

JEAN-PIERRE BOURQUE

**ÉTUDE DES DÉFORMATIONS  
HYGROMÉCANIQUES DANS DES FEUILLES DE  
PAPIER MULTICOUCHES**

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique  
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2008

© JEAN-PIERRE BOURQUE, 2008

## Résumé

Ce mémoire présente des travaux de recherche portant sur les déformations hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche. Un modèle semi-analytique permettant de prédire ces déformations a été développé. Ce modèle utilise la théorie de la diffusion de l'humidité en régime transitoire à travers une plaque multicouche combinée à la théorie classique des stratifiés modifiée pour tenir compte des non linéarités géométriques. Les résultats du modèle pour une feuille de papier multicouche et pour deux types de carton ont été comparés aux résultats d'un modèle d'éléments finis. Le modèle semi-analytique développé a permis d'obtenir des résultats similaires aux résultats du modèle d'éléments finis, tout en minimisant le temps de calcul requis. Une étude expérimentale a ensuite été menée afin de valider les prédictions du modèle. Différentes couches de papier ont été utilisées pour concevoir des assemblages multicouches. Toutes les propriétés des couches individuelles et des assemblages requises par le modèle ont été évaluées. Enfin, les assemblages conçus ont été exposés à différents cycles d'humidité afin d'étudier leurs déformations hygromécaniques. Un système de mesure des déplacements en 3D a été utilisé pour mesurer les courbures des assemblages en fonction du temps. Les résultats des essais expérimentaux montrent une assez bonne concordance avec les prédictions du modèle semi-analytique, mais le temps requis pour atteindre l'équilibre est beaucoup plus long que prévu.

## Remerciements

Ce projet de recherche n'aurait pas été possible sans l'apport de plusieurs personnes. Je tiens d'abord à remercier Mme Marie-Laure Dano qui m'a permis de réaliser ce projet de recherche et qui a su me conseiller et me guider dans toutes les phases de ma maîtrise. Ses connaissances, son dévouement, sa disponibilité et sa patience ont été grandement appréciés. Je tiens à souligner la qualité exceptionnelle de son encadrement.

Aussi, je voudrais remercier les enseignants que j'ai côtoyés lors de mes cours et tout le personnel de support au département de génie mécanique. Je remercie entre autre M. Jean Ruel du bureau de design, M. Yves Jean au support en génie électrique et M. Guy Gendron qui m'a enseigné des connaissances indispensables à ma recherche. Je remercie aussi M. Alain Cloutier au Département des sciences du bois et de la forêt qui m'a été d'une aide précieuse pour mes essais en laboratoire. Je remercie également tous les étudiants que j'ai côtoyés au Laboratoire de Matériaux Composites et particulièrement Philippe Binette pour avoir partagé avec moi des connaissances qui furent très utiles pour mes travaux de recherche.

Je tiens à remercier tout le personnel de l'Institut Canadien de Recherche sur les Pâtes et Papiers (Paprican) de Pointe-Claire. Leur collaboration a été essentielle à la réussite de ce projet de recherche. Je remercie entre autre M. Jean Hamel et M. Frédéric Parent pour m'avoir permis de réaliser un stage chez Paprican. Je remercie particulièrement M. Javad Saberian pour son encadrement et son expertise. Je remercie également M. André Ménard (laboratoire de stabilité dimensionnelle) et Mme Dominique Lord (conception des formettes) pour leur savoir-faire et leur disponibilité.

Finalement, je voudrais remercier ma famille pour m'avoir aidé et encouragé durant mes études universitaires. Leur présence et leur intérêt ont su faire la différence. Je remercie spécialement ma copine Jennifer pour son soutien inconditionnel et sa

compréhension durant les moments plus ardu. L'achèvement de ce projet de recherche aurait été très difficile sans la motivation et le bonheur qu'elle m'apporte.

# Table des matières

<b>Chapitre 1</b>	<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
1.1	Généralités sur les papiers .....	1
1.2	Revue de littérature .....	3
1.3	Objectifs de la recherche et présentation du mémoire .....	6
<b>Chapitre 2</b>	<b>Modèle semi-analytique de prédiction des déformations</b>	
	<b>hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche.....</b>	<b>8</b>
2.1	Introduction.....	8
2.2	Modèle de diffusion transitoire de l'humidité dans une feuille de papier multicouche.....	8
2.2.1	Description du problème .....	8
2.2.2	Résolution du problème de diffusion transitoire par une approche « naturelle » .....	12
2.2.3	Application des conditions limites .....	14
2.2.4	Calcul des valeurs propres de la solution .....	16
2.2.5	Application des conditions initiales.....	20
2.2.6	Forme finale de la distribution d'humidité .....	22
2.2.7	Exemple d'application : distribution de la teneur en humidité pour une feuille de papier multicouche et étude de l'effet du nombre de valeurs propres utilisé (m) .....	23
2.3	Modèle semi-analytique des déformations hygro-mécaniques dans une feuille de papier.....	29
2.3.1	Introduction .....	29
2.3.2	Linéarisation de la distribution de la teneur en humidité.....	29
2.3.3	Calcul de l'énergie potentielle totale.....	32
2.3.4	Minimisation de l'énergie potentielle totale .....	37
2.3.5	Étude de la stabilité de la configuration de la feuille.....	38
2.4	Exemple d'application .....	39
2.4.1	Description du problème étudié.....	39
2.4.2	Résultats du modèle développé .....	39
2.4.3	Comparaison avec un modèle stationnaire existant.....	42
2.5	Conclusion .....	48

<b>Chapitre 3</b>	<b>Validation du modèle semi-analytique par la méthode des éléments finis</b>	<b>50</b>
3.1	Introduction	50
3.2	Modèle d'éléments finis pour une feuille de papier multicouche	50
3.2.1	Présentation du modèle d'éléments finis	50
3.2.2	Prédictions de la distribution de teneur en humidité selon $z$ pour différents temps	52
3.2.3	Prédictions des déformations hygromécaniques pour différents temps	53
3.3	Étude de cas : Déformations hygromécaniques pour 2 types de carton	57
3.3.1	Introduction	57
3.3.2	Description du problème	57
3.3.3	Résultats	59
3.3.4	Conclusion	65
3.4	Conclusion	66
<b>Chapitre 4</b>	<b>Fabrication et caractérisation des feuilles de papier</b>	<b>68</b>
4.1	Introduction	68
4.2	Fabrication et caractérisation des couches individuelles	69
4.2.1	Description et fabrication des couches individuelles	69
4.2.2	Caractérisation des couches individuelles	70
4.3	Fabrication et caractérisation des assemblages multicouches	72
4.3.1	Description et fabrication des assemblages multicouches	72
4.3.2	Caractérisation des assemblages multicouches	73
4.3.3	Détermination des coefficients de convection hydrique des assemblages	75
4.4	Conclusion	81
<b>Chapitre 5</b>	<b>Mesure expérimentale des courbures</b>	<b>82</b>
5.1	Introduction	82
5.2	Problématique expérimentale	83
5.3	Description du système de mesure Aramis 3D	87
5.4	Procédure expérimentale	88
5.4.1	Positionnement des caméras et calibration	88
5.4.2	Préparation et positionnement des échantillons	89
5.4.3	Prise de mesures et calculs	91
5.5	Essai de courbure sur les couches individuelles	95

5.5.1	Description .....	95
5.5.2	Résultats et discussion.....	97
5.5.3	Conclusion.....	103
5.6	Essai de courbure préliminaire.....	104
5.6.1	Description .....	104
5.6.2	Résultats et discussion.....	105
5.6.3	Conclusion.....	126
5.7	Essai de courbure cyclique avec assèchement initial.....	127
5.7.1	Description .....	127
5.7.2	Résultats et discussion.....	128
5.7.3	Conclusion.....	138
5.8	Essai de courbure prolongé.....	139
5.8.1	Description .....	139
5.8.2	Résultats et discussion.....	140
5.8.3	Conclusion.....	147
5.9	Conclusion .....	147
<b>Conclusion .....</b>		<b>150</b>
<b>Bibliographie .....</b>		<b>154</b>
<b>Annexe A Effet de la différence de teneur en humidité et des dimensions sur les courbures; autres résultats obtenus avec le modèle stationnaire .....</b>		<b>156</b>
A.1	Introduction.....	156
A.2	Résultats.....	157
A.3	Discussion et conclusion.....	169
<b>Annexe B Programme Mathematica .....</b>		<b>171</b>
<b>Annexe C Fichier source pour le modèle d'éléments finis - logiciel Abaqus CAE. ....</b>		<b>189</b>
<b>Annexe D Essais de caractérisation.....</b>		<b>202</b>
D.1	Description des essais effectués.....	202
D.2	Résultats obtenus pour les couches individuelles .....	218
D.3	Résultats obtenus pour les assemblages.....	226

<b>Annexe E</b>	<b>Conception des assemblages multicouches .....</b>	<b>233</b>
E.1	Procédure de collage pour les assemblages sans amidon .....	233
E.2	Procédure de collage pour les assemblages avec amidon.....	234
<b>Annexe F</b>	<b>Modification du modèle d'éléments finis .....</b>	<b>236</b>
F.1	Description de la modification.....	236
F.2	Effet de la modification sur la courbure à travers le temps .....	237
<b>Annexe G</b>	<b>Étude de l'effet de la variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité .....</b>	<b>240</b>
G.1	Description de l'étude .....	240
G.2	Équations utilisées .....	240
G.3	Résultats.....	243
G.4	Discussion.....	244

## Liste des figures

Figure 1.1 : Courbures possibles d'une feuille de papier [6].....	2
Figure 2.1 : Représentation de la feuille de papier multicouche dans le plan $(x, z)$ .....	9
Figure 2.2 : Distributions de la teneur en humidité pour différents temps $(m = 29)$ .....	24
Figure 2.3 : Distribution de la teneur en humidité au début de la diffusion $(t = 0)$ selon le nombre de racines utilisé $(m)$ .....	26
Figure 2.4 : Teneur en humidité au centre de la feuille en fonction du temps selon le nombre de racines utilisé $(m)$ .....	27
Figure 2.5 : Teneur en humidité au centre de la feuille pendant la 1 <sup>re</sup> seconde, selon le nombre de racines utilisé $(m)$ .....	28
Figure 2.6 : Prédiction obtenue pour la distribution de la teneur en humidité à $t = 200$ s.....	31
Figure 2.7 : Système de coordonnées.....	32
Figure 2.8 : Courbures en fonction du temps.....	41
Figure 2.9 : Forme finale de la feuille (état stationnaire, $t = 3600$ s).....	42
Figure 2.10 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité.....	44
Figure 2.11 : Courbures en fonction des dimensions de la feuille.....	46
Figure 2.12 : Longueur minimum requise pour avoir des solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée.....	47
Figure 2.13 : Courbure dans la direction $y$ en fonction du temps (feuille carrée de 0,1 m de côté).....	48
Figure 3.1 : Modèle d'éléments finis utilisé.....	51
Figure 3.2 : Distribution de la teneur en humidité pour différents temps (en secondes).....	52
Figure 3.3 : Courbures en fonction du temps.....	54
Figure 3.4 : Déplacement vertical d'un coin en fonction du temps.....	55
Figure 3.5 : Formes finales prédites par le modèle d'éléments finis et par le modèle semi-analytique $(t = 3600$ s).....	56
Figure 3.6 : Feuille de carton – Empilement non-symétrique de 3 couches.....	58
Figure 3.7 : Courbures en fonction du temps – Carton NPB.....	60
Figure 3.8 : Courbures en fonction du temps – Carton PB.....	61
Figure 3.9 : Déflexion obtenue par Cloutier, Gendron et Dano [8] – Carton NPB.....	63
Figure 3.10 : Configurations d'équilibre obtenues avec le modèle transitoire développé – Carton NPB.....	63
Figure 3.11 : Déflexion obtenue par Cloutier, Gendron et Dano [8] – Carton PB.....	64
Figure 3.12 : Configurations d'équilibre obtenues avec le modèle transitoire développé – Carton PB.....	64
Figure 4.1 : Effet du coefficient de convection hydrique $h$ sur l'évolution de la teneur en humidité à travers le temps au centre de la feuille $(z = 0)$ – Assemblage A6.....	76
Figure 5.1 : Courbure dans la direction $y$ en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée – Assemblage A6.....	85

Figure 5.2 : Système de mesure Aramis 3D .....	87
Figure 5.3 : Feuille avec moucheté de peinture.....	89
Figure 5.4 : Installation de la feuille sur le support vertical .....	90
Figure 5.5 : Schéma de la chambre environnementale et des caméras.....	91
Figure 5.6 : Image de gauche et image de droite de la feuille de papier fournies par les caméras du système Aramis 3D .....	92
Figure 5.7 : Résultats expérimentaux obtenus par le système de mesure Aramis .....	94
Figure 5.8 : Mesure de la courbure principale $K_1$ en présence d'une courbure de torsion importante .....	95
Figure 5.9 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier HS.....	97
Figure 5.10 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PTM.....	98
Figure 5.11 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PJ 1.02 .....	99
Figure 5.12 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PJ 1.13 .....	100
Figure 5.13 : Courbure principale en fonction de l'humidité relative pour tous les types de papier .....	101
Figure 5.14 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A1 .....	106
Figure 5.15 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A2.....	107
Figure 5.16 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A3.....	109
Figure 5.17 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A4.....	111
Figure 5.18 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A5.....	113
Figure 5.19 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A6.....	114
Figure 5.20 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A7.....	116
Figure 5.21 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A8.....	117
Figure 5.22 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A9.....	118
Figure 5.23 : Comparaison des changements de courbure principale après 1 heure pour tous les assemblages.....	121
Figure 5.24 : Changement de courbure principale en fonction du temps et effet de la surface de mesure utilisée (en cm) pour le calcul de la courbure développée – Assemblage A6 .....	123
Figure 5.25 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A6, avec assèchement initial.....	129
Figure 5.26 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A6, sans assèchement initial .....	129
Figure 5.27 : Influence du nombre de cycles et d'un assèchement initial sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A6 .....	131
Figure 5.28 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A7, avec assèchement initial.....	133
Figure 5.29 : Influence du nombre de cycles sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A7 .....	134
Figure 5.30 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A4, avec assèchement initial.....	136
Figure 5.31 : Influence du nombre de cycles sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A4 .....	137

Figure 5.32 : Teneur en humidité et humidité relative en fonction du temps – Assemblage A9.....	141
Figure 5.33 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Assemblage A9.....	142
Figure 5.34 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A9.....	143
Figure 5.35 : Changement de courbure principale en fonction du temps pour la 1 <sup>re</sup> heure – Assemblage A9 .....	144
Figure A.1 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblages A1 et A2 .....	157
Figure A.2 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblages A1 et A2.....	158
Figure A.3 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblages A3 et A4 .....	159
Figure A.4 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblages A3 et A4.....	160
Figure A.5 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A5 .....	161
Figure A.6 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A5.....	162
Figure A.7 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A7 .....	163
Figure A.8 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A7.....	164
Figure A.9 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A8 .....	165
Figure A.10 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A8.....	166
Figure A.11 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A9 .....	167
Figure A.12 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A9.....	168
Figure A.13 : Longueur minimum requise pour avoir des solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée .....	169
Figure D.1 : Micromètre automatique.....	202
Figure D.2 : Robot TSI/TSO (a) et prise de mesure par le robot (b).....	204
Figure D.3 : Banc d'essai pour l'expansion hydrique .....	206
Figure D.4 : Mesure de l'expansion hydrique avec LVDT.....	207
Figure D.5 : Déformation moyenne et humidité relative en fonction de la teneur en humidité – Mesure des coefficients d'expansion hydrique.....	209
Figure D.6 : Essai de diffusion.....	211
Figure D.7 : Banc d'essai « scott bond ».....	215
Figure D.8 : Essai scott bond – Installation de la bande papier sur le support inférieur (a) et application de la pression (b).....	216
Figure D.9 : Essai scott bond – Échantillon de papier avant impact avec le pendule (a) et après impact (b) .....	217
Figure D.10 : Courbe de sorption – Papier HS (2 cycles consécutifs) .....	219
Figure D.11 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier HS (2 cycles consécutifs) .....	219
Figure D.12 : Courbe de sorption – Papier PTM.....	220
Figure D.13 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PTM.....	220
Figure D.14 : Courbe de sorption – Papier PJ 1.02.....	221
Figure D.15 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PJ 1.02 .....	221
Figure D.16 : Courbe de sorption – Papier PJ 1.13.....	222

Figure D.17 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PJ 1.13 .....	222
Figure D.18 : Variation de masse en fonction du temps – Papier HS .....	223
Figure D.19 : Variation de masse en fonction du temps – Papier PTM .....	224
Figure D.20 : Variation de masse en fonction du temps – Papier PJ 1.02.....	224
Figure D.21 : Variation de masse en fonction du temps.....	225
Figure D.22 : Courbe de sorption – Assemblage A1.....	227
Figure D.23 : Courbe de sorption – Assemblage A2.....	228
Figure D.24 : Courbe de sorption – Assemblage A3.....	228
Figure D.25 : Courbe de sorption – Assemblage A4.....	229
Figure D.26 : Courbe de sorption – Assemblage A5.....	229
Figure D.27 : Courbe de sorption – Assemblage A6.....	230
Figure D.28 : Courbe de sorption – Assemblage A7.....	230
Figure D.29 : Courbe de sorption – Assemblage A8.....	231
Figure D.30 : Courbe de sorption – Assemblage A9.....	231
Figure F.1 : Humidité relative en fonction du temps à l'intérieur de la chambre environnementale (saut de 75 % HR à 50 % HR).....	237
Figure F.2 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A1) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis .....	238
Figure F.3 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A4) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis .....	238
Figure F.4 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A6) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis .....	239
Figure F.5 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A9) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis .....	239
Figure G.1 : Modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité à l'équilibre .....	242
Figure G.2 : Courbure dans la direction $y$ en fonction du temps pour des modules d'élasticité variables – Assemblage A9 en désorption.....	243
Figure G.3 : Courbure dans la direction $y$ en fonction du temps pour des modules d'élasticité variables – Assemblage A9 en absorption.....	243

## Liste des tableaux

Tableau 2.1 : Propriétés de la feuille de papier multicouche.....	23
Tableau 3.1: Propriétés du carton NPB .....	58
Tableau 3.2: Propriétés du carton PB .....	58
Tableau 4.1 : Description des types de papier.....	69
Tableau 4.2: Description des essais de caractérisation.....	70
Tableau 4.3 : Résultats des essais de caractérisation – couches individuelles.....	71
Tableau 4.4 : Description des assemblages .....	73
Tableau 4.5 : Résultats des essais de caractérisation – assemblages .....	74
Tableau 4.6 : Valeurs des propriétés de l'air ambiant .....	80
Tableau 4.7 : Coefficient de convection hydrique de chaque assemblage .....	80
Tableau 5.1 : Teneurs en humidité initiales et d'équilibres et différence de teneur en humidité pour chaque assemblage .....	84
Tableau 5.2 : Courbure principale en fonction de l'humidité relative et direction principale moyenne $\theta_{\text{moy}}$ pour chaque type de papier.....	101
Tableau 5.3 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A1.....	106
Tableau 5.4 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A2.....	108
Tableau 5.5 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A3.....	109
Tableau 5.6 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A4.....	111
Tableau 5.7 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A5.....	113
Tableau 5.8 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A6.....	115
Tableau 5.9 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A7.....	116
Tableau 5.10 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A8.....	117
Tableau 5.11 : Courbure principale $K_1$ et direction principale $\theta$ – Assemblage A9.....	119
Tableau 5.12 : Erreurs relatives des modèles par rapport aux résultats expérimentaux pour le changement de courbure principale après 1 heure.....	121
Tableau 5.13 : Masses et teneurs en humidité expérimentales – Assemblage A9.....	141
Tableau 5.14 : Teneurs en humidité obtenues lors de l'essai de caractérisation (courbe de sorption) – Assemblage A9 .....	141
Tableau D.1 : Résultats des essais de caractérisation – couches individuelles.....	218
Tableau D.2 : Résultats des essais de caractérisation – assemblages .....	226
Tableau D.3 : Énergies de délaminage moyennes et mode de rupture de chaque assemblage.....	232

# Chapitre 1 Introduction

## 1.1 Généralités sur les papiers

Le papier fait partie intégrante de nos vies. Nous l'utilisons dans la plupart de nos tâches quotidiennes sans réaliser que derrière une banale feuille blanche se cache un travail colossal de recherche fondamentale et d'ingénierie. Par exemple, la société moderne requiert que nous puissions transmettre rapidement et aisément toutes sortes d'informations. Cette transmission indispensable ne serait pas aussi simple sans l'aide d'une simple feuille d'imprimante plane, sans courbures. Cette application du papier exige une qualité exceptionnelle de fabrication ainsi qu'une compréhension profonde des facteurs qui influence la forme de la feuille de papier. L'utilisation de feuilles de papier planes est aussi critique dans d'autres domaines (industrie de l'impression, produits d'emballage, etc.) et les problèmes engendrés par les courbures constituent le point de départ des présents travaux de recherche.

Pour comprendre comment la forme d'une feuille de papier peut varier, il faut d'abord connaître sa composition et son principe de fabrication. Généralement, une feuille de papier peut être vue comme un assemblage de plusieurs couches de fibres, la fibre de cellulose étant le principal constituant du papier. Les couches de fibres sont empilées successivement les unes sur les autres lors de la fabrication du papier. Idéalement, la feuille de papier conçue devrait être parfaitement uniforme, c'est-à-dire que les fibres devraient être réparties uniformément dans toutes les directions de la feuille de papier. En réalité, la fabrication du papier est un processus très complexe et les feuilles de papiers sont rarement parfaites. Par exemple, la densité de la feuille peut varier selon l'épaisseur ce qui peut aussi entraîner une variation des modules d'élasticité et des coefficients d'expansion hydrique de la feuille. Ainsi, la feuille de papier fabriquée peut ne pas être symétrique selon l'épaisseur. Cette asymétrie est critique pour la stabilité dimensionnelle et constitue l'un des principaux facteurs entraînant des courbures dans

une feuille de papier. Comme le montre la Figure 1.1, la feuille de papier peut développer des courbures de flexion le long des directions  $x$  et  $y$  ( $\kappa_x$  et  $\kappa_y$ ) et une courbure de torsion  $\kappa_{xy}$  lorsque qu'elle est soumise à un changement de sa teneur en humidité. Cette sensibilité à l'humidité s'explique par le caractère hygroscopique des fibres du papier : elles peuvent absorber ou désorber de la vapeur d'eau en fonction de l'humidité relative et de la température de l'air ambiant. La teneur en humidité va ainsi varier ce qui induit des déformations hygromécaniques dans la feuille de papier. Si cette même feuille de papier est non-symétrique par rapport à son plan moyen, les déformations hygromécaniques ne seront pas uniformes et des courbures se développeront. Il est important de préciser qu'une variation de teneur en humidité peut être induite par l'exposition de la feuille à des conditions variables d'humidité relative après sa fabrication et aussi par le processus de séchage lors de la fabrication. Une feuille de papier peut donc être « prête-à-courber » dès sa sortie de la machine à papier.

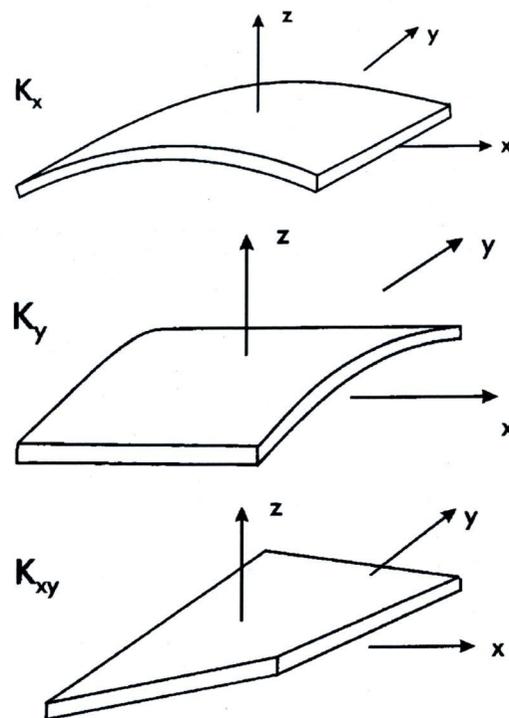


Figure 1.1 : Courbures possibles d'une feuille de papier [6]

Le caractère non-symétrique des feuilles de papiers est une des causes des problèmes de courbure. Le développement des courbures est aussi influencé par la présence de contraintes résiduelles générées lors du processus de séchage. Le problème du gauchissement de papier est ainsi très complexe à étudier. Dans ce mémoire, nous étudierons seulement les courbures induites par un changement de teneur en humidité dans des feuilles de papier multicouches.

## 1.2 Revue de littérature

Plusieurs chercheurs se sont penchés sur le problème des déformations hygromécaniques du papier dès la fin des années 1960. Cavlin et Back [1] ont montré que plusieurs facteurs tels les conditions de pressage et de séchage lors de la fabrication peuvent avoir une influence sur l'amplitude des déformations hygromécaniques et des courbures. Carlsson [2] a utilisé la théorie classique des stratifiés (CLT) pour étudier les déformations d'une feuille de papier soumise à un changement de sa teneur en humidité. Ses résultats ont montré que l'utilisation de cette théorie n'est pas adéquate. La théorie utilisée est en effet basée sur une formulation linéaire des déplacements. Or, les déplacements d'une feuille de papier sont très grands par rapport à l'épaisseur. Il faut alors tenir compte des non-linéarités géométriques dans l'analyse [3]. Hyer avait observé un phénomène similaire en étudiant les déformations thermomécaniques dans des stratifiés. Il a alors proposé un modèle semi-analytique tenant compte des non-linéarités géométriques. Ce modèle a été repris plus récemment par Nordstrom et al. [4] pour prédire la forme de feuilles de papier soumises à une variation d'humidité. Un modèle d'éléments finis a aussi été utilisé. Nordstrom et al. ont montré que les déformations calculées par le modèle d'éléments finis géométriquement non-linéaire concordent avec les résultats du modèle semi-analytique proposé par Hyer [3]. Lu et Carlsson [5] ont étudié l'influence d'une déflexion initiale sur le gauchissement subséquent des feuilles de papier. Les modèles d'éléments finis ont montré que les courbures initiales ont un effet important sur les courbures développées sous certaines conditions. De plus, Lu et Carlsson [6] ont aussi utilisé un modèle d'éléments finis pour étudier l'influence du

comportement viscoélastique sur les déformations du papier. Les analyses ont montré qu'à de faibles humidités relatives la viscoélasticité n'avait que peu d'influence sur le gauchissement.

Il est important de mentionner que tous les travaux énumérés jusqu'à maintenant ne tiennent pas compte de la diffusion de l'humidité à travers le matériau. Les modèles supposent donc que l'humidité est distribuée uniformément à travers l'épaisseur de la feuille. Cependant, tel que mentionné par Lu et Carlsson [6], une feuille de papier absorbe l'humidité plus rapidement en surface qu'en son centre. Le gradient d'humidité ainsi formé à travers l'épaisseur contribue alors aussi au développement des courbures. Les déformations induites par une variation de la teneur en humidité ne peuvent être calculées correctement qu'en modélisant le transfert d'humidité à travers l'épaisseur. À chaque pas de temps, le gradient d'humidité doit être déterminé et utilisé pour calculer les déformations correspondantes. De Monte [7] a proposé un modèle analytique de transfert thermique en régime transitoire à travers une plaque multicouche. Ce modèle est analogue à un modèle de diffusion en régime transitoire de l'humidité.

Récemment, des travaux sur la modélisation du gauchissement hygromécanique du carton [8] ont été initiés au Groupe interdisciplinaire de recherche en élément finis (GIREF) de l'Université Laval. Les déformations de deux types de cartons soumis à un changement de teneur en humidité de 5 % ont été étudiées. Le modèle d'éléments finis prédit que les deux cartons prennent des formes cylindriques différentes. Le modèle semi-analytique révèle que les feuilles de carton possèdent plusieurs courbes d'équilibre. La forme d'équilibre correspondant au minimum d'énergie potentielle élastique est celle prédite par le modèle d'éléments finis. Les travaux de modélisation par éléments finis ont été poursuivis pour tenir compte du transfert d'humidité à travers l'épaisseur des feuilles de carton. Pour un des cartons, la configuration d'équilibre calculée avec le modèle transitoire ne correspond pas à celle calculée avec le modèle stationnaire. Il semble donc que pour certains cartons, la diffusion progressive de l'humidité à travers l'épaisseur ait une influence sur la direction suivant laquelle le carton développe une courbure. Des

essais expérimentaux et des analyses numériques supplémentaires seraient nécessaires pour étudier ce phénomène de façon plus approfondie.

Plusieurs travaux de recherche ont aussi été menés dans le domaine de la mesure expérimentale des déformations hygromécaniques. La plupart des travaux effectués jusqu'à maintenant mesurent les déplacements de feuilles de papier en certains points. La forme de la feuille doit ensuite être déterminée et la courbure peut être calculée. Il est important de préciser que la mesure des déplacements doit être faite sans contact avec la feuille de papier et que cette feuille doit être installée dans un environnement contrôlé. Eriksson et al. [9] ont développé un appareil de mesure automatique des courbures pour des feuilles de papier de 100 mm × 100 mm. Les déplacements sont mesurés sans contact à l'aide d'un capteur optique et la courbure est calculée par la suite. Toute l'instrumentation est montée sur un banc d'essai incluant une chambre environnementale et un ordinateur. Les mesures montrent que la plupart des papiers commerciaux se courbent en direction transverse, ont une courbure non nulle à une humidité relative de 50 % et que les papiers de faibles densités se courbent davantage. D'autre part, Nordstrom et al. [10] ont utilisé un faisceau laser pour mesurer les déplacements de diverses feuilles de papier. Leurs résultats ont indiqué que la relation simplifiée permettant de mesurer la courbure (courbure = inverse du rayon) est valide pour des feuilles de papier présentant de faibles déplacements. Ils ont aussi montré que l'influence de la gravité est négligeable lors de la mesure des courbures si les feuilles sont placées verticalement. D'autre part, Synnergren et al. [11] ont utilisé un appareil de la compagnie Fibro dédié à la mesure des déplacements dans les trois dimensions pour estimer la courbure de feuilles de papier. Dans le cadre du présent travail, c'est le système de mesure Aramis 3D [12] qui sera utilisé pour mesurer les courbures de feuilles de papier en fonction de l'humidité. Ce système de mesure par corrélation d'images utilise deux caméras vidéo de haute précision pour mesurer les déplacements d'une structure. Ce système n'a pas été utilisé auparavant pour ce type d'essai.

### 1.3 Objectifs de la recherche et présentation du mémoire

La plupart des travaux de recherche présentés dans la section précédente font référence à des modèles stationnaires pour prédire le développement des courbures de feuilles de papier multicouches. Or, il s'avère que les courbures varient de façon importante en fonction du temps et que cette variation est déterminée par le processus de diffusion de l'humidité à travers la feuille de papier. L'objectif général de la recherche présentée dans ce mémoire est donc de développer un modèle de prédiction des déformations hygromécaniques d'une feuille de papier multicouche en régime transitoire qui tient compte du processus de diffusion de l'humidité. Ce modèle devra être validé par un modèle d'éléments finis et par des essais expérimentaux de mesures des courbures. À plus long terme, ce modèle deviendra un outil d'analyse qui pourra être utilisé pour concevoir des papiers ou cartons multicouches ayant une meilleure stabilité dimensionnelle. Pour atteindre cet objectif, la recherche sera divisée en trois étapes :

- 1) modélisation des phénomènes hygromécaniques
- 2) caractérisation en laboratoire des propriétés importantes pour la modélisation
- 3) validation du modèle en comparant les prédictions obtenues à des mesures expérimentales.

Le présent travail contient quatre chapitres excluant la présente introduction. Au Chapitre 2, le modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques d'une feuille de papier multicouche en régime transitoire est présenté. Dans un premier temps, le modèle de diffusion transitoire de l'humidité à travers la feuille de papier est décrit. Dans un deuxième temps, les équations du modèle de prédiction des déformations hygromécaniques sont présentées.

Le modèle présenté au Chapitre 2 est validé à l'aide d'un modèle d'éléments finis au Chapitre 3. Différents résultats (teneur en humidité, déplacements, courbures) sont comparés. Ce chapitre présente aussi les prédictions du modèle pour les deux types de cartons utilisés dans l'étude de Cloutier, Gendron et Dano [8].

Afin de pouvoir valider expérimentalement le modèle théorique développé, des feuilles de papier ont été fabriquées. Le Chapitre 4 présente les résultats des essais de caractérisation des différents papiers fabriqués qui seront utilisés pour les essais expérimentaux de mesure des courbures. La nature de la composition de même que les valeurs de toutes les propriétés utilisées par le modèle y sont présentées pour chaque papier.

Finalement, la mesure expérimentale des courbures des différents types de papier est décrite en détails au Chapitre 5. Ce chapitre inclut la problématique, la description du système de mesure, la procédure expérimentale de même que les résultats de tous les essais de courbures. Ces mesures expérimentales seront comparées aux résultats du modèle théorique.

## **Chapitre 2    Modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche**

### **2.1 Introduction**

Tel que mentionné précédemment, l'objectif principal de ces travaux de recherche est de développer un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche. Pour atteindre cet objectif, on peut aborder le problème en deux parties : la diffusion transitoire de l'humidité à travers la feuille de papier et le développement des déformations hygromécaniques résultantes. Ce chapitre présente donc d'abord le modèle de diffusion transitoire de l'humidité. Ce modèle est basé sur un modèle analogue de transfert thermique transitoire à l'intérieur d'une plaque composite. Ensuite, le modèle de prédiction des déformations hygromécaniques est présenté. Ce modèle basé sur la théorie classique des stratifiés tient compte des effets de non-linéarité géométrique selon von Karman pour prédire les déplacements.

### **2.2 Modèle de diffusion transitoire de l'humidité dans une feuille de papier multicouche**

#### ***2.2.1 Description du problème***

Soit une feuille de papier constituée de  $M$  couches parallèles (voir Figure 2.1), analogue à une plaque composite rectangulaire. Le contact hydrique entre les couches est parfait. Soient  $D_i$  et  $\rho_i$ , le coefficient de diffusion effectif de l'humidité et la masse volumique de la  $i^{\text{e}}$  couche, respectivement ( $i = 1, 2, \dots, M$ ). Initialement, à  $t = 0^-$ , la

feuille incluse dans le domaine  $z_1 \leq z \leq z_{M+1}$  possède une teneur en humidité uniforme  $H_0$ . Soudainement, à  $t = 0^+$ , les deux surfaces externes de la feuille sont soumises à un flux hydrique par convection. Spécifiquement, un fluide humide correspondant à une teneur en humidité d'équilibre du papier  $H_\infty$  et possédant un coefficient de transfert convectif  $h_{haut}$  circule au-dessus de la surface supérieure, en  $z = z_1$  et un autre fluide humide correspondant à la même teneur en humidité d'équilibre du papier  $H_\infty$  et possédant un coefficient de transfert convectif  $h_{bas}$  circule en-dessous de la surface inférieure, en  $z = z_{M+1}$ .

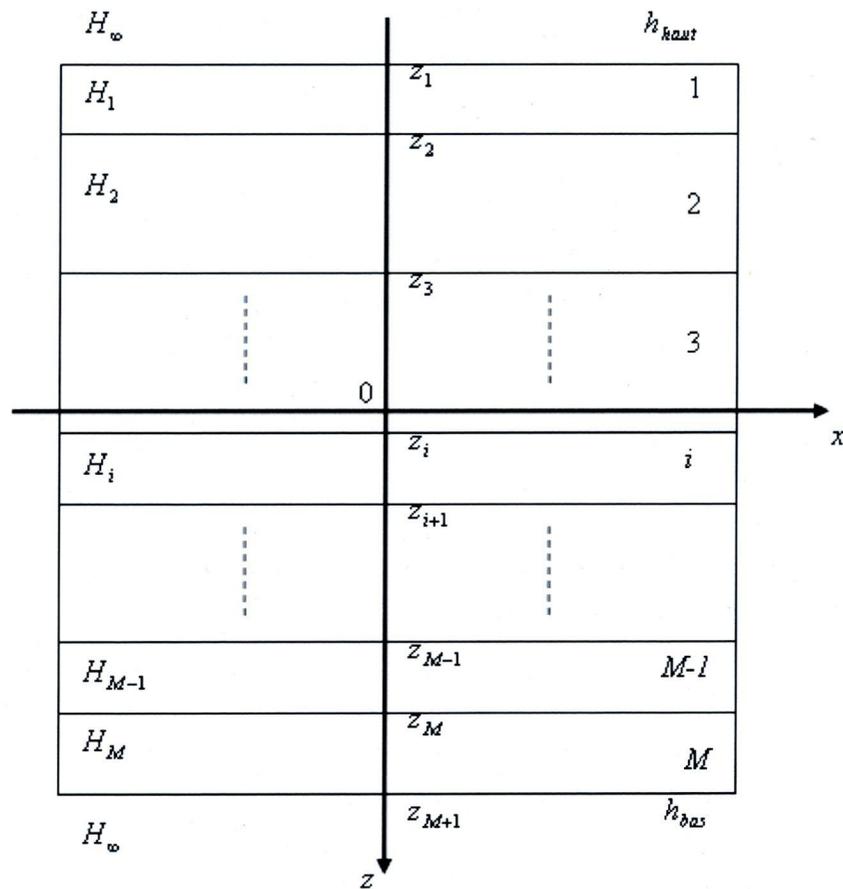


Figure 2.1 : Représentation de la feuille de papier multicouche dans le plan (x, z)

Les hypothèses utilisées pour le développement du modèle mathématique du processus de diffusion transitoire de l'humidité sont :

- a) il n'y a aucune génération d'humidité à l'intérieur de la feuille;
- b) le coefficient de diffusion effectif de l'humidité  $D_i$  de même que la masse volumique  $\rho_i$  sont indépendants de la teneur en humidité et sont uniformes à travers chacune des  $M$  couches;
- c) le fluide humide entourant le composite est spatialement uniforme et la teneur en humidité d'équilibre du papier correspondante  $H_\infty$  est maintenue constante tout au long du processus pour  $t > 0$ ;
- d) la feuille possède des dimensions en  $x$  et  $y$  suffisamment grandes par rapport à son épaisseur dans la direction  $z$ ;
- e) les coefficients de transfert convectif  $h_{haut}$  et  $h_{bas}$  sont uniformes et constants.

Ainsi, le processus de diffusion transitoire de l'humidité est considéré linéaire, unidimensionnel et homogène. Définissons  $\theta_i(z,t) = H_\infty - H_i(z,t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, M$ ), la différence entre la teneur en humidité (%) de la feuille de papier en équilibre avec l'air ambiant et la teneur en humidité (%) de la  $i^e$  couche de la feuille, à la position  $z$  et à l'instant  $t$ . La formulation mathématique du problème est valide pour  $t \geq 0$ .

Les équations différentielles de la diffusion transitoire de l'humidité dans la feuille multicouche sont, selon la loi de Fick [7] :

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial z^2} = \frac{1}{D_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t}, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.1)$$

La surface supérieure est soumise à de la convection. Cette condition limite s'écrit :

$$-k_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial z} \right)_{z_1} + h_{haut} \theta_1(z_1, t) = 0, \quad (2.2)$$

où  $k_1 = \frac{D_1 \rho_1}{100}$  est le coefficient de diffusivité effectif de l'humidité de la première couche.

Entre les différentes couches, on pose l'hypothèse que la teneur en humidité et le flux hydrique sont continus. Ces conditions limites s'expriment par :

$$\theta_{i-1}(z_i, t) = \theta_i(z_i, t) \quad (i = 2, 3, \dots, M), \quad (2.3)$$

$$k_{i-1} \left( \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial z} \right)_{z_i} = k_i \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial z} \right)_{z_i} \quad (i = 2, 3, \dots, M), \quad (2.4)$$

où  $k_i = \frac{D_i \rho_i}{100}$  est le coefficient de diffusivité effectif de l'humidité de la  $i^e$  couche. La surface inférieure est également soumise à de la convection. Cette condition limite s'écrit :

$$k_M \left( \frac{\partial \theta_M}{\partial z} \right)_{z_{M+1}} + h_{bas} \theta_M(z_{M+1}, t) = 0. \quad (2.5)$$

Enfin, les conditions initiales sont :

$$\theta_i(z, t = 0) = \theta_0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.6)$$

où  $\theta_0 = H_\infty - H_0$  est la différence entre la teneur en humidité (%) de la feuille de papier en équilibre avec l'air ambiant et la teneur en humidité (%) initiale de la feuille.

Le système d'équations (2.1) à (2.6) peut être résolu analytiquement tel qu'expliqué dans la prochaine section.

### 2.2.2 *Résolution du problème de diffusion transitoire par une approche « naturelle »*

La technique de résolution du système d'équations (2.1) à (2.6) présenté dans cette section est analogue à celle utilisée pour un problème de transfert thermique, telle que développée par de Monte [7].

L'équation différentielle (2.1) peut être résolue par la méthode de séparation des variables, en supposant un produit de solutions :

$$\theta_i(z,t) = Z_i(z)G_i(t), \quad t \geq 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.7)$$

En substituant l'équation (2.7) dans l'équation (2.1), on obtient la forme modifiée des équations de diffusion transitoire de l'humidité :

$$\frac{1}{Z_i} \frac{d^2 Z_i}{dz^2} = \frac{1}{D_i G_i} \frac{dG_i}{dt} = -\lambda_i^2, \quad t \geq 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.8)$$

où  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) sont les constantes de séparation de chaque couche. Les coefficients de diffusion effectifs de l'humidité  $D_i$  se retrouvent du même côté que les fonctions temporelles  $G_i(t)$ . Cette façon « naturelle » de séparer les équations permet d'obtenir des fonctions  $G_i(t)$  qui dépendent explicitement des coefficients de diffusion effectifs correspondants. Ainsi, la solution analytique du problème demeure cohérente avec la réalité physique du processus de diffusion transitoire de l'humidité. La séparation

« naturelle » donnée par les équations (2.8) produit  $2 \times M$  équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dG_i}{dt} + \lambda_i^2 D_i G_i = 0, \quad t \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 Z_i}{dz^2} + \lambda_i^2 Z_i = 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.10)$$

Les solutions pour les fonctions temporelles sont obtenues à partir de l'équation (2.9) :

$$G_i(t) = e^{-\lambda_i^2 D_i t}, \quad t \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.11)$$

Les solutions pour les fonctions spatiales sont obtenues en résolvant les équations d'Helmholtz (2.10) à une seule variable ( $z$ ). Elles s'écrivent :

$$Z_i(z) = a_i Z_a(\lambda_i, z) + b_i Z_b(\lambda_i, z), \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.12)$$

où  $Z_a(\lambda_i, z)$  et  $Z_b(\lambda_i, z)$  sont des solutions linéairement indépendantes des équations (2.11), et  $a_i$  et  $b_i$  sont les constantes d'intégrations reliées à la  $i^e$  couche de la feuille.

Les solutions s'expriment par  $Z_a(\lambda_i, z) = \sin(\lambda_i z)$  et  $Z_b(\lambda_i, z) = \cos(\lambda_i z)$ .

### 2.2.3 Application des conditions limites

En considérant que les solutions de  $\theta_i(z,t) = Z_i(z)G_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) doivent satisfaire les conditions limites données par les équations (2.2) à (2.5), on obtient les expressions suivantes :

$$Z_i(z) = a_1 \phi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i) \tilde{Z}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i, z), \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.13)$$

$$\lambda_i = \lambda_1 \sqrt{D_1/D_i} \quad (i = 2, 3, \dots, M). \quad (2.14)$$

Les équations (2.14) contraignent les constantes de séparation  $\lambda_i$  et les coefficients de diffusion effectifs  $D_i$ . Comme ces coefficients sont généralement différents d'une couche à l'autre d'une feuille de papier (discontinus à l'interface de séparation des couches), les équations (2.14) sont fondamentales pour assurer la vérification des conditions limites internes (2.3) et (2.4).

Les fonctions  $\phi_i$  et  $\tilde{Z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) qui se retrouvent dans les équations (2.13) sont données par :

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda_1) &= 1, \\ \phi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i) &= \phi_{i,i-1} \phi_{i-1,i-2} \dots \phi_{3,2} \phi_{2,1} \quad (i = 2, 3, \dots, M), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i, z) &= Z_a(\lambda_i, z) + \Pi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i) Z_b(\lambda_i, z), \\ z &\in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Les fonctions  $\phi_{i,i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, M$ ) qui se retrouvent dans les équations (2.15) sont données par :

$$\phi_{i,i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_i) = \frac{\tilde{Z}_{i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, z_i)}{\tilde{Z}_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i, z_i)} \quad (i=2, 3, \dots, M), \quad (2.17)$$

$$\phi_{M,M-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_M) = \frac{k_{M-1} \tilde{Z}'_{M-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}, z_M)}{k_M \tilde{Z}'_M(\lambda_1, \dots, \lambda_M, z_M)}. \quad (2.18)$$

La fonction  $\phi_{M,M-1}$  peut être obtenue par l'équation (2.17) avec  $i = M$  et par l'équation (2.18). Les expressions  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) qui se retrouvent explicitement dans les équations (2.16) et implicitement dans les équations (2.17) et (2.18) par le biais de  $\tilde{Z}'_i$  sont données par :

$$\Pi_1(\lambda_1) = -\frac{h_{haut} Z_a(\lambda_1, z_1) - k_1 Z'_a(\lambda_1, z_1)}{h_{haut} Z_b(\lambda_1, z_1) - k_1 Z'_b(\lambda_1, z_1)}, \quad (2.19)$$

$$\Pi_i(\lambda_1, \dots, \lambda_i) = \frac{-\left[ k_i Z'_a(\lambda_i, z_i) \tilde{Z}_{i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, z_i) - k_{i-1} Z_a(\lambda_i, z_i) \tilde{Z}'_{i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, z_i) \right]}{\left[ k_i Z'_b(\lambda_i, z_i) \tilde{Z}_{i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, z_i) - k_{i-1} Z_b(\lambda_i, z_i) \tilde{Z}'_{i-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, z_i) \right]},$$

$$(i = 2, 3, \dots, M), \quad (2.20)$$

$$\Pi_M(\lambda_M) = -\frac{h_{bas} Z_a(\lambda_M, z_{M+1}) + k_M Z'_a(\lambda_M, z_{M+1})}{h_{bas} Z_b(\lambda_M, z_{M+1}) + k_M Z'_b(\lambda_M, z_{M+1})}. \quad (2.21)$$

Encore ici, la fonction  $\Pi_M$  peut être obtenue par l'équation (2.20) avec  $i = M$  et par l'équation (2.21). En considérant les équations (2.14), on constate que ces deux dernières équations dépendent seulement de la constante de séparation  $\lambda_1$ .

### 2.2.4 Calcul des valeurs propres de la solution

En considérant les  $M - 1$  relations des équations (2.14) et en posant  $\lambda_1 = \lambda$  et  $a_1 = s$ , l'équation (2.7) peut s'écrire:

$$\theta_i(z, t) = s\phi_i(\lambda)\tilde{Z}_i(\lambda, z)e^{-\lambda^2 D_i t}, \quad t \geq 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (2.22)$$

où les fonctions  $\tilde{Z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) données par l'équation (2.16) deviennent :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_i(\lambda, z) &= Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z) + \Pi_i(\lambda)Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z), \\ z &\in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.10), c'est-à-dire  $Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z)$  et  $Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z)$ , qui se retrouvent dans l'équation (2.23) sont obtenues en substituant l'équation (2.14) dans les équations  $Z_a(\lambda_i, z) = \sin(\lambda_i z)$  et  $Z_b(\lambda_i, z) = \cos(\lambda_i z)$ . De plus, les fonctions  $\phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) sont toujours définies par les équations (2.15) et les fonctions inhérentes  $\phi_{i,i-1}$  ( $i = 2, 3, \dots, M$ ) peuvent être exprimées par :

$$\phi_{i,i-1}(\lambda) = \frac{\tilde{Z}_{i-1}(\lambda, z_i)}{\tilde{Z}_i(\lambda, z_i)} \quad (i = 2, 3, \dots, M), \quad (2.24)$$

$$\phi_{M,M-1}(\lambda) = \frac{k_{M-1} \tilde{Z}'_{M-1}(\lambda, z_M)}{k_M \tilde{Z}'_M(\lambda, z_M)}. \quad (2.25)$$

Les fonctions  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) deviennent :

$$\Pi_1(\lambda) = -\frac{h_{haut} Z_a(\lambda, z_1) - k_1 Z'_a(\lambda, z_1)}{h_{haut} Z_b(\lambda, z_1) - k_1 Z'_b(\lambda, z_1)}, \quad (2.26)$$

$$\Pi_i(\lambda) = -\frac{[k_i Z'_a(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z_i) \tilde{Z}_{i-1}(\lambda, z_i) - k_{i-1} Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z_i) \tilde{Z}'_{i-1}(\lambda, z_i)]}{[k_i Z'_b(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z_i) \tilde{Z}_{i-1}(\lambda, z_i) - k_{i-1} Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_i}, z_i) \tilde{Z}'_{i-1}(\lambda, z_i)]},$$

$$(i = 2, 3, \dots, M), \quad (2.27)$$

$$\Pi_M(\lambda) = -\frac{[h_{bas} Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1}) + k_M Z'_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1})]}{[h_{bas} Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1}) + k_M Z'_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1})]}. \quad (2.28)$$

En comparant l'équation (2.24) pour  $i = M$  et l'équation (2.25), de même que l'équation (2.27) pour  $i = M$  et l'équation (2.28), on obtient le système d'équations algébriques suivant :

$$\frac{\tilde{Z}_{M-1}(\lambda, z_M)}{\tilde{Z}_M(\lambda, z_M)} - \frac{k_{M-1}}{k_M} \frac{\tilde{Z}'_{M-1}(\lambda, z_M)}{\tilde{Z}'_M(\lambda, z_M)} = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{[k_M Z'_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_M) \tilde{Z}_{M-1}(\lambda, z_M) - k_{M-1} Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_M) \tilde{Z}'_{M-1}(\lambda, z_M)]}{[k_M Z'_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_M) \tilde{Z}_{M-1}(\lambda, z_M) - k_{M-1} Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_M) \tilde{Z}'_{M-1}(\lambda, z_M)]} - \frac{[h_{bas} Z_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1}) + k_M Z'_a(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1})]}{[h_{bas} Z_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1}) + k_M Z'_b(\lambda\sqrt{D_1/D_M}, z_{M+1})]} = 0. \quad (2.30)$$

Ainsi, les équations (2.22) satisfont simultanément les équations (2.1) à (2.5), où  $s$  est une constante qui dépend des conditions initiales (2.6) et  $\lambda$  est un nombre supérieur à 0 qui vérifie simultanément les équations transcendentales (2.29) et (2.30). Par contre, seule l'équation (2.30) représente la condition de valeur propre du problème

de diffusion transitoire de l'humidité considéré. Cette équation nous permet de calculer les valeurs propres  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) correspondantes. En fait, en substituant l'équation (2.23) pour  $i = M$  dans l'équation (2.29), on peut démontrer que l'équation obtenue se réduit à l'équation (2.27) pour  $i = M$ . Donc, l'équation (2.29) ne nous permet pas de trouver les valeurs propres du problème.

Il faut noter que le calcul des valeurs propres  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) est effectué en résolvant l'équation (2.30) par une technique numérique. Ici, la méthode de Newton-Raphson est appliquée pour trouver ces valeurs.

D'autre part, il existe une infinité de solutions de la forme (2.22), chacune correspondant à une valeur consécutive des valeurs propres  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ):

$$\begin{aligned} \theta_{i,m}(z, t) &= s_m \phi_{i,m} \tilde{Z}_{i,m}(z) e^{-\lambda_m^2 D_i t}, \\ t \geq 0, \quad z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $\phi_{i,m} = \phi_i(\lambda_m)$  et  $\phi_{i,i-1,m} = \phi_{i,i-1}(\lambda_m)$ . Les fonctions  $\tilde{Z}_{i,m}(z) = \tilde{Z}_i(\lambda_m, z)$  sont des fonctions propres correspondantes aux valeurs propres  $\lambda_m$  et sont définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{i,m}(z) &= Z_a(\lambda_m \sqrt{D_1/D_i}, z) + \Pi_{i,m} Z_b(\lambda_m \sqrt{D_1/D_i}, z), \\ z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M), \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $\Pi_{i,m} = \Pi_i(\lambda_m)$ . On peut prouver que les fonctions propres  $\tilde{Z}_{i,m}(z)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) définies par les équations (2.32) sont des fonctions orthogonales [7]. En fait, elles satisfont la relation d'orthogonalité suivante :

$$\sum_{i=1}^M \phi_{i,m} \phi_{i,n} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,m}(z) \tilde{Z}_{i,n}(z) dz = \begin{cases} 0, m \neq n \\ N_m, m = n \end{cases} \quad (2.33)$$

Cette propriété d'orthogonalité peut être qualifiée de « naturelle », en accord avec la séparation de variable « naturelle » présente dans la forme modifiée des équations de diffusion transitoire de l'humidité (2.8). Les fonctions  $\tilde{Z}_{i,m}(z)$  et  $\tilde{Z}_{i,n}(z)$  qui se retrouvent dans les équations (2.33) représentent deux fonctions propres différentes de la  $i^{\text{e}}$  couche correspondantes à deux valeurs propres différentes  $\lambda_m$  et  $\lambda_n$ , respectivement. La constante  $N_m$ , appelée intégrale de normalisation (norme) et reliée à  $\lambda_m$ , est définie par :

$$N_m = \sum_{i=1}^M (\phi_{i,m})^2 \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} (\tilde{Z}_{i,m})^2 dz. \quad (2.34)$$

Dans ce cas-ci, son intégrale peut être évaluée par [7] :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} (\tilde{Z}_{i,m})^2 dz = \left[ \frac{z(\tilde{Z}_{i,m})^2}{2} \right]_{z_i}^{z_{i+1}} + \left[ \frac{z(\tilde{Z}'_{i,m})^2}{2\lambda_m^2 (D_1/D_i)} \right]_{z_i}^{z_{i+1}} - \left[ \frac{\tilde{Z}_{i,m} \tilde{Z}'_{i,m}}{2\lambda_m^2 (D_1/D_i)} \right]_{z_i}^{z_{i+1}},$$

$$(i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.35)$$

Ainsi, les solutions complètes pour les distributions de la teneur en humidité  $\theta_i(z, t)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) sont construites en prenant la somme linéaire de toutes les solutions individuelles données par les équations (2.31) :

$$\theta_i(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \phi_{i,m} \tilde{Z}_{i,m}(z) e^{-\lambda_m^2 D_i t}, \quad t \geq 0, \quad (2.36)$$

$$z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M).$$

où la sommation est effectuée sur toutes les valeurs propres. Les formes finales des solutions en séries satisfont les équations différentielles de la diffusion transitoire de l'humidité (2.1) et les conditions limites (2.2)-(2.5). Cependant, elles ne satisfont pas les conditions initiales (2.6). Celles-ci doivent être appliquées pour évaluer la dernière inconnue  $s_m$ .

### 2.2.5 Application des conditions initiales

Dans le but de satisfaire les conditions initiales (2.6), nous substituons  $t = 0$  dans les solutions (2.30). On obtient ainsi :

$$\theta_0 = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \phi_{i,m} \tilde{Z}_{i,m}(z), \quad (2.37)$$

$$z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M).$$

Les coefficients  $s_m$  peuvent être déterminés en utilisant la relation d'orthogonalité (2.33). Chaque côté de l'équation (2.37) peut être multiplié par  $(k_i/D_i)\phi_{i,n}\tilde{Z}_{i,n}(z)$  et les expressions résultantes peuvent être intégrées par rapport à  $z$  de  $z = z_i$  à  $z = z_{i+1}$ . On obtient ainsi :

$$\theta_0 \phi_{i,n} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,n}(z) dz = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \phi_{i,m} \phi_{i,n} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,m}(z) \tilde{Z}_{i,n}(z) dz, \quad (2.38)$$

$$(i = 1, 2, \dots, M).$$

En faisant la sommation des expressions (2.38) de  $i = 1$  à  $M$  (dans toute la feuille multicouche), on obtient :

$$\sum_{i=1}^M \theta_0 \phi_{i,n} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,n}(z) dz = \sum_{m=1}^{\infty} s_m \left[ \sum_{i=1}^M \phi_{i,m} \phi_{i,n} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,m}(z) \tilde{Z}_{i,n}(z) dz \right]. \quad (2.39)$$

Selon la propriété d'orthogonalité (2.33), le terme à l'intérieur des crochets du côté droit de l'équation (2.39) s'élimine pour  $m \neq n$ , et devient égal à  $N_m$  exprimé par les équations (2.34) et (2.35) pour  $m = n$ . Ainsi, les coefficients  $s_m$  sont donnés par :

$$s_m = \frac{\theta_0}{N_m} \sum_{i=1}^M \phi_{i,m} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,m}(z) dz. \quad (2.40)$$

L'intégrale apparaissant du côté droit de l'équation (2.40) peut être résolue en appliquant une intégration par partie [7] :

$$\int_{z_i}^{z_{i+1}} \tilde{Z}_{i,m}(z) dz = - \left[ \frac{\tilde{Z}'_{i,m}(z)}{\lambda_m^2 (D_1/D_i)} \right]_{z_i}^{z_{i+1}}, \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.41)$$

Finalement, en combinant les équations (2.40) et (2.41), on exprime les coefficients  $s_m$  par :

$$s_m = \frac{\theta_0}{N_m} \sum_{i=1}^M \phi_{i,m} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \left\{ - \left[ \frac{\tilde{Z}'_{i,m}(z)}{\lambda_m^2 (D_1/D_i)} \right]_{z_i}^{z_{i+1}} \right\}, \quad (2.42)$$

$(i = 1, 2, \dots, M).$

### 2.2.6 Expression de la distribution d'humidité

En utilisant les définitions de la différence de teneur en humidité  $\theta_i(z, t) = H_\infty - H_i(z, t)$ , de la différence initiale de teneur en humidité  $\theta_0 = H_\infty - H_0$ , l'équation (2.36) et l'équation (2.42), on peut exprimer la distribution de la teneur en humidité pour une couche individuelle de la façon suivante :

$$H_i(z, t) = H_\infty - (H_\infty - H_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_m} \left\{ \sum_{i=1}^M \phi_{i,m} \left( \frac{k_i}{D_i} \right) \left[ \frac{\tilde{Z}'_{i,m}(z)}{\lambda_m^2 (D_1/D_i)} \right]_{z_i}^{z_{i+1}} \right\} \phi_{i,m} \tilde{Z}_{i,m}(z) e^{-\lambda_m^2 D_1 t},$$

$$z \in [z_i, z_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (2.43)$$

Pour l'ensemble des couches de la feuille de papier, la distribution de la teneur en humidité sera une fonction par morceaux définie de la façon suivante :

$$H(z, t) = \begin{cases} H_1(z, t), z_1 \leq z \leq z_2 \\ H_2(z, t), z_2 \leq z \leq z_3 \\ \dots \\ H_i(z, t), z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ \dots \\ H_{M-1}(z, t), z_{M-1} \leq z \leq z_M \\ H_M(z, t), z_M \leq z \leq z_{M+1} \end{cases} \quad (2.44)$$

Les équations (2.1) à (2.44) ont été programmées à l'aide du logiciel Mathematica [13] (voir 5.9 Annexe B). Le programme obtenu permet de prédire en fonction du temps la distribution de la teneur en humidité d'une feuille de papier constituée d'un nombre  $M$  de couches.

**2.2.7 Exemple d'application : distribution de la teneur en humidité pour une feuille de papier multicouche et étude de l'effet du nombre de valeurs propres utilisé ( $m$ )**

Le programme développé dans Mathematica a été utilisé dans le cas d'une feuille composée de trois couches dont les propriétés sont données au Tableau 2.1. La teneur en humidité initiale appliquée est  $H_0 = 14,0 \%$ , correspondant à une humidité relative de 75 %. La teneur en humidité d'équilibre appliquée est  $H_\infty = 10,8 \%$ , correspondant à une humidité relative de 50 %. On utilise donc le modèle de diffusion en régime transitoire pour prédire la distribution de la teneur en humidité à différents temps ainsi que la teneur en humidité en fonction du temps au centre de la feuille de papier. De plus, l'effet du nombre de valeurs propres  $m$  utilisé est aussi étudié. Les résultats sont présentés aux Figures 2.2 à 2.5.

**Tableau 2.1 : Propriétés de la feuille de papier multicouche**

Nom	Propriété	Unité	Dessus	Milieu	Dessous
Épaisseur	$e$	$\mu\text{m}$	100	132	115
Masse volumique	$\rho$	$(\text{kg}/\text{m}^3)$	448	343	535
Module d'élasticité, direction 1	$E_1$	$(\text{GPa})$	4,41	3,09	4,04
Module d'élasticité, direction 2	$E_2$	$(\text{GPa})$	2,01	1,02	4,04
Module de cisaillement	$G_{12}$	$(\text{GPa})$	1,04	0,59	1,46
Coefficient de poisson	$\nu_{21}$		0,12	0,12	0,27
Coefficient d'expansion hydrique, direction 1	$\beta_1$				
	30-80 % HR	$(10^{-3} / \%)$	0,47	0,35	0,40
	80-50 % HR	$(10^{-3} / \%)$	0,46	0,38	0,56
Coefficient d'expansion hydrique, direction 2	$\beta_2$				
	30-80 % HR	$(10^{-3} / \%)$	1,07	0,93	0,40
	80-50 % HR	$(10^{-3} / \%)$	1,38	1,57	0,56
Coefficient de diffusion effectif	$D$	$(10^{-11} \text{ m}^2/\text{s})$	6,90	13,92	7,73
Coefficient de convection hydrique	$h = h_{\text{haut}} = h_{\text{bas}}$	$(10^{-6} \text{ kg}/\text{m}^2\text{s}\%)$	5,39		

La Figure 2.2 montre la distribution de la teneur en humidité selon l'épaisseur de la feuille pour différents temps. Comme on est en désorption ( $H_0 > H_\infty$ ), on remarque que la teneur en humidité au centre de la feuille ( $z = 0$ ) est supérieure à la teneur en humidité aux surfaces externes et ce, pour tout le processus de diffusion précédent l'état stationnaire ( $t = 3600$  s). Au début de la diffusion, à  $t = 0^-$ , la distribution oscille autour de la teneur en humidité initiale prescrite ( $H_0 = 14,0$  %). Puis, à  $t = 0^+$ , les surfaces externes de la feuille sont exposées à une teneur en humidité d'équilibre ( $H_\infty = 10,8$  %) inférieure à la teneur en humidité initiale. La vapeur d'eau à l'intérieur de la feuille s'échappe donc principalement par les surfaces externes, d'où la baisse rapide de la teneur en humidité dans ces régions. Peu à peu, la teneur en humidité diminue dans tout l'assemblage pour finalement atteindre la teneur en humidité d'équilibre à l'état stationnaire à  $t = 3600$  s.

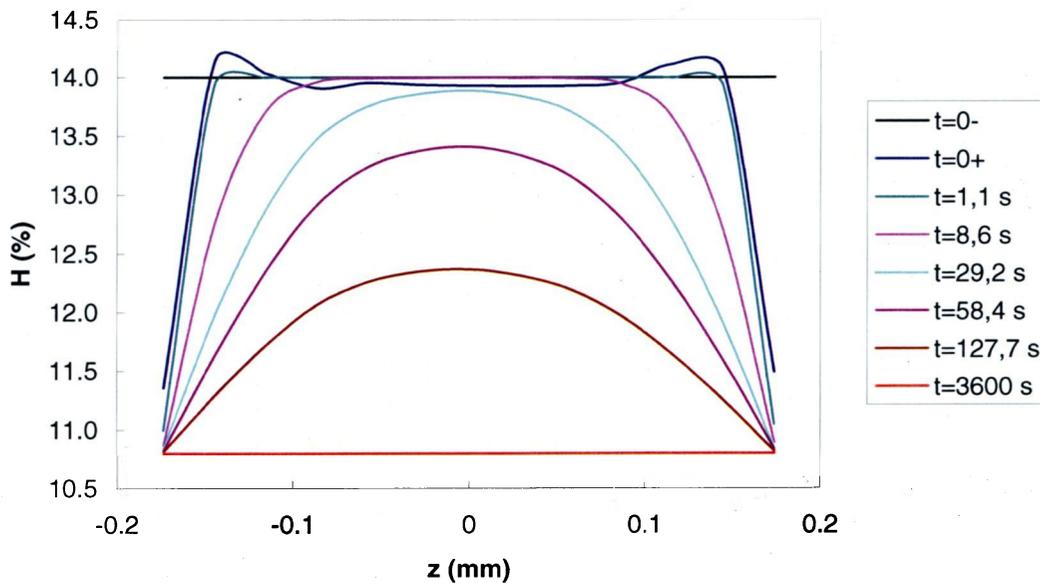
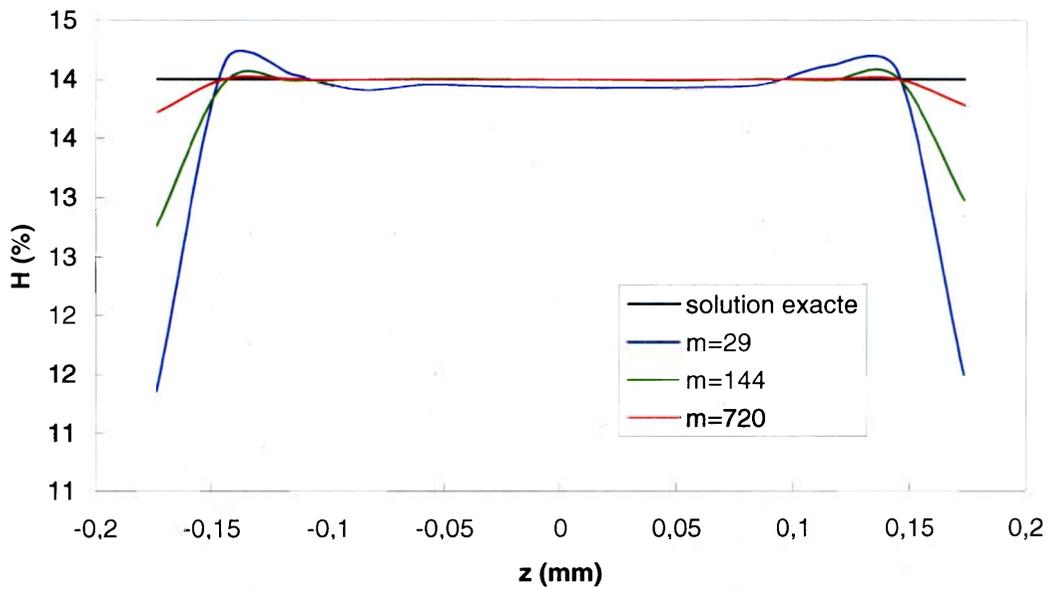


Figure 2.2 : Distributions de la teneur en humidité pour différents temps ( $m = 29$ )

La Figure 2.2 indique aussi que les distributions au début de la diffusion ( $t = 0^+$  et  $t = 1,1$  s) présentent des oscillations. Ces oscillations sont dues au fait que le modèle

semi-analytique utilise une série à  $m$  termes (en sinus et cosinus) pour approximer la distribution de la teneur en humidité et ce, en tout temps. En effet, à la section 2.2.4, on explique que l'équation (2.30) est résolue par une technique numérique dans le but de trouver les premières racines positives et consécutives  $\lambda_m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) qui satisfont l'équation (2.30). Ces racines sont les valeurs propres du problème de diffusion transitoire de l'humidité. Comme la distribution de la teneur en humidité est une approximation sous la forme d'une sommation de  $m$  termes, il y aura autant de termes pour approximer la solution exacte que de valeurs propres calculées  $\lambda_m$ . En principe, plus  $m$  est élevé, plus l'approximation se rapproche de la solution exacte.

Le nombre de valeurs propres utilisé pour calculer les distributions de la Figure 2.2 est relativement peu élevé ( $m = 29$ ). On s'attend donc à observer une oscillation autour de la valeur initiale prescrite à  $t = 0$ . Or, si on augmente le nombre de racines (par exemple,  $m = 144$ ), cette oscillation sera plus faible et la distribution initiale de la teneur en humidité prédite par le modèle semi-analytique sera beaucoup plus proche de la solution exacte (la droite passant par  $H(z, t = 0) = H_0 = 14,0 \%$ ). La Figure 2.3 illustre cette tendance. On voit que plus  $m$  augmente, plus la solution tend vers la solution exacte.



**Figure 2.3 : Distribution de la teneur en humidité au début de la diffusion ( $t = 0$ ) selon le nombre de racines utilisé ( $m$ )**

Il est intéressant d'analyser l'effet du nombre de valeurs propres utilisé pour différents temps. La Figure 2.4 présente la teneur en humidité au centre de la feuille ( $z = 0$ ) en fonction du temps selon le nombre de racines utilisé. Les résultats obtenus sont superposés.

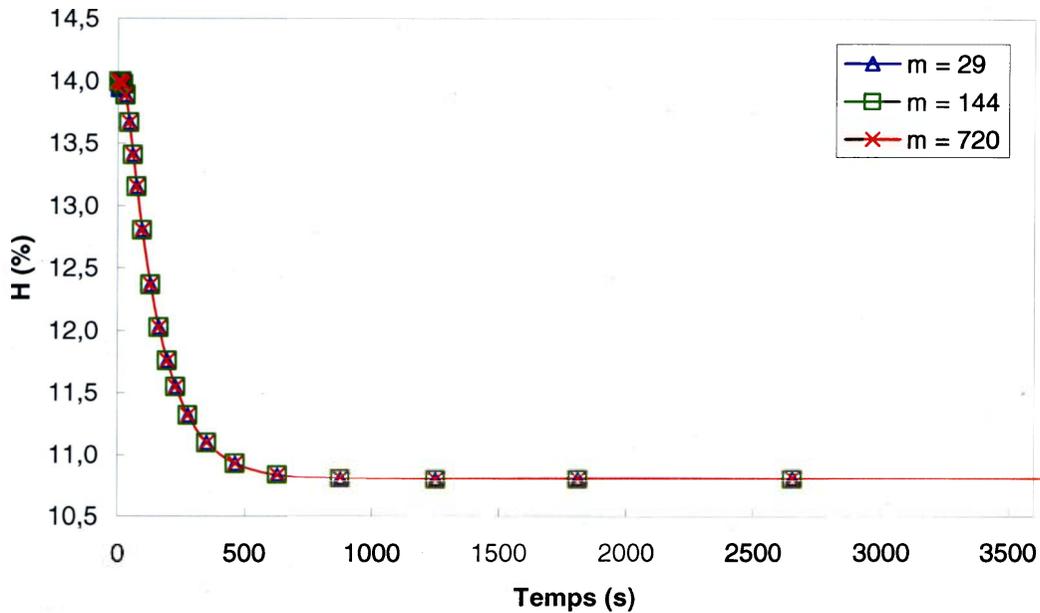


Figure 2.4 : Teneur en humidité au centre de la feuille en fonction du temps selon le nombre de racines utilisé ( $m$ )

En examinant la Figure 2.5, on constate que le nombre de valeurs propres utilisé influence surtout le début du processus de diffusion. Cette figure présente la teneur en humidité au centre de la feuille en fonction du temps, pour la première seconde du processus de diffusion. Pour un nombre de valeurs propres élevé ( $m = 720$ ), la solution calculée est presque identique à la solution exacte alors que pour un nombre de valeurs propres faible ( $m = 29$ ), la solution calculée diverge de la solution exacte. Cependant, l'ampleur de cet effet diminue avec le temps puisqu'après seulement une seconde de diffusion, les solutions calculées convergent toutes avec la solution exacte. À noter que la valeur initiale de teneur en humidité appliquée est  $H_0 = 14,0 \%$ , tel qu'observé à la Figure 2.5.

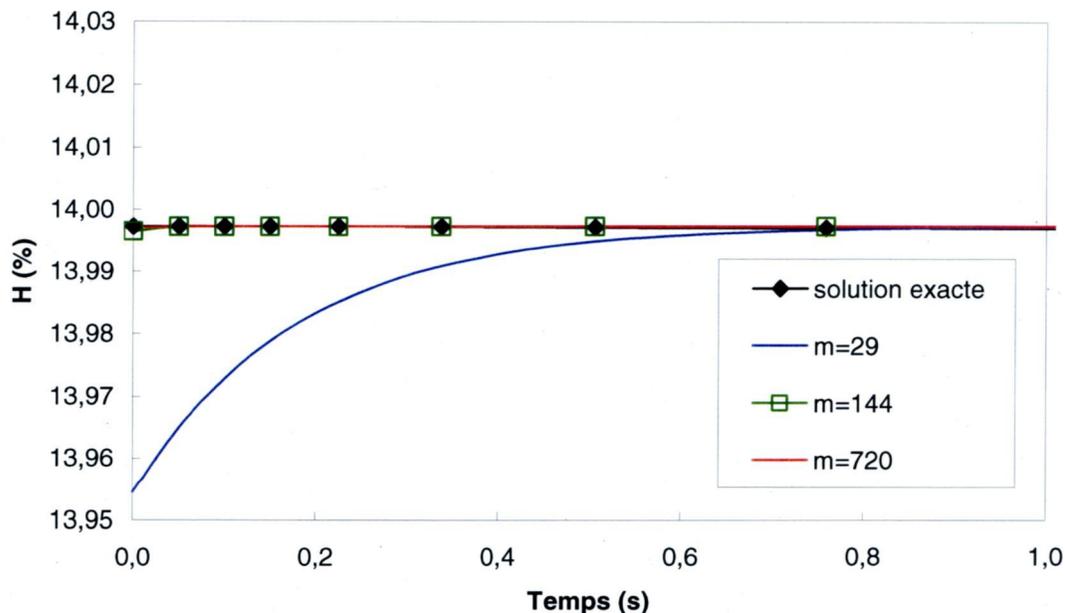


Figure 2.5 : Teneur en humidité au centre de la feuille pendant la 1<sup>re</sup> seconde, selon le nombre de racines utilisé ( $m$ )

En somme, on observe que plus le nombre de valeurs propres utilisé dans le modèle semi-analytique est élevé, plus la solution pour la teneur en humidité calculée au début du processus se rapproche de la solution exacte. Seul le début de la diffusion est affecté par le nombre de valeurs propres. Il faut aussi rappeler que le temps de calcul requis pour obtenir les teneurs en humidité augmente avec le nombre de valeurs propres utilisé. On a donc avantage à choisir un nombre  $m$  relativement faible, le but du modèle semi-analytique étant d'offrir une alternative rapide à un modèle d'éléments finis. Pour les simulations subséquentes utilisant le modèle semi-analytique, le nombre de valeurs propres utilisé sera fixé à  $m = 30$ .

## 2.3 Modèle semi-analytique des déformations hygro-mécaniques dans une feuille de papier

### 2.3.1 Introduction

Le modèle de diffusion permet d'obtenir la répartition de la teneur en humidité à travers l'épaisseur de la feuille en fonction du temps. Il s'agit maintenant de calculer les déformations hygromécaniques induites par le changement de teneur en humidité. Dans un premier temps, il faudra simplifier l'expression de la distribution de la teneur en humidité en la considérant linéairement par morceaux à travers chaque couche. Puis, la théorie développée par Hyer [3] pour prédire les déformations des stratifiés croisés non-symétriques lors du refroidissement de la température de mise en œuvre à la température ambiante sera utilisée. Cette théorie est basée sur une extension de la théorie classique des stratifiés qui tient compte des non-linéarités géométriques. Des approximations polynomiales des déplacements sont utilisées dans l'expression de l'énergie potentielle totale et la technique de Rayleigh-Ritz est appliquée.

### 2.3.2 Linéarisation de la distribution de la teneur en humidité

Dans le but de réduire le temps de calcul nécessaire à l'analyse des déformations, il faut simplifier l'expression de la distribution de la teneur en humidité en la considérant linéairement par morceaux à travers chaque couche. Pour ce faire, chacune des  $M$  couches d'une feuille de papier multicouche est divisée également en un nombre arbitraire  $J$  de segments. Le nombre total de segments  $NS$  est donc :

$$NS = M \times J . \quad (2.45)$$

Pour chaque couche  $i$  de la feuille de papier, les coordonnées  $(z_{s,i,j}, z_{s,i,j+1})$  d'un segment sont définies par l'expression suivante :

$$z_{s,i,j} = z_i + (j-1) \frac{(z_{i+1} - z_i)}{J} \quad (i = 1..M) \quad (2.46)$$

$$(j = 1..J+1)$$

où  $z_i$  représente les positions de chacune des couches définies précédemment.

Après avoir obtenu les coordonnées de chacun des  $NS$  segments, on suppose que la teneur en humidité fournie par l'expression (2.44) varie linéairement à l'intérieur de chacun de ces segments. On écrit alors, pour chaque couche  $i$  :

$$H_{lin,i,k}(z,t) = H(z_{s,i,k},t) + \left( \frac{H(z_{s,i,k+1},t) - H(z_{s,i,k},t)}{z_{s,i,k+1} - z_{s,i,k}} \right) z, \quad (2.47)$$

$$k = 1..J.$$

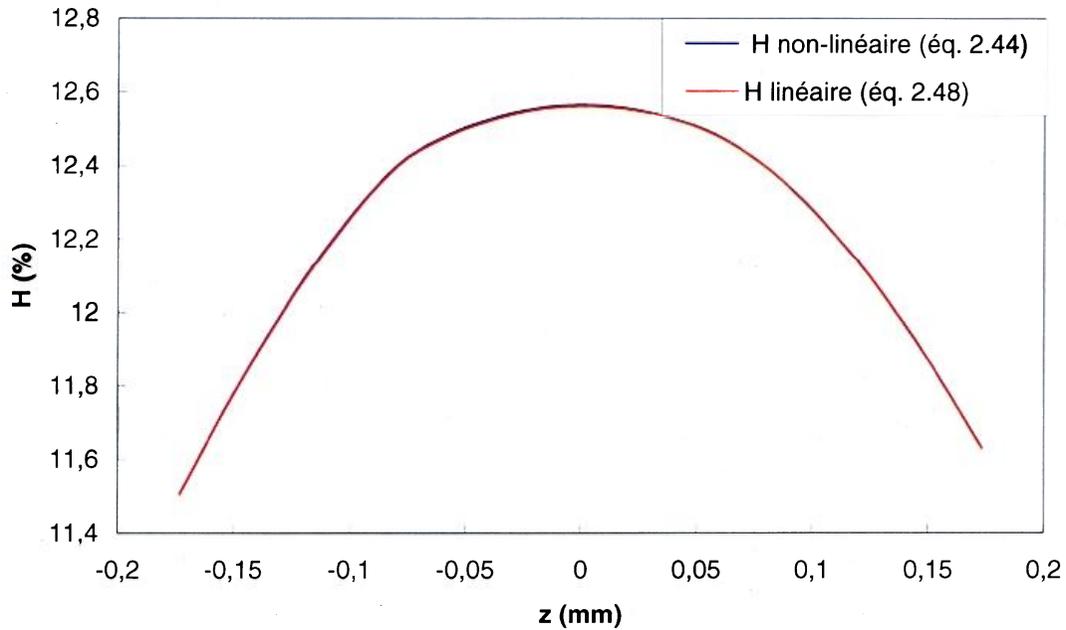
L'équation permettant de calculer la teneur en humidité à travers l'ensemble des couches est définie par un nombre  $NS$  de morceaux et s'écrit :

$$H_{lin}(z,t) = H_{lin,i,k}(z,t), \quad z_{s,i,k} \leq z \leq z_{s,i,k+1} \quad (2.48)$$

$$i = 1..M, \quad k = 1..J$$

À titre d'exemple, les propriétés du papier composé de trois couches données au Tableau 2.1 sont utilisées pour calculer la distribution de la teneur en humidité au temps  $t = 200$  s. La teneur en humidité initiale appliquée est  $H_0 = 14,0$  %, correspondant à une humidité relative de 75 %. La teneur en humidité d'équilibre appliquée est  $H_\infty = 10,8$  %, correspondant à une humidité relative de 50 %. Le nombre de segments utilisé est

$J = 6$  pour chacune des trois couches. Les résultats sont présentés à la Figure 2.6. Sur la figure, la distribution de la teneur en humidité obtenue avec l'équation (2.44) est aussi présentée.



**Figure 2.6 : Prédictions obtenues pour la distribution de la teneur en humidité à  $t = 200$  s**

En observant la Figure 2.6, on constate que les distributions de teneur en humidité calculées pour la solution non-linéaire (équation (2.44)) et la solution linéaire par morceaux (équation (2.48)) sont presque superposées l'une sur l'autre à  $t = 200$  s. Cette observation est aussi valable pour les distributions calculées à d'autres temps  $t$ . Ainsi, le nombre de segments par couche ( $J = 6$ ) utilisé pour la linéarisation de l'expression de la teneur en humidité est suffisant pour obtenir une bonne approximation de la teneur en humidité. Cette valeur de  $J$  sera conservée pour les analyses subséquentes.

### 2.3.3 Calcul de l'énergie potentielle totale

En utilisant l'hypothèse d'un état de contraintes planes, l'énergie potentielle totale de la feuille de papier,  $W$ , peut être exprimée par [3]:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V \{ (\sigma_x - \sigma_x^H) \varepsilon_x + (\sigma_y - \sigma_y^H) \varepsilon_y + (\tau_{xy} - \tau_{xy}^H) \gamma_{xy} \} dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_{M+1}} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \{ (\sigma_x - \sigma_x^H) \varepsilon_x + (\sigma_y - \sigma_y^H) \varepsilon_y + (\tau_{xy} - \tau_{xy}^H) \gamma_{xy} \} dx dy dz
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  sont les contraintes planes,  $\sigma_x^H$ ,  $\sigma_y^H$ ,  $\tau_{xy}^H$  sont les contraintes hygromécaniques équivalentes et  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  sont les déformations totales. La description spatiale du domaine est illustrée à la Figure 2.1 et à la Figure 2.7.

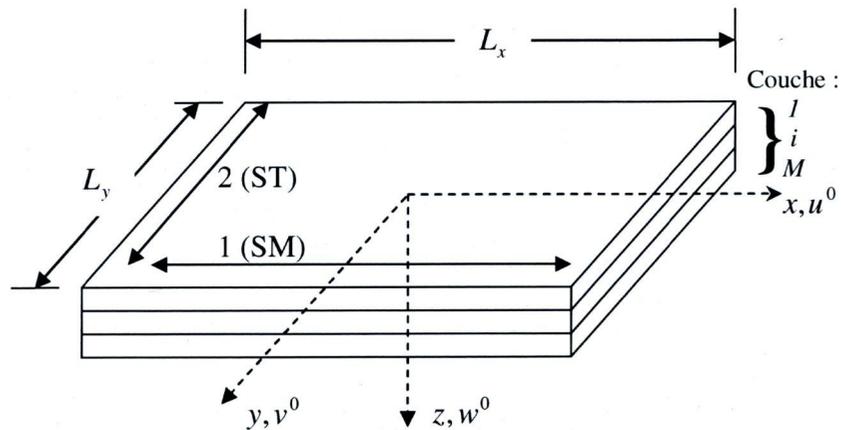


Figure 2.7 : Système de coordonnées

Pour une couche individuelle, la loi de Hooke peut s'exprimer par [23] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \beta_x \Delta H \\ \varepsilon_y - \beta_y \Delta H \\ \gamma_{xy} - \beta_{xy} \Delta H \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

où la matrice des coefficients  $\bar{Q}_{ij}$  est la matrice de rigidité réduite transformée de la couche,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_{xy}$  sont les coefficients d'expansion hydrique et  $\Delta H$  est la différence de teneur en humidité. Cette différence de teneur en humidité s'exprime par :

$$\Delta H(z,t) = H_{lin}(z,t) - H_0 \quad (2.51)$$

où  $H_{lin}(z,t)$  est la distribution de la teneur en humidité linéaire par morceaux à travers la feuille donnée par l'équation (2.48). L'équation (2.51) permet ainsi de faire le lien entre le modèle semi-analytique de diffusion transitoire de l'humidité dans une feuille de papier (introduit à la section 2.2) et le présent modèle semi-analytique des déformations hygromécaniques non-linéaires d'une feuille de papier.

Les déformations totales  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.52)$$

Les quantités  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$ ,  $\gamma_{xy}^0$  et  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_{xy}$  sont les déformations et les courbures du plan de référence de la feuille de papier, respectivement. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^0}{\partial x} \right)^2, & \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v^0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^0}{\partial y} \right)^2, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}\end{aligned}\quad (2.53)$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} + \frac{\partial w^0}{\partial x} \frac{\partial w^0}{\partial y}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}$$

où  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w^0$  sont les déplacements du plan de référence de la feuille de papier dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ , respectivement. Les non-linéarités géométriques selon von Karman sont incluses dans les équations (2.53). Enfin, les contraintes hygromécaniques équivalentes sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^H \\ \sigma_y^H \\ \tau_{xy}^H \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \Delta H. \quad (2.54)$$

Les trois composantes du déplacement,  $u^0, v^0, w^0$ , sont ensuite approximées en utilisant les expressions suivantes. Le choix de ces approximations est basé sur des observations expérimentales [14] :

$$\begin{aligned}u^0(x, y) &= cx - a^2 \frac{x^3}{6} - abx \frac{y^2}{4} \\ v^0(x, y) &= dy - b^2 \frac{y^3}{6} - aby \frac{x^2}{4} \\ w^0(x, y) &= \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)\end{aligned}\quad (2.55)$$

où les coordonnées  $x$  et  $y$  sont mesurées à partir du centre géométrique de la feuille de papier initialement plate (voir Figure 2.7). Les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des paramètres inconnus à déterminer. Les paramètres  $a$  et  $b$  représentent les courbures  $-\kappa_x$  et  $-\kappa_y$ , respectivement. Les paramètres  $c$  et  $d$  représentent une partie des déformations  $\varepsilon_x^0$  et  $\varepsilon_y^0$ , respectivement. Ces quatre paramètres définissent complètement la forme de la feuille de papier.

Comme la différence de teneur en humidité exprimée par l'équation (2.51) varie avec la position  $z$ , l'expression de l'énergie potentielle totale (équation (2.49)) doit être légèrement modifiée pour faciliter l'intégration. Ainsi, on peut réécrire cette expression sous la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} ((N_x - N_x^H)\varepsilon_x + (N_y - N_y^H)\varepsilon_y + (N_{xy} - N_{xy}^H)\gamma_{xy} + (M_x - M_x^H)\kappa_x + (M_y - M_y^H)\kappa_y + (M_{xy} - M_{xy}^H)\kappa_{xy}) dx dy, \quad (2.56)$$

où  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont les efforts résultants et  $N_x^H$ ,  $N_y^H$ ,  $N_{xy}^H$ ,  $M_x^H$ ,  $M_y^H$  et  $M_{xy}^H$  sont les efforts hygromécaniques résultants. Les efforts résultants s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_{M+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (2.57)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_{M+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (2.58)$$

Les efforts hygromécaniques résultants s'expriment par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_{M+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x^H \\ \sigma_y^H \\ \tau_{xy}^H \end{Bmatrix} \Delta H(z,t) dz, \quad (2.59)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{z_1}^{z_{M+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_x^H \\ \sigma_y^H \\ \tau_{xy}^H \end{Bmatrix} \Delta H(z,t) z dz. \quad (2.60)$$

On peut maintenant substituer l'équation (2.55) dans les équations (2.53) et (2.52) et substituer ces dernières dans l'équation (2.50). Puis, on substitue l'équation (2.50) dans les équations (2.57) et (2.58) et on substitue l'équation (2.54) dans les équations (2.59) et (2.60). Finalement, on substitue les équations (2.52) et (2.53) ainsi que les équations (2.57) à (2.60) dans l'expression de l'énergie potentielle totale (2.56). On obtient ainsi l'énergie potentielle totale  $W$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , des propriétés élastiques et géométriques et de  $\Delta H(z,t)$ . Il est important de spécifier que la distribution de la différence de teneur en humidité  $\Delta H(z,t)$  est calculée à chaque pas de temps. L'intégration sur le volume de la feuille peut alors être calculée. Le résultat final est une expression algébrique de l'énergie potentielle totale de la feuille de papier de la forme suivante :

$$W = W(a,b,c,d). \quad (2.61)$$

### 2.3.4 Minimisation de l'énergie potentielle totale

Pour permettre d'obtenir des valeurs pour les quatre paramètres  $(a, b, c, d)$  et ainsi pouvoir déterminer les déformations d'une feuille de papier causées par un changement de la teneur en humidité, la variation de l'énergie potentielle totale est utilisée. Pour ce faire, on fait varier les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  dans l'équation (2.61) :

$$W(a + \delta a, b + \delta b, c + \delta c, d + \delta d) = W(a, b, c, d) + \Delta W \quad (2.62)$$

où

$$\Delta W = \delta W + \frac{1}{2} \delta^2 W + \frac{1}{6} \delta^3 W + \frac{1}{24} \delta^4 W. \quad (2.63)$$

Les quantités  $\delta W$ ,  $\delta^2 W$ ,  $\delta^3 W$  et  $\delta^4 W$  sont respectivement la 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup> variation de  $W$  par rapport à  $a, b, c$  et  $d$ . Ces variations sont fonction de  $a, \delta a, b, \delta b, c, \delta c, d, \delta d$ . La feuille de papier est à l'équilibre quand la 1<sup>re</sup> variation de l'énergie potentielle totale est zéro pour tout incrément  $\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$ . La 1<sup>re</sup> variation  $\delta W$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta W = & f_a(a, b, c, d) \delta a + f_b(a, b, c, d) \delta b \\ & + f_c(a, b, c, d) \delta c + f_d(a, b, c, d) \delta d. \end{aligned} \quad (2.64)$$

En posant l'équation (2.64) égale à zéro pour tout incrément  $\delta a, \delta b, \delta c, \delta d$ , on obtient quatre équations non-linéaires :

$$\begin{aligned}
f_a(a,b,c,d) &= 0 \\
f_b(a,b,c,d) &= 0 \\
f_c(a,b,c,d) &= 0 \\
f_d(a,b,c,d) &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.65}$$

La résolution des équations (2.65) permet d'obtenir la forme de la feuille de papier (paramètres  $a, b, c, d$ ) soumise à un changement de sa teneur en humidité. La stabilité de la configuration est déterminée en examinant la 2<sup>e</sup> variation de  $W$ ,  $\delta^2W$ .

### 2.3.5 Étude de la stabilité de la configuration de la feuille

La résolution du système d'équations défini à la section précédente peut engendrer plusieurs solutions (configurations) possibles pour la même feuille de papier. Pour vérifier si l'une ou l'autre de ces configurations est stable, il faut utiliser la 2<sup>e</sup> variation de l'énergie potentielle totale,  $\delta^2W$ . La solution sera stable si la 2<sup>e</sup> variation de l'énergie potentielle totale,  $\delta^2W$ , est définie positive. La 2<sup>e</sup> variation  $\delta^2W$  est définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice suivante sont positives :

$$\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_a}{\partial a} & \frac{\partial f_a}{\partial b} & \frac{\partial f_a}{\partial c} & \frac{\partial f_a}{\partial d} \\
\frac{\partial f_b}{\partial a} & \frac{\partial f_b}{\partial b} & \frac{\partial f_b}{\partial c} & \frac{\partial f_b}{\partial d} \\
\frac{\partial f_c}{\partial a} & \frac{\partial f_c}{\partial b} & \frac{\partial f_c}{\partial c} & \frac{\partial f_c}{\partial d} \\
\frac{\partial f_d}{\partial a} & \frac{\partial f_d}{\partial b} & \frac{\partial f_d}{\partial c} & \frac{\partial f_d}{\partial d}
\end{bmatrix}.
\tag{2.66}$$

Précisons que toutes les équations des sections 2.2 et 2.3 ont été implémentées dans le logiciel Mathematica [13] (voir Annexe B).

## 2.4 Exemple d'application

### 2.4.1 Description du problème étudié

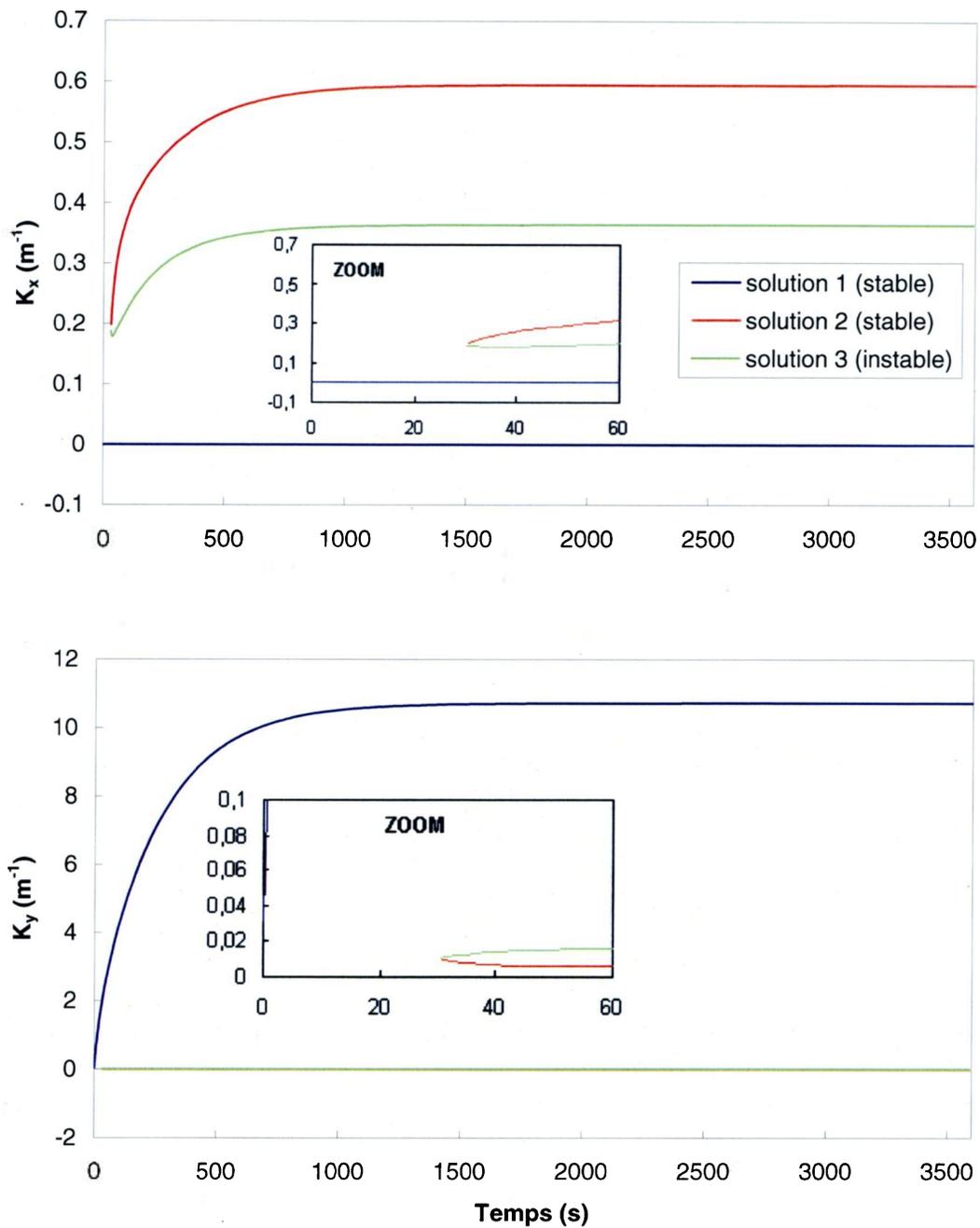
Le modèle développé dans les sections précédentes est utilisé pour prédire les déformations hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche composée de trois couches de dimensions  $L_x = 0,5$  m et  $L_y = 0,5$  m. Cette feuille multicouche correspond à celle dont les propriétés ont été présentées au Tableau 2.1. Initialement, à  $t = 0^-$ , l'assemblage est soumis à une teneur en humidité uniforme de  $H_0 = 14,0$  %, correspondant à une humidité relative de 75 %. Puis, à  $t = 0^+$ , l'assemblage est soudainement soumis à une teneur en humidité d'équilibre de  $H_\infty = 10,8$  %, correspondant à une humidité relative de 50 %. L'humidité s'échappe donc de la feuille par convection sur les surfaces externes. Tout au long de ce processus de diffusion, la feuille développe des déformations hygromécaniques qui induisent des courbures.

### 2.4.2 Résultats du modèle développé

Les résultats pour la diffusion de l'humidité à travers l'épaisseur de la feuille ont déjà été présentés à la section 2.2.7. Les courbures en direction  $x$  et  $y$  développées par la feuille en fonction du temps sont présentées à la Figure 2.8. La forme finale de la feuille est illustrée à la Figure 2.9.

En examinant la Figure 2.8, on constate qu'il existe trois solutions possibles pour le développement des courbures. La première solution prédit une courbure essentiellement nulle en direction  $x$ . Cette solution est stable, existe en tout temps et correspond à la solution présentant le minimum d'énergie potentielle. La seconde solution prédit une courbure positive en direction  $x$ , est stable et apparaît à partir de  $t = 30$  s. Enfin, la troisième solution qui prédit une courbure positive en direction  $x$

apparaît aussi à partir de  $t = 30$  secondes, mais correspond à un état d'équilibre instable. Cette existence de solutions multiples est aussi visible pour la courbure en direction  $x$ . La première solution indique une courbure dans la direction  $y$  positive alors que les deux autres solutions indiquent une courbure dans la direction  $y$  essentiellement nulle. À noter que les solutions 2 et 3 sont superposées sur la Figure 2.8.



**Figure 2.8 : Courbures en fonction du temps**

La Figure 2.9 montre la forme finale de la feuille (à  $t = 3600$  s). Cette forme correspond à celle prédite par la solution 1 décrite précédemment. À  $t = 3600$  s, il existe en théorie une autre forme stable qui correspond à la solution 2. La feuille prend

naturellement la forme de la solution 1. Cependant, il semble possible de la contraindre à prendre la forme de la solution 2.

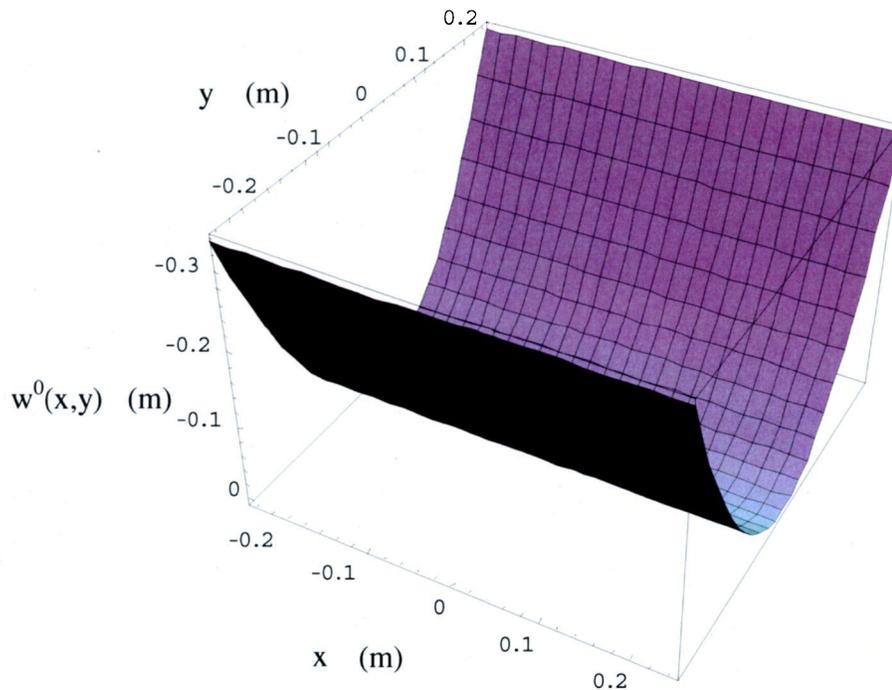


Figure 2.9 : Forme finale de la feuille (état stationnaire,  $t = 3600$  s)

### 2.4.3 Comparaison avec un modèle stationnaire existant

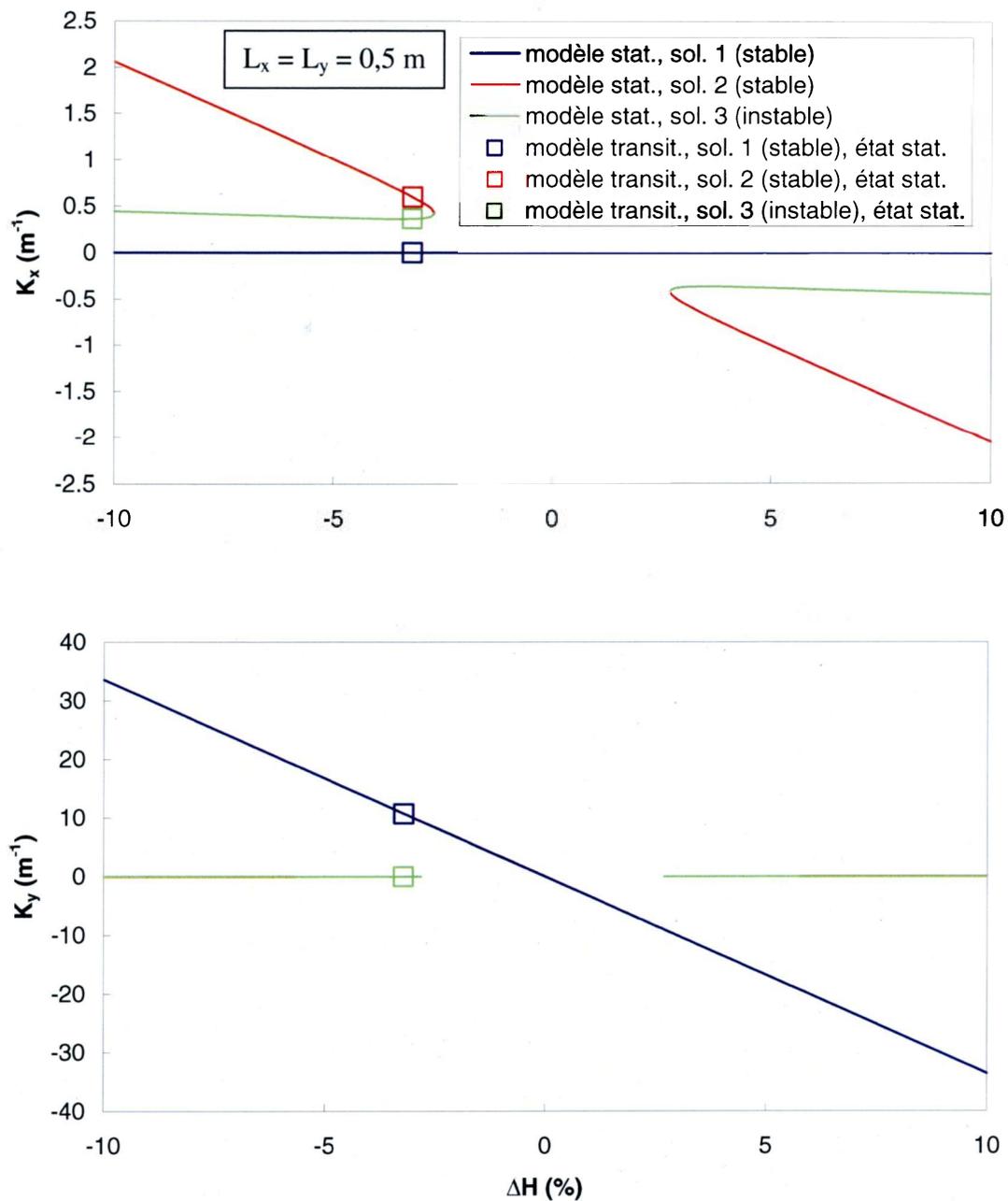
Lorsque le régime stationnaire est atteint, les résultats obtenus avec le modèle transitoire peuvent être comparés aux résultats d'un modèle stationnaire utilisé par Cloutier, Gendron et Dano [8]. La feuille de papier multicouche dont les propriétés sont définies au Tableau 2.1 est encore utilisée ici.

Le modèle stationnaire utilise les mêmes équations que celles développées pour prédire les déformations non-linéaires (section 2.3). Par contre, la différence de teneur en humidité  $\Delta H$  (%) est constante et le phénomène de diffusion de l'humidité n'est pas pris en compte. L'équation (2.51) exprimant cette différence de teneur en humidité devient donc :

$$\Delta H = H_{\infty} - H_0 \quad (2.67)$$

où  $H_{\infty}$  (%) et  $H_0$  (%) sont respectivement les teneurs en humidité à l'équilibre et initiale définies à la section 2.2. L'objectif est d'utiliser le modèle stationnaire pour vérifier les résultats du modèle transitoire et étudier l'effet de la variation de la teneur en humidité et l'effet des dimensions de la feuille sur le développement des courbures.

Pour étudier l'effet de la variation de teneur en humidité, on utilise une feuille de papier carrée de même grandeur que celle présentée dans l'exemple précédent ( $L_x = L_y = 0,5$  m) et on fait varier  $\Delta H$  de -10 % à 10 %. Pour étudier l'effet des dimensions, on fixe la différence de teneur en humidité appliquée ( $\Delta H = -3$  %) et on fait varier les dimensions de la feuille carrée ( $L_x$  et  $L_y$ ) de 0 à 1 m. Les résultats sont présentés de la Figure 2.10 à la Figure 2.12.



**Figure 2.10 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité**

La Figure 2.10 présente les courbures  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  en fonction de la différence de teneur en humidité. Le modèle stationnaire prédit que la feuille de papier étudiée peut présenter plusieurs formes d'équilibre selon la différence de teneur en humidité appliquée. Lorsque  $\Delta H$  varie entre -3 % et 3 %, une seule solution existe. La feuille

prend alors une forme cylindrique ( $\kappa_x \cong 0, \kappa_y > 0$ ) (solution 1) dont l'axe est dans la direction  $x$ . Lorsque  $|\Delta H| > 3 \%$ , deux autres solutions (solutions 2 et 3) apparaissent en plus de la solution 1. La forme d'équilibre prédite par la solution 2 est cylindrique autour de l'axe  $y$  ( $\kappa_x > 0$  ou  $\kappa_x < 0, \kappa_y \cong 0$ ) et est stable. La solution 3 correspond aussi à une forme cylindrique autour de l'axe  $y$  ( $\kappa_x > 0$  ou  $\kappa_x < 0, \kappa_y \cong 0$ ), mais la courbure  $\kappa_x$  est plus faible que celle de la solution 2 et la forme d'équilibre est instable. Cette figure indique aussi par des carrés les résultats obtenus avec le modèle transitoire pour le même type de papier ( $\Delta H = -3,2 \%$ , voir section 2.4.1). On constate qu'une fois l'état stationnaire atteint, le modèle transitoire calcule une courbure identique à celle calculée par le modèle stationnaire et ce, pour les 3 solutions possibles.

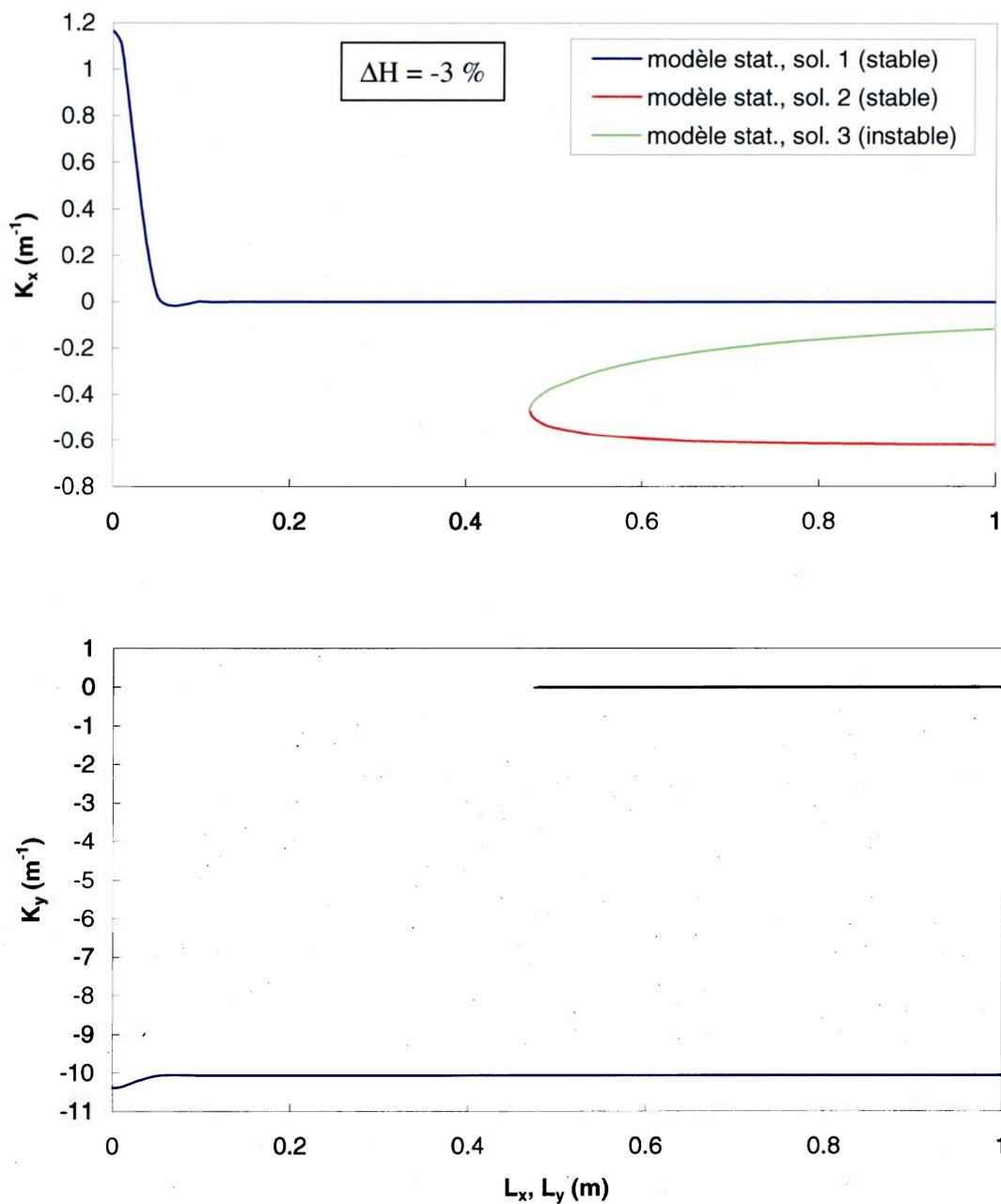
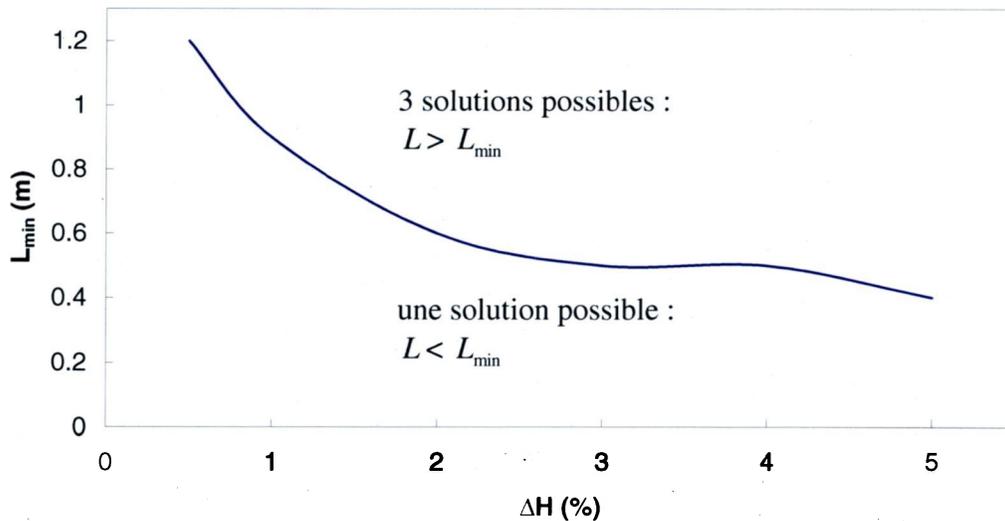


Figure 2.11 : Courbures en fonction des dimensions de la feuille

La Figure 2.11 montre qu'une feuille de papier carrée soumise à une différence de teneur en humidité de -3 % peut avoir de multiples formes d'équilibre selon les dimensions choisies. Trois solutions analogues à celles mentionnées précédemment sont possibles, les solutions 2 et 3 existant pour une feuille de côté supérieur à 0,5 m. À noter que les solutions 2 et 3 sont superposées pour la courbure en direction  $y$ ,  $\kappa_y$ .



**Figure 2.12 : Longueur minimum requise pour avoir des solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée**

La Figure 2.12 présente la longueur minimum ( $L_{\min}$ ) requise pour l'existence de solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée. Si la feuille a une longueur inférieure à  $L_{\min}$ , une seule solution existe alors que si la longueur est supérieure à  $L_{\min}$ , deux autres solutions apparaissent. On voit que la longueur minimum diminue avec la différence de teneur en humidité appliquée. Pour  $\Delta H = 0,5 \%$ , la longueur minimum est de 1,2 m alors qu'à  $\Delta H = 5 \%$ , la longueur minimum n'est plus que de 0,4 m. Dans le cas des essais expérimentaux présentés au Chapitre 5, les assemblages de papier utilisés mesurent 0,1 m de côté et une différence de teneur en humidité d'environ 3 % est appliquée. Cette situation correspond à un point situé sous la courbe de la Figure 2.12. Le modèle transitoire ne devrait donc prédire qu'une seule solution dans ce cas. Les résultats du modèle transitoire présentés à la Figure 2.13 confirment les prédictions du modèle stationnaire. On voit bien qu'une seule solution est possible pour les conditions prescrites. Pour les autres assemblages présentés dans ce travail ( $L_x = L_y = 0,1 \text{ m}$ ;  $\Delta H \approx 3 \%$ ), la même conclusion peut être établie (voir Annexe A).

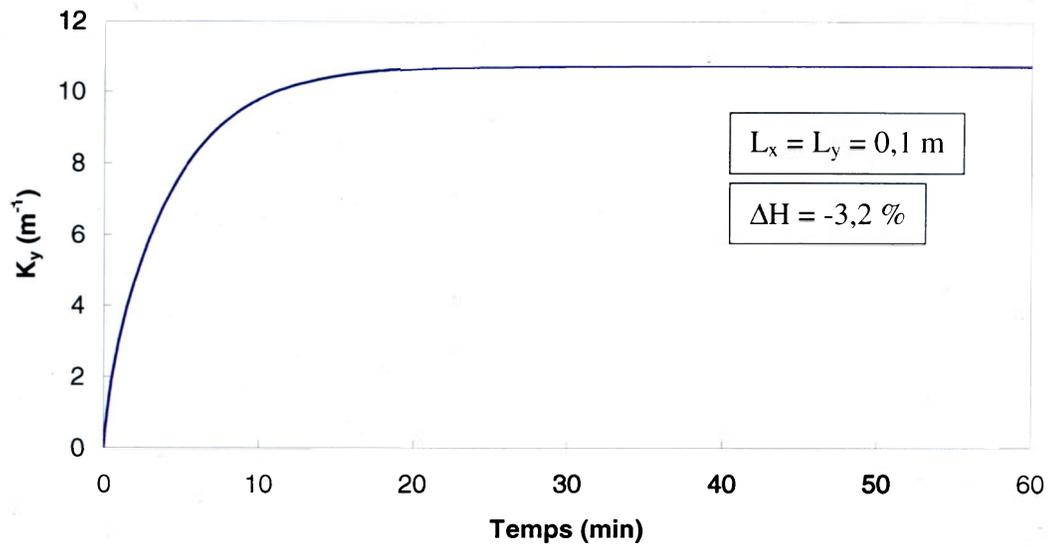


Figure 2.13 : Courbure dans la direction y en fonction du temps (feuille carrée de 0,1 m de côté)

## 2.5 Conclusion

Un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques d'une feuille de papier en régime transitoire a été développé. D'abord, la théorie du transfert thermique en régime transitoire pour une plaque composite a été utilisée pour modéliser la diffusion transitoire de l'humidité dans la feuille de papier. Un exemple d'application a été présenté pour le calcul de la distribution de la teneur en humidité à travers l'épaisseur de la feuille. Par la suite, la théorie classique des stratifiés, modifiée pour inclure les non-linéarités géométriques selon von Karman, a été utilisée pour modéliser les déformations de la feuille de papier soumise à une variation de sa teneur en humidité. Les équations du modèle ont été implémentées dans le logiciel Mathematica.

Une analyse transitoire utilisant les équations développées dans ce chapitre a été menée. La feuille multicouche utilisée correspond à un assemblage conçu dans le cadre du présent travail. Cette analyse a montré que, selon les dimensions utilisées et la différence de teneur en humidité appliquée, il pouvait exister trois solutions distinctes

pour la prédiction des courbures d'une feuille de papier multicouche, desquelles deux sont stables. Parmi les deux solutions stables, une solution « dominante » existe en tout temps et correspond à la solution présentant le minimum d'énergie potentielle totale. Les résultats du modèle transitoire ont été comparés aux résultats d'un modèle stationnaire existant. Pour les mêmes conditions, le modèle stationnaire prédit les mêmes courbures pour les trois solutions possibles. Le modèle stationnaire prédit aussi que la différence de teneur en humidité appliquée et les dimensions de la feuille ont une influence sur les solutions possibles. Sous certaines conditions, une seule solution existe.

Dans le but de valider le modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques de façon plus approfondie, un modèle d'éléments finis sera développé. Ce modèle permettra de comparer les résultats de simulation obtenus pour la diffusion transitoire de l'humidité à travers la feuille de papier et pour le développement des courbures.

## **Chapitre 3    Validation du modèle semi-analytique par la méthode des éléments finis**

### **3.1 Introduction**

Un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques d'une feuille de papier multicouche a été développé. Avant d'effectuer des essais expérimentaux, ce modèle doit d'abord être validé à l'aide d'un modèle d'éléments finis. Ce modèle a été développé dans le logiciel Abaqus CAE [26]. Dans un premier temps, ce chapitre présente le modèle d'éléments finis pour une feuille de papier multicouche et les résultats obtenus par le modèle semi-analytique et par le modèle d'éléments finis. Ces résultats incluent la distribution de l'humidité à différents temps, la teneur en humidité au centre de la feuille en fonction du temps, les déplacements et courbures après 1 heure ainsi que les déplacements et courbures en fonction du temps. Dans un deuxième temps, ce chapitre présente une analyse des déformations hygromécaniques de deux types de cartons. Cette analyse fait référence à l'étude de Cloutier, Gendron et Dano [15].

### **3.2 Modèle d'éléments finis pour une feuille de papier multicouche**

#### ***3.2.1 Présentation du modèle d'éléments finis***

Le modèle d'éléments finis a été développé dans le logiciel Abaqus CAE [26]. Le calcul effectué est une analyse couplée température/déplacement en régime transitoire. Les non-linéarités géométriques sont incluses.

La structure modélisée est une feuille multicouche carrée de 0,1 m de côté. Comme le montre la Figure 3.1, la feuille est maillée en utilisant 100 éléments de type coque à huit noeuds (éléments S8RT). Elle subit un assèchement allant d'une teneur en humidité initiale  $H_0 = 14\%$  (correspondant à une humidité relative de 75 % HR) à une teneur en humidité d'équilibre  $H_\infty = 10,8\%$  (correspondant à une humidité relative de 50 % HR) par convection instantanée. Les propriétés indiquées dans le Tableau 2.1 sont utilisées pour définir les caractéristiques de chaque couche. Une interaction de type « Film Condition » est définie pour la surface supérieure de la feuille de papier, avec une teneur en humidité d'équilibre  $H_\infty$  et un coefficient de convection  $h_{haut}$ . Une condition similaire est définie pour la surface inférieure de la feuille de papier. Une condition limite de type encastrement est définie pour le nœud central de la feuille de papier. Enfin, un champ de teneur en humidité initiale constant à travers l'épaisseur de la feuille est créé, avec une valeur de teneur en humidité initiale de  $H_0$ . Un exemple de fichier source (.inp) pour le modèle d'éléments finis est présenté à l'Annexe C.

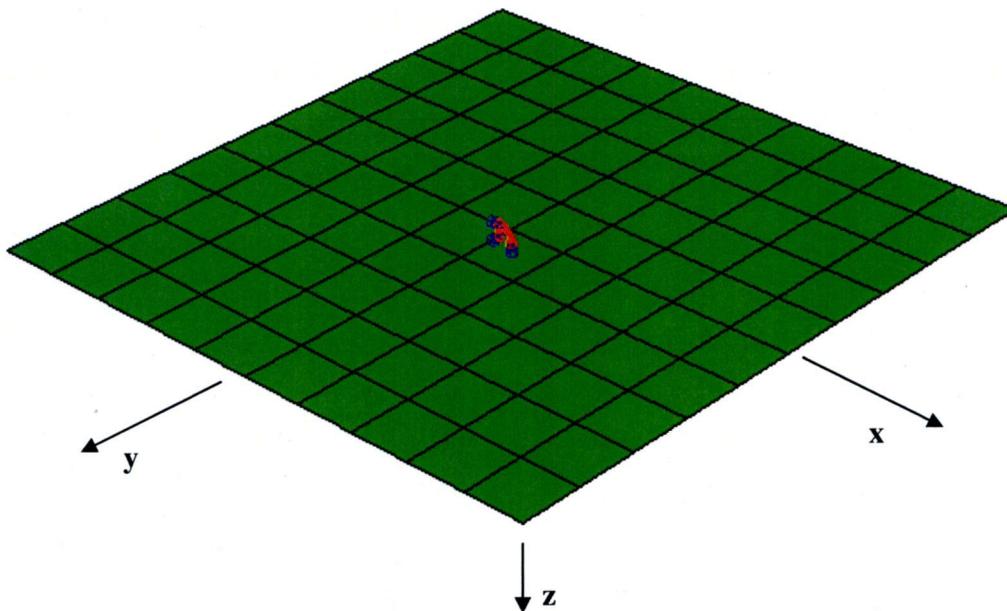


Figure 3.1 : Modèle d'éléments finis utilisé

### 3.2.2 Prédications de la distribution de teneur en humidité selon $z$ pour différents temps

Dans le but de vérifier la validité du modèle de diffusion transitoire de l'humidité, on compare les distributions de la teneur en humidité selon  $z$  prédites par le modèle semi-analytique transitoire et celles obtenues par le modèle d'éléments finis.

Les temps choisis sont ceux utilisés à chaque itération par le logiciel Abaqus CAE, lors du calcul des déformations. Les résultats obtenus sont présentés à la Figure 3.2.

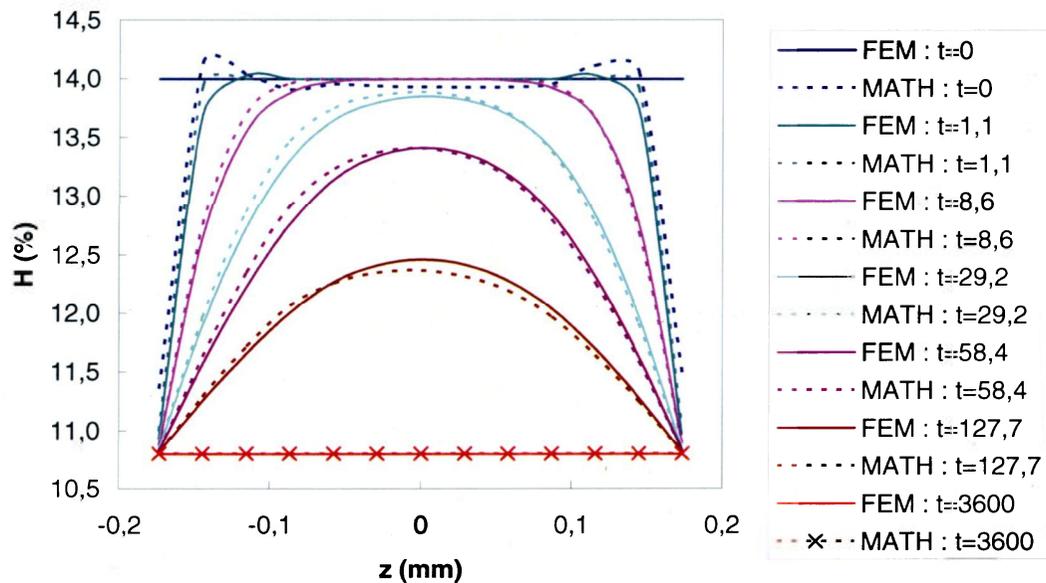


Figure 3.2 : Distribution de la teneur en humidité pour différents temps (en secondes)

En observant la Figure 3.2, on remarque globalement une très bonne concordance entre les prédictions du modèle semi-analytique transitoire (MATH) et celles du modèle d'éléments finis (FEM). Par contre, il y a une différence marquée entre les prédictions des distributions de teneur en humidité au début du processus ( $t = 0$ ). Cette différence est due au fait que le modèle semi-analytique utilise une série à  $m$  termes (en sin et cos) pour approximer la distribution de la teneur en humidité et ce, en tout temps. Cet effet de

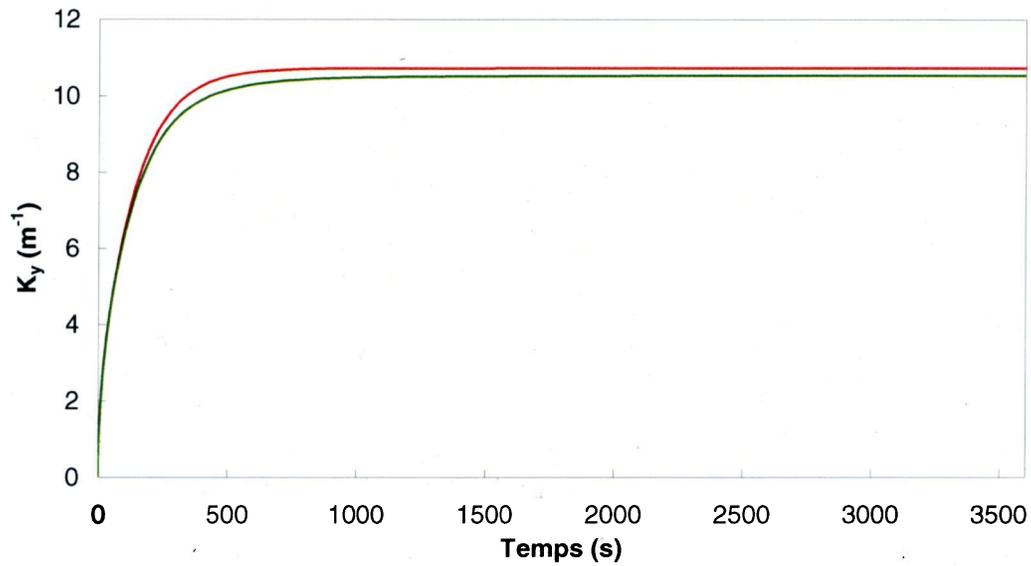
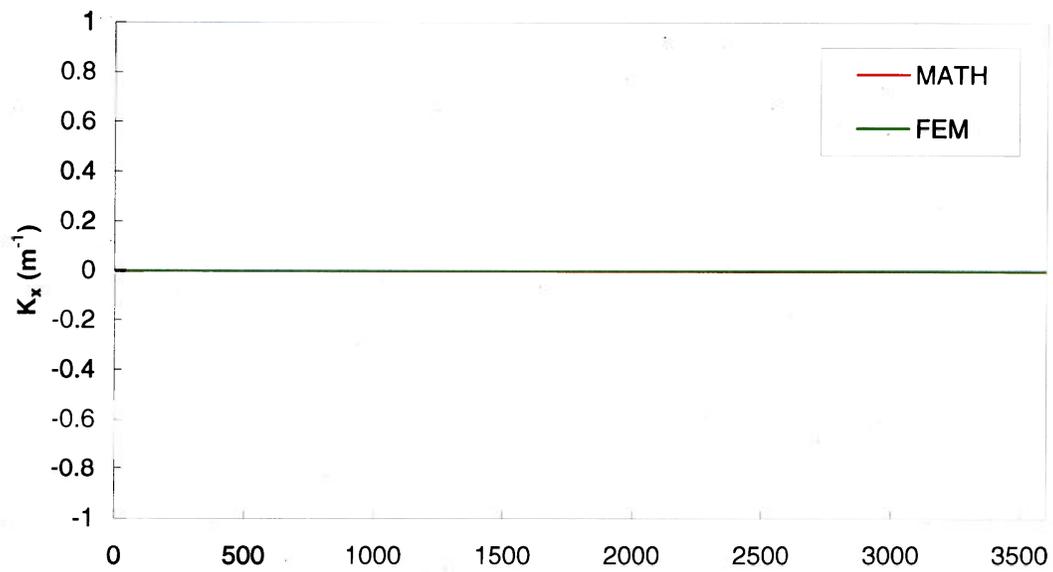
$m$  a déjà été analysé à la section 2.2.7. Rappelons que pour toutes les analyses utilisant le modèle transitoire, le nombre  $m$  de valeurs propres utilisé a été fixé à 29.

Pour les temps supérieurs à une seconde, les distributions prédites par le modèle semi-analytique sont très proches de celles prédites par le modèle d'éléments finis. Enfin, on observe qu'à la fin du processus ( $t = 3600$  s), les deux modèles prédisent une droite correspondant à la valeur de la teneur en humidité d'équilibre prescrite ( $H(z, t = 3600) = H_{\infty} = 10,8\%$ ). Les modèles prévoient donc que le processus sera en régime permanent après 1 heure ( $t = 3600$  s).

### ***3.2.3 Prédiction des déformations hygromécaniques pour différents temps***

Dans le but de vérifier la validité du modèle de prédictions des déformations hygromécaniques, on compare les courbures, le déplacement vertical d'un coin  $w^0(x = -L_x/2, y = -L_y/2)$  et la forme finale calculés par le modèle semi-analytique transitoire aux résultats du modèle d'éléments finis.

Les temps choisis sont ceux utilisés à chaque itération par le logiciel Abaqus CAE, lors du calcul des déformations. Les courbures  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  obtenues à l'aide du modèle d'éléments finis ont été calculées à partir des déplacements verticaux  $w^0$  de la feuille. Une régression d'ordre 2 (logiciel Excel) est appliquée pour calculer les courbures. Les résultats obtenus sont comparés aux prédictions du modèle semi-analytique transitoire dans les Figures 3.3 à 3.5.



**Figure 3.3 : Courbures en fonction du temps**

La Figure 3.3 montre les courbures de la feuille en direction  $x$  et en direction  $y$ , en fonction du temps. En direction  $x$ , le modèle semi-analytique transitoire (MATH) et le modèle d'éléments finis (FEM) prédisent une courbure essentiellement nulle en tout temps. En direction  $y$ , on constate aussi qu'il y a une très bonne concordance entre les

prédictions des deux modèles. Dans les deux cas, la feuille développe rapidement une courbure positive, puis se stabilise lorsqu'elle atteint le régime stationnaire (à  $t = 1500$  s). On observe cependant que lorsque le régime stationnaire est atteint, la courbure prédite par le modèle d'éléments finis est légèrement inférieure, de l'ordre de 2 %, à celle prédite par le modèle semi-analytique.

La Figure 3.4 présente le déplacement vertical d'un des coins de la feuille en fonction du temps. On remarque que le déplacement se stabilise à  $t = 1500$  s à environ 13 mm. Comme pour la courbure  $\kappa_y$ , le déplacement prédit par le modèle d'éléments finis est légèrement inférieur, de l'ordre de 2 %, à celui prédit par le modèle semi-analytique.

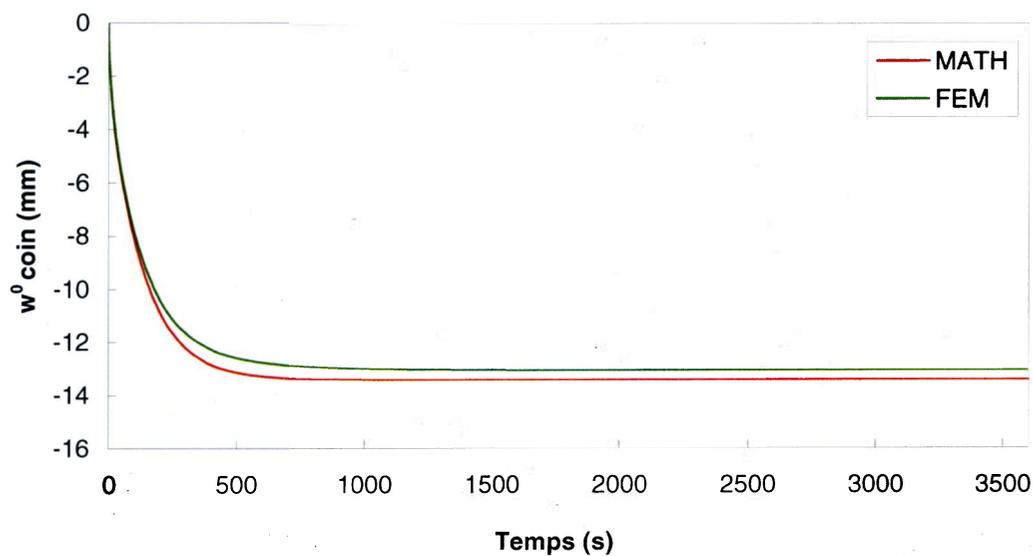


Figure 3.4 : Déplacement vertical d'un coin en fonction du temps

La Figure 3.5 montre la forme finale de la feuille une fois le régime stationnaire atteint pour les deux modèles utilisés. Encore ici, on constate qu'il existe une très bonne concordance entre les deux modèles. Rappelons que pour les dimensions de la feuille choisies ( $L_x = L_y = 0,1$  m) et les teneurs en humidité appliquées, le modèle semi-analytique transitoire ne prédit qu'une seule forme possible.

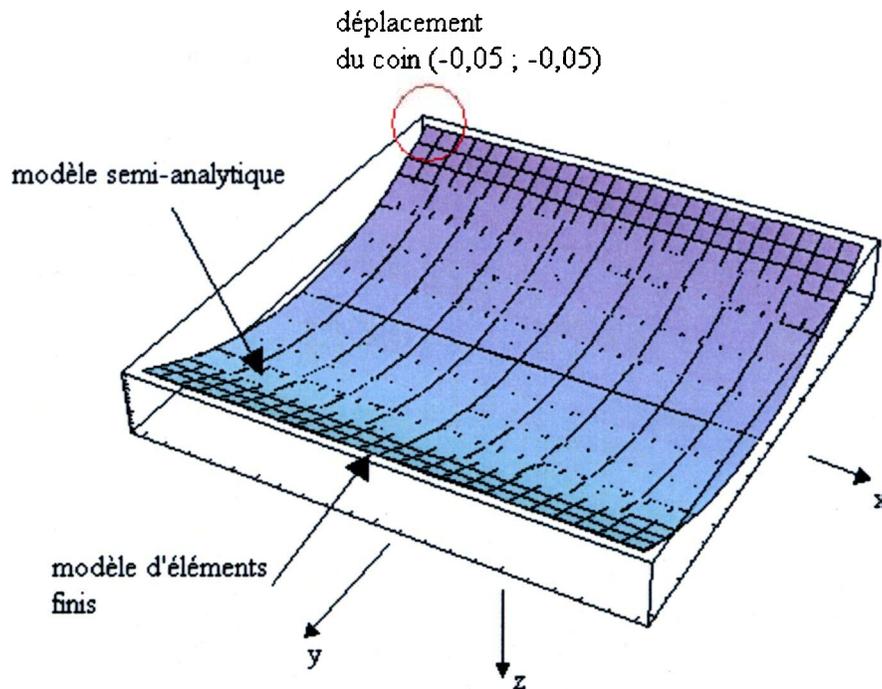


Figure 3.5 : Formes finales prédites par le modèle d'éléments finis et par le modèle semi-analytique (t = 3600 s)

### **3.3 Étude de cas : Déformations hygromécaniques pour deux types de carton**

#### **3.3.1 Introduction**

Une étude antérieure sur le gauchissement du carton menée par Cloutier, Gendron et Dano [8] a permis de proposer un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques du carton en régime stationnaire. Ce modèle a été comparé à un modèle d'éléments finis. Un changement de teneur en humidité constant est appliqué à deux types de cartons différents et les déformations sont calculées. Les résultats ont montré l'existence d'un changement de teneur en humidité minimum et d'une longueur minimum au-delà desquels les feuilles de carton peuvent prendre plusieurs formes.

#### **3.3.2 Description du problème**

Deux feuilles de carton sont soumises à un changement de teneur en humidité de 5 %. Chaque feuille est composée de trois couches dont l'empilement est non-symétrique, tel qu'illustré à la Figure 3.6. Chaque couche possède des propriétés différentes qui sont données aux Tableaux 3.1 et 3.2. Les deux feuilles de carton ont une forme carrée de 0,3 m de côté et une épaisseur totale de 0,5 mm. Le premier carton développe une faible courbure suite au changement de teneur en humidité et est qualifié de « non-problématique » (NPB). Le deuxième carton développe une courbure plus prononcée et est qualifié de « problématique » (PB).

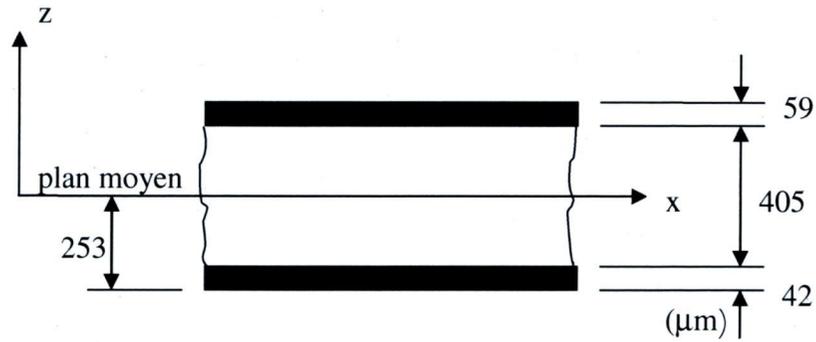


Figure 3.6 : Feuille de carton – Empilement non-symétrique de 3 couches

Tableau 3.1: Propriétés du carton NPB

couche	épaisseur (mm)	direction	$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	E (GPa)	G (GPa)	$\nu_{21}$	$\beta$ (x10 <sup>-3</sup> / % H)	diffusivité D (m <sup>2</sup> / s)
dessus	0,059	1	1034	7,1	2,19	0,16	0,14	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		1,3			1,72	
milieu	0,405	1	548	1,8	0,98	0,09	0,30	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		0,6			1,34	
dessous	0,042	1	857	7,5	1,58	0,15	0,28	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		1,7			1,94	

Tableau 3.2: Propriétés du carton PB

couche	épaisseur (mm)	direction	$\rho$ (kg / m <sup>3</sup> )	E (GPa)	G (GPa)	$\nu_{21}$	$\beta$ (x10 <sup>-3</sup> / % H)	diffusivité D (m <sup>2</sup> / s)
dessus	0,059	1	1373	5,9	2,36	0,17	0,16	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		1,5			1,30	
milieu	0,405	1	578	1,9	1,17	0,11	0,32	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		0,8			1,04	
dessous	0,042	1	833	4,2	1,46	0,16	0,34	5,7x10 <sup>-11</sup>
		2		1,4			1,92	

L'objectif de l'étude est d'utiliser le modèle transitoire développé pour prédire le comportement des deux cartons lorsque ceux-ci sont soumis à un changement de teneur en humidité de 5 %. La valeur du coefficient de convection hydrique utilisée est de

$h = 3,2 \times 10^{-4} \text{ kg / m}^2 \text{ s \%}$  et est identique à celle utilisée dans l'étude de Cloutier, Gendron et Dano [8]. Les résultats seront comparés à ceux obtenus auparavant par Cloutier, Gendron et Dano [8].

### **3.3.3 Résultats**

Les prédictions obtenues par le modèle transitoire développé sont présentées aux Figures 3.7 à 3.12. La Figure 3.7 montre les courbures dans les directions  $x$  et  $y$  en fonction du temps pour le carton NPB.

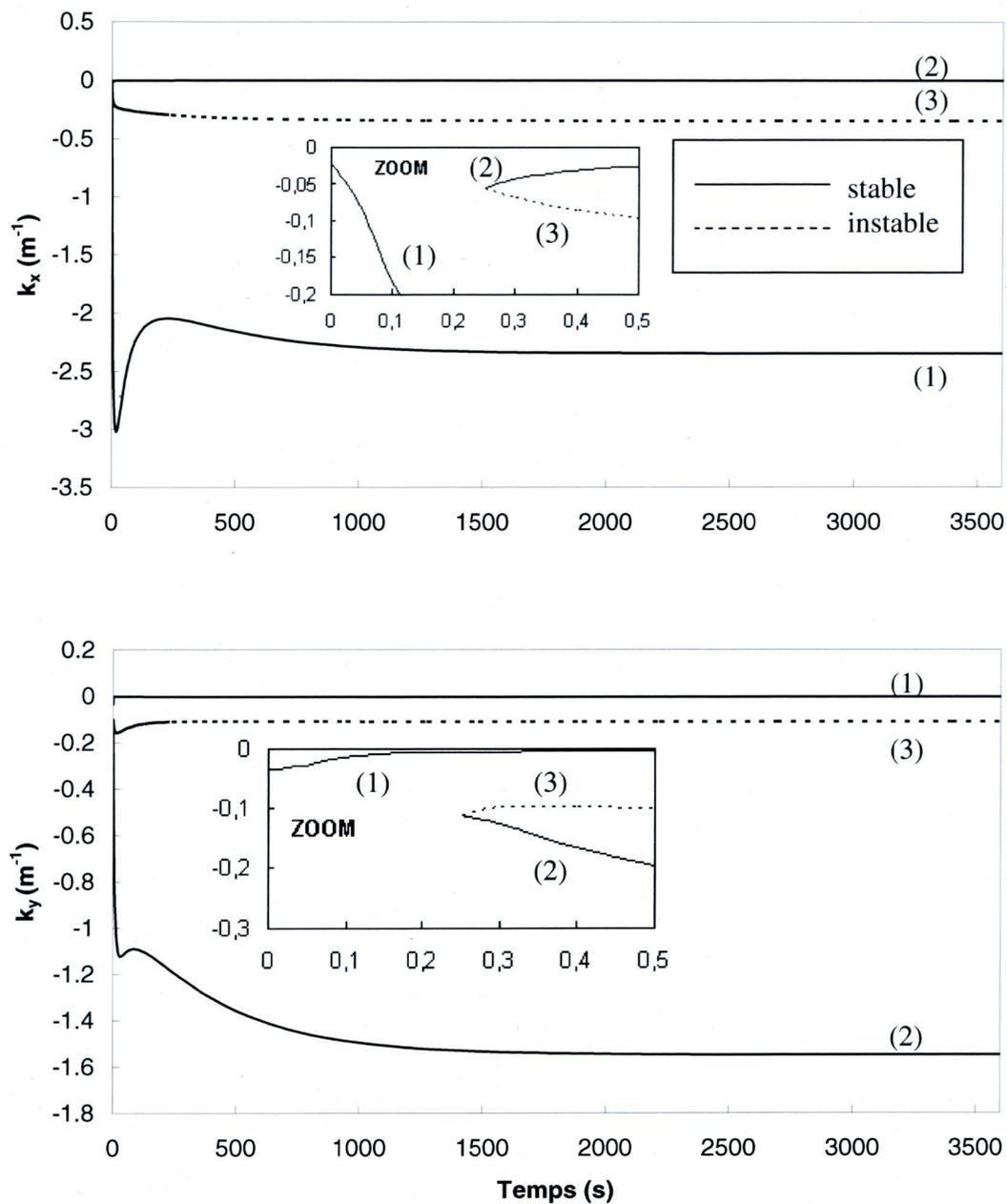


Figure 3.7 : Courbures en fonction du temps – Carton NPB

On constate que de  $t = 0$  à  $t = 0,28$  s, il n'existe qu'une seule solution, notée (1) sur la Figure 3.7. Celle-ci correspond à des courbures  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  négatives. À partir de  $t = 0,28$  s, deux autres solutions apparaissent et restent présentes jusqu'à la fin de l'analyse. Ces solutions sont notées (2) et (3) sur la Figure 3.7. Parmi les trois solutions possibles, deux représentent des états d'équilibre stables. Lorsque l'état stationnaire est atteint, le

carton pourrait présenter en théorie deux formes stables, soit une forme cylindrique autour de la direction  $y$  ( $\kappa_x < 0$ ,  $\kappa_y \cong 0$ ) (1) et une forme cylindrique autour de la direction  $x$  ( $\kappa_x \cong 0$ ,  $\kappa_y < 0$ ) (2). Cependant, comme la configuration (1) apparaît en premier, le carton devrait continuer de développer une courbure autour de la direction  $y$  et garder cette forme jusqu'à ce que le régime stationnaire soit atteint.

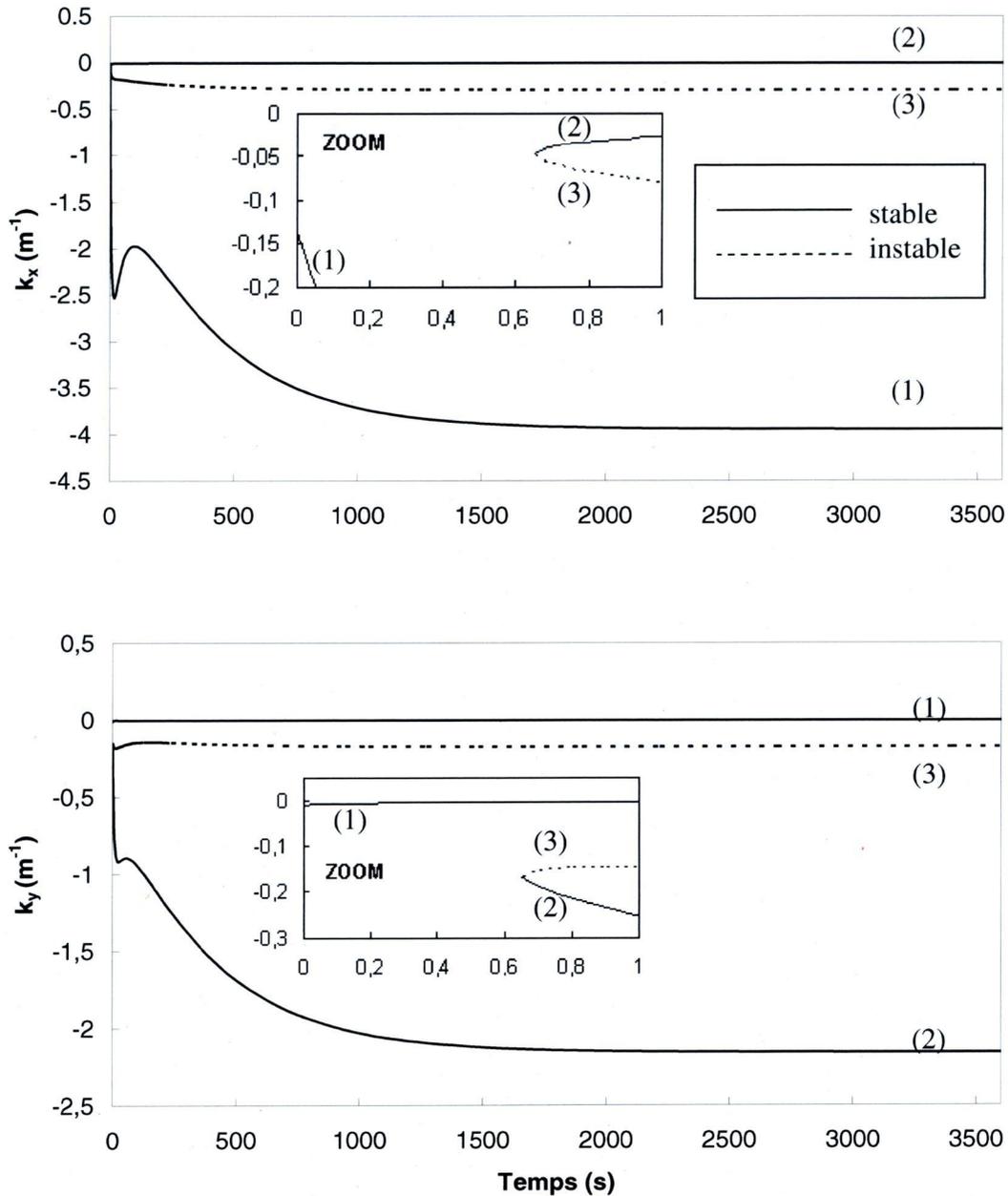


Figure 3.8 : Courbures en fonction du temps – Carton PB

La Figure 3.8 montre les courbures dans les directions  $x$  et  $y$  en fonction du temps calculées par le modèle transitoire pour le carton PB. On constate que pour  $0 < t < 0,7$  s, il n'existe qu'une seule solution, notée (1) sur la figure. Pour  $t > 0,7$  s, deux autres solutions apparaissent, notées (2) et (3) sur la figure. Parmi les trois solutions possibles, les solutions (1) et (2) représentent des formes d'équilibre stables. Comme pour le carton NPB, le carton PB développe au début de la diffusion une courbure le long de  $x$  ( $\kappa_x < 0$ ,  $\kappa_y \cong 0$ ) (1). Cette courbure continue de se développer jusqu'à ce que le régime stationnaire soit atteint. Le carton prend donc « naturellement » la configuration (1), mais la configuration (2) ( $\kappa_x \cong 0$ ,  $\kappa_y < 0$ ) est une autre forme d'équilibre stable possible.

Les formes prédites par le modèle transitoire développé sont maintenant comparées à celles prédites par Cloutier, Gendron et Dano [8].

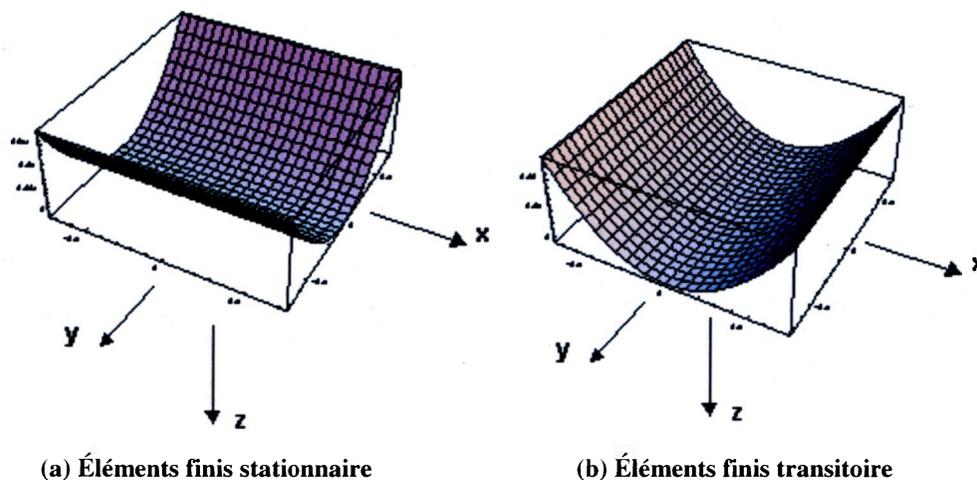


Figure 3.9 : Déflexion obtenue par Cloutier, Gendron et Dano [8] – Carton NPB

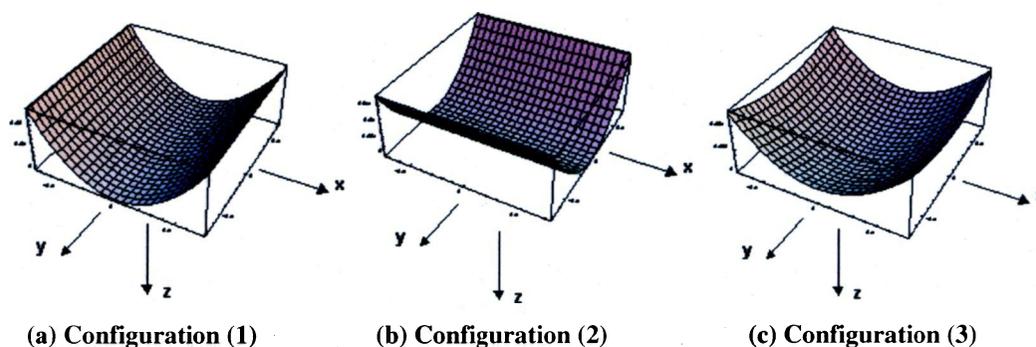


Figure 3.10 : Configurations d'équilibre obtenues avec le modèle transitoire développé – Carton NPB

La Figure 3.9 rappelle les formes à l'état d'équilibre du carton NPB obtenues par les modèles d'éléments finis stationnaire et transitoire utilisés lors de l'étude de Cloutier, Gendron et Dano [8]. Curieusement, on constate que la forme prédite par le modèle d'éléments finis stationnaire ( $\kappa_x \cong 0$ ,  $\kappa_y < 0$ ) ne correspond pas à la forme prédite par le modèle d'éléments finis transitoire ( $\kappa_x < 0$ ,  $\kappa_y \cong 0$ ). La Figure 3.10 rappelle les configurations à l'état d'équilibre du carton NPB obtenues par le modèle transitoire développé (voir Figure 3.7). Parmi ces trois configurations, la configuration (1)

correspond à une solution stable qui existe en tout temps. Elle correspond également à la configuration prédite par le modèle d'éléments finis transitoire utilisé par Cloutier, Gendron et Dano [8]. La configuration (2) est une forme d'équilibre stable, mais qui n'apparaît pas spontanément lors de la diffusion. Elle correspond à la forme prédite par le modèle d'éléments finis stationnaire. La configuration (3) est une forme d'équilibre instable que le carton ne peut pas garder.

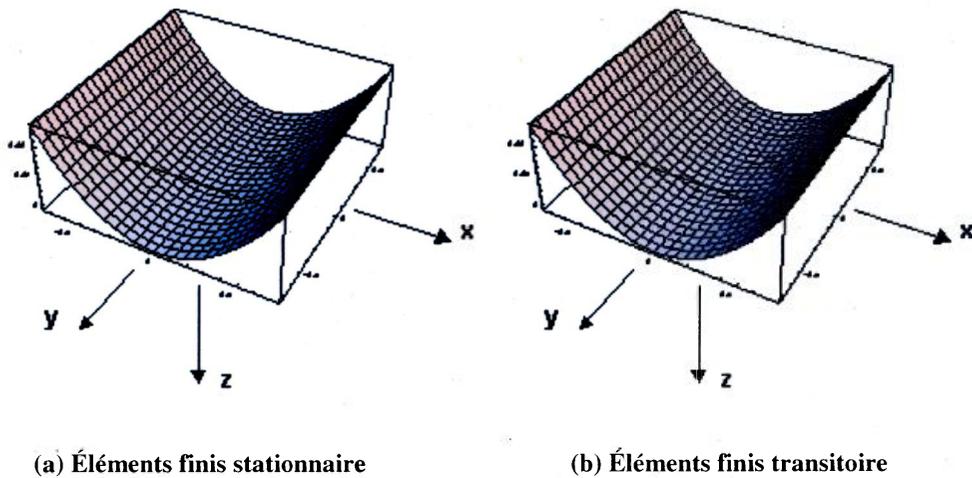


Figure 3.11 : Déflexion obtenue par Cloutier, Gendron et Dano [8] – Carton PB

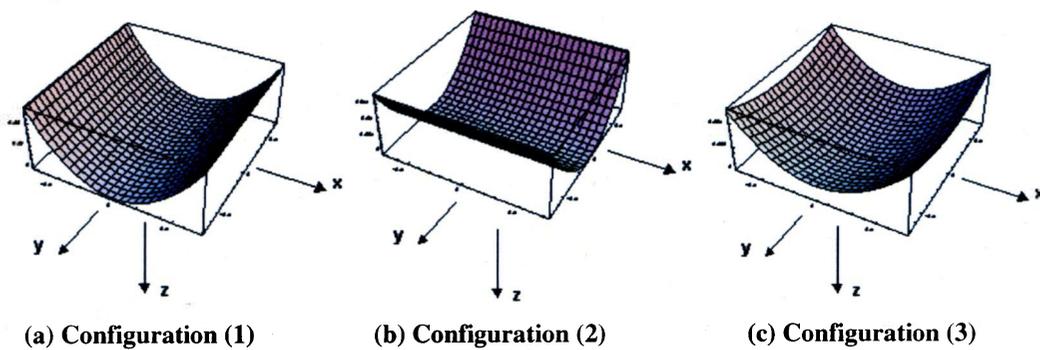


Figure 3.12 : Configurations d'équilibre obtenues avec le modèle transitoire développé – Carton PB

La Figure 3.11 rappelle les formes à l'état d'équilibre du carton PB obtenues par les modèles d'éléments finis stationnaire et transitoire utilisés lors de l'étude de Cloutier, Gendron et Dano [8]. Contrairement au carton NPB, on remarque que la forme prédite par le modèle d'éléments finis stationnaire ( $\kappa_x < 0$ ,  $\kappa_y \cong 0$ ) correspond à la forme prédite par le modèle d'éléments finis transitoire ( $\kappa_x < 0$ ,  $\kappa_y \cong 0$ ). La Figure 3.12 rappelle les configurations à l'état d'équilibre du carton PB obtenues par le modèle transitoire développé (voir Figure 3.8). Parmi ces trois configurations, la configuration (1) correspond à une solution stable qui existe en tout temps. Elle correspond également à la configuration prédite par les modèles d'éléments finis stationnaire et transitoire utilisés par Cloutier, Gendron et Dano [8].

#### **3.3.4 Conclusion**

Les résultats obtenus à l'aide du modèle transitoire développé montrent qu'il existe trois formes possibles à l'état d'équilibre et ce, pour les deux cartons utilisés. Ces trois formes correspondent aux trois solutions prédites par le modèle, desquelles deux sont stables et une seule existe en tout temps. De plus, la comparaison entre les résultats obtenus avec le modèle transitoire développé et les modèles d'éléments finis utilisés par Cloutier, Gendron et Dano [8] indique qu'il est nécessaire de tenir compte du processus de diffusion de la teneur en humidité lorsque l'on veut prédire les déformations hygromécaniques d'une feuille multicouche. En effet, il semble que pour certaines feuilles multicouches (carton NPB), la forme prédite à l'état d'équilibre ne soit pas la même pour une analyse stationnaire ou transitoire. Le processus de diffusion de l'humidité aurait donc une influence sur la forme que prend la feuille de carton à l'équilibre.

### 3.4 Conclusion

Un modèle d'éléments finis a été développé dans le but de valider les prédictions du modèle semi-analytique transitoire. Ce modèle d'éléments finis a d'abord été utilisé pour valider les prédictions du modèle semi-analytique transitoire obtenues pour une feuille de papier multicouche. De plus, une étude de cas portant sur les déformations hygromécaniques de deux types de carton a aussi permis de valider le modèle semi-analytique transitoire à l'aide du modèle d'éléments finis utilisé par Cloutier, Gendron et Dano [8].

D'abord, le modèle d'éléments finis de la feuille de papier multicouche a permis de valider le modèle de diffusion transitoire de l'humidité. Les distributions de teneur en humidité à différents temps et la teneur en humidité au centre de la feuille de papier en fonction du temps prédites par le modèle semi-analytique transitoire sont très proches de celles prédites par le modèle d'éléments finis. De plus, les prédictions des déplacements verticaux d'un coin de la feuille et des courbures dans les directions  $x$  et  $y$  en fonction du temps sont similaires pour les deux modèles.

L'étude de cas pour les deux types de carton a aussi permis de valider le modèle semi-analytique transitoire. Le modèle prédit trois formes possibles à l'état permanent pour chacun des cartons. Dans les deux cas, une seule solution existe en tout temps et est stable. Cette solution correspond à celle prédite par le modèle d'éléments finis transitoire utilisé par Cloutier, Gendron et Dano [8] et correspond à celle prédite par le modèle d'éléments finis stationnaire pour le carton PB seulement. Pour le carton NPB, la forme à l'équilibre dépend du type d'analyse par éléments finis (stationnaire ou transitoire) utilisée pour calculer les déformations. Cette divergence de forme confirme la nécessité de modéliser le phénomène de diffusion de l'humidité pour calculer les déformations hygromécaniques d'une feuille multicouche.

Ainsi, le modèle semi-analytique transitoire développé au Chapitre 2 est une excellente alternative à un modèle d'élément finis. Il prédit une diffusion transitoire de

l'humidité et des courbures en fonction du temps similaires à celles prédites par le modèle d'éléments finis, pour un temps de calcul largement inférieur. De plus, il permet de déterminer très facilement si de multiples configurations d'équilibre existent. On peut maintenant envisager de valider expérimentalement les prédictions du modèle.

## **Chapitre 4 Fabrication et caractérisation des feuilles de papier**

### **4.1 Introduction**

Le chapitre précédent a permis de valider le modèle semi-analytique développé à l'aide d'un modèle d'éléments finis. À présent, le modèle semi-analytique doit aussi être validé à l'aide d'essais expérimentaux. Il faut donc fabriquer des feuilles de papier, mesurer leurs propriétés et concevoir des assemblages multicouches qui seront utilisés lors de ces essais expérimentaux. En premier lieu, il faut choisir et fabriquer les types de papier constituant les couches individuelles et caractériser ces couches. Les propriétés requises par le modèle pour les couches individuelles sont l'épaisseur, la masse volumique, les propriétés élastiques, le coefficient d'expansion hydrique, la courbe de sorption et le coefficient de diffusivité effectif. Ensuite, il faut déterminer la séquence d'empilement de ces couches pour obtenir différentes feuilles multicouches. Ces feuilles multicouches doivent aussi être caractérisées. Les propriétés requises par le modèle pour les feuilles multicouches sont la courbe de sorption et le coefficient de convection hydrique. Ce travail a été essentiellement réalisé dans le laboratoire de stabilité dimensionnelle de FPIInnovations - Division Paprican à Pointe-Claire.

Pour éviter toute confusion entre les systèmes d'axes, il est pertinent de rappeler que les propriétés des couches individuelles sont mesurées selon la direction 1 (sens machine ou sens des fibres, SM) et selon la direction 2 (sens travers, ST). Dans le cas des feuilles multicouches, les propriétés sont mesurées selon la direction  $x$  et selon la direction  $y$ . La Figure 2.7 illustre les systèmes d'axes.

## 4.2 Fabrication et caractérisation des couches individuelles

### 4.2.1 Description et fabrication des couches individuelles

Les couches individuelles utilisées dans la conception des feuilles multicouches sont issues de quatre types de papier différents, notés HS, PTM, PJ 1.02 et PJ 1.13 et dont les caractéristiques sont indiquées au Tableau 4.1. Tous ces papiers ont été fabriqués dans une machine à papier, excepté le papier de type HS (formette ou « handsheet ») qui a été fabriqué manuellement selon le standard Tappi, pour des feuilles de grammage 60 g/m<sup>2</sup> [21]. Les papiers fabriqués avec une machine à papier possèdent deux caractéristiques de base inhérentes à leur mode de fabrication : l'orientation des fibres et le rapport jet/toile. L'orientation des fibres est fortement influencée par le rapport jet/toile qui peut être défini comme étant le rapport des vitesses du jet de pâte et de la toile de la machine à papier. Dans le cas des papiers fabriqués à la machine (PTM, PJ 1.02 et PJ 1.13), les fibres sont orientées dans la direction 1 ou sens machine (SM) et la distribution de cette orientation dépend du rapport jet/toile. Pour le papier fabriqué à la main (HS), les fibres sont orientées aléatoirement.

Tableau 4.1 : Description des types de papier

Symbole	Papier	Orientation des fibres	Fabrication	Rapport jet/toile
HS	Papier de type formette, RM8495 (Bleached northern softwood kraft pulp, handsheet paper)	aléatoire	à la main	--
PTM	Papier à pâte thermomécanique à 100 % (100 % thermomechanical pulp paper)	préférentielle	machine	1.01
PJ 1.02	Papier journal (newsprint paper)	préférentielle	machine	1.02
PJ 1.13	Papier journal (newsprint paper)	préférentielle	machine	1.13

#### 4.2.2 Caractérisation des couches individuelles

Les couches individuelles ont été caractérisées à l'aide de différents essais. Les essais effectués et les propriétés mesurées sont présentés au Tableau 4.2. Le premier essai utilise le micromètre et la balance pour mesurer l'épaisseur de la feuille de papier et sa masse volumique. L'essai avec robot TSI/TSO utilise la technique des ultrasons pour mesurer les propriétés élastiques (modules d'élasticité, module de cisaillement, coefficient de Poisson) de la feuille. Les coefficients d'expansion hydrique et les courbes de sorption sont calculés à l'aide d'un banc d'essai dédié utilisant une chambre à environnement contrôlé et des capteurs LVDT pour mesurer les déplacements de bandes de papier. Enfin, l'essai de diffusion se sert du principe du « vaporimètre » pour mesurer le coefficient de diffusion effectif d'une feuille de papier. Une description plus détaillée de chaque essai de caractérisation est disponible à l'Annexe D.

Tableau 4.2: Description des essais de caractérisation

Essai	Propriétés mesurées	Symbole
Micromètre automatique / Balance	épaisseur masse volumique	e $\rho$
Robot TSI/TSO	modules d'élasticité module de cisaillement coefficient de Poisson	$E_1, E_2$ $G_{12}$ $\nu_{21}$
Expansion hydrique	coefficients d'expansion hydrique teneurs en humidité (courbes de sorption)	$\beta_1, \beta_2$ H
Diffusion	coefficient de diffusion effectif	D

Les résultats des essais de caractérisation des couches individuelles sont présentés au Tableau 4.3. Ils sont disponibles en détail à l'Annexe D.

Tableau 4.3 : Résultats des essais de caractérisation – couches individuelles

Propriété	Unité	HS	PTM	PJ 1.02	PJ 1.13
<b>e</b>	μm	115	132	100	100
<b>ρ</b>	(kg/m <sup>3</sup> )	535	343	448	443
<b>E<sub>1</sub>*</b>	(GPa)	4,04	3,09	4,41	4,54
<b>E<sub>2</sub>*</b>	(GPa)	4,04	1,02	2,01	1,78
<b>G<sub>12</sub></b>	(Gpa)	1,46	0,59	1,04	0,98
<b>v<sub>21</sub></b>		0,27	0,12	0,12	0,14
<b>β<sub>1</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,40	0,35	0,47	0,39
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,56	0,38	0,46	0,43
<b>β<sub>2</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,40	0,93	1,07	0,85
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,56	1,57	1,38	1,45
<b>H<sub>75 % HR</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(%)	10,3	13,1	13,0	13,0
<b>80-50 % HR</b>	(%)	11,6	14,7	14,5	14,6
<b>H<sub>50 % HR</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(%)	7,4	9,7	9,7	9,8
<b>80-50 % HR</b>	(%)	8,5	11,3	11,2	11,2
<b>D</b>	(10 <sup>-11</sup> m <sup>2</sup> /s)	7,73	13,92	6,90	6,95

\* : 1 : Sens machine; 2 : Sens travers

Le Tableau 4.3 montre les valeurs mesurées des propriétés des différentes couches individuelles. On remarque que les couches de type PJ 1.02 et PJ 1.13 ont des propriétés assez similaires. Il faut rappeler que ces deux types de couche ont été fabriqués avec le même papier (« Papier journal, PJ »). Seul le rapport jet/toile diffère, ce qui peut influencer l'orientation des fibres. On peut d'ailleurs constater que les propriétés dans les directions 1 et 2 ne sont pas tout à fait les mêmes pour les deux types de papier. D'autre part, on constate que le coefficient d'expansion hydrique mesuré varie en fonction de la plage d'humidité relative sur laquelle on mesure ce coefficient. Cette remarque est surtout valide pour le coefficient mesuré en direction 2. Par exemple, la valeur du coefficient  $\beta_2$  de la couche PTM mesuré pour une absorption allant de 30 % HR à 80 % HR est de  $0,93 \times 10^{-3} / \%$  alors qu'elle est de  $1,57 \times 10^{-3} / \%$  pour une désorption allant de 80 % HR à 50 % HR. Ce phénomène devra être pris en compte lors du choix des propriétés des couches pour le calcul théorique des courbures. Les valeurs de teneur en humidité obtenues à 75 % HR et 50 % HR présentent une sensibilité similaire. Finalement, les

valeurs des coefficients de diffusion effectifs obtenues pour les papiers HS, PJ 1.02 et PJ 1.13 sont assez similaires, alors que le papier PTM présente un coefficient deux fois plus élevé.

## **4.3 Fabrication et caractérisation des assemblages multicouches**

### ***4.3.1 Description et fabrication des assemblages multicouches***

Une fois les couches individuelles caractérisées, il faut définir les assemblages qui seront construits à partir de ces couches. On souhaite obtenir des assemblages qui se déformeront suffisamment hors du plan lors d'un changement d'humidité. Ainsi, la courbure développée sera facilement mesurable. Pour y parvenir, il faut que les couches qui composent l'assemblage aient des propriétés hygro-mécaniques assez différentes et que les couches soient empilées de façon non symétrique par rapport au plan moyen de l'assemblage.

En consultant le Tableau 4.3, on peut constater que les coefficients d'expansion hydrique  $\beta_1$  et  $\beta_2$  varient d'une couche à l'autre. Comme la courbure « dominante » d'une feuille de papier est généralement en direction 2 (sens travers, ST), c'est surtout le coefficient  $\beta_2$  qui est considéré dans le choix de la séquence d'empilement d'un assemblage. Pour maximiser la déformation hygro-mécanique de l'assemblage, on a avantage à empiler les couches de manière à obtenir une différence importante entre les coefficients d'expansion hydrique du dessus et du dessous de la feuille. Par exemple, un assemblage utilisant les couches PJ 1.02 (dessus), PTM (milieu) et HS (dessous) présente une différence importante entre les coefficients  $\beta_2$  du dessus et du dessous de l'assemblage. Cette différence rend le comportement hygro-mécanique de l'assemblage non symétrique par rapport au plan moyen, ce qui devrait se traduire par des courbures significatives si l'assemblage est soumis à un changement d'humidité.

Un total de neuf assemblages ont été déterminés et fabriqués. Le Tableau 4.4 présente la composition de ces assemblages. Les assemblages A1 à A5 comportent deux couches, les assemblages A6 à A8 trois couches et l'assemblage A9 quatre couches. La présence d'amidon comme agent de collage des couches est aussi indiqué. L'amidon a été utilisé pour maximiser l'adhérence et la solidarité entre les couches, considérant que le modèle de prédiction des déformations développé dans le présent travail utilise l'hypothèse de couches parfaitement solidaires entre elles (hypothèse de Kirchhoff, [23]). Aussi, la présence de l'amidon ne devrait pas influencer la diffusion de la vapeur d'eau dans le papier puisque que l'amidon est hydrosoluble. Il est important de remarquer que les assemblages A5 et A7 contiennent les couches PJ 1.02 et PJ 1.13 disposées de par et d'autre du plan moyen. Ces couches ayant des propriétés semblables, on s'attend donc à ce que les assemblages A5 et A7 développent peu de courbure puisque ces assemblages sont quasiment symétriques par rapport au plan moyen. Les étapes de fabrication des assemblages avec ou sans amidon sont décrites en détail à l'Annexe E.

**Tableau 4.4 : Description des assemblages**

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
<b>couche 1</b>	PTM	PTM	PJ 1.02						
<b>couche 2</b>	HS	HS	HS	HS	PJ 1.13	PTM	PTM	PJ 1.13	PTM
<b>couche 3</b>						HS	PJ 1.13	HS	PJ 1.13
<b>couche 4</b>									HS
<b>Utilisation d'amidon</b>	non	oui	non	oui	oui	oui	oui	oui	oui

#### **4.3.2 Caractérisation des assemblages multicouches**

Les assemblages multicouches ont été caractérisés à l'aide des mêmes essais que ceux utilisés pour caractériser les couches individuelles (Tableau 4.2). De plus, un essai de délaminage a été mené sur les assemblages dans le but de mesurer l'énergie requise pour entraîner le délaminage dans les directions  $x$  et  $y$ , notée respectivement  $W_{del,x}$  et  $W_{del,y}$ . Une description plus détaillée de chaque essai de caractérisation est disponible à

l'Annexe D. Les résultats des essais de caractérisation des feuilles multicouches sont présentés au Tableau 4.5. Ils sont disponibles en détail à l'Annexe D.

**Tableau 4.5 : Résultats des essais de caractérisation – assemblages**

Propriété	Unités	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
<b>e</b>	µm	223	223	205	202	161	268	246	263	357
<b>ρ</b>	(kg/m <sup>3</sup> )	464	521	505	583	657	592	628	625	619
<b>E<sub>x</sub><sup>*</sup></b>	(GPa)	2,91	4,39	3,84	4,70	5,23	6,53	7,79	6,88	6,59
<b>E<sub>y</sub><sup>*</sup></b>	(GPa)	1,73	3,05	2,54	3,49	2,60	3,95	3,57	4,63	3,73
<b>G<sub>xy</sub></b>	(GPa)	0,76	1,27	1,10	1,42	1,25	1,74	1,74	1,97	1,81
<b>v<sub>yx</sub></b>		0,19	0,21	0,21	0,24	0,20	0,22	0,16	0,24	0,17
<b>β<sub>x</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,30	0,43	0,32	0,39	0,36	0,37	0,36	0,43	0,41
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,42	0,63	0,46	0,56	0,51	0,46	0,41	0,52	0,49
<b>β<sub>y</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,47	0,66	0,49	0,67	1,12	0,80	1,20	0,98	0,92
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,78	1,07	0,80	0,95	1,98	1,12	1,71	1,26	1,25
<b>H<sub>75 % HR</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(%)	11,5	12,8	10,7	12,3	13,5	12,4	13,2	12,1	12,5
<b>80-50 % HR</b>	(%)	13,0	14,3	12,1	13,8	15,2	14,0	14,9	13,8	14,1
<b>H<sub>50 % HR</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(%)	8,3	9,8	7,4	9,2	10,3	9,4	10,1	9,4	9,6
<b>80-50 % HR</b>	(%)	9,6	11,4	8,8	10,6	12,1	10,8	11,8	10,8	11,1
<b>W<sub>del,x</sub></b>	(J/m <sup>2</sup> )	52	512	253	657	711	438	729	412	426
<b>W<sub>del,y</sub></b>	(J/m <sup>2</sup> )	53	422	41	661	710	420	673	561	430

\* : *x* : Aligné avec la direction 1 (sens machine) des couches;

*y* : Aligné avec la direction 2 (sens travers) des couches

Le Tableau 4.5 présente les résultats des essais de caractérisation des assemblages multicouches. Les indices utilisés pour les symboles des propriétés des assemblages sont *x* et *y*. La direction *x* d'un assemblage est alignée avec la direction 1 (ou sens machine, SM) des couches qui composent cet assemblage, alors que la direction *y* est alignée avec la direction 2 (ou sens travers, ST) des couches. Notons avant tout que parmi les propriétés mesurées, seules les teneurs en humidité à 75 % HR et 50 % HR sont utilisées dans le modèle de prédiction des courbures. Encore ici, on constate que les valeurs de ces teneurs en humidité varient en fonction de la plage d'humidité relative sur laquelle elles ont été mesurées. D'autre part, l'énergie requise pour le délaminage des assemblages ( $W_{del,x}$  et  $W_{del,y}$ ) est très faible dans le cas des assemblages collés sans amidon (A1 et

A3). Par exemple, l'assemblage A1 ([PTM/HS], sans amidon) présente une énergie requise dans la direction  $x$  de seulement  $52 \text{ J / m}^2$ . Or, l'assemblage A2 (collé avec amidon et de composition identique) requiert une énergie de  $512 \text{ J / m}^2$  pour le délaminage dans la direction  $x$ . On constate donc que le mode de fabrication sans amidon n'est pas adéquat et n'assure pas une bonne solidarité entre les couches. L'absence d'amidon dans les assemblages devra donc être considérée lors de la comparaison des courbures mesurées aux courbures calculées par le modèle développé. Finalement, la comparaison entre les modules d'élasticité obtenus pour les assemblages sans amidon et avec amidon (A1 versus A2, A3 versus A4) montre que l'ajout d'amidon comme agent de collage fait augmenter les modules d'élasticité dans les deux directions. Cependant, l'ajout d'amidon fait aussi augmenter les coefficients d'expansion hydrique dans les deux directions. L'effet global de la présence d'amidon sur le développement des courbures est donc difficile à évaluer, d'autant plus que cet effet peut difficilement être pris en compte par le modèle de prédiction des courbures.

#### ***4.3.3 Détermination des coefficients de convection hydrique des assemblages***

Le modèle de diffusion transitoire de l'humidité présenté au Chapitre 2 utilise l'hypothèse que l'humidité pénètre dans la feuille de papier par convection hydrique, par le dessus et le dessous de la feuille. Le coefficient de convection hydrique apparaît dans l'équation transcendante (2.30) qui permet de calculer les valeurs propres du problème de diffusion de l'humidité. En pratique, on considère que ce coefficient est le même pour le dessus et le dessous de la feuille de papier. On a donc :

$$h_{\text{haut}} = h_{\text{bas}} = h. \quad (4.1)$$

Dans le cadre de l'étude antérieure sur la modélisation du gauchissement hygromécanique du carton [8], le coefficient de convection hydrique de l'humidité a été

choisi en considérant une valeur disponible dans le livre de Siau [25] pour un film d'air immobile. Cette valeur est :

$$h = \frac{3,2 \times 10^{-4} \text{ kg}}{\text{m}^2 \text{ s} \%} \quad (4.2)$$

Pour vérifier l'effet de ce paramètre sur l'évolution de la teneur en humidité et des courbures à travers le temps, plusieurs valeurs de  $h$  ont été insérées dans le modèle semi-analytique de diffusion transitoire de l'humidité. Les résultats sont présentés à la Figure 4.1 pour l'assemblage A6.

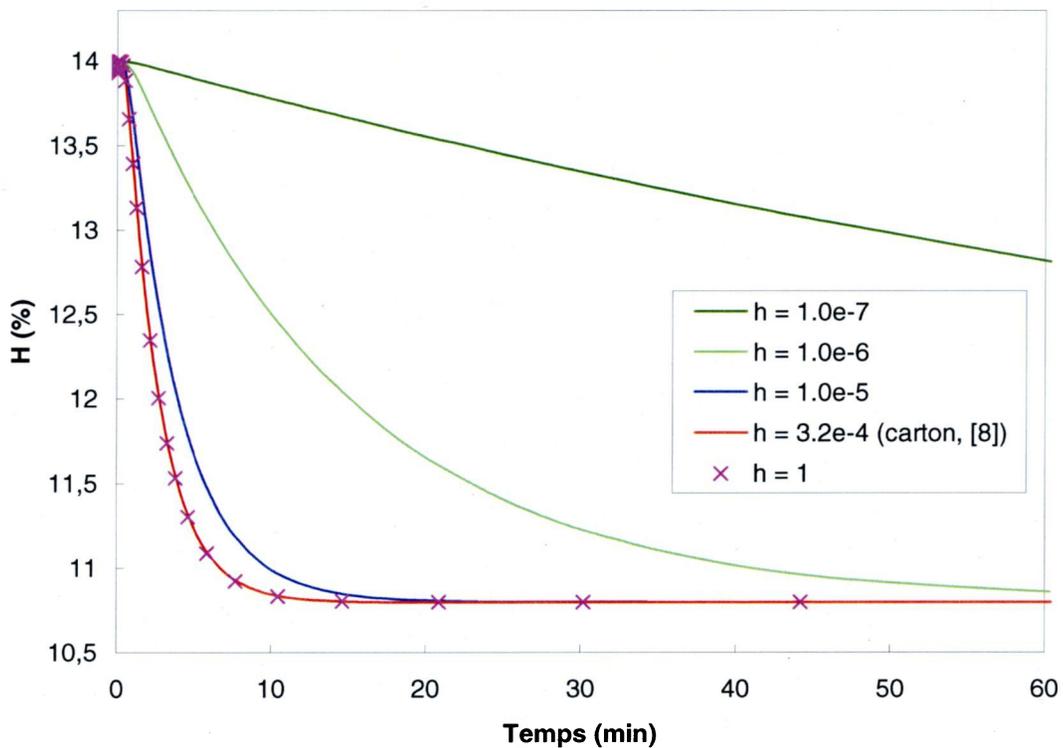


Figure 4.1 : Effet du coefficient de convection hydrique  $h$  sur l'évolution de la teneur en humidité à travers le temps au centre de la feuille ( $z = 0$ ) – Assemblage A6

En observant la Figure 4.1, on remarque que le coefficient  $h$  a un effet sur tout le processus de diffusion transitoire de l'humidité. Plus  $h$  est petit, plus le temps requis

pour atteindre le régime stationnaire (teneur en humidité constante) est élevé. Cependant, il semble que cet effet ne soit pas linéaire. En fait, pour des valeurs du coefficient de transfert convectif supérieures à  $1,0 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{ s } \%$ , les courbes de teneurs en humidité en fonction du temps convergent.

En somme, le coefficient de convection hydrique  $h$  a une influence significative sur le processus de diffusion transitoire de l'humidité à travers la feuille de papier, et donc sur le développement des courbures à travers le temps. Ainsi, il importe de trouver une donnée valide pour ce coefficient.

Dans le livre de Siau [25], l'auteur mentionne que le coefficient de convection hydrique basée sur la masse volumique de l'air  $h_v$  est étroitement lié au coefficient de convection thermique,  $h_T$ . Cette relation vient de la quasi-égalité des nombres de Nusselt ( $Nu$ ) et de Sherwood ( $Sh$ ). Par définition, ces nombres sont exprimés par :

$$Nu = \frac{h_T L}{D_{qa} c_{pa} \rho_a} \quad (4.3)$$

$$Sh = \frac{h_v L}{D_a}, \quad (4.4)$$

où  $h_T$  est le coefficient de convection thermique,  $h_v$  est le coefficient de convection hydrique basée sur la masse volumique de l'air,  $L$  est la longueur de la surface sur laquelle la convection se produit,  $D_{qa}$  est la diffusivité thermique de l'air,  $c_{pa}$  est la chaleur spécifique de l'air à pression constante,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air et  $D_a$  est la diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air. Pour un écoulement laminaire (nombre de Reynolds :  $Re < 16\,000$ ), les nombres de Nusselt et de Sherwood moyennés sur la longueur  $L$  s'expriment par :

$$\bar{Nu} = \frac{Nu}{L} = 0,66 Re^{0,5} Pr^{0,33} \quad (4.5)$$

$$\bar{Sh} = \frac{Sh}{L} = 0,66 Re^{0,5} Sc^{0,33}, \quad (4.6)$$

où  $Pr$  et  $Sc$  sont les nombres adimensionnels de Prandtl et Schmidt, respectivement. En examinant les équations (4.5) et (4.6), on remarque que les nombres de Nusselt et de Sherwood sont égaux si les nombres de Prandtl et de Schmidt sont égaux. Ces deux nombre sont définis par :

$$Pr = \frac{\mu}{\rho_a D_{qa}} \quad (4.7)$$

$$Sc = \frac{\mu}{\rho_a D_a}, \quad (4.8)$$

où  $\mu$  est la viscosité de l'air. En examinant les équations (4.7) et (4.8), on constate que les nombres de Prandtl et de Schmidt sont égaux si la diffusivité thermique de l'air et la diffusivité de la vapeur d'eau dans l'air sont égales. Ces deux quantités sont pratiquement égales à 30 °C. De ce fait, et en considérant une même longueur  $L$ , les équations (4.3) et (4.4) sont quasi-égales et on peut écrire:

$$h_v \approx \frac{D_a h_T}{D_{qa} c_{pa} \rho_a} = \frac{h_T}{c_{pa} \rho_a}. \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) est appelée relation de Lewis. Elle permet de déterminer un coefficient de convection de masse ( $h_v$ ) à partir d'un coefficient de convection thermique. Il faut rappeler que  $h_v$  est un coefficient de convection hydrique basée sur la masse volumique de l'air. Il s'exprime en (m/s). Or, le modèle de diffusion transitoire de l'humidité utilise

un coefficient de convection hydrique  $h$  basé sur la teneur en humidité du papier, exprimé en  $(\text{kg}/\text{m}^2 \text{ s } \%)$ . Pour obtenir ce coefficient, il faut transformer le coefficient  $h_v$  à l'aide de la relation suivante [25] :

$$h = \frac{p_0}{100R_{H_2O}T} \frac{(HR_0 - HR_\infty)}{(H_0 - H_\infty)} h_v. \quad (4.10)$$

où  $R_{H_2O}$  est la constante spécifique de la vapeur d'eau,  $T$  est la température de l'air ambiant,  $p_0$  est la pression de saturation de l'air à la température considérée,  $(HR_0 - HR_\infty)$  est la différence entre l'humidité relative initiale et finale et  $(H_0 - H_\infty)$  est la différence entre la teneur en humidité initiale et finale du papier. En combinant les équations (4.9) et (4.10), on obtient finalement l'expression du coefficient de convection hydrique basé sur la teneur en humidité du papier ( $h$ ) en fonction du coefficient de convection thermique ( $h_T$ ) :

$$h = \frac{p_0}{100R_{H_2O}Tc_{pa}\rho_a} \frac{(RH_0 - RH_\infty)}{(H_0 - H_\infty)} h_T. \quad (4.11)$$

Le dernier paramètre inconnu est la valeur du coefficient de conduction thermique  $h_T$ . Siau [25] utilise la valeur  $h_T = 4,4 \text{ W}/\text{m}^2 \text{ K}$ . Ce coefficient est valide pour un mur vertical intérieur (faible différence de température entre l'air ambiant à l'intérieur et la surface du mur) et une vitesse nulle de l'air ambiant. Ces conditions sont analogues à celles posées pour le modèle de diffusion transitoire de l'humidité. En insérant les valeurs numériques du coefficient de conduction thermique  $h_T$  et des différentes propriétés de l'air ambiant (Tableau 4.6), l'équation (4.11) devient :

$$h = 6,89 \times 10^{-7} \frac{(RH_0 - RH_\infty)}{(H_0 - H_\infty)}. \quad (4.12)$$

**Tableau 4.6 : Valeurs des propriétés de l'air ambiant**

Symbole	Définition	Valeur
$c_{pa}$	chaleur spécifique de l'air à pression constante	1003 J/kg K
$\rho_a$	masse volumique de l'air	1,165 kg/m <sup>3</sup>
$R_{H_2O}$	constante spécifique de la vapeur d'eau	462 J/kg K
$T$	température de l'air ambiant	294 K
$p_0$	pression de saturation de l'air à température ambiante	2486 Pa

L'équation (4.12) montre que le coefficient de convection hydrique d'une feuille de papier varie en fonction de deux variables : la différence entre l'humidité relative initiale et finale ainsi que la différence entre la teneur en humidité initiale et finale de la feuille (courbe de sorption). En supposant que  $HR_0 = 75 \%$  et  $HR_\infty = 50 \%$ , on obtient alors l'équation finale permettant de calculer le coefficient de convection hydrique des assemblages utilisés dans ce travail :

$$h = \frac{1,723 \times 10^{-5}}{H_0 - H_\infty}, \quad (4.13)$$

où  $H_0$  et  $H_\infty$  correspondent respectivement à  $H_{75\% \text{ HR}}$  et  $H_{50\% \text{ HR}}$  (phase de désorption 80 % - 50 % HR) présentées au Tableau 4.5. Les coefficients de convection hydrique calculés pour chaque assemblage sont présentés au Tableau 4.7.

**Tableau 4.7 : Coefficient de convection hydrique de chaque assemblage  
- phase de désorption 80-50 % HR**

Assemblage	$H_0$ (à 75 % HR) (%)	$H_\infty$ (à 50 % HR) (%)	$h$ (10 <sup>-6</sup> kg / m <sup>2</sup> s %)
<b>A1</b>	13,0	9,6	<b>5,19</b>
<b>A2</b>	14,3	11,4	<b>6,00</b>
<b>A3</b>	12,1	8,8	<b>5,20</b>
<b>A4</b>	13,8	10,6	<b>5,48</b>
<b>A5</b>	15,2	12,1	<b>5,61</b>
<b>A6</b>	14,0	10,8	<b>5,39</b>
<b>A7</b>	15,0	11,8	<b>5,41</b>
<b>A8</b>	13,8	10,8	<b>5,87</b>
<b>A9</b>	14,1	11,1	<b>5,77</b>

## 4.4 Conclusion

Les essais de caractérisation ont permis de mesurer toutes les propriétés des couches individuelles requises par le modèle. Les propriétés hygro-mécaniques de ces couches ont été utilisées pour déterminer la constitution des assemblages multicouches. Les propriétés de ces assemblages ont ensuite été mesurées, mais seules les teneurs en humidité seront utilisées dans le modèle. Finalement, le coefficient de convection hydrique a été évalué pour chaque assemblage. Ainsi, toutes les propriétés requises par le modèle semi-analytique pour simuler le comportement des assemblages soumis à une variation de leur teneur en humidité ont été déterminées. Il reste maintenant à mener des essais expérimentaux de courbures avec les assemblages conçus pour valider le modèle.

## **Chapitre 5    Mesure expérimentale des courbures**

### **5.1 Introduction**

Un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques pour une feuille de papier multicouche en régime transitoire a d'abord été développé. Ce modèle a été validé à l'aide d'un modèle d'éléments finis. Par la suite, les propriétés des couches individuelles et des feuilles multicouches ont été mesurées à l'aide de divers essais de caractérisation. Il s'agit maintenant de mesurer expérimentalement les courbures développées par les feuilles multicouches afin d'obtenir des données expérimentales pouvant être comparées aux prédictions des modèles. De plus, les essais de courbures permettront d'étudier divers paramètres tels que l'uniformité des couches individuelles, l'effet de plusieurs cycles d'humidité consécutifs, l'effet d'un assèchement initial et le temps requis pour atteindre le régime stationnaire. Ce chapitre présente en premier lieu une description du problème et un bref aperçu du système de mesure utilisé (Aramis 3D). Par la suite, la procédure expérimentale est décrite. Finalement, les résultats des divers essais de courbures (essais sur les couches individuelles, essais préliminaires, essais cycliques et essai prolongé) sont présentés en détail.

## 5.2 Problématique expérimentale

L'objectif principal est d'obtenir des données expérimentales qui permettront de valider les prédictions. Le modèle semi-analytique développé prédit les courbures  $\kappa_x(t)$  et  $\kappa_y(t)$  qui se développent dans des feuilles de papier multicouche lorsque celles-ci sont soumises à des variations de l'humidité. La courbure de torsion  $\kappa_{xy}$  est égale à zéro. En général, la courbure la plus importante est dans le sens travers ST (direction  $y$ ), tandis que la courbure dans le sens machine SM (direction  $x$ ) est négligeable. Les courbures  $\kappa_y(t)$  et  $\kappa_x(t)$  correspondent donc respectivement aux courbures principales  $\kappa_1(t)$  et  $\kappa_2(t)$ . Pour mesurer expérimentalement la courbure principale  $\kappa_1$ , le système Aramis 3D est utilisé. Cet équipement permet de mesurer les déplacements dans les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  de points situés sur la surface d'une structure. À partir des déplacements, la courbure principale  $\kappa_1$  peut ensuite être obtenue et comparée à  $\kappa_y$ .

Pour tous les essais de courbure, l'humidité relative initiale choisie est de 75 %. Cette humidité relative initiale correspond à une teneur en humidité initiale  $H_0$  différente pour chaque feuille multicouche, en raison de leurs courbes de sorption différentes. La valeur initiale de 75 % HR a été choisie afin d'obtenir une feuille initialement plate. En effet, puisque le modèle semi-analytique utilise comme point de départ une feuille de papier initialement plate à  $H_0$ , il est raisonnable de vouloir avoir une feuille de papier la plus plate possible au début des essais expérimentaux. De plus, il est établi que les courbures initiales d'une feuille de papier peuvent avoir une influence sur le développement des courbures subséquentes lors d'un changement d'humidité relative [5]. La feuille de papier a donc avantage à être la plus plate possible. Or, comme les assemblages ont été fabriqués et pressés sous forme humide, on s'attend à ce que les feuilles soient de forme plate à haute humidité relative. Enfin, en considérant les limitations de la chambre et la plage de validité des coefficients de diffusivité effectifs mesurés (entre 50 % et 75 % HR, voir Annexe E), la valeur de 75 % HR a été retenue.

L'humidité relative ambiante retenue est de 50 %. Cette humidité relative correspond à une teneur en humidité d'équilibre  $H_{\infty}$  différente pour chaque assemblage multicouche, en raison de leurs courbes de sorption différentes. Encore ici, la valeur de 50 % HR a été choisie en considérant la plage de validité des coefficients de diffusivité effectifs mesurés (entre 50 % et 75 % HR).

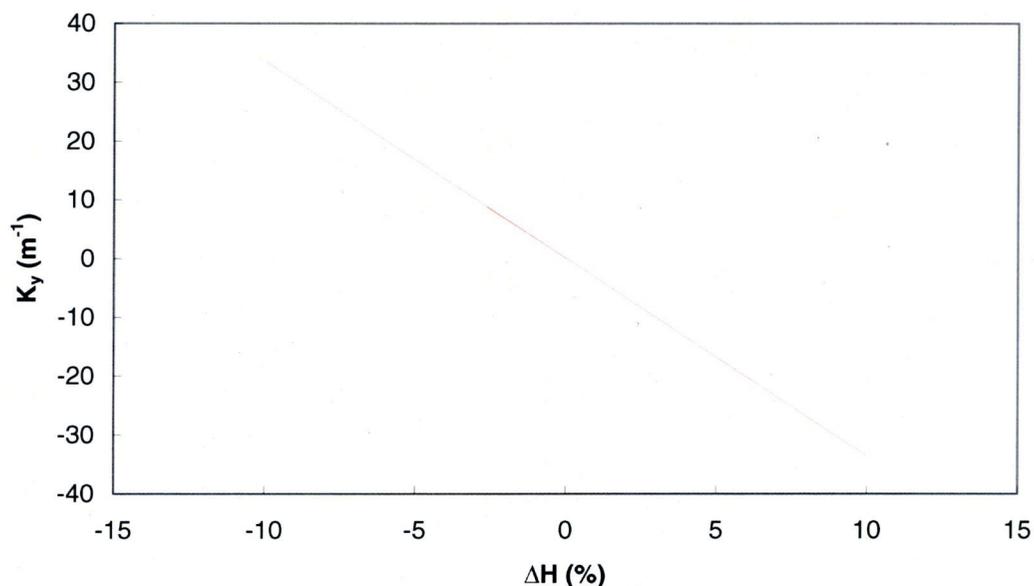
En somme, la feuille de papier subit un assèchement d'une teneur en humidité initiale  $H_0$  à 75 % HR jusqu'à une teneur en humidité d'équilibre  $H_{\infty}$  à 50 % HR. Par un mécanisme de convection hydrique sur la surface du dessus et du dessous de la feuille, l'humidité diffuse dans la feuille pour l'amener de son état quasi-plat jusqu'à un état courbé. Les teneurs en humidité correspondantes sont présentées au Tableau 5.1 et font référence à la phase de désorption des courbes de sorption présentées à l'Annexe D.

**Tableau 5.1 : Teneurs en humidité initiales et d'équilibres et différence de teneur en humidité pour chaque assemblage**

Assemblage	$H_0$ (@ 75 % HR) (%)	$H_{\infty}$ (@ 50 % HR) (%)	$\Delta H$ (%)
A1	12,96	9,64	-3,32
A2	14,25	11,38	-2,87
A3	12,11	8,79	-3,31
A4	13,76	10,62	-3,15
A5	15,16	12,08	-3,07
A6	14,00	10,80	-3,20
A7	14,95	11,77	-3,18
A8	13,77	10,84	-2,93
A9	14,13	11,14	-2,99

Tel que mentionné au début de cette section, la courbure obtenue à l'aide des mesures du système Aramis 3D est la courbure principale  $\kappa_1(t)$ , mesurée le long de la direction principale 1. Cette direction correspond au sens travers (ST) s'il n'y a pas de courbure de torsion supplémentaire présente dans la feuille de papier ( $\kappa_{xy} = 0$ ). Dans ce cas, la courbure mesurée expérimentalement  $\kappa_1(t)$  correspond à la courbure  $\kappa_y(t)$

calculée par les modèles. Il est important de considérer que la feuille de papier n'est initialement pas parfaitement plane lors de la mesure des courbures, contrairement à ce qui est simulé par les modèles. Lu et Carlsson [5] ont montré que la forme initiale d'une feuille de papier peut avoir de l'influence sur les courbures développées suite à une variation de la teneur en humidité. Or, l'étude stationnaire présentée à la section 2.4.3 et à l'Annexe A montre que toutes les feuilles multicouches utilisées dans le présent travail présentent une courbure  $\kappa_y(t)$  qui varie de façon linéaire avec la différence de teneur en humidité appliquée  $\Delta H$ . La Figure 5.1 illustre la courbure dans la direction  $y$  en fonction de la teneur en humidité appliquée pour l'assemblage A6 de dimensions  $L_x = L_y = 0,1$  m. On voit bien que la courbure  $\kappa_y$  varie linéairement avec  $\Delta H$ . Il en est de même pour les autres assemblages.



**Figure 5.1 : Courbure dans la direction  $y$  en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée – Assemblage A6**

Donc, pour les assemblages multicouches du présent travail, l'application d'une différence de teneur en humidité donnée  $\Delta H$  devrait entraîner la même variation de courbure  $\Delta\kappa_1$ , peu importe la courbure initiale observée. Par exemple, soit une feuille

multicouche subissant un assèchement allant d'une teneur en humidité initiale  $H_0$  à une teneur en humidité finale  $H_\infty$ . La différence de teneur en humidité appliquée est :

$$\Delta H = H_\infty - H_0. \quad (5.1)$$

Cette feuille présente une courbure principale initiale  $\kappa_{1,0}$  et une courbure principale finale (une fois le régime stationnaire atteint)  $\kappa_{1,st}$ . La différence finale de courbure principale est :

$$\Delta \kappa_{1,st} = \kappa_{1,st} - \kappa_{1,0}. \quad (5.2)$$

Un nouvel essai utilisant une teneur en humidité initiale  $H_0$  différente entraînera une courbure principale initiale  $\kappa_{1,0}$  différente. Cependant, si la même différence de teneur en humidité  $\Delta H$  est appliquée, la différence finale de courbure principale  $\Delta \kappa_{1,st}$  restera la même.

Ainsi, le changement de courbure principale  $\Delta \kappa_1(t)$  mesuré pour une feuille présentant une courbure initiale  $\kappa_{1,0}$  peut être comparé à la courbure  $\kappa_y(t)$  d'une feuille initialement plane :

$$\Delta \kappa_1(t) = \kappa_1(t) - \kappa_{1,0} = \kappa_y(t). \quad (5.3)$$

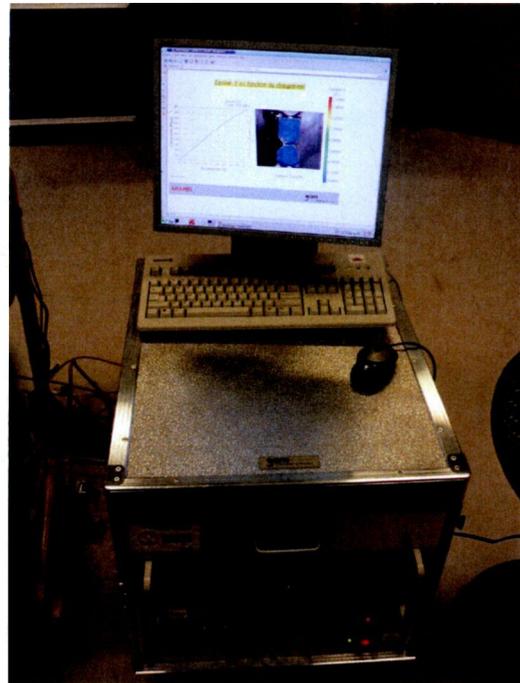
Il est important de mentionner que la relation (5.3) n'est valide que si la courbure principale mesurée par le système Aramis 3D est parfaitement alignée avec la direction  $y$  de la feuille de papier.

### 5.3 Description du système de mesure Aramis 3D

L'équipement utilisé pour mesurer les courbures d'une feuille de papier est le système Aramis 3D, qui mesure les déplacements et les déformations 3D par une méthode optique, sans contact. Le système comprend deux caméras et un poste de travail (Figure 5.2).



a) Caméras



b) Poste de travail

Figure 5.2 : Système de mesure Aramis 3D

Le système Aramis reconnaît la surface d'un objet à l'aide d'images provenant de deux caméras digitales et assigne des coordonnées aux pixels des images. Les premières coordonnées sont assignées lors de la prise de la 1<sup>re</sup> photo (état initial non-déformé). Puis, au fur et à mesure que l'objet subit des déformations, d'autres images sont prises par les caméras et de nouvelles coordonnées sont attribuées aux pixels des images. En comparant les images digitales entre elles, le système calcule ensuite les déplacements et les déformations de l'objet.

L'objet à analyser doit avoir plusieurs points de référence à partir desquels le logiciel pourra calculer des déplacements. En pratique, on utilise un moucheté de peinture en aérosol pour créer plusieurs points de grosseurs voulus qui seront reconnus par le logiciel (exemple : points noirs sur fond blanc).

Les détails du principe de mesure de même que les spécifications techniques sont disponibles dans le manuel d'utilisation [12].

## **5.4 Procédure expérimentale**

### **5.4.1 Positionnement des caméras et calibration**

Les caméras sont placées face à la chambre environnementale, alignées avec la fenêtre latérale. Elles prennent des photos de la feuille à travers la fenêtre de la chambre (voir Figure 5.5). Il est important de préciser que la vitre de cette fenêtre est en quartz de qualité optique ce qui permet aux caméras de prendre des photos à travers la vitre sans avoir de distorsions pouvant fausser les mesures.

La position exacte des caméras (distance du trépied au centre du volume de calibration, espacement entre les deux caméras, angle) dépend du type de lentilles choisi et du volume de calibration désiré. Dans la présente situation, les lentilles choisies ont une distance focale de 23 mm et la feuille de papier mesure 100 mm × 100 mm. On choisit ainsi le plateau de calibration 135 mm × 108 mm. Le volume de calibration est donc de  $135 \times 108 \times 108 \text{ mm}^3$ . Dans ce cas, la distance requise entre le support des caméras et le centre du volume de calibration est de 400 mm, l'espacement entre les caméras est de 200 mm et l'angle des caméras est de 25°. Tous les détails par rapport à la calibration des caméras est disponible dans le manuel d'utilisation d'Aramis [12].

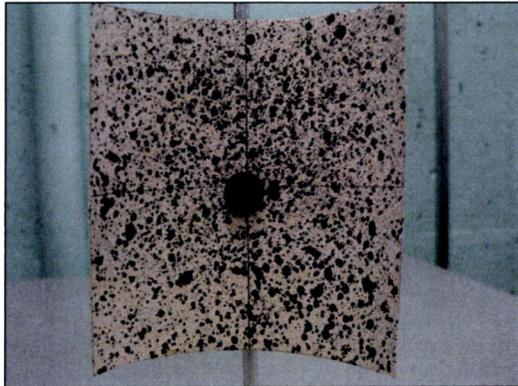
#### 5.4.2 Préparation et positionnement des échantillons

La feuille de papier multicouche est d'abord découpée au format 100 mm × 100 mm. L'alignement des fibres (sens machine, SM) avec le côté de la feuille (direction  $x$ ) est primordial. Par la suite, un moucheté de peinture en aérosol est appliqué sur la feuille (Figure 5.3). Le choix du diamètre des points de peinture à utiliser (et donc de la grosseur de la buse de la bombonne aérosol) dépend du volume de calibration des caméras. Dans le cas du présent travail, le plateau de calibration utilisé est de 135 mm par 108 mm, ce qui correspond à des points de peinture d'un diamètre approximatif de 0,4 mm. Comme les essais expérimentaux consistent seulement en une mesure des déplacements de la feuille (et non des déformations), la précision du moucheté de peinture n'est pas critique. Il est important de préciser que l'application du moucheté de peinture sur la feuille de papier est très légère. L'application de la peinture n'influence pas la forme de la feuille de papier (pas de gauchissement) et devrait avoir un impact mineur sur la diffusion de l'humidité à travers la feuille de papier.

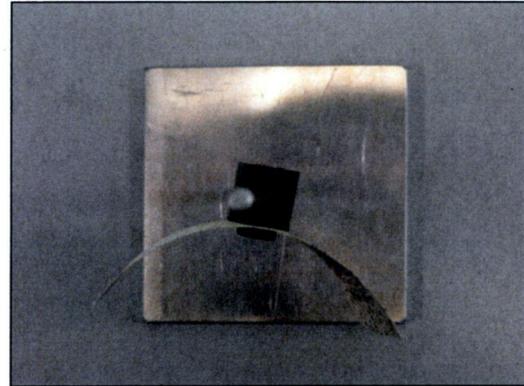


Figure 5.3 : Feuille avec moucheté de peinture

Après le séchage de la peinture, la feuille est fixée en son centre sur un support vertical à l'aide d'un aimant, tel qu'illustré à la Figure 5.4. Cette condition est similaire à la condition limite modélisée par éléments finis, section 3.2.1. La feuille est disposée verticalement de manière à minimiser les effets de la gravité.



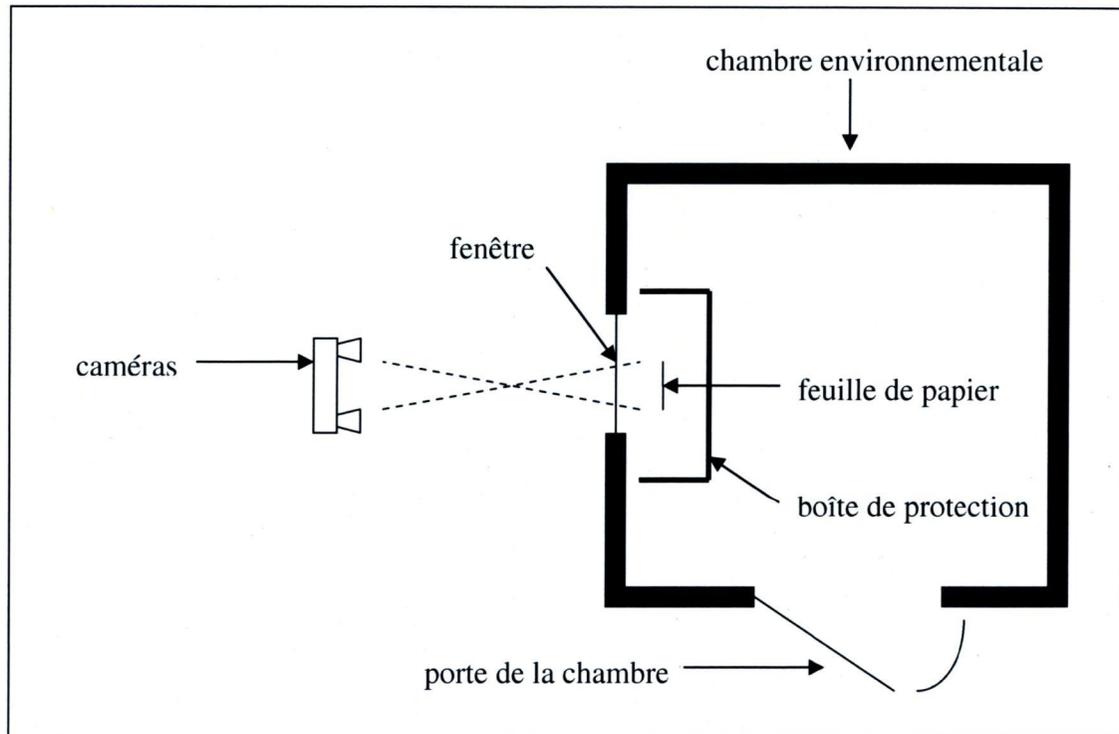
a) Vue de face



b) Vue de dessus

**Figure 5.4 : Installation de la feuille sur le support vertical**

Par la suite, la feuille est placée au centre du volume de calibration de la caméra, à l'intérieur de la chambre environnementale. Une enceinte de protection est ensuite installée pour protéger la feuille du courant d'air généré par la chambre environnementale (voir Figure 5.5). Cette enceinte coupe suffisamment l'air pour empêcher la feuille de bouger, mais ne ralentit pas le passage de l'humidité vers la feuille. On demeure donc en situation de convection hydrique naturelle.



**Figure 5.5 : Schéma de la chambre environnementale et des caméras**

Une fois la feuille bien positionnée au centre du volume de calibration, la porte de la chambre est refermée et un essai de courbure peut être conduit.

#### **5.4.3 *Prise de mesures et calculs***

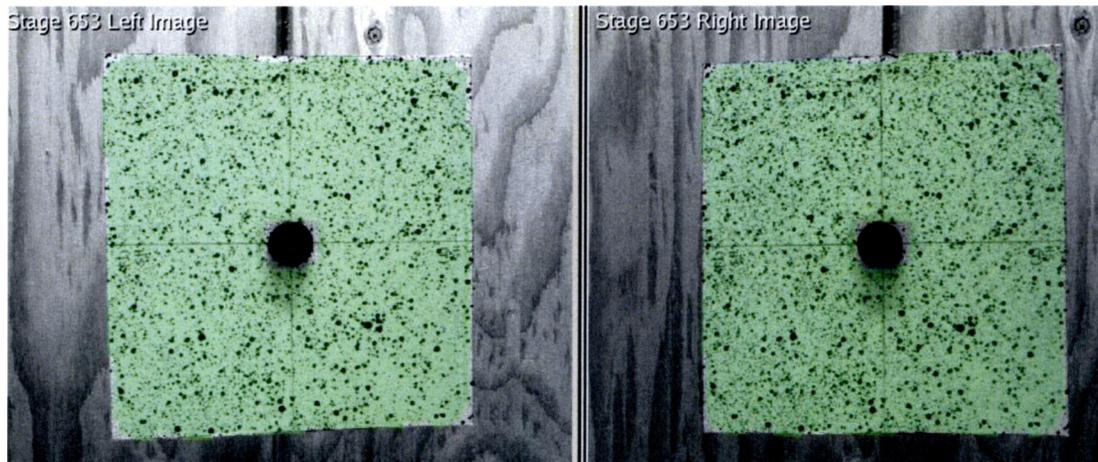
Après avoir positionné et préparé adéquatement les caméras et les échantillons, il faut déterminer le type de variation d'humidité relative à l'intérieur de la chambre environnementale et le mode de prise de photos par les caméras.

La variation de l'humidité relative se fait en fonction de l'humidité relative initiale et de l'humidité relative finale déterminées à la section 5.2, soit  $H_0 = 75 \%$  et  $H_\infty = 50 \%$ , respectivement. Le cycle programmé dépend du type d'essai effectué. Par exemple,

les essais préliminaires de courbure utilisent le cycle suivant : conditionnement de la feuille à 75 % HR pendant quatre heures, assèchement rapide à 50 % HR et phase finale à 50 % HR pendant une heure. Les cycles d'humidité sont expliqués en détail pour chaque essai de courbure à la section suivante.

Le mode de prise de photo des caméras est aussi réglé selon le type d'essai effectué. Par exemple, la phase d'intérêt pour les essais préliminaires de courbure est la phase à 50 % HR. Cette phase est d'une durée d'une heure. Les caméras sont donc réglées pour prendre des photos à toutes les minutes pendant une heure. Par contre, si l'essai effectué est un essai cyclique, la prise de photo sera réglée selon un intervalle variable (beaucoup de photos durant les phases à 50 % HR, peu de photos durant les phases à 75 % HR). Ainsi, il est crucial de synchroniser le départ du cycle d'humidité de la chambre environnementale avec le départ de la prise de photos des caméras.

L'essai de courbure peut démarrer dès que le cycle d'humidité et le mode de prise de photos sont réglés. Après l'essai, le logiciel Aramis 3D calcule les coordonnées 3D de la feuille de papier à chaque pas de temps en corrélant entre elles les photos prises par les caméras (Figure 5.6).



**Figure 5.6 : Image de gauche et image de droite de la feuille de papier fournies par les caméras du système Aramis 3D**

Une fois les coordonnées 3D calculées, le logiciel fournit la forme 3D de la feuille, les déplacements et les déformations. La courbure principale en un temps  $t$  donné,  $\kappa_1(t)$ , est calculée à l'aide de la commande « Best Fit Cylinder ». Le logiciel calcule alors le cylindre passant par le plus grand nombre de points possibles de la feuille de papier (Figure 5.7). Le rayon du cylindre  $R(t)$  est ensuite extrait et la courbure principale  $\kappa_1(t)$  est calculée comme suit :

$$\kappa_1(t) = \frac{1}{R(t)}. \quad (5.4)$$

Tel que souligné par Nordstrom et al. [10], l'équation (5.4) utilisée pour la mesure de la courbure n'est exacte que lorsque que le déplacement hors du plan  $w^0$  est petit, c'est-à-dire lorsque  $x$  est beaucoup plus petit que  $R$ . Ainsi, l'aire de mesure utilisée pour le calcul du rayon  $R(t)$  doit être réduite pour assurer la validité du calcul de la courbure. Cependant, outre l'aire totale de la feuille, le système de mesure ne permet pas de fixer une aire de mesure précise et constante pour le calcul du rayon à chaque essai de mesure de la courbure. La surface totale de la feuille de papier (10 cm x 10 cm) sera donc utilisée pour calculer le rayon du cylindre  $R(t)$  et la courbure principale  $\kappa_1(t)$  à chaque essai.

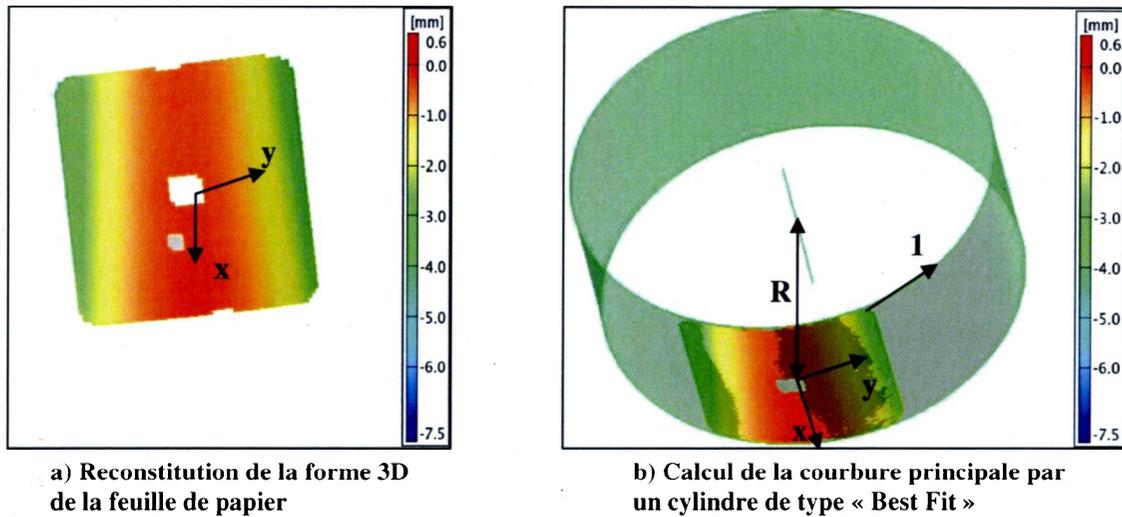


Figure 5.7 : Résultats expérimentaux obtenus par le système de mesure Aramis

Idéalement, la courbure principale calculée par le logiciel devrait être parfaitement alignée avec la direction  $y$ , en conformité avec les prédictions du modèle (Figure 5.7). Cependant, certains assemblages présentent une courbure de torsion  $\kappa_{xy}$  supplémentaire. Dans ce cas, la courbure principale n'est plus alignée avec la direction  $y$ , c'est-à-dire qu'il y a un angle  $\theta$  non-nul entre la direction principale 1 et la direction  $y$  de la feuille de papier (voir Figure 5.8). Ceci peut être une source d'erreur additionnelle lorsque l'on compare les résultats expérimentaux aux prédictions des modèles.

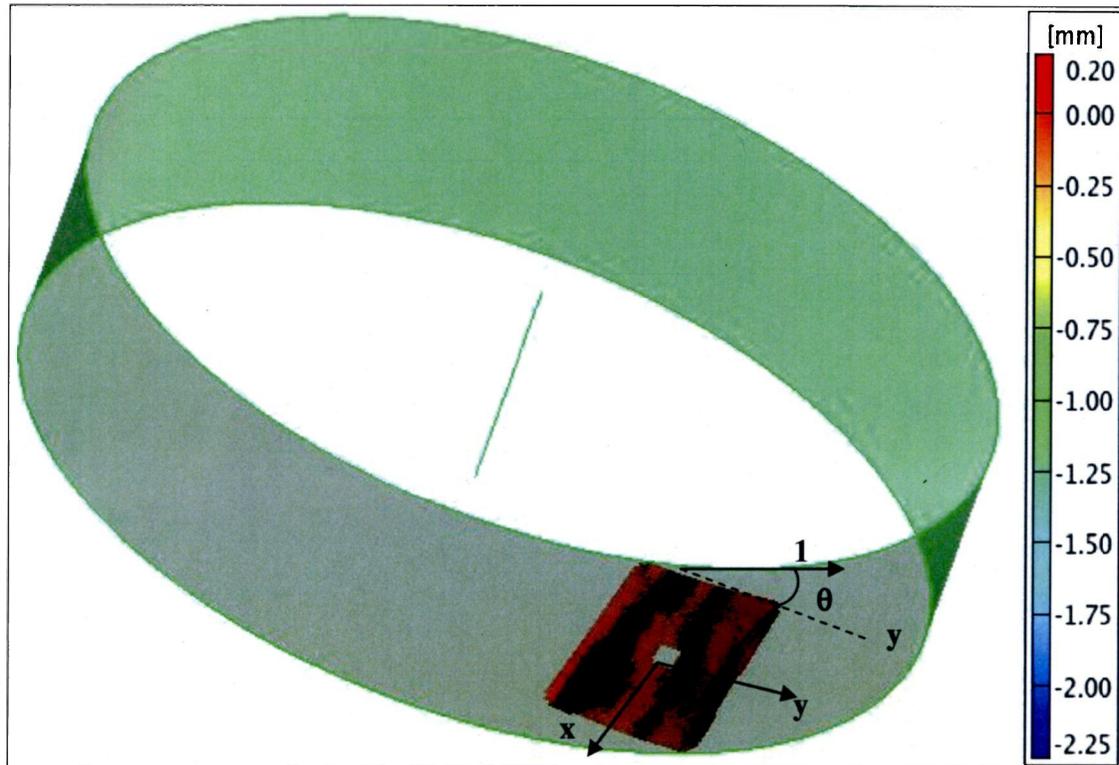


Figure 5.8 : Mesure de la courbure principale  $K_1$  en présence d'une courbure de torsion importante

## 5.5 Essai de courbure sur les couches individuelles

### 5.5.1 Description

L'essai de courbure sur les quatre couches individuelles (HS, PTM, PJ 1.02 et PJ 1.13) vise à vérifier le degré d'uniformité de ces couches. Le paramètre d'intérêt est la courbure principale mesurée en fonction du temps ( $\kappa_1(t)$ ). Pour une feuille uniforme, l'expansion hydrique des fibres due à une variation de la teneur en humidité n'entraîne pas de courbure puisque la déformation des fibres est uniforme partout dans la feuille de papier. En fait, si les fibres à l'intérieur d'une couche donnée étaient parfaitement distribuées à travers l'épaisseur et en direction transverse, les propriétés de la couche (masse volumique, élasticité, expansion hydrique, ...) seraient uniformes. Or, certains

paramètres du processus de fabrication du papier (valeur du ratio jet/toile, températures de séchage, restrictions au séchage, humidification non-uniforme, ...) peuvent entraîner une non-uniformité des propriétés du papier ou créer des contraintes mécaniques à l'intérieur du réseau de fibres lors du séchage. Ainsi, les couches de papier utilisées dans les assemblages peuvent développer des courbures lors d'un changement d'humidité, alors que le modèle semi-analytique qui utilise l'hypothèse de couches parfaitement uniformes prédit que les couches restent plates.

L'essai de courbure sur les couches individuelles soumet les feuilles de papier au cycle d'humidité relative suivant : 50 %  $\Rightarrow$  75 %  $\Rightarrow$  30 %  $\Rightarrow$  50 %  $\Rightarrow$  75 %. La phase à 30 % HR a pour objectif d'assécher suffisamment la feuille pour parvenir à relâcher les contraintes résiduelles internes. L'essai a une durée totale de 25 heures, chaque phase du cycle ayant une durée de cinq heures. Les courbures sont mesurées en continu pendant tout l'essai.

Tel que mentionné ci-haut, le modèle semi-analytique utilise l'hypothèse de couches parfaitement uniformes ne développant aucune courbure suite à une variation de la teneur en humidité. Les données expérimentales obtenues lors du présent essai ne peuvent donc pas être comparées aux prédictions des modèles. Cependant, la courbure principale en fonction de l'humidité relative développée par une couche individuelle est un bon indice du degré d'uniformité de la couche. On définit donc des courbures principales à la fin de chaque phase d'humidité relative. Ces courbures sont :

$$\kappa_{50,1} = \kappa_1(t = 5h) \quad (5.5)$$

$$\kappa_{75,1} = \kappa_1(t = 10h) \quad (5.6)$$

$$\kappa_{30,1} = \kappa_1(t = 15h) \quad (5.7)$$

$$\kappa_{50,2} = \kappa_1(t = 20h) \quad (5.8)$$

$$\kappa_{75,2} = \kappa_1(t = 25h) \quad (5.9)$$

### 5.5.2 Résultats et discussion

Les variations de l'humidité relative et de la courbure principale mesurée en fonction du temps sont présentées de la Figure 5.9 à la Figure 5.12 pour chaque couche individuelle.

- Papier HS :

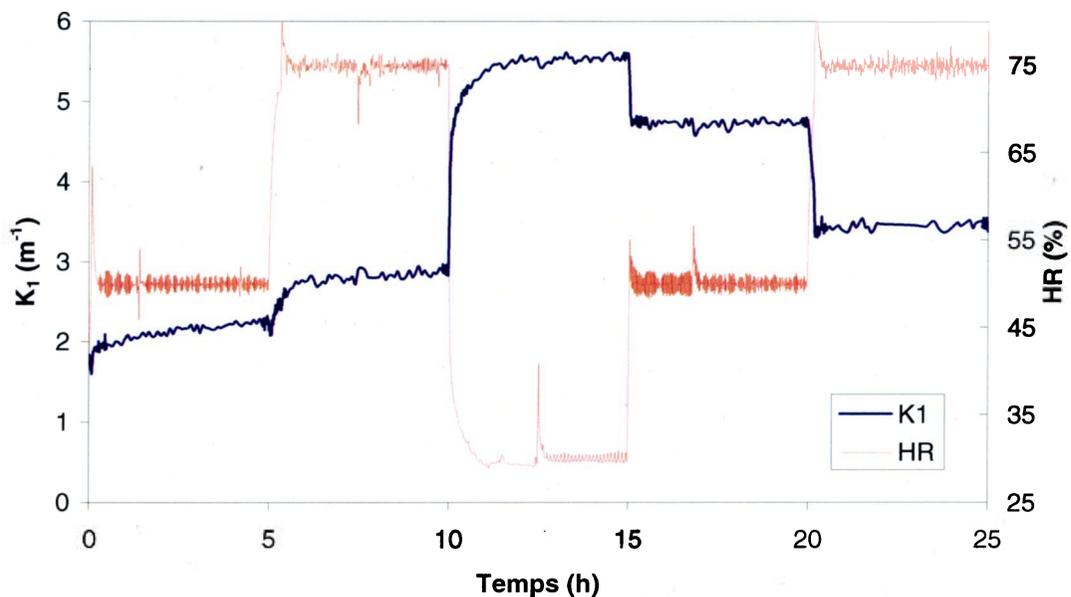


Figure 5.9 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier HS

La Figure 5.9 indique que le papier de type HS est fortement influencé par l'humidité : la courbure principale  $\kappa_1$  varie entre 2,2 et 5,6 m<sup>-1</sup>. De plus, on voit que la courbure principale augmente lorsque l'humidité relative descend à 30 %. Cette augmentation est peut-être causée par le phénomène de relaxation des contraintes

résiduelles. Par ailleurs, on constate que le papier répond rapidement à un changement de l'humidité relative.

▪ Papier PTM :

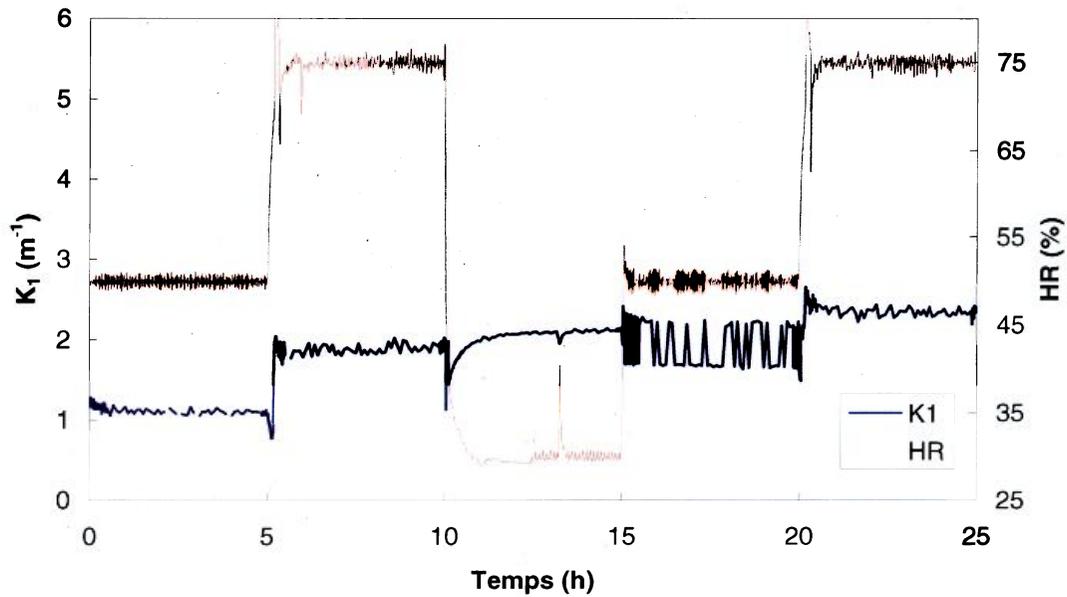
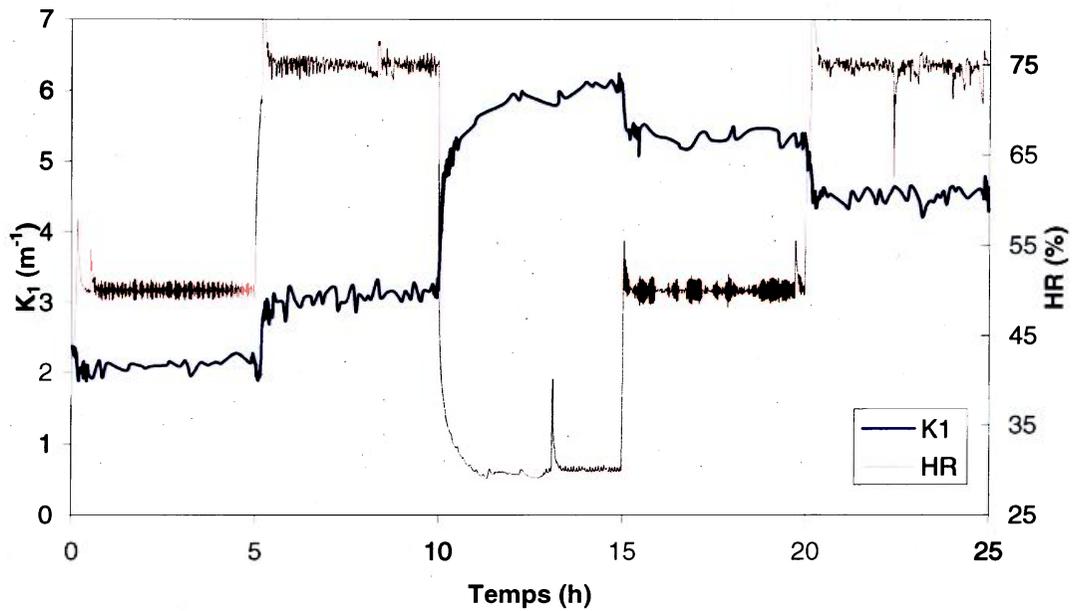


Figure 5.10 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PTM

La Figure 5.10 indique que le papier de type PTM est faiblement influencé par l'humidité : la courbure principale  $\kappa_1$  varie entre 1,1 et 2,4 m<sup>-1</sup>. On constate aussi que le papier répond rapidement à un changement de l'humidité relative.

▪ Papier PJ 1.02 :



**Figure 5.11 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PJ 1.02**

La Figure 5.11 indique que le papier de type PJ 1.02 est fortement influencé par l'humidité : la courbure principale  $\kappa_1$  varie entre 2,1 et 6,1  $m^{-1}$ . On constate aussi que le papier répond rapidement à un changement de l'humidité relative.

- Papier PJ 1.13 :

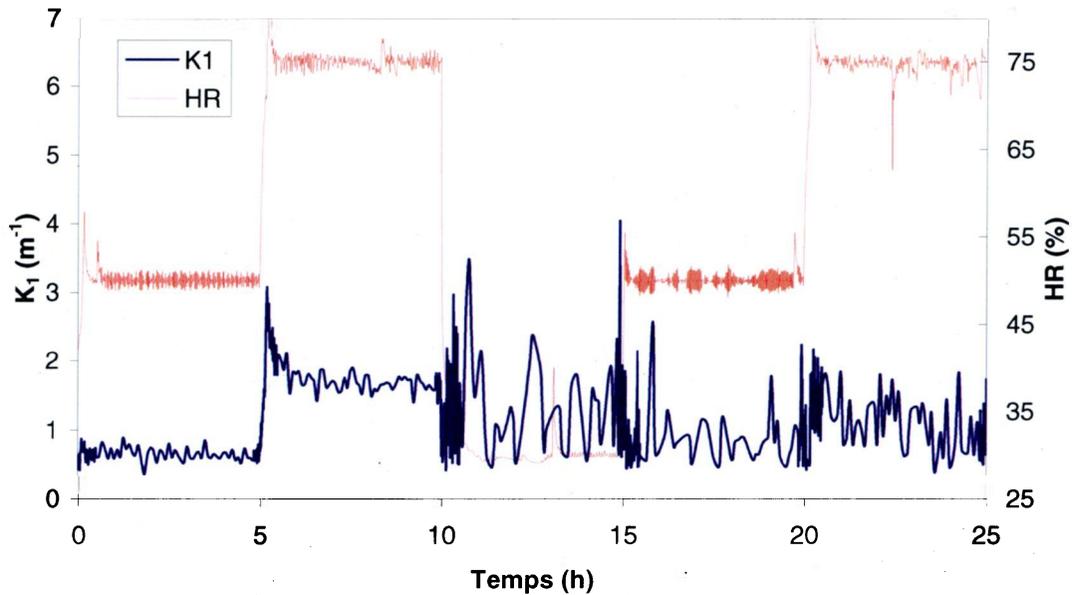


Figure 5.12 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Papier PJ 1.13

La Figure 5.12 indique que le papier de type PJ 1.13 est faiblement influencé par l'humidité : la courbure principale  $\kappa_1$  varie entre 0,6 et 1,7 m<sup>-1</sup>. On constate aussi que le papier répond rapidement à un changement de l'humidité relative.

- Résultats en fonction de l'humidité relative :

Le Tableau 5.2 présente la courbure principale en fonction de l'humidité relative pour chaque type de papier. De plus, la direction principale moyenne (durant tout l'essai) est indiquée. Pour tous les types de papier, la courbure principale  $\kappa_1$  n'est pas alignée avec la direction  $y$  de la feuille de papier, d'où un angle  $\theta$  non-nul. Cependant, cet angle indiquant la direction principale est relativement constant tout au long de l'essai. La Figure 5.13 présente graphiquement la courbure principale en fonction de l'humidité relative pour chaque type de papier.

Tableau 5.2 : Courbure principale en fonction de l'humidité relative et direction principale moyenne  $\theta_{moy}$  pour chaque type de papier

Papier	$K_{50,1}$ ( $m^{-1}$ )	$K_{75,1}$ ( $m^{-1}$ )	$K_{30,1}$ ( $m^{-1}$ )	$K_{50,2}$ ( $m^{-1}$ )	$K_{75,2}$ ( $m^{-1}$ )	$\theta_{moy}$ ( $^{\circ}$ )
HS	2,2	2,8	5,6	4,7	3,4	14,0
PTM	1,1	2,0	2,1	1,7	2,4	28,9
PJ 1.02	2,1	3,2	6,1	5,4	4,6	25,8
PJ 1.13	0,7	1,7	0,6	1,1	1,4	7,6

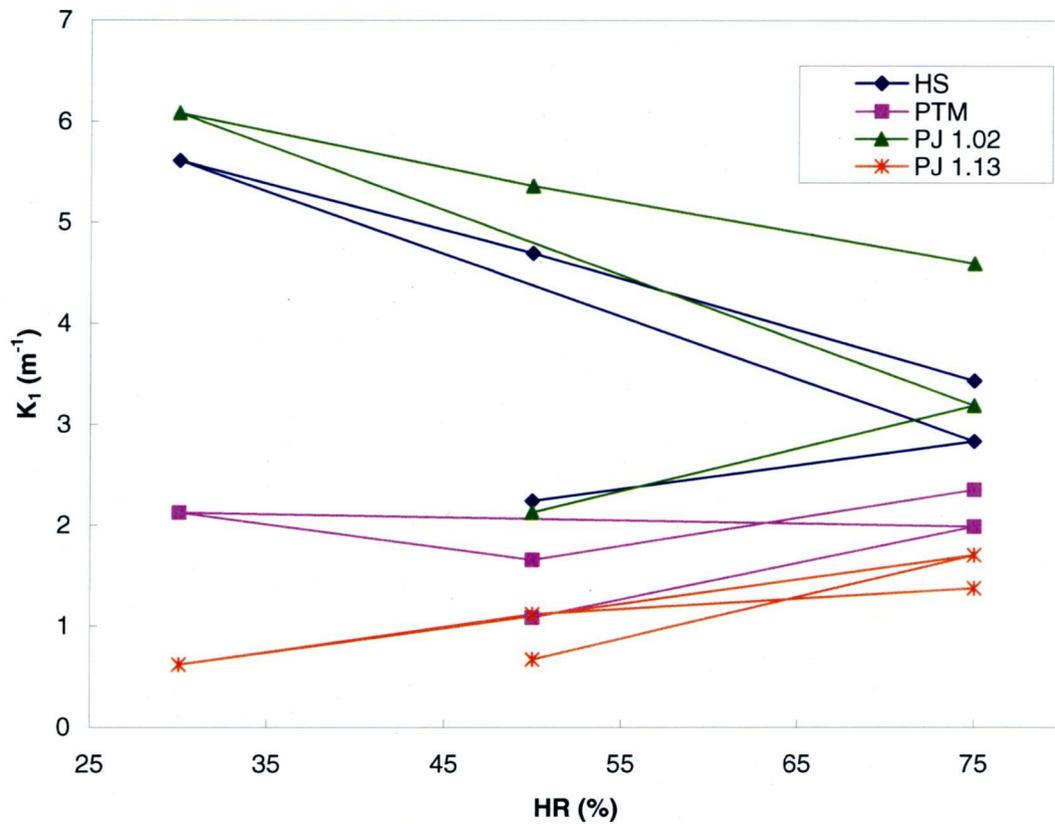


Figure 5.13 : Courbure principale en fonction de l'humidité relative pour tous les types de papier

En examinant la Figure 5.13, il est difficile d'émettre une conclusion générale quant à l'effet de la variation de l'humidité sur la courbure principale développée par une couche individuelle. En fait, les courbes de cette figure montrent que les papiers HS et PJ

1.02 ont des comportements similaires, alors que les papiers PTM et PJ 1.13 ont des comportements différents. Cependant, il est possible d'examiner ces courbes en fonction de deux paramètres : l'amplitude de la variation de la courbure principale et la différence entre la courbure principale de la 2<sup>e</sup> phase à 50 % HR et la courbure principale de la 1<sup>re</sup> phase à 50 % HR ( $\kappa_{50,2} - \kappa_{50,1}$ ). Ces deux paramètres sont respectivement influencés par l'uniformité de la couche et par le relâchement des contraintes internes dans la couche.

L'uniformité de la couche a un impact important sur l'amplitude de la variation de la courbure principale. En examinant les graphiques de chaque papier (Figure 5.9 à Figure 5.12) ainsi que le Tableau 5.2 et la Figure 5.13, on constate que les papiers HS et PJ 1.02 présentent des variations importantes de leur courbure principale (2,2 à 5,6 m<sup>-1</sup> et 2,1 à 6,1 m<sup>-1</sup>, respectivement) comparativement à celles des papiers PTM et PJ 1.13 (1,1 à 2,4 m<sup>-1</sup> et 0,7 à 1,7 m<sup>-1</sup>, respectivement). Autrement dit, les papiers HS et PJ 1.02 sont probablement moins uniformes que les papiers PTM et PJ 1.13 et sont donc plus sensibles à des variations de l'humidité. Cette observation peut sembler surprenante, considérant que les papiers PJ 1.02 et PJ 1.13 ont à peu près les mêmes caractéristiques mécaniques (voir Tableau 4.3). Ces deux papiers sont de type « PJ ». Cependant, leur rapport « jet/toile » (1.02 et 1.13) sont différents. Rappelons que ce dernier paramètre indique le rapport des vitesses du jet de pâte de papier et de la toile qui achemine le papier. La valeur de ce rapport influence la distribution de l'orientation des fibres à l'intérieur d'une feuille de papier. Aussi, en consultant le Tableau 5.2, on constate que ces deux types de papiers ont des directions principales très différentes ( $\theta_{moy} = 25,8^\circ$  pour PJ 1.02 et  $\theta_{moy} = 7,6^\circ$  pour PJ 1.13). Il est donc possible que deux papiers de même type présentent une sensibilité à l'humidité différente, considérant que les distributions des fibres à l'intérieur de ces papiers ne sont pas identiques.

La présence de contraintes internes dans la couche (associées à la conception de la couche et au séchage) peut être révélée par la différence entre la courbure principale de la 2<sup>e</sup> phase à 50 % HR et la courbure principale de la 1<sup>re</sup> phase à 50 % HR ( $\kappa_{50,2} - \kappa_{50,1}$ ). En consultant le Tableau 5.2, on constate que cette différence est plus importante pour les

papiers HS et PJ 1.02 (2,5 et 3,3 m<sup>-1</sup>, respectivement) que pour les papiers PTM et PJ 1.13 (0,6 et 0,4 m<sup>-1</sup>, respectivement). Ainsi, il est probable que l'essai entraîne un relâchement des contraintes internes plus important pour les papiers HS et PJ 1.02 que pour les papiers PTM et PJ 1.13.

### **5.5.3 Conclusion**

L'essai de courbure sur les couches individuelles a montré que certains papier montrent une plus grande sensibilité à une variation de l'humidité relative (HS et PJ 1.02). Cette plus grande sensibilité peut indiquer que les papiers HS et PJ 1.02 possèdent des distributions de fibres à travers l'épaisseur moins homogènes que celles des papiers PTM et PJ 1.13. Aussi, il est possible que le relâchement des contraintes internes soit plus important dans les papiers HS et PJ 1.02. Lors des essais subséquents, il sera intéressant d'analyser les courbures développées par les assemblages utilisant les papiers PJ 1.02 et PJ 1.13 en opposition (assemblages A5 et A7, voir Tableau 4.4). Ces deux assemblages semblent presque symétriques puisque les couches PJ 1.02 et PJ 1.13 ont des propriétés très similaires. Ils ne devraient donc pas être très sensibles à une variation de l'humidité. Cependant, comme la couche supérieure (PJ 1.02) a une distribution de fibres moins homogène que la couche inférieure (PJ 1.13), il serait possible que ces deux assemblages développent quand même des courbures significatives.

## 5.6 Essai de courbure préliminaire

### 5.6.1 Description

L'essai de courbure préliminaire vise à vérifier si le comportement global des différents types d'assemblages (A1 à A9) correspond à celui prédit par le modèle semi-analytique et par le modèle d'éléments finis. Le paramètre d'intérêt est le changement de courbure principale mesuré en fonction du temps,  $\Delta\kappa_1(t)$ . Ce paramètre est comparé à la courbure dans la direction  $y$  calculée par les modèles,  $\kappa_y(t)$ , selon la relation définie par l'équation (5.3).

L'essai de courbure préliminaire consiste en un conditionnement initial de la feuille de papier à une humidité relative initiale de 75 % pendant quatre heures. La feuille est ensuite amenée à une humidité relative finale de 50 % pendant une heure. Les courbures sont mesurées pour la phase à 50 % HR à toutes les minutes. Le temps de conditionnement de quatre heures est le temps standard utilisé dans la plupart des essais de FPIInnovations - Division Paprican. La période d'une heure établie pour la phase à 50 % HR correspond à la prédiction du temps requis pour atteindre le régime stationnaire des modèles.

Outre le changement de courbure principale en fonction du temps,  $\Delta\kappa_1(t)$ , cet essai vise aussi à quantifier le changement de courbure principale pour chaque assemblage à la fin de l'essai ( $\Delta\kappa_{1,st}$ ). Comme la mesure des courbures se fait pour la phase à 50 % HR pendant 1 heure, l'équation (5.2) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\Delta\kappa_{1,st} = \kappa_{1,st} - \kappa_{1,0} = \kappa_1(t = 1h) - \kappa_1(t = 0). \quad (5.10)$$

### 5.6.2 Résultats et discussion

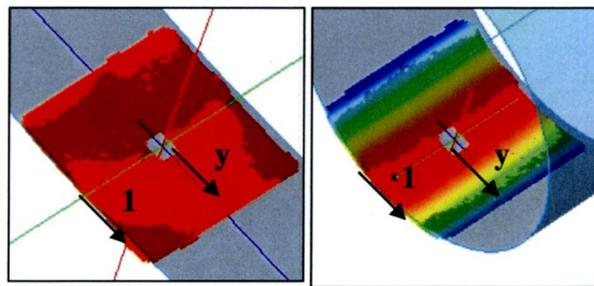
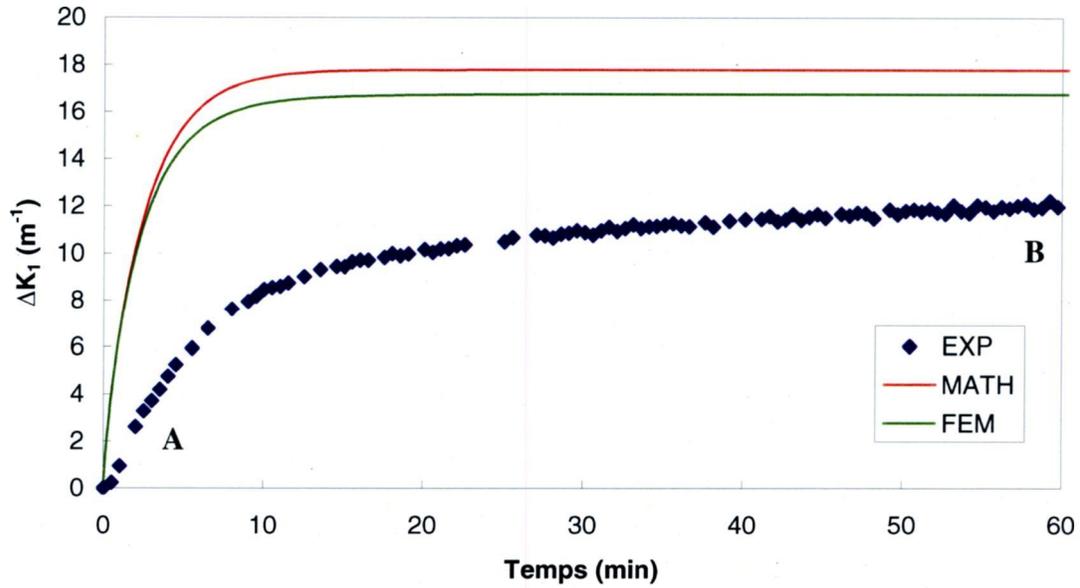
Les changements de courbure principale mesurés expérimentalement pour chaque assemblage sont présentés de la Figure 5.14 à la Figure 5.22. Les prédictions obtenues avec le modèle semi-analytique, dénoté MATH, et le modèle par éléments finis, dénoté FEM, sont aussi représentées. Les courbures des différentes formes que peuvent prendre les assemblages pendant l'essai sont présentées du Tableau 5.3 au Tableau 5.11.

- Changement de courbure principale en fonction du temps :

Les essais de courbure préliminaires permettent d'obtenir des graphiques du changement de courbure principale en fonction du temps ( $\Delta\kappa_1(t)$ ) pour chacun des assemblages (Figures 5.14 à 5.22). La pente initiale des graphiques et le temps de stabilisation sont les principaux paramètres examinés. Ces figures montrent aussi les différentes formes des assemblages associés aux états A, B, C et D des graphiques  $\Delta\kappa_1(t)$ , permettant ainsi d'apprécier visuellement la forme de la feuille en fonction du temps et de vérifier si la courbure principale en direction 1 calculée par le logiciel est alignée avec la direction  $y$  de l'assemblage (angle  $\theta$ , Tableaux 5.3 à 5.11).

La Figure 5.14 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A1. De  $t=0$  à  $t=10$  min, la courbure augmente rapidement, puis ralentit progressivement jusqu'à  $t=60$  min. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles, mais le changement final de courbure principale (à  $t=60$  min) mesuré expérimentalement est inférieur à celui prédit par les modèles. De plus, l'augmentation de  $\Delta\kappa_1$  se fait moins rapidement que prévu. On remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement n'est toujours pas stable après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.3 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.14. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $1,8^\circ$  en A et B), ce qui

signifie que la courbure principale mesurée est bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

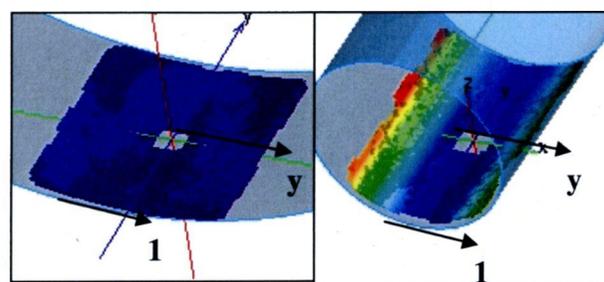
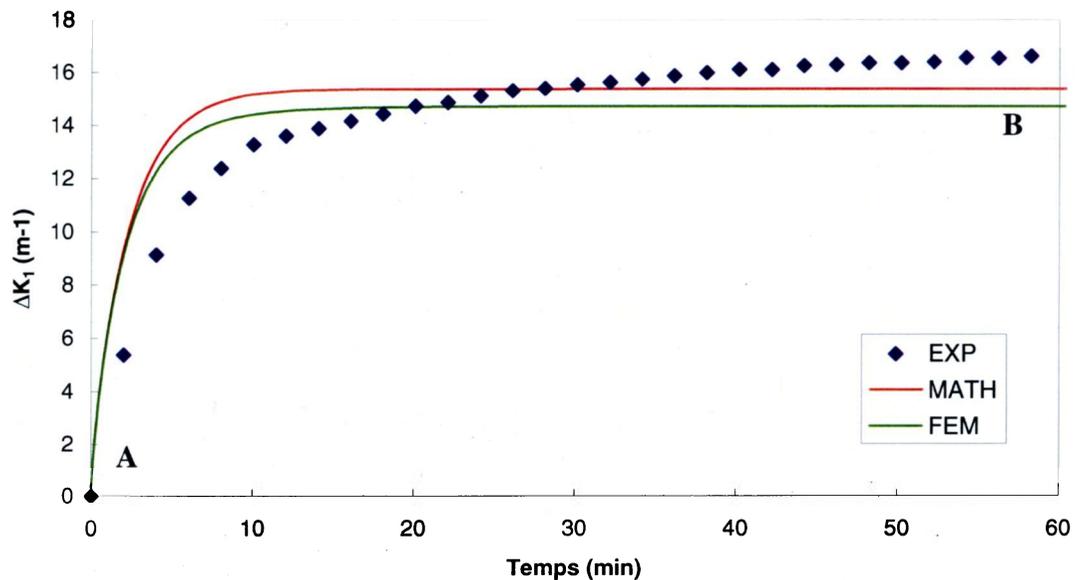
Forme au point B

Figure 5.14 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblée A1

Tableau 5.3 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblée A1

État	A	B
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	6,3	18,3
$\theta$ ( $^\circ$ )	1,8	1,8

La Figure 5.15 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A2. De  $t = 0$  à  $t = 10$  min, la courbure augmente rapidement, puis ralentit progressivement jusqu'à  $t = 60$  min. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles et la variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement supérieure à celle prédite par les modèles. On remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement continue d'augmenter après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.4 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.15. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $0,8^\circ$  en A et  $2,5^\circ$  en B), ce qui signifie que la courbure principale mesurée est bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

Forme au point B

Figure 5.15 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A2

**Tableau 5.4 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A2**

État	A	B
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	4,4	21,1
$\theta$ ( $^\circ$ )	0,8	2,5

La Figure 5.16 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A3. En  $t = 0$  (point A), la feuille a une courbure initiale  $\kappa_1 = 2,3 \text{ m}^{-1}$  dans une direction presque alignée avec l'axe des  $x$ . Sous l'effet de la baisse d'humidité relative, la courbure diminue ( $\Delta\kappa_1$  est négatif). Au point B, la feuille a une faible courbure dans la direction  $x$  ( $\kappa_1 = 1,3 \text{ m}^{-1}$ ), devient instable et change de forme subitement. Au point C, la feuille a une courbure principale  $\kappa_1 = 6,2 \text{ m}^{-1}$ , mais cette courbure est maintenant le long d'une direction quasiment alignée avec l'axe des  $y$ . Par la suite, la courbure continue d'augmenter jusqu'à la fin de l'essai (point D). La variation finale de courbure principale (à  $t = 60 \text{ min}$ ) mesurée expérimentalement est inférieure à celle prédite par les modèles. De plus, les modèles ne prédisent pas le changement de forme observé expérimentalement. Enfin, on remarque encore que la courbure mesurée expérimentalement continue d'augmenter après une heure, contrairement aux prédictions des modèles.

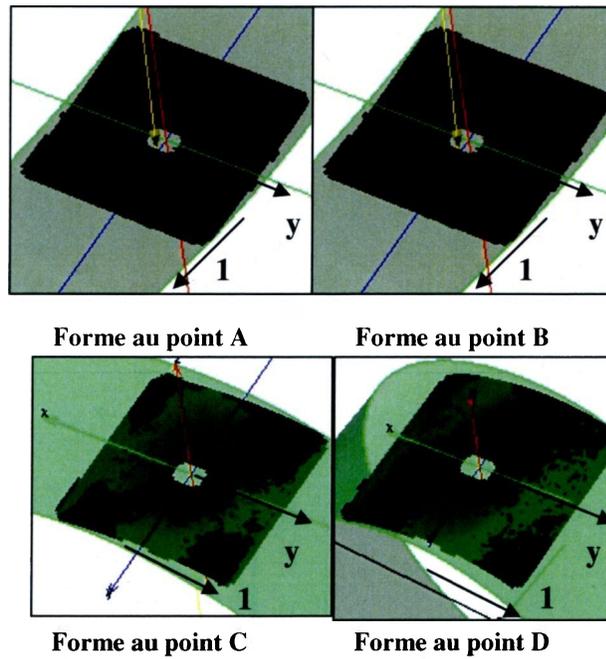
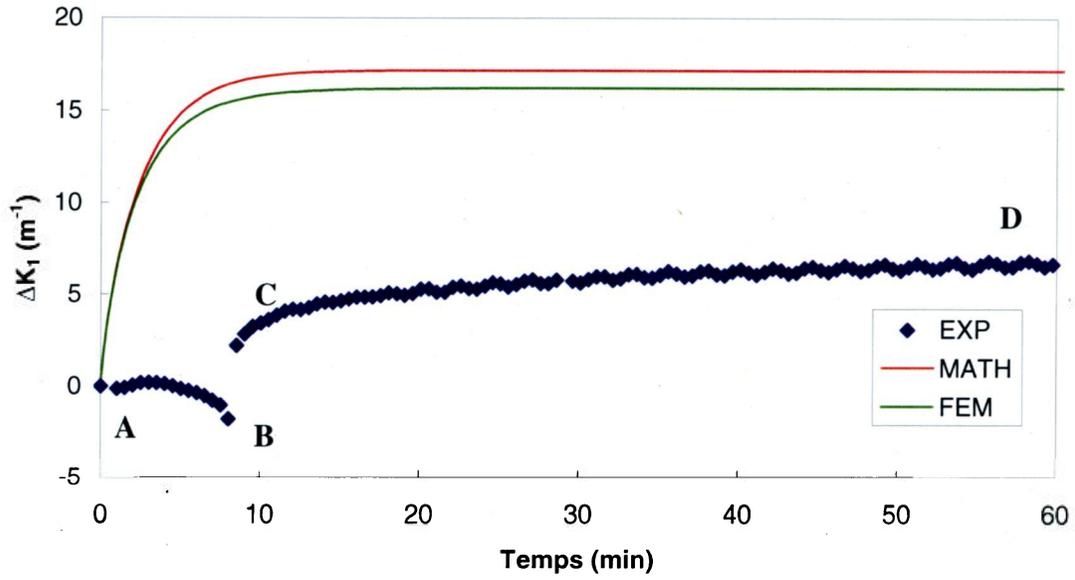


Figure 5.16 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblée A3

Tableau 5.5 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblée A3

État	A	B	C	D
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	2,3	1,3	6,2	9,0
$\theta$ ( $^\circ$ )	95,9	97,9	5,7	5,6

La Figure 5.17 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A4. De  $t = 0$  à  $t = 10$  min, la courbure augmente rapidement, puis ralentit progressivement jusqu'à  $t = 60$  min. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles et la variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement inférieure à celle prédite par les modèles. D'autre part, les résultats expérimentaux montrent que la pente initiale (entre  $t = 0$  et  $t = 10$  min) est plus faible que celle prédite par les modèles. Il se peut donc que le processus de diffusion de l'humidité soit plus lent que ce qui est prévu par les modèles. On remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement continue d'augmenter après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.6 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.17. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $1,7^\circ$  en A et  $2,5^\circ$  en B), ce qui signifie que la courbure principale mesurée est bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.

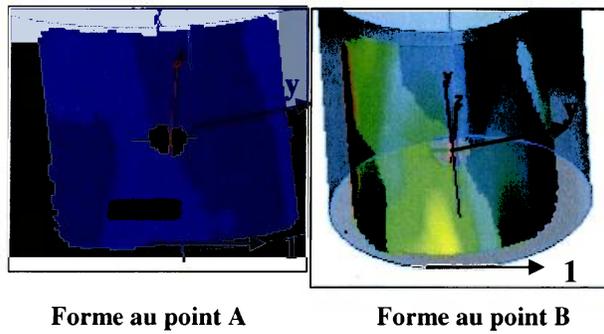
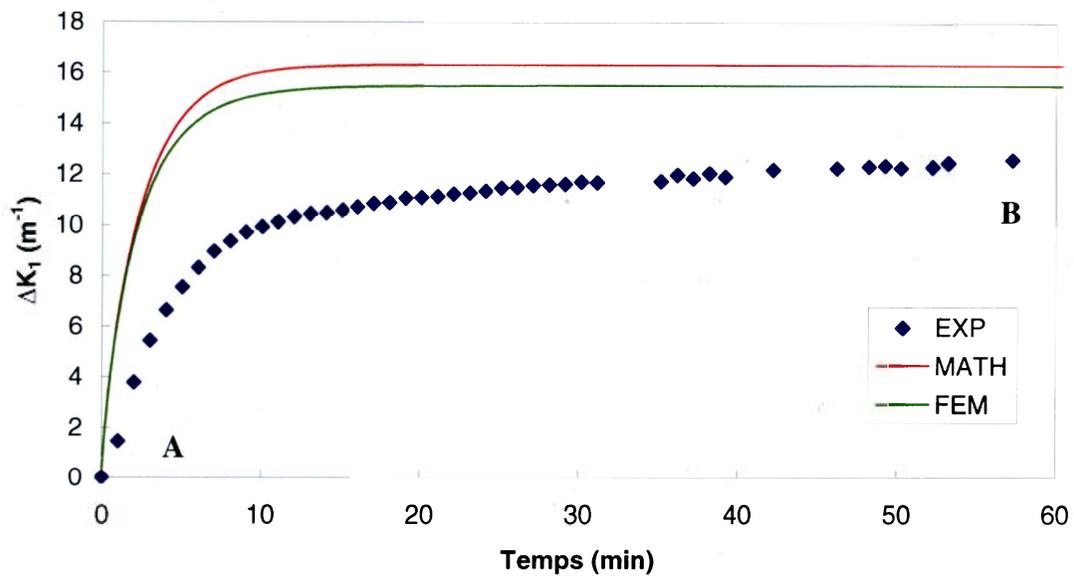
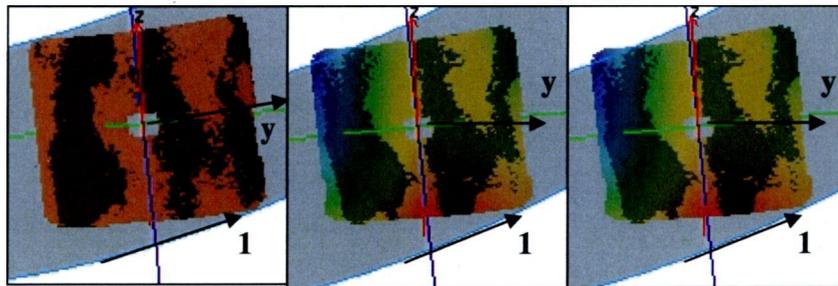
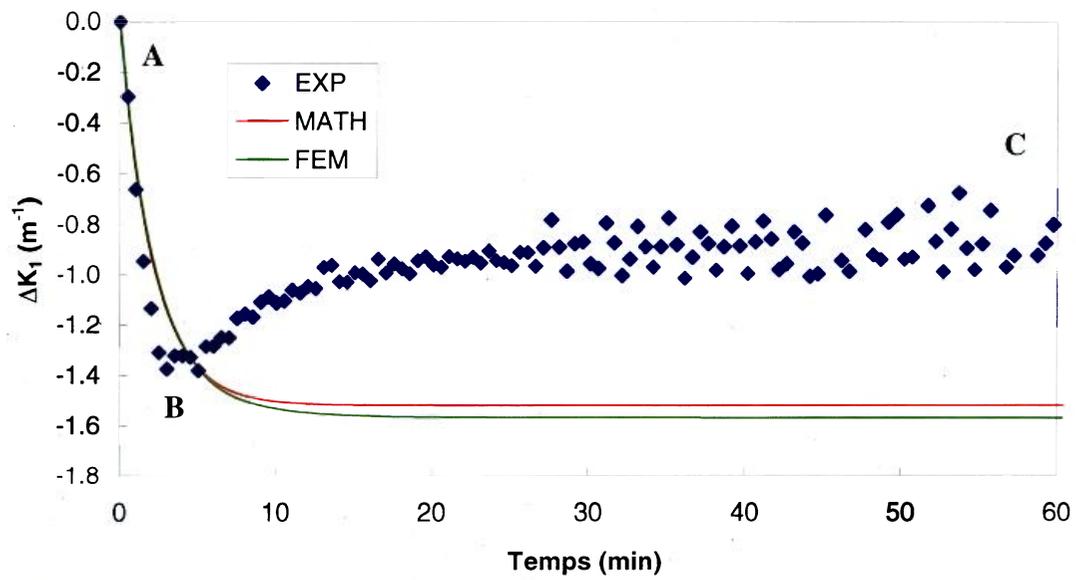


Figure 5.17 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A4

Tableau 5.6 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A4

État	A	B
$K_1$ (m <sup>-1</sup> )	7,1	19,7
$\theta$ (°)	1,7	2,5

La Figure 5.18 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A5. La forme générale de la courbe expérimentale est différente de celle prédite par les modèles. En  $t = 0$  (point A), l'assemblage présente une courbure principale  $\kappa_1 = 4 \text{ m}^{-1}$ . Pendant les cinq premières minutes, la courbure principale diminue ( $\Delta\kappa_1$  est négatif) pour atteindre une valeur de  $2,7 \text{ m}^{-1}$  au point B. Par la suite, pour  $t > 5$  min, la courbure principale augmente légèrement et atteint un maximum d'environ  $3,2 \text{ m}^{-1}$  au point C. La variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est inférieure en valeur absolue à celle prédite par les modèles. On remarque aussi que les valeurs de  $\Delta\kappa_1$  fluctuent beaucoup plus que pour les autres assemblages. La courbure principale paraît être trop petite pour être mesurée avec beaucoup de précision. Finalement, on constate dans le Tableau 5.7 que l'angle  $\theta$  de la direction principale est important ( $15,5^\circ$  en A et  $20,8^\circ$  en C), ce qui signifie que la courbure principale mesurée n'est pas alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

Forme au point B

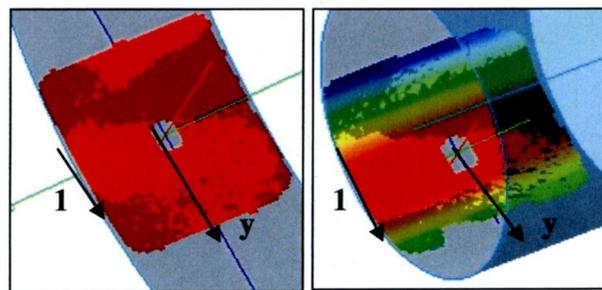
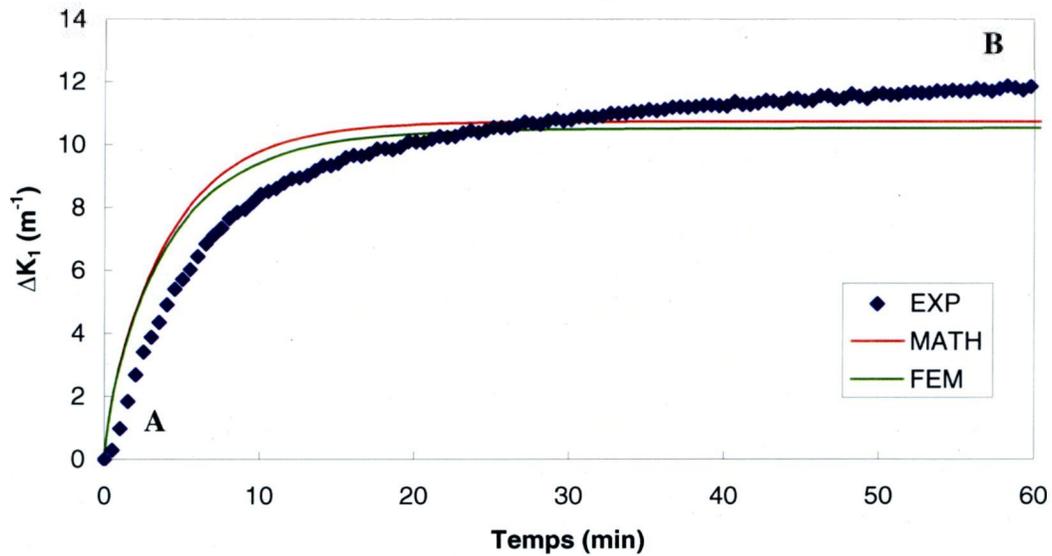
Forme au point C

Figure 5.18 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A5

Tableau 5.7 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A5

État	A	B	C
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	4,0	2,7	3,2
$\theta$ ( $^\circ$ )	15,5	22,2	20,8

La Figure 5.19 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A6. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles et la variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement supérieure à celle prédite par les modèles. On remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement n'est toujours pas stable après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.8 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.19. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $1,5^\circ$  en A et  $1,4^\circ$  en B), ce qui signifie que la courbure principale mesurée est bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

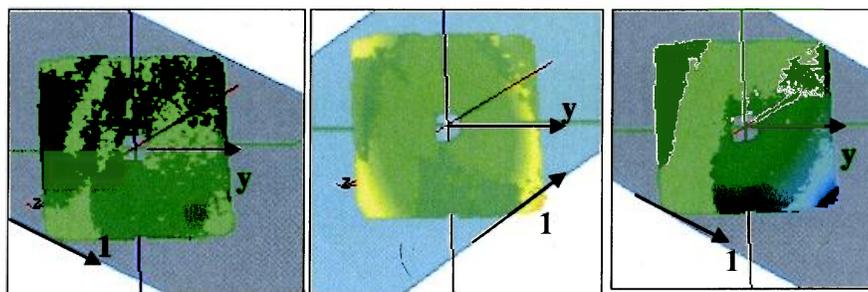
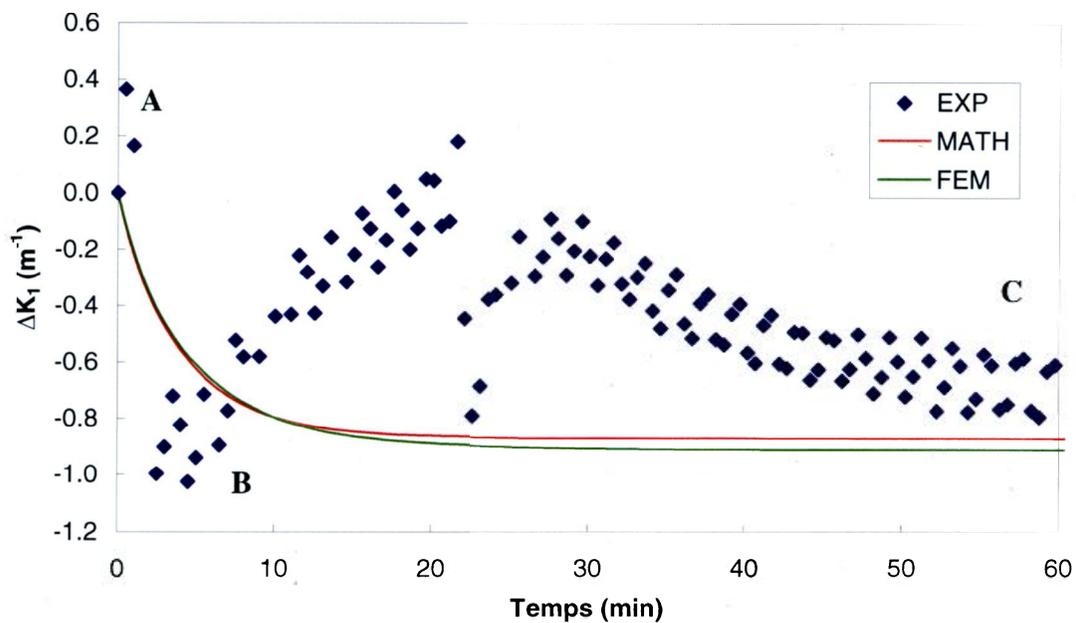
Forme au point B

Figure 5.19 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A6

**Tableau 5.8 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A6**

État	A	B
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	4,0	15,9
$\theta$ ( $^\circ$ )	1,5	1,4

La Figure 5.20 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A7. Les résultats expérimentaux indiquent des changements de forme de la feuille à  $t = 5$  min et à  $t = 22$  min. La variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement inférieure (en valeur absolue) à celle prédite par les modèles. On remarque aussi que les valeurs de  $\Delta\kappa_1$  présentent beaucoup de fluctuations. La courbure principale paraît être trop petite pour être mesurée avec beaucoup de précision. Enfin, le Tableau 5.9 indique la courbure principale et la direction principale aux états A, B et C identifiés sur la Figure 5.20. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est important ( $29,3^\circ$  en A,  $123,5^\circ$  en B et  $34,2^\circ$  en C), ce qui signifie que la courbure principale mesurée n'est pas alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

Forme au point B

Forme au point C

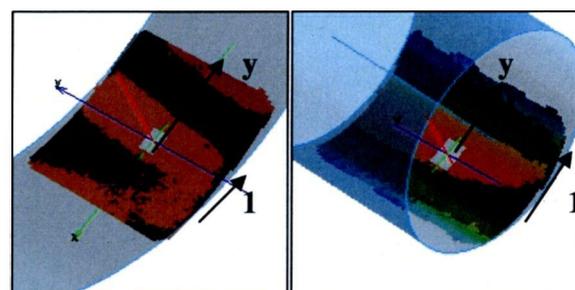
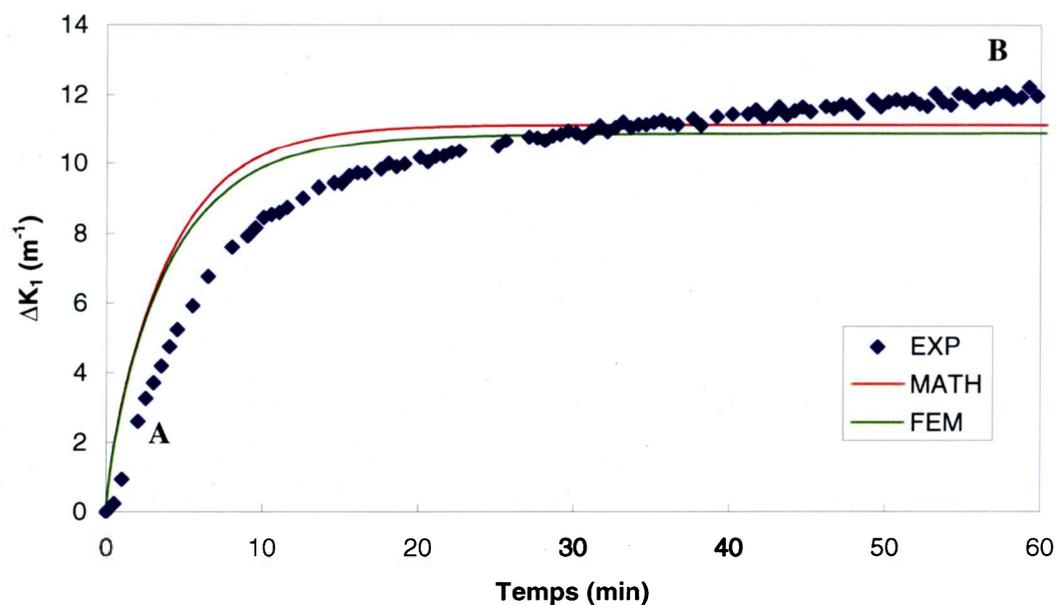
Figure 5.20 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblée A7

Tableau 5.9 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblée A7

État	A	B	C
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	-0,968	-2,0	-1,6
$\theta$ ( $^\circ$ )	29,3	123,5	34,2

La Figure 5.21 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A8. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles et la variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement supérieure à celle prédite par les modèles. On

remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement n'est toujours pas stable après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.10 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.21. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $4,8^\circ$  en A et  $3,0^\circ$  en B), ce qui signifie que la courbure principale mesurée est assez bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

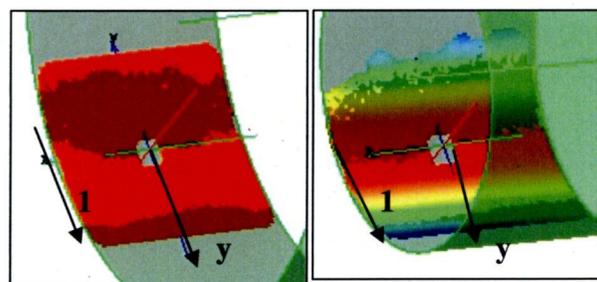
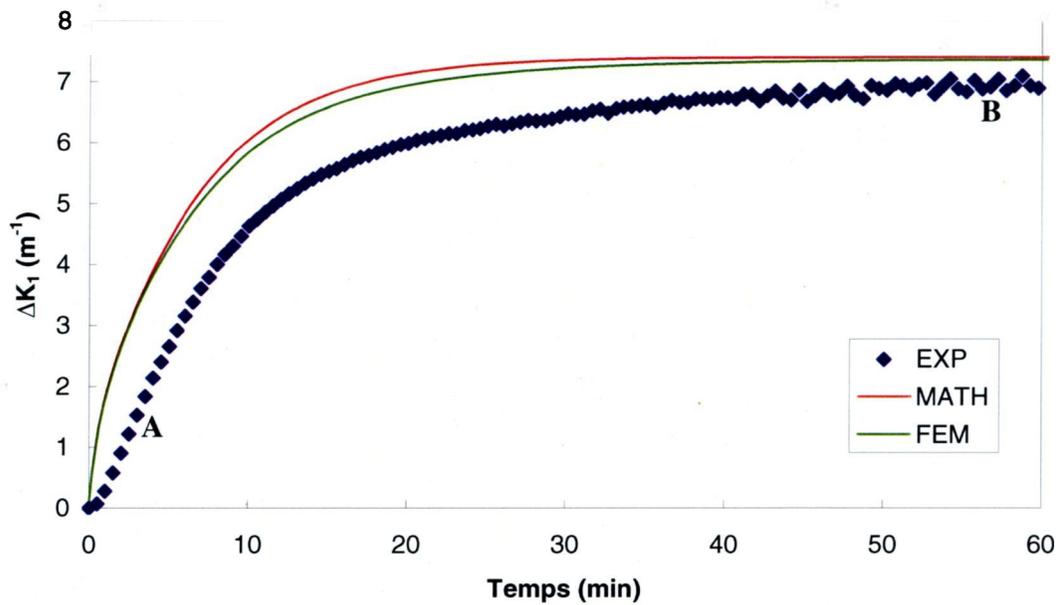
Forme au point B

Figure 5.21 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A8

Tableau 5.10 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A8

État	A	B
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	6,3	18,3
$\theta$ ( $^\circ$ )	4,8	3,0

La Figure 5.22 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour l'assemblage A9. La forme générale de la courbe expérimentale est semblable à celle prédite par les modèles et la variation finale de courbure principale (à  $t = 60$  min) mesurée expérimentalement est légèrement inférieure à celle prédite par les modèles. On remarque aussi que la courbure mesurée expérimentalement n'est toujours pas stable après une heure, contrairement aux prédictions des modèles. Le Tableau 5.11 indique la courbure principale et la direction principale aux états A et B identifiés sur la Figure 5.22. On constate que l'angle  $\theta$  de la direction principale est faible ( $0,3^\circ$  en A et  $1,2^\circ$  en B), ce qui signifie que la courbure principale mesurée est bien alignée avec la courbure dans la direction  $y$  prédite par les modèles.



Forme au point A

Forme au point B

Figure 5.22 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A9

**Tableau 5.11 : Courbure principale  $K_1$  et direction principale  $\theta$  – Assemblage A9**

État	A	B
$K_1$ ( $m^{-1}$ )	7,0	13,9
$\theta$ ( $^\circ$ )	0,3	1,2

Pour les assemblages collés avec amidon, A2, A4, A6, A8 et A9, les pentes initiales du changement de courbure principale mesuré expérimentalement concordent relativement bien avec les prédictions des modèles. Les autres assemblages, A1, A3, A5, et A7 montrent des pentes initiales très différentes de celles prédites par les modèles. Cette pente initiale est déterminée par le processus de diffusion de l'humidité à travers la feuille. On peut identifier trois paramètres qui influencent la vitesse de cette diffusion : le temps mis par la chambre pour passer de 75 % HR à 50 % HR ( $\Delta t_{75-50}$ ), le coefficient de convection hydrique ( $h$ ) et les coefficients de diffusion effectifs de l'humidité de chaque couche ( $D$ ). Le premier paramètre ( $\Delta t_{75-50}$ ) est pris en compte par le modèle d'éléments finis modifié présenté à l'Annexe F. Ce modèle utilise une variation linéaire de l'humidité relative. En examinant la Figure F.4, on constate que la pente initiale prédite par le modèle d'éléments finis modifié est plus proche que celle prédite par le modèle d'éléments finis initial. Le second paramètre ( $h$ ) a été calculé pour chaque assemblage à l'aide de la relation de Lewis (section 4.3.3). Le troisième paramètre ( $D$ ) a été mesuré lors des essais de diffusion (Annexe D). La bonne concordance entre les pentes initiales mesurées et prédites pour les assemblages A2, A4, A6, A8 et A9 semble indiquer que les valeurs des coefficients de convection ( $h$ ) et des coefficients de diffusions effectifs ( $D$ ) utilisées dans les modèles sont proches des valeurs réelles de ces paramètres durant les essais de courbures.

Cependant, le temps de stabilisation prédit par le modèle pour atteindre le régime stationnaire ( $\Delta \kappa_1$  constant) ne correspond pas aux résultats expérimentaux, et ce, pour tous les assemblages. En fait, les résultats expérimentaux (Figures 5.14 à 5.22) montrent que tous les assemblages continuent de développer des courbures après une heure à 50 % HR, alors que les modèles prévoient une courbure constante pour un temps inférieur à une heure. Ce temps de stabilisation est aussi influencé par le processus de diffusion de

l'humidité, en particulier par le coefficient de convection hydrique ( $h$ ) et les coefficients de diffusions effectifs ( $D$ ). La différence entre les temps de stabilisation observés et prédits vient mettre en doute la méthode utilisée pour calculer le coefficient de convection hydrique et la procédure expérimentale utilisée pour mesurer les coefficients de diffusions effectifs.

- Changement de courbure principale après 1 heure :

La Figure 5.23 présente les changements de courbure principale après une heure pour tous les assemblages. La figure permet de bien mettre en évidence les très faibles courbures induites dans les assemblages A5 et A7 par rapport aux autres assemblages. Cela était attendu puisque, tel que souligné au chapitre précédent, ces assemblages sont quasi-symétriques par rapport au plan moyen. Le Tableau 5.12 présente les erreurs relatives des modèles par rapport aux changements de courbure principale après une heure mesurées expérimentalement. Les assemblages collés avec amidon et non symétriques (A2, A4, A6, A8 et A9) présentent des erreurs relatives plutôt faibles (respectivement -7,9 %; 29,8 %; -9,3 %; 7,0 % et 7,5 % pour le modèle semi-analytique). Par contre, on observe que les assemblages collés sans amidon (A1 et A3), de même que les assemblages collés avec amidon et quasi-symétriques (A5 et A7) présentent des erreurs relatives beaucoup plus importantes (respectivement 48,5 %; 157,8 %; 89,7 % et 43,0 % pour le modèle semi-analytique).

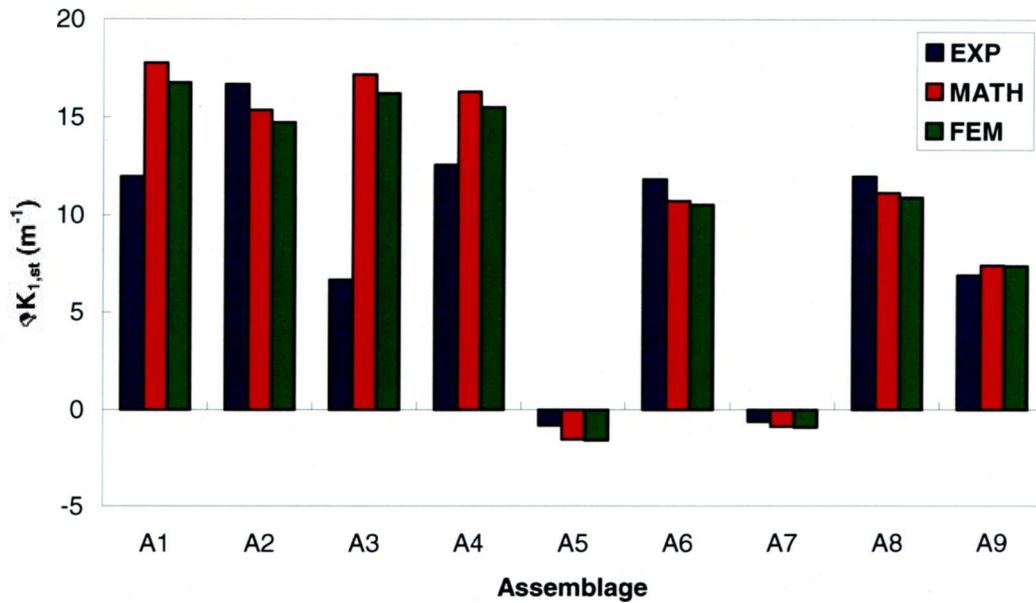


Figure 5.23 : Comparaison des changements de courbure principale après 1 heure pour tous les assemblages

Tableau 5.12 : Erreurs relatives des modèles par rapport aux résultats expérimentaux pour le changement de courbure principale après 1 heure

assemblage	type d'assemblage	erreur MATH (%)	erreur FEM (%)
<b>A1</b>	<b>sans amidon</b>	<b>48,5</b>	<b>40,0</b>
A2	avec amidon	-7,9	-11,7
<b>A3</b>	<b>sans amidon</b>	<b>157,8</b>	<b>143,8</b>
A4	avec amidon	29,8	23,4
<b>A5</b>	<b>avec amidon, quasi-sym.</b>	<b>89,7</b>	<b>95,9</b>
A6	avec amidon	-9,3	-11,0
<b>A7</b>	<b>avec amidon, quasi-sym.</b>	<b>43,0</b>	<b>49,7</b>
A8	avec amidon	-7,0	-9,0
A9	avec amidon	7,5	7,0

À la lumière des erreurs relatives présentées au Tableau 5.12, les assemblages peuvent être divisés en trois types : les assemblages collés avec amidon non symétriques (A2, A4, A6, A8 et A9), les assemblages collés avec amidon et quasi-symétriques (A5 et A7) ainsi que les assemblages collés sans amidon (A1 et A3).

Les prédictions des modèles pour les assemblages non symétriques avec amidon (A2, A4, A6, A8 et A9) concordent relativement bien avec les résultats expérimentaux. Les écarts entre les changements de courbure principale observés et ceux prédits par les modèles peuvent avoir plusieurs causes. Parmi celles-ci, mentionnons l'erreur de mesure sur la courbure principale elle-même. Outre les erreurs induites par la technique (calibration des appareils, algorithme du logiciel, ...), il aurait fallu tenir compte de l'aire de la surface de la feuille utilisée lors du calcul de la courbure principale. Tel que souligné par Nordstrom et al. [10], l'équation utilisée pour la mesure de la courbure,  $\kappa_1(t) = -1/R(t)$ , n'est exacte que lorsque que le déplacement hors du plan  $w^0$  est petit, c'est-à-dire lorsque  $x$  est beaucoup plus petit que  $R$ . Ainsi, l'aire de mesure utilisée pour le calcul du rayon et de la courbure aurait due être réduite. Tel que mentionné précédemment (section 5.4.3), l'aire de mesure utilisée est la surface totale de la feuille de papier (10 cm x 10 cm). La Figure 5.24 montre l'effet de la grandeur de l'aire utilisée pour le calcul de la courbure principale de l'assemblage A6. Les résultats utilisés sont ceux de l'essai préliminaire (voir Figure 5.19). Les aires utilisées correspondent à des carrés d'approximativement 10, 8, 6, 4 et 2 cm de côté, le logiciel ne permettant pas de fixer une valeur précise à la surface. On constate que l'aire utilisée a peu d'impact au début de l'essai ( $t = 0$  à 5 min) puisque la courbure principale  $\kappa_1$  de la feuille et les déplacements hors du plan  $w^0$  sont très faibles initialement. Puis, au fur et à mesure que la courbure augmente, l'erreur commise en utilisant une aire de mesure de 10 cm x 10 cm augmente. En comparant les changements de courbures principales obtenus après 1 heure, on constate que l'erreur causée par l'utilisation de l'aire totale de la feuille (10 cm x 10 cm) au lieu d'une aire réduite (4 cm x 4 cm) est de 12 %. Cette erreur est significative et il aurait donc fallu réduire l'aire utilisée pour le calcul de la courbure principale pour tous les essais expérimentaux. Cependant, le système de mesure ne permet pas de fixer une

aire de mesure précise et constante pour le calcul du rayon à chaque essai de mesure de la courbure.

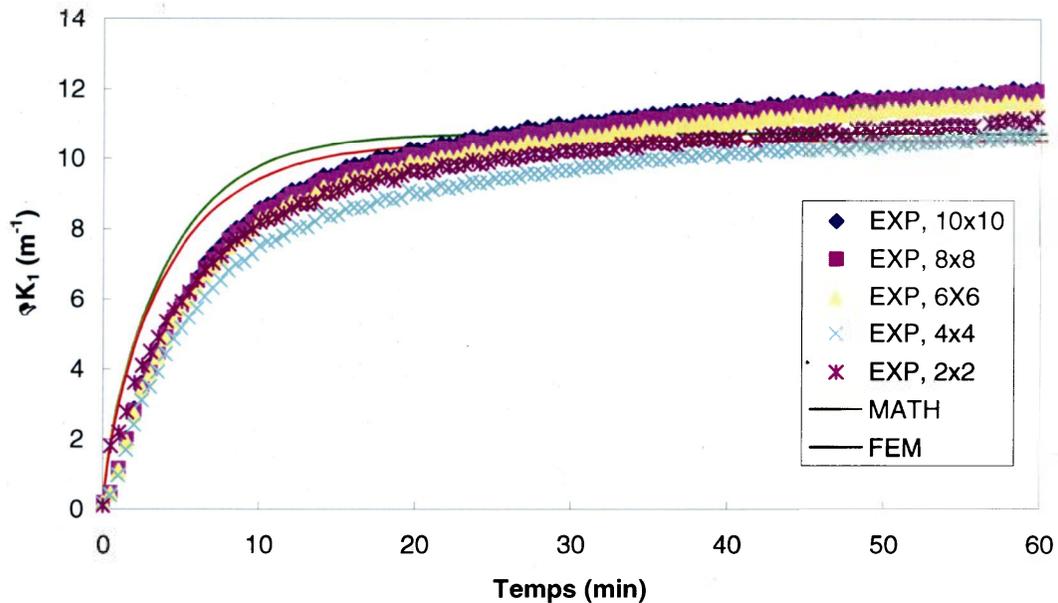


Figure 5.24 : Changement de courbure principale en fonction du temps et effet de la surface de mesure utilisée (en cm) pour le calcul de la courbure développée – Assemblage A6

D'autre part, la valeur des propriétés utilisées dans le modèle (propriétés élastiques et coefficients d'expansion hydrique) n'est peut-être pas exacte. Ces propriétés ont été déterminées sur des feuilles différentes, mais les feuilles n'ont peut-être pas toutes les mêmes propriétés. Cette variabilité est inhérente au matériau utilisé. Ainsi, comme la courbure est sensible aux propriétés des couches individuelles (surtout  $\beta$  et  $E$ ), une erreur de mesure sur ces propriétés aura un effet direct sur la prédiction de la courbure.

Par ailleurs, tel que mentionné lors des essais sur les couches individuelles (section 5.5), les couches utilisées dans les assemblages peuvent présenter une distribution non homogène des fibres à travers l'épaisseur. Aussi, des contraintes peuvent être induites lors du séchage d'un assemblage multicouche puisqu'il est forcé à rester plat durant ce processus et que les couches qui le composent ont des comportements hygromécaniques différents. Ces contraintes induites au séchage peuvent être relâchées

suite à la variation d'humidité imposée lors des essais de courbure. Ces caractéristiques ne sont pas prises en compte par le modèle de prédiction des courbures. Par exemple, rappelons que les papiers HS et PJ 1.02 développent des courbures beaucoup plus importantes que celles développées par les papiers PTM et PJ 1.13 (voir Figure 5.13). De plus, la variation de ces courbures en fonction de l'humidité relative est aussi importante. Ainsi, on constate que les papiers HS et PJ 1.02 sont plus sensibles à un changement de l'humidité relative et on suppose qu'ils présentent une distribution non homogène des fibres à travers l'épaisseur. Or, parmi les assemblages non symétriques avec amidon utilisés, c'est l'assemblage A4 (composé des couches PJ 1.02 et HS) qui présente le plus grand écart entre la valeur du changement de courbure observé après une heure et la valeur prédite par le modèle semi-analytique (29,8 %, voir Tableau 5.12). Il est donc possible qu'une portion importante de cet écart soit due au caractère non homogène des couches qui composent l'assemblage. Un relâchement des contraintes induites lors du séchage de l'assemblage peut aussi expliquer en partie l'écart entre les prédictions et les résultats expérimentaux.

Enfin, d'autres causes peuvent expliquer les écarts entre les changements de courbure principale observés et ceux prédits par les modèles pour les assemblages collés avec amidon et non symétriques. Entre autre, le modèle ne tient pas compte des effets « mécano-sorptifs » qui peuvent se produire durant les essais expérimentaux. Ces effets correspondent à une variation des coefficients d'expansion hydrique due à la présence de contraintes internes à la feuille de papier. Une contrainte positive entraîne une augmentation des coefficients d'expansion hydrique alors qu'une contrainte négative entraîne une diminution de ces coefficients. La courbure développée est donc aussi influencée. Par ailleurs, il est possible que la présence d'amidon comme agent de collage des couches des assemblages aient un effet sur la diffusion de la vapeur d'eau. Bien que l'amidon soit hydrosoluble, il serait pertinent d'étudier son effet de façon plus approfondie.

Les assemblages collés avec amidon et quasi-symétriques (A5 et A7) présentent des changements de courbure principale très éloignés des prédictions des modèles. A

partir des propriétés mesurées au Chapitre 4 et des résultats obtenus pour les essais de courbure sur les couches individuelles, on peut s'attendre à ce que le comportement de ces deux assemblages soit difficile à prédire avec le modèle proposé. L'assemblage A5 [PJ 1.02 / PJ 1.13] et l'assemblage A7 [PJ 1.02 / PTM / PJ 1.13] utilisent les papiers PJ 1.02 et PJ 1.13 en opposition (couches du dessus et du dessous). Or, les propriétés de ces deux types de papiers sont pratiquement identiques (Tableau 4.3). Ainsi, selon les propriétés mécaniques, les assemblages A5 et A7 sont quasi-symétriques par rapport au plan moyen. Par contre, les papiers PJ 1.02 et PJ 1.13 ont des rapports jet / toile différents. La distribution et l'orientation des fibres à l'intérieur du papier PJ 1.02 sont donc différentes de celles du papier PJ 1.13 (voir angles  $\theta_{moy}$  du Tableau 5.2). Il est donc possible que ce soient les courbures dues à la non homogénéité des fibres dans les couches individuelles (voir section 5.5) qui prédominent sur les courbures dues à une différence de teneur en humidité prédites par le modèle. D'autre part, le Tableau 5.7 et le Tableau 5.9 montrent que la direction 1 de la courbure principale mesurée n'est pas alignée avec la direction  $y$  de la feuille de papier (angle  $\theta$  élevé). Donc, la comparaison entre les courbures mesurées expérimentalement et les courbures calculées par les modèles (équation (5.3)) n'est pas adéquate pour ces assemblages.

Les assemblages collés sans amidon (A1 et A3) présentent des changements de courbure principale très différents de ceux prédits par les modèles. Pour bien saisir l'effet d'un collage avec ou sans amidon, on peut comparer les résultats expérimentaux de l'assemblage A1 et de l'assemblage A3 aux résultats de l'assemblage A2 et de l'assemblage A4, respectivement, puisque ces derniers assemblages sont identiques à A1 et A3 mais ont été collés avec amidon. Il est probable que la technique de collage sans amidon soit inadéquate. En effet, selon le Tableau 4.5, la valeur d'énergie requise pour causer un délaminage de l'assemblage A1 est en moyenne de  $52 \text{ J/m}^2$  en direction  $x$  et de  $53 \text{ J/m}^2$  en direction  $y$  et le changement de courbure principale après 1 heure n'est que de  $11,9 \text{ m}^{-1}$  (voir Figure 5.23). Dans le cas de l'assemblage A2, ces valeurs sont respectivement de  $512 \text{ J/m}^2$ ,  $422 \text{ J/m}^2$  et  $16,7 \text{ m}^{-1}$ . Pour l'assemblage A3, ces valeurs sont de  $253 \text{ J/m}^2$ ,  $41 \text{ J/m}^2$  et  $6,7 \text{ m}^{-1}$ , alors qu'elles sont de  $657 \text{ J/m}^2$ ,  $661 \text{ J/m}^2$  et  $12,6 \text{ m}^{-1}$  pour l'assemblage A4. On constate donc que les assemblages collés sans amidon présentent

une résistance au délaminage et des changements de courbures inférieurs à ceux observés pour les assemblages collés avec amidon. En fait, de tous les assemblages fabriqués, ce sont A1 et A3 qui ont obtenus les plus faibles valeurs aux essais de délaminage. La méthode de fabrication de ces assemblages (présentée en détail à l'Annexe D) utilise une simple pression pour coller les couches individuelles. Il semble que cette pression ne soit pas suffisante pour créer des liaisons hydrogènes assez nombreuses entre les molécules de cellulose des fibres. En raison de la technique déficiente de collage sans amidon, il est possible que les couches individuelles de ces assemblages n'étaient pas parfaitement solidaires entre elles avant même que les essais de courbures ne soit menées (discontinuité mécanique). Sachant que les prédictions des déplacements faites par la théorie classique des stratifiés utilisent comme hypothèse des couches parfaitement solidaires, il est possible que les déplacements (et donc les courbures) observées pour les assemblages A1 et A3 ne puissent pas être bien prédits par la théorie classique des stratifiés. La discontinuité hydrique entre les couche pourrait aussi expliquer les écarts entre les résultats expérimentaux et les prédictions des modèles.

### **5.6.3 Conclusion**

Les assemblages collés avec amidon et non symétriques (A2, A4, A6, A8 et A9) présentent généralement des changements de courbures qui sont proches de ceux prédits par les modèles. Plusieurs causes pourraient expliquer les écarts entre le changement final de courbure prédit par les modèles et celui observé expérimentalement (surface de mesure pour le calcul de la courbure, erreur de mesure des propriétés, non-uniformité des couches, effets mécano-sorptifs). Les assemblages collés avec amidon et quasi-symétriques (A5 et A7) subissent de faibles changements de courbure, du même ordre de grandeur que le modèle le prédit. Cependant, la courbure ne se développe pas le long de  $y$ . Le modèle ne permet donc pas de prédire correctement le gauchissement de ces assemblages. Les assemblages collés sans amidon (A1 et A3) présentent des changements de courbure très différents de ceux prédits par le modèle. Il est probable que la technique de collage sans amidon soit inadéquate. Finalement, tous les assemblages utilisés dans cet essai montrent que des courbures continuent à se développer au-delà d'une heure. À la

lumière des dernières observations, des essais de courbures avec des phases à 50 % HR prolongées seront conduits pour vérifier le temps réel de stabilisation des différents assemblages. De plus, l'effet d'un assèchement initial et du nombre de cycle sera étudié.

## **5.7 Essai de courbure cyclique avec assèchement initial**

### **5.7.1 Description**

Cet essai a pour but de vérifier l'effet de plusieurs cycles d'humidité consécutifs sur le développement des courbures de certains assemblages. Le changement de courbure principale mesuré à la fin de chaque cycle sera comparé à la courbure dans la direction  $y$  calculée par les modèles ( $\kappa_y(t)$ ), selon la relation définie par l'équation (5.3).

L'essai de courbure cyclique avec assèchement initial consiste d'abord en un conditionnement de la feuille de papier à une humidité relative initiale de 75 % pendant cinq heures. Puis, la feuille est amenée à une humidité relative de 30 % pendant cinq heures (assèchement initial). Par la suite, la feuille est reconditionnée à 75 % HR pendant cinq heures et est amenée à une humidité relative finale de 50 % pendant cinq heures. Cette dernière séquence (5h à 75 % HR et 5h à 50 % HR) est répétée pour neuf cycles consécutifs. Les courbures sont mesurées en continu pendant tout l'essai. On compare les prédictions des modèles aux courbures développées dans chacune des neuf phases de désorption de cinq heures (50 % HR). Ce temps de cinq heures pour la phase à 50 % HR a été choisi suite aux résultats des essais de courbure préliminaires au cours desquels les courbures continuaient d'augmenter après une heure à 50 % HR.

L'essai cyclique avec assèchement initial sera conduit pour les assemblages A6, A7 et A4. Précisons que de nouveaux échantillons des assemblages sont utilisés à chaque nouvel essai pour que les résultats ne soient pas influencés par les essais antérieurs. Dans le cas de l'assemblage A6, les résultats de l'essai de courbure préliminaire (section 5.6)

montrent une bonne concordance avec les prédictions des modèles (voir Figure 5.19). L'essai cyclique avec assèchement initial permettra de vérifier s'il y a toujours concordance pour un temps de désorption supérieur à une heure et pour plusieurs cycles consécutifs. De plus, un essai cyclique sans assèchement initial sera aussi conduit pour l'assemblage A6 dans le but de vérifier l'effet de cet assèchement sur les courbures. Pour l'assemblage A7, les résultats de l'essai préliminaire indiquent que la feuille subit deux changements de forme lorsqu'elle est amenée de 75 % HR à 50 % HR (voir Figure 5.20). L'essai cyclique avec assèchement initial vise à vérifier si ces changements de forme se produisent toujours. Finalement, parmi les assemblages collés avec amidon présentés à l'essai préliminaire, l'assemblage A4 est celui qui présente la moins bonne concordance avec les prédictions des modèles (voir Figure 5.17). L'essai cyclique avec assèchement initial permettra de vérifier si on observe le même comportement pour des phases prolongées de cinq heures et pour plusieurs cycles consécutifs.

Outre l'effet de plusieurs cycles sur le changement de courbure principale mesuré en fonction du temps ( $\Delta\kappa_1(t)$ ), cet essai doit permettre de déterminer si le temps de stabilisation requis par les assemblages pour atteindre le régime stationnaire est inférieur à cinq heures. Enfin, l'humidité relative de la chambre environnementale est mesurée en fonction du temps, dans le but de vérifier la vitesse de réaction de la feuille de papier suite à une variation d'humidité.

### **5.7.2 Résultats et discussion**

#### ▪ Assemblage A6 :

Les Figures 5.25 et 5.26 présentent la courbure principale et l'humidité relative mesurées en fonction du temps pour l'assemblage A6 pendant l'essai avec assèchement initial et sans assèchement initial.

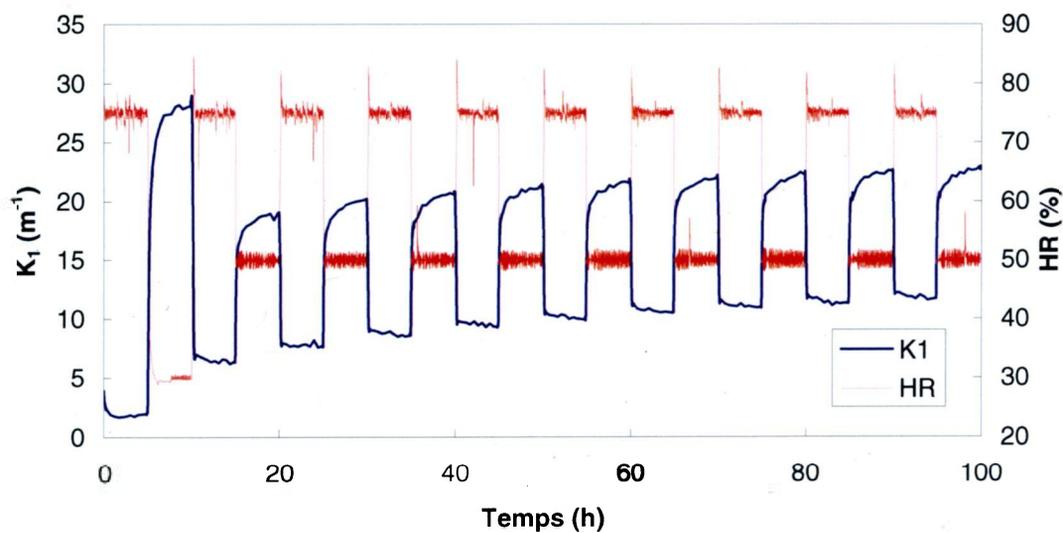


Figure 5.25 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A6, avec assèchement initial

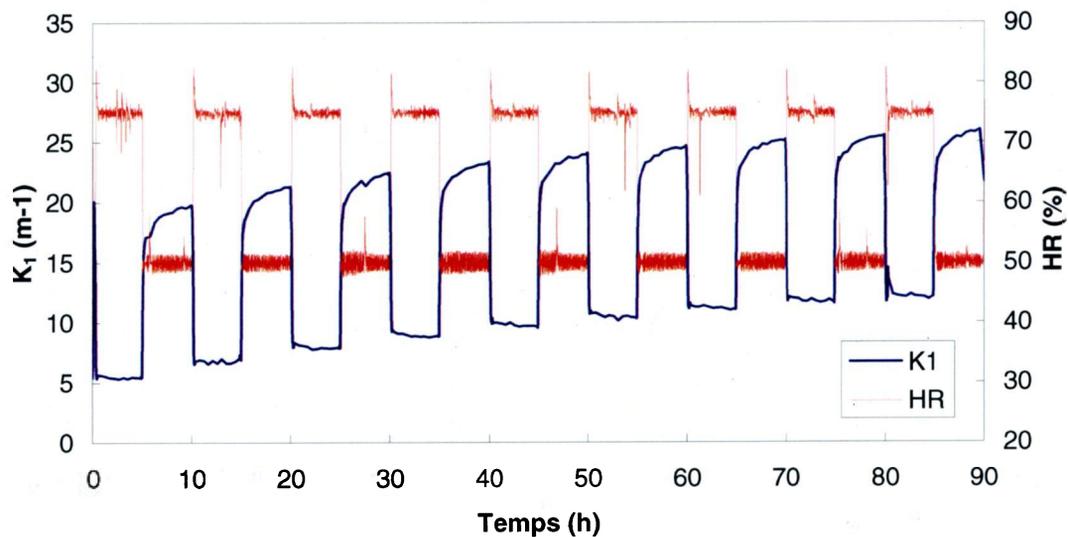


Figure 5.26 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A6, sans assèchement initial

On remarque que pour les deux essais, l'amplitude des courbures mesurées augmente en fonction du nombre de cycles. L'hystérésis typique de la courbe de sorption de l'assemblage (Figure D.27) peut expliquer cette augmentation. En fait, en consultant le Tableau 4.5, on constate que les coefficients d'expansion hydrique en absorption d'un assemblage sont différents de ceux en désorption. Par exemple, l'assemblage A6 présente un coefficient d'expansion hydrique en direction  $y$   $\beta_y = 0,8 \times 10^{-3} / \%$  en absorption (30 % - 80 % HR) et  $\beta_y = 1,12 \times 10^{-3} / \%$  en désorption (80 % - 50 % HR). Il est donc normal de constater que la courbure développée après une phase de désorption de cinq heures n'est pas entièrement « annulée » par une phase d'absorption subséquente et de même durée, d'où l'augmentation de la courbure à chaque cycle observée sur les Figures 5.25 et 5.26.

Par ailleurs, les courbures des essais avec et sans assèchement ont des valeurs comparables ce qui indique que l'assèchement initial n'a qu'un léger effet. De plus, ces figures permettent de constater que la réponse en courbure de la feuille suite à une variation de l'humidité relative est très rapide. Une petite variation locale de l'humidité de la chambre environnementale a des répercussions immédiates sur la forme de la feuille de papier. Ces figures montrent aussi que la feuille se comporte différemment en absorption et en désorption. En absorption (phases 50 % HR  $\Rightarrow$  75 % HR), les courbures se stabilisent très rapidement alors qu'en désorption (phases 75 % HR  $\Rightarrow$  50 % HR), des courbures semblent encore se développer au-delà de cinq heures. Ce phénomène est observé pour tous les cycles d'humidité relative. Un essai supplémentaire avec un temps de phase à 50 % HR supérieur à cinq heures devrait être conduit.

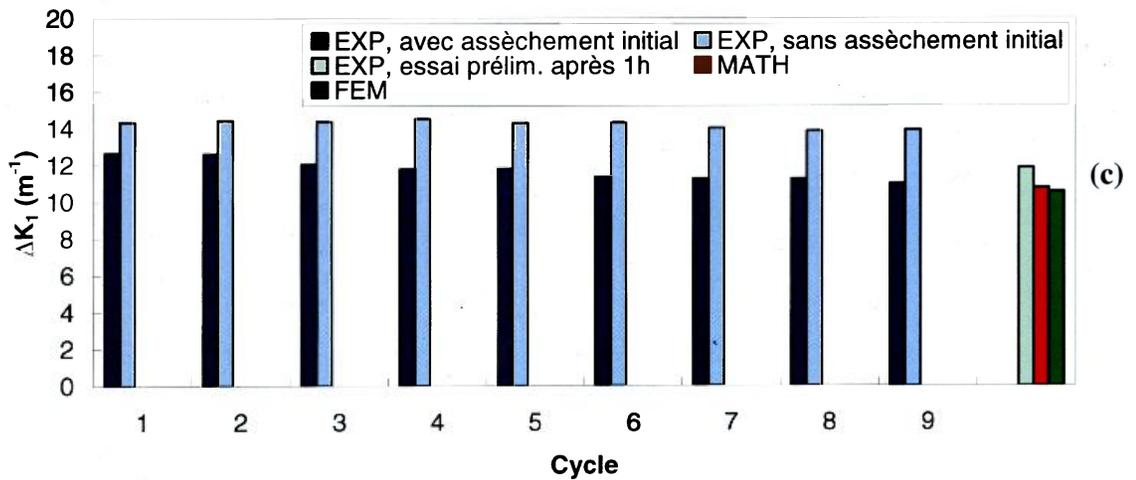
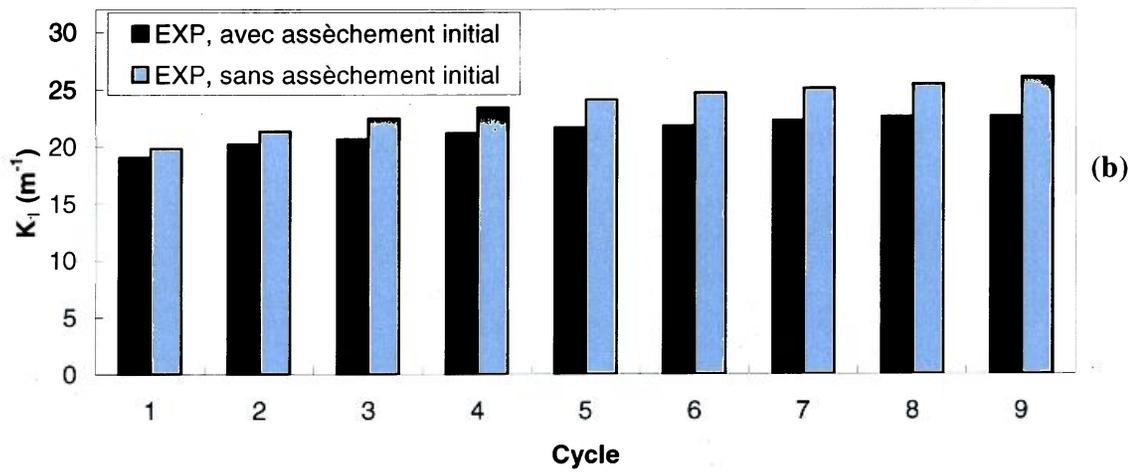
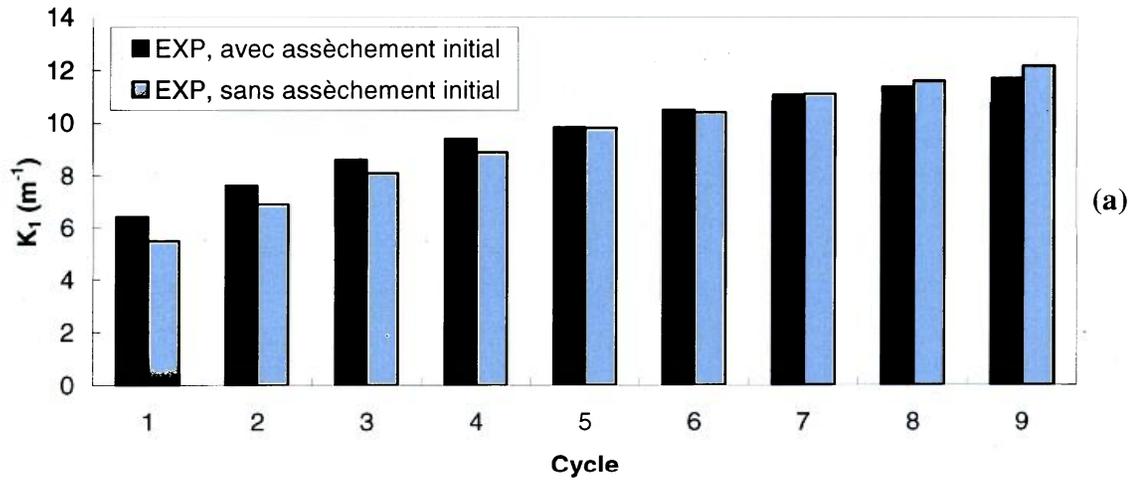
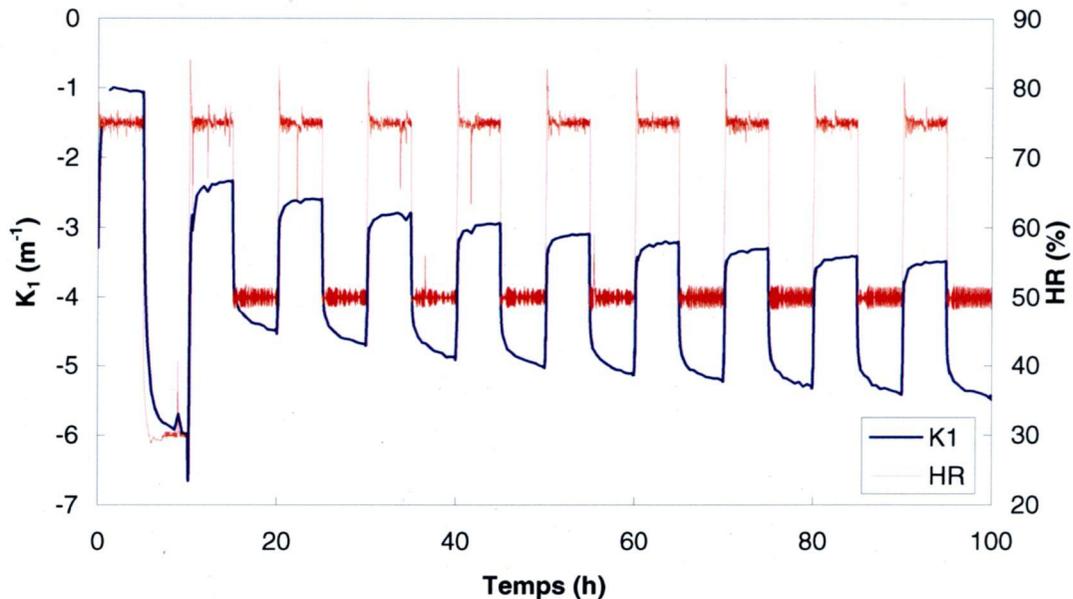


Figure 5.27 : Influence du nombre de cycles et d'un assèchement initial sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A6

La Figure 5.27 présente de façon plus précise l'influence du nombre de cycles et d'un assèchement initial sur le développement des courbures. La Figure 5.27 (a) montre la valeur initiale de la courbure  $\kappa_1$  au début de chaque cycle tandis que la Figure 5.28 (b) présente la valeur de la courbure  $\kappa_1$  à la fin de chaque cycle. Le changement de courbure  $\Delta\kappa_1$  obtenu à la fin de chaque cycle est représenté à la Figure 5.27 (c). On constate que l'amplitude des courbures principales initiales et finales augmente avec le nombre de cycle pour les deux essais. Le changement de courbure principale  $\Delta\kappa_1$  diminue pour l'essai avec assèchement initial (-13,4 % entre les cycles 1 et 9) alors qu'il ne diminue que légèrement pour l'essai sans assèchement initial (-3,2 % entre les cycles 1 et 9). Il est possible que cet assèchement initial entraîne un relâchement des contraintes internes de la feuille de papier multicouche [6], d'où la diminution du changement de courbure principale  $\Delta\kappa_1$ . D'autre part, la Figure 5.27 (c) montre les changements de courbure prédits par les modèles et ceux obtenus lors du premier essai expérimental. On remarque que les résultats de l'essai avec assèchement initial se rapprochent davantage des résultats de l'essai préliminaire et des résultats des modèles.

▪ Assemblage A7 :



**Figure 5.28 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A7, avec assèchement initial**

La Figure 5.28 montre la courbure principale et l'humidité relative de l'assemblage A7 pendant l'essai avec assèchement initial. On remarque que l'amplitude des courbures mesurées augmente en fonction du nombre de cycles. De plus, le temps de stabilisation en désorption est ici aussi supérieur à cinq heures. D'autre part, contrairement à ce qui a été observé lors de l'essai préliminaire de courbure (Figure 5.20), l'assemblage A7 ne subit aucun changement de forme durant les phases à 50 % HR de l'essai cyclique. Il est possible que l'assemblage A7 utilisé lors de l'essai préliminaire présente des caractéristiques quelque peu différentes de celui utilisé pour l'essai cyclique. Cette variation possible des propriétés est intrinsèque au mode de fabrication du papier.

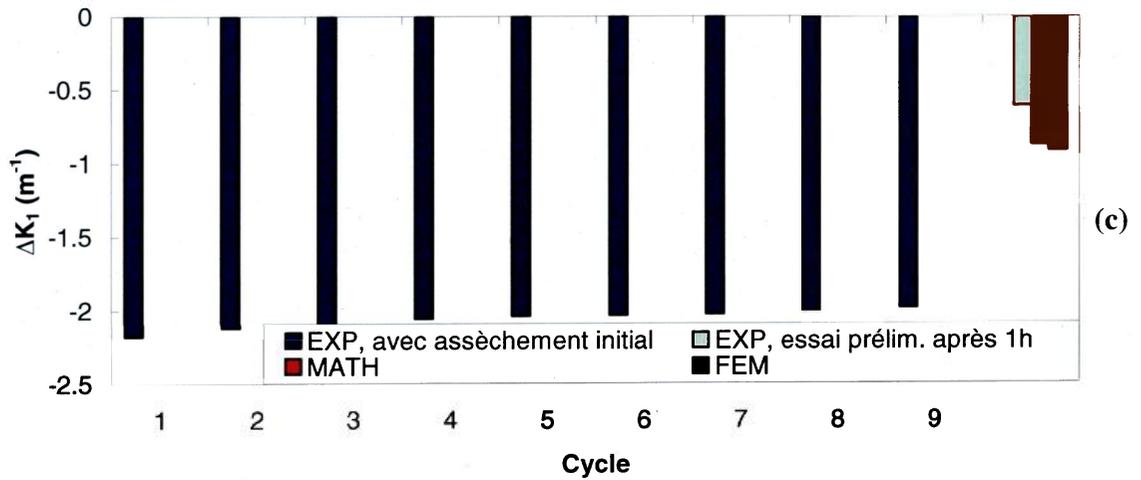
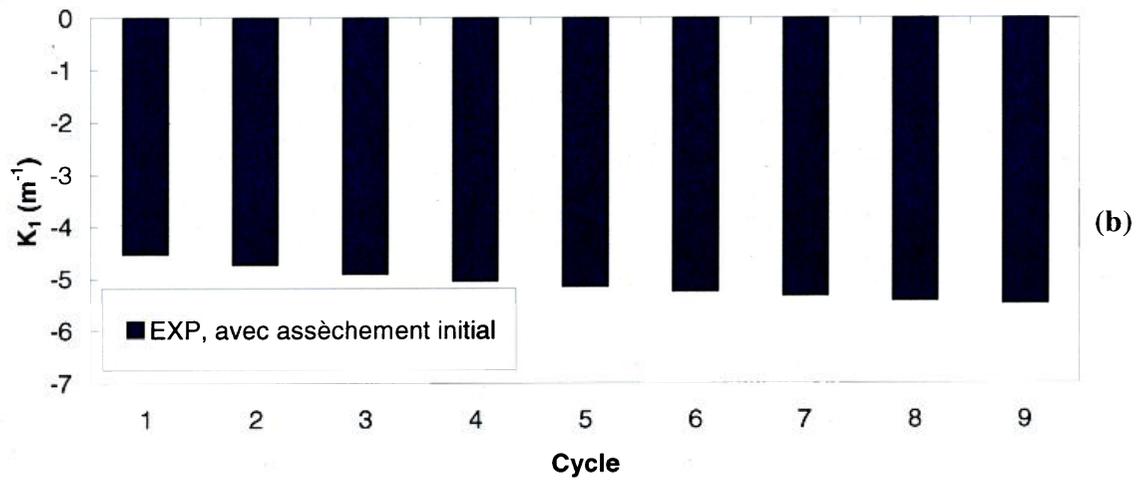
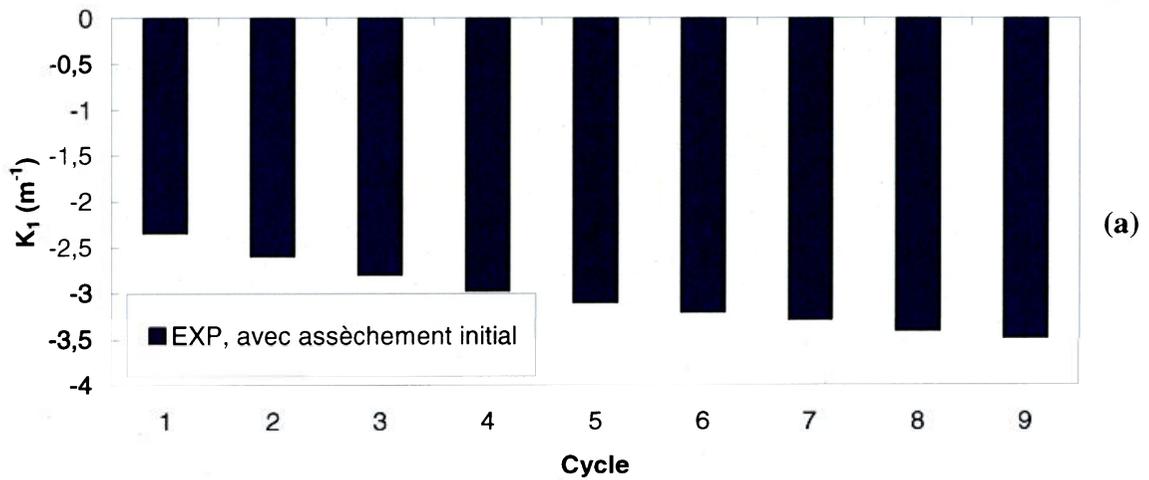
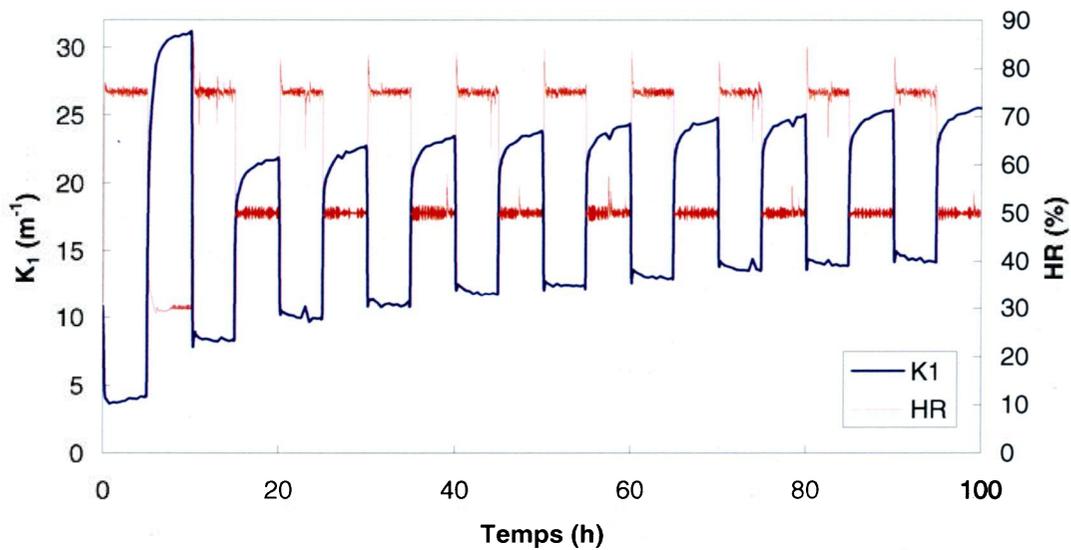


Figure 5.29 : Influence du nombre de cycles sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A7

La Figure 5.29 présente les courbures au début et à la fin de chaque cycle ainsi que le changement de courbure à la fin de chaque cycle pour l'assemblage A7. On constate que l'amplitude des courbures principales initiales et finales augmente avec le nombre de cycles, mais que le changement de courbure principale ne diminue que très légèrement. D'autre part, les changements de courbures prédits par les modèles et ceux obtenus lors du premier essai expérimental sont aussi présentés à la Figure 5.29 (c). On remarque que les résultats de l'essai avec assèchement sont très différents des résultats de l'essai préliminaire et des résultats des modèles.

▪ Assemblage A4 :



**Figure 5.30 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps pour les 9 cycles consécutifs : Assemblage A4, avec assèchement initial**

La Figure 5.30 montre la courbure principale et l'humidité relative de l'assemblage A4 pendant l'essai avec assèchement initial. On remarque que l'amplitude des courbures mesurées augmente en fonction du nombre de cycles. Encore ici, le temps de stabilisation en désorption est supérieur à cinq heures.

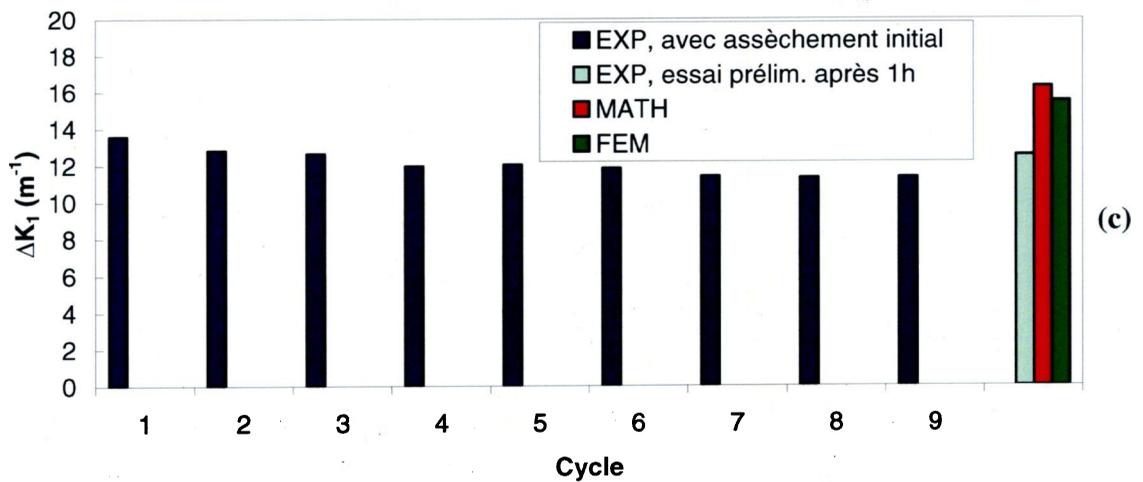
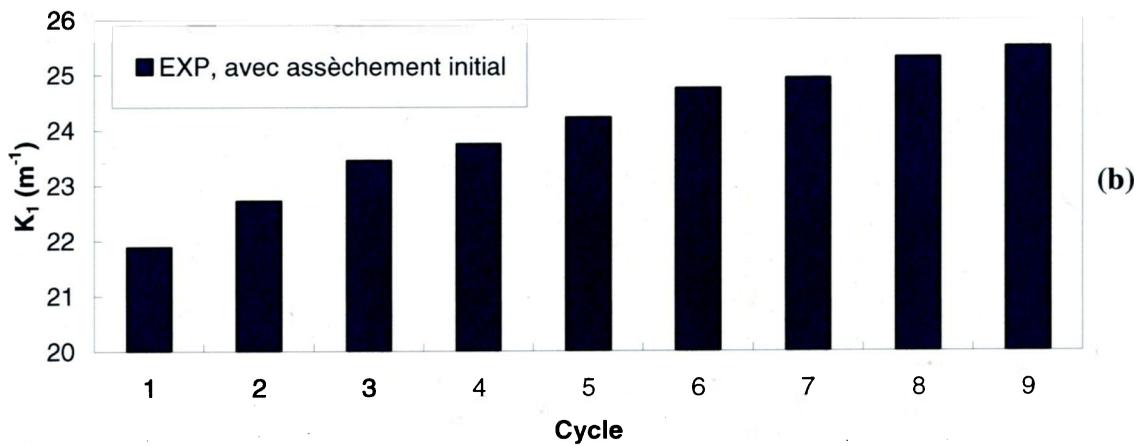
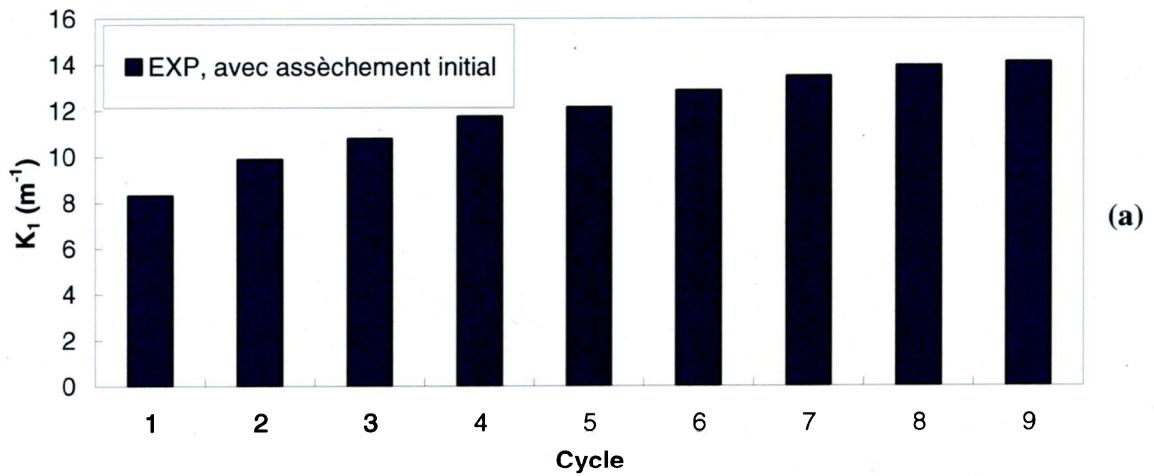


Figure 5.31 : Influence du nombre de cycles sur le développement des courbures : (a) courbure principale initiale, (b) courbure principale finale et (c) changement final de courbure principale – Assemblage A4

La Figure 5.31 présente les courbures au début et à la fin de chaque cycle ainsi que le changement de courbure à la fin de chaque cycle pour l'assemblage A4. On constate que l'amplitude des courbures principales initiales et finales augmente avec le nombre de cycles, mais que le changement de courbure principale ne diminue que très légèrement. D'autre part, les changements de courbures prédits par les modèles et ceux obtenus lors du premier essai expérimental sont aussi présentés à la Figure 5.31 (c). On peut voir que le changement de courbure obtenu pendant l'essai cyclique est très proche de celui obtenu lors de l'essai préliminaire. Les valeurs expérimentales sont en moyenne 26 % plus basses que celle prédite par les modèles. Rappelons que l'assemblage A4 est composé des couches PJ 1.02 et HS que l'on suppose non homogènes (voir discussions à la section 5.6.2).

### **5.7.3 Conclusion**

Les essais cycliques ont montré que l'amplitude des courbures principales initiales et finales augmente généralement avec le nombre de cycles (hystérésis de sorption) alors que le changement de courbure principale diminue légèrement. Il semble aussi qu'un assèchement initial de la feuille de papier accentue cette diminution. D'autre part, les courbures se stabilisent relativement rapidement pour les phases d'absorption de cinq heures alors qu'il y a toujours une augmentation des courbures mesurées pour les phases de désorption de cinq heures. Ce phénomène est observé pour tous les cycles d'humidité relative et pour chaque assemblage utilisé dans cet essai. Un essai supplémentaire avec un temps de phase de désorption supérieur à cinq heures devrait donc être conduit pour vérifier le temps requis pour l'atteinte du régime stationnaire.

## 5.8 Essai de courbure prolongé

### 5.8.1 Description

Cet essai a deux objectifs principaux :

- 1) vérifier si la courbure principale  $\kappa_1$  se stabilise à l'intérieur d'une période de désorption (phase à 50 % HR) de dix heures
- 2) mesurer la variation de la teneur en humidité de la feuille causée par le passage d'une humidité relative de 75 % à une humidité relative de 50 %.

L'essai de courbure prolongé consiste en un conditionnement de la feuille de papier à une humidité relative initiale de 75 % pendant dix heures. La feuille est ensuite amenée à une humidité relative finale de 50 % pendant dix heures. Les courbures sont mesurées en continu pendant tout l'essai. On compare les prédictions des modèles aux courbures développées pour la phase de dix heures à 50 % HR. La durée de la phase à 50 % HR a été augmentée à dix heures suite aux résultats obtenus pour l'essai de courbure cyclique avec assèchement initial, qui montrait que les courbures continuaient de se développer après cinq heures à 50 % HR. D'autre part, la feuille de papier est placée sur une balance et la masse de la feuille est notée à toutes les périodes de 15 minutes durant tout l'essai. La teneur en humidité de la feuille durant l'essai pourra ainsi être calculée et comparée à la teneur en humidité prédite par la courbe de sorption. La teneur en humidité de la feuille de papier à une humidité HR donnée est calculée de la façon suivante :

$$H_{HR} = 100 \cdot \left( \frac{m_{HR} - m_{sec}}{m_{HR}} \right), \quad (5.11)$$

où  $m_{HR}$  est la masse de la feuille à une humidité relative donnée et  $m_{sec}$  est la masse de la feuille séchée au four à 105 ° C pendant 4 heures.

L'essai de courbure prolongé sera conduit uniquement pour l'assemblage A9. Cet assemblage est composé de quatre couches (PJ 1.02, PTM, PJ 1.13, HS) et possède donc l'épaisseur la plus élevée parmi tous les assemblages conçus (voir Tableau 4.5). Cet assemblage devrait offrir le plus de résistance à la diffusion de l'humidité et devrait donc posséder un temps de stabilisation de la courbure supérieur à tous les autres assemblages. L'essai devrait permettre de déterminer la valeur de ce temps de stabilisation s'il est situé à l'intérieur d'une période de dix heures. Ainsi, cette valeur pourrait servir de limite supérieure quant à la durée de la phase à 50 % HR si de nouveaux essais de courbure étaient conduits pour les autres assemblages.

### **5.8.2 Résultats et discussion**

La Figure 5.32 montre la teneur en humidité mesurée ( $H$ ) pour l'assemblage A9 ainsi que l'humidité relative de la chambre (HR) en fonction du temps. On remarque qu'il y a bien une diminution rapide de la teneur en humidité de la feuille de papier correspondant à la diminution de l'humidité relative de la chambre environnementale. Aussi, la teneur en humidité de l'assemblage oscille autour de 14,7 % durant la phase à 75 % HR et oscille autour de 12,4 % durant la phase à 50 % HR. Ces oscillations sont causées par les vibrations de la balance à l'intérieur de la chambre environnementale. Les teneurs en humidité moyennes à 75 % HR ( $H_{0,moy}$ ) et à 50 % HR ( $H_{\infty,moy}$ ) sont indiquées.

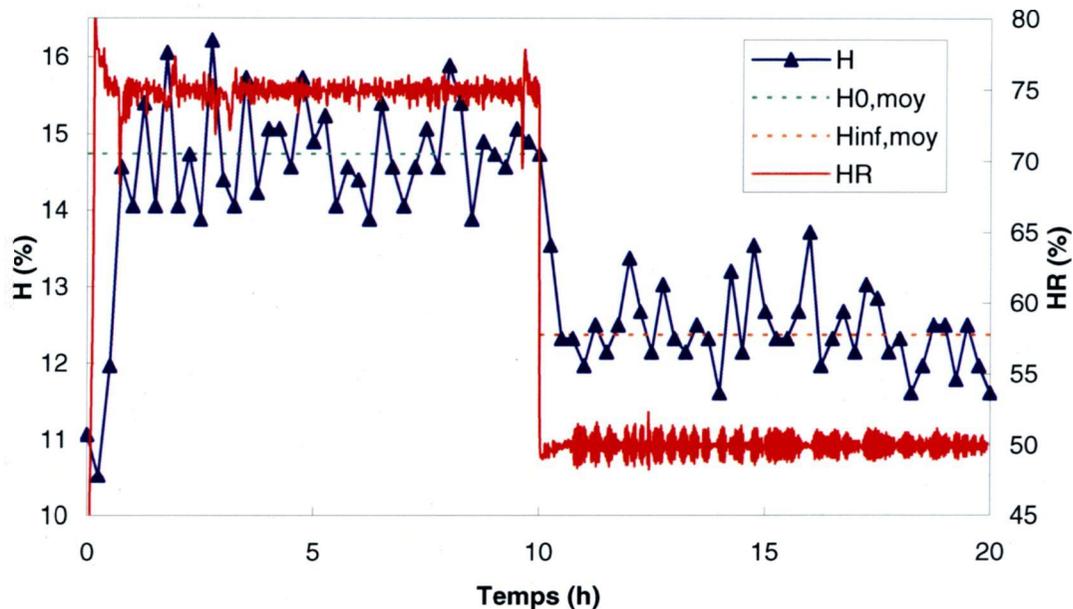


Figure 5.32 : Teneur en humidité et humidité relative en fonction du temps – Assemblage A9

Tableau 5.13 : Masses et teneurs en humidité expérimentales – Assemblage A9

$m_{75,moy}^*$	(g)	5,09
$m_{50,moy}^*$	(g)	4,91
$m_{50,moy} - m_{75,moy}$	(g)	-0,18
$H_{0,moy}$ (@75 % HR)	(%)	14,7
$H_{\infty,moy}$ (@50 % HR)	(%)	12,4
$H_{\infty,moy} - H_{0,moy}$	(%)	<b>-2,3</b>

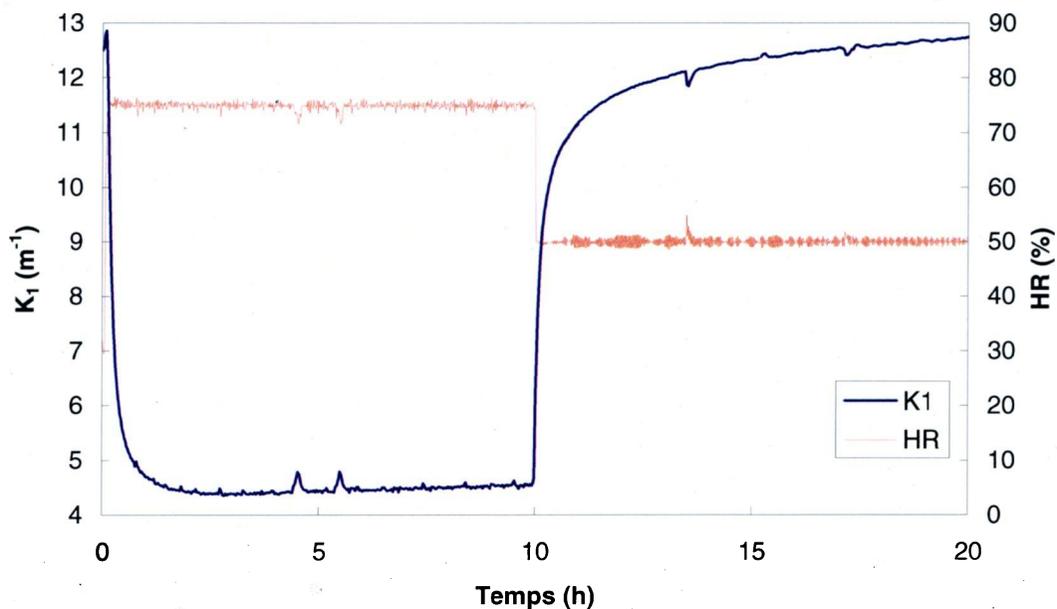
\* précision de la balance : 0,001 g

Tableau 5.14 : Teneurs en humidité obtenues lors de l'essai de caractérisation (courbe de sorption) – Assemblage A9

$H_0$ (@75 % HR)	(%)	14,1
$H_{\infty}$ (@50 % HR)	(%)	11,1
$H_{\infty} - H_0$	(%)	<b>-3,0</b>

Le Tableau 5.13 présente les valeurs numériques de ces teneurs en humidité mesurées expérimentalement et le Tableau 5.14 présente les valeurs obtenues à l'aide de

la courbe de sorption de l'assemblage. En valeur absolue, la variation de teneur en humidité mesurée expérimentalement ( $H_{0,moy} - H_{\infty,moy} = -2,37 \%$ ) est légèrement inférieure à celle obtenue à partir de la courbe de sorption ( $H_0 - H_{\infty} = -2,99 \%$ ). Conséquemment, la courbure prédite par les modèles utilisant les teneurs en humidité mesurées expérimentalement devrait être inférieure à celle prédite par les modèles utilisant les teneurs en humidités données par la courbe de sorption. La faible différence entre les teneurs en humidité mesurées expérimentalement et celles obtenues par la courbe de sorption indiquent que l'utilisation de ces dernières valeurs dans les modèles est une assez bonne approximation des valeurs réelles des teneurs en humidités des feuilles de papier durant les essais de mesures des courbures mais cette faible variation peut faire varier  $\Delta\kappa_1$  de façon appréciable.



**Figure 5.33 : Courbure principale et humidité relative en fonction du temps – Assemblage A9**

La Figure 5.33 présente la courbure principale mesurée expérimentalement et l'humidité relative de la chambre environnementale en fonction du temps. On remarque encore ici que la réponse de la feuille de papier à une variation de l'humidité relative est rapide. De plus, on constate que la courbure principale n'est toujours pas stable après dix

heures de désorption à 50 % HR ( $t = 10$  h à  $t = 20$  h), alors qu'elle est pratiquement stable pour la phase d'absorption ( $t = 0$  à  $t = 10$  h).

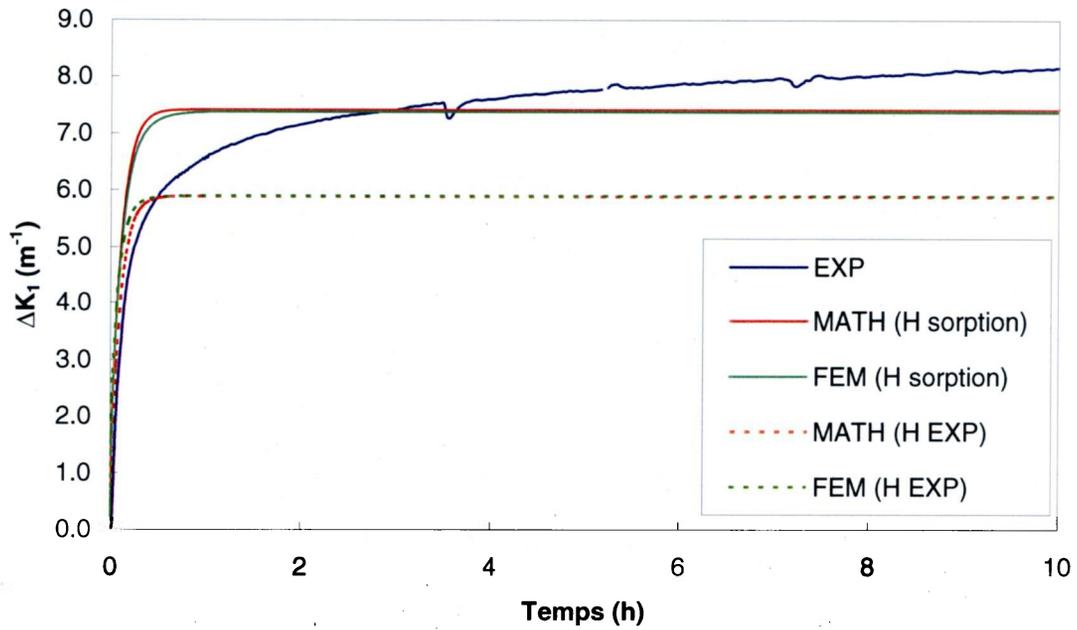
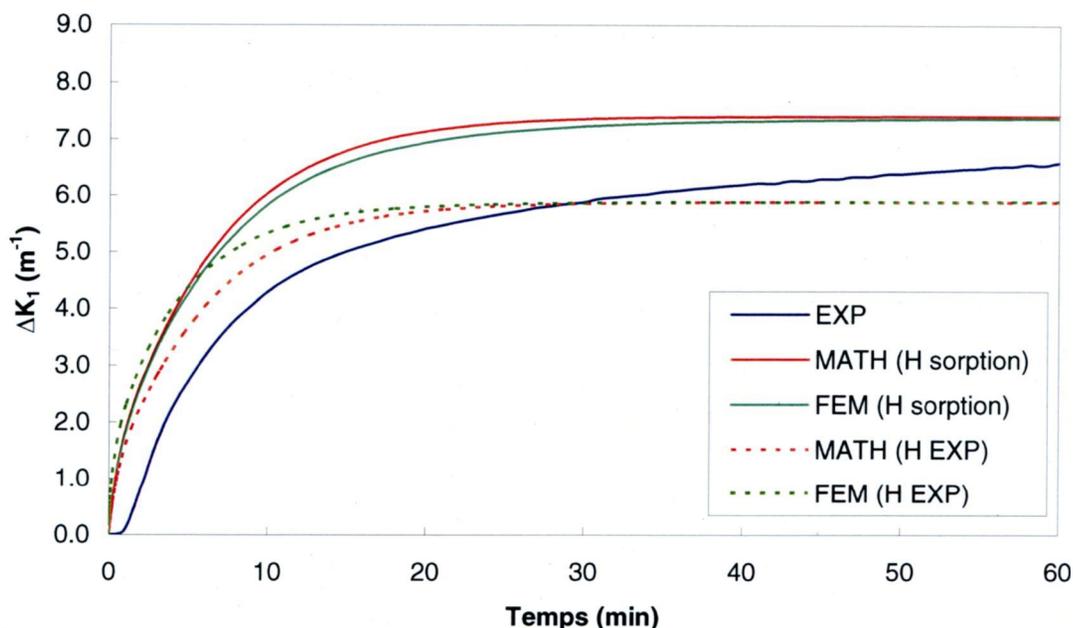


Figure 5.34 : Changement de courbure principale en fonction du temps – Assemblage A9



**Figure 5.35 : Changement de courbure principale en fonction du temps pour la 1<sup>re</sup> heure – Assemblage A9**

La Figure 5.34 montre le changement de courbure principale en fonction du temps pour toute la durée de la phase de désorption (10h), alors que la Figure 5.35 est un zoom sur la 1<sup>re</sup> heure de cette phase. On observe encore ici que la courbure principale ne s'est toujours pas stabilisée après dix heures de désorption à 50 % HR. D'autre part, ces figures présentent aussi les prédictions des modèles obtenues en utilisant les teneurs en humidité de la courbe de sorption (H sorption) et les teneurs en humidité mesurées expérimentalement durant l'essai (H EXP). On constate que le changement final de courbure principale (après dix heures) prédit par les modèles qui utilisent les teneurs en humidités mesurées expérimentalement est plus éloigné des résultats expérimentaux que ne l'est celui prédit par les modèles qui utilisent les teneurs en humidité de la courbe de sorption. Par contre, comme le montre la Figure 5.35, la pente initiale semble mieux prédite quand les teneurs en humidité mesurées expérimentalement sont utilisées dans les modèles.

Il y a plusieurs causes qui pourraient expliquer la lente stabilisation de la courbure principale en désorption. Parmi celles-ci, mentionnons :

- la variation des propriétés mécaniques des couches individuelles de l'assemblage en fonction de la teneur en humidité
- le fluage
- l'application d'une autre force externe (gravité ?)
- les effets visco-élastiques (relaxation des contraintes)

La variation des propriétés mécaniques du papier en fonction de l'humidité relative est un phénomène souvent abordé dans la littérature. Entre autre, un article de Benson [17] présente une étude sur les effets de l'humidité relative et de la température sur les propriétés mécaniques du papier Kraft, correspondant au papier de type HS utilisé dans le présent travail. Par exemple, une augmentation de 1 % de la teneur en humidité moyenne de ce type de papier entraîne une diminution d'environ 5 % de la valeur nominale (mesurée à 50 % HR) du module d'élasticité en direction 1 (direction des fibres ou sens machine, SM). En direction 2 (sens travers, ST), cette diminution est d'environ 5,4 %. Malheureusement, il n'y pas de données disponibles par rapport aux autres propriétés mécaniques (les coefficients d'expansion hydrique entre autre) et par rapport aux autres types de papier utilisés dans le présent travail (PTM, PJ 1.02, PJ 1.13). Une simulation utilisant le modèle semi-analytique et présentant les effets d'une variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité est présentée à l'Annexe G. Considérant les données disponibles, cette simulation indique que la variation des modules d'élasticité a très peu d'effet sur le développement des courbures avec le temps. De plus, il faut considérer que même si l'effet de la variation des propriétés était appréciable, elle n'influencerait que le début du développement des courbures. En fait, cette variation des propriétés dépend de la teneur en humidité. Or, la teneur en humidité mesurée se stabilise relativement rapidement après le début de la phase de désorption (voir Figure 5.32). Ce phénomène ne peut donc pas expliquer à lui seul la lente stabilisation de la courbure principale.

Le fluage pourrait aussi être une des causes de la lente stabilisation des courbures principales. Ce phénomène correspond à la diminution des modules d'élasticité avec le temps. Cette diminution serait probablement différente d'un papier à l'autre et pourrait avoir un impact significatif sur le développement des courbures avec le temps.

L'application d'une force externe sur la feuille (gravité) pourrait expliquer en partie la lente stabilisation de la courbure principale. Même si le montage expérimental utilisé présente une disposition de la feuille de papier qui minimise l'effet de la gravité (feuille verticale, courbure développée selon l'axe  $y$  horizontal, voir Figure 5.4), il est possible que la gravité augmente de façon constante la courbure de la feuille. Dans le cas d'un essai en absorption, l'effet devrait être moins prononcé puisque la feuille a tendance à s'aplatir. À l'inverse, pour un essai en désorption, l'effet devrait être plus important puisque la feuille se courbe sur elle-même (les côtés de la feuille s'éloignent du support). L'effet de la gravité pourrait être étudié à l'aide d'un modèle d'éléments finis. L'étude pourrait vérifier l'effet des différentes dispositions de la feuille (horizontale, verticale, sens des courbures,...) et du type d'essai (absorption, désorption).

Enfin, une autre cause plausible de la lente stabilisation de la courbure principale est la relaxation des contraintes internes de la feuille de papier, due à des effets visco-élastiques. Lu et Carlsson [6] ont montré que le comportement visco-élastique d'une feuille de papier peut avoir un impact significatif sur le développement des courbures avec le temps. Un modèle d'éléments finis utilisant différentes courbes de relaxation des modules d'élasticité montre que le développement des courbures d'une feuille de papier à deux couches se poursuit même après l'atteinte de la teneur en humidité à l'équilibre. Ce phénomène est similaire à ce qui a été observé expérimentalement dans le présent travail. Il serait donc pertinent d'inclure les effets visco-élastiques dans le modèle semi-analytique transitoire. Il faudrait aussi obtenir expérimentalement les courbes de relaxation des modules d'élasticité des différents types de papier utilisés et ce, pour différentes teneurs en humidité.

### 5.8.3 Conclusion

Les teneurs en humidité mesurées lors de l'essai prolongé de courbure sont relativement proches de celles prédites par la courbe de sorption. Par contre, l'utilisation de la teneur en humidité expérimentale dans les modèles a un impact sur la courbure prédite. Il aurait donc été préférable de mesurer en continu la teneur en humidité réelle du papier durant tous les essais expérimentaux plutôt que d'utiliser les prédictions des courbes de sorption. D'autre part, une période de désorption de dix heures n'est pas suffisante pour atteindre le régime stationnaire : la courbure principale continue à se développer. Plusieurs facteurs pourraient expliquer cette lente stabilisation (variation des propriétés avec la teneur en humidité, fluage, gravité, effets visco-élastiques). Il faudrait prolonger davantage la phase de désorption pour des essais subséquents dans le but d'évaluer le temps requis pour atteindre le régime stationnaire.

## 5.9 Conclusion

La mesure expérimentale des courbures a permis de vérifier la validité du modèle semi-analytique. Les différents essais expérimentaux ont permis d'établir différentes conclusions quant au comportement des couches individuelles et des assemblages multicouches.

D'abord, des essais de courbure sur les couches individuelles ont été conduits. Ces essais ont permis de constater que tous les types de papier utilisés développaient des courbures suite à une variation de l'humidité. Cette sensibilité à l'humidité indique que ces papiers ne sont probablement pas uniformes en direction  $z$ , contrairement à l'hypothèse posée pour le modèle semi-analytique transitoire. Les papiers de type HS et PJ 1.02 sont plus sensibles à une variation de l'humidité que les papiers de type PTM et PJ 1.13.

Par la suite, des essais préliminaires de courbures ont été menés sur tous les assemblages. Ces essais ont montré que tous les assemblages continuent à développer des courbures après une heure de désorption à 50 % HR, contrairement aux prédictions des modèles. De plus, on a pu constater que les assemblages présentent des comportements différents s'ils ont été collés sans amidon ou s'ils sont quasi-symétriques. Dans le cas des assemblages collés avec amidon et non symétriques (A2, A4, A6, A8 et A9), le changement de courbure principale en fonction du temps est assez similaire aux prédictions des modèles. Plusieurs causes pourraient expliquer les écarts entre le changement final de courbure prédit par les modèles et celui observé expérimentalement (surface de mesure pour le calcul de la courbure, erreur de mesure des propriétés, non-uniformité des couches, effets mécano-sorptifs). Les assemblages collés avec amidon et quasi-symétriques (A5 et A7) ont montré des comportements différents de ceux prédits par les modèles et de très faibles amplitudes de changement de courbure principale. Pour les assemblages collés sans amidon (A1 et A3), le changement de courbure principale est de loin inférieur à celui prédit par les modèles. Les couches de ces assemblages ne sont pas parfaitement solidaires et ces assemblages n'ont pas été utilisés pour les essais de courbures subséquents.

Des essais de courbures cycliques avec assèchement initial ont été menés pour les assemblages A6, A7 et A4. Ces essais ont permis de constater que la feuille de papier répond rapidement à une variation de l'humidité et que le comportement en absorption (courbures stables après cinq heures) est différent du comportement en désorption (pas de courbures stables après cinq heures). Aussi, les essais cycliques ont montré que les courbures principales initiales et finales augmentent avec le nombre de cycle (hystérésis de sorption), alors que le changement de courbure principale à la fin de chaque cycle ne diminue que légèrement. D'autre part, un assèchement initial à 30 % HR fait diminuer le changement de courbure principale à tous les cycles. De plus, il renforce la diminution de ce changement avec le nombre de cycle.

Enfin, un essai de courbure prolongé a été mené pour l'assemblage A9 dans le but de vérifier le temps de stabilisation des courbures en phase de désorption (à 50 % HR). Il semble que la feuille de papier développe toujours des courbures pour une phase de désorption de dix heures (à 50 % HR) alors que les courbures sont stables pour une phase d'absorption de dix heures (à 75 % HR). Plusieurs facteurs peuvent expliquer ce phénomène. La présence d'effets visco-élastiques est le plus plausible de ces facteurs.

## Conclusion

La recherche présentée dans ce mémoire a permis de développer un modèle semi-analytique de prédiction des déformations hygromécaniques en régime transitoire d'une feuille de papier multicouche.

Les différents éléments constituant le modèle ont d'abord été présentés. La théorie du transfert thermique en régime transitoire pour une plaque composite a été utilisée pour modéliser la diffusion transitoire de l'humidité dans la feuille de papier. Puis, la théorie classique des stratifiés, modifiée pour inclure les non-linéarités géométriques selon von Karman ont été utilisés pour modéliser les déplacements de la feuille de papier soumise à une variation de sa teneur en humidité. Un exemple d'application utilisant un assemblage conçu pour le présent travail a été mené. Cette étude a permis de constater que, pour certaines dimensions et teneurs en humidité appliquées, il existe trois solutions distinctes pour la prédiction des courbures d'une feuille de papier multicouches. Deux de ces solutions correspondent à des configurations d'équilibre stables et la troisième à une configuration d'équilibre instable. Parmi les deux solutions stables, une solution « dominante » existe en tout temps. L'autre solution stable existe pour une certaine gamme de différences de teneur en humidité et de dimensions. Les résultats obtenus avec le modèle transitoire développé sont identiques aux résultats obtenus avec un modèle stationnaire existant [8].

Un modèle d'éléments finis a été utilisé pour valider les prédictions du modèle semi-analytique transitoire. Le modèle d'éléments finis de la feuille de papier multicouche a permis de valider le modèle de diffusion transitoire de l'humidité. Les distributions de teneur en humidité à différents temps et la teneur en humidité au centre de la feuille de papier en fonction du temps prédites par le modèle semi-analytique transitoire sont très proches de celles prédites par le modèle d'éléments finis. Aussi, les prédictions des déplacements verticaux d'un coin et des courbures en direction  $y$  en fonction du temps sont similaires pour les deux modèles. D'autre part, le modèle semi-

analytique a été utilisé pour corroborer les résultats d'une étude menée par Cloutier, Gendron et Dano [8] sur deux types de carton. Le modèle prédit trois formes possibles à l'état permanent pour chacun des cartons. Pour le premier carton, la forme prédite par le modèle semi-analytique (correspondant à la seule solution qui existe en tout temps) ne correspond pas à la forme prédite par le modèle d'éléments finis stationnaire de Gendron, Cloutier et Dano. Pour le second carton, les deux modèles prédisent des formes identiques. Ainsi, la diffusion progressive de l'humidité à travers l'épaisseur semble influencer la forme prise par la feuille de carton. D'autre part, les valeurs des déplacements verticaux d'un coin prédites par le modèle semi-analytique transitoire sont encore ici très proches de celles prédites par le modèle d'éléments finis transitoire. Ainsi, le modèle semi-analytique transitoire développé est une bonne alternative à un modèle d'élément finis. Il prédit une diffusion transitoire de l'humidité et des courbures en fonction du temps similaires à celles prédites par le modèle d'éléments finis, pour un temps de calcul largement inférieur.

Afin de pouvoir valider expérimentalement les résultats des modèles, des feuilles multicouches ont dû être fabriquées et caractérisées. Les essais de caractérisation ont permis de mesurer toutes les propriétés des couches individuelles (papiers HS, PTM, PJ 1.02 et PJ 1.13) et des assemblages (A1 à A9) requises par le modèle semi-analytique. D'abord, les différentes propriétés des couches individuelles ont été mesurées lors de différents essais de caractérisation. Les coefficients d'expansion hydrique en direction 2 de ces couches ont été utilisés pour déterminer la constitution des feuilles multicouches (assemblages). Les propriétés de ces assemblages ont ensuite été mesurées et leurs coefficients de convection hydrique ont été calculés.

La mesure expérimentale des courbures a permis de vérifier la validité du modèle semi-analytique. Différentes conclusions ont pu être établies. D'abord, des essais de courbures sur les couches individuelles ont permis de constater que tous les types de papiers utilisés développaient des courbures suite à une variation de l'humidité. Cette sensibilité à l'humidité indique que ces papiers ne sont probablement pas uniformes en direction  $z$ , contrairement à l'hypothèse posée pour le modèle semi-analytique

transitoire. Par la suite, des essais préliminaires de courbures ont été menés sur tous les assemblages. Ces essais ont montré que tous les assemblages continuent à développer des courbures après une heure de désorption à 50 % HR, contrairement aux prédictions des modèles. De plus, on a pu constater que les assemblages présentent des comportements différents s'ils ont été collés sans amidon ou s'ils sont quasi-symétriques : le changement de courbure principale mesuré peut être similaire aux prédictions du modèle (assemblages collés avec amidon), largement inférieur aux prédictions du modèle (assemblages collés sans amidon) ou beaucoup trop faible (assemblages quasi-symétriques) pour être précis. Des essais de courbure cycliques avec assèchement initial ont été menés pour certains assemblages. Ces essais montrent que la feuille de papier répond rapidement à une variation de l'humidité et que le comportement en absorption (courbures stables après cinq heures) est différent du comportement en désorption (pas de courbures stables après cinq heures). Aussi, les essais cycliques ont montré que les courbures principales initiales et finales augmentent avec le nombre de cycles, alors que la différence finale de courbure principale ne diminue que légèrement en fonction du nombre de cycles. D'autre part, un assèchement initial à 30 % HR fait diminuer le changement de courbure principale à tous les cycles. De plus, il renforce la diminution de ce changement avec le nombre de cycles. Enfin, un essai de courbure prolongé a été mené pour un assemblage. Les résultats de cet essai indiquent que la feuille de papier développe toujours des courbures pour une phase de désorption de dix heures (50 % HR) alors que les courbures sont stables pour une phase d'absorption de dix heures (75 % HR).

En somme, le modèle semi-analytique transitoire développé constitue une bonne alternative à un modèle d'élément finis; il est plus rapide, plus simple d'utilisation et permet d'effectuer facilement des études paramétriques. Les résultats obtenus avec le modèle développé concordent relativement bien avec les résultats expérimentaux des assemblages collés avec amidon. L'allure générale du changement de courbure principale mesuré en fonction du temps est assez similaire aux prédictions des modèles, surtout pour la première heure des essais. Ceci indique que la modélisation du processus de diffusion transitoire de l'humidité est probablement valide. Par contre, le développement continu des courbures pour des phases de désorption supérieures à 1 heure montre que la

modélisation des déformations d'un assemblage multicouche soumis à une variation de sa teneur en humidité ne tient pas compte de suffisamment de facteurs pour bien prédire le phénomène. La modélisation des effets viscoélastiques combinée à des essais de courbures en désorption d'une durée suffisante pour atteindre l'équilibre devrait être considérée dans le cadre d'une future recherche. Aussi, il serait pertinent d'étudier l'effet de la gravité sur le développement des courbures de la feuille de papier, en modifiant la disposition de la feuille lors des essais expérimentaux et en modifiant le modèle d'éléments finis en conséquence. Finalement, certains aspects devraient être considérés lors de la mesure expérimentale des courbures. Entre autre, la zone de mesure des courbures devrait être diminuée puisque la relation classique utilisée pour le calcul de la courbure principale n'est valide que pour de petites surfaces de mesure [10]. Idéalement, l'approximation utilisée pour calculer la courbure à partir du déplacement hors du plan  $w^0$  (équation (2.55)) devrait aussi être utilisée pour calculer la courbure lors des essais expérimentaux. De plus, tous les futurs essais de mesure des courbures devraient inclure la mesure en continu de la teneur en humidité de la feuille de papier.

## Bibliographie

- [1] S. Cavlin, E. Back, *The effects of sheet density and glassfibre addition on the dimensional stability of fibre building boards*, Svensk Papperstidn 71 24 (1968), pp. 883-890.
- [2] L.A. Carlsson, *Out of plane hygroinstability of multi-ply paperboard*, Fiber Science Technology 14 (1981), pp. 201-212.
- [3] M.W. Hyer, *Calculations of the room temperature shapes of unsymmetric laminates*, Journal of Composite Materials 15 7 (1981), pp. 296-310.
- [4] A. Nordström, P. Gumundson, L.A. Carlsson, *Influence of sheet dimensions on curl of paper*, Journal of Pulp and Paper Science 24 1 (1998), pp. 18-25.
- [5] W. Lu, L.A. Carlsson, *Influence of initial deflections on curl of paper*, Journal of Pulp and Paper Science 27 11 (2001), pp. 373-379.
- [6] W. Lu, L.A. Carlsson, *Influence of viscoelastic behavior on curl of paper*, Mechanics of Time-Dependant Materials 5 (2001), pp. 79-100.
- [7] F. de Monte, *An analytic approach to the unsteady heat conduction processes in one-dimensional composite media*, International Journal of Heat and Mass Transfer 45 (2002), pp. 1333-1343.
- [8] A. Cloutier, G. Gendron, M.-L. Dano, *Hygro-mechanical deformation behavior of cardboard: a numerical study*, 14<sup>th</sup> US National Congress of Theoretical and Applied Mechanics, (2002), 24-28 Juin, Blacksburg, Virginie, p.478.
- [9] L.-E. Eriksson, S. Cavlin, C. Fellers, L.A. Carlsson, *Curl and twist of paperboard-theory and measurement*, Nordic Pulp and Paper Research Journal 2 (1987), pp. 66-70.
- [10] A. Nordström, L.A. Carlsson, J.-E. Hagglund, *Measuring curl of thin papers*, Tappi Journal 80 1 (1997), pp. 238-244.
- [11] Synnergren, Berglund, Soderkvist, *Estimation of curl in paper using a combination of shape measurement and least-squares modelling*, Optics and Lasers in Engineering 35 2 (2001), pp. 105-120.
- [12] *Aramis User Manual v5.4.1*, GOM mbH (2005), p. 4.
- [13] S. Wolfram, *The mathematica book*, 4th edition, Wolfram Media/Cambridge University Press (1999), 1403 p.

- [14] A. Cloutier, G. Gendron, M.-L. Dano, *A numerical study of the hygro-mechanical deformation of two cardboard layups*, Composite Science and Technology 64 (2004), pp. 619-627.
- [15] A. Cloutier, G. Gendron, *Modélisation du gauchissement hygro-mécanique du carton*, Groupe interdisciplinaire de recherche en éléments finis (GIREF), Université Laval, Québec, (2001), 12 p.
- [16] M.-L. Dano, M.W. Hyer, *Thermally-induced deformation behavior of unsymmetric laminates*, International Journal of Solids Structures 35 17 (1998), pp. 2101-2120.
- [17] R. E. Benson, *Effects of relative humidity and temperature on tensile stress-strain properties of kraft linerboard*, Tappi Journal 54 5 (1971), pp. 699-703.
- [18] M. Ostlund, S. Ostlund, L.A. Carlsson, C. Fellers, *The influence of drying restraints and beating degree on residual stress build-up in paperboard*, Journal of Pulp and Paper Science 30 11 (2004), pp. 289-293.
- [19] G. Bortolin, P. O. Gutman, B. Nilsson, *Modeling of out-of-plane hygroinstability of multi-ply paperboard*, Electronic Proceedings of 15<sup>th</sup> International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, 2002, 12 août.
- [20] A. Bandyopadhyay, B. V. Ramarao, S. Ramaswamy, *Transient moisture diffusion through paperboard materials*, Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects 206 (2002), pp. 289-293.
- [21] T 205 sp-02, *Forming handsheets for physical tests of pulp*, Tappi (2002).
- [22] P. Blanchet, G. Gendron, A. Cloutier, R. Beauregard, *Numerical prediction of engineered wood flooring deformation*, Wood and Fiber Science 37 3 (2005), pp. 484-496.
- [23] M.W. Hyer, *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*, WCB/McGraw-Hill (1998), 648 p.
- [24] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 5<sup>th</sup> edition, John Willey & Sons (2002), 981 p.
- [25] J. F. Siau, *Wood : Influence of Moisture on physical properties*, Department of Wood Science and Forest Products, Virginia Polytechnic Institute and State University (1995), 200 p.
- [26] Hibbitt, Karlsson and Sorenson, *ABAQUS V. 5.8 user's manual*, (1998).

## **Annexe A      Effet de la variation de teneur en humidité et des dimensions sur les courbures; autres résultats obtenus avec le modèle stationnaire**

### **A.1      Introduction**

Les résultats présentés dans cette annexe font référence au modèle stationnaire présenté à la section 2.4.3. L'effet de la différence de teneur en humidité appliquée (de -10 % à 10 %) et des dimensions (de 0 à 1 m) sur le développement des courbures  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  est présenté pour des feuilles multicouches correspondant aux assemblages A1, A2, A3, A4, A5, A7, A8 et A9. Les résultats obtenus pour l'assemblage A6 correspondent aux résultats présentés à la section 2.4.3.

## A.2 Résultats

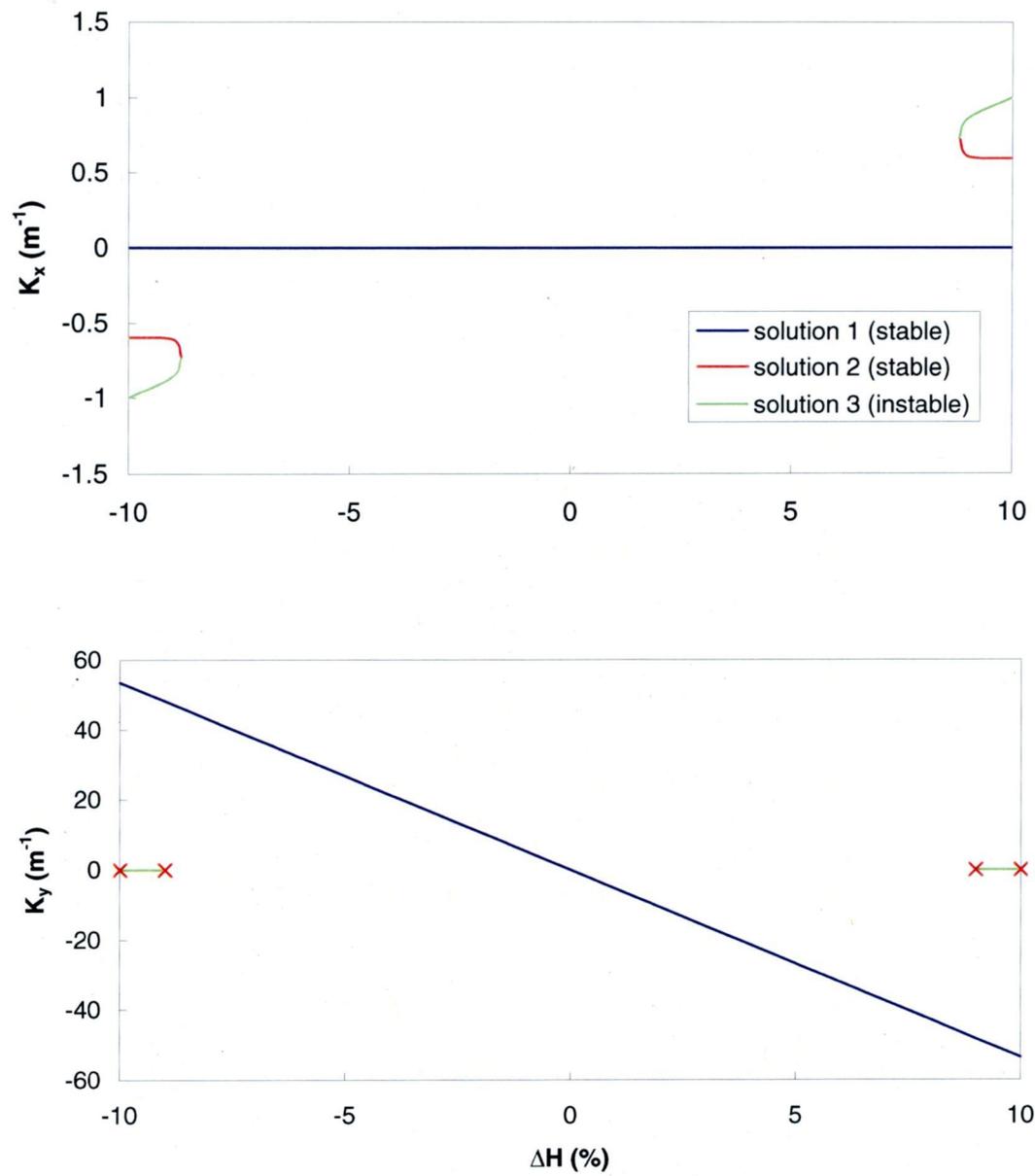


Figure A.1 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblages A1 et A2

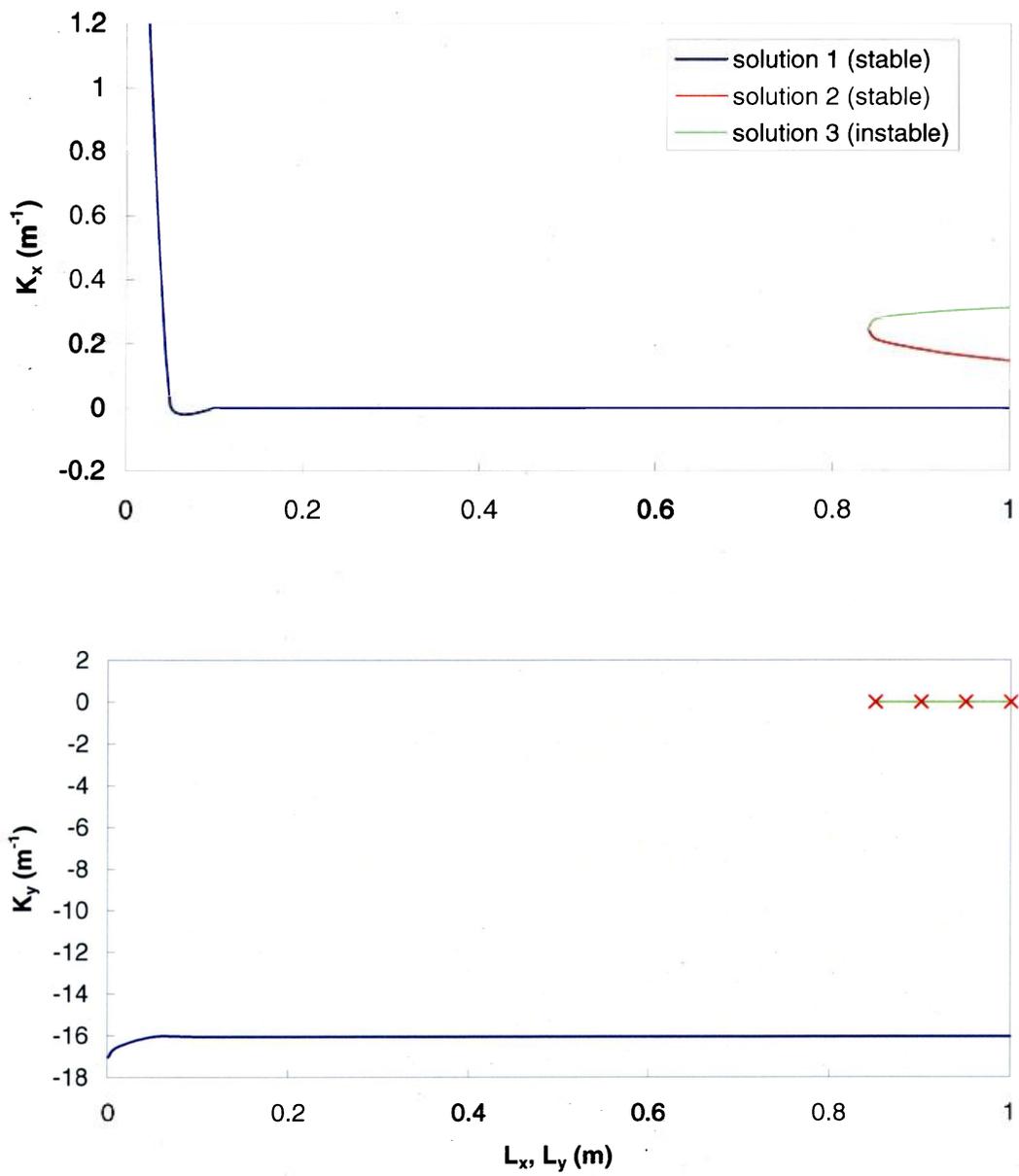


Figure A.2 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblages A1 et A2

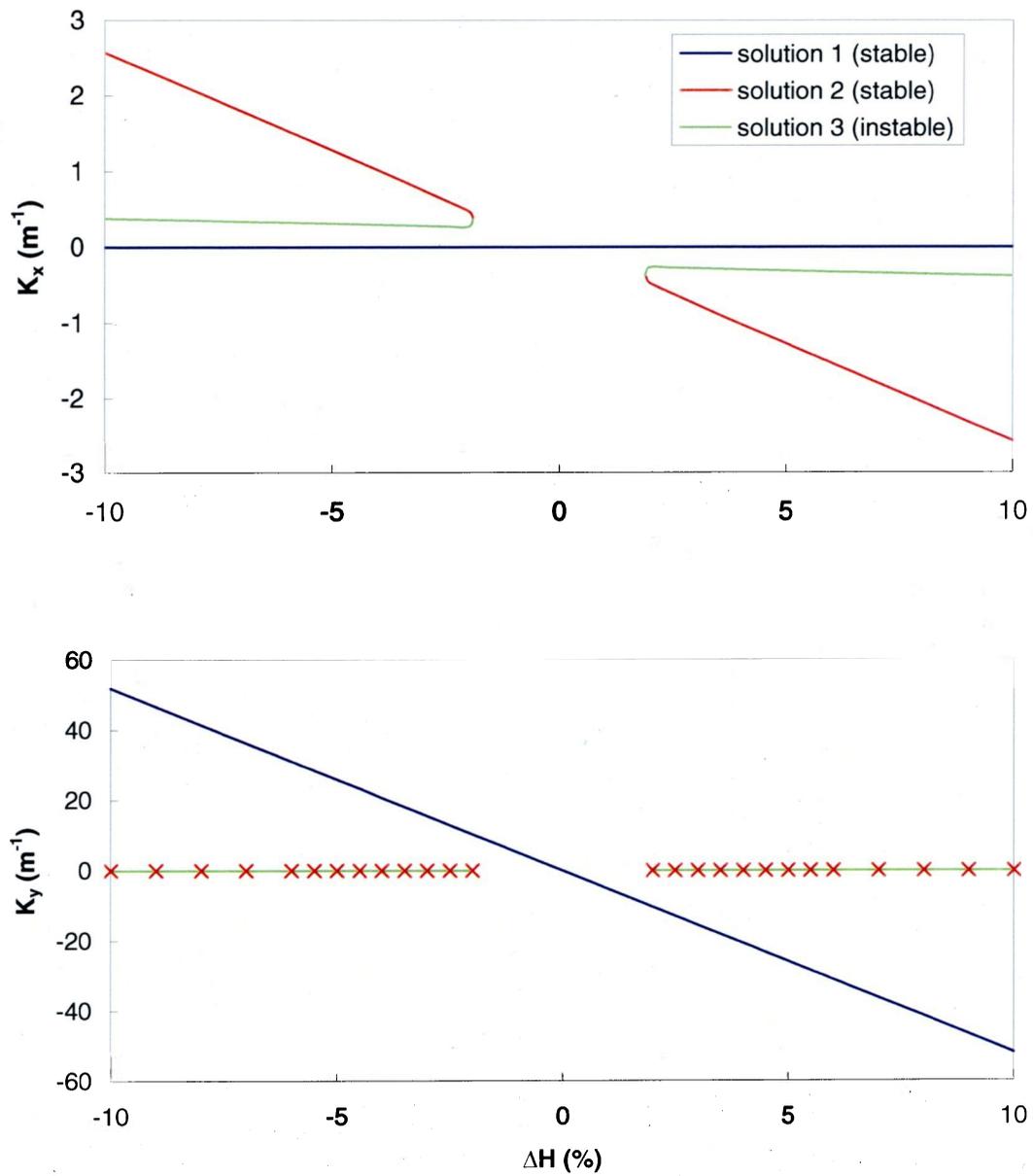


Figure A.3 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblages A3 et A4

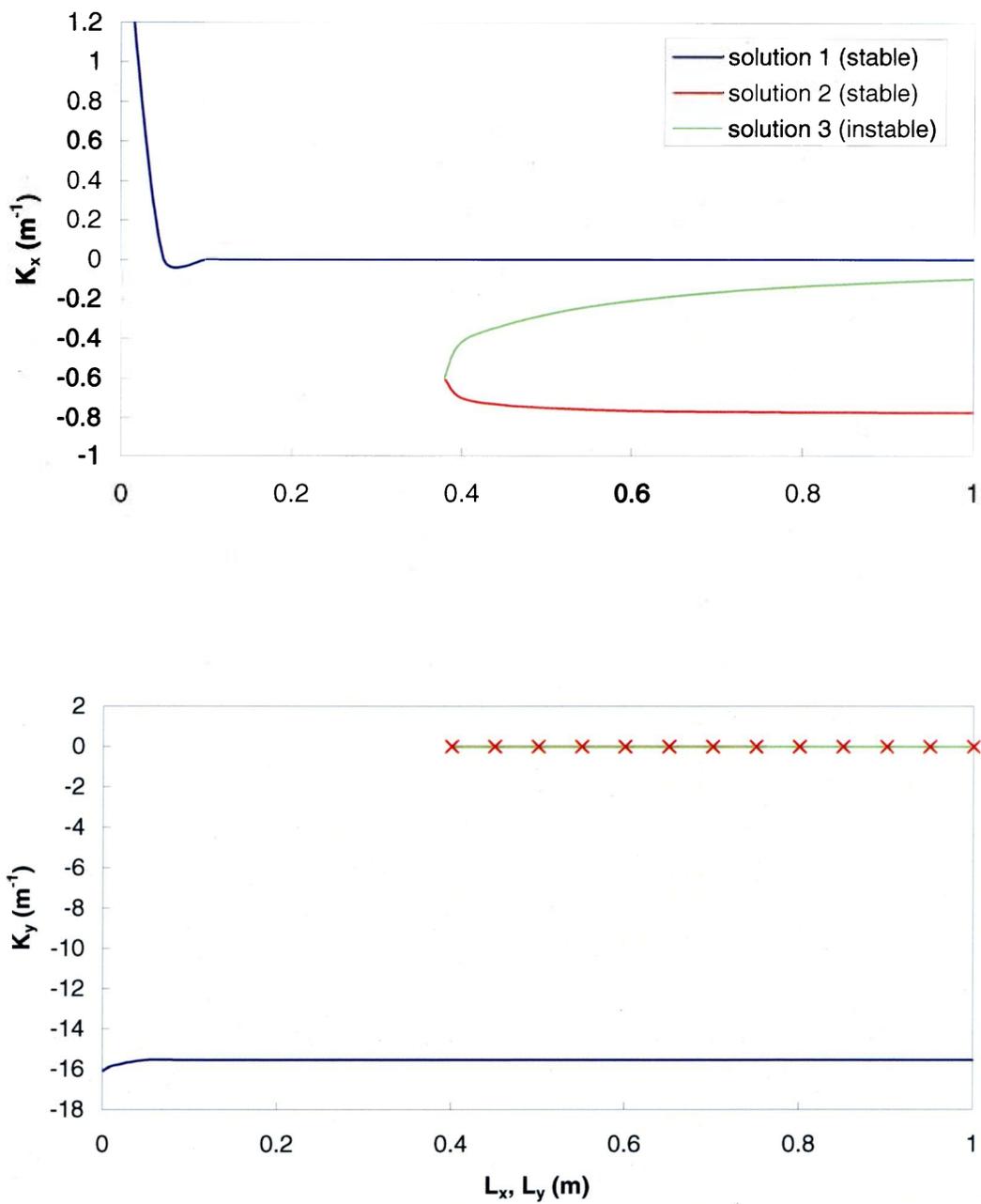


Figure A.4 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblages A3 et A4

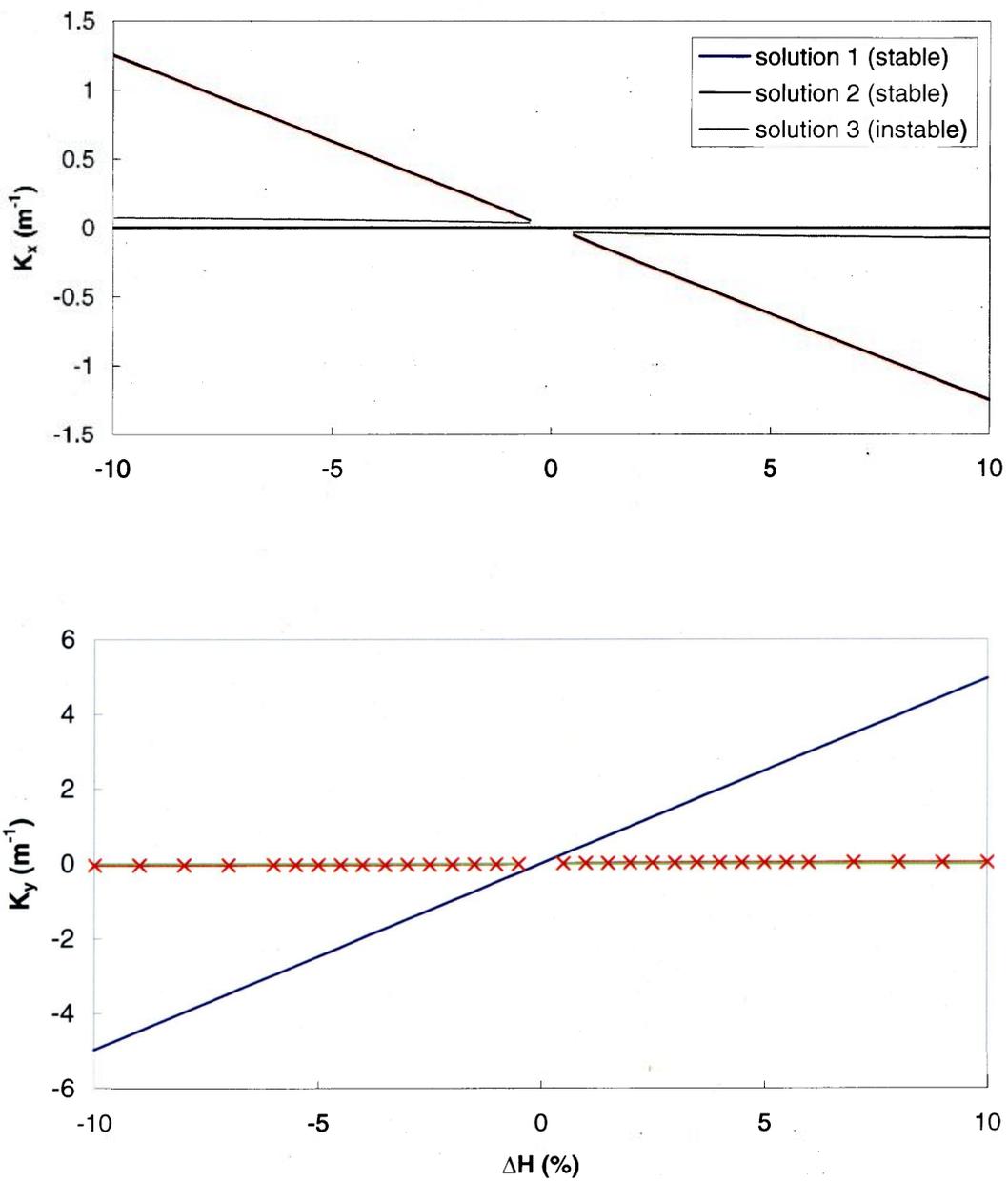


Figure A.5 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A5

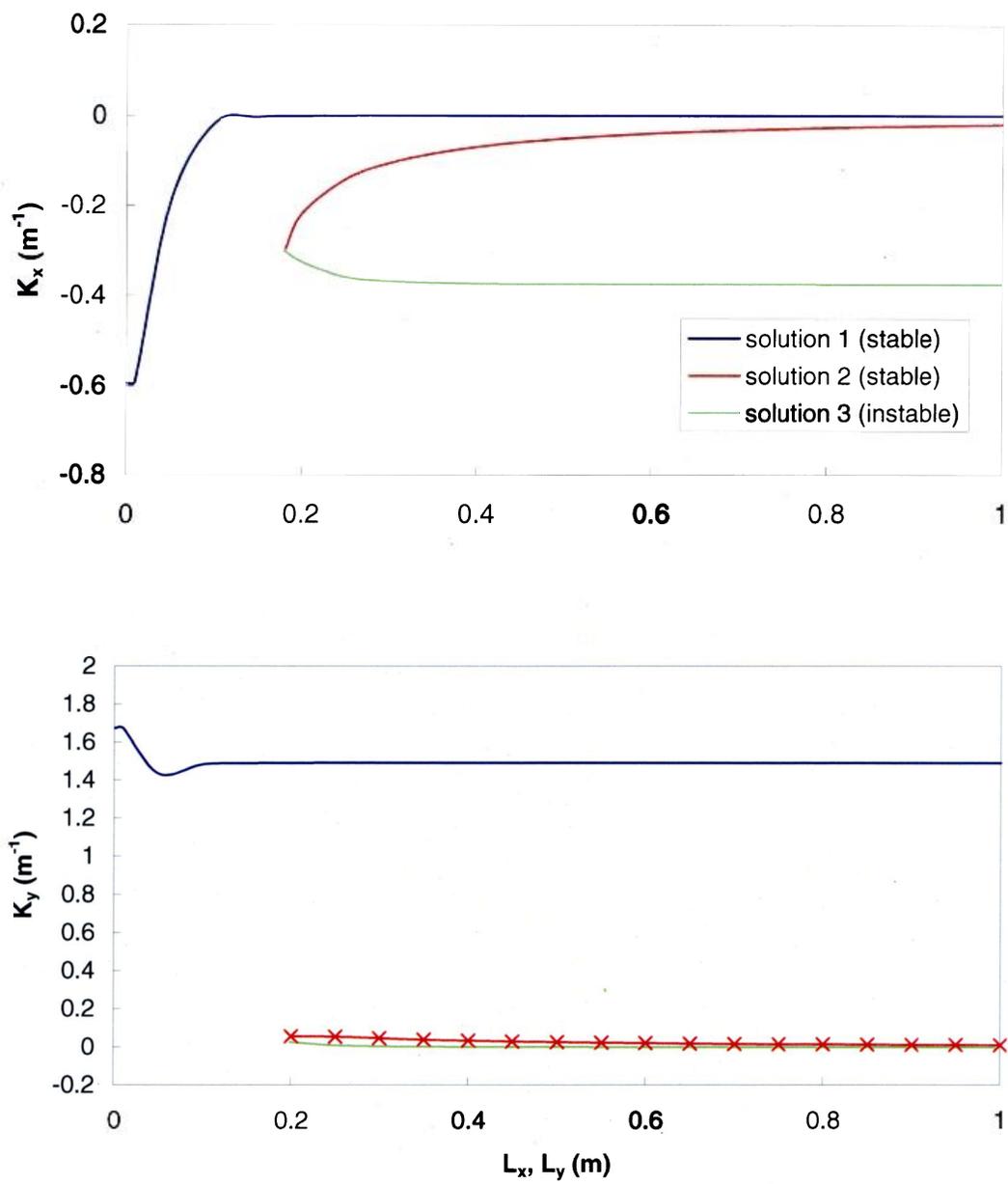


Figure A.6 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A5

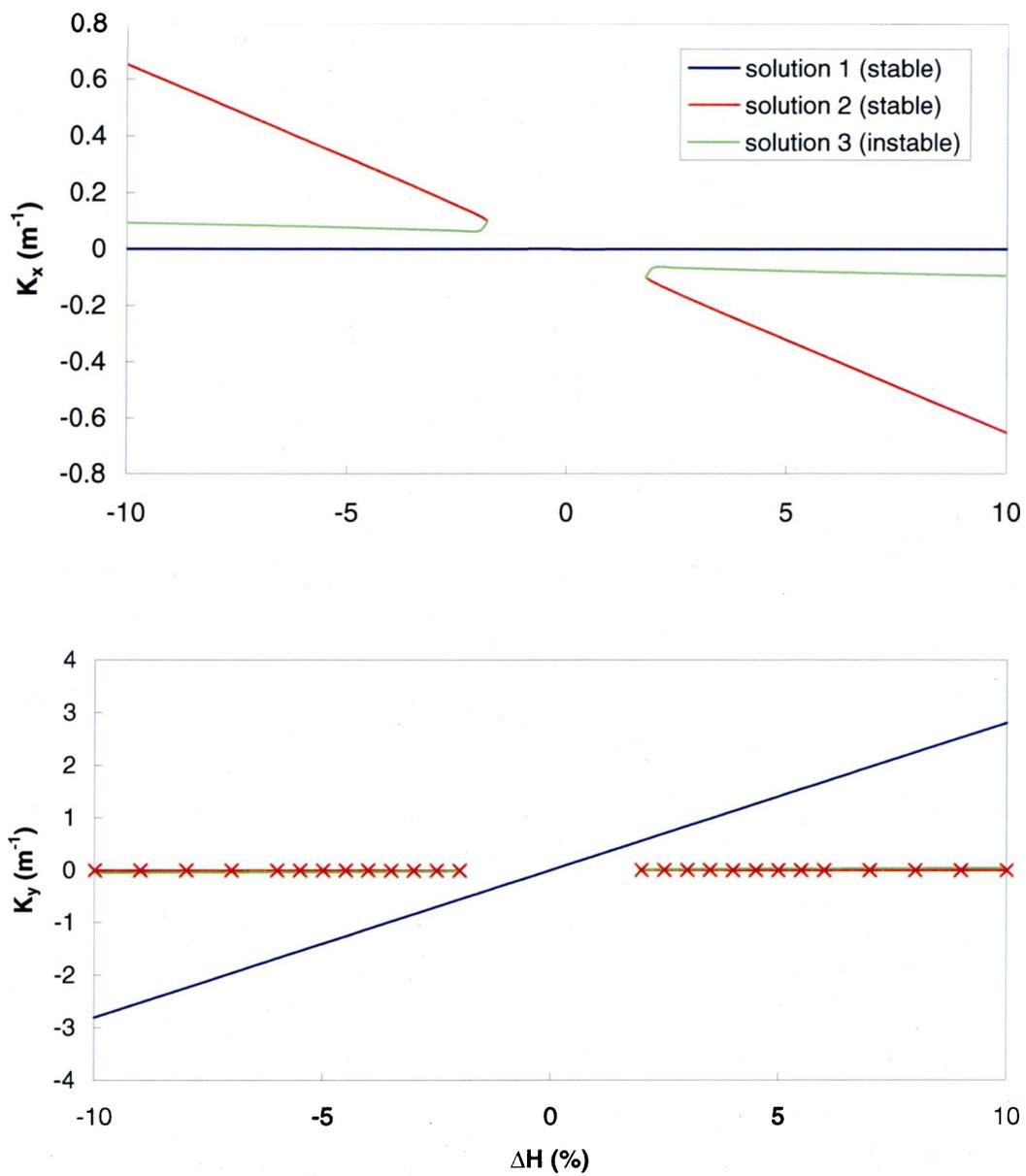


Figure A.7 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A7

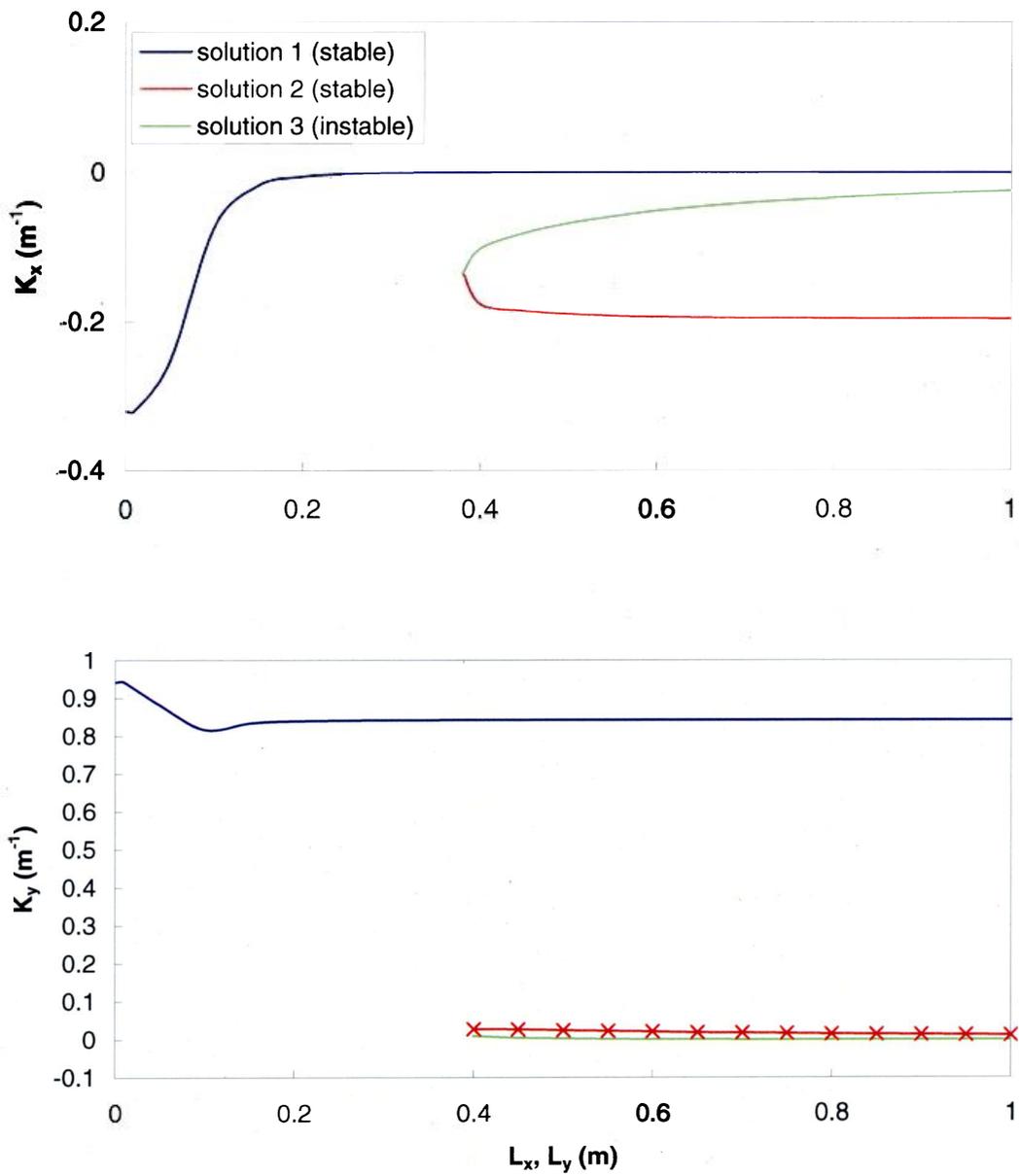


Figure A.8 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A7

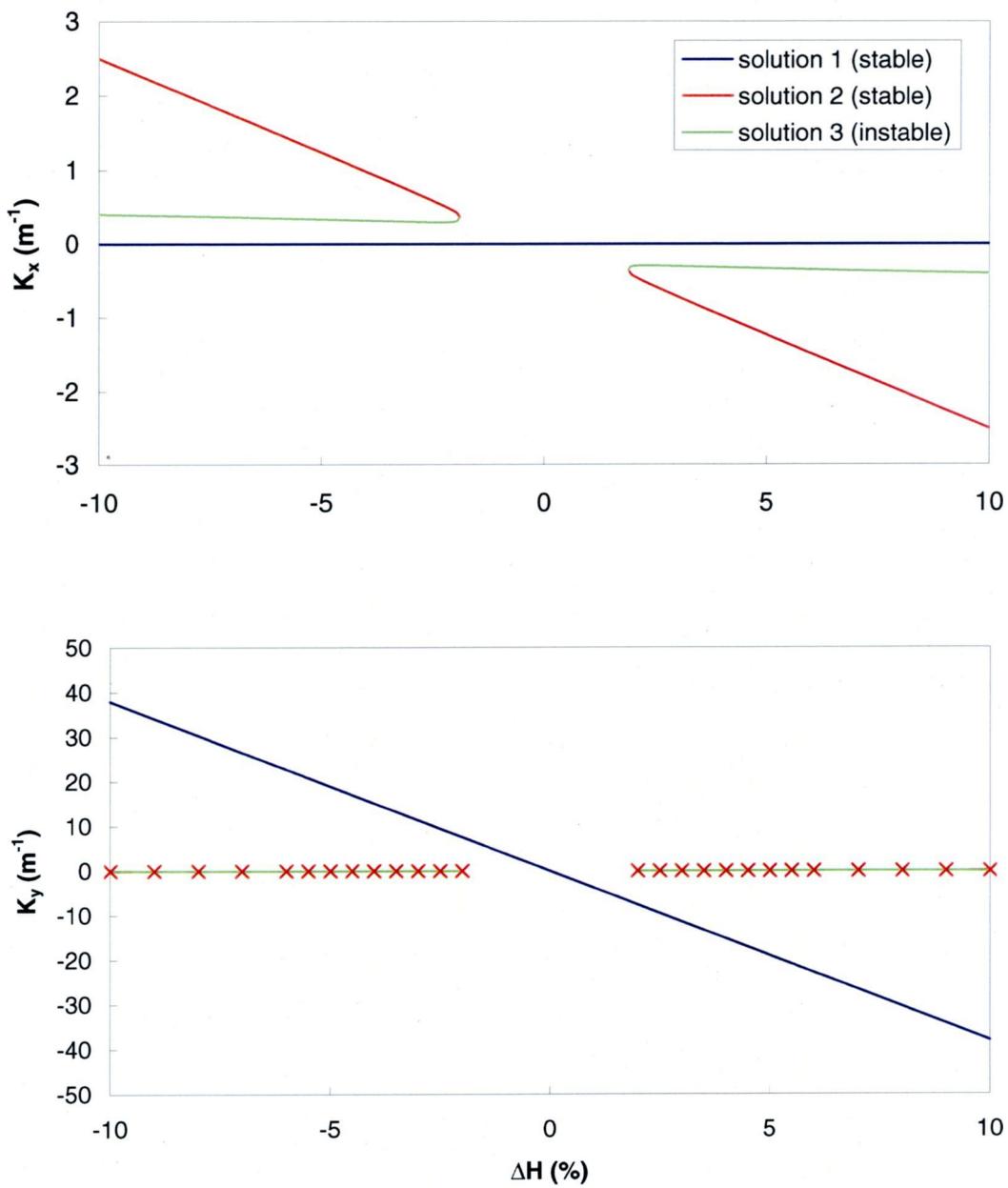


Figure A.9 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A8

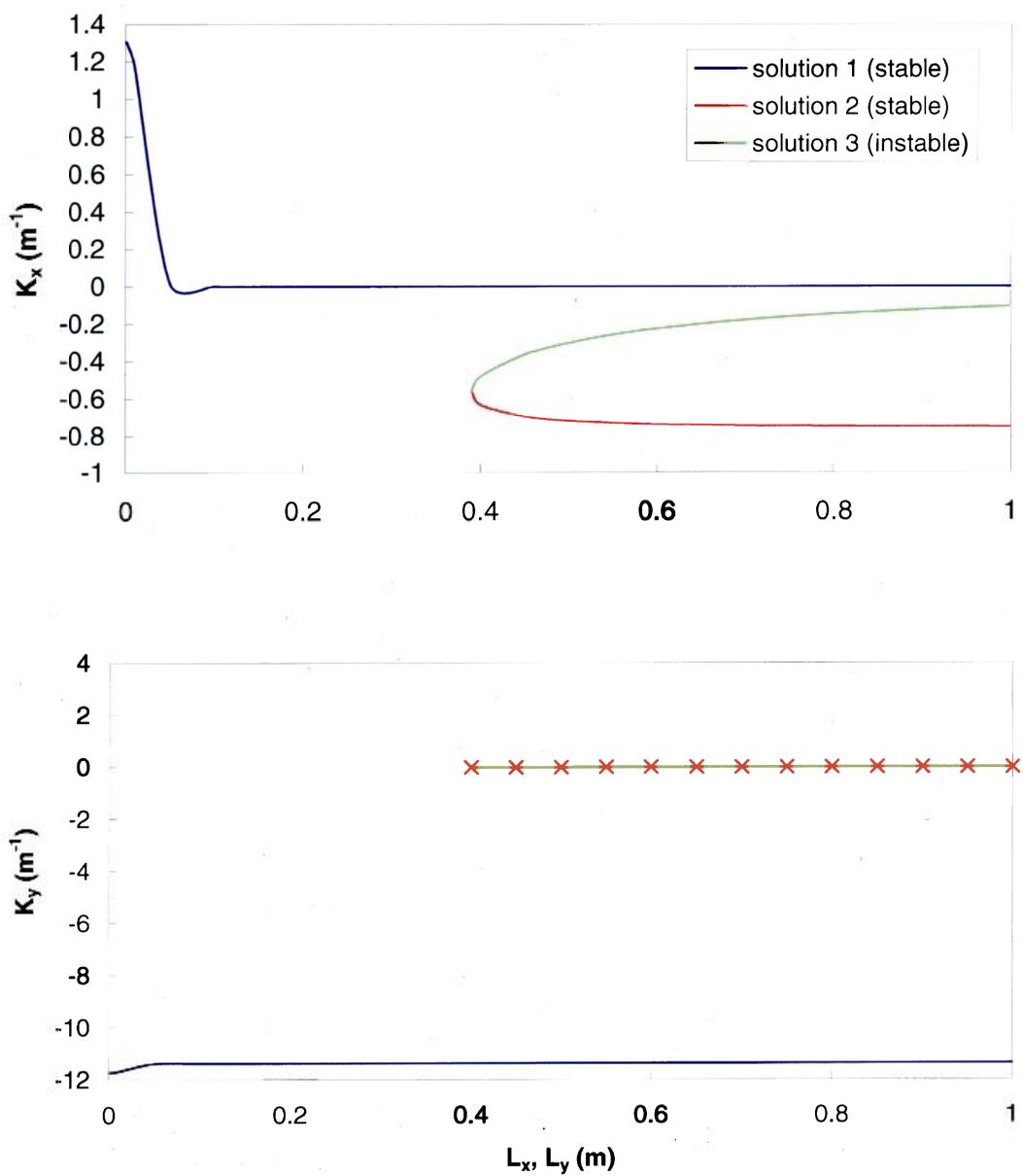


Figure A.10 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A8

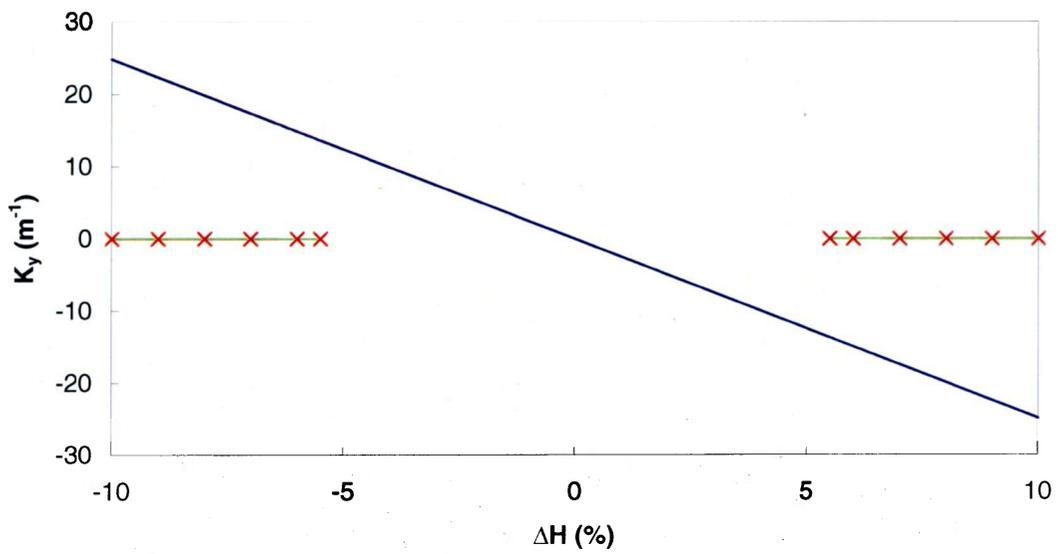
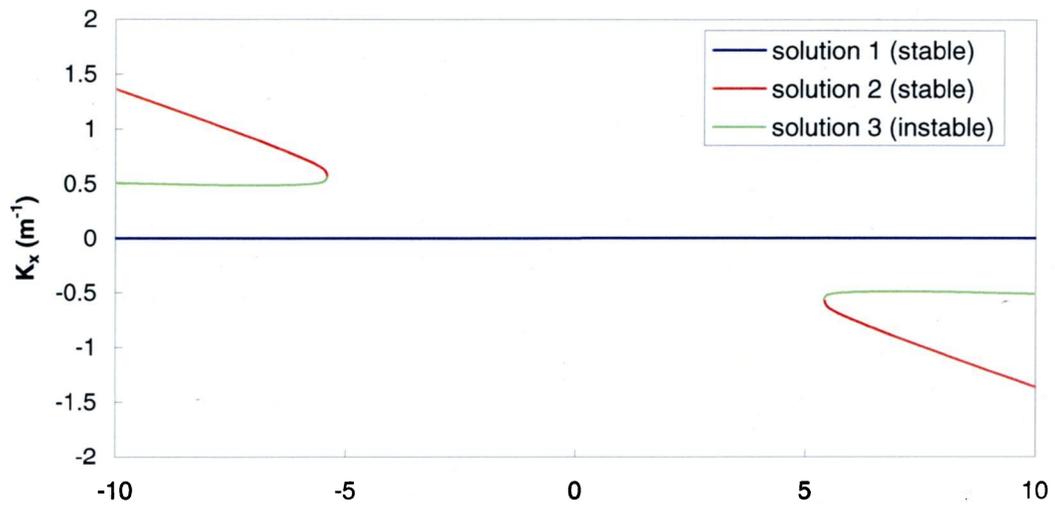


Figure A.11 : Courbures en fonction de la différence de teneur en humidité – Assemblage A9

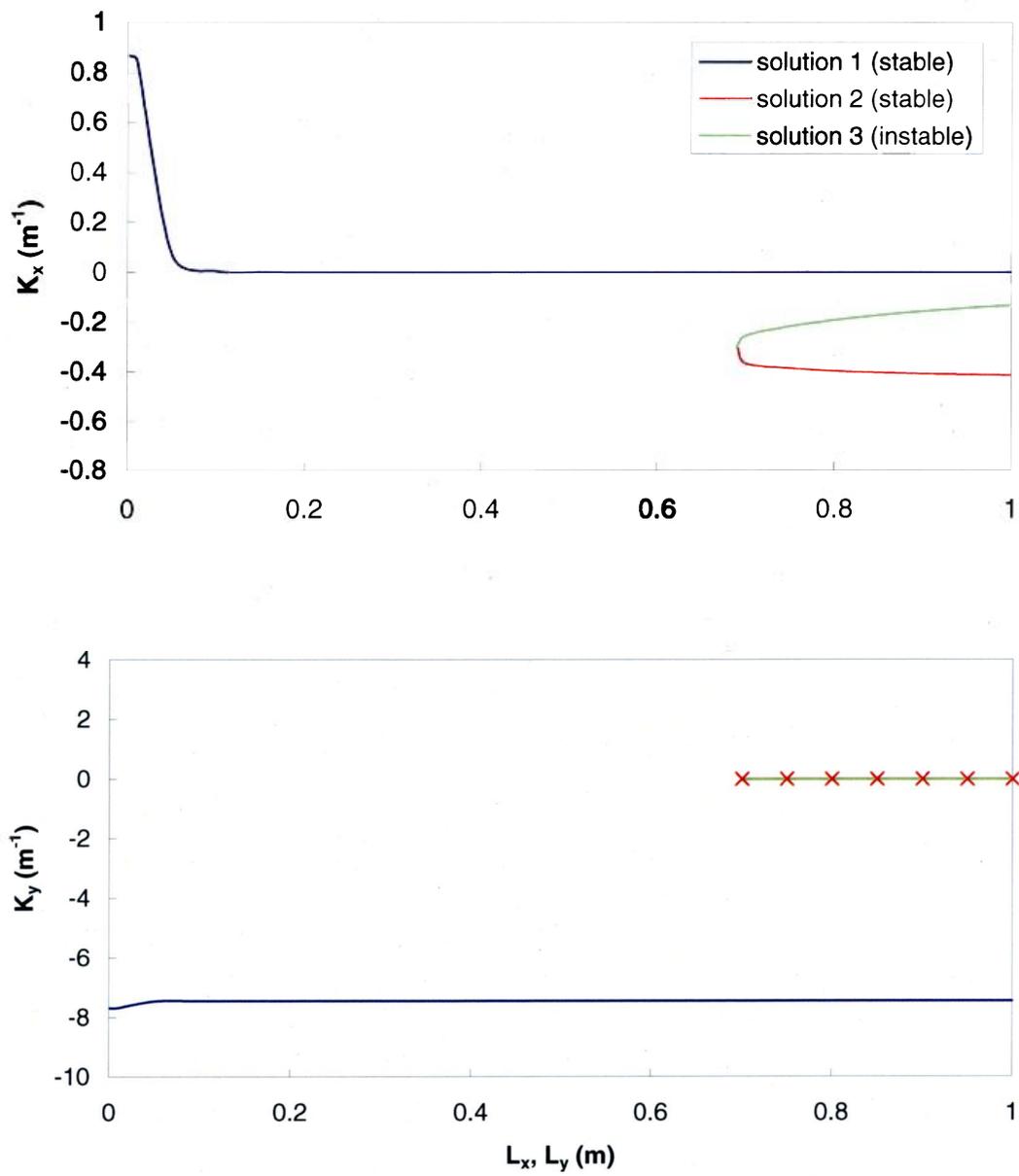


Figure A.12 : Courbures en fonction de la longueur de la feuille – Assemblage A9

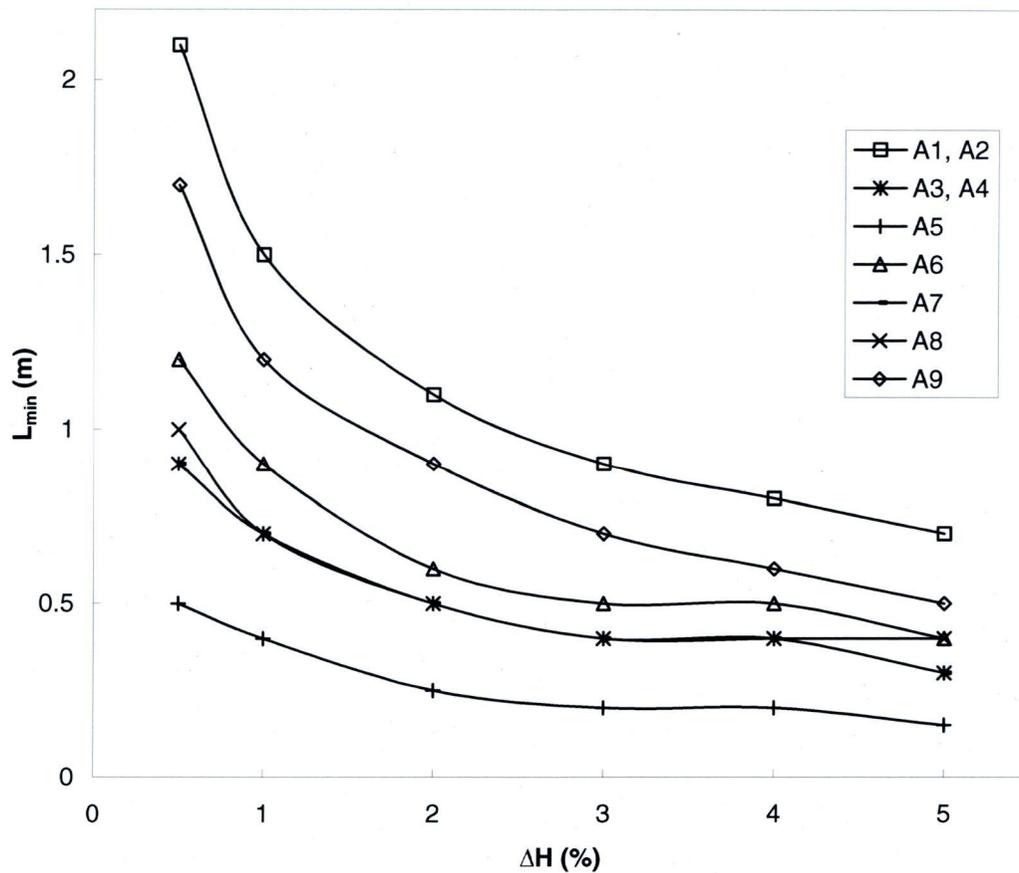


Figure A.13 : Longueur minimum requise pour avoir des solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée

### A.3 Discussion et conclusion

Les Figures A.1 à A.12 présentent les courbures  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  en fonction de la différence de teneur en humidité et des dimensions de la feuille. Le modèle stationnaire prédit que la feuille de papier étudié de 0,1 m de côté peut présenter plusieurs formes d'équilibre selon la différence de teneur en humidité appliquée. Par contre, pour une certaine gamme de teneurs en humidité, une seule solution existe. D'autre part, les résultats montrent qu'une feuille de papier carrée soumise à une différence de teneur en

humidité de -3 % peut avoir de multiples formes d'équilibre selon les dimensions choisies et que les solutions 2 et 3 existent à partir d'une certaine dimension. La Figure A.25 présente la longueur minimum ( $L_{\min}$ ) requise pour l'existence de solutions multiples en fonction de la différence de teneur en humidité appliquée. On voit que la longueur critique diminue avec la différence de teneur en humidité appliquée. Une analyse plus détaillée de résultats similaires a été présentée à la section 2.4.3.

## **Annexe B      Programme Mathematica**

Cette annexe présente le code Mathematica [13] utilisé pour calculer les déformations et les courbures de feuilles de papier multicouches. Les équations utilisées dans le code font références aux équations présentées au Chapitre 2.

PROGRAMME DE CALCUL DES DÉFORMATIONS  
HYGROMÉCANIQUES NON LINÉAIRES D'UNE FEUILLE DE  
PAPIER SOUMISE À UNE DIFFUSION TRANSITOIRE DE  
L'HUMIDITÉ SELON L'ÉPAISSEUR ;

```

Off[General::spell1];
<<LinearAlgebra`MatrixManipulation`
  PROPRIÉTÉS DES FEUILLES INDIVIDUELLES - {HS,PTM,PJ1.02,PJ1.13} ;
Off[General::spell1];

thick={115*10^(-6),132*10^(-6),100*10^(-6),100*10^(-6)};
density={535,343,448,443};
EMD={4.04*10^9,3.09*10^9,4.41*10^9,4.54*10^9};
ECD={4.04*10^9,1.02*10^9,2.01*10^9,1.78*10^9};
GMC={1.46*10^9,0.59*10^9,1.04*10^9,0.98*10^9};
nuCM={0.27,0.12,0.12,0.14};
betaMDabs={0.3991*10^(-3),0.3512*10^(-3),0.4743*10^(-3),0.3937*10^(-3)};
betaCDabs={0.3991*10^(-3),0.9251*10^(-3),1.0694*10^(-3),0.8499*10^(-3)};
betaMDdes={0.5582*10^(-3),0.3838*10^(-3),0.4595*10^(-3),0.4331*10^(-3)};
betaCDdes={0.5582*10^(-3),1.5739*10^(-3),1.3800*10^(-3),1.4545*10^(-3)};
diffusionZabsmoy={7.73*10^(-11),1.39*10^(-10),6.90*10^(-11),6.95*10^(-11)};
diffusionZabsabs={0.30*7.73*10^(-11),0.01*1.39*10^(-10),0.30*6.90*10^(-11),6.95*10^(-11)};
  DESCRIPTION DES ASSEMBLAGES;
Off[General::spell1];

Print["A1 = PTM+HS-sa"];
Print["A2 = PTM+HS"];
Print["A3 = PJ1.02+HS-sa"];
Print["A4 = PJ1.02+HS"];
Print["A5 = PJ1.02+PJ1.13"];
Print["A6 = PJ1.02+PTM+HS"];
Print["A7 = PJ1.02+PTM+PJ1.13"];
Print["A8 = PJ1.02+PJ1.13+HS"];
Print["A9 = PJ1.02+PTM+PJ1.13+HS"];
COURBES DE SORPTION DES ASSEMBLAGES - {A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9};
Off[General::spell1];

H50abs={8.3076,9.8102,7.4459,9.2259,10.3131,9.4082,10.0731,9.3900,9.6451};
H75abs={11.5338,12.7988,10.6686,12.2657,13.5266,12.4375,13.2444,12.1117,12.5306};
H50des={9.6412,11.3793,8.7938,10.6162,12.0826,10.8008,11.7660,10.8404,11.1405};
H75des={12.9636,14.2509,12.1065,13.7634,15.1558,13.9973,14.9493,13.7747,14.1257};

COEFFICIENTS DE TRANSFERT CONVectif DES ASSEMBLAGES;
Off[General::spell1];

hT=4.4;
Rgaz=8.3143;
T=21+273;
p0=2486;
cpa=1003;
pa=1.165;
HRsurface=75;
HRambiant=50;
delHR=HRsurface-HRambiant;

habs=0.018*p0*delHR*hT/(100*Rgaz*T*cpa*pa*(H75abs-H50abs))

```

```

hdes=0.018*p0*delHR*hT/(100*Rgaz*T*cpa*pa*(H75des-H50des))
CHOIX DE L'ASSEMBLAGE ET DU MODE (ABSORPTION ou DESORPTION) ET DE LA
DIFFUSIVITÉ (ABSMOY ou ABSABS) ;
Off[General::spell1];

Print["L'assemblage choisi est"];
choix=A1

Print["Le mode du cycle est"];
mode=des

Print["Les coefficients de diffusivité sont en mode"];
coeffDIFF=absmoy
CALCUL DES PROPRIÉTÉS DE L'ASSEMBLAGE CHOISI ;
Off[General::spell1];

If[choix A1,nc=2];
If[choix A2,nc=2];
If[choix A3,nc=2];
If[choix A4,nc=2];
If[choix A5,nc=2];
If[choix A6,nc=3];
If[choix A7,nc=3];
If[choix A8,nc=3];
If[choix A9,nc=4];

If[mode==abs,{betaMD=betaMDabs,betaCD=betaCDabs,Haa=H50abs,Hbb=H75abs,ha
a=habs}];
If[mode==des,{betaMD=betaMDdes,betaCD=betaCDdes,Haa=H75des,Hbb=H50des,ha
a=hdes}];

If[coeffDIFF==absmoy,diffusionZ=diffusionZabsmoy];
If[coeffDIFF absabs,diffusionZ=diffusionZabsabs];

L=Table[0,{nc}];
HRo=Table[0,{nc}];
E1=Table[0,{nc}];
E2=Table[0,{nc}];
G12=Table[0,{nc}];
nu21=Table[0,{nc}];
beta1=Table[0,{nc}];
beta2=Table[0,{nc}];
diffus=Table[0,{nc}];
longx=0.1;
longy=0.1;

If[choix A1,
  {L[[1]]=thick[[2]],L[[2]]=thick[[1]],
  HRo[[1]]=density[[2]],HRo[[2]]=density[[1]],
  E1[[1]]=EMD[[2]],E1[[2]]=EMD[[1]],
  E2[[1]]=ECD[[2]],E2[[2]]=ECD[[1]],
  G12[[1]]=GMC[[2]],G12[[2]]=GMC[[1]],
  nu21[[1]]=nuCM[[2]],nu21[[2]]=nuCM[[1]],
  beta1[[1]]=betaMD[[2]],beta1[[2]]=betaMD[[1]],
  beta2[[1]]=betaCD[[2]],beta2[[2]]=betaCD[[1]],
  diffus[[1]]=diffusionZ[[2]],diffus[[2]]=diffusionZ[[1]],
  Hi=Haa[[1]],
  Hinf=Hbb[[1]],
  htop=haa[[1]],
  hbottom=haa[[1]]}];

If[choix A2,

```

```

{L[[1]]=thick[[2]],L[[2]]=thick[[1]],
  HRo[[1]]=density[[2]],HRo[[2]]=density[[1]],
  E1[[1]]=EMD[[2]],E1[[2]]=EMD[[1]],
  E2[[1]]=ECD[[2]],E2[[2]]=ECD[[1]],
  G12[[1]]=GMC[[2]],G12[[2]]=GMC[[1]],
  nu21[[1]]=nuCM[[2]],nu21[[2]]=nuCM[[1]],
  beta1[[1]]=betaMD[[2]],beta1[[2]]=betaMD[[1]],
  beta2[[1]]=betaCD[[2]],beta2[[2]]=betaCD[[1]],
  diffus[[1]]=diffusionZ[[2]],diffus[[2]]=diffusionZ[[1]],
  Hi=Haa[[2]],
  Hinf=Hbb[[2]],
  htop=haa[[2]],
  hbottom=haa[[2]]};

If[choix A3,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[1]],
    HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[1]],
    E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[1]],
    E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[1]],
    G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[1]],
    nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[1]],
    beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[1]],
    beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[1]],
    diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[1]],
    Hi=Haa[[3]],
    Hinf=Hbb[[3]],
    htop=haa[[3]],
    hbottom=haa[[3]]};

If[choix A4,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[1]],
    HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[1]],
    E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[1]],
    E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[1]],
    G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[1]],
    nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[1]],
    beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[1]],
    beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[1]],
    diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[1]],
    Hi=Haa[[4]],
    Hinf=Hbb[[4]],
    htop=haa[[4]],
    hbottom=haa[[4]]};

If[choix A5,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[4]],
    HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[4]],
    E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[4]],
    E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[4]],
    G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[4]],
    nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[4]],
    beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[4]],
    beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[4]],
    diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[4]],
    Hi=Haa[[5]],
    Hinf=Hbb[[5]],
    htop=haa[[5]],
    hbottom=haa[[5]]};

If[choix A6,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[2]],L[[3]]=thick[[1]],
    HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[2]],HRo[[3]]=density[[1]],
    E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[2]],E1[[3]]=EMD[[1]],

```

```

E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[2]],E2[[3]]=ECD[[1]],
G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[2]],G12[[3]]=GMC[[1]],
nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[2]],nu21[[3]]=nuCM[[1]],

beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[2]],beta1[[3]]=betaMD[[1]],

beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[2]],beta2[[3]]=betaCD[[1]],

diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[2]],diffus[[3]]=diff
usionZ[[1]],
    Hi=Haa[[6]],
    Hinf=Hbb[[6]],
    htop=haa[[6]],
    hbottom=haa[[6]]};

If[choix A7,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[2]],L[[3]]=thick[[4]],
   HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[2]],HRo[[3]]=density[[4]],
   E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[2]],E1[[3]]=EMD[[4]],
   E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[2]],E2[[3]]=ECD[[4]],
   G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[2]],G12[[3]]=GMC[[4]],
   nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[2]],nu21[[3]]=nuCM[[4]],

beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[2]],beta1[[3]]=betaMD[[4]],

beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[2]],beta2[[3]]=betaCD[[4]],

diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[2]],diffus[[3]]=diff
usionZ[[4]],
    Hi=Haa[[7]],
    Hinf=Hbb[[7]],
    htop=haa[[7]],
    hbottom=haa[[7]]};

If[choix A8,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[4]],L[[3]]=thick[[1]],
   HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[4]],HRo[[3]]=density[[1]],
   E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[4]],E1[[3]]=EMD[[1]],
   E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[4]],E2[[3]]=ECD[[1]],
   G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[4]],G12[[3]]=GMC[[1]],
   nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[4]],nu21[[3]]=nuCM[[1]],

beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[4]],beta1[[3]]=betaMD[[1]],

beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[4]],beta2[[3]]=betaCD[[1]],

diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[4]],diffus[[3]]=diff
usionZ[[1]],
    Hi=Haa[[8]],
    Hinf=Hbb[[8]],
    htop=haa[[8]],
    hbottom=haa[[8]]};

If[choix A9,
  {L[[1]]=thick[[3]],L[[2]]=thick[[2]],L[[3]]=thick[[4]],L[[4]]=thick[[1]]
,
   HRo[[1]]=density[[3]],HRo[[2]]=density[[2]],HRo[[3]]=density[[4]],HRo[[4
]]=density[[1]],

E1[[1]]=EMD[[3]],E1[[2]]=EMD[[2]],E1[[3]]=EMD[[4]],E1[[4]]=EMD[[1]],

E2[[1]]=ECD[[3]],E2[[2]]=ECD[[2]],E2[[3]]=ECD[[4]],E2[[4]]=ECD[[1]],

```

```

G12[[1]]=GMC[[3]],G12[[2]]=GMC[[2]],G12[[3]]=GMC[[4]],G12[[4]]=GMC[[1]],
nu21[[1]]=nuCM[[3]],nu21[[2]]=nuCM[[2]],
nu21[[3]]=nuCM[[4]],nu21[[4]]=nuCM[[1]],

beta1[[1]]=betaMD[[3]],beta1[[2]]=betaMD[[2]],beta1[[3]]=betaMD[[4]],beta1[[4]]=betaMD[[1]],

beta2[[1]]=betaCD[[3]],beta2[[2]]=betaCD[[2]],beta2[[3]]=betaCD[[4]],beta2[[4]]=betaCD[[1]],

diffus[[1]]=diffusionZ[[3]],diffus[[2]]=diffusionZ[[2]],diffus[[3]]=diffusionZ[[4]],diffus[[4]]=diffusionZ[[1]],
Hi=Haa[[9]],
Hinf=Hbb[[9]],
htop=haa[[9]],
hbottom=haa[[9]]];

nu12=E1*nu21/E2;
km=diffus*Hro/100;

L;
h=Sum[L[[1]],{1,1,nc}];
Hro;
E1;
E2;
G12;
nu21;
nu12;
beta1;
beta2;
diffus;
km;
Hinf;
Hi;
longx;
longy;
htop;
hbottom;
ORIENTATION DES FIBRES DE CHAQUE COUCHE;
Off[General::spell1];

theta=Table[0,{nc}]
POSITION DES COUCHES;
Off[General::spell1];

épaisseur=Sum[ L[[k]],{k,1,nc}];
pos=Table[0,{nc+1}];
pos[[1]]=-épaisseur/2;
pos[[nc+1]]=épaisseur/2;
For[i=2,i≤nc,i++,pos[[i]]=pos[[i-1]]+L[[i-1]];
zk=pos
Clear[i];

MATRICE DE RIGIDITÉ RÉDUITE DE CHAQUE COUCHE;
Off[General::spell1];

Q11=E1/(1-nu12*nu21);
Q12=(nu12*E2)/(1-nu12*nu21);
Q22=E2/(1-nu12*nu21);
Q66=G12;
Qred=Table[0,{nc}];

```

```

For[i=1,i<nc,i++,Qred[[i]]={Q11[[i]],Q12[[i]],0},{Q12[[i]],Q22[[i]],0},
{0,0,Q66[[i]]}];
MatrixForm[Qred];
Clear[i];
MATRICE DE RIGIDITÉ TRANSFORMÉE DE CHAQUE COUCHE;
Off[General::spell1];

m=Cos[theta];
n=Sin[theta];
Qtr11=Q11*m^4+2*(Q12+2*Q66)*n^2*m^2+Q22*n^4;
Qtr12=(Q11+Q22-4*Q66)*n^2*m^2+Q12*(n^4+m^4);
Qtr16=(Q11-Q12-2*Q66)*n*m^3+(Q12-Q22+2*Q66)*n^3*m;
Qtr22=Q11*n^4+2*(Q12+2*Q66)*n^2*m^2+Q22*m^4;
Qtr26=(Q11-Q12-2*Q66)*n^3*m+(Q12-Q22+2*Q66)*n*m^3;
Qtr66=(Q11+Q22-2*Q12-2*Q66)*n^2*m^2+Q66*(n^4+m^4);
Qtr=Table[0,{nc}];
For[i=1,i<nc,i++,Qtr[[i]]={Qtr11[[i]],Qtr12[[i]],Qtr16[[i]]},{Qtr12[[i]],
Qtr22[[i]],Qtr26[[i]]},{Qtr16[[i]],Qtr26[[i]],Qtr66[[i]]}];
MatrixForm[Qtr];
Clear[i];
MATRICES ABD;
Off[General::spell1];

A={{Sum[(Qtr11[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}]},{Sum[(
Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr22[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}]},{Sum[(
Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}],
Sum[(Qtr66[[L]]*(zk[[L+1]]-zk[[L]])),{L,1,nc}]}];
B={{0.5*(Sum[(Qtr11[[L]]*(zk[[L+1]]^2-zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},0.5*(Sum[(
Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]^2-zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},0.5*(Sum[(
Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]^2-zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},{0.5*(Sum[(
Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]^2-zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},
0.5*(Sum[(Qtr22[[L]]*(zk[[L+1]]^2-
zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},0.5*(Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]^2-
zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},{0.5*(Sum[(Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]^2-
zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},
0.5*(Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]^2-
zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]},0.5*(Sum[(Qtr66[[L]]*(zk[[L+1]]^2-
zk[[L]]^2)),{L,1,nc}]}}];
DD={{(1/3)*(Sum[(Qtr11[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},{(1/3)*(Sum[(Qtr12[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr22[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},{(1/3)*(Sum[(Qtr16[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr26[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]},(1/3)*(Sum[(Qtr66[[L]]*(zk[[L+1]]^3-
zk[[L]]^3)),{L,1,nc}]}}];
ABD={{A[[1,1]],A[[1,2]],A[[1,3]],B[[1,1]],B[[1,2]],B[[1,3]]},{A[[2,1]],A
[[2,2]],A[[2,3]],B[[2,1]],B[[2,2]],B[[2,3]]},{A[[3,1]],A[[3,2]],A[[3,3]]
,B[[3,1]],B[[3,2]],B[[3,3]]},{B[[1,1]],B[[1,2]],B[[1,3]],DD[[1,1]],DD[[1
,2]],DD[[1,3]]},{B[[2,1]],B[[2,2]],B[[2,3]],DD[[2,1]],DD[[2,2]],DD[[2,3]
]},{B[[3,1]],B[[3,2]],B[[3,3]],DD[[3,1]],DD[[3,2]],DD[[3,3]]}}];
abd=Inverse[ABD];

MatrixForm[A];
MatrixForm[B];
MatrixForm[DD];
MatrixForm[ABD];

```

```

MatrixForm[abd];
COEFFICIENTS D'EXPANSION HYDRIQUE GLOBAUX DE CHAQUE COUCHE (betax betay
betaxy);
Off[General::spell1];

coeffhydglob=Table[0,{nc}];
For[i=1,i≤nc,i++,coeffhydglob[[i]]={beta1[[i]]*m[[i]]^2+beta2[[i]]*n[[i]]
^2,beta1[[i]]*n[[i]]^2+beta2[[i]]*m[[i]]^2,2*(beta1[[i]]-
beta2[[i]])*m[[i]]*n[[i]]};
MatrixForm[coeffhydglob];
Clear[i];
ÉQUATION TRANSCENDENTALE DIMENSIONNELLE DE LA DIFFUSION D'HUMIDITÉ;
Off[General::spell1];

Xa=Sin[lambda*z];
Xb=Cos[lambda*z];

Pis=Table[0,{nc}];
Xtilda=Table[0,{nc}];
Xtildap=Table[0,{nc}];

Pis[[1]]=- (htop*(Xa/.z→zk[[1]])-km[[1]]*(D[
Xa,z]/.z→zk[[1]]))/(htop*(Xb/.z→zk[[1]])-km[[1]]*(D[
Xb,z]/.z→zk[[1]]));
Xtilda[[1]]=(Xa/.lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[1]])^0.5)+Pis[[1]]*
(Xb/.lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[1]])^0.5);
Xtildap[[1]]=D[Xtilda[[1]],z];

For[i=2,i≤nc,i++,{Pis[[i]]=- (km[[i]]*(D[
Xa,z]/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5,z→zk[[i]])*(Xtilda
a[[i-1]]/.z→zk[[i]])-km[[i-
1]]*(Xa/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5,z→zk[[i]])*(Xtilda
p[[i-1]]/.z→zk[[i]]))/(km[[i]]*(D[
Xb,z]/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5,z→zk[[i]])*(Xtilda
a[[i-1]]/.z→zk[[i]])-km[[i-
1]]*(Xb/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5,z→zk[[i]])*(Xtilda
p[[i-1]]/.z→zk[[i]])),

Xtilda[[i]]=(Xa/.lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5)+Pis[[i]]*
(Xb/.lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[i]])^0.5),
Xtildap[[i]]=D[Xtilda[[i]],z]};

Pis;
Xtilda;
Xtildap;
Clear[i];

PisNC=-
(hbottom*(Xa/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[nc]])^0.5,z→zk[[nc+1]]})+km[[nc]]*(D[
Xa,z]/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[nc]])^0.5,z→zk[[nc+1]]}))/
(hbottom*(Xb/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[nc]])^0.5,z→zk[[nc+1]]})+km[[nc]]*(D[
Xb,z]/.{lambda→lambda*(diffus[[1]]/diffus[[nc]])^0.5,z→zk[[nc+1]]}));

trans=-Pis[[nc]]+PisNC;
ÉVALUATION DES RACINES DE L'ÉQUATION TRANSCENDENTALE - CHOISIR LE
NOMBRE D'ITÉRATIONS DE DÉPART ET L'INTERVALLE MIN ENTRE CHAQUE RACINES;
Off[General::spell1];
Off[Power::infy];

```

```

Off[∞::indet];
Off[FindRoot::nlnum];
Off[FindRoot::lstol];

nbr=20000;
inc=15;

lam1=Table[0,{nbr}];
For[m=1,m≤nbr,m++,lam1[[m]]=lambda/.FindRoot[trans,{lambda,inc*m}]];
lam1;
Clear[m];
lam2=Select[lam1,#>1&];
lam3=Union[lam2];
lam4=Table[0,{Length[lam3]}];
For[m=2,m≤Length[lam3],m++,If[(lam3[[m]]-lam3[[m-1]])>1,lam4[[m]]=lam3[[m-1]]]];
lam5=Select[lam4,#>0&];
Clear[m];

lambdaval=lam5;
Print["Le nombre de racines disponibles est:"];
nracines=Length[lam5]
Print["Les racines sont:"];
MatrixForm[lambdaval]

Plot[trans,{lambda,0,20000},DisplayFunction→Identity];
FindRoot[trans,{lambda,6000}];

ecmoy=(Sum[(lambdaval[[m]]-lambdaval[[m-1]]),{m,2,nracines}]/(nracines-1);
For[m=2,m≤Length[lambdaval],m++,If[(lambdaval[[m]]-lambdaval[[m-1]])≥1.5*ecmoy,Print["Diminuer le facteur inc"]]]
APPLICATION DE LA CONDITION INITIALE;
Off[General::spell1];

phis=Table[0,{nc}];
For[i=2,i≤nc,i++,phis[[i]]=(Xtilde[[i-1]]/.z→zk[[i]])/(Xtilde[[i]]/.z→zk[[i]]));
phis;
Clear[i];

phi=Table[0,{nc}];
phi[[1]]=1;
For[i=2,i≤nc,i++,phi[[i]]=Product[phis[[j]],{j,2,i}]];
phi;
Clear[i];

Norme=Sum[(phi[[i]]^2*(km[[i]]/diffus[[i]])*((z*Xtilde[[i]]^2/2+z*Xtildeap[[i]]^2/(2*lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]]))-Xtilde[[i]]*Xtildeap[[i]]/(2*lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]])))/.z→zk[[i+1]])-((z*Xtilde[[i]]^2/2+z*Xtildeap[[i]]^2/(2*lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]]))-Xtilde[[i]]*Xtildeap[[i]]/(2*lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]])))/.z→zk[[i]])),{i,1,nc}];

cini=((Hinf-Hi)/Norme)*Sum[(phi[[i]]*(km[[i]]/diffus[[i]])*(-((Xtildeap[[i]]/(lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]])))/.z→zk[[i+1]]))-((Xtildeap[[i]]/(lambda^2*(diffus[[1]]/diffus[[i]])))/.z→zk[[i]]))],{i,1,nc}];

```

SOLUTION DE LA DISTRIBUTION D'HUMIDITÉ - CHOISIR LE NOMBRE DE TERMES DE LA SÉRIE;

Off[General::spell1];

n=nracines;

theta=Table[0,{nc}];

Hcouche=Table[0,{nc}];

For[i=1,i≤nc,i++,

{theta[[i]]=Sum[(((cini\*phi[[i]]\*Xtilda[[i]]\*Exp[-lambda^2\*diffus[[1]]\*t)/.lambda→lambdaeval[[m]]),{m,1,n}],  
Hcouche[[i]]=Hinf-theta[[i]]];

theta;

Hcouche;

Clear[i];

H=Piecewise[Table[{Hcouche[[i]],zk[[i]]≤z≤zk[[i+1]]},{i,1,nc}]];

Ht0=H/.t→0;

Ht1=H/.t→1;

Ht10=H/.t→10;

Ht30=H/.t→30;

Ht50=H/.t→50;

Ht100=H/.t→100;

Ht200=H/.t→200;

Ht300=H/.t→300;

Ht400=H/.t→400;

Ht500=H/.t→500;

Ht600=H/.t→600;

Ht700=H/.t→700;

Ht800=H/.t→800;

Ht900=H/.t→900;

Ht1000=H/.t→1000;

Ht1100=H/.t→1100;

Ht1200=H/.t→1200;

Ht1300=H/.t→1300;

Ht1400=H/.t→1400;

Ht1500=H/.t→1500;

Ht1600=H/.t→1600;

Ht1700=H/.t→1700;

Ht1800=H/.t→1800;

Ht1900=H/.t→1900;

Ht2000=H/.t→2000;

Ht4000=H/.t→12000;

Hz0=H/.z→0;

Plot[{Ht0,6},{z,zk[[1]],zk[[nc+1]]},GridLines→{zk,None},PlotRange→All,  
AxesLabel→{"z (m)","H (%)"},PlotLabel→"Distribution de l'humidité à  
t=0"];

Plot[Ht200,{z,zk[[1]],zk[[nc+1]]},GridLines→{zk,None},PlotRange→All,  
AxesLabel→{"z (m)","H (%)"},PlotLabel→"Distribution de l'humidité à  
t=200"];

Plot[{Ht0,Ht1,Ht10,Ht30,Ht50,Ht100,Ht200,Ht300,Ht400,Ht500,Ht600,Ht700,H  
t800,Ht900,Ht1000,Ht1100,Ht1200,Ht1300,Ht1400,Ht1500,Ht1600,Ht1700,Ht180

```
0, Ht1900, Ht2000, Ht4000}, {z, zk[[1]], zk[[nc+1]]}, GridLines→{zk, None}, Plot
Range→All, AxesLabel→{"z (m)", "H (%)"}, PlotLabel→"Distribution de
l'humidité à différents temps];
```

```
Plot[Ht4000, {z, zk[[1]], zk[[nc+1]]}, GridLines→{zk, None}, AxesLabel→{"z
(m)", "H (%)"}, PlotLabel→"État permanent à t=4000];
```

```
Plot[Hz0, {t, 0, 4000}, PlotRange→All, AxesLabel→{"t (s)", "H
(%)"}, PlotLabel→"Humidité en fonction du temps au centre de la feuille
(z=0)"];
```

```
Plot[Hz0, {t, 0, 30}, PlotRange→All, AxesLabel→{"t (s)", "H
(%)"}, PlotLabel→"Humidité en fonction du temps au centre de la feuille
(z=0) (début)"];
```

```
CHOISIR LES TEMPS À UTILISER DANS LE CALCUL (EN SECONDES) - (Utiliser
les {} );
```

```
Off[General::spell1];
```

```
tempsstandard={1, 10, 30, 60, 100, 200, 500, 1000, 2000, 3000};
tempsFEM={0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.225, 0.3375, 0.50625, 0.759375, 1.13906, 1.70859,
2.56289, 3.84434, 5.7665, 8.64976, 12.9746, 19.462, 29.1929, 43.7894, 58.3859, 72
.9823, 94.877, 127.719, 160.561, 193.403, 226.245, 275.508, 349.403, 460.245, 626
.508, 875.902, 1249.99, 1811.13, 2652.84, 3915.39, 4000};
```

```
tempspetits={0, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0
.7, 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 3, 4, 5, 10, 14, 30, 60, 100
};
```

```
tempscomplet={0, 0.0001, 0.0005, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.4
, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 1.569, 1.948, 2.328, 2.708, 3.088, 3.657, 4.511, 5.366, 6
.220, 7.074, 8.356, 10.278, 13.161, 17.486, 21.811, 26.136, 30.461, 36.948, 46.679
, 61.275, 83.170, 105.065, 126.959, 148.854, 170.749, 178.959, 191.275, 209.7, 237
.459, 279.025, 320.591, 362.156, 403.722, 445.288, 486.853, 528.419, 569.985, 632
.333, 694.682, 757.031, 850.553, 944.076, 1037.600, 1131.120, 1271.410, 1481.830
, 1692.260, 1902.690, 2218.320, 2691.780, 3401.970, 4000.00, 18000};
```

```
temps=tempscomplet;
```

```
npoints=Length[temps];
```

```
LINÉARISATION DE LA DISTRIBUTION - CHOISIR LE NOMBRE DE MORCEAUX PAR
COUCHE;
```

```
Off[General::spell1];
```

```
Hnonlin=H/.t→temps;
```

```
nmcx=6;
```

```
zmcx=Table[0, {nc*(nmcx+1)}];
```

```
For[i=1, i≤nc, i++, For[p=1+(i-1)*(nmcx+1), p≤nmcx+1+(i-
1)*(nmcx+1), p++, zmcx[[p]]=zk[[i]]+(p-1-(i-1)*(nmcx+1))*L[[i]]/nmcx];
```

```
zmcx;
```

```
zlin=Union[zmcx];
```

```
Clear[p];
```

```
Clear[i];
```

```
Hmcx=Table[0, {nmcx*nc}];
```

```
For[p=1, p≤(nmcx*nc), p++, Hmcx[[p]]=Expand[(z-
zlin[[p]])*((Hnonlin/.z→zlin[[p+1]])-
```

```
(Hnonlin/.z→zlin[[p]])/(zlin[[p+1]]-
```

```
zlin[[p]])+(Hnonlin/.z→zlin[[p]])];
```

```
Hmcx;
```

```
Clear[p];
```

```
If[temps=={0},
```

```
  Hlin=Hi,
```

```

Hlin=Piecewise[Table[{Hmcx[[p]], zlin[[p]]≤z≤zlin[[p+1]]}, {p,1,nmcx*nc}]]
];
Hlin;

If[PJoints==1,Plot[{Hnonlin,Hlin},{z,zlin[[1]],zlin[[nmcx*nc+1]]},Grid
Lines→{zk,None},PlotRange→{Hi-1,Hinf+1},AxesLabel→{"z (m)","H
(%)"},PlotLabel→"Distribution linéaire de l'humidité à t=temps"];
EFFORTS HYDRIQUES RÉSULTANTS - CHOISIR LA DISTRIBUTION LINÉAIRE OU NON-
LIMÉAIRE;
Off[General::spell1];

Nhyd=Sum[ (Integrate[ Qtr[[k-1]].coeffhydglob[[k-1]]*(Hlin-Hi)
,{z,zk[[k-1]],zk[[k]]}],{k,2,nc+1});
Mhyd=Sum[ (Integrate[ Qtr[[k-1]].coeffhydglob[[k-1]]*(Hlin-Hi)*z
,{z,zk[[k-1]],zk[[k]]}],{k,2,nc+1});
FMhyd={Nhyd[[1]],Nhyd[[2]],Nhyd[[3]],Mhyd[[1]],Mhyd[[2]],Mhyd[[3]]};

Print["Efforts hydriques finaux :"];
FMhydfinal={Nhyd[[1,npoints]],Nhyd[[2,npoints]],Nhyd[[3]],Mhyd[[1,npoi
nt]],Mhyd[[2,npoints]],Mhyd[[3]]};
MatrixForm[FMhydfinal]
Print["Efforts hydriques unitaires finaux :"];
FMhydfinalun={Nhyd[[1,npoints]],Nhyd[[2,npoints]],Nhyd[[3]],Mhyd[[1,poi
nts]],Mhyd[[2,npoints]],Mhyd[[3]]}/(Hinf-Hi);
MatrixForm[FMhydfinalun]
PROPRIÉTÉS APPARENTES DE L'ASSEMBLAGE CHOISI;
Print["épaisseur de l'assemblage :"];
h
Print["Ex effectif :"];
Exeff=(A[[1,1]]*A[[2,2]]-A[[1,2]]^2)/(A[[2,2]]*h)
Print["Ey effectif :"];
Eyeff=(A[[1,1]]*A[[2,2]]-A[[1,2]]^2)/(A[[1,1]]*h)
Print["Gxy effectif :"];
Gxyeff=A[[3,3]]/h
Print["nuxy effectif :"];
nuxyeff=A[[1,2]]/A[[2,2]]
Print["nuyx effectif :"];
nuyxeff=A[[1,2]]/A[[1,1]]
Print["coefficients d'expansion hydrique de l'assemblage"];
betaxass=abd[[1,1]]*FMhydfinalun[[1]]+abd[[1,2]]*FMhydfinalun[[2]]+abd[[
1,3]]*FMhydfinalun[[3]];
betayass=abd[[1,2]]*FMhydfinalun[[1]]+abd[[2,2]]*FMhydfinalun[[2]]+abd[[
2,3]]*FMhydfinalun[[3]];
betaxyass=abd[[1,3]]*FMhydfinalun[[1]]+abd[[2,3]]*FMhydfinalun[[2]]+abd[[
3,3]]*FMhydfinalun[[3]];
betaass={betaxass,betayass,betaxyass};
MatrixForm[betaass]

DÉPLACEMENTS DU COMPOSITE:EXPRESSIONS POLYNÔMIALES;
Off[General::spell1];

uref=c*x-a^2*x^3/6-a*b*x*y^2/4;
vref=d*y-b^2*y^3/6-a*b*y*x^2/4;
wref=(1/2)*(a*x^2+b*y^2);
DÉFORMATIONS À LA SURFACE DE RÉFÉRENCE (non-linéaires);
Off[General::spell1];

epsilonxref=D[ uref,x]+(1/2)*(D[ wref,x])^2;
epsilonyref=D[ vref,y]+(1/2)*(D[ wref,y])^2;
gammaxyref=D[ uref,y]+D[ vref,x]+D[ wref,x]*D[ wref,y];
kappaxref=-D[wref,{x,2}];
kappayref=-D[wref,{y,2}];
kappaxyref=-2*D[wref,x,y];

```

```

defref={epsilonxref, epsilonyref, gammaxyref, kappaxref, kappayref, kappaxyre
f};
EFFORTS TOTAUX ET MÉCANIQUES RÉSLTANTS;
Off[General::spell1];

FMtot=ABD.defref;
FMmec=FMtot-FMhyd;
ÉNERGIE POTENTIELLE TOTALE DE LA FEUILLE (en soustrayant les efforts
hydriques);
Off[General::spell1];

PI=(1/2)*Integrate[(Integrate[(Sum[(FMmec[[i]]-
FMhyd[[i]])*defref[[i]],{i,1,6}]),{x,-longx/2,longx/2}]),{y,-
longy/2,longy/2}];
PREMIÈRE VARIATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE TOTALE;
Off[General::spell1];

coeffdela=Coefficient[Expand[PI/.a→a+dela],dela];
coeffdelb=Coefficient[Expand[PI/.b→b+delb],delb];
coeffdelc=Coefficient[Expand[PI/.c→c+delc],delc];
coeffdeld=Coefficient[Expand[PI/.d→d+deld],deld];
delPI=coeffdela*dela+coeffdelb*delb+coeffdelc*delc+coeffdeld*deld 0;
MINIMISATION DE L'ÉNERGIE POTENTIELLE TOTALE:LA PREMIÈRE VARIATION EST
NULLE ;
(4 équations non-linéaires à 4 inconnues);
Off[General::spell1];

fa=coeffdela;
fb=coeffdelb;
fc=coeffdelc;
fd=coeffdeld;

DÉFORMATIONS DE LA FEUILLE- RÉSLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS NON-
LINÉAIRES;
Off[General::spell1];

coefficients=Table[0,{npoints}];
For[i=1,i≤npoints,i++,

coefficients[[i]]=Solve[{fa[[i]] 0,fb[[i]] 0,fc[[i]] 0,fd[[i]] 0},{a,b,c
,d}];
coefficients;
Clear[i];

solution0=defref;
solution=Table[0,{5}];
For[i=1,i≤5,i++,
solution[[i]]=solution0/.Table[coefficients[[j,i]],{j,1,npoints}]];
solution;
Clear[i];

solution[[1]];
solution[[2]];
solution[[3]];
solution[[4]];
solution[[5]];
DÉPLACEMENTS VERTICAUX FINAUX D'UN COIN;
Off[General::spell1];

Print["wref d'un coin:"];
wref1=(wref/.coefficients[[npoints,1]])/.{x→longx/2,y→longy/2};

```

```

wref2=(wref/.coefficients[[npoints,2]])/.{x→longx/2,y→longy/2};
wref3=(wref/.coefficients[[npoints,3]])/.{x→longx/2,y→longy/2};
wref4=(wref/.coefficients[[npoints,4]])/.{x→longx/2,y→longy/2};
wref5=(wref/.coefficients[[npoints,5]])/.{x→longx/2,y→longy/2};
wrefcoin={wref1,wref2,wref3,wref4,wref5};
MatrixForm[wrefcoin]
GRAPHIQUES DES DÉPLACEMENTS VERTICAUX D'UN COIN EN FONCTION DU TEMPS;
Off[General::spell1];
Off[Graphics::gptn];

pointswref1TEMPS=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,1]])/.{x→long
x/2,y→longy/2}},{i,1,npoints}];
pointswref2TEMPS=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,2]])/.{x→long
x/2,y→longy/2}},{i,1,npoints}];
pointswref3TEMPS=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,3]])/.{x→long
x/2,y→longy/2}},{i,1,npoints}];
pointswref4TEMPS=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,4]])/.{x→long
x/2,y→longy/2}},{i,1,npoints}];
pointswref5TEMPS=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,5]])/.{x→long
x/2,y→longy/2}},{i,1,npoints}];

pointswref1TEMSPetits=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,1]])/.{x
→longx/2,y→longy/2}},{i,1,40}];
pointswref2TEMSPetits=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,2]])/.{x
→longx/2,y→longy/2}},{i,1,40}];
pointswref3TEMSPetits=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,3]])/.{x
→longx/2,y→longy/2}},{i,1,40}];
pointswref4TEMSPetits=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,4]])/.{x
→longx/2,y→longy/2}},{i,1,40}];
pointswref5TEMSPetits=Table[{temps[[i]],(wref/.coefficients[[i,5]])/.{x
→longx/2,y→longy/2}},{i,1,40}];

SetDirectory["U:"];
Export["U3coin.xls",pointswref3TEMPS];

<<Graphics`MultipleListPlot`

MultipleListPlot[pointswref1TEMPS,pointswref2TEMPS,pointswref3TEMPS,poin
tswref4TEMPS,pointswref5TEMPS,PlotJoined→True,PlotRange→All,PlotLabel→
"wref en fonction du
temps",AxesLabel→TraditionalForm/@{time,"wref"},TextStyle→{FontFamily→
"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{R
GBColor[0,0,1]}}];

MultipleListPlot[pointswref1TEMSPetits,pointswref2TEMSPetits,pointswre
f3TEMSPetits,pointswref4TEMSPetits,pointswref5TEMSPetits,PlotJoined→
True,PlotRange→All,PlotLabel→"wref en fonction du temps
(début)",AxesLabel→TraditionalForm/@{time,"wref"},TextStyle→{FontFamili
y→"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{
RGBColor[0,0,1]}}];
COURBURES FINALES;
Off[General::spell1];

Print["Kappa x:"];
kappaxfinal={solution[[1,npoints,4]],solution[[2,npoints,4]],solution[[3
,npoints,4]],solution[[4,npoints,4]],solution[[5,npoints,4]]};
MatrixForm[kappaxfinal]
Print["Kappa y:"];

```

```

kappayfinal={solution[[1,npoints,5]],solution[[2,npoints,5]],solution[[3
,npoints,5]],solution[[4,npoints,5]],solution[[5,npoints,5]]};
MatrixForm[kappayfinal]
GRAPHIQUES DES COURBURES EN FONCTION DU TEMPS;
Off[General::spell1];
Off[Graphics::gptn];

pointskappax1TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[1,i,4]]},{i,1,npoints}];
pointskappax2TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[2,i,4]]},{i,1,npoints}];
pointskappax3TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[3,i,4]]},{i,1,npoints}];
pointskappax4TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[4,i,4]]},{i,1,npoints}];
pointskappax5TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[5,i,4]]},{i,1,npoints}];

pointskappax1TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[1,i,4]]},{i,1,40}];
pointskappax2TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[2,i,4]]},{i,1,40}];
pointskappax3TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[3,i,4]]},{i,1,40}];
pointskappax4TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[4,i,4]]},{i,1,40}];
pointskappax5TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[5,i,4]]},{i,1,40}];

pointskappay1TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[1,i,5]]},{i,1,npoints}];
pointskappay2TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[2,i,5]]},{i,1,npoints}];
pointskappay3TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[3,i,5]]},{i,1,npoints}];
pointskappay4TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[4,i,5]]},{i,1,npoints}];
pointskappay5TEMPS=Table[{temps[[i]],solution[[5,i,5]]},{i,1,npoints}];

pointskappay1TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[1,i,5]]},{i,1,40}];
pointskappay2TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[2,i,5]]},{i,1,40}];
pointskappay3TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[3,i,5]]},{i,1,40}];
pointskappay4TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[4,i,5]]},{i,1,40}];
pointskappay5TEMPSpetits=Table[{temps[[i]],solution[[5,i,5]]},{i,1,40}];

SetDirectory["U:"];
Export["Ky.xls",pointskappay3TEMPS];

<<Graphics`MultipleListPlot`

MultipleListPlot[pointskappax1TEMPS,pointskappax2TEMPS,pointskappax3TEMP
S,pointskappax4TEMPS,pointskappax5TEMPS,PlotJoined→True,PlotRange→All,
PlotLabel→"Kappa x en fonction du
temps",AxesLabel→TraditionalForm/>{time,kappax},TextStyle→{FontFamily→
"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{R
GBColor[0,0,1]}}];

MultipleListPlot[pointskappax1TEMPSpetits,pointskappax2TEMPSpetits,point
skappax3TEMPSpetits,pointskappax4TEMPSpetits,pointskappax5TEMPSpetits,P
lotJoined→True,PlotRange→All,PlotLabel→"Kappa x en fonction du temps
(début)",AxesLabel→TraditionalForm/>{time,kappax},TextStyle→{FontFamili
y→"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{
RGBColor[0,0,1]}}];

MultipleListPlot[pointskappay1TEMPS,pointskappay2TEMPS,pointskappay3TEMP
S,pointskappay4TEMPS,pointskappay5TEMPS,PlotJoined→True,PlotRange→All,
PlotLabel→"Kappa y en fonction du
temps",AxesLabel→TraditionalForm/>{time,kappay},TextStyle→{FontFamily→
"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{R
GBColor[0,0,1]}}];

MultipleListPlot[pointskappay1TEMPSpetits,pointskappay2TEMPSpetits,point
skappay3TEMPSpetits,pointskappay4TEMPSpetits,pointskappay5TEMPSpetits,P
lotJoined→True,PlotRange→All,PlotLabel→"Kappa y en fonction du temps
(début)",AxesLabel→TraditionalForm/>{time,kappay},TextStyle→{FontFamili

```

```

y→"Times",FontSize→14},PlotStyle→{{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},
{RGBColor[0,0,1]}}];
  GRAPHIQUE DE LA DÉFORMÉE - SOLUTION 1;
Off[General::spell1];
Off[BoxRatios::nlist3];

```

```

gsol1=Plot3D[wref/.coefficients[[npoints,1]],{x,-longx/2,longx/2},{y,-
longy/2,longy/2},BoxRatios→{1,longy/longx,wref1/longx},PlotLabel→"Form
e de la feuille (solution 1)",AxesLabel→{"x(m)","y(m)"}];
  GRAPHIQUE DE LA DÉFORMÉE - SOLUTION 2;
Off[General::spell1];
Off[BoxRatios::nlist3];

```

```

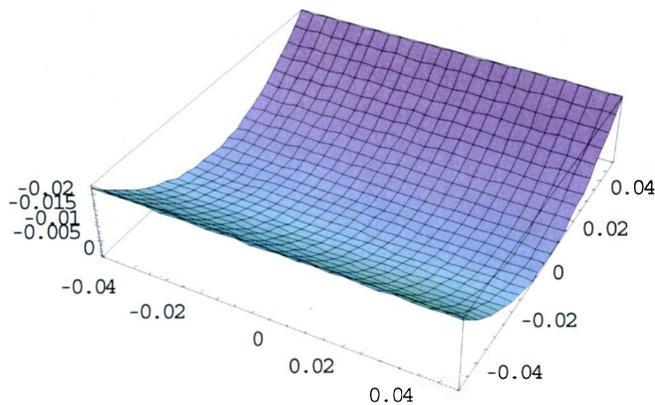
gsol2=Plot3D[wref/.coefficients[[npoints,2]],{x,-longx/2,longx/2},{y,-
longy/2,longy/2},BoxRatios→{1,longy/longx,wref2/longx},PlotLabel→"Form
e de la feuille (solution 2)",AxesLabel→{"x(m)","y(m)"}];
  GRAPHIQUE DE LA DÉFORMÉE - SOLUTION 3;
Off[General::spell1];
Off[BoxRatios::nlist3];

```

```

gsol3=Plot3D[wref/.coefficients[[npoints,3]],{x,-longx/2,longx/2},{y,-
longy/2,longy/2},BoxRatios→{1,longy/longx,wref3/longx}];

```



```

  GRAPHIQUE DE LA DÉFORMÉE - SOLUTION 4;
Off[General::spell1];
Off[BoxRatios::nlist3];

```

```

gsol4=Plot3D[wref/.coefficients[[npoints,4]],{x,-longx/2,longx/2},{y,-
longy/2,longy/2},BoxRatios→{1,longy/longx,wref4/longx},PlotLabel→"Form
e de la feuille (solution 4)",AxesLabel→{"x(m)","y(m)"}];
  GRAPHIQUE DE LA DÉFORMÉE - SOLUTION 5;
Off[General::spell1];
Off[BoxRatios::nlist3];

```

```

gsol5=Plot3D[wref/.coefficients[[npoints,5]],{x,-longx/2,longx/2},{y,-
longy/2,longy/2},BoxRatios→{1,longy/longx,wref5/longx},PlotLabel→"Form
e de la feuille (solution 5)",AxesLabel→{"x(m)","y(m)"}];
  ANALYSE DE LA STABILITÉ DES SOLUTIONS À L'ÉTAT FINAL;
Off[General::spell1];
Off[GreaterEqual::nord];

```

```

f1=coeffdela[[npoints]];
f2=coeffdelb[[npoints]];
f3=coeffdelc[[npoints]];
f4=coeffdeld[[npoints]];

```

```

secvar1={D[f1,a],D[f1,b],D[f1,c],D[f1,d]},{D[f2,a],D[f2,b],D[f2,c],D[f2,d]},{D[f3,a],D[f3,b],D[f3,c],D[f3,d]},{D[f4,a],D[f4,b],D[f4,c],D[f4,d]}
}/.coefficients[[npoints,1]];
secvar2={D[f1,a],D[f1,b],D[f1,c],D[f1,d]},{D[f2,a],D[f2,b],D[f2,c],D[f2,d]},{D[f3,a],D[f3,b],D[f3,c],D[f3,d]},{D[f4,a],D[f4,b],D[f4,c],D[f4,d]}
}/.coefficients[[npoints,2]];
secvar3={D[f1,a],D[f1,b],D[f1,c],D[f1,d]},{D[f2,a],D[f2,b],D[f2,c],D[f2,d]},{D[f3,a],D[f3,b],D[f3,c],D[f3,d]},{D[f4,a],D[f4,b],D[f4,c],D[f4,d]}
}/.coefficients[[npoints,3]];
secvar4={D[f1,a],D[f1,b],D[f1,c],D[f1,d]},{D[f2,a],D[f2,b],D[f2,c],D[f2,d]},{D[f3,a],D[f3,b],D[f3,c],D[f3,d]},{D[f4,a],D[f4,b],D[f4,c],D[f4,d]}
}/.coefficients[[npoints,4]];
secvar5={D[f1,a],D[f1,b],D[f1,c],D[f1,d]},{D[f2,a],D[f2,b],D[f2,c],D[f2,d]},{D[f3,a],D[f3,b],D[f3,c],D[f3,d]},{D[f4,a],D[f4,b],D[f4,c],D[f4,d]}
}/.coefficients[[npoints,5]];

```

```

stab1=Eigenvalues[secvar1];
stab2=Eigenvalues[secvar2];
stab3=Eigenvalues[secvar3];
stab4=Eigenvalues[secvar4];
stab5=Eigenvalues[secvar5];

```

```

If[stab1[[1]]>0&&stab1[[2]]>0&&stab1[[3]]>0&&stab1[[4]]>0,Print["La
solution 1 est STABLE"],Print["La solution 1 est INSTABLE"]];
If[stab2[[1]]>0&&stab2[[2]]>0&&stab2[[3]]>0&&stab2[[4]]>0,Print["La
solution 2 est STABLE"],Print["La solution 2 est INSTABLE"]];
If[stab3[[1]]>0&&stab3[[2]]>0&&stab3[[3]]>0&&stab3[[4]]>0,Print["La
solution 3 est STABLE"],Print["La solution 3 est INSTABLE"]];
If[stab4[[1]]>0&&stab4[[2]]>0&&stab4[[3]]>0&&stab4[[4]]>0,Print["La
solution 4 est STABLE"],Print["La solution 4 est INSTABLE"]];
If[stab5[[1]]>0&&stab5[[2]]>0&&stab5[[3]]>0&&stab5[[4]]>0,Print["La
solution 5 est STABLE"],Print["La solution 5 est INSTABLE"]];

```

```

If[Im[solution[[1,1,4]]]==0,Print["La solution 1 est la PREMIÈRE
solution choisie"]];
If[Im[solution[[2,1,4]]]==0,Print["La solution 2 est la PREMIÈRE
solution choisie"]];
If[Im[solution[[3,1,4]]]==0,Print["La solution 3 est la PREMIÈRE
solution choisie"]];
If[Im[solution[[4,1,4]]]==0,Print["La solution 4 est la PREMIÈRE
solution choisie"]];
If[Im[solution[[5,1,4]]]==0,Print["La solution 5 est la PREMIÈRE
solution choisie"]];

```

```

ANALYSE DU NIVEAU D'ÉNERGIE À L'ÉTAT FINAL -
LA SOLUTION CHOISIE DEVRAIT ÊTRE CELLE QUI CORRESPOND AU MINIMUM
D'ÉNERGIE POTENTIELLE;
Off[General::spell1];
Off[Less::nord];

```

```

en1=PI/.coefficients[[npoints,1]];
en2=PI/.coefficients[[npoints,2]];
en3=PI/.coefficients[[npoints,3]];
en4=PI/.coefficients[[npoints,4]];
en5=PI/.coefficients[[npoints,5]];

```

```

énergie1=en1[[npoints]];
énergie2=en2[[npoints]];
énergie3=en3[[npoints]];
énergie4=en4[[npoints]];
énergie5=en5[[npoints]];

```

```
If[énergie1<énergie2&&énergie1<énergie3&&énergie1<énergie4&&énergie1<éne  
rgie5,Print["La solution 1 est la MOINS ÉNERGÉTIQUE"]];  
If[énergie2<énergie1&&énergie2<énergie3&&énergie2<énergie4&&énergie2<éne  
rgie5,Print["La solution 2 est la MOINS ÉNERGÉTIQUE"]];  
If[énergie3<énergie4&&énergie3<énergie5,Print["La solution 3 est la  
MOINS ÉNERGÉTIQUE"]];  
If[énergie4<énergie3&&énergie4<énergie5,Print["La solution 4 est la  
MOINS ÉNERGÉTIQUE"]];  
If[énergie5<énergie3&&énergie5<énergie4,Print["La solution 5 est la  
MOINS ÉNERGÉTIQUE"]];  
TEMPS DE CALCUL DU PROGRAMME EN SECONDES;  
TimeUsed[]
```

## **Annexe C      Fichier source pour le modèle d'éléments finis - logiciel Abaqus CAE**

Cette annexe présente un exemple de fichier source utilisé pour le modèle d'éléments finis développé dans le logiciel Abaqus CAE [26].

## Fichier A1.inp

```
*Heading
** Job name: A1 Model name: A1
*Preprint, echo=NO, model=NO, history=NO, contact=NO
**
** PARTS
**
*Part, name=PART-1
%%Coordonnées (x,y,z) des 341 nœuds%%
*Node
  1,      50.,      50.,      0.
  2,      40.,      50.,      0.
  3,      30.,      50.,      0.
  4,      20.,      50.,      0.
  5,      10.,      50.,      0.
  6,       0.,      50.,      0.
  7,     -10.,      50.,      0.
  8,     -20.,      50.,      0.
  9,     -30.,      50.,      0.
 10,     -40.,      50.,      0.
 11,     -50.,      50.,      0.
 12,      50.,      40.,      0.
 13,      40.,      40.,      0.
 14,      30.,      40.,      0.
 15,      20.,      40.,      0.
 16,      10.,      40.,      0.
 17,       0.,      40.,      0.
 18,     -10.,      40.,      0.
 19,     -20.,      40.,      0.
 20,     -30.,      40.,      0.
 21,     -40.,      40.,      0.
 22,     -50.,      40.,      0.
 23,      50.,      30.,      0.
 24,      40.,      30.,      0.
 25,      30.,      30.,      0.
 26,      20.,      30.,      0.
 27,      10.,      30.,      0.
 28,       0.,      30.,      0.
 29,     -10.,      30.,      0.
 30,     -20.,      30.,      0.
 31,     -30.,      30.,      0.
 32,     -40.,      30.,      0.
 33,     -50.,      30.,      0.
 34,      50.,      20.,      0.
 35,      40.,      20.,      0.
 36,      30.,      20.,      0.
 37,      20.,      20.,      0.
 38,      10.,      20.,      0.
 39,       0.,      20.,      0.
 40,     -10.,      20.,      0.
 41,     -20.,      20.,      0.
 42,     -30.,      20.,      0.
 43,     -40.,      20.,      0.
 44,     -50.,      20.,      0.
 45,      50.,      10.,      0.
```

46,	40.,	10.,	0.
47,	30.,	10.,	0.
48,	20.,	10.,	0.
49,	10.,	10.,	0.
50,	0.,	10.,	0.
51,	-10.,	10.,	0.
52,	-20.,	10.,	0.
53,	-30.,	10.,	0.
54,	-40.,	10.,	0.
55,	-50.,	10.,	0.
56,	50.,	0.,	0.
57,	40.,	0.,	0.
58,	30.,	0.,	0.
59,	20.,	0.,	0.
60,	10.,	0.,	0.
61,	0.,	0.,	0.
62,	-10.,	0.,	0.
63,	-20.,	0.,	0.
64,	-30.,	0.,	0.
65,	-40.,	0.,	0.
66,	-50.,	0.,	0.
67,	50.,	-10.,	0.
68,	40.,	-10.,	0.
69,	30.,	-10.,	0.
70,	20.,	-10.,	0.
71,	10.,	-10.,	0.
72,	0.,	-10.,	0.
73,	-10.,	-10.,	0.
74,	-20.,	-10.,	0.
75,	-30.,	-10.,	0.
76,	-40.,	-10.,	0.
77,	-50.,	-10.,	0.
78,	50.,	-20.,	0.
79,	40.,	-20.,	0.
80,	30.,	-20.,	0.
81,	20.,	-20.,	0.
82,	10.,	-20.,	0.
83,	0.,	-20.,	0.
84,	-10.,	-20.,	0.
85,	-20.,	-20.,	0.
86,	-30.,	-20.,	0.
87,	-40.,	-20.,	0.
88,	-50.,	-20.,	0.
89,	50.,	-30.,	0.
90,	40.,	-30.,	0.
91,	30.,	-30.,	0.
92,	20.,	-30.,	0.
93,	10.,	-30.,	0.
94,	0.,	-30.,	0.
95,	-10.,	-30.,	0.
96,	-20.,	-30.,	0.
97,	-30.,	-30.,	0.
98,	-40.,	-30.,	0.
99,	-50.,	-30.,	0.
100,	50.,	-40.,	0.
101,	40.,	-40.,	0.
102,	30.,	-40.,	0.

103,	20.,	-40.,	0.
104,	10.,	-40.,	0.
105,	0.,	-40.,	0.
106,	-10.,	-40.,	0.
107,	-20.,	-40.,	0.
108,	-30.,	-40.,	0.
109,	-40.,	-40.,	0.
110,	-50.,	-40.,	0.
111,	50.,	-50.,	0.
112,	40.,	-50.,	0.
113,	30.,	-50.,	0.
114,	20.,	-50.,	0.
115,	10.,	-50.,	0.
116,	0.,	-50.,	0.
117,	-10.,	-50.,	0.
118,	-20.,	-50.,	0.
119,	-30.,	-50.,	0.
120,	-40.,	-50.,	0.
121,	-50.,	-50.,	0.
122,	45.,	50.,	0.
123,	40.,	45.,	0.
124,	45.,	40.,	0.
125,	50.,	45.,	0.
126,	35.,	50.,	0.
127,	30.,	45.,	0.
128,	35.,	40.,	0.
129,	25.,	50.,	0.
130,	20.,	45.,	0.
131,	25.,	40.,	0.
132,	15.,	50.,	0.
133,	10.,	45.,	0.
134,	15.,	40.,	0.
135,	5.,	50.,	0.
136,	0.,	45.,	0.
137,	5.,	40.,	0.
138,	-5.,	50.,	0.
139,	-10.,	45.,	0.
140,	-5.,	40.,	0.
141,	-15.,	50.,	0.
142,	-20.,	45.,	0.
143,	-15.,	40.,	0.
144,	-25.,	50.,	0.
145,	-30.,	45.,	0.
146,	-25.,	40.,	0.
147,	-35.,	50.,	0.
148,	-40.,	45.,	0.
149,	-35.,	40.,	0.
150,	-45.,	50.,	0.
151,	-50.,	45.,	0.
152,	-45.,	40.,	0.
153,	40.,	35.,	0.
154,	45.,	30.,	0.
155,	50.,	35.,	0.
156,	30.,	35.,	0.
157,	35.,	30.,	0.
158,	20.,	35.,	0.
159,	25.,	30.,	0.

160,	10.,	35.,	0.
161,	15.,	30.,	0.
162,	0.,	35.,	0.
163,	5.,	30.,	0.
164,	-10.,	35.,	0.
165,	-5.,	30.,	0.
166,	-20.,	35.,	0.
167,	-15.,	30.,	0.
168,	-30.,	35.,	0.
169,	-25.,	30.,	0.
170,	-40.,	35.,	0.
171,	-35.,	30.,	0.
172,	-50.,	35.,	0.
173,	-45.,	30.,	0.
174,	40.,	25.,	0.
175,	45.,	20.,	0.
176,	50.,	25.,	0.
177,	30.,	25.,	0.
178,	35.,	20.,	0.
179,	20.,	25.,	0.
180,	25.,	20.,	0.
181,	10.,	25.,	0.
182,	15.,	20.,	0.
183,	0.,	25.,	0.
184,	5.,	20.,	0.
185,	-10.,	25.,	0.
186,	-5.,	20.,	0.
187,	-20.,	25.,	0.
188,	-15.,	20.,	0.
189,	-30.,	25.,	0.
190,	-25.,	20.,	0.
191,	-40.,	25.,	0.
192,	-35.,	20.,	0.
193,	-50.,	25.,	0.
194,	-45.,	20.,	0.
195,	40.,	15.,	0.
196,	45.,	10.,	0.
197,	50.,	15.,	0.
198,	30.,	15.,	0.
199,	35.,	10.,	0.
200,	20.,	15.,	0.
201,	25.,	10.,	0.
202,	10.,	15.,	0.
203,	15.,	10.,	0.
204,	0.,	15.,	0.
205,	5.,	10.,	0.
206,	-10.,	15.,	0.
207,	-5.,	10.,	0.
208,	-20.,	15.,	0.
209,	-15.,	10.,	0.
210,	-30.,	15.,	0.
211,	-25.,	10.,	0.
212,	-40.,	15.,	0.
213,	-35.,	10.,	0.
214,	-50.,	15.,	0.
215,	-45.,	10.,	0.
216,	40.,	5.,	0.

217,	45.,	0.,	0.
218,	50.,	5.,	0.
219,	30.,	5.,	0.
220,	35.,	0.,	0.
221,	20.,	5.,	0.
222,	25.,	0.,	0.
223,	10.,	5.,	0.
224,	15.,	0.,	0.
225,	0.,	5.,	0.
226,	5.,	0.,	0.
227,	-10.,	5.,	0.
228,	-5.,	0.,	0.
229,	-20.,	5.,	0.
230,	-15.,	0.,	0.
231,	-30.,	5.,	0.
232,	-25.,	0.,	0.
233,	-40.,	5.,	0.
234,	-35.,	0.,	0.
235,	-50.,	5.,	0.
236,	-45.,	0.,	0.
237,	40.,	-5.,	0.
238,	45.,	-10.,	0.
239,	50.,	-5.,	0.
240,	30.,	-5.,	0.
241,	35.,	-10.,	0.
242,	20.,	-5.,	0.
243,	25.,	-10.,	0.
244,	10.,	-5.,	0.
245,	15.,	-10.,	0.
246,	0.,	-5.,	0.
247,	5.,	-10.,	0.
248,	-10.,	-5.,	0.
249,	-5.,	-10.,	0.
250,	-20.,	-5.,	0.
251,	-15.,	-10.,	0.
252,	-30.,	-5.,	0.
253,	-25.,	-10.,	0.
254,	-40.,	-5.,	0.
255,	-35.,	-10.,	0.
256,	-50.,	-5.,	0.
257,	-45.,	-10.,	0.
258,	40.,	-15.,	0.
259,	45.,	-20.,	0.
260,	50.,	-15.,	0.
261,	30.,	-15.,	0.
262,	35.,	-20.,	0.
263,	20.,	-15.,	0.
264,	25.,	-20.,	0.
265,	10.,	-15.,	0.
266,	15.,	-20.,	0.
267,	0.,	-15.,	0.
268,	5.,	-20.,	0.
269,	-10.,	-15.,	0.
270,	-5.,	-20.,	0.
271,	-20.,	-15.,	0.
272,	-15.,	-20.,	0.
273,	-30.,	-15.,	0.

274,	-25.,	-20.,	0.
275,	-40.,	-15.,	0.
276,	-35.,	-20.,	0.
277,	-50.,	-15.,	0.
278,	-45.,	-20.,	0.
279,	40.,	-25.,	0.
280,	45.,	-30.,	0.
281,	50.,	-25.,	0.
282,	30.,	-25.,	0.
283,	35.,	-30.,	0.
284,	20.,	-25.,	0.
285,	25.,	-30.,	0.
286,	10.,	-25.,	0.
287,	15.,	-30.,	0.
288,	0.,	-25.,	0.
289,	5.,	-30.,	0.
290,	-10.,	-25.,	0.
291,	-5.,	-30.,	0.
292,	-20.,	-25.,	0.
293,	-15.,	-30.,	0.
294,	-30.,	-25.,	0.
295,	-25.,	-30.,	0.
296,	-40.,	-25.,	0.
297,	-35.,	-30.,	0.
298,	-50.,	-25.,	0.
299,	-45.,	-30.,	0.
300,	40.,	-35.,	0.
301,	45.,	-40.,	0.
302,	50.,	-35.,	0.
303,	30.,	-35.,	0.
304,	35.,	-40.,	0.
305,	20.,	-35.,	0.
306,	25.,	-40.,	0.
307,	10.,	-35.,	0.
308,	15.,	-40.,	0.
309,	0.,	-35.,	0.
310,	5.,	-40.,	0.
311,	-10.,	-35.,	0.
312,	-5.,	-40.,	0.
313,	-20.,	-35.,	0.
314,	-15.,	-40.,	0.
315,	-30.,	-35.,	0.
316,	-25.,	-40.,	0.
317,	-40.,	-35.,	0.
318,	-35.,	-40.,	0.
319,	-50.,	-35.,	0.
320,	-45.,	-40.,	0.
321,	40.,	-45.,	0.
322,	45.,	-50.,	0.
323,	50.,	-45.,	0.
324,	30.,	-45.,	0.
325,	35.,	-50.,	0.
326,	20.,	-45.,	0.
327,	25.,	-50.,	0.
328,	10.,	-45.,	0.
329,	15.,	-50.,	0.
330,	0.,	-45.,	0.

331,	5.,	-50.,	0.
332,	-10.,	-45.,	0.
333,	-5.,	-50.,	0.
334,	-20.,	-45.,	0.
335,	-15.,	-50.,	0.
336,	-30.,	-45.,	0.
337,	-25.,	-50.,	0.
338,	-40.,	-45.,	0.
339,	-35.,	-50.,	0.
340,	-50.,	-45.,	0.
341,	-45.,	-50.,	0.

%%Noeuds des 100 éléments%%

\*Element, type=S8RT

1,	1,	2,	13,	12,	122,	123,	124,	125
2,	2,	3,	14,	13,	126,	127,	128,	123
3,	3,	4,	15,	14,	129,	130,	131,	127
4,	4,	5,	16,	15,	132,	133,	134,	130
5,	5,	6,	17,	16,	135,	136,	137,	133
6,	6,	7,	18,	17,	138,	139,	140,	136
7,	7,	8,	19,	18,	141,	142,	143,	139
8,	8,	9,	20,	19,	144,	145,	146,	142
9,	9,	10,	21,	20,	147,	148,	149,	145
10,	10,	11,	22,	21,	150,	151,	152,	148
11,	12,	13,	24,	23,	124,	153,	154,	155
12,	13,	14,	25,	24,	128,	156,	157,	153
13,	14,	15,	26,	25,	131,	158,	159,	156
14,	15,	16,	27,	26,	134,	160,	161,	158
15,	16,	17,	28,	27,	137,	162,	163,	160
16,	17,	18,	29,	28,	140,	164,	165,	162
17,	18,	19,	30,	29,	143,	166,	167,	164
18,	19,	20,	31,	30,	146,	168,	169,	166
19,	20,	21,	32,	31,	149,	170,	171,	168
20,	21,	22,	33,	32,	152,	172,	173,	170
21,	23,	24,	35,	34,	154,	174,	175,	176
22,	24,	25,	36,	35,	157,	177,	178,	174
23,	25,	26,	37,	36,	159,	179,	180,	177
24,	26,	27,	38,	37,	161,	181,	182,	179
25,	27,	28,	39,	38,	163,	183,	184,	181
26,	28,	29,	40,	39,	165,	185,	186,	183
27,	29,	30,	41,	40,	167,	187,	188,	185
28,	30,	31,	42,	41,	169,	189,	190,	187
29,	31,	32,	43,	42,	171,	191,	192,	189
30,	32,	33,	44,	43,	173,	193,	194,	191
31,	34,	35,	46,	45,	175,	195,	196,	197
32,	35,	36,	47,	46,	178,	198,	199,	195
33,	36,	37,	48,	47,	180,	200,	201,	198
34,	37,	38,	49,	48,	182,	202,	203,	200
35,	38,	39,	50,	49,	184,	204,	205,	202
36,	39,	40,	51,	50,	186,	206,	207,	204
37,	40,	41,	52,	51,	188,	208,	209,	206
38,	41,	42,	53,	52,	190,	210,	211,	208
39,	42,	43,	54,	53,	192,	212,	213,	210
40,	43,	44,	55,	54,	194,	214,	215,	212
41,	45,	46,	57,	56,	196,	216,	217,	218
42,	46,	47,	58,	57,	199,	219,	220,	216
43,	47,	48,	59,	58,	201,	221,	222,	219
44,	48,	49,	60,	59,	203,	223,	224,	221

45, 49, 50, 61, 60, 205, 225, 226, 223  
 46, 50, 51, 62, 61, 207, 227, 228, 225  
 47, 51, 52, 63, 62, 209, 229, 230, 227  
 48, 52, 53, 64, 63, 211, 231, 232, 229  
 49, 53, 54, 65, 64, 213, 233, 234, 231  
 50, 54, 55, 66, 65, 215, 235, 236, 233  
 51, 56, 57, 68, 67, 217, 237, 238, 239  
 52, 57, 58, 69, 68, 220, 240, 241, 237  
 53, 58, 59, 70, 69, 222, 242, 243, 240  
 54, 59, 60, 71, 70, 224, 244, 245, 242  
 55, 60, 61, 72, 71, 226, 246, 247, 244  
 56, 61, 62, 73, 72, 228, 248, 249, 246  
 57, 62, 63, 74, 73, 230, 250, 251, 248  
 58, 63, 64, 75, 74, 232, 252, 253, 250  
 59, 64, 65, 76, 75, 234, 254, 255, 252  
 60, 65, 66, 77, 76, 236, 256, 257, 254  
 61, 67, 68, 79, 78, 238, 258, 259, 260  
 62, 68, 69, 80, 79, 241, 261, 262, 258  
 63, 69, 70, 81, 80, 243, 263, 264, 261  
 64, 70, 71, 82, 81, 245, 265, 266, 263  
 65, 71, 72, 83, 82, 247, 267, 268, 265  
 66, 72, 73, 84, 83, 249, 269, 270, 267  
 67, 73, 74, 85, 84, 251, 271, 272, 269  
 68, 74, 75, 86, 85, 253, 273, 274, 271  
 69, 75, 76, 87, 86, 255, 275, 276, 273  
 70, 76, 77, 88, 87, 257, 277, 278, 275  
 71, 78, 79, 90, 89, 259, 279, 280, 281  
 72, 79, 80, 91, 90, 262, 282, 283, 279  
 73, 80, 81, 92, 91, 264, 284, 285, 282  
 74, 81, 82, 93, 92, 266, 286, 287, 284  
 75, 82, 83, 94, 93, 268, 288, 289, 286  
 76, 83, 84, 95, 94, 270, 290, 291, 288  
 77, 84, 85, 96, 95, 272, 292, 293, 290  
 78, 85, 86, 97, 96, 274, 294, 295, 292  
 79, 86, 87, 98, 97, 276, 296, 297, 294  
 80, 87, 88, 99, 98, 278, 298, 299, 296  
 81, 89, 90, 101, 100, 280, 300, 301, 302  
 82, 90, 91, 102, 101, 283, 303, 304, 300  
 83, 91, 92, 103, 102, 285, 305, 306, 303  
 84, 92, 93, 104, 103, 287, 307, 308, 305  
 85, 93, 94, 105, 104, 289, 309, 310, 307  
 86, 94, 95, 106, 105, 291, 311, 312, 309  
 87, 95, 96, 107, 106, 293, 313, 314, 311  
 88, 96, 97, 108, 107, 295, 315, 316, 313  
 89, 97, 98, 109, 108, 297, 317, 318, 315  
 90, 98, 99, 110, 109, 299, 319, 320, 317  
 91, 100, 101, 112, 111, 301, 321, 322, 323  
 92, 101, 102, 113, 112, 304, 324, 325, 321  
 93, 102, 103, 114, 113, 306, 326, 327, 324  
 94, 103, 104, 115, 114, 308, 328, 329, 326  
 95, 104, 105, 116, 115, 310, 330, 331, 328  
 96, 105, 106, 117, 116, 312, 332, 333, 330  
 97, 106, 107, 118, 117, 314, 334, 335, 332  
 98, 107, 108, 119, 118, 316, 336, 337, 334  
 99, 108, 109, 120, 119, 318, 338, 339, 336  
 100, 109, 110, 121, 120, 320, 340, 341, 338

\*Elset, elset=ALLE, generate

```

    1, 100, 1
*Elset, elset=_PICKEDSET3, internal, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=_PickedSet5, internal, generate
    1, 100, 1
** Region: (PTM+HS:Picked)
*Elset, elset=_PickedSet5, internal, generate
    1, 100, 1
%%Définition de la section%%
** Section: A1
*Shell Section, elset=_PickedSet5, composite
0.132, 5, PTM, 0.
0.115, 5, HS, 0.
*End Part
**
**
%%Définition des ensembles de nœuds et d'éléments%%
** ASSEMBLY
**
*Assembly, name=Assembly
**
*Instance, name=PART-1-1, part=PART-1
*End Instance
**
*Nset, nset=ALLN, instance=PART-1-1, generate
    1, 341, 1
*Nset, nset=CLAMPED, instance=PART-1-1
    61,
*Nset, nset=_PICKEDSET3, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 341, 1
*Elset, elset=_PICKEDSET3, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Nset, nset=_PICKEDSET4, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 341, 1
*Elset, elset=_PICKEDSET4, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=__PICKEDSURF6_SPOS, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=__PICKEDSURF7_SNEG, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=__PICKEDSURF16_SPOS, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=__PICKEDSURF17_SNEG, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Elset, elset=__PICKEDSURF6_SPOS, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=_PICKEDSURF6, internal
__PICKEDSURF6_SPOS, SPOS
*Elset, elset=__PICKEDSURF7_SNEG, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=_PICKEDSURF7, internal
__PICKEDSURF7_SNEG, SNEG
*Elset, elset=__PICKEDSURF16_SPOS, internal, instance=PART-1-1, generate
    1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=_PICKEDSURF16, internal
__PICKEDSURF16_SPOS, SPOS

```

```

*Elset, elset=__PICKEDSURF17_SNEG, internal, instance=PART-1-1, generate
  1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=__PICKEDSURF17, internal
__PICKEDSURF17_SNEG, SNEG
*Elset, elset=__PickedSurf22_SPOS, internal, instance=PART-1-1, generate
  1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=__PickedSurf22, internal
__PickedSurf22_SPOS, SPOS
*Elset, elset=__PickedSurf23_SNEG, internal, instance=PART-1-1, generate
  1, 100, 1
*Surface, type=ELEMENT, name=__PickedSurf23, internal
__PickedSurf23_SNEG, SNEG
*End Assembly
**

```

**%%Définition des matériaux utilisés%%**

```

** MATERIALS
**
*Material, name=HS
*Conductivity, type=ORTHO
  4.1341e-13, 4.1341e-13, 4.1341e-13
*Density
  5.35e-07,
*Elastic, type=LAMINA
4040., 4040., 0.27, 1460., 1460., 1460.
*Expansion, type=ORTHO
  0.0005582, 0.0005582, 0.0005582
*Specific Heat
  0.01,
*Material, name=PJ102
*Conductivity, type=ORTHO
  3.0916e-13, 3.0916e-13, 3.0916e-13
*Density
  4.48e-07,
*Elastic, type=LAMINA
4410., 2010., 0.266, 1040., 1040., 1040.
*Expansion, type=ORTHO
  0.0004595, 0.00138, 0.00138
*Specific Heat
  0.01,
*Material, name=PJ113
*Conductivity, type=ORTHO
  3.0799e-13, 3.0799e-13, 3.0799e-13
*Density
  4.43e-07,
*Elastic, type=LAMINA
4540., 1780., 0.347, 980., 980., 980.
*Expansion, type=ORTHO
  0.0004331, 0.0014545, 0.0014545
*Specific Heat
  0.01,
*Material, name=PTM
*Conductivity, type=ORTHO
  4.7737e-13, 4.7737e-13, 4.7737e-13
*Density
  3.43e-07,
*Elastic, type=LAMINA
3090., 1020., 0.369, 590., 590., 590.

```

```

*Expansion, type=ORTHO
  0.0003838, 0.0015739, 0.0015739
*Specific Heat
  0.01,
**
%%Définition des conditions limites%%
** BOUNDARY CONDITIONS
**
** Name: Disp-BC-1 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 1, 1
** Name: Disp-BC-2 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 2, 2
** Name: Disp-BC-3 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 3, 3
** Name: Disp-BC-4 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 4, 4
** Name: Disp-BC-5 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 5, 5
** Name: Disp-BC-6 Type: Displacement/Rotation
*Boundary
CLAMPED, 6, 6
**
%%Définition du champ de la teneur en humidité initiale%%
** PREDEFINED FIELDS
**
** Name: Field-1 Type: Temperature
*Initial Conditions, type=TEMPERATURE
ALLN, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.
0., 0.
** -----
**
%%Définition du type d'analyse utilisé pour le calcul%%
** STEP: Step-1
**
*Step, name=Step-1, nlgeom=YES, inc=20000
*Coupled Temperature-Displacement, creep=none, deltmx=4.34
0.05, 4000., 5e-06, 4000.
**
%%Définition des interactions avec le milieu ambiant%%
** INTERACTIONS
**
** Interaction: Int-1
*Sfilm
_PickedSurf22, F, -3.3224, 3.2e-10
** Interaction: Int-2
*Sfilm
_PickedSurf23, F, -3.3224, 3.2e-10
**
%%Définition des variables de sorties%%
** OUTPUT REQUESTS
**

```

```
*Restart, write, frequency=0
**
** FIELD OUTPUT: F-Output-1
**
*Output, field, variable=PRESELECT
**
** HISTORY OUTPUT: H-Output-1
**
*Output, history, variable=PRESELECT
*End Step
```

## Annexe D Essais de caractérisation

### D.1 Description des essais effectués

#### D.1.1 Essai avec micromètre automatique et balance

##### Propriétés à mesurer :

- épaisseur ( $e$ )
- masse volumique ( $\rho$ )

##### Type de mesure :

Ces propriétés sont requises pour les couches individuelles

##### Équipement utilisé :

- micromètre automatique
- balance
- four



Figure D.1 : Micromètre automatique

**Description du montage :**

Un micromètre automatique (Figure D.1) est utilisé pour mesurer l'épaisseur moyenne des feuilles de papier. L'épaisseur est mesurée en cinq points sur la feuille. Un four est aussi utilisé pour sécher la feuille de papier à 105 °C. Enfin, une balance sert à peser la feuille dans le but de déterminer sa masse volumique.

**Équations :**

La masse volumique de la feuille  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) est calculée de la façon suivante :

$$\rho = \frac{m_{\text{sec}}}{L_x L_y e}, \quad (\text{D.1})$$

où  $m_{\text{sec}}$  (kg) est la masse de la feuille après un séchage de quatre heures au four à 105 °C,  $L_x$  (m) et  $L_y$  (m) sont les dimensions de la feuille et  $e$  (m) est l'épaisseur moyenne de la feuille. Il faut préciser que les mesures des dimensions sont prises à l'intérieur d'un environnement contrôlé avec une humidité relative à 50 %. Les feuilles de papier y ont été conditionnées pendant au moins quatre heures.

**Procédure :**

- Mesurer les dimensions  $L_x$  et  $L_y$  de la feuille à l'aide d'une règle
- Mesurer l'épaisseur de la feuille en cinq points à l'aide du micromètre automatique et calculer l'épaisseur moyenne  $e$
- Sécher la feuille dans le four à 105 °C pendant quatre heures
- Peser la feuille séchée sur la balance
- Calculer la masse volumique à l'aide des dimensions et de l'épaisseur moyenne

### D.1.2 Essai avec robot TSI/TSO

#### Propriétés à mesurer :

- modules d'élasticité ( $E_1, E_2$ )
- module de cisaillement ( $G_{12}$ )
- coefficient de Poisson ( $\nu_{21}$ )

#### Type de mesure :

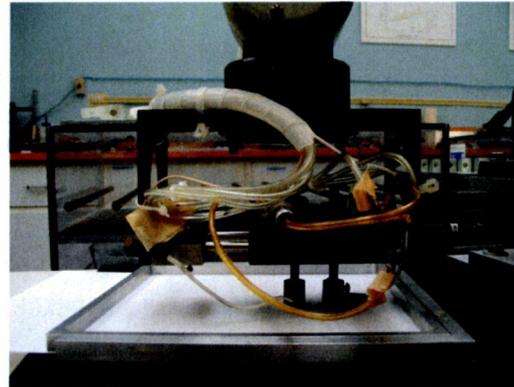
Ces propriétés sont requises pour les couches individuelles

#### Équipement utilisé :

- robot TSI/TSO avec ordinateur



(a)



(b)

Figure D.2 : Robot TSI/TSO (a) et prise de mesure par le robot (b)

#### Description du montage :

Un robot à air comprimé (Figure D.2) est utilisé pour mesurer les modules d'élasticité, le module de cisaillement et le coefficient de Poisson moyens des feuilles de papier. Les mesures sont prises sur deux échantillons. Le robot mesure ces propriétés sur 360 degrés. Il est relié à un ordinateur qui, une fois l'essai terminé, imprime un rapport donnant les

indices TSI (tensile stiffness index) pour tous les angles de mesure, l'indice TSO (tensile stiffness orientation), la matrice de rigidité  $Q$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{yx}$ . Le robot utilise la mesure par ultrason pour obtenir les indices TSI, ces indices étant proportionnels au carré de la vitesse des ultrasons.

### Équations :

L'indice TSI donné par le robot (en  $\text{km}^2/\text{s}^2$ ) peut être transformé pour obtenir les modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  de la façon suivante :

$$E_1 = \rho TSI_0 \quad (\text{D.2})$$

$$E_2 = \rho TSI_{90}, \quad (\text{D.3})$$

où  $\rho$  est la masse volumique de la feuille de papier et  $TSI_0$  et  $TSI_{90}$  sont les indices TSI mesurés à 0 degrés et 90 degrés, respectivement.

Le module de cisaillement  $G_{12}$  et le coefficient de Poisson  $\nu_{21}$  sont obtenus de la façon suivante :

$$G_{12} = Q_{66} \quad (\text{D.4})$$

$$\nu_{21} = \nu_{yx}. \quad (\text{D.5})$$

### Procédure :

- Installer deux échantillons du papier dans les gabarits
- Démarrer l'essai
- Calculer les propriétés moyennes  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{21}$

### **D.1.3**      *Essai d'expansion hydrique*

#### **Propriétés à mesurer :**

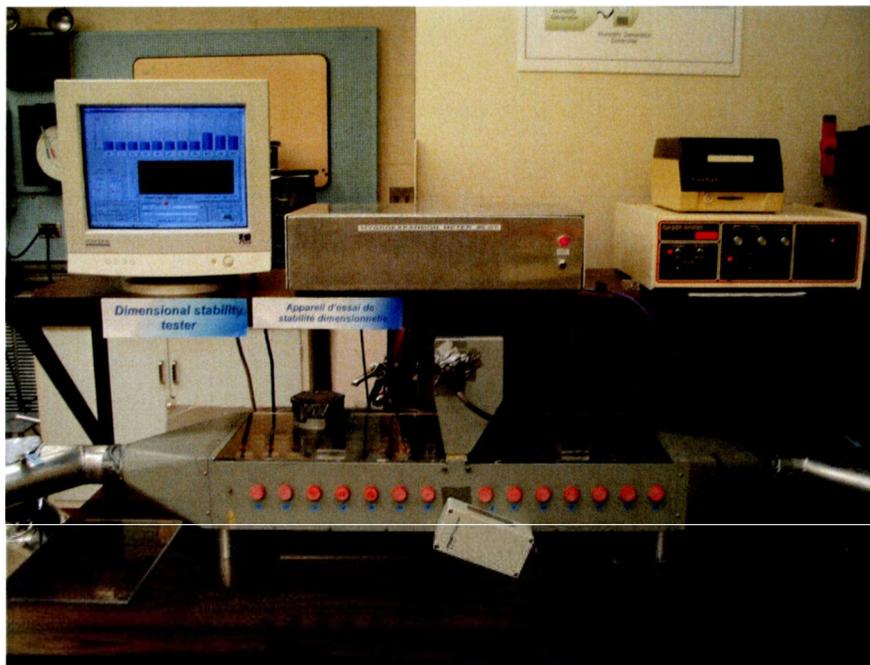
- coefficients d'expansion hydrique ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$ )
- teneurs en humidité (courbes de sorption) ( $H$ )

#### **Type de mesure :**

Les coefficients d'expansion hydrique sont requis pour les couches individuelles; les courbes de sorption sont requises pour les couches individuelles et les assemblages

#### **Équipement utilisé :**

- banc d'essai pour l'expansion hydrique
- balance
- four



**Figure D.3 : Banc d'essai pour l'expansion hydrique**

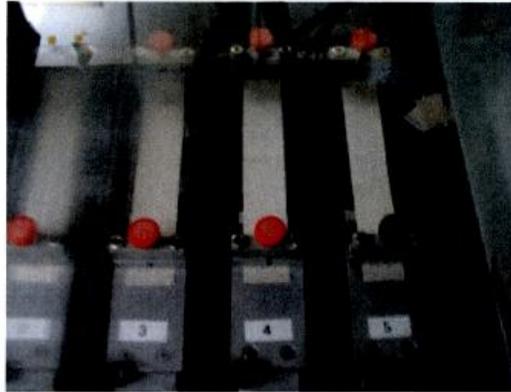


Figure D.4 : Mesure de l'expansion hydrique avec LVDT

**Description du montage :**

Un banc d'essai pour l'expansion hydrique (Figure D.3) est utilisé pour mesurer les coefficients d'expansion hydrique et les courbes de sorption des feuilles de papier, pour le cycle d'humidité relative 50%-30%-80%-50%. Tout d'abord, un échantillon de papier est pesé, séché au four et à nouveau pesé sur une balance individuelle pour déterminer la teneur en humidité dans l'air ambiant du papier (à 50 % HR),  $H_{50}$  (%). Ensuite, un petit échantillon de papier est déposé sur la balance à l'intérieur de la chambre du banc d'essai. Sa masse est mesurée en fonction de l'humidité relative, permettant ainsi d'obtenir la courbe de sorption du papier. Enfin, cinq bandes de papier en direction machine (direction 1) et cinq bandes en direction transverse (direction 2) sont montées sur des LVDT (Figure D.4) à l'intérieur de la chambre du banc d'essai. Les déformations de ces bandes sont calculées en fonction de la teneur en humidité pour obtenir les coefficients d'expansion hydriques moyens dans les 2 directions  $\beta_1$  et  $\beta_2$  (1 %).

### Équations :

La teneur en humidité d'équilibre  $H_{50}$  (%) est calculée de la façon suivante :

$$H_{50} = 100 \cdot \left( \frac{m_{50} - m_{\text{sec}}}{m_{50}} \right), \quad (\text{D.6})$$

où  $m_{50}$  est la masse de l'échantillon de papier à l'air ambiant (50 % HR) et  $m_{\text{sec}}$  est la masse de l'échantillon après séchage pendant quatre heures au four à 105 °C.

La teneur en humidité à une humidité relative donnée (courbe de sorption)  $H$  (%) est calculée de la façon suivante :

$$H = 100 \cdot \left[ 1 - \frac{m_{\text{banc.50}}}{m_{\text{banc.HR}}} \left( 1 - \frac{H_{50}}{100} \right) \right], \quad (\text{D.7})$$

où  $m_{\text{banc.50}}$  est la masse initiale (à 50 % HR) de l'échantillon du banc d'essai,  $m_{\text{banc.HR}}$  est la masse de l'échantillon du banc d'essai à une humidité relative donnée et  $H_{50}$  est la teneur en humidité du papier à HR 50 % calculée à l'aide de l'équation (D.6) (%).

Les coefficients d'expansion hydrique  $\beta_1$  et  $\beta_2$  (/ %) diffèrent selon la phase en cours (absorption 30-80 % HR ou désorption 80-50 % HR) et sont calculés de la façon suivante :

$$\beta_1 = \frac{1}{100} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{1,80,abs} - \varepsilon_{1,30,abs}}{H_{80,abs} - H_{30,abs}} \right) \text{ (absorption)} \quad (\text{D.8})$$

$$\beta_2 = \frac{1}{100} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{2,80,abs} - \varepsilon_{2,30,abs}}{H_{80,abs} - H_{30,abs}} \right) \text{ (absorption)} \quad (\text{D.9})$$

$$\beta_1 = \frac{1}{100} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{1,80,des} - \varepsilon_{1,50,des}}{H_{80,des} - H_{50,des}} \right) \text{ (désorption)} \quad (D.10)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{100} \cdot \left( \frac{\varepsilon_{2,80,des} - \varepsilon_{2,50,des}}{H_{80,des} - H_{50,des}} \right) \text{ (désorption),} \quad (D.11)$$

où, par exemple,  $\varepsilon_{1,80,abs}$  est la déformation moyenne de la bande de papier donnée par les LVDT en direction 1, à 80 % HR, dans la phase absorption de la courbe de sorption. Dans le même ordre d'idée,  $H_{80,abs}$  est la teneur en humidité calculée à 80 % HR, dans la phase absorption de la courbe de sorption. La Figure D.5 montre la façon de déterminer les coefficients  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans les différentes phases (abs = absorption; dés = désorption).

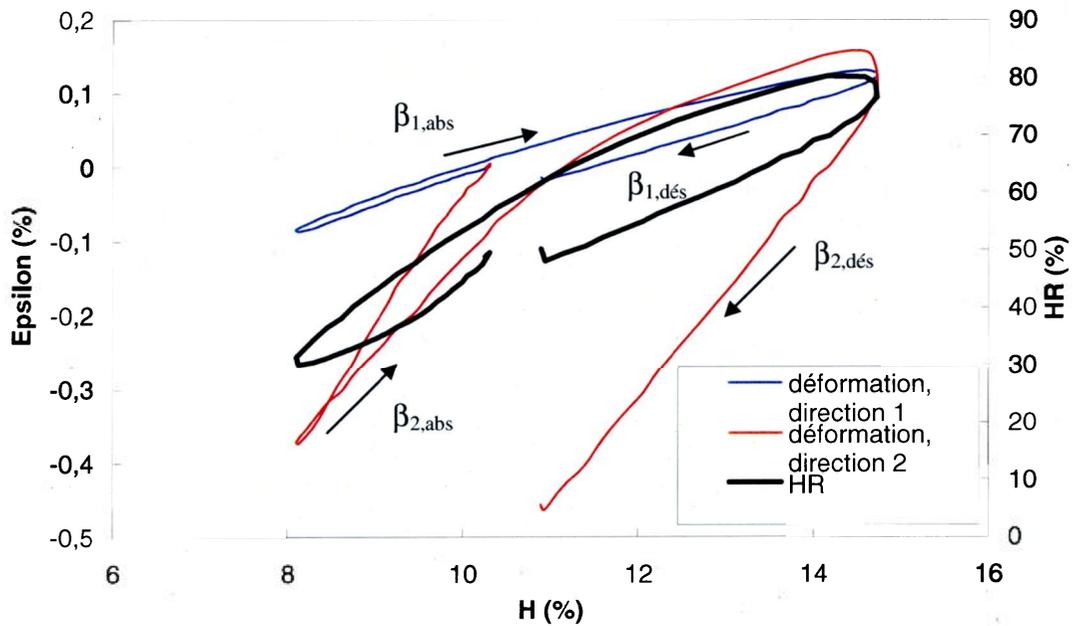


Figure D.5 : Déformation moyenne et humidité relative en fonction de la teneur en humidité – Mesure des coefficients d'expansion hydrique

**Procédure :**

- Découper cinq bandes de papier en direction 1 (SM) et cinq bandes de papier en direction 2 (ST)
- Peser un échantillon du papier à 50 % HR
- Sécher l'échantillon au four à 105 °C pendant quatre heures
- Peser l'échantillon sec et calculer la teneur en humidité à 50 % HR,  $H_{50}$
- Installer un échantillon témoin du papier sur la balance du banc d'essai
- Installer les dix bandes de papier sur le banc d'essai
- Démarrer l'essai
- Calculer les courbes de sorption  $H$  en utilisant la teneur en humidité  $H_{50}$  et les coefficients d'expansion hydrique moyens  $\beta_1$  et  $\beta_2$

**D.1.4      *Essai de diffusion*****Propriétés à mesurer :**

- Coefficient de diffusion effectif ( $D$ )

**Type de mesure :**

Ces propriétés sont requises pour les couches individuelles

**Équipement utilisé :**

- chambre environnementale
- balance
- pots Mason
- NaCl en solution saturée

### Description du montage :

Un échantillon de papier est collé sur un couvercle de pot Mason troué à l'aide de colle époxy marine. Une fois la colle séchée, le couvercle est conditionné dans la chambre environnementale à une humidité relative  $HR_{ext}$  de 50 % pendant une heure. Après le conditionnement, le couvercle est installé sur le pot Mason, lequel contient une légère quantité de NaCl en solution saturée. Une bande de téflon est ajoutée dans les filets du pot pour assurer l'étanchéité de l'ensemble. L'intérieur du pot et la surface interne de la feuille de papier sont ainsi soumis à une humidité relative  $HR_{int}$  de 75,57 %. Par la suite, le pot est placé sur une balance à l'intérieur de la chambre environnementale, à une humidité relative  $HR_{ext}$  de 50 %. La masse du pot est notée à des intervalles de 30 minutes pendant 24 heures. Finalement, la pente  $q$  (flux massique, kg/s) du graphique de la différence de masse en fonction du temps est déterminée pour calculer le coefficient de diffusion effectif  $D$  ( $m^2/s$ ). Un schéma du montage est présenté à la Figure D.6.

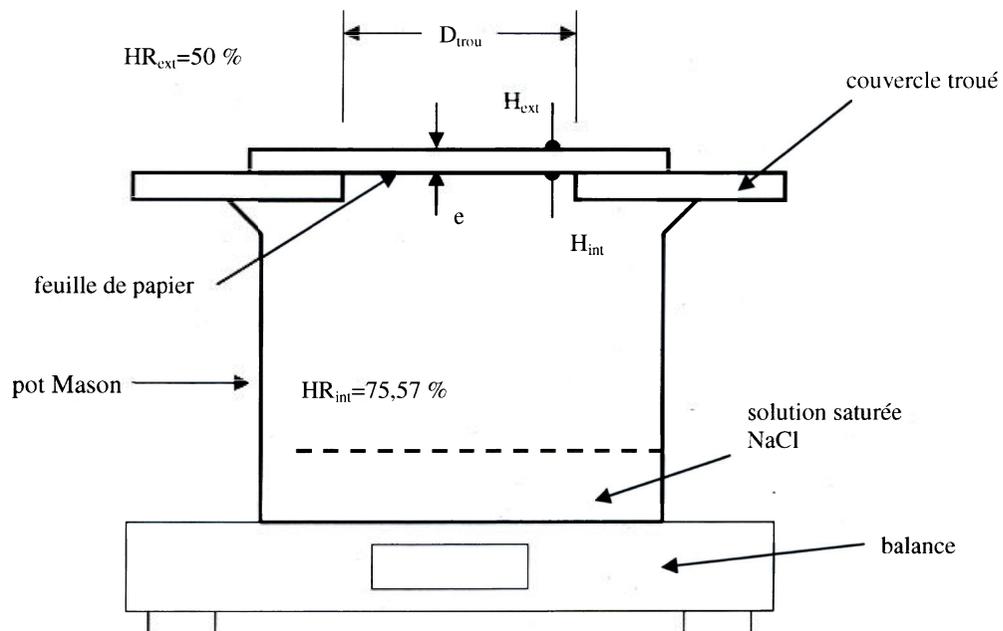


Figure D.6 : Essai de diffusion

### Équations :

Le coefficient de diffusion effectif  $D$  (en  $m^2/s$ ) est calculé de la façon suivante :

$$D = \frac{-q}{\rho A_{\text{trou}}} \cdot 100 \frac{\Delta z_{\text{couvercle}}}{\Delta H_{\text{couvercle}}}, \quad (\text{D.12})$$

où  $q$  est la pente du graphique de la différence de masse en fonction du temps (flux massique) en régime stationnaire,  $\rho$  est la masse volumique de la feuille de papier,  $A_{\text{trou}}$  est l'aire du trou du couvercle,  $\Delta z_{\text{couvercle}}$  est l'épaisseur de la feuille de papier et  $\Delta H_{\text{couvercle}}$  est la différence de teneur en humidité entre la face interne du couvercle (intérieur du pot Mason) et la face externe du couvercle (chambre environnementale).

On peut redéfinir l'aire du trou du couvercle, l'épaisseur de la feuille et la différence de teneur en humidité du couvercle de la façon suivante :

$$A_{\text{trou}} = \frac{\pi D_{\text{trou}}^2}{4} \quad (\text{D.13})$$

$$\Delta z_{\text{couvercle}} = e \quad (\text{D.14})$$

$$\Delta H_{\text{couvercle}} = H_{\text{int}} - H_{\text{ext}}, \quad (\text{D.15})$$

où  $D_{\text{trou}}$  est le diamètre du trou du couvercle et  $H_{\text{int}}$  et  $H_{\text{ext}}$  sont les teneurs en humidité sur les faces interne et externe du couvercle, respectivement.

En insérant les équations (D.13) à (D.15) dans l'équation (D.12), on exprime le coefficient de diffusion effectif de la façon suivante :

$$D = \frac{-400qe}{\rho\pi D_{\text{trou}}^2 (H_{\text{int}} - H_{\text{ext}})} \quad (\text{D.16})$$

Les termes  $H_{\text{int}}$  et  $H_{\text{ext}}$  sont différents pour chaque type de papier et dépendent de la courbe de sorption du papier. Ils dépendent donc de l'humidité relative interne et externe.

L'humidité relative interne dépend du type de sel utilisé dans la solution saturée du pot Mason. Cette humidité relative interne est calculée de la façon suivante :

$$HR_{\text{int}} = \frac{100}{e^{-\psi_0 M_w / (RT)}} \quad (\text{D.17})$$

où  $\psi_0$  est le pouvoir osmotique de la solution saturée (-38 000 J/kg pour le NaCl),  $M_w$  est la masse molaire de l'eau ( $18,0153 \times 10^{-3}$  kg/mol),  $R$  est la constante des gaz parfaits (8,3143 J/mol K) et  $T$  est la température de l'air durant l'essai (294 K). En insérant ces valeurs dans l'équation (D.17), on trouve que l'humidité relative à l'intérieur du pot est :

$$HR_{\text{int}} = 75,57 \% \quad (\text{D.18})$$

L'humidité relative externe choisie sera celle présente dans la chambre environnementale. Arbitrairement, on choisit :

$$HR_{\text{ext}} = 50 \% \quad (\text{D.19})$$

Ainsi, les teneurs en humidité interne ( $H_{\text{int}}$ ) et externe ( $H_{\text{ext}}$ ) de chaque type de papier doivent être déterminées à l'aide des courbes de sorption aux humidités relatives correspondantes. Pour la face interne, on considère que le papier est en absorption,

puisque la feuille a été conditionnée au préalable à une humidité relative de 50 % et que la face interne se trouve désormais en contact avec une humidité relative  $HR_{int}$  de 75,57 % créée par la solution saturée de NaCl. Il faut donc utiliser la phase d'absorption de la courbe de sorption (à 75,57 %) pour déterminer la teneur en humidité de la face interne. Pour la face externe, on considère que le transfert de masse est neutre, puisque la feuille de papier a été conditionnée au préalable à 50 % et que la face externe se trouve désormais en contact avec une humidité relative  $HR_{ext}$  de 50 % présente dans la chambre environnementale. Il faut donc utiliser la valeur moyenne de la courbe de sorption (à 50 %) pour déterminer la teneur en humidité de la face externe.

Il est important de noter que les coefficients de diffusivité effectifs déterminés lors de cet essai sont valide pour une plage d'humidité relative comprise entre  $HR_{int} = 75,57$  % et  $HR_{ext} = 50$  %, puisque le coefficient de diffusivité effectif varie avec la teneur en humidité moyenne du papier [25]. Ainsi, il est préférable que les essais de courbures soient conduits entre des humidités relatives de 50 % et 75,57 %.

**Procédure :**

- Découper l'échantillon de papier (diamètre 6 cm)
- Verser la solution saturée de NaCl dans le pot Mason
- Installer du téflon dans les filets du pot
- Coller le papier sur le couvercle troué du pot à l'aide de colle époxy marine
- Laisser sécher le couvercle pendant 1 heure
- Conditionner le couvercle dans la chambre environnementale à  $HR_{ext}$  (50 %) pendant une heure
- Installer le couvercle sur le pot et déposer le pot sur la balance; noter la masse initiale
- Noter la masse à toutes les 30 minutes pendant une journée; tracer le graphique de la différence de masse en fonction du temps

- Calculer le coefficient de diffusion effectif  $D$  à l'aide de la pente du graphique  $q$

### **D.1.5**      *Essai de délaminage*

#### **Propriétés à mesurer :**

- énergies de délaminage ( $W_{del,x}$ ,  $W_{del,y}$ )

#### **Type de mesure :**

Ces propriétés sont optionnelles pour les assemblages.

#### **Équipement utilisé :**

- banc d'essai « scott bond »

#### **Description du montage :**



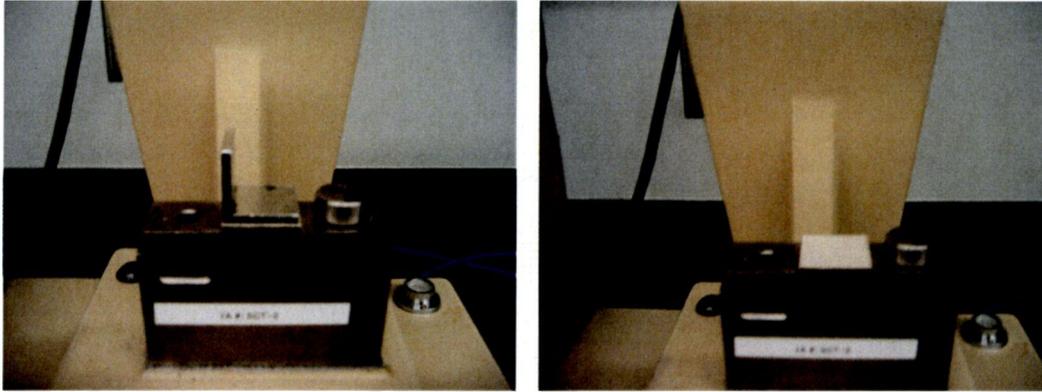
**Figure D.7 : Banc d'essai « scott bond »**

Un banc d'essai de type « scott bond » est utilisé pour mesurer l'énergie requise pour le délaminage d'une feuille de papier multicouche (Figure D.7). Cette énergie est déterminée après l'impact d'une pendule sur la feuille multicouche. Deux bandes de

papier (direction  $x$  et direction  $y$ ) sont préparées. Chacune des bandes est collée sur la partie inférieure du support. Par la suite, la partie supérieure du support est fixée et une pression est appliquée pendant un court laps de temps (Figure D.8). Après relâchement de la pression, la bande de papier est coupée en cinq échantillons. Chaque échantillon est ensuite installé sur le socle d'impact. Le pendule est relâché et on note l'énergie requise pour le délaminage de l'échantillon (Figure D.9). Cette énergie est inversement proportionnelle à la hauteur maximale atteinte par le pendule après l'impact. Une moyenne est faite sur les cinq échantillons (et pour les deux bandes) pour obtenir les énergies de délaminage  $W_{del,x}$  et  $W_{del,y}$  ( $J/m^2$ ). Les deux faciès obtenus sont par la suite examinés pour déterminer si le délaminage s'est produit à l'intérieur d'une couche individuelle ou à l'interface de deux couches.



**Figure D.8 : Essai scott bond – Installation de la bande papier sur le support inférieur (a) et application de la pression (b)**



(a)

(b)

**Figure D.9 : Essai scott bond – Échantillon de papier avant impact avec le pendule (a) et après impact (b)**

**Procédure :**

- Préparer une bande de l'assemblage en direction  $x$  et une seconde en direction  $y$
- Installer une première bande sur le banc d'essai à l'aide de ruban adhésif
- Appliquer la pression et relâcher; séparer la bande en cinq échantillons
- Soumettre chacun des échantillons à l'impact du pendule et noter les énergies de délaminage
- Calculer l'énergie de délaminage moyenne
- Répéter les étapes pour la seconde bande

## D.2 Résultats obtenus pour les couches individuelles

### D.2.1 Tableau récapitulatif

Le Tableau D.1 présente les valeurs des différentes propriétés des couches individuelles obtenues lors des essais de caractérisation présentés précédemment.

Tableau D.1 : Résultats des essais de caractérisation – couches individuelles

Propriété	Unités	HS	PTM	PJ 1.02	PJ 1.13
<b>e</b>	μm	115	132	100	100
<b>ρ</b>	(kg/m <sup>3</sup> )	535	343	448	443
<b>E<sub>1</sub></b>	(GPa)	4,04	3,09	4,41	4,54
<b>E<sub>2</sub></b>	(GPa)	4,04	1,02	2,01	1,78
<b>G<sub>12</sub></b>	(GPa)	1,46	0,59	1,04	0,98
<b>v<sub>21</sub></b>		0,27	0,12	0,12	0,14
<b>β<sub>1</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,40	0,35	0,47	0,39
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,56	0,38	0,46	0,43
<b>β<sub>2</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,40	0,93	1,07	0,85
<b>80-50 % HR</b>	(10 <sup>-3</sup> /%)	0,56	1,57	1,38	1,45
<b>H<sub>75 % HR</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(%)	10,3	13,1	13,0	13,0
<b>80-50 % HR</b>	(%)	11,6	14,7	14,5	14,6
<b>H<sub>50 % HR</sub></b>					
<b>30-80 % HR</b>	(%)	7,4	9,7	9,7	9,8
<b>80-50 % HR</b>	(%)	8,5	11,3	11,2	11,2
<b>D</b>	(10 <sup>-11</sup> m <sup>2</sup> /s)	7,73	13,92	6,90	6,95

### D.2.2 Courbes de sorption et déformations moyennes obtenues pour l'essai d'expansion hydrique

Les Figures D.10 à D.17 présentent les courbes de sorption et les déformations moyennes en fonction de la teneur en humidité de chaque couche individuelle obtenues lors de l'essai d'expansion hydrique. La courbe de sorption est utilisée pour obtenir la teneur en humidité à une humidité relative donnée alors que les déformations moyennes

sont utilisées pour calculer les coefficients d'expansion hydrique. Pour le papier HS, deux cycles consécutifs d'expansion hydrique ont été effectués.

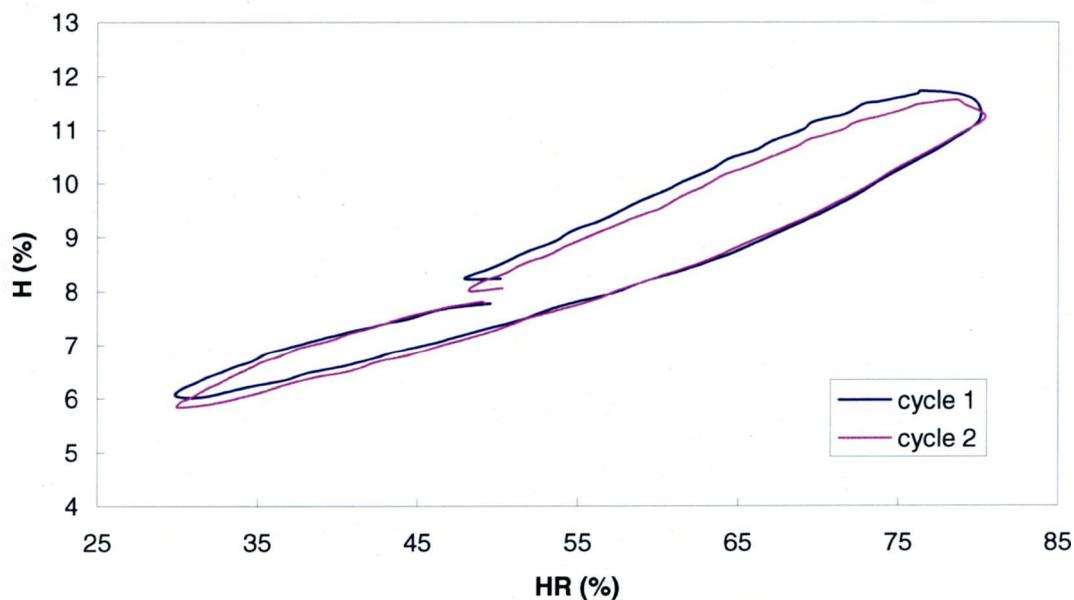


Figure D.10 : Courbe de sorption – Papier HS (2 cycles consécutifs)

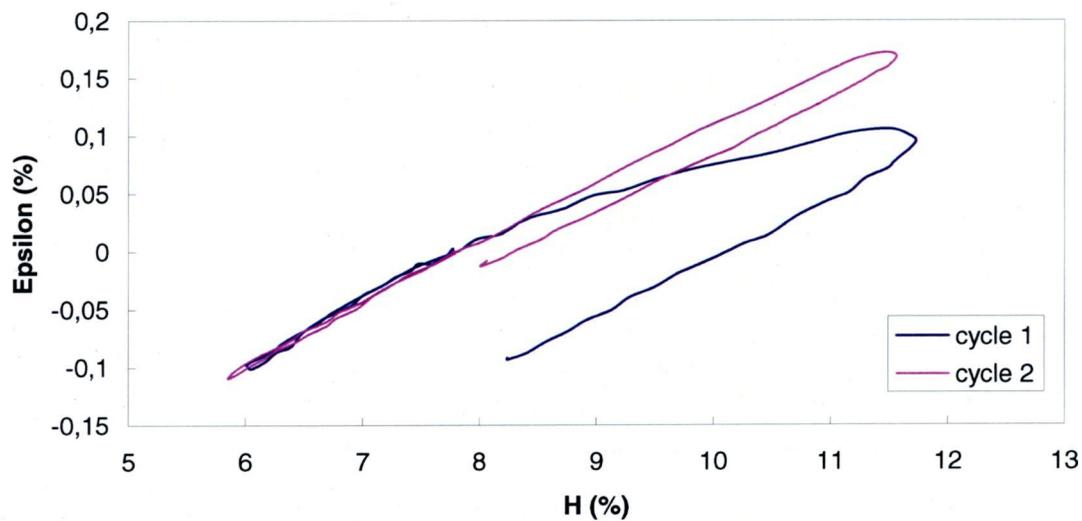


Figure D.11 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier HS (2 cycles consécutifs)

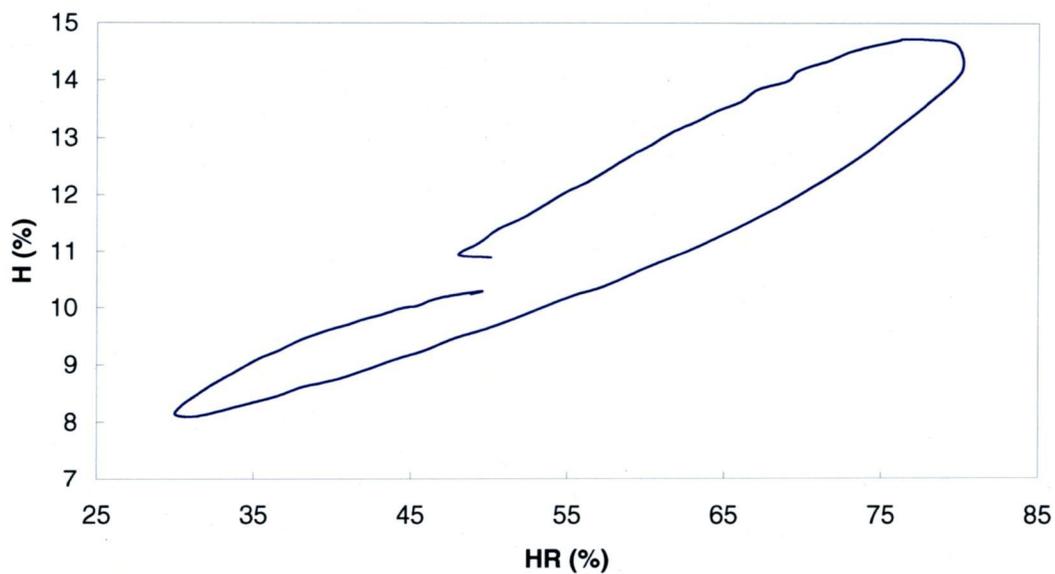


Figure D.12 : Courbe de sorption – Papier PTM

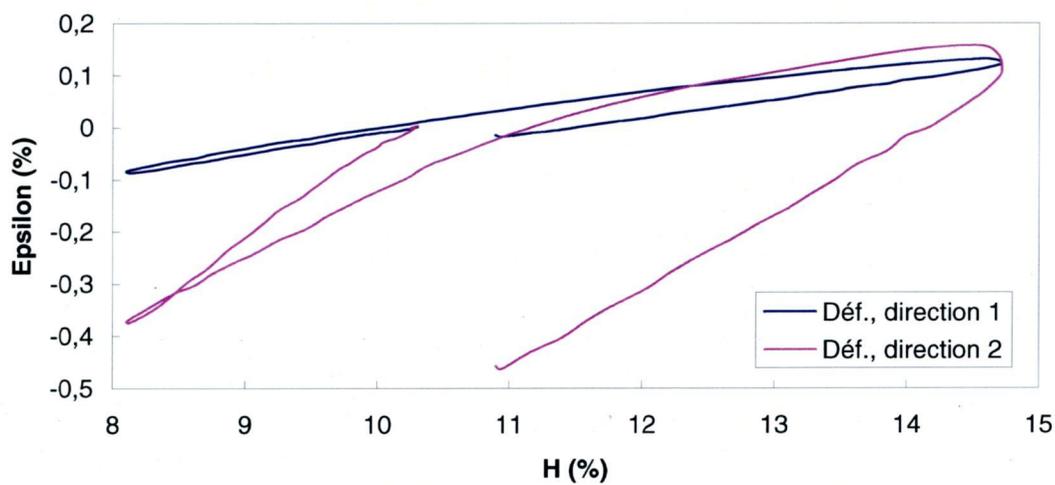


Figure D.13 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PTM

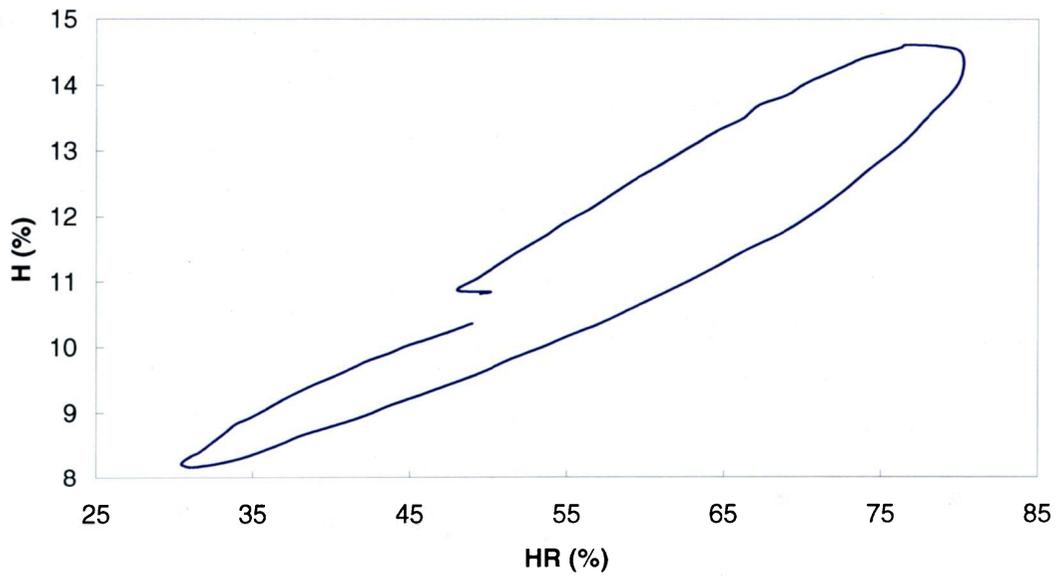


Figure D.14 : Courbe de sorption – Papier PJ 1.02

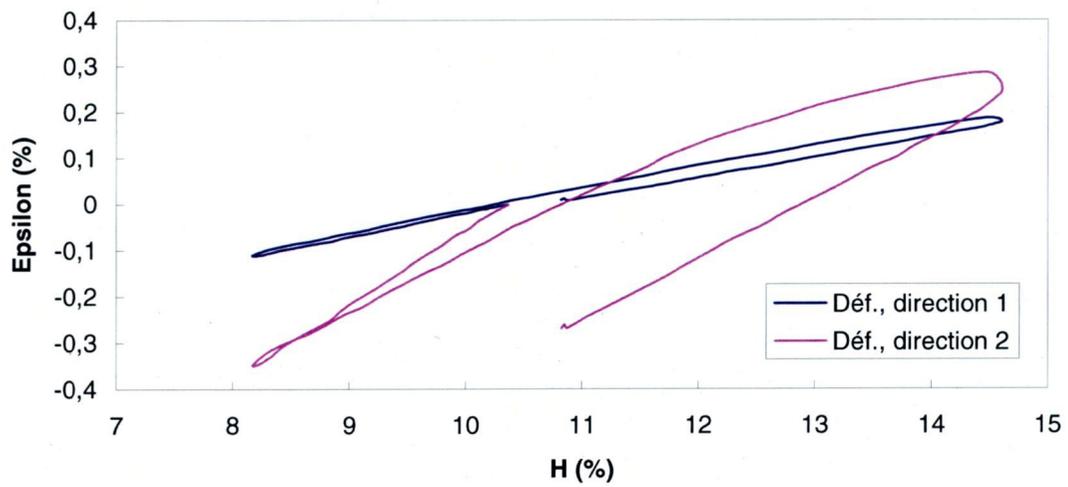


Figure D.15 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PJ 1.02

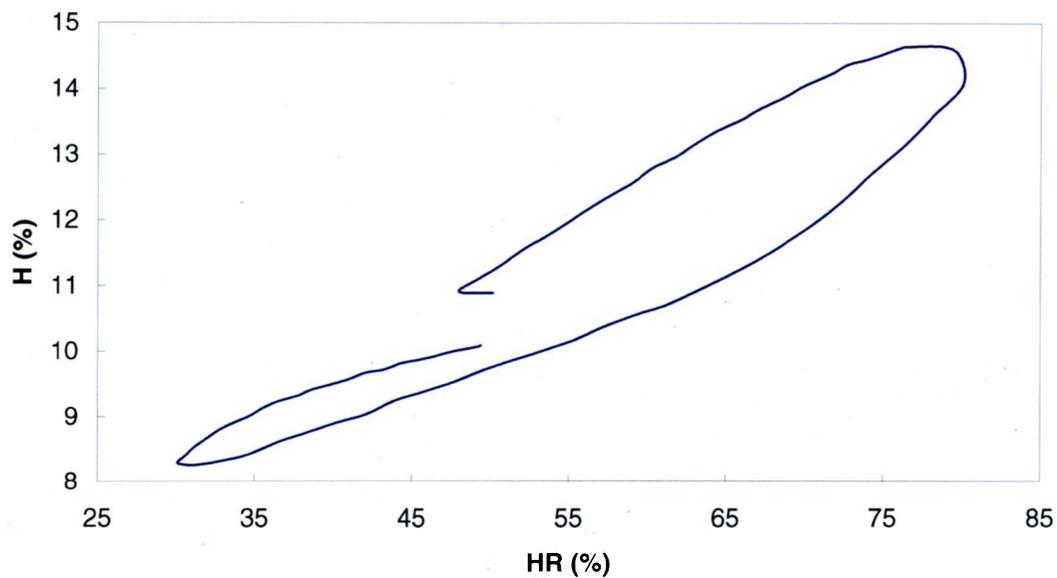


Figure D.16 : Courbe de sorption – Papier PJ 1.13

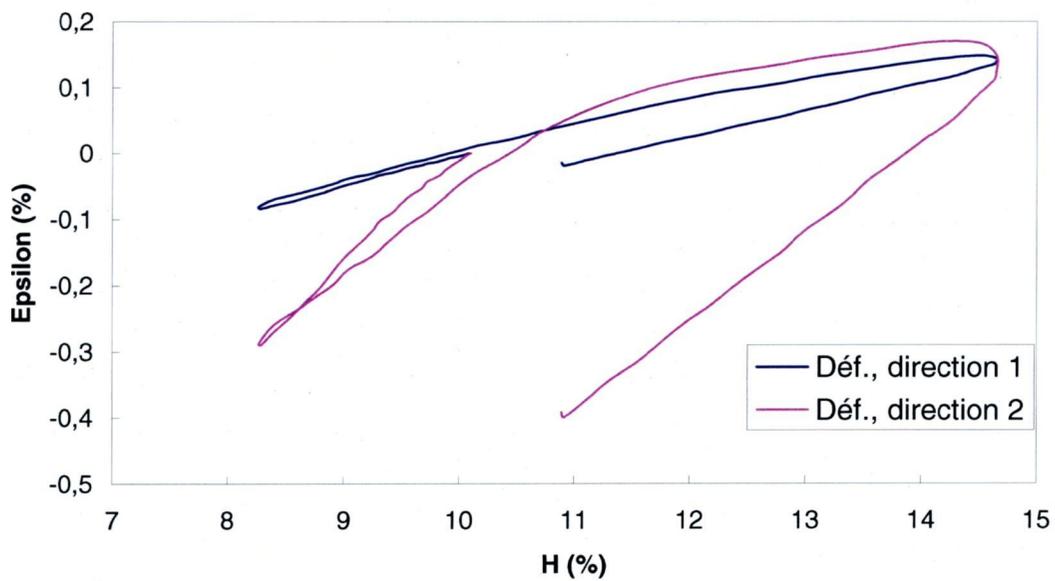


Figure D.17 : Déformation moyenne en fonction de la teneur en humidité – Papier PJ 1.13

### D.2.3

### Variations de masse obtenues pour l'essai de diffusion

Les Figures D.18 à D.21 présentent les variations de masse en fonction du temps des couches individuelles obtenues lors de l'essai de diffusion. La pente  $q$  introduite à l'équation (D.12) est calculée à partir de cette variation de masse.

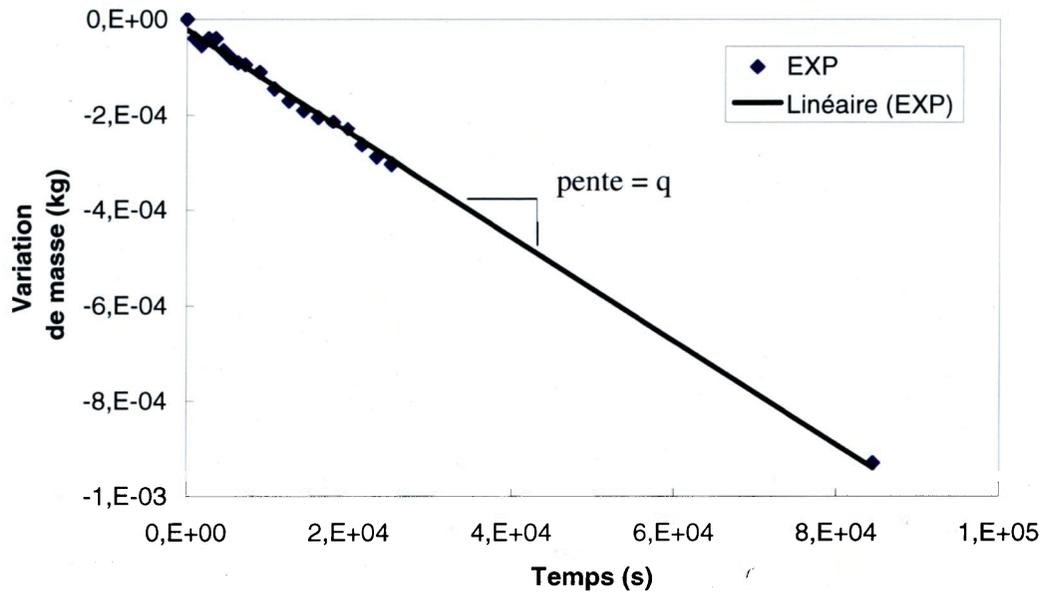


Figure D.18 : Variation de masse en fonction du temps – Papier HS

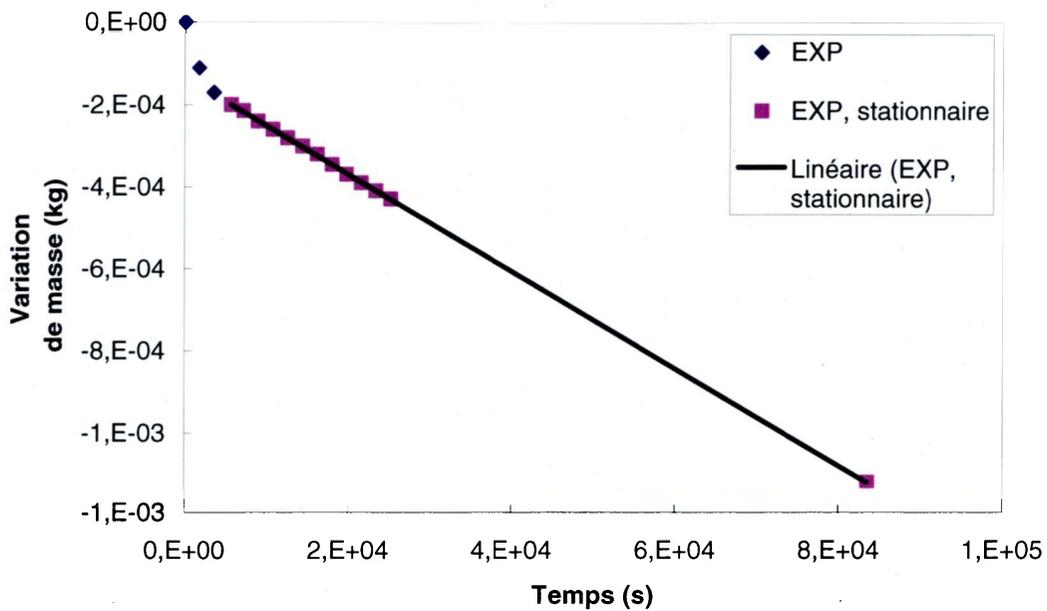


Figure D.19 : Variation de masse en fonction du temps – Papier PTM

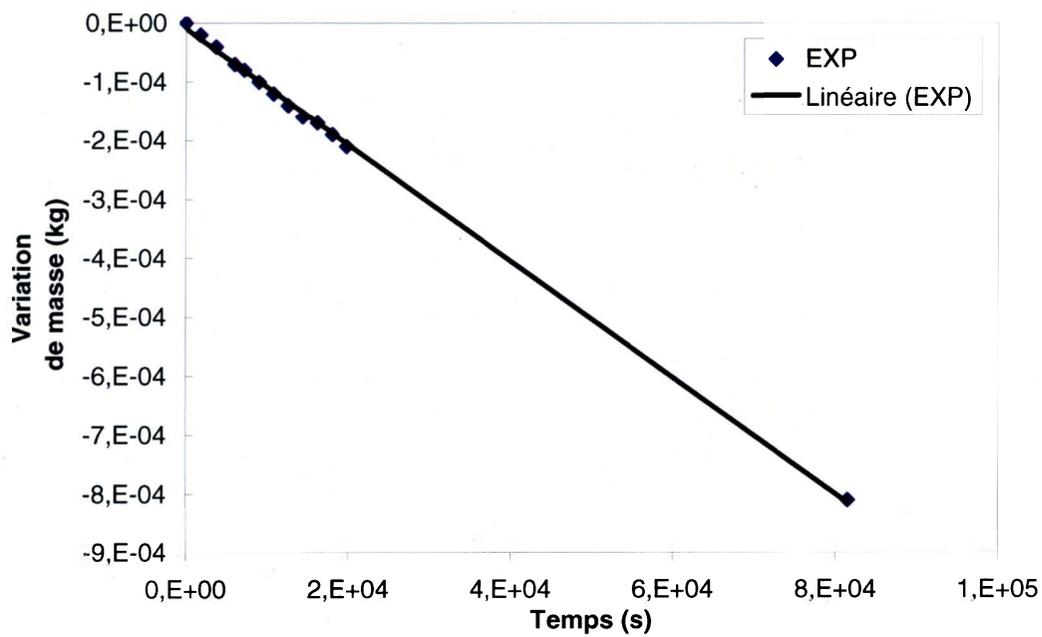


Figure D.20 : Variation de masse en fonction du temps – Papier PJ 1.02

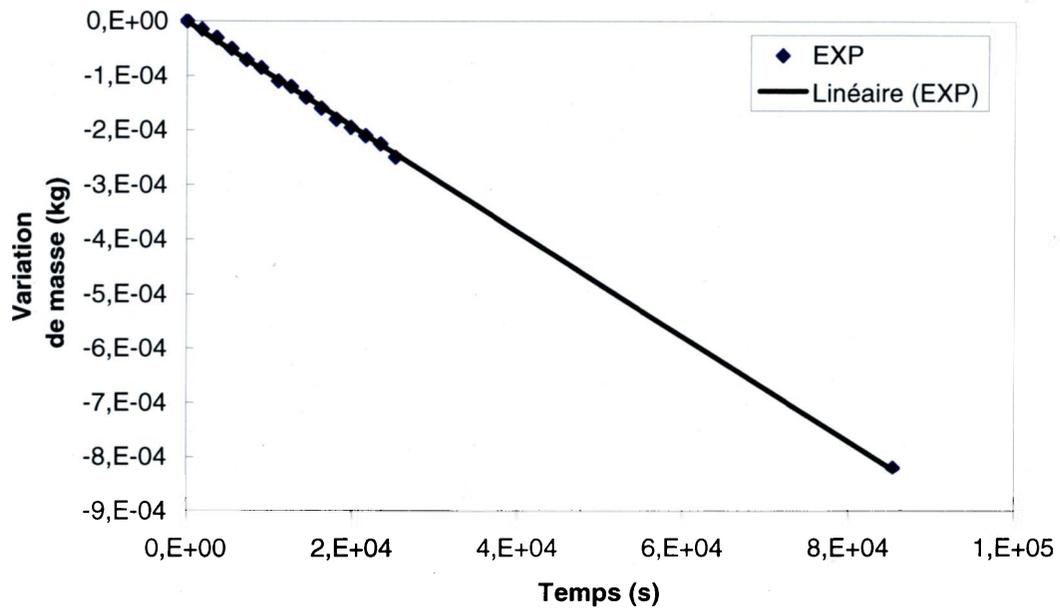


Figure D.21 : Variation de masse en fonction du temps

## D.3 Résultats obtenus pour les assemblages

### D.3.1 Tableau récapitulatif

Le Tableau D.2 présente les valeurs des différentes propriétés des assemblages obtenues lors des essais de caractérisation présentés précédemment.

Tableau D.2 : Résultats des essais de caractérisation – assemblages

Propriété	Unités	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
<b>e</b>	μm	223	223	205	202	161	268	246	263	357
<b>ρ</b>	(kg/m <sup>3</sup> )	464	521	505	583	657	592	628	625	619
<b>E<sub>x</sub></b>	(GPa)	2,91	4,39	3,84	4,70	5,23	6,53	7,79	6,88	6,59
<b>E<sub>y</sub></b>	(GPa)	1,73	3,05	2,54	3,49	2,60	3,95	3,57	4,63	3,73
<b>G<sub>xy</sub></b>	(GPa)	0,76	1,27	1,10	1,42	1,25	1,74	1,74	1,97	1,81
<b>v<sub>yx</sub></b>		0,19	0,21	0,21	0,24	0,20	0,22	0,16	0,24	0,17
<b>β<sub>x</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(*10 <sup>-3</sup> /%)	0,30	0,43	0,32	0,39	0,36	0,37	0,36	0,43	0,41
<b>80-50 % HR</b>	(*10 <sup>-3</sup> /%)	0,42	0,63	0,46	0,56	0,51	0,46	0,41	0,52	0,49
<b>β<sub>y</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(*10 <sup>-3</sup> /%)	0,47	0,66	0,49	0,67	1,12	0,80	1,20	0,98	0,92
<b>80-50 % HR</b>	(*10 <sup>-3</sup> /%)	0,78	1,07	0,80	0,95	1,98	1,12	1,71	1,26	1,25
<b>H<sub>75 % HR</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(%)	11,5	12,8	10,7	12,3	13,5	12,4	13,2	12,1	12,5
<b>80-50 % HR</b>	(%)	13,0	14,3	12,1	13,8	15,2	14,0	14,9	13,8	14,1
<b>H<sub>50 % HR</sub></b>										
<b>30-80 % HR</b>	(%)	8,3	9,8	7,4	9,2	10,3	9,4	10,1	9,4	9,6
<b>80-50 % HR</b>	(%)	9,6	11,4	8,8	10,6	12,1	10,8	11,8	10,8	11,1
<b>W<sub>del,x</sub></b>	(J/m <sup>2</sup> )	52	512	253	657	711	438	729	412	426
<b>W<sub>del,y</sub></b>	(J/m <sup>2</sup> )	53	422	41	661	710	420	673	561	430

### D.3.2 *Courbes de sorption obtenues pour l'essai d'expansion hydrique*

Les Figures D.22 à D.30 présentent les courbes de sorption chaque assemblage obtenues lors de l'essai d'expansion hydrique. La courbe de sorption est utilisée pour obtenir la teneur en humidité à une humidité relative donnée.

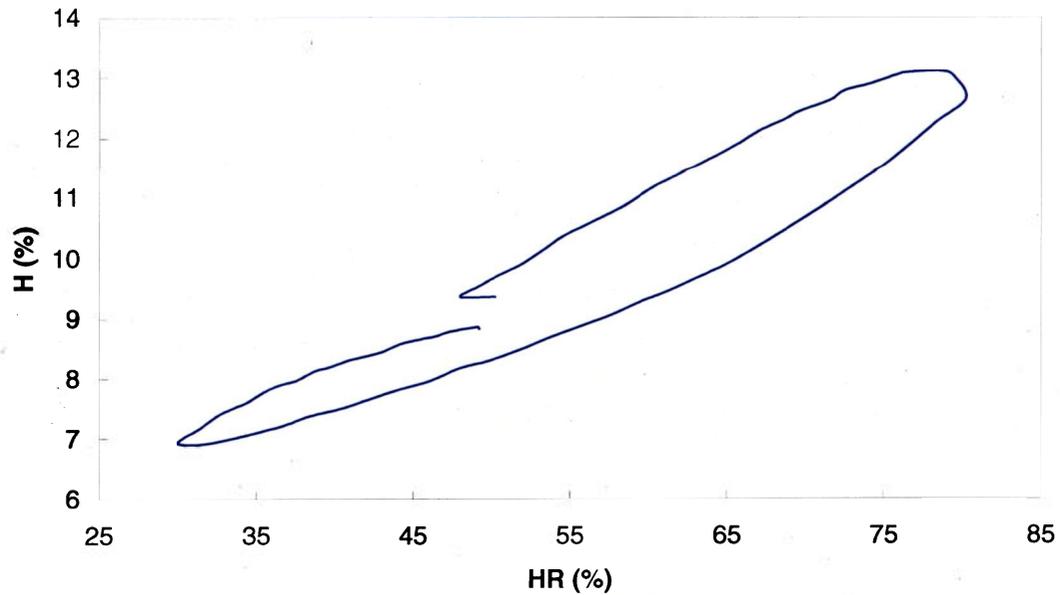
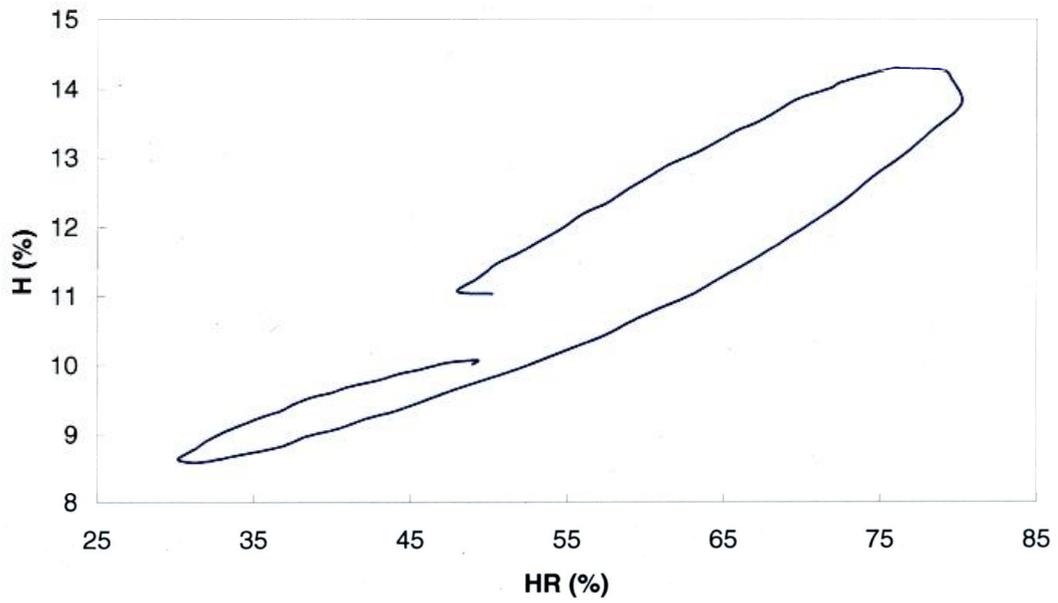
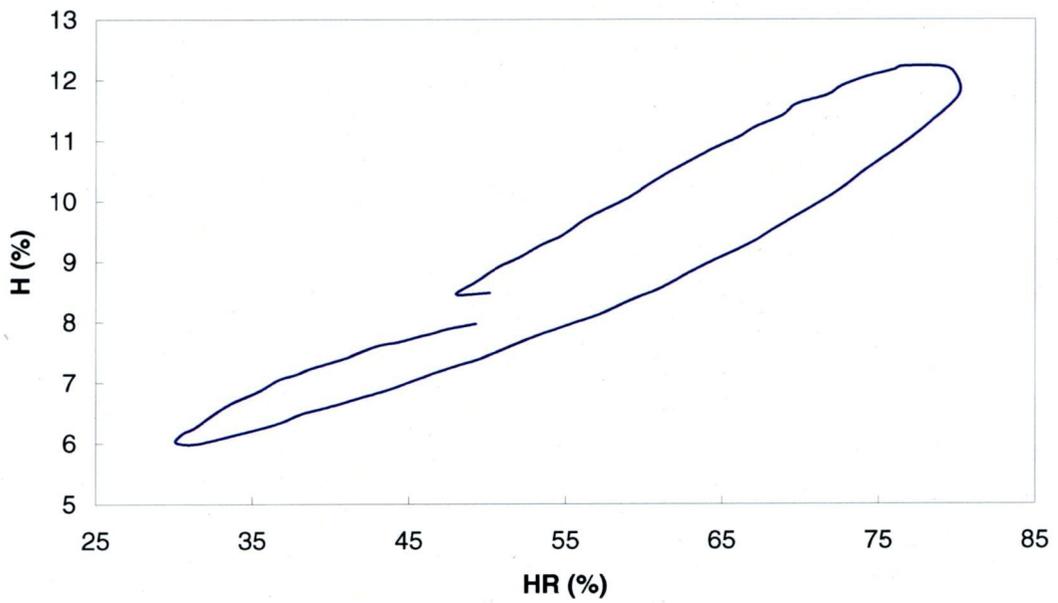


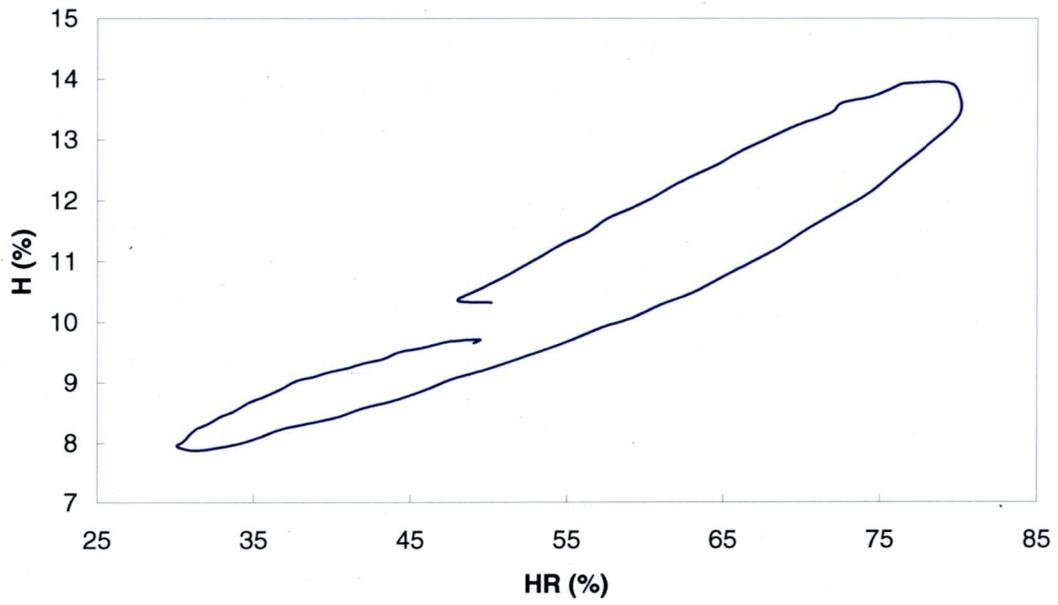
Figure D.22 : Courbe de sorption – Assemblage A1



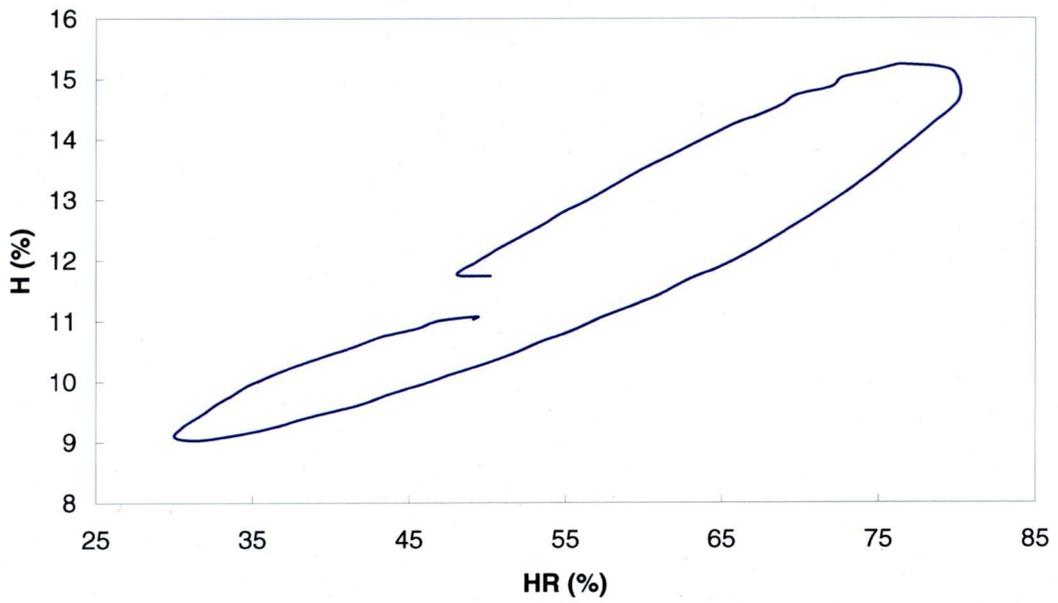
**Figure D.23 : Courbe de sorption – Assemblage A2**



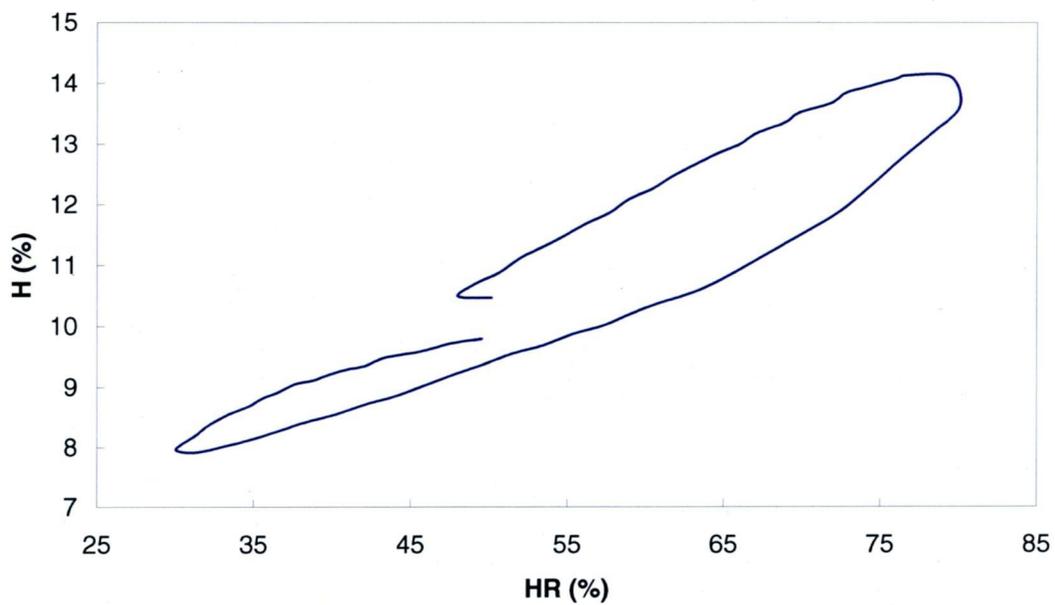
**Figure D.24 : Courbe de sorption – Assemblage A3**



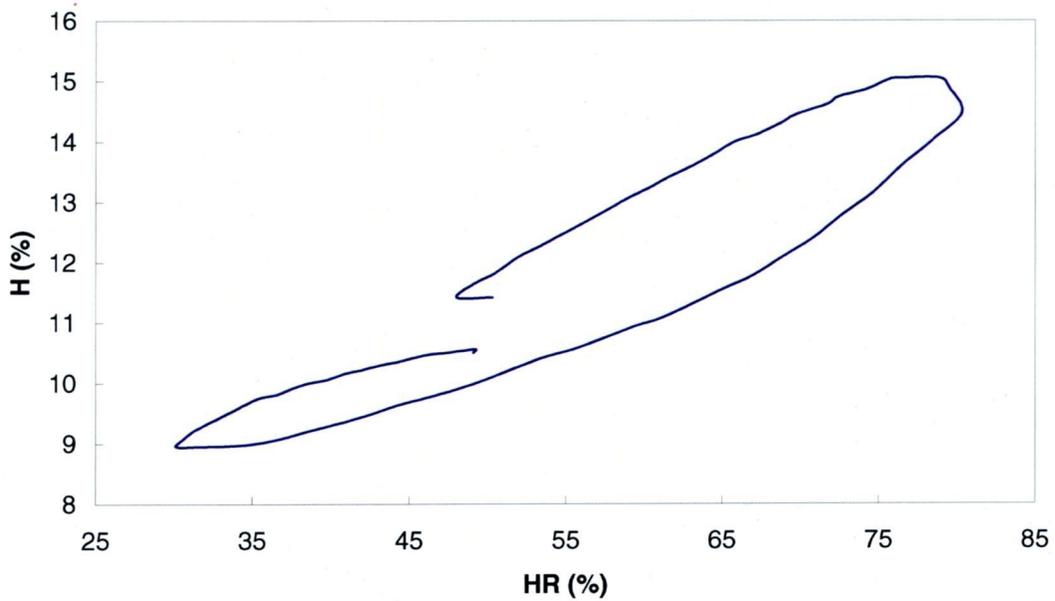
**Figure D.25 : Courbe de sorption – Assemblage A4**



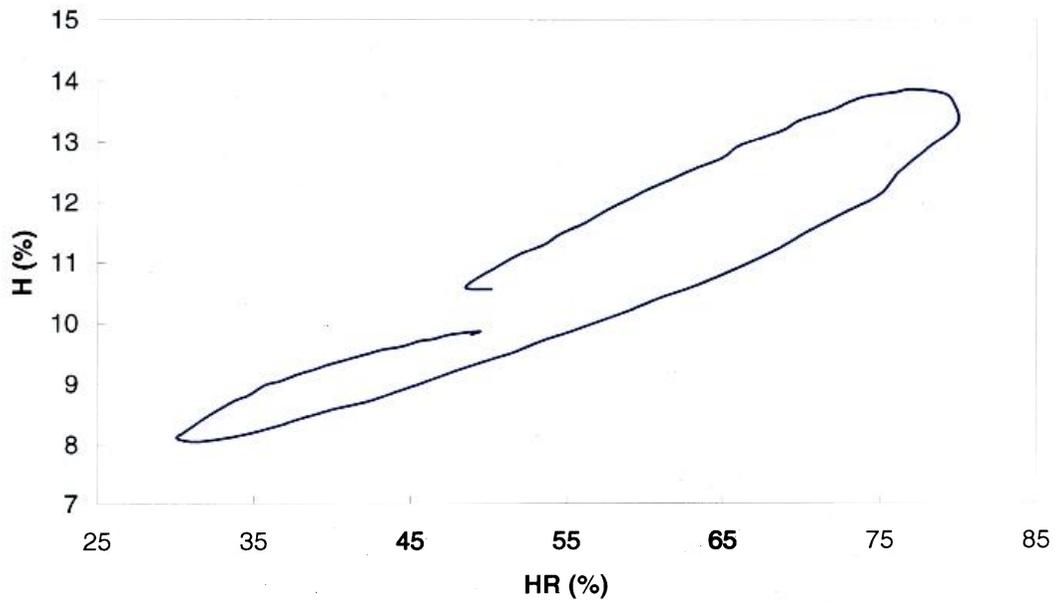
**Figure D.26 : Courbe de sorption – Assemblage A5**



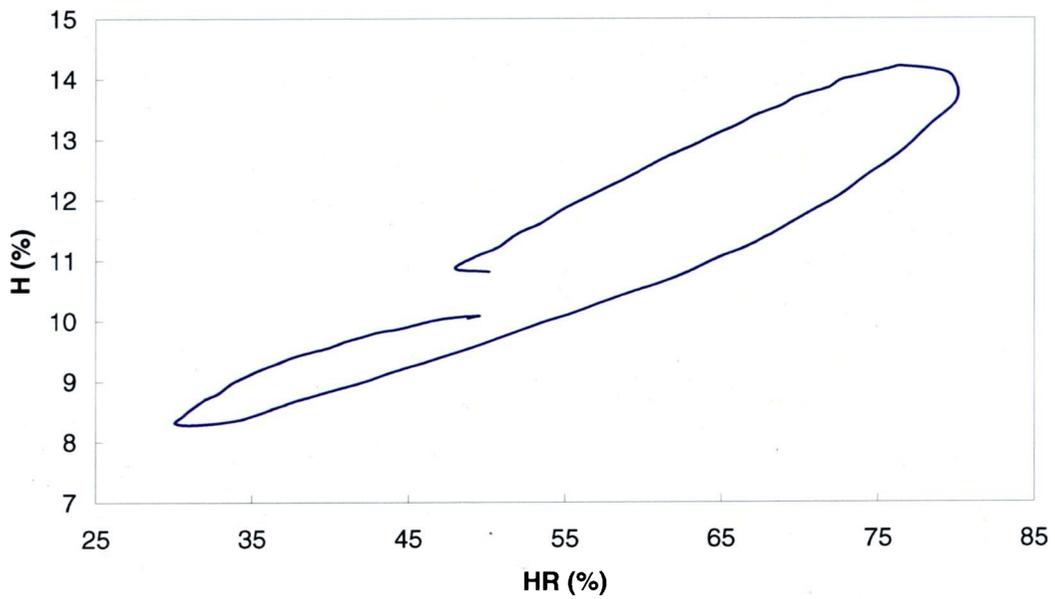
**Figure D.27 : Courbe de sorption – Assemblage A6**



**Figure D.28 : Courbe de sorption – Assemblage A7**



**Figure D.29 : Courbe de sorption – Assemblage A8**



**Figure D.30 : Courbe de sorption – Assemblage A9**

### D.3.3 *Énergies et modes de rupture obtenus lors de l'essai de délaminage*

Le Tableau D.3 présente pour chaque assemblage les énergies requises pour le délaminage dans les deux directions ainsi que le mode de rupture. On définit ici le mode de rupture par l'endroit où le délaminage se produit : à l'interface entre deux couches ou à l'intérieur même d'une couche. Parfois, la valeur moyenne de l'énergie requise pour le délaminage d'un assemblage donné est très proche ou égale à la valeur maximum de l'énergie pouvant être mesurée par l'appareil (730 J/m<sup>2</sup>). Dans ce cas, il est possible qu'il n'y ait pas de rupture à une interface ou à l'intérieur d'une couche, le pendule s'arrêtant sur le support de l'assemblage sans qu'il y ait séparation des pièces. On indique alors « n/a » pour le mode de rupture.

**Tableau D.3 : Énergies de délaminage moyennes et mode de rupture de chaque assemblage**

<b>Assemblage</b>	<b>W<sub>del,x</sub> (J/m<sup>2</sup>)</b>	<b>W<sub>del,y</sub> (J/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Mode de rupture</b>
A1	52	53	interface
A2	512	422	intérieur d'une couche
A3	253	41	interface
A4	657	661	intérieur d'une couche
A5	711	710	n/a
A6	438	420	intérieur d'une couche
A7	729	673	intérieur d'une couche
A8	412	561	interface
A9	426	430	interface

En consultant le Tableau D.3, on constate que ce sont les assemblages A1 et A3 qui présentent les plus faibles énergies requises pour le délaminage dans les deux directions, même s'il est curieux qu'il y ait une si grande différence entre les valeurs des deux directions pour l'assemblage A3. Ces assemblages présentent une rupture à l'interface de deux couches et correspondent aux seuls assemblages collés sans amidon. Cette technique de collage est donc possiblement déficiente. D'autre part, l'assemblage A5 est l'assemblage qui présente la meilleure résistance à la rupture (dans les deux directions). Lors de l'essai de délaminage, le pendule s'est arrêté net sur le support de cet assemblage sans qu'il y ait séparation des pièces.

## **Annexe E      Conception des assemblages multicouches**

Cette annexe présente les procédures à suivre pour le collage des assemblages avec ou sans amidon.

### **E.1      Procédure de collage pour les assemblages sans amidon**

1. Couper les feuilles PJ et PTM (sous leur forme humide) en utilisant une plaque miroir comme gabarit. Identifier les côté top (T) et bottom (B) et l'orientation MD. Remettre au réfrigérateur.
2. Fabriquer une formette selon le standard TAPPI T 205 sp-02.
3. Drainer la feuille pendant un temps inférieur au temps habituel.
4. Placer la feuille PJ ou PTM sur la formette.
5. Placer un premier papier buvard sur la feuille. Placer la plaque de roulage sur le papier buvard.
6. Rouler la feuille en faisant dix allers-retours à partir du centre de la feuille. Retirer la plaque de roulage.
7. Placer un second papier buvard sur le premier.
8. Renverser la feuille et placer une plaque miroir (côté miroir) contre la feuille.
9. Empiler toutes les feuilles subséquentes selon cette séquence, plaque miroir vers le haut.
10. Aligner les plaques. Presser une première fois à 90 psi.
11. Retirer les deux papiers buvards humides et les remplacer par un papier buvard sec.
12. Aligner les plaques. Presser une deuxième fois à 90 psi.
13. Sécher les feuilles selon la technique de séchage sous contraintes (plaques miroirs vers le haut, feuilles vers le bas, contre l'épaulement de l'anneau) pendant huit heures.

## **E.2 Procédure de collage pour les assemblages avec amidon**

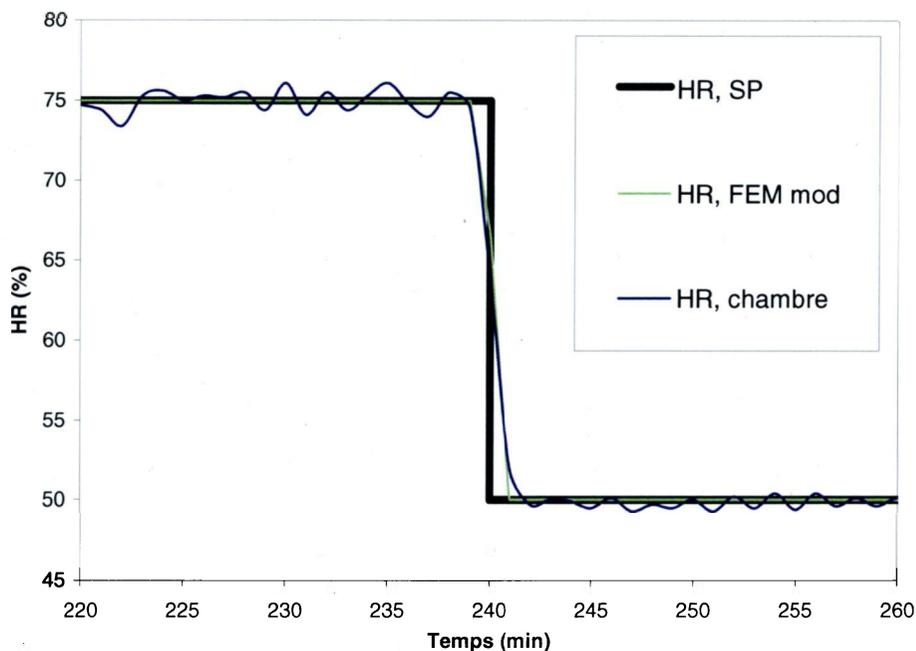
1. Couper les feuilles PJ et PTM (sous leur forme humide) en utilisant une plaque miroir comme gabarit. Identifier les côté top (T) et bottom (B) et l'orientation MD. Remettre au réfrigérateur.
2. Fabriquer et drainer une formette selon le standard TAPPI T 205 sp-02. Après le drainage, conserver la formette humide au réfrigérateur.
3. Placer deux papiers buvards sur la surface de travail.
4. Placer un papier filtre sur les papiers buvards (pour éviter que les feuilles collent au papier buvard).
5. Placer la première couche de papier sur le papier filtre.
6. Appliquer l'amidon sur la première couche de papier :
  - Appliquer deux couches d'amidon à l'aide d'un applicateur de type « rouleau à verni.
  - Appliquer l'amidon à partir du centre de la feuille vers l'extérieur pour éviter les plis.
7. Placer la deuxième couche de papier sur la première couche en alignant les sens MD.
8. Placer deux papiers buvards sur la feuille. Placer la plaque de roulage sur le papier buvard.
9. Rouler la feuille en faisant dix allers-retours à partir du centre de la feuille. Retirer la plaque de roulage et les papiers buvards.
10. Répéter les étapes 6 à 9 pour chaque couche de papier subséquente, jusqu'à l'obtention de l'assemblage voulu.
11. Placer une plaque miroir (côté miroir) contre la feuille.
12. Empiler toutes les feuilles multicouches selon cette séquence, plaque miroir vers le haut.
13. Aligner les plaques. Presser une première fois à 50 psi (feuilles à deux couches), 70 psi (feuilles à trois couches) ou 90 psi (feuilles à quatre couches).

14. Retirer les deux papiers buvards humides et les remplacer par un papier buvard sec.
15. Aligner les plaques. Presser une deuxième fois à 50 psi (feuilles à deux couches), 70 psi (feuilles à trois couches) ou 90 psi (feuilles à quatre couches).
16. Sécher les feuilles selon la technique de séchage sous contraintes (plaques miroirs vers le haut, feuilles vers le bas, contre l'épaulement de l'anneau) pendant huit heures.

## Annexe F      Modification du modèle d'éléments finis

### F.1      Description de la modification

En moyenne, le temps mis par la chambre environnementale pour passer de 75 % HR à 50 % HR est de trois minutes ( $\Delta t_{75-50} = 180$  s). Or, le modèle semi-analytique (MATH) et le modèle d'éléments finis (FEM) simulent une convection instantanée ( $\Delta t_{75-50} = 0$ ). Ainsi, il faut un modèle d'éléments finis plus précis pour simuler adéquatement le comportement réel de la chambre environnementale. Le modèle d'éléments finis est donc modifié (FEM mod) et utilise une variation linéaire de la teneur en humidité allant d'une teneur en humidité initiale  $H_0$  (75 % HR) au temps  $t = 0$  à une teneur en humidité finale  $H_\infty$  (50 % HR) au temps  $t = 180$  s. En réalité, l'humidité relative de la chambre environnementale ne passe pas de 75 % HR à 50 % HR de façon parfaitement linéaire. On peut constater ce fait en examinant la Figure F.1. La courbe noire (HR, SP) est l'humidité relative spécifiée à la chambre. Elle représente la condition de convection instantanée du modèle semi-analytique et du modèle d'éléments finis. La courbe verte (HR, FEM mod) représente l'humidité relative passant linéairement de 75 % à 50 % et représente la condition imposée au modèle d'éléments finis modifié. Enfin, la courbe bleue (HR, chambre) représente l'humidité relative réelle mesurée dans la chambre, en fonction du temps.



**Figure F.1 : Humidité relative en fonction du temps à l'intérieur de la chambre environnementale (saut de 75 % HR à 50 % HR)**

## **F.2 Effet de la modification sur la courbure à travers le temps**

L'effet de la modification apportée au modèle d'éléments finis a été vérifié lors des essais préliminaires de courbures. L'effet de cette modification n'est visible qu'au début de l'essai de courbure, tel qu'observé aux Figures F2 à F5. Pour les assemblages A1, A4, A6 et A9, les prédictions du modèle d'éléments finis modifié semblent concorder avec les résultats expérimentaux pour les deux premières minutes de l'essai. Par la suite, les prédictions du modèle d'éléments finis modifié vont rejoindre celle du modèle initial.

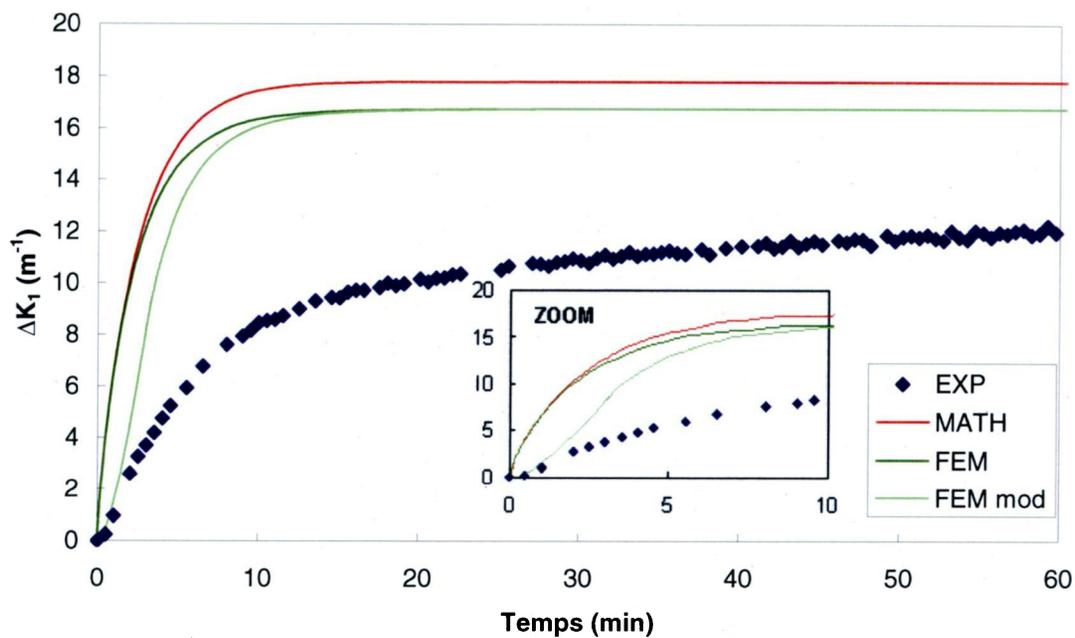


Figure F.2 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A1) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis

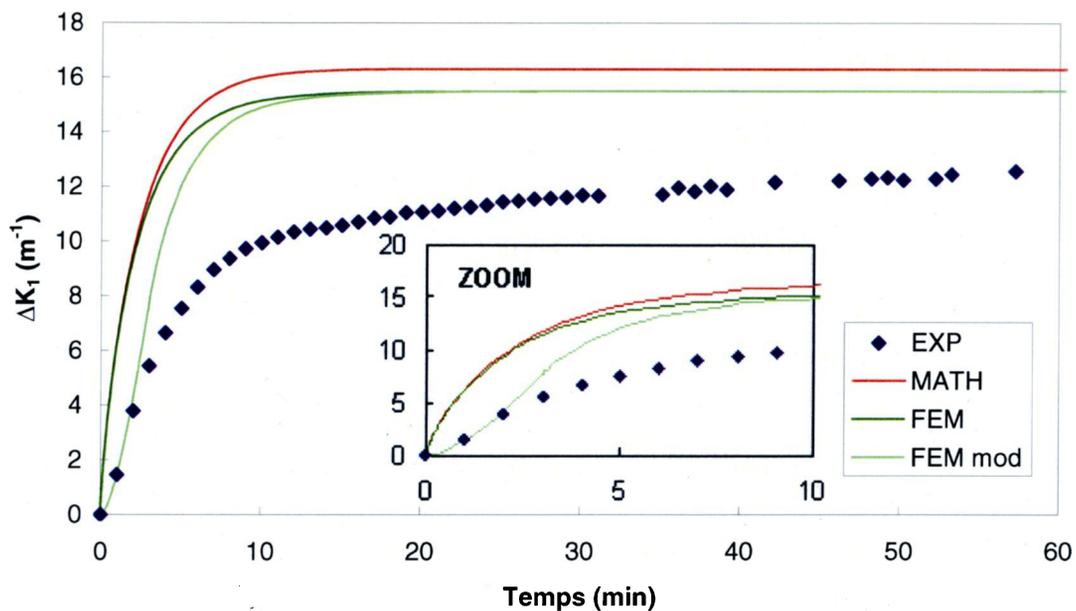


Figure F.3 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A4) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis

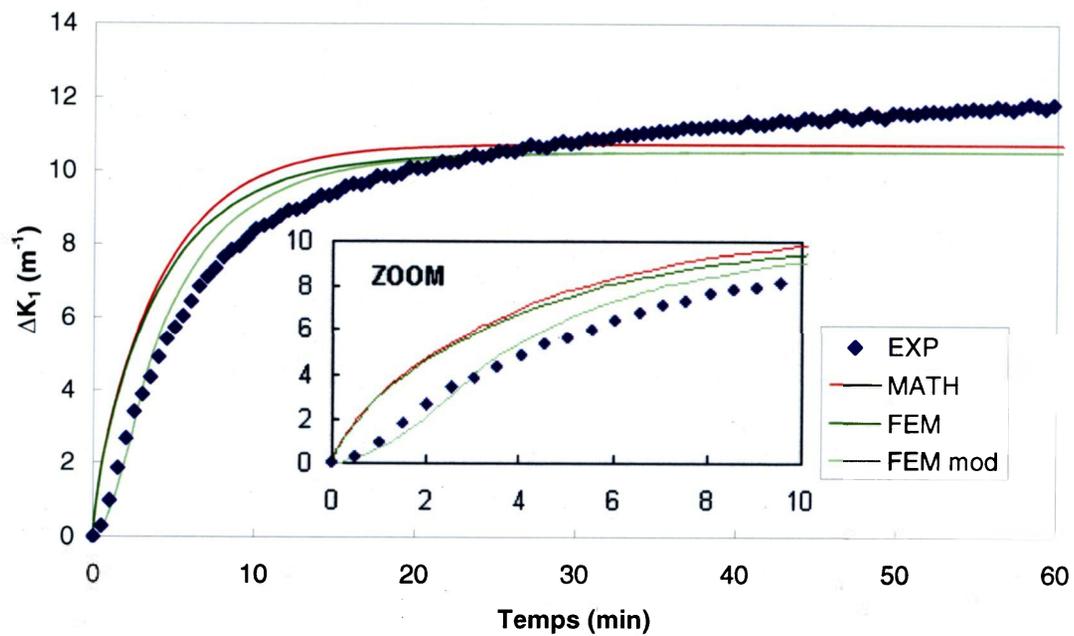


Figure F.4 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A6) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis

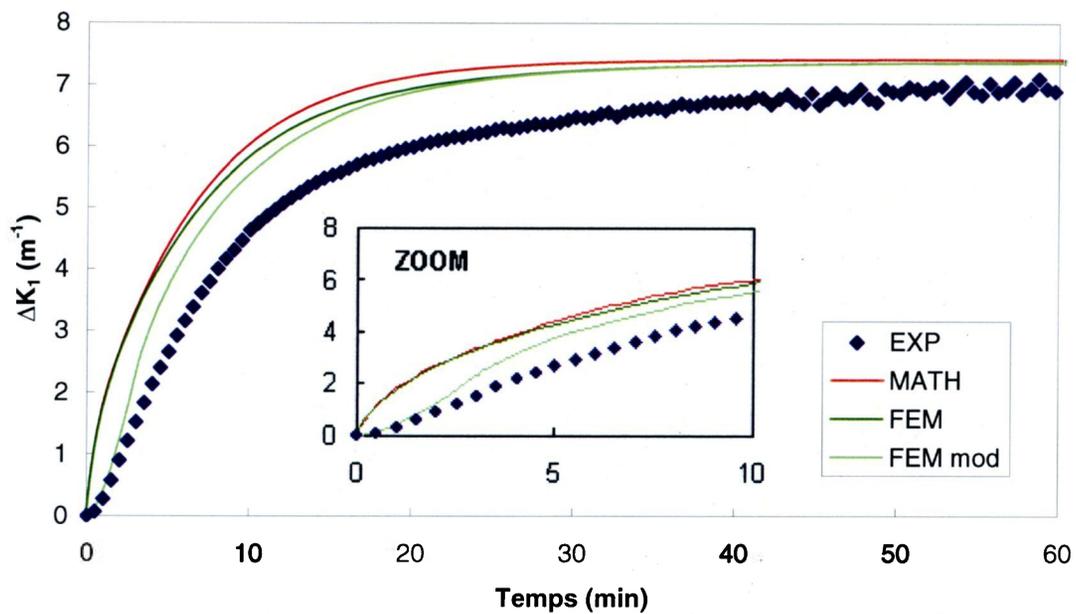


Figure F.5 : Changement de courbure principale en fonction du temps (Assemblage A9) – Effet de la modification du modèle d'éléments finis

## **Annexe G Étude de l'effet de la variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité**

### **G.1 Description de l'étude**

L'étude de l'effet de la variation des modules d'élasticités en fonction de la teneur en humidité est basée sur un article de Benson [17]. Cet article fournit des données relatives à la variation des modules d'élasticité du papier à pâte kraft, analogue au papier de type HS utilisé dans le présent travail. Il n'y a pas de données disponibles pour d'autres types de pâtes. Ainsi, les données disponibles seront considérées comme valides pour les autres papiers caractérisés lors des essais (PTM, PJ 1.102, PJ 1.13).

Les résultats des travaux de Benson montrent qu'une augmentation de 1 % de la teneur en humidité à l'équilibre d'un papier à pâte kraft fait diminuer le module d'élasticité en direction 1 de 5 % par rapport à sa valeur nominale. En direction 2, cette diminution est de 5,4 %.

Cette variation des modules d'élasticité est implémentée dans le modèle semi-analytique transitoire dans le but de vérifier son effet sur les courbures développées par l'assemblage A9, suite à une désorption de HR 75 % à HR 50 %. Les autres propriétés des couches individuelles demeurent inchangées.

### **G.2 Équations utilisées**

Pour un assemblage à  $M$  couches, les modules d'élasticité d'une couche de papier  $i$  dans les directions 1 et 2 sont exprimés en fonction de la teneur en humidité au centre de la couche :

$$E_{1,i}(H_{i,centre}) = E_{1,i,50} (1 + f_1(H_{i,centre} - H_\infty)), \quad (G.1)$$

$$E_{2,i}(H_{i,centre}) = E_{2,i,50} (1 + f_2(H_{i,centre} - H_\infty)), \quad (G.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

où  $H_{i,centre}$  est la teneur en humidité au centre de la couche en un temps donné,  $E_{1,i,50}$  et  $E_{2,i,50}$  sont les modules d'élasticité dans les directions 1 et 2 mesurés à HR 50 %,  $f_1$  et  $f_2$  sont les taux de variation des modules d'élasticité dans les directions 1 et 2 (/ %) et  $H_\infty$  est la teneur en humidité de l'assemblage multicouche en équilibre avec l'air ambiant à HR 50 %.

La teneur en humidité au centre d'une couche donnée  $H_{i,centre}$  peut être évaluée en tout temps  $t$  en utilisant l'équation générale de la distribution de l'humidité (2.44) et en y substituant la position du centre de la couche  $i$  :

$$H_{i,centre} = H\left(z = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, t\right), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (G.3)$$

où  $z_i$  et  $z_{i+1}$  sont les positions du dessus et du dessous de la couche  $i$ , respectivement.

Les taux de variation des modules d'élasticité dans les directions 1 et 2 sont obtenus à partir des données fournies par l'article de Benson [17]. Dans cet article, des variations de module d'élasticité de -0,29 GPa / % et de -0,15 GPa / % sont observés dans les directions 1 et 2 pour le papier à pâte kraft. En divisant ces variations par les valeurs nominales des modules d'élasticité (à HR 50 %), les taux de variation correspondant sont de  $f_1 = -0,05 / \%$  et de  $f_2 = -0,054 / \%$ . Ces taux sont basés sur des mesures de modules d'élasticité pour différentes teneurs en humidité à l'équilibre (régime permanent). Or, le

modèle semi-analytique simule un processus transitoire. Ainsi, la teneur en humidité au centre de la couche de papier en un temps  $t$  donné est utilisée pour simuler la variation des modules d'élasticité de la couche en régime transitoire.

Tous les types de papier utilisés dans ce travail (HS, PTM, PJ 1.02 et PJ 1.13) sont considérés comme similaires au papier à pâte kraft. De cette hypothèse, tous les papiers ont les mêmes taux de variation des modules d'élasticités. La Figure G.1 présente la variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité à l'équilibre pour les quatre types de papiers utilisés dans ce travail.

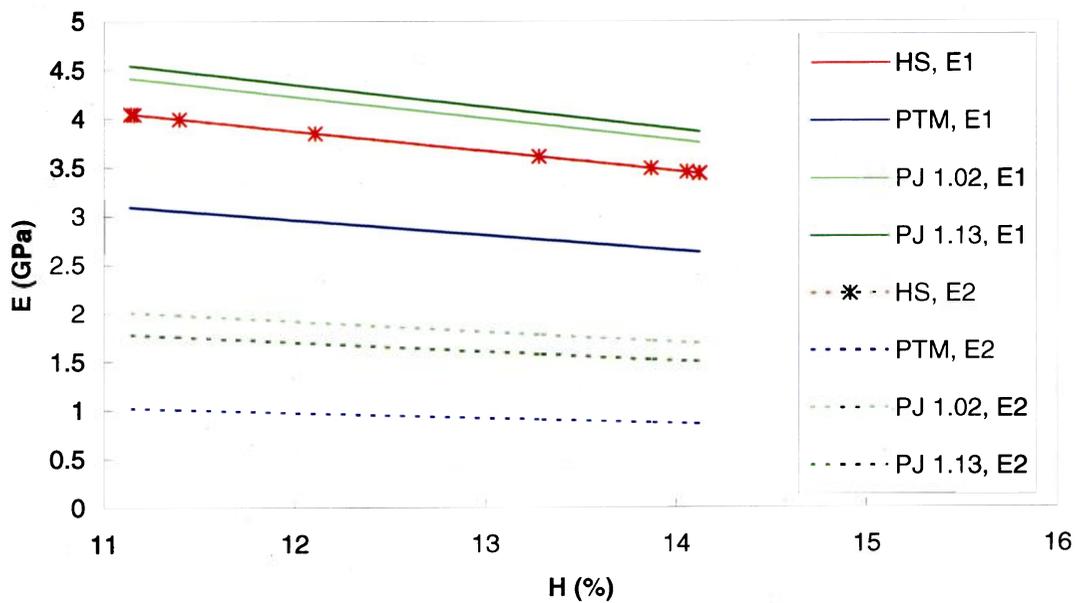


Figure G.1 : Modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité à l'équilibre

### G.3 Résultats

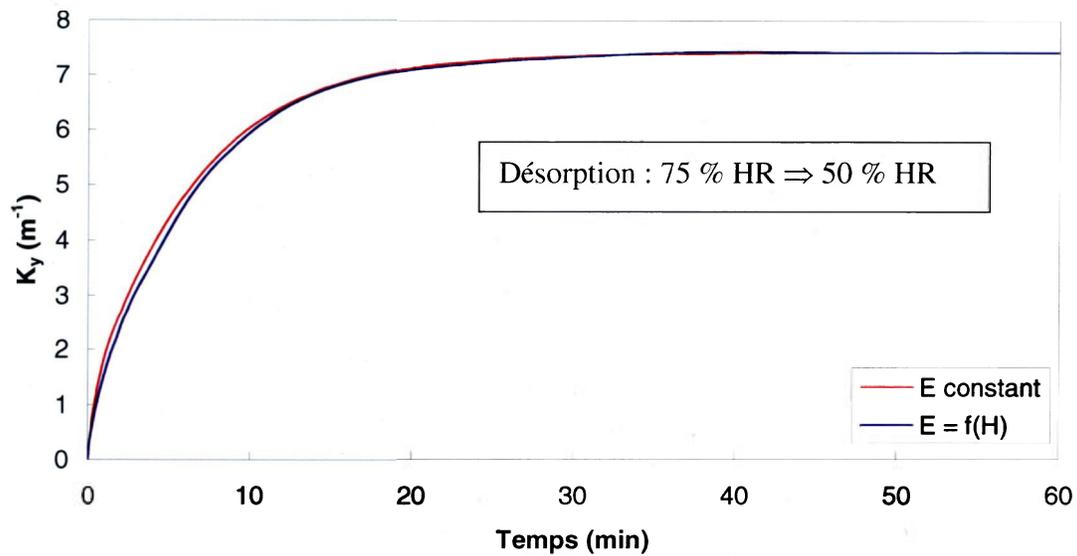


Figure G.2 : Courbure dans la direction  $y$  en fonction du temps pour des modules d'élasticité variables – Assemblage A9 en désorption

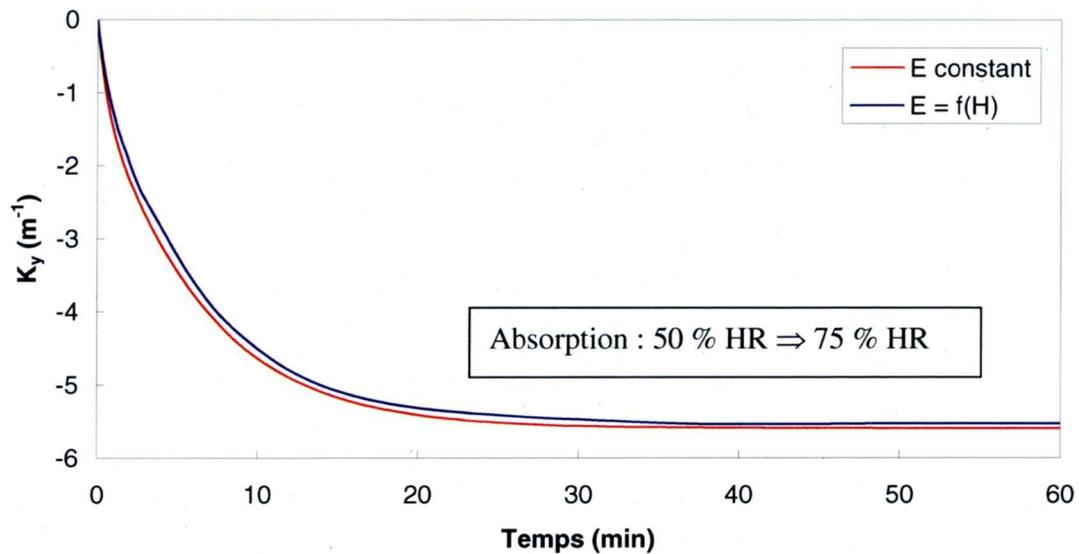


Figure G.3 : Courbure dans la direction  $y$  en fonction du temps pour des modules d'élasticité variables – Assemblage A9 en absorption

## G.4 Discussion

La Figure G.2 montre les résultats obtenus à l'aide du modèle semi-analytique transitoire. Il semble que tenir compte de la variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité au centre de chaque couche n'a que très peu d'effet sur le comportement de l'assemblage A9 soumis à une désorption de HR 75 % à HR 50 %. Il faut considérer que les couches individuelles de l'assemblage passent d'un état relativement « mou » (HR 75 %) à un état relativement « rigide » (HR 50 %).

Il est possible que l'effet de la variation des modules d'élasticité en fonction de la teneur en humidité soit plus appréciable lors d'une absorption de HR 50 % à HR 75 %. Lors de cette absorption, la courbure de l'assemblage multicouche pourrait être accentuée par le « ramollissement » des couches individuelles. La Figure G.3 présente les résultats de cette absorption simulée à l'aide du modèle semi-analytique transitoire. Encore ici, les effets des modules d'élasticité variables sur les courbures développées semblent minimales, même en absorption.