NORMAND LÉVESQUE

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT DE LA FONCTION QUADRATIQUE

Mémoire
présenté
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de maître ès arts (M.A.)

Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ LAVAL

AOÛT 2001

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à Madame Lucie DeBlois, professeure au département de didactique. À titre de directrice de recherche, sa patience, son intérêt, sa disponibilité, sa complicité ainsi que ses commentaires judicieux ont largement facilité la conduite du projet de recherche. Certes, elle a été un guide avisé qui m'a permis de progresser dans les méandres de la recherche et qui a particulièrement précisé l'issue de cette étude. Des remerciements sont aussi adressés à Monsieur Jean J. Dionne, professeur au département de didactique. À titre de conseiller, il a su distinguer des éléments pertinents afin que je puisse les approfondir. Merci également à Madame Sophie René-de-Cotret pour sa contribution à l'évaluation de ce mémoire.

Des remerciements particuliers à mes parents et aux membres de ma famille qui ont toujours démontré une confiance ainsi qu'un appui indéfectible pour mes projets d'études. Merci à ma soeur, Micheline pour les nombreux soupers du dimanche et pour ta douce compréhension. Des remerciements sincères à David, mon neveu, qui s'est soumis patiemment aux préexpérimentations du projet de recherche en échange de quelques copieux déjeuners avec patates rissolées. Enfin, je ne pourrais oublier mes nouveaux amis, Nancy, Serge, Maha, Réginald, Danny et Claudine qui ont rendu si agréable mon séjour à Québec.

Un merci bien spécial aux six élèves qui ont participé au projet de recherche ainsi qu'au personnel enseignant de leur école. Je tiens à vous féliciter, chers élèves, pour avoir coopéré d'une façon active jusqu'au terme des expérimentations alors que les commentaires du personnel enseignant à votre égard se sont révélés une sélection pertinente. Enfin, si un mémoire comme celui-ci se réalise grâce à l'énergie des personnes qui nous entourent, il se concrétise aussi par le support financier de mes parents et par la contribution financière de l'Association des enseignants et des enseignantes francophones du Nouveau-Brunswick. Je tiens donc à vous remercier pour avoir cru en mes intérêts et mes moyens.

RÉSUMÉ

Une réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par des élèves en résolution de problèmes nous a conduit à reconnaître que ces élèves pourraient développer une construction déficiente de la notion de fonction. Ce constat nous a motivé à étudier le développement du concept de la fonction quadratique au moyen d'une approche par la modélisation de phénomènes. Quelques difficultés d'apprentissage du concept retenu nous ont incité à choisir un modèle de compréhension proposé par Herscovics et Bergeron (1982b). Nous avons inscrit ce modèle à l'intérieur du modèle de l'abstraction réfléchissante de Piaget (1978) et du modèle de l'interprétation des activités cognitives développé par DeBlois (2000). Ce dernier modèle nous a permis d'examiner des processus d'apprentissage. En effet, les situations suscitant une investigation statique amènent les représentations mentales de trois élèves à se préciser au moment où ils réalisent des croquis ou manipulent des cure-dents pour représenter des coffrages ou des enclos. Les situations suscitant une investigation dynamique semblent conduire à un processus d'apprentissage différent. En effet, cette investigation requiert des représentations mentales favorables à la modélisation de certains phénomènes. C'est pour cette raison que certaines modifications du libellé ont suscité des réflexions moins déterminantes.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III - LES ANALYSES

CHAPITRE IV - LES RÉSULTATS

CHAPITRE IV - LES RÉSULTATS ... suite

INTRODUCTION

Une réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par les élèves francophones du Nouveau-Brunswick en résolution de problèmes nous conduit à examiner le curriculum et les manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle. Cet examen nous amène ainsi à considérer divers facteurs. Les facteurs ont trait à l'usage de symboles, à la conception des manuels scolaires, à la formation initiale des enseignants et des enseignantes ainsi qu'à la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction. Bien que ces facteurs puissent influencer les résultats escomptés lorsque l'élève est convié à la résolution de problèmes, ils semblent plutôt le conduire à une construction déficiente de la notion de fonction. Cette position du problème expose la nature de notre projet de recherche. Dans le premier chapitre, nous décrivons ainsi le contexte d'où est issu l'intérêt pour le concept de la fonction. Nous inscrivons notre réflexion à l'intérieur d'une perspective constructiviste. Nous abordons des thèmes qui ont éclairé les choix du concept, de l'approche et de l'analyse conceptuelle.

Comme la majorité des études où on se penche sur la compréhension des concepts mathématiques, notre projet de recherche est du domaine de l'étude de cas. La question de recherche touche à la compréhension chez l'élève du secondaire et à l'exploration des processus d'apprentissage. Le deuxième chapitre décrit ainsi la méthode utilisée pour réaliser cette recherche. En effet, l'entrevue critique engage une évaluation plus interactive que l'évaluation formelle. De plus, l'expérimentation didactique permet d'explorer les processus de pensée de trois élèves, d'en comprendre les fondements et de suivre leur évolution cognitive.

Au troisième chapitre, nous retraçons à partir des verbatim, les propos qui illustrent l'atteinte des critères de l'analyse conceptuelle de la fonction quadratique suivis d'une synthèse des modes de compréhension pour les entrevues d'évaluation. Quant aux entrevues d'intervention, nous analysons le contenu des études de cas. Chaque entrevue d'intervention est d'abord décrite, puis interprétée à la lumière des modèles retenus.

Le quatrième chapitre regroupe les résultats obtenus. Pour les entrevues d'évaluation, nous faisons un rappel des modes de compréhension ainsi que des critères élaborés afin de brosser un sommaire et quelques particularités des évaluations. Quant aux entrevues d'intervention, un rappel des situations d'apprentissage facilite la description des processus d'apprentissage, et ce, selon l'investigation pratiquée. Enfin, nous répondons à la question de recherche à l'aide d'un modèle d'interprétation des activités cognitives de l'élève.

Dans le dernier chapitre, nous résumons tout d'abord la problématique ainsi que les choix méthodologiques retenus pour notre projet de recherche. Ces propos nous conduisent à la question de recherche pour laquelle nous résumons les résultats du quatrième chapitre. Nous ajoutons des commentaires à l'égard de l'analyse conceptuelle, des processus d'apprentissage et de l'approche utilisée. Enfin, nous effectuons un retour critique sur le projet de recherche, suivi des implications pédagogiques et de pistes pour de nouvelles recherches.

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT DE LA FONCTION QUADRATIQUE

CHAPITRE I

LA PROBLÉMATIQUE

1.1 Cadre contextuel

L'intérêt pour le présent projet de recherche résulte d'expériences professionnelles en enseignement des mathématiques et en évaluation des apprentissages. Nos expériences ont permis l'amorce d'une réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par les élèves francophones du Nouveau-Brunswick en résolution de problèmes. Afin de susciter des apprentissages viables, il devient alors opportun de poursuivre notre réflexion par une recherche.

Les champs et les domaines d'études liés à l'éducation sont nombreux. Par conséquent, l'intérêt soulevé pour l'apprentissage et l'enseignement guidera la nature de notre projet de recherche. Nous présenterons d'abord les résultats obtenus par nos élèves aux évaluations provinciales et nationales. Puis, nous examinerons le curriculum et les manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle pour enfin poser le problème de recherche.

1.1.1 Résultats aux évaluations provinciales et nationales

Le ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick (MENB) administre, depuis 1987, un examen en 11^{e} année, soit à la fin du dernier cours obligatoire de mathématiques à l'école secondaire. L'examen de fin d'études secondaires est élaboré avec la participation du personnel enseignant. Le même personnel participe aussi à la correction des questions à réponses courtes et à développement. Les questions, qui ont trait à la résolution de problèmes, figurent parmi celles à développement.

Selon la description de l'examen (MENB, 1992c), près de 25 % de l'évaluation peut être attribuée à la résolution de problèmes. Cinq items mesurent donc les habiletés associées à la résolution de problèmes et les connaissances générales[1] en mathématiques. La correction tient compte de la démarche élaborée en résolution de problèmes. Un des items exploite un contexte non familier tandis que les autres proviennent de contextes familiers. On entend par contexte familier des problèmes traités en salle de classe ou au sein des manuels scolaires.

Après l'administration des examens de fin d'études secondaires, des rapports

[1] Nous préférons employer les termes «connaissances générales» au lieu de «contenu mathématique», car ceux-ci ont diverses connotations en didactique des mathématiques.

statistiques détaillent les résultats pour le cours régulier et modifié[2] de mathématiques. Le tableau n° 1 regroupe les taux de réussite en résolution de problèmes et ceux sur l'ensemble de l'examen selon les cinq administrations pour les années 1997, 1998 et 1999 (MENB, 1997a; MENB, 1997b; MENB, 1998a; MENB, 1998b; MENB, 1999). Nous préférons rapporter le taux de réussite plutôt que la moyenne puisque ce taux est un indice établi sur l'ensemble des élèves de 11e année selon un seuil de rendement fixé à 55 %. Le taux de réussite est donc le pourcentage de ces élèves ayant obtenu le seuil de rendement fixé.

TABLEAU N° 1

Tableau des taux de réussite en résolution de problèmes et des taux de réussite sur l'ensemble de l'examen

Examens de fin d'études secondaires en mathématiques	... pour le cours régulier		... pour le cours modifié	
Administration de ...	En résolution de problèmes	Sur l'ensemble de l'examen	En résolution de problèmes	Sur l'ensemble de l'examen
Janvier 1997	18,5 %	59,8 %	17,6 %	61,5 %
Juin 1997	61,8 %	67,2 %	63,7 %	71,2 %
Janvier 1998	45,8 %	60,1 %	42,7 %	71,9 %
Juin 1998	51,5 %	83,7 %	57,4 %	66,1 %
Janvier 1999	26,3 %	59,9 %	37,9 %	60,9 %

D'après le tableau n° 1, à chaque administration, les taux de réussite en résolution de problèmes sont inférieurs à ceux de l'ensemble de l'examen. Pour le cours régulier, il y a en moyenne un écart de 25 %[3] tandis qu'il est de 22 % pour le cours modifié. Bien que les taux de réussite suivent un cycle d'après le semestre d'administration (janvier ou juin), ils se comportent d'une façon analogue selon le cours (régulier ou modifié) de mathématiques. Les

[2]Le cours modifié s'adresse à une clientèle particulière pour laquelle <u>une partie</u> des objectifs du cours régulier de mathématiques sont dispensés.

[3]Pour établir cet écart, nous convenons de la somme des différences entre le taux de réussite sur l'ensemble de l'examen et le taux de réussite en résolution de problèmes, le tout divisé par le nombre d'administrations, tel que : (59,8-18,5+67,2-61,8+60,1-45,8+83,7-51,5+59,9-26,3)%/5≈25 %.

élèves francophones de 11[e] année au Nouveau-Brunswick semblent éprouver des difficultés à atteindre le seuil de rendement fixé en résolution de problèmes.

Au niveau national, le Conseil des ministres de l'Éducation - Canada (CMEC) administre depuis 1993, un programme d'indicateurs du rendement scolaire. Ce programme est une mesure pour évaluer le système éducatif de chaque instance[4] et son rendement. Les évaluations en mathématiques issues du programme sont administrées à deux groupes d'âge afin de vérifier l'évolution des connaissances et des habiletés de l'élève. Ces évaluations ont donc été administrées à des élèves de 13 et de 16 ans en 1993 ainsi qu'en 1997.

Comme les examens de fin d'études secondaires, les évaluations du programme d'indicateurs du rendement scolaire portent sur les connaissances générales en mathématiques et sur la résolution de problèmes. Pour cette dernière, on a mesuré en plus l'habileté à utiliser diverses stratégies. La performance des élèves est ainsi exprimée en fonction de cinq niveaux de rendement. Semblable aux connaissances générales, le niveau 1 indique des habiletés simples en résolution de problèmes tandis que le niveau 5 représente des habiletés complexes. D'autre part, les élèves qui participent aux évaluations du programme sont choisis au hasard et non sur une base obligatoire comme aux examens de fin d'études secondaires.

Après l'administration des évaluations du programme d'indicateurs du rendement scolaire en mathématiques, le Conseil des ministres de l'Éducation - Canada produit des documents dans lesquels des résultats présentent les niveaux de rendement. Les élèves ayant atteint le niveau 5 satisfont également aux niveaux 1, 2, 3 et 4. Chaque niveau cumule ainsi le pourcentage d'élèves ayant atteint seulement ce niveau et ceux répartis dans les niveaux supérieurs. Le tableau n° 2, de la page suivante, rapporte les pourcentages des élèves francophones de 16 ans du Nouveau-Brunswick, aux cinq niveaux de rendement en résolution de problèmes selon les administrations de 1993 et de 1997 (CMEC, 1993; CMEC, 1997). Les autres pourcentages sont ceux des élèves canadiens, soit les résultats pour l'ensemble des élèves du même âge qui participent aux évaluations. Nous préférons rapporter les résultats des

---

[4]Ce terme désigne, sans distinction, les provinces ainsi que les territoires du Canada.

élèves de 16 ans puisque ce groupe d'âge s'apparente aux élèves de 11^{e} année qui prennent part aux examens de fin d'études secondaires.

TABLEAU N° 2

Tableau des pourcentages d'élèves aux cinq niveaux de rendement en résolution de problèmes

Programme d'indicateurs du rendement scolaire en mathématiques	... de 1993		... de 1997	
Niveau de rendement	Nouveau-Brunswick (francophone)	Canada	Nouveau-Brunswick (francophone)	Canada
1 et plus	94 %	95 %	92,4 %	92,5 %
2 et plus	64 %	74 %	73,2 %	75,9 %
3 et plus	16 %	24 %	37,1 %	39,8 %
4 et plus	2 %	3 %	10,4 %	12,8 %
5	0 %	0 %	1,5 %	2,3 %

D'après le tableau n° 2, à chaque niveau de rendement, les élèves francophones du Nouveau-Brunswick présentent des résultats inférieurs à ceux de leur collègue canadien, et ce, pour les deux administrations. D'autre part, en comparant les niveaux 1 et 2 des élèves du Nouveau-Brunswick, nous constatons que 30 % (94 % - 64 %) de ces élèves n'atteignent que le niveau 1 aux évaluations de 1993. Les résultats des élèves canadiens sont répartis sur les niveaux supérieurs; ce qui explique que 21 % (95 % - 74 %) d'entre eux atteignent le niveau 1 selon la même comparaison. Les résultats de 1997 semblent meilleurs. Toutefois, la même comparaison nous amènerait à reconnaître à nouveau des difficultés en résolution de problèmes chez les élèves francophones du Nouveau-Brunswick par rapport à l'élève canadien.

En dépit du fait que la correction s'accentue sur la démarche aux examens de fin d'études secondaires plutôt que sur les stratégies comme aux évaluations du programme d'indicateurs du rendement scolaire, ces deux instruments d'évaluation écrits donnent le même indice : les élèves francophones du Nouveau-Brunswick, âgé d'environ 16 ans, semblent éprouver des difficultés en résolution de problèmes. Ces difficultés ont été notées aux examens de fin d'études secondaires. «Aux examens provinciaux de mathématiques, les élèves ont démontré beaucoup d'aptitudes au chapitre des notions et habiletés opératoires (contenu mathématique). Par contre, en résolution de problèmes, les élèves éprouvent des difficultés» (MENB, 1997c : 16). Toutefois, les concepteurs du programme d'indicateurs du rendement scolaire évoquent certaines limites à l'égard des connaissances et des habiletés mesurables au moyen d'instruments d'évaluation écrits :

> les dimensions ci-dessous, qui sont des composantes importantes de certains programmes en mathématiques, ne sont pas couvertes par la présente évaluation : l'habileté à utiliser du matériel de manipulation pour résoudre des problèmes, l'habileté à résoudre des problèmes en groupe, et l'exploration de problèmes mathématiques complexes. Ces composantes complexes des programmes mettent en jeu des processus étroitement liés à l'enseignement de la mathématique. Pour les mesurer adéquatement, il faudrait faire appel à des techniques, telles que l'entrevue, le recueil de travaux et les épreuves permettant l'utilisation du matériel de manipulation (CMEC, 1997 : 4).

Enfin, cette réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par les élèves francophones du Nouveau-Brunswick en résolution de problèmes nous conduit maintenant à examiner le curriculum et les manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle. Cet examen nous amène à considérer divers facteurs qui permettront de poser le problème de recherche et de préciser la nature de notre projet de recherche.

1.1.2 Curriculum et manuels scolaires : position du problème

Un examen du curriculum et des manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle nous amène à considérer divers facteurs. Ces facteurs ont trait à l'usage de symboles, à la conception des manuels scolaires, à la formation initiale des enseignants et des enseignantes ainsi qu'à la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction. Nous allons à présent nous attarder à chacun de ces facteurs.

Ainsi le curriculum en mathématiques est associé à l'enseignement du concept de la fonction pour les élèves de 11^{e} et 12^{e} années. Selon ces programmes d'études (MENB, 1992a; MENB, 1992b), ce concept comprend les fonctions polynomiales telles que la fonction linéaire et quadratique. À celles-ci s'ajoutent la fonction exponentielle, logarithmique et trigonométrique. Enfin, pour une étude plus complète, les fonctions réciproques, rationnelles et valeurs absolues sont prévues aux programmes d'études.

Chaque fonction est ainsi caractérisée par des connaissances générales. Ces connaissances sont relatives à l'esquisse de courbes représentatives des fonctions à l'étude, à l'identification du domaine, de l'image (aussi appelée co-domaine), des paramètres d'équations algébriques et de leur rôle ainsi qu'à la manipulation d'équations. Puis on convie les élèves à la résolution de problèmes en dernier lieu. Ces pratiques pédagogiques ont tendance à partir des équations algébriques pour ensuite amener les élèves à faire l'esquisse de courbes représentatives sur le plan cartésien. En raison des nombreuses activités relatives aux connaissances générales, les périodes pour la résolution de problèmes sont souvent différées ou omises. Ainsi un premier facteur intervient.

En effet, la séquence d'enseignement du concept de la fonction mène vers des pratiques pédagogiques qui incitent à faire l'usage précoce du plan cartésien et des équations algébriques. L'usage de symboles peut ainsi accroître les difficultés liées à l'apprentissage du concept puisque l'idée d'une fonction réside à présent dans les systèmes symboliques[5]. D'ailleurs, nos expériences professionnelles nous apprennent que la maîtrise de ces systèmes est laborieuse, comme l'est d'ailleurs les transitions entre la représentation algébrique et graphique. Le curriculum semble donc ne pas accorder une attention suffisante aux systèmes symboliques.

Bien que les enseignants et les enseignantes ont accès à de nombreux manuels de mathématiques, les élèves de 11^{e} et 12^{e} années travaillent essentiellement avec les traductions de la collection *Foundations of mathematics*, soit les manuels «Fondements mathématiques 11» et «Fondements mathématiques 12» de Dottori (1989a; 1989b). En général, chaque chapitre de ces manuels comporte plusieurs sections pour les connaissances générales tandis que la dernière section est réservée à la résolution de problèmes. Le manuel «Fondements mathématiques 11» présente, au premier

[5]Dans notre projet de recherche, les systèmes symboliques, qui ont trait aux représentations graphiques, algébriques et numériques du concept de la fonction, sont respectivement associés au plan cartésien, aux équations algébriques et au tableau de valeurs.

chapitre, une section intitulée «Principes régissant la résolution de problèmes». Cette section propose le modèle de résolution, «lecture-plan-solution-réponse», pour lequel quelques stratégies de résolution figurent au sein du plan. À cet effet, un deuxième facteur intervient.

En effet, la conception des manuels scolaires peut aussi influencer les pratiques pédagogiques. Les enseignants et les enseignantes semblent planifier les séquences d'enseignement selon l'organisation des notions au sein des manuels. D'ailleurs l'aspect fragmenté, souvent véhiculé par les manuels scolaires, peut accroître les difficultés liées à l'apprentissage du concept de la fonction chez les élèves puisque ces derniers ont rarement l'opportunité de le traiter dans son intégrité. À ce moment, nous croyons qu'il est important de mentionner un troisième facteur qui touche au rôle des pratiques pédagogiques.

La formation initiale des enseignants et des enseignantes peut influencer leur attitude ainsi que les pratiques pédagogiques qui en découlent. Ainsi une réflexion sur le concept de la fonction, dont les notions de variation et de régularités, est nécessaire. L'enseignement pourrait alors accorder une plus large place à ces notions plutôt qu'à l'aspect formel du concept. D'ailleurs, la construction de la notion de fonction nécessite-t-elle pas un processus d'appropriation plus élaboré que le simple emploi des systèmes symboliques? L'absence de cette réflexion pourrait tout aussi bien expliquer certaines réactions des élèves. «Y a-t-il une autre façon d'apprendre ce concept?» «À quoi ce concept sert-il?»

En outre, 90 % des élèves de 16 ans utilisent la calculatrice[6] à l'école ou à la maison pour réaliser leurs travaux en mathématiques (CMEC, 1997). Ce quatrième facteur indique que la technologie est de plus en plus utilisée dans l'enseignement du concept de la fonction. La disponibilité et la flexibilité attribuées à cette technologie ont des conséquences sur le développement des curriculums, sur les pratiques pédagogiques, sur l'emploi de symboles en mathématiques et sur les apprentissages des élèves. En somme, on est loin d'une démarche pédagogique qui nourrirait une compréhension du concept de la fonction.

À ce moment, les facteurs décrits nous incitent à reconnaître qu'une construction

---

[6]L'information en provenance du questionnaire n'indique pas s'il s'agit d'une calculatrice à affichage graphique.

déficiente de la notion de fonction chez l'élève peut conduire à des difficultés en résolution de problèmes où les fonctions interviennent. Toutefois, nous ne croyons pas que ces facteurs puissent expliquer les difficultés éprouvées par nos élèves en résolution de problèmes. D'autre part, nous convenons que plusieurs facteurs peuvent influencer les résultats escomptés lorsque l'élève est convié à la résolution de problèmes. Ainsi cette position du problème enrichit la nature de notre projet de recherche. Bref, la solution n'est pas unique et simple, mais nous concluons que la compréhension est une lacune. Notre projet de recherche s'inscrit donc dans le cadre de la compréhension et des processus d'apprentissage chez l'élève.

1.2 Cadre théorique

Il n'est peut-être pas nécessaire de rappeler que les pratiques pédagogiques dans nos écoles sont fortement imprégnées des théories béhavioristes. Ces théories suscitent la planification d'exercices répétitifs avec renforcement afin de voir apparaître les comportements souhaités par l'acquisition de connaissances factuelles, d'algorithmes et d'habiletés diverses. Dans ces conditions, l'enseignant ou l'enseignante est un entraîneur laissant à l'élève un rôle peu actif à l'égard de ses apprentissages. D'autre part, les théories humanistes ont légué quelques héritages à ces pratiques. Ces théories engagent la planification d'activités d'apprentissage par la découverte, pratiques présentes dans les écoles alternatives.

L'expérience tirée de nos pratiques pédagogiques nous permet de remarquer que bon nombre d'élèves, adaptés à ces pratiques, n'arrivent pas à maîtriser une situation et à composer avec un problème. «Les enseignants [et les enseignantes] sont appelés à transformer leur approche pédagogique en ce domaine» (MENB, 1997c : 16). C'est ce qui nous motive à considérer une perspective où l'élève s'engage dans la construction de ses connaissances. Notre projet de recherche s'inscrit dans un cadre théorique qui permet de reconnaître le caractère actif, personnel et constructif de l'apprentissage.

Nous désirons ainsi nous distinguer des théories béhavioristes et humanistes. D'une part, nous ne cherchons pas à étudier le développement de comportements chez l'élève, mais le développement de sa compréhension à l'égard du concept de la fonction. D'autre part, une recherche, qui a trait à la compréhension, ne peut être laissée à des activités d'apprentissage liées à la découverte puisque ce type d'activités ne permet pas des interventions suffisamment structurées. Nous désirons savoir comment l'acquisition du concept de la fonction peut être influencée en portant une attention particulière à la compréhension manifestée par l'élève. C'est ainsi que le choix d'un cadre théorique, qui s'appuie sur les théories constructivistes, s'impose. Cette perspective rend possible l'explication du développement de la pensée par la recherche de compréhension. Développons maintenant ce que nous entendons par l'apprentissage.

1.2.1 Perspective constructiviste de l'apprentissage

L'apprentissage, vu comme un processus d'adaptation, nous conduit à s'attacher aux processus de pensée de l'élève d'où son intérêt dans le cadre de notre projet de recherche. La compréhension se manifeste alors par une recherche d'équilibration entre l'élève qui apprend et l'objet de connaissance. La recherche d'équilibration, à travers le double processus d'assimilation et d'accommodation, est alors caractérisée par des échanges entre les schèmes. Un schème est tout ce qui dans une action est «répétable», transposable, un instrument d'assimilation, donc de généralisation.

> Le schème ne connaît jamais de commencement absolu mais dérive toujours, par différenciations successives, de schèmes antérieurs qui remontent de proche en proche jusqu'aux réflexes ou mouvements spontanés initiaux ... un schème comporte toujours des actions du sujet [de l'élève] qui ne dérivent pas comme telles des propriétés de l'objet du milieu (Piaget, 1967 : 26).

L'assimilation consiste à intégrer de nouveaux schèmes à la structure cognitive de l'élève tandis que l'accommodation tend à modifier cette structure. Les échanges se réalisent non seulement entre l'élève et son environnement, mais aussi entre les schèmes. Lorsqu'une accommodation est nécessaire, la structure cognitive fait obstacle à la modification. D'ailleurs, les obstacles à la modification de la structure cognitive, qui sont source de conflits, sont des occasions menant à une réorganisation des connaissances. L'équilibration cognitive apparaît lorsque l'organisation des schèmes et l'adaptation à l'environnement sont viables.

Ainsi la construction de schèmes est facilitée par des prises de conscience. L'abstraction réfléchissante constitue alors un élément moteur du développement cognitif de l'élève. Piaget voit deux types d'abstraction. La première, l'abstraction empirique, apparaît lorsque l'élève agit sur un objet. Les connaissances sont dérivées de l'objet lui-même, telles que les propriétés retenues par la perception de l'objet. D'autre part, lorsque l'élève agit sur l'objet, il peut également tenir compte de l'action elle-même ou de l'opération. Par exemple, un élève peut se rendre compte que de gros objets sont plus légers que de petits objets. De cette façon, la deuxième, l'abstraction réfléchissante, ne vient pas de l'objet sur lequel l'élève agit, mais de l'action elle-même (Piaget, 1988).

À ce moment, l'abstraction réfléchissante ne se fonde pas sur des actions individuelles ou isolées, mais sur des actions coordonnées. La coordination des actions entraîne une évolution parallèle au plan des structures cognitives. La formation des structures cognitives réside ainsi dans les coordinations les plus générales des actions.

> L'une, dite empirique, consiste à tirer son information des objets eux-mêmes en retenant d'eux certaines propriétés à l'exclusion des autres, et qui existaient en eux avant toute constatation de la part du sujet [de l'élève] (par exemple la couleur ou le poids). L'autre, dite réfléchissante, procède à partir, non pas des objets, mais de la coordination des actions que le sujet exerce sur eux, ce qui n'est nullement pareil, ou des opérations en général du sujet : elle consiste donc d'abord à réfléchir au sens d'un réfléchissement sur un plan supérieur ce qui est tiré de l'inférieur et, d'autre part, à réfléchir au sens d'une réflexion mentale dont le rôle complémentaire est de reconstruire sur le nouveau plan ce qui est abstrait du précédent, d'où une réorganisation qui exige une structuration nouvelle (Piaget, 1978 : 5).

En outre, toute abstraction empirique comporte un minimum d'abstraction réfléchissante puisqu'abstraire une propriété nécessite un début de prise de conscience. Toutefois, l'adaptation nécessite une prise de conscience de sorte que «la prise de conscience d'un schème d'action transforme celui-ci en un concept» (Piaget, 1974 : 261).

Par conséquent, une perspective constructiviste de l'apprentissage nous engage à porter une attention aux propos de l'élève et à croire à la profondeur de son discours afin de susciter une activité de réflexion (Confrey, 1994). Cette activité permet à l'élève de prendre conscience de ses connaissances afin qu'il s'engage à en intégrer d'autres au risque de modifier les connaissances existantes. L'élève devient ainsi en mesure de composer avec de nouvelles situations et de résoudre des problèmes. L'apprentissage est alors un processus de transformation qui permet une réorganisation des connaissances lorsque de nouvelles coordinations, créées par l'élève, surgissent entre ces connaissances (DeBlois, 1997a).

En adoptant cette perspective, nous portons une attention aux processus de pensée. Ces processus nous permettent de savoir comment et pourquoi l'élève opère de telle façon, puis de savoir comment et pourquoi les résultats sont dérivés des processus de pensée. L'attention portée aux propos de l'élève permet alors de favoriser les verbalisations, la gestuelle et les manipulations afin de voir les erreurs comme des étapes de son processus de pensée. Enfin, nous désirons étudier le développement de la compréhension du concept de la fonction chez l'élève ainsi que les processus de pensée qui en découlent. Nous allons donc examiner comment rendre opérationnelle cette perspective constructiviste de l'apprentissage.

1.2.2 Cadre opérationnel de cette perspective

Dans nos écoles, la compréhension est fréquemment associée à la capacité de réussir. Les instruments d'évaluation écrits semblent ainsi décider de cette compréhension en s'appuyant sur l'exactitude des réponses données par l'élève. Pour notre recherche, il devient toutefois important de réaliser une analyse conceptuelle de la fonction afin de nous distinguer de la notion de compréhension véhiculée en enseignement.

Plusieurs chercheurs (Bruner, 1960; Skemp, 1976; Byers et Herscovics, 1977; Herscovics et Bergeron, 1982; Kieran, 1992) ont proposé des modèles qui tentent de décrire la compréhension. Ces modèles de compréhension décrivent autant «les processus [de pensée] menant à la construction des schèmes conceptuels que le résultat de ces constructions» (Herscovics et Bergeron, 1982a : 10). Ainsi les schèmes conceptuels apparaissent comme des objets globaux plutôt que des comportements observables chez l'élève. La construction de ces objets implique alors la succession de critères de compréhension.

Pour les besoins de notre projet de recherche, nous avons choisi de réaliser une analyse conceptuelle à l'aide des modèles de compréhension proposés par Bergeron et Herscovics. Ces auteurs ont élaboré deux modèles. Le premier, le modèle descriptif de compréhension, ne présente pas une définition conceptuelle de la compréhension, mais il s'attarde à décrire la compréhension selon quatre modes : intuitif, procédural, abstrait et formel. Le second, le modèle élargi de compréhension, approfondit le mode intuitif en distinguant trois composantes. Il présente ainsi un développement de la compréhension d'un concept mathématique en deux paliers : le palier logico-physique et le palier logico-mathématique. Le premier palier traite de la compréhension des concepts physiques préliminaires tandis que le deuxième a trait à la compréhension du concept mathématique émergent (Bergeron et Herscovics, 1989).

Les modèles de compréhension proposés par Bergeron et Herscovics constituent un moyen pour faire évoluer les schèmes d'action au sein d'une structure cognitive. Ces schèmes cheminent, se complexifient, s'enrichissent et contribuent à la construction d'un concept mathématique, favorisant ainsi le développement d'une conceptualisation. D'autre part, plusieurs chercheurs (Boukhssimi, 1990; Pépin, 1993; De Kee, 1994; Miloudi, 1995) ont tiré profit de ces modèles de compréhension auprès d'élèves du secondaire pour l'étude du concept de la fonction. Toutefois, le premier palier du modèle élargi de compréhension perd de sa pertinence dans le cadre de concepts plus avancés qui n'admettent pas de concepts physiques préliminaires. Certains concepts mathématiques du secondaire peuvent ainsi être difficilement décrits avec le modèle élargi.

> The model has been used successfully in describing construction of the number concept. [...] However, it proves inadequate to describe the understandings involved in more advanced mathematical concepts, such as trigonometric, exponentiel, or logarithmic functions. Its inadequacy is due to the fact that more advanced mathematical concepts are based on prior mathematical knowledge to a greater extent than they are based on physical pre-concepts (Goldin et Herscovics, 1991 : 67).

Enfin, les modèles de compréhension proposés par Bergeron et Herscovics donnent une orientation à nos interventions au plan méthodologique. Ils favorisent la construction de situations, et particulièrement, de questions à partir des critères élaborés. De plus, les analyses en sont ainsi facilitées. Pour ces raisons, une analyse conceptuelle à partir du modèle descriptif de compréhension nous semble un outil adapté à notre projet de recherche. Il permet aussi de lier les théories constructivistes aux interventions à concevoir. Par conséquent, nous privilégions les termes «modes de compréhension» au lieu de «niveaux de compréhension» dans le but d'exprimer la non-linéarité du modèle retenu. Ainsi les modes de compréhension sont des angles qui peuvent être adoptés pour s'approprier un concept mathématique et leur mise en relation suscite le développement d'une conceptualisation.

En outre, nous choisissons d'ajouter à cette analyse conceptuelle, qui a comme point de départ le concept de la fonction, un modèle d'interprétation des activités cognitives de l'élève. Ce modèle permet de nous situer dans la position de l'élève. C'est à ce titre que les travaux de Piaget et de ses collaborateurs ainsi que plus récemment ceux de DeBlois s'ajoutent au cadre opérationnel de notre perspective constructiviste de l'apprentissage. Maintenant, comment l'abstraction réfléchissante se manifeste-t-elle si l'objet de connaissance se fonde sur le concept de la fonction? Piaget en a fait une esquisse.

En effet, l'évolution de la connaissance chez l'élève engage un passage des fonctions constituantes à leur transformation graduelle en fonctions constituées. Les fonctions constituantes admettent une logique de la fonction : l'élève exprime un lien de dépendance selon les propriétés de l'objet. Ces fonctions traduisent donc des liens de dépendance propres aux schèmes d'action :

> cette forme n'est pas constituée préalablement à son contenu : elle s'élabore en interaction avec les objets auxquels s'applique l'action en formation. Et il s'agit bien là d'interactions, car ces objets ne sont point simplement associés entre eux par l'action, mais intégrés en une structure élaborée grâce à elle, en même temps que cette structure en voie d'élaboration s'accommode aux objets (Piaget, 1968 : 205).

Ensuite, il y a le passage de l'équivalence selon les propriétés de l'objet à l'équivalence selon la nature de l'action. Fortement lié aux opérations, ce passage aux fonctions constituées engage des quantifications. Ces fonctions sont dues aux coordinations les plus générales des actions, les schèmes fonctionnels. L'élève devient ainsi capable de composer la notion de fonction par des quantifications en coordonnant des actions :

> par abstraction réfléchissante, et non plus [par abstraction] simple, du processus même de coordination qui permet de compléter l'ordre de quantité, celle-ci comporte une construction proprement dite par opposition aux données qualitatives seules perceptibles (Piaget, 1968 : 119).

La coordination des actions donne lieu aux abstractions réfléchissantes grâce auxquelles se construisent les compositions d'opérations mathématiques des fonctions constituées.

Suivant le modèle de l'abstraction réfléchissante de Piaget, DeBlois s'en est inspirée pour développer plus particulièrement certains aspects, notamment en insistant sur le rôle des régulations que Piaget réservait à l'abstraction pseudo-empirique et sur le type de coordinations créées par l'élève pour distinguer les structurations partielles des structurations généralisables.

DeBlois (1995) a d'abord interprété le réfléchissement mentionné par Piaget comme étant une manifestation des représentations mentales[7] évoquées par l'élève au contact de l'objet de connaissance. Ces représentations apparaissent alors comme étant un des éléments du processus d'apprentissage qui permet d'étudier la construction réalisée. Elles se manifestent à travers les verbalisations et les manipulations de l'élève selon une tâche à réaliser. DeBlois (1997a; 1997b) a aussi insisté sur les procédures qui émergent des représentations mentales initiales, puisque ces procédures servent de régulations chez l'élève. Pour Piaget (1977), les coordinations réalisées entre les représentations mentales initiales et les procédures pourraient conduire l'élève à réorganiser ses réflexions : une nouvelle construction.

Lors de ses études sur la numération de position de 1995 ainsi que sur les problèmes ayant une structure additive de 1997a et de 1997b, DeBlois a distingué les concepts de structurations partielles et de structurations généralisables. Elle a ainsi pu observer que certaines coordinations entre les représentations mentales et les procédures suscitaient la résolution des problèmes posés, sans possibilité de généralisation créant des structurations partielles. D'autres coordinations mèneraient vers une compréhension dans laquelle apparaissait une prise de conscience chez l'élève et une mobilisation possible de nouvelles réflexions pour résoudre de nouveaux problèmes. Elle a qualifié la structuration créée de généralisable. Selon l'étude de Gray et Tall (1994), étude portant sur les opérations arithmétiques, une trop grande confiance en des procédures particulières pourraient mener vers des échecs. Une fixation de l'une ou l'autre procédure serait donc un facteur important à considérer dans le processus d'apprentissage de l'élève. DeBlois précise

> qu'une fixation à une procédure sera interprétée comme une structuration partielle. En effet, puisque la procédure émerge d'une représentation mentale, l'étude de la fixation de cette procédure permet l'étude de la manifestation d'une coordination entre représentations mentales et procédures. Cette fixation crée alors une structuration partielle pouvant permettre la résolution de certains problèmes ou de

[7]Pour les besoins du projet de recherche, nous appelons «représentations mentales» un ensemble d'images mentales associées à un concept mathématique.

certaines parties d'un problème. Toutefois, la pensée de l'élève reste soumise à l'habillage du problème ou aux types de valeurs numériques utilisées. L'émergence d'une structuration généralisable, et donc d'une flexibilité de la pensée, amène l'élève à prendre conscience de l'importance des relations entre les données des problèmes pour s'adapter au problème proposé (DeBlois, 2000[8]).

Nous croyons que ce modèle peut contribuer à enrichir nos analyses. En effet, si le modèle descriptif de Bergeron et Herscovics nous conduit à faire un portrait de l'élève, le modèle d'interprétation des activités cognitives de l'élève pourrait nous permettre de comprendre le processus d'apprentissage qui a mené vers ce portrait.

En outre, notre projet de recherche s'intéresse au concept de la fonction. Nous avons fait une revue de quelques thèmes touchant à l'étude des fonctions. Ainsi un bref historique du concept de la fonction nous conduit à examiner quelques difficultés d'apprentissage. D'autre part, l'impact de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction nous engage à privilégier une étude par la modélisation de phénomènes et quelques propos à l'égard des systèmes symboliques. Enfin, ces thèmes nous permettront d'élaborer les critères de compréhension de notre analyse conceptuelle.

1.3 Cadre d'investigation

Selon Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986) ainsi que Leinhardt, Zaslavsky et Stein (1990), l'étude des fonctions était un champ d'études peu exploré avant les années '70. Les recherches gravitaient plutôt autour des concepts mathématiques du primaire. Le concept de la fonction n'a été reconnu que quelquefois à titre de constructions importantes pour le développement des connaissances mathématiques. Si cette reconnaissance est parsemée dans les écrits, nous devons toutefois faire exception des travaux de Piaget et de ses collaborateurs. Nous aurons l'occasion de les examiner à nouveau dans ce cadre d'investigation.

Par ailleurs, quelques chercheurs (Markovits, Eylon et Bruckheimer, 1986; Even, 1988; Vinner et Dreyfus, 1989) ont étudié les représentations mentales d'élèves, d'enseignants et de futurs enseignants à l'égard de la définition moderne de la fonction[9]. Ces

[8] Ce modèle fut à l'étude à l'intérieur d'un projet financé par le FCAR-FR055803DC, projet ayant pour titre : «Interpréter pour intervenir : une autre vision de l'enseignement des mathématiques».

[9] La définition moderne de la fonction est définie par deux ensembles A et B, pas nécessairement numériques, avec

études en dégagent le caractère peu élaboré auprès de la plupart des participants : leurs représentations mentales semblent se limiter à des équations algébriques. À notre avis, cette définition ne peut que difficilement véhiculer des représentations mentales chez l'élève et assurer son développement cognitif. Désirant nous centrer sur les préoccupations de notre projet de recherche, la définition moderne de la fonction ne met pas en lumière des processus de pensée et la compréhension que nous entrevoyons à l'égard du concept de la fonction.

1.3.1 Historique du concept de la fonction

Certaines fonctions avaient jadis une signification qui impliquait leur courbe géométrique. Selon Barbin et Itard (1992) ainsi que Dennis et Confrey (1995), ces courbes avaient une existence primaire qui résultait de travaux géométriques. C'est ainsi qu'Apollonius a écrit, au 2^{e} siècle avant J.-C., un ouvrage consacré aux coniques : la parabole devenait un objet statique défini géométriquement par l'intersection d'un plan avec un cône. Sans référence à des unités de mesure et avant toute analyse de ses quantifications, la parabole pouvait être construite de bien des façons en respectant les fondements de cet ouvrage.

L'«apparatus» d'Apollonius construit une parabole selon un ensemble de points équidistants d'un point, le foyer, et d'une droite, la directrice. Une construction semblable peut être simulée aujourd'hui par des logiciels spécialisés. De plus, Scher (1996) décrit la construction d'une ellipse, d'une hyperbole et d'une parabole par des activités de pliage. La dernière construction illustre une série de droites sur un papier, tel que celui ciré, qui laisse entrevoir la parabole, soit la courbe géométrique de la fonction quadratique.

En outre, son existence primaire cadre tout aussi bien avec une nature propice à l'étude de phénomènes. Selon Barbin et Itard (1992) ainsi que Dennis et Confrey (1995), une analyse de cette courbe géométrique lance les premières notions pour le développement d'un système de notation. C'est Galilée, en 1638, qui démontra que la trajectoire du boulet d'un canon est décrite par une portion de la parabole. À ce moment, la nature intemporelle de la géométrie donna un essor au *calculus*. À la fin du 17^{e} siècle, le concept de la fonction

---

une règle de correspondance qui associe à chaque membre de A un et un seul membre de B.

quadratique adhéra à un processus pour l'étude des relations entre les quantités, soit un outil pour la modélisation de phénomènes.

La courbe géométrique de la fonction quadratique devient alors la courbe représentative de certains phénomènes. Selon NCTM (1995), les fonctions polynomiales constituent des fonctions importantes pour décrire ainsi qu'analyser, entre autres, des structures d'ingénierie ou le comportement de phénomènes physiques et économiques. Par exemple, la fonction polynomiale de second degré, la fonction quadratique, peut modéliser la valeur de vente optimale des produits d'une entreprise, l'aire maximale d'un quadrilatère selon un périmètre donné, les mouvements des projectiles, d'un pendule et d'un objet en chute libre ou encore la distance d'arrêt et d'accélération de mobiles en mouvement. Le concept de la fonction quadratique est donc applicable à des problèmes d'optimisation, soit à la recherche de valeurs pour les paramètres qui maximisent ou minimisent un phénomène.

Actuellement, une partie de l'enseignement dispensé auprès de l'élève francophone du Nouveau-Brunswick traite des connaissances générales associées à la parabole et à son équation en 11^e année, puis du concept de la fonction quadratique dans un contexte de résolution de problèmes, particulièrement en 12^e année. En 11^e année, ces connaissances générales apparaissent à la suite de celles de la droite et de son équation ainsi que des systèmes d'équations linéaires et du concept de la fonction linéaire dans un contexte de résolution de problèmes. D'autre part, l'étude du concept de la fonction quadratique en 12^e année précède l'étude de la fonction exponentielle, logarithmique et trigonométrique. La fonction quadratique est donc un concept moteur du curriculum en mathématiques au secondaire.

L'intérêt à l'égard du concept de la fonction quadratique pour notre projet de recherche découle aussi de son statut distinct par rapport aux autres fonctions abordées dans le curriculum. Selon NCTM (1995), à la différence de la fonction linéaire, la fonction quadratique et les fonctions polynomiales de degré supérieur ont des taux de variation qui évoluent constamment. Contrairement à la fonction linéaire, exponentielle et logarithmique, la fonction quadratique a un point d'inflexion, soit un sommet. À la différence de la fonction rationnelle, la fonction quadratique a un domaine continu pour l'ensemble des nombres réels.

Enfin, le bref historique indique que la courbe représentative de la fonction quadratique, la parabole, peut être perçue à titre de caractéristique de certains phénomènes. De plus, la nature charnière de la fonction quadratique au sein du curriculum et son statut distinct en font un concept moteur. Par conséquent, nous avons relevé de certains écrits quelques difficultés d'apprentissage relativement au concept de la fonction quadratique. Néanmoins, cette revue de littérature semble souscrire aux propos du cadre contextuel à l'égard des pratiques pédagogiques qui font hâtivement l'emploi des systèmes symboliques.

1.3.2 Quelques difficultés d'apprentissage du concept retenu

Certaines études (Markovits, Eylon et Bruckheimer, 1986; Schwartz et Yerushalmy, 1992; Janvier, 1993) ciblent la prédominance du modèle linéaire à titre de difficultés d'apprentissage du concept de la fonction quadratique. En effet, l'élève associe à ce concept une droite ou des processus de calcul applicables au concept de la fonction linéaire. Cette difficulté est peut-être due à l'ordre dans lequel les fonctions sont introduites dans le curriculum de mathématiques. D'ailleurs, Miloudi (1995) indique, dans son étude du concept de la fonction logarithmique et exponentielle, que l'élève s'en remet souvent aux modèles linéaires et quadratiques. L'étude de ces derniers modèles précède l'étude de la fonction logarithmique et exponentielle.

Une autre étude indique que l'on n'accorde pas suffisamment d'importance à l'interprétation des systèmes symboliques. En effet, seulement 35 % des futurs enseignants questionnés ont répondu «2» à la question suivante : «if you substitute 1 for x in ax^2+bx+c (a, b and c are real numbers) you get a positive number. Substituting 6 gives a negative number. How many real solutions does the equation $y = ax^2+bx+c = 0$ have?» (Even, 1988 : 308). Quant à ces enseignants, 14 % ont soutenu leur réponse de la représentation graphique de la fonction quadratique. En outre, plus du quart des futurs enseignants questionnés ont donné les réponses, «∞», «3», «4» ou «5» alors que l'on s'attendait à recevoir la réponse «2». L'interprétation des systèmes symboliques, présumée être comprise à partir de leur structure interne, pose donc des difficultés d'apprentissage particulières.

Zaslavsky (1988)[10] a observé que les transitions entre la représentation graphique et algébrique sont problématiques lorsque l'un des paramètres de l'équation quadratique est manquant. D'autres résultats indiquent que ces paramètres sont utilisés comme base de vérification des transitions. En effet, si un élève doit associer une courbe représentative à un choix d'équations algébriques ou une équation à un choix de courbes, il travaille toujours dans la même direction : de la représentation algébrique à celle graphique.

Les études de Goldenberg (1987) ainsi que de Borba et Confrey (1996) dégagent quelques réserves à l'égard de la pertinence de l'une des formes de la représentation algébrique. La construction de la forme générale, $f(x) = ax^2+bx+c$ (a, b et c sont des nombres réels), est problématique à cause du comportement difficilement descriptible du paramètre b. L'élève a plus de succès avec le sommet, qui est le point d'inflexion du modèle quadratique, et la forme canonique, $f(x) = a(x-p)^2+q$ (a, p et q sont des nombres réels). En effet, le sommet est non seulement un paramètre significatif, mais il est substantiel pour l'étude du réel. «Not only is the vertex a more salient feature, but in real-world be most likely to use» (Goldenberg, 1987 : 199). Enfin, la forme canonique semble pertinente pour maintenir des liens avec certaines caractéristiques des phénomènes.

Toutefois, les difficultés liées aux translations sont le reflet de la nature inconsistante de cette forme. C'est pourquoi les études de Confrey et Smith (1992), de Borba et Confrey (1996) ainsi que les propos de Tall (1996) ciblent une difficulté d'apprentissage liée à l'interprétation de la translation horizontale et verticale de la parabole. Une translation de $+c$ unité(s) selon les abscisses positives transforme la représentation algébrique de $y = f(x)$ à $y = f(x-c)$. L'étude de Borba et Confrey précise la difficulté à saisir pourquoi la courbe de $y = f(x)+c$ se déplace selon les ordonnées positives tandis que la courbe de $y = f(x-c)$ se déplace selon les abscisses, elles aussi, positives. Ces difficultés sont non seulement liées à la transition entre deux systèmes symboliques, mais à l'équivalence d'une translation du domaine.

Cette revue de littérature nous rappelle que les difficultés d'apprentissage à l'égard du

---

[10]Ces propos sont tirés de l'article de Leinhardt, Zaslavsky et Stein (1990).

concept de la fonction quadratique sont nombreuses. La plupart sont associées aux systèmes symboliques, découlant ainsi de l'aspect formel du concept. Ces difficultés d'apprentissage contrastent également avec les propos de l'historique du concept de la fonction. Cet historique encourage un processus pour l'étude des relations entre les quantités plutôt qu'une intégration de solutions évoluées et toutes faites dont l'élève n'est point convaincu de la légitimité.

Comme nous l'avons évoqué dans le cadre contextuel, la technologie est de plus en plus utilisée dans l'enseignement du concept de la fonction. Nous ne pouvons donc pas passer sous silence l'apport de la technologie. Les propos suivants exposent un bref historique de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction, un impact de cette technologie ainsi que des réserves, que nous qualifions, techniques et fondamentales.

1.3.3 La technologie dans l'enseignement des fonctions : notre position

Selon Leinhardt, Zaslavsky et Stein (1990), plus que tout autre thème de la didactique des mathématiques, la technologie apporte un appui controversé aux recherches. Tall (1996) indique que la plupart des recherches et des changements apportés aux curriculums de mathématiques sont survenus presque exclusivement au Canada et aux États-Unis à partir des années '70 avec le marché grandissant des ordinateurs personnels.

Au début des années '80, la haute résolution visuelle des logiciels a attiré l'attention des concepteurs de curriculums en mathématiques. En 1985, de nouvelles facilités ont entamé le développement de logiciels qui ont engendré une série de réformes des curriculums. Ces logiciels offrent un environnement propice à la génération de systèmes symboliques, aux transitions entre ces systèmes, aux actions au sein d'un système, et ce, de manière à maintenir un parallèle saisissant avec les autres systèmes. Puis l'approche la plus viable et économique opte pour les calculatrices à affichage graphique qui exploitent un environnement semblable à celui des logiciels. Selon Phillips (1995) et Kaput (1995), la part grandissante attribuée au concept de la fonction dans les curriculums prendra encore plus d'ampleur avec la panoplie de dispositifs annexés à l'ordinateur. Ces dispositifs mesurent en temps réel une investigation qui se déroule aux côtés de l'ordinateur. C'est ainsi que, depuis 1989, NCTM recommande l'emploi de logiciels à tous les niveaux d'enseignement des mathématiques. D'autre part, les calculatrices à affichage graphique n'y font pas exception. L'apport de la technologie est maintenant considéré comme une approche technologique (NCTM, 1995). Cette approche incite donc les recherches sur le concept de la fonction à faire l'emploi d'un environnement manipulateur de systèmes symboliques.

Les adeptes et les sceptiques voient des implications pédagogiques différentes et ne s'entendent pas à l'égard de l'impact de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction. Les résultats sont fréquemment diversifiés. Nous convenons que la nature des tâches est modifiée par l'approche technologique puisque le groupe expérimental reçoit nécessairement des directives et des matériaux différents du groupe témoin. «The experimental groups also received different instruction and used different curriculum materials than the control groups» (Dunham et Dick, 1994 : 441). Cette diversité ne peut donc pas mettre en lumière la direction dans laquelle les curriculums doivent s'engager.

Par conséquent, les enseignants et les enseignantes, sous l'influence du souffle technologique, entament des changements qui se reflètent dans les manuels scolaires. Ces changements risquent de créer un apport de symboles et de procédures à l'enseignement des fonctions. Les difficultés d'apprentissage décrites précédemment à l'égard du concept de la fonction quadratique seront-elles résolues pour autant avec l'approche technologique? «New tools that do the same thing will not solve old problems» (Burrill, 1995 : 98).

Bref, les adeptes de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction affirment qu'un environnement manipulateur de systèmes symboliques est plus interactif et exploratoire, donc favorable à la résolution de problèmes. Les sceptiques indiquent que cet environnement n'est pas nécessaire pour adapter la plupart des changements aux curriculums de mathématiques. D'ailleurs, nous convenons que cette technologie a agi jusqu'à présent, à titre de catalyseur : un facteur qui favorise les réformes des curriculums en mathématiques, mais qui est accessoire pour la compréhension du concept de la fonction. Dégageons certaines réserves techniques, qui ont trait à l'usage de cet environnement, et d'autres fondamentales touchant aux représentations mentales développées par l'élève.

Les premières réserves apparaissent dans diverses études sur l'impact de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction. Selon Boukhssimi (1990), la courbe représentative de la fonction linéaire sur l'écran d'un moniteur ne peut être aussi fidèle que celle sur un plan cartésien par l'approche papier-crayon. En effet, l'action spontanée est plus complexe; elle doit être traduite en des paramètres intelligibles par un environnement manipulateur de systèmes symboliques. La maîtrise de cet environnement requiert donc un investissement d'efforts intellectuels tels que des habiletés et des algorithmes techniques (Schwartz et Yerushalmy, 1992; Kaput, 1987; 1995). D'autre part, les logiciels et les calculatrices à affichage graphique sont fréquemment des outils asymétriques. L'élève n'a parfois pas l'opportunité d'interagir directement avec les autres systèmes que par la représentation algébrique. Enfin, selon Ruthven (1990), l'élève a des performances qui sont d'autant plus influencées par des habiletés liées aux interactions possibles que par ses propres connaissances mathématiques.

Ces réserves techniques font place à d'autres, plus fondamentales. Selon Leinhardt, Zaslavsky et Stein (1990), Kaput (1987; 1995) ainsi que Borba et Confrey (1996), l'élève développe une forte alliance avec un environnement manipulateur de systèmes symboliques. Une courbe représentative conçue par cet environnement est incontestable pour l'élève : l'évidence lui suffit! De plus, certains systèmes symboliques institués dans cet environnement peuvent entrer en conflit avec ceux construits par l'élève. Selon Goldenberg (1988), étant donné la nature de certaines tâches associées à l'emploi d'un environnement manipulateur de systèmes symboliques, l'élève en vient à concevoir une fonction à partir de la variation des paramètres de l'équation algébrique, reléguant ainsi à un sens vague le rôle des variables. Selon notre définition[11], c'est une variable qui prend successivement des valeurs ordonnées et non les paramètres de l'équation algébrique. La nature de cette tâche peut donc difficilement véhiculer des représentations mentales liées au concept de la fonction.

---

[11] Pour les besoins de notre projet de recherche, nous choisissons d'adopter la définition suivante : «une variable est une grandeur qui peut prendre successivement des valeurs ordonnées dans une progression définie» (Piaget , 1968 : 157).

Enfin, nous convenons que l'usage d'un environnement manipulateur de systèmes symboliques nécessite d'abord une compréhension du concept de la fonction. Dans ce sens, nous ne croyons pas que l'approche technologique soit préférable à celle de la modélisation de phénomènes puisque nous substituons des manipulations algébriques par des algorithmes techniques. «We would be replacing abstract symbol manipulation with equally abstract algorithmic techniques on how to use graphing calculator» (Phillips, 1995 : 106). D'autre part, une alliance entre un projet de recherche associé à la compréhension et l'approche technologique semble difficile à concevoir puisque les systèmes symboliques seraient relégués au second plan des tâches de l'élève. Bref, les réserves techniques et fondamentales constituent les raisons pour lesquelles nous n'avons pas retenu l'approche technologique. C'est ainsi que nous entrevoyons l'étude du concept de la fonction quadratique par la modélisation de phénomènes, soit un processus pour l'étude des relations entre les quantités.

1.3.4 L'étude des fonctions et la modélisation de phénomènes

Abordés à quelques reprises, Piaget et ses collaborateurs ont observé la présence d'une compréhension intuitive du concept de la fonction. Leurs travaux touchent aux caractères particuliers du concept : «si l'idée de fonction est déjà contenue dans la mise en correspondance de deux grandeurs [...], la construction de la notion de fonction est beaucoup plus laborieuse» (Piaget, 1968 : 162). Dans ses conclusions, Piaget ajoute que la comparaison directe de données issues d'une investigation de phénomènes[12] facilite la quantification des fonctions, soit la construction de la notion de fonction. Par conséquent, la notion de variation est comprise dans des relations de covariations, soit des relations de variation des variations. En effet, si une grandeur entraîne une variation sur une autre grandeur, celle-ci est exposée à des relations de covariations. L'élève doit alors opérer les différences absolues, soit aller au-delà des différences relatives entre les données recueillies d'une investigation. Les travaux de Piaget et de ses collaborateurs dégagent ainsi les origines du raisonnement qualitatif du concept de la fonction et sa transformation en un raisonnement quantitatif.

---

[12] Ces travaux ont mis en oeuvre le transvasement du contenu d'un récipient à un autre de forme différente.

L'une des approches utilisées pour l'étude des fonctions semble donc s'inscrire dans la modélisation de phénomènes pour laquelle le concept de la fonction quadratique joue un rôle substantiel. L'élève est amené à décrire, à construire et à utiliser un modèle mathématique qui caractérise un phénomène. «The mathematical modelling of real world situations is often recommended for its potential in making mathematics meaningful for students» (Matos et Carreira, 1996 : 345). En effet, le curriculum de mathématiques en Hollande ne contient aucun cours d'algèbre, mais de riches situations d'apprentissage où intervient l'étude du réel, et ce, à partir du primaire. «Students'productions are gradually shaped into more formal systems over time, all in the context of realistic applications» (Kaput, 1995 : 86). Tall (1996) précise que bon nombre d'études dégagent une compréhension intuitive si les phénomènes sont temporels; les relations qualitatives, facilement repérables, aident les quantifications. Si la nature du phénomène est intemporelle, l'élève fait tout de même référence au temps.

Selon les propos de Leinhardt, Zaslavsky, Stein (1990), de Kaput (1987; 1992) et de Phillips (1995), si le concept de la fonction a une nature propice à la modélisation de phénomènes, cette modélisation nécessite la reconnaissance de régularités. Ce processus est au coeur de l'acquisition d'une compréhension des mathématiques puisque «an algebraic description of a function is shorthand for a natural language based description» (Kaput, 1992 : 290). L'élève doit ainsi construire et généraliser une régularité à partir de données. Kaput, principal investigateur de la reconnaissance de régularités avec son jeu *Guess my rule*, a observé que l'élève se préoccupe de la justesse de la régularité plutôt que de la forme de la représentation algébrique. Ce cas s'est particulièrement manifesté pour le concept de la fonction quadratique selon lequel l'étude avait prévu un éventail de formes.

D'autres études dégagent le même processus de construction et de généralisation d'une régularité à partir de données. Les études de Confrey et Smith (1992) ainsi que de Borba et Confrey (1996) ont exploité la reconnaissance de régularités croissantes des fonctions polynomiales. Des résultats semblables sont obtenus par le calcul de ratios de la fonction exponentielle (Confrey, 1994; Miloudi, 1995). De même, les règles algébriques de base pour la fonction linéaire (Boukhssimi, 1990), valeur absolue (Borba, 1994) et quadratique (Hagen et Mick, 1995; Mick et Bazak, 1995) sont construites par l'analyse des données.

Évoquée dans les travaux de Piaget et de ses collaborateurs, la notion de variation semble se distancer du statut statique dispensé en enseignement conventionnel. «Chercher le nombre qui ...» ou «trouver la solution d'une équation» n'amène pas pour autant la variation dans le symbole ou dans l'esprit de l'élève qui analyse. Selon notre définition, une variable est une grandeur qui peut prendre successivement des valeurs ordonnées dans une progression définie. Cette définition donne à la notion de variation un statut plus dynamique qui éventuellement rend possible la variation selon des valeurs ordonnées et la modélisation d'un phénomène selon une progression définie telle que celle d'une grandeur au carré, x^2.

Par exemple, la notion de variation ne peut se comprendre en sciences sans une analyse des relations entre les quantités. «L'étude du réel débouche sur la mise en relation numérique entre divers facteurs [ou diverses grandeurs] issus de l'expérimentation [ou d'une investigation] et de la réflexion, mis en relation qui conduit à la variable» (Janvier, Charbonneau et de Cotret, 1989 : 65). Ces propos appuient ceux de Piaget puisque la notion de fonction apparaît comme un instrument d'intégration d'états successifs ou de valeurs ordonnées. Nous préférons ainsi traiter de la notion de variation dans cette perspective.

L'étude des fonctions semble s'associer à la modélisation de phénomènes. La nature des phénomènes contribue à la génération de relations qualitatives tandis que l'analyse des données issues d'une investigation rend la quantification possible. Par des relations de covariations, cette quantification mène à la reconnaissance de régularités. Des phénomènes, où s'inscrit une application de la fonction quadratique, ont été décrits dans l'historique du concept de la fonction. Cela constitue donc autant d'éléments qui peuvent contribuer à la compréhension du concept de la fonction quadratique.

> Il y a lieu, croyons-nous, de mieux questionner la tradition; le statut particulier que confère aux objets mathématiques l'utilisation qu'on en fait en sciences exactes et humaines commande peut-être une approche plus éclectique à la notion de fonction qui viserait à lui redonner toute sa richesse et sa complexité (Janvier, 1993 : 37).

À ce moment, l'occasion est favorable pour distinguer la modélisation de phénomènes de la résolution de problèmes. Selon l'historique du concept de la fonction, la modélisation de phénomènes souscrit à un processus pour l'étude des relations entre les quantités. D'après notre pratique professionnelle, la résolution de problèmes prend la forme d'un ensemble de moyens pour trouver une réponse à un problème donné. La résolution de problèmes correspond donc à une approche qui permet à l'élève de développer des habiletés de base. La modélisation de phénomènes est une autre approche qui permettrait à l'élève de faire l'étude des relations entre les quantités, modifiant ainsi le rôle de l'élève face à ses apprentissages.

La modélisation de phénomènes amène l'élève à réaliser une investigation, soit une recherche systématique et approfondie d'un phénomène. La résolution de problèmes conduit trop souvent l'élève à suivre un modèle de résolution, «lecture-plan-solution-réponse», tel que décrit dans le cadre contextuel. L'enseignant ou l'enseignante propose alors des problèmes qui suivent la présentation des connaissances générales. Par conséquent, le rôle de l'enseignant ou de l'enseignante se modifierait, si la modélisation de phénomènes devenait une approche. L'enseignant ou l'enseignante doit alors élaborer des situations d'apprentissage dans lesquelles les connaissances nécessaires à l'étude des relations entre les quantités sont construites par l'élève. C'est ainsi que nous convenons des principales distinctions entre la modélisation de phénomènes et la résolution de problèmes.

Comme nous l'avons évoqué dans cette problématique, l'étude des fonctions aborde la construction et l'interprétation des systèmes symboliques. La nature de notre projet de recherche s'expose ainsi à l'emploi de ces systèmes. Nous ne pouvons pas ignorer leur apport. La prochaine partie expose donc quelques propos à l'égard des systèmes symboliques.

1.3.5 L'étude des fonctions et les systèmes symboliques

D'après Janvier (1987a), Kaput (1987) et Yerushalmy (1997), les systèmes symboliques sont nécessaires, étant donné la nature complexe de certains concepts mathématiques. Ces systèmes qui font appel à des symboles cherchent à établir une correspondance entre les concepts et les représentations mentales de l'élève. D'autres auteurs (Markovits, Eylon et Bruckheimer, 1986; Schwarz et Dreyfus, 1995) indiquent que chaque système symbolique n'accorde qu'une partie de l'information à l'égard du concept de la fonction. De plus, certains systèmes véhiculent de l'information qualitative tandis que d'autres rapportent de l'information quantitative.

En effet, la représentation algébrique spécifie la relation exacte, mais quelques caractéristiques sont implicites. La représentation numérique constituée d'information quantitative rassemble des données, mais aucun détail à l'égard de leur nature. La représentation graphique véhicule principalement de l'information qualitative, mais elle ne peut illustrer qu'une partie de la courbe représentative d'une fonction; cette fenêtre expose un portrait local. Quelle que soit l'information, celle-ci n'est guère globale et complète. Chaque système symbolique donne un aperçu selon une perspective qui élucide certaines caractéristiques, mais en laisse d'autres beaucoup moins précises (Goldenberg, 1987; Borba et Confrey, 1996).

L'étude des fonctions a sa part de difficultés notamment dans le cas des transitions entre les systèmes symboliques. Janvier (1987a; 1989) a abondamment traité des transitions vues comme un processus nécessaire pour aller d'un système à un autre. Dans l'étude de Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986), les participants ont opéré les transitions en composant avec l'une des caractéristiques (son domaine, son image, sa règle de correspondance) du concept de la fonction. Cette particularité rejoint les propos de Janvier afin d'attribuer un sens à l'emploi des symboles. «It [les transitions] will be envisaged as a form of translation that does not simply imply going from one source to another, but also coordinating both sources taking into account the fact that the connotations attache to the concept are present» (Janvier, 1989 : 146).

Nous convenons que l'emploi des systèmes symboliques enrichit le concept de la fonction quadratique, car la compréhension est aussi un processus basé sur la capacité de les construire et de les interpréter. «Understanding is a cumulative process mainly based upon the capacity of dealing with an "ever-enriching" set of representations» (Janvier, 1987a : 67). La représentation numérique, graphique et algébrique répond ainsi aux caractères partiels (global ou local), particuliers (qualitatif ou quantitatif), et nécessairement, complémentaires des systèmes symboliques. Les transitions doivent alors engager la coordination de deux systèmes pour tenir compte des caractéristiques du concept. À notre avis, ces caractéristiques se substituent à celles au sein des phénomènes étudiés.

Selon Janvier (1993), les caractéristiques peuvent mettre en relation deux quantités variables auxquelles l'élève peut associer des symboles, x et y par exemple. À ce moment, nous pouvons considérer comme des modélisations les transitions qui conduisent à la construction des systèmes symboliques. Autrement, les transitions contraires aboutissent à des interprétations. «On peut [alors] imaginer facilement toute une foule de relations entre variables qui donnent lieu à des modélisations et à des interprétations graphiques [par exemple] qui mettent en jeu autre chose que des droites» (Janvier, 1993 : 24). La modélisation de phénomènes constitue donc un processus qui peut être favorable à l'étude des relations entre des quantités où interviennent des applications de la fonction quadratique.

Dans ce cadre d'investigation, nous avons dégagé quelques difficultés d'apprentissage du concept de la fonction quadratique. Ces difficultés sont surtout associées aux systèmes symboliques, découlant ainsi de l'aspect formel du concept. Nous croyons que la construction et l'interprétation des systèmes symboliques impliquent d'autres éléments intervenant dans la compréhension. Ces éléments ont trait à des critères où nous pouvons situer la pensée de l'élève. C'est alors que devient nécessaire une analyse du concept de la fonction quadratique.

1.4 Notre analyse conceptuelle

Plusieurs modèles peuvent décrire la compréhension des concepts mathématiques. Nous avons retenu le modèle descriptif de compréhension proposé par Herscovics et Bergeron (1982b). Ce modèle décrit un processus de construction des connaissances. Pour réaliser l'analyse conceptuelle de la fonction quadratique, nous avons considéré les analyses de Boukhssimi (1990) et de Miloudi (1995) ainsi que les propos de Confrey (1994), de Janvier (1987a; 1993), de Kaput (1992) et de Piaget (1968).

1.4.1 Le mode de compréhension intuitive

Le mode de compréhension intuitive se manifeste par des connaissances informelles. Ces connaissances sont caractérisées par des préconcepts (la surface est un préconcept de l'aire), par une façon de penser basée sur la perception visuelle ou par des actions primitives non quantifiées. Par exemple, ajouter et réunir sont deux schèmes d'action associés à l'addition arithmétique. Puis certaines connaissances informelles ont trait à une estimation basée sur des approximations rudimentaires (Herscovics et Bergeron, 1982b).

Un premier critère est de pouvoir reconnaître les situations qui présentent des variations des situations qui n'ont, par exemple, que des états constants. L'élève discrimine alors une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas (Miloudi, 1995). Nous définissons, par situation quadratique, une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique. Une telle situation présente des états où le développement est croissant, décroissant ou nul. Nous entendons, par développement nul, un état maximal ou minimal par rapport aux autres états de la situation quadratique. D'autre part, une situation quadratique est caractérisée par des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance ou par des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis des états de croissance. Ainsi un deuxième critère a trait à la reconnaissance des états successifs dans le développement d'une situation quadratique. Nous entendons, par état, une façon primitive d'exprimer une pause dans le développement d'une situation quadratique.

Ces deux critères, dits du mode de compréhension intuitive, se manifestent par la description et la comparaison des situations proposées. Parmi ces situations, nous prévoyons une situation où intervient une application de la fonction linéaire. L'élève tente de décrire le développement des situations alors que la comparaison le conduit à identifier des états particuliers pour chaque situation. Ces descriptions et ces comparaisons engagent une estimation basée sur des approximations rudimentaires (états de croissance, états de décroissance, état maximal ou minimal). Par exemple, la notion d'aire est un préconcept pour une situation qui modélise l'aire d'un quadrilatère selon ses dimensions. Ainsi les situations peuvent susciter l'émergence de certaines connaissances informelles. Toutefois, l'élève doit identifier des états particuliers. La plupart des situations quadratiques ont un état maximal ou minimal; ce qui n'est pas le cas pour la situation faisant intervenir une application de la fonction linéaire. Le mode de compréhension intuitive touche donc aux états d'une situation quadratique qui expriment un lien de dépendance (Piaget, 1968).

1.4.2 Le mode de compréhension procédurale

Au mode de compréhension procédurale, l'acquisition de procédures, qui coordonnent les connaissances intuitives et certains prérequis, rend possible une systématisation. Celle-ci devrait éventuellement susciter des processus de pensée libérés de la perception visuelle. Le concept mathématique n'a pas encore d'identité propre : il existe à travers la coordination des procédures. Par exemple, le dénombrement, soit à partir de un ou à partir d'un de ses termes, est une procédure arithmétique permettant de quantifier les deux schèmes d'action associés à ajouter ou à réunir (Herscovics et Bergeron, 1982b).

Pour ce mode de compréhension, l'élève est encouragé à faire l'utilisation du matériel de manipulation pour préciser ses intuitions et pour se doter de repères. Un premier critère porte sur l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique (Janvier, 1993). D'une part, l'élève peut procéder par des regroupements de jetons dont l'apparition des états se fait selon le retrait ou l'ajout d'un nombre de jetons. Toutefois, ces regroupements, qui constituent des repères, sont coordonnés à l'état maximal ou minimal d'une situation quadratique. Autrement, il peut faire intervenir une schématisation, telle qu'une forme simplifiée d'un tableau ou d'une courbe n'illustrant pas nécessairement les valeurs des états, les axes et les grandeurs. À ce moment, nous entendons, par l'ordonnance des états successifs, que des états de croissance <u>avant l'état maximal</u> et que des états de décroissance <u>après l'état maximal</u>. Sinon, ce critère implique que des états de décroissance <u>avant l'état minimal</u> et que des états de croissance <u>après l'état minimal</u>. L'élève ordonne ainsi les états par des repères ou par visée spontanée, reconnaissant à ce moment une relation qualitative entre les grandeurs. Un deuxième critère implique alors l'identification des grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. L'élève identifie les grandeurs qui caractérisent à la fois chaque état de cette situation et son développement global.

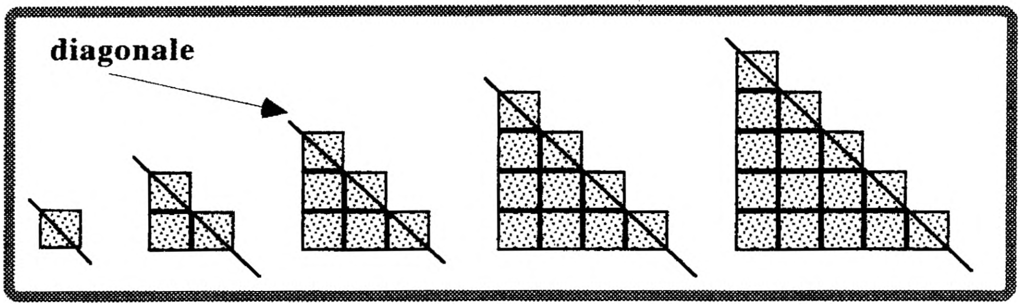
Ces deux critères, dits du mode de compréhension procédurale, se manifestent à travers la manipulation du matériel. Cette manipulation traduit non seulement le développement des situations quadratiques, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. À partir d'un regroupement de jetons caractérisant par exemple l'état minimal d'une situation quadratique, l'élève fait intervenir des procédures. Il peut ainsi coordonner l'ajout de jetons à ce regroupement au voisinage de l'état minimal. De même, la modélisation de l'aire d'un quadrilatère selon ses dimensions conduit à la coordination de procédures entre l'aire et les dimensions. Ainsi une coordination entre connaissances intuitives et prérequis permet l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique.

Ce mode de compréhension rend possible la traduction du lien de dépendance d'une situation quadratique à une équivalence selon la nature de l'action. Ainsi la composition du lien de dépendance peut orienter le sens opératoire de l'abstraction (Piaget, 1968).

1.4.3 Le mode de compréhension abstraite

Quant au mode de compréhension abstraite, il implique à la fois l'abstraction prise dans le sens courant et dans le sens mathématique. Le premier sens implique un détachement de toute systématisation et de toute procédure. La quantité 7 existe dans la pensée de l'enfant sans que la présence d'objets soit nécessaire et sans qu'il ait besoin de les compter. Le sens mathématique a trait à la construction d'invariants, à la réversibilité, à la composition d'opérations et de transformations mathématiques ainsi qu'à la généralisation. Pour celle-ci, la commutativité de la multiplication peut être perçue comme étant une propriété s'appliquant à tous les couples de nombres naturels (Herscovics et Bergeron, 1982b).

Un premier critère a trait à la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. En effet, les valeurs de la grandeur dépendante sont liées aux valeurs de la grandeur indépendante. De cette façon, la valeur donnée à l'une des grandeurs détermine la valeur de l'autre grandeur. Cette relation fonctionnelle caractérise ainsi tous les états d'une situation quadratique. Un deuxième critère vise la reconnaissance d'une régularité (Kaput, 1992). Par une composition d'opérations mathématiques, l'élève reconnaît une régularité entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Cette régularité, construite et généralisée, est issue de l'analyse des données d'une investigation. Ainsi les valeurs de la grandeur dépendante sont déterminées de la même façon, quelles que soient les valeurs de la grandeur indépendante. Un troisième critère traite de l'identification d'un résultat constant par les différences de différences (Confrey, 1994). L'élève dégage un résultat constant lorsqu'il fait la soustraction entre les valeurs de la grandeur dépendante. Cette composition d'opérations mathématiques constitue un modèle de prédiction des états successifs d'une situation quadratique alors que la reconnaissance d'une régularité permet l'intégration de ces états. Le résultat constant est lié au paramètre a de la représentation algébrique, quelle que soit sa forme. Ce résultat est deux fois la valeur du paramètre a.



Ces trois critères, dits du mode de compréhension abstraite, se manifestent à travers les coordinations les plus générales entre connaissances intuitives et prérequis. Afin d'élucider les critères, nous avons conçu la situation ci-dessus illustrant différents arrangements de cubes. Par une coordination entre connaissances intuitives et prérequis, l'élève peut construire lui-même le sixième arrangement de la situation, reconnaissant ainsi la relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes. Cette relation s'établit alors entre le nombre de cubes dans l'arrangement et le nombre de cubes à sa base. Une composition d'opérations mathématiques l'amène à reconnaître que le nombre de cubes au-dessous de la diagonale est le nombre de cubes à la base élevé au carré et divisé par deux. Puis l'élève peut compléter cette composition en ajoutant que le nombre de cubes au-dessus de la diagonale est la moitié du nombre de cubes à la base. Cette régularité est généralisable à tous les arrangements. Sinon, il peut dénombrer les cubes dans chaque arrangement (1, 3, 6, 10, 15). La première soustraction entre ces nombres donne 2, 3, 4, 5; puis la deuxième soustraction donne 1. Ce résultat constant constitue alors un modèle de prédiction des états successifs de la situation. De cette façon, les coordinations les plus générales aboutissent aux compositions d'opérations mathématiques. La compréhension abstraite admet ainsi les quantifications qui traduisent les relations de covariations en des lois de progression (Piaget, 1968).

1.4.4 Le mode de compréhension formelle

Le mode de compréhension formelle réfère aux interprétations usuelles d'un concept mathématique. Ces interprétations ont trait à l'axiomatisation et à la preuve formelle. Deux autres sens sont associés à la formalisation. Il y a celui de préciser un concept mathématique à l'aide d'une définition formelle et celui d'utiliser une symbolisation mathématique pour désigner le concept. Ce mode de compréhension suppose qu'un certain degré d'abstraction est atteint (Herscovics et Bergeron, 1982b).

Ceci nous amène au critère de l'utilisation de variables (Boukhssimi, 1990). À partir de la représentation numérique, l'élève peut représenter, par les variables x et y par exemple, l'ensemble des données d'une situation quadratique. D'autre part, les points cartésiens issus de cette situation (x, y) ne s'alignent pas conformément à une variation représentée par une droite sur la représentation graphique. C'est ainsi que nous privilégions plutôt de l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien pour exprimer un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Un deuxième critère caractérise une situation quadratique par une équation algébrique de base, $y = ax^2$, ou d'une autre forme puisque les propos du cadre d'investigation ne semblent pas dégager une forme particulière. Il peut être question d'une forme algébrique liée à un schéma de translation ou à la nature de l'investigation. C'est ainsi que l'utilisation de variables prédispose à la construction de la représentation algébrique par la composition d'opérations mathématiques issue de la régularité ou du résultat constant. À ce moment, la suggestion d'une valeur inconnue pour le nombre de cubes à la base des arrangements engage l'élève à utiliser des variables. De cette façon, le nombre de cubes à la base élevé au carré et divisé par deux correspond à $1/2x^2$, et la moitié du nombre de cubes à la base, $1/2x$. La représentation algébrique de la situation illustrant différents arrangements de cubes devient alors $1/2x^2+1/2x$. Un dernier critère établit une correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique : tout état appartient à la représentation numérique, graphique et algébrique. Selon les propos de Janvier (1987a; 1993), l'élève opère des transitions entre les systèmes symboliques afin de maintenir une correspondance entre les états successifs. Par exemple, un état d'une situation quadratique doit être un point cartésien qui figure sur la représentation graphique ou une paire de coordonnées dans la représentation numérique ou encore satisfaire la représentation algébrique.

Enfin, ceci complète notre analyse du concept de la fonction quadratique. Les critères sont résumés à l'annexe A de ce mémoire. Nous croyons que les critères élaborés, sans être rigides, font place à l'évolution des schèmes d'action chez l'élève. Les schèmes pourront soutenir la construction et l'interprétation des systèmes symboliques puisque ceux-ci sont associés à la plupart des difficultés d'apprentissage du concept de la fonction quadratique. Toutefois, nous ne croyons pas que notre analyse conceptuelle soit la solution à toutes ces difficultés, mais elle apporte d'autres éléments à la compréhension du concept. En outre, le modèle descriptif de compréhension est qualifié par ses auteurs de constructiviste du fait que l'action de l'élève, à travers les quatre modes de compréhension, ne fait que se différencier, s'organiser et s'affiner (Herscovics et Bergeron, 1982b). Développons maintenant la question de notre projet de recherche.

1.5 Notre projet de recherche

Une réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par les élèves francophones du Nouveau-Brunswick en résolution de problèmes nous a conduit à examiner le curriculum et les manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle. Cet examen a dégagé des facteurs qui semblent conduire à une construction déficiente de la notion de fonction chez nos élèves. Ce constat nous amène à reconnaître que la performance est privilégiée à la compréhension. Notre perspective constructiviste de l'apprentissage précise les liens qui tissent les processus d'apprentissage et les constructions afin que celles-ci servent et constituent les mathématiques. L'apprentissage, vu comme un processus d'adaptation, nous conduit à s'attacher aux processus de pensée d'où l'abstraction réfléchissante joue un rôle moteur dans le développement cognitif de l'élève. Il devient alors nécessaire de décrire la compréhension selon un modèle expérimenté pour les concepts mathématiques.

Le choix du concept de la fonction quadratique repose sur une nature propice à la modélisation de phénomènes. D'autre part, les systèmes symboliques sont un apport non négligeable à l'étude du concept. Nous estimons qu'ils ne doivent pas être imposés ou dilués par l'approche retenue. Les difficultés liées à l'apprentissage du concept de la fonction quadratique sont particulièrement associées aux systèmes symboliques. Notre analyse conceptuelle implique donc d'autres éléments intervenant dans la compréhension du concept. Appui controversé dans l'étude des fonctions, la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction quadratique s'associe à un environnement manipulateur de systèmes symboliques. Toutefois, notre étude n'a point pour objectif de proposer des amendements à cet environnement. Nous sommes avisés de la maîtrise précaire des systèmes symboliques chez l'élève de sorte que «they need to construct this representation in a certain way; they should know the limits of this representation, what they can do with it, the advantages of one in relation to another» (Janvier, 1987b : 105). Par ailleurs, le terme «investigation» peut paraître superlatif, étant donné la simplicité de la situation illustrant différents arrangements de cubes. Cependant, les situations d'apprentissage que nous développerons au chapitre suivant impliquent une recherche systématique et approfondie de phénomènes où interviennent des applications du concept de la fonction quadratique. Une telle investigation conduit l'élève à décrire des états, à les analyser et à prévoir leur développement.

En outre, notre analyse conceptuelle de la fonction quadratique semble favorable à l'approche retenue, la modélisation de phénomènes. En effet, cette analyse permet l'utilisation du matériel de manipulation, laissant libre jeu à des investigations. Nos situations d'apprentissage doivent alors intégrer des phénomènes dont certains sont temporels. Ces situations offrent un contexte propice à l'investigation. Selon Janvier (1989), le contexte doit être caractérisé par un ensemble de conditions ou de propositions qui organisent la signification d'un concept. Ce contexte doit tout d'abord engager l'élève à décrire le développement d'états afin que «an emphasize was made on describing rather than solving» (Yerushalmy, 1997 : 171). De cette façon, les situations d'apprentissage mettent en valeur un défi qui s'enrichit grâce à la conduite d'investigations (Piaget, 1968; Confrey et Smith, 1992).

Selon Brousseau (1986), ces situations sont le produit de la «recontextualisation» d'un concept mathématique. Le travail de l'élève devient alors comparable à une activité de «redécontextualisation» du concept. Nos situations d'apprentissage doivent avoir les éléments précédents afin que l'élève ait le plus de chance de développer une conceptualisation de la fonction quadratique.

Nous désirons ainsi que l'élève développe une vue cohérente du concept de la fonction quadratique au gré de ses constructions telles que «building everything on the concept of function» (Schwartz et Yerushalmy, 1992 : 262). Notre but répond à des préoccupations liées à la compréhension du concept et aux processus d'apprentissage. Notre projet de recherche veut donc répondre à la question suivante.

Comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent-elles favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire?

La question de recherche étant lancée, nous croyons que la compréhension du concept de la fonction quadratique se développe par une approche comme celle de la modélisation de phénomènes. Notre projet de recherche veut ainsi inscrire l'étude du concept de la fonction quadratique dans une approche moins fragmentée et plus large que l'approche utilisée en enseignement conventionnel. L'activité centrale des mathématiques demeure donc la résolution de problèmes. La modélisation de phénomènes donne au concept étudié une finalité dans un contexte réel à partir duquel les connaissances construites acquièrent une signification.

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES
POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT
DE LA FONCTION QUADRATIQUE

CHAPITRE II

LA MÉTHODE

2.1 Choix de la méthode

Dans le premier chapitre, nous avons décrit le contexte d'où provient l'intérêt pour notre projet de recherche. Un nouveau courant d'idées s'impose afin de guider notre réflexion et nos interventions. Ce projet s'inscrit alors dans le cadre de la compréhension. Les thèmes sur l'étude des fonctions ont éclairé les choix du concept, de l'approche et de notre analyse conceptuelle. Comme la majorité des études qui se penche sur la compréhension des concepts mathématiques, notre projet de recherche est du domaine de l'étude de cas.

La question de recherche touche d'abord à la compréhension chez l'élève du secondaire. Cette compréhension est plus perceptible au moyen d'entretiens que d'évaluations formelles. L'élève peut ainsi s'exprimer verbalement, par des gestes et par des manipulations. Notre projet de recherche veut aussi explorer les processus d'apprentissage. Cette exploration est rendue possible grâce à des entretiens. L'étude de cas permet ainsi une souplesse qu'exige l'examen des processus d'apprentissage chez l'élève du secondaire.

En effet, nous voulons examiner comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent influencer la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire. Afin de susciter cette compréhension, une série d'entrevues d'intervention est prévue selon lesquelles des questions guident la modélisation de phénomènes faisant intervenir des applications de la fonction quadratique. Le schéma global de notre projet de recherche prévoit d'encadrer cette série d'entrevues par des évaluations. Les entrevues d'évaluation et d'intervention sont effectuées sur une base individuelle. Développons maintenant les propos à l'égard des choix méthodologiques retenus pour la conduite des évaluations et des interventions.

2.2 Évaluation par l'entrevue critique

Le choix méthodologique de l'entrevue critique est conséquent avec une recherche qualitative et une perspective constructiviste de l'apprentissage. Le principal avantage de l'entrevue critique réside dans le fait qu'elle est un outil de recherche cognitive. La compréhension se compose de critères qui ne se manifestent pas seulement par des réponses, mais particulièrement au moyen d'arguments donnés aux réponses. L'entrevue critique permet aussi de cerner les schèmes déjà construits puisque l'élève a la chance de réfléchir à haute voix. Elle permet donc une évaluation plus interactive que les évaluations formelles.

L'entrevue critique prend d'abord l'apparence d'une conversation entre l'élève et le chercheur. Celui-ci a un premier rôle : l'observation des verbalisations, des gestes et des manipulations de l'élève au gré des questions qui lui sont posées. L'attention soutenue du chercheur à l'égard de ce que dit et fait l'élève lui permet de passer à une interaction clinique. En effet, le questionnement à l'égard du matériel engage l'élève à répondre en le manipulant, puis l'introduction de contre-exemples permet d'approfondir les questions ainsi que les réponses d'une manière flexible et non normalisée. De cette façon, les verbalisations et les gestes de l'élève doivent être confrontés aux manipulations du matériel.

Ce premier rôle prend ensuite une place critique de sorte que le questionnement du chercheur l'engage à recueillir des arguments auprès de l'élève. Le chercheur doit ainsi s'intéresser autant aux arguments donnés aux réponses qu'à celles-ci ou plutôt aux processus de pensée par lesquels l'élève est arrivé à ses réponses. Une façon pertinente de susciter la formulation d'arguments et s'assurer de la stabilité des réponses de l'élève est l'emploi de contre-exemples. Ceux-ci ne sont pas employés dans le but de contester les réponses de l'élève, mais plutôt de citer l'avis contraire souvent attribué à un autre élève (Ginsburg, 1981).

> Involves posing questions concerning concrete materials; allowing the child to answer by manipulating the materiels, if this is at all possible; introducing counter-arguments; and, as in the earlier clinical method, stating questions and pursuing answers in a flexible and unstandardized way (Ginsburg et Opper, 1979 : 115).

La nature de ce type d'évaluation, qui requiert un souci à l'égard de la profondeur du discours de l'élève, est d'autant plus satisfaite à partir de la méthode de l'entrevue critique. Nous souhaitons ainsi ne pas influencer la compréhension de l'élève afin d'en avoir un portrait le plus fidèle possible. Selon notre schéma global, l'évaluation encadre une série d'entrevues d'intervention. L'évaluation initiale permet d'identifier les composantes non manifestées de la compréhension chez l'élève. L'évaluation finale permet de réexaminer cette compréhension pour vérifier comment elle s'est transformée, et de prendre conscience des facteurs qui peuvent influencer notre recherche.

2.3 Situations et protocoles des entrevues d'évaluation

Le choix méthodologique de l'entrevue critique a permis lors des préexpérimentations d'enrichir les situations proposées. L'intention de l'entrevue critique n'est pas d'engendrer la résolution d'un problème, mais plutôt de susciter la manifestation des critères qui témoignent d'une compréhension plus ou moins organisée du concept de la fonction quadratique. Ces situations font donc état d'une description sommaire de phénomènes de sorte que l'élève fasse d'abord appel à ses intuitions plutôt qu'aux détails présents dans les libellés. Les situations, telles qu'elles ont été présentées aux entrevues d'évaluation, se retrouvent à l'annexe B. L'élaboration des protocoles est facilitée par notre analyse conceptuelle. Nous avons élaboré des questions selon chaque critère, examinant ainsi les modes de compréhension. Les préexpérimentations ont aussi permis d'enrichir les protocoles et les réponses attendues.

Pour le mode de compréhension intuitive, la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire, traite du salaire d'un employé au cours de ses années de travail. Cette situation peut être discriminée de deux autres situations. La situation B, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, traite de cultures des bactéries dans un milieu selon sa température, soit des états de croissance; suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. La situation C, faisant aussi intervenir une application de la fonction quadratique, porte sur la consommation d'essence d'une automobile selon la vitesse moyenne, soit des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis des états de croissance. Les situations B et C illustrent ainsi des situations quadratiques. Deux critères figurent au mode de compréhension intuitive. Ces critères se manifestent par la description et par la comparaison des situations proposées. L'élève doit discriminer une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas (critère **I1**) et reconnaître les états successifs dans le développement de cette situation (critère **I2**). Les questions suivantes veulent traduire cette intention. Le signe, √, représente la meilleure réponse et la plus complète parmi les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critère **I1**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation A.
   ( ) Un employé gagne 3 000 $ (ou 30 000 $) (de plus) à chaque année.
   (√) Un employé gagne 30 000 $ la première année, 33 000 $ pour la deuxième année, 36 000 $ pour la troisième année, etc.
   ( ) Un employé gagne 30 000 $ de plus à chaque année.

2. Dans tes propres mots, décris la situation B.
   ( ) C'est que le nombre de bactéries est le même qu'à 25 °C (ou à une température maximale).
   ( ) Le nombre de bactéries augmente (toujours) si la température augmente (ou varie).
   (√) Le nombre de bactéries augmente jusqu'à 25 °C, puis il diminue après cette température (ou ça fait une montagne, un «pic»).

3. Si tu compares les situations A et B, que remarques-tu?
   ( ) Les deux situations sont pareilles; ça augmente dans les deux cas.
   ( ) Elles sont différentes. La situation A, ça augmente. La situation B, ça diminue.
   (√) Dans la situation A, ça augmente toujours. Tandis que dans la situation B, ça augmente jusqu'à une certaine température (ou à 25 °C), puis ça diminue après.

Questions/Réponses attendues (critère **I2**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation C.
   ( ) La consommation augmente (ou diminue) jusqu'à 90 km/h (ou à une vitesse minimale) (, puis il y a un plateau).
   (√) La consommation de l'automobile diminue jusqu'à une vitesse (moyenne) de 90 km/h, puis sa consommation augmente (ou ça fait un vase).
   ( ) La consommation de l'automobile augmente jusqu'à une vitesse (moyenne) de 90 km/h, puis sa consommation diminue (ou ça fait une montagne, un «pic»).

2. Si tu compares les situations B et C, que remarques-tu?
   ( ) Les deux situations sont pareilles; ça augmente (ou diminue) dans les deux cas (mais il y a un plateau dans la situation B ou C).
   ( ) Elles sont différentes : l'une diminue tandis que l'autre augmente (ou l'une augmente tandis que l'autre diminue).
   (√) Elles sont semblables. Dans la première partie, la situation B augmente tandis que la situation C diminue. Dans la deuxième partie, la situation B diminue tandis que la situation C augmente.

Les situations B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence) sont ensuite exploitées pour susciter la manifestation des critères relatifs à la compréhension procédurale. Cette compréhension implique l'acquisition de procédures liées aux intuitions. Les questions visent l'emploi de jetons pour ordonner les états successifs d'une situation quadratique par des repères ou par visée spontanée (critère **P1**) et l'identification des grandeurs pertinentes (critère **P2**). Voici les questions posées et les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critère **P 1**) :

1. Dans la situation B, comment ferais-tu pour montrer le nombre de bactéries dans une culture à l'aide de jetons?
   (√) [L'élève rassemble un certain nombre de jetons selon la variation pour illustrer chaque état de la situation (par des repères).]
   ( ) [L'élève illustre chaque état de la situation par un jeton. Chaque jeton est disposé par rapport aux autres de façon à illustrer la variation du nombre de bactéries.]
   ( ) Réponses semblables aux deux précédentes pour seulement une partie de la variation.
   (√) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction quadratique (ou un grand «V» inversé) (par visée spontanée).]
   ( ) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction linéaire.]
2. Selon la situation B, quel est le nombre de bactéries à 20 °C? Comment fais-tu pour le savoir?
   ( ) Ce nombre est le même qu'à 25 °C.
   ( ) Ce nombre est plus élevé qu'à 25 °C.
   (√) Ce nombre est moins élevé qu'à 25 °C.
3. Dans la situation C, comment ferais-tu pour montrer la consommation d'essence d'une automobile à l'aide de jetons?
   (√) [L'élève rassemble un certain nombre de jetons selon la variation pour illustrer chaque état de la situation (par des repères).]
   ( ) [L'élève illustre chaque état de la situation par un jeton. Chaque jeton est disposé par rapport aux autres de façon à illustrer la variation de la consommation d'essence.]
   ( ) Réponses semblables aux deux précédentes pour seulement une partie de la variation.
   (√) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction quadratique (ou un grand «V») (par visée spontanée).]
   ( ) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction linéaire.]

Questions/Réponses attendues (critère **P 2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation B (ou de chaque état de la situation B)?
   ( ) Il y a la culture et le milieu.
   ( ) Les éléments sont le nombre de bactéries et le milieu.
   (√) Les éléments (ou grandeurs) sont le nombre (de bactéries) et la température (du milieu).
2. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation C?
   ( ) Il y a (le prix de) l'essence et la vitesse (moyenne).
   (√) Les éléments (ou grandeurs) sont la consommation d'essence et la vitesse (moyenne).

Afin de susciter la manifestation des critères relatifs à la compréhension abstraite, deux situations s'ajoutent aux situations B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Il s'agit donc de la situation D, qui illustre différents arrangements de cubes; et de la situation E, dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine. Ces situations, faisant aussi intervenir des applications de la fonction quadratique, permettent la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A 1**), d'une régularité (critère **A 2**) et d'un résultat constant (critère **A 3**) entre les grandeurs pertinentes. Les questions engagent alors l'élève à prévoir les états successifs des situations proposées. Les propos suivants veulent traduire cette intention.

Questions/Réponses attendues (critère **A 1**) :

1. Dans la situation B, pourquoi le nombre de bactéries varie comme tu l'as démontré (ou autour de la température de 25 °C)?
   ( ) Ce nombre demeure le même puisqu'il y a un plateau.
   (√) Ce nombre diminue puisque l'on retrouve le plus grand nombre de bactéries à 25 °C (ou puisque les bactéries vont mourir).
   ( ) Avant cette température, il y a moins de bactéries. Tandis qu'il y en aura beaucoup plus après. Ça augmente (constamment).
   (√) De 0 à 25 °C, le nombre augmente. De 25 à 50 °C, le nombre diminue.
2. Si tu compares les situations B et C, qu'ont-elles de commun, de semblable ou de différent? Pourquoi?
   ( ) Elles décrivent un phénomène (ou quelque chose de) linéaire.
   (√) Dans une situation, il y a un «pic» vers le haut. Dans l'autre, le «pic» est vers le bas (ou elles ont en commun quelque chose qui varie en fonction de autre chose).
   (√) Elles ont un point où il se passe quelque chose (ou un point où tu optimises).
   ( ) Elles se comportent de la même façon autour d'un point (ou du sommet).

Questions/Réponses attendues (critère **A 2**) :

1. Dans la situation D, y a-t-il une façon de connaître le nombre de cubes dans l'arrangement? Comment décrirais-tu cette façon (ou cette relation)? Pourquoi?
   ( ) Eric fait des triangles. Il y a un cube de moins.
   ( ) Il doit y avoir une constante puisqu'il fait des arrangements en forme de triangles.
   ( ) Oui, il faut faire un grand carré et diviser par 2.
   (√) Oui, il faut multiplier la hauteur (ou la largeur) par ce nombre plus 1 et diviser par 2.
2. Dans la situation E, y a-t-il une façon de connaître les valeurs obtenues à partir des valeurs données à la machine? Comment décrirais-tu cette façon? Pourquoi?
   ( ) Oui, il faut essayer d'établir quelque chose de pareil pour les valeurs données et obtenues.
   ( ) Oui, il faut tenir compte d'une constante et de la multiplication. Parce que les valeurs obtenues augmentent rapidement.
   (√) Oui, il faut élever la valeur donnée à la puissance 2 (ou multiplier par elle-même la valeur donnée) et additionner le tout a 1.
3. Dans la situation E, quelle sera la valeur obtenue à «la sortie» de la machine? Pourquoi?
   ( ) Je ne le sais pas. ( ) 24. (√) 26.

Questions/Réponses attendues (critère **A 3**) :

1. Dans la situation E, y a-t-il un moyen de t'assurer que les valeurs obtenues sont bien données par un programme? Comment le décris-tu? Pourquoi?
   ( ) Non, les différences des valeurs ne donnent pas une constante.
   ( ) Oui, il ne doit pas les donner «n'importe comment» (ou aléatoirement).
   ( ) Oui, il doit y avoir une constante. Il faut savoir ce qui se passe dans le programme.
   (√) Oui, les différences des valeurs donnent des résultats. Les différences des résultats donnent une constante. Alors, il y a un programme.

Pour la composante formelle, la situation B (relative aux cultures de bactéries) est exploitée avec la situation F. Cette situation consiste en un plan cartésien constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique. Il est ainsi possible d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques (critère **F3**). Les questions encouragent aussi l'utilisation de variables (critère **F1**) et la construction de la représentation algébrique (critère **F2**). Voici les questions posées et les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critère **F1**) :

1. Dans la situation F, comment nommes-tu ce point [le point (2,8) des cercles]?
   (√) Le point (2,8).
   ( ) Réponse semblable à la précédente avec interversion des coordonnées.
2. Quelles sont les coordonnées d'un point situé entre ces deux triangles [les points (17,6) et (19,0)]? Représente ce point.
   ( ) Les coordonnées sont 18 (ou autres valeurs entre 17 et 19) et y. [L'élève représente le point selon une ligne droite imaginaire.]
   (√) Les coordonnées sont 18 (ou autres valeurs entre 17 et 19) et y. [L'élève représente le point selon une courbure parabolique imaginaire.]
   ( ) Les coordonnées sont x et 3 (ou autres valeurs entre 0 et 6). [L'élève représente le point selon une ligne droite imaginaire.]
   (√) Les coordonnées sont x et 3 (ou autres valeurs entre 0 et 6). [L'élève représente le point selon une courbure parabolique imaginaire.]
   ( ) Réponses semblables aux précédentes avec interversion des coordonnées.

Questions/Réponses attendues (critère **F2**) :

1. Quelle est l'équation (ou la phrase mathématique) qui caractérise les points de l'étude identifiée par des carrés? par des cercles? par des triangles?
   (√) L'équation est $y=-(x+4)^2-2$, pour les carrés. Pour les cercles, $y=2x^2$. Pour les triangles, $y=-1/2(x-15)^2+8$. (Réponses semblables selon d'autres formes.)
   ( ) Réponses semblables à la précédente sans tenir compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour la translation horizontale et/ou verticale.
   ( ) Réponses semblables avec le mauvais paramètre a.
   ( ) Réponses semblables sans la puissance au carré.
   ( ) Réponses où le modèle linéaire apparaît.

Questions/Réponses attendues (critère **F3**) :

1. Joins les points de l'étude identifiée par des carrés. Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas comment faire.
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
2. Laquelle des études de la situation F peut caractériser la situation B? Pourquoi?
   ( ) L'étude des cercles parce qu'elle dénote une progression des bactéries.
   ( ) L'étude des carrés parce qu'elle dénote une progression et une régression des bactéries.
   (√) Réponses semblables à la précédente en faisant des translations de la courbe.
   (√) L'étude des triangles parce qu'elle dénote une progression et une régression des bactéries (selon des températures positives ou parce qu'il y a un point maximum).
   ( ) Réponses semblables aux précédentes sans tenir compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses où le modèle linéaire apparaît.

De cette façon, l'entrevue d'évaluation initiale permet de tracer un portrait à la fois «critérié» et global de la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève. Par conséquent, les situations et le protocole de l'évaluation finale sont semblables à ceux de l'évaluation initiale. Toutefois, les situations D (relative aux différents arrangements de cubes) et E (relative aux processus qui peuvent être décrits par une machine) sont modifiées afin que l'élève ne puisse pas se rappeler des régularités et des résultats constants, construits à l'évaluation initiale. De plus, des questions, qui ont trait aux transitions ainsi qu'à la correspondance entre les systèmes symboliques, sont ajoutées au protocole d'entrevue. Les situations et le protocole, tels qu'ils ont été exploités à l'entrevue d'évaluation finale, se retrouvent respectivement aux annexes B et C. L'entrevue d'évaluation finale suit ainsi nos interventions afin d'examiner comment les situations d'apprentissage ont influencé le développement de la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève.

2.4 Intervention par l'expérimentation didactique

Le choix méthodologique de l'expérimentation didactique est conséquent avec une recherche à données créées et une perspective constructiviste de l'apprentissage. Ce choix méthodologique reconnaît le caractère actif, personnel et constructif de l'apprentissage. Nous pouvons faire progresser l'élève dans la construction de ses connaissances et non seulement en dresser l'état. L'expérimentation didactique permet donc d'observer l'influence du matériel de manipulation ainsi que l'activité physique et intellectuelle de l'élève.

Selon Steffe (1983) et Kieran (1985), l'expérimentation didactique permet d'expliquer la construction des connaissances telle qu'elle apparaît chez l'élève au cours de ses apprentissages. D'une part, ces apprentissages dépendent des activités que l'élève peut conduire lui-même, le développement actuel; et d'autre part, des activités avec l'intervention de collaborateurs ou du chercheur, le développement potentiel. L'écart entre ces développements constitue la zone proximale de développement. L'enseignement peut ainsi jouer un rôle au sein de cette zone qui suppose une certaine flexibilité attribuable aux coordinations de l'élève.

Par conséquent, les connaissances ne sont pas acquises dans un morceau, mais construites par l'élève selon une activité de «redécontextualisation» du concept mathématique

(Brousseau, 1986); c'est l'intention de nos situations d'apprentissage. De plus, le chercheur est un participant au même titre que l'élève dans cette activité. Toutefois, le rôle du chercheur est de maintenir un suivi des hypothèses émises par l'élève et de s'assurer qu'il les vérifie au gré des tâches qu'il se propose. Les tâches ne sont donc pas expérimentées directement par le chercheur, mais l'introduction de suggestions est tout de même souhaitable.

C'est ainsi que l'expérimentation didactique se distingue de l'entrevue critique. Le but poursuivi est non seulement la description de la pensée de l'élève, mais l'intervention et l'observation du développement cognitif de l'élève sous l'influence de cette intervention. Nos interventions sont alors centrées sur l'intérêt que représentent les situations d'apprentissage, comment l'élève compose avec ces situations, et plus particulièrement, comment ces situations peuvent influencer son développement cognitif. De cette façon, notre attention est d'autant plus centrée sur les processus d'apprentissage que sur les résultats qui en découlent. Ainsi nous souhaitons influencer la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève.

2.5 Situations et protocoles des entrevues d'intervention

L'expérimentation didactique est un choix méthodologique qui a permis d'enrichir les situations d'apprentissage proposées lors des préexpérimentations. Les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées, dans les entrevues d'intervention, par des problèmes. L'élève doit décrire des phénomènes, les analyser et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Toutefois, l'analyse n'est possible que si l'élève conduit une investigation. C'est ainsi que les situations d'apprentissage font intervenir des applications de la fonction quadratique.

En outre, certaines situations d'apprentissage peuvent suggérer une solution qui fait intervenir le modèle linéaire à titre de présomption. Cette présomption se veut une solution fondée sur des signes de vraisemblance. Nous convenons de la nécessité d'une présomption au modèle linéaire afin que l'élève soit en mesure de discriminer une situation quadratique d'une situation qui ne l'est pas. De plus, nous ne souhaitons pas que les représentations mentales de l'élève souscrivent à la prédominance du modèle linéaire, décrite dans les quelques difficultés d'apprentissage du concept retenu, au cours de nos interventions.

Cela étant dit, les préexpérimentations ont démontré que l'élève est en mesure de mener une investigation, soit une recherche systématique et approfondie d'un phénomène. De plus, cette investigation a deux natures. L'une engage l'élève à composer avec une structure qui correspond à un polygone de trois ou quatre côtés. L'autre le conduit à décrire et à utiliser un dispositif qui facilite la mesure de grandeurs où le temps intervient. Nous convenons ainsi d'une investigation statique si l'élève mène une recherche systématique et approfondie d'un phénomène avec une structure. Si cette recherche implique un dispositif, nous convenons d'une investigation dynamique.

Selon la nature de l'investigation, il s'agit de s'assurer que l'élève soit capable de distinguer le matériel de manipulation pertinent. La description du phénomène peut alors se préciser, et l'analyse des données issues de l'investigation permet de résoudre un problème. Le problème au sein d'une investigation statique demande à l'élève de trouver le nombre d'éléments dans une structure de forme donnée. Quant à l'investigation dynamique, le problème fait place à une présomption au modèle linéaire, et ce, par le libellé de la situation d'apprentissage.

À partir d'expériences professionnelles en enseignement des sciences de la nature, du manuel scolaire «Fondements mathématiques 12» de Dottori (1989b) et des propos de NCTM (1995), nous avons conçu quatre situations d'apprentissage. De cette façon, deux situations d'apprentissage sont propices à la conduite d'une investigation dynamique tandis que les autres font intervenir une investigation statique. D'ailleurs, les situations D (relative aux différents arrangements de cubes) et E (relative aux processus qui peuvent être décrits par une machine), proposées aux entrevues d'évaluation, traduisent aussi les deux natures de l'investigation. Les libellés des situations d'apprentissage, tels qu'ils ont été présentés aux entrevues d'intervention, sont à l'annexe D.

Dans la situation d'apprentissage «Les plaques de béton», l'élève doit modéliser la disposition d'armatures dans un coffrage. Les armatures sont des barres d'acier qui doivent être disposées selon un motif de base. Même volumineux, le coffrage doit lui aussi respecter le même motif de base. Ce coffrage devient alors un dispositif qui moule et maintient le béton que l'on peut y couler. La résolution du problème consiste à trouver le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage donné. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où l'élève doit composer avec une structure de forme carrée. Afin de respecter la structure, il peut conduire l'investigation avec des cure-dents, des cure-pipes ou selon des croquis. La situation d'apprentissage «Les plaques de béton» devrait permettre à l'élève d'élaborer de nombreuses procédures ainsi que les coordinations et les compositions qui s'imposent. Nous convenons que cette situation d'apprentissage est signifiante puisqu'une application de la fonction quadratique peut être conduite dans un contexte insolite.

Par conséquent, un protocole d'entrevue a été élaboré pour chacune des situations d'apprentissage. En général, les questions d'un protocole engagent la manifestation des critères et particulièrement l'évolution de la pensée de l'élève à travers les modes de compréhension. L'élaboration des protocoles est donc facilitée par notre analyse conceptuelle. Nous avons élaboré des questions selon chaque critère de l'analyse. Les préexpérimentations ont aussi permis d'enrichir les protocoles et les réponses attendues. Nous allons développer à présent le protocole d'entrevue pour la situation d'apprentissage «Les plaques de béton».

Les questions encouragent d'abord la description du libellé pour favoriser l'appropriation du problème. Rappelons que l'élève doit discriminer une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas (critère **I1**) et reconnaître les états successifs dans le développement de cette situation (critère **I2**). Les questions suivantes veulent traduire cette intention. Le signe, √, représente la meilleure réponse et la plus complète parmi les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critère **I1**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation.
   ( ) Un ouvrier veut couler des plaques de béton.
   ( ) Un ouvrier veut faire des plaques carrées de béton.
   (√) Un ouvrier fait le coffrage de plaques de béton avec un motif de base.
2. Qu'est-ce que l'ouvrier cherche?
   (√) Il cherche le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage.
   ( ) Il veut savoir comment faire des plaques carrées de dimensions quelconques.
   ( ) Il cherche un moyen d'accélérer les travaux de coffrage.

Questions/Réponses attendues (critère **I2**) :

1. Que fait l'ouvrier pour construire des coffrages de plus grandes dimensions?
   ( ) Il ajoute des motifs de base.
   ( ) Il ajoute des armatures au motif de base déjà existant.
   (√) Il ajoute des armatures au motif de base pour faire des plaques carrées.
2. À partir d'un coffrage existant, qu'exige la construction d'un nouveau coffrage de plus grandes dimensions?
   ( ) Il faut ajouter des armatures (ou le même nombre d'armatures).
   (√) Il faut ajouter autant d'armatures à un nouveau coffrage (qu'au précédent).

Ensuite, les questions de la compréhension procédurale incitent l'élève à systématiser sa démarche. Cette démarche doit d'abord exprimer la nécessité d'un dispositif dans le cas d'une investigation dynamique ou justifier l'usage d'une structure pour la conduite d'une investigation statique. Ces questions visent donc l'utilisation du matériel de manipulation pour ordonner les états successifs d'un phénomène (critère **P1**) et l'identification des grandeurs pertinentes (critère **P1**). Voici les questions posées et les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critère **P1**) :

1. Comment ferais-tu pour me montrer les différentes grandeurs de coffrages? À quoi correspondent les armatures?
   ( ) Il faut faire des carrés. Les armatures correspondent aux côtés des carrés.
   (√) Je pourrais utiliser des cure-dents. Les armatures correspondent aux cure-dents.
   (√) Je pourrais faire des dessins sur une feuille. Les armatures correspondent à des traits.
2. Combien d'armatures te faut-il pour construire un coffrage de 0X0? Un coffrage de 1X1? Un coffrage de 2X2? Un coffrage de 3X3?
   (√) Il n'en faut aucun, 4, 12, 24.
   ( ) Il n'en faut aucun, 4, 16, 36.
   ( ) Réponses semblables si l'élève les construit concrètement.

Questions/Réponses attendues (critère **P2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de cette situation?
   ( ) Les armatures et le motif de base.
   ( ) Le coffrage et le coulage des plaques de béton.
   (√) Les dimensions du coffrage et le nombre d'armatures (nécessaires).
2. Quelles sont les dimensions de la plaque de béton?
   ( ) Les dimensions sont carrées.
   (√) Les dimensions sont les côtés du coffrage.
   (√) Les dimensions sont la largeur et la longueur du coffrage.
3. Quel est le nombre d'armatures nécessaires?
   (√) Le nombre total d'armatures dans un coffrage.
   ( ) Le nombre d'armatures dans un côté du coffrage.

Quelle que soit la nature de l'investigation au mode de compréhension abstraite, les questions conduisent l'élève à prévoir les états successifs des situations d'apprentissage. Ces questions lui permettent de reconnaître une relation fonctionnelle (critère **A1**), une régularité (critère **A2**) et un résultat constant (critère **A3**) entre les grandeurs pertinentes. À la fin de l'entrevue, d'autres questions sont prévues au protocole. Elles supposent la modification du libellé pour engager l'évolution de la pensée de l'élève à travers les modes de compréhension. Pour l'investigation statique, les questions ont trait à la modification du périmètre (voir la description de la situation d'apprentissage «L'enclos» à la page 56) et de la structure : de la forme carrée à la forme triangulaire ou de la forme rectangulaire à la forme carrée. Quant à l'investigation dynamique, les questions suggèrent le contexte lunaire plutôt que le contexte terrestre ainsi que la généralisation du modèle linéaire sur les systèmes symboliques construits. Les propos suivants veulent traduire cette intention.

Questions/Réponses attendues (critère **A1**) :

1. Le nombre de cure-dents (ou de traits) à ajouter pour chaque nouveau coffrage est-il inférieur, le même ou supérieur à l'ajout précédent? Pourquoi?
   ( ) Ce nombre est toujours le même.
   (√) Ça augmente de plus en plus (Il en faut plus que ceux déjà ajoutés).
   ( ) Ce nombre est toujours inférieur au nombre de cure-dents qui existe dans le coffrage.
2. De quelle façon varie ce nombre de cure-dents?
   ( ) Le nombre de cure-dents est le même.
   ( ) Il varie selon le nombre de cure-dents dans les côtés.
   ( ) Le nombre de cure-dents à ajouter augmente (constamment).
   (√) Ce nombre augmente de plus en plus et les différences augmentent aussi.

Questions/Réponses attendues (critère **A2**) :

1. Y a-t-il une façon de déterminer le nombre de cure-dents (ou de traits) nécessaires? Comment?
   ( ) Il faut établir une constante.
   ( ) Je multiplie le nombre de cure-dents dans le côté par 4.
   ( ) Je fais deux étapes : l'une pour les cure-dents verticaux et l'autre pour ceux horizontaux.
   (√) Je fais deux étapes. Pour chacune, je multiplie le nombre de cure-dents dans le côté par ce nombre plus 1. Puis je multiplie par 2.
2. (*À poser à la fin de l'entrevue*) Y a-t-il d'autres façons de dégager cette relation? Comment les décris-tu?
   ( ) Il faut trouver une formule.
   (√) Je multiplie le nombre de cure-dents dans le côté par lui-même et additionne le résultat à ce même nombre. Puis je multiplie par 2.
   (√) J'élève le nombre de cure-dents dans le côté au carré et additionne le résultat à ce même nombre. Puis je multiplie par 2.
   ( ) Je multiplie le nombre de cure-dents dans le côté par 4. J'additionne ce résultat au nombre précédent de cure-dents.

3. (*À poser à la fin de l'entrevue*) Supposons des coffrages conçus à partir des triangles, y a-t-il une façon de déterminer le nombre de cure-dents nécessaires? Comment cela se traduit-il?
   ( ) Il faut seulement tenir compte des triangles complets (ou non inversés).
   ( ) Je multiplie le nombre de triangles dans le côté par 3.
   (√) Je multiplie le nombre de cure-dents à la base par ce nombre plus 1. Puis je multiplie par 3/2.
   (√) Je multiplie le nombre de cure-dents à la base par lui-même (J'élève le nombre de cure-dents à la base au carré) et additionne le résultat à ce même nombre. Puis je multiplie par 3/2.

Questions/Réponses attendues (critère **A3**) :

1. Y a-t-il un moyen de t'assurer que chaque nombre de cure-dents (ou de traits) obtenu suit une relation?
   ( ) En comparant les résultats obtenus et ceux que je retrouve dans les coffrages.
   ( ) C'est le même phénomène qui se répète dans la situation.
   ( ) Si ça donne un bon résultat pour un coffrage, alors c'est correct pour tous les coffrages.
   (√) Les différences de différences (des nombres de cure-dents) donnent un résultat constant.

Les questions encouragent enfin l'élève à utiliser des variables ou à introduire un point variable (critère **F1**), à construire la représentation algébrique (critère **F2**) et à établir une correspondance entre les états successifs d'un phénomène et les systèmes symboliques (critère **F3**). Voici les questions posées et les réponses attendues.

Questions/Réponses attendues (critères **F1** et **F3**) :

1. S'il y a un nombre inconnu de cure-dents (ou de traits) dans un côté, comment peux-tu prévoir le nombre de cure-dents nécessaires dans le coffrage correspondant?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) Je multiplie x par ce nombre plus 1 et par 2.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
2. Comment représenterais-tu autrement la situation? Avec quelles grandeurs?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) Par un tableau. Avec les nombres de cure-dents dans le côté et au total.
   (√) Par un graphique. Avec les nombres de cure-dents dans le côté et au total.
3. Joins les points. Que se passe-t-il entre les points (2, 8) et (3, 24)? Pourquoi?
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]

Questions/Réponses attendues (critères **F2** et **F3**) :

1. Quelle formule (ou équation algébrique) te permet de prévoir le nombre de cure-dents (ou de traits) nécessaires? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=2x(x+1)$.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.

2. (*À poser à la fin de l'entrevue*) Un autre élève a obtenu cette formule : $y=2(x+1/2)^2-1/2$ (ou $y=2x^2+2x$). Est-elle semblable à la tienne? Pourquoi?
   (√) [L'élève trace correctement et spontanément la parabole.]
   (√) [L'élève trace correctement, à partir de la représentation numérique, la parabole.]
   ( ) Réponses semblables aux précédentes sans tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour les translations horizontale et/ou verticale.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture de la parabole.

3. (*À poser à la fin de l'entrevue*) Quelle formule (ou équation algébrique) te permet de prévoir le nombre de cure-dents nécessaires pour les coffrages conçus à partir des triangles? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=3/2x(x+1)$.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.

Nous allons poursuivre la description des situations d'apprentissage «Les puits», «L'enclos» et «Les trapèzes». Les trois protocoles correspondants, tels qu'ils ont été exploités aux entrevues d'intervention, se retrouvent à l'annexe E. Ces protocoles ne sont pas développés dans cette partie puisqu'ils sont semblables au protocole que nous venons d'élaborer. De plus, il y a, à l'annexe F, la liste du matériel de manipulation nécessaire aux entrevues d'évaluation et d'intervention. Il est à noter que l'ensemble du matériel de manipulation fut à la portée de l'élève pour la durée des six entrevues.

La situation d'apprentissage «Les puits» conduit l'élève à modéliser le mouvement d'un objet en chute libre. L'investigation dynamique qui en découle exige l'emploi d'un dispositif qui permet de mesurer la distance parcourue par un objet. Le chronomètre marqueur s'avère nécessaire si l'élève expose la rapidité du phénomène ou la précarité des mesures suite à quelques essais expérimentaux. Ce dispositif laisse des repères sur une bande attachée à un objet en chute libre selon des intervalles de temps égaux. L'objet est ainsi soumis à l'action de la gravité terrestre. Les mesures entre les repères constituent alors la distance parcourue par l'objet. Nous convenons de la nécessité d'un tel dispositif à cause de la rapidité du mouvement d'un objet en chute libre et afin de faciliter la conduite de l'investigation. À ce moment, l'analyse des mesures permet à l'élève de résoudre un problème. Sachant le temps de chute d'une pierre et la longueur de la corde fixée dans un puits artésien, il tente alors de trouver la longueur à fixer dans un autre puits étant donné le temps de chute. D'autre part, le libellé présente une présomption au modèle linéaire qui toutefois ne permet pas de résoudre le problème. La situation d'apprentissage «Les puits» devrait ainsi solliciter les représentations mentales de l'élève. Afin de les élucider, il pourra réaliser des essais expérimentaux. À cet effet, du matériel de manipulation sera à sa disposition. Nous convenons que cette application de la fonction quadratique est pragmatique puisqu'elle traite d'un phénomène connu en enseignement des sciences de la nature.

Dans la situation d'apprentissage «L'enclos», l'élève doit modéliser la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Le périmètre correspond à 26 mètres de clôture avec laquelle il doit former trois côtés d'un enclos le long d'un lac. La résolution du problème consiste à trouver les dimensions de l'enclos dont l'aire est maximale. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où l'élève doit composer avec une structure de forme rectangulaire. Bien qu'un demi-cercle maximise beaucoup plus l'aire de l'enclos qu'un quadrilatère[13], nous privilégions la forme rectangulaire, car elle fait intervenir une composition d'opérations mathématiques spécifique au concept de la fonction quadratique. D'autre part, cette composition nécessite un développement plus élaboré des dimensions que la division du périmètre donné par 4. Afin de respecter la structure, l'élève peut conduire l'investigation avec des cure-dents, des cure-pipes ou selon des croquis. La situation d'apprentissage «L'enclos» devrait alors solliciter les représentations mentales de l'élève et lui permettre d'élaborer de nombreuses procédures ainsi que les coordinations et les compositions qui s'imposent. Nous convenons que cette situation d'apprentissage est signifiante puisqu'elle traite d'une application de la fonction quadratique connue en enseignement des mathématiques.

La situation d'apprentissage «Les trapèzes» conduit l'élève à modéliser le mouvement d'un pendule. L'investigation dynamique qui en découle exige l'emploi d'un dispositif qui se compose d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. L'objet est ainsi soumis à l'action de la gravité terrestre. L'élève peut alors décrire ou définir un pendule dans ses propres mots. L'analyse des données issues de l'investigation lui permet de résoudre un problème. Sachant la longueur d'une première série de trapèzes, l'élève tente alors de trouver la

[13] En effet, l'aire d'un demi-cercle est d'environ 107 m^2 alors que l'aire du quadrilatère correspond à 84,5 m^2.

longueur d'une deuxième série pour permettre l'échange des trapézistes. D'autre part, le libellé présente une présomption au modèle linéaire qui toutefois ne permet pas de résoudre le problème des trapézistes. La situation d'apprentissage «Les trapèzes» devrait solliciter à nouveau les représentations mentales de l'élève. En effet, le mouvement d'un pendule présente quelque similitudes avec le mouvement d'un objet en chute libre. Nous convenons que la situation d'apprentissage «Les trapèzes» est pragmatique puisqu'une application de la fonction quadratique peut être conduite dans un contexte quelque peu inédit.

2.6 Contexte de l'expérimentation

La tenue d'un projet de recherche nécessite bien d'autres considérations. Ces dernières ont trait au choix du milieu d'expérimentation, à la collaboration avec la direction de l'école et son personnel enseignant, aux qualités recherchées pour la sélection des élèves ainsi qu'au contenu dispensé du curriculum pendant les expérimentations. Ces considérations ont pour motif le bon déroulement du projet de recherche en essayant de limiter l'introduction de biais dans les résultats.

Le choix du milieu d'expérimentation découle des propos abordés antérieurement. Préférablement, le personnel enseignant doit travailler avec le curriculum de mathématiques et les manuels scolaires décrits dans le cadre contextuel. Les élèves, quant à eux, doivent participer aux examens de fin d'études secondaires à toutes les années, et sur une base quadriennale, aux évaluations du programme d'indicateurs de rendement scolaire. C'est ainsi que nous avons choisi une école francophone du nord-ouest du Nouveau-Brunswick. Cette école secondaire est sensible à la position du problème développée dans le cadre contextuel. La connaissance de la direction d'école, de son personnel enseignant et de la clientèle scolaire sont autant d'éléments qui facilitent la gestion du projet de recherche. La modeste population étudiante est aussi favorable à la conduite d'expérimentations puisque le personnel enseignant a une bonne connaissance de la clientèle scolaire.

Un tel projet de recherche nécessite une collaboration étroite avec la direction de l'école et son personnel enseignant. Cette collaboration donne l'opportunité de travailler avec des élèves du secondaire, d'avoir accès à l'école, à ses locaux et aux moyens audiovisuels. La nature d'une recherche qualitative nécessite particulièrement l'emploi d'une variété de ces moyens. Cette collaboration facilite aussi les sorties de classe des élèves qui participent aux expérimentations et à la gestion du temps d'enseignement par le personnel enseignant. De cette façon, durant le mois de février, chaque élève eut six entrevues qui totalisent environ six heures de classe. Les entrevues sont réparties sur l'ensemble des cours suivis par l'élève afin de minimiser l'impact sur le cheminement normal de ses études. Il a ainsi cumulé environ une journée d'absence dans ses cours et non à l'école. De plus, chaque élève assume lui-même le suivi des notions non enseignées pour les heures passées hors de la salle de classe.

Afin de parer à toute éventualité qui peut surgir durant les expérimentations, nous avons prévu travailler avec six élèves. Ceci a nécessité l'élaboration d'un horaire de 36 sorties de classe. D'autre part, les commentaires recueillis auprès du personnel enseignant pour le choix des élèves sont essentiels puisque nous ne nous attendons pas à une conduite passive de leur part. Leur rôle au sein des entrevues est bien différent de celui qu'ils doivent assumer en salle de classe. Le caractère exploratoire des entrevues modifie radicalement le rôle de l'élève à l'égard de ses apprentissages. Le choix des élèves est basé sur les résultats de leur rapport scolaire et sur les commentaires du personnel enseignant. Les commentaires doivent tenir compte des qualités recherchées pour le projet de recherche. Certaines qualités visent le recrutement d'élèves qui participent aux activités en classe et qui ont une attitude coopérative envers le personnel enseignant. D'autres qualités concernent les habiletés verbales de l'élève et une attitude persévérante face à la réalisation des travaux scolaires. Pour avoir accès à différents processus d'apprentissage, nous avons travaillé avec des élèves ayant divers rendements scolaires. Nous avons ainsi un échantillon de six élèves convoqués une à deux fois par semaine pour des entrevues d'une heure. Le personnel enseignant consulté leur dispense toutes les matières scolaires. Toutefois, le chercheur ne leur a dispensé aucun cours, et il ne leur en dispense aucun durant les expérimentations. Les propos suivants traitent des trois élèves qui ont fait les expérimentations et qui font partie des analyses dans le prochain chapitre.

Isabelle 16 ans, Vincent 16 ans, et Hélène 17 ans, sont tous des élèves de 11^{e} année.

Le personnel enseignant consulté croit qu'ils possèdent les qualités recherchées pour le projet de recherche. De plus, ils conviennent qu'Isabelle est une élève qui a un rendement supérieur parmi l'ensemble des élèves qui satisfont aux qualités recherchées. D'après son dossier, elle a maintenu une moyenne supérieure à 90 % au cours de ses quatre dernières années scolaires. Vincent est un élève qui a un rendement moyen avec une moyenne entre 80 et 90 % pour la même période alors qu'Hélène est une élève avec un rendement satisfaisant et avec une moyenne entre 70 et 80 %.

Isabelle, Vincent et Hélène assistent au cours de mathématiques «30321» pendant les expérimentations du projet de recherche. Selon le programme cadre (MENB, 1992), ce cours est le premier de trois cours qui traitent principalement du concept de la fonction. Isabelle, Vincent et Hélène entament en classe les connaissances générales associées à la droite et à son équation ainsi que les systèmes d'équations linéaires et le concept de la fonction linéaire dans un contexte de résolution de problèmes. Les connaissances générales associées à la parabole et à son équation ne seront abordées qu'après les expérimentations. Il en est ainsi pour les notions sur les suites et sur les séries. Puis le concept de la fonction quadratique dans un contexte de résolution de problèmes n'est dispensé qu'en 12e année. De cette façon, Isabelle, Vincent et Hélène n'ont aucune connaissance générale associée à la parabole et à son équation ainsi qu'aucune notion de la fonction quadratique dans un contexte de résolution de problèmes. Les entrevues d'évaluation ainsi que celles d'intervention précèdent tout enseignement conventionnel du concept en salle de classe.

2.7 Cueillette des données et plan d'analyse

Étant donné la nature du projet de recherche, tous les entretiens individuels sont enregistrés sur bandes audio-vidéo afin que nous puissions nous consacrer entièrement aux entrevues. Ces enregistrements facilitent la transcription des entretiens et l'analyse qui en découle. De plus, les documents qui sont complétés pendant les entrevues font partie des données à analyser. Pour les entrevues d'évaluation, nous retraçons des verbatim, les propos qui illustrent l'atteinte d'un critère, puis une synthèse des modes de compréhension complète l'analyse.

Pour les entrevues d'intervention, nous préconisons l'analyse du contenu des données. La transcription des entretiens permet de nous imprégner des éléments du contenu et de dégager les processus d'apprentissage. Chaque entrevue d'intervention est d'abord décrite, puis analysée. La description inclut des propos du verbatim ainsi qu'une explication des gestes et des travaux réalisés. L'analyse vise l'identification des critères de notre analyse conceptuelle et des passages entre les modes de compréhension.

Ainsi les passages, ou plutôt ce qui les suscite, sont les types d'éléments recherchés et sur lesquels devraient s'appuyer la réponse à notre question de recherche. En effet, quelles sont les représentations mentales et les procédures qui suscitent des coordinations? À ce moment, quelles sont les compositions d'opérations mathématiques correspondantes? Sinon, qu'est-ce qui favorise la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques? Enfin, quels sont les processus d'apprentissage qui permettent une conceptualisation de la fonction quadratique?

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES
POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT
DE LA FONCTION QUADRATIQUE

CHAPITRE III

LES ANALYSES

3.1 L'étude de cas avec Isabelle

Isabelle est une élève de 16 ans. Le personnel enseignant consulté convient qu'elle est une élève avec un rendement supérieur parmi l'ensemble des élèves qui satisfont aux qualités recherchées. D'après son dossier, Isabelle a maintenu une moyenne supérieure à 90 % au cours de ses quatre dernières années scolaires.

3.1.1 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation initiale

L'évaluation initiale permet de tracer à la fois un portrait «critérié» et global de la compréhension à l'égard du concept de la fonction quadratique chez Isabelle. Nous allons tout d'abord faire une analyse de ses propos, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Isabelle reprend les propos des libellés sans pour autant souligner les états successifs des situations B et C. Ainsi pour la situation A, elle précise que : «ça veut dire que là, il a 30 000 $, la prochaine année, il y aura 33 000 $, l'autre après 36 000 $.» Elle réalise donc une description quantitative pour la situation A faisant intervenir une application de la fonction linéaire. En ce qui concerne les situations B et C, faisant intervenir des applications de la fonction quadratique, elle identifie plutôt les grandeurs pertinentes. «Dans [la situation] B, c'est le nombre de bactéries, ça a rapport avec les degrés Celsius; c'est la température. Dans [la situation] C, c'est la consommation d'essence qui a rapport avec les kilomètres à l'heure.» Il n'y a donc aucune allusion aux états successifs d'une situation quadratique, c'est-à-dire qu'Isabelle ne mentionne pas les états de croissance et de décroissance ainsi que l'état maximal ou minimal. En dépit d'une description quantitative de la situation linéaire, l'absence des états successifs dans le développement d'une situation quadratique nuit à sa discrimination. Elle ne semble donc pas manifester une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Quelle que soit la situation quadratique, les procédures d'Isabelle s'appuient sur les données relatives à l'état maximal ou minimal. Pour la situation B (relative aux cultures de bactéries), elle explique : «je ne sais pas, si tu montes le degré, si ça va enlever des bactéries ou bien, si tu descends le degré que ça va enlever des bactéries. En tout cas, je sais qu'à 25 [°C], c'est le plus grand nombre.» Au même moment, elle regroupe des jetons pour désigner l'état maximal. Ensuite, elle décrit une variation qui s'exprime toutefois par un développement asymétrique. Pour la situation C (relative à la consommation d'essence), elle explique : «si en baissant la vitesse, j'ai plus de jetons; bien en la montant, ça ne fait rien du tout. Si c'est en montant la vitesse que j'ai plus de jetons; bien en baissant la vitesse, ça reste pareil.» Isabelle expose ainsi des états constants, suivis de l'état minimal, puis d'états de croissance ou des états de croissance, suivis de l'état minimal, puis d'états constants. Par conséquent, la situation B semble conduire Isabelle à préciser ses procédures à l'égard des états de croissance. Elle fait intervenir le retrait d'un nombre variable de jetons; ce qui est inédit. «Peut-être que ça ne descend pas tout égal, non plus. Peut-être que la première fois, ça serait trois d'enlever. L'autre fois, ça serait deux. Après, ça serait une.» Bref, le développement asymétrique nuit à l'ordonnance des états successifs qui apparaissent dans une situation quadratique. Toutefois, elle identifie le nombre de bactéries et la température ainsi que la consommation d'essence et la vitesse moyenne comme étant des grandeurs qui influencent les états successifs des situations quadratiques. Elle ne satisfait donc qu'à un seul des critères du mode de compréhension procédurale : l'identification des grandeurs pertinentes.

En outre, Isabelle parvient à reconnaître une relation fonctionnelle en faisant intervenir l'état maximal ou minimal au mode de compréhension abstraite. «Ils ont trouvé quelque chose qui est en fonction d'autre chose. Ce qui est différent. Ici [situation relative aux cultures des bactéries], c'est à 25 [°C] que c'est le plus grand. Ici [situation relative à la consommation d'essence], c'est à 90 [km/h] que c'est le plus bas.» Elle identifie donc une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes des situations quadratiques. Une nouvelle situation lui est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Sollicitée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Isabelle ne reconnaît pas une régularité, mais elle soupçonne l'existence d'une «formule». En effet, elle élabore une suite de nombres qui correspond au dénombrement des cubes dans les arrangements : 1, 3, 6, 10 et 15. Puis elle fait les premières différences en faisant la soustraction entre les nombres de la suite : 2, 3, 4 et 5. Enfin, elle dégage un résultat constant. «Si tu savais comme l'autre [arrangement] avant, tu peux trouver l'autre [l'arrangement suivant] seulement en additionnant 1 [le résultat constant]. 1X1 [le premier arrangement], ça te donne un cube. 2X2, tu prends ton 1, ta réponse de la première et tu ajoutes 2. L'autre après, tu ajoutes 3, l'autre après 4, 5». Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Sollicitée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Isabelle reconnaît une régularité. «Tu prends ton chiffre que je vais remplacer par x; on va dire. Tu le mets au carré et tu ajoutes 1. Tu ajoutes 1, à chaque fois, ça donne la réponse. Si je fais 1 fois 1, ça donne 1. Plus 1, ça donne 2. Si je fais 2 fois 2, 4. Plus 1, ça donne 5.» Elle continue la suite de nombres en généralisant la régularité. Ayant utilisé la variable x, elle élabore la représentation algébrique : x^2+1. Ceci lui permet de prévoir la prochaine valeur à la sortie (26) au moment où la valeur à l'entrée est 5. Sollicitée à nouveau de prévoir les états successifs de cette situation, Isabelle dégage un résultat constant selon la suite de nombres : 2, 5, 10 et 17. Elle élabore les premières différences en faisant la soustraction entre les nombres de la suite : 3, 5, 7. Enfin, elle dégage de nouveau un résultat constant (2) qui lui permet de confirmer la prochaine valeur à la sortie (26). Malgré le fait qu'Isabelle n'a pas reconnu une régularité au sein de la situation D, elle satisfait tout de même aux trois critères de la composante abstraite : la reconnaissance d'une relation fonctionnelle et d'une régularité ainsi que l'identification d'un résultat constant.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Sollicitée à localiser un point entre deux points consécutifs, Isabelle trace une droite. «Si je prends une droite, c'est à peu près la moitié de cela.» Les mêmes manipulations apparaissent lorsqu'elle joint les points d'une autre série. Puis un doute s'installe lorsqu'elle prête attention à la disposition des points, sans pour autant remettre en question ses manipulations. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Elle doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries). Elle s'appuie sur le sommet de chacune des séries pour interpréter l'état maximal de cette situation quadratique. Selon elle, les trois séries pourraient représenter la situation B. Isabelle néglige ainsi le cadran du plan cartésien pour privilégier les distances verticales entre les points localisés. Enfin, elle avait construit une représentation algébrique au moment où elle a reconnu une régularité, mais aucune construction de cette représentation n'est réalisée à partir du plan cartésien. Elle indique plutôt que la représentation algébrique devrait être différente pour chaque série de points puisque leur disposition et leur emplacement varient sur le plan cartésien. Les critères de la compréhension formelle ne se sont pas manifestés chez Isabelle.

Synthèse

Selon cette évaluation initiale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension fragmentée chez Isabelle. Ainsi aucun critère du mode de compréhension intuitive ne s'est manifesté puisque ses descriptions et ses comparaisons ne soulignent pas les états successifs d'une situation quadratique. L'absence des états successifs pourrait expliquer l'apparition d'un développement asymétrique de la variation au sein de la situation relative à la consommation d'essence. Elle identifie tout de même les grandeurs pertinentes des situations quadratiques (critère **P2**) à la composante procédurale. L'identification de ces grandeurs semble faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A1**). Cette relation se précise lorsqu'elle reconnaît une régularité (critère **A2**). De même, l'identification d'un résultat constant (critère **A3**) confirme à nouveau cette relation. Les trois critères du mode de compréhension abstraite se sont ainsi manifestés dans les verbalisations et les manipulations d'Isabelle. Enfin, aucun des critères de la composante formelle ne s'est manifesté.

La notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble aussi laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Isabelle semble privilégier la variation représentée par une droite à la notion de variation exprimée par un ensemble de points qui ne s'alignent pas. L'utilisation de variables pour la construction de la représentation algébrique semble solliciter la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. D'autre part, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, pourrait influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Cependant, l'interprétation de l'état maximal ou minimal semble se substituer chez Isabelle à cette reconnaissance et à cette ordonnance pour identifier les grandeurs pertinentes, une relation fonctionnelle, une régularité ainsi qu'un résultant constant au sein d'une situation quadratique.

3.1.2 Description et analyse des entrevues d'intervention

Les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées par des problèmes dans les entrevues d'intervention. Isabelle doit décrire, analyser des phénomènes et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Cependant, l'analyse n'est possible que si elle conduit une investigation. Nous décrirons chacune des interventions avec Isabelle pour ensuite analyser les données recueillies.

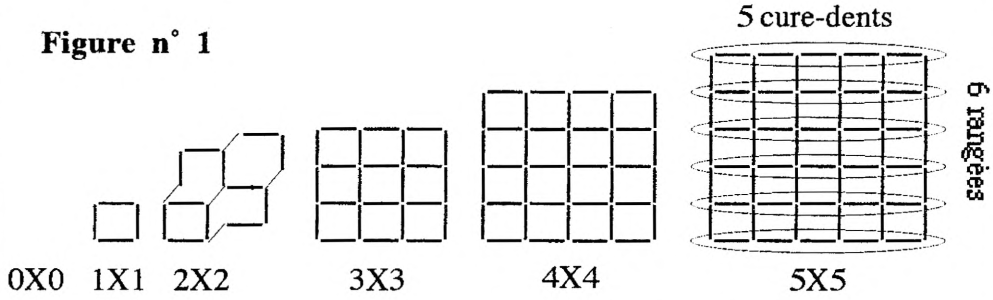
3.1.2.1 Situation d'apprentissage «Les plaques de béton»

Dans cette situation d'apprentissage, Isabelle doit modéliser la disposition d'armatures dans un coffrage. La résolution du problème consiste à trouver le nombre d'armatures nécessaires pour un coffrage donné. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où elle doit composer avec une structure de forme carrée.

Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Isabelle en rapporte les propos. Elle identifie le problème à résoudre, le nombre d'armatures dans un coffrage ainsi que les grandeurs pertinentes : les dimensions du coffrage et le nombre d'armatures nécessaires. Ses premiers croquis précisent la réalisation d'un coffrage. Elle identifie ainsi la cause de la variation entre le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et ses dimensions en disant : «une armature pour un motif de base compte pour un autre [motif de base] aussi; ça varie parce qu'elles [les armatures] sont communes.» Isabelle explique ensuite pourquoi le nombre d'armatures ajoutées à un coffrage existant est supérieur à l'ajout précédent. «Si on en a un de 1X1 et que tu veux en faire un 2X2 [voir la figure n° 1], tu ajoutes un carré là [en haut], un carré là [au côté droit] et un là [en haut à droite]. Lorsque c'est 3X3, tu ajoutes sur les deux côtés et partout ailleurs.»

Figure n° 1

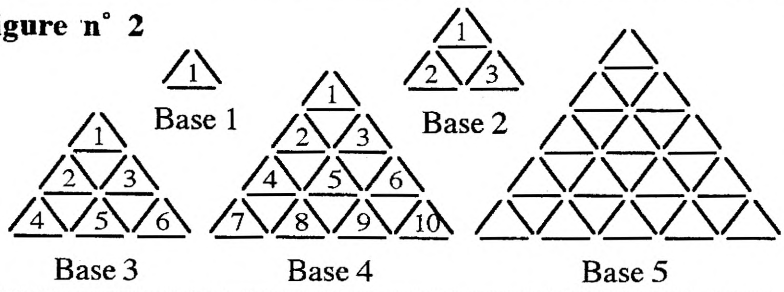


À partir de ses premiers croquis, Isabelle dénombre 0, 4, 12, 24 et 40 armatures pour les coffrages correspondants (voir la figure n° 1). La soustraction entre les nombres d'armatures (4-0, 12-4, 24-12, 40-24) lui donne la suite suivante : 4, 8, 12 et 16. «À la place de 16, ça serait 20; ça augmente de 4 à toutes les fois. 40 plus 20, ça donne 60», dit-elle en proposant 60 armatures pour le coffrage de 5X5. Pour répondre aux besoins de la vérification, elle construit le coffrage correspondant avec des cure-dents. Isabelle simplifie le dénombrement des cure-dents horizontaux, mais elle compte un par un les cure-dents verticaux. Leur nombre étant égal, elle reconnaît une régularité. «Si tu as un 5X5 [voir la figure n° 1], tu fais 5 fois 6; ça te donne les cure-dents sur un bord [30 cure-dents à l'horizontale]. Tu fais 5 fois 6; ça te donne les cure-dents sur l'autre bord [30 cure-dents à la verticale]. Tu ajoutes cela ensemble [30+30]; ça donne 60 [cure-dents nécessaires]», dit-elle en indiquant les 5 cure-dents pour chacune des 6 rangées.

Isabelle se lance ensuite dans l'élaboration de la représentation algébrique. «J'ai ce chiffre-là [5 en inscrivant x] fois ce chiffre-là [5] plus 1 [en inscrivant $(x+1)$]. Et ça, tu le fais deux fois. Ça [en indiquant $(x(x+1))$] donne ça [en inscrivant la représentation algébrique : $2(x(x+1))$].» À partir du coffrage de 4X4, elle reconnaît la même régularité. Puis elle indique que x correspond au nombre d'armatures à la base du coffrage. Les valeurs substituées dans cette représentation confirment ainsi les résultats obtenus par le dénombrement des armatures de ses premiers croquis. En invoquant l'avis d'un élève, je lui propose la forme suivante : $y = 2x^2+2x$. Isabelle y substitue quelques valeurs qui confirment de nouveau les résultats obtenus. Par des manipulations algébriques, elle constate que cette forme s'avère être la même que la représentation algébrique construite. Toutefois, la proposition de la forme canonique, $y = 2(x+1/2)^2-1/2$, n'aboutit pas à des conclusions aussi fructueuses.

Je remplace ensuite le carré, qui est le motif de base, par le triangle. Isabelle construit des coffrages de forme triangulaire avec des cure-dents. Elle dénombre 3, 9, 18 et 30 armatures pour les coffrages correspondants (voir la figure n° 2). Selon les triangles du coffrage de base 4 dont les sommets sont vers le haut, elle dit que «le nombre qu'il y a fois 3, ça donne tout le temps ce chiffre-là [les nombres 3, 9, 18 et 30].»

Figure n° 2



Selon Isabelle, le nombre de cure-dents pour construire un coffrage réside à présent dans le nombre de ses triangles. Elle dénombre 1, 3, 6 et 10 triangles pour les coffrages correspondants (voir la figure n° 2). La soustraction entre les nombres de triangles (3-1, 6-3, 10-6) lui donne la suite 2, 3 et 4. Elle constate alors que le nombre de triangles augmente toujours de 1. «Ça veut dire que le prochain [coffrage (de base 5)], si je fais ça comme cela. Je sais que, si ça monte à 5 [4+1], il va y avoir 15 triangles [10+5]. S'il y a 15 triangles, 15 fois 3; 45 [armatures prévues]», dit-elle en construisant le coffrage correspondant qui confirme les 45 armatures. D'autre part, elle constate que la soustraction entre les nombres d'armatures (3, 9, 18, 30) donne la suite 6, 9 et 12 dissimulant aussi un résultat constant de 3.

Les efforts d'Isabelle pour reconnaître une régularité entre le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et ses dimensions étant vains, je lui suggère la construction de la représentation graphique selon les coffrages de forme carrée. La localisation des points (1, 4), (2, 12), (3, 24), (4, 40) et (5, 60) dans le plan cartésien lui permet de les joindre par une courbe. «Ça serait une courbe parce que ce n'est pas une droite. Par exemple, si j'essayais de trouver 4,5 [en indiquant une valeur intermédiaire entre les valeurs 4 et 5 sur l'axe des abscisses], c'est quoi? Ça n'arriverait pas si c'était une droite [en imaginant un point localisé selon la courbe de concavité vers le bas entre les points (4, 40) et (5, 60)]. Si je faisais petits points par petits points, ça ferait toujours une courbe, tout le long», précise-t-elle en indiquant un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Sur le même plan cartésien, Isabelle localise les points (1, 3), (2, 9), (3, 18), (4, 30) et (5, 45) des coffrages de forme triangulaire. Une courbe apparaît encore, mais en-dessous de la première. «Lorsque tu augmentes la base, ça augmente moins le nombre d'armatures [que dans le cas des coffrages de forme carrée].»

Sollicitée de nouveau à reconnaître une régularité selon les coffrages de forme triangulaire, Isabelle applique des procédures algébriques abordées depuis peu en salle de classe. «Non celle-là, je sais que c'est pour une droite», dit-elle en indiquant la représentation algébrique issue de ces procédures, $21x-2y-24 = 0$. «Et ceci, ce n'est pas une droite; c'est une courbe», précise-t-elle en indiquant la courbe des coffrages de forme triangulaire. Isabelle termine l'entrevue préoccupée par les variables apparaissant dans les représentations algébriques. La représentation algébrique, $2(x(x+1))$, ne contient pas la variable y.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème et inciter l'étude de la disposition d'armatures dans un coffrage. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive lorsqu'Isabelle précise l'ajout d'armatures à un coffrage existant plutôt que l'ajout de motifs de base. Le croquis des coffrages lui permet de réaliser un passage vers le mode de compréhension procédurale. Le dénombrement des armatures constitue une suite de nombres (0, 4, 12, 24, 40). L'intérêt pour l'ajout d'armatures semble conduire l'opération de soustraction entre ces nombres. Cette composition d'opérations mathématiques permet de dégager un résultat constant (4) issu des différences de différences. Ce modèle de prédiction constitue une manifestation du mode de compréhension abstraite.

La substitution du motif carré par le motif triangulaire engage Isabelle dans les mêmes constructions; ce qui semble susciter l'évolution de sa pensée à travers les modes de compréhension. Tout d'abord, elle manifeste un intérêt pour les triangles qui logent dans les coffrages de forme triangulaire. Elle dénombre ainsi deux suites de nombres : l'une correspondant au nombre d'armatures (3, 9, 18, 30) et l'autre au nombre de triangles (1, 3, 6, 10). Les différences de différences permettent de dégager respectivement les résultats constants 3 et 1. Conformément aux coffrages de forme carrée, ces résultats confirment l'existence d'un modèle de prédiction des états successifs de la situation des coffrages.

Le processus d'apprentissage décrit jusqu'à présent ne semble pas avoir suffi à Isabelle pour qu'elle reconnaisse une régularité entre le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et ses dimensions. L'existence des triangles pose la question autrement : elle doit déterminer le nombre de triangles dans un coffrage à partir de sa base. D'autre part, la réalisation des coffrages de forme triangulaire fait intervenir la juxtaposition du motif de base. Pour les coffrages de forme carrée, cette juxtaposition n'est pas possible; les motifs de base ont des armatures communes. Quel que soit le motif de base, si elle veut reconnaître une régularité, elle doit rendre ses procédures plus efficaces. La juxtaposition du motif de base semble donc retarder la modification des procédures utilisées par Isabelle ainsi que le passage vers le mode de compréhension abstraite.

Ce passage s'est réalisé lorsque le coffrage de forme carré est devenu volumineux. Le coffrage de 5X5 a permis à Isabelle de coordonner le dénombrement des armatures à un sous-arrangement répétitif d'armatures. C'est ainsi que le nombre de rangées correspond au nombre d'armatures dans une rangée plus un. De plus, la même régularité est applicable aux armatures placées à la verticale, quel que soit le coffrage. Cette régularité lui permet d'élaborer une composition d'opérations mathématiques. Cette manifestation accélère le passage vers le mode de compréhension formelle. En effet, au moment où Isabelle utilise la variable x, elle construit la représentation algébrique selon la composition d'opérations mathématiques issue de la régularité. Cette composition semble permettre l'intégration des états successifs de la situation des coffrages, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

À la fin de l'entrevue, les deux séries de points localisés sur le plan cartésien suggèrent des courbes. L'une des courbes se situe complètement en-dessous de l'autre. Isabelle justifie l'emplacement des courbes en interprétant la réalisation des coffrages. De ces considérations globales, elle précise que les courbes sont des ensembles infinis de points qui ne s'alignent pas selon une droite. De plus, selon une valeur intermédiaire qu'elle suggère, Isabelle localise le point correspondant sous une droite ou selon une courbe de concavité vers le bas. Par ces considérations locales, elle renonce donc au modèle linéaire.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de cette situation. De cette façon, Isabelle s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Enfin, elle a su mettre à contribution la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité pour réaliser la construction de la représentation algébrique de la situation des coffrages.

3.1.2.2 Situation d'apprentissage «Les puits»

Cette situation d'apprentissage conduit Isabelle à modéliser le mouvement d'un objet en chute libre. L'investigation qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Le chronomètre marqueur permet de mesurer la distance parcourue par un objet selon des intervalles de temps égaux. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données issues de l'investigation dynamique permet à Isabelle de résoudre le problème.

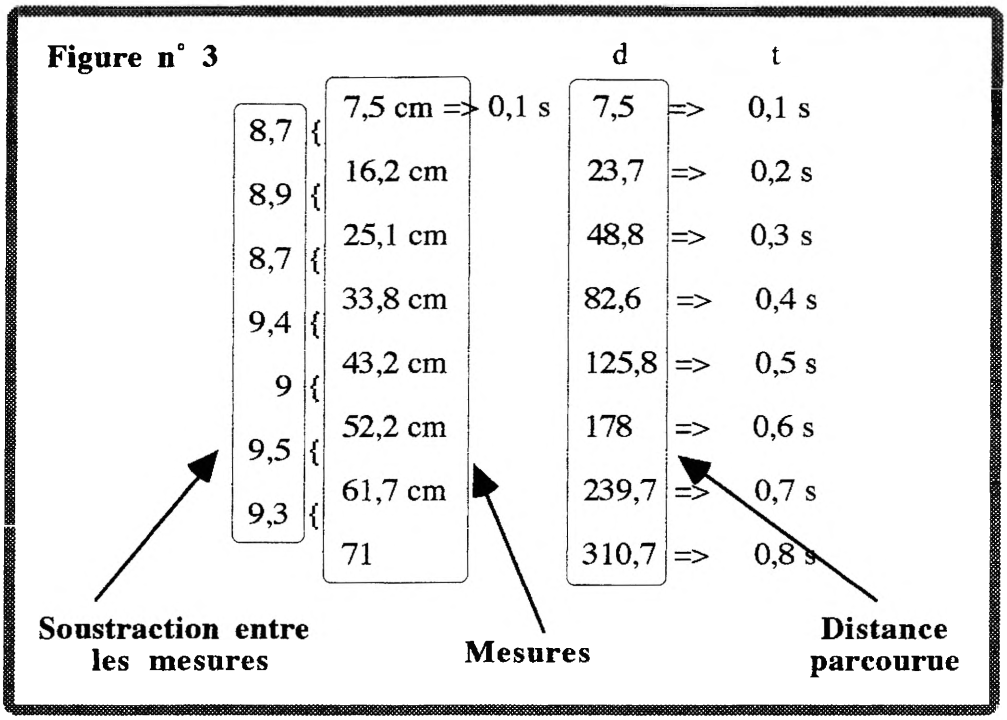
Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Isabelle en résume les propos. «Lui [en indiquant le puits du grand-père], ça prend le double de temps. Je vais mettre la corde deux fois plus longue. Elle [Marie] l'a mise à 22,5 mètres», dit-elle en s'appuyant sur la présomption au modèle linéaire. Toutefois, elle n'approuve pas ce modèle. «Parce que plus elle [la pierre] continue, plus elle accélère. Puis c'est pour cela que la corde n'est pas de la même longueur et que ça ne marche pas si tu dis que c'est seulement le double.» «Pour savoir la longueur de la corde que ça prend, il faut savoir la distance [parcourue]», ajoute-t-elle en identifiant le problème à résoudre.

Ensuite, j'invite Isabelle à émettre une hypothèse. «À cause de la gravité, la vitesse [d'un objet] va accélérer de 9,8 m/s[2]. Si tu fais la formule pour ça, c'est certain que la vitesse va augmenter. Ça veut dire qu'elle va parcourir plus long durant la deuxième seconde [que durant la première seconde]», dit-elle en exposant la cause de la variation. Cette hypothèse l'amène à établir les étapes de l'investigation. Mettant en doute l'exactitude des mesures obtenues par quelques essais expérimentaux, elle indique la nécessité de «quelque chose de précis pour pouvoir faire ça». À ce moment, j'attire son attention à propos de l'effet de la masse sur un objet en chute libre. «Il faut que tu lâches la même masse», propose-t-elle afin de mesurer le temps de chute de deux objets de masse différente. Les résultats obtenus infirment sa proposition; elle précise alors davantage les procédures et les limites de l'investigation, justifiant ainsi l'emploi du chronomètre marqueur.

Pour les besoins de l'investigation, je demande à Isabelle de tracer un trait à tous les six repères, ce qui correspond environ aux dixièmes de seconde. Les traits sont de plus en plus espacés. Son hypothèse confirmée, elle décrit de nouveau la cause de la variation. «Peut-être que ça nous aiderait à trouver comment ça a accéléré», dit-elle en mesurant les distances entre les traits. Elle indique le temps à la première mesure, et elle additionne les autres mesures en indiquant les temps correspondants (voir la figure n° 3). «C'est la distance totale [ou parcourue] après tel temps», précise-t-elle en se proposant de calculer la vitesse.

Figure n° 3



Conviée à réexaminer le libellé, Isabelle établit un lien entre la longueur de la corde et les nombres correspondants à la distance parcourue. Dès le début de l'entrevue, elle présume que l'accélération contient l'issue de la situation des puits : «si tu as trouvé l'accélération, tu as tout le reste; tu peux trouver la distance [parcourue]». La soustraction entre les mesures lui permet d'envisager un résultat plus ou moins constant (voir la figure n° 3). «Eux [8,7; 8,9; 8,7], ils sont pareils. Mais lui [9,4], il est plus haut, puis ça redescend, puis ça remonte, puis ça redescend», dit-elle en indiquant les résultats de la soustraction entre les mesures.

Je lui suggère la construction de la représentation graphique. Isabelle détermine les intervalles sur les ordonnées d'après la plus grande distance parcourue (310,7 cm), puis elle localise huit points. «L'accélération, c'est tout le temps une courbe, dit-elle en joignant les points localisés. «Quand la vitesse n'est pas constante, ça fait une courbe. Ça veut dire qu'il y a une accélération ou une décélération. Mais là, c'est une accélération; ça monte», ajoute-t-elle puisque cette portion de la courbe illustre des états de croissance. Conviée à faire une extrapolation, Isabelle désigne une courbe à partir du dernier point localisé sans pour autant envisager la distance parcourue à un temps donné. «Plus le temps est long, plus la distance est grande. Puis la distance entre les intervalles de temps augmente tout le temps; ça va de plus en plus vite», dit-elle en reconnaissant une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes. Pour trouver une «formule», elle fait le calcul des vitesses (voir la figure n° 4), puis elle les soustrait; ce qui dissimule un résultat plus ou moins constant sans que ceci suscite son intérêt.

Figure n° 4

Distance parcourue

Calcul des vitesses

d		t		v v=d/t	
7,5	=>	0,1 s	=>	75 cm/s	
					} 43,5
23,7	=>	0,2 s	=>	118,5 cm/s	
					} 44,17
48,8	=>	0,3 s	=>	162,7 cm/s	
					} 43,83
82,6	=>	0,4 s	=>	206,5 cm/s	
					} 45,1
125,8	=>	0,5 s	=>	251,6 cm/s	
					} 45,07
178	=>	0,6 s	=>	296,7 cm/s	
					} 45,76
239,7	=>	0,7 s	=>	342,43 cm/s	
					} 45,95
310,7	=>	0,8 s	=>	388,38 cm/s	

En considérant que la présomption au modèle linéaire est juste, Isabelle propose des changements aux systèmes symboliques. «La distance entre chaque intervalle aurait tout le temps été la même affaire. Je pense que l'on n'aurait pas eu une courbe, mais une droite. Puis la vitesse aurait tout le temps resté la même», dit-elle en généralisant la présomption aux mesures, au plan cartésien et au calcul des vitesses. La suggestion que la situation des puits se produise dans un contexte lunaire au lieu du contexte terrestre n'a pas suscité de changements aux systèmes symboliques. Il en est de même pour la suggestion de la hauteur au lieu de la distance parcourue. Selon Isabelle, le contexte lunaire ne permet pas le mouvement d'un objet en chute libre.

Analyse

Le problème incite Isabelle à élaborer une hypothèse sur le mouvement d'un objet en chute libre. L'hypothèse, qui comporte une description viable du mouvement, semble favoriser la conduite d'une investigation dynamique. Cependant, pour permettre le passage d'une compréhension intuitive vers une compréhension procédurale, elle doit décrire les étapes de l'investigation. L'effet de la masse sur le mouvement d'un objet en chute libre étant infirmé, elle précise davantage les procédures et les limites de l'investigation. La rapidité du mouvement l'incite à rendre ses procédures plus efficaces, justifiant ainsi l'emploi du chronomètre marqueur. Si l'élaboration d'une hypothèse est un élément moteur pour la conduite d'une investigation dynamique, c'est la vérification de l'hypothèse qui guide Isabelle vers l'analyse de la situation des puits.

L'impression de repères par le chronomètre marqueur laisse entrevoir des intervalles qui augmentent. La mesure des intervalles constitue les premières différences. L'addition des intervalles correspond à la distance parcourue à un temps donné. La soustraction des intervalles qui constitue les différences de différences ne permet pas de dégager un résultat constant. La compréhension abstraite peut s'initier à partir de la composition d'opérations mathématiques. Cependant, cette composition ne permet pas à Isabelle de reconnaître une régularité entre les grandeurs pertinentes, mais elle confirme tout au moins l'existence d'un modèle de prédiction des états successifs de la situation des puits. Par conséquent, les nombres rationnels semblent rendre le passage vers le mode de compréhension abstraite plus laborieux.

L'absence d'une régularité nuit donc à l'intégration des états successifs de la situation des puits ainsi qu'au passage vers la compréhension formelle. Ce passage nécessite l'utilisation de variables pour susciter la construction de la représentation algébrique. La disposition des points localisés sur la représentation graphique lui suggère une courbe; ce qui confirme les apprentissages scolaires d'Isabelle. L'extrapolation qu'elle propose illustre une courbe à partir du dernier point localisé. Toutefois, cette extrapolation ne l'incite pas à proposer une solution au problème. Elle souligne tout de même que la distance verticale entre les points localisés augmente selon des intervalles de temps égaux. C'est ainsi qu'elle semble opérer les premières différences sur la représentation graphique.

Les propos d'Isabelle tiennent compte d'apprentissages scolaires qui laissent émerger diverses représentations mentales. Par exemple, la gravité qui est la cause de la variation au sein de la situation des puits entraîne la réplique «gravité-accélération-vitesse-distance». Toutefois, le choix d'une «formule» réside dans les «petites lettres» qui la composent. D'autre part, la généralisation du modèle linéaire par Isabelle entraîne une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits; elle renonce ainsi au modèle linéaire.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue de nouveau de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des puits. Isabelle s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

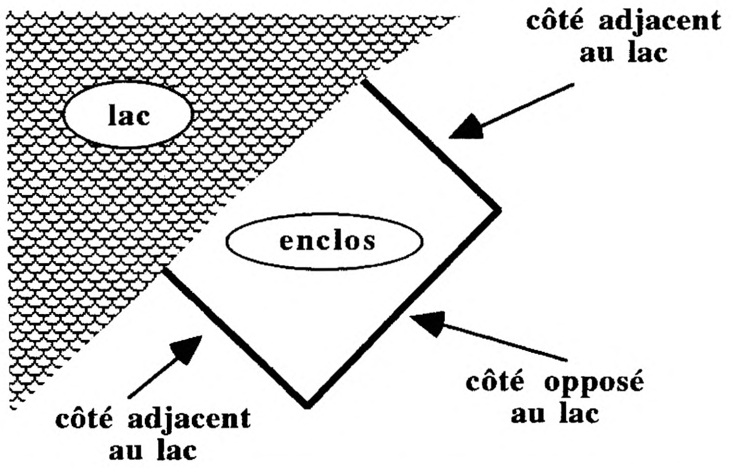
3.1.2.3 Situation d'apprentissage «L'enclos»

Dans cette situation d'apprentissage, Isabelle doit modéliser la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Le périmètre correspond à 26 mètres de clôture avec laquelle elle doit former trois côtés d'un enclos le long d'un lac. La résolution du problème consiste à trouver les dimensions d'un enclos dont l'aire est maximale. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où Isabelle doit composer avec une structure de forme rectangulaire.

Description

Isabelle résume les propos du libellé (voir l'annexe D) en identifiant le problème à résoudre : les dimensions de l'enclos. Elle indique ensuite que la notion d'aire est à la base de la situation de l'enclos. Elle projette de faire des croquis d'enclos qui représentent des solutions possibles, et de là, déterminer lequel a la plus grande étendue. Ne sachant trop si l'aire varie, le deuxième croquis illustre un enclos dont l'aire est différente du premier. «Je mets deux côtés [adjacents]; ce que je pense. Après ça, je prends 26 et je soustrais la somme des deux. 26 moins 18; ça m'a donné 8. J'ai mis 8 sur ce côté [opposé]», dit-elle en décrivant la procédure pour faire le croquis d'un enclos de 9X8. Ce croquis (voir la figure n° 5) présente une forme rectangulaire dont la première dimension (9) correspond aux côtés adjacents au lac, et la deuxième dimension (8), au côté opposé au lac. Du premier au deuxième croquis, elle augmente la longueur du côté adjacent tandis qu'elle diminue cette longueur pour les croquis suivants. Elle calcule l'aire pour des côtés adjacents de 9, 10, 8, 7, 6 et 5 mètres.

Figure n° 5



Maintenant avec six croquis, Isabelle reconnaît que deux des enclos ont des aires identiques. «J'ai trouvé. O.K. Je vais arrêter là. Ça serait soit lui ou lui. C'est la même affaire l'un ou l'autre. Il y a autant d'espace dans l'un comme dans l'autre», dit-elle en montrant le croquis des enclos de 7X12 et de 6X14 dont les aires sont de 84 m^2. Sollicitée à valider ses résultats, elle propose une valeur intermédiaire (6,5) pour la longueur du côté adjacent. Le calcul correspondant donne une aire de 84,5 m^2 selon le croquis d'un enclos de 6,5X13. Je lui suggère une valeur inconnue pour la longueur du côté adjacent. Elle écrit la formule de l'aire, $nx = A$, puis elle substitue la variable n par l'expression algébrique du côté opposé, $26\text{-}2x = n$. Elle obtient la représentation algébrique, $x(26\text{-}2x) = A$. Pour répondre aux besoins de la vérification, elle y substitue les dimensions dont les aires sont connues, confirmant ainsi cette représentation.

Conviée à faire une autre représentation, Isabelle suggère la construction d'un «graphique». La représentation algébrique exprime l'aire en fonction la longueur du côté adjacent. Toutefois, elle décrit une relation fonctionnelle qui dépend la longueur du côté opposé. Confuse, elle se ravise, puis elle choisit le côté adjacent pour les abscisses du plan cartésien. «C'est pareil dans les deux côtés», dit-elle en décrivant une courbe parabolique de concavité vers le haut selon les sept points localisés. «C'est sûr que 6,5; c'est le milieu. Parce que si tu fais la courbe comme il faut, tu ne pourras pas arriver plus haut que ça», dit-elle en montrant le sommet (6,5; 84,5). Souhaitant justifier cette construction, elle calcule l'aire pour des côtés adjacents de 1, 2, 3, 4, 11 et 12 mètres avec la représentation algébrique, puis elle localise les points correspondants. Elle joint les points localisés par une courbe parabolique jusqu'à l'axe des abscisses. Pour justifier la courbure, elle considère une valeur intermédiaire. «Si je prenais 1,5; ça n'arriverait pas vis-à-vis la droite. Ça arriverait juste comme un peu au-dessus», dit-elle en simulant un point au-dessus d'une droite ou selon une courbe de concavité vers le haut.

Sollicitée à décrire la représentation graphique à une tierce personne, Isabelle expose une variation qui s'exprime par un développement symétrique de l'aire par rapport aux côtés adjacents en débutant toujours du sommet de la parabole. Elle évoque aussi cette variation en simulant la modification d'un croquis. Invoquant l'avis d'un élève, je lui suggère la forme canonique, $y = -2(x-13/2)^2+84{,}5$. Elle s'intéresse à la disposition des variables pour y substituer les dimensions dont les résultats donnent les aires connues. Elle s'interroge ensuite à l'égard des paramètres. «Tu sais comme 84,5; c'est le plus haut que tu peux atteindre», dit-elle en indiquant le sommet de la parabole et le paramètre 84,5. «Où il a trouvé le reste, je ne le sais pas», ajoute-t-elle pour les paramètres -2 et 13/2. Enfin, elle distingue le terme x^2 des deux formes. «Si je multiplie ça [$x(26-2x)$], je vais avoir un x^2 moi aussi à quelque part.»

Je modifie ensuite le périmètre en proposant 100 mètres de clôture plutôt que 26. Isabelle révise ses systèmes symboliques. «À la place d'être 26, ça va être 100. Ça ne sera plus la même aire qui va être plus», dit-elle en indiquant la représentation algébrique, $x(26-2x) = A$. «Si je garde la même échelle, bien peut-être que ici la courbe ferait plus ça ici à la place. Elle monterait plus, et elle serait plus large aussi», ajoute-t-elle en décrivant une courbe parabolique qui enveloppe la courbe initiale sur le plan cartésien. Pour trouver les dimensions du plus grand enclos, elle calcule l'aire pour des côtés adjacents de 20, 40, 30, 35 et 25 mètres avec la représentation algébrique, $x(100\text{-}2x) = A$. L'aire, avec 25 mètres, est la plus élevée, 1250 m^2. Les calculs avec 24 et 26 mètres confirment ce résultat. Elle indique que le sommet de la parabole devient (25, 1250) plutôt que (6,5; 84,5). Je lui suggère la forme canonique, $y = -2(x\text{-}50/2)^2+1250$. Elle s'interroge à l'égard de l'un des paramètres non décrits dans les propos précédents. «Ah, c'est la moitié de ..., c'est le quart de la longueur de la clôture», dit-elle en indiquant le paramètre 50/2.

Une deuxième modification du libellé touche à la structure de l'investigation, soit la réalisation des quatre côtés d'un enclos toujours selon 100 mètres de clôture. «Il faut compter des mètres de clôture pour l'autre côté qui était le lac», dit-elle en regardant ses croquis. Toutefois, Isabelle engage une construction erronée de la représentation algébrique : «pour trouver la plus grande aire, c'est la racine carrée de 100.» Elle infirme ensuite la possibilité d'avoir une aire de 80 m^2 avec une dimension de 4 mètres selon le libellé initial. «Si je vérifie que ce côté [le côté adjacent] est de 4 mètres, j'arrive pas à 80 [m^2]. Puis si ce n'est pas ce côté qui est de 4 mètres, bien c'est l'autre sur ce sens-ci [le côté opposé]. Ça veut dire que tu fais, 26 moins 4, ça donne 22. Divisé en deux, les deux autres côtés [adjacents] seraient 11 [mètres]. Si c'est 11, tu n'arrives pas à 80 [m^2], non plus», dit-elle en s'appuyant sur la représentation graphique et sur un croquis.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème et inciter l'étude de la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive de la situation de l'enclos lorsqu'Isabelle précise que la notion d'aire est à la base de l'investigation. Le croquis des enclos conduit au passage vers la compréhension procédurale. Un deuxième croquis confirme la variation de l'aire selon la longueur du côté adjacent de l'enclos. L'augmentation de la longueur du côté adjacent amène une diminution de l'aire. Puisqu'elle cherche à obtenir la plus grande aire, elle fait les calculs subséquents selon des longueurs régressives du côté adjacent. En coordonnant la longueur du côté adjacent d'un enclos à son aire, Isabelle identifie l'enclos ayant la plus grande aire.

La modification du périmètre suscite la coordination entre les mêmes procédures. Cette coordination semble conduire au passage vers le mode de compréhension abstraite ainsi qu'à la reconnaissance d'une régularité entre la longueur du côté adjacent d'un enclos et son aire. En effet, lorsqu'Isabelle établit la longueur du côté opposé à partir de la longueur du côté adjacent, elle évoque une composition d'opérations mathématiques. La longueur du côté opposé correspond à la soustraction du périmètre donné (26) par la somme de la longueur des côtés adjacents. La dernière opération est le produit des dimensions de l'enclos. Cette régularité, généralisée à tous les enclos, favorise un passage vers le mode de compréhension formelle. La substitution du côté adjacent par une valeur inconnue conduit à l'utilisation de variables. Ainsi la construction de la représentation algébrique s'appuie sur la composition d'opérations mathématiques construite par Isabelle. Cette régularité semble permettre l'intégration des états successifs de la situation de l'enclos, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

Pour répondre aux besoins de la vérification, Isabelle établit une correspondance entre les dimensions dont les aires sont connues et la représentation algébrique. La même requête l'incite ensuite à construire la représentation graphique. Cette situation d'apprentissage fait intervenir trois variables : la longueur du côté opposé, la longueur des côtés adjacents et l'aire. Toutefois, deux variables doivent apparaître sur le plan cartésien. Elle évoque la pertinence des variables en s'appuyant sur la représentation algébrique. Les points localisés, à partir des croquis ou de la représentation numérique, lui suggèrent une courbe parabolique. Puis elle localise d'autres points issus de la représentation algébrique. Elle construit donc la représentation graphique en interprétant les autres représentations; elle ne semble pas opérer une transition directe seulement réservée à deux systèmes symboliques.

Les propos d'Isabelle exposent encore des considérations globales et locales. Les considérations globales ont trait à la disposition de l'ensemble des points localisés qui soutient la courbure entre deux points consécutifs sur le plan cartésien. À d'autres occasions, Isabelle interprète la situation de l'enclos pour soutenir cette courbure. Le dernier extrait de la description illustre les considérations globales. Les considérations locales font apparaître une valeur intermédiaire. Elle a fait appel à cette valeur pour soutenir à nouveau la courbure entre deux points consécutifs. La valeur intermédiaire lui a permis aussi de trouver l'enclos ayant la plus grande aire. Les considérations globales et locales semblent s'appuyer mutuellement.

La suggestion des formes canoniques, ou plutôt les modifications du libellé, semblent favoriser une correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques. En effet, cette suggestion fait intervenir des liens entre les paramètres de la forme canonique et les caractéristiques de la courbe parabolique. Par des substitutions ou par des manipulations algébriques, cette forme s'avère être la même que la représentation algébrique construite par Isabelle. D'autre part, la première modification du libellé opère des translations horizontales et verticales de la parabole sur le plan cartésien. Toutefois, la deuxième modification n'a pas entraîné autant de généralisation que la première. La correspondance est un critère de la compréhension formelle qui semble donc s'appuyer sur diverses manifestations au sein des autres modes.

En effet, la première modification touche au périmètre de l'enclos alors que la deuxième affecte sa forme. Les deux modifications du libellé semblent avoir suscité l'évolution de la pensée d'Isabelle à travers les modes de compréhension. La modification du périmètre entraîne une reprise du mode de compréhension procédurale puisque les procédures sont affectées. Il faut modifier le calcul des dimensions; ce qu'elle a réalisé. Autrement, la modification de la forme suscite une reprise du mode de compréhension intuitive puisque le développement du quadrilatère est différent; ce qu'elle a réalisé. Puis toujours coordonné au calcul de l'aire, le partage du périmètre fait intervenir quatre côtés plutôt que trois; ce qu'elle n'a pas réalisé. La régularité est alors modifiée; ce qui transforme la représentation algébrique et non seulement ses paramètres. De là, une correspondance pourrait être maintenue.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue encore de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation. Isabelle s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessus, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Enfin, elle a su de nouveau mettre à contribution la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité pour réaliser la construction de la représentation algébrique de la situation de l'enclos.

3.1.2.4 Situation d'apprentissage «Les trapèzes»

Cette situation d'apprentissage conduit Isabelle à modéliser le mouvement d'un pendule. L'investigation dynamique qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Ce dispositif se compose d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données permet à Isabelle de résoudre le problème.

Description

Isabelle résume l'ensemble des propos du libellé (voir l'annexe D) en identifiant le problème à résoudre : la longueur des trapèzes de Pierre. Puis elle explique la présomption au modèle linéaire. «En mettant les trapèzes de Michèle deux fois plus longs que ceux de Pierre, elle [Michèle] ferait un balancement et lui [Pierre] en ferait deux. Puis ils arriveraient à temps. Là, ça ne marche pas», dit-elle en indiquant un lieu d'échange entre les deux séries de trapèzes. Isabelle fait ensuite une comparaison entre les trapèzes et les balançoires en décrivant les étapes de l'investigation. «Par rapport à la longueur de la corde, il faudrait savoir comment ça prend de temps pour un balancement. Puis on pourrait peut-être déterminer comment ça en prendrait long à Pierre», dit-elle en ne sachant pas désigner le dispositif correspondant.

Je lui suggère alors d'utiliser un pendule. Isabelle propose de faire varier la longueur du pendule et de mesurer le temps d'un balancement. Une étape porte sur l'angle à donner aux pendules au départ. Elle indique qu'ils doivent avoir «le même angle». Avant de poursuivre, je l'invite à émettre une hypothèse. Elle dit que si un pendule de 5 mètres fait un balancement en 5 secondes, un pendule de 10 mètres prendrait plus de 5 secondes, mais moins de 10 secondes. Les données recueillies confirment son hypothèse.

Sollicitée à prévoir la durée d'une longueur donnée du pendule, Isabelle suggère la construction de la représentation algébrique et graphique. Elle fait la soustraction entre les données recueillies (voir la figure n° 6), elle calcule des vitesses, puis elle fait la soustraction entre les vitesses. La soustraction entre les données recueillies ou entre les vitesses ne révèle pas une augmentation ou une diminution selon un résultat constant. «Je ne voyais pas de suite là-dedans pour pouvoir continuer», dit-elle.

Figure n° 6	longueur	temps		vitesse	
Données recueillies	2,5 m	3,3 s		0,75	
			} 0,3		} 0,15
	2,0 m	3,0 s		0,6	
			} 0,2		} 0,06
	1,5 m	2,8 s		0,54	
			} 0,7		} 0,06
	1,0 m	2,1 s		0,48	
			} 0,4		} 0,19
	0,5 m	1,7 s		0,29	

Isabelle projette ensuite la construction de la représentation graphique. La disposition des points localisés sur le plan cartésien ne lui suggère pas une droite. «Si c'est une droite, il fallait qu'elle [la droite] passe par le plus de points possibles. Mais en même temps, ça ne marche pas», dit-elle en plaçant sa règle sur le plus de points possibles. Elle insinue une courbe en zigzag en déplorant le fait qu'il ne semble pas y avoir un résultat constant. «Ce n'est pas parce que tu augmentes d'une seconde que la distance [ou la longueur du pendule] va augmenter de tant», dit-elle en renonçant au modèle linéaire. Elle confirme de nouveau son hypothèse selon laquelle un pendule deux fois plus long ne prend pas deux fois plus de temps.

Conviée à tracer une courbe par une majorité des points localisés, Isabelle en joint quatre, puis elle en écarte deux. «Peut-être que, lorsque l'on a fait l'expérience, on a mal mesuré», argumente-t-elle. Elle interprète la représentation graphique pour estimer le temps de balancement d'un pendule de 2,5 mètres. À ma demande, elle fait une extrapolation de la courbe à partir du dernier point localisé. «Tu as 0,5 [(1,7; 0,5)] jusqu'à 1 [(2,4; 1,0)]. Bon bien, la distance [horizontale] comme ..., je ne sais pas trop comment. Et de 1 [(2,4; 1,0)] à 1,5 [(2,8; 1,5)]; elle [la distance horizontale] diminue tout le temps», dit-elle en indiquant que la distance horizontale entre des paires de points consécutifs diminue constamment.

Je l'invite alors à reconsidérer son extrapolation. Isabelle calcule la distance horizontale entre des paires de points consécutifs, puis elle relocalise les deux points écartés précédemment. Ensuite, elle recalcule la distance horizontale. «Si je prends ces points-là [(1,7; 0,5) et (2,4; 1,0)], bien parce que l'on va dire que l'on n'aurait pas fait d'erreurs que ça donnerait ça; il y a 7 entre les deux», dit-elle en indiquant deux points consécutifs dont l'un est relocalisé. «Ici [entre (2,4; 1,0) et (2,8; 1,5)], il y a 4, et ici [entre (2,8; 1,5) et (3,0; 2,0)], il y a 2. Ça baisse de 3 [à peu près] à toutes les fois. Mais là, tu ne peux pas faire bien loin de même; c'est une courbe», dit-elle en faisant la soustraction entre les coordonnées de x.

En considérant que la présomption au modèle linéaire est juste, Isabelle propose des changements aux systèmes symboliques. Elle suppose des trapèzes de 3 mètres pour Pierre si ceux de Michèle sont de 6 mètres. «De la façon qu'ils [Michèle et Pierre] pensaient : c'est que si la longueur des trapèzes doublait, le temps doublait», explique-t-elle en suggérant une droite sur le plan cartésien. «Si on avait trouvé 0,5 mètre et que le temps aurait été de 1,7 seconde; à 1 mètre, ça n'aurait pas été 2,1 secondes. Ça aurait été le double de 1,7 seconde; ça aurait été 2,4 [secondes]», dit-elle en indiquant les données recueillies. De cette façon, elle généralise le modèle linéaire sur les systèmes symboliques construits. Ensuite, je lui suggère le contexte lunaire plutôt que le contexte terrestre pour la conduite de l'investigation. Cette fois, Isabelle n'amène aucun changement aux systèmes symboliques. Selon elle, le contexte lunaire ne permet pas cette investigation puisqu'il n'y a pas de gravité.

Sollicitée à proposer une solution au problème du libellé initial, Isabelle décrit la relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes. «Il y a une chose qu'ils devraient faire. C'est de ne pas regarder pour rapetisser les trapèzes de Pierre mais de les rallonger, ou bien rapetisser ceux de Michèle parce que Michèle arrive avant lui», explique-t-elle. À ce moment, je suppose des trapèzes de 4 mètres plutôt que 8 mètres pour Michèle afin qu'Isabelle puisse tirer avantage de la représentation graphique. «Si elle a 4 mètres, je pourrais trouver que c'est à peu près 3,7 secondes que ça y prend», dit-elle en s'appuyant sur l'extrapolation de la courbe. Elle enchaîne pour déterminer la longueur des trapèzes de Pierre. «Dans ce temps-là, lui, faudrait qu'il en fasse deux. Ça veut dire que ça lui prend la moitié moins de temps à en faire un. Il faudrait que je prendrais 1,8 seconde [division de 3,7 par 2]. Il pourrait essayer 0,5 [mètre] ou un peu plus», ajoute-t-elle en consultant le plan cartésien. C'est ainsi qu'Isabelle propose la même démarche pour solutionner le problème du libellé initial.

Analyse

Les propos d'Isabelle attestent d'un détachement du modèle linéaire; ce qui semble favoriser l'appropriation du problème et l'identification de ce qu'elle cherche : le temps d'un balancement. Ces manifestations de la compréhension intuitive témoignent à présent d'un passage vers le mode de compréhension procédurale. En effet, la suggestion du pendule, qui fait suite à sa description des étapes d'une investigation, la conduit à préciser davantage la procédure liée au départ du pendule. Ce passage vers le mode de compréhension procédurale ne semble pas s'appuyer sur l'élaboration d'une hypothèse. Néanmoins, son hypothèse témoigne d'une prévision correcte de la situation des trapèzes puisque les données recueillies la confirment.

Toutefois, l'analyse des données recueillies ne semble pas permettre le passage vers la compréhension abstraite. Une composition d'opérations mathématiques peut susciter la reconnaissance d'une régularité ou tout au moins l'identification d'un résultat constant entre les grandeurs pertinentes. Isabelle fait les premières différences selon les mesures du temps. Toutefois, elle ne poursuit pas avec les deuxièmes différences puisque les premières ne dénotent aucune augmentation ou diminution selon un résultat constant. Cette situation d'apprentissage expose des nombres rationnels; ce qui semble rendre plus laborieux la reconnaissance d'un modèle de prédiction des états successifs du mouvement d'un pendule.

L'absence d'une régularité nuit à l'intégration des états successifs de la situation des trapèzes ainsi qu'au passage vers le mode de compréhension formelle. La disposition des points localisés, qui lui suggère une courbe, constitue tout au moins une manifestation de ce mode de compréhension. D'autre part, l'extrapolation de la courbe engage Isabelle à se donner des procédures pour justifier la localisation des points extrapolés. En effet, ces procédures font intervenir la distance horizontale entre des paires de points consécutifs coordonnée à leurs distances verticales. La distance horizontale diminue d'environ trois unités pour des distances verticales égales. C'est ainsi qu'elle semble opérer les différences de différences sur le plan cartésien pour prévoir la localisation des points de la courbe extrapolée.

En considérant que la présomption est juste, Isabelle interprète la longueur d'une série de trapèzes selon le modèle linéaire étant donné la longueur d'une autre série. Puis elle généralise ce modèle à l'ensemble de ses travaux afin de maintenir une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits. Pour une deuxième fois dans le cadre des entrevues d'intervention avec Isabelle, la description, le discrédit et la généralisation du modèle linéaire ne sont pas isolés à une seule représentation. D'autre part, la suggestion d'un petit nombre (4 mètres) pour la longueur d'une série de trapèzes lui permet de proposer une solution grâce à la représentation graphique. Privée de la représentation algébrique, elle propose une démarche selon la courbe extrapolée qui résout le problème des trapézistes.

Par conséquent, certains apprentissages scolaires se manifestent comme des représentations mentales qui ne peuvent pas être généralisées au mouvement d'un pendule. En effet, le calcul de la vitesse implique la distance parcourue et le temps. Toutefois, les données recueillies cumulent le temps et la longueur des fils du pendule. Cette longueur ne correspond donc pas à une distance parcourue. De plus, la suggestion d'un contexte, où la gravité sur les objets est moindre, n'a pas suscité de généralisation sur les systèmes symboliques. Isabelle n'a pas établi un lien avec la gravité plus faible sur la Lune que sur la Terre; une représentation mentale semblable a été notée avec la situation des puits.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue toujours de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des trapèzes. Isabelle s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

3.1.3 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation finale

Au moment de l'évaluation initiale, aucun critère de la compréhension intuitive ne s'était manifesté puisque les descriptions et les comparaisons d'Isabelle ne soulignaient pas les états successifs d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique. D'autre part, l'apparition d'un développement asymétrique de la variation avait nuit à l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique. Elle avait identifié tout de même les grandeurs pertinentes de cette situation (critère **P2**) au mode de compréhension procédurale.

L'identification des grandeurs pertinentes semblait avoir facilité la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A1**) qui se précise par une régularité (critère **A2**) et par un résultat constant (critère **A3**) au sein d'une situation quadratique. Les trois critères de la compréhension abstraite s'étaient ainsi manifestés rendant possible la conceptualisation de la fonction quadratique. D'autre part, aucun des critères de la composante formelle ne s'est manifesté. En effet, Isabelle semblait privilégier la variation représentée par une droite à la notion de variation exprimée par une courbe.

L'évaluation finale permet de tracer un nouveau portrait de la compréhension du concept de la fonction quadratique chez Isabelle suite à nos interventions, mais préalablement encore à tout enseignement conventionnel en salle de classe du concept. Nous allons tout d'abord faire une analyse des propos d'Isabelle, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Isabelle reprend les propos des libellés. «Tu peux tout prévoir d'avance parce qu'il dit où ça commence. Tu sais comme ça que ça commence là [30 000 $] pour la première année. Puis ça augmente tout le temps de 3 000 $», dit-elle pour la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire. À l'égard de la situation B, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, elle précise qu'«il ne dise pas, si en bas de 25 [°C], il y a moins de bactéries ou, si en haut de

25 [°C], combien il en reste.» En comparant la situation B avec la situation C, qui fait aussi intervenir une application de la fonction quadratique, elle reconnaît les états successifs dans le développement des situations. En effet, Isabelle décrit les états dans le voisinage de l'état maximal ou minimal. «La plus faible consommation est atteinte à 90 km/h [pour la situation C]. Ici [situation B], c'est le plus grand nombre de bactéries qui est atteint à 25 °C. Puis dans les deux [situations], il ne dit pas si après 25 °C ou si après 90 km/h, ça baisse ou ça monte. Bien, ça ne peut pas monter ici [situation B], par exemple. Puis ici [situation C], c'est le contraire, ça ne peut pas baisser plus que ça [90 km/h].» Enfin, pour la situation linéaire, Isabelle indique que «... ça augmente tout le temps de ...»; ce qui n'apparaît pas dans les autres citations. La comparaison des situations quadratiques l'engage à caractériser la situation B par des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Autrement, la situation C est caractérisée par des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis des états de croissance. La reconnaissance de ces états successifs soutient d'autant plus la discrimination d'une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas. Isabelle manifeste donc une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Quelle que soit la situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, les procédures d'Isabelle s'initient à partir de l'état maximal ou minimal. Par exemple, elle fait d'abord un regroupement de jetons pour désigner l'état maximal de la situation B (relative aux cultures de bactéries). «Ça, c'est à 25 °C. Supposons que ça serait à 24 [°C], bien peut-être que l'on en enlèverait quelques-uns. À 23 [°C] aussi, peut-être pas le même nombre non plus, je ne sais trop, mais on en enlèverait tout le temps en descendant», dit-elle en coordonnant le retrait d'un nombre variable de jetons au regroupement initial selon des températures régressives. «On ne peut pas en ajouter là. Supposons le contraire, à 26 [°C], il y en a moins. On en enlève à 26 [°C], à 27 [°C]. Peut-être que ce n'est pas le même nombre aussi là, je ne le sais pas trop comment en enlever», ajoute-t-elle en coordonnant toujours le retrait d'un nombre variable de jetons au regroupement initial selon des températures progressives. Isabelle exécute des manipulations semblables pour la situation C (relative à la consommation d'essence). Cette fois, ses procédures coordonnent l'ajout d'un nombre variable de jetons au regroupement initial selon des vitesses moyennes régressives et progressives. Le regroupement initial de jetons caractérise alors l'état minimal (90 km/h). Elle décrit ainsi une variation qui s'exprime par un développement symétrique, quelle que soit la situation quadratique. Par conséquent, Isabelle dégage la nature particulière de cette variation par l'ajout ou le retrait d'un nombre variable de jetons qui se distingue de l'ajout ou du retrait d'un nombre fixe de jetons. Ce premier critère illustre ainsi l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique par des repères. Enfin, elle identifie les grandeurs qui influencent chacun des états successifs ainsi que le développement global des situations : «la température, ça influence le nombre de bactéries» et «c'est la vitesse [moyenne] qui influence la consommation d'essence». Ce deuxième critère révèle une compréhension procédurale du concept de la fonction quadratique chez Isabelle.

C'est ainsi qu'Isabelle parvient à reconnaître une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes en faisant intervenir l'état maximal ou minimal au mode de compréhension abstraite. «Dans la situation B [relative aux cultures des bactéries], il donne le nombre maximal de bactéries. Puis dans la situation C [relative à la consommation d'essence], c'est le contraire, il donne la plus faible consommation d'essence. Ici [situation C], c'est comme quelque chose de plus petit. Ici [situation B], c'est avec le total, le plus grand.» Ces propos et les citations précédentes exposent donc la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Une nouvelle situation lui est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Sollicitée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Isabelle reconnaît une régularité. «Tu multiplies par lui-même. Parce que, si on calcule cela, on voit que si la rangée du centre est 1 [cube], tu as un; seulement un cube. Si c'est 2 [cubes], tu as 4 cubes», dit-elle en construisant et en généralisant la régularité au sein des arrangements proposés. Ayant utilisé la variable, x, elle construit la représentation algébrique, x^2. «Ça veut dire que pour 6 [cubes], ça serait 36 [cubes]», ajoute-t-elle en dessinant l'arrangement correspondant. Elle décrit aussi l'origine de cette relation fonctionnelle : «si tu les [cubes] arranges comme il faut, l'un par-dessus l'autre; c'est supposé faire un carré». Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Isabelle reconnaît à nouveau une régularité à partir des états du processus. Ayant de nouveau fait l'utilisation de la variable, x, elle construit la représentation algébrique, $2x^2$. Elle termine en disant que la prochaine valeur à la sortie correspond à 50 au moment où la valeur à l'entrée est 5. Une requête semblable l'amène à dégager un résultat constant en appliquant la soustraction entre les valeurs à la sortie (2, 8, 18, 32, 50). Isabelle élabore ainsi les premières différences : 6, 10, 14 et 18. «On peut voir que c'est une suite, en tout cas. La différence entre les deux [nombres issus des premières différences] augmente toujours de 4», dit-elle en confirmant de nouveau la prochaine valeur à la sortie, 50. Malgré le fait qu'Isabelle n'a pas isolé le résultat constant au sein de la situation D, la régularité se cache sous le réarrangement des cubes. Ainsi elle confirme de nouveau une compréhension abstraite, soit la reconnaissance d'une relation fonctionnelle et d'une régularité ainsi que l'identification d'un résultat constant.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Conviée à localiser un point entre deux points consécutifs, Isabelle trace une droite. «Je l'ai placé à peu près entre les deux [points consécutifs]. Et puis en tenant compte de la courbe qui se ferait, parce qu'ici ce n'est pas une droite; je ne pourrais pas le placer directement entre les deux. J'essayais de le placer un peu plus haut», dit-elle en introduisant un point variable sur le plan cartésien selon une courbe de concavité vers le haut. De plus, elle joint les points d'une deuxième série par une courbe. Enfin, rappelons qu'elle a utilisé, à deux reprises, une variable au moment où elle avait reconnu les régularités. Elle manifeste donc le premier critère de la compréhension formelle : l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Isabelle doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries) et la situation C (relative à la consommation d'essence). Elle semble d'abord soutenir l'interprétation de l'état maximal de la situation B par le sommet qui apparaît dans chaque série de points. «Ça [le sommet], c'est à 25 °C. En descendant la température, le nombre de bactéries diminue. En augmentant la température, aussi», dit-elle en interprétant la disposition des points dans le voisinage du sommet. «Et ça [l'axe des ordonnées], ça pourrait être le nombre de bactéries, et ici [l'axe des abscisses], la température», ajoute-t-elle en identifiant les grandeurs correspondantes sur les axes du plan cartésien. Isabelle fait une réflexion semblable pour la série qui caractérise la situation C, faisant aussi une correspondance entre les états successifs de cette situation et ses systèmes symboliques. La construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien ne s'est pas concrétisée. Elle a construit la représentation numérique sans pour autant reconnaître une régularité au sein des états successifs. Rappelons qu'elle a construit à deux reprises la représentation algébrique au moment où elle avait reconnu les régularités. Pour la construction de la représentation graphique, elle a de nouveau construit la représentation numérique à partir de la représentation algébrique. Isabelle a ensuite localisé les points correspondants sur le plan cartésien pour les joindre par une courbe. Enfin, la construction de la représentation algébrique peut fluctuer puisque cette construction nécessite la reconnaissance d'une régularité; ce qu'elle a réalisé à deux reprises dans cette évaluation. Elle manifeste donc les critères de la compréhension formelle du concept de la fonction quadratique.

Synthèse

Selon cette évaluation finale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension du concept de la fonction quadratique chez Isabelle. Ses descriptions et ses comparaisons révèlent maintenant les états successifs dans le développement des situations relatives aux cultures de bactéries et à la consommation d'essence (critère **I1**). La reconnaissance des états successifs permet ainsi de discriminer une situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, d'une autre qui ne l'est pas (critère **I2**). Cette compréhension intuitive semble favoriser l'acquisition de procédures.

Isabelle décrit désormais une variation par un développement symétrique au sein des situations quadratiques; c'est-à-dire qu'elle expose des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis d'états de croissance ou des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Ce développement précise la nature de la variation grâce à l'ajout ou au retrait d'un nombre variable de jetons. Elle illustre ainsi l'ordonnance des états successifs (critère **P 1**) d'une situation quadratique par des repères tels que les regroupements de jetons. L'identification des grandeurs pertinentes (critère **P 2**), qui est le dernier critère de la composante procédurale, semble faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle.

Par un détachement des procédures, la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A 1**) entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique se précise lorsqu'elle reconnaît une régularité (critère **A 2**). L'identification d'un résultat constant (critère **A 3**) confirme à nouveau cette relation. Le résultat constant ainsi que la régularité sont constitués d'une composition d'opérations mathématiques différente qui permet donc de prévoir et de confirmer les états successifs d'une situation quadratique. Les trois critères de la compréhension abstraite se sont manifestés de nouveau chez Isabelle.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation quadratique dans le plan cartésien, semble à présent se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Isabelle semble privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite. De cette façon, elle s'appuie à maintes reprises sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, l'utilisation de variables semble de nouveau autant conditionner la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique que la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité.

Par conséquent, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, peut influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Il semble bien que ce soit cette reconnaissance et cette ordonnance qui se substituent chez Isabelle à l'interprétation de l'état maximal ou minimal au moment de l'évaluation initiale. C'est ainsi que la composante formelle admet l'utilisation de variables (critère **F1**), la construction de la représentation algébrique (critère **F2**) puis la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques (critère **F3**).

3.2 L'étude de cas avec Vincent

Vincent est un élève de 16 ans. Le personnel enseignant consulté convient qu'il est un élève avec un rendement moyen parmi l'ensemble des élèves qui satisfont aux qualités recherchées. D'après son dossier, Vincent a maintenu une moyenne entre 80 et 90 % au cours de ses quatre dernières années scolaires.

3.2.1 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation initiale

L'évaluation initiale permet de tracer à la fois un portrait «critérié» et global de la compréhension à l'égard du concept de la fonction quadratique chez Vincent. Nous allons tout d'abord faire une analyse de ses propos, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). En dépit de l'intérêt vis-à-vis de l'état maximal ou minimal des situations B et C, les descriptions de Vincent ne semblent pas reconnaître les états de croissance et de décroissance. En effet, il reconnaît que la situation B, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, est plus complexe que la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire. Il explique alors que : «c'est le nombre de bactéries. Comme à 0 °C, il y en a moins. Mais à 25 °C, c'est le maximum qu'il peut y avoir.» Pour la situation C, faisant aussi intervenir une application de la fonction quadratique, il ajoute : «c'est la consommation d'essence en fonction de la vitesse que tu roules. Puis plusieurs disent que c'est à 90 km[/h] que tu dépenses le moins.» L'absence des états successifs dans le développement d'une situation quadratique nuit ainsi à sa discrimination. Sollicité à comparer les situations B et C, Vincent explique : «le plus grand nombre de bactéries est à 25 [°C]. Mais là, dans la situation C, c'est la plus faible consommation qui est à 90 km [km/h]; c'est le contraire.» Même avec des prévisions qui ne sont guère globales, telles que «... à 0 °C, il y en a moins ...» ou «... le moins quand tu suis cette vitesse ...», il ne semble pas manifester une compréhension intuitive.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Vincent est d'abord contrarié par le fait que ces situations, faisant intervenir des applications de la fonction quadratique, présentent des données partielles. «C'est cela qu'il me manque, le nombre de bactéries. S'il y a deux bactéries à 25 [°C], pour les autres, il n'y en a peut-être pas», dit-il en faisant un regroupement de deux jetons pour l'état maximal (25 °C) de la situation B (relative aux cultures de bactéries). Il décrit ensuite une variation qui s'exprime par un développement ponctué d'états, sans pour autant y faire des regroupements de jetons. «Ils disent que le maximum, un grand nombre de bactéries dans un milieu donné, c'est plus grand à 25 °C. Si la température est moins, il va y avoir moins de bactéries», précise-t-il en décrivant le nombre de bactéries à 20 °C de la situation B. «Une température supérieure à 25 [°C]? Je n'avais pas pensé à cela», ajoute-t-il en s'interrogeant sur le développement dans le voisinage de l'état maximal (25 °C). «Ça veut dire que s'il roule 50 km/h, elle [la consommation d'essence] serait plus forte», dit-il pour la situation C (relative à la consommation d'essence). Enfin, la variation selon un développement ponctué d'états est insuffisante pour ordonner les états successifs des situations B et C. Vincent ne décrit pas suffisamment les états dans le voisinage de l'état maximal ou minimal. D'autre part, il ne fait intervenir aucune procédure pour dégager le développement global d'une situation quadratique. Toutefois, il identifie le nombre de bactéries et la température ainsi que la consommation d'essence et la vitesse moyenne comme étant des grandeurs qui influencent ce développement. Il ne satisfait donc qu'à un seul des critères du mode de compréhension procédurale : l'identification des grandeurs pertinentes.

En outre, Vincent parvient à préciser une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes en identifiant certaines caractéristiques au mode de compréhension abstraite. «Il y a une certaine valeur [grandeur] qui va varier en fonction d'une autre», dit-il pour les situations B et C. «Puis la valeur à [la situation] B [relative aux cultures de bactéries] va diminuer, et la valeur à [la situation] C [relative à la consommation d'essence] va augmenter», ajoute-t-il à l'égard des états dans le voisinage de l'état maximal ou minimal. Ces propos identifient donc une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Une nouvelle situation lui est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Convié à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Vincent reconnaît une régularité selon un arrangement dont la base a 25 cubes. «Ça va faire 625 [25X25], divisé par 2; ça donne 312,5», dit-il en multipliant d'abord la base de 25 par elle-même. «Là, il faut que je rajoute la partie ici», précise-t-il en indiquant les cubes sur la diagonale d'un arrangement. «C'est la moitié de la base», conclut-il. «Donc, s'il y a une pyramide [un arrangement] de 25 [cubes à la base], c'est 312,5. La moitié de 25, c'est 12,5. Ça va faire 325 cubes [312,5+12,5]», prévoit-il pour un arrangement dont la base a 25 cubes. La relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique se précise donc par une régularité selon laquelle il établit une composition d'opérations mathématiques. Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Sollicité à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Vincent n'a pas reconnu une régularité. En dépit des rapports établis à partir des états du processus, il soupçonne tout de même l'existence d'une «formule». Convié à nouveau de prévoir les états successifs des situations D et E, il n'a pas pu dégager un résultat constant en appliquant la soustraction entre les données. Il s'en tient plutôt à l'addition; ce qui le conduit à prévoir une donnée arbitraire. L'absence d'un résultat constant n'avantage pas le modèle de prédiction. Malgré le fait qu'il n'a pas reconnu une régularité au sein de la situation E, Vincent satisfait tout de même à deux critères de la composante abstraite : la reconnaissance d'une relation fonctionnelle et d'une régularité.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés, faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Sollicité à localiser un point entre deux points consécutifs, Vincent trace une droite, puis il localise le point au milieu de la droite. «Je sais qu'il [le point] ne va pas là. Il va aller un peu au côté; ça fait une courbe», précise-t-il en localisant le point selon une concavité vers le haut. Les mêmes manipulations apparaissent lorsqu'il joint les points d'une autre série par une courbe. L'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien semble ainsi se manifester dans les verbalisations et les manipulations de Vincent. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Il doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries). Il s'appuie d'abord sur le sommet de chacune des séries pour interpréter l'état maximal de cette situation quadratique, puis son choix final semble se baser sur le développement dans le voisinage de cet état. Toutefois, la variation élaborée selon un développement ponctué d'états au mode de compréhension procédurale semble nuire à la manifestation du critère de la correspondance chez Vincent. Enfin, la construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien ne s'est pas concrétisée. Il inscrit les coordonnées de l'une des séries de points localisés, puis il soupçonne la caractéristique suivante : «est-ce que c'est là-dedans qu'il y a un x^2?» Bref, Vincent satisfait tout de même à un critère de la composante formelle : l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien.

Synthèse

Selon cette évaluation initiale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension fragmentée chez Vincent. Ainsi aucun critère de la compréhension intuitive ne s'est manifesté puisque ses descriptions et ses comparaisons ne soulignent pas les états successifs d'une situation quadratique. L'absence des états successifs pourrait expliquer l'apparition d'un développement ponctué d'états de la variation au sein des situations relatives aux cultures de bactéries et à la consommation d'essence. D'autre part, ce développement ne fait intervenir aucune procédure, et encore moins leur coordination. Toutefois, Vincent identifie les grandeurs pertinentes des situations quadratiques (critère **P2**) au mode de compréhension procédurale. L'identification de ces grandeurs semble faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A1**). Cette relation se précise lorsqu'il reconnaît une régularité (critère **A2**). Deux critères de la composante abstraite se sont ainsi manifestés dans ses verbalisations et ses manipulations.

Par conséquent, cette régularité illustre deux compositions d'opérations mathématiques qui auraient conduit à la forme générale de la représentation algébrique de la fonction quadratique. La première composition correspond à la base d'un arrangement élevée au carré et divisée par deux alors que la deuxième est la base d'un arrangement divisée par deux. La représentation algébrique correspondante est alors $y = 1/2x^2+1/2x$; ce qui est conforme à la forme générale, $y = ax^2+bx+c$ (a, b et c sont des nombres réels). Bien que Vincent n'a pas construit cette représentation, celle-ci illustre comment la forme générale est issue de l'addition d'au moins deux compositions d'opérations mathématiques. Enfin, un critère de la composante formelle s'est manifesté au moment où il a introduit un point variable dans le plan cartésien pour représenter un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Ainsi l'introduction d'un point variable dans le plan cartésien (critère **F1**) semble discréditer le modèle linéaire.

La notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Vincent semble privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite. De cette façon, il s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. L'utilisation de variables pour la construction de la représentation algébrique semble solliciter la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. D'autre part, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, pourrait influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Cependant, l'interprétation de l'état maximal ou minimal semble se substituer chez Vincent à cette reconnaissance ainsi qu'à cette ordonnance pour identifier les grandeurs pertinentes, une relation fonctionnelle, une régularité et un point variable sur le plan cartésien.

3.2.2 Description et analyse des entrevues d'intervention

Les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées par des problèmes dans les entrevues d'intervention. Vincent doit décrire, analyser des phénomènes et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Cependant, l'analyse n'est possible que s'il conduit une investigation. Nous décrirons chacune des interventions avec Vincent pour ensuite analyser les données recueillies.

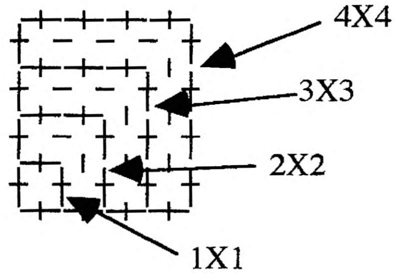
3.2.2.1 Situation d'apprentissage «Les plaques de béton»

Dans cette situation d'apprentissage, Vincent doit modéliser la disposition d'armatures dans un coffrage. La résolution du problème consiste à trouver le nombre d'armatures nécessaires pour un coffrage donné. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où il doit composer avec une structure de forme carrée.

Description

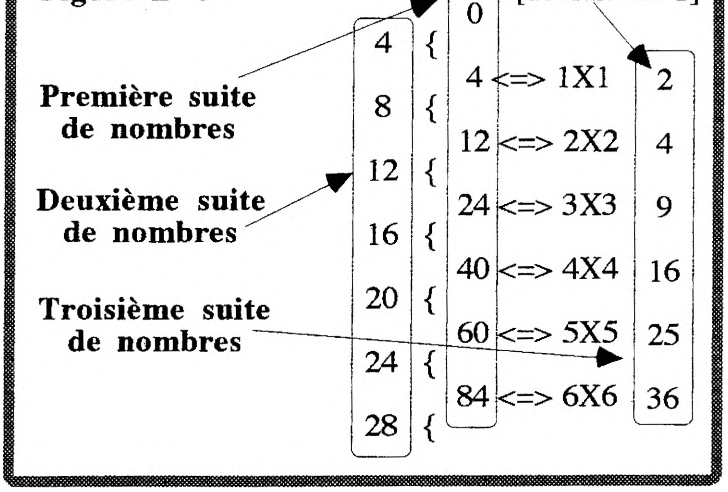
Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Vincent en résume les propos. Il se préoccupe de l'ajout d'armatures à un coffrage existant plutôt que de l'ajout de motifs de base. «Ça va être comme les tuiles sur le plancher. Ça va être disposé de la même façon : un carré», dit-il pour préciser la forme des coffrages. Sollicité à montrer différents coffrages, il indique que ça dépend de leur grandeur, puis il se propose de faire des croquis. Ses croquis illustrent des coffrages qui englobent les précédents (voir la figure n° 7).

Figure n° 7



Ainsi il représente seulement le contour des coffrages, puis il dénombre les armatures en laissant des marques. Avec ces procédures, il dénombre 4, 12, 24 et 40 armatures pour les coffrages correspondants. Désirant trouver le nombre d'armatures pour un coffrage de 100X100, Vincent construit une première suite de nombres (voir la figure n° 8). «Bien, c'est la grandeur que l'ouvrier va prendre. Qu'est-ce que ça influence? Le nombre d'armatures [nécessaires]», dit-il en identifiant les grandeurs pertinentes. Selon les procédures précédentes, il dénombre 60 armatures pour le croquis d'un coffrage de 5X5. Après il établit une deuxième suite de nombres issue de la soustraction entre les nombres de la première suite (voir la figure n° 8). «Ça monte de 4 à chaque fois», conclut-il en dégageant un résultat constant de la deuxième suite. «Si je continue, c'est 20 [deuxième suite de nombres]. Il va augmenter à 24 [deuxième suite de nombres]. Donc ici [première suite de nombres], ça sera 84 [armatures] pour un [coffrage de] 6X6», dit-il en complétant les nombres des suites.

Figure n° 8

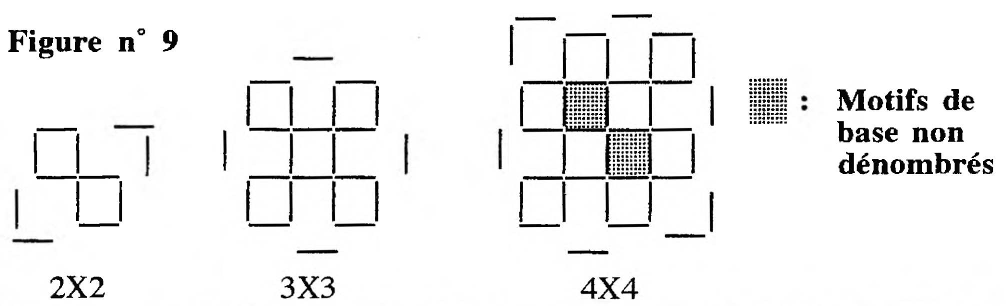


Convié à prévoir le nombre d'armatures dans un coffrage selon ses dimensions, Vincent élabore une composition d'opérations mathématiques. «Trois plus 3, ça fait 6. Fois 2, ça me donne 12. J'ai [le coffrage de] 4X4. Quatre plus 4, ça me donne 8. Fois 2, ça me donne 16. À chaque fois, ça me donne la différence», dit-il en justifiant les nombres de la deuxième suite (voir la figure n° 8). «Cent plus 100; ça fait 200. Fois 2, il va y avoir 400 armatures de plus pour [le coffrage de] 100X100», ajoute-t-il en proposant le nombre d'armatures à ajouter à un coffrage de 99X99. Toutefois, le problème subsiste. «C'est pour savoir le nombre d'armatures que tu as sur le chiffre avant», dit-il en indiquant les nombres de la première suite. Selon les procédures précédentes, il dénombre 84 armatures pour le croquis d'un coffrage de 6X6. Il élabore ensuite une troisième suite de nombres issue du produit des dimensions des coffrages (voir la figure n° 8).

Sollicité à construire physiquement les coffrages, Vincent se propose de travailler avec des cure-dents selon les procédures précédentes. «J'en ai 4. Là, j'en ai 6. Et là, j'en ai 8», dit-il en indiquant le nombre de cure-dents ajoutés selon le contour des coffrages de 1X1, de 2X2 et de 3X3 (voir la figure n° 7). «J'en mettais deux de plus», précise-t-il. Ses efforts étant vains, «il doit arriver quelque chose avec le contour», dit-il en dénombrant 4, 8, 12 et 16 cure-dents ajoutés au contour des coffrages de 1X1, de 2X2, de 3X3 et de 4X4. «Ça se trouve à être la différence», affirme-t-il en indiquant les nombres de la deuxième suite (voir la figure n° 8). Il essaye ensuite d'établir une composition d'opérations mathématiques à partir des deuxième et troisième suites, mais ses efforts sont encore vains. En considérant les cure-dents du contour séparément de ceux à l'intérieur, il ne parvient donc pas à reconnaître une régularité entre le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et ses dimensions.

Convié à revoir ses procédures, Vincent construit de nouveau un coffrage de 4X4 avec des cure-dents. «Si j'enlève ceux-là, ceux qui restent intacts, ... le nombre de carrés», dit-il en enlevant des cure-dents du coffrage de façon à y trouver que des motifs de base (voir la figure n° 9). «Il n'y aura pas un autre carré qui va être utilisé», précise-t-il en indiquant que les cure-dents des motifs de base ne sont pas partagés avec les autres motifs du coffrage de 4X4. Il dénombre ainsi 8 motifs de base et 8 cure-dents enlevés.

Figure n° 9



Pour un coffrage de 3X3, il enlève 4 cure-dents afin de conserver 5 motifs de base.

Puis il enlève 4 cure-dents pour conserver 2 motifs de base dans un coffrage de 2X2 (voir la figure n° 9). «C'est avec la grandeur», dit-il en pressentant une relation avec les dimensions du coffrage. En opérant la soustraction entre les nombres de motifs de base (2, 5 et 8), il note une augmentation de 3. Vincent fait une mise au point. «J'en ai trop fait. Je n'en ai pas suivi une à point», dit-il en essayant d'établir une relation entre le nombre de cure-dents enlevés dans le coffrage de 4X4 et ses dimensions. Pour la construction du coffrage de 5X5 selon les procédures précédentes, il enlève 8 cure-dents, et 10 motifs de base apparaissent. Il en enlève 12 du coffrage de 6X6 qui contient 18 motifs de base. Il enlève 12 traits au croquis du coffrage de 7X7 contenant ainsi 25 motifs de base. Enfin, le nombre d'armatures enlevées est le même pour les coffrages de 2X2 et de 3X3 (4 armatures enlevées), de 4X4 et de 5X5 (8 armatures enlevées) ainsi que pour les coffrages de 6X6 et de 7X7 (12 armatures enlevées).

Sollicité à établir une relation entre les 4 armatures enlevées du coffrage de 2X2 et ses dimensions, Vincent reconnaît deux régularités. «Oui, c'est la moitié du périmètre. Mais ici [coffrage de 3X3], ça ne marche pas. Là [coffrage de 2X2], ça marche», dit-il en tentant de construire la première régularité. «Comme ici [coffrage de 4X4], j'ai un périmètre de 16; tu en enlèves 8. Ici [coffrage de 2X2], j'ai un périmètre de 8; tu en as enlevé 4», dit-il en généralisant la première régularité aux coffrages de dimension paire. «Ça peut être aussi deux fois le côté», propose-t-il pour la première régularité.

La même requête l'amène à établir une autre relation entre les 8 motifs de base du coffrage 4X4 et ses dimensions. «J'en ai 32 [armatures dans les 8 motifs de base]. La grandeur, c'est 4. Quatre fois 8 [armatures enlevées], 32», conclut-il. C'est ainsi qu'il reconnaît la deuxième régularité : «je multipliais la base par le nombre que j'enlevais». Toutefois, il termine l'entrevue confus. «Si j'ai 6 [coffrage de 6X6], j'en enlève 12 [armatures]. Donc, c'est deux fois la base [2X6]. 2 fois la base. Si c'est 6; 2 fois la base. O.K. [12 armatures enlevées]. Je fais 6 ... Je suis perdu», dit-il en appliquant simultanément les deux régularités au coffrage de 6X6.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème et inciter l'étude de la disposition d'armatures dans un coffrage. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive lorsque Vincent précise l'importance de l'ajout d'armatures à un coffrage existant plutôt que l'ajout de motifs de base. Par la suite, les croquis et les constructions (avec des cure-dents) précisent la forme des coffrages ainsi qu'un passage vers le mode de compréhension procédurale. Ses procédures initiales, qui semblent provenir de l'intérêt à l'égard de l'ajout d'armatures, font qu'un nouveau coffrage enveloppe constamment les précédents. L'identification des grandeurs pertinentes et le dénombrement des armatures constituent d'autres manifestations du mode de compréhension procédurale.

Vincent compose ensuite trois séries d'opérations mathématiques à partir des nombres issus du dénombrement des armatures. Ses procédures initiales semblent conduire à l'opération de la soustraction entre les nombres. Cette opération permet d'établir les premières et les deuxièmes différences puisqu'il note une augmentation de 4. Il a donc dégagé un résultat constant selon les différences de différences. La deuxième composition permet de justifier les premières différences. En effet, les armatures ajoutées à un coffrage correspondent à deux fois l'addition de ses dimensions ou à la moitié des armatures dans son périmètre. Toutefois, la troisième composition, le produit des dimensions d'un coffrage, n'amène pas de généralisations aussi déterminantes que les deux compositions précédentes. Ces compositions lui permettent tout de même d'identifier un modèle de prédiction des états successifs.

Les compositions d'opérations mathématiques décrites jusqu'à présent ne semblent pas avoir suffi pour reconnaître une régularité entre les dimensions d'un coffrage et le nombre d'armatures nécessaires. La deuxième composition dévoile tout de même une régularité entre le nombre d'armatures ajoutées à un coffrage et ses dimensions. Toutefois, cette régularité ne semble pas conduire à la résolution du problème puisqu'il doit maintenant déterminer le nombre d'armatures dans le coffrage précédent. S'il veut reconnaître une régularité, il doit rendre ses procédures plus efficaces. Les trois compositions d'opérations mathématiques ne semblent pas favoriser la modification des procédures utilisées par Vincent.

Cette modification se révèle lorsqu'il reconnaît deux sous-arrangements d'armatures dans le coffrage. Les sous-arrangements font apparaître autant de régularités. Toutefois, les compositions d'opérations mathématiques qui en découlent sont seulement applicables aux coffrages de dimension paire. Un premier sous-arrangement a trait au plus grand nombre de motifs de base que l'on retrouve dans un coffrage. De celui-ci, le deuxième sous-arrangement émerge, soit le nombre d'armatures enlevées du coffrage. Les deux sous-arrangements font intervenir des procédures de dénombrement coordonnées aux dimensions du coffrage. Ces deux compositions semblent permettre l'intégration des états successifs de la situation des coffrages, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

Le nombre d'armatures enlevées dans un coffrage de dimension paire correspond à la moitié de son périmètre ou au double de ses dimensions, $1/2(4x)$ ou $2x$. Le nombre d'armatures incluses dans les motifs de base correspond alors au produit des dimensions par le nombre d'armatures enlevées, $x(2x)$. L'addition des résultats issus des deux régularités constitue le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage de dimension paire. La représentation algébrique, $y = 2x^2+2x$, résulte des deux compositions d'opérations mathématiques. Cette représentation est généralisable à des coffrages de dimension impaire.

En dépit du fait que cette représentation n'a pas été construite par Vincent, ses processus de pensée présentent une évolution remarquable. Cette forme de la représentation algébrique est semblable à la forme construite par Isabelle. Par quelques manipulations algébriques, nous pouvons transformer la forme, $y = 2x^2+2x$, à celle-ci, $y = 2x(x+1)$. D'autre part, la forme, $y = 2x^2+2x$, constitue la forme générale de la fonction quadratique, $y = ax^2+bx+c$ (a, b et c sont des nombres réels). Il est saisissant de percevoir comment la forme générale peut être construite à partir de deux régularités issues de deux sous-arrangements dans une structure. Toutefois, la conduite simultanée de deux compositions d'opérations mathématiques est éprouvante. Vincent doit mener chaque composition au moyen d'une série de procédures coordonnées. Ses efforts ne lui ont pas suffi pour bénéficier d'une prise de conscience, et d'emblée, pour construire les autres systèmes symboliques.

Au moment de l'évaluation initiale, il est à noter que Vincent a démontré des processus de pensée semblables pour construire la représentation algébrique, $y = 1/2x^2+1/2x$, de la situation relative aux différents arrangements de cubes. En effet, cette situation a conduit

Vincent à partager la structure en deux sous-arrangements. Lié l'un à l'autre, chaque sous-arrangement a permis la coordination de procédures entre le nombre d'éléments dans la structure et ses dimensions. Chaque sous-arrangement engage alors la reconnaissance d'une régularité ainsi qu'une composition d'opérations mathématiques correspondante. Une structure semble donc permettre la construction de la forme générale de la représentation algébrique de la fonction quadratique en une somme des régularités issues des sous-arrangements.

3.2.2.2 Situation d'apprentissage «Les puits»

Cette situation d'apprentissage conduit Vincent à modéliser le mouvement d'un objet en chute libre. L'investigation qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Le chronomètre marqueur permet de mesurer la distance parcourue par un objet selon des intervalles de temps égaux. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données issues de l'investigation dynamique permet à Vincent de résoudre le problème.

Description

La lecture du libellé (voir l'annexe D) engage Vincent à en décrire les propos. «Elle [Marie] a multiplié le 11,25 mètres par 2», dit-il en appliquant le modèle linéaire. «Ici [le puits du voisin], ça prend la moitié moins de temps que là [le puits du grand-père]», ajoute-t-il en décrivant le problème à résoudre. À l'égard de l'influence de la masse sur un objet en chute libre, il explique : «même si la pierre pèse plus, elle va descendre exactement en même temps; elle va arriver en même temps au sol.» Confirmant ainsi les propos du libellé, il émet une hypothèse. «Vu que dans une seconde, elle fait 5 mètres; dans deux secondes, elle va faire 10 mètres; tu doubles», explique-t-il en étant perplexe. Il indique que le mouvement d'un objet en chute libre est influencé par la gravité. «9,8 m/s^2», dit-il en rappelant la constante de l'accélération terrestre.

Convié à vérifier son hypothèse, Vincent suggère quelques étapes de l'investigation. «Le chronomètre et tu prends des poids différents», dit-il en suggérant le matériel de manipulation nécessaire. «Il va falloir être vite sur le piton», précise-t-il en actionnant le chronomètre. Les quelques essais expérimentaux témoignent de la rapidité du mouvement d'un objet en chute libre. À ce moment, je lui suggère l'emploi du chronomètre marqueur. Pour les besoins de l'investigation, je lui demande de tracer un trait à tous les six repères. «Ça s'agrandit tout le temps», signale-t-il. Je lui indique que les intervalles entre les traits correspondent à des dixièmes de seconde. «Mesurer la longueur, puis multiplier par le nombre de barres [traits]», dit-il en prenant une règle. Il mesure sept intervalles (voir la figure n° 10).

Figure n° 10

8,7 17,5 26,5 35,4 44,8 54,2 75,2

Vincent indique le temps correspondant à chaque mesure. «Pour 0,2 [s]; ça va être ça [8,7] plus ça [17,5]. Pour 0,3 [s]; ça va être ça [8,7+17,5+26,5]. Pour 0,4 [s]; ça va être ça [8,7+17,5+26,5+35,4]», dit-il en encerclant les mesures qui interviennent dans le temps à établir (voir la figure n° 10). «Pour 0,1 s, il mesure 8,7 cm. Pour 0,2 s, il va faire 17,5 plus 8,7; 26,2 cm», décrit-il en additionnant les mesures. Il construit ainsi une première suite de nombres, soit la distance parcourue à chaque dixième de seconde (voir la figure n° 11). «Je le savais que ce n'était pas pareil», ajoute-t-il en infirmant son hypothèse.

Figure n° 11

	0,1 s	=	8,7 cm		
Première suite de nombres				} 17,5	
	0,2 s	=	26,2 cm		} ≈ 8,7
				} 26,5	
	0,3 s	=	52,7 cm		} ≈ 8,7
				} 35,4	
	0,4 s	=	88,1 cm		} ≈ 8,7
				} 44,8	
	0,5 s	=	132,9 cm		} ≈ 8,7
				} 54,2	
	0,6 s	=	187,1 cm		} ≈ 8,7
				} 75,2	
	0,7 s	=	262,3 cm		
Deuxième suite de nombres				} 83,9	
	0,8 s	=	346,2 cm		
	0,9 s	=	436,2 cm		

Sollicité à prévoir la distance parcourue, Vincent n'y voit aucune issue. «C'est à peu près fois 3», dit-il en décrivant l'augmentation de la distance parcourue de 0,1 à 0,2 s (voir la figure n° 11). «C'est à peu près fois 2, puis ça rapetisse», ajoute-t-il pour les augmentations subséquentes. Mettant en doute l'exactitude des mesures, il tente de les vérifier. «Je prends le chiffre ici [8,7]. Je l'ai additionné avec lui [17,5], ça me donne lui [26,5] à peu près», précise-t-il en indiquant que la troisième mesure est justifiée par l'addition des deux premières. Selon la même démarche, il note une irrégularité. «J'avais 8,7 tout à l'heure et là [75,2-54,2=21]», dit-il en faisant la soustraction entre les deux dernières mesures. Puis par la soustraction entre les nombres de la première suite (voir la figure n° 11), il obtient les mesures.

Cette deuxième suite de nombres va permettre à Vincent de prévoir la distance parcourue. «Ici [pour les nombres 26,5; 35,4; 44,8 et 54,2], j'ai additionné 8,7. Là [pour le nombre 75,2], je vais additionner 8,7. Mon nombre, il va être à peu près 83,9», dit-il en inscrivant le prochain nombre de la deuxième suite. «La différence est de 8,7 environ», ajoute-t-il à titre de résultat plus ou moins constant, issu de la soustraction entre les nombres de cette suite. «Pour le 0,8 [s], je vais additionner cela avec ça; 262,3 plus 83,9», décrit-il en indiquant les nombres correspondants. «Il y aurait 3 mètres et plus à 0,8 [s]», dit-il en inscrivant 346,2 cm. Convié à trouver la distance parcourue à partir du temps, il poursuit le même processus de calcul d'élaboration des deux suites.

Une requête semblable amène Vincent à proposer un «graphique». «La variable dépendante, c'est ça, ici [l'axe des ordonnées]. Elle va être la distance. Et le temps, c'est contrôlé», dit-il en indiquant l'axe des abscisses. Les points localisés lui suggèrent une courbe. «Tout cela, c'est une courbe», précise-t-il étant sollicité à vérifier la courbure entre deux points consécutifs. «Ça n'arrivera pas sur une droite, ça va arriver un peu au côté», ajoute-t-il en tentant de localiser un point selon une courbe de concavité vers le bas. Convié de nouveau à trouver la distance parcourue à partir du temps, il n'apporte aucune solution au problème.

Après cet examen, je suggère un temps de 4,5 secondes sur le libellé au lieu de 3,0. «Ça serait 3 fois 11,25. Ça serait 33,75 [m]. C'est la corde qu'elle [Marie] aurait mise selon son raisonnement», dit-il en appliquant le modèle linéaire. Puis Vincent apporte des changements aux systèmes symboliques. «Ça serait tout le temps fois trois», affirme-t-il en indiquant la distance parcourue. Par rapport aux mesures, le même résultat apparaîtrait à chaque intervalle entre les traits sans qu'il ne précise le résultat issu de la soustraction entre les mesures. «Ça aurait fait une droite au lieu d'une courbe», ajoute-t-il en généralisant le modèle linéaire à la représentation graphique.

Je suggère à Vincent de mener l'investigation sur la Lune plutôt que sur la Terre. «Oui, ça amènerait des changements. Parce que sur la Lune, il n'y a pas de résistance de l'air. Et l'attraction de la Lune est moins forte sur les poids qu'ici sur Terre», dit-il en regardant les systèmes symboliques. «Admettons que je pars de l'hypothèse que c'est six fois moins grand sur la Lune que sur la Terre. Bien, ça serait six fois plus petit», précise-t-il en indiquant les mesures et la distance parcourue. «Elle serait en bas; six fois plus petit», ajoute-t-il en proposant une courbe qui passe en-dessous de la courbe initiale. Toutefois, la suggestion de la hauteur au lieu de la distance parcourue ne l'incite pas à amener des changements à la représentation graphique. Sollicité à faire une extrapolation, il suggère une courbe à partir du dernier point localisé sans pour autant estimer la distance parcourue à 3 secondes.

Analyse

Les descriptions demandées à Vincent semblent favoriser l'appropriation du problème par l'explication de la présomption au modèle linéaire. Il approuve aussi les propos du libellé à l'égard de l'influence de la masse sur un objet en chute libre. Ces descriptions témoignent de manifestations d'une compréhension intuitive et de représentations mentales favorables à l'étude de la situation des puits. L'élaboration d'une hypothèse permet le passage vers la compréhension procédurale au moment où il décrit les étapes de l'investigation. Les quelques essais expérimentaux confirment la rapidité du mouvement d'un objet en chute libre, ce qui l'incite à rendre ses procédures plus efficaces. La suggestion du chronomètre marqueur est alors propice.

Les intervalles entre les repères augmentent, infirmant ainsi l'hypothèse de Vincent. La mesure des intervalles constitue les premières différences. La vérification des mesures l'engage à opérer les deuxièmes différences et à constater l'irrégularité de la dernière mesure. En dépit du fait que les mesures sont des nombres rationnels, il dégage tout de même un résultat constant (8,7), mais approximatif. Cette composition d'opérations mathématiques lui permet d'identifier un modèle de prédiction des états successifs de la situation des puits, rendant ainsi possible la résolution du problème. Ces manifestations de la compréhension abstraite peuvent difficilement susciter un passage vers ce mode de compréhension. Ce passage nécessite la reconnaissance d'une régularité entre la distance parcourue et le temps.

L'absence de la régularité nuit donc à l'intégration des états successifs de la situation des puits ainsi qu'au passage vers la compréhension formelle pour laquelle la construction de la représentation graphique constitue tout de même une manifestation. D'autre part, Vincent soutient la courbure entre deux points consécutifs par des considérations globales et locales. Les considérations globales ont trait à la disposition de l'ensemble des points localisés. Alors que celles locales font apparaître une valeur intermédiaire qui permet la localisation d'un point selon une courbe de concavité vers le bas. Par ces considérations, il extrapole une courbe à partir du dernier point localisé sans pour autant proposer une solution au problème.

La généralisation du modèle linéaire engage Vincent à maintenir une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits; il renonce ainsi au modèle linéaire. Cette généralisation illustre de quelle façon un discrédit du modèle linéaire n'est pas isolé à une seule représentation. Lorsqu'il compose avec le contexte lunaire, il identifie le facteur clé de ce contexte : «six fois plus petit». Ainsi il maintient de nouveau une correspondance entre les états successifs de la situation des puits et ses systèmes symboliques.

Les représentations mentales de Vincent semblent favoriser, tout autant que l'élaboration d'une hypothèse, la conduite d'une investigation dynamique. Dès le début de l'entrevue, il indique que l'attraction terrestre est la cause de la chute libre d'un objet. En terminant, il s'appuie sur la même cause pour généraliser les effets du contexte lunaire sur les systèmes symboliques construits. L'objection relative à l'influence de la masse sur un objet en chute libre expose de nouveau des représentations mentales favorables. De plus, l'émergence du résultat constant, quoique approximatif, demeure un élément clé de l'investigation de Vincent. En analysant des nombres rationnels, il parvient à prévoir les états successifs de la situation des puits. Toutefois, la reconnaissance d'une régularité entre des grandeurs comportant des nombres rationnels demeure problématique.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue de nouveau de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des puits. Vincent s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

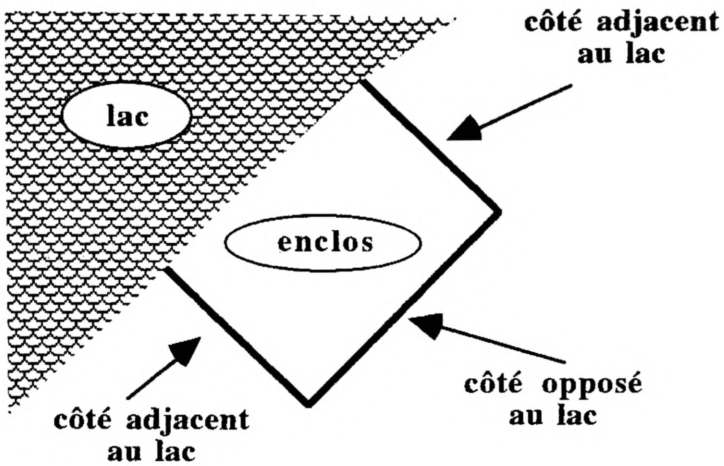
3.2.2.3 Situation d'apprentissage «L'enclos»

Dans cette situation d'apprentissage, Vincent doit modéliser la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Le périmètre correspond à 26 mètres de clôture avec laquelle il doit former trois côtés d'un enclos le long d'un lac. La résolution du problème consiste à trouver les dimensions d'un enclos dont l'aire est maximale. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où Vincent doit composer avec une structure de forme rectangulaire.

Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Vincent en résume les propos. «C'est d'avoir le plus grand enclos possible, celui avec la plus grande étendue pour son cheval», dit-il en identifiant le problème. «L'enclos va contenir une aire. Quelle que soit la façon que tu changes, l'aire va être pareille», ajoute-t-il à titre d'hypothèse. Convié à montrer la disposition de la clôture, il demande si l'enclos est de forme rectangulaire, triangulaire ou circulaire. Rappelant à Vincent les propos du libellé, il fait le croquis d'un enclos de 1X24 pour lequel le calcul de l'aire donne 24 m^2. Ce croquis (voir la figure n° 12 à la page suivante) présente une forme rectangulaire dont la première dimension (1) correspond aux côtés adjacents au lac, et la deuxième dimension (24), au côté opposé au lac. «Oh, je ne suis pas bon avec mon affaire. Ici, j'ai 2 [pour le côté adjacent], 22 [pour le côté opposé] et j'ai 2 [pour l'autre côté adjacent]; l'aire va être de 44 [m^2]», dit-il en infirmant son hypothèse.

Figure n° 12



Vincent fait ensuite le croquis d'un enclos de 3X20. «J'ai 26 mètres de clôture, il faut que je prenne les deux chiffres [dimensions] les plus rapprochés», précise-t-il à titre de procédures pour déterminer les dimensions des croquis subséquents. C'est ainsi qu'il calcule successivement des aires de 24, 44, 60, 72, 80, 84, 84 et 80 m^2 pour des côtés adjacents de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 mètres. «Il [le fermier] peut les disposer de deux façons : 7X12 ou 6X14» conclut-il en indiquant les aires de 84 m^2. Sollicité à valider ses résultats, il fait la soustraction entre les aires. «Ici, c'était 20 [44-24], 16 [60-44], 12 [72-60]; ça descend de 4», dit-il en dégageant un résultat constant.

Vincent se propose de faire un «graphique». «J'ai trois chiffres; j'ai l'aire, j'ai la largeur [du côté adjacent] et la longueur [du côté opposé]», s'interroge-t-il en ne sachant pas quelles grandeurs doivent apparaître sur le plan cartésien. Il combine donc les côtés sur les abscisses, puis l'aire sur les ordonnées. «Neuf et 8, 10 et 6, 11 et 4, 12 et 2. Aller à 1, je ne peux pas. Si je vais à 1, ça va me donner 12,5» ajoute-t-il en générant la longueur des côtés des enclos non établis. Il localise sept points en s'appuyant sur ses croquis, suivi d'une extrapolation selon une courbe parabolique de concavité vers le haut. «Une clôture tout le long du lac, il n'y aurait pas d'aire», décrit-il étant convié à localiser le point pour un côté adjacent de

0 mètre. «Je l'ai fait de même, mais ça ne sera pas en ligne droite», précise-t-il en joignant quelques points localisés par des droites.

Sollicité à vérifier la courbure entre deux points consécutifs, Vincent suggère une valeur intermédiaire entre les points (6 et 14; 84) et (7 et 12; 84). «6,5 fois 13; ça donne 84,5. Ça va faire une courbe», ajoute-t-il en interpolant le point (6,5 et 13; 84,5). À ce moment, il doute du point interpolé. Il construit un nouveau plan cartésien dont les intervalles sont plus étendus. «Ici, ça fait des courbes. Ça, j'en suis sûr», affirme-t-il en reconsidérant le plan cartésien initial. Convié à donner les dimensions du plus grand enclos, il indique l'abscisse 6,5 et 13. «C'est mon point le plus haut dans le graphique», dit-il en indiquant le point correspondant (6,5 et 13; 84,5). En s'assurant de nouveau de la forme rectangulaire des enclos, le graphique constitue, selon lui, une preuve qui confirme la solution du problème.

Sollicité à construire la représentation algébrique, Vincent explicite la procédure pour obtenir la longueur du côté opposé à partir de la longueur du côté adjacent. «Je vais avoir une largeur de 8 pour un des côtés [adjacents]. L'autre [côté adjacent] va être 8, aussi. Donc, 26 moins 16; il va me rester 10 pour ce côté [opposé]», dit-il en faisant le croquis de l'enclos de 8X10. Puis il multiplie la longueur du côté adjacent et opposé pour obtenir l'aire. «Ça va être 26 moins $2x$», précise-t-il pour le côté opposé. «L'aire, c'est $A = xy$», propose-t-il en indiquant que le résultat précédent va lui donner y. Contrarié par les variables, il explicite une procédure qui décrit la longueur du côté adjacent à partir de la longueur du côté opposé. «Bien, c'est cela, il y en a une [grandeur] qui va dépendre de l'autre», dit-il en construisant l'expression, $(26\text{-}x)/2$. Convié à donner le résultat du calcul de l'aire, il obtient l'expression suivante : $(26\text{-}x)/2 \cdot ? = A$. Puis il remplace le point d'interrogation par x. Sollicité à vérifier sa représentation algébrique, il y substitue des dimensions dont les aires sont connues sans pour autant repérer les points correspondants sur le plan cartésien.

Je modifie ensuite le périmètre, soit 100 mètres de clôture plutôt que 26. Vincent révise ses systèmes symboliques. «Ça va changer mes données, mes dimensions. Ça va changer l'aire», dit-il en indiquant les valeurs sur les axes du plan cartésien. «La formule ne changera pas, mais ça va être 100 au lieu de 26», précise-t-il pour la représentation algébrique,

$(26-x)/2 \cdot x = A$. «Ça va être plus grand», ajoute-t-il en décrivant une courbe parabolique qui englobe la courbe initiale sur le plan cartésien. Convié à préciser davantage l'emplacement de la nouvelle courbe, il calcule des aires. «Au lieu d'être 24, ça va être 98. Ça va me donner une aire de 98 [m^2]», décrit-il en localisant le point correspondant au-dessus du point initial.

Une deuxième modification du libellé touche à la structure de l'investigation, soit la réalisation des quatre côtés d'un enclos toujours selon 100 mètres de clôture. «Je vais avoir un côté de plus», dit-il en faisant des croquis d'enclos. Vincent dessine successivement les enclos de 1X49, de 2X48, de 3X47, de 24X26 et de 25X25. «24 fois 26; 624 [m^2]. Si j'ai 25; 25 fois 25; 625, c'est 625 m^2», ajoute-t-il en indiquant le croquis de l'enclos de 25X25. «Là aussi, ça va faire une courbe», précise-t-il en indiquant le plan cartésien. Sollicité à préciser davantage l'emplacement de la nouvelle courbe, il calcule des aires. «J'avais une aire de 98 [m^2] au premier point. Et ici, j'ai une aire de 49 [m^2]», dit-il en indiquant que la nouvelle courbe serait entre les deux précédentes. Il termine l'entrevue en citant les dimensions 6,5 et 13 qui donnent une aire maximale selon le libellé initial.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème. La recherche de la plus grande étendue conduit Vincent à identifier la notion d'aire à la base de l'investigation. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive pour l'étude de la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Toutefois, certaines intuitions demandent à être précisées. Quelles que soient les dimensions de l'enclos, il croit que l'aire demeure constante; il semble établir une correspondance entre l'invariance du périmètre et l'aire. Ses intuitions se précisent lorsqu'il fait le croquis des enclos.

À ce moment, l'aire varie en dépit d'un périmètre constant. Vincent entame ainsi un passage vers le mode de compréhension procédurale. Il coordonne la disposition de la clôture autour de l'enclos à un écart régressif entre ses dimensions. D'autre part, il décrit la même coordination lors de la modification de la structure de la forme rectangulaire à la forme carrée. L'écart entre les dimensions de l'enclos de 25X25 devient nul alors qu'il est de 6,5 pour l'enclos de 6,5X13. Cette coordination conduit aux enclos ayant la plus grande aire.

Encouragé à justifier la solution selon le libellé initial, Vincent opère les différences de différences. Issu de cette composition d'opérations mathématiques, le résultat constant constitue un modèle de prédiction des états successifs de la situation de l'enclos et une manifestation de la compréhension abstraite. Ce n'est que plus tard qu'il opère un passage vers ce mode de compréhension. En effet, lorsqu'il établit la longueur du côté opposé à partir de la longueur du côté adjacent, il évoque une deuxième composition ainsi qu'une régularité entre la longueur du côté adjacent et l'aire. La longueur du côté opposé correspond à la soustraction du périmètre donné (26) par la somme de la longueur des côtés adjacents. La dernière opération est le produit des dimensions de l'enclos. L'utilisation de variables l'ayant contrarié, Vincent évoque une troisième composition d'opérations mathématiques ainsi qu'une deuxième régularité entre la longueur du côté opposé et l'aire résultante. La longueur d'un côté adjacent correspond à la soustraction du périmètre donné par la longueur du côté opposé, le tout divisé par deux. La dernière opération est encore le produit des dimensions.

La reconnaissance de la deuxième régularité semble favoriser un passage vers la compréhension formelle et l'intégration des états successifs de la situation de l'enclos, donnant ainsi naissance à la notion de variation. L'utilisation de variables permet la construction de la représentation algébrique selon la composition issue de la deuxième régularité. Pour répondre aux besoins de la vérification, Vincent établit une correspondance entre les dimensions desquelles les aires sont connues et la représentation algébrique. Toutefois, il est perplexe, car il ne peut pas repérer les états correspondants (dimensions, aires) sur la représentation graphique. Cette représentation a été construite avec la première régularité; la disposition des points localisés suppose un emplacement différent de la courbe parabolique. D'ailleurs, la correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques est moins laborieuse si ceux-ci ont été construits à partir de la même régularité.

Les deux modifications du libellé semblent avoir suscité l'évolution de la pensée de Vincent à travers les modes de compréhension. La première modification touche au périmètre de l'enclos alors que la deuxième affecte sa forme. La modification du périmètre exige une reprise du mode de compréhension procédurale puisque les procédures sont affectées, transformant ainsi le calcul des dimensions. La modification de la forme entraîne une reprise du mode de compréhension intuitive puisque le développement du quadrilatère est différent. Puis toujours coordonné au calcul de l'aire, le partage du périmètre fait intervenir quatre côtés plutôt que trois. La régularité est alors modifiée; ce qui transforme la représentation algébrique et non seulement ses paramètres. En dépit du fait que la révision de la régularité et de la représentation algébrique n'a pas été demandée lors de la modification de la forme, Vincent a su maintenir une correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques. Tout en étant un critère de la compréhension formelle, cette correspondance s'appuie sur diverses manifestations au sein des autres modes.

La construction des systèmes symboliques ainsi que les modifications du libellé engagent des considérations globales et locales. D'après des considérations globales, les premiers points localisés lui suggèrent une courbe. La disposition des points lui permet de localiser les points de la courbe extrapolée. À ce moment, une courbe parabolique apparaît sur le plan cartésien. Selon des considérations locales, les résultats issus des valeurs intermédiaires soutiennent la courbure entre deux points consécutifs. Vincent semble donc opérer un mouvement qui part des considérations globales vers des considérations locales. Les modifications du libellé engagent le même mouvement. Ces modifications l'amènent à supposer des aires plus grandes, donc de nouvelles courbes qui englobent toujours la courbe initiale. Puis il localise des points sur les nouvelles courbes selon des valeurs intermédiaires. Le mouvement des considérations globales vers des considérations locales suscite aussi l'évolution de la pensée de Vincent à travers les modes de compréhension pour répondre aux besoins de la vérification ainsi qu'à la nécessité de généraliser les constructions.

Par conséquent, cette évolution illustre que certains changements au sein des systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé. En effet, les modifications du périmètre et de la forme de la structure lui ont permis d'opérer des translations horizontales et verticales de la parabole au sein de la représentation graphique, de modifier les paramètres de la représentation algébrique ainsi que les données de la représentation numérique. Les modifications du libellé favorisent donc la compréhension du concept de la fonction quadratique puisque Vincent a maintenu à nouveau une correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue encore de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation. De cette façon, Vincent s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessus, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Enfin, il a su mettre à contribution la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité pour réaliser la construction de la représentation algébrique de la situation de l'enclos.

3.2.2.4 Situation d'apprentissage «Les trapèzes»

Cette situation d'apprentissage conduit Vincent à modéliser le mouvement d'un pendule. L'investigation qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Ce dispositif se compose d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données issues de l'investigation dynamique permet à Vincent de résoudre le problème.

Description

Tout d'abord, Vincent résume l'ensemble des propos du libellé (voir l'annexe D). «Ils croyaient que, si Michèle avait un trapèze de 8 mètres et Pierre avait un trapèze de 4 mètres, Michèle ferait un balancement et Pierre en ferait deux. Ce n'est pas cela qui arrive», dit-il en expliquant la présomption au modèle linéaire. Puis il identifie le problème à résoudre : la longueur des trapèzes de Pierre. Ensuite, il fait une comparaison entre les trapèzes et des balançoires. «C'est comme un mouvement de rotation, pas une rotation complète. C'est un va-et-vient, un balancement», précise-t-il en ne sachant pas désigner le dispositif correspondant. Il suggère le pendule sur la table de travail. «C'est plus de 10 secondes parce qu'il [le pendule] va monter plus haut et de l'autre côté aussi», dit-il à titre d'hypothèse pour la durée du balancement d'un pendule de longueur double si au départ la durée est de 5 secondes.

Ensuite, Vincent se propose de faire varier la longueur du pendule et de mesurer la durée d'un balancement. «Ça dépend de la hauteur qu'il est lancé», ajoute-t-il en désirant préciser l'angle à donner aux pendules au départ. L'investigation terminée, les données recueillies infirment son hypothèse (voir la figure n° 13). Convié à trouver la durée d'un balancement, il fait la soustraction entre les temps, soit les premières différences, puis il les additionne (2,1). «C'est toujours approximatif; j'ai fait la moyenne [2,1/4=0,525]», précise-t-il en additionnant 0,525 à la durée d'un balancement du pendule de 2,5 mètres (voir la figure n° 13). De cette façon, il estime la durée d'un balancement (4,125 s) pour un pendule de 3,0 mètres.

Figure n° 13

Données recueillies

3,0 m -> 4,125
} 0,525
2,5 m -> 3,6 s
} 0,5
2,0 m -> 3,1 s
} 0,3
1,5 m -> 2,8 s
} 0,7
1,0 m -> 2,1 s
} 0,6
0,5 m -> 1,5 s

0,5
0,3
0,7
+0,6

2,1

Sollicité à dégager une constante, Vincent établit trois rapports. Au numérateur, il inscrit les longueurs du pendule et les durées correspondantes au dénominateur. Il obtient ainsi six résultats par la multiplication croisée des rapports. Il additionne ces résultats, puis il divise le tout par 6. Une requête semblable l'amène ensuite à proposer la construction de la représentation graphique. Je lui suggère d'inscrire le temps sur les abscisses, donc la longueur sur les ordonnées. «Encore, une courbe», dit-il selon la disposition des points localisés. «Nos mesures ne sont pas exactes», ajoute-t-il en écartant deux des points localisés. Convié à prévoir le nombre de balancements du pendule de 2,5 mètres dans 4 secondes, il consulte le plan cartésien. «Il en fait un. Oui. Il en fait plus d'un», affirme-t-il en indiquant le point (3,6; 2,5). À ma demande, il fait une extrapolation de la courbe à partir du dernier point localisé. «Elle a tout le temps une petite courbe. Elle ne sera jamais droite», précise-t-il.

En considérant que la présomption au modèle linéaire est juste, Vincent propose des changements aux systèmes symboliques. Il suggère des trapèzes de 3 mètres pour Pierre si ceux de Michèle sont de 6 mètres «parce qu'ils divisent par deux pour que lui [les trapèzes de Pierre] en fasse deux et lui [les trapèzes de Michèle] en fasse un.» «À 2 mètres, elle fait ça dans un temps de 3,1 secondes. Donc Pierre aurait 1 mètre. Il ferait ça dans un temps divisé par 2. 3,1; ça ferait 1,55 seconde», ajoute-t-il en généralisant le modèle linéaire aux données recueillies. «Ça aurait fait une droite», précise-t-il en indiquant le plan cartésien. Ensuite, je lui suggère le contexte lunaire plutôt que le contexte terrestre pour la conduite de l'investigation. Il n'amène aucun changement aux systèmes symboliques. «Il montrait plus haut parce que c'est 1,6; je pense la gravité [sur la Lune]. Il montrait plus haut. Dans ce temps, ça prendrait plus de temps, mais moins de friction. Donc ça compenserait», dit-il en décrivant un effet nul du contexte lunaire sur le mouvement du pendule.

Sollicité à proposer une solution au problème du libellé initial, Vincent essaye de coordonner le mouvement des trapèzes. «Il [Pierre] part d'ici, puis il va là. Il revient là, puis il reviendrait là. Il faut qu'il revienne.» À ce moment, je suppose des trapèzes de 4 mètres plutôt que 8 mètres pour Michèle afin qu'il puisse tirer avantage de la représentation graphique. Il persiste à coordonner le mouvement des trapèzes. Il se ravise. «Si ma longueur est 4, j'extrapole; 4,2 secondes», décrit-il pour la durée d'un balancement des trapèzes de Michèle. «Donc, il faut que l'autre [les trapèzes de Pierre] fasse un temps de 4,2 mais en faisant deux balancements. 4,2 divisé par 2; ça me donne 2,1 [secondes]. Je dirais 1 mètre», ajoute-t-il pour la longueur des trapèzes de Pierre. Il poursuit l'extrapolation de la courbe pour résoudre le problème du libellé initial. Vincent propose alors la même démarche tout en demeurant contrarié par la précarité de la courbe extrapolée.

Analyse

Les descriptions demandées engagent Vincent à expliquer la présomption au modèle linéaire et à identifier le problème à résoudre : la longueur des trapèzes de Pierre. La comparaison entre les trapèzes et les balançoires l'amène à détailler un dispositif composé d'un objet suspendu à un point fixe par un fil tendu. Ces manifestations de la compréhension intuitive lui permettent un passage vers le mode de compréhension procédurale au moment où il élabore une hypothèse. Il décrit alors les étapes de l'investigation en précisant davantage la procédure liée au départ du pendule.

L'hypothèse de Vincent infirmée, l'analyse des données recueillies ne semble pas permettre un passage vers le mode de compréhension abstraite. Grâce à une composition d'opérations mathématiques, ce passage pourrait permettre de dégager un résultat constant, ou idéalement, une régularité entre les grandeurs pertinentes. Les premières différences issues de la soustraction entre les temps ne lui permettent pas d'entrevoir un résultat constant. Il préfère alors faire une moyenne des premières différences ou encore établir une série de rapports. De toute façon, ces processus de calcul n'ont pas conduit Vincent à préciser un modèle de prédiction des états successifs du mouvement d'un pendule.

Par conséquent, l'absence d'une régularité entre la longueur du pendule et le temps de son balancement nuit à l'intégration des états successifs de la situation des trapèzes ainsi qu'au passage vers le mode de compréhension formelle. La construction de la représentation graphique, une manifestation de ce mode, peut conduire à une solution au problème des trapézistes. En dépit de l'omission de deux points à cause de l'inexactitude des mesures, Vincent joint une majorité des points localisés par une courbe. D'autre part, la suggestion d'un petit nombre (4 mètres) pour la longueur d'une série de trapèzes lui permet d'extrapoler cette courbe. Privé de la représentation algébrique, il propose alors une solution, ou plutôt, une démarche de résolution selon la courbe extrapolée. Toutefois, la mise en scène du problème semble l'avoir incité à coordonner le mouvement des trapèzes; ce qui dénote une appropriation précaire du problème.

En considérant que la présomption est juste, Vincent interprète la longueur d'une série de trapèzes selon le modèle linéaire étant donné la longueur d'une autre série. Puis il généralise ce modèle à l'ensemble de ses travaux afin de maintenir une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits. Pour une deuxième fois dans le cadre des entrevues d'intervention avec Vincent, la description, le discrédit et la généralisation du modèle linéaire ne sont pas isolés à une seule représentation. En effet, la généralisation d'une application de la fonction linéaire l'amène à élaborer une droite dans la représentation graphique et des états constants au sein de la représentation numérique.

La suggestion du contexte lunaire, au lieu du contexte terrestre, n'a pas suscité de généralisation aux systèmes symboliques. Les propos de Vincent semblent indiquer que le contexte lunaire n'affecte pas le mouvement du pendule. Sachant bien que l'accélération due à la gravité est six fois moindre sur la Lune que sur la Terre, il décrit plutôt un effet global nul à cause de la nature du mouvement. Le mouvement de va-et-vient du pendule semble annuler l'effet de la gravité; ce qui n'est pas le cas. D'autre part, il avait souligné l'effet de la gravité dans la situation des puits. Cela avait suscité une correspondance entre les états successifs du mouvement d'un objet en chute libre et les systèmes symboliques parce que l'accélération due à la gravité a davantage un effet direct sur ce mouvement. Néanmoins, Vincent est un élève pour lequel les représentations mentales ont grandement contribué à la compréhension des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue encore de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des trapèzes. Vincent s'appuie sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

3.2.3 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation finale

Au moment de l'évaluation initiale, aucun critère de la compréhension intuitive ne s'était manifesté puisque les descriptions et les comparaisons de Vincent ne soulignaient pas les états successifs d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique. L'apparition d'un développement ponctué d'états de la variation, qui ne fait intervenir aucune procédure et encore moins leur coordination, avait nuit à l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique. Il avait identifié tout de même les grandeurs pertinentes de cette situation (critère **P 2**) à la composante procédurale.

L'identification de ces grandeurs semblait avoir facilité la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A 1**) qui se précise par une régularité (critère **A 2**) au sein d'une situation quadratique. Deux critères de la compréhension abstraite s'étaient ainsi manifestés dans les verbalisations et les manipulations de Vincent. Un seul critère de la composante formelle était apparu au moment où il a introduit un point variable sur le plan cartésien (critère **F 1**) pour représenter un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

L'évaluation finale permet de tracer un nouveau portrait de la compréhension du concept de la fonction quadratique chez Vincent suite à nos interventions, encore préalablement à tout enseignement conventionnel du concept en salle de classe. Nous allons tout d'abord faire une analyse des propos de Vincent, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Pour la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire; et la situation B, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, Vincent explique les propos des libellés. «Il change de température un peu, puis il découvre que, à 25 °C, c'est le plus grand nombre de bactéries», dit-il pour la situation B. «Ici [situation A], il augmente de 3 000 $. Puis ici [valeur de 25 °C de la situation B], il ne peut pas augmenter, donc il va diminuer pour avoir un nombre de bactéries moindre.» Ainsi il discrimine une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas. Puis il caractérise la situation B par des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Ensuite, il décrit des états de croissance et de décroissance dans le voisinage de l'état maximal ou minimal des situations B et C. «Bien ici [situation B], c'est le plus grand nombre. Puis ici [situation C], c'est le plus petit. Ça se trouve à être comme la même chose sauf qu'il ne parle pas des mêmes affaires», précise-t-il pour les situations quadratiques. La reconnaissance des états successifs dans le développement d'une situation quadratique dénote alors une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique chez Vincent.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Vincent est d'abord contrarié par le fait que les situations quadratiques présentent des données partielles : «en n'ayant pas les données nécessaires, je ne peux pas démontrer.» Ensuite, il prête attention à l'état minimal de la situation C (relative à la consommation d'essence). «Ils disent qu'à la vitesse de 90 km/h, bien c'est ... Il y a un x, mais il est minimal», précise-t-il en construisant un tableau dans lequel il inscrit une consommation d'essence, x (minimal), pour une vitesse de 90 km/h. «Ça va être deux + [plus] parce que là [x (minimal)], c'est minimal. Sur les deux côtés, elle [la consommation d'essence] va monter», ajoute-t-il en inscrivant une consommation d'essence, $x+1$, aux vitesses de 80 et 100 km/h. Par des notations semblables, Vincent élabore également une variation, qui s'exprime par un développement symétrique, coordonnée à l'état maximal de la situation B (relative aux cultures de bactéries). Ainsi il ordonne les états successifs d'une situation quadratique par visée spontanée. De plus, il identifie les grandeurs qui influencent chacun des états successifs de cette situation ainsi que son développement global. «La température et la vitesse; c'est indépendant. Les bactéries et la consommation; c'est dépendant. Ça va dépendre de la vitesse, ici [situation C]. Et ici [situation B], ça va dépendre de la température», dit-il en précisant l'interdépendance de chaque grandeur. Ce dernier critère révèle une compréhension procédurale du concept de la fonction quadratique chez Vincent.

C'est ainsi qu'il parvient à préciser une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes en identifiant certaines caractéristiques au mode de compréhension abstraite. «Ici [situation B], c'est au maximum. L'autre, bien c'est au minimum», dit-il pour la situation relative à la consommation d'essence. «Ici [situation C], il va monter pour des vitesses [moyennes] supérieures ou inférieures. Puis ici [situation B], à des degrés supérieurs ou inférieurs, bien ça va diminuer le nombre de bactéries», ajoute-t-il en décrivant les états dans le voisinage de l'état maximal ou minimal. Ces propos et les citations précédentes exposent donc la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Une nouvelle situation lui est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Sollicité à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Vincent reconnaît une régularité. «Ah, j'ai trouvé. Tu le mets au carré», dit-il en dénombrant le nombre de cubes au sein des arrangements proposés. «Comme 1 fois 1, 1. Ici [le deuxième arrangement], la rangée ici [au centre], tu en comptes 2; 2 fois 2, 4. Ici [le troisième arrangement], la rangée [au centre], tu en comptes 3; 3 fois 3, 9», précise-t-il en construisant et en généralisant la régularité. De plus, il confirme les 36 cubes dans un arrangement subséquent en construisant un arrangement identique à ceux proposés. Convié ensuite à utiliser une variable, Vincent inscrit la représentation algébrique correspondante, x^2. Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Les états issus du processus l'amènent à reconnaître une autre régularité. Par l'utilisation d'une variable, il se lance aussitôt dans la construction de la représentation algébrique correspondante, $2x^2$. Sollicité de prévoir à nouveau les états successifs des situations D et E, il n'a pas pu dégager un résultat constant; ce qui aurait confirmé les régularités. Comme au moment de l'évaluation initiale, l'absence d'un résultat constant compromet chez Vincent un critère de la compréhension abstraite du concept de la fonction quadratique à l'évaluation finale.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Convié à localiser un point entre deux points consécutifs, Vincent tient les propos suivants : «je ne peux pas te dire un point exact parce que ça va être une courbe.» «Bien, il [le point] va être placé sur la courbe», ajoute-t-il en introduisant un point variable sur le plan cartésien selon une courbe de concavité vers le haut. Les mêmes manipulations apparaissent lorsqu'il joint les points d'une autre série par une courbe. Rappelons qu'il a utilisé à deux reprises une variable au moment où il avait reconnu les régularités. L'utilisation de variables, ou l'introduction d'un point variable, semble ainsi se manifester dans les verbalisations et les manipulations de Vincent. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Il doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries) et la situation C (relative à la consommation d'essence). Il identifie d'abord les axes du plan cartésien selon les grandeurs pertinentes de la situation B : le nombre de bactéries sur les ordonnées et la température sur les abscisses. «À 25 °C [le sommet], il y a mon nombre maximum. Puis peut-être qu'il y en [les bactéries] a qui vont survivre; ça [le nombre de bactéries] ne tombera pas tout de suite à zéro pour les prochaines [températures]», dit-il en interprétant la disposition des points dans le voisinage du sommet. Il fait une réflexion semblable pour la série qui caractérise la situation C, faisant aussi une correspondance entre les états successifs de cette situation et ses systèmes symboliques. Enfin, Vincent réalise la construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien. Il construit d'abord la représentation numérique, puis il reconnaît une régularité entre les données. L'utilisation d'une variable lui permet de construire la représentation correspondante, $y = 2x^2$. Rappelons qu'il a construit à deux reprises la représentation algébrique d'une situation quadratique au moment où il avait reconnu les régularités. Pour la construction de la représentation graphique, il a de nouveau construit la représentation numérique à partir de la représentation algébrique. Il a ensuite localisé les points correspondants sur le plan cartésien pour les joindre par une courbe. Vincent manifeste donc une compréhension formelle du concept de la fonction quadratique.

Synthèse

Selon cette évaluation finale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension du concept de la fonction quadratique chez Vincent. Ses descriptions et ses comparaisons révèlent maintenant les états successifs dans le développement des situations relatives aux cultures de bactéries et à la consommation d'essence (critère **I1**). La reconnaissance des états successifs permet ainsi de discriminer une situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, d'une autre qui ne l'est pas (critère **I2**). Cette compréhension intuitive semble favoriser l'acquisition de procédures.

Vincent décrit désormais une variation par un développement symétrique au sein des situations quadratiques, c'est-à-dire qu'il expose des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis d'états de croissance ou des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Ce développement précise la nature de la variation grâce à un tableau qui lui permet la notation d'états dans le voisinage de l'état maximal ou minimal. Il illustre ainsi l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique par visée spontanée (critère **P 1**). L'identification des grandeurs pertinentes (critère **P 2**), qui est le dernier critère de la composante procédurale, semble alors faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle.

Par un détachement des procédures, la reconnaissance d'une relation fonctionnelle (critère **A 1**) entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique se précise lorsqu'il reconnaît une régularité (critère **A 2**). À ce moment, la régularité, constituée d'une composition d'opérations mathématiques, permet d'intégrer les états successifs d'une situation quadratique, et ce, en dépit de l'absence d'un résultat constant. L'un des critères de la compréhension abstraite semble donc ne pas s'être développé chez Vincent au cours de nos interventions.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation quadratique dans le plan cartésien, semble à présent se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Vincent semble privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite. De cette façon, il s'appuie à maintes reprises sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, l'utilisation de variables semble, de nouveau, autant conditionner la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique que la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité.

Par conséquent, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, peut influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Il semble bien que ce soit cette reconnaissance et cette ordonnance qui se substituent chez Vincent à l'interprétation de l'état maximal ou minimal au moment de l'évaluation initiale. C'est ainsi que la composante formelle admet l'utilisation de variables (critère **F 1**), la construction de la représentation algébrique (critère **F 2**) puis la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques (critère **F3**).

3.3 L'étude de cas avec Hélène

Hélène est une élève de 17 ans. Le personnel enseignant consulté convient qu'elle est une élève avec un rendement satisfaisant parmi l'ensemble des élèves qui satisfont aux qualités recherchées. D'après son dossier, Hélène a maintenu une moyenne entre 70 et 80 % au cours de ses quatre dernières années scolaires.

3.3.1 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation initiale

L'évaluation initiale permet de tracer à la fois un portrait «critérié» et global de la compréhension à l'égard du concept de la fonction quadratique chez Hélène. Nous allons tout d'abord faire une analyse de ses propos, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Au premier abord, Hélène s'attarde au contenu des libellés. Ses descriptions et ses comparaisons ne soulignent pas les états successifs des situations B et C, faisant intervenir des applications de la fonction quadratique. En effet, pour la situation B, elle explique que «le nombre de bactéries varie selon la température, et la plus haute température ... non, la température où il existe le plus grand nombre de bactéries, c'est à 25 °C.» «Elles sont vagues. Il faut que tu penses comme il faut pour pouvoir dire quelque chose», ajoute-t-elle en indiquant les situations quadratiques. «Elle est plus détaillée», conclut-elle pour la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire. Les verbalisations d'Hélène l'amènent à citer l'état maximal ou minimal sans pour autant préciser les états de croissance et de décroissance d'une situation quadratique. D'autre part, le critère relatif à la discrimination de cette situation ne réside guère dans la citation de détails présents dans le libellé de la situation linéaire. Par conséquent, Hélène ne semble pas manifester une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Hélène fait un regroupement de jetons selon la température pour la situation B (relative aux cultures de bactéries) de sorte qu'«il y a une bactérie par degré Celsius». «Ça veut dire que vu qu'il y a 25 jetons, il y a 25 °C, 25 bactéries», ajoute-t-elle. «À chaque degré Celsius, il y a une bactérie de plus», conclut-elle pour la situation B. Elle fait les mêmes manipulations pour la situation C (relative à la consommation d'essence). «Par 1 jeton, ça veut dire qu'il y a 1 litre d'essence de pris par 1 kilomètre [à l'heure]», dit-elle en regroupant des jetons selon la vitesse moyenne. Une requête visant à coordonner l'ajout ou le retrait de jetons à l'état minimal ou maximal ne lui permet pas de modifier ses procédures. Sollicitée à identifier les grandeurs pertinentes des situations B et C, Hélène souligne plutôt des valeurs numériques telles que «25 °C» et «90 km/h». Quelle que soit la situation quadratique, ses procédures mettent en pratique une variation qui s'exprime par un développement linéaire. Conforme au modèle linéaire, ce développement nuit à l'ordonnance des états successifs qui apparaissent au sein d'une situation quadratique. De plus, elle ne parvient pas à identifier les grandeurs qui influencent chaque état ainsi que le développement global de cette situation. Ainsi Hélène ne manifeste pas une compréhension procédurale du concept de la fonction quadratique.

La compréhension abstraite traite d'une relation fonctionnelle au sein des situations B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Les propos d'Hélène s'attardent beaucoup au contenu des libellés. «Eux autres [situations B et C], elles en ont rien qu'un [nombre]», dit-elle en indiquant les nombres «25» et «90» dans les libellés. Elle n'identifie ainsi aucune relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Une nouvelle situation lui est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Conviée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, elle ne reconnaît pas une régularité au sein des arrangements proposés. «Ce n'est pas un carré, et ce n'est pas la moitié non plus», précise-t-elle en indiquant les cubes sur la diagonale des arrangements. «S'il y en avait 20 [cubes], ça serait tant [de cubes] plus 20 [cubes]; ça donnerait un nombre», ajoute-t-elle en tentant une démarche qui tient compte des arrangements antérieurs. Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Sollicitée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Hélène reconnaît une régularité. «Un fois 1 plus 1; ça fait 2. Deux fois 2 plus 1; ça fait 5. Trois fois 3 plus 1; ça fait 10. Quatre fois 4 plus 1; ça fait 17», dit-elle en construisant et en généralisant la régularité au sein des états du processus. «Admettons 6 fois 6 plus 1; ça fait 37», prévoit-elle pour la prochaine valeur à la sortie au moment où la valeur à l'entrée est 6. Toutefois, les requêtes visant à dégager un résultat constant au sein des situations D et E demeurent sans succès. Elle a donc reconnu une régularité qui conduit à l'intégration des états successifs de la situation E. Toutefois, l'absence du résultat constant ne lui permet pas de confirmer un modèle de prédiction, et encore moins, une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Ainsi Hélène ne satisfait qu'à un seul critère de la composante abstraite : la reconnaissance d'une régularité.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Conviée à localiser un point entre deux points consécutifs, Hélène s'appuie sur des manipulations abordées depuis peu en salle de classe. «Si tu prends la pente, je vais te dessiner cela. Ici, ça serait 1 [longueur pour le côté horizontal] et 3 [longueur pour le côté vertical] jusqu'au triangle. O.K. Ici, ça serait la même affaire», dit-elle en construisant deux triangles dont les hypoténuses donnent des pentes identiques. «Ça veut dire que la distance [longueur de l'hypoténuse] est égale entre les deux [points] parce que les deux pentes sont pareilles. J'ai placé mon point dans le milieu des deux pentes [triangles]», ajoute-t-elle en localisant le point. Elle utilise les mêmes manipulations lorsqu'elle joint les points d'une autre série. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Hélène doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries). Elle s'appuie d'abord sur le sommet de chacune des séries pour interpréter l'état maximal de cette situation quadratique. «Ça veut dire qu'à 0 °C, ça gèle; il n'y aura pas de bactéries. Plus bas que cela, ça sert à rien», dit-elle en privilégiant une autre série qui n'a pas de points localisés sous l'axe des abscisses. En outre, la construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien ne s'est pas concrétisée. Ainsi la compréhension formelle du concept de la fonction quadratique ne s'est pas manifestée chez Hélène.

Synthèse

Selon cette évaluation initiale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension limitée du concept de la fonction quadratique chez Hélène. Ainsi aucun critère de la compréhension intuitive ne s'est manifesté puisque ses descriptions et ses comparaisons témoignent d'une fixation vis-à-vis les propos des libellés. De cette façon, l'absence des états successifs au sein des situations relatives aux cultures de bactéries et à la consommation d'essence pourrait expliquer la prédominance du modèle linéaire. En outre, la fixation vis-à-vis les propos des libellés, telles que les valeurs numériques «25 °C» et «90 km/h», ne l'incite pas à désigner les grandeurs pertinentes. Hélène n'a donc manifesté aucun des critères de la composante procédurale. Cette fixation ne semble pas faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique et l'identification d'un résultat constant. Toutefois, elle parvient à reconnaître une régularité (critère **A2**) parmi les états d'un processus décrit par une machine. Un seul critère de la composante abstraite s'est ainsi manifesté chez Hélène, mais aucun des critères de la compréhension formelle.

La notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble aussi laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Hélène semble privilégier la variation représentée par une droite à la notion de variation exprimée par un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Alors que l'utilisation de variables pour la construction de la représentation algébrique semble solliciter la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. La reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, pourrait influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Cependant, l'interprétation de l'état maximal ou minimal semble se substituer chez Hélène à cette reconnaissance et à cette ordonnance pour reconnaître une régularité au sein d'une situation quadratique.

Parmi les trois élèves de notre recherche, Hélène est celle où la prédominance du modèle linéaire est le plus notable, et ce, pour tous les modes de compréhension. Dès le début, elle préfère composer avec la situation linéaire, prétextant que son libellé est plus précis. Ses procédures font ensuite intervenir l'ajout ou le retrait d'un jeton pour chacun des états successifs d'une situation quadratique. Au moment d'évaluer les critères d'une compréhension abstraite, elle souligne encore la simplicité des données du libellé de la situation linéaire. Puis elle met en pratique la notion de pente pour localiser un point sur le plan cartésien. Il est remarquable de percevoir comment elle s'en remet au modèle linéaire dans un contexte inédit. Cette analyse met en évidence des apprentissages scolaires qui constituent les représentations mentales initiales d'Hélène.

3.3.2 Description et analyse des entrevues d'intervention

Les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées par des problèmes dans les entrevues d'intervention. Hélène doit décrire, analyser des phénomènes et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Cependant, l'analyse n'est possible que si elle conduit une investigation. Nous décrirons chacune des interventions avec Hélène pour ensuite analyser les données recueillies.

3.3.2.1 Situation d'apprentissage «Les plaques de béton»

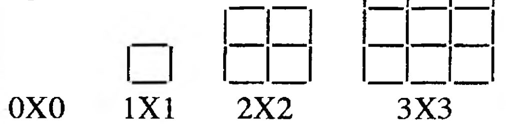
Dans cette situation d'apprentissage, Hélène doit modéliser la disposition d'armatures dans un coffrage. La résolution du problème consiste à trouver le nombre d'armatures nécessaires pour un coffrage donné. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où elle doit composer avec une structure de forme carrée.

Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Hélène ne s'en tient qu'aux propos. «L'ouvrier aimerait bien savoir le nombre d'armatures nécessaires pour une plaque carrée de dimension quelconque», dit-elle en identifiant le problème à résoudre. «N'importe quelle grosseur, c'est toujours ... le même motif pour la base, le même modèle», ajoute-t-elle pour préciser la réalisation des coffrages. «Bien, il ajouterait des armatures comme ça», conclut-elle en ajoutant des armatures au coffrage illustré sur le libellé.

Sollicitée à montrer différents coffrages, Hélène se propose de faire des croquis. Les trois premiers croquis (voir la figure n° 14) l'amènent à préciser davantage la forme des coffrages. «3X3, ça veut dire qu'il y en a 3 [armatures] par 3 [armatures]. Puis c'est des plaques carrées; ça veut dire que ça va être la même affaire là que là», précise-t-elle en indiquant des dimensions identiques. «Ça dépend de la grosseur du carré, et la grosseur du carré influence le nombre d'armatures», dit-elle en identifiant les grandeurs pertinentes.

Figure n° 14



À partir de ses premiers croquis, Hélène dénombre 0, 4, 12 et 24 armatures pour les coffrages correspondants. Ainsi elle reconnaît que le nombre d'armatures ajoutées à un coffrage existant est toujours supérieur à l'ajout précédent. Conviée à prévoir le nombre d'armatures selon les dimensions d'un coffrage, elle se propose de faire le croquis du coffrage de 4X4. «Admettons que tu me donnes 4, on va dire [en disposant 4 armatures à la base]. Ça pas le choix d'être 4 ici [armatures à gauche]; 4 là [armatures à droite] et 4 là [armatures en haut]. Mais il y a quelque chose que j'ai remarqué», dit-elle en disposant les armatures au contour du coffrage (voir la figure n° 15 à la page suivante).

Ayant disposé les armatures à l'intérieur du coffrage, Hélène reconnaît une régularité. «Pour le [coffrage dont la base est] 4, il y a 5 lignes», précise-t-elle en indiquant les 4 armatures dans chacune des 5 lignes à la verticale. «C'est 5 lignes, si tu mets ton carré comme ça, elles sont encore là», ajoute-t-elle après avoir fait une rotation de 90° au coffrage de 4X4. «Ça veut dire 4 fois 5; ça fait 20 [armatures]. Puis vu que ces lignes sur ce bord-là [à l'horizontale], il y en a 20. Dans ces lignes-là [à la verticale], il va y en avoir 20 [armatures] aussi parce qu'il y en a pareil. Ça veut dire qu'il est supposé y en avoir 40 [armatures en tout]», suppose-t-elle en construisant la régularité.

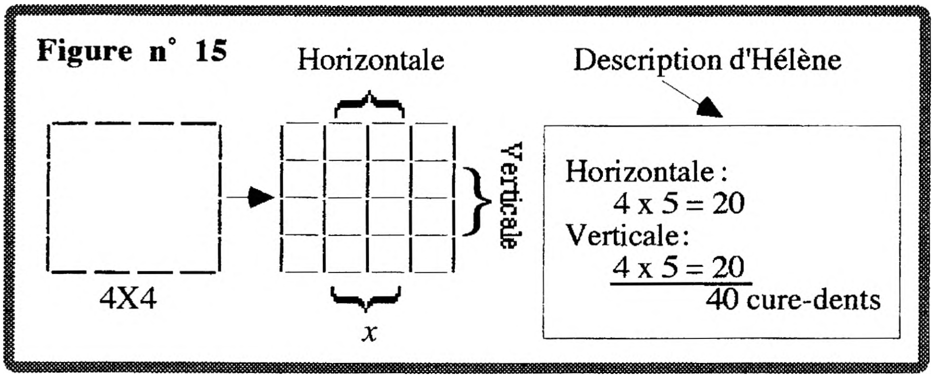


Figure n° 15

Ayant confirmé les 40 armatures nécessaires par le dénombrement un à un des armatures du coffrage de 4X4, Hélène en fait une description (voir la figure n° 15). Je lui suggère alors le coffrage de 5X5, elle fait de nouveau la même description. «Ça veut dire que là, il y en a 5 [armatures]. Ça veut dire qu'il y a 6 rangées. Ça va donner 30 [armatures], puis cela c'est à l'horizontale. Cinq fois 6 qui est égal à 30 [armatures]; c'est à la verticale. Puis ça fait 60 [armatures en tout]», dit-elle en généralisant la régularité. Je lui suggère alors une valeur inconnue pour la dimension à la base du coffrage 4X4. «Ça veut dire que le nombre que l'on ne sait pas, c'est x», affirme-t-elle en inscrivant cette variable au coffrage (voir la figure n° 15). «Bien, x fois $x+1$; ça serait égal au nombre [d'armatures]», ajoute-t-elle. «Pour la rangée de plus», décrit-elle étant sollicitée à expliquer le $+1$. Par des manipulations algébriques, Hélène transforme la forme, $x \cdot (x+1)$, à la forme, x^2+x. «Ça ferait 2 fois ça [x^2+x] qui est égal à 2 fois ... Ça ferait une petite formule», conclut-elle en inscrivant $2x^2+2x$.

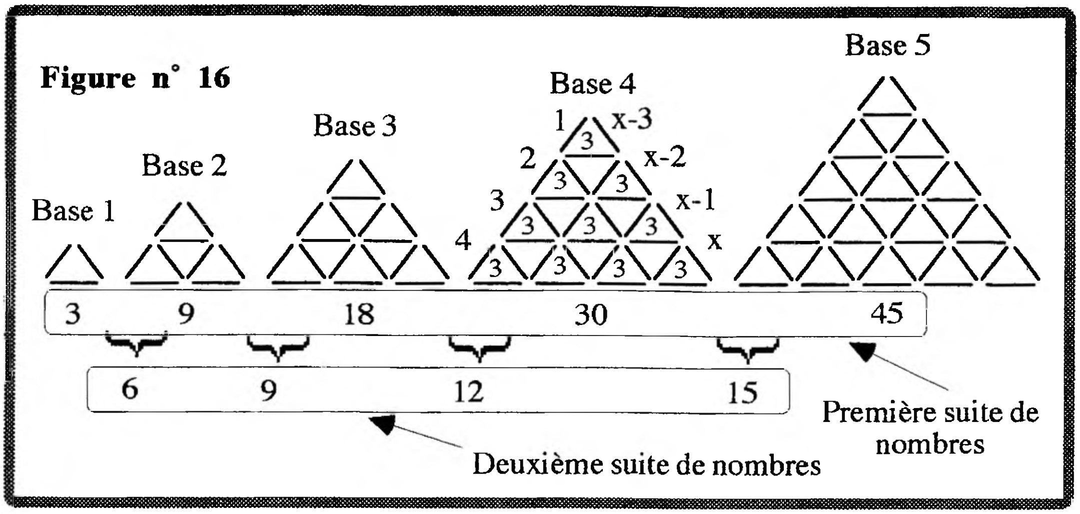
Pour répondre aux besoins de la vérification, Hélène substitue x par les dimensions 2 et 4 qui corroborent respectivement les 12 et 40 armatures nécessaires des coffrages correspondants. «Aïe, je viens de trouver une formule», s'exclame-t-elle. «Ça serait une formule pour trouver le nombre d'armatures qu'il a besoin. Ça veut dire que ce soit n'importe quel ça [x], il n'aura plus besoin de les [armatures] compter. Admettons qu'il dit 100. À la place du petit x, tu mets 100. Puis il va avoir son nombre [d'armatures nécessaires]», conclut-elle en indiquant les coffrages. Conviée à décrire une autre façon pour représenter la réalisation des coffrages, elle suggère ses croquis ou des constructions avec des cure-dents.

Je lui suggère alors la construction de la représentation graphique. Sur un plan cartésien, Hélène trace deux axes sur lesquels elle identifie les armatures à la verticale et les armatures à l'horizontale plutôt que le nombre d'armatures dans un coffrage et ses dimensions. «D'habitude, c'est une courbe», dit-elle à la vue du plan cartésien. Elle se ravise : «il faut isoler x.» Puis elle s'en remet à des procédures algébriques abordées depuis peu en salle de classe. «Mais la pente, c'est avec x. Mais là, il y a $2x^2+2x$. ... Il faudrait que j'aurais un chiffre tout seul et un x tout seul. Mais le x^2, je ne sais pas quoi faire avec», dit-elle en étant contrariée par l'application des procédures algébriques.

Ensuite, je remplace le carré, qui est le motif de base, par le triangle. Hélène se propose à nouveau de faire des croquis. Elle dénombre 3, 9, 18 et 30 armatures pour les coffrages correspondants, soit une première suite de nombres (voir la figure n° 16 à la page suivante). Sollicitée à prévoir le nombre d'armatures dans le coffrage de base 5, elle fait la soustraction entre les nombres de la première suite en construisant une deuxième suite de nombres (voir la figure n° 16 à la page suivante). Elle présume ainsi 15 armatures de plus pour le coffrage de base 5 puisqu'elle dégage un résultat constant de 3, issu de la soustraction entre les nombres de la deuxième suite. «45 [30+15], j'ai la réponse», dit-elle en justifiant les 45 armatures par le croquis correspondant (voir la figure n° 16 à la page suivante). «Ça veut dire que 45 plus 18; ça fait 63 [armatures]», ajoute-t-elle en supposant que le coffrage de base 6 aurait 63 armatures.

Je lui suggère une valeur inconnue pour la base. «La moitié, ça ne marche pas non plus, parce que celui-là [une armature d'un des coffrages], on ne peut pas le couper», dit-elle en présumant que le nombre d'armatures pour les coffrages de forme triangulaire est la moitié du nombre d'armatures pour les coffrages de forme carrée. Hélène reprend le même processus d'élaboration des suites de nombres. Enfin, elle construit l'expression algébrique, $2(3x)=y$ à partir du coffrage de base 3, qui ne peut pas être généralisée aux autres coffrages. Elle explique que le nombre d'armatures à l'intérieur du coffrage de base 3 est 3 fois sa base, et le tout multiplié par 2, pour inclure les armatures du contour.

Figure n° 16



Ensuite, Hélène inscrit 3 dans chaque triangle du coffrage de base 4 ainsi que le nombre de triangles pour chacune de ses rangées (voir la figure n° 16). Ayant inscrit x à sa base, elle propose une diminution de cette valeur inconnue pour les autres rangées. «C'est savoir où il faudrait arrêter», dit-elle en inscrivant l'expression, $3(x+(x-1)+(x-2)+(x-3))$. «Mais pour faire ça, il faut que tu saches combien il y a de côtés», précise-t-elle en indiquant la base du coffrage. Ses efforts étant vains, je lui propose $y = 2(x+1/2)^2-1/2$ selon les coffrages de forme carrée en invoquant l'avis d'un élève. Elle fait quelques manipulations algébriques sans parvenir à dégager une forme équivalente à la sienne, à cause d'erreurs de manipulations. Hélène termine l'entrevue en cherchant un autre moyen.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème et inciter l'étude de la disposition d'armatures dans un coffrage. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive lorsqu'Hélène précise l'ajout d'armatures à un coffrage existant plutôt que l'ajout de motifs de base. Ses premiers croquis lui permettent de réaliser un passage vers le mode de compréhension procédurale. Ayant identifié les grandeurs qui influencent le développement global de la situation des coffrages, elle démontre un intérêt à l'égard de la disposition des armatures dans un coffrage. Cet intérêt va lui permettre de rendre ses procédures de dénombrement plus efficaces et d'opérer un passage vers le mode de compréhension abstraite. La substitution du motif de base carré par le motif triangulaire engage les mêmes manifestations. Par conséquent, cette substitution n'a pas permis un passage vers le mode de compréhension abstraite.

En effet, la substitution du motif de base carré par le motif triangulaire la conduit à opérer les différences de différences. Cette composition d'opérations mathématiques lui permet de dégager un résultat constant et de formuler ainsi un modèle de prédiction des états successifs de la situation des coffrages. Ensuite, elle tente d'établir une relation entre les coffrages de forme carrée et les coffrages de forme triangulaire ainsi qu'une autre relation entre les armatures à l'intérieur et au contour des coffrages de forme triangulaire. Toutefois, ces hypothèses ne supportent pas de compositions d'opérations mathématiques, et encore moins, la construction ainsi que la généralisation d'une régularité entre le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et ses dimensions. Par conséquent, une autre hypothèse est à la fois inusitée et remarquable.

À partir de la base d'un coffrage de forme triangulaire, le nombre de triangles diminue de façon unitaire au sein des autres rangées. L'addition de ces nombres donne le nombre de triangles dans le coffrage, puis le nombre d'armatures nécessaires lorsque le nombre de triangles dans le coffrage est multiplié par 3. Hélène construit ainsi l'expression algébrique, $3(x+(x-1)+(x-2)+(x-3))$. Toutefois, cette hypothèse ne lui permet pas de reconnaître une régularité : il faut maintenant déterminer le nombre de triangles dans un coffrage à partir de sa base. Enfin, la substitution du motif de base carré par le motif triangulaire n'ajoute qu'une manifestation du résultat constant au mode de compréhension abstraite, et peut-être, une structure capable de soutenir un raisonnement par récurrence.

C'est selon les coffrages de forme carrée qu'Hélène rend ses procédures plus efficaces et qu'elle réalise un passage vers la compréhension abstraite. En effet, le coffrage de 4X4 lui permet de coordonner le dénombrement des armatures à un sous-arrangement répétitif d'armatures. C'est ainsi que, dans un coffrage donné, le nombre de rangées correspond au nombre d'armatures dans une rangée plus un. Une rotation de 90° du coffrage admet la même régularité au sein des armatures à la verticale. La reconnaissance de cette régularité favorise le passage vers le mode de compréhension formelle. La composition d'opérations mathématiques issue de la régularité semble permettre l'intégration des états successifs de la situation des coffrages, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

La suggestion d'une dimension inconnue semble favorable à l'utilisation de variables. Cette utilisation favorise la construction de la représentation algébrique selon la composition d'opérations mathématiques issue de la régularité. Cette construction conduit Hélène à travailler avec deux formes de la représentation algébrique puisqu'elle transforme $2x \cdot (x+1)$ à $2x^2+2x$ par quelques manipulations algébriques. Pour les besoins de la vérification, elle établit une correspondance entre la représentation algébrique et numérique; ce qui justifie ses constructions au mode de compréhension formelle.

Quant à ce mode de compréhension, la construction de la représentation graphique n'a pas été aussi fructueuse. L'identification des grandeurs pertinentes peut contribuer à cette construction. D'autre part, les citations illustrent comment Hélène s'en remet à des procédures algébriques abordées depuis peu en salle de classe. Liées aux connaissances générales de la droite et de son équation, ces procédures l'incitent à isoler des paramètres de la représentation algébrique afin de les transposer sur le plan cartésien. La forme de la représentation algébrique de la fonction quadratique étant différente, elle ne peut pas construire la représentation graphique correspondante selon les procédures algébriques abordées en salle de classe. Elle a pourtant bien d'autres éléments pour réaliser cette construction : ses croquis et sa représentation algébrique. Ceci illustre de nouveau comment Hélène s'en remet à des apprentissages scolaires face à un contexte inédit.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble plus laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Hélène a privilégié des procédures algébriques abordées depuis peu en salle de classe pour construire la représentation graphique de la situation des coffrages. Toutefois, elle a su mettre à contribution la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité pour réaliser la construction de la représentation algébrique de cette situation.

3.3.2.2 Situation d'apprentissage «Les puits»

Cette situation d'apprentissage conduit Hélène à modéliser le mouvement d'un objet en chute libre. L'investigation qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Le chronomètre marqueur permet de mesurer la distance parcourue par un objet selon des intervalles de temps égaux. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données issues de l'investigation dynamique permet à Hélène de résoudre le problème.

Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Hélène en résume les propos. «Elle [Marie] veut savoir comment elle devrait faire pour la longueur qu'il faut, pour aller chercher [de] l'eau», dit-elle en identifiant le problème à résoudre. «Vu que ça prend deux fois plus de temps, elle prend deux fois plus de corde», ajoute-t-elle en expliquant la présomption au modèle linéaire. Puis elle décrit l'influence de la masse sur un objet en chute libre. «D'après moi, un objet plus gros, il est plus attiré par la gravité pour descendre plus vite», propose-t-elle en exposant son désaccord vis-à-vis les propos du libellé. Elle suggère alors quelques essais expérimentaux. «Tu les [masses] mettrais égales, puis tu les lâches», dit-elle en indiquant le matériel de manipulation nécessaire. Des résultats précaires infirment tout de même sa proposition; «je le savais que j'aurais tort.»

Ensuite, j'invite Hélène à émettre une hypothèse à l'égard de la distance parcourue par une pierre dans un second intervalle de temps égal. «Ça va être 10 mètres ou plus parce qu'elle [la pierre] prend de la vitesse», dit-elle en proposant une distance double ou plus «Si tu en mets une [masse] plus haute que l'autre pour voir si elles [les masses] vont arriver en même temps», ajoute-t-elle en décrivant quelque peu les étapes de l'investigation. Les quelques essais expérimentaux confirment la rapidité du mouvement d'un objet en chute libre. «Avant que je sois assez vite pour peser quand elle [la masse] tombe, puis quand ça décolle», conclut-elle en actionnant le chronomètre. À ce moment, je lui suggère l'emploi du chronomètre marqueur. «Plus ça va, plus que la distance s'élargit», dit-elle à la vue des repères sur la bande imprimée. C'est ainsi qu'elle confirme son hypothèse (voir la figure n° 17).

Figure n° 17

Distance parcourue

Données générées selon la présomption au modèle linéaire

0,1 s	->	8,3 cm	2
0,2 s	->	22,7 cm	4
0,3 s	->	44,5 cm	6
0,4 s	->	75,6 cm	8
0,5 s	->	114,5 cm	
0,6 s	->	162,6 cm	
0,7 s	->	220,7 cm	} 66,9
0,8 s	->	287,6 cm	

Pour les besoins de l'investigation, je demande à Hélène de tracer un trait à tous les six repères. Elle se propose ensuite de mesurer les intervalles, soit la distance entre les traits. Elle inscrit la distance parcourue à chaque dixième de seconde en faisant l'addition des intervalles. «Ce n'est pas régulier», affirme-t-elle à la vue de la distance parcourue (voir la figure n° 17). Conviée à dégager une relation entre les données, elle tente de faire des opérations mathématiques tout en maintenant un lien avec la première mesure. «J'avais pris ça [287,6 cm] divisé par ça [0,8 s] pour voir qu'est-ce que ça allait faire», dit-elle en faisant la division des données à la huitième mesure. «Ça aurait peut-être ressemblé à ça [8,3 cm]», indique-t-elle. Puis elle fait la soustraction de la distance parcourue des deux dernières mesures (287,6 cm-220,7 cm=66,9) en espérant obtenir la première mesure (8,3 cm).

Ses efforts étant vains, je lui suggère la construction de la représentation graphique. Hélène inscrit la distance sur l'axe des ordonnées et le temps sur l'axe des abscisses pour localiser huit points. «Une courbe», affirme-t-elle en joignant les points localisés sans pour autant justifier ses manipulations. En considérant que la présomption au modèle linéaire est juste, je lui suggère un temps de 4,5 secondes sur le libellé plutôt que 3,0. «4,5 divisé par 1,5; c'est égal à 3 [fois]. Puis elle [Marie] au début, c'était 2 [fois]; 1,5 était deux fois dans 3. Ça veut dire qu'elle avait doublé la corde. Là, vu qu'il est 3 fois, bien elle va tripler la corde», dit-elle en appliquant le modèle linéaire. «Alors, tu fais 3 fois 11,25», conclut-elle en inscrivant 33,75 m pour la corde à fixer dans le puits du grand-père. Puis elle généralise le modèle linéaire aux systèmes symboliques. «Il y aurait eu un rapport. Admettons que ça aurait été 2, on va dire 2, 4, 6, 8», précise-t-elle à la place des distances parcourues (voir la figure n° 17). «Ça aurait fait une droite», affirme-t-elle sur le plan cartésien.

Toutefois, la suggestion du contexte lunaire plutôt que le contexte terrestre n'amène aucune généralisation sur les systèmes symboliques de la part d'Hélène. «Ça n'aurait rien fait parce qu'il n'y a pas de gravité», dit-elle en n'indiquant aucune donnée recueillie et aucune courbe sur le plan cartésien. «La distance et la hauteur, c'est pareil», suppose-t-elle quant à la hauteur en fonction du temps. Elle termine l'entrevue en suggérant une courbe à partir du dernier point localisé sur le plan cartésien sans pour autant proposer une solution au problème.

Analyse

Les descriptions demandées à Hélène semblent favoriser l'appropriation du problème par l'explication de la présomption au modèle linéaire. Ces manifestations de la compréhension intuitive doivent toutefois se préciser. Les quelques essais expérimentaux, à l'égard de l'influence de la masse sur le mouvement d'un objet en chute libre, éclairent davantage le problème et l'élaboration d'une hypothèse. Cette hypothèse permet le passage vers la compréhension procédurale au moment où elle décrit les étapes de l'investigation. D'autres essais expérimentaux confirment la rapidité du mouvement; ce qui l'incite à rendre ses procédures plus efficaces. La suggestion du chronomètre marqueur est alors propice.

Les intervalles entre les repères confirment l'hypothèse d'Hélène. L'addition des intervalles constitue la représentation numérique du mouvement d'un objet en chute libre. Elle tente ensuite d'établir une composition d'opérations mathématiques, telle que la division ou la soustraction des intervalles avec la première mesure. Il aurait été possible d'établir une composition si elle avait mis en pratique les différences de différences. Le résultat constant qui en découle est environ la valeur de la première mesure. La même réflexion se manifeste chez Hélène en dépit des nombres rationnels. Ce processus de pensée peut constituer une manifestation de la compréhension abstraite sans pour autant susciter un passage vers ce mode.

L'absence d'un résultat constant, et particulièrement, d'une régularité nuit donc au passage vers la compréhension formelle. En effet, Hélène n'apporte aucune considération globale ou locale à la courbe qui joint l'ensemble des points localisés. L'extrapolation de cette courbe ne l'engage pas à proposer une solution au problème. De plus, la suggestion du contexte lunaire et de la hauteur en fonction du temps n'a pas suscité une correspondance entre les états successifs de la situation des puits et ses systèmes symboliques. Toutefois, la généralisation du modèle linéaire conduit Hélène à maintenir une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits; elle renonce ainsi au modèle linéaire. Cette généralisation illustre de quelle façon un discrédit du modèle linéaire n'est pas isolé à une seule représentation. En effet, la généralisation d'une application de la fonction linéaire l'amène à élaborer une droite dans la représentation graphique et des états constants au sein de la représentation numérique.

L'étude du mouvement d'un objet en chute libre sollicite des représentations mentales. Hélène a rarement fait mention de la gravité, de l'accélération et de la vitesse. À ce moment, elle semble davantage en mesure de généraliser le modèle linéaire sur les systèmes symboliques que d'étudier une situation où intervient l'étude du réel. Ceci illustre de nouveau comment elle s'en remet à des apprentissages scolaires face à un contexte inédit. Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue à présent de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des puits. Hélène reconnaît alors qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

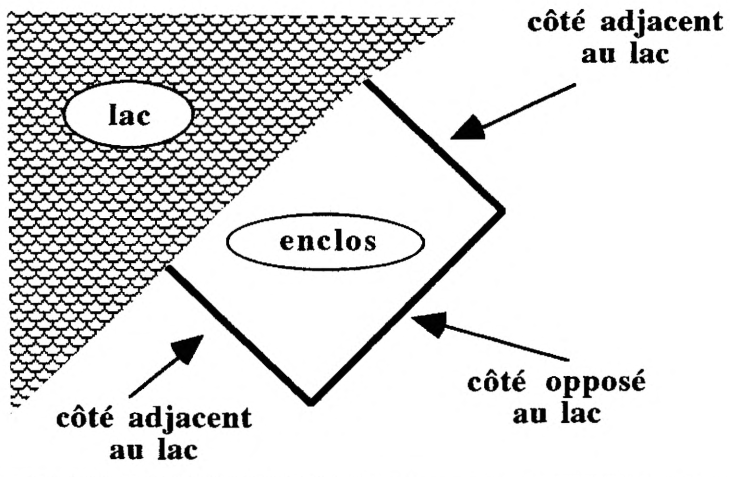
3.3.2.3 Situation d'apprentissage «L'enclos»

Dans cette situation d'apprentissage, Hélène doit modéliser la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Le périmètre correspond à 26 mètres de clôture avec laquelle elle doit former trois côtés d'un enclos le long d'un lac. La résolution du problème consiste à trouver les dimensions d'un enclos dont l'aire est maximale. Cette situation d'apprentissage est propice à une investigation statique où Hélène doit composer avec une structure de forme rectangulaire.

Description

Après avoir lu le libellé de la situation d'apprentissage (voir l'annexe D), Hélène en rapporte l'ensemble des propos. «Il veut savoir comment il faudrait placer la clôture pour avoir le plus grand enclos possible pour son cheval», affirme-t-elle en identifiant le problème à résoudre. Elle propose la construction d'un premier enclos avec des cure-dents. «9X8, 9 fois 8; 72 m^2», dit-elle en ayant calculé l'aire. Sa construction (voir la figure n° 18) présente une forme rectangulaire dont la première dimension (9) correspond aux côtés adjacents au lac, et la deuxième dimension (8), au côté opposé au lac. «Il [enclos] va varier comme sur la forme, mais ça va toujours rester constant pour l'aire», suppose-t-elle pour les autres enclos. «Ça veut dire que ça change», se ravise-t-elle en ayant calculé une aire de 80 m^2 pour l'enclos de 5X16. Ensuite, elle poursuit la construction des enclos avec des cure-dents d'une façon aléatoire.

Figure n° 18



Conviée à revoir la disposition de la clôture sans faire physiquement les enclos, Hélène révise le calcul qui lui permet d'établir les dimensions. «16 divisé par 5. Non, 5 divisé par 6», dit-elle en éprouvant de la difficulté à verbaliser le calcul. Puis elle se lance dans la construction de la représentation algébrique. «Bien, c'était ça [5] plus ça [16]; il fallait que ça donne 26 en tout», précise-t-elle en indiquant les dimensions de l'enclos de 5X16. Elle fait un croquis dans lequel les deux côtés adjacents correspondent aux variables a et c, puis le côté opposé, à la variable b. «26 moins 16; ça donnerait 10», dit-elle en transformant l'expression $b+ac = 26$ à $26\text{-}b = ac/2$. «Admettons a, les deux côtés», ajoute-t-elle en divisant 10 par 2.

Ayant inscrit un premier calcul, 26-16=10/2=5, pour l'enclos de 5X16, Hélène fait le même calcul en débutant avec un côté opposé de 1 mètre. «On dirait qu'il se suit. Ça va être facile», dit-elle après le deuxième calcul. «Ça a de l'allure», ajoute-t-elle après six calculs. «Ça se répète, mais ce n'est pas pareil», affirme-t-elle après le calcul de l'enclos de 9X8. «Je pourrais continuer, mais ça deviendrait des fractions», affirme-t-elle après avoir décrit 24 calculs semblables au premier. À ce moment, je la défie de trouver la plus grande étendue. «Ça [1,5] fois ça [23]», dit-elle en indiquant l'enclos de 1,5X23. Elle calcule ainsi l'aire des enclos pour la moitié des calculs. «Ces deux-là», conclut-elle en indiquant les calculs, 26-12=14/2=7 et 26-14=12/2=6, dont les aires sont de 84 m^2. «Bien, il y aurait peut-être lui», dit-elle en indiquant le calcul, 26-13=13/2=6,5, dont l'aire donne 84,5 m^2.

Ensuite, je lui suggère une valeur inconnue pour la longueur du côté opposé. «Il va falloir que j'isole cela [b]. Je ne suis pas sûr avec le moins», dit-elle en encerclant le $-b$ dans l'expression $26\text{-}b = ac/2$. Sollicitée à faire une autre représentation, Hélène se propose de construire la représentation graphique. Elle représente une dimension sur chaque axe du plan cartésien. Les points localisés lui suggèrent une droite pour laquelle elle calcule une pente de -2 selon des procédures algébriques abordées depuis peu en salle de classe. Après je modifie le périmètre, soit 100 mètres de clôture plutôt que 26. «À la place de 26, ça va être 100», précise-t-elle en inscrivant l'expression $100\text{-}b = ac/2$. «Elle va être plus grande parce qu'il y a plus de clôture», ajoute-t-elle pour l'aire. «Le graphique va être plus long, mais ça va faire ça pareil», conclut-elle en indiquant une droite plus longue, mais de même pente.

Une deuxième modification du libellé touche à la structure de l'investigation, soit la réalisation des quatre côtés d'un enclos toujours selon 100 mètres de clôture. «Bien, ça ne sera plus cette formule [*100-b = ac/2*]. Ça va être 100 mètres, c'est pour les 4 côtés», dit-elle en faisant le croquis d'un enclos à quatre côtés. «On n'aurait pas besoin de ça [*c*], seulement de *a* et *b*», ajoute-t-elle en ne conservant que deux variables pour le calcul de l'aire. «100 divisé par *a*; ça va être égal à *b*», conclut-elle en inscrivant l'expression *100/a = b*. Ensuite, Hélène infirme la possibilité d'avoir une aire de 80 m^2 avec une dimension de 4 mètres selon le libellé initial. «C'est 44 [m^2]», dit-elle selon le calcul, 26-4=22/2=11. «C'est lui [enclos] qui en a le plus. Il a 0,5 [m^2] de plus», dit-elle en indiquant que l'enclos de 6,5X13 a la plus grande aire.

Analyse

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation du problème et inciter l'étude de la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. La recherche du plus grand enclos conduit Hélène au calcul de l'aire. Toutefois, ces manifestations de la compréhension intuitive doivent se préciser puisqu'elle croit que la forme de l'enclos va varier et non son aire. La construction d'enclos permet de préciser ses intuitions et de réaliser un passage vers le mode de la compréhension procédurale. En effet, la construction du deuxième enclos confirme la variation de l'aire. Puis elle établit une série de calculs sans les croquis pour trouver les dimensions des enclos; ceci constitue ses premières procédures. Toutefois, ces procédures ne sont pas coordonnées en même temps que le calcul de l'aire. En dépit du fait que le calcul de l'aire est différé, elle parvient à résoudre le problème.

Les manifestations d'Hélène peuvent constituer une compréhension abstraite, sans toutefois conduire à un passage vers ce mode de compréhension. En effet, le calcul des dimensions constitue le début d'une composition d'opérations mathématiques, donc la reconnaissance d'une régularité entre la longueur du côté opposé d'un enclos et son aire. La longueur du côté adjacent correspond à la soustraction du périmètre donné (26) par la longueur du côté opposé, le tout divisé par 2. Toutefois, le calcul de l'aire différé semble avoir compromis son introduction au sein de la régularité. De même, la modification du périmètre ne lui a pas permis de coordonner ses procédures, de réviser la construction de la régularité et d'engager ainsi un passage vers le mode de compréhension abstraite. Elle a substitué 100 à 26 dans l'expression, $26\text{-}b = ac/2$; ce qui constitue tout au moins une modification pertinente.

Les mêmes difficultés persistent lors de la modification de la forme de la structure. Hélène manifeste une compréhension intuitive de la situation de l'enclos, mais le passage vers le mode de compréhension abstraite se bute aux mêmes difficultés. En effet, elle se propose de travailler avec quatre côtés puisque le développement du quadrilatère est différent. Le calcul des dimensions semble de nouveau vouloir se coordonner au calcul de l'aire. Cette fois, le calcul des dimensions est constitué d'une composition d'opérations mathématiques erronée; ce qui complique davantage l'introduction du calcul de l'aire au sein d'une régularité. D'autre part, le nombre de variables peut aussi avoir compliqué l'introduction du calcul de l'aire.

Cette situation d'apprentissage fait intervenir la longueur du côté opposé, la longueur des côtés adjacents et l'aire. Deux variables doivent apparaître sur le plan cartésien, et particulièrement, la variable associée à l'aire pour soutenir une courbe parabolique. Hélène fait plutôt intervenir la longueur du côté opposé et des côtés adjacents, donc une droite apparaît sur le plan cartésien. Elle a tout de même établit une correspondance entre des états constants et la représentation graphique lors de la modification du périmètre. D'autre part, elle avait fait la même construction pour la situation des coffrages. Cette situation fait aussi intervenir trois variables : le nombre de lignes dans un coffrage, le nombre d'armatures dans une ligne et le nombre d'armatures nécessaires. Le nombre de variables peut donc être problématique pour la construction des systèmes symboliques.

Les travaux selon le libellé initial et selon les deux modifications du libellé n'ont par conséquent pas permis un passage vers le mode de compréhension abstraite. Hélène semble d'abord s'en tenir au calcul des dimensions plutôt qu'à la réalisation de croquis. C'est pour cette raison qu'elle a fait intervenir ce calcul pour infirmer la réalisation d'un enclos selon le libellé initial. D'autre part, les croquis avaient favorisé la coordination des procédures chez les deux autres élèves. De plus, les citations témoignent de l'apparition précoce des variables sans qu'elle n'ait reconnu la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité entre la longueur du côté adjacent ou opposé d'un enclos et son aire. Cette composition aurait pu permettre l'intégration des états successifs d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

Enfin, les deux modifications du libellé semblent tout de même avoir suscité l'évolution de la pensée d'Hélène à travers les modes de compréhension. En effet, la modification du périmètre suscite une reprise du mode de compréhension procédurale alors que la modification de la forme de la structure exige une reprise du mode de compréhension intuitive. Toutefois, le passage vers le mode de compréhension abstraite semble être conditionné par ses premières constructions. À ce moment, l'absence de coordination entre le calcul des dimensions et le calcul de l'aire semble nuire au passage vers ce mode de compréhension. Il en est de même pour la correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble aussi laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique chez Hélène. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire est privilégiée à la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation de l'enclos. D'autre part, la construction de la représentation algébrique nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. À ce moment, la reconnaissance d'une régularité est conditionnée par la coordination simultanée de procédures entre les grandeurs pertinentes de cette situation.

3.3.2.4 Situation d'apprentissage «Les trapèzes»

Cette situation d'apprentissage conduit Hélène à modéliser le mouvement d'un pendule. L'investigation qui en découle exige l'emploi d'un dispositif. Ce dispositif se compose d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. D'autre part, le libellé suscite une présomption au modèle linéaire qui ne permet pas de résoudre le problème. Toutefois, l'analyse des données issues de l'investigation dynamique permet à Hélène de résoudre le problème.

Description

Après la lecture du libellé, Hélène résume l'ensemble des propos (voir l'annexe D). «Ils [Michèle et Pierre] voudraient savoir à quelle longueur [les trapèzes de Pierre] qu'il faudrait que ça serait», dit-elle en identifiant le problème à résoudre. «Ils pensaient que, dans le temps que lui [les trapèzes de Michèle] en faisait un, l'autre [les trapèzes de Pierre] en ferait deux. Ils [Michèle et Pierre] allaient pouvoir se rejoindre», ajoute-t-elle en décrivant la présomption au modèle linéaire. Hélène souligne qu'il faut varier la longueur des trapèzes de Pierre. Puis elle fait une comparaison entre les trapèzes et les balançoires : «il y a quelque chose de suspendu à une corde qui balance.»

Conviée à décrire les étapes de l'investigation, Hélène suggère de faire balancer un objet au bout d'une corde, de mesurer le temps et de faire varier la longueur de la corde. Ne sachant pas désigner le dispositif correspondant, je lui suggère le pendule. «Ça commence à une distance pareille», dit-elle en décrivant l'angle à donner aux pendules au départ. «D'après moi, la longueur [du pendule], ça n'a pas de rapport avec le temps. Est-ce que ça se peut?», s'interroge-t-elle en proposant une hypothèse. «N'importe quelle longueur [du pendule], ça va prendre le même temps», affirme-t-elle après un premier essai expérimental. «À cause que lorsqu'elle [la longueur du pendule] est plus courte, il [le pendule] va plus vite», se ravise-t-elle pour les autres essais. Les données recueillies infirment donc l'hypothèse d'Hélène (voir la figure n° 19).

Figure n° 19

Données recueillies

0,5 m	->	1,7 s
1,0 m	->	2,2 s
1,5 m	->	2,8 s
2,0 m	->	3,0 s
2,5 m	->	3,1 s

Hélène regarde les données recueillies sans toutefois tenter aucune opération mathématique. «Ça prend plus de temps», dit-elle en indiquant les temps de 0,5 à 2,5 mètres. «Parce que la corde [du pendule] est plus longue», interprète-t-elle. Sollicitée à prévoir la durée du balancement d'un pendule de 3 mètres, elle ne propose encore-là aucune opération mathématique. «3,2 [s]. Est-ce que ça se peut? Ça ne se suit pas», conclut-elle en demeurant perplexe. Une requête semblable l'amène à suggérer un «graphique». «La longueur [du pendule] en fonction du temps», dit-elle en inscrivant la longueur sur les ordonnées et le temps sur les abscisses. La disposition des points localisés suggère une courbe en zigzag. «Bien, c'est pas mal croche. Si ça avait été précis, ça aurait été des courbes», dit-elle en présumant que certaines mesures manquent de précision.

Conviée à prévoir si un pendule de 2,5 mètres fait un balancement en 4 secondes, Hélène consulte le plan cartésien. «En dedans de 4 secondes», répond-elle en indiquant le point (3,1; 2,5). À ma demande, elle suggère une extrapolation de la courbe à partir du dernier point localisé. «Plus elle [la longueur du pendule] est longue, plus il [le pendule] prend de temps», dit-elle en n'effectuant aucune procédure à l'égard des points de la courbe extrapolée. Interrogée à savoir si le mouvement du pendule est linéaire, elle s'appuie sur la courbe du plan cartésien. «Non parce que, si tu compares [les longueurs] 1 et 2, bien le temps n'a pas doublé», affirme-t-elle en indiquant les points (2,2; 1,0) et (3,0; 2,0).

Conviée à prévoir la durée d'un balancement des trapèzes de Pierre, Hélène fait une extrapolation de la courbe sur le plan cartésien. «Ça fait 3,4 [s]. Mais là, c'est seulement une courbe», affirme-t-elle en indiquant le point extrapolé (4,0; 3,4). Une requête semblable pour les trapèzes de Michèle l'incite à poursuivre l'extrapolation. «4,0 [s]», ajoute-t-elle en indiquant le point extrapolé (8,0; 4,0). Invitée à résoudre le problème, elle suggère une longueur de 0,8 mètre pour les trapèzes de Pierre. «Parce que, à 8 mètres [longueur des trapèzes de Michèle], ça prend 4 secondes. La moitié de cela, c'est 2 secondes. Puis à 2 secondes, c'est 0,8 mètre [longueur des trapèzes de Pierre]. Puis Pierre, il va le [un balancement] faire 2 fois; ça prend 4 secondes», dit-elle en consultant le plan cartésien.

En considérant que la présomption au modèle linéaire est juste, Hélène propose des changements aux systèmes symboliques. Elle suggère des trapèzes de 3 mètres à Pierre si ceux de Michèle sont de 6 mètres. «Parce que c'est la moitié, d'après leur raisonnement», explique-t-elle. «Ça aurait été constant tout le temps», ajoute-t-elle en indiquant les données recueillies. «Ça aurait fait une droite», conclut-elle en indiquant le plan cartésien. Ensuite, je lui suggère le contexte lunaire plutôt que le contexte terrestre pour la conduite de l'investigation. «Ça n'aurait rien fait parce qu'il n'y a pas de gravité [sur la Lune]», dit-elle. En terminant, je l'invite à prévoir la longueur du pendule pour une durée inconnue de son balancement. «Bien, c'est dur parce que le temps n'est pas égal», conclut-elle.

Analyse

Les descriptions demandées engagent Hélène à identifier le problème à résoudre et à décrire davantage la présomption au modèle linéaire. Elle suggère alors de faire varier la longueur des trapèzes afin que les trapézistes puissent maintenir un lieu d'échange. Ces manifestations de la compréhension intuitive témoignent d'un passage vers le mode de compréhension procédurale. En effet, la comparaison entre les trapèzes et les balançoires l'amène à décrire les étapes de l'investigation ainsi qu'à préciser davantage la procédure liée au départ du pendule. Ces manifestations de la compréhension procédurale ne semble pas s'appuyer sur l'élaboration d'une hypothèse. Cependant, c'est au moment de la conduite de l'investigation qu'elle émet une hypothèse.

L'analyse des données recueillies permet d'infirmer l'hypothèse d'Hélène sans toutefois favoriser le passage vers le mode de compréhension abstraite. Ce passage pourrait s'initier par une composition d'opérations mathématiques qui permet de reconnaître une régularité entre les grandeurs pertinentes ou tout au moins un résultat constant. Les requêtes n'ont pas favorisé l'issue d'une composition, donc la reconnaissance d'un modèle de prédiction des états successifs du mouvement d'un pendule. D'une part, les nombres rationnels semblent compromettre l'identification d'un résultat constant. D'autre part, l'absence d'une régularité semble nuire à l'intégration des états successifs de la situation des trapèzes, à la notion de variation ainsi qu'au passage vers le mode de compréhension formelle.

La construction de la représentation graphique, qui est tout au moins une manifestation de ce mode, semble contenir l'issue du mouvement d'un pendule. Avec les axes correctement identifiés, Hélène joint l'ensemble des points localisés par une courbe. Cette courbe en zigzag est, selon elle, due à des données imprécises. L'extrapolation de la courbe, réalisée sans considérations globales et locales, lui permet de proposer une solution au problème des trapézistes. Privée de la représentation algébrique, la suggestion d'un petit nombre (4 mètres) pour la longueur d'une série de trapèzes conduit Hélène à une démarche de résolution selon la courbe extrapolée. Cette démarche illustre comment elle a tiré profit de la représentation graphique et d'une appropriation du problème qui s'est affermie au cours de l'entrevue.

En supposant que la présomption est juste, Hélène interprète la longueur d'une série de trapèzes selon le modèle linéaire étant donné la longueur d'une autre série. Puis elle généralise ce modèle à l'ensemble de ses travaux afin de maintenir une correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits. Pour une deuxième fois dans le cadre des entrevues d'intervention avec Hélène, la description, le discrédit et la généralisation du modèle linéaire ne sont pas isolés à une seule représentation. Toutefois, la suggestion du contexte lunaire au lieu du contexte terrestre n'a pas suscité autant de généralisation sur les systèmes symboliques qu'avec le modèle linéaire. En effet, l'étude du mouvement d'un pendule sollicite des représentations mentales chez Hélène. Comme à la situation des puits, elle suppose une gravité nulle; ce qui explique qu'elle n'a pas établi une relation fonctionnelle avec la gravité plus faible sur la Lune que sur la Terre.

Ainsi la notion de variation pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue encore de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la situation des trapèzes. Hélène s'appuie ainsi sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas.

3.3.3 Analyse et synthèse de l'entrevue d'évaluation finale

Au moment de l'évaluation initiale, aucun critère de la compréhension intuitive ne s'était manifesté puisque les descriptions et les comparaisons d'Hélène témoignent d'une fixation vis-à-vis les propos du libellé des situations proposées. Ainsi le modèle linéaire compromettait l'ordonnance des états successifs d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique. De cette façon, elle prêtait plus attention aux valeurs numériques qu'aux grandeurs pertinentes. Aucun critère de la composante procédurale ne s'était alors manifesté dans les verbalisations et les manipulations d'Hélène.

Cette fixation, vis-à-vis les propos des libellés, n'avait pas facilité la reconnaissance d'une relation fonctionnelle au sein d'une situation quadratique et l'identification d'un résultat constant. Hélène parvenait tout de même à reconnaître une régularité (critère **A2**). Un seul critère de la compréhension abstraite s'était ainsi manifesté, mais aucun critère de la composante formelle. En effet, la prédominance du modèle linéaire semblait faire obstacle à l'utilisation de variables, à la construction de la représentation algébrique ainsi qu'à la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques.

L'évaluation finale permet de tracer un nouveau portrait de la compréhension du concept de la fonction quadratique chez Hélène suite à nos interventions, encore préalablement à tout enseignement conventionnel du concept en salle de classe. Nous allons tout d'abord faire une analyse des propos d'Hélène, puis une synthèse des modes de compréhension.

Analyse

Les critères de la compréhension intuitive se manifestent lorsque l'élève décrit et compare les situations A (relative au salaire d'un employé), B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). Au premier abord, Hélène s'attarde au contenu des libellés. Pour la situation A, faisant intervenir une application de la fonction linéaire, elle donne une description quantitative : «30 000 \$, 33 000 \$, 36 000 \$, ...» «Il dit le nombre d'argent, son salaire pour chaque année. Tandis qu'ici [situation B], il ne dit pas le nombre de bactéries. Puis il dit qu'à 25 °C, il y a le plus grand nombre de bactéries. Il ne dit pas qu'à tant de degrés Celsius, il y a combien de bactéries», précise-t-elle en comparant les situations A et B. Ensuite, ses descriptions et ses comparaisons ne semblent pas souligner les états successifs des situations quadratiques. En effet, pour la situation B (relative aux cultures de bactéries), elle explique que «plus la température est haute, plus il y a de bactéries.» «Les bactéries restent pareilles», ajoute-t-elle au voisinage de l'état maximal. Elle caractérise ainsi cette situation par des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis d'états constants. Hélène décrit ensuite des états constants pour la situation C (relative à la consommation d'essence) : «moins que tu roules vite, moins que tu dépenses d'essence.» «Tu dépenses beaucoup d'essence», ajoute-t-elle au voisinage de l'état minimal. D'autre part, la citation des libellés lui permet de souligner l'état maximal ou minimal sans toutefois l'amener à reconnaître les états de croissance et de décroissance dans le développement d'une situation quadratique. D'autre part, l'absence des états successifs n'assure pas la discrimination de cette situation d'une autre qui ne l'est pas. Par conséquent, Hélène ne semble pas manifester une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique.

La compréhension procédurale se manifeste au moment de l'emploi de jetons qui traduit non seulement le développement des situations B et C, mais aussi les grandeurs qui influencent ce développement. Les manipulations d'Hélène découlent de ses intuitions. «Un jeton; ça serait 5 °C», affirme-t-elle en indiquant l'ajout de 1 jeton à tous les 5 degrés Celsius pour la situation B (relative aux cultures de bactéries.) «C'est le plus grand nombre de bactéries à 25 °C», dit-elle en regroupant 5 jetons. Par conséquent, elle ne retire aucun jeton pour les températures supérieures à 25 °C, décrivant ainsi une variation qui s'exprime par un développement asymétrique. Pour la situation C (relative à la consommation d'essence), Hélène fait l'ajout de 1 jeton pour toutes les vitesses moyennes supérieures à 0 km/h. Cette variation s'exprime alors par un développement linéaire. Quelle que soit la situation quadratique, elle n'opère aucune coordination entre l'ajout ou le retrait d'un nombre de jetons et l'état maximal ou minimal. Ceci compromet l'ordonnance des états successifs au sein des situations quadratiques. Toutefois, elle identifie les grandeurs qui influencent chaque état successif de ces situations et leur développement global : «le nombre de bactéries» et «les degrés Celsius» ainsi que «la consommation d'essence» et «la vitesse moyenne». Hélène ne manifeste qu'un critère de la compréhension procédurale du concept de la fonction quadratique.

La compréhension abstraite traite d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes au sein des situations B (relative aux cultures de bactéries) et C (relative à la consommation d'essence). La variation exprimée par un développement asymétrique ou linéaire au mode de compréhension procédurale peut compromettre cette relation. «Ici [situation C], ils parlent de la plus faible consommation [d'essence]. Puis là [situation B], ils disent le plus grand nombre de bactéries», dit-elle pour les situations quadratiques. En effet, ces propos n'engagent pas la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique. Une nouvelle situation est ensuite proposée. Il s'agit de la situation D qui illustre différents arrangements de cubes (voir l'annexe B). Sollicitée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Hélène reconnaît une régularité. «Je l'ai trouvée», dit-elle en dénombrant le nombre de cubes au sein des arrangements proposés. «La rangée [du centre élevée] au carré est égale au nombre de cubes», affirme-t-elle en proposant 400 cubes dans un arrangement dont la rangée du centre en contiendrait 20. Par l'utilisation d'une variable, elle construit la représentation algébrique correspondante, x^2. Une autre situation lui est de nouveau proposée. Il s'agit de la situation E dans laquelle certains processus peuvent être décrits par une machine (voir l'annexe B). Conviée à prévoir les états successifs de cette situation quadratique, Hélène identifie un résultat constant à partir des états du processus : «ça augmente tout le temps de 4.» En opérant la soustraction entre les valeurs à la sortie (2, 8, 18, 32), elle élabore alors les premières différences (6, 10, 14) et les deuxièmes différences (4, 4). «Parce qu'il fallait que ça augmente de 4. 14 plus 4; ça fait 18 [prochain nombre des premières différences]. 32 plus 18; ça fait 50», conclut-elle en composant la prochaine valeur à la sortie. Par une composition différente d'opérations mathématiques, la régularité et le résultat constant constituent donc un modèle de prédiction des états successifs. L'absence d'une relation fonctionnelle compromet toutefois chez Hélène un critère de la compréhension abstraite du concept de la fonction quadratique.

La compréhension formelle est évaluée au moment de la présentation de la situation F dans laquelle un plan cartésien est constitué de trois séries de points localisés faisant intervenir des représentations graphiques de la fonction quadratique (voir l'annexe B). Conviée à localiser un point entre deux points consécutifs, Hélène trace une droite afin de localiser le point au milieu de la droite. Toutefois, elle joint les points localisés d'une autre série par une courbe. D'autre part, rappelons qu'elle a utilisé une variable au moment où elle avait reconnu une régularité. Elle manifeste donc l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien. L'emplacement des trois séries de points localisés permet aussi d'évaluer le critère de la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. Hélène doit reconnaître la série pouvant caractériser la situation B (relative aux cultures de bactéries) et la situation C (relative à la consommation d'essence). «Lorsque tu es à 0 °C, tu ne peux pas aller plus bas. Ici [une série dont les points localisés ne sont pas sous l'axe des abscisses], tu peux aller seulement à 0 [°C]», dit-elle pour la situation B. Toutefois, elle a plus de succès avec la série qui caractérise la situation C. «Parce que la plus faible consommation [d'essence], c'est à 90 [km/h]. Puis ce n'est pas en bas de cela», ajoute-t-elle en indiquant que le point minimum de cette série correspond à la vitesse moyenne de 90 km/h. La manifestation de ce critère est donc fortuite chez Hélène. Enfin, la construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien demeure une transition laborieuse. «Multiplier ensemble ou au carré parce que ça fait une courbe», dit-elle en inscrivant $y \cdot x = 6$. La transition inverse n'est pas plus fructueuse. Hélène ne manifeste ainsi qu'un seul critère de la compréhension formelle du concept de la fonction quadratique : l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien.

Synthèse

Selon cette évaluation finale, il est possible de tracer le portrait d'une compréhension fragmentée du concept de la fonction quadratique. Ainsi aucun critère du mode de compréhension intuitive ne s'est manifesté puisque les descriptions et les comparaisons d'Hélène témoignent d'un recul insuffisant vis-à-vis les propos du libellé. L'absence des états successifs au sein d'une situation quadratique pourrait expliquer l'apparition du développement asymétrique et linéaire de la variation. Cette variation ne permet pas l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique. De cette façon, Hélène n'identifie que les grandeurs pertinentes de cette situation (critère **P 2**) à la composante procédurale.

La reconnaissance d'une régularité (critère **A 2**) entre les grandeurs pertinentes d'une situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, s'est réaffirmée à la compréhension abstraite. De même, l'identification d'un résultat constant (critère **A 3**) confirme l'existence d'un modèle de prédiction des états successifs sans pour autant admettre une relation fonctionnelle. Pour la composante formelle, la reconnaissance d'une régularité semble favoriser l'utilisation de variables (critère **F 1**) précisant aussi le point variable sur le plan cartésien. Toutefois, Hélène n'a pas maintenu une correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques. D'autre part, la construction de la représentation algébrique à partir du plan cartésien demeure laborieuse.

La notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble aussi fragile chez Hélène que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, elle semble privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite. De cette façon, elle s'appuie sur une droite pour localiser un point au milieu de deux points consécutifs, tout en reconnaissant qu'il s'agit encore d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, l'utilisation de variables semble autant conditionner la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique que la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité.

Par conséquent, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, peut influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Toutefois, il semble bien que ce soit l'interprétation de l'état maximal ou minimal qui persiste chez Hélène pour permettre l'identification des grandeurs pertinentes, d'une régularité et d'un résultant constant ainsi que l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable.

CHAPITRE IV

LES RÉSULTATS

4.1 Les entrevues d'évaluation

Dans la problématique, nous avons exposé des difficultés d'apprentissage relativement au concept de la fonction quadratique. L'une des difficultés est liée à la prédominance du modèle linéaire tandis que les autres ont trait à l'aspect formel du concept. Dans le cadre d'une recherche associée à la compréhension, nous avons plutôt cherché à identifier les éléments sur lesquels devraient s'appuyer cette formalisation. Nous avons donc réalisé une analyse conceptuelle selon laquelle l'étude du processus de construction des connaissances est rendue possible. Ainsi les éléments intervenant dans la compréhension du concept de la fonction quadratique s'appuient sur le modèle descriptif de compréhension proposé par Herscovics et Bergeron (1982b).

Ce modèle décrit un processus d'apprentissage menant à la construction des connaissances selon quatre modes de compréhension. Ces modes sont des angles qui peuvent être adoptés pour s'approprier un concept mathématique et leur mise en relation suscite le développement d'une conceptualisation. Les analyses de Boukhssimi (1990) et de Miloudi (1995) ainsi que les propos de Confrey (1994), de Janvier (1987a; 1993), de Kaput (1992) et de Piaget (1968) ont grandement contribué à l'élaboration des critères. Résumons à présent les modes de compréhension du modèle descriptif et les critères élaborés.

4.1.1 Rappel des modes de compréhension et des critères élaborés

Un premier mode traite de la compréhension intuitive qui touche aux connaissances informelles. À cet effet, nous avons retenu la discrimination d'une situation quadratique (critère **I1**) et la reconnaissance des états successifs dans le développement de cette situation (critère **I2**). Le second critère contribue au premier puisque la reconnaissance des états de croissance, de décroissance et de l'état maximal ou minimal favorise la discrimination d'une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas. Ces deux critères se manifestent par une description et par une comparaison des situations proposées.

Au mode de compréhension procédurale, l'acquisition de procédures, qui coordonnent les connaissances intuitives et certains prérequis, rend possible une systématisation.

L'utilisation du matériel de manipulation précise les intuitions tout en constituant des repères. Un critère traite de l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique par des repères ou par visée spontanée (critère **P 1**). Quelles que soient les procédures, elles doivent être coordonnées à l'état maximal ou minimal. Un autre critère vise l'identification des grandeurs pertinentes d'une situation quadratique (critère **P 2**), permettant ainsi de faciliter les investigations.

Au mode de compréhension abstraite, un détachement vis-à-vis les procédures favorise la construction d'invariants, la réversibilité, la composition d'opérations et de transformations mathématiques ainsi que la généralisation. À partir d'investigations, un critère admet la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique (critère **A 1**). Une composition d'opérations mathématiques conduit, quant à elle, à la reconnaissance d'une régularité entre ces grandeurs (critère **A 2**). Issue des différences de différences, une autre composition permet l'identification d'un résultat constant au sein d'une situation quadratique (critère **A 3**).

Enfin, le mode de compréhension formelle réfère aux interprétations usuelles du concept de la fonction quadratique. À cet effet, nous avons retenu l'utilisation de variables ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien (critère **F 1**). Ce critère prédispose à la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique (critère **F 2**). Un dernier critère vise la correspondance entre les états successifs de cette situation et ses systèmes symboliques (critère **F 3**).

Selon le schéma global du notre projet de recherche, nous avons convenu d'encadrer les entrevues d'intervention par des entrevues d'évaluation. Celles-ci ont permis de reconnaître la manifestation des critères élaborés ainsi que les modes de compréhension affermis chez Isabelle, Vincent et Hélène. Les évaluations initiales et finales tracent à la fois un portrait «critérié» et global de la compréhension à l'égard du concept de la fonction quadratique. Ainsi les évaluations finales témoignent d'une compréhension du concept particulièrement chez Isabelle et Vincent. Nous allons d'abord décrire les principales conceptualisations qui sont apparues au moment des évaluations finales.

4.1.2 Sommaire des évaluations initiales et finales

Au mode de compréhension intuitive, la description et la comparaison des situations proposées incitent Isabelle, Vincent et Hélène à résumer les propos des libellés. D'ailleurs, les verbalisations d'Isabelle et de Vincent exposent, au moment de l'évaluation finale, les états de croissance et de décroissance au voisinage de l'état maximal ou minimal. Par un recul suffisant vis-à-vis les propos des libellés, ces deux élèves ont ainsi reconnu les états successifs dans le développement d'une situation quadratique. Cette reconnaissance leur permet d'autant plus de discriminer cette situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, d'une autre qui ne l'est pas.

La compréhension intuitive semble prédisposer à l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique à la composante procédurale. Ainsi Isabelle et Vincent renoncent à la variation décrite par un développement linéaire, asymétrique ou ponctué d'états pour représenter, au moment de l'évaluation finale, une variation par un développement symétrique. Évoquant suffisamment d'états pour illustrer cette variation, ces deux élèves exposent alors des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis d'états de croissance ou des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Enfin, Isabelle, Vincent et Hélène parviennent à identifier les grandeurs qui influencent chaque état successif d'une situation quadratique et son développement global.

Au mode de compréhension abstraite, l'identification des grandeurs pertinentes semble faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle au sein d'une situation faisant intervenir une application de la fonction quadratique. Cette relation se précise lorsqu'Isabelle, Vincent et Hélène reconnaissent une régularité entre ces grandeurs. De même, l'identification d'un résultat constant, chez Isabelle et Hélène, confirme à nouveau la dite relation fonctionnelle. Constitué d'une composition d'opérations mathématiques, le résultat constant permet l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs. Alors que la régularité, constituée d'une composition différente, permet l'intégration des états successifs. Cette intégration donne alors naissance à la notion de variation. Les critères de la compréhension abstraite se sont manifestés autant à l'évaluation finale qu'à l'évaluation initiale.

Pour la composante formelle, la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Isabelle, Vincent et Hélène semblent privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite au moment de l'évaluation finale. De cette façon, Isabelle et Vincent s'appuient à maintes reprises sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, l'utilisation de variables chez les trois élèves semble autant conditionner la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique que la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité.

Par conséquent, la reconnaissance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension intuitive, de même que l'ordonnance des états successifs manifestée au moment d'une compréhension procédurale, peut influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. Il semble bien que ce soit cette reconnaissance ainsi que cette ordonnance qui se substituent à l'interprétation de l'état maximal ou minimal chez Isabelle et Vincent. De cette façon, la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques s'est maintenue au moment de l'évaluation finale.

Ce sont là les principales conceptualisations qui sont apparues au moment de l'évaluation finale chez Isabelle, Vincent et Hélène. D'autre part, les évaluations initiales et finales permettent de prendre conscience de facteurs qui peuvent influencer notre recherche. L'enseignement, dispensé pendant les expérimentations, peut avoir favorisé ou nui à la compréhension du concept de la fonction quadratique. Cet enseignement a porté sur les connaissances générales associées à la droite et à son équation, sur les systèmes d'équations linéaires ainsi que sur le concept de la fonction linéaire dans un contexte de résolution de problèmes. D'une part, ces connaissances peuvent avoir suscité la prédominance du modèle linéaire, et d'autre part, l'enseignement est largement abordé par le biais des systèmes symboliques. Ceci demeure donc des facteurs non contrôlés de notre recherche.

Ce sommaire des évaluations décrit une compréhension du concept de la fonction quadratique particulièrement chez Isabelle et Vincent. Le tableau n° 3 se veut à son tour un tableau sommaire des évaluations initiales et finales. Ce tableau contient les critères manifestés et non manifestés aux évaluations. Il inclut aussi les critères qui semblent être influencés par nos expérimentations chez Isabelle, Vincent et Hélène.

TABLEAU N° 3

Tableau sommaire des évaluations initiales et finales

Élèves	Évaluation initiale	Évaluation finale	Critères influencés	Mode de compréhension
Isabelle (élève avec un rendement supérieur)	~~I1~~ ~~I2~~ ~~P1~~ P2 A1 A2 A3 ~~F1~~ ~~F2~~ ~~F3~~	I1 I2 P1 P2 A1 A2 A3 F1 F2 F3	I1 I2 P1 F1 F2 F3	**: intuitive** **: procédurale** **: abstraite** **: formelle**
Vincent (élève avec un rendement moyen)	~~I1~~ ~~I2~~ ~~P1~~ P2 A1 A2 ~~A3~~ F1 ~~F2~~ ~~F3~~	I1 I2 P1 P2 A1 A2 ~~A3~~ F1 F2 F3	I1 I2 P1 F2 F3	**: intuitive** **: procédurale** **: abstraite** **: formelle**
Hélène (élève avec un rendement satisfaisant)	~~I1~~ ~~I2~~ ~~P1~~ ~~P2~~ ~~A1~~ A2 ~~A3~~ ~~F1~~ ~~F2~~ ~~F3~~	~~I1~~ ~~I2~~ ~~P1~~ P2 ~~A1~~ A2 A3 F1 ~~F2~~ ~~F3~~	 P2 A3 F1	**: intuitive** **: procédurale** **: abstraite** **: formelle**

D'après ce tableau, nous pouvons dégager quelques particularités qui peuvent expliquer comment Isabelle, Vincent et Hélène ont développé les principales conceptualisations décrites précédemment. Dans la section suivante, où il est question de quelques particularités aux évaluations, nous allons aussi traiter du critère de la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques.

4.1.3 Quelques particularités aux évaluations

Selon l'évaluation initiale, nous constatons que le critère **A2** apparaît chez Isabelle, Vincent et Hélène. La reconnaissance de régularités se manifeste *a priori* dans leur verbalisation et leur manipulation. Kaput (1992), qui a fait valoir ce processus de construction et de généralisation, avait observé que l'élève se préoccupe de la justesse de la régularité plutôt que de la forme de la représentation algébrique de la fonction quadratique. Il en est de même pour Isabelle, Vincent et Hélène puisque diverses formes ont été construites : $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = x^2+1$, $y = 1/2x^2+1/2x$, $y = 2x^2+2x$, $y = 2x(x+1)$, $y = x(26-2x)$ et $y = x(26-x)/2$. Nous pouvons ajouter que le même processus de construction est aussi généralisable aux investigations statiques et dynamiques. D'autre part, nous concluons que la reconnaissance de régularités semble déjà assimilée au sein des processus de pensée des trois élèves. Comme Kaput (1987; 1992) et Phillips (1995) l'ont convenu, ces processus sont en mesure de s'accommoder à l'étude des relations entre les quantités.

D'après la même évaluation, les critères **P2** et **A1** apparaissent chez Isabelle et Vincent. Nous convenons que l'identification des grandeurs pertinentes (critère **P2**), qui caractérisent chaque état successif d'une situation quadratique ainsi que son développement global, semble conduire à la reconnaissance d'une relation fonctionnelle entre ces grandeurs (critère **A1**). Ces propos sont d'une certaine façon confirmés par Hélène puisque les critères **P2** et **A1** n'apparaissent pas dans ses verbalisations et ses manipulations. Enfin, nous constatons que les critères de la composante abstraite sont sollicités dès l'évaluation initiale. En effet, Isabelle et Vincent manifestent une compréhension qui rend possible la conceptualisation de la fonction quadratique.

Chez Isabelle, Vincent et Hélène, les critères manifestés à l'évaluation initiale se sont réaffirmés à l'évaluation finale. Pour cette dernière évaluation, nous pouvons discerner la présence commune des critères **P2**, **A2** et **F1**. Cette fois, l'identification des grandeurs pertinentes (critère **P2**) semble favorable à la reconnaissance d'une régularité (critère **A2**) et à l'utilisation de variables ou à l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien (critère **F1**). Comme nous l'avons indiqué pour Isabelle et Vincent au paragraphe précédent, la manifestation du critère **P2** n'a toutefois pas suscité l'apparition du critère **A1** chez Hélène. Celle-ci a tout de même manifesté un deuxième critère (critère **A3**) de la composante abstraite. Seulement trois critères semblent être influencés par nos expérimentations chez Hélène.

Selon l'évaluation finale, les critères **I1**, **I2**, **P1** et **F3** se sont manifestés chez Isabelle et Vincent. Nous convenons que la discrimination d'une situation quadratique (critère **I1**) avantage la reconnaissance des états successifs dans son développement (critère **I2**). Cette compréhension intuitive semble propice à l'ordonnance des états successifs de cette situation (critère **P1**) par des repères ou par visée spontanée. Isabelle a ainsi coordonné, au moyen de repères, l'ajout ou le retrait d'un nombre variable de jetons à l'état maximal ou minimal. Vincent, quant à lui, a coordonné une augmentation ou une diminution d'une valeur inconnue dans le voisinage de cet état par visée spontanée. Ce développement symétrique de la variation semble favoriser la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques (critère **F3**). Isabelle et Vincent ont pu alors concevoir l'emplacement de points localisés selon les états successifs élaborés. Le critère **F3** semble donc se manifester chez les deux élèves ayant affermi les modes de compréhension intuitive et procédurale.

Selon les propos précédents, les critères **I1** et **I2** semblent propice à la manifestation du critère **P1**. Ces manifestations favorisent à leur tour la manifestation du critère **F3**. Les descriptions et les comparaisons aux modes de compréhension intuitive et procédurale enrichissent donc les transitions entre les systèmes symboliques à la compréhension formelle. Cette particularité rejoint celle de l'étude de Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986) ainsi que les propos de Janvier (1989) et de Goldenberg (1987). Afin de faciliter les transitions, cette étude incitait l'élève à opérer les transitions avec l'une des caractéristiques du concept de la fonction. Dans notre recherche, ces caractéristiques sont celles des situations quadratiques. De cette façon, les états successifs, tels que les états de croissance et de décroissance ainsi que l'état maximal ou minimal, semblent avoir facilité les transitions entre les systèmes symboliques.

Toutefois, les critères **I1**, **I2**, **P1** et **F3** ne se sont pas manifestés chez Hélène. En dépit du fait que la citation des libellés lui permet de souligner l'état minimal ou maximal, ses descriptions ne traduisent pas les états de croissance et de décroissance d'une situation quadratique, compromettant ainsi les critères **I1** et **I2**. Alors qu'un recul insuffisant vis-à-vis les propos des libellés nuit à la manifestation du critère **P1**. Pour ce critère, elle décrit une variation par des développements linéaires et asymétriques, lesquels avaient été observés chez ses collègues au moment de l'évaluation initiale. Par une fixation à des procédures coordonnant des états constants à l'état minimal ou maximal, c'est Hélène qui manifeste le moins de critères. À cet effet, l'absence des critères aux modes de compréhension, autant intuitive que procédurale, semble avoir compromis la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques (critère **F3**). Nous croyons qu'elle doit être apte à décrire des états afin de pouvoir ensuite les analyser.

Au moment de l'évaluation initiale, Isabelle, Vincent et Hélène ont manifesté davantage les critères de la composante abstraite, tandis qu'à l'évaluation finale, les critères manifestés sont ceux des modes de compréhension intuitive et formelle. Chez Isabelle et Vincent, une compréhension procédurale s'élabore alors qu'Hélène semble éprouver à nouveau des difficultés à décrire des états. Ainsi nous avons pu observer comment une situation quadratique fait intervenir la description et l'analyse d'états pour parvenir à en prévoir leur développement. Les modes de compréhension intuitive et procédurale touchent à la description d'états alors que les modes de compréhension abstraite et formelle semblent avoir trait à l'analyse d'états. Ces deux activités, description et analyse, semblent complémentaires. Elles influencent donc l'étude des relations entre les quantités.

Enfin, certains critères qui ne sont pas apparus au cours des évaluations ont pu se manifester durant les entrevues d'intervention. Par exemple, Vincent a identifié un résultat constant (critère **A3**) pour les situations d'apprentissage «Les plaques de béton», «Les puits» et «L'enclos». Il en est de même pour Hélène. Est-il possible que certains critères de l'analyse conceptuelle de la fonction quadratique n'apparaissent que lorsqu'ils sont situés dans un contexte plus global que le contexte des évaluations? L'analyse des entrevues d'intervention nous permettra d'y répondre et d'observer comment se développent les processus d'apprentissage chez Isabelle, Vincent et Hélène.

4.2 Les entrevues d'intervention

Les principales conceptualisations ainsi que les quelques particularités aux évaluations initiales et finales sembleraient être le produit de nos situations d'apprentissage et de nos interventions. À cet effet, nous entamerons un retour sur les expérimentations. Nous allons donc dégager des processus d'apprentissage. Nous traiterons aussi de l'intérêt particulier que nous avons développé en modifiant le libellé des situations d'apprentissage pour répondre enfin à la question de recherche. Résumons d'abord les situations d'apprentissage.

4.2.1 Rappel des situations d'apprentissage

Les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées par des problèmes, dans les entrevues d'intervention. Isabelle, Vincent et Hélène doivent décrire des phénomènes, les analyser et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Toutefois, l'analyse n'est possible que s'ils conduisent une investigation. Cette recherche systématique et approfondie possède deux natures. L'une engage Isabelle, Vincent et Hélène à composer avec une structure, soit une investigation statique. L'autre est favorable à une investigation dynamique, si les trois élèves mènent la recherche avec un dispositif.

Selon la nature de l'investigation, nous devons nous assurer qu'Isabelle, Vincent et Hélène soient capable de distinguer le matériel de manipulation pertinent. Le problème au sein d'une investigation statique leur demande de trouver le nombre d'éléments dans une structure. Quant à l'investigation dynamique, le problème fait place à une présomption au modèle linéaire, et ce, par le libellé de la situation d'apprentissage. C'est ainsi que quatre situations d'apprentissage font intervenir des applications de la fonction quadratique, donc deux situations d'apprentissage pour chaque nature de l'investigation. Enfin, le tableau n° 4, à la page suivante, résume les principales caractéristiques des situations d'apprentissage.

Pour chaque situation d'apprentissage, nos interventions sollicitent l'utilisation du matériel de manipulation et d'un protocole d'entrevue dont les questions s'appuient sur les quatre modes de compréhension du concept de la fonction quadratique. Il nous est alors possible de décrire un processus d'apprentissage selon l'investigation pratiquée. Ce processus a permis à Isabelle, Vincent et Hélène de progresser dans la construction de leurs connaissances. Voici le processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique.

TABLEAU N° 4

Tableau des principales caractéristiques des situations d'apprentissage

Situation d'apprentissage	Les plaques de béton	Le puits	L'enclos	Les trapèzes
Phénomène à modéliser	la disposition d'éléments dans une structure	le mouvement d'un objet en chute libre	la notion d'aire dans un quadrilatère	le mouvement d'un pendule
Problème à résoudre	le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage donné	la longueur d'une corde à fixer dans un puits artésien selon un temps de chute	les dimensions d'un enclos dont l'aire est maximale	la longueur d'une série de trapèzes pour permettre l'échange des trapézistes
Investigation pratiquée	statique	dynamique	statique	dynamique
Matériel de manipulation	cure-dents, cure-pipes	chronomètre marqueur	cure-dents, cure-pipes	pendule de longueur variable
Présomption et généralisation du modèle linéaire	non	oui	non	oui
Modification (du libellé)	de la forme carrée à la forme triangulaire	du contexte terrestre par le contexte lunaire	du périmètre + de la forme rectangulaire à la forme carrée	du contexte terrestre par le contexte lunaire

4.2.2 Processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation des problèmes et l'étude de la disposition d'armatures dans un coffrage ou de la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. Ces manifestations témoignent d'une compréhension intuitive au moment où Isabelle, Vincent et Hélène ajoutent des armatures à un coffrage existant ou calculent l'aire du quadrilatère. Toutefois, certaines intuitions doivent être précisées s'ils préfèrent l'ajout de motifs de base à un coffrage existant ou s'ils croient que l'aire demeure constante. En effet, Isabelle, Vincent et Hélène croient que l'aire du quadrilatère est constante puisque la longueur du périmètre est la même pour tous les enclos construits. De toute façon, ces intuitions se précisent au moment où ils font leurs premières constructions.

Les constructions avec le matériel de manipulation ou selon des croquis permettent à Isabelle, Vincent et Hélène de réaliser un passage vers le mode de compréhension procédurale. La réalisation des coffrages s'appuie sur l'ajout d'armatures et une deuxième construction confirme la variation de l'aire du quadrilatère. À ce moment, ils s'adonnent au dénombrement des armatures et à l'ordonnance des calculs d'aire. En outre, l'intérêt pour l'ajout d'armatures semble précipiter chez Isabelle et Vincent la soustraction entre les nombres issus du dénombrement des armatures. Il en est de même pour les nombres issus des calculs d'aire. Les différences de différences permettent ainsi de dégager un résultat constant (4). Cette composition d'opérations mathématiques confirme l'existence d'un modèle de prédiction des états successifs des situations des coffrages et de l'enclos, soit une manifestation du mode de compréhension abstraite. Cette composition est-elle suffisante pour réaliser un passage vers le mode de compréhension abstraite? Nous y reviendrons dans ce processus d'apprentissage. Attardons-nous d'abord aux procédures qui ont pu émerger chez Isabelle, Vincent et Hélène.

Pour les coffrages, les procédures doivent être plus efficaces que le dénombrement un à un des armatures et la juxtaposition du motif de base dans un coffrage. En effet, l'intérêt à l'égard de la disposition des armatures engage Isabelle et Hélène à les dénombrer selon un sous-arrangement répétitif d'armatures, coordonné aux dimensions du coffrage. Vincent, quant à lui, dégage deux sous-arrangements d'armatures. Par conséquent, il reconnaît autant de régularités que de compositions d'opérations mathématiques. La conduite simultanée de deux séries de procédures, coordonnées aux dimensions du coffrage, est alors éprouvante.

Quant à l'enclos, les procédures d'Isabelle et Hélène les ont amenées à coordonner deux calculs. L'un des calculs est pour la longueur du côté adjacent ou opposé, et l'autre, pour l'aire. Si l'augmentation de la longueur du côté adjacent amène une diminution de l'aire, les calculs subséquents émergeront d'une coordination entre des longueurs régressives du côté adjacent et l'aire. Pour sa part, Vincent coordonne le calcul des dimensions (ou le calcul de la longueur du côté adjacent et opposé) de l'enclos à un écart régressif entre ces dimensions. Ces deux types de coordinations les conduisent à identifier l'enclos ayant la plus grande aire, donc à la résolution du problème. Toutefois, si le calcul des dimensions de l'enclos constitue les premières procédures; et le calcul de l'aire, les deuxièmes; ces calculs doivent se réaliser simultanément. En effet, nous avons observé chez Hélène que lorsque le calcul de l'aire est différé, la reconnaissance de la régularité est compromise. Par conséquent, elle n'a pas introduit le calcul de l'aire dans la composition d'opérations mathématiques. Bref, les procédures du calcul de l'aire doivent toujours se coordonner simultanément aux procédures du calcul des dimensions de l'enclos. Ce n'est qu'à ce moment que le passage vers le mode de compréhension abstraite semble possible. Ainsi la coordination entre les procédures décrites précédemment permet la reconnaissance d'une régularité entre le nombre d'armatures dans un coffrage et ses dimensions ou entre l'aire de l'enclos et ses dimensions.

Cette reconnaissance semble amener Isabelle, Vincent et Hélène vers une généralisation des régularités à l'ensemble des structures. En effet, Isabelle et Hélène reconnaissent que le nombre de rangées dans un coffrage correspond au nombre d'armatures dans une rangée plus un. De plus, la même régularité est applicable aux armatures placées à la verticale. Cette régularité les conduit à identifier le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage, donc à la résolution du problème. Vincent, qui a coordonné deux sous-arrangements d'armatures, n'a pas reconnu les deux régularités entre chaque sous-arrangement et les dimensions du coffrage. Néanmoins, le premier sous-arrangement coordonné par Vincent est le nombre d'armatures enlevées dans un coffrage; ce qui correspond au double des dimensions. Son deuxième sous-arrangement correspond au nombre d'armatures incluses dans les motifs de base, soit le produit des dimensions par le nombre d'armatures enlevées. La somme des résultats de ces deux régularités donne le nombre d'armatures dans un coffrage selon ses dimensions. C'est ainsi que la reconnaissance d'une régularité semble permettre l'intégration des états successifs de la situation des coffrages et le passage vers le mode de compréhension formelle.

D'ailleurs, il en est de même pour l'enclos. Isabelle, Vincent et Hélène peuvent trouver la longueur du côté opposé à partir de la longueur du côté adjacent. La longueur du côté opposé correspond ainsi à la soustraction entre le périmètre donné et le double de la longueur du côté adjacent. Ils peuvent aussi trouver la longueur du côté adjacent à partir de la longueur du côté opposé. La longueur du côté adjacent correspond alors à la soustraction entre le périmètre donné et la longueur du côté opposé, le tout divisé par deux. La dernière opération correspond toujours au produit des dimensions de l'enclos. À ce moment, la régularité entre l'aire de l'enclos et la longueur de son côté opposé ou adjacent est selon la même composition d'opérations mathématiques. Cette composition semble permettre un passage vers le mode de compréhension formelle, donnant ainsi naissance à la notion de variation.

La suggestion d'une valeur inconnue, pour les dimensions du coffrage ou de l'enclos, semble susciter chez Isabelle, Vincent et Hélène l'utilisation de variables. Cette utilisation prédispose à la construction de la représentation algébrique à partir des compositions d'opérations mathématiques élaborées précédemment. Pour les coffrages, cette représentation correspond à $y = 2x(x+1)$ selon un sous-arrangement répétitif d'armatures et à $y = 2x^2+2x$ selon deux sous-arrangements d'armatures. La résolution du problème des coffrages semble alors possible. Quant à l'enclos, la représentation algébrique est $y = x(26-2x)$ si la longueur du côté opposé est élaborée à partir de la longueur du côté adjacent et $y = x(26-x)/2$ si la longueur du côté adjacent est établie à partir de la longueur du côté opposé.

La représentation algébrique, $y = 2x^2+2x$, constitue la forme générale de la fonction quadratique, $y = ax^2+bx+c$ (a, b et c sont des nombres réels). Cette représentation illustre comment deux sous-arrangements d'armatures conduisent à la somme de deux compositions d'opérations mathématiques. Les autres représentations constituent une forme qui est caractérisée par les points d'intersection de la courbe parabolique avec l'axe des abscisses sur le plan cartésien. Issue de diverses compositions d'opérations mathématiques, cette forme est différente de la forme canonique, $y = a(x-p)^2+q$ (a, p et q sont des nombres réels). Les études de Goldenberg (1987) ainsi que de Borba et Confrey (1996) dégagent la pertinence de cette forme. L'approche retenue semble donc engager Isabelle, Vincent et Hélène à élaborer d'autres formes que la forme canonique. Cette forme nous semble pertinente dans le cas où la tâche de l'élève se résume aux transitions entre la représentation algébrique et graphique.

En outre, la construction de la représentation graphique constitue une manifestation de la compréhension formelle qui ne semble pas s'appuyer seulement sur la représentation algébrique. En effet, cette construction engage chez Isabelle et Vincent des considérations globales et locales. Les considérations globales ont trait à la disposition de l'ensemble des points localisés à partir de la représentation numérique. Cette disposition soutient la courbure entre deux points consécutifs. À d'autres occasions, les deux élèves interprètent les situations des coffrages et de l'enclos pour appuyer l'emplacement de la courbe. Les considérations locales font apparaître une valeur intermédiaire selon des substitutions dans la représentation algébrique. Isabelle et Vincent font appel à cette valeur pour appuyer à nouveau la courbure entre deux points consécutifs. Pour la construction de la représentation graphique, les deux élèves semblent opérer un mouvement qui part des considérations globales vers celles locales.

Enfin, les situations des coffrages et de l'enclos font intervenir trois variables qui peuvent compliquer la construction des systèmes symboliques, comme nous l'avons constaté chez Hélène. En effet, cette construction semble conditionnée par la coordination entre des procédures liées au dénombrement ou à l'ordonnance et les dimensions de la structure. De là, la reconnaissance d'une régularité entre les grandeurs pertinentes des situations proposées suit cette coordination. Hélène aurait pu alors plus facilement évoquer la pertinence des variables, comme Isabelle et Vincent. D'ailleurs, la correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques semble moins laborieuse, si les systèmes symboliques ont été construits à partir de la même régularité.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique des situations où interviennent des applications de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs de la disposition d'armatures dans un coffrage ou de la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. De cette façon, Isabelle et Vincent s'appuient sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, Isabelle, Vincent et Hélène ont su mettre à contribution la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité pour réaliser la construction de la représentation algébrique des situations des coffrages et de l'enclos. À ce moment, la correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques fait l'objet d'un intérêt que nous avons développé en modifiant le libellé des situations d'apprentissage à la fin des entrevues.

En effet, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent susciter l'évolution de la pensée à travers les modes de compréhension. Par exemple, la modification du périmètre de l'enclos semble susciter une reprise du mode de compréhension procédurale. À ce moment, cette modification affecte les procédures. Isabelle, Vincent et Hélène doivent alors réviser le calcul des dimensions, la régularité, la composition des opérations mathématiques et les systèmes symboliques. Si la forme de la structure est affectée dans l'investigation statique, une autre modification entraîne une reprise du mode de compréhension intuitive. Ainsi la modification de la structure de forme carrée à la forme triangulaire des coffrages ou de la forme rectangulaire à la forme carrée pour l'enclos suscite cette reprise.

À ce moment, la modification de la forme de la structure amène un développement différent des coffrages ou du quadrilatère, affectant également les procédures, la régularité, la composition des opérations mathématiques et les systèmes symboliques. Par exemple, toujours coordonné au calcul de l'aire, le partage du périmètre de l'enclos fait intervenir quatre côtés plutôt que trois. Le calcul des dimensions est alors modifié; ce qui transforme la composition d'opérations mathématiques, la régularité, la forme de la représentation algébrique et non seulement ses paramètres. Cette modification incite donc Isabelle et Vincent à maintenir une correspondance entre les états successifs de la situation de l'enclos et ses systèmes symboliques. Étant un critère de la compréhension formelle, cette correspondance semble s'appuyer sur diverses manifestations au sein des modes de compréhension. Toutefois, le passage vers le mode de compréhension abstraite semble être conditionné par les premières constructions. Ainsi l'absence de coordination entre le calcul des dimensions de l'enclos et le calcul de son aire a compromis le passage vers ce mode de compréhension chez Hélène.

Les modifications du libellé des situations d'apprentissage, comme la construction de la représentation graphique, semblent engager chez Isabelle et Vincent un mouvement qui part des considérations globales vers des considérations locales. Par exemple, la modification de la forme de la structure de l'enclos amène d'abord les deux élèves à supposer des aires plus grandes, donc de nouvelles courbes qui englobent toujours la courbe initiale. Puis Isabelle et Vincent localisent des points sur les nouvelles courbes selon des valeurs intermédiaires. De cette façon, le mouvement des considérations globales vers des considérations locales semble suscite aussi l'évolution de la pensée à travers les modes de compréhension pour répondre aux besoins de la vérification ainsi qu'à la nécessité de généraliser les constructions.

Par conséquent, cette évolution illustre que certains changements apportés aux systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé des situations d'apprentissage. En effet, les modifications du périmètre de l'enclos et de sa forme ont permis à Vincent d'opérer des translations horizontales et verticales de la parabole au sein de la représentation graphique. Il a aussi modifié les paramètres de la représentation algébrique et les données de la représentation numérique. La modification de la forme des coffrages a permis à Isabelle d'opérer un évasement de la parabole au sein de la représentation graphique. Les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent donc favoriser la conceptualisation de la fonction quadratique puisque les deux élèves ont maintenu à nouveau une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques.

C'est ainsi que se dessine chez Isabelle, Vincent et Hélène un processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique. Le tableau n° 5, à la page 177, résume les principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation statique. Nous allons maintenant poursuivre avec l'élaboration du processus d'apprentissage au moment de l'investigation dynamique. Ce processus a aussi permis aux trois élèves de progresser dans la construction de leurs connaissances.

4.2.3 Processus d'apprentissage au moment de l'investigation dynamique

Les descriptions demandées semblent favoriser l'appropriation des problèmes lorsqu'Isabelle, Vincent et Hélène expliquent la présomption au modèle linéaire. Toutefois, certaines intuitions demandent à être précisées au moment où Isabelle et Hélène croient que la masse influence le mouvement d'un objet en chute libre. De toute façon, leurs intuitions se précisent lorsqu'elles font quelques essais expérimentaux. Ces manifestations de la compréhension intuitive permettent désormais aux trois élèves d'élaborer une hypothèse sur le développement des situations des puits et des trapèzes.

Un passage vers le mode de compréhension procédurale s'annonce au moment où Isabelle, Vincent et Hélène décrivent les étapes de l'investigation dynamique pour vérifier leur hypothèse. D'autres essais expérimentaux peuvent préciser davantage les procédures et les limites de l'investigation. D'autre part, la rapidité du mouvement d'un objet en chute libre incite les trois élèves à rendre leurs procédures plus efficaces, justifiant ainsi l'emploi du chronomètre marqueur. Autrement, la comparaison entre les mouvements des trapèzes et des balançoires les amène à préciser un dispositif composé d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. Ainsi Isabelle, Vincent et Hélène expriment la nécessité d'utiliser un pendule, puis ils précisent la procédure liée à son point de départ.

Si l'élaboration d'une hypothèse est un élément moteur pour la conduite d'une investigation dynamique, c'est la vérification de l'hypothèse qui guide Isabelle, Vincent et Hélène vers l'analyse des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule. En effet, la mesure des données d'un objet en chute libre constitue les premières différences, et la soustraction entre ces données conduit aux deuxièmes différences. Quant aux données du pendule, Isabelle et Vincent semblen toutefois opérer seulement les premières différences, à défaut d'une augmentation ou d'une diminution selon un résultat constant. Selon les propos de Confrey (1994) et comme nous l'avons constaté au sein de l'investigation statique, Isabelle, Vincent et Hélène semblent conduire une première manifestation de la composante abstraite par une composition d'opérations mathématiques : les différences de différences.

Cette composition peut isoler un résultat constant et confirmer l'existence d'un modèle de prédiction des états successifs des situations des puits et des trapèzes. Chez Isabelle, Vincent et Hélène, les nombres rationnels semblent toutefois engager un passage plus laborieux vers le mode de compréhension abstraite qu'au moment où les nombres naturels interviennent. En effet, ce mode de compréhension peut s'initier à partir d'une composition d'opérations mathématiques, mais préférablement selon la reconnaissance d'une régularité entre la distance parcourue par un objet en chute libre et son temps de chute ou entre la longueur d'un pendule et sa période. De toute façon, les différences de différences ne précisent pas la relation fonctionnelle entre des grandeurs pertinentes, mais plutôt un modèle de prédiction qui décrit des suites de nombres (les premières et deuxièmes différences) à partir de la grandeur dépendante.

Par ailleurs, le résultat constant, même approximatif, aurait suffi pour l'analyse des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule puisque la représentation algébrique de ces mouvements se simplifie à la forme de base, $y = ax^2$ (a est un nombre réel). Le résultat constant est toujours deux fois la valeur du paramètre a de cette forme. Par exemple, la distance parcourue par un objet en chute libre (y), selon des intervalles de temps (x), suit la relation $y = 1/2gx^2$; g étant l'accélération due à la gravité terrestre d'où $y \approx 1/2(9,8)x^2 \approx 4,9x^2$. Selon des intervalles de temps unitaires, les distances parcourues sont 4,9; 19,6; 44,1; 78,4; 122,5; etc. Les premières différences donnent 14,7; 24,5; 34,3; 44,1; etc. Les deuxièmes différences dégagent 9,8. Ce résultat constant est bien deux fois la valeur du paramètre 4,9 de la forme de base. De même, la longueur d'un pendule (y) est fonction de sa période (x) selon la relation, $y = g/(2\pi^2)x^2$; π étant la constante du rapport de la circonférence d'un cercle par son diamètre d'où $y \approx 9,8/(2(3,14)^2)x^2 \approx 0,5x^2$. Selon des périodes unitaires, les longueurs du pendule sont 0,50; 1,99; 4,47; 7,94; 12,41; etc. Les premières différences donnent 1,5; 2,5; 3,5; 4,5; etc. Les deuxièmes différences dégagent 1. Ce résultat constant est encore deux fois la valeur du paramètre 0,5 de la forme de base.

L'absence d'une régularité nuit donc à l'intégration des états successifs des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule ainsi qu'au passage vers le mode de compréhension formelle. Tel qu'il s'est illustré au cours de l'investigation statique, ce passage avait suscité l'utilisation de variables et la construction de représentations algébriques, selon les compositions d'opérations mathématiques issues des régularités. Par conséquent, Isabelle, Vincent et Hélène sont définitivement privés de la représentation algébrique dans l'investigation dynamique. C'est pour cette raison que les trois élèves ont privilégié la représentation graphique plutôt que les autres systèmes symboliques pour résoudre les problèmes.

La disposition des points localisés sur le plan cartésien suggère une courbe; ce qui constitue tout au moins une manifestation de la compréhension formelle. La construction de la représentation graphique semble plus simple que la même représentation construite au moment de l'investigation statique. En effet, Isabelle, Vincent et Hélène travaillent seulement à partir de deux grandeurs : la distance parcourue par un objet en chute libre et son temps de chute ou la longueur d'un pendule et sa période. En outre, comme nous l'avons décrit dans le processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique, Isabelle et Vincent utilisent des considérations globales et locales pour expliquer la courbure entre deux points consécutifs. La disposition de l'ensemble des points localisés confirme cette courbure alors qu'une valeur intermédiaire à deux points consécutifs permet la localisation d'un point selon une courbe de concavité vers le bas.

L'extrapolation dans la représentation graphique conduit Isabelle, Vincent et Hélène à illustrer constamment une courbe à partir du dernier point localisé. De plus, Isabelle se donne des procédures pour justifier la localisation des points de la courbe extrapolée. En effet, ses procédures font intervenir la distance horizontale entre des paires de points consécutifs coordonnée à leurs distances verticales. La distance horizontale diminue selon un résultat constant pour des distances verticales égales. À d'autres occasions, c'est la distance verticale entre des paires de points consécutifs qui est coordonnée à des distances horizontales égales, conduisant également à l'identification d'un résultat constant. Isabelle semble donc opérer les différences de différences dans la représentation graphique comme nous l'avons constaté jusqu'à présent dans la représentation numérique.

À ce moment, la représentation graphique permet à Isabelle, Vincent et Hélène de proposer une démarche de résolution au problème des trapèzes. En effet, la mise en scène du problème implique la synchronisation du mouvement de deux séries de trapèzes. La deuxième série doit être synchronisée à une première série de longueur fixe. Selon la représentation graphique du pendule, les trois élèves déterminent la période de la première série, puis la longueur de la deuxième série pour une demi-période. Une démarche de résolution selon la courbe extrapolée témoigne d'une appropriation du problème qui s'est affermie au cours de l'entrevue et de représentations mentales favorables à l'étude de la situation des trapèzes chez les trois élèves. Les représentations mentales semblent des éléments clés autant au moment de l'élaboration d'une hypothèse que lors de la conduite d'une investigation dynamique.

Ainsi la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique des situations où interviennent des applications de la fonction quadratique dans le plan cartésien, semble moins laborieuse que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, cette construction nécessite la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité. Cependant, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire se distingue de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule. Isabelle et Vincent s'appuient sur une droite pour localiser un point au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Hélène parvient à la même construction sans aucune considération globale ou locale. À ce moment, la correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques fait l'objet d'un intérêt que nous avons développé en modifiant le libellé des situations d'apprentissage à la fin des entrevues.

Les modifications du libellé des situations d'apprentissage ont trait à la substitution du contexte terrestre par le contexte lunaire et à la généralisation du modèle linéaire sur les systèmes symboliques construits. Ces modifications ont probablement suscité l'évolution de la pensée des trois élèves à travers les modes de compréhension. Cette évolution est toutefois beaucoup moins perceptible que l'évolution perçue au cours de l'investigation statique. Par conséquent, l'évolution de la pensée à travers les modes de compréhension a tout de même engagé Isabelle, Vincent et Hélène à généraliser les modifications du libellé des situations d'apprentissage afin de maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques.

À la suite des premières constructions d'Isabelle, de Vincent et d'Hélène, la généralisation du modèle linéaire les a conduits à décrire des changements à leurs travaux. Les trois élèves décrivent à nouveau la présomption en faisant intervenir une interprétation évoquant le modèle linéaire. De plus, ils supposent respectivement une droite ainsi que des états constants au sein de la représentation graphique et numérique. À d'autres occasions, ils indiquent que les premières différences donnent un résultat constant. Ainsi ces changements s'avèrent pertinents, rendant possible la correspondance entre des états constants et les systèmes symboliques construits. Les changements au sein des systèmes symboliques illustrent de quelle façon la description, le discrédit et la généralisation du modèle linéaire ne sont pas isolés à une seule représentation. Isabelle, Vincent et Hélène renoncent ainsi au modèle linéaire selon les deux situations d'apprentissage où les trois élèves ont conduit une investigation dynamique.

Par conséquent, la substitution du contexte lunaire, au lieu du contexte terrestre, n'a pas suscité de généralisation aussi déterminante sur les systèmes symboliques construits que la généralisation du modèle linéaire. Cette modification du libellé des situations d'apprentissage suppose des représentations mentales favorables à l'étude des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule. Sachant que l'accélération due à la gravité est six fois moindre sur la Lune que sur la Terre, Vincent est le seul élève qui a décrit respectivement un évasement de la parabole ainsi que des données inférieures au sein de la représentation graphique et numérique du mouvement d'un objet en chute libre. Quant au mouvement d'un pendule, il décrit toutefois un effet global nul puisque le mouvement de va-et-vient du pendule l'amènerait à annuler l'effet de la gravité. Le mouvement d'un pendule est bel et bien influencé par l'accélération due à la gravité selon la relation définie antérieurement, $y = g/(2\pi^2)x^2$.

À ce moment, l'étude de certains mouvements implique des représentations mentales issues des apprentissages scolaires. Ainsi certains apprentissages peuvent conduire à des représentations mentales qui ne peuvent pas être généralisées aux mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule. En effet, Isabelle, Vincent et Hélène ont étudié les notions de la distance parcourue, de la vitesse et de l'accélération due à la gravité dans un cours de sciences de la nature. Isabelle a calculé la vitesse d'un pendule, associant ainsi sa longueur à la distance parcourue. De plus, Isabelle et Hélène croient que le contexte lunaire n'influence pas les mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule puisque la gravité serait inexistante sur la Lune. Quant à lui, Vincent a soutenu que le contexte lunaire n'influence pas le mouvement d'un pendule puisque l'effet de la gravité serait moins direct que dans le cas du mouvement d'un objet en chute libre. Bref, les apprentissages scolaires demeurent néanmoins essentiels à la conduite d'une investigation dynamique ainsi qu'au maintien d'une correspondance entre les états successifs de situations, où intervient l'étude du réel, et leurs systèmes symboliques.

Par ailleurs, Hélène est une élève qui semble davantage en mesure de généraliser le modèle linéaire sur les systèmes symboliques construits que d'étudier une situation où intervient l'étude du réel. En effet, Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986), Schwartz et Yerushalmy (1992) ainsi que Janvier (1993) décrivent que l'élève associe au concept de la fonction quadratique une droite ou des processus de calcul applicables au concept de la fonction linéaire. Ces chercheurs se sont restreints aux transitions entre les systèmes symboliques alors que nous nous sommes intéressés à l'étude des relations entre les quantités. Nos résultats confirment et précisent donc leur propos à l'égard de la prédominance du modèle linéaire. Ainsi des représentations mentales non généralisables aux mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule semblent indiquer qu'Hélène s'en remet au modèle linéaire lorsqu'un contexte inédit lui est présenté.

C'est ainsi que se dessine chez Isabelle, Vincent et Hélène un processus d'apprentissage au moment de l'investigation dynamique. Le tableau n° 6, à la page 178, résume les principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation dynamique. D'autre part, les tableaux n° 5 et 6 laissent entrevoir quelques différences à l'égard de l'énoncé des caractéristiques et de leur ordre d'apparition suivant l'investigation pratiquée. Par conséquent, la réponse à la question de recherche traitera séparément des deux processus d'apprentissage. Nous aurons l'occasion d'élaborer sur ces différences au prochain chapitre.

TABLEAU N° 5

Tableau des principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation statique

Situations d'apprentissage \caractéristiques	Les plaques de béton	L'enclos
Connaissances intuitives	l'ajout de motifs de base à un coffrage	l'aire du quadrilatère demeure constante
Connaissances qui se précisent	au moment des premières constructions	au moment des premières constructions
Systématisation	par le dénombrement des armatures	par l'ordonnance des calculs d'aire
Première composition d'opérations mathématiques	Différences de différences entre les nombres d'armatures	Différences de différences entre les calculs d'aire
Coordination de procédures	entre des sous-arrangements dans un coffrage et ses dimensions	entre le calcul de l'aire de l'enclos et le calcul de ses dimensions
Deuxième composition d'opérations mathématiques (exemple de la reconnaissance d'une régularité)	le nombre de rangées dans un coffrage correspond au nombre d'armatures dans une rangée plus un + ceci applicable aux armatures placées à la verticale	la longueur du côté opposé correspond à la soustraction entre le périmètre donné et le double de la longueur du côté adjacent + le produit des dimensions de l'enclos
Suggestion d'une valeur inconnue	pour les dimensions du coffrage	pour les dimensions de l'enclos
Construction de la représentation algébrique	$y = 2x(x+1)$ ou $y = 2x^2+2x$	$y = x(26-2x)$ ou $y = x(26-x)/2$
Construction de la représentation graphique	selon des considérations globales et locales	selon des considérations globales et locales
Modification du périmètre de l'enclos	révision des procédures liées au calcul des dimensions	-------------------
Modification de la forme de la structure	développement des coffrages est différent	développement du quadrilatère de l'enclos est différent
Correspondance entre états successifs et systèmes symboliques	selon des considérations globales et locales + certaines transformations mathématiques de la parabole	selon des considérations globales et locales + transformations mathématiques de la parabole

TABLEAU N° 6

Tableau des principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation dynamique

Situations d'apprentissage \caractéristiques	Le puits	Les trapèzes
Connaissances intuitives	l'influence de la masse et de l'accélération due à la gravité sur les objets ainsi que les notions de la distance parcourue et de la vitesse	l'influence de l'accélération due à la gravité sur les objets ainsi que les notions de la distance parcourue et de la vitesse
Connaissances qui se précisent	par quelques essais expérimentaux	par quelques essais expérimentaux
Systématisation	par la description des étapes de l'investigation pour vérifier les hypothèses	par la description des étapes de l'investigation pour vérifier les hypothèses
Procédures plus efficaces	justifiant l'emploi du chronomètre marqueur	justifiant la nécessité d'utiliser un pendule
Première composition d'opérations mathématiques	Différences de différences entre les mesures de la distance parcourue	Différences de différences entre les mesures du temps d'un balancement
Deuxième composition d'opérations mathématiques	plus difficile à cause des nombres rationnels	plus difficile à cause des nombres rationnels
Construction de la représentation algébrique	investigation privée de cette représentation	investigation privée de cette représentation
Construction de la représentation graphique	selon des considérations globales et locales	selon des considérations globales et locales
Extrapolation de la courbe de la représentation graphique	composition semblable aux différences de différences	composition semblable aux différences de différences
Généralisation du modèle linéaire	interprétation du modèle sur les systèmes symboliques	interprétation du modèle sur les systèmes symboliques
Substitution du contexte terrestre par le contexte lunaire	représentations mentales non favorables	représentations mentales non favorables
Correspondance entre états successifs et systèmes symboliques	certaines transformations mathématiques de la parabole	--------------------

Selon ces tableaux, les principales caractéristiques font intervenir l'étude des relations entre les quantités. Ainsi nous convenons que des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes semblent favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire. Nous allons répondre à la question de recherche.

4.2.4 Réponse à la question de recherche

Selon les deux processus d'apprentissage, nous avons fréquemment constaté l'influence des représentations mentales et des procédures ainsi que des réflexions qui en découlent chez Isabelle, Vincent et Hélène. Attardons-nous donc au modèle d'interprétation des activités cognitives de l'élève (DeBlois, 2000) pour répondre à la question de recherche : «comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent-elles favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire?»

Les descriptions demandées en ce qui concerne les situations des coffrages et de l'enclos semblent favoriser certaines représentations mentales chez Isabelle, Vincent et Hélène. Ces représentations ont trait à la disposition d'éléments dans une structure et à la notion d'aire. Une coordination entre représentations mentales initiales et procédures apparaît au moment où les trois élèves font leurs premières constructions. Cette coordination les conduit à préciser certaines représentations mentales. Par exemple, ils croient que l'aire du quadrilatère demeure constante, quelles que soient les dimensions de l'enclos. Ainsi les constructions, avec le matériel de manipulation ou selon des croquis, amènent une systématisation d'où émergent des procédures. En effet, ces procédures suscitent le dénombrement et l'ordonnance des éléments dans la structure, puis la composition d'opérations mathématiques. Cette composition suscite une première réflexion : l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs.

Toutefois, certaines coordinations doivent aussi s'établir entre les procédures. À cet effet, Hélène n'a poursuit sa réflexion qu'au moment où les procédures du calcul de l'aire de l'enclos ont été simultanément coordonnées aux procédures du calcul de ses dimensions. De telles coordinations favorisent alors une relation fonctionnelle au sein des situations proposées, puis l'intégration des états successifs par la reconnaissance d'une régularité. Par exemple, Isabelle et Hélène reconnaissent que le nombre de rangées dans un coffrage correspond au nombre d'armatures dans une rangée plus un, et que la même régularité est applicable aux armatures placées à la verticale. Ainsi la régularité, généralisable à l'ensemble des coffrages, est construite selon la même composition d'opérations mathématiques. Cette dernière réflexion semble prédisposer à la construction de la représentation algébrique alors que la représentation graphique suscite une réflexion sur la notion de variation.

En effet, la suggestion d'une valeur inconnue, pour les dimensions du coffrage ou de l'enclos, semble susciter chez Isabelle, Vincent et Hélène l'utilisation de variables. Cette utilisation prédispose à la construction de la représentation algébrique à partir des compositions d'opérations mathématiques élaborées. Autrement, la construction de la représentation graphique engage une réflexion à l'égard de la disposition de l'ensemble des points localisés. Cette disposition soutient ainsi la courbure entre deux points consécutifs. À d'autres occasions, Isabelle et Vincent interprètent les situations des coffrages et de l'enclos pour appuyer l'emplacement de la courbe. Ces deux élèves font aussi appel à une valeur intermédiaire pour appuyer à nouveau la courbure entre deux points consécutifs. Bref, une réflexion sur la disposition des points localisés dans la représentation graphique semble favoriser le développement de la notion de variation alors qu'une réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité a facilité la construction de la représentation algébrique.

À la suite de ces réflexions, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent conduire Isabelle et Vincent à revoir leurs représentations mentales et leurs procédures. Ces modifications les incitent donc à maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Cette correspondance s'appuie sur diverses réflexions. En effet, la modification du périmètre de l'enclos les incite à réviser les procédures liées au calcul des dimensions, la régularité, la composition des opérations mathématiques et les systèmes symboliques. Alors que la modification de la forme de la structure sollicite leurs représentations mentales puisque le développement des coffrages ou du quadrilatère de l'enclos est affecté. De telles coordinations engagent aussi la même réflexion qu'au moment de la construction de la représentation graphique. Ces coordinations entre représentations mentales et procédures amènent donc une complexification du concept.

En effet, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent illustrer les transformations mathématiques de la parabole sur le plan cartésien. Ces modifications ont permis à Vincent d'opérer des translations horizontales et verticales de la parabole. Il a aussi modifié les paramètres de la représentation algébrique et les données de la représentation numérique alors qu'Isabelle a opéré un évasement de la parabole. Ces réflexions démontrent que certains changements au sein des systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé puisque ces deux élèves maintiennent une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Bref, des coordinations entre représentations mentales et procédures amènent un ensemble de réflexions afin de répondre aux besoins de la vérification ainsi qu'à la nécessité de généraliser les constructions.

En outre, les descriptions demandées en ce qui concerne les situations des puits et des trapèzes semblent conduire Isabelle, Vincent et Hélène à un processus d'apprentissage différent. En effet, l'étude des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule implique bon nombre de représentations mentales. Ces représentations ont trait à l'influence de la masse et de l'accélération due à la gravité sur les objets ainsi qu'aux notions de la distance parcourue et de la vitesse. Une coordination entre représentations mentales initiales et procédures apparaît au moment où les trois élèves décrivent des hypothèses. Cette coordination les conduit à préciser certaines représentations mentales. Par exemple, ils croient que la masse influence le mouvement d'un objet en chute libre. De toute façon, ces représentations se précisent lorsqu'ils font quelques essais expérimentaux. Ainsi une systématisation s'annonce au moment où les procédures se précisent pour vérifier les hypothèses.

Si l'élaboration d'une hypothèse incite une coordination entre représentations mentales et procédures, c'est la vérification de l'hypothèse qui guide Isabelle, Vincent et Hélène vers l'analyse des situations des puits et des trapèzes. En effet, cette coordination favorise la composition d'opérations mathématiques. Comme au cours des situations des coffrages et de l'enclos, cette composition a suscité une première réflexion : l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs. Toutefois, les nombres rationnels semblent amener une réflexion, conduisant à la reconnaissance d'une régularité, plus laborieuse qu'avec les nombres naturels. Ainsi l'absence d'une régularité nuit à l'intégration des états successifs et à la réflexion amorcée. Par conséquent, les trois élèves sont définitivement privés de la représentation algébrique pour les situations des puits et des trapèzes. Ils ont ainsi privilégié la représentation graphique pour résoudre les problèmes. D'autre part, la disposition de l'ensemble des points localisés sur le plan cartésien a engagé la même réflexion qu'avec les situations des coffrages et de l'enclos.

Par ailleurs, l'extrapolation de la représentation graphique conduit les trois élèves à illustrer une courbe à partir du dernier point localisé ainsi qu'une réflexion chez Isabelle. En effet, elle s'adonne à des procédures pour justifier la localisation des points de la courbe extrapolée. Ces procédures font intervenir la distance horizontale entre des paires de points consécutifs coordonnée à leurs distances verticales. Cette coordination semble susciter une composition semblable à celle du modèle de prédiction. À ce moment, la représentation graphique suscite chez les trois élèves une réflexion à l'égard de la mise en scène des trapèzes. En effet, cette mise en scène implique la synchronisation de deux séries de trapèzes. Les trois élèves doivent alors déterminer la période de la première série, puis la longueur de la deuxième série pour une demi-période. Ainsi une réflexion sur la localisation des points de la courbe extrapolée semble favoriser à nouveau le développement de la notion de variation. Une coordination entre représentations mentales et procédures semble donc un élément clé, autant au moment de l'élaboration d'une hypothèse que lors de l'étude des situations proposées.

À la suite de ces réflexions, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent conduire Isabelle, Vincent et Hélène à revoir leurs représentations mentales et leurs procédures. Ces modifications les incitent aussi à maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Cette correspondance s'appuie sur diverses réflexions. En effet, la généralisation du modèle linéaire les a conduits à décrire des changements sur les systèmes symboliques. Par exemple, les trois élèves supposent respectivement une droite ainsi que des états constants sur la représentation graphique et numérique. Ces changements illustrent de quelle façon la généralisation du modèle linéaire n'est pas isolée à un système symbolique. De telles coordinations entre représentations mentales et procédures amènent donc une complexification du concept de la fonction quadratique puisqu'ils renoncent au modèle linéaire. Par conséquent, la substitution du contexte terrestre par le contexte lunaire n'a pas suscité une réflexion aussi déterminante.

En effet, cette modification du libellé des situations d'apprentissage suppose des représentations mentales favorables à l'influence de l'accélération due à la gravité sur le mouvement des objets. Ces représentations, issues des apprentissages scolaires, ont fait défaut. Par conséquent, Hélène fut davantage en mesure de généraliser le modèle linéaire sur les systèmes symboliques que d'étudier une situation où intervient l'étude du réel. Elle s'en est remise au modèle linéaire lorsqu'un contexte inédit lui a été présenté. Toutefois, Vincent a décrit un évasement de la parabole et des données inférieures pour le mouvement d'un objet en chute libre. Cette réflexion démontre à nouveau que des changements sur les systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé. Ces modifications semblent donc favoriser la formalisation du concept de la fonction quadratique puisque Vincent a maintenu une correspondance entre les états successifs de la situation des puits et ses systèmes symboliques.

Enfin, la notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation où intervient l'étude du réel, engage une réflexion moins laborieuse que la réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité. En effet, la variation représentée par une droite pour évoquer le modèle linéaire semble se distinguer de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs des situations des puits et des trapèzes. De cette façon, les trois élèves s'appuient sur une droite à maintes reprises pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Toutefois, l'intégration des états successifs par la reconnaissance d'une régularité semble conditionner par des coordinations entre représentations mentales et procédures. La réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité assure ainsi la construction de la représentation algébrique des situations proposées par l'utilisation de variables. De telles coordinations peuvent engager autant la représentation des états successifs par des systèmes symboliques qu'une complexification du concept de la fonction quadratique.

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT DE LA FONCTION QUADRATIQUE

LA CONCLUSION GÉNÉRALE

C.1 Rappel du projet de recherche

Dans ce dernier chapitre, nous allons tout d'abord résumer la problématique ainsi que les choix méthodologiques retenus pour notre projet de recherche. Ces propos nous conduisent à la question de recherche pour laquelle nous résumerons les résultats du chapitre précédent. Nous ajouterons des commentaires à l'égard de l'analyse conceptuelle, des deux processus d'apprentissage et de l'approche par la modélisation de phénomènes. Enfin, nous effectuerons un retour critique sur le projet de recherche, suivi des implications pédagogiques et de pistes pour de nouvelles recherches.

C.1.1 La problématique

Nos expériences professionnelles en enseignement des mathématiques et en évaluation des apprentissages ont permis l'amorce d'une réflexion à l'égard des difficultés éprouvées par les élèves francophones du Nouveau-Brunswick en résolution de problèmes. De là, l'examen du curriculum et des manuels scolaires utilisés dans notre pratique professionnelle nous a amené à considérer divers facteurs. Bien que ces facteurs puissent influencer les résultats escomptés lorsque l'élève est convié à la résolution de problèmes, ils semblent plutôt le conduire à une construction déficiente de la notion de fonction. Ainsi cette position du problème a alimenté notre réflexion afin de maintenir des liens significatifs avec des problèmes pour l'apprentissage du concept de la fonction.

La solution n'est pas unique et simple, mais nous avons convenu que la compréhension est une lacune des propos tenus jusqu'alors, engageant ainsi la nature de notre projet de recherche. C'est ce qui nous a motivé à considérer une perspective où l'élève s'engage dans la construction de ses connaissances. Selon une perspective constructiviste, l'apprentissage est un processus d'adaptation d'un élève à son environnement. Ce processus le conduit à construire des schèmes et une structure cognitive. Lorsque cette structure ne lui permet plus d'agir sur l'environnement, l'élève est en déséquilibre. L'abstraction réfléchissante, résultat d'une prise de conscience, permet d'intérioriser et de stabiliser les modifications de la structure cognitive. L'équilibration cognitive apparaît lorsque l'organisation des schèmes et l'adaptation à l'environnement sont satisfaisantes.

De cette façon, notre projet de recherche s'inscrivait dans le cadre d'une étude de la compréhension et des processus d'apprentissage chez l'élève. Toutefois, nous distinguons le terme «compréhension» de la définition usuelle. Nous avons donc retenu le modèle descriptif de compréhension proposé par Herscovics et Bergeron (1982b). Ce modèle décrit un processus de construction des connaissances selon quatre modes de compréhension. Les thèmes abordés, quant à l'étude des fonctions, ont motivé autant les choix du concept mathématique que de l'approche. Un bref historique nous a renseigné sur le fait que la courbe représentative de la fonction quadratique peut être perçue à titre de caractéristique de certains phénomènes. L'étude de cette fonction adhère donc à la modélisation de phénomènes. Cette approche contribue aussi à la génération de relations qualitatives, à la conduite d'investigations, à la reconnaissance de régularités et à la notion de variation. De plus, la nature charnière de la fonction quadratique au sein du curriculum et son statut distinct en font un concept moteur.

D'autres thèmes traitent des systèmes symboliques et de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction. Un bref historique, suivi d'un impact de cette technologie, nous a conduit à des réserves techniques et fondamentales. Ainsi l'approche technologique n'a pas été retenue. À notre avis, cette technologie a agi à titre de catalyseur. D'autre part, une alliance entre un projet de recherche associé à la compréhension et l'approche technologique semble difficile à convenir puisque les systèmes symboliques seraient relégués au second plan certaines tâches de l'élève. L'étude des fonctions aborde d'une façon explicite la construction ainsi que l'interprétation des systèmes symboliques. Les difficultés d'apprentissage liées au concept de la fonction quadratique ont confirmé les choix précédents. Ces difficultés nous ont incité à reconnaître le caractère partiel, particulier et nécessairement complémentaire des systèmes symboliques. Par conséquent, sans en compromettre leur importance, nous avons convenu que les difficultés d'apprentissage proviennent de l'aspect formel du concept. La construction et l'interprétation des systèmes symboliques impliquent d'autres éléments qui interviennent dans la compréhension du concept de la fonction quadratique. Une analyse conceptuelle devient alors nécessaire.

C.1.2 L'analyse conceptuelle

Une compréhension intuitive du concept de la fonction quadratique touche d'abord aux connaissances informelles, soit des préconcepts. Il s'agit alors d'une pensée basée sur la perception visuelle ou sur des approximations rudimentaires. Nous avons retenu à cet égard la discrimination d'une situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique, et la reconnaissance des états successifs dans son développement. Cette compréhension touche ainsi aux états de croissance, de décroissance et à l'état maximal ou minimal d'une situation quadratique qui expriment un lien de dépendance.

La compréhension procédurale suppose l'acquisition de procédures coordonnées par les connaissances intuitives à des prérequis, rendant ainsi possible une systématisation. L'utilisation du matériel de manipulation permet alors de préciser les intuitions et de constituer des repères. L'identification des grandeurs, qui caractérisent chaque état d'une situation quadratique ainsi que son développement global, facilite l'investigation. D'autre part, l'ordonnance des états successifs par des repères ou par visée spontanée rend possible la traduction du lien de dépendance à une équivalence selon la nature de l'action. Ainsi la composition du lien de dépendance oriente le sens opératoire de la compréhension abstraite.

En effet, le mode de compréhension abstraite se manifeste par un détachement vis-à-vis des procédures. Ce détachement admet la possibilité d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation, faisant intervenir une application de la fonction quadratique. Une composition d'opérations mathématiques conduit à la construction et à la généralisation d'une régularité entre ces grandeurs alors qu'une autre composition permet de dégager un résultat constant. Les coordinations les plus générales aboutissent ainsi aux quantifications qui traduisent les relations de covariations en des lois de progression.

Enfin, les interprétations usuelles du concept de la fonction quadratique caractérisent la compréhension formelle. Nous avons retenu à cet égard l'utilisation de variables à la suite de la reconnaissance d'une régularité entre les grandeurs pertinentes ou l'introduction d'un point variable sur le plan cartésien. Cette utilisation prédispose à la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique. Les interprétations usuelles visent aussi la correspondance entre les états successifs de cette situation et ses systèmes symboliques.

Ayant défini théoriquement la compréhension du concept de la fonction quadratique selon le modèle descriptif proposé par Herscovics et Bergeron (1982b), nous avons choisi d'ajouter un autre modèle. Ce modèle est une analyse des activités cognitives de l'élève qui a permis de nous situer dans sa position. En effet, si l'analyse conceptuelle nous a conduit à faire un portrait de l'élève, le modèle d'interprétation des activités cognitives de DeBlois (2000) nous a permis de comprendre les processus d'apprentissage qui ont mené vers ce portrait. D'autre part, notre tâche consiste à concevoir des situations d'apprentissage où l'élève fait l'étude des relations entre les quantités où intervient le modèle quadratique. Notre projet de recherche veut donc répondre à la question suivante : «comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent-elles favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire?»

C.1.3 La méthode

La question de recherche touche d'abord à la compréhension chez l'élève du secondaire. Cette compréhension est plus perceptible au moyen d'entretiens sur une base individuelle. La question veut également explorer les processus d'apprentissage par des entretiens. L'étude de cas permet une souplesse qu'exige l'examen de ces processus. Notre schéma global encadre donc une série d'entrevues d'intervention par des évaluations initiales et finales.

Les entrevues d'évaluation ont été conçues à partir de la méthode de l'entrevue critique. L'entrevue critique prend d'abord l'apparence d'une conversation entre l'élève et le chercheur. Celui-ci a un premier rôle : l'observation des verbalisations, des gestes et des manipulations de l'élève. Ce premier rôle prend ensuite une place critique de sorte que le questionnement du chercheur l'engage à s'intéresser autant aux arguments donnés aux réponses qu'à celles-ci.

Le choix méthodologique de l'entrevue critique nous a permis de proposer des situations. L'intention de l'entrevue critique n'est pas d'engendrer la résolution d'un problème, mais plutôt de susciter la manifestation des critères qui témoignent d'une compréhension plus ou moins organisée du concept de la fonction quadratique. Ces situations font donc état d'une description sommaire de phénomènes de sorte que l'élève fasse d'abord appel à ses intuitions plutôt qu'aux détails présents dans les libellés.

Les protocoles des entrevues d'évaluation examinent chaque critère de notre analyse conceptuelle. Ainsi une compréhension intuitive se manifeste par la description et par la comparaison des situations proposées. Une compréhension procédurale est suscitée par l'emploi de jetons pour ordonner les états successifs d'une situation quadratique et par l'identification des grandeurs pertinentes. La compréhension abstraite se manifeste par des questions qui engagent l'élève à prévoir les états successifs de cette situation. Puis les questions de la composante formelle encouragent l'utilisation de variables ainsi que la construction et l'interprétation des systèmes symboliques.

Les entrevues d'intervention sont basées sur la méthode de l'expérimentation didactique puisque ce choix méthodologique est conséquent avec une recherche à données créées. En effet, l'expérimentation didactique permet d'expliquer la construction des connaissances telle qu'elle apparaît chez l'élève au cours de ses apprentissages. De cette façon, les connaissances sont construites par l'élève selon une activité de «redécontextualisation» du concept de la fonction quadratique; c'est l'objet de nos situations d'apprentissage. L'expérimentation didactique permet d'intégrer l'intervention et l'observation du développement cognitif de l'élève sous l'influence de cette intervention.

Dans les entrevues d'intervention, les descriptions sommaires de phénomènes aux entrevues d'évaluation sont remplacées par des problèmes. L'élève doit décrire des phénomènes, les analyser et prévoir leur développement afin de résoudre les problèmes. Toutefois, l'analyse n'est possible que s'il conduit une investigation statique ou dynamique. Le problème au sein de l'investigation statique demande à l'élève de trouver le nombre d'éléments dans une structure. Quant à l'investigation dynamique, le problème fait place à une présomption au modèle linéaire, et ce, par le libellé de la situation d'apprentissage.

Pour chaque situation d'apprentissage, nos interventions sollicitent l'utilisation du matériel de manipulation et d'un protocole dont les questions s'appuient sur notre analyse conceptuelle. Les questions engagent ainsi la manifestation des critères de compréhension. À la fin des entrevues, d'autres questions supposent la modification du libellé des situations d'apprentissage pour susciter des réflexions chez l'élève.

C.1.4 Résumé des résultats

Comme nous l'avions constaté durant les préexpérimentations, Isabelle, Vincent et Hélène ont affirmé à nouveau au cours des expérimentations qu'ils sont en mesure de mener une investigation. Une investigation est une recherche systématique et approfondie d'un phénomène. De plus, cette investigation a deux natures. L'investigation statique engage les trois élèves à composer avec une structure alors que l'investigation dynamique les conduit à décrire et à utiliser un dispositif.

Au chapitre précédent, il nous a été possible de décrire un processus d'apprentissage selon l'investigation pratiquée. Un processus d'apprentissage réunit un ensemble d'éléments caractéristiques issus de l'étude des relations entre les quantités. Nous avons donc dégagé un processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique et un autre processus au moment de l'investigation dynamique.

Nous allons maintenant résumer comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique chez l'élève du secondaire. Ce résumé traitera d'abord des représentations mentales, des procédures et des réflexions développées par Isabelle, Vincent et Hélène à la lumière des évaluations. De même, nous compléterons le résumé avec les deux processus d'apprentissage afin de décrire une nouvelle conceptualisation de la fonction quadratique.

a) Représentations mentales, procédures et réflexions à la lumière des évaluations

Le tableau n° 3, au chapitre des résultats, se veut un tableau sommaire des évaluations initiales et finales. Ce tableau illustre un portrait qui témoigne d'une compréhension du concept de la fonction quadratique chez Isabelle et Vincent à l'évaluation finale. Cette compréhension semble être le produit de nos expérimentations. Nous allons donc résumer les représentations mentales, les procédures et les réflexions que les trois élèves peuvent développer.

La description et la comparaison des situations proposées incitent Isabelle, Vincent et Hélène à résumer les propos des libellés. D'ailleurs, Isabelle et Vincent parviennent à exposer les états de croissance et de décroissance au voisinage de l'état maximal ou minimal. Par un recul suffisant vis-à-vis les propos des libellés, ces deux élèves ont reconnu les états successifs dans le développement d'une situation quadratique. Cette reconnaissance leur permet d'autant plus de discriminer une situation quadratique d'une autre qui ne l'est pas.

Ces représentations mentales semblent favoriser l'ordonnance des états successifs d'une situation quadratique. En effet, Isabelle a coordonné, au moyen de repères, l'ajout ou le retrait d'un nombre variable de jetons à l'état maximal ou minimal. Quant à lui, Vincent a coordonné une augmentation ou une diminution d'une valeur inconnue dans le voisinage de cet état par visée spontanée. À ce moment, les deux élèves exposent des états de décroissance, suivis de l'état minimal, puis d'états de croissance ou des états de croissance, suivis de l'état maximal, puis des états de décroissance. Enfin, Isabelle, Vincent et Hélène parviennent à identifier les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique.

Cette coordination entre les procédures semble faciliter la reconnaissance d'une relation fonctionnelle au sein d'une situation quadratique. La relation fonctionnelle se précise lorsqu'Isabelle, Vincent et Hélène reconnaissent une régularité entre les grandeurs pertinentes. De même, l'identification d'un résultat constant, chez Isabelle et Hélène, confirme à nouveau cette relation. Ces deux compositions d'opérations mathématiques suscitent ainsi des réflexions. En effet, le résultat constant permet l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs alors que la régularité permet l'intégration des états successifs. Cette intégration donne naissance à la notion de variation.

La notion de variation, pour expliquer la représentation graphique d'une situation quadratique dans le plan cartésien, semble se manifester autant que l'utilisation de variables pour construire la représentation algébrique. En effet, Isabelle, Vincent et Hélène semblent privilégier la notion de variation exprimée par une courbe à la variation représentée par une droite. De cette façon, Isabelle et Vincent s'appuient sur une droite pour y localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. D'autre part, l'utilisation de variables chez les trois élèves semble autant conditionner la construction de la représentation algébrique d'une situation quadratique que la composition d'opérations mathématiques issue d'une régularité.

Par conséquent, la reconnaissance et l'ordonnance des états successifs peuvent influencer la représentation de ces états par des systèmes symboliques. D'ailleurs, il semble bien que ce soit cette reconnaissance et cette ordonnance qui se substituent à l'interprétation de l'état maximal ou minimal. Ceci a permis la correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique et ses systèmes symboliques chez Isabelle et Vincent. Cette réflexion semble apparaître chez les deux élèves ayant réalisé une coordination entre des représentations mentales favorables et les procédures correspondantes.

À cet effet, une systématisation s'est élaborée chez Isabelle et Vincent alors qu'Hélène semblait éprouver toujours des difficultés à décrire des états. De cette façon, nous avons pu observer comment une situation quadratique faisait intervenir la description et l'analyse d'états pour parvenir à en prévoir leur développement. Ces deux activités, description et analyse, semblent complémentaires. Elles influencent donc l'étude des relations entre les quantités. C'est ainsi qu'Hélène semble compromettre cette étude. À ce moment, la prédominance du modèle linéaire sera notable puisqu'elle s'en remettra fréquemment à ce modèle dans un contexte inédit.

Enfin, les représentations mentales, les procédures et les réflexions décrites traduisent une compréhension du concept de la fonction quadratique chez Isabelle et Vincent. Nous allons maintenant examiner comment cette compréhension peut être influencée par des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes. Nous compléterons ainsi la première partie de notre résumé par les deux processus d'apprentissage.

b) Processus d'apprentissage au moment de l'investigation statique

Les situations suscitant une investigation statique ont été élaborées afin qu'Isabelle, Vincent et Hélène étudient la disposition d'armatures dans un coffrage et la notion d'aire d'un quadrilatère selon un périmètre donné. La résolution des problèmes consiste à trouver le nombre d'armatures nécessaires dans un coffrage et les dimensions de l'enclos dont l'aire du quadrilatère est maximale. Les trois élèves composent ainsi avec une structure. D'autre part, le tableau n° 5, au chapitre des résultats, résume les principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation statique.

Ainsi les descriptions demandées semblent favoriser certaines représentations mentales chez Isabelle, Vincent et Hélène. Ces représentations ont trait à la disposition d'éléments dans une structure et à la notion d'aire. Une coordination entre représentations mentales initiales et procédures apparaît au moment où les trois élèves font leurs premières constructions. Cette coordination les conduit à préciser leurs représentations mentales. Ainsi les constructions, avec le matériel de manipulation ou selon des croquis, amènent une systématisation d'où émergent des procédures. Ces procédures suscitent le dénombrement et l'ordonnance des éléments dans la structure, puis la composition d'opérations mathématiques. Une composition suscite une première réflexion : l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs.

Certaines coordinations doivent aussi s'établir entre les procédures. À cet effet, Hélène n'a poursuit sa réflexion qu'au moment où le calcul de l'aire de l'enclos a été simultanément coordonné au calcul de ses dimensions. De telles coordinations favorisent alors une relation fonctionnelle au sein des situations des coffrages et de l'enclos, puis l'intégration des états successifs par la reconnaissance d'une régularité. Ainsi la régularité, généralisable à l'ensemble des structures, est construite selon la même composition d'opérations mathématiques. Cette dernière réflexion semble prédisposer à la construction de la représentation algébrique alors que la représentation graphique suscite une réflexion sur la notion de variation.

En effet, la suggestion d'une valeur inconnue pour les dimensions de la structure semble susciter chez Isabelle, Vincent et Hélène l'utilisation de variables. Cette utilisation prédispose à la construction de la représentation algébrique à partir des compositions d'opérations mathématiques élaborées. Autrement, la construction de la représentation graphique engage une réflexion à l'égard de la disposition de l'ensemble des points localisés. Cette disposition soutient alors la courbure entre deux points consécutifs. Bref, une réflexion sur la disposition des points localisés dans la représentation graphique semble favoriser le développement de la notion de variation alors qu'une réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité a facilité la construction de la représentation algébrique.

À la suite de ces réflexions, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent conduire Isabelle et Vincent à revoir leurs représentations mentales et leurs procédures. Ces modifications les incitent donc à maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Cette correspondance s'appuie sur diverses réflexions. En effet, la modification du périmètre de l'enclos les incite à réviser leurs procédures alors que la modification de la forme de la structure sollicite leurs représentations mentales. De telles coordinations engagent aussi la même réflexion qu'au moment de la construction de la représentation graphique. Ces coordinations entre représentations mentales et procédures amènent donc une complexification du concept.

En effet, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent illustrer les transformations mathématiques de la parabole sur le plan cartésien. Par exemple, ces modifications ont permis à Vincent d'opérer des translations horizontales et verticales de la parabole et de modifier les paramètres de la représentation algébrique ainsi que les données de la représentation numérique. Ces réflexions démontrent que certains changements au sein des systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé afin de maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Bref, des coordinations entre représentations mentales et procédures amènent un ensemble de réflexions afin de répondre aux besoins de la vérification ainsi qu'à la nécessité de généraliser les constructions.

c) Processus d'apprentissage au moment de l'investigation dynamique

Les situations suscitant une investigation dynamique semblent conduire Isabelle, Vincent et Hélène à un processus d'apprentissage différent. En effet, l'étude des mouvements d'un objet en chute libre et d'un pendule exige respectivement l'emploi du chronomètre marqueur et d'un objet suspendu à un point fixe par un fil de longueur variable. L'analyse des données issues de l'investigation permet aux trois élèves de résoudre des problèmes. D'autre part, le tableau n° 6, au chapitre des résultats, résume les principales caractéristiques du processus d'apprentissage selon l'investigation dynamique.

Ainsi les descriptions demandées en ce qui concerne les situations des puits et des trapèzes impliquent bon nombre de représentations mentales chez Isabelle, Vincent et Hélène. Ces représentations ont trait à l'influence de la masse et de l'accélération due à la gravité sur les objets ainsi qu'aux notions de la distance parcourue et de la vitesse. Une coordination entre représentations mentales initiales et procédures apparaît au moment où les élèves décrivent des hypothèses. Cette coordination les conduit à préciser certaines représentations mentales au moyen de quelques essais expérimentaux. Ainsi une systématisation s'annonce au moment où les procédures se précisent pour vérifier les hypothèses.

Si l'élaboration d'une hypothèse incite une coordination entre représentations mentales et procédures, c'est la vérification de l'hypothèse qui guide Isabelle, Vincent et Hélène vers l'analyse des situations des puits et des trapèzes. En effet, cette coordination favorise la composition d'opérations mathématiques. Comme à l'investigation statique, cette composition a suscité une première réflexion : l'identification d'un modèle de prédiction des états successifs. Toutefois, les nombres rationnels semblent amener une réflexion, conduisant à la reconnaissance d'une régularité, plus laborieuse qu'avec les nombres naturels. Ainsi l'absence d'une régularité nuit à l'intégration des états successifs et à la réflexion amorcée. Par conséquent, les trois élèves sont privés de la représentation algébrique à l'investigation dynamique, privilégiant la représentation graphique pour résoudre les problèmes. D'autre part, la disposition de l'ensemble des points localisés sur le plan cartésien a engagé la même réflexion qu'avec l'investigation statique.

Par ailleurs, l'extrapolation de la représentation graphique conduit les trois élèves à illustrer une courbe à partir du dernier point localisé ainsi qu'une réflexion chez Isabelle. En effet, elle coordonne des procédures pour justifier la localisation des points de la courbe extrapolée. Cette coordination semble susciter une composition semblable à celle du modèle de prédiction. À ce moment, la représentation graphique suscite chez Isabelle, Vincent et Hélène une autre réflexion à l'égard de la mise en scène des trapèzes. En effet, cette mise en scène implique la synchronisation de deux séries de trapèzes. Ainsi une réflexion sur la localisation des points de la courbe extrapolée semble favoriser à nouveau le développement de la notion de variation. Une coordination entre représentations mentales et procédures semble donc un élément clé, autant au moment de l'élaboration d'une hypothèse que lors de l'étude des situations proposées.

À la suite de ces réflexions, les modifications du libellé des situations d'apprentissage semblent conduire Isabelle, Vincent et Hélène à revoir leurs représentations mentales et leurs procédures. Ces modifications les incitent aussi à maintenir une correspondance entre les états successifs des situations proposées et leurs systèmes symboliques. Cette correspondance s'appuie sur diverses réflexions. En effet, la généralisation du modèle linéaire les a conduits à décrire des changements sur les systèmes symboliques. Ainsi ces changements illustrent de quelle façon la généralisation du modèle linéaire n'est pas isolée à un système symbolique. De telles coordinations entre représentations mentales et procédures amènent donc une complexification du concept de la fonction quadratique. Par conséquent, la substitution du contexte terrestre par le contexte lunaire n'a pas suscité une réflexion aussi déterminante.

En effet, cette modification du libellé suppose des représentations mentales favorables à l'influence de l'accélération due à la gravité sur le mouvement des objets. Ces représentations, issues des apprentissages scolaires, ont fait défaut. Par conséquent, Hélène fut davantage en mesure de généraliser le modèle linéaire sur les systèmes symboliques que d'étudier une situation où intervient l'étude du réel. Toutefois, Vincent a décrit un évasement de la parabole et des données inférieures pour le mouvement d'un objet en chute libre. Cette réflexion démontre à nouveau que des changements sur les systèmes symboliques s'appuient sur des modifications du libellé. Ces modifications semblent donc favoriser la formalisation du concept de la fonction quadratique puisque Vincent a maintenu la dite correspondance.

Enfin, la notion de variation engage une réflexion moins laborieuse que la réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité. En effet, la variation représentée par une droite semble se distinguer de la notion de variation exprimée par une courbe pour illustrer les états successifs des situations des puits et des trapèzes. De cette façon, les trois élèves s'appuient sur une droite pour localiser un point au-dessus ou au-dessous, reconnaissant à ce moment qu'il s'agit d'un ensemble de points qui ne s'alignent pas. Toutefois, l'intégration des états successifs semble conditionner par des coordinations entre représentations mentales et procédures. La réflexion conduisant à la reconnaissance d'une régularité assure alors la construction de la représentation algébrique des situations proposées par l'utilisation de variables. De telles coordinations peuvent engager autant la représentation des états successifs par des systèmes symboliques qu'une complexification du concept de la fonction quadratique.

C.2 Commentaires sur l'analyse, les processus et l'approche

Suite à ce résumé des résultats, nous désirons ajouter des commentaires à l'égard de l'analyse conceptuelle, des processus d'apprentissage ainsi que de l'approche retenue, la modélisation de phénomènes. Nous convenons que les deux processus d'apprentissage font preuve d'une complémentarité certaine pour favoriser la conceptualisation de la fonction quadratique. Notre objectif n'est donc pas d'en favoriser un au détriment de l'autre, mais plutôt de décrire les principales différences.

Pour les besoins de notre recherche, nous avons tout d'abord retenu le modèle descriptif proposé par Herscovics et Bergeron (1982b). Ce modèle ne présente pas une définition conceptuelle de la compréhension, mais il s'attarde à la décrire selon quatre modes de compréhension. Ces modes sont des angles qui ont favorisé l'appropriation du concept de la fonction quadratique et leur mise en relation suscite le développement d'une conceptualisation. D'autre part, les modes de compréhension semblent aussi favorable à l'étude des relations entre les quantités. En effet, l'analyse conceptuelle, qui découle du modèle descriptif, permet l'utilisation du matériel de manipulation. Cette analyse est donc propice à une investigation.

De cette façon, Isabelle, Vincent et Hélène précisent leurs représentations mentales afin de faciliter la conduite d'une investigation. Quelle que soit la nature de l'investigation, une systématisation apparaît de laquelle des processus de pensée sont libérés des représentations mentales. Lorsque les descriptions d'Isabelle et Vincent révèlent les états successifs d'une situation quadratique, ils évoquent constamment l'état maximal ou minimal selon une variation par un développement symétrique. Par exemple, Isabelle précise la nature de la variation grâce à l'ajout ou au retrait d'un nombre variable de jetons. Ainsi la conceptualisation de la fonction quadratique apparaît par le simple fait d'avoir utilisé du matériel de manipulation qui a conduit les deux élèves à illustrer une variation.

Sollicités à prévoir le prochain état d'une situation quadratique, Isabelle, Vincent et Hélène doivent rendre leurs procédures plus efficaces. Par exemple, ils ont délaissé le dénombrement un à un des armatures dans un coffrage pour les dénombrer selon des sous-arrangements. D'autre part, la reconnaissance d'une régularité entre des grandeurs pertinentes précipite la construction de la représentation algébrique par l'utilisation de variables. C'est ainsi que l'analyse conceptuelle a contribué à la planification des situations d'apprentissage. Par conséquent, ces processus d'apprentissage seraient difficile à étudier sans susciter le dialogue entre les trois élèves et le chercheur. Nous avons remarqué que les «n'importe quoi» d'Isabelle, de Vincent et d'Hélène se sont convertis en des résultats argumentés et en des constructions de plus en plus généralisables. Les trois élèves exposent ainsi des résultats pour lesquels ils décrivent spontanément le comment et le pourquoi. L'analyse conceptuelle a donc joué un rôle essentiel pour guider nos interventions vers la zone proximale de développement des trois élèves.

Le processus d'apprentissage selon l'investigation statique nous conduit à reconnaître qu'Isabelle, Vincent et Hélène peuvent construire le concept de la fonction quadratique. Ce processus d'apprentissage nécessite peu de représentations mentales, mais il suppose de nombreuses procédures. De plus, les modifications du libellé des situations d'apprentissage ont contribué à l'évolution de la pensée entre les représentations mentales des trois élèves et la formalisation du concept de la fonction quadratique. Cette évolution dépend du type de modifications, à savoir la modification du périmètre ou de la forme de la structure. Toutefois, les complexifications du concept qui en découlent sont conditionnées par les premières constructions des trois élèves. Par ailleurs, les modifications du libellé ont permis de vulgariser les transformations mathématiques de la parabole. Ainsi Vincent et Hélène ont perçu les causes qui poussent une courbe à se transformer sur le plan cartésien. Ces transformations n'ont plus à être isolées aux transitions entre la représentation algébrique et graphique, comme c'est le cas en enseignement conventionnel.

Le processus d'apprentissage selon l'investigation dynamique nous incite à reconnaître l'apport de représentations mentales favorables à l'étude de certains mouvements. C'est pour cette raison que la substitution du contexte terrestre, par le contexte lunaire, a suscité une réflexion moins déterminante que les modifications du libellé au cours de l'investigation statique. Cependant, l'élaboration d'une hypothèse par les trois élèves demeure un élément moteur dans la conduite d'une investigation dynamique. Cette investigation a permis de confronter les constructions d'Isabelle, de Vincent et d'Hélène au modèle linéaire; ce que nous n'avions pas pu réaliser avec une investigation statique. À cause de l'absence d'une régularité, la résolution des problèmes au sein de l'investigation dynamique repose sur la représentation graphique. Bref, traiter de la conceptualisation de la fonction quadratique par la modélisation de phénomènes permet aux trois élèves de résoudre des problèmes selon une vue cohérente et intégrée. L'activité centrale des mathématiques demeure donc la résolution de problèmes. La modélisation de phénomènes donne au concept étudié une finalité dans un contexte réel à partir duquel les connaissances construites acquièrent une signification.

C.3 Retour critique sur le projet de recherche

Les différentes représentations mentales, procédures et réflexions décrites confirment l'avantage d'une perspective constructiviste pour la conceptualisation de la fonction quadratique. Les constructions réalisées au cours des expérimentations ont conduit Isabelle, Vincent et Hélène à s'approprier des connaissances signifiantes à partir desquelles ils ont pu orienter et organiser leur pensée ainsi que leurs actions pour éventuellement parvenir à des constructions plus évoluées. C'est à travers des coordinations entre les représentations mentales des trois élèves et leurs procédures, et non par des énoncés formels, que la généralisation des connaissances à un plan plus abstrait fut possible.

Nous considérons que le modèle descriptif de compréhension proposé par Herscovics et Bergeron (1982b) nous fut salutaire. En considérant quatre modes de compréhension, il a permis d'assurer des interventions progressives selon une perspective constructiviste de l'apprentissage. Ces modes se soutiennent mutuellement, favorisant ainsi la conceptualisation de la fonction quadratique. Il en est de même pour les choix méthodologiques qui ont servi le but de notre recherche. En effet, l'entrevue critique a engagé une évaluation plus interactive que l'évaluation formelle. Autrement, l'expérimentation didactique a permis d'explorer la pensée de trois élèves, d'en comprendre les fondements et de suivre leur évolution cognitive.

Étant donné les critères qui ne se sont pas manifestés au moment de l'évaluation finale, nous remarquons que ces critères sont apparus, à un moment ou à un autre, au cours des entrevues d'intervention avec Isabelle, Vincent et Hélène. Comme nous l'avions évoqué au chapitre des résultats, nous devons respecter les objectifs de l'entrevue critique et de l'expérimentation didactique. Il se peut ainsi que les situations proposées et les questions posées aux entrevues d'évaluation n'engagent pas la manifestation de certains critères. Par conséquent, nous ne pouvons en distinguer un en particulier puisque tous les critères de notre analyse conceptuelle ont été sollicités pendant notre recherche.

Comme toute méthode de recherche qualitative, nos choix méthodologiques ont rencontré quelques difficultés. L'une des difficultés est liée au fait que les attentes, les questions, les réactions ainsi que les interventions du chercheur, lui-même enseignant, peuvent influencer les pensées des trois élèves et leurs actions. Pour en réduire l'impact, nous avons vérifié la stabilité des réponses d'Isabelle, de Vincent et d'Hélène ainsi que l'interprétation des données au moyen de méticuleux verbatim. D'autre part, il se peut que les trois élèves retenus pour notre recherche aient été évalués en fonction de leur compréhension formelle en mathématiques. Toutefois, le personnel enseignant consulté leur dispensait toutes les matières scolaires. De plus, les commentaires du personnel enseignant devaient tenir compte des qualités recherchées pour le projet de recherche.

Quant aux situations d'apprentissage, nous estimons qu'elles ont favorisé la compréhension du concept de la fonction quadratique. En effet, pour résoudre un problème, Isabelle, Vincent et Hélène devaient décrire et analyser un phénomène. Chaque élève a donc exploré différents modes de compréhension à plusieurs reprises, réalisant ainsi l'évolution de sa pensée à travers les modes de compréhension. Cette évolution constitue une façon plus substantielle de modéliser un phénomène que d'avoir consacré une entrevue d'intervention à chaque mode. Pendant une heure, les trois élèves avaient l'occasion de décrire et d'analyser un phénomène, duquel une application de la fonction quadratique s'inscrivait, afin de développer une conceptualisation.

C.4 Implications pédagogiques

De la présente recherche, il découle que les premières représentations mentales, les procédures initiales et les réflexions relatives à la construction du concept de la fonction quadratique sont d'une importance capitale. Avoir recours à des investigations, afin qu'Isabelle, Vincent et Hélène puissent préciser leurs représentations mentales et se doter de procédures, conduit aux compositions d'opérations mathématiques. C'est à partir de ces compositions qu'une abstraction se forme. Les premières constructions peuvent être difficilement assimilées, mais la modification du contexte permet de percevoir comment elles peuvent s'accommoder à une nouvelle situation.

Ce constat contraste avec l'approche qui consiste à présenter, dès le départ, des solutions évoluées et toutes faites dont l'élève n'est point convaincu de la légitimité. Une connaissance n'est point statique. Elle évolue au cours d'une activité cognitive selon laquelle un processus de construction des connaissances, telle la modélisation de phénomènes, y apporte une signification. C'est dans ce sens que se situe la mission du curriculum en mathématiques, le rôle de l'enseignement et les tâches des manuels scolaires. Ceux-ci permettent aux enseignants et aux enseignantes d'organiser des situations d'apprentissage, favorisant ainsi l'élaboration d'un concept afin d'accroître la qualité des apprentissages chez l'élève plutôt que la quantité des notions dispensées.

La figure n° 20 tente de résumer l'activité d'Isabelle, de Vincent et d'Héléne au cours des expérimentations. Le carré désigne le problème à résoudre. Les demi-cercles constituent les activités liées aux investigations, à la coordination entre les représentations mentales et les procédures ainsi qu'à la composition d'opérations mathématiques. Alors que le tableau de valeurs, l'équation algébrique et le plan cartésien illustrent la construction et l'interprétation des systèmes symboliques.

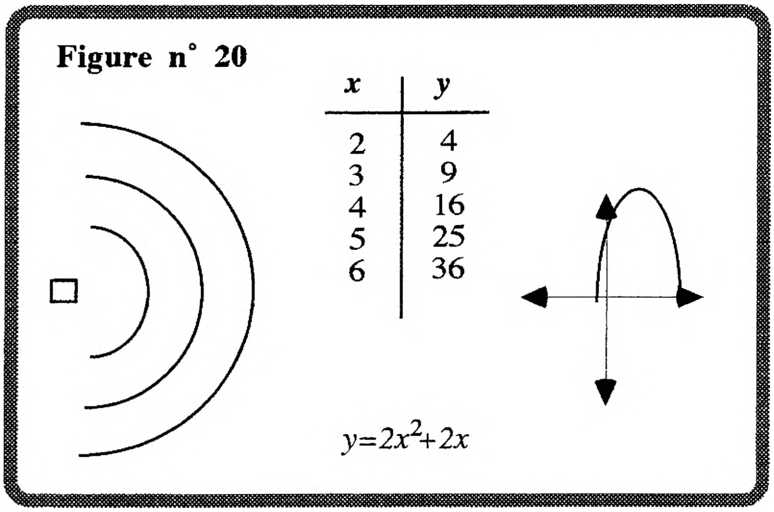


Figure n° 20

En enseignement conventionnel, le concept de la fonction quadratique est pourtant caractérisé par des connaissances générales, puis en dernier lieu, on convie l'élève à la résolution de problèmes. En effet, les connaissances générales sont communément des activités liées à l'esquisse de courbes représentatives, à l'identification de diverses caractéristiques et à la manipulation d'équations algébriques. D'ailleurs, les pratiques pédagogiques ont tendance à partir de ces équations pour amener l'élève à faire l'esquisse des courbes sur le plan cartésien. Par conséquent, ceci décrit une séquence d'enseignement qui est centrée sur l'aspect formel du concept de la fonction quadratique. En raison des nombreuses activités liées aux connaissances générales, les périodes pour la résolution de problèmes sont sujettes à être différées ou omises.

À ce moment, les activités liées aux investigations, à la coordination entre les représentations mentales et les procédures ainsi qu'à la composition d'opérations mathématiques sont inexistantes. Selon les résultats de notre recherche, ces activités donnent une signification aux connaissances construites. D'autres activités en enseignement conventionnel ont pour but d'illustrer les transformations mathématiques de la parabole sur le plan cartésien, en proposant diverses valeurs aux paramètres de la forme canonique, $y = a(x-p)^2+q$ (a, p et q sont des nombres réels). D'une part, nos résultats ont indiqué qu'Isabelle, Vincent et Hélène peuvent construire la représentation algébrique de la fonction quadratique, et d'autre part, que les modifications du libellé des situations d'apprentissage peuvent illustrer ces transformations. La modélisation de phénomènes semble ainsi opérer un renversement didactique puisque les trois élèves partent du problème pour aboutir à la construction et à l'interprétation des systèmes symboliques.

Étant donné que notre recherche traite de la description et de l'analyse de phénomènes, nous estimons que l'étude du concept de la fonction quadratique a des affinités avec l'étude des sciences de la nature. Il serait donc intéressant d'entrevoir une conception interdisciplinaire des curriculums de mathématiques et de sciences à l'égard du concept de la fonction, ou tout au moins, de la fonction quadratique. Les mathématiques seraient ainsi un outil pour l'étude des sciences puisque son but est de prévoir le développement de phénomènes. Quant à elles, les sciences induiraient une signification aux mathématiques. Tout compte fait, si un idéal existait, ce serait pour nous de résister à la tentation d'aborder les mathématiques par leur forme, telles les connaissances générales. Nous entrevoyons à présent cette science sous un angle pratique, comme une solution à un problème, puisque nous nous sommes intéressés aux activités qui y sont associées. Cet idéal est motivé par les propos[14] de Brousseau. «Le didacticien [Brousseau] veut faire apparaître les maths comme un instrument pour prendre des décisions et il lutte contre la perte de sens de cette science.»

Enfin, notre position à l'égard de la technologie applicable à l'enseignement du concept de la fonction conserve les mêmes réserves techniques et fondamentales. Bien que ce ne soit

[14] Ces propos sont extraits du journal «Le Devoir» du 2 septembre 1997, à la page B1.

pas le but de notre recherche, nous croyons que l'usage d'un environnement manipulateur de systèmes symboliques nécessite d'abord une compréhension du concept de la fonction quadratique. Isabelle, Vincent et Hélène nous ont convaincu que la construction et l'interprétation des systèmes symboliques ne doivent pas être reléguées au second plan de leurs tâches. Par conséquent, il serait possible d'entrevoir à l'égard de cette technologie un médium pour la simulation de phénomènes. En effet, il existe déjà en sciences des dispositifs annexés à l'ordinateur qui mesurent en temps réel une investigation. Ceci offrirait peut-être une alternative intéressante aux investigations dynamiques. À ce sujet, nous avons conclu à un passage laborieux vers l'abstraction et la formalisation à cause des nombres rationnels.

C.5 Vers de nouvelles questions de recherche

Notre recherche a été l'occasion de suivre l'évolution cognitive de trois élèves quant à la conceptualisation de la fonction quadratique. Selon des entrevues sur une base individuelle, nous avons observé cette évolution, analysé et interprété des données en fonction des questions que nous avons posées selon la perspective à laquelle nous souscrivons.

Par souci de généralisation, il serait intéressant d'entreprendre de nouveaux projets de recherche avec des échantillons plus larges. Ces projets permettraient de vérifier le caractère universel des résultats obtenus. Par souci d'applicabilité, on pourrait tenter d'expérimenter dans un contexte de salle de classe. À notre avis, les échanges entre les élèves seraient substantiels et favorables au développement de représentations mentales.

Par conséquent, d'autres préoccupations nous incitent à s'interroger sur la profondeur de certains critères de notre analyse conceptuelle de la fonction quadratique. Ces critères peuvent comporter une connotation large, tels que les critères ayant trait aux états successifs d'une situation quadratique. À ce moment, de nouveaux projets de recherche permettraient l'approfondissement de certains critères et de la réponse apportée à notre question de recherche. D'autre part, ces préoccupations précèdent celles liées à la généralisation et à l'applicabilité du présent projet de recherche.

Pour avoir accès à différents processus d'apprentissage, nous avons travaillé avec trois élèves ayant divers rendements scolaires. Nos résultats ont confirmé une prédominance du modèle linéaire chez l'élève ayant un rendement satisfaisant. Cette difficulté l'incite à associer au concept la fonction quadratique une droite ou des processus de calcul applicables au concept de la fonction linéaire. Il serait intéressant d'investiger si la prédominance du modèle linéaire persiste chez cet élève lorsque le concept de diverses fonctions lui a été dispensé.

Un autre projet de recherche pourrait traiter de l'identification de procédures. C'était l'aspect particulièrement laborieux de notre recherche à cause de la multiplicité des éléments dans une structure. Bien que nous appréhendions que les procédures soient nombreuses, elles semblent influencer par l'investigation pratiquée ou encore par la forme de la structure au sein de l'investigation statique. Est-ce qu'il y aurait des procédures coordonnées dans une structure de forme triangulaire? Nos résultats n'en ont point identifiées.

Sur le plan méthodologique, nous avons convenu de la conduite des expérimentations avec quatre situations d'apprentissage. Chaque situation proposait un phénomène différent. La situation d'apprentissage «L'enclos» fut fructueuse, particulièrement au moment des modifications du libellé. Il serait intéressant d'examiner comment une situation d'apprentissage où interviennent des modifications du libellé peut favoriser la compréhension du concept de la fonction quadratique. On pourrait alors proposer la même situation d'apprentissage sur quatre entrevues d'intervention où on ne ferait que de modifier le libellé de la situation.

En outre, un bref historique indiquait que la parabole pouvait être perçue à titre de caractéristique de certains phénomènes. Nous avons ainsi convenu de l'étude de la fonction quadratique par la modélisation de phénomènes. Il serait intéressant d'examiner comment des situations d'apprentissage où intervient la modélisation de phénomènes peuvent favoriser la compréhension du concept de diverses fonctions. Selon la compréhension définie théoriquement avec le modèle descriptif, les critères élaborés nous sembleraient applicables au concept de la fonction linéaire, car plusieurs phénomènes sont régis par le modèle linéaire.

Enfin, mentionnons une dernière problématique qui mérite une attention particulière. Nous avons émis l'hypothèse que la modélisation de phénomènes favorise la compréhension du concept de la fonction quadratique. Nous avons dégagé des représentations mentales, des procédures et des réflexions développées chez trois élèves du secondaire. Nous sommes maintenant curieux de connaître celles des enseignants et des enseignantes ayant dispensé un enseignement conventionnel du concept ainsi que celles de leurs élèves.

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES
POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT
DE LA FONCTION QUADRATIQUE

BIBLIOGRAPHIE
ET
RÉFÉRENCES

Cadre contextuel

CMEC. (1993) Programme d'indicateurs du rendement scolaire/PIRS (Rapport sur l'évaluation en mathématique), 88 pages.

CMEC. (1997) Programme d'indicateurs du rendement scolaire/PIRS (Rapport sur l'évaluation en mathématique), 120 pages.

Dottori, D. (1989a) Fondements mathématiques 11, 2ième édition, McGraw-Hill Ryerson Limited (eds.), 474 pages.

Dottori, D. (1989b) Fondements mathématiques 12, 2ième édition, McGraw-Hill Ryerson Limited (eds.), 527 pages.

MENB. (1992a) Mathématiques3031 (Programme d'études), 92 pages.

MENB. (1992b) Mathématiques3041 (Programme d'études), 96 pages.

MENB. (1992c) Mathématiques3031 (Description des examens de 1993), Octobre, 8 pages.

MENB. (1997a) Examens de fin d'études secondaires/EFES (Rapport statistique provincial), Janvier (1er semestre), 128 pages.

MENB. (1997b) Examens de fin d'études secondaires/EFES (Rapport statistique provincial), Juin (2e semestre), 138 pages.

MENB. (1997c) Résultats des examens et tests provinciaux (Districts scolaires francophones), Décembre, 82 pages.

MENB. (1998a) Examens de fin d'études secondaires/EFES (Rapport statistique provincial), Janvier (1er semestre), 132 pages.

MENB. (1998b) Examens de fin d'études secondaires/EFES (Rapport statistique provincial), Juin (2e semestre), 138 pages.

MENB. (1999) Examens de fin d'études secondaires/EFES (Rapport statistique provincial), Janvier (1er semestre), 132 pages.

NCTM. (1995) «Curriculum and evaluation standards for school mathematics» in M. K. Heid and al. (eds.) Algebra in a technological world, Addenda series, Grades 9-12.

Cadre théorique

Bergeron, J. C. et N. Herscovics. (1989) «Un modèle de la compréhension pour décrire la construction de shèmes conceptuels mathématiques» in A. Warbecq (Ed.). Actes de la 41e Conférence de la CIEAEM, Bruxelles, pages 139-147.

Confrey, J. (1994) «Voix et perspective : à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes» dans la Revue des Sciences de l'Éducation, vol. 20, n° 1, pages 115-133.

DeBlois, L. (1995) «Le développement de l'écriture des nombres chez Christine», dans Revue des sciences de l'éducation, XXI (2), pages 331-351.

DeBlois, L. (1997a) «Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles», dans Educational Studies in Mathematics, vol. 34, pages 67-96.

DeBlois, L. (1997b) «Quand additionner ou soustraire implique comparer», dans Éducation et Francophonie, XXV (1), pages 102-120.

DeBlois, L. (2000) «Modèle d'interprétation des activités cognitives des élèves qui éprouvent des difficultés d'apprentissage en mathématiques», présenté au colloque Constructivisme et éducation, Genève (Suisse), Septembre.

Goldin, G. A. et et N. Herscovics. (1991) «Toward a conceptual representational analysis of the exponential function» in Proceedings of the fourteenth annual conference of the international group for the psychology of mathematics education (with PME-NA), vol. 2, Assisi (Italy), June, pages 64-71.

Gray, E. M. et Tall, D. O. (1994) «Duality, ambiguity and flexibility : A proceptual view of simple arithmetic», dans Journal for Research in Mathematics Education, 25 (2), pages 116-140.

Herscovics, N. et J. C. Bergeron. (1982a) «Pourquoi et comment décrire la compréhension de la mathématique» dans le Bulletin AMQ, vol. 22, n° 1, Mars, pages 9-17.

Piaget, Jean. (1967) Biologie et connaissance, Paris : Gallimard, France.

Piaget, Jean. (1968) Épistémologie et psychologie de la fonction, 1ère édition, Presses Universitaires de France.

Piaget, Jean. (1974) La prise de conscience, Presses Universitaires de France.

Piaget, Jean. (1977) Recherches sur l'abstraction réfléchissante 1. L'abstraction de l'ordre des relations logico-mathématiques, Presses universitaires de France, Paris.

Piaget, Jean. (1978) Recherches sur la généralisation, 1re édition, Presses Universitaires de France.

Piaget, Jean. (1988) L'épistémologie génétique, 4ième édition, Presses Universitaires de France.

Cadre d'investigation

Barbin, E. et G. Itard. (1992) «Le courbe et le droit» dans Histoires de problèmes/Histoire des mathématiques, Commission Inter-IREM, Épistémologie et Histoire des Mathématiques, ICME-Québec, pages 103-125.

Borba, M. C. (1994) «A model for students'understanding in a multi-representational environment», Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education, vol. 2, Lisbon (Portugal), July-August, pages 104-111.

Borba, M. C. et J. Confrey. (1996) «A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment», in Educational Studies in Mathematics, vol. 31, pages 319-337.

Boukhssimi, D. (1990) Analyse épistémologique des influences d'un logiciel et des interventions du maître sur la compréhension de la droite et de son équation. Thèse de Doctorat. Université Laval, Québec, Canada.

Brousseau, Guy. (1986) «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», dans la revue Recherches en didactique des mathématiques, 7(2), pages 33-115.

Burrill, G. (1995) «Algebra reform, research and the classroom : a reaction to a research base supporting long-term algebra reform», in D. T. Owens and al. (eds), Proceedings of the seventeenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1 ou 2, Columbus, Ohio, October, pages 95-100.

Confrey, J. et E. Smith. (1992) «Revised accounts of the function concept using multi-representational software, contextual problems and student paths», Proceedings of the sixteenth annual conference of the international group for the psychology of mathematicseducation, vol. 1, Durham, NH (USA), August, pages 153-160.

Dennis, D. et J. Confrey. (1995) «Functions of a curve : Leibniz's original notion of functions and its meaning for the parabola», in The College Mathematics Journal, vol. 26, n° 3, May, pages 124-131.

Dunham, H. et T. P. Dick (1994) «Research on graphing calculators», in Mathematics Teacher, vol. 87, n° 6, September, pages 440-445.

Even, R. (1988) «Pre-service teachers conceptions of the relationships between functions and equations», Proceedings of the twelfth annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1, Hungary, July, pages 304-311.

Goldenberg, E. P. (1987) «Believing is seeing : how preconceptions influence the perception of graphs», in J. C. Bergeron, N. Herscovics and C. Kieran (eds.), Proceedings of the eleventh international conference of the psychology of mathematics education, vol. 1, Montreal, July, pages 197-203.

Goldenberg, E. P. (1988) «Mathematics, metaphors and humain factors : mathematical, technical and pedagogical challenges in the graphical representations of functions» in Journal of Mathematical Behavior, vol. 7, n° 2, pages 135-174.

Hagen, S. et H.W. Mick. (1995) «A new strategy for equations and graphs», in D. T. Owens and al. (eds), Proceedings of the seventeenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1 ou 2, Columbus, Ohio, October, pages 300.

Herscovics, N. et J. C. Bergeron. (1982b) «Des modèles de la compréhension» dans la Revue des Sciences de l'Éducation, vol. 8, n° 3, pages 576-596.

Janvier, C. (1987a) (ed.) Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates, pages 27-32/67-71/147-158.

Janvier, B. (1987b) «Roles of representation» in C. Janvier (ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates, pages 99-108.

Janvier, C. (1989) «Representation and contextualization», Actes de la treizième conférence internationale de PME, vol. III, Paris (France), Juillet, pages 139-146.

Janvier, C. (1993) «Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques» dans Les Sciences de l'éducation, vol. 1, n° 3, pages 17-37.

Janvier, C., Charbonneau, L. et S. R. de Cotret (1989) «Obstacles épistémologiques à la notion de variable : perspectives historiques» dans Construction des savoirs : Obstacles et conflits, sous la direction de Bednarz, N. et C. Garnier, pages 64-75.

Kaput, J. J. (1987) «Representation systems and mathematics» in C. Janvier (ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates, pages 19-26/159-195.

Kaput, J. J. (1992) «Patterns in students'formalization of quantitative patterns» in G. Harel and E. Dubinsky (eds.), The concept of function, Mathematical Association of America, MAA Notes, vol. 25, pages 290-317.

Kaput, J. J. (1995) «A research base supporting long-term algebra reform?», in D. T. Owens and al. (eds), Proceedings of the seventeenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1 ou 2, Columbus, Ohio, October, pages 71-94.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. et M. K. Stein. (1990) «Functions, graphs and graphing : tasks, learning and teaching» in Review of Educational Research, [Washington] : American Educational Research Association, vol. 60, n° 1, Spring, pages 1-64.

Markovits, Z., Eylon, B.-S. et M. Bruckheimer. (1986) «Functions today and yesterday» in For the Learning of Mathematics, vol. 6, n° 2, June, pages 23-24/28.

Matos, J. F. et S. Carreira. (1996) «The quest for meaning in students'mathematical modelling activity», Proceedings of the 20th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 3, Valencia (Spain), July, pages 345-352.

Mick, H.W., et B. F. Bazak (1995) «A strategy for writing equations of graphs» in School Science and Mathematics, vol. 95, n° 5, May, pages 264-269.

Miloudi, B. (1995) Premières constructions des concepts de fonctions logarithmique et exponentielle chez des élèves âgés de 16-17 ans. Thèse de Doctorat. Université de Montréal, Montréal, Canada.

Phillips, E. (1995) «A response to a research base supporting long-term algebra reform», in D. T. Owens and al. (eds), Proceedings of the seventeenth annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1 ou 2, Columbus, Ohio, October, pages 101-108.

Ruthven, K. (1990) «The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms», in Educational Studies in Mathematics, vol. 21, n° 5, pages 431-450.

Scher, D. (1996) «Folded paper, dynamic geometry, and proof : a three-tier approach to the conics», in MathematicsTeacher, vol. 89, n° 3, March, pages 188-193.

Schwartz, J. L. et M. Yerushalmy. (1992) «Getting students to function in and with algebra» in G. Harel and E. Dubinsky (eds.), The concept of function, Mathematical Association of America, MAA Notes, vol. 25, pages 261-289.

Schwarz, B. et T. Dreyfus. (1995) «New actions upon old objects : a new ontological perspective on functions», in Educational Studies in Mathematics, vol. 29, n° 2, September, pages 259-291.

Tall, D. (1996) «Functions and calculus» in A. J. Bishop and al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, pages 289-325.

Vinner, S. et T. Dreyfus. (1989) «Images and definitions for the concept of function» in Journal for Research in Mathematics Education, vol. 20, n° 4, July, pages 356-366.

Yerushalmy, M. (1997) «Emergence of new schemes for solving algebra word problems : the impact of technology and the function approach», Proceedings of the 21th annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 1, Lahti (Finland), July, pages 165-178.

Méthode

Ginsburg, H. et S. Opper. (1979) Piaget's theory of intellectuel developpment, second édition, New Jersey : Prentice Hall.

Ginsburg, H. (1981) The clinical interview in psychological research on mathematical thinking : Aims, rationals, techniques. For the learning of mathematics, 1, pages 4-11.

Kieran, C. (1985) «The soviet teaching experiment» in Research methods for studies in mathematics education : Some considerations and alternatives, Edited by T. A. Romberg Madison, WI : Wisconsin Education Research Center.

Steffe, L. P. (1983) «The teaching experiment methodology in a constructivist research program» in ICME : Prodeeding of the fourth international congress on mathematical education, Boston, MA : Birkhäuser, pages 469-471.

MODÉLISATION DE PHÉNOMÈNES POUR UNE COMPRÉHENSION DU CONCEPT DE LA FONCTION QUADRATIQUE

ANNEXES

Analyse conceptuelle de la fonction quadratique

selon le modèle descriptif de compréhension
proposé par Herscovics et Bergeron (1982b)

Le mode de compréhension intuitive

Critère **I1** : L'élève discrimine une situation quadratique.

Critère **I2** : L'élève reconnaît les états successifs dans le développement d'une situation quadratique.

Le mode de compréhension procédurale

Critère **P1** : L'élève ordonne les états successifs d'une situation quadratique par des repères ou par visée spontanée.

Critère **P2** : L'élève identifie les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique.

Le mode de compréhension abstraite

Critère **A1** : L'élève reconnaît une relation fonctionnelle entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique.

Critère **A2** : L'élève reconnaît une régularité entre les grandeurs pertinentes d'une situation quadratique.

Critère **A3** : L'élève identifie un résultat constant par les différences de différences, entre les valeurs de la grandeur dépendante d'une situation quadratique.

Le mode de compréhension formelle

Critère **F1** : L'élève utilise des variables ou introduit un point variable sur le plan cartésien.

Critère **F2** : L'élève caractérise une situation quadratique par une équation algébrique de base, $y = ax^2$, ou une autre forme de la représentation algébrique.

Critère **F3** : L'élève établit une correspondance entre les états successifs d'une situation quadratique : tout état appartient aux systèmes symboliques.

Situations quadratiques pour les entrevues d'évaluation initiale

Situation A

Pour sa première année de travail, un employé gagne un salaire de 30 000 \$. Il prévoit avoir une augmentation de 3 000 \$ pour chacune des années suivantes.

Situation B

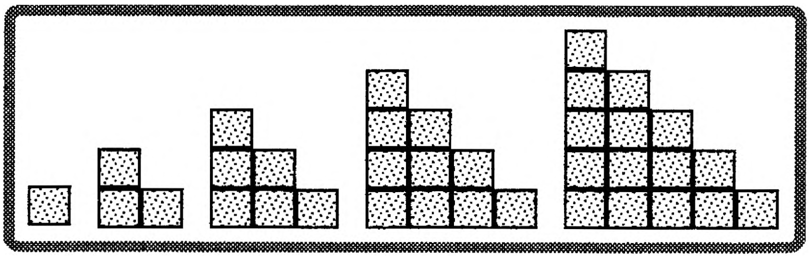
Une étude sur les cultures de bactéries indique que leur nombre varie selon la température du milieu. À 25 °C, il existe le plus grand nombre de bactéries dans un milieu donné.

Situation C

La consommation d'essence d'une automobile est en fonction de la vitesse moyenne avec laquelle elle est conduite. Pour beaucoup d'automobiles, la plus faible consommation est atteinte à 90 km/h.

Situation D

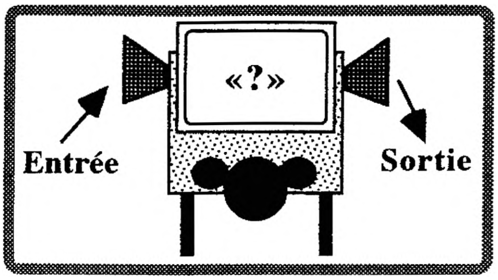
Éric construit différents arrangements de cubes. La figure ci-dessous illustre certains de ces arrangements.



Situation E

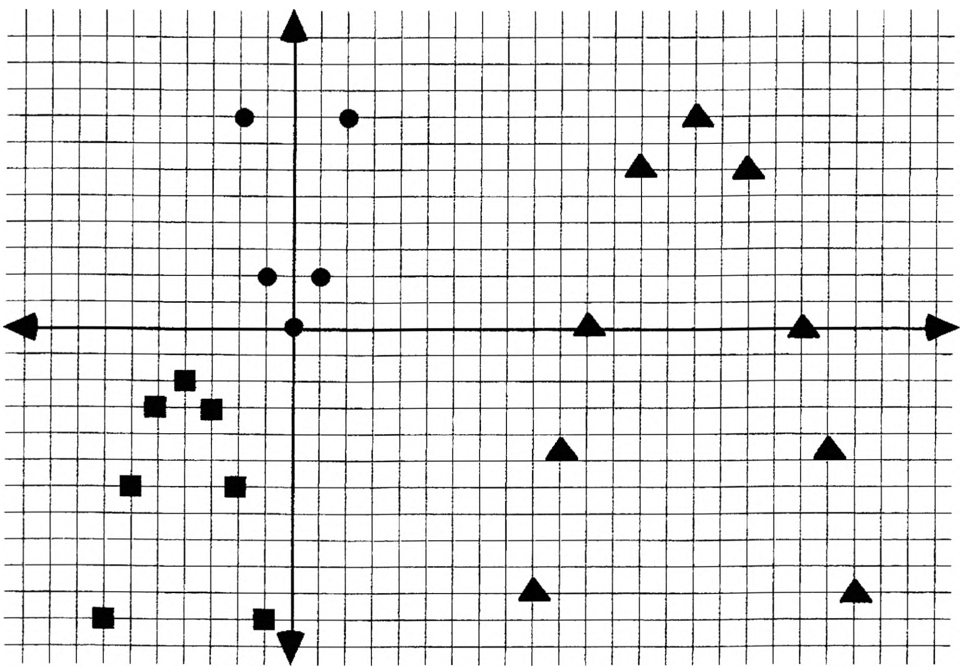
Certains processus peuvent être décrits par une machine. La figure ci-dessous illustre cette machine avec des valeurs données à «l'entrée» et des valeurs obtenues à «la sortie».

L'entrée	La sortie
1	2
2	5
3	10
4	17



Situation F

Le plan cartésien ci-dessous contient les données recueillies de trois études. Chaque étude est identifiée soit par des carrés, des cercles ou des triangles.



Situations quadratiques pour les entrevues d'évaluation finale

Situation A

Pour sa première année de travail, un employé gagne un salaire de 30 000 $. Il prévoit avoir une augmentation de 3 000 $ pour chacune des années suivantes.

Situation B

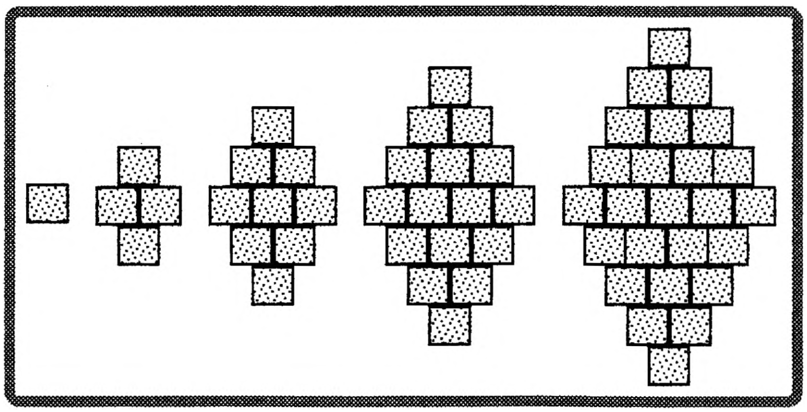
Une étude sur les cultures de bactéries indique que leur nombre varie selon la température du milieu. À 25 °C, il existe le plus grand nombre de bactéries dans un milieu donné.

Situation C

La consommation d'essence d'une automobile est en fonction de la vitesse moyenne avec laquelle elle est conduite. Pour beaucoup d'automobiles, la plus faible consommation est atteinte à 90 km/h.

Situation D

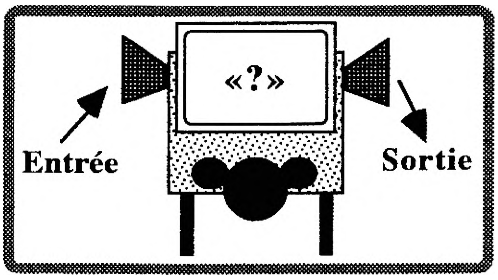
Éric construit différents arrangements de cubes. La figure ci-dessous illustre certains de ces arrangements.



Situation E

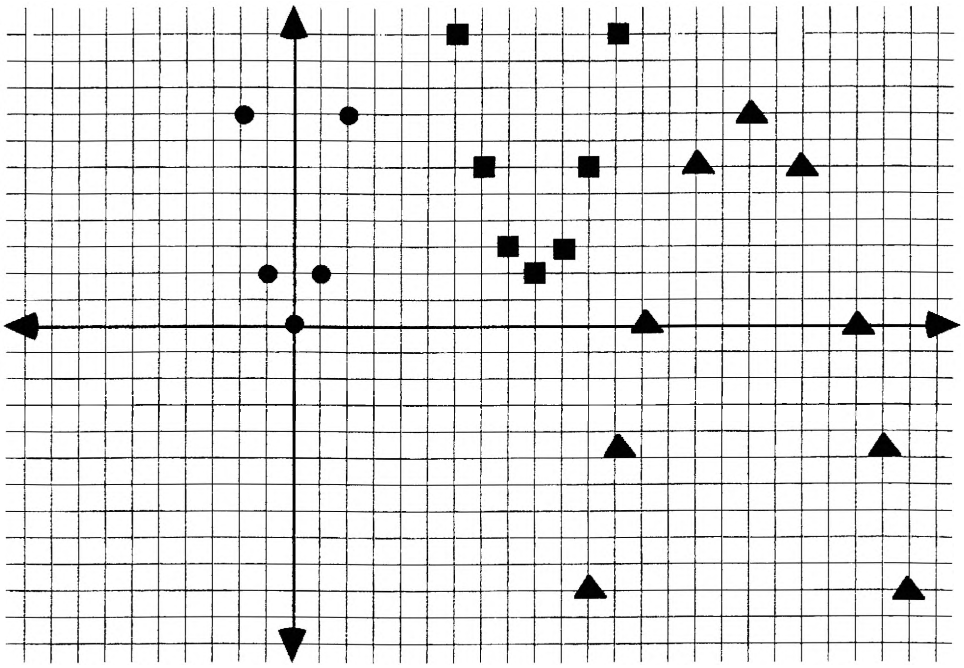
Certains processus peuvent être décrits par une machine. La figure ci-dessous illustre cette machine avec des valeurs données à «l'entrée» et des valeurs obtenues à «la sortie».

L'entrée	La sortie
1	2
2	8
3	18
4	32



Situation F

Le plan cartésien ci-dessous contient les données recueillies de trois études. Chaque étude est identifiée soit par des carrés, des cercles ou des triangles.



Protocole pour les entrevues d'évaluation finale

Situation(s) : A, B et C [compréhension intuitive]

[Lecture des situations A et B.]

Questions/Réponses attendues (critère **I1**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation A.
   - ( ) Un employé gagne 3 000 $ de plus à chaque année.
   - (√) Un employé gagne 30 000 $ la première année, 33 000 $ pour la deuxième année, 36 000 $ pour la troisième année, etc.
   - ( ) Un employé gagne 30 000 $ de plus à chaque année.
   - ( ) Un employé gagne 3 000 $ (ou 30 000 $) à chaque année.
   - ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Dans tes propres mots, décris la situation B.
   - ( ) C'est que le nombre de bactéries est le même qu'à 25 °C (ou à une température maximale).
   - ( ) Le nombre de bactéries augmente (toujours) si la température augmente (ou varie).
   - (√) Le nombre de bactéries augmente jusqu'à 25 °C, puis il diminue après cette température (ou ça fait une montagne, un «pic»).
   - ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. Si tu compares les situations A et B, que remarques-tu?
   - ( ) Les deux situations sont pareilles; ça augmente dans les deux cas.
   - ( ) Elles sont différentes. La situation A, ça augmente. La situation B, ça diminue.
   - (√) Dans la situation A, ça augmente toujours. Tandis que dans la situation B, ça augmente jusqu'à une certaine température (ou à 25 °C), puis ça diminue après.
   - ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

[Lecture de la situation C.]

Questions/Réponses attendues (critère **I2**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation C.
   - ( ) La consommation augmente (ou diminue) jusqu'à 90 km/h (ou à une vitesse minimale).
   - ( ) La consommation augmente (ou diminue) jusqu'à 90 km/h, puis il y a un plateau.
   - (√) La consommation de l'automobile diminue jusqu'à une vitesse (moyenne) de 90 km/h, puis sa consommation augmente (ou ça fait un vase).
   - ( ) La consommation de l'automobile augmente jusqu'à une vitesse (moyenne) de 90 km/h, puis sa consommation diminue (ou ça fait une montagne, un «pic»).
   - ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Si tu compares les situations B et C, que remarques-tu?
   - ( ) Les deux situations sont pareilles; ça augmente (ou diminue) dans les deux cas.
   - ( ) Elles sont différentes: l'une diminue tandis que l'autre augmente (ou l'une augmente tandis que l'autre diminue).
   - ( ) Elles sont différentes; il y a un plateau dans la situation C.
   - (√) Elles sont semblables. Dans la première partie, la situation B augmente tandis que la situation C diminue. Dans la deuxième partie, la situation B diminue tandis que la situation C augmente.
   - ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Situation(s) : B et C [compréhension procédurale]

Questions/Réponses attendues (critère **P 1**) :

1. Dans la situation B, comment ferais-tu pour montrer le nombre de bactéries dans une culture à l'aide de jetons?
   ( ) [L'élève ne fait aucune tentative.]
   (√) [L'élève rassemble un certain nombre de jetons selon la variation pour illustrer chaque état de la situation (par des repères).]
   ( ) [L'élève illustre chaque état de la situation par un jeton. Chaque jeton est disposé par rapport aux autres de façon à illustrer la variation du nombre de bactéries.]
   ( ) Réponses semblables aux deux précédentes pour seulement une partie de la variation.
   (√) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction quadratique (ou un grand «V» inversé). (par visée spontanée)]
   ( ) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction linéaire.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. Selon la situation B, quel est le nombre de bactéries à 20 °C? Comment fais-tu pour le savoir?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Ce nombre est le même qu'à 25 °C.
   ( ) Ce nombre est plus élevé qu'à 25 °C.
   (√) Ce nombre est moins élevé qu'à 25 °C.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

3. Dans la situation C, comment ferais-tu pour montrer la consommation d'essence d'une automobile à l'aide de jetons?
   ( ) [L'élève ne fait aucune tentative.]
   (√) [L'élève rassemble un certain nombre de jetons selon la variation pour illustrer chaque état de la situation (par des repères).]
   ( ) [L'élève illustre chaque état de la situation par un jeton. Chaque jeton est disposé par rapport aux autres de façon à illustrer la variation de la consommation d'essence.]
   ( ) Réponses semblables aux deux précédentes pour seulement une partie de la variation.
   (√) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction quadratique (ou un grand «V»). (par visée spontanée)]
   ( ) [L'élève dessine une schématisation de la courbe représentative de la fonction linéaire.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Questions/Réponses attendues (critère **P 2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation B (ou de chaque état de la situation B)?
   ( ) Il y a la culture et le milieu.
   ( ) Les éléments sont le nombre de bactéries et le milieu.
   (√) Les éléments (ou grandeurs) sont le nombre (de bactéries) et la température (du milieu).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation C?
   ( ) Il y a (le prix de) l'essence et la vitesse (moyenne).
   (√) Les éléments (ou grandeurs) sont la consommation d'essence et la vitesse (moyenne).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Situation(s) : B, C, D et E [compréhension abstraite]

Questions/Réponses attendues (critère **A1**) :

1. Dans la situation B, pourquoi le nombre de bactéries varie comme tu l'as démontré (ou autour de la température de 25 °C)?
   ( ) Ce nombre demeure le même puisqu'il y a un plateau.
   (√) Ce nombre diminue puisque l'on retrouve le plus grand nombre de bactéries à 25 °C (ou puisque les bactéries vont mourir).
   ( ) Avant cette température, il y a moins de bactéries. Tandis qu'il y en aura beaucoup plus après. Ça augmente (constamment).
   (√) De 0 à 25 °C, le nombre augmente. De 25 à 50 °C, le nombre diminue.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Si tu compares les situations B et C, qu'ont-elles de commun, de semblable ou de différent? Pourquoi?
   ( ) Je ne le sais pas.
   ( ) Elles décrivent un phénomène (ou quelque chose de) linéaire.
   (√) Dans une situation, il y a un «pic» vers le haut. Dans l'autre, le «pic» est vers le bas.
   ( ) Elles ont en commun un point où tu optimises.
   (√) Elles ont un point où il se passe quelque chose (ou un point où tu maximises ou minimises).
   ( ) Elles se comportent de la même façon autour du point (ou du sommet).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

[Lecture des situations D et E.]

Questions/Réponses attendues (critère **A2**) :

1. Dans la situation D, y a-t-il une façon de connaître le nombre de cubes dans l'arrangement? Comment décrirais-tu cette façon (ou cette relation)? Pourquoi?
   ( ) Non (ou je ne le sais pas).
   ( ) Eric fait des losanges. Il y a un cube de moins.
   ( ) Oui, une relation qui va me donner le nombre de cubes nécessaires.
   ( ) Il doit y avoir une constante puisqu'il fait des arrangements en forme de losanges.
   ( ) Oui, les losanges correspondent tous à un carré.
   (√) Oui, il faut élever le nombre de cubes de la rangée du centre au carré.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Dans la situation E, y a-t-il une façon de connaître les valeurs obtenues à partir des valeurs données à la machine? Comment décrirais-tu cette façon? Pourquoi?
   ( ) Non (ou je ne le sais pas).
   ( ) Oui, mais ce n'est pas facile à trouver.
   ( ) Oui, il faut essayer d'établir quelque chose de pareil pour les valeurs données et obtenues.
   ( ) Oui, il faut tenir compte d'une constante et de la multiplication. Parce que les valeurs obtenues augmentent rapidement.
   (√) Oui, il faut élever la valeur donnée à la puissance 2 (ou multiplier par elle-même la valeur donnée) et multiplier le tout par 2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. Dans la situation E, quelle sera la valeur obtenue à «la sortie» de la machine? Pourquoi?
   ( ) Je ne le sais pas. (√) 50.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **A3**) :

1. Dans la situation E, y a-t-il un moyen de t'assurer que les valeurs obtenues sont bien données par un programme? Comment le décris-tu? Pourquoi?
   ( ) Non (ou je ne le sais pas).
   ( ) Non, les différences des valeurs ne donnent pas une constante.
   ( ) Oui, il ne doit pas les donner «n'importe comment» (ou aléatoirement).
   ( ) Oui, il doit y avoir une constante. Il faut savoir ce qui se passe dans le programme.
   (√) Oui, les différences des valeurs donnent des résultats. Les différences des résultats donnent une constante. Alors, il y a un programme.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____

- -

Situation(s) : B, C et F [compréhension formelle]

[**Lecture de la situation F.**]

Questions/Réponses attendues (critère **F1**) :

1. Dans la situation F, comment nommes-tu ce point [le point (6,11) des carrés]? De quoi est-il composé?
   ( ) Le point (6,11). Il est composé des valeurs des coordonnées des axes.
   (√) Le point (6,11). Il est composé des valeurs des coordonnées de x et y.
   ( ) Réponses semblables aux deux précédentes avec interversion des coordonnées.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____

2. Quelles sont les coordonnées d'un point situé entre ces deux triangles [les points (19,6) et (21,0)]? Représente ce point.
   ( ) Les coordonnées sont 20 (ou autres valeurs entre 19 et 21) et y. [L'élève représente le point selon une ligne droite imaginaire.]
   (√) Les coordonnées sont 20 (ou autres valeurs entre 19 et 21) et y. [L'élève représente le point selon une courbure parabolique imaginaire.]
   ( ) Les coordonnées sont x et 3 (ou autres valeurs entre 0 et 6). [L'élève représente le point selon une ligne droite imaginaire.]
   (√) Les coordonnées sont x et 3 (ou autres valeurs entre 0 et 6). [L'élève représente le point selon une courbure parabolique imaginaire.]
   ( ) Réponses semblables aux précédentes avec interversion des coordonnées.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____

Questions/Réponses attendues (critère **F2**) :

1. Quelle est l'équation (ou la phrase mathématique) qui caractérise les points de l'étude identifiée par des carrés? L'étude identifiée par des cercles? L'étude identifiée par des triangles?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=(x-9)^2+2$, pour les carrées. Pour les cercles, $y=2x^2$. Pour les triangles, $y=-1/2(x-17)^2+8$. (Réponses semblables selon autres formes.)
   ( ) Réponses semblables à la précédente en tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour les translations horizontale et/ou verticale.
   ( ) Réponses semblables avec le mauvais paramètre a.
   ( ) Réponses semblables sans la puissance au carré.
   ( ) Réponses où le modèle linéaire apparaît.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____

2. Représente les équations suivantes: $y = -1/2x^2$, $y = (x-7)^2+4$.
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) L'élève trace correctement et spontanément les deux paraboles.
   (√) L'élève trace correctement, à partir de la représentation numérique, les deux paraboles.
   ( ) Réponses semblables aux précédentes sans tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour la translation horizontale et/ou verticale.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture des paraboles.
   ( ) Réponses où le modèle linéaire apparaît.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

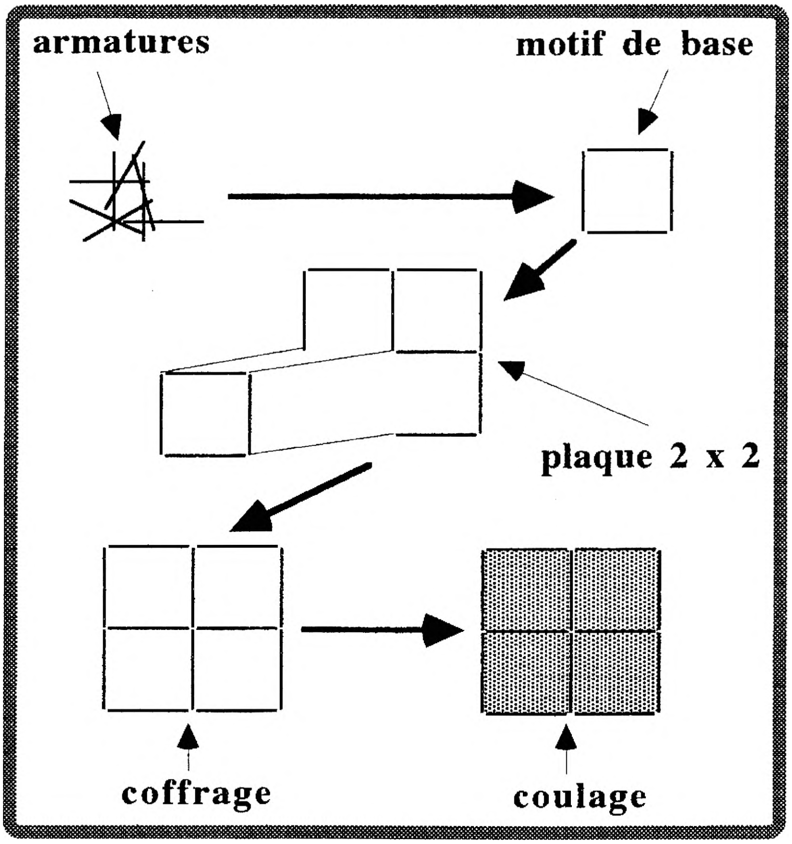
Questions/Réponses attendues (critère **F3**) :

1. Joins les points de l'étude identifiée par des carrés. Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas comment faire.
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. Laquelle des études de la situation F peut caractériser la situation B? La situation C? Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas. Idem pour la situation C.
   ( ) L'étude des cercles parce qu'elle dénote une progression des bactéries. Idem pour la situation C.
   ( ) L'étude des carrés parce qu'elle dénote une progression et une régression des bactéries. Idem pour la situation C.
   (√) L'étude des triangles parce qu'elle dénote une progression et une régression des bactéries (selon des températures positives ou parce qu'il y a un point maximum). Idem pour la situation C.
   ( ) Réponses semblables à la précédente en faisant une translation horizontale. Idem pour la situation C.
   ( ) Réponses semblables aux précédentes sans tenant compte des intervalles sur les axes. Idem pour la situation C.
   ( ) Réponses où le modèle linéaire apparaît. Idem pour la situation C.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Les plaques de béton

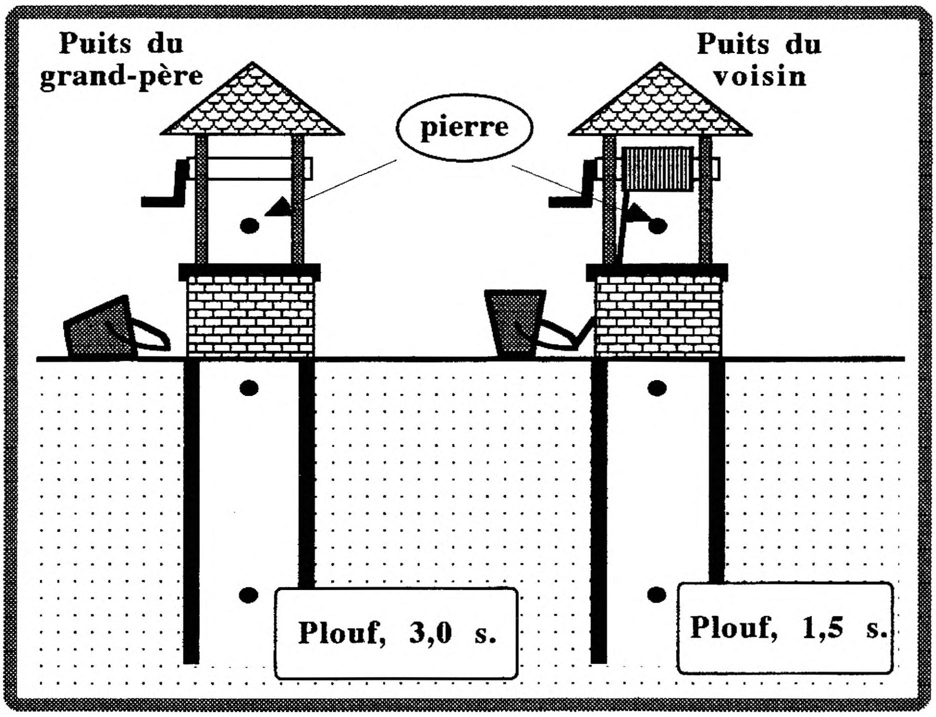
Dans un parc, un ouvrier doit couler du béton dans des plaques de dimensions carrées. Quelles que soient ces dimensions, les plaques sont toujours constituées du même motif de base. Afin de faciliter le coulage des plaques, il utilise de simples armatures. La figure ci-dessous illustre le motif de base, le coffrage d'une plaque 2X2 et le coulage du béton.



Afin d'accélérer les travaux de coffrage, l'ouvrier aimerait bien savoir le nombre d'armatures nécessaires pour une plaque carrée de dimensions quelconques. Qu'est-ce qui pourrait faciliter ses travaux?

Les puits

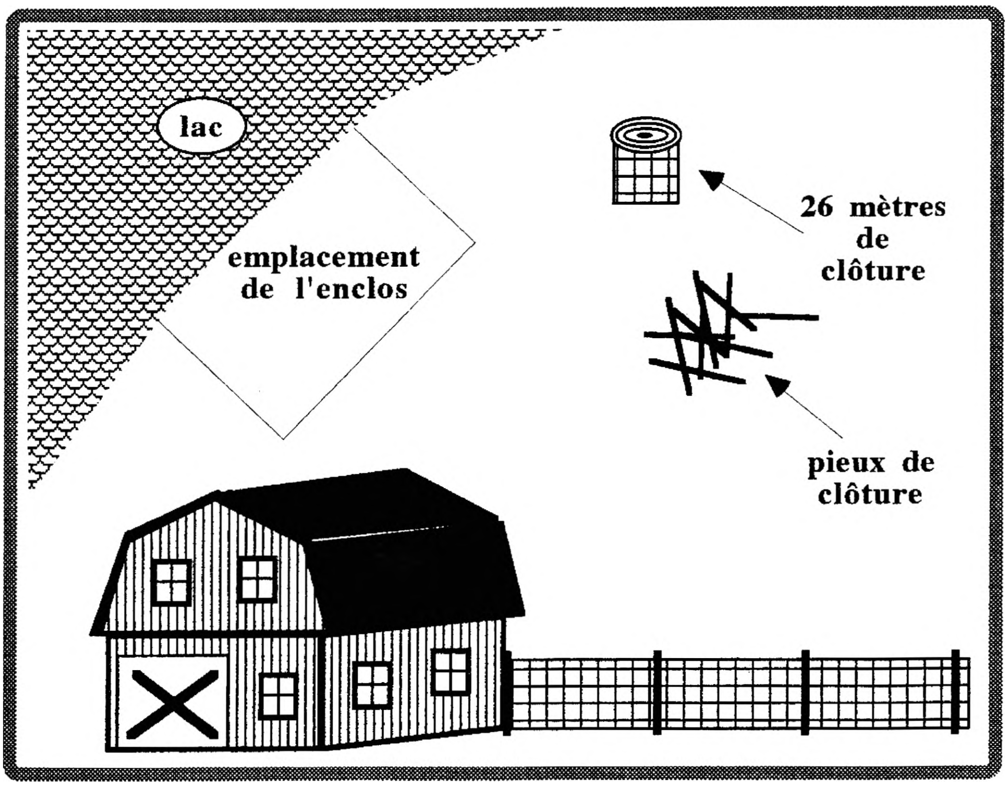
En visite chez son grand-père, Marie remarque un puits dans la cour arrière, mais la corde s'est dépouillée au fil des années. Toutefois, le puits du voisin est en bon état. Ingénieuse, elle laisse tomber une pierre dans les deux puits. Elle constate que la pierre met 3,0 secondes pour atteindre la surface de l'eau dans le puits de son grand-père, et 1,5 seconde pour atteindre la surface de l'eau dans le puits du voisin. La figure ci-dessous illustre l'expérience de Marie.



Sachant que la longueur de la corde du puits du voisin est de 11,25 mètres, Marie fixe une corde de 22,5 mètres au puits de son grand-père. Surprise, elle ne réussit pas à y puiser de l'eau. Pourtant, elle sait bien que la masse de la pierre n'influence pas le déroulement de l'expérience. Comment Marie devrait-elle procéder pour déterminer la longueur de la corde du puits de son grand-père?

L'enclos

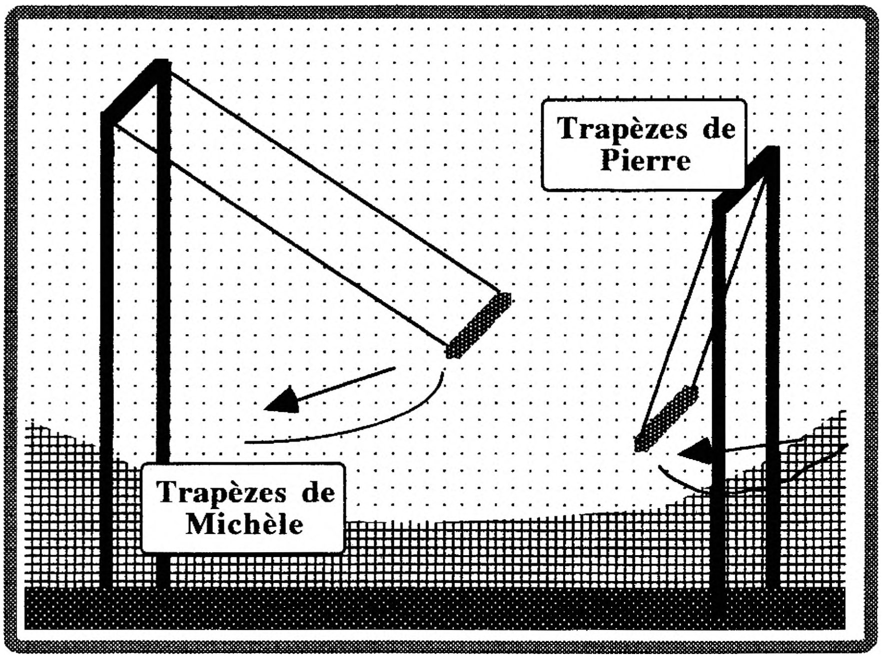
Un fermier possède un lopin de terre le long d'un lac. Caressant un rêve depuis longtemps, il est maintenant propriétaire d'un cheval. Le fermier veut lui construire un enclos dont l'un des cotés serait délimité par le lac, puisqu'il ne possède que 26 mètres de clôture. La figure ci-dessous illustre le lopin de terre du fermier et l'emplacement de l'enclos.



Le fermier ne sait pas comment disposer la clôture autour de l'enclos. Cependant, il aimerait bien que son cheval puisse profiter du plus grand enclos possible. Quelles devraient être ses dimensions?

Les trapèzes

Michèle et Pierre en sont à leur début au cirque. Leurs trapèzes ont respectivement des longueurs de 8 et 4 mètres. De cette façon, Michèle doit réaliser un seul balancement pendant que Pierre en fait exactement deux. Toutefois, ils éprouvent des difficultés à synchroniser le mouvement des trapèzes. Michèle, qui fait les voltiges, précède à chaque essai les mains de Pierre qui se balancent constamment La figure ci-dessous illustre les trapèzes de Michèle et de Pierre.



Le directeur du cirque indique que le mouvement des trapèzes n'est pas influencé par la masse et les élans des trapézistes. Par conséquent, il ajoute que les trapèzes de Pierre ne sont pas à leur bonne longueur. Quelle devrait être la longueur des trapèzes de Pierre?

Protocole de l'entrevue d'intervention «Les puits»

Questions/Réponses attendues (critère **I 1**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation.
   ( ) Marie veut déterminer la vitesse de la pierre.
   (√) Marie veut savoir la profondeur du puits de son grand père.
   ( ) Marie fait une expérience en laissant tomber une pierre dans chaque puits.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
2. Qu'est-ce que Marie cherche?
   ( ) Marie cherche la vitesse de la pierre.
   ( ) Marie cherche la profondeur du puits de son grand père.
   (√) Marie cherche la longueur de la corde à attacher au puits de son grand père.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
3. Qu'est-ce que Marie croyait?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) Elle croit que si le temps double, la longueur de la corde doublera aussi.
   ( ) Elle croit avoir trouvé la longueur de la corde à attacher au puits de son grand père.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **I 2**) :

1. Qu'est-ce qui varie dans la situation?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) La vitesse (ou la masse) et le temps.
   (√) La longueur de la corde (ou la distance parcourue par la pierre) et le temps.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
2. De quelle façon cela varie-t-il?
   ( ) La vitesse augmente en fonction du temps.
   (√) La distance (parcourue) augmente en fonction du temps.
   ( ) La distance et la vitesse augmentent lorsqu'une pierre descend dans un puits.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Si Marie a enregistré un temps de 4,5 secondes, quelle sera la longueur de la corde pour le puits de son grand-père?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) La corde aurait été 33,75 mètres.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **P 1**) :

1. Que peut-tu faire pour me montrer comment varie la situation?
   ( ) Il faut trouver la vitesse.
   ( ) Je laisse tomber une masse à différentes hauteurs (ou distances) et mesure le temps.
   ( ) Je peux laisser tomber une masse et mesurer le temps de passage à différentes hauteurs.
   ( ) Il faut laisser tomber plusieurs masses mais les mesures du temps ne seront pas précises.
   (√) Il me faut quelque chose (le chronomètre marqueur) pour mesurer précisément le temps.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Si la pierre parcourt 5 mètres pendant la première seconde, pourrait-elle parcourir 5 mètres, 10 mètres ou plus encore pendant la deuxième seconde?
   ( ) Elle parcourra 5 mètres.
   ( ) Elle parcourra 10 mètres (ou le double).
   (√) Elle parcourra plus de 10 mètres pendant la deuxième seconde.
   ( ) Pendant la première seconde, la pierre parcourt une plus petite distance que durant la deuxième seconde.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

Questions/Réponses attendues (critère **P 2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de cette situation?
   (√) Le temps et la longueur de la corde (ou la distance parcourue).
   ( ) Réponse semblable à la précédente où l'une des grandeurs est remplacée par la vitesse, la masse ou le poids.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________
2. Que représente chacune de ces grandeurs?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) Le temps est le temps de chute de la pierre. La longueur de la corde est la profondeur du puits.
   ( ) Réponse semblable à la précédente où l'une des grandeurs est remplacée par la vitesse, la masse ou le poids.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 1**) :

1. Pourquoi la distance (parcourue) varie entre les impressions du chronomètre marqueur?
   ( ) La distance augmente d'une façon constante.
   (√) La distance augmente mais pas d'une façon constante (ou de plus en plus).
   ( ) La distance est la même (pour des intervalles de temps égaux).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________
2. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Si la méthode de Marie est pertinente, quels changements cela apportera-t-il? Lesquels? Comment les décris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il n'y a pas de changement.
   ( ) Ça ne serait plus la même relation (ou la même constante).
   (√) Elle aurait obtenu une droite. [L'élève trace une droite de pente positive.]
   ( ) Elle aurait obtenu une courbe aussi. [L'élève reproduit une courbe semblable avec un plus grand taux d'accroissement.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________
3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Supposons que tu fais la même expérience sur la lune, quels changements cela apportera-t-il? Lesquels? Comment les décris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il n'y a pas de changement.
   ( ) Ça change la constante (ou la relation). Une pierre parcourt une plus petite distance.
   (√) Ça change la courbe. [L'élève reproduit une courbe semblable avec un plus petit taux d'accroissement.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 2**) :

1. Que dois-tu faire pour connaître la distance (parcourue) par la pierre? (Comment décrirais-tu cette relation?) Comment cela se traduit-il?
   ( ) Il faut établir une constante.
   ( ) Je multiplie le temps et une constante.
   ( ) C'est difficile parce que ce n'est pas régulier.
   ( ) Je pourrais chercher l'augmentation de vitesse.
   ( ) Je fais des rapports (ou des divisions) entre la distance (parcourue) et le temps. Je devrais additionner les mesures.
   (√) Je dois tenir compte de deux choses, la constante et la puissance au carré. Sinon c'est une droite.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________
2. Si tu considères le temps et la distance parcourue, de quelle façon peux-tu déterminer la constante? (Qu'est-ce qui se dégage de la distance parcourue et du temps?)
   ( ) Une constante qui fait que ça augmente tout le temps.
   ( ) Je pourrais faire des rapports qui donneraient une constante.
   ( ) Il faut aussi avoir le temps au carré puisque ça va vite.
   ( ) Je fais des rapports entre la distance (parcourue) et le temps au carré.
   (√) Je considère le temps au carré et je multiplie par cette constante. Ça donne la distance.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 3**) :

1. Y a-t-il un moyen de t'assurer que les distances (parcourues) suivent la même relation?
   ( ) Il faut le vérifier trois fois.
   ( ) Les différences (des distances parcourues) donnent la vitesse.
   (√) Les différences de différences (des distances parcourues) donnent un résultat constant.
   ( ) En comparant la relation et les données recueillies durant l'expérience.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Questions/Réponses attendues (critères **F 1** et **F 3**) :

1. Comment décris-tu la distance parcoure par une pierre pendant un temps de chute *t*? Donne un exemple.
   ( ) Je multiplie *t* par la constante que j'ai trouvée.
   (√) Je multiplie *t* par lui-même et la constante que j'ai trouvée.
   ( ) J'élève *t* au carré et je le multiplie par la constante que j'ai trouvée.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________
2. Comment représenterais-tu autrement la situation? Avec quelles grandeurs?
   ( ) Par un histogramme.
   ( ) Par un tableau. Avec la distance (parcourue) et le temps.
   (√) Par un graphique. Avec la distance (parcourue) et le temps.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________
3. Est-ce que la pierre a parcouru 8 mètres après 1 seconde? Pourquoi?
   ( ) Oui, parce que c'est un point au-delà de la courbe.
   ( ) Non, parce que ce n'est pas le résultat obtenu de ma formule.
   (√) Non, parce que ce point n'est pas sur la courbe du plan cartésien.
   ( ) Réponses semblables à la précédente en tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture de la parabole.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

4. Joins les points. Que se passe-t-il entre les points sur le plan cartésien?
   ( ) Je ne sais pas comment faire.
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]
   ( ) La différence entre deux séries de points (consécutifs) est très inégale.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

5. Pourquoi fais-tu une courbe (ou une droite) entre deux points consécutifs sur le plan cartésien? Fais une extrapolation de la courbe.
   ( ) Ce n'est pas linéaire.
   ( ) Parce que c'est la même relation entre deux points consécutifs.
   (√) Si un courbe joint tous les points, elle est la même entre deux points consécutifs.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

<u>Questions/Réponses attendues (critères **F2** et **F3**) :</u>

1. Quelle formule (ou l'équation algébrique) te permet de prévoir la distance parcourue par la pierre (en fonction du temps)? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=5x^2$.
   ( ) Réponse semblable à la précédente en considérant d'autres formes possibles.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Comment décris-tu la hauteur de la pierre en fonction du temps? Trace le graphique. Quelle est la formule?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il n'y aurait pas eu de changement.
   ( ) De la même façon que la distance parcourue de la pierre en fonction du temps.
   ( ) La hauteur diminue. [L'élève dessine une droite de pente négative.] $y=-5x$.
   (√) La courbe aurait été inversée. [L'élève dessine une courbe parabolique de concavité vers le haut dont le sommet est (0, 45).] $y=45-5x^2$.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Réponds à la question de la situation. (Quelle doit être la longueur de la corde du puits du grand-père?)
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) La longueur de la corde doit être de 45 mètres.
   ( ) Réponse semblable à la précédente en considérant d'autres formes possibles.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Protocole de l'entrevue d'intervention «L'enclos»

Questions/Réponses attendues (critère **I1**) :

1. Que raconte la situation «L'enclos»?
   ( ) Un fermier fait un enclos.
   ( ) Un fermier essaie de faire un enclos le long du lac.
   (√) Un fermier fait un enclos qui doit être le plus grand possible.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
2. Que cherche le fermier?
   ( ) Les dimensions de l'enclos.
   (√) La longueur des côtés du plus grand enclos possible.
   ( ) Il cherche l'aire, dans un premier temps. Ça va donner un plan.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **I2**) :

1. Qu'est-ce qui varie dans la situation?
   ( ) L'aire de l'enclos.
   ( ) Les dimensions de l'enclos.
   (√) L'aire et la longueur (et/ou la largeur) de l'enclos.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
2. De quelle façon cela varie-t-il?
   ( ) Ça augmente (toujours).
   ( ) Les côtés de l'enclos sont liés ensemble.
   (√) Ça varie dépendant des dimensions de l'enclos.
   ( ) Plus le long côté diminue, plus les autres côtés augmentent.
   ( ) Ça ne varie pas puisque les mètres de clôture sont toujours de la même longueur.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **P1**) :

1. Comment peut-tu pour me montrer la disposition de la clôture autour de l'enclos? À quoi correspondent les mètres de clôture?
   ( ) Je pourrais faire des calculs avec les 26 mètres de clôture.
   ( ) Il faut faire des formes (ou trois côtés d'une forme). Les mètres de clôture correspondent aux cure-dents (ou aux jetons).
   (√) Je fais des dessins sur une feuille. Les mètres de clôture correspondent aux traits.
   ( ) Je plie un cure-pipe de différentes façons (sur une grille). Les 26 mètres de clôture correspondent au cure-pipe.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________
2. Si l'une des dimensions de l'enclos est de 1 mètre, combien as-tu de mètres pour l'autre dimension? Idem pour 2 mètres, 3 mètres, 4 mètres, etc.
   ( ) Pour l'autre, 24 mètres. Etc.
   ( ) Pour l'autre, 25 mètres. Etc.
   (√) Pour l'autre, 12,5 mètres. Etc.
   ( ) Réponses semblables si l'élève les construit concrètement. Etc.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **P 2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation?
   ( ) Les dimensions de l'enclos.
   ( ) La largeur et la longueur de l'enclos.
   (√) La largeur (et/ou la longueur) et l'aire de l'enclos.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 1**) :

1. Comment cela (l'aire) varie-t-il? Donne un exemple.
   ( ) L'aire est toujours le même.
   ( ) L'aire augmente selon les dimensions de l'enclos.
   ( ) L'aire augmente, puis elle diminue (après une certaine longueur).
   (√) L'aire augmente, on obtient un maximum, puis elle diminue.
   ( ) L'aire augmente jusqu'à ce que l'une des dimensions de l'enclos soit la moitié de la clôture disponible.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. Qu'est-ce qui est constant dans la situation? Pourquoi?
   ( ) L'aire de l'enclos.
   (√) Les 26 mètres de clôture.
   ( ) Il faut toujours multiplier la largeur et la longueur.
   ( ) L'enclos va avoir la forme d'un rectangle 1 sur 2 (rapport).
   ( ) Selon les enclos possibles, on obtient deux fois la même aire.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 2**) :

1. Que dois-tu faire pour connaître l'aire du plus grand enclos (possible)? (Comment décris-tu cette relation?) Comment cela se traduit-il?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il faut établir une constante.
   ( ) Je pourrais trouver plusieurs dimensions de l'enclos, faire les multiplications correspondantes et retenir le plus grand produit.
   (√) Si une des dimensions est donnée, je la multiplie par l'autre, qui est 26 moins cette première dimension et le tout divisé par 2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Y a-t-il d'autres façons de dégager cette relation? Le(s)quelle(s)? Comment la décris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il faut trouver une formule.
   ( ) C'est la moyenne des valeurs obtenues pour chaque dimension.
   ( ) C'est la moitié de la clôture pour l'une des dimensions de l'enclos, puis le reste de la clôture pour l'autre dimension.
   (√) Je multiplie une dimension de l'enclos par elle-même et soustrait ce résultat du produit de cette dimension par le nombre de mètres de clôture. Puis je divise par 2.
   ( ) J'élève au carré une dimension de l'enclos et soustrait ce résultat du produit de cette dimension par le nombre de mètres de clôture. Puis je divise par 2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Supposons que le fermier a maintenant 100 mètres de clôture, que dois-tu faire pour connaître l'aire du plus grand enclos (possible)? (Comment décris-tu cette relation?) Comment cela se traduit-il?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Je pourrais trouver plusieurs dimensions de l'enclos, faire les multiplications correspondantes et retenir le plus grand produit.
   (√) Si une des dimensions est donnée, je la multiplie par l'autre, qui est 100 moins cette première dimension et le tout divisé par 2.
   ( ) J'élève au carré une dimension de l'enclos et soustrait ce résultat du produit de cette dimension par le nombre de mètres de clôture. Puis je divise par 2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

4. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Supposons que le fermier veuille construire un enclos qui ne longe plus le lac avec toujours 100 mètres de clôture, que dois-tu faire pour connaître l'aire du plus grand enclos (possible)? (Comment décris-tu cette relation?) Comment cela se traduit-il?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Je pourrais trouver plusieurs dimensions de l'enclos, faire les multiplications correspondantes et retenir le plus grand produit.
   (√) Si une des dimensions est donnée, je la multiplie par l'autre, qui est 100 moins cette première dimension; le tout divisé par 4.
   ( ) J'élève au carré une dimension de l'enclos et soustrait ce résultat du produit de cette dimension par le nombre de mètres de clôture. Puis je divise par 4.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

<u>Questions/Réponses attendues (critère **A 3**) :</u>

1. Y a-t-il un moyen de t'assurer que les aires obtenues suivent la même relation?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) C'est le même phénomène qui se répète dans la situation.
   (√) Les différences de différences (des aires) donnent un résultat constant.
   ( ) En comparant les résultats obtenus avec ceux que je fais avec les cure-dents (ou autres).
   ( ) Si ça donne un bon résultat pour une série de dimensions alors c'est correct pour toutes les séries de dimensions.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

<u>Questions/Réponses attendues (critères **F 1** et **F 3**) :</u>

1. Comment décris-tu l'aire de l'enclos dont l'une des dimensions est de x mètres? Donne un exemple.
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) Je multiplie le côté x par les mètres de clôture moins x. Je divise ce résultat par 2.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Comment représenterais-tu autrement la situation? Avec quelles grandeurs?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Par un tableau. Avec l'une des dimensions et l'aire de l'enclos.
   (√) Par un graphique. Avec l'une des dimensions et l'aire de l'enclos.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. Si l'une des dimensions de l'enclos est de 4 mètres, son aire est-t-il de 80 mètres^2? Pourquoi?
   ( ) Oui, parce que c'est un point au-delà de la courbe.
   ( ) Non, parce que ce n'est pas le résultat obtenu de ma formule.
   (√) Non, parce que ce point n'est pas sur la courbe du plan cartésien.
   ( ) Réponses semblables à la précédente en tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture de la parabole.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

4. Joins les points. Que se passe-t-il entre les points (4, 44) et (10, 80)? Entre les points (12, 84) et (14, 84)? Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas comment faire.
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]
   ( ) Ça fait toujours une courbe et ça monte aussi vite que ça descend. Ça ressemble à une «pointe d'oeuf».
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

<u>Questions/Réponses attendues (critères **F2** et **F3**) :</u>

1. Quelle formule (ou l'équation algébrique) te permet de prévoir l'aire de l'enclos? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=[x(26-x)]/2$.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

2. Un(e) autre élève a obtenu cette formule: $y=-1/2(x-13)^2+84.5$ (ou $y=-1/2x^2+13x$). Est-elle semblable à la tienne? Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) L'élève trace correctement et spontanément la parabole.
   ( ) L'élève trace correctement, à partir de la représentation numérique, la parabole.
   ( ) Réponses semblables aux précédentes en tenant compte des intervalles sur les axes.
   (√) L'élève substitue une valeur de x dans la formule donnée dont il connaît le résultat.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour les translations horizontale et/ou verticale.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture de la parabole.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Quelle formule (ou l'équation algébrique) te permet de prévoir l'aire de l'enclos avec 100 mètres de clôture? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=[x(100-x)]/2$.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

4. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Quelle formule (ou l'équation algébrique) te permet de prévoir l'aire d'un enclos qui ne longe plus le lac avec toujours 100 mètres de clôture? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=[x(100-x)]/4$.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________________

5. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Répond à la question de la situation «L'enclos».

Protocole de l'entrevue d'intervention «Les trapèzes»

Questions/Réponses attendues (critère **I1**) :

1. Dans tes propres mots, décris la situation.
   ( ) Les trapèzes de Pierre sont trop longs (ou courts).
   ( ) Michèle et Pierre s'y prennent mal pour déterminer la longueur des trapèzes.
   (√) Michèle et Pierre ont de la difficulté à synchroniser le mouvement de leurs trapèzes.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

2. Qu'est-ce que Michèle et Pierre cherchent?
   ( ) Ils cherchent la vitesse des trapèzes.
   (√) Ils cherchent la longueur des trapèzes de Pierre.
   ( ) Ils cherchent le temps que les trapèzes de Pierre prennent à faire un balancement.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

3. Qu'est-ce que Michèle et Pierre croyaient?
   ( ) Ils croyaient synchroniser le mouvement de leurs trapèzes.
   ( ) Ils croyaient que les trapèzes de Pierre feraient deux balancements.
   (√) Ils croyaient que les trapèzes de Pierre prendraient deux fois moins de temps s'ils étaient à la moitié de la longueur de ceux de Michèle.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

Questions/Réponses attendues (critère **I2**) :

1. Que peux-tu varier dans la situation?
   (√) La longueur des trapèzes.
   ( ) L'arc décrit par les trapèzes.
   ( ) Le temps d'un balancement des trapèzes.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

2. De quelle façon varie le balancement des trapèzes? (Qu'est-ce que cela influence?)
   ( ) Le balancement des trapèzes est proportionnel à leur longueur.
   (√) Plus les trapèzes sont longs, plus ils mettent de temps à faire un balancement.
   ( ) Plus les trapèzes sont longs, moins ils mettent de temps à faire un balancement.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Si les trapèzes de Michèle étaient de 6 mètres, quelle serait la longueur des trapèzes de Pierre?
   (√) La longueur des trapèzes serait de 3 mètres.
   ( ) La longueur des trapèzes serait plus de 3 mètres.
   ( ) La longueur des trapèzes serait moins de 3 mètres.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

Questions/Réponses attendues (critère **P1**) :

1. Si un pendule de 5 mètres met 5 secondes pour faire un balancement, combien de temps mettra un pendule de 10 mètres?
   ( ) Il mettra 10 secondes.
   (√) Il mettra plus de 10 secondes.
   ( ) Il mettra 5 secondes lui aussi.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ______________________

2. Que peut-tu faire pour me montrer les différentes longueurs des trapèzes (ou du pendule)? (Que peut-tu faire pour comprendre le mouvement des trapèzes?)
   ( ) Il faut trouver la vitesse et déterminer la longueur des trapèzes.
   ( ) Il faut construire deux pendules et coordonner leur mouvement.
   (√) Je varie la longueur d'un pendule et mesure le temps du balancement correspondant.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. De quelle façon mesures-tu (le temps du) le balancement du pendule? (Quelles sont les étapes de ton investigation?)
   ( ) Avec un chronomètre.
   ( ) Il faut que le pendule ait la même vitesse.
   ( ) Il faut que le pendule parte de la même hauteur.
   ( ) Il faut que le pendule parte d'une même ligne (imaginaire) verticale.
   (√) Il faut que le pendule décrive le même arc (ou le même nombre de degrés).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **P 2**) :

1. Quelles sont les grandeurs qui influencent le développement de la situation?
   (√) Il y a le temps et la longueur des trapèzes.
   ( ) Réponses semblables à la précédente où l'une des grandeurs est remplacée par la vitesse, la masse, le poids ou les élans.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Comment représenterais-tu le mouvement des trapèzes?
   ( ) Ce mouvement peut être représenté par une balançoire, un arc.
   ( ) Ce mouvement peut être représenté par une masse au bout d'une corde (ou un pendule).
   (√) Ce mouvement correspond à un quart de cercle (ou quelque chose qui tourne autour d'un point fixe).
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **A 1**) :

1. Pourquoi la longueur des trapèzes influence le temps d'un balancement?
   ( ) Le temps augmente mais pas d'une façon constante.
   ( ) La différence entre les temps diminue en fonction de la longueur.
   ( ) Le temps d'un balancement est proportionnel à la longueur des trapèzes.
   (√) Le temps d'un balancement n'est pas proportionnel à la longueur des trapèzes.
   ( ) Le temps d'un balancement est directement proportionnel à la longueur des trapèzes.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Si la méthode de Michèle et Pierre est pertinente, quels changements cela apportera-t-il? Lesquels? Comment les décris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il n'y a pas de changement.
   ( ) Ça ne serait plus la même relation (ou la même constante).
   (√) Ils auraient obtenu une droite. [L'élève trace une droite de pente positive.]
   ( ) Ils auraient obtenu une courbe. [L'élève reproduit une courbe semblable avec un plus grand taux d'accroissement.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Supposons que tu fasses la même expérience sur la lune, quels changements cela apportera-t-il? Lesquels? Comment les décris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   ( ) Il n'y a pas de changement.
   ( ) Ça change la constante. Le pendule mettrait plus de temps à faire un balancement.
   (√) Ça change la courbe. [L'élève reproduit une courbe semblable avec un plus petit taux d'accroissement.]
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **A2**) :

1. Que peut-tu faire (avec les données recueillies) pour savoir la (prochaine) longueur (ou mesure du temps) du pendule? Comment cela se traduit-il?
   ( ) Il y a sûrement un principe.
   ( ) Je multiplie le temps et une constante.
   ( ) C'est difficile parce que ce n'est pas régulier.
   ( ) Je pourrais chercher l'augmentation de vitesse.
   ( ) Je fais des rapports (ou des divisions) entre la longueur et le temps.
   (√) Je dois tenir compte de deux choses, la constante et la puissance au carré. Sinon c'est une droite.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Si tu considères le temps et la longueur du pendule, de quelle façon peux-tu trouver la constante? (Que se dégage-t-il pour la longueur du pendule en fonction du temps?)
   ( ) Une constante qui fait que ça augmente tout le temps.
   ( ) Je pourrais faire des rapports avec les données recueillies.
   ( ) Il faut aussi avoir le temps au carré dans les rapports à établir.
   ( ) C'est le nombre de degré décrit par le pendule; c'était constant.
   (√) Je considère le temps au carré et je multiplie par cette constante. Ça donne la distance.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critère **A3**) :

1. Y a-t-il un moyen de t'assurer que les mesures du temps suivent la même relation?
   ( ) Il faut le vérifier trois fois.
   ( ) Les différences (de longueurs) donnent la vitesse.
   ( ) En comparant la relation et les données recueillies durant l'expérience.
   ( ) Il faut que ça marche pour les deux séries de trapèzes.
   ( ) Il faut peut-être travailler en même temps avec les différences de temps et de longueur.
   (√) Les différences de différences (des longueurs) donnent un résultat constant.
   ( ) Je pourrais faire des rapports qui donneraient une constante.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

Questions/Réponses attendues (critères **F1** et **F3**) :

1. Supposons à présent que l'on t'indique un balancement d'une durée *t*, comment décrirais-tu la longueur correspondante du pendule? Donne un exemple.
   ( ) Je multiplie *t* par la constante que j'ai trouvée.
   (√) Je multiplie *t* par lui-même et la constante que j'ai trouvée.
   ( ) J'élève *t* au carré et je le multiplie par la constante que j'ai trouvée.
   ( ) Réponses semblables avec l'un des autres processus du critère A2.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

2. Comment représenterais-tu autrement la situation? Avec quelles grandeurs?
   ( ) Par un histogramme.
   ( ) Par un tableau. Avec la longueur et le temps.
   (√) Par un graphique. Avec la longueur et le temps.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________

3. Est-ce qu'un pendule de 2,5 mètres fait un balancement dans 4 secondes? Pourquoi?
   (√) Oui, parce que c'est un point au-dessous de la courbe.
   ( ) Non, parce que ce n'est pas le résultat obtenu de ma formule.
   ( ) Non, parce que ce point n'est pas sur la courbe du plan cartésien.
   ( ) Réponses semblables à la précédente en tenant compte des intervalles sur les axes.
   ( ) Réponses semblables avec difficultés pour le degré d'ouverture de la parabole.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________________________

4. Joins les points. Que se passe-t-il entre les points sur le plan cartésien? Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas comment faire.
   ( ) [L'élève joint les points consécutifs par des droites.]
   (√) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le bas.]
   ( ) Réponses qui combinent les deux précédentes.
   ( ) [L'élève joint l'ensemble des points par une courbe concave vers le haut.]
   ( ) La différence entre deux séries de points (consécutifs) est très inégale.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________________________

5. Pourquoi fais-tu une courbe entre deux points consécutifs sur le plan cartésien? Fais une extrapolation de la courbe.
   ( ) Ce n'est pas linéaire.
   ( ) Parce que c'est la même relation entre deux points consécutifs.
   (√) Si une courbe joint tous les points, elle est la même entre deux points consécutifs.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________________________

<u>Questions/Réponses attendues (critères **F2** et **F3**) :</u>

1. Quelle formule (ou l'équation algébrique) te permet de prévoir la longueur du pendule [en fonction du temps]? Comment l'écris-tu?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) L'équation est $y=0,5x^2$.
   ( ) Réponses semblables en considérant d'autres formes possibles.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________________________

2. (*À poser à la fin de l'entrevue.*) Réponds à la question de la situation. (Quelle doit être la longueur des trapèzes de Pierre?) Pourquoi?
   ( ) Je ne sais pas.
   (√) La longueur des trapèzes de Pierre doit être de 2 mètres puisque ceux de Michèle prennent 4 secondes à faire un balancement.
   ( ) Réponses semblables en considérant d'autres formes possibles.
   ( ) Autre(s) réponse(s) : ____________________________________

Liste du matériel de manipulation

Entrevue	**Matériel de manipulation**
Général	Règle
	Crayons
	Calculatrice
	Feuilles mobiles
	Papiers quadrillés (millimétrés)
	Gomme à effacer
	Rapporteur d'angles
	Grande table de travail
Evaluation	Jetons
	Hexaèdres réguliers (cubes)
Les plaques de béton	Cure-dents
Les puits	Ciseaux
	Trombones
	Chronomètre
	Ruban adhésif
	Mètre
	Chronomètre marqueur
	Ruban pour chronomètre marqueur
	Rondelles de métal de même forme de 100 g
	Plafond pour la fixation du chronomètre marqueur
L'enclos	Cure-dents
	Cure-pipes
	Papiers quadrillés (en unités spéciales)
Les trapèzes	Ciseaux
	Punaises
	Trombones
	Ruban adhésif
	Mètre
	Fil dentaire non ciré
	Supports (crochets)
	Rapporteur d'angles (pour l'enseignement)
	Rondelles de métal de même forme de 100 g
	Plafond pour la fixation du pendule