zéros dans \mathbb{D} . D'après le théorème 1.2.4, on peut conclure que f est un produit de Blaschke si et seulement si $\Delta_{z_1}^1 f$ est aussi un produit de Blaschke. Finalement, si f est un produit de Blaschke, on obtient

$$\arg \Delta_{z_1}^1 f(z) = \arg[f(z) \cdot f(z_1)] - \arg[z, z_1], \quad z \in \mathbb{T}.$$

Par le principe de l'argument, il suit que $\Delta_{z_1}^1 f$ possède un zéro de moins que f . Ainsi le degré de $\Delta_{z_1}^1 f$ sera un de moins que celui de f .

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour k . Alors, pour $k + 1$, on a

$$\Delta_{z_1, \dots, z_{k+1}}^{k+1} f(z) = \Delta_{z_{k+1}}^1 (\Delta_{z_1, \dots, z_k}^k f)(z).$$

Il suffit d'appliquer les cas 1 et k et le résultat suit. ■

Les différences divisées hyperboliques nous permettent également de donner la version à points multiples suivante du théorème de Schwarz–Pick. Il généralise un résultat de Beardon et Minda qui correspondait au cas $k = 1$ [6].

Théorème 2.2.9. *Soient $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{D}$ des points distincts. Alors pour $f \in \mathcal{S}$ et pour $u, v \in \mathbb{D}$, on a*

$$\rho(\Delta^k f(u; z_1, \dots, z_k), \Delta^k f(v; z_1, \dots, z_k)) \leq \rho(u, v). \quad (2.14)$$

Il y a égalité en (2.14) pour une paire de points distincts u, v si et seulement si f est un produit de Blaschke de degré $k + 1$.

Démonstration. D'après la proposition 2.2.6, on a que $\Delta_{z_1, \dots, z_k}^k f \in \mathcal{S}$. Supposons d'abord que $\Delta_{z_1, \dots, z_k}^k f \in \mathcal{H}$. Alors, le résultat découle directement du théorème de Schwarz–Pick. Supposons maintenant que $\Delta_{z_1, \dots, z_k}^k f \in \mathcal{B}_0$. Ceci entraîne que le côté gauche de (2.14) est zéro, tandis que le côté droit est positif si $u \neq v$. L'inégalité est donc satisfaite également dans ce cas. Finalement, il y a égalité pour une paire de points si et seulement si $\Delta_{z_1, \dots, z_k}^k f$ est un automorphisme, d'après le théorème de Schwarz–Pick. Ceci est vrai si et seulement si f est un produit de Blaschke de degré $k + 1$, d'après le théorème 2.2.8. ■

2.2.2 Problème de Nevanlinna–Pick

À la section 2.1, nous avons traité d'un problème d'interpolation particulier concernant les polynômes. Nous allons continuer sur la même lignée dans cette partie. Nous nous intéresserons à un problème classique particulier, appelé le *problème de Nevanlinna–Pick* et qui s'énonce comme suit.

Étant donnés n points distincts $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ et n points $w_1, w_2, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$, déterminer des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'une fonction f analytique sur \mathbb{D} telle que $|f(z)| \leq 1$ et satisfaisant

$$f(z_j) = w_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

Avant d'aborder le problème de Nevanlinna–Pick, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 2.2.10. Étant donnés des points distincts $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ et des points $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$, on définit les *différences divisées hyperboliques*

$$\Delta_j^k \equiv \Delta_j^k(w_1, \dots, w_n; z_1, \dots, z_n), \quad k = 0, \dots, n-1, \quad j = k+1, \dots, n.$$

par la procédure récursive suivante : posons $\Delta_j^0 := w_j$ pour $j = 1, \dots, n$. Supposons, que pour un entier k avec $1 \leq k \leq n-1$ et pour $j = k+1, \dots, n$, les différences divisées hyperboliques Δ_j^{k-1} et Δ_k^{k-1} sont données. Alors, avec la convention que $|\infty| := \infty$ est

plus grand que n'importe quel nombre réel,

$$\Delta_j^k := \frac{[\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}]}{[z_j, z_k]} \quad \text{si } |[\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}]| \leq |[z_j, z_k]|, \quad (2.16)$$

$$\Delta_j^k := \Delta_k^{k-1} \quad \text{si } \Delta_j^{k-1} = \Delta_k^{k-1} \in \mathbb{T}, \quad (2.17)$$

$$\Delta_j^k := \infty \quad \text{autrement.} \quad (2.18)$$

Les différences divisées hyperboliques peuvent être arrangées dans un tableau triangulaire comme le montre le tableau 2.4.

L'idée essentielle derrière les définitions (2.16), (2.17) et (2.18) réside dans le fait qu'on utilise la première formule aussi longtemps que le module du quotient considéré ne dépasse pas un, sinon on définit $\Delta_j^k := \infty$, avec la seule exception que $\Delta_j^k := c$ si $\Delta_j^{k-1} = \Delta_k^{k-1} = c \in \mathbb{T}$. En particulier, le premier cas ne peut arriver que si $|\Delta_j^{k-1}| < 1$ et $|\Delta_k^{k-1}| < 1$, et on obtient que $\Delta_j^k = \infty$ si $|\Delta_j^{k-1}| \geq 1$ ou $|\Delta_k^{k-1}| \geq 1$.

Nous appellerons Δ_{k+1}^k l'*entrée principale* de la k -ième colonne. Notons que l'entrée principale intervient dans le calcul de toutes les entrées de la colonne qui suit. Le lemme suivant permet de caractériser le tableau 2.4.

| Points | | 1 | 2 | 3 | ... | $n-2$ | $n-1$ |
|-----------|----------------------------|--------------|--------------|--------------|----------|----------------------|------------------|
| z_1 | $w_1 = \Delta_1^0$ | | | | | | |
| | | Δ_2^1 | | | | | |
| z_2 | $w_2 = \Delta_2^0$ | | Δ_3^2 | | | | |
| | | Δ_3^1 | | Δ_4^3 | | | |
| z_3 | $w_3 = \Delta_3^0$ | | Δ_4^2 | | \ddots | | |
| | | Δ_4^1 | | Δ_5^3 | | Δ_{n-1}^{n-2} | |
| z_4 | $w_4 = \Delta_4^0$ | | Δ_5^2 | | \vdots | | Δ_n^{n-1} |
| | | Δ_5^1 | | \vdots | | Δ_n^{n-2} | |
| z_5 | $w_5 = \Delta_5^0$ | | \vdots | | \ddots | | |
| \vdots | \vdots | \vdots | | Δ_n^3 | | | |
| z_{n-1} | $w_{n-1} = \Delta_{n-1}^0$ | | Δ_n^2 | | | | |
| | | Δ_n^1 | | | | | |
| z_n | $w_n = \Delta_n^0$ | | | | | | |

TABLEAU 2.4 – Tableau des différences divisées hyperboliques.

Lemme 2.2.11.

- (i) Si la k -ième colonne du tableau des différences divisées hyperboliques contient une entrée infinie, alors chaque colonne subséquente, c'est-à-dire les colonnes $k + 1, \dots, n - 1$, contient une entrée infinie.
- (ii) Si la k -ième colonne du tableau des différences divisées hyperboliques contient une constante unimodulaire λ , alors, ou bien chaque entrée des colonnes subséquentes $k, k + 1, \dots, n - 1$ est égale à λ , ou bien chaque colonne subséquente contient une entrée infinie.

Démonstration. (i) L'affirmation découle directement du fait que l'entrée infinie de la colonne k est présente dans le calcul d'au moins une entrée de la colonne $k + 1$. Le même argument s'applique pour le reste des colonnes.

- (ii) Supposons que $\Delta_j^k = \lambda$, avec $|\lambda| = 1$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ et $k + 1 \leq j \leq n$. Si l'entrée principale Δ_{k+1}^k de la k -ième colonne n'est pas égale à λ alors, ou bien $|\Delta_j^k, \Delta_{k+1}^k| = 1$, ou bien $[\Delta_j^k, \Delta_{k+1}^k] = \infty$. Ainsi, dans la définition de Δ_j^{k+1} , ni la condition (2.16), ni la condition (2.17) n'est satisfaite et il suit que $\Delta_j^{k+1} = \infty$. Il suffit maintenant d'appliquer (i). Sinon, si $\Delta_{k+1}^k = \lambda$, le même argument montre que ou bien $\Delta_i^k = \lambda$ pour tout i avec $k + 1 \leq i \leq n$, ou bien il existe un i tel que $\Delta_i^{k+1} = \infty$.

■

Le prochain résultat met en évidence le fait que la définition des différences divisées hyperboliques Δ_j^k est compatible avec celle de $\Delta^k f$, où f est une fonction de Schur.

Lemme 2.2.12. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ des points distincts et $f \in \mathcal{S}$. Posons $w_j := f(z_j)$ pour $j = 1, \dots, n$. Alors,

$$\Delta^k f(z_j; z_1, \dots, z_k) = \Delta_j^k, \quad 0 \leq k \leq n - 1, \quad k + 1 \leq j \leq n. \quad (2.19)$$

Démonstration. Nous allons montrer le lemme par induction sur k . Pour $k = 0$, l'affirmation est vraie. Supposons maintenant que (2.19) est vraie pour la colonne $k - 1$ du tableau. Nous allons montrer que c'est le cas également pour la k -ième colonne. Supposons que

$$\Delta_j^{k-1} = \Delta^{k-1} f(z_j; z_1, \dots, z_{k-1}), \quad \Delta_k^{k-1} = \Delta^{k-1} f(z_k; z_1, \dots, z_{k-1}).$$

Si $f \in \mathcal{S}$ est un produit de Blaschke de degré au plus $k - 1$, alors $\Delta^{k-1} f = \lambda \in \mathbb{T}$ est une constante. Ainsi $\Delta_j^{k-1} = \Delta_k^{k-1} = \lambda$ et nous avons le cas (2.17) de la définition de Δ_j^k . ce

qui implique que $\Delta_j^k = \lambda$. Puisque $\Delta^{k-1}f \equiv \lambda$, nous avons que $\Delta^k f(z_j; z_1, \dots, z_k) = \Delta_j^k$. Si $f \in \mathcal{S}$ n'est pas un produit de Blaschke de degré au plus $k-1$, alors $\Delta^{k-1}f \in \mathcal{H}$ et par le théorème de Schwarz–Pick

$$\begin{aligned} |[\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}]| &= |[\Delta^{k-1}f(z_j; z_1, \dots, z_{k-1}), \Delta^{k-1}f(z_k; z_1, \dots, z_{k-1})]| \\ &\leq |[z_j, z_k]|. \end{aligned}$$

Ainsi, Δ_j^k est définie par (2.16), qui coïncide avec la définition de la différence divisée hyperbolique $\Delta_j^k f(z_j; z_1, \dots, z_k)$. ■

Le théorème qui suit donne un critère simple pour l'existence de solutions au problème de Nevanlinna–Pick. Dans le cas où cela s'avère possible, on donne un algorithme permettant de construire la ou les solutions au problème. Cette méthode est analogue à la méthode de Newton pour l'interpolation polynomiale.

Théorème 2.2.13. *Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors le problème de Nevanlinna–Pick (2.15) possède*

- (i) *une infinité de solutions si et seulement si $|\Delta_n^{n-1}| < 1$;*
- (ii) *une unique solution si et seulement si $|\Delta_n^{n-1}| = 1$;*
- (iii) *aucune solution si et seulement si $\Delta_n^{n-1} = \infty$.*

Démonstration.

- (i) Supposons que $|\Delta_n^{n-1}| < 1$. Il suit du lemme 2.2.11 que

$$|\Delta_j^k| < 1, \quad 0 \leq k < j \leq n. \quad (2.20)$$

Afin de démontrer qu'il existe une infinité de solutions si (2.20) est satisfaite, nous allons montrer que pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$ il existe une solution (unique) $f \in \mathcal{S}$ telle que $\Delta^n f = g$. Pour construire cette solution, nous avons ajouté une diagonale au tableau des différences divisées hyperboliques, comme le montre le tableau 2.5. Nous supposons que z est un point quelconque de \mathbb{D} différent de z_1, \dots, z_n .

L'idée essentielle de la preuve est de trouver f à partir de $\Delta^n f$ en travaillant à rebours, le long de la dernière diagonale inférieure, en utilisant la formule d'inversion donnée au lemme 2.2.7.

Nous commençons en posant $f_0(z) := g(z)$ et on définit les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n récursivement par

$$f_{k+1}(z) := [[z, z_{n-k}] \cdot f_k(z) \cdot \Delta_{n-k}^{n-k-1}], \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.21)$$

| | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|----------|----------------------|--------------------|-----------------|
| z_1 | w_1 | Δ_2^1 | | | | | | |
| z_2 | w_2 | Δ_3^1 | Δ_3^2 | Δ_4^3 | | | | |
| z_3 | w_3 | Δ_4^1 | Δ_4^2 | Δ_5^3 | \ddots | Δ_{n-1}^{n-2} | | |
| z_4 | w_4 | Δ_5^1 | Δ_5^2 | \vdots | \vdots | Δ_n^{n-2} | Δ_n^{n-1} | |
| z_5 | w_5 | \vdots | \vdots | Δ_n^3 | \ddots | $\Delta^{n-2}f(z)$ | $\Delta^{n-1}f(z)$ | $\Delta^n f(z)$ |
| \vdots | \vdots | \vdots | Δ_n^2 | $\Delta^3 f(z)$ | \ddots | | | |
| z_{n-1} | w_{n-1} | Δ_n^1 | | | | | | |
| z_n | w_n | $\Delta^1 f(z)$ | $\Delta^2 f(z)$ | | | | | |
| z | $f(z)$ | | | | | | | |

TABLEAU 2.5 – Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du problème de Nevanlinna–Pick.

Les inégalités (2.20) nous garantissent que les fonctions f_k appartiennent bien à \mathcal{S} . L'identité (2.7) au lemme 2.2.2 implique que $\Delta_{z_{n-k}}^1 f_{k+1} = f_k$ pour $k = 0, \dots, n-1$, de telle sorte que $\Delta^n f_n = f_0 = g$. Nous allons prouver par induction que

$$f_k(z_j) = \Delta_j^{n-k}, \quad j = n - k + 1, \dots, n. \quad (2.22)$$

Pour $k = 1$ on a

$$f_1(z_n) = [[z_n, z_n] \cdot f_0(z_n), \Delta_n^{n-1}] = [0 \cdot g(z_n), \Delta_n^{n-1}] = \Delta_n^{n-1}.$$

Supposons que (2.22) est vraie pour un certain k et pour tout $j = n - k + 1, \dots, n$.

Alors pour ces j on a

$$\begin{aligned} f_{k+1}(z_j) &= [[z_j, z_{n-k}] \cdot f_k(z_j), \Delta_{n-k}^{n-k-1}] \\ &= [[z_j, z_{n-k}] \cdot \Delta_j^{n-k}, \Delta_{n-k}^{n-k-1}] \\ &= \left[\frac{[z_j, z_{n-k}] \cdot [\Delta_j^{n-k-1}, \Delta_{n-k}^{n-k-1}]}{[z_j, z_{n-k}]}, \Delta_{n-k}^{n-k-1} \right] \\ &= [[\Delta_j^{n-k-1}, \Delta_{n-k}^{n-k-1}], \Delta_{n-k}^{n-k-1}] = \Delta_j^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$f_{k+1}(z_{n-k}) = [[z_{n-k}, z_{n-k}] \cdot f_k(z_{n-k}), \Delta_{n-k}^{n-k-1}] = [0, \Delta_{n-k}^{n-k-1}] = \Delta_{n-k}^{n-k-1}.$$

ce qui prouve notre affirmation. En particulier $f_n(z_j) = \Delta_j^0 = w_j$, pour $1 \leq j \leq n$. Ceci nous permet de déduire que f_n est une solution au problème d'interpolation. Il est à noter que f_n est un produit de Blaschke de degré n si nous commençons la procédure récursive avec une constante unimodulaire f_0 .

- (ii) Supposons maintenant que $|\Delta_n^{n-1}| = 1$. Nous allons montrer que dans ce cas, il existe une unique solution au problème d'interpolation. Il suit du lemme 2.2.11 qu'il existe une constante unimodulaire λ avec $|\lambda| = 1$ et un entier m avec $0 \leq m \leq n - 1$ tels que

$$\begin{aligned} |\Delta_j^k| < 1, \quad 0 \leq k \leq m - 1, \quad k < j \leq n; \\ \Delta_j^k = \lambda, \quad m \leq k < j \leq n. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Si (2.23) est satisfaite pour un certain m , avec $0 \leq m \leq n - 1$, on peut le visualiser dans le tableau 2.6.

| | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------------|----------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| z_1 | w_1 | Δ_2^1 | | | | |
| z_2 | w_2 | Δ_3^1 | \dots | | | |
| z_3 | w_3 | Δ_4^1 | \dots | $\Delta_{m+1}^m = \lambda$ | $\Delta_{m+2}^{m+1} = \lambda$ | |
| z_4 | w_4 | Δ_5^1 | \dots | $\Delta_{m+2}^m = \lambda$ | \vdots | $\Delta_n^{n-1} = \lambda$ |
| z_5 | w_5 | \vdots | \vdots | \vdots | $\Delta_n^{m+1} = \lambda$ | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | $\Delta_n^m = \lambda$ | | |
| z_{n-1} | w_{n-1} | Δ_n^1 | \dots | $\Delta^m B(z) = \lambda$ | | |
| z_n | w_n | $\Delta^1 B(z)$ | \dots | | | |
| z | $B(z)$ | | | | | |

TABLEAU 2.6 – Tableau des différences divisées hyperboliques.

Chaque entrée des colonnes situées à gauche de la m -ième colonne sont de module strictement plus petit que un. Toute solution $f \in \mathcal{S}$ doit satisfaire $|\Delta^m f(z_{m+1})| = |\Delta_{m+1}^m| = 1$ et par le principe du maximum, ceci implique que $\Delta^m f$ est une constante unimodulaire. D'après le théorème 2.2.8 on conclut que f doit être un

produit de Blaschke de degré n'excédant pas m . Si le degré de f est strictement plus petit que m , alors $|\Delta^{m-1}f(z_m)| = |\Delta_m^{m-1}| = 1$, une contradiction. Ainsi, si une solution existe, elle doit appartenir à \mathcal{B}_m .

Pour construire une solution, on débute avec le produit de Blaschke $B_{n-m} \equiv \lambda$ de degré zéro, qui satisfait $\Delta^0 B_{n-m}(z_j) = \lambda = \Delta_j^m$ pour tout j avec $m+1 \leq j \leq n$. Les fonctions définies par

$$B_{k+1}(z) := [[z, z_{n-k}] \cdot B_k(z) \cdot \Delta_{n-k}^{n-k-1}], \quad k = n-m, \dots, n-1 \quad (2.24)$$

sont des produits de Blaschke B_k de degré $k+m-n$, et comme précédemment, il suit par induction que les B_k satisfont (2.22) pour $k = n-m, \dots, n$. En particulier, B_n résout le problème d'interpolation.

- (iii) Si $\Delta_n^{n-1} = \infty$, alors ceci implique qu'il ne peut y avoir de solution. En effet, s'il existait $f \in \mathcal{S}$ solution de (2.15), alors $\Delta_j^k = \Delta^k f(z_j; z_1, \dots, z_k)$ et toutes les entrées du tableau des différences divisées hyperboliques seraient de module ne dépassant pas un.

Réciproquement, d'après ce qui précède, s'il existe une infinité de solutions, la seule possibilité est que $|\Delta_{n-1}^n| < 1$. S'il existe une unique solution, alors nécessairement $|\Delta_{n-1}^n| = 1$ et finalement, s'il n'existe aucune solution alors $\Delta_{n-1}^n = \infty$.

■

Remarque 2.2.14. Il existe seulement trois cas possibles en ce qui concerne la solution au problème d'interpolation (4.1). En effet, le problème ne peut pas avoir un nombre fini de solutions, puisque nous sommes en mesure d'en construire une infinité, comme la preuve en témoigne.

Un peu de terminologie est associée au problème de Nevanlinna–Pick : on dira que le problème est *régulier* s'il possède une infinité de solutions et parmi celles-ci, il y a des produits de Blaschke de degré exactement n . Le problème est dit *singulier*, s'il existe une solution unique, qui est un produit de Blaschke de degré strictement inférieur à n . Finalement, si le problème ne possède pas de solutions, on dira qu'il est *vide*.

La définition un peu étrange de la différence divisée hyperbolique $\Delta^k f := f$ pour les constantes unimodulaires prouve son utilité au théorème 2.2.13. En effet, avec la définition plus naturelle $\Delta^k f = 0$ pour les constantes unimodulaires, l'information concernant le module des Δ_j^k aurait été perdue à travers le tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas où le problème est singulier. Il aurait été impossible de construire une solution à partir du tableau dans ce cas.

Mentionnons aussi la complète analogie entre la méthode des différences divisées hyperboliques et la méthode de Newton pour l'interpolation polynômiale, la première étant vue comme la version hyperbolique de la seconde.

Le prochain théorème donne des variantes et d'autres façons de formuler la condition énoncée au théorème 2.2.13 dans le cas où le problème est régulier.

Théorème 2.2.15. *Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors le problème de Nevanlinna–Pick (2.15) est régulier si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.*

$$|\Delta_n^{n-1}| < 1, \quad (2.25)$$

$$|\Delta_{k+1}^k| < 1 \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq n-1, \quad (2.26)$$

$$|\Delta_j^k| < 1 \quad \text{pour tout } 1 \leq k < j \leq n. \quad (2.27)$$

$$\rho(\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}) < \rho(z_j, z_k) \quad \text{pour tout } 1 \leq k < j \leq n, \quad (2.28)$$

$$\rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) < \rho(z_j, z_i) \quad \text{pour tout } 0 \leq k < i < j \leq n. \quad (2.29)$$

Démonstration. Le cas de la condition (2.25) est exactement celui présenté au théorème 2.2.13. Son équivalence avec (2.26) et (2.27) suit de la preuve du théorème 2.2.13.

Nous allons maintenant montrer l'équivalence des conditions (2.27) et (2.28). On a déjà remarqué que la distance hyperbolique ρ dépend de façon monotone de la distance pseudo-hyperbolique p . Ainsi, la condition (2.28) est équivalente à

$$1 > |\Delta_j^k| = \frac{|[\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}]|}{|[z_j, z_k]|} = \frac{p(\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1})}{p(z_j, z_k)}, \quad 1 \leq k < j \leq n.$$

La condition (2.29) découle de la condition (2.28). En effet, si (2.28) est satisfaite, alors le problème est régulier et les fonctions f_k définies en (2.21) satisfont les conditions d'interpolation

$$f_{n-k}(z_j) = \Delta_j^k, \quad j = k+1, \dots, n$$

(voir (2.22)). Puisque $0 \leq k < i < j \leq n$ implique que f_{n-k} n'est pas un produit de Blaschke de degré un ou zéro, alors par le théorème de Schwarz–Pick, il suit que

$$\rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) = \rho(f_{n-k}(z_j), f_{n-k}(z_i)) < \rho(z_j, z_i),$$

ce qui montre le résultat. ■

Il existe aussi l'équivalent du théorème précédent pour les problèmes singuliers.

Théorème 2.2.16. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w_1, \dots, w_n \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors le problème de Nevanlinna–Pick (2.15) est singulier si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

$$|\Delta_n^{n-1}| = 1, \quad (2.30)$$

il existe un entier m , avec $0 \leq m \leq n-1$, tel que

$$\begin{cases} |\Delta_{k+1}^k| < 1, & 1 \leq k < m; \\ |\Delta_{k+1}^k| = 1, & m \leq k \leq n; \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\begin{cases} |\Delta_j^k| < 1, & 1 \leq k < m, k < j \leq n; \\ |\Delta_j^k| = 1, & m \leq k < j \leq n; \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} \rho(\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}) < \rho(z_j, z_k), & 1 \leq k \leq m-1, k < j \leq n; \\ \rho(\Delta_j^{m-1}, \Delta_m^{m-1}) = \rho(z_j, z_m), & m < j \leq n; \\ \rho(\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}) < \rho(z_j, z_k), & k < j \leq n; \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} \rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) < \rho(z_j, z_i), & 0 \leq k \leq m-2, k < i < j \leq n; \\ \rho(\Delta_j^{m-1}, \Delta_i^{m-1}) = \rho(z_i, z_j), & m-1 < i < j \leq n; \\ \rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) < \rho(z_i, z_j), & m \leq k < i < j \leq n. \end{cases} \quad (2.34)$$

Démonstration. La condition (2.30) est la condition du théorème 2.2.13. Aussi, l'équivalence entre cette dernière et les conditions (2.31) et (2.32) a été démontrée dans la preuve du théorème 2.2.13.

Il suit du lemme 2.2.11 que si le problème est singulier alors il existe une constante unimodulaire λ avec $|\lambda| = 1$ et un entier m avec $0 \leq m \leq n-1$ tels que

$$\begin{aligned} |\Delta_j^k| &< 1, & 0 \leq k \leq m-1, k < j \leq n; \\ \Delta_j^k &= \lambda, & m \leq k < j \leq n. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer l'équivalence entre les conditions (2.32) et (2.33). Encore une fois, nous allons utiliser le fait que la distance hyperbolique ρ dépend de

façon monotone de la distance pseudo-hyperbolique p . Ainsi, la condition (2.32) est équivalente à

$$1 > |\Delta_j^k| = \frac{|[\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1}]|}{|[z_j, z_k]|} = \frac{p(\Delta_j^{k-1}, \Delta_k^{k-1})}{p(z_j, z_k)},$$

pour $1 \leq k \leq m-1$, $k < j \leq n$ et

$$1 = |\Delta_j^m| = \frac{|[\Delta_j^{m-1}, \Delta_m^{m-1}]|}{|[z_j, z_m]|} = \frac{p(\Delta_j^{m-1}, \Delta_m^{m-1})}{p(z_j, z_m)},$$

pour $m < j \leq n$. Finalement, comme $\Delta_j^k = \lambda$ pour $m \leq k < j \leq n$, alors en utilisant la définition (1.7), on a

$$\rho(\lambda, \lambda) = 0 < \rho(z_k, z_j), \quad m < k < j \leq n.$$

Montrons l'équivalence entre (2.33) et (2.34). Supposons que (2.33) est satisfaite. Ceci entraîne que le problème est singulier et dans ce cas, il existe une solution unique qui est un produit de Blaschke de degré m . Les produits de Blaschke B_k définis en (2.24) satisfont, pour $0 \leq k \leq n$, la condition

$$B_{n-k}(z_j) = \Delta_j^k, \quad j = k+1, \dots, n.$$

Ainsi, pour $0 \leq k \leq m-2$, B_{n-k} est un produit de Blaschke de degré strictement supérieur à un. D'après le théorème de Schwarz–Pick, on a pour $k < i < j \leq n$,

$$\rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) = \rho(B_{n-k}(z_j), B_{n-k}(z_i)) < \rho(z_j, z_i).$$

Pour $k = m-1$, B_{n-m+1} est un produit de Blaschke de degré un. Le théorème de Schwarz–Pick entraîne que pour $m-1 < i < j \leq n$

$$\rho(\Delta_j^{m-1}, \Delta_i^{m-1}) = \rho(B_{n-m+1}(z_j), B_{n-m+1}(z_i)) = \rho(z_j, z_i).$$

Finalement, pour $m \leq k \leq n$, les entrées de chacune des colonnes subséquentes à la m -ième sont égales à la constante unimodulaire λ , ceci implique pour $m \leq k < i < j \leq n$ et en utilisant la définition (1.7), que

$$\rho(\Delta_j^k, \Delta_i^k) = \rho(\lambda, \lambda) = 0 < \rho(z_j, z_i).$$

■

2.2.3 Un bref aperçu historique du problème de Nevanlinna–Pick

Les origines du problème remontent au début du vingtième siècle, c'est-à-dire jusqu'en 1916, époque à laquelle G. Pick s'y intéressa et résolut le problème [21]. Il donna le critère de solvabilité suivant : une fonction analytique satisfaisant (2.15) existe si et seulement si la matrice P

$$P := \left[\begin{array}{c} 1 - \overline{w_j} w_i \\ 1 - \overline{z_j} z_i \end{array} \right]_{(1 \leq i, j \leq n)}$$

est semi-définie positive.

À la même époque, I. Schur ([26],[27]) s'intéressa au problème d'interpolation suivant : étant donnés les nombres $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$, déterminer s'il existe une fonction f analytique dans \mathbb{D} et de module ne dépassant pas un, telle que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, \dots, m. \quad (2.35)$$

Ceci revient à savoir si une fonction analytique possède les m premiers coefficients de la série de Taylor c_0, \dots, c_m .

Schur eut donc l'idée d'associer à une fonction f holomorphe dans \mathbb{D} et telle que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, une suite de fonctions f_0, f_1, \dots définies par

$$\begin{aligned} f_0(z) &:= f(z); \\ f_{n+1}(z) &:= \frac{f_n(z) - f_n(0)}{z(1 - \overline{f_n(0)} f_n(z))}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

pourvu que $|f_n(0)| < 1$, sinon l'algorithme s'arrêtant lorsque $|f_n(0)| = 1$. La construction de la suite de fonctions f_0, f_1, \dots est appelée *algorithme de Schur*. Les points donnés par $s_n := f_n(0)$, sont appelés *paramètres de Schur*.

Schur établit un lien entre les coefficients c_0, c_1, \dots et les paramètres s_n en montrant que le k -ième paramètre de Schur peut être calculé à partir des coefficients c_0, c_1, \dots, c_k [26].

En appliquant sa méthode avec la fonction $f_0(z) = f(z) = \sum_{k=0}^m c_k z^k$, Schur apporta la réponse qui suit au problème.

Théorème 2.2.17 ([26]). *Il existe une fonction analytique f dans \mathbb{D} telle que $|f(z)| \leq 1$ et satisfaisant (2.35) si et seulement si l'une des deux situations suivantes se produit :*

- (i) $|s_k| < 1$, pour $0 \leq k \leq m$;
- (ii) *il existe un entier $n \leq m$ tel que $|s_k| < 1$, pour $0 \leq k < n$ et $|s_n| = 1$.*

De plus, il existe une infinité de solutions si le premier cas se produit et une solution unique dans le second cas.

Il est possible de modifier l'algorithme précédent en considérant une suite de points distincts $z_0, z_1, \dots \in \mathbb{D}$. Mais avant, nous allons introduire la notation qui suit. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, on note par b_α le facteur de Blaschke

$$b_\alpha(z) := \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

On peut générer une suite de fonctions en appliquant l'algorithme modifié suivant : pour $g \in \mathcal{S}$ et étant donnés des points $z_0, z_1, \dots \in \mathbb{D}$, on pose

$$\begin{aligned} g_0 &:= g; \\ g_{n+1}(z) &:= \frac{1}{b_{z_n}(z)} \frac{g_n(z) - g_n(z_n)}{1 - \overline{g_n(z_n)}g_n(z)}, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

pourvu que $|g_n(z_n)| < 1$, sinon on arrête l'algorithme. Les paramètres de Schur dans ce cas sont les points $s_n := g_n(z_n)$.

Un lien important unit le calcul des différences divisées hyperboliques à l'algorithme de Schur. En effet, l'algorithme de Schur s'interprète facilement en termes des différences divisées hyperboliques d'une fonction calculées à partir des points distincts z_0, z_1, \dots . Sous les mêmes hypothèses que précédemment, nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} g(z) &= \Delta^0 g(z); \\ g_{n+1}(z) &= \Delta^{n+1} g(z; z_0, \dots, z_n), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

et dans ce cas, il suit que

$$s_k = g_k(z_k) = \Delta^k g(z_k; z_0, \dots, z_{k-1}) = \Delta_{k+1}^k,$$

ce qui signifie que les paramètres de Schur correspondent exactement aux entrées principales du tableau des différences divisées hyperboliques.

Finalement, R. Nevanlinna ([18],[19]) s'intéressa aussi au problème d'interpolation (2.15). Il utilisa d'une manière astucieuse l'algorithme de Schur pour résoudre le problème. Ainsi, Nevanlinna résolut le problème, mais indépendamment de Pick et en

s'inspirant des travaux de Schur. Sa solution diffère d'ailleurs totalement de celle de Pick, car elle permet de construire par une méthode récursive des solutions explicites au problème. Son raisonnement était le suivant. Supposons qu'il existe une solution f au problème, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{S}$ et $f(z_j) = w_j$ pour $1 \leq j \leq n$. Nous supposons de plus que $f \in \mathcal{H}$. Définissons

$$f_1(z) := \frac{f(z) - w_1}{1 - \overline{w_1}f(z)} \frac{1 - \overline{z_1}z}{z - z_1},$$

qui est une fonction analytique dans \mathbb{D} . On peut inverser cette formule et on obtient dans ce cas

$$f(z) = \frac{A_1(z) + B_1(z)f_1(z)}{C_1(z) + D_1(z)f_1(z)},$$

où

$$\begin{aligned} A_1(z) &:= w_1(1 - \overline{z_1}z); \\ B_1(z) &:= z - z_1; \\ C_1(z) &:= 1 - \overline{z_1}z; \\ D_1(z) &:= \overline{w_1}(z - z_1). \end{aligned}$$

Réciproquement, étant donnée une fonction f_1 arbitraire et en utilisant la fonction définie précédemment, il suit que $f(z_1) = w_1$. Ainsi, on peut transformer le problème d'interpolation initial en un problème où l'on considère maintenant $n - 1$ points. En effet, on cherche maintenant une fonction f_1 qui satisfait

$$f_1(z_i) = w_i^{(1)} = \frac{(1 - \overline{z_1}z_i)(w_i - w_1)}{(z_i - z_1)(1 - \overline{w_1}w_i)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

En répétant le procédé, on construit des fonctions f_0, f_1, \dots, f_k , où $f = f_0$, telles que

$$f_k(z_j) = w_j^{(k)}, \quad k + 1 \leq j \leq n,$$

où $|w_j^{(k)}| < 1$, $w_j^{(0)} = w_j$ et telles que

$$f_k(z) = \frac{f_{k-1}(z) - w_k^{(k-1)}}{1 - \overline{w_k^{(k-1)}}f_{k-1}(z)} \frac{1 - \overline{z_k}z}{z - z_k}.$$

Si on inverse cette formule, on obtient

$$f_{k-1}(z) = \frac{a_k + b_k f_k(z)}{c_k + d_k f_k(z)},$$

où

$$\begin{aligned} a_k(z) &:= w_k^{(k-1)}(1 - \overline{z_k}z); \\ b_k(z) &:= z - z_k; \\ c_k(z) &:= (1 - \overline{z_k}z); \\ d_k(z) &:= \overline{w_k^{(k-1)}}(z - z_k). \end{aligned}$$

Par induction, on peut exprimer la solution sous la forme

$$f(z) = \frac{A_n(z) + B_n(z)f_n(z)}{C_n(z) + D_n(z)f_n(z)},$$

où

$$\begin{aligned} A_n(z) &:= c_n A_{n-1} + a_n B_{n-1}; \\ B_n(z) &:= d_n A_{n-1} + b_n B_{n-1}; \\ C_n(z) &:= c_n C_{n-1} + a_n D_{n-1}; \\ D_n(z) &:= d_n C_{n-1} + b_n D_{n-1}. \end{aligned}$$

sont des polynômes d'au plus de degré n . Cette façon d'exprimer la solution du problème est appelée *paramétrisation de Nevanlinna*.

Il est également possible d'obtenir la paramétrisation de Nevanlinna en termes des différences divisées hyperboliques. Pour ce faire, nous allons utiliser la relation de récurrence (2.21) présentée dans la démonstration du théorème 2.2.13 :

$$f_{k+1}(z) := [[z, z_{n-k}] \cdot f_k(z), \Delta_{n-k}^{n-k-1}].$$

En utilisant cette relation, la paramétrisation de Nevanlinna correspond alors à

$$f(z) = [[z, z_1] \cdot f_{n-1}(z), w_1].$$

En résumé, comme nous l'avons vu dans la démonstration du théorème 2.2.13, un problème d'interpolation régulier possède une unique solution $f \in \mathcal{S}$ qui satisfait $\Delta^n f = g$, où $g \in \mathcal{S}$ est une fonction arbitraire. Ceci définit une application

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ f &\mapsto g \end{aligned}$$

qu'on peut identifier comme étant la paramétrisation de Nevanlinna.

Chapitre 3

Les dérivées hyperboliques

Dans ce chapitre nous allons aborder le noyau principal de cette thèse qui porte sur la notion de *dérivée hyperbolique d'ordre supérieur*. Cette dernière découle naturellement des différences divisées hyperboliques introduites au chapitre précédent.

3.1 Différences divisées hyperboliques à un paramètre

3.1.1 Définition et propriétés

Le concept de différences divisées hyperboliques fait intervenir des paramètres choisis dans le disque unité tous distincts entre eux. Dans ce qui suit, nous allons traiter de la même définition, mais en laissant tomber la condition des paramètres distincts pour n'en avoir plus qu'un seul.

Définition 3.1.1. Soient $f \in \mathcal{S}$, $z \in \mathbb{D}$ et $n \geq 1$. Pour $\zeta \in \mathbb{D}$, on définit la *différence hyperbolique divisée d'ordre n* de f avec paramètre z , notée $\Delta_z^n f(\zeta)$, par

$$\Delta_z^n f(\zeta) \equiv \Delta^n f(\zeta; z, \dots, z) := \lim_{z_n \rightarrow z} \lim_{z_{n-1} \rightarrow z} \dots \lim_{z_1 \rightarrow z} \Delta^n f(\zeta; z_1, \dots, z_n) \quad (\zeta \neq z) \quad (3.1)$$

et

$$\Delta_z^n f(z) = \Delta^n f(z; z, \dots, z) := \lim_{\zeta \rightarrow z} \Delta^n f(\zeta; z, \dots, z). \quad (3.2)$$

Remarque 3.1.2. En utilisant la notation opératorielle présentée en (2.11) et (2.12), formellement nous avons

$$\Delta_z^n f(\zeta) = \lim_{z_n \rightarrow z} \lim_{z_{n-1} \rightarrow z} \dots \lim_{z_1 \rightarrow z} \Delta_{z_n}^1 (\Delta_{z_1, \dots, z_{n-1}}^{n-1} f)(\zeta). \quad (3.3)$$

Afin d'abrégier, nous écrivons

$$\Delta_z^n f(\zeta) = \Delta_z^1 (\Delta_z^{n-1} f)(\zeta),$$

plutôt que (3.3).

Il nous reste à montrer que les définitions (3.1) et (3.2) ont du sens. Pour ce faire, nous allons montrer par induction que, comme fonction de ζ , $\Delta_z^n f \in \mathcal{S}$ pour $f \in \mathcal{S}$ et $z \in \mathbb{D}$. Le cas $n = 1$ suit de la proposition 2.2.6. Supposons que $\Delta_z^n f \in \mathcal{S}$ pour $f \in \mathcal{S}$. En utilisant la notation opératorielle et la continuité, nous obtenons pour $n + 1$

$$\begin{aligned} \Delta_z^{n+1} f(\zeta) &= \lim_{z_{n+1} \rightarrow z} \lim_{z_n \rightarrow z} \dots \lim_{z_1 \rightarrow z} \Delta_{z_{n+1}}^1 f(\zeta; z_1, \dots, z_{n+1}) \\ &= \lim_{z_{n+1} \rightarrow z} \lim_{z_n \rightarrow z} \dots \lim_{z_1 \rightarrow z} \Delta_{z_{n+1}}^1 (\Delta_{z_1, \dots, z_n}^n f)(\zeta) \\ &= \Delta_z^1 (\Delta_z^n f)(\zeta). \end{aligned}$$

On déduit du cas $n = 1$ et de l'hypothèse d'induction que $\Delta_z^{n+1} f \in \mathcal{S}$. Ceci implique donc que les définitions ont un sens, comme voulu. Nous avons donc montré la proposition suivante.

Proposition 3.1.3. Soient $f \in \mathcal{S}$, $z \in \mathbb{D}$ et $n \geq 1$. Alors,

$$\Delta_z^n f \in \mathcal{S}.$$

Les théorèmes 2.2.8 et 2.2.9 ont leur équivalent pour le cas des différences divisées hyperboliques à un paramètre.

Théorème 3.1.4. Soient $z \in \mathbb{D}$ et l'opérateur $\Delta^k : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ défini par

$$\Delta^k f(\zeta) := \Delta_z^k f(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Alors $f \in \mathcal{S}$ est un produit de Blaschke de degré $n > k$ si et seulement si $\Delta^k f$ est un produit de Blaschke de degré $n - k$ et f est un produit de Blaschke de degré $n \leq k$ si et seulement si $\Delta^k f$ est un produit de Blaschke de degré zéro.

Démonstration. Nous allons utiliser l'induction sur k . Pour $k = 1$, le résultat suit du théorème 2.2.8. Supposons que le résultat soit vrai pour k . Alors, par la remarque 3.1.2, on peut écrire

$$\Delta_z^{k+1} f(\zeta) = \Delta_z^1 (\Delta_z^k f)(\zeta). \quad (3.4)$$

et le résultat pour $k + 1$ suit de (3.4), du cas $k = 1$, de la proposition 3.1.3 et de l'hypothèse d'induction. ■

Une conséquence du théorème précédent est qu'il est aussi possible de caractériser complètement les produits de Blaschke finis à l'aide des différences divisées hyperboliques à un paramètre. Une autre propriété importante de ces dernières concerne un analogue du théorème de Schwarz–Pick à un paramètre.

Théorème 3.1.5. *Soit $z \in \mathbb{D}$. Alors, pour tout $f \in \mathcal{S}$ et pour $u, v \in \mathbb{D}$*

$$\rho(\Delta_z^k f(u), \Delta_z^k f(v)) \leq \rho(u, v). \quad (3.5)$$

On a égalité en (3.5) pour une paire de points distincts u et v si et seulement si f est un produit de Blaschke de degré $k + 1$.

Démonstration. La proposition 3.1.3 implique que $\Delta_z^k f \in \mathcal{S}$. Si $\Delta_z^k f \in \mathcal{H}$, on peut déduire (3.5) du théorème classique de Schwarz–Pick. Si $\Delta_z^k f \in \mathcal{B}_0$, alors le côté gauche de (3.5) est zéro, tandis que le côté droit est positif si $u \neq v$. Finalement, le cas d'égalité est une conséquence du théorème 3.1.4 et du cas d'égalité du théorème de Schwarz–Pick. ■

3.2 Les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur

3.2.1 Définition et propriétés

Un important constat à faire concernant la théorie géométrique des fonctions est le fait que la métrique hyperbolique est bien adaptée pour étudier les fonctions holomorphes du disque unité dans lui-même. Un des objectifs de ce travail est d'introduire une nouvelle dérivée qui s'accorde avec ces dernières et met en relief leurs particularités. La notion de *dérivée hyperbolique* n'est pas tout à fait nouvelle ([5],[6],[3]) et est connue sous la forme suivante.

Pour $f \in \mathcal{H}$ et $z \in \mathbb{D}$, la *dérivée hyperbolique* de f en z , notée $f^h(z)$, est définie par

$$f^h(z) := \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}.$$

Cette définition a un lien avec la différence divisée hyperbolique d'ordre un de la fonction f . Il s'agit bien entendu du calcul que nous avons fait en (2.10) :

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow z} \Delta_z^1 f(\zeta) &= \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{[f(\zeta), f(z)]}{[\zeta, z]} \\ &= \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}. \end{aligned}$$

L'analogie est évidente entre la dérivée hyperbolique et la dérivée classique, puisque la première est l'équivalent hyperbolique de la seconde. En effet, la dérivée hyperbolique est définie en utilisant la différence divisée hyperbolique $[f(\zeta), f(z)]/[\zeta, z]$ et la dérivée classique par la différence divisée euclidienne $(f(\zeta) - f(z)) / (\zeta - z)$.

Conformément avec la convention établie au chapitre 2, dans le cas où f est un produit de Blaschke de degré zéro, nous définirons la dérivée hyperbolique par

$$f^h(z) := f(z).$$

Ainsi, la dérivée hyperbolique a un sens pour toute fonction appartenant à la classe de Schur. Il ressort de ce qui précède que la définition coïncide avec celle de $\Delta_z^1 f(z)$.

Les différences divisées hyperboliques suggèrent donc une possible extension de la notion de dérivée hyperbolique à des ordres supérieurs. En effet, il semble naturel de définir les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur en utilisant les différences divisées hyperboliques à un paramètre du même ordre. Ceci nous mène donc à la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soient $f \in \mathcal{S}$ et $n \geq 1$. La *dérivée hyperbolique d'ordre n* de f au point $z \in \mathbb{D}$, notée $H^n f(z)$, est définie par

$$H^n f(z) := \Delta_z^n f(z).$$

Rappelons que par la proposition 3.1.3, cette notion est bien définie.

Grâce à l'introduction des dérivées hyperboliques, il est maintenant possible d'écrire sous forme de tableau les différences divisées hyperboliques à un paramètre, sous certaines conditions. Pour $f \in \mathcal{S}$ et pour un paramètre $z \in \mathbb{D}$, par la définition 3.2.1, la remarque 3.1.2 et dans le cas où les quantités en présence ne sont pas des constantes unimodulaires, on obtient le tableau 3.1.

Une première propriété des dérivées hyperboliques d'ordre supérieur et qui est une conséquence directe de la définition est la suivante :

$$|H^n f(z)| \leq 1. \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.6)$$

| | | Ordre un | Ordre deux | Ordre trois |
|---------|------------|-----------------------|--|--|
| z | $f(z)$ | $H^1 f(z)$ | | |
| z | $f(z)$ | $H^1 f(z)$ | $H^2 f(z)$ | |
| z | $f(z)$ | $\Delta_z^1 f(\zeta)$ | $\Delta_z^2 f(\zeta) = \frac{[\Delta_z^1 f(\zeta), H^1 f(z)]}{[\zeta, z]}$ | $\Delta_z^3 f(\zeta) = \frac{[\Delta_z^2 f(\zeta), H^2 f(z)]}{[\zeta, z]}$ |
| ζ | $f(\zeta)$ | | | |

TABLEAU 3.1 – Tableau des différences divisées hyperboliques à un paramètre d’une fonction f .

Les dérivées hyperboliques d’une fonction de la classe de Schur sont bornées par 1. Cette borne supérieure découle essentiellement du fait que pour une fonction de Schur les différences divisées hyperboliques à un paramètre appliquées à cette fonction donnent aussi une fonction de Schur. Une borne supérieure pour ce type de dérivée particulière est par conséquent obtenue assez simplement. Cependant, si on veut déterminer une borne supérieure pour les dérivées classiques d’ordre supérieur des fonctions appartenant à la classe de Schur, il en va tout autrement et le problème s’avère plus difficile. Pour plus de détails, nous référons aux travaux de S. Ruscheweyh [25] ainsi qu’à ceux de J.M. Anderson et J. Rovnyak [1]. Nous obtenons dans ce cas le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 ([1, Theorem 2]). *Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors,*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!(1 - |f(z)|^2)}{(1 - |z|^2)^n} (1 + |z|)^{n-1}. \quad (3.7)$$

De plus,

(i) pour $n \geq 1$ et $z = 0$, l’égalité a lieu en (3.7) si et seulement si

$$f(z) = \lambda \frac{z^n - a}{1 - \bar{a}z^n}.$$

où $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$;

(ii) pour $n \geq 2$ et $z \neq 0$, l’égalité a lieu en (3.7) si et seulement si

$$f(z) = \lambda.$$

où $|\lambda| = 1$.

Une question intéressante peut être soulevée dans ce cas : est-il possible d'obtenir l'estimé (3.7) pour les dérivées classiques en utilisant (3.6) ?

Une seconde propriété importante des dérivées hyperboliques d'ordre supérieur est que celles-ci sont invariantes, dans un sens que nous expliquerons dans ce qui suit, sous la composition d'automorphismes du disque unité. Mais avant de donner cette propriété plus en détails, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2.3. *Soient ψ, ϕ des automorphismes du disque unité et $f \in \mathcal{S}$. Pour $n \geq 1$, supposons que $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ sont des points distincts. Alors, pour $1 \leq j \leq n$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ de telle sorte que*

$$\Delta^j(\psi \circ f \circ \phi)(z; z_1, \dots, z_j) = e^{i\theta} \Delta^j f(\phi(z); \phi(z_1), \dots, \phi(z_j)), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.8)$$

Démonstration. Pour $f \in \mathcal{B}_0$, le résultat est évident. Supposons maintenant que $f \in \mathcal{H}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta^1(f \circ \phi)(z; z_1) &= \frac{[(f \circ \phi)(z), (f \circ \phi)(z_1)]}{[z, z_1]} \\ &= \frac{[f(\phi(z)), f(\phi(z_1))]}{[\phi(z), \phi(z_1)]} \frac{[\phi(z), \phi(z_1)]}{[z, z_1]} \\ &= e^{i\alpha} \Delta^1 f(\phi(z); \phi(z_1)), \end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$, d'après le théorème 2.2.8. En utilisant l'identité (2.6) du lemme 2.2.2, il suit par induction que pour chaque $j \geq 1$

$$\Delta^j(f \circ \phi)(z; z_1, \dots, z_j) = e^{i\eta} \Delta^j f(\phi(z); \phi(z_1), \dots, \phi(z_j)), \quad z \in \mathbb{D}, \quad (3.9)$$

pour un certain $\eta \in \mathbb{R}$. De façon similiaire, il découle du théorème 2.2.8 que

$$\begin{aligned} \Delta^1(\psi \circ f)(z; z_1) &= \frac{[(\psi \circ f)(z), (\psi \circ f)(z_1)]}{[z, z_1]} \\ &= \frac{[\psi(f(z)), \psi(f(z_1))]}{[f(z), f(z_1)]} \frac{[f(z), f(z_1)]}{[z, z_1]} \\ &= e^{i\beta} \Delta^1 f(z; z_1), \end{aligned}$$

pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$. et encore une fois par induction on a pour $j \geq 1$

$$\Delta^j(\psi \circ f)(z; z_1, \dots, z_j) = e^{i\beta} \Delta^j f(z; z_1, \dots, z_j), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.10)$$

Finalement, en combinant (3.9) et (3.10), on obtient (3.8) comme voulu. ■

Le théorème suivant découle directement du lemme 3.2.3.

Théorème 3.2.4. *Supposons que ψ, ϕ sont des automorphismes du disque unité, $f \in \mathcal{S}$ et $n \geq 1$. Alors,*

$$|H^n(\psi \circ f \circ \phi)(z)| = |H^n(f)(\phi(z))|, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.11)$$

L'invariance des dérivées hyperboliques d'ordre supérieur, exprimée par (3.11), permet d'établir sur des bases solides la théorie des dérivées hyperboliques. En effet, cette propriété assure, en quelque sorte, que les dérivées hyperboliques sont stables sous la composition d'automorphismes, ce qui est fondamental en géométrie hyperbolique.

3.2.2 Formule récursive pour les dérivées hyperboliques

Comme la définition de la dérivée hyperbolique est intimement liée à celle des différences divisées hyperboliques à un paramètre et comme ces dernières ne se prêtent pas aisément à des calculs simples, nous allons développer dans cette partie une méthode permettant de calculer de manière plus expéditive les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Nous verrons qu'il est possible de le faire récursivement en appliquant un algorithme.

Soit $f \in \mathcal{H}$. Pour $z \in \mathbb{D}$, on définit $D^n f(z)$ par la série de Taylor de la fonction donnée par

$$\zeta \mapsto g(\zeta) := -[f([- \zeta, z]), f(z)] = \frac{f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{z}\zeta}\right) - f(z)}{1 - \overline{f(z)}f\left(\frac{z + \zeta}{1 + \bar{z}\zeta}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n f(z)}{n!} \zeta^n, \quad (3.12)$$

où

$$D^1 f(z) := g'(0), D^2 f(z) := g''(0), \dots$$

Par exemple,

$$D^1 f(z) = \frac{(1 - |z|^2)f'(z)}{1 - |f(z)|^2};$$

$$D^2 f(z) = \frac{f''(z)(1 - |z|^2)^2}{1 - |f(z)|^2} - \frac{2\bar{z}f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2} + \frac{2\overline{f(z)}f'(z)^2(1 - |z|^2)^2}{(1 - |f(z)|^2)^2};$$

$$\begin{aligned}
 D^3 f(z) &= \frac{f^{(3)}(z)(1-|z|^2)^3}{1-|f(z)|^2} - \frac{6\bar{z}f''(z)(1-|z|^2)^2}{1-|f(z)|^2} + \frac{6\bar{z}^2 f'(z)(1-|z|^2)}{1-|f(z)|^2} \\
 &+ \frac{6f''(z)f'(z)\overline{f(z)}(1-|z|^2)^3}{(1-|f(z)|^2)^2} + \frac{6\overline{f(z)}^2 f'(z)^3(1-|z|^2)^3}{(1-|f(z)|^2)^3} \\
 &- \frac{12\bar{z}f(z)(1-|z|^2)^2 f'(z)^2}{(1-|f(z)|^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Les dérivées $D^n f$ ont été introduites pour la première fois par E. Pechl [20] et sont habituellement connues sous le nom d'*invariants différentiels*. Cette terminologie s'explique par le fait qu'étant donnés deux automorphismes du disque unité, ϕ et ψ , on a

$$|D^n(\psi \circ f \circ \phi)(z)| = |D^n(f)(\phi(z))|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Il est possible d'obtenir des expressions pour $D^n f$ en termes de $f^{(n)}$ et de ses dérivées d'ordre inférieur, de même que des dérivées $D^1 f, \dots, D^{n-1} f$. Comme elles interviendront dans le calcul des dérivées hyperboliques, nous présentons un résultat qui traite de la façon de les calculer.

Proposition 3.2.5 ([15, Corollary 7.5]). *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, une fonction holomorphe. Alors*

$$D^n f = \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} \frac{(\bar{z})^{n-k}(1-|z|^2)^k f^{(k)}(z)}{1-|f(z)|^2} - \sum_{k=2}^n k! (-\overline{f(z)})^{k-1} A_{n,k}(D^1 f, \dots, D^{n-k+1} f),$$

où $A_{n,k}$ sont les polynômes de Bell donnés par

$$A_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) := \sum_{\substack{j_1+2j_2+\dots+nj_{n-k+1}=n \\ j_1+j_2+\dots+j_{n-k+1}=k}} \frac{n!}{j_1! \dots j_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{j_{n-k+1}}$$

et où

$$\alpha_{n,k} := \begin{cases} (-1)^{n-k} \frac{n!(n-1)!}{k!(k-1)!(n-k)!} & \text{si } 1 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La prochaine définition nous sera utile pour ce qui va suivre.

Définition 3.2.6. Soient $k > 1, z \in \mathbb{D}$ et $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j$. Posons

$$\Phi_1(\zeta, z) := -g(-\zeta) \text{ et } \Psi_1(\zeta, z) := \zeta.$$

où g est la fonction donnée en (3.12). Définissons $\Phi_k(\zeta, z)$ et $\Psi_k(\zeta, z)$ récursivement par

$$\begin{aligned}
 \Phi_k(\zeta, z) &:= H^{k-1} f(z) \Psi_{k-1}(\zeta, z) - \Phi_{k-1}(\zeta, z); \\
 \Psi_k(\zeta, z) &:= \zeta \left(\Psi_{k-1}(\zeta, z) - \overline{H^{k-1} f(z)} \Phi_{k-1}(\zeta, z) \right).
 \end{aligned}$$

Par construction, il est clair que pour chaque $z \in \mathbb{D}$, les quantités $\Phi_k(\zeta, z)$ et $\Psi_k(\zeta, z)$ sont des fonctions holomorphes dans \mathbb{D} par rapport à ζ . Nous imposons aussi la condition $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j$ afin d'éviter le cas dégénéré où la dérivée hyperbolique de la fonction est une constante unimodulaire.

Les deux lemmes qui suivent nous seront utiles dans l'élaboration d'une formule récursive pour les dérivées hyperboliques.

Lemme 3.2.7. *Soient $k \geq 1$, $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j$ et $z, \zeta \in \mathbb{D}$. Alors*

$$\Delta_z^k f([\zeta, z]) := \Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z) = \frac{\Phi_k(\zeta, z)}{\Psi_k(\zeta, z)}. \quad (3.13)$$

Démonstration. Nous allons démontrer (3.13) par induction sur k . Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_z^1 f([\zeta, z]) &= \frac{[f([\zeta, z]), f(z)]}{[[\zeta, z], z]} \\ &= \frac{-g(-\zeta)}{\zeta} \\ &= \frac{\Phi_1(\zeta, z)}{\Psi_1(\zeta, z)}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour k . Pour $k + 1$, il suit que

$$\begin{aligned} \Delta^{k+1} f([\zeta, z]; z, \dots, z) &= \frac{[\Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z), \Delta^k f(z; z, \dots, z)]}{[[\zeta, z], z]} \\ &= \frac{[\Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z), H^k f(z)]}{\zeta} \\ &= \frac{H^k f(z) - \Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z)}{\zeta \left(1 - \overline{H^k f(z)} \Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z)\right)} \\ &= \frac{H^k f(z) - \Phi_k(\zeta, z) / \Psi_k(\zeta, z)}{\zeta \left(1 - \overline{H^k f(z)} \Phi_k(\zeta, z) / \Psi_k(\zeta, z)\right)} \\ &= \frac{H^k f(z) \Psi_k(\zeta, z) - \Phi_k(\zeta, z)}{\zeta \left(\Psi_k(\zeta, z) - \overline{H^k f(z)} \Phi_k(\zeta, z)\right)} \\ &= \frac{\Phi_{k+1}(\zeta, z)}{\Psi_{k+1}(\zeta, z)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Lemme 3.2.8. Soient $k \geq 1$, $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{j=0}^{k-1} \mathcal{B}_j$ et $z, \zeta \in \mathbb{D}$. Alors

$$H^k f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_k(\zeta, z)}{\Psi_k(\zeta, z)}.$$

Démonstration. Par définition $H^k f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \Delta^k f(\zeta; z, \dots, z)$. Ceci est équivalent à $H^k f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta^k f([\zeta, z]; z, \dots, z)$. Il suffit ensuite d'appliquer le lemme 3.2.7. ■

Le prochain résultat présente la formule récursive permettant de calculer de manière plus simplifiée les dérivées hyperboliques. D'abord remarquons que par les définitions et ce qui précède, on a

$$H^1 f(z) = f^h(z) = D^1 f(z) = \frac{f'(z)(1 - |z|^2)}{1 - |f(z)|^2}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.14)$$

Théorème 3.2.9. Soient $n > 1$, $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{j=0}^{n-1} \mathcal{B}_j$ et $z \in \mathbb{D}$. Alors

$$H^n f(z) = \frac{H^{n-1} f(z) \Psi_{n-1}^{(n)}(0, z) - \Phi_{n-1}^{(n)}(0, z)}{n \left(\Psi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) - \overline{H^{n-1} f(z)} \Phi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) \right)}, \quad (3.15)$$

où $\Psi_{n-1}^{(n)}$ et $\Phi_{n-1}^{(n)}$ représentent la n -ième dérivée par rapport à ζ .

Démonstration. Par le lemme 3.2.8, on a

$$H^n f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_n(\zeta, z)}{\Psi_n(\zeta, z)}. \quad (3.16)$$

Pour évaluer la limite en (3.16), nous allons appliquer la règle de L'Hôpital n fois. Mais avant, nous devons prouver que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_n^{(j)}(\zeta, z) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1; \quad (3.17)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_n^{(j)}(\zeta, z) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1; \quad (3.18)$$

et

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_n^{(n)}(\zeta, z) \neq 0. \quad (3.19)$$

Nous allons utiliser l'induction sur n pour démontrer (3.15), (3.17), (3.18) et (3.19).

Pour $n = 2$, il suit de (3.12) et (3.14) que

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_2(\zeta, z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_2^{(1)}(\zeta, z) = 0; \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_2(\zeta, z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_2^{(1)}(\zeta, z) = 0; \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_2^{(2)}(\zeta, z) &= 2 - 2|H^1 f(z)|^2 \neq 0,\end{aligned}$$

puisque $f \notin \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$.

Supposons que (3.15), (3.17), (3.18) et (3.19) sont vraies pour n . Nous allons montrer que ceci est également le cas pour $n + 1$. Nous allons d'abord prouver pour $j = 0, \dots, n$ que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_{n+1}^{(j)}(\zeta, z) = 0$. Par la définition et l'hypothèse d'induction, il suit, pour $j = 0, \dots, n - 1$, que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_{n+1}^{(j)}(\zeta, z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} [H^n f(z) \Psi_n^{(j)}(\zeta, z) - \Phi_n^{(j)}(\zeta, z)] = 0.$$

Montrons maintenant que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_{n+1}^{(n)}(\zeta, z) = 0$. On a, en appliquant la règle de Leibniz,

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Phi_{n+1}^{(n)}(\zeta, z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} [H^n f(z) \Psi_n^{(n)}(\zeta, z) - \Phi_n^{(n)}(\zeta, z)] \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[H^n f(z) \left(\zeta \Psi_{n-1}(\zeta, z) - \zeta \overline{H^{n-1} f(z)} \Phi_{n-1}(\zeta, z) \right)^{(n)} \right. \\ &\quad \left. - (H^{n-1} f(z) \Psi_{n-1}(\zeta, z) - \Phi_{n-1}(\zeta, z))^{(n)} \right] \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[H^n f(z) \left\{ \zeta \Psi_{n-1}^{(n)}(\zeta, z) + n \Psi_{n-1}^{(n-1)}(\zeta, z) - \overline{H^{n-1} f(z)} \left(\zeta \Phi_{n-1}^{(n)}(\zeta, z) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n \Phi_{n-1}^{(n-1)}(\zeta, z) \right) \right\} - \left(H^{n-1} f(z) \Psi_{n-1}^{(n)}(\zeta, z) - \Phi_{n-1}^{(n)}(\zeta, z) \right) \right] \\ &= n H^n f(z) \Psi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) - n H^n f(z) \overline{H^{n-1} f(z)} \Phi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) \\ &\quad - H^{n-1} f(z) \Psi_{n-1}^{(n)}(0, z) + \Phi_{n-1}^{(n)}(0, z) \\ &= H^n f(z) \left[n \Psi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) - n \overline{H^{n-1} f(z)} \Phi_{n-1}^{(n-1)}(0, z) \right] \\ &\quad - H^{n-1} f(z) \Psi_{n-1}^{(n)}(0, z) + \Phi_{n-1}^{(n)}(0, z) \\ &= 0,\end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de l'hypothèse d'induction et de (3.15).

Démontrons maintenant que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(j)}(\zeta, z) = 0$, pour $j = 0, \dots, n$. Par la définition, on obtient

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(j)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\zeta \Psi_n(\zeta, z) - \overline{H^n f(z)} \zeta \Phi_n(\zeta, z) \right]^{(j)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[(\zeta \Psi_n(\zeta, z))^{(j)} - \overline{H^n f(z)} (\zeta \Phi_n(\zeta, z))^{(j)} \right].\end{aligned}$$

Si $j = 0$, alors il est clair que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}(\zeta, z) = 0$. Pour $j \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(j)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\zeta \Psi_n^{(j)}(\zeta, z) + j \Psi_n^{(j-1)}(\zeta, z) \right. \\ &\quad \left. - \overline{H^n f(z)} (\zeta \Phi_n^{(j)}(\zeta, z) + j \Phi_n^{(j-1)}(\zeta, z)) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

par l'hypothèse d'induction.

Il nous reste maintenant à montrer que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z) \neq 0$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[(\zeta \Psi_n(\zeta, z))^{(n+1)} - \overline{H^n f(z)} (\zeta \Phi_n(\zeta, z))^{(n+1)} \right] \\ &= n \Psi_n^{(n)}(0, z) - n \overline{H^n f(z)} \Phi_n^{(n)}(0, z). \end{aligned}$$

Supposons que $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z) = 0$. Ceci signifie que

$$\Psi_n^{(n)}(0, z) = \overline{H^n f(z)} \Phi_n^{(n)}(0, z).$$

Par l'hypothèse d'induction $\Psi_n^{(n)}(0, z) \neq 0$. Ainsi,

$$\overline{H^n f(z)} \frac{\Phi_n^{(n)}(0, z)}{\Psi_n^{(n)}(0, z)} = 1. \quad (3.20)$$

Aussi, par le lemme 3.2.8, on a

$$H^n f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_n(\zeta, z)}{\Psi_n(\zeta, z)}.$$

En utilisant l'hypothèse d'induction et la règle de L'Hôpital, appliquée n fois, on obtient

$$H^n f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_n^{(n)}(\zeta, z)}{\Psi_n^{(n)}(\zeta, z)} = \frac{\Phi_n^{(n)}(0, z)}{\Psi_n^{(n)}(0, z)}. \quad (3.21)$$

Il suit de (3.20) et (3.21) que $|H^n f(z)| = 1$, ce qui est une contradiction avec les hypothèses, puisque $f \notin \cup_{j=0}^n \mathcal{B}_j$. Par conséquent, $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Psi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z) \neq 0$.

Finalement, nous devons démontrer que

$$H^{n+1} f(z) = \frac{H^n f(z) \Psi_n^{(n+1)}(0, z) - \Phi_n^{(n+1)}(0, z)}{(n+1)(\Psi_n^{(n)}(0, z) - \overline{H^n f(z)} \Phi_n^{(n)}(0, z))}. \quad (3.22)$$

Par le lemme 3.2.8, on a

$$H^{n+1} f(z) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_{n+1}(\zeta, z)}{\Psi_{n+1}(\zeta, z)}.$$

D'après ce qui précède, on peut appliquer la règle de L'Hôpital $(n+1)$ fois et on obtient dans ce cas

$$\begin{aligned} H^{n+1}f(z) &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\Phi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z)}{\Psi_{n+1}^{(n+1)}(\zeta, z)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{H^n f(z) \Psi_n^{(n+1)}(\zeta, z) - \Phi_n^{(n+1)}(\zeta, z)}{(\zeta \Psi_n(\zeta, z))^{(n+1)} - \overline{H^n f(z)} (\zeta \Phi_n(\zeta, z))^{(n+1)}}. \end{aligned}$$

L'évaluation de la limite précédente nous donne exactement (3.22). ■

En utilisant la formule récursive (3.15), il est maintenant aisé de donner une forme explicite des dérivées hyperboliques. Le corollaire suivant présente les premières dérivées.

Corollaire 3.2.10. *Soit $z \in \mathbb{D}$.*

(i) *Si $f \in \mathcal{H}$, alors*

$$H^1 f(z) = D^1 f(z);$$

(ii) *Si $f \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{B}_1$, alors*

$$H^2 f(z) = \frac{D^2 f(z)}{2(1 - |H^1 f(z)|^2)};$$

(iii) *Si $f \in \mathcal{H} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, alors*

$$H^3 f(z) = \frac{-3\overline{H^1 f(z)} H^2 f(z) D^2 f(z) + D^3 f(z)}{6 - 6|H^1 f(z)|^2 + 3\overline{H^2 f(z)} D^2 f(z)};$$

(iv) *Si $f \in \mathcal{H} \setminus (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3)$, alors*

$$\begin{aligned} H^4 f(z) &= \\ &= \frac{12\overline{H^1 f(z)} H^3 f(z) D^2 f(z) + 4\overline{H^2 f(z)} H^3 f(z) D^3 f(z) + 4\overline{H^1 f(z)} H^2 f(z) D^3 f(z) + D^4 f(z)}{24 - 24|H^1 f(z)|^2 - 12\overline{H^2 f(z)} D^2 f(z) - 12\overline{H^1 f(z)} H^3 f(z) H^2 f(z) D^2 f(z) - 4\overline{H^3 f(z)} D^3 f(z)}. \end{aligned}$$

Démonstration. (i) Le résultat a déjà été démontré.

Afin de démontrer (ii), (iii) et (iv), nous allons calculer $\Phi_k(\zeta, z)$ et $\Psi_k(\zeta, z)$, pour

$k = 1, 2, 3$. On obtient

$$\begin{aligned}\Phi_1(\zeta, z) &= -g(-\zeta); \\ \Psi_1(\zeta, z) &= \zeta; \\ \Phi_2(\zeta, z) &= H^1 f(z)\zeta + g(-\zeta); \\ \Psi_2(\zeta, z) &= \zeta^2 + \overline{H^1 f(z)}\zeta g(-\zeta); \\ \Phi_3(\zeta, z) &= H^2 f(z)\zeta^2 + H^2 f(z)\overline{H^1 f(z)}\zeta g(-\zeta) - H^1 f(z)\zeta - g(-\zeta); \\ \Psi_3(\zeta, z) &= \zeta^3 + \overline{H^1 f(z)}\zeta^2 g(-\zeta) - \overline{H^2 f(z)}H^1 f(z)\zeta^2 - \overline{H^2 f(z)}\zeta g(-\zeta).\end{aligned}$$

(ii) D'après le théorème 3.2.9, on a

$$H^2 f(z) = \frac{H^1 f(z)\Psi_1^{(2)}(0, z) - \Phi_1^{(2)}(0, z)}{2 \left(\Psi_1^{(1)}(0, z) - \overline{H^1 f(z)}\Phi_1^{(1)}(0, z) \right)}.$$

Les dérivées d'ordre un et deux de $\Phi_1(\zeta, z)$ et $\Psi_1(\zeta, z)$ sont

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(\zeta, z) &= g^{(1)}(-\zeta); \\ \Phi_1^{(2)}(\zeta, z) &= -g^{(2)}(-\zeta); \\ \Psi_1^{(1)}(\zeta, z) &= 1; \\ \Psi_1^{(2)}(\zeta, z) &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$H^2 f(z) = \frac{D^2 f(z)}{2(1 - |H^1 f(z)|^2)}.$$

(iii) D'après le théorème 3.2.9, on a

$$H^3 f(z) = \frac{H^2 f(z)\Psi_2^{(3)}(0, z) - \Phi_2^{(3)}(0, z)}{3 \left(\Psi_2^{(2)}(0, z) - \overline{H^2 f(z)}\Phi_2^{(2)}(0, z) \right)}.$$

En calculant les dérivées d'ordre deux et trois de $\Phi_2(\zeta, z)$ et $\Psi_2(\zeta, z)$, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_2^{(2)}(\zeta, z) &= g^{(2)}(-\zeta); \\ \Phi_2^{(3)}(\zeta, z) &= -g^{(3)}(-\zeta); \\ \Psi_2^{(2)}(\zeta, z) &= 2 - 2\overline{H^1 f(z)}g^{(1)}(-\zeta) + \overline{H^1 f(z)}\zeta g^{(2)}(-\zeta); \\ \Psi_2^{(3)}(\zeta, z) &= 3\overline{H^1 f(z)}g^{(2)}(-\zeta) - \overline{H^1 f(z)}\zeta g^{(3)}(-\zeta).\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$H^3 f(z) = \frac{3H^2 f(z)\overline{H^1 f(z)}D^2 f(z) + D^3 f(z)}{3 \left(2 - 2|H^1 f(z)|^2 - \overline{H^2 f(z)}D^2 f(z) \right)}.$$

(iv) D'après le théorème 3.2.9, on a

$$H^4 f(z) = \frac{H^3 f(z) \Psi_3^{(4)}(0, z) - \Phi_3^{(4)}(0, z)}{4 \left(\Psi_3^{(3)}(0, z) - \overline{H^3 f(z)} \Phi_3^{(3)}(0, z) \right)}.$$

Les dérivées dans ce cas sont

$$\Phi_3^{(3)}(\zeta, z) = -H^2 f(z) \overline{H^1 f(z)} \zeta g^{(3)}(-\zeta) + 3H^2 f(z) \overline{H^1 f(z)} g^{(2)}(-\zeta) + g^{(3)}(-\zeta);$$

$$\Phi_3^{(4)}(\zeta, z) = H^2 f(z) \overline{H^1 f(z)} \zeta g^{(4)}(-\zeta) - 4H^2 f(z) \overline{H^1 f(z)} g^{(3)}(-\zeta) - g^{(4)}(-\zeta);$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(3)}(\zeta, z) &= 6 - \overline{H^1 f(z)} \zeta^2 g^{(3)}(-\zeta) + 6\overline{H^1 f(z)} \zeta g^{(2)}(-\zeta) - 6\overline{H^1 f(z)} g^{(1)}(-\zeta) \\ &\quad + \overline{H^2 f(z)} \zeta g^{(3)}(-\zeta) - 3\overline{H^2 f(z)} g^{(2)}(-\zeta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3^{(4)}(\zeta, z) &= \overline{H^1 f(z)} \zeta^2 g^{(4)}(-\zeta) - 8\overline{H^1 f(z)} \zeta g^{(3)}(-\zeta) + 12\overline{H^1 f(z)} g^{(2)}(-\zeta) \\ &\quad - \overline{H^2 f(z)} \zeta g^{(4)}(-\zeta) + 4\overline{H^2 f(z)} g^{(3)}(-\zeta). \end{aligned}$$

Finalement, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} H^4 f(z) &= \\ &= \frac{12\overline{H^1 f(z)} H^3 f(z) D^2 f(z) + 4\overline{H^2 f(z)} H^3 f(z) D^3 f(z) + 4\overline{H^1 f(z)} H^2 f(z) D^3 f(z) + D^4 f(z)}{24 - 24|H^1 f(z)|^2 - 12\overline{H^2 f(z)} D^2 f(z) - 12\overline{H^1 f(z)} H^3 f(z) \overline{H^2 f(z)} D^2 f(z) - 4\overline{H^3 f(z)} D^3 f(z)}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Interpolation généralisée

Au chapitre 2, nous avons présenté un problème d'interpolation où des valeurs sont prescrites en chaque point considéré. Une généralisation naturelle est de considérer à la fois les valeurs prescrites en chacun des points en plus de leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Il s'agit de ce qu'on nomme un problème d'*interpolation généralisée*. Nous verrons que ce type d'interpolation a un sens dans le contexte des dérivées hyperboliques.

4.1 Problème d'interpolation d'Hermite

Nous allons d'abord commencer par un rappel de l'interpolation généralisée dans le cas des dérivées classiques. Il s'agit de ce qu'on appelle communément le *problème d'interpolation d'Hermite* ou quelquefois le *problème d'interpolation du polynôme osculateur*. En voici l'énoncé.

Soient $m \geq 0$, $n \geq 0$ des entiers et $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tels que $k_0 + k_1 + \dots + k_n = m + 1$. Étant donnés $n + 1$ points distincts $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ possédant les dérivées $f^{(k_i-1)}(z_i)$ pour $i = 0, \dots, n$ alors le problème d'interpolation d'Hermite est la recherche d'un polynôme P de plus petit degré de telle sorte que

$$P^{(j)}(z_i) = f^{(j)}(z_i), \quad i = 0, \dots, n \text{ et } j = 0, \dots, k_i - 1.$$

L'existence d'une solution au problème d'interpolation d'Hermite est caractérisée par le résultat suivant ([9],[13]).

Théorème 4.1.1. Soient $m \geq 0$, $n \geq 0$ des entiers et $k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ tels que $k_0 + k_1 + \dots + k_n = m + 1$. Étant donnés $n + 1$ points distincts $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et une

fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ possédant les dérivées $f^{(k_i-1)}(z_i)$ pour $i = 0, \dots, n$. Alors, il existe un unique polynôme P de degré au plus m tel que

$$P^{(j)}(z_i) = f^{(j)}(z_i), \quad i = 0, \dots, n \text{ et } j = 0, \dots, k_i - 1.$$

C. Hermite fut le premier à le démontrer en 1878 [12].

Il est possible de construire l'unique polynôme cité au théorème 4.1.1 en adaptant la méthode d'interpolation de Newton. Voici de quelle manière.

Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, définissons une nouvelle séquence de points w_0, w_1, \dots, w_m par

$$\begin{aligned} w_0 &:= w_1 := \dots := w_{k_0-1} := z_0; \\ w_{k_0} &:= w_{k_0+1} := \dots := w_{k_0+k_1-1} := z_1; \\ &\vdots \\ w_{k_0+k_1+\dots+k_{n-1}+1} &:= \dots := w_{k_0+k_1+\dots+k_n-1} := z_n. \end{aligned}$$

L'idée est donc essentiellement de définir les points en répétant z_i un nombre judicieux de fois :

$$\underbrace{z_0, \dots, z_0}_{k_0 \text{ fois}}, \underbrace{z_1, \dots, z_1}_{k_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{z_n, \dots, z_n}_{k_n \text{ fois}}.$$

Il suffit ensuite de construire le tableau des différences divisées en utilisant les points w_0, w_1, \dots, w_m . Pour les différences divisées qui ne peuvent être calculées par la relation (2.3), c'est-à-dire dans le cas où tous les z_i sont égaux, on les substitue par

$$f[\underbrace{z_i, z_i, \dots, z_i}_{r+1 \text{ fois}}] = \frac{f^{(r)}(z_i)}{r!}.$$

Les autres différences divisées se calculent de façon usuelle. Pour illustrer ceci, nous allons considérer l'exemple particulier où $n = 2$, $k_0 = 2$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 3$. Le tableau 4.1 représente les différences divisées dans ce nouveau contexte.

Finalement, on obtient le polynôme interpolant en utilisant la formule de Newton (2.5) et on trouve

$$\begin{aligned} P(z) &= f(z_0) + f[w_0, w_1](z - w_0) + f[w_0, w_1, w_2](z - w_0)(z - w_1) \\ &\quad + f[w_0, w_1, w_2, w_3](z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) + \dots \\ &\quad + f[w_0, w_1, \dots, w_m](z - w_0)(z - w_1) \dots (z - w_{m-1})(z - w_m). \end{aligned}$$

| z | $f(z)$ | Ordre un | Ordre deux | Ordre trois | Ordre quatre | Ordre cinq |
|-------------|-------------------|-------------------------|--|----------------------|----------------------|----------------------|
| $w_0 = z_0$ | $f[w_0] = f(z_0)$ | $f[w_0, w_1] = f'(z_0)$ | $f[w_0, w_1, w_2]$ | $f[w_0, \dots, w_3]$ | | |
| $w_1 = z_0$ | $f[w_1] = f(z_0)$ | $f[w_1, w_2]$ | $f[w_1, w_2, w_3]$ | $f[w_1, \dots, w_4]$ | $f[w_0, \dots, w_4]$ | $f[w_0, \dots, w_5]$ |
| $w_2 = z_1$ | $f[w_2] = f(z_1)$ | $f[w_2, w_3]$ | $f[w_2, w_3, w_4]$ | $f[w_2, \dots, w_5]$ | $f[w_1, \dots, w_5]$ | |
| $w_3 = z_2$ | $f[w_3] = f(z_2)$ | $f[w_3, w_4] = f'(z_2)$ | $f[w_3, w_4, w_5] = \frac{f''(z_2)}{2!}$ | | | |
| $w_4 = z_2$ | $f[w_4] = f(z_2)$ | $f[w_4, w_5] = f'(z_2)$ | | | | |
| $w_5 = z_2$ | $f[w_5] = f(z_2)$ | | | | | |

TABLEAU 4.1 – Tableau des différences divisées dans le cas du problème d'interpolation d'Hermite.

4.2 Problème d'interpolation avec les dérivées hyperboliques

Le problème d'Hermite, qui se résume à un problème d'interpolation polynomiale, possède son équivalent dans le disque unité pour les fonctions appartenant à la classe de Schur. Il s'agit du *problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes* [7] et qui s'énonce comme suit.

Étant donnés $n \in \mathbb{N}$, des points distincts $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$, des nombres $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ et $\omega_{js} \in \mathbb{C}$, où $s = 0, 1, \dots, l_j - 1$ et $j = 1, 2, \dots, n$, déterminer des conditions suffisantes et nécessaires à l'existence d'une fonction $g \in \mathcal{S}$ telle que

$$\frac{g^{(s)}(z_j)}{s!} = \omega_{sj}, \quad s = 0, 1, \dots, l_j - 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

Il s'agit donc d'un problème d'interpolation généralisée dans lequel les dérivées sont prescrites jusqu'à un certain ordre en chaque point et pas seulement les valeurs de la fonction elle-même, comme dans le cas du problème classique de Nevanlinna–Pick.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'équivalent de ce problème mais en termes des dérivées hyperboliques. Ainsi, le problème est relativement le même, dans le sens où l'on s'intéresse à l'existence d'une fonction de Schur qui interpole les points vers leur image respective en plus des dérivées hyperboliques aux points considérés. Nous verrons qu'il y a une grande similitude pour la construction d'une solution dans le cas présent et celle du problème d'Hermite. En effet, nous avons donné dans la section précédente une méthode pour construire une solution au problème d'Hermite, à partir du tableau des différences divisées. Le tableau utilisé était le même que celui provenant de la méthode de Newton, mais adapté pour y faire apparaître les dérivées classiques.

Aussi, au chapitre précédent, nous avons vu comment il était possible d'écrire les différences divisées hyperboliques à un paramètre sous forme d'un tableau dans lequel les dérivées hyperboliques apparaissent naturellement. Nous rappelons ici le tableau ainsi obtenu. Pour $z \in \mathbb{D}$ et pour $f \in \mathcal{S}$ telle que les différences hyperboliques divisées sont différentes d'une constante unimodulaire, on obtient le tableau 4.2

En comparant les tableaux 4.1 et 4.2, on remarque une ressemblance, dans le sens où pour faire apparaître les dérivées soit classiques, soit hyperboliques, il a suffi de répéter de manière adéquate le bon nombre de points dans le premier cas et le paramètre dans le second.

| | Ordre un | Ordre deux | Ordre trois |
|---------|------------------------|--|--|
| z | $f(z)$ | | |
| | $H^1 f(z)$ | | |
| z | $f(z)$ | $H^2 f(z)$ | |
| | $H^1 f(z)$ | | $\Delta_z^3 f(\zeta) = \frac{[\Delta_z^2 f(\zeta), H^2 f(z)]}{[\zeta, z]}$ |
| z | $f(z)$ | $\Delta_z^2 f(\zeta) = \frac{[\Delta_z^1 f(\zeta), H^1 f(z)]}{[\zeta, z]}$ | |
| | $\Delta^1 f(\zeta; z)$ | | |
| ζ | $f(\zeta)$ | | |

TABLEAU 4.2 – Tableau des différences divisées hyperboliques incluant les dérivées hyperboliques.

Le tableau 4.2 nous montre l'une des limites imposées par la définition que nous avons donnée des différences divisées hyperboliques. En effet, nous pouvons seulement considérer les dérivées hyperboliques par rapport à un point et ceci est dû essentiellement au fait que nous faisons toujours les calculs pas rapport à la première entrée de chaque colonne, que nous avons nommée l'*entrée principale*. Cela empêche donc l'apparition des dérivées d'ordre supérieur pour d'autres points. Il aurait fallu définir les différences divisées hyperboliques comme dans le cas classique, mais il a été démontré au chapitre 2 que ceci entraînerait une perte considérable de propriétés intéressantes. En raison de ce que nous venons de mentionner, nous allons donc nous intéresser au problème d'interpolation suivant.

Soient k, m des entiers tels que $k \geq 1, m \geq 1$ et étant donnés des points distincts $z, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{D}$ et des points $w, v_1, \dots, v_m, \mu_1, \dots, \mu_k \in \overline{\mathbb{D}}$, on veut déterminer une fonction $f \in \mathcal{S}$ satisfaisant

$$f(u_i) = v_i, f(z) = w, H^j f(z) = \mu_j, \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, k. \quad (4.1)$$

Nous allons maintenant donner une nouvelle interprétation des différences divisées hyperboliques afin d'y inclure les dérivées hyperboliques. En se basant sur la définition 2.2.10, pour $k \geq 1$ et $m \geq 1$, nous allons considérer le cas spécifique où $n = k + 1 + m$ et

$$\begin{aligned} z_1 = z_2 = \dots = z_{k+1} = z, z_{k+2} = u_1, z_{k+3} = u_2, \dots, z_n = u_m \\ w_1 = w_2 = \dots = w_{k+1} = w, w_{k+2} = v_1, w_{k+3} = v_2, \dots, w_n = v_m. \end{aligned}$$

Étant donnés les points $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \overline{\mathbb{D}}$, on définit

$$\Delta_i^j := \mu_j, \quad 1 \leq j \leq k, j + 1 \leq i \leq k + 1. \quad (4.2)$$

Pour les autres différences divisées hyperboliques, la définition reste la même que celle donnée à la définition 2.2.10 par (2.16), (2.17) ou (2.18). On obtient ainsi le tableau 4.3.

Le prochain lemme caractérise le tableau des différences divisées hyperboliques dans cette situation particulière.

Lemme 4.2.1. *Soient $k \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers. Soient $z, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w, v_1, \dots, v_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \overline{\mathbb{D}}$.*

- (i) *S'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\Delta_i^l = \infty$ pour un i tel que $k+2 \leq i \leq k+1+m$, alors pour tout $l+1 \leq j \leq k+m$, il existe un entier i tel que $k+2 \leq i \leq k+1+m$ et $\Delta_i^j = \infty$.*
- (ii) *S'il existe un entier $l \geq 1$ et un nombre λ avec $|\lambda| = 1$ tel que $\Delta_i^l = \lambda$ pour un i tel que $k+2 \leq i \leq k+1+m$, alors ou bien $\Delta_i^j = \lambda$ pour tout $l+1 \leq j \leq k+m$ et pour tout $k+2 \leq i \leq k+1+m$, ou bien pour tout $l+1 \leq j \leq k+m$, il existe un entier i tel que $k+2 \leq i \leq k+1+m$ et $\Delta_i^j = \infty$.*

Démonstration. (i) Si la l -ième colonne du tableau contient une entrée qui est l'infini, alors par construction des différences divisées hyperboliques Δ_i^j , avec $l+1 \leq j \leq k+m$ et $k+2 \leq i \leq k+1+m$, il suit que toutes les colonnes subséquentes contiennent aussi une entrée qui est l'infini.

- (ii) Soit $\Delta_i^l = \lambda$, avec $|\lambda| = 1$ pour $1 \leq l \leq k+m$ et $k+2 \leq i \leq k+1+m$. Supposons que $\mu_l \neq \lambda$. Alors, ou bien $|\Delta_i^l, \mu_l| = 1$, ou bien $[\Delta_i^l, \mu_l] = \infty$. Ceci implique que ni la condition (2.16) ni la condition (2.17) n'est satisfaite. Ainsi, $\Delta_i^{l+1} = \infty$. En appliquant (i), le résultat suit. Supposons maintenant que $\mu_l = \lambda$. Le même argument montre que ou bien $\Delta_i^j = \lambda$ pour tout $l+1 \leq j \leq k+m$ et pour tout $k+2 \leq i \leq k+1+m$, ou bien il existe un i avec $\Delta_i^{l+1} = \infty$.

■

On peut résumer le lemme 4.2.1 comme suit : si une colonne contient une entrée infinie, alors les colonnes subséquentes en contiennent toutes une. De même que si une colonne contient une constante unimodulaire λ , alors ou bien toutes les entrées des colonnes subséquentes sont égales à λ , ou bien chacune des colonnes suivantes possède une entrée infinie.

Étant donnée une fonction analytique $f \in \mathcal{S}$ satisfaisant (4.1), nous allons maintenant montrer que le tableau des différences divisées hyperboliques est compatible avec la définition de $\Delta_i^j f(u_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Lemme 4.2.2. Soient $k \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers. Soient $z, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{D}$ des points distincts et $f \in \mathcal{S}$ telle que $f(z) = w, f(u_i) = v_i$ pour $i = 1, \dots, m$. Supposons que $H^j f(z) = \mu_j, j = 1, \dots, k$. Alors

$$\Delta_z^j f(u_i) = \Delta_{k+1+i}^j, \quad 1 \leq j \leq k+m, 1 \leq i \leq m. \quad (4.3)$$

Démonstration. Nous allons démontrer le résultat pour $j = 1$. Pour un quelconque $1 \leq i \leq m$, si $|f(\zeta)| < 1$ pour tout $\zeta \in \mathbb{D}$, on a

$$\Delta_z^1 f(u_i) = \frac{[f(u_i), f(z)]}{[u_i, z]} = \frac{[v_i, w]}{[u_i, z]} = \Delta_{k+1+i}^1.$$

Si $f(\zeta) \equiv \lambda, \zeta \in \mathbb{D}$, où λ est une constante unimodulaire, alors

$$\Delta_z^1 f(u_i) = \lambda = \Delta_{k+1+i}^1.$$

Supposons que le résultat est vrai pour j . Si f est un produit de Blaschke de degré au plus j , alors $\Delta_z^j f \equiv \lambda$ et $\mu_j = \lambda$, où $|\lambda| = 1$. Par conséquent $\Delta_z^{j+1} f \equiv \lambda$. Par la définition 2.2.4, on a que $\Delta_{k+1+i}^{j+1} = \lambda$. Ainsi, $\Delta_z^{j+1} f(u_i) = \Delta_{k+1+i}^{j+1}$ dans ce cas. Supposons maintenant que f n'est pas un produit de Blaschke de degré au plus j . Alors $f \in \mathcal{H}$. Par le théorème 3.1.5, il suit que

$$\begin{aligned} |[\Delta_{k+1+i}^j, \mu_j]| &= |[\Delta_z^j f(u_i), \Delta_z^j f(z)]| \\ &\leq |[u_i, z]|. \end{aligned}$$

Ainsi Δ_{k+1+i}^{j+1} est définie par l'expression donnée par (2.16), qui coïncide avec la définition de $\Delta_z^{j+1} f(u_i)$. Comme nous avons choisi i de façon arbitraire, le résultat est vrai pour tout $1 \leq i \leq m$. ■

Le théorème suivant apporte une solution complète au problème d'interpolation (4.1) en caractérisant le cas d'existence d'une solution. De plus, on retrouve dans la preuve, lorsqu'il y a lieu, une méthode pour la construire.

Théorème 4.2.3. Soient $k \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers. Soient $z, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w, v_1, \dots, v_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \overline{\mathbb{D}}$. Le problème (4.1) possède

- (i) une infinité de solutions si et seulement si $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| < 1$;
- (ii) une solution unique, qui est un produit de Blaschke de degré strictement inférieur à $k+1+m$, si et seulement si $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| = 1$;
- (iii) aucune solution si et seulement si $\Delta_{k+1+m}^{k+m} = \infty$.

Démonstration. Pour construire le tableau des différences divisées hyperboliques dans ce cas, posons $z_i := z$ et $w_i := w$ pour $1 \leq i \leq k+1$, $z_i := u_{i-k-1}$ et $w_i := v_{i-k-1}$ pour $k+2 \leq i \leq k+1+m$. Les différences divisées hyperboliques sont définies en utilisant (4.2), (2.16), (2.17) et (2.18). Ainsi, on obtient le tableau 4.3.

(i) Supposons que $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| < 1$. Par le lemme 4.2.1, il suit que

$$|\Delta_i^j| < 1, \quad 1 \leq j \leq k+m, \quad k+2 \leq i \leq k+1+m. \quad (4.4)$$

Nous allons montrer qu'il existe une infinité de solutions au problème. Pour ce faire, nous construirons les fonctions satisfaisant (4.1).

Posons $f_0 := g$, pour $g \in \mathcal{S}$ quelconque et définissons les fonctions f_1, \dots, f_{k+1+m} par

$$f_{j+1}(\zeta) := [[\zeta, z_{k+1+m-j}] \cdot f_j(\zeta), \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}], \quad 0 \leq j \leq k+m.$$

Les inégalités (4.4) impliquent que les fonctions f_j appartiennent à \mathcal{S} , $1 \leq j \leq k+1+m$. Nous allons débiter en montrant par induction sur j que

$$f_j(z_i) = \Delta_i^{k+1+m-j}, \quad k+1+m-j+1 \leq i \leq k+1+m.$$

Pour $j = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} f_1(z_{k+1+m}) &= [[z_{k+1+m}, z_{k+1+m}] \cdot g(\zeta), \Delta_{k+1+m}^{k+m}] \\ &= \Delta_{k+1+m}^{k+m}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour j et pour $i = k+m+1-j+1, \dots, k+1+m$. Pour $j+1$, nous obtenons pour z_i tel que $z_i \neq z_{k+m+1-j}$

$$\begin{aligned} f_{j+1}(z_i) &= [[z_i, z_{k+m+1-j}] \cdot f_j(z_i), \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}], \\ &= \left[[z_i, z_{k+1+m-j}] \cdot \Delta_i^{k+1+m-j}, \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j} \right] \\ &= \left[[z_i, z_{k+1+m-j}] \cdot \frac{[\Delta_i^{k+m-j}, \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}]}{[z_i, z_{k+1+m-j}]}, \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j} \right] \\ &= \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}. \end{aligned}$$

Pour z_i tel que $z_i = z_{k+m+1-j}$, on a

$$\begin{aligned} f_{j+1}(z_i) &= [[z_i, z_i] \cdot f_j(z_i), \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}], \\ &= \left[0 \cdot \Delta_i^{k+1+m-j}, \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j} \right] \\ &= \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}. \end{aligned}$$

Pour $j = k + m$, il suit que $f_{k+1+m}(z_i) = \Delta_i^0$ pour $i = 1, \dots, k + m + 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_{k+1+m}(z) &= w; \\ f_{k+1+m}(u_i) &= v_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que $H^j f_{k+1+m}(z) = \mu_j$, pour $1 \leq j \leq k$. Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que $\Delta_z^j f_{k+1+m}(\zeta) = f_{k+1+m-j}(\zeta)$, pour $\zeta \in \mathbb{D}$. Nous allons également utiliser l'induction dans ce cas. Pour $j = 1$, on a

$$\begin{aligned} \Delta_z^1 f_{k+1+m}(\zeta) &= \frac{[f_{k+1+m}(\zeta), f_{k+1+m}(z)]}{[\zeta, z]} \\ &= \frac{[[[\zeta, z] \cdot f_{k+m}(\zeta), w], w]}{[\zeta, z]} \\ &= f_{k+m}(\zeta). \end{aligned}$$

En particulier, $H^1 f_{k+1+m}(z) = \Delta_z^1 f_{k+1+m}(z) = f_{k+m}(z)$. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour j , c'est-à-dire $\Delta_z^j f_{k+1+m}(\zeta) = f_{k+1+m-j}(\zeta)$ et entre autres $H^j f_{k+1+m}(z) = f_{k+1+m-j}(z) = \Delta_z^j f_{k+1+m}(z)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta_z^{j+1} f_{k+1+m}(\zeta) &= \frac{[\Delta_z^j f_{k+1+m}(\zeta), \Delta_z^j f_{k+1+m}(z)]}{[\zeta, z]} \\ &= \frac{[f_{k+1+m-j}(\zeta), f_{k+1+m-j}(z)]}{[\zeta, z]} \\ &= \frac{[[[\zeta, z] \cdot f_{k+m-j}(\zeta), \mu_j], [[z, z] \cdot f_{k+m-j}(z), \mu_j]]}{[\zeta, z]} \\ &= f_{k+m-j}(\zeta). \end{aligned}$$

Finalement, pour $1 \leq j \leq k$, on a

$$\begin{aligned} f_{k+1+m-j}(z) &= [[z, z] \cdot f_{k+m-j}(z), \mu_j] \\ &= \mu_j, \end{aligned}$$

et conséquemment, $H^j f_{k+1+m}(z) = \mu_j$, pour $1 \leq j \leq k$. Ceci implique que la fonction f_{k+1+m} résout le problème d'interpolation.

- (ii) Supposons maintenant que $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| = 1$. Il suit du lemme 4.2.1 qu'il existe une constante unimodulaire λ , $|\lambda| = 1$ et un entier l , $1 \leq l \leq k + m$, tels que

$$\begin{aligned} |\Delta_i^j| &< 1, \quad 1 \leq j \leq l - 1, \quad k + 2 \leq i \leq k + 1 + m; \\ \Delta_i^j &= \lambda, \quad l \leq j \leq k + m, \quad k + 2 \leq i \leq k + 1 + m. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Comme précédemment, nous allons construire la fonction interpolante qui est une solution unique au problème en sachant que (4.5) est satisfaite. S'il existe une

solution $f \in \mathcal{S}$, alors $|\Delta_z^l f(z)| = |\mu_l| = |\lambda| = 1$, pour $l \leq k$. Par le principe du maximum $\Delta_z^l f$ est une constante unimodulaire. Par le théorème 3.1.4 il suit que f est un produit de Blaschke de degré au plus l . Si f est un produit de Blaschke de degré strictement plus petit que l , alors $|\Delta_z^{l-1} f(z)| = |\Delta_l^{l-1}| = 1$, une contradiction. Ainsi, s'il existe une solution, cette dernière est nécessairement un produit de Blaschke de degré l . Soit $B_{k+1+m-l}(\zeta) = \lambda$, un produit de Blaschke de degré zéro. Définissons

$$B_{j+1}(\zeta) := [[\zeta, z_{k+1+m-j}] \cdot B_j(\zeta), \Delta_{k+1+m-j}^{k+m-j}], \quad k+1+m-l \leq j \leq k+m.$$

Par construction, la fonction B_j est un produit de Blaschke dont le degré est $j + l - k - m - 1$. En répétant les mêmes arguments qu'en (i), il découle que B_{k+1+m} , un produit de Blaschke de degré l , résout le problème d'interpolation.

- (iii) Si $\Delta_{k+1+m}^{k+m} = \infty$, alors ceci implique qu'il ne peut y avoir de solution. En effet, s'il existait $f \in \mathcal{S}$ solution de (4.1), alors toutes les entrées du tableau 4.3 seraient de module ne dépassant pas un.

Réciproquement, d'après ce qui précède, s'il existe une infinité de solutions, la seule possibilité est que $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| < 1$. S'il existe une unique solution, alors nécessairement $|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| = 1$ et finalement, s'il n'existe aucune solution alors $\Delta_{k+1+m}^{k+m} = \infty$.

■

En utilisant la même terminologie qu'au chapitre 2, on dira que le problème (4.1) est *régulier* s'il existe une infinité de solutions, *singulier* s'il existe une unique solution, qui, dans ce cas, est un produit de Blaschke de degré strictement plus petit que $k + 1 + m$, et *vide* s'il n'existe aucune solution.

Remarque 4.2.4. Si on considère le problème (4.1) et qu'on suppose que le problème est régulier, alors il est possible de déterminer une solution qui est un produit de Blaschke de degré $k + m + 1$. En effet, il suffit de prendre $f_0(\zeta) = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, nous présentons une autre manière d'exprimer les conditions que l'on retrouve au théorème précédent, en faisant intervenir la géométrie hyperbolique de façon plus explicite.

Théorème 4.2.5. Soient $k \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers. Soient $z, u_1, \dots, u_m \in \mathbb{D}$ des points distincts et $w, v_1, \dots, v_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \overline{\mathbb{D}}$. Posons $\mu_0 := w$. Alors le problème d'interpolation (4.1) est

(i) régulier si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| < 1; \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} |\Delta_{k+1+i}^j| < 1, & 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ |\Delta_{k+i}^{k+j}| < 1, & 1 \leq j < i \leq m+1; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \rho(\mu_j, \Delta_{k+1+i}^j) < \rho(z, u_i), & 0 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ \rho(\Delta_{k+j+1}^{k+j}, \Delta_{k+i+1}^{k+j}) < \rho(u_j, u_i), & 1 \leq j < i \leq m; \end{cases} \quad (4.8)$$

(ii) singulier et a une solution qui est un produit de Blaschke de degré l , avec $l \geq 1$,
 (a) si et seulement si, dans le cas où $l \leq k$, l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| = 1; \quad (4.9)$$

$$\begin{cases} |\Delta_{k+1+i}^j| < 1, & 1 \leq j \leq l-1, 1 \leq i \leq m; \\ |\Delta_{k+1+i}^j| = 1, & l \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ |\Delta_{k+i}^{k+j}| = 1. & 1 \leq j < i \leq m; \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \rho(\mu_j, \Delta_{k+1+i}^j) < \rho(z, u_i), & 0 \leq j \leq l-2, 1 \leq i \leq m; \\ \rho(\mu_{l-1}, \Delta_{k+1+i}^{l-1}) = \rho(z, u_i), & 1 \leq i \leq m; \\ \rho(\mu_j, \Delta_{k+1+i}^j) < \rho(z, u_i), & l \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ \rho(\Delta_{k+1+j}^{k+j}, \Delta_{k+1+i}^{k+j}) < \rho(u_j, u_i), & 1 \leq j < i \leq m; \end{cases} \quad (4.11)$$

(b) si et seulement si, dans le cas où $l > k$, l'une des conditions suivantes est satisfaite

$$|\Delta_{k+1+m}^{k+m}| = 1; \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} |\Delta_{k+1+i}^j| < 1, & 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ |\Delta_{k+i}^{k+j}| < 1, & 1 \leq j \leq l-1-k, j < i \leq m; \\ |\Delta_{k-j}^{k+j}| = 1. & l-k \leq j < i \leq m; \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mu_j, \Delta_{k+1+i}^j) < \rho(z, u_i), \quad 0 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m; \\ \rho(\Delta_{k+1+j}^{k+j}, \Delta_{k+1+i}^{k+j}) < \rho(u_j, u_i), \quad 1 \leq j \leq l-2-k, j < i \leq m; \\ \rho(\Delta_{k+1+j}^{l-1}, \Delta_{k+1+i}^{l-1}) = \rho(u_j, u_i). \quad l-1-k \leq j < i \leq m; \\ \rho(\Delta_{k+1+j}^{k+j}, \Delta_{k+1+i}^{k+j}) < \rho(u_j, u_i), \quad l-k \leq j < i \leq m. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Démonstration.

- (i) La condition (4.6) a été démontrée au théorème 4.2.3. L'équivalence entre (4.6) et (4.7) suit du lemme 4.2.1. Supposons que la condition (4.7) est vraie. Alors, pour $1 \leq j \leq k+1$ et $1 \leq i \leq m$, on a

$$1 > |\Delta_{k+1+i}^j| = \frac{|[\Delta_{k+1+i}^{j-1}, \mu_{j-1}]|}{|[u_i, z]|} = \frac{p(\Delta_{k+1+i}^{j-1}, \mu_{j-1})}{p(u_i, z)}. \quad (4.15)$$

Pour $1 < j < i \leq m$, on obtient

$$1 > |\Delta_{k+i}^{k+j}| = \frac{|[\Delta_{k+i}^{k+j-1}, \Delta_{k+j}^{k+j-1}]|}{|[u_i, u_j]|} = \frac{p(\Delta_{k+i}^{k+j-1}, \Delta_{k+j}^{k+j-1})}{p(u_i, u_j)}. \quad (4.16)$$

Comme la distance hyperbolique dépend de la distance pseudo-hyperbolique de manière monotone, alors il est clair, par (4.15) et (4.16), que la condition (4.8) est satisfaite. Réciproquement, si (4.8) est vraie, les différences divisées hyperboliques qui apparaissent dans (4.7) sont définies par (4.15) et (4.16) et on obtient facilement (4.7).

- (ii) (a) La condition (4.9) a également été démontrée au théorème 4.2.3. Le fait que la solution soit un produit de Blaschke de degré exactement l a aussi été justifié dans la preuve du même théorème. L'équivalence entre les conditions (4.9) et (4.10) suit du lemme 4.2.1. Supposons que la condition (4.10) est vraie. D'après le lemme 4.2.1, la première colonne du tableau 4.3 ainsi que toutes les colonnes subséquentes jusqu'à la $(l-1)$ -ième, ont des entrées qui sont de module strictement inférieur à un. Ceci entraîne pour $1 \leq j < l-1$ et $1 \leq i \leq m$ que

$$1 > |\Delta_{k+1+i}^j| = \frac{|[\Delta_{k+1+i}^{j-1}, \mu_{j-1}]|}{|[u_i, z]|} = \frac{p(\Delta_{k+1+i}^{j-1}, \mu_{j-1})}{p(u_i, z)}. \quad (4.17)$$

À partir de la l -ième colonne et pour toutes les colonnes subséquentes, les entrées des colonnes sont identiques et correspondent à une constante unimodulaire. En particulier, pour $j = l$ et $1 \leq i \leq m$, on a

$$1 = |\Delta_{k+1+i}^l| = \frac{|[\Delta_{k+1+i}^{l-1}, \mu_{l-1}]|}{|[u_i, z]|} = \frac{p(\Delta_{k+1+i}^{l-1}, \mu_{l-1})}{p(u_i, z)}. \quad (4.18)$$

et pour le reste, il suffit d'utiliser l'identité (1.7). Ceci montre donc l'équivalence entre les conditions (4.10) et (4.11).

- (b) L'équivalence entre (4.12), (4.13) et (4.14) peut être démontrée de façon similaire. ■

Nous avons déjà mentionné le fait que les produits de Blaschke sont fortement apparentés aux polynômes sous plusieurs aspects. Nous verrons au prochain résultat que ceci est vrai une fois de plus. En effet, de la même manière que la valeur d'un polynôme et ses premières n dérivées en un point déterminent entièrement un polynôme de degré n , un produit de Blaschke de degré n est entièrement déterminé par la valeur en un point donné et ses n premières dérivées hyperboliques. C'est le contenu du corollaire suivant, qui est un cas particulier du théorème 4.2.3.

Corollaire 4.2.6. *Soient $z_0 \in \mathbb{D}$ et $n \geq 1$. Fixons $n + 1$ points $\omega_0, \dots, \omega_n \in \overline{\mathbb{D}}$, où $|\omega_j| < 1$, pour $j = 0, \dots, n - 1$ et $|\omega_n| = 1$. Alors il existe un unique produit de Blaschke b de degré n tel que*

$$H^j b(z_0) = \omega_j, \quad j = 0, \dots, n, \quad (4.19)$$

avec la convention que $H^0 b(z_0) := b(z_0)$.

Démonstration. La preuve découle directement du théorème 4.2.3. On peut construire le produit de Blaschke directement par la méthode donnée dans la preuve du théorème. Posons $b_0 := \omega_n$. On définit les fonctions b_1, \dots, b_n récursivement par

$$b_{k+1}(z) := [[z, z_0] \cdot b_k(z), \omega_{n-k-1}], \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

D'après le théorème précédent, b satisfait (4.19) et l'unicité découle aussi du même théorème. ■

La théorie développée dans ce chapitre nous permet d'aborder le problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes. Voici l'énoncé du problème en termes des dérivées hyperboliques.

Soient $k \geq 0$, $n \geq 1$ des entiers, $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$ des points distincts et $\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_n^0, \mu_1^1, \dots, \mu_n^1, \dots, \mu_1^k, \dots, \mu_n^k \in \overline{\mathbb{D}}$. Sous quelles conditions existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}$

satisfaisant

$$f(z_i) = \mu_i^0, \quad H^j f(z_i) = \mu_i^j, \quad \text{pour } j = 1, \dots, k \text{ et } i = 1, \dots, n? \quad (4.20)$$

Choisissons un point z_l pour $1 \leq l \leq n$. En considérant le tableau 4.3, on pose :

$$z = z_l, w = \mu_l^0, \mu_1 = \mu_l^1, \dots, \mu_k = \mu_l^k, u_i = z_i, v_i = \mu_i^0, \quad 1 \leq i \leq n, i \neq l,$$

et nous utilisons la notation ${}^l\Delta_i^j$, $1 \leq j \leq k+n-1$, $k+2 \leq i \leq k+n$, pour désigner les différences divisées hyperboliques construites à partir de ce point. Encore une fois, ces dernières peuvent être obtenues en formant le tableau 4.4.

| Points | | 1 | 2 | 3 | ... | k | k+1 | ... | k+n-2 | k+n-1 |
|-----------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------|----------------------|--------------------------|----------|------------------------------|----------------------------|
| z_l | μ_l^0 | | | | | | | | | |
| | | μ_l^1 | | | | | | | | |
| z_l | μ_l^0 | | μ_l^2 | | | | | | | |
| | | μ_l^1 | | μ_l^3 | | | | | | |
| z_l | μ_l^0 | | μ_l^2 | | \dots | | | | | |
| | | μ_l^1 | | μ_l^3 | | μ_l^k | | | | |
| z_l | μ_l^0 | | μ_l^2 | | \vdots | | ${}^l\Delta_{k+2}^{k+1}$ | | | |
| | | μ_l^1 | | \vdots | | \vdots | | \dots | | |
| | | | \vdots | | \dots | ${}^l\Delta_{k+2}^k$ | \vdots | \vdots | ${}^l\Delta_{k+n-1}^{k+n-2}$ | |
| z_l | μ_l^0 | | | ${}^l\Delta_{k+2}^3$ | | | | | ${}^l\Delta_{k+n}^{k+n-2}$ | ${}^l\Delta_{k+n}^{k+n-1}$ |
| \vdots | \vdots | | | \vdots | | | | | ${}^l\Delta_{k+n}^{k+n}$ | |
| z_l | μ_l^0 | | ${}^l\Delta_{k+2}^2$ | | | \vdots | | \dots | | |
| | | ${}^l\Delta_{k+2}^1$ | | \vdots | | \vdots | ${}^l\Delta_{k+n}^{k+1}$ | | | |
| z_1 | w_1 | | | \vdots | | ${}^l\Delta_{k+n}^k$ | | | | |
| | | | \vdots | \dots | | | | | | |
| \vdots | \vdots | | | ${}^l\Delta_{k+n}^3$ | | | | | | |
| z_{n-1} | w_{n-1} | | ${}^l\Delta_{k+n}^2$ | | | | | | | |
| | | ${}^l\Delta_{k+n}^1$ | | | | | | | | |
| z_n | w_n | | | | | | | | | |

TABLEAU 4.4 – Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes.

Le théorème qui suit apporte une réponse partielle au problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes, où ce dernier est énoncé en termes des dérivées hyperboliques.

Théorème 4.2.7. *Soit f une fonction de Schur satisfaisant (4.20). Alors,*

$$|\Delta_{k+n}^{k+n-1}| \leq 1, \quad 1 \leq l \leq n. \quad (4.21)$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème 4.2.3, appliqué à un point z_l et tous les autres points.

■

À la vue du théorème 4.2.7, il est maintenant possible de donner une condition nécessaire à l'existence d'une solution au problème d'interpolation (4.20). Ainsi, les points considérés doivent tous satisfaire la condition (4.21) et sinon, dans le cas contraire, une solution ne peut exister. De plus, avec la formule itérative donnée au chapitre 3 permettant le calcul des dérivées hyperboliques, il est désormais possible de considérer numériquement l'interpolation avec les dérivées hyperboliques.

Le théorème 4.2.7 soulève d'ailleurs la question suivante : est-ce que la condition (4.21) est suffisante pour assurer l'existence d'une fonction qui soit solution du problème d'interpolation de Nevanlinna–Pick avec contraintes ?

Chapitre 5

Quelques applications des dérivées hyperboliques

L'intérêt de l'apparition d'une nouvelle théorie se mesure souvent par le reflet de sa portée dans différentes branches des mathématiques ou de son utilisation dans des sujets auxquels aucun lien ne semble a priori s'y rattacher. La théorie des dérivées hyperboliques fait partie de cette dernière catégorie. En effet, dans ce chapitre, nous verrons qu'il est possible de l'utiliser afin de généraliser ou bien d'interpréter certains résultats connus d'une nouvelle manière. Dans le cas présent, ces derniers seront des résultats classiques de l'analyse complexe : théorème de Schwarz–Pick, le lemme de Dieudonné et le lemme de Rogosinski. Nous verrons donc l'apport des dérivées hyperboliques pour chacun d'entre eux.

5.1 Un théorème de Schwarz–Pick pour les dérivées hyperboliques

Le premier résultat classique que nous abordons est le théorème de Schwarz–Pick. Nous allons montrer qu'il est possible d'avoir une version analogue pour les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Le lien entre ce théorème et la dérivée hyperbolique d'ordre un a déjà été établi par Beardon [5]. On peut également retrouver le résultat dans [6] et [3]. Il s'agit du théorème qui suit.

Théorème 5.1.1 ([5]). *Soit $f \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{B}_1$ et supposons que $f(0) = 0$. Alors*

$$\rho(f^h(0), f^h(z)) \leq 2 \rho(0, z), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (5.1)$$

De plus, l'égalité a lieu en (5.1) pour $f(z) = z^2$.

Le prochain résultat permet d'établir deux choses importantes. D'une part, il permet de généraliser le théorème 5.1.1 pour les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur à un et, d'autre part, il donne une condition suffisante et nécessaire en ce qui à trait au cas d'égalité. La preuve est relativement simple et est modelée sur les preuves du corollaire 3.6 et du théorème 5.4 données respectivement dans [6] et [3].

Théorème 5.1.2. *Soient $f \in \mathcal{S}$, $u, v \in \mathbb{D}$ et $n \geq 1$. Alors*

$$\rho(H^n f(u), H^n f(v)) \leq 2\rho(u, v) + \rho(\Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(u)). \quad (5.2)$$

De plus, tous les termes sont finis et l'égalité a lieu en (5.2) pour une paire de points distincts u et v si et seulement si f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$ et si $u, v, (\Delta_u^n f)^{-1}(\Delta_v^n f(u))$ et $(\Delta_u^n f)^{-1}(H^n f(v))$ appartiennent, dans cet ordre, à la même géodésique hyperbolique.

Remarque 5.1.3. Si f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$ alors, par le théorème 3.1.4, il suit que $\Delta_u^n f$ et $\Delta_v^n f$ sont des automorphismes du disque unité. Ainsi, la fonction inverse $(\Delta_u^n f)^{-1}$ est bien définie.

Démonstration. D'abord, supposons que $f \in \cup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$. Alors, on a $H^n f(u) = \Delta_u^n f(v) = \lambda$, où $|\lambda| = 1$, de même que $H^n f(v) = \Delta_v^n f(u) = \mu$, où $|\mu| = 1$. Si $\lambda = \mu$, le membre gauche de (5.2) est nul, et sinon l'inégalité (5.2) se réduit alors à $\infty \leq \infty$. Dans chaque cas, on obtient le résultat.

Supposons ensuite que $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$. En appliquant l'inégalité triangulaire à deux reprises, il suit que

$$\begin{aligned} \rho(H^n f(u), H^n f(v)) &= \rho(\Delta_u^n f(u), \Delta_v^n f(v)) \\ &\leq \rho(\Delta_u^n f(u), \Delta_u^n f(v)) + \rho(\Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(v)) \\ &\leq \rho(\Delta_u^n f(u), \Delta_u^n f(v)) + \rho(\Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(u)) \\ &\quad + \rho(\Delta_v^n f(u), \Delta_v^n f(v)) \\ &\leq 2\rho(u, v) + \rho(\Delta_v^n f(u), \Delta_u^n f(v)), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du théorème 3.1.5. Finalement, on obtient

$$\rho(H^n f(u), H^n f(v)) \leq 2\rho(u, v) + \rho(\Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(u)).$$

Supposons maintenant que f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$ et que $u, v, (\Delta_u^n f)^{-1}(\Delta_v^n f(u))$ et $(\Delta_u^n f)^{-1}(H^n f(v))$ appartiennent dans cet ordre à la même

géodésique hyperbolique. En appliquant à ces points l'automorphisme $\Delta_u^n f$, qui agit comme une isométrie dans la métrique hyperbolique, on obtient que $\Delta_u^n f(u) = H^n f(u)$, $\Delta_u^n f(v)$, $\Delta_v^n f(u)$ et $H^n f(v)$ appartiennent à la même géodésique hyperbolique. Ceci implique que les deux premières inégalités sont en fait des égalités dans la preuve précédente. Finalement, la dernière inégalité est aussi une égalité en vertu du théorème 3.1.5.

Réciproquement, si l'égalité tient dans (5.2), alors l'égalité tient partout dans la suite d'inégalités précédente. La dernière égalité implique que f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$, et les deux précédentes que $H^n f(u)$, $\Delta_u^n f(v)$, $\Delta_v^n f(u)$ et $H^n f(v)$ appartiennent, dans cet ordre, à la même géodésique hyperbolique. Puisque $\Delta_u^n f$ est un automorphisme du disque unité, alors $u, v, (\Delta_u^n f)^{-1}(\Delta_v^n f(u)), (\Delta_u^n f)^{-1}(H^n f(v))$ appartiennent à la même géodésique hyperbolique, dans cet ordre. ■

Le théorème 5.1.1 découle facilement du théorème 5.1.2. En effet, on a

$$\Delta_0^1 f(z) = \Delta^1 f(z; 0) = \Delta^1 f(0; z) = \Delta_z^1 f(0).$$

Ainsi,

$$\rho(\Delta_0^1 f(z), \Delta_z^1 f(0)) = 0,$$

d'où le résultat.

De plus, si $f(z) = z^2$, il est facile de vérifier qu'on a bien égalité dans (5.1). En faisant les calculs, on obtient :

$$\Delta_0^1 f(z) = z, (\Delta_0^1 f)^{-1}(z) = z \text{ et } \Delta_z^1 f(0) = z;$$

$$f^h(z) = H^1 f(z) = \frac{2z(1 - |z|^2)}{1 - |z|^4} = \frac{2z}{1 + |z|^2}.$$

Aussi,

$$|z| \leq \frac{2|z|}{1 + |z|^2}.$$

Ainsi, $0, z, 2z/(1 + |z|^2)$ appartiennent, dans cet ordre, à une même géodésique, qui, dans ce cas, est représentée par un diamètre du cercle unité.

Mentionnons également le travail de P. R. Mercer [17] qui a obtenu un estimé de type Schwarz–Pick qui améliore le théorème 5.1.1. Son résultat correspond au cas $n = 1$ du

théorème 5.1.2. Il a également utilisé des techniques différentes de celles qui apparaissent dans la preuve du théorème.

Le théorème 5.1.1 requiert la normalisation suivante : $f(0) = 0$. La conclusion ne tient pas en général si on remplace 0 par w quelconque ($w \in \mathbb{D}$). Par exemple, si on considère la fonction $f(z) = z^2$ et les points $z = 1/2$ et $w = i/2$, il suit que

$$\begin{aligned}\rho(f^h(z), f^h(w)) &= \rho(H^1 f(1/2), H^1 f(i/2)) \approx 3.725261192; \\ 2\rho(1/2, i/2) &\approx 3.361399544.\end{aligned}$$

Toutefois, le résultat suivant, obtenu par Beardon et Minda ([3], [6]), illustre qu'il est presque possible de le faire, en apportant une certaine modification.

Théorème 5.1.4 ([3]). *Supposons que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et différente d'un automorphisme de \mathbb{D} . Alors, pour tout $z, w \in \mathbb{D}$,*

$$\rho(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\rho(z, w). \quad (5.3)$$

Une conjecture raisonnable serait que l'inégalité (5.3) demeure valide dans le cas des dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Cependant, pour le cas de la dérivée hyperbolique d'ordre deux, la fonction $f(z) = z^3$, avec la paire de points $z_1 = 0, z_2 = 1/4$, procure un contre-exemple facile. En effet, dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\rho(|H^2 f(0)|, |H^2 f(1/4)|) &\approx 1.501224328; \\ 2\rho(0, 1/4) &\approx 1.021651248.\end{aligned}$$

Comme le théorème 5.1.6 va le démontrer, un terme additif est essentiel afin d'établir une borne supérieure adéquate pour obtenir un résultat analogue dans le cas de la dérivée hyperbolique d'ordre supérieur. Mais avant, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.1.5. *Soient z, w des points distincts appartenant à \mathbb{D} . Alors*

$$\rho(|z|, |w|) \leq \rho(z, w). \quad (5.4)$$

De plus, l'égalité a lieu en (5.4) si et seulement si z et w appartiennent à un rayon géodésique hyperbolique émanant de 0.

Démonstration. Supposons, sans perte de généralité, que $|w| > |z|$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\rho(|z|, |w|) &= \rho(0, |w|) - \rho(0, |z|) \\ &= \rho(0, w) - \rho(0, z) \\ &\leq \rho(z, w).\end{aligned}$$

Supposons maintenant que z, w appartiennent à un rayon géodésique émanant de 0. Il est clair qu'il y a égalité en (5.4) dans ce cas. Réciproquement, si l'égalité tient en (5.4), l'inégalité précédente est en fait une égalité. Ceci implique que z, w appartiennent à un rayon géodésique émanant de 0. ■

Théorème 5.1.6. *Soient $f \in \mathcal{S}$, $u, v \in \mathbb{D}$ et $n \geq 1$. Alors,*

$$\rho(|H^n f(u)|, |H^n f(v)|) \leq 2\rho(u, v) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |\Delta_v^n f(u)|). \quad (5.5)$$

De plus, l'égalité a lieu en (5.5) pour une paire de points distincts u et v si et seulement si f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$ et si $H^n f(u), \Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(u), H^n f(v)$ appartiennent dans cet ordre à un rayon géodésique hyperbolique émanant de 0.

Démonstration. Supposons d'abord que $f \in \cup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$. Alors, $|H^n f(u)| = |H^n f(v)| = |\Delta_u^n f(v)| = |\Delta_v^n f(u)| = 1$. En utilisant (1.7), le membre droit de (5.5) est un nombre positif et le membre gauche est zéro, ce qui démontre le résultat dans ce cas. Supposons ensuite que $f \in \mathcal{S} \setminus \cup_{k=0}^n \mathcal{B}_k$. En appliquant l'inégalité triangulaire, le théorème 3.1.5 et le lemme 5.1.5, on a

$$\begin{aligned} \rho(|H^n f(u)|, |H^n f(v)|) &\leq \rho(|H^n f(u)|, |\Delta_u^n f(v)|) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |H^n f(v)|) \\ &\leq \rho(H^n f(u), \Delta_u^n f(v)) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |H^n f(v)|) \\ &\leq \rho(u, v) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |H^n f(v)|) \\ &\leq \rho(u, v) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |\Delta_v^n f(u)|) + \rho(|\Delta_v^n f(u)|, |H^n f(v)|) \\ &\leq \rho(u, v) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |\Delta_v^n f(u)|) + \rho(\Delta_v^n f(u), H^n f(v)) \\ &\leq 2\rho(u, v) + \rho(|\Delta_u^n f(v)|, |\Delta_v^n f(u)|). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que f est un produit de Blaschke de degré $n + 1$ et que $H^n f(u), \Delta_u^n f(v), \Delta_v^n f(u), H^n f(v)$ appartiennent dans cet ordre à un rayon géodésique hyperbolique émanant de 0. Alors l'égalité a lieu dans chacune des inégalités précédentes. Réciproquement, s'il y a égalité en (5.5), le résultat suit aisément du cas d'égalité du théorème 3.1.5 et du lemme 5.1.5. ■

Nous terminons cette section en posant la question suivante : est-il possible d'estimer le dernier terme de (5.5) afin d'obtenir une constante positive α telle que

$$\rho(|H^n f(u)|, |H^n f(v)|) \leq \alpha \rho(u, v)?$$

Une réponse affirmative à cette question permettrait d'obtenir un résultat un peu plus dans l'essence du théorème 5.1.4.

5.2 Un lemme de Dieudonné pour les dérivées hyperboliques

Nous allons maintenant nous intéresser à un autre résultat célèbre de l'analyse complexe : le *lemme de Dieudonné*. Classiquement, ce lemme est énoncé de la manière suivante.

Lemme de Dieudonné. *Soient u et v des points donnés appartenant à \mathbb{D} , avec $u \neq 0$ et tels que $|v| < |u|$. Alors pour toute fonction analytique f satisfaisant $|f(z)| < 1$ dans \mathbb{D} , avec $f(0) = 0$ et $f(u) = v$, on a*

$$\left| f'(u) - \frac{v}{u} \right| \leq \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|(1 - |v|^2)}. \quad (5.6)$$

Ce résultat est apparu pour la première fois en 1931 et est essentiellement dû à J. Dieudonné [10]. De plus, la région à laquelle appartient $f'(u)$ pour toutes les fonctions satisfaisant les hypothèses du lemme correspond en fait au disque fermé donné en (5.6). En d'autres mots, si on note par \mathcal{F} , l'ensemble des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(u) = v$, alors

$$\{f'(u) : f \in \mathcal{F}\} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{v}{u} \right| \leq \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|(1 - |v|^2)} \right\}. \quad (5.7)$$

Un peu plus de soixante-dix années plus tard, Beardon et Minda se sont intéressés à nouveau à ce lemme ([6], [4]). En utilisant un théorème de Schwarz–Pick à trois points, ils ont été en mesure de donner une preuve plus simple et élégante du lemme de Dieudonné qui a aussi l'avantage d'être plus géométrique. De plus, les auteurs ont fourni une interprétation différente du lemme de Dieudonné exprimée en termes de la dérivée hyperbolique d'ordre un. Pour cela, nous allons introduire la notation suivante : nous noterons par $D_h(c, r)$ le disque hyperbolique ouvert de centre c et de rayon r :

$$D_h(c, r) := \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, c) < r\},$$

et par $\overline{D}_h(c, r)$ le disque hyperbolique fermé :

$$\overline{D}_h(c, r) := \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, c) \leq r\}.$$

Ce disque hyperbolique est en fait le disque euclidien de centre

$$\frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2|c|^2} c$$

et de rayon

$$\frac{1 - |c|^2}{1 - \alpha^2|c|^2} \alpha,$$

où $\alpha := \tanh \frac{1}{2}r$. Un peut trouver le détail de ces calculs dans [11].

Ainsi, Beardon et Minda ont obtenu, sous les mêmes hypothèses que celles du lemme de Dieudonné, le résultat suivant :

$$\{H^1 f(u) : f \in \mathcal{F}\} = \overline{D}_h(v/u, \rho(0, u)). \quad (5.8)$$

L'égalité (5.8) peut être exprimée en termes euclidiens de la manière qui suit :

$$\{H^1 f(u) : f \in \mathcal{F}\} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{(1 - |u|^2)v/u}{1 - |v|^2} \right| \leq \frac{|u| - |v|^2}{|u|(1 - |v|^2)} \right\}.$$

Au chapitre 2 nous avons présenté une version du théorème de Schwarz–Pick à points multiples basée sur les différences divisées hyperboliques. Comme ces dernières mènent naturellement à la notion de dérivée hyperbolique d'ordre supérieur, nous allons présenter une version généralisée du lemme de Dieudonné qui s'applique aux dérivées hyperboliques d'ordre $n \geq 1$. Pour ce faire, nous allons considérer la famille des fonctions holomorphes où les $n - 1$ dérivées hyperboliques sont prescrites mais assujetties à certaines conditions. De cette manière, il est possible de situer la n -ième dérivée hyperbolique dans une région spécifique, qui ne dépend pas de la fonction, mais seulement des dérivées et des points prescrits.

Théorème 5.2.1 (Lemme de Dieudonné généralisé). *Soient $u, v \in \mathbb{D}$ tels que $|v| < |u|$ et $n > 1$. En considérant le tableau 5.1, on choisit $n - 1$ points μ_1, \dots, μ_{n-1} , où $\mu_j \in D_h(\Delta_{n+2}^j, \rho(0, u))$ pour $j = 1, \dots, n - 1$. Définissons \mathcal{F}_{n-1} l'ensemble des fonctions holomorphes*

$$\mathcal{F}_{n-1} := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f(0) = 0, f(u) = v, H^1 f(u) = \mu_1, \dots, H^{n-1} f(u) = \mu_{n-1}\}.$$

Alors,

$$\{H^n f(u) : f \in \mathcal{F}_{n-1}\} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{(1 - |u|^2)\Delta_{n+2}^n}{1 - |u|^2|\Delta_{n+2}^n|^2} \right| \leq \frac{|u|(1 - |\Delta_{n+2}^n|^2)}{1 - |u|^2|\Delta_{n+2}^n|^2} \right\}. \quad (5.9)$$

| Points de \mathbb{D} | | 1 | 2 | 3 | ... | $n-1$ | n | $n+1$ |
|------------------------|----------|------------------|------------------|------------------|----------|----------------------|------------------|----------------------|
| u | v | μ_1 | | | | | | |
| u | v | μ_1 | μ_2 | μ_3 | | | | |
| u | v | | μ_2 | | \ddots | | | |
| u | v | μ_1 | μ_2 | μ_3 | | μ_{n-1} | $H^n f(u)$ | |
| u | v | μ_1 | | | \vdots | μ_{n-1} | | Δ_{n+2}^{n+1} |
| u | v | | | \vdots | | | Δ_{n+2}^n | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | | | Δ_{n+2}^{n-1} | | |
| u | v | | | Δ_{n+2}^3 | | | | |
| u | v | | Δ_{n+2}^2 | | | | | |
| 0 | 0 | Δ_{n+2}^1 | | | | | | |

TABLEAU 5.1 – Tableau des différences divisées hyperboliques pour le lemme de Dieudonné généralisé.

Il est important de mentionner que l'ensemble de fonctions \mathcal{F}_{n-1} n'est pas vide en vertu du théorème 4.2.5 selon les hypothèses du théorème 5.2.1. Aussi la preuve du théorème 5.2.1 est omise pour le moment, puisque nous allons démontrer ci-après le théorème 5.2.3 duquel le lemme de Dieudonné généralisé est un cas particulier.

Le prochain corollaire concerne le cas $n = 2$ du théorème 5.2.1, mais interprété en termes de la dérivée classique d'ordre deux plutôt que de la dérivée hyperbolique d'ordre deux.

Corollaire 5.2.2. *Soient $u, v \in \mathbb{D}$ tels que $|v| < |u|$. Fixons $\mu \in D_h(v/u, \rho(0, u))$. Supposons que $f \in \mathcal{F}_1$, où*

$$\mathcal{F}_1 = \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f(0) = 0, f(u) = v, H^1 f(u) = \mu\}.$$

Alors,

$$|f''(u) - c(u, v, \mu)| \leq R(u, v, \mu), \tag{5.10}$$

où

$$c(u, v, \mu) := \frac{2\bar{u}\mu(1 - |v|^2)}{(1 - |u|^2)^2} - \frac{2\bar{v}\mu^2(1 - |v|^2)}{(1 - |u|^2)^2} + \frac{2(1 - |\mu|^2)(1 - |v|^2)\Delta_4^2}{(1 - |u|^2)(1 - |u|^2|\Delta_4^2|^2)},$$

$$R(u, v, \mu) := \frac{2|u|(1 - |\Delta_4^2|^2)(1 - |\mu|^2)(1 - |v|^2)}{(1 - |u|^2|\Delta_4^2|^2)(1 - |u|^2)^2}.$$

Démonstration. L'inégalité (5.10) découle de (5.9) dans le cas où $n = 2$ avec $\mu_1 = \mu$ et en utilisant les expressions algébriques de $H^2 f(u)$, données par le corollaire 3.2.10. ■

Dans ce qui précède, nous avons présenté des résultats concernant essentiellement l'origine et un autre point du disque unité. Le lemme de Dieudonné possède son équivalent dans le cas de points quelconques appartenant à \mathbb{D} . Ce résultat est appelé le *lemme de Dieudonné–Pick* [14, Corollary 5.6].

Lemme de Dieudonné–Pick. *Le lieu des valeurs de $f'(A)$, pour les fonctions holomorphes $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ satisfaisant $f(a) = b$ et $f(A) = B$, est le disque fermé de centre c et de rayon r , où*

$$c = \frac{1 - |(A - a)/(1 - \bar{A}a)|^2}{1 - |(B - b)/(1 - \bar{B}b)|^2} \frac{(B - b)/(1 - \bar{B}b)}{(A - a)/(1 - \bar{A}a)} \frac{1 - |B|^2}{1 - |A|^2},$$

$$r = \frac{|(A - a)/(1 - \bar{A}a)|^2 - |(B - b)/(1 - \bar{B}b)|^2}{|(A - a)/(1 - \bar{A}a)| \left(1 - |(B - b)/(1 - \bar{B}b)|^2\right)} \frac{1 - |B|^2}{1 - |A|^2}.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un autre résultat important de ce chapitre et concernant la généralisation du théorème précédent et qui implique les dérivées hyperboliques de tout ordre.

Théorème 5.2.3 (Lemme de Dieudonné–Pick généralisé). *Soient $u, z, v, w \in \mathbb{D}$ tels que $\rho(v, w) < \rho(u, z)$. En considérant le tableau 5.2, pour $n > 1$ on choisit $n - 1$ points μ_1, \dots, μ_{n-1} , où $\mu_j \in D_h(\Delta_{n+2}^j, \rho(u, z))$ pour $j = 1, \dots, n - 1$. Définissons \mathcal{G}_{n-1} , l'ensemble des fonctions analytiques*

$$\mathcal{G}_{n-1} := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f(z) = w, f(u) = v, H^1 f(u) = \mu_1, \dots, H^{n-1} f(u) = \mu_{n-1}\}.$$

Alors,

$$\{H^n f(u) : f \in \mathcal{G}_{n-1}\} = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{(1 - |[z, u]|^2)\Delta_{n+2}^n}{1 - |[z, u]|^2|\Delta_{n+2}^n|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\Delta_{n+2}^n|^2)|[z, u]|}{1 - |[z, u]|^2|\Delta_{n+2}^n|^2} \right\}. \quad (5.11)$$

| Points de \mathbb{D} | | 1 | 2 | 3 | ... | $n-1$ | n | $n+1$ |
|------------------------|----------|------------------|------------------|------------------|----------|----------------------|------------------|----------------------|
| u | v | μ_1 | | | | | | |
| u | v | μ_1 | μ_2 | μ_3 | | | | |
| u | v | | μ_2 | | \ddots | | | |
| u | v | μ_1 | μ_2 | μ_3 | | μ_{n-1} | $H^n f(u)$ | |
| u | v | μ_1 | | | \vdots | μ_{n-1} | | Δ_{n+2}^{n+1} |
| u | v | | | \vdots | | | Δ_{n+2}^n | |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | | | Δ_{n+2}^{n-1} | | |
| u | v | | | Δ_{n+2}^3 | | | | |
| z | w | Δ_{n+2}^1 | Δ_{n+2}^2 | | | | | |

TABLEAU 5.2 – Tableau des différences divisées hyperboliques dans le cas du lemme de Dieudonné–Pick généralisé.

Remarque 5.2.4. Les expressions données en (5.11) du côté droit de l'égalité ne dépendent pas du choix de la fonction f dans l'ensemble \mathcal{G}_{n-1} , mais seulement des points prescrits $u, v, z, w, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$.

Démonstration. D'après les hypothèses et par le théorème 4.2.5, on a que $\mathcal{G}_{n-1} \neq \emptyset$. Soit $f \in \mathcal{G}_{n-1}$. Le choix de μ_j pour $j = 1, \dots, n-1$ implique que

$$\rho(\mu_j, \Delta_{n+2}^j) < \rho(z, u), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Ainsi, f ne peut pas être un produit de Blaschke de degré strictement plus petit que n . Par le théorème 4.2.5, il suit que

$$\rho(H^n f(u), \Delta_{n+2}^n) \leq \rho(z, u). \tag{5.12}$$

L'inégalité (5.12) est équivalente à $H^n f(u) \in \overline{D}_h(\Delta_{n+2}^n, \rho(u, z))$, ce qui signifie également que $H^n f(u)$ appartient au disque euclidien de centre et de rayon respectifs

$$\frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} \Delta_{n+2}^n \quad \text{et} \quad \frac{1 - |\Delta_{n+2}^n|^2}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} |[z, u]|. \tag{5.13}$$

Il suit que

$$H^n f(u) \in \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} \Delta_{n+2}^n \right| \leq \frac{1 - |\Delta_{n+2}^n|^2}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} |[z, u]| \right\}.$$

Comme $f \in \mathcal{G}_{n-1}$ a été choisie de façon arbitraire, on a

$$\{H^n f(u) : f \in \mathcal{G}_{n-1}\} \subset \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \left| \zeta - \frac{(1 - |[z, u]|^2) \Delta_{n+2}^n}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} \right| \leq \frac{(1 - |\Delta_{n+2}^n|^2) |[z, u]|}{1 - |[z, u]|^2 |\Delta_{n+2}^n|^2} \right\}. \quad (5.14)$$

Nous allons maintenant montrer l'inclusion inverse, c'est-à-dire que chaque point appartenant au disque donné en (5.14) est la dérivée hyperbolique d'ordre n d'une fonction appartenant à la classe \mathcal{G}_{n-1} . Ceci est équivalent à un problème d'interpolation. Choisissons α , un point quelconque du disque donné en (5.14). Clairement, $\alpha \in \overline{D}_h(\Delta_{n+2}^n, \rho(u, z))$. Par les hypothèses et le choix de α , il s'ensuit que

$$\rho(w, v) < \rho(z, u); \quad (5.15)$$

$$\rho(\mu_j, \Delta_{n+2}^j) < \rho(u, z), \quad j = 1, \dots, n-1; \quad (5.16)$$

$$\rho(\alpha, \Delta_{n+2}^n) \leq \rho(u, z). \quad (5.17)$$

Les inégalités (5.15), (5.16) et (5.17) sont précisément les hypothèses du théorème 4.2.5. Par conséquent, il existe une fonction analytique $f \in \mathcal{G}_{n-1}$ telle qu'en particulier, $H^n f(u) = \alpha$. ■

La démonstration du théorème 5.2.3 montre que le lemme de Dieudonné est fondamentalement un résultat hyperbolique. Il met aussi en évidence le fait que la notion de *dérivée hyperbolique* est plus naturelle pour étudier les fonctions analytiques du disque unité dans lui-même. En effet, il semble beaucoup plus ardu d'obtenir le corollaire 5.2.2 sans utiliser les outils précédents tandis que dans ce cas, l'équivalent pour la dérivée classique d'ordre supérieur suit aisément, après quelques calculs, du cas hyperbolique.

Il est également intéressant de comparer le disque hyperbolique donné dans le cas de la dérivée hyperbolique et le disque euclidien obtenu dans le cas de la dérivée classique. En effet, dans le cas de la dérivée d'ordre un, nous avons par (5.8) et (5.7), que le centre du disque euclidien dans le cas de la dérivée classique est le même que le centre du disque hyperbolique dans le cas de la dérivée hyperbolique. Beardon et Minda ont suggéré dans [6] qu'il pourrait y avoir une raison profonde expliquant ce phénomène. Dans le cas d'ordre deux, par le lemme de Dieudonné généralisé et en utilisant la preuve

du théorème 5.2.3 dans le cas $n = 2$, on obtient

$$\{H^2 f(u) : f \in \mathcal{F}_1\} = \overline{D}_h(\Delta_4^2, \rho(z, 0)),$$

où

$$\Delta_4^2 = \frac{[v/u, \mu]}{u}, \quad (5.18)$$

On peut facilement voir que le centre du disque euclidien dans le cas de la dérivée classique d'ordre deux donné par (5.10) est différent du centre du disque hyperbolique dans le cas de la dérivée hyperbolique d'ordre deux donné par (5.18). Le phénomène semble donc particulier au cas de la dérivée d'ordre un.

5.3 Lemme de Rogosinski

Nous terminons ce chapitre par un dernier résultat classique de l'analyse complexe : le *lemme de Rogosinski*. Il s'agit d'un résultat d'un intérêt certain puisqu'il s'agit d'une version améliorée du lemme de Schwarz ([14],[16]). Dans ce qui va suivre, nous verrons comment le lemme de Rogosinski peut être interprété en termes des dérivées hyperboliques. Mais commençons d'abord par un rappel de l'énoncé de ce lemme.

Lemme de Rogosinski. *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique telle que $f(0) = 0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}, z \neq 0$, on a*

$$\left| f(z) - \frac{zf'(0)(1 - |z|^2)}{1 - |z|^2|f'(0)|^2} \right| \leq |z|^2 \frac{1 - |f'(0)|^2}{1 - |z|^2|f'(0)|^2}. \quad (5.19)$$

Aussi, la condition $f(0) = 0$ peut être omise et il existe une version analogue pour des points arbitraires du disque unité. On nomme ce résultat le *lemme de Rogosinski–Pick*. Nous allons montrer comment il est possible de traiter le lemme d'une manière plus hyperbolique, dans un certain sens. ce qui se rapproche de l'essence même du présent travail. En effet, la théorie présentée au chapitre 4 a inspiré une nouvelle démonstration utilisant les différences divisées hyperboliques et les dérivées hyperboliques.

Le lemme de Rogosinski–Pick affirme que pour une fonction holomorphe f du disque unité dans lui-même et pour un point fixé $u \in \mathbb{D}$, on peut déterminer la région, qui dépend, entre autres, de la dérivée hyperbolique d'ordre un au point u , où on peut localiser l'image par la fonction f d'un point quelconque différent de u appartenant au disque unité.

Lemme de Rogosinski–Pick. Soient $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction analytique et $u \in \mathbb{D}$. Supposons que $f(u) = v$. Soit $z \in \mathbb{D}$, $z \neq u$.

(i) Si $v = 0$, alors

$$|f(z) + c| \leq r; \quad (5.20)$$

(ii) si $v \neq 0$, alors

$$\left| f(z) - \frac{(1 - |v|^2)(v\bar{c} - 1) + |\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2}{\bar{v}(|\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2)} \right| \leq \frac{(1 - |v|^2)r}{||\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2|}, \quad (5.21)$$

où

$$c = \frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} H^1 f(u)[z, u] \quad \text{et} \quad r = \frac{1 - |H^1 f(u)|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} |[z, u]|^2.$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous considérerons le tableau 5.3, qui représente le tableau des différences divisées hyperboliques dans ce cas particulier.

| Points de \mathbb{D} | | 1 | 2 |
|------------------------|--------|--------------|--------------|
| u | v | $H^1 f(u)$ | Δ_3^2 |
| u | v | | |
| z | $f(z)$ | Δ_3^1 | |

TABLEAU 5.3 – Tableau des différences divisées hyperboliques pour le lemme de Rogosinski–Pick.

Nous allons d'abord démontrer le lemme pour $f \in \mathcal{B}_1$. Par les définitions et le théorème 3.1.4, il suit que

$$\Delta_3^1 = H^1 f(u) = \Delta_3^2 = \lambda, \quad |\lambda| = 1.$$

En particulier $c = \lambda[z, u]$, $r = 0$ et

$$\Delta_3^1 = \frac{[f(z), v]}{[z, u]} = \lambda,$$

d'où

$$f(z) = \frac{v - \lambda[z, u]}{1 - \bar{v}\lambda[z, u]}. \quad (5.22)$$

Si $v = 0$, alors $f(z) = -\lambda[z, u]$, et ceci est équivalent à la relation donnée en (5.20). Si $v \neq 0$, l'ensemble (5.21) est réduit à un seul point qui est exactement (5.22).

Supposons maintenant que $f \notin \mathcal{B}_1$. Par le théorème 4.2.3, on a que $|\Delta_3^2| \leq 1$. Ainsi,

$$\left| \frac{\Delta_3^1 - H^1 f(u)}{1 - \overline{H^1 f(u)} \Delta_3^1} \right| \leq \left| \frac{u - z}{1 - \bar{u}z} \right|. \quad (5.23)$$

L'inégalité (5.23) implique que $\Delta_3^1 \in \overline{D}_h(H^1 f(u), \rho(z, u))$. Ceci est équivalent au fait que Δ_3^1 appartient à un disque euclidien dont le centre et le rayon sont respectivement

$$\frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} H^1 f(u) \quad \text{et} \quad \frac{1 - |H^1 f(u)|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} |[z, u]|.$$

En utilisant la définition de différences divisées hyperboliques, il suit que

$$\left| \frac{[f(z), v]}{[z, u]} - \frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} H^1 f(u) \right| \leq \frac{1 - |H^1 f(u)|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} |[z, u]|.$$

Ce qui est équivalent à

$$\left| \frac{v - f(z)}{1 - \bar{v}f(z)} - \frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} H^1 f(u) [z, u] \right| \leq \frac{1 - |H^1 f(u)|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} |[z, u]|^2. \quad (5.24)$$

Posons $\varphi_v(z) := (v - z)/(1 - \bar{v}z)$. On peut déduire de l'inégalité (5.24) que $\varphi_v(f(z))$ appartient à un disque euclidien, que nous allons noter D_E , de centre c et de rayon r qui sont définis respectivement par

$$c = \frac{1 - |[z, u]|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} H^1 f(u) [z, u] \quad \text{et} \quad r = \frac{1 - |H^1 f(u)|^2}{1 - |[z, u]|^2 |H^1 f(u)|^2} |[z, u]|^2.$$

Par conséquent $f(z) \in \varphi_v^{-1}(D_E(c, r)) = \varphi_v(D_E(c, r))$. Si $v = 0$, alors on obtient (5.24), ce qui prouve (i). Si $v \neq 0$, alors le disque $\varphi_v(D_E(c, r))$ est de centre et de rayon respectifs

$$\frac{(1 - |v|^2)(v\bar{c} - 1) + |\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2}{\bar{v}(|\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2)} \quad \text{et} \quad \frac{(1 - |v|^2)r}{| |\bar{v}c - 1|^2 - |v|^2 r^2 |}.$$

Finalement, on obtient (5.21), ce qui démontre (ii), comme voulu. ■

Conclusion

Le principal objectif de cette thèse était l'élaboration d'une théorie nouvelle, celle des dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Remarquons que ces dernières découlent naturellement de la notion fondamentale de différence divisée hyperbolique. Deux propriétés importantes sont attribuées aux dérivées hyperboliques et en font des objets mathématiques intéressants à étudier. D'abord, elles sont invariantes sous la composition d'automorphismes et ensuite, elles satisfont un analogue du théorème de Schwarz–Pick. Aussi, comme les dérivées hyperboliques proviennent, par définition, d'une suite de limites, nous avons présenté une formule récursive permettant de les calculer. De cette façon, ces dérivées se prêtent mieux à une possible application numérique. En effet, on peut désormais considérer un nouveau type de problème impliquant les dérivées hyperboliques : les problèmes d'interpolation. L'avantage de considérer ces dérivées est que les outils de la géométrie hyperbolique sont maintenant accessibles et permettent de résoudre, lorsque c'est possible et dans des cas particuliers, ces problèmes d'interpolation et de construire la solution dans ce cas. Aussi, un intérêt certain de ce nouveau type de dérivée est une réinterprétation de problèmes d'interpolation impliquant les dérivées classiques, en termes des dérivées hyperboliques. Nous avons été ainsi en mesure de donner une condition nécessaire au problème de Nevanlinna–Pick avec contraintes. Une question ouverte demeure : cette condition est-elle suffisante pour assurer l'existence d'une solution au problème ?

La théorie concernant les dérivées hyperboliques a également permis de généraliser des résultats célèbres de l'analyse complexe. En effet, nous avons mentionné précédemment le théorème de Schwarz–Pick, dont une version analogue existe pour ces dérivées. Aussi, nous avons montré que le lemme de Dieudonné possède son équivalent pour les dérivées hyperboliques d'ordre supérieur. Finalement, cette même théorie a fait aussi en sorte de fournir les outils nécessaires afin de permettre de démontrer d'une manière nouvelle le lemme de Rogosinski.

En conclusion, la théorie des dérivées hyperboliques, quoique nouvelle, semble prometteuse afin d'établir des liens entre différents problèmes concernant les fonctions de

la classe de Schur et la géométrie hyperbolique. Ceci démontre la particularité de ces fonctions définies dans le disque unité et cette géométrie particulière qui lui est bien adaptée. Nous croyons aussi fermement que de possibles extensions sont à prévoir que ce soit au niveau d'autres problèmes d'interpolation ou dans la généralisation de résultats différents de ceux présentés dans cette thèse et reliés aux fonctions de la classe de Schur. Pour terminer, mentionnons que les différents résultats présentés dans ce travail se retrouvent dans [2], [23] et dans [24].

Bibliographie

- [1] J. M. ANDERSON et J. ROVNYAK : On generalized Schwarz-Pick estimates. *Mathematika*, 53(1):161–168 (2007), 2006.
- [2] L. BARIBEAU, P. RIVARD et E. WEGERT : On hyperbolic divided differences and the Nevanlinna-Pick problem. *Comput. Methods Funct. Theory*, 9(2):391–405, 2009.
- [3] A. F. BEARDON et D. MINDA : The hyperbolic metric and geometric function theory. In *Quasiconformal mappings and their applications*, pages 9–56. Narosa, New Delhi, 2007.
- [4] A. F. BEARDON et D. MINDA : Dieudonné points of holomorphic self-maps of regions. *Comput. Methods Funct. Theory*, 8(1-2):409–432, 2008.
- [5] A.F. BEARDON : The Schwarz–Pick Lemma for derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125:3255–3256, 1997.
- [6] A.F. BEARDON et D. MINDA : A multi-point Schwarz–Pick Lemma. *J. Anal. Math.*, 92:81–104, 2004.
- [7] A. BULTHEEL et A. LASAROW : Schur-Nevanlinna sequences of rational functions. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 50(3):571–596, 2007.
- [8] J. B. CONWAY : *Functions of one complex variable*, volume 11 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, seconde édition, 1978.
- [9] P. J. DAVIS : *Interpolation and approximation*. Dover Publications Inc., New York, 1975.
- [10] J. DIEUDONNÉ : Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d’une variable complexe. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 48:247–358, 1931.
- [11] J. B. GARNETT : *Bounded analytic functions*, volume 236 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, première édition, 2007.
- [12] C. HERMITE : Sur la formule d’interpolation de Lagrange. *J. Reine Angew. Math.*, 84:70–79, 1878.
- [13] M. IVAN : A note on the Hermite interpolation polynomial for rational functions. *Appl. Numer. Math.*, 57(2):230–233, 2007.

- [14] H. T. KAPTANOĞLU : Some refined Schwarz-Pick lemmas. *Michigan Math. J.*, 50(3):649–664, 2002.
- [15] S.-A KIM et T. SUGAWA : Invariant differential operators associated with a conformal metric. *Michigan Math. J.*, 55(2):459–479, 2007.
- [16] P. R. MERCER : Sharpened versions of the Schwarz lemma. *J. Math. Anal. Appl.*, 205(2):508–511, 1997.
- [17] P. R. MERCER : Schwarz-Pick-type estimates for the hyperbolic derivative. *J. Inequal. Appl.*, pages Art. ID 96368, 6, 2006.
- [18] R. NEVANLINNA : Über beschränkte Functionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae (A)*, 13(1):1–72, 1919.
- [19] R. NEVANLINNA : Über beschränkte analytische Functionen. *Ann. Acad. Sci. Fennicae (A)*, 32(7), 1929.
- [20] E. PESCHL : Les invariants différentiels non holomorphes et leur rôle dans la théorie des fonctions. *Rend. Sem. Mat. Messina*, 1:100–108, 1955.
- [21] G. PICK : Über die Beschränkungen analytischer Functionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. *Math. Ann.*, 77(1):7–23, 1916.
- [22] P. RIVARD : Un lemme de Schwarz–Pick à points multiples. Mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, 2007.
- [23] P. RIVARD : A Schwarz–Pick Theorem for higher-order hyperbolic derivatives. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139:209–217, 2011.
- [24] P. RIVARD : Some applications of higher-order hyperbolic derivatives. *Complex Anal. and Oper. Theory*, 2011. Soumis.
- [25] S. RUSCHEWEYH : Two remarks on bounded analytic functions. *Serdica*, 11(2):200–202, 1985.
- [26] I. SCHUR : Über die Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind,i. *J. Reine Angew. Math.*, 147:205–232, 1917.
- [27] I. SCHUR : Über die Potenzreihen die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind,ii. *J. Reine Angew. Math.*, 148:122–145, 1918.