



Stabilité du vide

Mémoire

Maxime Trépanier

Maîtrise en physique
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Maxime Trépanier, 2017

Stabilité du vide

Mémoire

Maxime Trépanier

Sous la direction de :

Jean-François Fortin, directeur de recherche

Résumé

Un des problèmes fondamentaux qui survient dans la formulation de la théorie quantique des champs dans l'espace de Sitter est la transition possible vers l'espace Anti-de Sitter. Par un calcul semi-classique, on peut calculer le taux de transition, qui est non-nul. Or, une comparaison des degrés de liberté suggèrent qu'ils sont incompatibles et que la transition ne devrait pas avoir lieu. Une analyse plus approfondie d'un modèle de stabilité du vide met en lumière deux conditions qui pourraient résoudre ce paradoxe. En appliquant ces conditions au modèle standard, on obtient une borne sur la masse du boson de Higgs ainsi que sur la constante cosmologique. Bien qu'elles n'offrent pas une résolution complète du problème de la hiérarchie et de la constante cosmologique, ces contraintes pourraient jouer un rôle dans la formulation d'une théorie de la gravité quantique.

Abstract

A fundamental issue regarding the formulation of a consistent quantum de Sitter space theory is the possible transition to Anti-de Sitter space. Indeed, a semiclassical computation gives a nonzero estimate for the transition probability, while a counting of the degrees of freedom for both spaces shows their incompatibility, leading to the expectation that the transition is impossible. Through a deeper analysis of quantum tunneling in a semiclassical theory including gravity, one can outline two consistency conditions that could alleviate this seemingly paradoxical disparity. Applying these consistency conditions to the Standard Model shed a different light on the hierarchy problem and the cosmological constant problem, although it does not solve them altogether. Nevertheless, they could play a role in the formulation of a consistent theory of quantum gravity.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Table des figures	viii
Introduction	1
1 Modèle simplifié de l'instanton	4
1.1 Approximation semi-classique	4
1.2 Équations du mouvement	6
1.3 Approximation thin-wall	7
1.4 Potentiel quartique	10
1.5 Solution dans l'espace Minkowski	12
Compléments	
1.A Théorie quantique des champs en temps euclidien	14
1.B Approximation semi-classique	14
1.C Généralisation à plusieurs champs	15
2 Effets de la gravité	16
2.1 Modèle incluant la gravité	16
2.2 Solutions particulières	18
2.3 Reformulation du problème	21
2.4 Théorème d'énergie positive	24
2.5 Solutions asymptotiques	27
2.6 Approximation thin-wall	31
2.7 Limites d'applicabilité et régime thermique	35
2.8 Contraintes sur la stabilité du vide	36
Compléments	
2.A À l'intérieur de la bulle : perspective cosmologique	38
2.B Ensemble thermique et espace de de Sitter	39
2.C Instanton Hawking-Moss	40

3	Méthodes numériques	42
3.1	Résumé de la méthode	42
3.2	Calibration et précision	43
3.3	Calcul de κ_*	44
3.4	Résultats numériques et exploration	46
4	Vide électrofaible	51
4.1	Théorie de jauge	51
4.2	Mécanisme de Higgs	52
4.3	Modèle de Glashow-Weinberg-Salam	53
4.4	Modèle standard	54
4.5	Problème de la hiérarchie	57
4.6	Calcul du potentiel effectif	64
4.7	Stabilité du vide électrofaible	65
	Compléments	
4.A	Groupe de renormalisation	70
4.B	Théorie quantique des champs à température non-nulle	72
4.C	Axions	74
	Conclusion et perspectives	76
	Bibliographie	78

Liste des tableaux

3.1	Valeur critique κ_c et points initiaux y'_0 pour des potentiels polynomiaux	50
4.1	Liste des champs et leurs représentations pour une génération du modèle standard.	55

Liste des listes

Liste des listes	vii
----------------------------	-----

Table des figures

1.1	Définition des constantes avec un exemple de potentiel générique	5
1.2	Solution analytique au potentiel quartique normalisé	11
1.3	Diagramme Minkowski d'une désintégration du vide	13
2.1	Instanton sous-critique avec $\alpha = 0.5$	23
2.2	Instanton critique $\alpha \sim 1$	23
2.3	Instanton surcritique pour $\alpha = 1.5$	23
2.4	$R_{tw}(\alpha, \xi^*)$ calculé dans l'approximation thin-wall.	34
2.5	Limite d'applicabilité de l'approximation thin-wall	36
3.1	Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour un potentiel quartique sans gravité.	44
3.2	Comparaison entre la solution numérique et l'approximation thin-wall.	45
3.3	Graphique de $\kappa^*(\Delta v)$ pour un potentiel quartique normalisé.	46
3.4	Évolution des extrémités de l'instanton en fonction de α	47
3.5	Fit de R_{tw} sur R_{num}	49
3.6	Comparaison entre la prédiction thin-wall non-corrigée, corrigée, et les résultats numériques.	50
4.1	Résumé du modèle standard	57
4.2	Diagrammes de Feynman pour le potentiel effectif du boson de Higgs	57
4.3	Correction à la masse du Higgs pour un fermion de masse m_f normalisée à $m_\Lambda^2(\Lambda^2 = 4m_f^2) = 0$	59
4.4	Évolution de la constante de couplage quartique du Higgs en fonction de l'échelle d'énergie.	66
4.5	Potentiel effectif du Higgs pour différentes valeurs de la masse du Higgs	67
4.6	Diagramme de stabilité du potentiel effectif du Higgs en fonction de la masse du Higgs M_h et du quark top M_t	68
4.7	Diagrammes contribuant à la constante de couplage quartique λ à une boucle pour une théorie ϕ^4	72

Liste des abréviations

AdS Anti-de Sitter. 18–21, 37, 38, 40, 73, 76, 77

BPS Bogomol’nyi–Prasad–Sommerfield. 26

CdL Coleman-de Luccia. 35, 37, 39–41, 76

CFT théorie conforme des champs. 21, 37, 40, 73, 77

dS de Sitter. 18–20, 38, 40, 76

FLRW Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. 38

GWS Glashow-Weinberg-Salam. 53, 54

HM Hawking-Moss. 35, 36, 40, 41, 47, 76

LHC Large Hadron Collider. 2, 65

QCD chromodynamique quantique. 74

QFT théorie quantique des champs. 71, 76

RK4 Runge-Kutta 4. 42, 43

UV ultraviolette. 21, 57, 65

*À mon grand-père,
dont la passion pour les
mathématiques continue
de se transmettre.*

Causas rerum naturalium
non plures admitti debere,
quàm quæ et veræ sint
et earum phænomenis
explicandis sufficient.

Sir Isaac Newton

Introduction

À bien des égards, l'histoire de la physique est exceptionnelle : peu de disciplines peuvent en effet se targuer d'avoir autant contribué à façonner la société moderne. Entre la révolution initiée par Copernic qui remet en question la place de l'humanité dans l'Univers, et l'avènement de la relativité générale et de la mécanique quantique qui remirent en question notre conception de l'Univers lui-même, bien peu laissait présager que derrière tout ce chaos, toute la variété et la complexité des phénomènes qui nous entourent, puisse se trouver des principes mathématiques d'une simplicité déconcertante.

Un des succès majeurs de la physique contemporaine qui s'inscrit dans cette démarche d'unification est sans contredit la formulation et la mise à l'épreuve du modèle standard de la physique des particules. Bien plus qu'un simple outil calculatoire, le modèle standard offre un cadre théorique explicatif qui regroupe dans un même formalisme les trois interactions importantes de la physique des particules : la force électromagnétique (électrodynamique quantique), l'interaction nucléaire faible (théorie de Glashow-Weinberg-Salam) et la force nucléaire forte (chromodynamique quantique). Parmi ses prédictions, la plus spectaculaire est sans doute celle pour le moment magnétique anomal de l'électron confirmée à 12 chiffres significatifs, une précision qui n'est surpassée que par certaines expériences de relativité restreinte.

Or, si le modèle standard jouit d'une popularité aussi importante, ce n'est pas seulement grâce à ce tour de force de précision, mais aussi parce qu'il repose sur un nombre assez restreint d'hypothèses : théorie quantique des champs, quelques particules élémentaires, 19 paramètres libres et 3 groupes de symétrie. Il serait étonnant que la nature s'arrête en si bon chemin ; aussi est-il tentant de chercher à reproduire le mécanisme de l'unification de la force électrofaible : une théorie grandement unifiée qui expliquerait les trois forces en termes d'un seul groupe de symétrie, moins de paramètres, et moins de particules.

Un premier pas dans cette direction fut réalisé par Georgi et Glashow qui proposèrent en 1974 une unification du modèle standard à travers le groupe $SU(5)$. Non seulement parvinrent-ils à reproduire le contenu en particules du modèle standard et expliquer la quantification de la charge, ils obtinrent également un résultat inattendu : une échelle d'unification. En effet, les constantes de couplage convergent sous le flot du groupe de renormalisation vers une région assez petite entre 10^{14} GeV et 10^{16} GeV, soit proche, mais en deça de la masse de Planck. Cette prédiction est intéressante, car le flot du groupe de renormalisation est

logarithmique : le point d'intersection aurait pu aussi bien se situer à 10^{100} GeV, où il ne fait pas de sens. Le fait qu'il se trouve sous la masse de Planck suggère qu'une unification des forces fondamentales pourrait se produire sans même inclure les effets de la gravité quantique, et donne espoir que l'on puisse expliquer une partie des problèmes qui accablent le modèle standard sans avoir recours à une théorie de la gravité quantique. Pour parfaire le modèle, ils obtinrent une prédiction à tester au laboratoire : la désintégration du proton. Or, il existe de fortes contraintes sur l'observation expérimentale de la désintégration du proton (de l'ordre de $\tau_p > 10^{33}$ ans), ce qui invalide (de peu) la théorie.

Avant de déclarer forfait, on peut commencer par vérifier s'il y a d'autres imperfections dans le modèle qui, une fois corrigées, pourraient remettre la théorie sur ses pieds. Il en existe justement une : le problème de la hiérarchie, qui consiste à expliquer pourquoi la masse du boson de Higgs est aussi faible par rapport à l'échelle de Planck. Sa solution par excellence est la supersymétrie, qui résout une multitude de problèmes et aide aussi, dans une certaine mesure, à stabiliser le proton. Toutefois, elle prédit également des superpartenaires aux fermions à l'échelle électrofaible, qui ne sont pas observés aujourd'hui au Large Hadron Collider (LHC). Ce nouvel échec de la théorie nous invite à revisiter le problème de la hiérarchie et proposer de nouvelles solutions.

Dans ce mémoire, j'explorerai une observation qui pourrait offrir une résolution partielle du problème de la hiérarchie. Il a en effet été remarqué que le boson de Higgs se trouvait particulièrement proche de la limite de stabilité du vide électrofaible, ce qui pourrait offrir un indice sur le mécanisme par lequel le boson acquiert une masse aussi faible. L'instabilité est causée par un deuxième minimum qui se développe dans le potentiel effectif du Higgs sous l'effet des corrections quantiques dues à une boucle de fermions, et ce, à une énergie comparable à celle de la masse de Planck. Il peut alors y avoir une transition par effet tunnel du minimum électrofaible (avec une valeur moyenne du boson de Higgs à 250 GeV) au minimum transplanckien si ce dernier est plus bas. Pour bien explorer cette question spéculative, on doit analyser plus en profondeur les caractéristiques des instantons reliés à ces transitions à travers des modèles de stabilité du vide.

Plus généralement, les modèles de stabilité du vide apparaissent à plusieurs endroits et semblent être nécessaires à une description quantitative de nombreux phénomènes, au nombre desquels on peut compter les scénarios d'inflation, le *landscape* en théorie des cordes, les mécanismes de brisure de symétrie spontanée et les transitions de phase en physique statistique. Ces domaines d'application aussi intéressants que variés motivent une exploration plus approfondie des instantons pour des potentiels génériques.

Évidemment, ce mémoire n'est pas le premier ouvrage sur le sujet. Les articles publiés sur le sujet ont tendance à se trouver dans l'une ou l'autre des catégories suivantes. Les premiers discutent de la stabilité du vide électrofaible d'un point de vue phénoménologique et s'inté-

ressent à accumuler les corrections et les contraintes sur le modèle, ce qui inclut (mais n'est pas restreint) aux corrections dues à la gravité, à la température, à la présence de trous noirs primordiaux, etc. Les seconds s'intéressent généralement à explorer les modèles de stabilité génériques. Le progrès dans cette direction s'est fait plus ténu, essentiellement parce que les propriétés émergentes de ces systèmes dépendent de critères non-locaux et reposent sur des hypothèses non-prouvées, ce qui indique un échec de l'analyse à démontrer des résultats qui nous apparaissent intuitifs (mais peut-être que notre intuition est erronée). Cela étant, le progrès s'y exprime surtout par une étude numérique des différents cas de figure visant à identifier les types de solutions et leurs propriétés. Il manque donc une étude systématique et générale des régimes d'instantons qui reproduirait les exemples numériques déjà identifiés. Ce mémoire se veut un premier pas dans cette direction, et complète une analyse initiée par Coleman et de Luccia.

Étant donné ces deux inclinaisons distinctes, le présent document est essentiellement divisé en deux parties. Dans la première partie, je discute des propriétés génériques des modèles de stabilité du vide, alors que dans la seconde, je me pencherai plus précisément sur le modèle standard et les conclusions qui en découlent. Ainsi, bien que la motivation derrière les résultats des premiers chapitres n'est présentée qu'au chapitre 4, l'effort du lecteur est récompensé par une conclusion immédiate des contraintes sur le modèle standard et une perspective plus générale sur les instantons.

Le chapitre 1 introduit un modèle simple (mais suffisant dans bien des cas) pour l'étude de la stabilité du vide, ce qui permet de placer les paramètres importants dans un contexte plus simple et donner une idée sur la forme des solutions. Le chapitre 2 présente une analyse plus complète incluant les corrections dues à la gravité et constitue le cœur des résultats obtenus au cours de cette maîtrise. Le chapitre 3 discute des méthodes numériques utilisées pour obtenir des réponses précises à des cas particuliers, et fournit une vérification des résultats analytiques du chapitre 2. Finalement, le chapitre 4 discute de l'application des conclusions précédentes au modèle standard et comment elles s'inscrivent dans la perspective du problème de la hiérarchie.

1

Modèle simplifié de l'instanton

Ce chapitre retrace les principaux résultats d'un éclairant article de Coleman sur le problème de la stabilité du vide [1]. Bien que certaines conclusions soient affectées ou invalidées par l'ajout de la gravité (cf. chapitre 2) et de la température (cf. section 4.B), le cadre explicatif reste sensiblement le même sans les complications supplémentaires, et le problème présente un intérêt en soi.

1.1 | Approximation semi-classique

On s'intéresse à modéliser une transition de phase en théorie quantique des champs. La théorie la plus simple¹ que l'on puisse proposer est celle d'un seul champ scalaire soumis à un potentiel arbitraire qui possède deux minima :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (1.1)$$

On dénote φ_F la position du faux minimum et φ_T celle du vrai minimum (se référer à la figure 1.1). Classiquement, l'état de faux vide φ_F serait stable jusqu'à une certaine énergie d'activation correspondant à la hauteur de la barrière de potentiel, mais à cause de l'effet tunnel, le champ peut traverser la barrière de potentiel pour se retrouver dans l'état d'énergie minimale φ_T avec une probabilité non-nulle. L'effet résultant est que, sous l'effet des fluctuations quantiques, une bulle de vrai vide peut apparaître dans le faux vide et croître pour éventuellement occuper tout l'espace.

Pour simplifier le problème, on passe au temps euclidien en faisant une rotation de Wick² ($x^0 = t \rightarrow i\tau$). Puisque l'on s'attend à ce que nos solutions soient invariantes de Lorentz, il

1. Il s'agit également du scénario pertinent pour le vide électrofaible ou une compactification de la théorie des cordes. Les théories avec spin non-nul ont peu été étudiées, car elles brisent l'invariance de Lorentz. Pour une analyse du cas vectoriel, voir [2].

2. Voir l'annexe 1.A pour plus de détails.

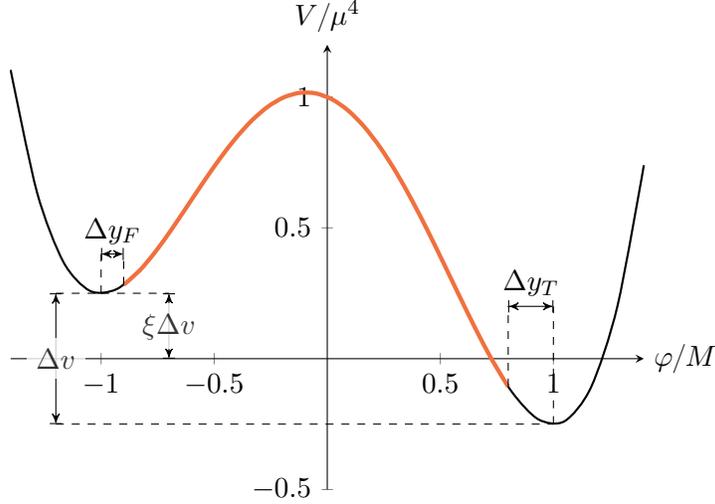


FIG. 1.1 : Exemple d'un instanton (courbe en **orange**) sur un potentiel quartique standard paramétrisé par Δv et ξ . Le vide métastable $y_F = \varphi_F/M$ correspond au faux minimum, alors que le vide stable $y_T = \varphi_T/M$ correspond au vrai minimum. L'instanton quant à lui trace une trajectoire allant de y_F^* à y_T^* ; les différences entre ces points et les minima sont identifiées.

sera plus facile de traiter une symétrie sphérique (euclidienne). L'action euclidienne est

$$iS_E = S(t \rightarrow i\tau) = \int \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right] \cdot -i d^4 x_E = i \int \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi) \right] d^4 x_E. \quad (1.2)$$

La quantité qui nous intéresse est la probabilité de transition $x_F \rightarrow x_T$ par unité de volume, que l'on appellera Γ/V . Son expression est ³

$$\Gamma/V \simeq A e^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (1.3)$$

où on a approximé l'intégrale de chemin par la contribution majeure ($S_E(\varphi_F)$, l'action du champ stable à y_F) et où l'on a introduit l'action de l'instanton $B = S_E(\varphi_F \rightarrow \varphi_T) - S_E(\varphi_F)$. Le coefficient A correspond à la dégénérescence de l'amplitude de transition et est calculé dans [3]. Nous introduisons l'approximation semi-classique déjà à ce stade pour pouvoir estimer la contribution principale, mais aussi en prévision du chapitre 2 où l'inclusion de la gravité dans la théorie la rend non-renormalisable et empêche un calcul exact ⁴.

Avant d'aller plus loin et de se lancer dans le calcul de B , il est judicieux d'essayer d'anticiper quelques résultats et leur interprétation. L'action 1.2 est la même que celle de l'énergie libre d'un système statistique dans un état métastable. Par exemple, avec la correspondance $\phi \leftrightarrow F$ et $V \leftrightarrow \rho$, on pourrait décrire un modèle d'eau au-dessus de son point d'ébullition, avec F l'énergie libre et ρ la densité. Les fluctuations quantiques de notre problème sont alors

3. Les facteurs de \hbar sont explicites ici pour justifier l'approximation semi-classique; dans le reste du document, il sera entendu que $\hbar = 1$.

4. Il est possible d'écrire des théories renormalisables en incluant des interactions d'ordre supérieur en R , par exemple, les théories de supergravité.

assimilables aux fluctuations thermiques du modèle d'eau. Dans ce dernier cas, sous l'effet des fluctuations thermiques, on peut se retrouver dans une configuration où localement l'énergie libre est au vrai minimum : il se forme une bulle de vapeur. Il y a deux contributions à l'énergie de la bulle : la tension de surface et l'énergie gagnée dans la transition de phase. Le premier terme est proportionnel à l'aire de la bulle, le second au volume. Ainsi, si le bilan est positif (c'est-à-dire si la bulle initiale est suffisamment grosse), la bulle continue à grossir jusqu'à atteindre une taille macroscopique ; sinon, la bulle diminue en volume et disparaît. Dans le premier cas, on parlera d'une transition de phase alors que dans le deuxième cas, on parlera d'une récurrence à un état de faible entropie⁵.

Dans notre cas, on s'attend à trouver un rayon minimal pour qu'une bulle se forme et grandisse. Les équations du mouvement devraient donc décrire la formation d'une bulle avec ledit rayon minimal, provoquant ainsi une transition entre les deux minima.

1.2 | Équations du mouvement

La stratégie pour calculer B est standard : on fait varier l'action avec les bonnes conditions frontières pour trouver les équations du mouvement, qu'il faut solutionner. Il y a deux variables pour lesquelles résoudre : φ et $g_{\mu\nu}$, soit 10 degrés de liberté en tout (on impose que le scalaire de Ricci $R = 0$ pour avoir une métrique plane⁶). On peut démontrer que la solution qui minimise l'action est invariante de Lorentz [4]. La métrique en coordonnées sphériques est donc

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2, \quad (1.4)$$

où ρ est la coordonnée radiale. La symétrie sphérique impose alors que $\varphi = \varphi(\rho)$. Il reste alors seulement à résoudre pour φ , et son équation du mouvement est

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{dV}{d\varphi}. \quad (1.5)$$

On peut déduire les conditions frontières à partir de critères physiques de la solution. À $\varphi = \varphi_F$, $V'(\varphi_F) = 0$ et on cherche une solution où φ est stable à φ_F initialement, c'est-à-dire que $\varphi'(\varphi_F) = 0$. La bulle apparaît à $\rho = 0$ (le centre de la bulle⁷) avec $\varphi(\rho = 0) = \varphi_T^*$, où φ_T^* est choisi afin que les conditions frontières à φ_F soient respectées. Pour que l'équation ne soit

5. Dans la littérature, on trace une distinction entre une récurrence à un état de faible entropie et une récurrence de Poincaré. Bien que le phénomène sous-jacent soit le même, nous utiliserons le terme *récurrence à un état de faible entropie* pour inclure les transitions où $B \ll 1$ sans nécessairement correspondre au temps de récurrence de Poincaré.

6. On utilise ici la langage de la relativité générale pour que la discussion se généralise plus facilement. On pourrait également ignorer la condition sur la métrique et simplement discuter d'une paramétrisation de l'espace.

7. Précision sur la notation : l'étoile se réfère aux quantités relatives à l'instanton. Ainsi, on a φ_T comme minimum de V , et φ_T^* qui correspond à la valeur asymptotique du champ après la transition. En général, $\varphi_T^* \neq \varphi_T$.

pas singulière, on doit avoir $\varphi'(\varphi_T^*) = 0$. Ici, $\varphi_F^* = \varphi_F$, mais nous verrons que ce n'est plus le cas une fois la gravité prise en compte.

Un des défis de ce chapitre est de trouver une solution analytique approximative à l'équation (1.5). Pour mieux comprendre la structure de l'équation avant d'essayer de la résoudre, on peut utiliser une analogie introduite par Coleman dans son article original. Cette équation est analogue à celle d'une particule dans un potentiel $-V$, avec un terme de friction proportionnel à φ' . On cherche donc la position de départ de laquelle laisser tomber une particule dans le potentiel $-V$, de telle sorte que, avec la friction, elle approche asymptotiquement φ_F et s'y arrête après un temps infini. Pour la forme, notons que Coleman a appelé cette solution le *bounce* parce qu'elle décrit effectivement le mouvement d'un champ qui part asymptotiquement proche de φ_F à $t = -\infty$, atteint φ_T^* à $t = 0$ puis retrace sa trajectoire à l'envers jusqu'à φ_F à $t = \infty$.

1.3 | Approximation thin-wall

L'équation (1.5) est difficile à résoudre analytiquement. En effet, il n'y a pas de solution générale à ma connaissance⁸. Cependant, il est possible d'obtenir une solution approximative si la différence de potentiel entre les deux minima est petite : puisque la différence d'énergie entre les deux minima correspond à l'énergie perdue en friction, si cette dernière est petite, alors la solution doit minimiser $3\varphi'/\rho$. On s'attend donc à ce que ces solutions restent proche de φ_T jusqu'à un grand ρ_{wall} , où la transition s'effectue avec une friction négligeable.

Pour formaliser ce raisonnement, commençons par faire une analyse dimensionnelle du système, afin de pouvoir justifier ce que l'on entend par négligeable. Il y a deux dimensions significatives dans notre problème : la différence de potentiel $\Delta V = V_F - V_T \sim \mu^4$ et la distance entre les minima $\Delta\varphi = |\varphi_F - \varphi_T| \sim M$. On définit donc les variables sans dimension

$$y = \frac{\varphi}{M}, \quad v(y) = \frac{V(\varphi(y))}{\mu^4}, \quad s = \frac{\mu^2}{M}\rho. \quad (1.6)$$

L'équation sans dimension devient

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{3}{s} \frac{dy}{ds} = \frac{dv}{dy}. \quad (1.7)$$

On peut mettre en évidence les conditions sur le terme de friction en réécrivant

$$v(y) = v_0(y) - E, \quad v_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2. \quad (1.8)$$

⁸. Il existe une méthode itérative qui permet d'obtenir de meilleurs résultats analytiques que l'approximation *thin-wall* [5].

Remarquons que v_0 est choisit pour correspondre à l'énergie cinétique de y et que, par définition, $v_0 \geq 0$. En substituant cette expression dans l'équation du mouvement (1.7), on obtient

$$\frac{dE}{ds} = \frac{6v_0(y, E)}{s}, \quad \frac{dy}{ds} = \sqrt{2v_0(y, E)}. \quad (1.9)$$

Au lieu d'une équation du deuxième ordre, nous avons maintenant un système de deux équations couplées du premier ordre. Les conditions frontières deviennent $v_0(y_F^*) = v_0(y_T^*) = 0$, $E(y_F^*) = -v_F^*$ et $E(y_T^*) = -v_T^*$. La dépendance en s est implicite, avec $y(s_0) = y_T^*$ et $y(s_{\max}) = y_F^*$. En particulier, on considère les solutions (instantons) dites *single-pass*, c'est-à-dire que le champ fait une transition monotone, i.e. $\frac{dy}{ds} \geq 0$. Cette condition implique en particulier que $0 \leq E \leq \Delta v^*$, avec $\Delta v^* = v_F^* - v_T^*$. En effet, puisque l'instanton est *single-pass*, le terme de friction est toujours positif, ce qui implique que E est une fonction monotone de s , et donc qu'elle est bornée sur son domaine par ses conditions frontières.

Nous pouvons maintenant démontrer l'existence de solutions à l'équation (1.9). Une solution à l'équation différentielle consiste à trouver le bon point y_T^* tel que les conditions frontières soient satisfaites à y_F^* . On démontre l'existence d'une solution par un argument similaire au théorème de Bolzano : on montre qu'il existe une configuration qui sous-estime ou sur-estime un paramètre; par continuité, il doit exister une configuration qui satisfait les conditions frontières. Ici, on commence par montrer que l'on peut trouver une solution où $E(y_F^*) > \Delta v^*$, puis on montre qu'il existe une solution où $E(y_F^*) < \Delta v^*$.

L'argument va comme suit : si on choisit le point $y_T^* = y_{\text{crit}}$, où $v(y_{\text{crit}}) = v(y_F^*)$ est le point à la même hauteur que y_F^* , alors $\Delta v^* = 0$. Or, si $v_F > v_T$, alors y_{crit} n'est pas un minimum de v , donc le point initial est instable par (1.7). Il y a donc une transition, et $v_0 > 0 \forall y_F^* < y < y_T^* \Rightarrow \frac{dE}{ds} > 0$, donc $E(y_F^*) > \Delta v^* = 0$.

Or, on peut également choisir un point y_T^* arbitrairement proche de y_T . Dans ce cas, $y(s)$ reste proche de y_T pendant un temps s arbitrairement long avant d'effectuer une transition. Or, si on choisit $s \rightarrow \infty$, alors $\frac{dE}{ds} \rightarrow 0 \Rightarrow E(y_F^*) \rightarrow 0 < \Delta v^* = \Delta v$. Par continuité, il doit exister un point y_T^* qui satisfait les conditions frontières, ce qui complète la preuve. ■

La stratégie utilisée dans la démonstration suggère un algorithme pour trouver une solution numérique, soit utiliser la méthode canon pour trouver le point initial y_T^* . Notons que bien que la preuve démontre l'existence d'une solution, elle n'en démontre pas l'unicité. Au contraire, on peut trouver plusieurs solutions aux équations du mouvement (1.9). Les détails et l'implémentation d'une méthode numérique seront discutés au chapitre 3, mais il est déjà possible d'identifier un problème avec l'équation (1.9) : l'instanton est non-compact. En effet, ici $s_{\max} = \infty$. Avec l'ajout de la gravité, cette condition sera plus faible, car on aura $s_{\max} < \infty$, mais indéterminé. Quoi qu'il en soit, on peut ramener le problème à une solution compacte

en utilisant y comme coordonnée et s comme variable ; le système devient alors⁹

$$\frac{dE}{dy} = \frac{3}{s}\sqrt{2v_0}, \quad \frac{ds}{dy} = -\frac{1}{\sqrt{2v_0}}. \quad (1.10)$$

Notons que les quantités ont ici une interprétation physique simple et naturelle : E correspond à l'énergie perdue et peut être interprété comme un paramètre d'ordre de la transition, s correspond au rayon de la bulle et y correspond à la valeur du champ. En contrepartie, les équations sont singulières aux frontières, ce qui reflète le fait que le bounce décrit une trajectoire asymptotique de $s \rightarrow -\infty$ à $s \rightarrow \infty$.

Un des avantages de cette description est qu'elle permet d'écrire immédiatement la solution au problème connexe où l'on connaît déjà $v_0(y)$ et l'on cherche E et s .

On peut maintenant donner la solution dans l'approximation thin-wall. Supposons que la différence de potentiel est petite par rapport à la valeur moyenne de v : $\Delta v \ll \langle v \rangle \sim 1$ (on choisit μ^4 pour que v soit de l'ordre de 1). Alors, puisque E est borné, on peut directement poser une solution pour v_0 qui satisfait les bonnes conditions frontières. Par exemple, on s'attend à ce que $y_T^* \sim y_T$ pour minimiser E , donc dans la limite où $\Delta v \rightarrow 0$, on sépare la solution en trois parties : une période où le champ est proche de $y \sim y_T^*$ (dans la bulle), une période où le champ effectue la transition $y_T^* \rightarrow y_F^*$ (le mur de la bulle) et une période $y \sim y_F^*$ (le faux vide). Le terme *thin-wall* fait référence au fait que le mur de la bulle est mince par rapport à son rayon. On peut alors supposer que le champ perd toute l'énergie excédentaire à y_T^* (ou plus simplement, à y_F^*), et qu'il effectue une transition sans friction avec $s \gg 1$, i.e.,

$$v_0(y) = \begin{cases} v(y) - v_T^*, & (y > y_T^*) \\ 0, & (y = y_F^*) \end{cases} + \mathcal{O}(\Delta v). \quad (1.11)$$

Alors, on peut aisément trouver $E(y) = v_0(y) - v(y)$, et on peut estimer l'action de l'instanton, soit

$$0 \leq B = \int [2v_0 - E] s^3 ds d\Omega \lesssim 2\pi^2 \int_{y_F}^{y_T} s^3 \sqrt{2v_0(y)} dy - \mathcal{O}(\Delta v). \quad (1.12)$$

La borne inférieure est 0, car la contribution négative n'est pas strictement bornée (elle est toutefois généralement petite). De même, l'approximation thin-wall permet de trouver une fonction $s(y)$ à partir de la solution v_0 , mais elle peut recevoir des corrections arbitrairement grandes lorsque $v_0 \sim \Delta v$, soit aux extrémités¹⁰. Dans ce cas, l'effet est de déplacer s_0 .

9. Le système est écrit pour $s > 0$. Pour $s < 0$, l'instanton trace la trajectoire inverse, et les dérivées acquièrent un signe négatif ($dy \rightarrow -dy$).

10. Je n'ai pas observé de cas où $v_0(x) \sim 0$ ailleurs qu'aux extrémités. En fait, on peut calculer explicitement

$$\frac{d^2 v_0}{dy^2} = \frac{9}{s^2} \left(\frac{4}{3} + \frac{v'}{E'} \right) + v'' < 0, \quad \leftarrow \quad E' > \frac{9v'}{|v''|s^2 - 12}. \quad (1.13)$$

Donc, si la condition sur E' est respectée, alors v_0 est une fonction convexe (pour v convexe) et ne peut être 0 que proche de ses extrémités. Or, on a aussi la condition $E' \geq 0$, qui est plus fortes aux deux extrémités.

Pour terminer, notons que bien que le choix de v_0 soit ici arbitraire, les équations du mouvement ont tendance à sélectionner une fonction symétrique pour v_0 et antisymétrique pour E . La raison en est que lorsque $s_0 \gg 1$, la primitive de E est simplement $\sqrt{2v_0}$, donc les parties symétriques et antisymétriques de E et v_0 sont interchangées ; or les conditions frontières favorisent la partie symétrique de v_0 et celle antisymétrique que E . Une meilleure approximation serait alors

$$v_0(y) = \frac{1}{2}(v(y) + v(y_F^* + y_T^* - y)) - \frac{(v_F^* + v_T^*)}{2} + \mathcal{O}(\Delta v), \quad (1.14)$$

$$E(y) = \frac{1}{2}(v(y) - v(y_F^* + y_T^* - y)) + \frac{(v_F^* + v_T^*)}{2} + \mathcal{O}(\Delta v). \quad (1.15)$$

De même, le terme proportionnel à E dans B tend à disparaître par antisymétrie, ce qui justifie notre assertion que B est proche de sa borne supérieure.

1.4 | Potentiel quartique

Pour toute théorie renormalisable, le potentiel le plus important est le potentiel quartique. On peut écrire un potentiel quartique général sous la forme

$$v\left(x = \frac{2(y - \bar{y})}{\Delta y}\right) = \left[(1 - x^2)^2 - \frac{3}{4}\Delta v\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right] - \frac{1 - 2\xi}{2}\Delta v, \quad (1.16)$$

$$\bar{y} = \frac{y_F + y_T}{2}, \quad \Delta y = y_T - y_F, \quad \Delta v = v_F - v_T. \quad (1.17)$$

Le seul paramètre physique est Δv : tous les autres peuvent être absorbés dans une redéfinition des champs ou laissent l'action invariante. La forme de ξ est choisie pour être cohérent lors de l'inclusion de la gravité. On peut choisir $\bar{y} = 0$, $\Delta y = 2$ et $\xi = \frac{1}{2}$. Ainsi, $v(y)$ correspond à un potentiel $V(\varphi)$ avec deux minima distants de M , un maximum d'une hauteur μ et une différence de potentiel entre les deux minima de ΔV . Un exemple de potentiel quartique normalisé est présenté à la figure 1.2.

L'approximation thin-wall nous suggère de séparer le potentiel en parties symétrique et antisymétrique de sorte que

$$v_0 = (1 - x^2)^2, \quad E = \frac{3}{4}\Delta v\left(x - \frac{x^3}{3}\right). \quad (1.18)$$

Il est alors facile de vérifier que cette solution satisfait les équations du mouvement. On commence par calculer $y(s)$:

$$\frac{dy}{ds} = \sqrt{2v_0} \Rightarrow y(s) = \Delta y \tanh\left(\frac{2}{\Delta y}(s - s_0)\right) + \bar{y}. \quad (1.19)$$

En inversant la relation, on peut isoler $s(y)$:

$$s - s_0 = \frac{\Delta y}{2} \tanh^{-1}(x). \quad (1.20)$$

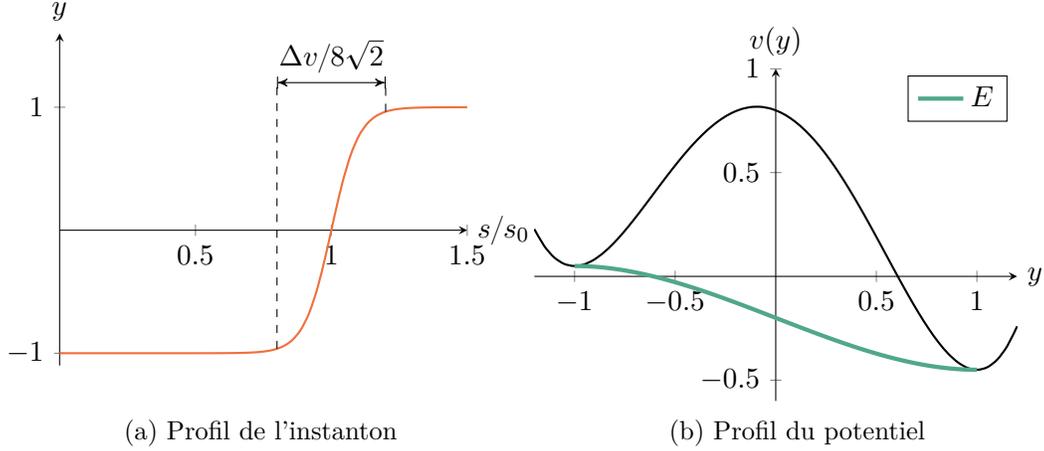


FIG. 1.2 : Solution analytique au potentiel quartique normalisé. En 1.2a, on voit le profil de l'instanton. Notons que le champ reste longtemps près de y_F avant d'effectuer une transition, donc l'approximation thin-wall est valide. En 1.2b, la courbe en **noir** est le potentiel quartique v , tandis que la courbe en **gras** est $-E$. La différence entre les deux courbes est v_0 .

L'équation différentielle pour E est

$$\frac{dE}{dy} = \frac{3}{s} \sqrt{2v_0}. \quad (1.21)$$

Si $s_0 \gg \frac{\Delta y}{2\mu^2}$, on peut approximer $s \sim s_0$, d'où on tire

$$E = \frac{3}{s_0} \int \sqrt{2v_0} dy. \quad (1.22)$$

On identifie donc

$$s_0 = \frac{4\sqrt{2}\Delta y}{\Delta v}. \quad (1.23)$$

La condition $s_0 \gg \frac{\Delta y}{2\mu^2}$ devient donc $\Delta v \ll 8\sqrt{2}$, ce qui est cohérent avec l'approximation thin-wall. Or, pour que $x_F = -1$ soit un minimum, il faut que $\Delta v < \frac{16}{3}$. Ainsi, l'approximation thin-wall est *toujours* applicable pour un potentiel quartique, bien que les solutions subissent des corrections de l'ordre de $\mathcal{O}\left(\frac{\Delta v}{8\sqrt{2}}\right)$. Lorsque Δv devient trop grand, l'instanton ne se rend plus à y_T , et on doit donc utiliser un potentiel quartique « effectif », allant plutôt de y_F à y_T^* et avec un Δv^* plus faible.

On peut calculer la largeur du mur à partir de (1.19)

$$x = \tanh\left(\frac{2}{\Delta y}(s - s_0)\right) = 1 - e^{-2} \Rightarrow \sigma_{\text{mur}}^2 = \frac{s - s_0}{s_0} = \frac{\Delta v}{8\sqrt{2}} \tanh^{-1}[1 - e^{-2}]. \quad (1.24)$$

Pour compléter, on peut calculer exactement B , dont l'expression est

$$B = \frac{2\pi^2}{3(\Delta v)^3} \left(\frac{M}{\mu}\right)^4 [128 + (\Delta v)^2 (\pi^2 - 6)]. \quad (1.25)$$

Cet exemple est particulièrement utile parce que même pour un potentiel non-polynomial, on peut estimer au premier ordre le taux de transition par un calcul purement analytique. Si le potentiel est approximable par un potentiel quartique avec des corrections d'ordre λ , la solution quartique subit des corrections d'ordre λ également, et l'erreur globale devient de l'ordre de $\Delta v + \lambda$. En particulier, la courbe $y(s)$ devrait ressembler à (1.19) au premier ordre, ce qui a été remarqué dans la littérature sans explication sous-jacente [6].

1.5 | Solution dans l'espace Minkowski

Les résultats obtenus avec l'approximation thin-wall sont dans l'espace euclidien. Pour obtenir la solution correspondante dans l'espace Minkowski, on doit utiliser un prolongement analytique de la solution à $x^0 \rightarrow it$. Puisque l'action euclidienne est simplement le prolongement analytique de l'action en temps Minkowski, la déformation est analytique, et la fonction $y(s)$ devient $y(s = \sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2})$. Les deux branches de la racine carrée sont équivalentes, car y est une fonction symétrique.

La figure 1.3 est un exemple de diagramme Minkowski pour la solution analytique du potentiel quartique. Notons que l'épaisseur de mur est proportionnelle à Δv . On s'attend à ce que le profil de la bulle $y(s)$ soit légèrement modifié pour un potentiel générique, mais si l'approximation thin-wall est applicable, alors la prédiction pour le bounce doit être comparable au vrai bounce et donc le profil doit être similaire à la solution thin-wall. Dans tous les cas, il doit s'agir d'une fonction ressemblant à une sigmoïde à cause des conditions frontières, donc (1.19) est une bonne approximation.

Puisque l'intérieur de la bulle est un nouveau vide, il n'y a pas d'énergie résiduelle à l'intérieur. L'énergie contenue dans le mur est donc égale à l'énergie du volume, soit

$$E_{\text{mur}} = \frac{4\pi R^3}{3} \Delta v, \quad (1.26)$$

où $R = s - s_0$ pour un observateur au repos par rapport au repère de la bulle. Si Δv est très grand, alors suivant notre analyse précédente, $x_T^* \neq x_T$ et l'état résultant à l'intérieur de la bulle est un état excité du vide. Pour le modèle standard, le champ φ correspondrait au boson de Higgs, et l'état excité doit s'écrire comme un courant J_φ (voir par exemple (4.28)).

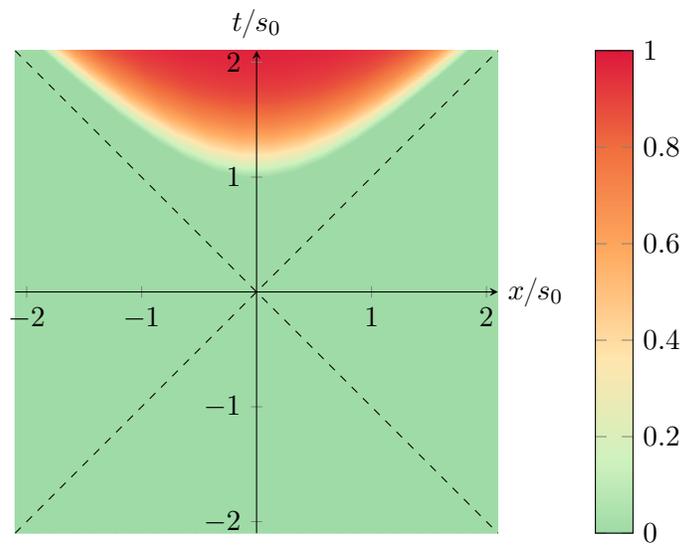


FIG. 1.3 : Diagramme Minkowski de l'apparition d'une bulle de vrai vide (en **rouge**) dans un Univers au faux vide (en **vert**). La transition est présentée pour un potentiel quartique avec $s_0 = 2$. Notons que le profil de la bulle suit une hyperbole puisque la solution est invariante de Lorentz.

Compléments

1.A | Théorie quantique des champs en temps euclidien

La théorie quantique des champs s'exprime naturellement sur une métrique euclidienne. Prenons comme point de départ la fonction de partition

$$Z_E[J] = \int D\varphi \exp \left[- \int d^d x_E (\mathcal{L}_E - J\varphi) / \hbar \right], \quad (1.27)$$

où φ correspond à l'ensemble des champs de la théorie. Alors, en prenant la continuation analytique au temps Minkowski $x_E^0 \rightarrow ix^0$, on obtient la fonction de partition sur l'espace Minkowski avec la bonne prescription pour évaluer les corrélateurs de la théorie :

$$Z_E[J] \rightarrow Z[J] = \int D\varphi \exp \left[i \int d^d x (\mathcal{L} + J\varphi) / \hbar \right], \quad (1.28)$$

$$D_F(p_E) \sim \frac{1}{p_E^2 + m^2} \rightarrow D_F(p) \sim \frac{1}{p^2 - m^2 - i\varepsilon}. \quad (1.29)$$

Cette approche est notamment utilisée en théorie des cordes pour définir l'intégrale de chemin sur la métrique, parce que la mesure de l'ensemble des métriques de signature mixte (e.g. $(+ - \dots)$) est mal définie pour les métriques singulières.

L'expression (1.27) suggère une analogie avec la physique statistique. Par exemple, si l'on interprète φ comme une fluctuation du spin et J comme une source magnétique, on trouve que Z correspond à l'énergie libre de Gibbs pour un milieu ferromagnétique.

1.B | Approximation semi-classique

En interprétant l'équation (1.27) comme une fonction de partition standard, la probabilité de transition d'un faux vide ϕ_F vers le vrai vide ϕ_T est

$$P(\phi_F \rightarrow \phi_T | \phi_0 = \phi_F) = \frac{P(\phi_F \rightarrow \phi_T)}{P(\phi_0 = \phi_F)} = \frac{\int_{\varphi_F}^{\varphi_T} D\varphi e^{-S_E[\varphi]/\hbar}}{Z} \frac{Z}{\int_{\varphi_F}^{\varphi_F} D\varphi e^{-S_E[\varphi]/\hbar}}. \quad (1.30)$$

Dans la limite semi-classique où $\hbar \rightarrow 0$, la principale contribution à l'intégrale de chemin est donnée par la trajectoire classique

$$\Gamma/V = \lim_{\hbar \rightarrow 0} P(\phi_F \rightarrow \phi_T | \phi_0 = \phi_F) = \frac{A_1 e^{-S_E[\varphi_{F \rightarrow T, cl}]/\hbar}}{A_2 e^{-S_E[\varphi_{F, cl}]/\hbar}} = A e^{-B/\hbar}, \quad (1.31)$$

où $B = S_E[\varphi_{F \rightarrow T, cl}] - S_E[\varphi_{F, cl}]$ est le bounce. Ici, A correspond à un coefficient déterminé par l'intégrale sur les isométries de la métrique¹¹ (de mesure nulle).

1.C | Généralisation à plusieurs champs

Le formalisme du système (1.10) est directement applicable au cas avec plusieurs champs. En effet, considérons l'action d'un modèle sigma non-linéaire

$$S_E = \int \left[\frac{1}{2} \partial_\mu y_i \partial^\mu y^i + v(y_i y^i) \right] d^4 x_E, \quad (1.32)$$

où le champ y_i est dans une représentation d'un groupe $SO(N)$. Dans ce cas, on définit encore

$$v_0 = \frac{1}{2} \partial_\mu y_i \partial^\mu y^i \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2. \quad (1.33)$$

On peut encore une fois montrer que la contribution principale au bounce est invariante sous $SO(N)$ [7], donc les équations du mouvement sont les mêmes, mais on doit choisir le chemin $y(s)$ qui minimise l'action. Plusieurs résultats analytiques offrent des bornes sur S [8, 9], et des outils numériques ont été développés pour analyser ces cas plus spécifiquement [10].

11. Dans ce cas, il s'agit d'un déterminant fonctionnel relié au groupe de Lorentz.

2

Effets de la gravité

Ce chapitre couvre l'inclusion de la gravité dans le modèle présenté au chapitre 1, en suivant et en généralisant les résultats de [11]. Si les effets de la gravité sont négligeables à l'échelle de la physique des particules, ils peuvent avoir un effet dramatique aux énergies élevées qui interviennent dans la stabilité du vide électrofaible. Plus fondamentalement, étant donné le peu de choses que l'on connaît sur la gravité quantique, il est intéressant d'étudier comment la gravité, déjà au niveau semi-classique, modifie l'analyse du chapitre précédent. Nous verrons que son inclusion présente des difficultés qui font du modèle un cas pathologique pour étudier la gravité quantique.

L'analyse des corrections dues à la gravité n'est pas une nouveauté. Plusieurs analyses ont montré que la gravité stabilise le vide, et obtiennent des résultats cohérents avec les nôtres (voir par exemple [6, 12–20]). Une des leçons du chapitre précédent est que l'instanton utilise l'énergie gagnée dans la transition au vrai minimum sur le volume de la bulle pour accélérer le processus de transition. Le rayon de la bulle à sa matérialisation est ainsi déterminé par un équilibre entre l'énergie de surface versus l'énergie dans son volume. Ainsi, même dans la limite $\Delta v \rightarrow 0$, on peut obtenir une transition en prenant un très grand rayon. La gravité modifie la relation entre l'énergie du volume et de la surface ; dans certains cas, elle empêche de trouver une bulle suffisamment grande pour satisfaire les équations du mouvement.

2.1 | Modèle incluant la gravité

On modifie le lagrangien (1.1) en ajoutant le terme standard de relativité générale¹

$$S[\varphi, g_{\mu\nu}] = \int \left[\frac{1}{2} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi - V(\varphi) - \frac{m_P^2}{2} R \right] \sqrt{-g} d^d x, \quad (2.1)$$

où $m_P^2 = (8\pi G_N)^{-1} = M_P^2/(8\pi)$ est la masse de Planck réduite (pour $d = 4$), $M_P^2 = G_N^{-1}$ est la masse de Planck et R est le scalaire de Ricci. Comme précédemment, on peut écrire la

1. On suit la convention de physique des particules pour la métrique, où la signature est $+-\dots$.

probabilité de transition dans la limite semi-classique comme ²

$$\Gamma/V = Ae^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad B = S_E(\varphi_F \rightarrow \varphi_T) - S_E(\varphi_F). \quad (2.2)$$

Toutefois, maintenant le coefficient A n'est plus calculable exactement car la théorie est non-renormalisable ³. L'action euclidienne est

$$S_E[\varphi] = \int \left[\frac{1}{2} g_E^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) - \frac{m_p^2}{2} R \right] \sqrt{g_E} d^d x. \quad (2.3)$$

On suppose que la contribution maximale à l'amplitude de transition est invariante de Lorentz, donc on choisit la métrique

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = dz^2 + \rho^2(z) d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.4)$$

Cette hypothèse n'est pas démontrée dans le cas avec gravité, mais il n'existe pas de contre-exemple ou d'argument permettant de douter de sa validité à ma connaissance. Pour trouver les équations du mouvement, il faut faire varier l'action selon φ et ρ . Il est utile de savoir que $\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ et que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sqrt{g}} \nabla_\mu (\sqrt{g} g^{\mu\nu} \nabla_\nu) = \partial_z^2 + \frac{(d-1)}{\rho} \dot{\rho} \partial_z. \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(d-1) \frac{\ddot{\rho}}{\rho} dz^2 + [2(1 - \dot{\rho}^2) - \ddot{\rho}\rho] d\Omega^2, \quad (2.6)$$

$$R = -2(d-1) \frac{\ddot{\rho}\rho + \dot{\rho}^2 - 1}{\rho^2}, \quad (2.7)$$

avec \mathcal{L} l'opérateur de Laplace-Beltrami et $\dot{\rho} \equiv \partial_z \rho$.

On adimensionalise le problème en introduisant les paramètres sans dimensions

$$y = \varphi/M^{\frac{d-2}{2}}, \quad v(y) = V(\varphi(y))/\mu^d, \\ r = \left(\frac{\mu^d}{M^{d-2}} \right)^{1/2} \rho, \quad s = \left(\frac{\mu^d}{M^{d-2}} \right)^{1/2} z, \quad \kappa^2 = \frac{M^{d-2}}{(d-1)m_p^2}. \quad (2.8)$$

Notons que $\kappa^2 \propto G_N$ contrôle la force de l'interaction gravitationnelle. Les exposants de M et μ sont choisis de telle sorte que $[M] = [\mu] = 1$. Les équations du mouvement sont maintenant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{(d-1)}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dy}{ds} = \frac{dv}{dy}, \end{array} \right. \quad (2.9a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = 1 + \kappa^2 r^2 E, \end{array} \right. \quad (2.9b)$$

2. Cette équation n'est pas justifiée à partir de principes fondamentaux, mais plutôt comme une généralisation naturelle du cas sans gravité. En effet, l'absence d'une définition appropriée de l'énergie dans un espace courbé et le traitement des modes négatifs font partie des difficultés qui empêchent de prouver le résultat [21, 22].

3. Un argument simple pour supporter cette assertion est de remarquer que la dimension de $[G_N] = 2 - d$ dans le lagrangien est négative pour $d > 2$, ce qui implique que le nombre de diagrammes divergents est infini. Pour une discussion pédagogique du problème de non-renormalisabilité de la gravité, voir [23].

avec encore

$$v = v_0 - E, \quad v_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2. \quad (2.10)$$

Les conditions frontières sur y sont $y(s_0) = y_T^*$, $y(s_{\max}) = y_F^*$, avec $y'(s_0) = y'(s_{\max}) = 0$. Or, on a maintenant une nouvelle variable r qui modifie sensiblement notre analyse. Les coordonnées sphériques nous imposent que $r \geq 0$, donc le mouvement doit s'arrêter si $r = 0$. Puisque le point initial est $r(s_0) = 0$, il y a deux cas possibles : soit comme précédemment $r(s_{\max}) = \infty$ et le bounce est non-compact, ou alors $r(s_{\max}) = 0$, auquel cas le bounce est compact et se termine à un $s_{\max} < \infty$. Il est alors intéressant de remarquer qu'on peut avoir $y_F^* \neq y_F$, car même si le champ n'est pas stable au minimum de v , il satisfait les équations du mouvement. On dit alors que le système est thermique, car le système doit atteindre le point y_F^* avant d'effectuer une transition. La différence de potentiel $v_F^* - v_F$ correspond alors à une énergie d'activation, ce qui réduit significativement la probabilité de transition si la température est faible.

Pour compléter, l'action euclidienne s'exprime sous la forme simplifiée

$$S_E = -\frac{2S_{d-1}}{\kappa^2} \left(\frac{M}{\mu} \right)^{d(d-2)/2} \left[\int_{s_0}^{s_{\max}} \left[\frac{(d-2)}{2} r^{d-3} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \kappa^2 r^{d-1} v_0 \right] ds - \frac{r^{d-2}}{2} \frac{dr}{ds} \Big|_{s_{\max}} \right], \quad (2.11)$$

où l'on a utilisé l'équation du mouvement (2.9), et $S_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ est l'aire d'une $(d-1)$ -sphère. Tel que mentionné, la non-renormalisabilité de la théorie empêche de calculer exactement A , mais le calcul sans gravité permet d'obtenir un estimé. Suivant [3], on a

$$A \sim [\text{longueur}]^{-d} B^{d/2} \sim M^d \left(\frac{M}{\mu} \right)^{d^2(d-2)/4}. \quad (2.12)$$

2.2 | Solutions particulières

On veut maintenant distinguer les cas où le bounce est compact ou non-compact. On peut résoudre les équations du mouvement pour le cas où $y = y_{F,T}$ est fixe. Alors, la première équation devient triviale et on trouve 3 solutions possibles, qui correspondent respectivement à l'espace de Sitter (dS), Minkowski et Anti-de Sitter (AdS) :

$$r_{\text{dS}}(s) = \tilde{r} \sin(s/\tilde{r}), \quad r_{\text{M}}(s) = s, \quad r_{\text{AdS}}(s) = \tilde{r} \sinh(s/\tilde{r}), \quad (2.13)$$

où $\tilde{r} = (\kappa\sqrt{|v_{F,T}|})^{-1}$ est le rayon de courbure de l'espace. On peut calculer l'action associée à partir de l'équation (2.11), ce qui donne

$$S_{\text{dS}} = -\frac{2S_{d-1}}{\kappa^2} \left(\frac{M}{\mu}\right)^{d(d-2)/2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \tilde{r}^{d-2} = -\frac{S_d \tilde{r}^{d-2}}{\kappa^2} \left(\frac{M}{\mu}\right)^{d(d-2)/2}, \quad (2.14)$$

$$S_{\text{M}} = 0, \quad (2.15)$$

$$S_{\text{AdS}} = -\frac{2S_{d-1}}{\kappa^2} \left(\frac{M}{\mu}\right)^{d(d-2)/2} \left[\frac{d-2}{2} \frac{\tilde{r}^{d-2}}{3} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} - \left[1 + \frac{r_{\text{max}}^2}{\tilde{r}^2}\right]^{3/2} F_d \right) - \frac{r_{\text{max}}^{d-2}}{2} \frac{dr}{ds} \Big|_{s_{\text{max}}} \right]. \quad (2.16)$$

Le facteur $F_d(r)$ est

$$F_d(r) = {}_2F_1\left(\frac{4-d}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1 + r_{\text{max}}^2/\tilde{r}^2\right), \quad F_4(r) = 1. \quad (2.17)$$

Rappelons que pour AdS et Minkowski, $r_{\text{max}} = \infty$.

Dans la limite où $v_F \rightarrow 0$, l'espace de de Sitter devient plat mais avec des conditions frontières différentes de Minkowski, et effectivement $\lim_{v_F \rightarrow 0} S_{\text{dS}} = -\infty$ diverge pour $d > 2$, ce qui est toujours le cas puisque l'espace est défini en dimension $d \geq 3$, car il est topologiquement équivalent à $\mathbb{R} \times S^{d-1}$ (à $d = 2$, l'espace est non-connecté). Dans le cas anti-de Sitter, la limite $v_F \rightarrow 0$ correspond à l'espace Minkowski. Pour le vérifier, on utilise l'identité

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; x) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-x) \\ &\quad + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-x), \end{aligned} \quad (2.18)$$

qui est la formule (2.3.13) de [24]. Alors,

$$\begin{aligned} F_d &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} {}_2F_1\left(\frac{4-d}{2}, \frac{3}{2}; \frac{4-d}{2}; -\frac{r_{\text{max}}^2}{\tilde{r}^2}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{r_{\text{max}}^2}{\tilde{r}^2}\right)^{\frac{d-2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} {}_2F_1\left(\frac{d+1}{2}, 1; \frac{d-4}{2}; -\frac{r_{\text{max}}^2}{\tilde{r}^2}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

En prenant la limite $\tilde{r}^2 \rightarrow \infty$, il nous reste des fonctions hypergéométriques évaluées en 0, ce qui donne toujours 1. Le premier terme annule le terme constant de S_{AdS} , alors que le deuxième annule le terme de frontière. Il reste alors

$$\lim_{v_F \rightarrow 0} S_{\text{AdS}} = 0 = S_{\text{M}}. \quad (2.20)$$

L'instanton doit être asymptotique à ces solutions pour que le bounce soit fini et que la transition se produise avec une probabilité non-nulle. Il y a donc trois classes d'instantons

à étudier⁴ : $dS \rightarrow dS$, $dS \rightarrow AdS$ et $AdS \rightarrow AdS$, où AdS contient le cas limite de l'espace Minkowski. Les deux scénarios qui ont un intérêt phénoménologique évident sont ceux où soit 1) nous sommes dans un vide métastable qui pourrait se désexciter vers un vide de plus faible énergie ou 2) nous sommes dans un vide résultant d'une transition. Dans le premier cas, on s'intéresse aux transitions $dS \rightarrow AdS$; dans le deuxième, $dS \rightarrow dS$. Puisque les conditions frontières sont les mêmes, une étude des instantons compacts couvre les deux cas.

Le bounce prend une forme différente selon la classe de solution (B^c compact pour dS , et B^{nc} non compact pour Minkowski et AdS) :

$$B^c = \left(\frac{M}{\mu}\right)^{d(d-2)/2} \left[-\frac{2S_{d-1}}{\kappa^2} \left(\int_{s_0}^{s_{\max}} \frac{d-2}{2} r^{d-3} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \kappa^2 r^{d-1} v_0 ds \right) + \frac{S_d \tilde{r}^{d-2}}{\kappa^2} \right], \quad (2.21)$$

$$B^{nc} = -\frac{2S_{d-1}}{\kappa^2} \left(\frac{M}{\mu}\right)^{d(d-2)/2} \left[\int_{s_0}^{s_{\max}} \frac{(d-2)}{2} r^{d-3} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - \kappa^2 r^{d-1} v_0 ds \right. \\ \left. - \frac{d-2}{2} \frac{\tilde{r}^{d-2}}{3} \left(\frac{\Gamma(\frac{5}{2}) \Gamma(\frac{d-2}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} - \left[1 + \frac{r_{\max}^2}{\tilde{r}^2} \right]^{3/2} F_d \right) \right]. \quad (2.22)$$

Les transitions vers AdS en général sont problématiques, car l'espace est instable : une petite perturbation entraîne un scénario Big Crunch. En particulier, les fluctuations quantiques empêchent le vide de se stabiliser dans AdS et confèrent une durée de vie à l'espace résultant de l'ordre de $\Lambda = \left(\kappa\sqrt{\Delta v}\right)^{-1}$ (pour une différence de potentiel de l'ordre de 1GeV, on parle ici de microsecondes).

Dans le cas des instantons compacts un autre problème survient. Si l'on interprète l'entropie $S_{dS} \sim k_B \ln \Omega$ comme le logarithme du nombre d'états accessibles, on se retrouve avec un espace de Hilbert de dimension finie (voir l'annexe 2.B). La justification usuelle est que la gravité introduit une densité d'énergie maximale correspondant au rayon de Sitter, ce qui limite le nombre de degrés de liberté nécessaires pour décrire un état général. Une transition de dS vers AdS donnerait un état possédant un nombre infini de degrés de liberté (dans AdS) à partir d'un système comportant un nombre fini de degrés de liberté, d'où l'incohérence.

Une solution à ce paradoxe survient si $B \sim S_{dS}$, auquel cas on peut réinterpréter la probabilité de transition comme une probabilité de récurrence vers un état de faible entropie. L'action de l'instanton est comparable à l'action d'une trajectoire aléatoire, donc on suppose que l'instanton correspond à une trajectoire aléatoire parmi tant d'autres. Dans ce cas, le champ n'est pas stable à φ_T , car son évolution n'est pas dominée par la solution classique. Plutôt, sous l'effet des fluctuations statistiques le champ φ s'approche de φ_T dans une (petite) région de l'espace avant de revenir à dS . Il n'y a pas de transition, donc pas de problème; pendant

4. La transition inverse $AdS \rightarrow dS$ est impossible, car le bounce est non-compact, donc la probabilité de transition est nulle.

un instant, l'espace ressemble alors localement à AdS, mais il n'y a pas de propagation, et le champ n'est pas stable.

Une autre solution à ce paradoxe est proposée par la correspondance AdS/CFT [25]. On peut alors interpréter l'espace AdS à l'intérieur de la bulle comme l'espace dual d'une théorie conforme des champs (CFT) sur le mur de la bulle. Le fait que l'espace AdS ne s'étende pas jusqu'à l'infini suggère que la CFT correspondante possède une coupure ultraviolette (UV), ce qui donne un nombre de degrés de liberté fini.

2.3 | Reformulation du problème

On s'intéresse aux instantons compacts. Notre stratégie pour obtenir de l'information sur le système (2.9) sera d'utiliser une combinaison de résultats analytiques et numériques. D'abord, on veut appliquer l'approximation thin-wall au cas avec la gravité pour comprendre la structure de l'espace des solutions en fonction des paramètres de notre modèle. Ensuite, nous vérifierons ces résultats numériquement, et nous étendrons notre analyse aux situations où l'approximation ne tient pas.

En prévision des méthodes numériques, commençons par expliciter les échelles du problème. On peut introduire $\mathbf{r} = \frac{r}{\tilde{r}}$, avec \tilde{r} le rayon de l'espace de de Sitter à y_F , de manière à ce que $0 \leq \mathbf{r} \leq 1$. Les échelles de E et x dépendent des constantes d'adimensionnalisation et peuvent être fixées de telle sorte que les valeurs soient de l'ordre de 1. Il y a deux autres paramètres dans notre problème : κ qui contrôle la force de la gravité, et v_F la densité d'énergie du faux vide (qui est reliée à la constante cosmologique). L'échelle de κ sera examinée à la section 2.4. On peut paramétriser v comme

$$v(\mathbf{y}, \xi) = v(y) - (1 - \xi)v_F - \xi v_T, \quad \xi = \frac{v_F}{\Delta v}, \quad (2.23)$$

où ξ contrôle la densité du faux vide : $\xi = 0$ correspond à $dS_{v_F \rightarrow 0} \rightarrow \text{AdS}$ et $\xi = 1$ correspond à $dS \rightarrow M$.

Il est utile de réexprimer le système (2.9) en termes de y pour éliminer complètement s . En utilisant $\frac{dy}{ds} = \sqrt{2v_0}$ et la dérivée en chaîne, on peut ramener le système à deux équations du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE}{dy} = \pm \frac{d-1}{\tilde{r}} \frac{1}{\mathbf{r}} \sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F} \sqrt{2[v + E]}, \end{array} \right. \quad (2.24a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{r}}{dy} = \mp \frac{1}{\tilde{r}} \sqrt{\frac{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F}{2[v + E]}}. \end{array} \right. \quad (2.24b)$$

Les conditions frontières sont $\mathbf{r}(y_F^*) = \mathbf{r}(y_T^*) = 0$, $E(y_F^*) = -v_F^*$ et $E(y_T^*) = -v_T^*$. Le comportement aux frontières de E' et \mathbf{r}' n'est plus aussi clair. On s'attend à ce que E' soit fini

et \mathbf{r}' diverge : l'instanton interpole entre deux valeurs finies pendant que \mathbf{r} devient asymptotique au background. Heureusement, on peut intégrer analytiquement la partie singulière mais triviale de la solution pour \mathbf{r} aux frontières (cf. section 2.5) et intégrer la partie non-triviale numériquement.

Sans même résoudre les équations du mouvement, on peut déjà identifier 3 différents régimes de solutions. En effet, puisque \mathbf{r} revient à 0, il doit y avoir un point y_{\pm} où \mathbf{r}' change de signe. Or, $v_0 \geq 0$ par définition, donc le signe doit venir du facteur $\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F}$. En particulier, ce terme doit passer par zéro à $\mathbf{r}_{\max}^2 E_{\min}/v_F = -1$, ou encore $E_{\min} = -v_F/\mathbf{r}_{\max}$. Selon la position de ce point (à y_F , entre y_F et y_T , ou le cas limite), les solutions auront un profil différent. Examinons les trois cas.

2.3.1 | Cas $y_{\pm} \rightarrow y_F$

Si $y_{\pm} \rightarrow y_F$, alors la solution devient asymptotique à l'espace de de Sitter avant de changer de signe : l'instanton est asymptotique à la solution de Sitter pendant un temps $s/\tilde{r} \geq \pi/2$ et donc la transition se produit après le maximum de $\mathbf{r}_{dS} = \sin s/\tilde{r}$. Aussi, $\mathbf{r}_{\max} \rightarrow 1$, alors $E_{\min} \rightarrow -v_F = E(y_F)$, ce qui implique bien que $y_{\pm} \rightarrow y_F$, et donc $y_F^* \leq y_{\pm} \rightarrow y_F$. Puisque la solution est asymptotique au background, on doit avoir $E'(y_F) \rightarrow 0$, et $\mathbf{r} \sim \mathbf{r}_{dS} = \sin s/\tilde{r}$. De plus, $E(y)$ est une fonction monotone croissante de $-v_F$ à $-v_T^*$, et \mathbf{r} une fonction monotone décroissante. Un exemple de ce type de transition (sous-critique) est présentée à la figure 2.1.

2.3.2 | Cas $y_{\pm} > y_F$

Si $y_{\pm} > y_F$, alors la solution devient asymptotique à l'espace de de Sitter après avoir changé de signe. Dans ce cas, $\mathbf{r}_{\max} < 1$ et $E_{\min} < -v_F$. Il y a donc une période d'antifriction, et les dérivées changent de signe à y_{\pm} . Nous verrons que $y_F^* \rightarrow y_F$, car si le champ est initialement asymptotiquement proche de y_F , alors on retombe dans le cas précédent. Nous appellerons ce type de transitions des transitions thermiques (ou sur-critique), car l'état du vide doit d'abord être excité avant d'effectuer une transition. Un exemple de transition sur-critique est présenté à la figure 2.3.

2.3.3 | Cas limite

Un cas particulier survient si $\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F} = 0$ lorsque $\mathbf{r} = 1$. Ce cas correspond à une transition qui s'effectue exactement au maximum de la solution dS. Alors, $v_0 = 0$ et il y a une solution constante $\mathbf{r} = 1$, $E = -v_F$ qui satisfait des conditions frontières aussi acceptables. Cette solution est illustrée à la figure 2.2.

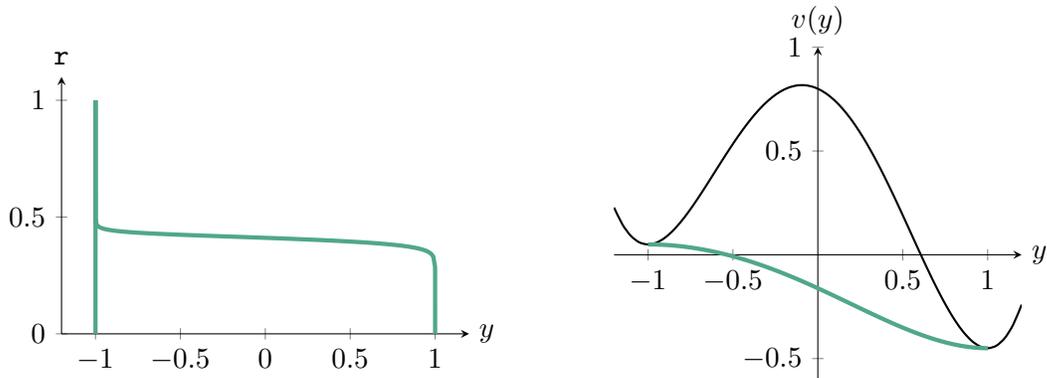


FIG. 2.1 : Exemple de solution sous-critique ($\kappa = 0.5\kappa_*$). À gauche, on voit la solution pour r , qui atteint son maximum à y_F . À droite se trouve la solution pour $-E$ (en gras), superposée au potentiel v .

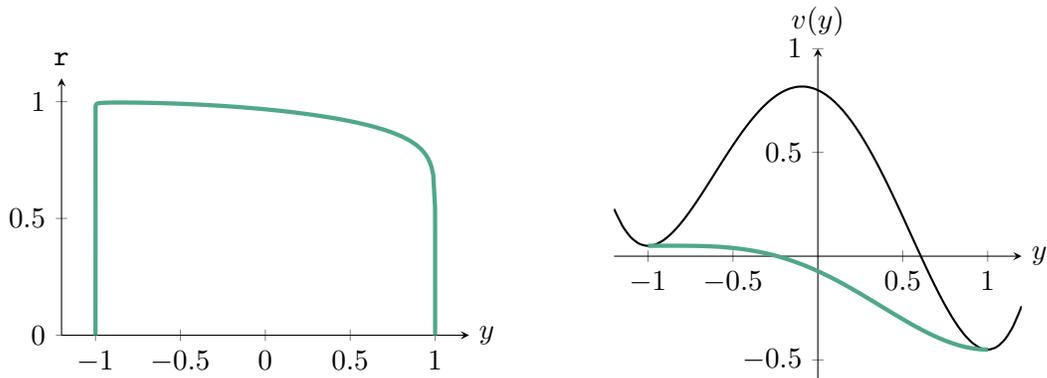


FIG. 2.2 : Exemple de solution critique ($\kappa = \kappa_*$). À gauche, on voit la solution pour r , qui atteint son maximum à x_F . À droite se trouve la solution pour $-E$ (en gras), superposée au potentiel v .

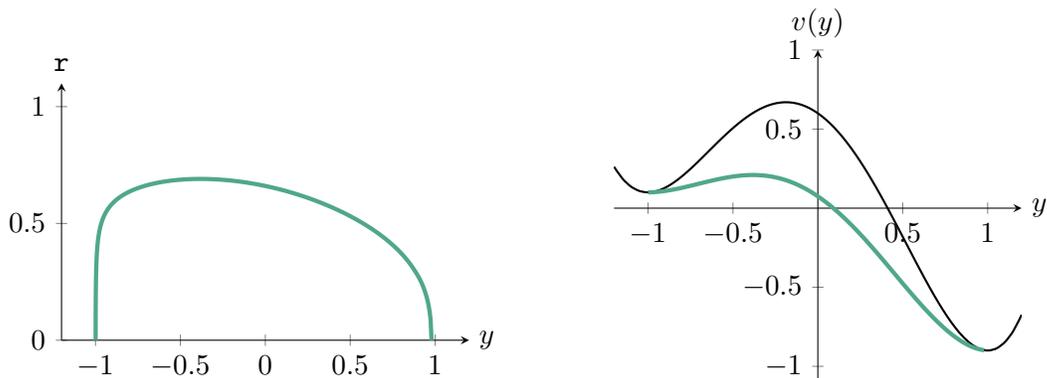


FIG. 2.3 : Exemple de solution sur-critique ($\kappa = 1.5\kappa_*$). À gauche, on voit la solution pour r , qui atteint un point r_{\max} à $y_{\max} \simeq -0.383$. À droite se trouve la solution pour $-E$ (en gras), superposée au potentiel v . La courbe E atteint un minimum à y_{\max} , avec $E_{\min} = -v_F/r_{\max}^2$. La différence entre les courbes v et $-E$ est v_0 .

2.4 | Théorème d'énergie positive

Il est possible d'obtenir une borne sur B analytiquement en suivant le théorème d'énergie positive [26–28]. On commence par donner une explication heuristique du théorème à partir des équations du mouvement avant de citer le résultat.

2.4.1 | Dérivation à partir des équations du mouvement

Considérons l'équation (2.24a). Supposons qu'au lieu de fixer v , on fixe v_0 et que l'on cherche E . On peut alors écrire

$$\frac{dE}{dy} = \frac{d-1}{\tilde{r}} \sqrt{\mathbf{r}^{-2} + E/v_F} \sqrt{2v_0} \geq \frac{d-1}{\tilde{r}} \sqrt{1 + E/v_F} \sqrt{2v_0}, \quad 0 \leq \mathbf{r} \leq 1. \quad (2.25)$$

Sous cette forme, l'équation différentielle est séparable, et la solution est

$$\sqrt{E(y) + v_F} - \sqrt{v_F - v_F^*} \geq \frac{(d-1)\kappa S_f(y)}{2}, \quad S_f(y) = \int_{y_F^*}^y \sqrt{2v_0(y')} dy'. \quad (2.26)$$

Le nom S_f est choisi, car le terme correspond à l'action (euclidienne) d'un champ dans le potentiel v_0 :

$$S_f(y_T^*) = \int_{y_F^*}^{y_T^*} \sqrt{2v_0(y)} dy = \int_{s_0}^{s_{\max}} 2v_0(y) ds = \int_{s_0}^{s_{\max}} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + v_0 \right] ds. \quad (2.27)$$

L'équation (2.26) tient pour tout y ; en particulier, elle tient à y_T^* , où $E = -v_T^*$ et

$$\sqrt{-v_T^* + v_F} - \sqrt{v_F - v_F^*} = \sqrt{v_F - v_F^*} \left[\sqrt{1 + \frac{v_F^* - v_T^*}{v_F - v_F^*}} - 1 \right]. \quad (2.28)$$

L'inégalité devient

$$\sqrt{v_F - v_F^*} \left[\sqrt{1 + \frac{v_F^* - v_T^*}{v_F - v_F^*}} - 1 \right] \geq \frac{(d-1)\kappa S_f(y_T^*)}{2}, \quad (2.29)$$

ce qui nous mène à

$$\kappa \leq \kappa_*(y_F^*) = \frac{2\sqrt{v_F - v_F^*}}{(d-1)S_f(y_T^*)} \left[\sqrt{1 + \frac{v_F^* - v_T^*}{v_F - v_F^*}} - 1 \right]. \quad (2.30)$$

Le cas qui nous intéresse est lorsque $y_F^* \rightarrow y_F$. En prenant la limite, on obtient le résultat principal

$$\boxed{\kappa_* = \frac{2\sqrt{\Delta v^*}}{(d-1)S_f(y_T^*)}}. \quad (2.31)$$

Que signifie ce résultat ? En fixant v_0 , on trouve la friction minimale engendrée par l'instanton pour que les équations du mouvement soient satisfaites, ce qui correspond à une borne minimale sur E . Puisque la friction dépend également du paramètre κ , on peut déterminer le paramètre κ_* correspondant à cette borne. Autrement dit, pour $\kappa > \kappa_*$, il y a trop de friction et E ne peut pas satisfaire les conditions frontières sans avoir une période d'anti-friction, c'est-à-dire que $y_{\max} \neq y_F$. Dans ce cas, E diminue jusqu'à E_{\min} à y_{\pm} , puis remonte pour atteindre $-v_T^*$ en y_T^* .

Notons qu'il n'y a pas de limite correspondante dans le cas sans gravité, car on peut rendre le terme de friction est aussi petit que désiré. Ici, la taille (finie) de l'univers impose une contrainte sur le rayon de la bulle, et donc une friction minimale⁵.

Cette observation a des conséquences substantielles : elle signale une transition de phase. Il existe deux régimes distincts où le profil de l'instanton est qualitativement différent, et un point critique κ_c qui correspond à la solution critique. Dans les faits, pour satisfaire les équations du mouvement, $\mathbf{r} < 1 \forall y$ (sauf à y_F pour la solution critique), donc la borne n'est *jamais* saturée et $\kappa_c < \kappa_*$.

Les trois cas identifiés précédemment correspondent respectivement aux trois régimes $\kappa < \kappa_c$, $\kappa > \kappa_c$ et $\kappa = \kappa_c$. Dans la région sous-critique, la solution ressemble au cas sans gravité. Dans la région surcritique $\kappa > \kappa_c$, la gravité empêche l'instanton d'atteindre y_F car la friction est trop importante, et donc le profil de la solution change. Un paramètre d'ordre émerge de la transition de phase : y_F^* qui doit être différent de y_F ⁶. Le cas $\kappa = \kappa_c$ est défini comme le cas limite où $\mathbf{r} = 1$ à y_F et un exemple est présenté à la figure 2.2.

Finalement, il y a deux précisions à faire sur cette discussion. Premièrement, la justification pour prendre la limite $y_F^* \rightarrow y_F$ à l'équation (2.31) suit de notre discussion sur le cas limite. Par définition, le cas $\kappa = \kappa_c$ correspond à la transition où $\mathbf{r} \rightarrow 1$, ce qui implique directement que $y_F^* \rightarrow y_F$. Deuxièmement, nous avons pris soin de ne pas écrire que $y_F^* = y_F$, ce qui est faux. Puisque l'instanton est compact, il se termine à un temps $s_{\max} < \infty$ avant d'atteindre y_F , même dans le cas sous-critique. De plus, une étude (numérique) de $y_F^*(\kappa)$ montre qu'il n'y a pas de discontinuité à $\kappa = \kappa_c$; au contraire, le point ne semble pas afficher de particularité, bien que la solution subit un changement qualitatif.

2.4.2 | Théorème d'énergie positive

Le théorème d'énergie positive est relié à κ_* . Le résultat est basé sur un théorème de Schön et Yau [29], repris par Witten [26], qui démontre que l'espace Minkowski est l'espace d'énergie

5. L'espace de de Sitter est compact en temps euclidien. Voir l'annexe 2.A pour un résumé des propriétés de l'espace de de Sitter.

6. De manière équivalente, on pourrait choisir y_{\max} comme paramètre d'ordre.

minimale en relativité générale classique avec supersymétrie, et qu'il n'est donc pas sujet à des transitions vers d'autres minima (peu importe le mécanisme). Ce résultat est un exemple d'une borne de type Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield (BPS). Le théorème fut repris par Boucher [27], qui étendit le théorème au cas non-supersymétrique, sous certaines contraintes. Finalement, Abbott et Park [28] ont appliqué l'argument au problème de stabilité du vide et ont obtenu une contrainte sur le potentiel

$$\Delta v \leq \frac{9}{4} \kappa^2 S_f^2 + [-9\kappa^2 v_F]^{1/2} S_f, \quad d = 4. \quad (2.32)$$

Cette contrainte se simplifie à y_T^* pour donner

$$1 \leq \alpha + [-4\alpha\xi]^{1/2}, \quad \alpha = \left(\frac{\kappa}{\kappa_*} \right)^2, \quad (2.33)$$

ou encore

$$(\alpha - 1)^2 + 4\alpha\xi \geq 0, \quad \xi \geq 0. \quad (2.34)$$

Le théorème est valide pour le cas $\xi = 0$, ce qui implique donc que $\alpha \geq 1$. Pour $\xi \geq 0$, ces contraintes sont équivalentes à $\alpha \geq 1$, c'est-à-dire $\kappa \geq \kappa_*$. Ainsi, pour $\kappa \geq \kappa_*$, la conclusion du théorème est que l'espace Minkowski est stable. Nous verrons qu'un résultat semblable apparaît également dans l'espace de de Sitter lorsqu'on calcule le bounce (cf. section 2.6). En effet, en reprenant l'argument de l'équation (2.26) à l'envers, on peut déduire que si

$$E + v_F^* \leq \frac{(d-1)^2}{4} \kappa^2 S_f^2 + \sqrt{-(d-1)^2 \kappa^2 (v_F^* - v_F) S_f}, \quad (2.35)$$

alors $\kappa > \kappa_c$. Dans le cas où $v_F \rightarrow 0$, on retombe sur le cas limite Minkowski et on peut montrer que l'espace est stable, ce qui est le résultat du théorème d'énergie positive. Dans le cas où l'inégalité n'est pas respectée, on ne peut pas conclure.

2.4.3 | Notes sur la dérivation 2.4.1

La dérivation de (2.31) offre plus qu'une justification au théorème d'énergie positive. Puisque le théorème d'énergie positive ne fait aucune hypothèse sur le mécanisme par lequel l'espace est instable, le fait que le même critère de stabilité puisse être obtenu à partir des équations du mouvement pour un instanton avec invariance de Lorentz est un argument non-trivial pour supporter l'hypothèse que la contribution maximale à l'action est effectivement invariante de Lorentz.

De plus, puisque le résultat (2.30) est valide pour un bounce compact, il est applicable pour un espace de de Sitter, contrairement au théorème d'énergie positive qui est restreint à l'espace Minkowski. En utilisant ce résultat, on peut calculer la correction à κ_c lorsque $\xi \neq 0$.

2.4.4 | Estimation de κ_c

Supposons que l'on ait la solution pour κ_* . On peut alors estimer la valeur de κ_c en calculant les corrections à κ_* . En développant (2.25) en série de puissance, on a

$$\frac{d(E_0 + E_1)}{dy} \simeq \frac{d-1}{\tilde{r}} \left[\sqrt{1 + E_0/v_F} + \frac{1-r}{\sqrt{1 + E_0/v_F}} + \mathcal{O}(1-r)^2 \right] \sqrt{2v_0}. \quad (2.36)$$

On utilisant la solution (2.26) avec $y_F^* \rightarrow y_F$, on trouve

$$\sqrt{1 + E_0/v_F} = \frac{(d-1)\kappa_* S_f}{2\sqrt{v_F}} \Rightarrow E_1 \simeq \frac{2v_F}{S_f} \int_{y_F^*}^y (1-r) \sqrt{2v_0} dy' \quad (2.37)$$

L'intégrale s'assimile à une valeur moyenne

$$\langle A \rangle = \frac{1}{S_f} \int_{y_F^*}^{y_T^*} A \sqrt{2v_0} dy. \quad (2.38)$$

En ajoutant la correction à la solution, on obtient

$$\sqrt{E_0 + E_1} \Big|_{y_T^*} \simeq \sqrt{\Delta v^*} [1 + \xi^* \langle 1-r \rangle] \geq \frac{(d-1)\kappa_* S_f(y)}{2}, \quad \xi^* = \frac{v_F^*}{\Delta v^*}, \quad (2.39)$$

soit

$$\boxed{\kappa_c \simeq \kappa_* [1 - \xi^* \langle 1-r \rangle] - \mathcal{O}(1-r)^2}. \quad (2.40)$$

Si on pouvait montrer que les corrections sont une fonction de $E_n(\langle 1-r \rangle \xi^*)$, alors dans la limite $\xi^* \rightarrow 0$, $\kappa_c = \kappa_*$.

2.5 | Solutions asymptotiques

Il nous manque un élément essentiel pour s'attaquer aux problèmes numériques : les solutions aux frontières. Les solutions sont asymptotiques aux solutions particulières pour l'espace de de Sitter, Minkowski ou anti-de Sitter, donc en première approximation, on pourrait supposer que lorsque $y \sim y_{F,T}$, la solution du bounce devient celle du background. Il s'avère que cette approximation ne fonctionne pas lorsque les transitions sont thermiques, car l'instanton passe très peu de temps proche des solutions du background.

Notre approche sera la suivante : en supposant que l'on puisse décomposer v_0 en série de Taylor, on peut calculer la solution pour r et E proche des frontières. La solution analytique nous permet de reconstruire v , et donc d'identifier v_0 et E pour un v donné en fonction des constantes

$$\lambda \equiv \left. \frac{dv}{dy} \right|_{y_{F,T}^*}, \quad \mu^2 = \left. \frac{d^2v}{dy^2} \right|_{y_{F,T}^*}. \quad (2.41)$$

2.5.1 | Cas $y \sim y_F$ pour une transition sous-critique $\kappa < \kappa_c$

Proche de y_F , E doit prendre la forme $E = -v_F + \delta E$, où $\delta E \geq 0$. L'équation différentielle pour r devient

$$\frac{dr}{dy} = -\frac{1}{\tilde{r}} \sqrt{\frac{1 + r^2 E/v_F}{2v_0}} \geq -\frac{1}{\tilde{r}} \sqrt{\frac{1 - r^2}{2v_0}} + \mathcal{O}(\xi^{-1}). \quad (2.42)$$

L'équation est séparable et la solution est ⁷

$$r(y) \geq \cos \left(\frac{1}{\tilde{r}} \int_{y_F^*}^y \frac{dy'}{\sqrt{2v_0}} \right) + \mathcal{O}(\xi^{-1}). \quad (2.43)$$

Proche de y_F^* , $v_0 \sim 0$, donc on s'attend à pouvoir écrire

$$v_0 = a |y - y_F| + \frac{b^2}{2} |y - y_F|^2. \quad (2.44)$$

En introduisant

$$x^2 = \frac{b^2}{2a} |y - y_F^*| \equiv \frac{|y - y_F^*|}{y_0}, \quad (2.45)$$

la solution s'exprime comme

$$r(x) \sim \cos(\theta_0 \sinh^{-1} x), \quad v_0 = ay_0 x^2 (1 + x^2), \quad \theta_0 = \frac{2}{b\tilde{r}}, \quad y_0 = \frac{2a}{b^2}. \quad (2.46)$$

Dans la limite où $b \rightarrow 0$, la solution devient $r \sim \cos\left(\frac{\sqrt{y - y_F}}{a\tilde{r}}\right)$. On peut procéder similairement pour E :

$$\frac{dE}{dy} \geq \frac{d-1}{\tilde{r}} \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} \sqrt{2v_0} + \mathcal{O}(\xi^{-1}) \quad (2.47)$$

$$\Rightarrow E(y) + v_F \geq \frac{d-1}{\tilde{r}} \int \tan(\theta_0 \sinh^{-1}(x)) \sqrt{2v_0} dy \quad (2.48)$$

L'intégrale se résout exactement en termes de la fonction beta incomplète $B(z; a, b)$, mais l'expression analytique est difficile à manipuler. Il est plus simple de développer en série de puissance et intégrer terme à terme, d'où l'on tire

$$E(y) + v_F \geq (d-1)y_0^2 \theta_0 b^2 \int \tan(\theta_0 \sinh^{-1}(x)) x^2 \sqrt{1 + x^2} dx \quad (2.49)$$

$$\sim \frac{d-1}{\tilde{r}^2} |y - y_F|^2 + \mathcal{O}\left(\frac{y - y_F}{y_0}\right)^3. \quad (2.50)$$

7. On peut également écrire la solution avec un sin pour être cohérent avec le cas $\kappa > \kappa_c$, mais dans ce cas il y a un point singulier qui complique l'analyse inutilement.

On peut donc identifier les valeurs de a et b :

$$v(y \sim y_F) \sim \lambda |y - y_F| + \frac{\mu^2}{2} |y - y_F|^2 \quad \Rightarrow \quad a = \lambda, \quad b^2 = \mu^2 + 2(d-1)\kappa^2 v_F. \quad (2.51)$$

La solution est donc valide pour $\xi \sim 1$ et $\frac{y-y_F}{y_0} \ll 1$. Pour $\xi \rightarrow 0$, $\tilde{r} \rightarrow 0$, donc la solution diverge, ce qui est cohérent avec le fait que l'action diverge. La constante y_0 est une indication du rayon de convergence

$$y_0 = \frac{\lambda}{\mu^2/2 + (d-1)\kappa^2 v_F}. \quad (2.52)$$

2.5.2 | Cas $y \sim y_F^*$ pour une transition sur-critique $\kappa > \kappa_c$

Il y a 3 différences majeures avec le cas sous-critique : $\delta E < 0$, $y_F^* \neq y_F$ et $\mathbf{r} \sim \sin(\dots)$. La solution pour \mathbf{r} reste donc pratiquement inchangée :

$$\mathbf{r}(x) \lesssim \sin(\theta_0 \sinh^{-1} x), \quad v_0 = ay_0 x^2 (1 + x^2). \quad (2.53)$$

La solution pour E devient

$$E(y) + v_F \leq -(d-1)y_0^2 \theta_0 b^2 \int \cot(\theta_0 \sinh^{-1}(x)) x^2 \sqrt{1+x^2} dx \quad (2.54)$$

$$\sim -(d-1)a |y - y_F^*| - \frac{d-1}{6} (2 - \theta_0^2) \frac{b^2}{2} |y - y_F^*|^2 - \mathcal{O}\left(\frac{y - y_F^*}{y_0}\right)^3. \quad (2.55)$$

Les constantes sont

$$a = \frac{\lambda}{d}, \quad b^2 = \frac{3\mu^2 + 2\frac{d-1}{\tilde{r}^2}}{d+2}. \quad (2.56)$$

La complication qui survient est que le point y_F^* est indéterminé. On doit donc chercher y_F^* de telle sorte que les paramètres λ et μ trouvés à ce point donnent une solution continue.

En calculant E explicitement, on trouve

$$E \sim -v_F - \frac{d-1}{d} \lambda |y - y_F^*| - \frac{d-1}{d+2} \left[\frac{\mu^2}{2} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \right] |y - y_F^*|^2 - \mathcal{O}\left(\frac{y - y_F^*}{y_0}\right)^3. \quad (2.57)$$

Il semble donc que, pour qu'une solution valide existe, il faille que

$$\mu^2 = v''(y_F^*) \geq 2\frac{d-1}{\tilde{r}^2}. \quad (2.58)$$

Ce résultat est cohérent avec la littérature [18, 30–32]. La constante y_0 est

$$y_0 = \frac{d+2}{d} \frac{\lambda}{3\mu^2/2 + (d-1)/\tilde{r}^2}. \quad (2.59)$$

2.5.3 | Cas $y \sim y_T^*$

Finalement, dans le cas où $y \sim y_T^*$, on a $E \sim -v_T^* - \delta E(y_T^* - y)$ avec $\delta E > 0$, mais μ^2 peut être négatif si y_T^* est plus proche du maximum de v que de son minimum. Dans ce cas, on prend la continuation analytique pour b imaginaire et la solution tient encore.

En procédant similairement, on a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dy} \geq -\frac{1}{\tilde{r}} \sqrt{\frac{1 + \mathbf{r}^2 |v_T|/v_F}{2v_0}} + \mathcal{O}(\xi^{-1}). \quad (2.60)$$

On développe encore avec

$$v_0(y) \sim a |y - y_T^*| + \frac{b^2}{2} |y - y_T^*|^2. \quad (2.61)$$

En intégrant, on trouve

$$\mathbf{r}(x) \sim \sqrt{\frac{v_F}{|v_T|}} \sinh(\theta_0 \sinh^{-1}(x)), \quad \theta_0 = \frac{2\kappa \sqrt{|v_T|}}{b}, \quad x^2 = \frac{|y - y_T^*|}{y_0}. \quad (2.62)$$

Le facteur $\sqrt{\frac{v_F}{|v_T|}}$ change la normalisation de r de l'espace de de Sitter vers l'espace anti-de Sitter. L'équation pour E est

$$\frac{dE}{dy} \leq \frac{d-1}{\tilde{r}} \frac{\sqrt{1 + \frac{|v_T|}{v_F} \mathbf{r}^2}}{\mathbf{r}} \sqrt{2v_0} - \mathcal{O}(\xi^{-1}). \quad (2.63)$$

La solution est donc

$$E + v_T \geq -(d-1)y_0^2 \theta_0 b^2 \int \coth(\theta_0 \sinh^{-1}(x)) x^2 \sqrt{1+x^2} dx, \quad (2.64)$$

$$\sim -(d-1)a |y - y_T^*| - \frac{d-1}{12} b^2 (2 - \theta_0^2) |y - y_T^*|^2 + \mathcal{O}(|y - y_T^*|^3). \quad (2.65)$$

Les constantes sont alors

$$a = \frac{\lambda}{d}, \quad b^2 = \frac{3\mu^2 + 2\frac{d-1}{\tilde{r}^2}}{d+2}, \quad (2.66)$$

et la solution pour E et y_0 est la même que pour le cas $\kappa > \kappa_c$ dans l'espace de de Sitter.

2.5.4 | Note

Remarquons que l'on peut prendre y_0 aussi petit que souhaité en s'approchant d'un minimum ($\lambda \rightarrow 0$). Dans ce cas, \mathbf{r} devient plat :

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dx} \right| \leq \frac{\theta_0}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow 0, \quad x \gg 1. \quad (2.67)$$

Il s'agit de l'approximation thin-wall.

2.6 | Approximation thin-wall

Jusqu'à présent, nous avons décrit la forme des solutions en identifiant un point critique κ_c et en analysant le comportement des solutions dans les régions $\kappa < \kappa_c$ et $\kappa > \kappa_c$. Dans cette section, nous développons une approche différente : en introduisant des fonctions d'essai \mathbf{r} et E , nous obtenons une approximation de B^c dans la limite thin-wall.

On reprend essentiellement l'analyse de la section 1.3. Supposons que la différence de potentiel $\Delta v \ll 1$ est faible. Alors, puisque v_0 est arbitraire, l'équation (2.24a) implique que

$$\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F} \ll \mathbf{r} \leq 1. \quad (2.68)$$

Donc, en particulier, $\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F} \ll 1$, et $|\mathbf{r}'| \ll 1$. On choisit donc une solution où $\mathbf{r}(y) = \bar{\mathbf{r}}$ est une constante dans la transition. Un exemple de ce comportement peut être observé aux figures 2.1 et 2.2. L'équation du mouvement pour $E \simeq E_0(y) + \mathcal{O}(\Delta v)$ est alors arbitraire.

2.6.1 | Calcul de l'action

On introduit les solutions d'essai \mathbf{r} et E dans l'action B^c , et on cherche les paramètres qui minimisent B^c . Pour comparer les solutions entre elles, commençons par introduire un ratio sans dimensions

$$R = 1 - \frac{B^c}{S_{dS}} = \frac{S_E(y_F^* \rightarrow y_T^*)}{S_E(y_F)}. \quad (2.69)$$

En substituant l'équation (2.21), on peut simplifier l'expression :

$$R = 2 \frac{S_{d-1}}{S_d} \frac{1}{\tilde{r}^{d-2}} \int_{s_0}^{s_{\max}} \left[\frac{d-2}{2} r^{d-3} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - \kappa^2 r^{d-1} v_0 \right] ds \quad (2.70)$$

$$= 2 \frac{S_{d-1}}{S_d} \tilde{r} \left[\frac{d-2}{2} \int_{s_0}^{s_{\max}} \mathbf{r}^{d-3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 ds - \kappa^2 \int_{s_0}^{s_{\max}} \mathbf{r}^{d-1} v_0 ds \right] \quad (2.71)$$

Le premier terme est toujours positif et peut être réinterprété comme une intégrale sur \mathbf{r} , alors que le deuxième terme est toujours négatif. Ainsi,

$$R = \frac{S_{d-1}}{S_d} \left[(d-2) \oint \mathbf{r}^{d-3} \left| \sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F} \right| |d\mathbf{r}| - \frac{\kappa}{\sqrt{v_F}} \int_{y_F^*}^{y_T^*} \mathbf{r}^{d-1} \sqrt{2v_0} dy \right]. \quad (2.72)$$

Le premier terme représente l'énergie gagnée dans la conversion du volume ; le second la tension de surface de la bulle. Le terme $\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F}$ représente le facteur de correction à la géométrie et change de signe en même temps que $d\mathbf{r}$, de sorte que le produit soit toujours positif.

On utilise l'approximation thin-wall. On doit considérer les cas $\kappa < \kappa_c$ et $\kappa > \kappa_c$ séparément, puisque la forme de l'instanton change.

2.6.2 | Cas $\kappa < \kappa_c$

Dans le cas $\kappa < \kappa_c$, on utilise le fait que $y_F^* \rightarrow y_F$ pour simplifier :

$$R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c} = \frac{S_{d-1}}{S_d} \left[(d-2) \left(\int_0^1 + \int_1^{\bar{r}} \right) r^{d-3} \sqrt{1-r^2} dr + (d-2) \int_0^{\bar{r}} r^{d-3} \sqrt{1 + \left| \frac{v_T^*}{v_F} \right| r^2} dr - \frac{\kappa}{\sqrt{v_F}} \int_{y_F}^{y_T^*} r^{d-1} \sqrt{2v_0} dy \right]. \quad (2.73)$$

L'intégrale sur r se résout et donne

$$\int_0^1 r^{d-3} \sqrt{1-r^2} dr = \frac{1}{2(d-2)} \frac{S_d}{S_{d-1}}. \quad (2.74)$$

On peut identifier κ_* dans le dernier terme. Par anticipation du résultat, on introduit les variables

$$\alpha = \left(\frac{2}{d-2} \frac{\kappa}{\kappa_*} \right)^2, \quad \xi^* = \frac{v_F^*}{\Delta v^*}. \quad (2.75)$$

On remplace $\frac{y_T^*}{y_F} = \frac{1-\xi}{\xi}$ pour obtenir

$$R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c} = \frac{1}{2} + \frac{S_{d-1}}{S_d} (d-2) \left[\int_1^{\bar{r}} r^{d-3} \sqrt{1-r^2} dr + \int_0^{\bar{r}} r^{d-3} \sqrt{1 + \frac{1-\xi^*}{\xi^*} r^2} dr - \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^*}} \frac{r^{d-1}}{d-1} \right] \quad (2.76)$$

On cherche \bar{r} qui minimise R , donc on dérive

$$\frac{\partial R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c}}{\partial \bar{r}} = \frac{S_{d-1}}{S_d} (d-2) \left[\bar{r}^{d-3} \sqrt{1-\bar{r}^2} + \bar{r}^{d-3} \sqrt{1 + \frac{1-\xi^*}{\xi^*} \bar{r}^2} - \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^*}} \bar{r}^{d-2} \right] = 0. \quad (2.77)$$

La solution est

$$\bar{r}(\alpha, \xi^*) = \left[1 + \frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha\xi^*} \right]^{-1/2}. \quad (2.78)$$

La solution pour $R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c}$ s'exprime en termes de fonctions hypergéométriques

$$R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c} = 1 - \frac{S_{d-1}}{S_d} \bar{r}^{d-2} \left[F_d(\bar{r}^2) - F_d\left(\frac{\xi^* - 1}{\xi^*} \bar{r}^2\right) + \frac{1}{d-1} \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^*}} \bar{r} \right], \quad (2.79)$$

$$F_d(y) = {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}; \frac{d}{2}; y\right). \quad (2.80)$$

On peut vérifier que $\frac{\xi^*-1}{\xi^*}\bar{r}^2 \leq 1$ implique que $(\alpha - 1)^2 + 4\alpha \geq 0$, ce qui est toujours vrai, donc la fonction hypergéométrique converge toujours. La solution se simplifie sensiblement pour $d = 4$

$$R_{\text{tw}}^{\kappa < \kappa_c}(\alpha, \xi^*) = 1 - \frac{1}{2(1 - \xi^*)} \left[1 + \frac{\alpha(1 - 2\xi^*) - 1}{\sqrt{(\alpha - 1)^2 + 4\alpha\xi^*}} \right], \quad d = 4. \quad (2.81)$$

2.6.3 | Cas $\kappa > \kappa_c$

Le cas $\kappa > \kappa_c$ est semblable, mais le point de départ est différent :

$$R_{\text{tw}}^{\kappa > \kappa_c} = \frac{S_{d-1}}{S_d} \left[(d-2) \int_0^{\bar{r}} \mathbf{r}^{d-3} \sqrt{1 - \left| \frac{v_F^*}{v_F} \right| \mathbf{r}^2} d\mathbf{r} + (d-2) \int_0^{\bar{r}} \mathbf{r}^{d-3} \sqrt{1 + \left| \frac{v_T^*}{v_F} \right| \mathbf{r}^2} d\mathbf{r} - \frac{\kappa}{\sqrt{v_F}} \int_{y_F^*}^{y_T^*} \mathbf{r}^{d-1} \sqrt{2v_0} dy \right]. \quad (2.82)$$

Notons qu'ici, $y_F^* \neq y_F$, donc on s'attend à avoir des corrections. La transition s'effectue avant \mathbf{r}_{max} , donc il y a un terme constant de moins. On peut réécrire R comme

$$R_{\text{tw}}^{\kappa > \kappa_c} = \frac{S_{d-1}}{S_d} (d-2) \left[\int_0^{\bar{r}} \mathbf{r}^{d-3} \sqrt{1 - \left| \frac{v_F^*}{v_F} \right| \mathbf{r}^2} d\mathbf{r} + \int_0^{\bar{r}} \mathbf{r}^{d-3} \sqrt{1 + \left| \frac{v_F^*}{v_F} \right| \frac{1 - \xi^*}{\xi^*} \mathbf{r}^2} d\mathbf{r} - \sqrt{\left| \frac{v_F^*}{v_F} \right|} \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^*} \mathbf{r}^{d-1}} \right]. \quad (2.83)$$

Les facteurs $\left| \frac{v_F^*}{v_F} \right|$ peuvent être absorbés dans la définition de $\sqrt{\left| \frac{v_F^*}{v_F} \right|} \mathbf{r} \rightarrow t$, auquel cas l'action est semblable au cas sans corrections. Les variables sont alors

$$\alpha = \left(\frac{2}{d-2} \frac{\kappa}{\kappa_*} \right)^2, \quad \xi^* = \frac{v_F^*}{\Delta v^*}. \quad (2.84)$$

En dérivant R par rapport à \bar{r} comme précédemment, on trouve

$$\bar{r}(\alpha, \xi^*) = \sqrt{\left| \frac{v_F}{v_F^*} \right|} \left[1 + \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha\xi^*} \right]^{-1/2}, \quad (2.85)$$

ce qui est exactement le même résultat que pour $\kappa < \kappa_c$. La solution pour R est alors

$$R_{\text{tw}}^{\kappa > \kappa_c} = \frac{S_{d-1}}{S_d} \bar{r}^{d-2} \left[F_d \left(\frac{v_F^*}{v_F} \bar{r}^2 \right) + F_d \left(\frac{v_F^*}{v_F} \frac{\xi^* - 1}{\xi^*} \bar{r}^2 \right) - \frac{1}{d-1} \sqrt{\frac{\alpha}{\xi^*}} \sqrt{\frac{v_F^*}{v_F} \bar{r}} \right], \quad (2.86)$$

$$F_d(y) = {}_2F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2}; \frac{d}{2}; y \right). \quad (2.87)$$

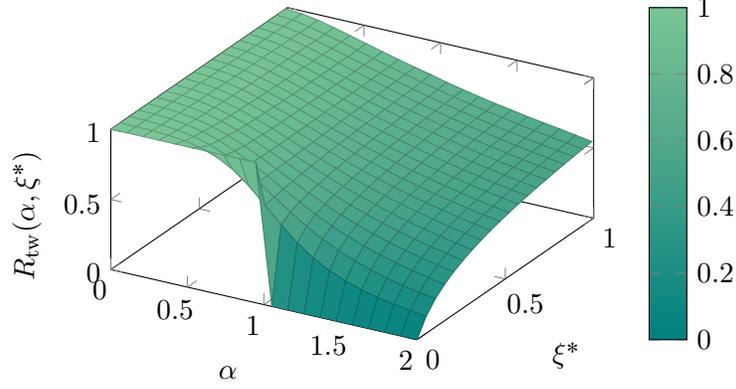


FIG. 2.4 : $R_{\text{tw}}(\alpha, \xi^*)$ calculé dans l'approximation thin-wall.

En 4 dimensions, R se simplifie et donne

$$R_{\text{tw}}^{\kappa > \kappa_c}(\alpha, \xi^*) = \frac{v_F}{v_F^*} \left\{ 1 - \frac{1}{2(1-\xi^*)} \left[1 + \frac{\alpha(1-2\xi^*)-1}{\sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha\xi^*}} \right] \right\}, \quad d = 4. \quad (2.88)$$

2.6.4 | Résumé

Même si les expressions de R étaient différentes au départ, on obtient les mêmes résultats dans les deux régimes, avec une correction $\frac{v_F}{v_F^*}$ dans le régime thermique qui correspond à la probabilité de passer du vide v_F à l'état v_F^* pour faire la transition. La solution thin-wall est simplement

$$\alpha = \left(\frac{2}{d-2} \frac{\kappa}{\kappa_*} \right)^2, \quad \xi^* = \frac{v_F^*}{\Delta v^*}, \quad (2.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}(\alpha, \xi^*) = \sqrt{\left| \frac{v_F}{v_F^*} \right|} \left[1 + \frac{(\alpha-1)^2}{4\alpha\xi^*} \right]^{-1/2}, \end{array} \right. \quad (2.90a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\text{tw}}(\alpha, \xi^*) = \frac{v_F}{v_F^*} \left\{ 1 - \frac{1}{2(1-\xi^*)} \left[1 + \frac{\alpha(1-2\xi^*)-1}{\sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\alpha\xi^*}} \right] \right\}, \quad d = 4. \end{array} \right. \quad (2.90b)$$

L'expression de α suggère de redéfinir κ_* pour absorber le facteur $\frac{2}{d-2}$ ⁸. La solution $R(\alpha, \xi)$ est illustrée à la figure 2.4. Remarquons en particulier comment le comportement change autour de $\alpha = 1$, $\xi = 0$. On peut montrer que cette discontinuité signale une transition de phase. Nous pourrions également corroborer l'exactitude du résultat en utilisant des méthodes numériques.

⁸. Il n'est pas clair pourquoi l'argument du théorème d'énergie positive et cette dérivation donnent une valeur différente pour κ_* pour $d \neq 4$.

Finalement, la probabilité de transition est donnée par

$$\Gamma/V \sim \exp[S_{dS}(R-1)], \quad (2.91)$$

donc quand $R \sim 0$, la probabilité est de l'ordre de $\exp(-S_{dS})$ et l'espace est stable, alors qu'il est instable lorsque $R \sim 1$.

2.7 | Limites d'applicabilité et régime thermique

Peu de résultats analytiques sont connus en dehors de l'approximation thin-wall. Or, comme le laissait suggérer l'analyse du potentiel quartique sans gravité 1.4, l'approximation est applicable pour une grande région de l'espace des paramètres.

La solution (2.90) est valide si $\mathbf{r}' \ll 1$ pendant la transition. En substituant la solution thin-wall, on trouve

$$\xi^* \ll \xi_c^* = \frac{\alpha}{\alpha - \delta\alpha} - \frac{(\alpha - 1)^2}{4\alpha}, \quad \delta\alpha = \frac{2v_0}{\kappa_*^2 v_F}. \quad (2.92)$$

Évidemment, si $\delta\alpha > \alpha$, alors la contrainte ne fait pas de sens. Pour $\delta\alpha < \alpha$, la borne la plus contraignante est pour $v_0 \sim 0$, ce qui correspond aux frontières. Une estimation plus significative est $\delta\alpha \sim \frac{2[v_H - v_F^* + \mathcal{O}(\Delta v)]}{\kappa_*^2 v_F}$, avec $v_H = v(y_H)$ le maximum du potentiel. Remarquons que $\delta\alpha$ est une constante calculable pour un potentiel v_0 donné (et approximable pour v).

La figure 2.5 présente la limite d'applicabilité de l'approximation thin-wall (2.92). Il est intéressant de noter que $\xi_{\max}^*(\alpha_{\max}) = 0$, ce qui signifie que l'approximation n'est plus applicable pour aucun ξ^* lorsque $\alpha \sim \alpha_{\max}$. Dans ce cas, $\mathbf{r}' \gtrsim 1$ sur tout le domaine et la bulle se referme très rapidement, donc l'instanton doit interpoler entre des valeurs de champ proche de y_H : c'est le régime thermique. Dans la limite où $\alpha = \alpha_{\max}$, $\mathbf{r}' = 0$ à y_F^* , ce qui signifie que la bulle se referme au même endroit ($y_F^* \rightarrow y_T^* = y_H$) et l'instanton devient asymptotique à la solution Hawking-Moss (HM)⁹. On peut donc s'attendre à ce que la courbe $\xi_{\max}^*(\alpha)$ corresponde non seulement à la limite de l'approximation thin-wall, mais aussi indique la limite des solutions Coleman-de Luccia (CdL). En effet, la probabilité de transition pour l'instanton HM est indépendante de α et domine alors l'instanton CdL.

Dans la région $\xi^* > \xi_c^*$ la solution thin-wall subit des corrections de l'ordre de

$$\delta R = \frac{v_F}{v_F^*} \frac{S_{d-1}}{S_d} \left[\frac{d-2}{2} \oint \frac{\mathbf{r}^{d-1}}{\sqrt{1 + \mathbf{r}^2 E/v_F}} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{r}} d\mathbf{r} - \frac{\kappa \bar{\mathbf{r}}^{d-2}}{\sqrt{v_F}} \left((d-1) \langle \delta \mathbf{r} \rangle + \bar{\mathbf{r}} \left\langle \frac{\delta E}{2v_0} \right\rangle \right) \right] \quad (2.93)$$

Pour $\alpha < 1$, on s'attend à ce que \mathbf{r} et E soient des fonctions impaires en x (autour de leur valeur moyenne). Dans ce cas, la correction est faible au premier ordre donc on s'attend à

9. Voir l'annexe 2.C pour un résumé des instantons Hawking-Moss.

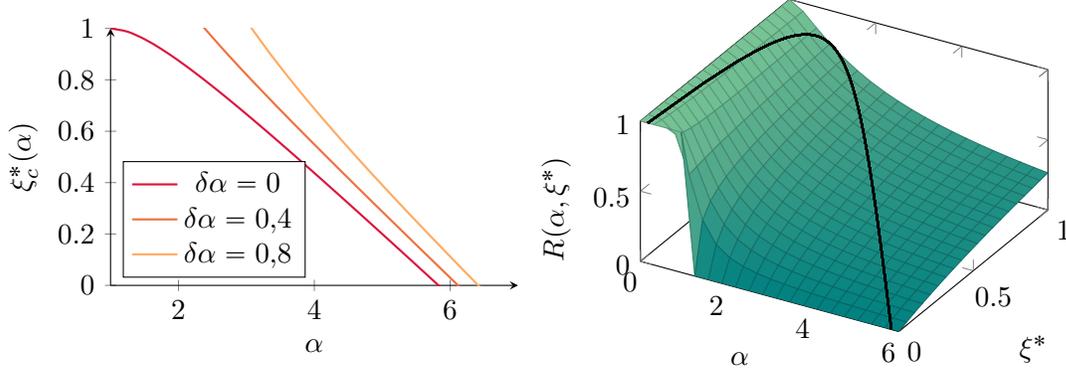


FIG. 2.5 : Limite d'applicabilité de l'approximation thin-wall. À gauche se trouvent des courbes de niveau pour différents $\delta\alpha$. À droite, on superpose la limite pour $\delta\alpha = 0$ à $R_{\text{tw}}(\alpha, \xi^*)$.

ce que $R \sim R_{\text{tw}}$. Pour $\alpha > 1$, la forme des solutions est modifiée substantiellement par la gravité, et les corrections devraient être plus importantes.

2.8 | Contraintes sur la stabilité du vide

Nous avons maintenant une bonne compréhension du comportement de l'instanton sur tout l'espace des paramètres. Lorsque $\alpha < 1$, l'instanton se comporte essentiellement comme dans le cas sans gravité et $R \sim 1$. À $\alpha > 1$, la forme de l'instanton change et le champ y doit être excité jusqu'à un état y_F^* avant d'effectuer une transition, ce qui diminue substantiellement la probabilité de transition autour de $\xi^* = 0$, et conséquemment $R \sim 0$. Dans les deux cas, lorsqu'on augmente ξ^* , on diminue le rayon de l'espace de de Sitter et les corrections dues à la gravité quantique devraient se faire sentir davantage ; aussi atteint-on un régime thermique où l'instanton HM domine autour de ξ_c^* . Finalement, on sait que les solutions exactes devraient recevoir des corrections importantes dans le régime thermique, mais que R_{tw} devrait être une bonne estimation pour le reste des paramètres.

On peut alors faire une observation intéressante. Rappelons que le nœud du problème est ici que la transition dS \rightarrow AdS (soit le cas $0 \leq \xi^* \leq 1$) présente plusieurs incohérences, mais qu'une solution est de réinterpréter la transition comme une récurrence à un état de faible entropie. Or, pour que cette résolution soit envisageable, il faut que la probabilité de transition soit comparable à celle d'un évènement de type récurrence de Poincaré, soit $R \sim 0$. On obtient alors directement deux contraintes nécessaires à la stabilité du vide :

$$\alpha > 1, \quad \xi^* \ll \xi_c^*. \quad (2.94)$$

Notons que ces définitions sont sensées, car $R_{\text{tw}}(\alpha > 1, \xi^* < \xi_c^*) < R_{\text{tw}}(1, 1) = \frac{3}{4}$, donc la probabilité de transition est bornée, et elle tend vers 0 lorsque $\xi^* \rightarrow 0$. Soulignons également

que la condition $\xi^* \ll \xi_c^*$ est assez forte, puisque lorsque $y_F^* \rightarrow y_H$, $\xi^* \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow \infty$, ce qui améliore la borne.

Puisque les critères (2.94) semblent nécessaires pour que la théorie soit cohérente, nous pouvons les élever au rang de contraintes sur l'espace des paramètres de la théorie, en postulant qu'un mécanisme inconnu contraint les paramètres à respecter lesdites conditions. Ce point de vue pourrait offrir une résolution au problème de la hiérarchie et de la constante cosmologique : si les paramètres sont naturels dans l'espace des paramètres réduit qui respecte les contraintes de cohérence de la théorie, alors on pourrait conclure que les problèmes de *fine-tuning* sont plutôt des artéfacts de notre description naïve de la théorie. Dans une description appropriée de la théorie, les paramètres ne sont pas libres de prendre toutes les valeurs que notre formalisme laisserait croire, et ils y sont naturels. Il est bon de noter qu'une question similaire peut être posée pour les théories de la supergravité, qui doivent avoir une structure précise pour être bien définies.

Dans le cas présent, la contrainte $\xi^* \ll \xi_c^*$ place une borne supérieure sur la densité d'énergie du vide, et pourrait expliquer pourquoi elle est aussi faible. La contrainte $\alpha > 1$ est plus complexe à analyser. Pour obtenir des contraintes réelles, on doit utiliser le groupe de renormalisation pour calculer le potentiel effectif et ainsi évaluer α en fonction des paramètres renormalisables : masse du champ, constante de couplage quartique, etc.

Terminons en apportant quelques bémols. D'abord, bien que les contraintes (2.94) décrivent une physique importante pour les instantons CdL, postuler qu'elles sont nécessaires à la stabilité de l'espace est une proposition spéculative. En effet, le fait que la théorie soit incohérente lorsque les conditions (2.94) ne sont pas respectées n'est pas nécessairement une catastrophe, et il est possible d'imaginer d'autres solutions. Par exemple, il est plausible qu'une théorie de la gravité quantique vienne résoudre le paradoxe de la transition vers un minimum AdS (par exemple avec AdS/CFT) et que les conditions dérivées ne jouent pas un rôle déterminant. Quoiqu'il en soit, étant donné le peu de choses connues sur la gravité quantique, il nous semble important d'explorer plusieurs alternatives.

Enfin, puisqu'il n'y a pas de preuve que la contribution dominante à l'action soit invariante de Lorentz et que l'on traite la gravité classiquement, on ne peut pas tirer de conclusions définitives quant aux conditions de stabilité des champs scalaires dans l'espace de de Sitter. Toutefois, nous avons montré comment la théorie est incohérente si ces conditions ne sont pas respectées, ce qui devrait suggérer une exploration plus profonde des conditions de cohérence d'une théorie de la gravité quantique.

Compléments

2.A | À l'intérieur de la bulle : perspective cosmologique

Les coordonnées \mathbf{r} et Ω sont appropriées pour un observateur extérieur, car elles mettent en évidence l'invariance de Lorentz de la solution. Dans ce cas, la métrique peut s'exprimer comme

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = ds^2 + \mathbf{r}^2(s)d\Omega^2, \quad x_0^2 - x_1^2 - x_i^2 = \mathbf{r}^2. \quad (2.95)$$

Sous la transformation de coordonnées

$$x_0 = \sqrt{\mathbf{r}^2 - r^2} \sinh t/\mathbf{r}, \quad x_1 = \sqrt{\mathbf{r}^2 - r^2} \cosh t/\mathbf{r}, \quad x_i = rz_i, \quad (2.96)$$

on retrouve la forme standard pour les solutions maximalelement symétriques (dS et AdS) lorsque $\mathbf{r}' = 0$:

$$\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{r}^2(s)}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{r}^2(s)}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (2.97)$$

Ainsi, un observateur à l'intérieur de la bulle voit un Univers symétrique avec une constante cosmologique $\Lambda = \frac{(d-1)^2}{2\mathbf{r}^2}$. Or, durant la transition \mathbf{r} dépend de s , donc la métrique reçoit des contributions supplémentaires. Les coordonnées naturelles sont plutôt les coordonnées *comobiles* [33],

$$\tilde{t} = s = \sqrt{t^2 - r^2}, \quad d\Omega_{d-1}^2 = -d\chi^2 - \sinh^2 \chi d\Omega_{d-2}^2. \quad (2.98)$$

En substituant $\tilde{r}^2 = \sinh^2 \chi$, la métrique devient

$$d\tilde{t}^2 - \mathbf{r}^2(\tilde{t}) \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 + \tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.99)$$

ce qui est la métrique d'un univers Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) (avec $k = -1$). Il est intéressant, d'un point de vue cosmologique, de voir apparaître un univers FLRW à partir d'un processus dynamique. En particulier, on pourrait se demander si la forme de $\mathbf{r}(s)$ permettrait d'expliquer certains problèmes cosmologiques, par exemple l'accélération de l'expansion de l'Univers.

Une des difficultés pour approcher un tel scénario est qu'ils génèrent une inflation perpétuelle : puisque les bulles de vrai vide apparaissent dans un Univers déjà en expansion et

que l'Univers croît plus vite qu'elles, elles ne parviennent pas à recouvrir l'Univers entier et arrêter l'inflation partout. Cette possibilité n'est pas invalidée, seulement elle est similaire au principe anthropique de Weinberg (cf. 4.5.3) et n'est pas très satisfaisante.

Un problème plus pressant est que le processus de nucléation devrait générer un Univers fractal sous l'interaction de plusieurs bulles. Or, l'Univers est remarquablement homogène à grandes échelles. Pour résoudre cette question, il serait intéressant de mieux comprendre la dynamique des bulles lors de l'interaction, et possiblement comment en détecter les ondes gravitationnelles [34, 35].

Finalement, puisque la transition dans l'espace de de Sitter est réversible, on s'attendrait à ce que certaines régions de l'Univers ne soient pas au même vide électrofaible, ce qui n'est pas observé.

2.B | Ensemble thermique et espace de de Sitter

L'espace de de Sitter peut s'écrire comme (2.97) en coordonnées statiques (indépendantes de t), et possède un horizon cosmologique à $r = \mathbf{r}$. Il est donc défini comme un hyperboloïde dans un espace Minkowski d'une dimension supplémentaire par la contrainte $x_0^2 - x_1^2 - x_i^2 = \mathbf{r}^2$. En particulier, on remarque que si on remplace $t \rightarrow i\tau$ dans (2.96), alors la coordonnée τ (le temps euclidien) est périodique avec une période \mathbf{r} .

Une autre interprétation pour cette équation est d'imaginer un observateur subissant une accélération constante \mathbf{r} . Sa trajectoire suit alors le même hyperboloïde, ce qui est connu sous le nom des coordonnées de Rindler. Dans ce cas, l'observateur voit un flot de particules incident, qu'il peut interpréter comme un univers Minkowski à une température non-nulle $T = \mathbf{r}^{-1}$: c'est l'effet Unruh.

En interprétant l'espace de de Sitter comme un ensemble thermique dans Minkowski, la notion d'entropie est bien définie et correspond au logarithme du nombre d'états accessibles sur la couche¹⁰ \mathbf{r} , ce qui est un bon argument pour interpréter les instantons CdL rares comme une récurrence de Poincaré. En l'occurrence, on obtient la relation $\mathcal{S}_{\text{dS}} = \frac{A}{4G_N} = -S_{\text{dS}}$ (voir [36]). En fonction des échelles significatives, on trouve alors

$$\frac{\tau_{\text{CdL}}}{\tilde{r}_{\text{dS}}} \sim \left(\frac{\tau_{PR}}{\tilde{r}_{\text{dS}}} \right)^{1-R}, \quad (2.100)$$

où τ_{PR} est le temps de récurrence de Poincaré. On peut comparer cette échelle au temps pour qu'un trou noir de taille maximal apparaisse, qui est de l'ordre de $\frac{\tau_{BH}}{\tilde{r}_{\text{dS}}} \sim \left(\frac{\tau_{PR}}{\tilde{r}_{\text{dS}}} \right)^{1/3}$, donc pour $R < \frac{2}{3}$, on pourrait parler de récurrence à un état de faible entropie.

10. On peut penser que cette entropie correspond à l'entropie d'intrication reliée à l'accélération de l'observateur sur la trajectoire de Rindler.

Il serait intéressant de voir si on peut pousser l’analogie plus loin jusqu’à une température négative pour l’espace AdS, et s’il est possible de faire le lien avec la correspondance AdS/CFT. Également, il serait intéressant d’étudier comment les perturbations à l’espace de de Sitter se reflètent dans Minkowski. Plus précisément, est-il possible d’interpréter ces perturbations comme une déformation du plongement dans l’espace Minkowski ?

2.C | Instanton Hawking-Moss

Les instantons Hawking-Moss correspondent à une solution particulière des équations du mouvement, d’abord identifiée dans [37]. Le champ y effectue une transition entre v_F et v_H (le maximum du potentiel) sans passer par des états intermédiaires. Dans notre formulation, $y_F^* = y_T^* = y_H$, donc $y' = y'' = 0$. Cette solution respecte les équations du mouvement et correspond à une solution dS, mais instable cette fois-ci.

Selon l’article original, la probabilité de transition est donnée par le ratio

$$R_{HM}(\xi) = \frac{v_F}{v_H} = \xi \frac{\Delta v}{v_H}. \quad (2.101)$$

La transition représente alors une transition d’un espace de faible densité d’énergie vers un espace de haute densité. Si l’énergie totale est la même, l’entropie diminue considérablement, et le ratio peut être interprété comme la probabilité que l’entropie diminue jusqu’à celle de y_H [38]. La barrière de potentiel correspond donc à une barrière entropique.

Il est intéressant de remarquer que la probabilité est indépendante de la distance en champ Δy entre les extrema. Il est donc généralement attendu que l’instanton domine celui de CdL lorsque la distance en champ est importante. Notre analyse suggère autrement.

Les résultats de l’approximation thin-wall indiquent que lorsque $\xi^* \rightarrow \infty$, la transition CdL est asymptotique à celle de Hawking-Moss, ce qui suggère qu’il s’agit bien du même processus. Dans ce cas, la contribution dominante est toujours celle de CdL : lorsque l’entropie initiale est faible ($\xi^* \gtrsim \xi_c^*$), l’instanton approche HM car la barrière entropique est faible, mais lorsque l’entropie initiale est élevée ($\xi^* \lesssim \xi_c^*$), l’instanton HM est inhibé par un facteur $\mathcal{O}\left(\frac{v_F^*}{v_H}\right) \sim \xi^*$ et il est sous-dominant.

L’article original argumente que le seul moyen d’obtenir un Univers suffisamment homogène à la suite de processus de nucléation de bulles est que la transition elle-même soit homogène, et on pensait que l’instanton HM réglait ce problème. Or, le critère pour avoir une transition homogène est $\kappa = \kappa_c$, car la bulle recouvre alors tout l’Univers. Aujourd’hui, les instantons HM suscitent de l’intérêt entre autres comme outil pour explorer le *string landscape*, principalement pour leur simplicité. Cependant, leur contribution est sous-dominante, ce qui limite les conclusions de telles analyses.

Pour aller plus loin, il serait intéressant d'appliquer les solutions asymptotiques 2.5 au point y_H pour obtenir une meilleure idée de la limite CdL \rightarrow HM.

3

Méthodes numériques

Ce chapitre décrit les différents outils numériques pour étudier le système (2.24), et discute de leur précision. Nous commençons par décrire l'algorithme utilisé, puis nous vérifions que l'algorithme donne les bons résultats en comparant les résultats numériques aux résultats analytiques dans la limite thin-wall. Une fois les résultats validés, nous faisons quelques observations et suggérons des directions futures.

3.1 | Résumé de la méthode

Une solution au système (2.24) consiste en deux fonctions $E(y)$ et $r(y)$ et le domaine y pour un ensemble de paramètres donnés (v , κ et ξ). Le système est difficile à résoudre, car les points y_F^* et y_T^* ne sont pas connus à l'avance, et les équations sont singulières à ces points. Nous devons donc utiliser une solution analytique pour intégrer les singularités, et intégrer la partie non-singulière numériquement.

L'algorithme pour trouver la solution est basé sur la méthode canon :

1. choisir un point de départ y_T^* ;
 2. intégrer les équations du mouvement analytiquement autour de la singularité y_T^* ;
 3. intégrer numériquement (algorithme Runge-Kutta 4 (RK4), `dopri5` de SciPy) jusqu'à ce que
 - a) $v_0 \rightarrow 0$,
 - b) E diverge ou le champ atteigne y_F ;
 4. intégrer analytiquement autour de la singularité y_F^* ;
 5. comparer E obtenu à 3 à E obtenu à 4 ;
 6. recommencer à 1 avec un y_T^* différent de sorte que E soit continu.
- 

La solution est déterminée à partir des conditions 3a et 3b. Dans le premier cas, le champ s'arrête parce que l'énergie initiale est trop faible. Dans le second, à l'inverse, lorsque l'énergie initiale est trop élevée, E peut diverger (lorsque $r \rightarrow 0$), ou alors le champ se rend à y_F avec $v_0 \neq 0$. La solution correspond alors au point limite entre ces deux conditions.

La reformulation du problème (2.24) permet de calculer la solution dans la limite thin-wall. Lorsque $y_F^* \rightarrow y_F$, $y_0 \rightarrow 0$ et la solution asymptotique excède la précision numérique. Dans ce cas, y_F^* n'est plus un bon paramètre pour caractériser la solution, car la solution y est trop sensible. On peut réécrire

$$\sinh^{-1} x = \frac{1}{2} \log |y - y_F^*| - \log y_0, \quad (3.1)$$

où maintenant $\log y_0$ est un bon paramètre.

3.2 | Calibration et précision

Pour vérifier que la solution numérique est valide, on peut la comparer aux résultats analytiques. Ces résultats sont essentiellement de deux ordres : d'une part, il y a un résultat analytique exact pour le potentiel quartique dans la limite où la gravité est faible ; de l'autre il y a l'approximation thin-wall avec la gravité.

3.2.1 | Potentiel quartique sans gravité

La figure 3.1 présente la comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour un potentiel quartique normalisé sans gravité. Les courbes sont pratiquement superposées, donc la méthode numérique est en bon accord avec les résultats analytiques. À droite, on peut voir l'erreur relative $\frac{E - E_{th}}{\Delta v}$ pour différents α . Remarquons que l'erreur numérique sature à environ 1 % pour $\alpha \sim 10^{-4}$, et qu'elle est symétrique sur le domaine. Puisque l'algorithme RK4 a une propagation d'erreur linéaire, on peut en déduire que cette limite est due à la méthode pour régulariser les singularités. Il s'agit donc d'une contribution constante à l'erreur globale. À l'inverse, en augmentant α , la solution devrait subir des corrections dues à la gravité de l'ordre de $\kappa \propto \sqrt{\alpha}$, ce qui peut expliquer la différence entre la solution pour $\alpha = 10^{-4}$ et $\alpha = 10^{-2}$.

3.2.2 | Approximation thin-wall

La figure 3.2 compare les résultats numériques à l'approximation thin-wall pour un potentiel quartique à différents Δv . Remarquons que la prédiction thin-wall pour r fonctionne bien lorsque $\alpha \lesssim 1$ et $\Delta v \ll 1$. Dans le régime thermique, lorsque les extrémités de l'instanton

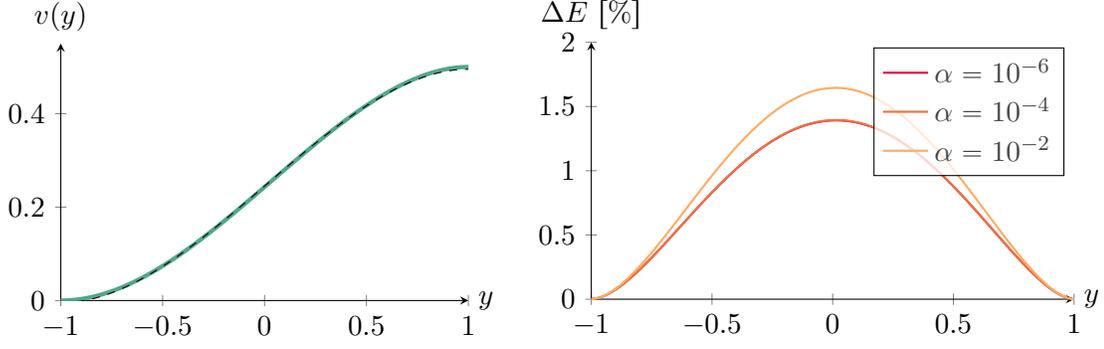


FIG. 3.1 : Comparaison entre la solution numérique et la solution analytique pour un potentiel quartique sans gravité, avec $\Delta v = 0.5$, $\alpha = 10^{-4}$ et $\xi = 10^{-2}$. À gauche, la courbe numérique pour E (en **gras**) est superposée à la prédiction théorique (en pointillé). À droite se trouve l'erreur relative pour différentes valeurs de α .

commencent à s'éloigner significativement de y_F et y_T , on trouve des corrections importantes. Toutefois, même dans ces cas où \mathbf{r}' est clairement non-nul (par exemple pour $\kappa = 2.2\kappa_*$ pour $\Delta v = 1$), l'approximation thin-wall donne une estimation raisonnable de \mathbf{r} .

Cette vérification supporte l'idée que la forme fonctionnelle pour $R(\alpha, \xi^*)$ et $\bar{\mathbf{r}}(\alpha, \xi^*)$ est bonne, et que les corrections principales sont plutôt dues à un changement des coordonnées $\alpha(\kappa, y_F^*)$ et $\xi^*(\kappa, y_F^*)$.

3.3 | Calcul de κ_*

La dernière chose qu'il nous reste à vérifier est le calcul de κ_* . Pour un potentiel $v(y)$ donné, on utilise l'équation (2.25) comme définition de κ_* . On cherche donc κ_* tel que

$$\frac{dE}{dy} = (d-1)\kappa_* \sqrt{2(v_F + E)(v + E)}, \quad E(y_F) = -v_F, \quad E(y_T) = -v_T. \quad (3.2)$$

Ce problème peut se résoudre similairement au problème complet (en utilisant la méthode canon), mais il est beaucoup plus simple, puisqu'il n'y a qu'une seule équation différentielle et qu'elle est régulière.

Pour vérifier notre méthode, on peut comparer les résultats numériques au résultat pour un potentiel quartique. En intégrant (3.2), on obtient une expression pour κ_* :

$$\kappa_* = \frac{\Delta v}{d-1} \left[\int_{y_F}^{y_T} \sqrt{2v_0(v_F + E)} dy \right]^{-1}. \quad (3.3)$$

En utilisant la solution (1.18), on trouve

$$\kappa_* = \frac{9\sqrt{\Delta v}}{8(d-1)}. \quad (3.4)$$

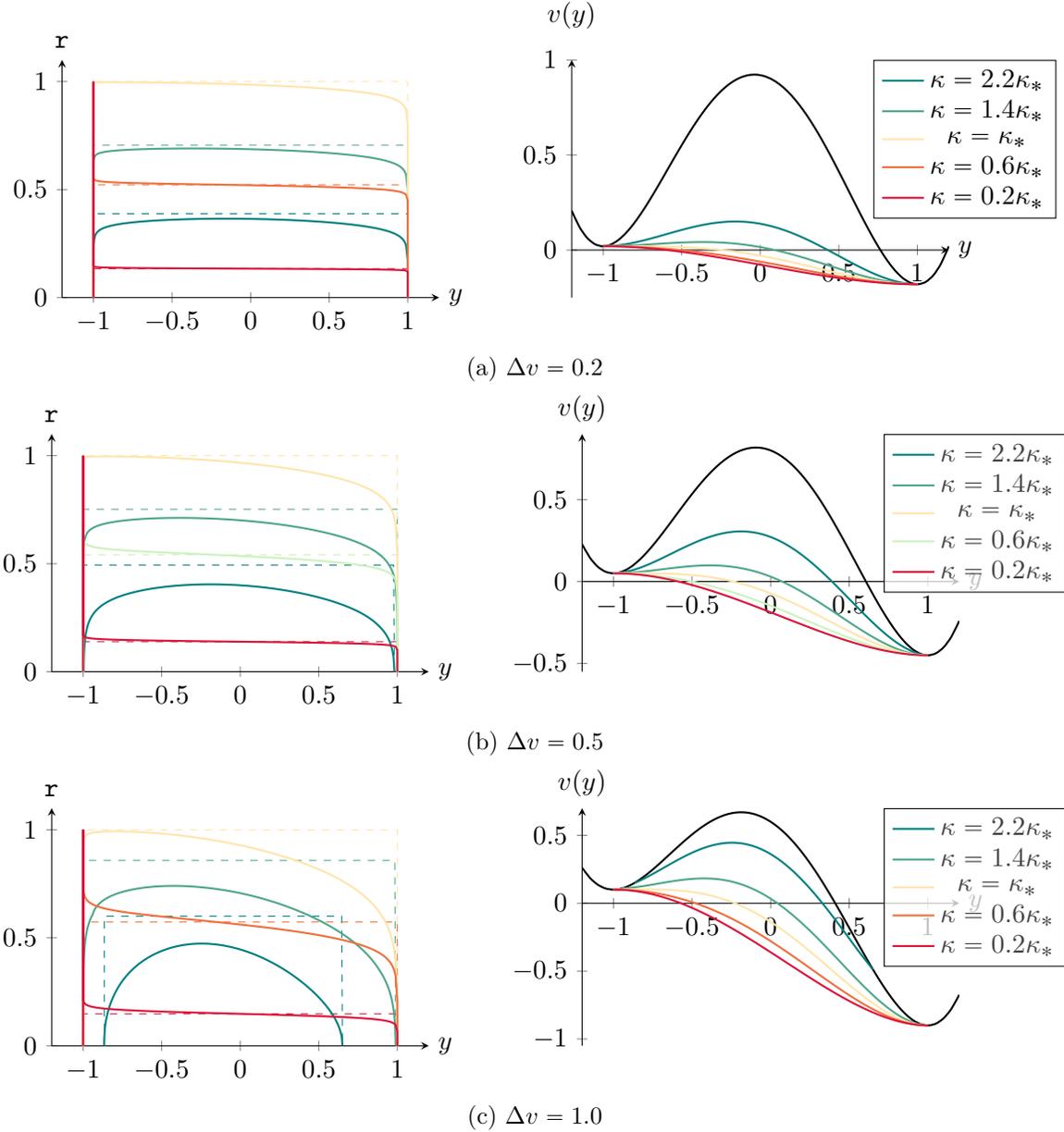


FIG. 3.2 : Comparaison entre la solution numérique et l'approximation thin-wall sur un potentiel quartique normalisé avec $\xi = 0.1$, pour différents Δv . Les figures de gauche présentent la solution pour r (courbe pleine) avec la solution thin-wall \bar{r} (en pointillé). Les figures de droite présentent la solution pour E .

La figure 3.3 présente la relation $\kappa_*(\Delta v)$ pour un potentiel quartique, et compare la méthode numérique au résultat analytique. Remarquons que même si le résultat analytique est obtenu dans l'approximation thin-wall, il reste un bon estimé jusqu'à $\Delta v \sim 1$. Lorsqu'on augmente davantage Δv , E subit des corrections plus importantes lorsque $\alpha \neq 0$, et donc κ_* est différent.

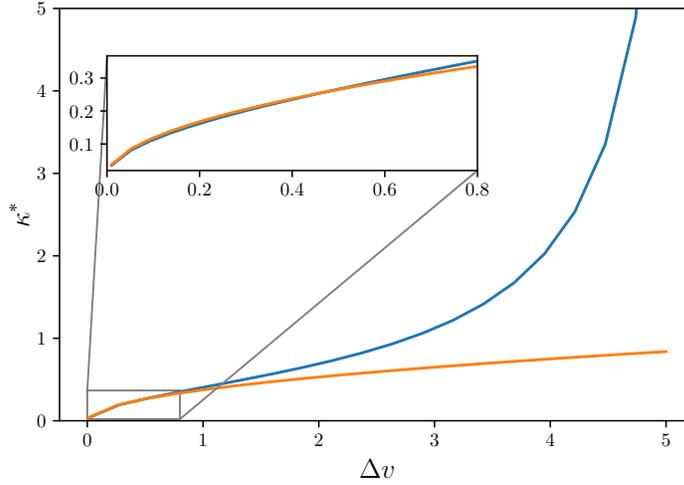


FIG. 3.3 : Graphique de $\kappa^*(\Delta v)$ pour un potentiel quartique normalisé.

3.4 | Résultats numériques et exploration

Maintenant que nous avons vérifié que les résultats analytiques et numériques sont cohérents, nous pouvons utiliser les méthodes numériques pour attaquer des problèmes plus complexes. Tel qu’annoncé en introduction, une application importante de ces méthodes est le problème de la stabilité du vide électrofaible, auquel le chapitre 4 est dédié. Parmi les autres problèmes intéressants, le plus important est peut-être de trouver un moyen de calculer y_F^* et y_T^* en fonction de κ et v_F , afin de pouvoir utiliser pleinement les résultats thin-wall pour n’importe quel instanton. Ensuite, nous comparons R_{tw} à R_{num} et vérifions qu’ils sont en accord, bien qu’il y ait des différences. Finalement, nous présentons un tableau résumant les principales solutions pour des potentiels polynomiaux. Ces résultats peuvent être utilisés directement pour établir des contraintes de stabilité à partir du lagrangien.

3.4.1 | Évolution des extrémités de l’instanton

La prédiction (2.90) constitue un des résultats les plus importants de ce mémoire. Malheureusement, les paramètres physiques ne sont pas α et ξ^* , mais plutôt κ et v_F et le lien entre les deux n’est pas trivial. Bien qu’il n’y ait pas de prédiction théorique, nous pouvons examiner le problème numériquement, et les résultats montrent un comportement universel, ce qui est encourageant.

Les relations $y_F^*(\kappa)$ et $y_T^*(\kappa)$ sont tracées à la figure 3.4. On peut distinguer trois régimes : $\alpha < 1$, $\alpha \gtrsim 1$ et $\alpha \gg 1$. Dans le premier cas, l’évolution des extrémités est fixée par la forme des minima, essentiellement $v''(y_{F,T})$. Le cas intermédiaire pourrait *a priori* dépendre de tout

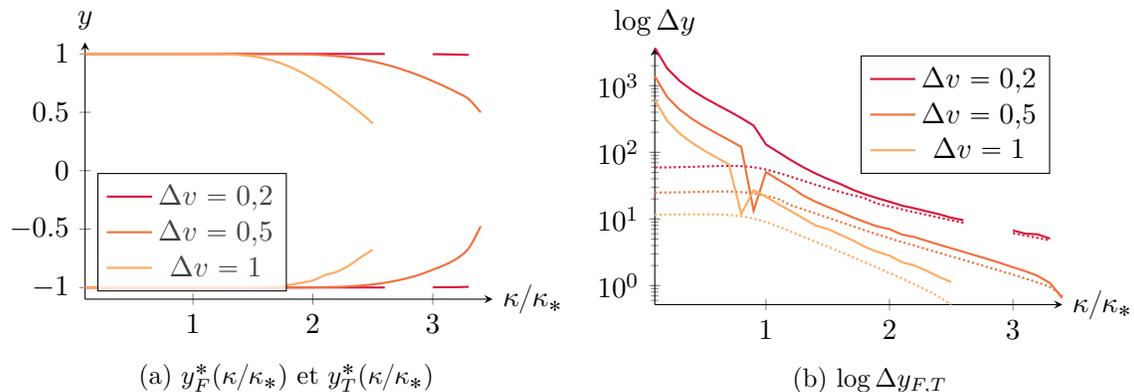


FIG. 3.4 : Évolution des extrémités de l’instanton en fonction de α pour des potentiels quartiques normalisés. À gauche, on remarque que les courbes pour y_F^* (en bas) et y_T^* (en haut) convergent vers y_H . Les courbes ne sont pas tracées au complet, car les solutions numériques sont difficiles à obtenir dans le régime thermique. À droite, on a tracé $\log \Delta y_F$ (courbes pleines) et $\log \Delta y_T$ (courbes pointillées). Le pic autour de $\kappa = \kappa_*$ correspond à une erreur numérique due au fait que y_F^* dépasse la sensibilité numérique, mais que la solution numérique est suffisamment bonne pour être acceptée par l’algorithme sans utiliser (3.1).

le potentiel, mais on trouve que les coordonnées évoluent comme $y_F^* - y_F \sim \exp(-\exp(-c\kappa))$, avec c une constante (voir la figure 3.4b). Le troisième cas n’apparaît pas sur les figures, car les solutions numériques sont difficiles à obtenir avec notre méthode. La forme de la courbe devrait être fixée par la forme du maximum $v''(y_H)$.

Notons que ce comportement fut observé pour tous les potentiels examinés (y compris des potentiels non-polynomiaux), mais il est difficile de conclure avec certitude à cause du manque de solutions dans le régime thermique. Un calcul analytique dans le régime HM permettrait peut-être de déterminer y_F^* et y_T^* autour de y_H , ce qui viendrait pallier aux faiblesses des outils numériques.

Malgré tout, on peut obtenir une idée de la limite à laquelle les solutions convergent vers HM. En considérant le point $\xi_c^* = 0$, on peut évaluer $\alpha_{th} = 3 + 2\sqrt{2} \sim 5.8$. Ici, on a pris $\delta\alpha = 0$, car il s’agit de la contrainte la plus forte. Ainsi, on en déduit qu’à partir d’environ $\kappa \gtrsim 2.4\kappa_c$, les corrections thermiques deviennent importantes. Il serait important de préciser cette observation.

3.4.2 | Comparaison entre R_{tw} et R_{num}

Pour vérifier la forme fonctionnelle de R_{tw} , nous avons comparé R_{tw} à R_{num} pour 3 potentiels quartiques avec

$$v(y) = f(y) - (1 - \xi)f(y_F) - \xi f(y_T), \quad f(y) = \frac{y^4}{4} - \frac{by^3}{3} - \frac{a^2 y^2}{2}. \quad (3.5)$$

Pour toutes les transitions qui ne subissent pas de corrections importantes dues au déplacement des extrémités, on peut approximer $\alpha \sim \left(\frac{\kappa}{\kappa_c}\right)^2$ et $\xi^* \sim \xi$. Dans ce cas, un bon test pour vérifier le résultat thin-wall est de chercher κ_c^{fit} optimal, et de le comparer à κ_c obtenu par le théorème d'énergie positive. La figure 3.5 présente quelques résultats ainsi obtenus. Notons que l'on observe bien la transition de phase à $\alpha = 1$, ainsi que les corrections thermiques lorsque $\xi^* \sim \xi_c^*$. Les résultats sont meilleurs pour Δv petit, notamment parce qu'il y a davantage de points autour de $\alpha \sim 1$. Ces résultats sont basés sur un ancien algorithme qui ne permettait pas d'obtenir des résultats lorsque $y_F^* \rightarrow y_F$, ce qui limite les résultats lorsque $\alpha \ll 1$ et $\Delta v \sim 1$.

Nous avons également vérifié que la prédiction $R_{\text{tw}}(\alpha, \xi^*)$ concordait bien avec R_{num} une fois toutes les corrections prises en compte, et ce, pour des potentiels quartiques ou non-polynomiaux. Dans tous les cas, la prédiction s'avère bonne, et ce, même lorsque $\Delta v \sim 1$. Un exemple est présenté à la figure 3.6.

3.4.3 | Potentiels polynomiaux

Finalement, nous avons également approfondi davantage le cas des potentiels polynomiaux, car ils sont les plus importants pour une théorie renormalisable. En particulier, dans le cas où $\Delta v \gg 1$, la transition n'explore pas tout le potentiel, mais s'arrête plutôt à un point y_T^* . Si on peut approximer la région entre y_F et y_T^* par un polynôme de la forme

$$v(y) \simeq \frac{a'y^n}{n} - \frac{b'y^p}{p}, \quad (3.6)$$

où $p > n \in \mathbb{N}$, $a' > 0$, $b' > 0$ et $y_F = 0$, alors on peut effectuer le changement de variables

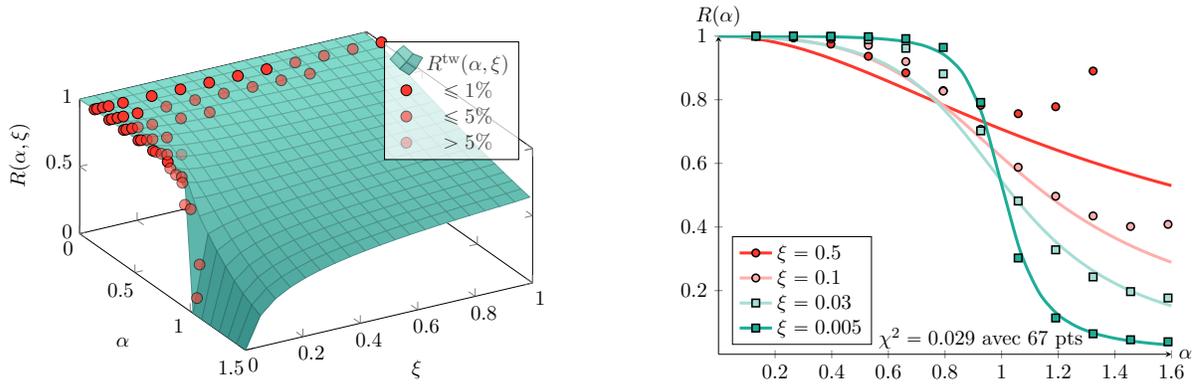
$$s = \frac{c'^{n/2-1}}{\sqrt{a'}} s', \quad r = \frac{c'^{n/2-1}}{\sqrt{a'}} r', \quad x = \frac{x'}{c'}, \quad \kappa = c' \kappa', \quad (3.7)$$

avec $c' = (nb'/pa')^{1/(p-n)}$ pour obtenir les mêmes équations du mouvement, mais pour les variables primées. Dans ce cas,

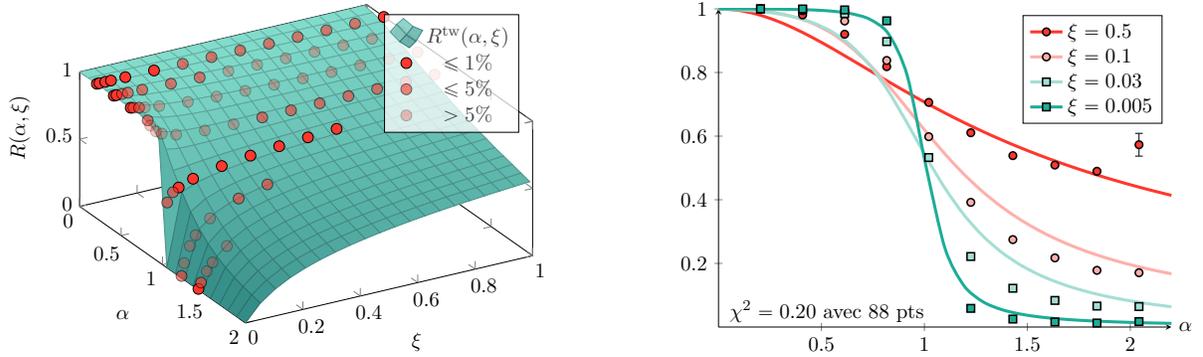
$$v'(y') = \frac{y'^n}{n} (1 - y'^{p-n}), \quad (3.8)$$

et on peut résoudre pour v' . Le tableau 3.1 indique le point critique κ'_c , ainsi que la position initiale y'_0 de l'instanton.

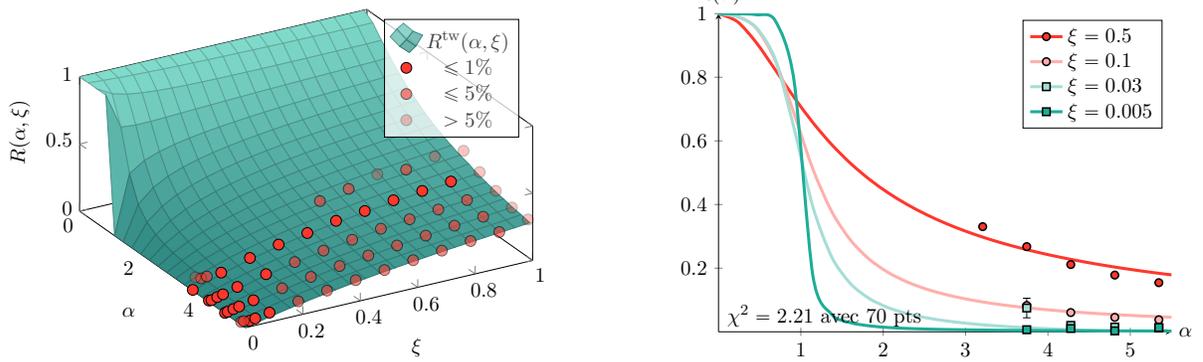
Ainsi, si on peut approximer le potentiel effectif d'un lagrangien autour d'une transition de phase par un potentiel polynomial, on peut utiliser les résultats du tableau 3.1 pour déduire le critère de stabilité.



(a) Ratio numérique R pour $a = 1.5$ et $b = 1.0$ ($\kappa_c^{\text{fit}} = 0.37787(1)$, $\kappa_c^{\text{TEP}} = 0.37540$).



(b) Ratio numérique R pour $a = 1.5$ et $b = 0.5$ ($\kappa_c^{\text{fit}} = 0.2448(1)$, $\kappa_c^{\text{TEP}} = 0.2447$).



(c) Ratio numérique R pour $a = 1.5$ et $b = 0.1$ ($\kappa_c^{\text{fit}} = 0.054(2)$, $\kappa_c^{\text{TEP}} = 0.101$).

FIG. 3.5 : À gauche, le fit optimal de $R_{\text{tw}}(\alpha, \xi)$ sur les solutions numériques en rouge (l'opacité indique l'erreur relative à R_{tw}). Les points manquants pour $\alpha \gg 1$ sont des transitions thermiques ignorées pour le fit, parce qu'elles subissent des corrections importantes. À droite, les courbes de niveau de R_{tw} pour différents ξ . Les barres d'erreur sont trop petites pour apparaître sur la figure (l'erreur est typiquement 10^{-4}). Noter le comportement des transitions thermiques lorsque α et ξ sont élevés, où les points devraient tendre vers v_F/v_H , et la transition de phase à $\alpha = 1$.

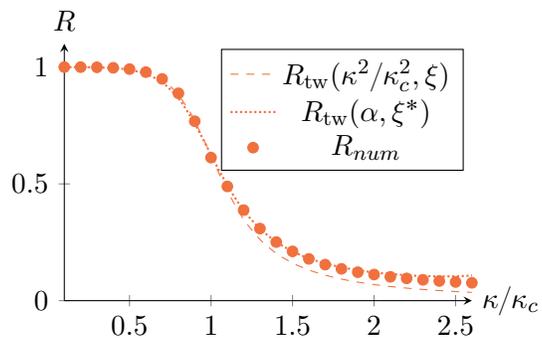


FIG. 3.6 : Comparaison entre la prédiction thin-wall non-corrigée, corrigée, et les résultats numériques pour un potentiel quartique normalisé.

p	n	κ'_c	y'_0
2	1	0.60980	4.36697
3	1	0.70688	4.71565
3	2	0.84063	5.29815
4	1	0.79998	5.04952
4	2	0.94278	5.49919
4	3	1.072	4.96271

TAB. 3.1 : Valeur critique κ_c et points initiaux y'_0 pour des potentiels polynomiaux dont le vrai minimum est situé très loin en y et n'affecte pas l'instanton.

4

Vide électrofaible

Ce chapitre décrit l'application du problème de stabilité du vide au modèle standard, en suivant [11]. Après un rappel de la théorie électrofaible, nous décrivons comment les corrections aux ordres supérieurs affectent la théorie effective. Nous discutons ensuite des contraintes sur les paramètres physiques engendrées par notre analyse des chapitres précédents, et nous soulignons comment ces résultats s'inscrivent dans la perspective du problème de la hiérarchie.

4.1 | Théorie de jauge

Un des avancements majeurs de la physique moderne repose sur la description des systèmes physiques en termes de leurs symétries. Par exemple, la relativité restreinte correspond au postulat que la physique est invariante sous le groupe de Poincaré ; l'électromagnétisme, le groupe $U(1)$. Ces symétries permettent de réduire le nombre de degrés de liberté d'un système, ce qui simplifie sa résolution. En général, les théories de champs sont formulées en termes des symétries globales ou locales—dites de jauge—et le lagrangien doit être invariant sous ces symétries.

4.1.1 | Transformation de jauge

La contrainte d'invariance implique que les champs transforment dans des représentations du groupe de Lie G , c'est-à-dire qu'elle implique qu'une transformation de jauge agisse comme

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (4.1)$$

où $\alpha \in G$ est le paramètre de la transformation et $\psi(x)$ un champ. Dans ce cas, α peut être paramétrisé comme

$$\alpha = \alpha^a \tau^a, \quad (4.2)$$

où τ^a sont les générateurs de la transformation dans la représentation donnée et les indices a somment sur les générateurs. Pour le cas simple de la transformation d'un spineur dans

$SU(2)$, les générateurs τ^a sont les matrices de Pauli σ^a , qui correspondent à la représentation fondamentale de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$.

4.1.2 | Lagrangien

Pour une théorie renormalisable, on utilise le principe de couplage minimal pour écrire un lagrangien invariant sous le groupe de jauge G

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} [F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + \bar{\psi}_i (i\not{D} - M)_{ij} \psi_j + \frac{1}{2} (D_\mu\phi)_i (D^\mu\phi)_i - V(\phi_i\phi^i). \quad (4.3)$$

Les champs scalaires ϕ et fermioniques ψ sont dans des représentations r_ϕ et r_ψ de G . Les indices i, j sont alors les indices des matrices de la représentation (allant de 1 à $\dim(r)$), et a ceux de l'algèbre. Le lagrangien inclut la dérivée covariante sous le groupe G

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu^a \tau^a. \quad (4.4)$$

Le terme $iA_\mu^a \tau^a$ peut être interprété comme une connexion métrique du groupe G (les symboles de Christoffel) et sa variation compense celle de la dérivée ∂_μ . De plus, $F_{\mu\nu} = i[D_\mu, D_\nu]$ correspond à la courbure de G , et donne un terme cinétique pour A_μ .

4.2 | Mécanisme de Higgs

On considère le potentiel $V((\phi_i)^2)$. Si le champ scalaire ϕ_i acquiert une valeur moyenne non-nulle $\langle\phi_i\rangle = \Phi_i$ à un minimum de V , le terme cinétique de ϕ devient ¹

$$D_\mu\phi_i D^\mu\phi_i \rightarrow D_\mu\varphi_i D^\mu\varphi_i + \Phi_j (iA_\mu^a \tau_{ji}^a) (-iA^{\mu,b} \tau_{ik}^b) \Phi_k + \dots, \quad (4.5)$$

où $\varphi_i = \phi_i - \Phi_i$ est l'excitation du champ autour de sa valeur moyenne. La nouvelle partie peut s'exprimer comme une masse pour le boson de jauge

$$\Phi_j \tau_{ji}^a \tau_{ik}^b \Phi_k A_\mu^a A^{\mu,b} \equiv m_{ab}^2 A_\mu^a A^{\mu,b}, \quad m_{ab}^2 = \Phi_j \tau_{ji}^a \tau_{ik}^b \Phi_k. \quad (4.6)$$

On peut montrer que les masses ainsi acquises sont positives.

Généralement, Φ préserve un sous-groupe de G , auquel cas les générateurs associés à ce sous-groupe ne sont pas brisés, et le boson de jauge correspondant n'acquiert pas de masse.

1. Ici on traite le cas où ϕ est dans une représentation réelle ou pseudo-réelle ; alors τ est antisymétrique et change de signe lors de la transposition. Si ϕ est dans une représentation complexe, alors on a $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi$ et $\tau^\dagger = \tau$ est hermitien, mais i change de signe, donc le résultat est le même.

4.3 | Modèle de Glashow-Weinberg-Salam

Rappelons maintenant le modèle des interactions électrofaibles introduit par Glashow, Weinberg et Salam. À faible énergie, on observe une symétrie non-brisée (l'électromagnétisme) et un boson sans masse (le photon). Les bosons responsables de l'interaction nucléaire faible sont massifs, ce qui suggère qu'ils correspondent à des générateurs d'une symétrie spontanément brisée. Le succès du modèle Glashow-Weinberg-Salam (GWS) repose sur l'unification de ces deux forces au sein de la théorie électrofaible, avec des prédictions remarquables sur la masse des bosons en fonction des constantes de couplage.

Le modèle électrofaible consiste en un champ scalaire ϕ dans la représentation fondamentale de $\mathfrak{su}(2)$ avec une charge $\frac{1}{2}$ sous $U(1)$. Le champ ϕ transforme alors comme

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha^i \sigma^i / 2} e^{i\beta / 2} \phi, \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Si ϕ acquière une valeur moyenne non-nulle, on peut la réécrire sans perte de généralité comme

$$\langle \phi \rangle = \Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Dans ce cas, le générateur $\sigma^3 + \beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ laisse Φ invariant, et les 3 autres générateurs σ^1 , σ^2 et $\sigma^3 - \beta$ sont brisés spontanément. Ainsi, on aura un boson sans masse (photon) et trois bosons massifs (W^\pm et Z).

Pour obtenir le couplage entre les bosons A_μ^i associés à α et B_μ associé à β , on cherche les combinaisons linéaires qui diagonalisent à la fois la partie cinétique et celle de la masse. Le lagrangien initial est

$$\mathcal{L}_{GWS} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]_A - \frac{1}{2g'^2} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}]_B + (D_\mu \phi_i)^\dagger D^\mu \phi_i - V(\phi_i^\dagger \phi_i) \quad (4.9)$$

Si V a un minimum à Φ_i , le terme cinétique devient

$$(D_\mu \phi_i)^\dagger D^\mu \phi_i \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + A_\mu^a J^{\mu a} + \frac{v^2}{4} \left[(A_1 + iA_2)(A_1 - iA_2) + (A_3 - B)^2 \right], \quad (4.10)$$

où

$$A_\mu^a = (A^i, B), \quad J_\mu^a = \mathfrak{Re} \left[\frac{i}{2} \Phi_i^\dagger (\sigma_{ij}^i, \mathbb{I}_{ij}) D_\mu \phi_j \right]. \quad (4.11)$$

L'équation (4.10) suggère d'introduire les bosons

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2), \quad Z_\mu^0 = A_\mu^3 - B_\mu. \quad (4.12)$$

Il reste alors un générateur non-brisé, qui doit être orthogonal à Z^0 afin que les termes $F_{\mu\nu}$ soient découplés. On trouve alors

$$A_\mu = \frac{g'}{g} A_\mu^3 + \frac{g}{g'} B_\mu, \quad (4.13)$$

et le lagrangien devient

$$\mathcal{L}_{GWS,\Phi} = \mathcal{L}_K + \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_J, \quad (4.14)$$

$$\mathcal{L}_K = -\frac{1}{2g^2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} - \frac{\cos^2 \theta_w}{4g^2} Z_{\mu\nu}^0 Z^{0\mu\nu} - \frac{1}{4e^2} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi, \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} [Z^2 + 2W^+ W^-] - V(\varphi), \quad (4.16)$$

$$\mathcal{L}_J = J_{W^-}^\mu W_\mu^- + J_{W^+}^\mu W_\mu^+ + J_{Z^0}^\mu Z_\mu^0. \quad (4.17)$$

Nous avons introduit les paramètres

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad Z_{\mu\nu} = 2D_{[\mu} Z_{\nu]}, \quad \dots \quad (4.18)$$

En réintroduisant les constantes de couplage dans les champs, on trouve que les masses sont

$$m_A = 0, \quad m_W = m_Z \cos \theta_w = g \frac{v}{2}. \quad (4.19)$$

4.4 | Modèle standard

Rappelons maintenant quelques éléments importants du modèle standard de la physique des particules. Sur les 4 forces fondamentales (électromagnétique, nucléaire faible et forte, gravité), le modèle standard unifie² l'interaction électromagnétique, la force nucléaire faible et la force nucléaire forte dans une même théorie. Les deux premières interactions sont bien décrites par la théorie GWS de la section 4.3, alors que la force nucléaire forte est décrite par la chromodynamique quantique. Nous n'aborderons pas le sujet de la chromodynamique quantique ici, car les méthodes d'analyse sont distinctes (il s'agit d'une théorie à fort couplage) et nous n'en aurons pas besoin pour comprendre le problème de la stabilité du vide. Le contenu en particules et leurs représentations sera toutefois important.

L'expérience montre que l'interaction électrofaible est un phénomène chiral : il n'affecte que les fermions d'une chiralité donnée (par convention, la gauche). Ainsi, on introduit des fermions gauches dans la représentation fondamentale de $SU(2)$, qui interagissent selon la théorie GWS, et des fermions droits qui transforment dans la représentation triviale. Puisque le groupe

2. On pourrait objecter que la chromodynamique quantique n'est pas réellement unifiée, car il n'y a pas de cadre général la reliant aux autres symétries de la théorie. La recherche d'un tel cadre s'inscrit dans la recherche pour les théories de la grande unification. Pour un résumé des avancements dans ce domaine, voir [39–41].

Champs	Représentation des groupes de symétrie			
	$SO(1,3)$	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$(\frac{1}{2}, 0)$	3	2	$\frac{1}{6}$
u_R	$(0, \frac{1}{2})$	3	1	$\frac{2}{3}$
d_R	$(0, \frac{1}{2})$	3	1	$-\frac{1}{3}$
$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$(\frac{1}{2}, 0)$	1	2	$-\frac{1}{2}$
e_R	$(0, \frac{1}{2})$	1	1	-1
ϕ	$(0, 0)$	1	2	$\frac{1}{2}$
B_μ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	1	0
W_μ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	3	0
G_μ	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	8	1	0

TAB. 4.1 : Liste des champs et leurs représentations pour une génération du modèle standard.

$SU(2)$ est une symétrie des fermions gauches, on le dénote souvent $SU(2)_L$. Les symétries de jauge qui interagissent par des courant chiraux sont susceptibles de subir des corrections quantiques brisant l'invariance de jauge (des anomalies quantiques). On peut vérifier que la théorie est libre d'anomalies si les fermions sont organisés en générations. Le modèle standard compte 21 fermions organisés en trois générations (il n'y a pas de neutrinos droits). Le tableau 4.1 présente une liste des champs du modèle standard et leurs représentations sous les différents groupes de symétrie, alors que la figure 4.1 présente un résumé du modèle standard à basse énergie.

En suivant la prescription de couplage minimal, le lagrangien du modèle standard peut être écrit de façon compacte comme

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{2} \sum_A \frac{1}{g_A^2} \text{Tr}_a [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \sum_f \bar{f}_i (i\not{D})_{ij} f_j + |D_\mu \phi_i|^2 + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} - V(\phi_i^\dagger \phi_i),$$

où A sont les bosons de jauge associés aux groupes de symétries (et $F = dA$), f les fermions et ϕ le boson de Higgs; les indices a sont les générateurs du groupe de symétrie et i ceux de la représentation. Le terme de Yukawa s'écrit comme

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\sum_f y_f \bar{f}_L \phi_i f_R + \text{h.c.} \quad (4.20)$$

et somme sur les paires de fermions³ $(f_L, f_R) = (E_L, e_R), \dots$, ce qui exclut le neutrino droit. Le potentiel V doit être une fonction renormalisable, donc on a

$$V(\phi^\dagger\phi) = -\mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2. \quad (4.21)$$

Après la brisure électrofaible, ϕ acquiert une valeur moyenne non-nulle $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, et le lagrangien devient

$$\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{2} \sum_A \frac{1}{g_A^2} \text{Tr}_a [A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}] + \sum_f \bar{f}_i (i\not{\partial}) f_i + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \sum_A A_\mu^a J_A^{a\mu} + (v + \varphi) J_\varphi - V_v(\varphi^2), \quad (4.22)$$

$$V_v(\varphi) = -\frac{1}{2} m_\varphi^2 \varphi^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_\varphi \varphi^3 - \frac{1}{4} \lambda \varphi^4, \quad m_\varphi = \sqrt{2\lambda} v. \quad (4.23)$$

À titre de référence, les courants sont

$$J_{W^+}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu} \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L), \quad (4.24)$$

$$J_{W^-}^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L), \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} J_Z^\mu &= \bar{\nu}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} \right) \nu_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu (\sin^2 \theta_w) e_R \\ &\quad + \bar{u}_L \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_L + \bar{u}_R \gamma^\mu \left(-\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) u_R \\ &\quad + \bar{d}_L \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_L + \bar{d}_R \gamma^\mu \left(\frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) d_R, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$J_{AEM}^\mu = \sum_{L,R} \bar{e} \gamma^\mu (-1) e + \bar{u} \gamma^\mu \left(\frac{2}{3} \right) u + \bar{d} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{3} \right) d, \quad (4.27)$$

$$J_\varphi = \frac{1}{v} [m_e \bar{e}_L e_R + m_u \bar{u}_L u_R + m_d \bar{d}_L d_R + \text{h.c.}]. \quad (4.28)$$

Dans les expressions précédentes, les sommes sur les générations sont implicites : $e = (e, \mu, \tau)$, etc. Notons aussi que les fermions acquièrent une masse $v J_\varphi$ avec $m_f = \frac{v}{\sqrt{2}} y_f$.

Le modèle standard constitue une des grandes réussites de la physique moderne. Malgré ses nombreux succès, il laisse plusieurs questions en suspens. En particulier, il n'inclut pas la gravité. La seule théorie cohérente de la gravité quantique qui soit connue est la théorie des cordes, à partir de laquelle on peut obtenir des théories de la supergravité à basse énergie, mais il n'est pas clair qu'il soit possible d'écrire une théorie de champs locale avec la gravité à haute énergie. Dans ce cas, l'approximation semiclassique utilisée à l'équation (2.2) n'est pas valide à haute énergie, donc on doit avoir $\tilde{r} \gg l_P$.

3. On doit également inclure une interactions pour (Q_L, u_R) , où il faut alors introduire $i\sigma_2\phi$ pour obtenir le bon couplage.

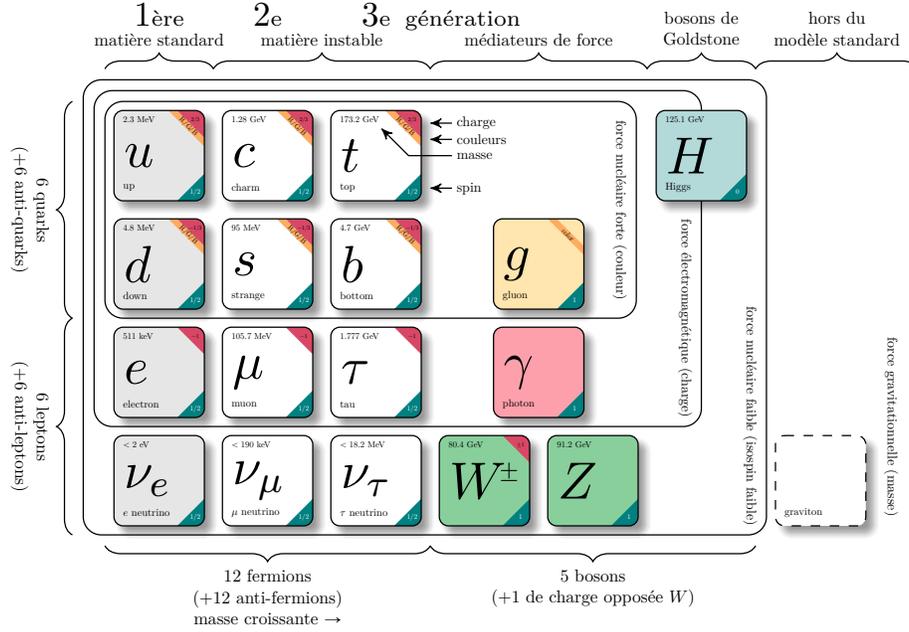


FIG. 4.1 : Résumé du modèle standard, identifiant les différentes générations de fermions, les bosons de jauge et leurs interactions.

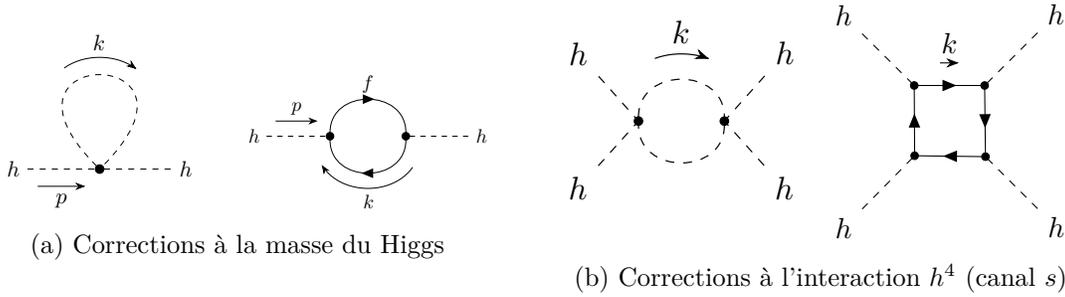


FIG. 4.2 : Liste des diagrammes de Feynman contribuant principalement à la correction à une boucle du potentiel effectif du boson de Higgs.

4.5 | Problème de la hiérarchie

Un problème plus subtil qui survient dans le modèle standard est le problème de la hiérarchie. En effet, le modèle standard est une théorie effective⁴. À ce titre, on doit appliquer la procédure de renormalisation pour obtenir les interactions effectives de la théorie à basse énergie (voir l'annexe 4.A pour un rappel du groupe de renormalisation). Deux diagrammes

4. S'il s'agissait d'une théorie fondamentale, il devrait y avoir une complétion UV, et on s'attendrait à pouvoir expliquer l'origine des paramètres libres.

contribuent à la correction à une boucle du propagateur ⁵ (voir la figure 4.2a) et donnent :

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \frac{i\lambda}{32\pi^2} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) m_\phi^2 \quad (4.29)$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} = \sum_f \frac{-3iy_f^2}{4\pi^2} \int_0^1 [(m_f^2 - x(1-x)p^2) \log(m_f^2 - x(1-x)p^2)] dx. \quad (4.30)$$

Le diagramme (4.29) est indépendant de p , donc il contribue seulement à une redéfinition de la masse à une constante (infinie) près. On peut évaluer explicitement l'intégrale (4.30), ce qui donne

$$iM^2(p^2) = -i \sum_f \frac{y_f^2 m_f^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{p^2}{4m_f^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{p^2}} \coth^{-1} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{p^2}}. \quad (4.31)$$

En suivant la prescription du groupe de renormalisation, on resomme les diagrammes pour obtenir un lagrangien effectif, qui devient

$$\mathcal{L}_{EFT} = \frac{1}{2} (p^2 - m_\phi^2 - M^2(p^2)) \phi^2, \quad (4.32)$$

On peut interpréter la contribution de $M^2(\Lambda^2)$ sur les paramètres effectifs à l'échelle d'énergie Λ en s'assurant qu'ils satisfassent bien les conditions

$$M^2(p^2)|_{p^2=\Lambda^2} = 0, \quad \frac{d}{dp^2} M^2(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2} = 0. \quad (4.33)$$

On doit alors absorber la contribution excédentaire à $p^2 = \Lambda^2$ dans les paramètres renormalisables de la théorie. On peut directement évaluer

$$M^2(p^2)|_{p^2=\Lambda^2} = - \sum_f \frac{y_f^2 m_f^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{4m_f^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \coth^{-1} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}}, \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dp^2} M^2(p^2) \Big|_{p^2=\Lambda^2} = - \sum_f \frac{y_f^2}{8\pi^2} \left[1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2} + \left(2 + \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \coth^{-1} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \right]. \quad (4.35)$$

Pour annuler ces contributions, on redéfinit $Z\phi^2 \rightarrow \phi^2$ et $m_\phi^2 \rightarrow m_\Lambda^2$, avec explicitement

$$\delta_Z = \sum_f \frac{y_f^2}{8\pi^2} \left[1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2} + \left(2 + \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \coth^{-1} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \right], \quad (4.36)$$

$$\delta_m = - \sum_f \frac{y_f^2 m_f^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\Lambda^2}{4m_f^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}} \coth^{-1} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{\Lambda^2}}, \quad (4.37)$$

5. Les diagrammes avec des bosons de jauge ne contribuent pas à la masse effective à cause de l'identité de Ward-Takahashi, mais ils contribuent à l'interaction quartique du Higgs.

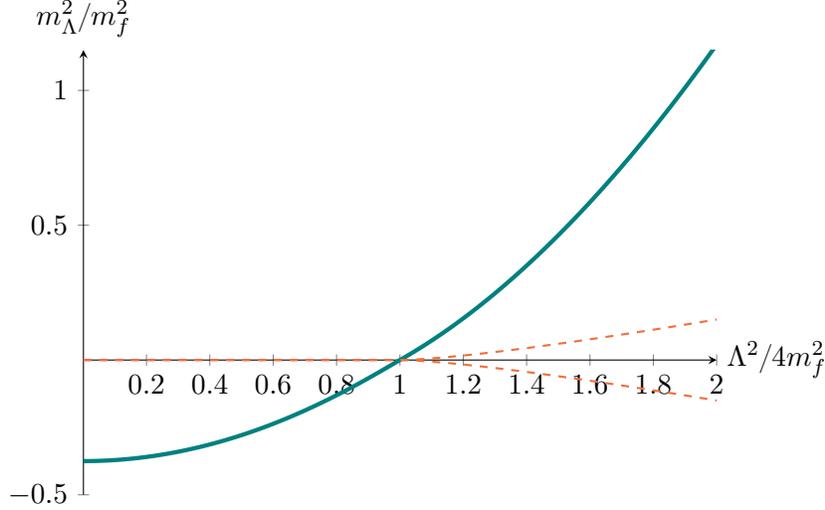


FIG. 4.3 : Correction à la masse du Higgs pour un fermion de masse m_f normalisée à $m_\Lambda^2 (\Lambda^2 = 4m_f^2) = 0$. La courbe en **gras** est la partie réelle de m_Λ^2 . Au seuil de production d'une paire de fermions $\Lambda^2 = 4m_f^2$, l'amplitude acquiert une partie imaginaire (en **pointillé**) non-nulle, en accord avec le théorème optique.

$$Z(\Lambda) = 1 + \delta_Z(\Lambda), \quad m_\Lambda^2 = \frac{1}{Z(\Lambda)} [m_\phi^2 + \delta_m(\Lambda)] \simeq [1 - \delta_Z(\Lambda)] m_\phi^2 + \delta_m(\Lambda). \quad (4.38)$$

Le lagrangien renormalisé est finalement

$$\mathcal{L}_{EFT} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_\Lambda^2 \phi^2 + \dots$$

La dépendance résiduelle en Λ^2 peut être interprétée comme une dépendance sur l'échelle d'énergie à laquelle on sonde le système. Le coefficient Z est absorbé dans ϕ , ce qui mène à la dimension anormale des champs. Ici, la correction à la masse est plus intéressante et est présentée à la figure 4.3. Puisque la correction est proportionnelle à y_f^2 , le terme dominant est celui du fermion le plus massif, ici le quark top.

Maintenant inversons le problème : au lieu de chercher une théorie à basse énergie à partir du modèle standard à l'échelle électrofaible Λ_{EW} , on suppose que le modèle standard soit une bonne description de la nature jusqu'à l'échelle de grande unification $\Lambda_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. Dans ce cas, $p^2 \sim \Lambda_{GUT}^2$ et le lagrangien devient

$$\mathcal{L}_{EFT} \sim \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2Z(\Lambda_{GUT}^2)} \left(m_\phi^2 + \sum_f \frac{3y_f^2}{4\pi^2} m_f^2 \log \frac{\Lambda_{GUT}^2}{m_\phi^2} \right) \phi^2 + \mathcal{O} \left(\frac{m_f^2}{\Lambda_{GUT}^2} \right), \quad (4.39)$$

où on a utilisé l'approximation

$$\sqrt{1-x^{-2}} \coth^{-1} \left(\sqrt{1-x^{-2}} \right) \simeq \log 4x^2 - \frac{1 + \log 4x^2}{2x^2} + \mathcal{O}(x^{-4}). \quad (4.40)$$

Il y a essentiellement deux problèmes avec cette expression. D'abord, la masse $m_0 = m_{\Lambda_{GUT}}$ n'est protégée par aucune symétrie ; on s'attendrait alors à ce que $m_0 \sim \Lambda_{GUT}$. Or, le groupe

de renormalisation nous dit que

$$m_{\Lambda_{\text{GUT}}}^2 = \frac{1}{Z(\Lambda_{\text{GUT}}^2)} \left(m_\phi^2 + \sum_f \frac{3y_f^2}{4\pi^2} m_f^2 \log \frac{\Lambda_{\text{GUT}}^2}{m_\phi^2} \right) \sim \Lambda_{\text{EW}}^2, \quad (4.41)$$

$$Z \simeq 1 + \log \frac{\Lambda_{\text{GUT}}^2}{m_\phi^2}, \quad p^2 \gg m_f^2. \quad (4.42)$$

Autrement dit, si m_0 est fixé à l'échelle Λ_{GUT} , alors la valeur exacte de m_0 doit être fixée à l'ordre de $\Lambda_{\text{EW}}/\Lambda_{\text{GUT}}$, soit environ 14 chiffres de précision. Ceci est un problème parce qu'on connaît peu de mécanismes dynamiques permettant de préserver un paramètre aussi faible ; en général, on doit utiliser soit une brisure de symétrie spontanée (ici la supersymétrie), ou le mécanisme *technicolor*. Nous discuterons des défis phénoménologiques de la supersymétrie à la section 4.5.2, mais il est difficile d'imaginer un autre mécanisme. En effet, les mécanismes standards de la théorie quantique des champs ont tendance à donner des paramètres de l'ordre de 1 (algèbre, calcul différentiel, etc.). Une formulation équivalente de poser le problème est d'essayer d'expliquer en quoi le nombre $m_0^2/\Lambda_{\text{GUT}}^2$ est un choix naturel comme paramètre (peut-être apparaît-il comme solution d'une équation algébrique, d'une équation diophantine, etc.). Ce problème est souvent appelé le problème de la naturalité (plus souvent *naturalness problem*).

Un problème plus fondamental est que la théorie nous indique qu'elle est sensible aux échelles d'énergie élevées. L'idée que les paramètres doivent être de l'ordre de 1 est certainement une attente justifiable, mais elle ne souligne pas une inconsistance de la théorie ; seulement un fait surprenant. Ce qui est problématique est plutôt que toute perturbation à l'échelle de Planck devrait changer complètement (par plusieurs ordres de grandeur) la masse du boson de Higgs. Par exemple, si le modèle standard devait être complété par de nouvelles particules à $\Lambda \sim 10^{12}$ GeV, alors ces nouvelles particules contribueraient à l'ordre de Λ à la masse du Higgs. Le paramètre initial m_0 doit alors être fixé pour compenser ces deux échelles dès le départ. À mesure qu'on ajoute des particules, la justification qu'un mécanisme permette d'expliquer naturellement l'échelle observée devient de plus en plus ténue.

Le problème de la hiérarchie est donc un problème de sensibilité de la physique à basse énergie aux échelles d'énergie élevées, alors que le groupe de renormalisation donne généralement la conclusion inverse, soit que la physique à basse énergie peut être comprise sans connaître les processus à haute énergie qui en sont responsables. Bien qu'il s'agisse toujours d'un problème ouvert, quelques solutions ont été proposées.

4.5.1 | Comparaison avec la masse de l'électron : le critère de naturalité de 't Hooft

Avant d'aborder les solutions au problème de la hiérarchie, précisons pourquoi certains autres problèmes d'échelle ne sont pas aussi préoccupants. Par exemple, bien que l'électron acquière sa masse par le même mécanisme que le quark top (par le mécanisme de Higgs) et que $m_e/m_t \sim 1 \times 10^{-5}$, ce problème d'échelle n'est généralement pas considéré comme préoccupant. La raison en est que lorsque la constante de couplage de Yukawa de l'électron (et des leptons) est mise à zéro, la théorie possède une symétrie de plus : la symétrie chirale. Dans ce cas, il est raisonnable de s'attendre à ce que lorsque la symétrie est faiblement brisée, les paramètres soient petits. Ce critère est le critère de naturalité introduit par 't Hooft (*technical naturalness*).

Bien que la naturalité selon 't Hooft n'explique pas en soi pourquoi les paramètres de la théorie sont petits (le mécanisme est indéterminé et on ne peut pas calculer la masse, par exemple, à partir de principes fondamentaux), la contrainte de symétrie empêche les paramètres de recevoir des corrections arbitrairement grandes par le groupe de renormalisation. En contraste, la masse du boson de Higgs n'est protégée par aucune symétrie, ce qui la rend sensible aux échelles de haute énergie. Une solution au problème de la hiérarchie réduit serait d'identifier une symétrie qui préserverait $m_\phi = 0$, que l'on brise ensuite légèrement. Le problème de la hiérarchie complet demande aussi de mettre en évidence le mécanisme par lequel la masse devient non-nulle et de pouvoir la calculer.

Il existe 3 problèmes d'échelle dans le modèle standard qui ne s'expliquent pas en termes d'une symétrie : le problème de la brisure CP (*strong CP-problem*), le problème de la hiérarchie et le problème de la constante cosmologique. Le dernier est le plus pressant et le moins bien compris. Il consiste à expliquer pourquoi la densité d'énergie du vide observée est aussi faible ($\rho_{\text{vac}} \sim \text{meV}^4$) par rapport à la valeur attendue de M_P^4 (soit un écart de quelques 120 ordres de grandeur).

4.5.2 | Supersymétrie

La supersymétrie est la solution par excellence au problème de la hiérarchie : on introduit une symétrie supplémentaire entre les bosons et les fermions qui protège la masse des scalaires. Dans la procédure de renormalisation avec *cutoff* de Wilson, on dit souvent que la supersymétrie annule les divergences quadratiques Λ^2 des propagateurs, ce qui résout le problème de la hiérarchie. En fait, la conclusion tient dans tous les schémas de renormalisation, mais l'effet principal est d'empêcher les scalaires de recevoir des contributions au-delà de l'échelle de brisure de la supersymétrie, ce qui permet de justifier la faible masse de ϕ par le critère de na-

turalité de 't Hooft. On s'attend alors à ce qu'une faible brisure de la supersymétrie permette de protéger la masse du boson de Higgs jusqu'à une échelle comparable $\Lambda \sim 100 \text{ GeV}$.

Au cours des dernières décennies, la supersymétrie a offert une solution élégante à une longue liste de problèmes, si bien qu'il serait inutile d'essayer d'en faire une énumération ici. Remarquons toutefois ceci : bien qu'elle semble essentielle dès que l'on tente de décrire une théorie cohérente incluant la gravité et qu'à ce titre (et bien d'autres), une majorité de physiciens soient convaincus qu'elle joue un rôle indispensable dans une théorie mère du modèle standard, les observations expérimentales (en date de juillet 2017) n'offrent aucun support à cette solution. Or, si la supersymétrie devait expliquer la masse du boson de Higgs, on s'attendrait à ce que les superpartenaires se trouvent à une échelle similaire à l'échelle électrofaible, ce qui est invalidé. Dès lors, deux avenues peuvent être envisagées : soit la supersymétrie est brisée de telle sorte que les superpartenaires soient beaucoup plus lourds [42] (ce qui réintroduit un problème d'ajustement (*fine-tuning*), mais n'est pas en contradiction avec les observations), ou alors on peut penser que la supersymétrie est brisée à l'échelle de Planck et qu'un autre mécanisme doit venir résoudre le problème de la hiérarchie.

Bien entendu, peut-être que la supersymétrie n'est tout simplement pas une symétrie de la nature, mais sans abandonner complètement les idées et les succès de la supersymétrie, il semble clair que la porte est ouverte à des idées nouvelles.

4.5.3 | *String landscape*

Une autre solution originale au problème de la hiérarchie provient d'un argument proposé par Weinberg dans le cadre de la théorie des cordes : le principe anthropique [43]. Si, après la seconde révolution en théorie des cordes, plusieurs physiciens croyaient que la théorie des cordes était la théorie qui permettrait de tout expliquer, une estimation du nombre de vides admissibles (pour une théorie effective) a montré qu'ils n'étaient pas au bout de leur peine. En effet, un calcul du nombre de flux admissibles montre que le nombre de vides s'élève à $10^{10} - 10^{500}$, ce qui rend la tâche de trouver le nôtre difficile (et essentiellement impossible à attaquer par la force brute). Il n'y a pas eu non plus d'avancements majeurs permettant de réduire ce nombre à un échantillon appréciable.

Cette difficulté suggère néanmoins une solution au problème de la hiérarchie ainsi qu'au problème de la constante cosmologique. Si le scénario *landscape* est valide, alors il existe une quantité incroyable de vides possédant chacun une constante cosmologique et une masse du Higgs propre. Or, Weinberg et d'autres ont montré que les paramètres pour lesquels la vie est possible sont relativement restreints : pour une constante cosmologique $\Lambda > 10 - 100\Lambda_{\text{obs}}$, l'Univers prend de l'expansion avant que la matière puisse se lier gravitationnellement et devient vide. De plus, si la masse du boson de Higgs devient $m_h > 3m_{h_{\text{obs}}}$, alors le neutron devient

instable même lorsqu'il est lié dans un atome : tous les atomes (sauf l'hydrogène) deviennent instables et il ne peut pas y avoir de structures complexes.

L'argument est donc le suivant. Dans un univers initialement en inflation, il peut se développer des régions dans différents minima lors de l'expansion, et les vides peuvent progressivement se trouver à des niveaux plus bas par effet tunnel. Dans ce continuum de vides, il peut se trouver une région où les paramètres peuvent être aussi petits que ceux que l'on observe, mais seul dans cette région une forme de vie peut apparaître pour vérifier les paramètres. De ce point de vue, le problème de la hiérarchie est un problème apparent : il n'y a pas de mécanisme par lequel les paramètres sont fixés à des valeurs aussi faibles, mais plutôt les valeurs observées sont spéciales dans le sens où elles sont nécessaires à l'apparition de la vie. Il serait alors naturel de s'attendre à mesurer de tels paramètres, puisque dans les régions de l'Univers où ils sont différents, personne n'est là pour s'en étonner.

Bien que l'argument de Weinberg soit plausible, il n'est pas très satisfaisant dans la mesure où il repose sur une hypothèse à propos de la structure de l'Univers en dehors de l'Univers observable. Il est donc, à ce titre, invérifiable⁶. Néanmoins, s'il était possible de vérifier le scénario *landscape* (par exemple en observant les autres minima du potentiel), alors le principe anthropique gagnerait grandement en crédibilité. Finalement, il laisse également une question en suspend : si la solution au problème de la hiérarchie passe par un argument probabiliste comme le principe anthropique, alors pourquoi les scénarios de grande unification semblent-ils fonctionner si bien ? Pourquoi tous les éléments accumulés aux cours des dernières décennies pointent-ils dans la direction de la supersymétrie ?

4.5.4 | Remarques

Je me permets ici une remarque spéculative. Bien que la supersymétrie ait de nombreux attraits, il est possible que le mécanisme de grande unification possède plusieurs étapes intermédiaires avant de se réduire au modèle standard à basse énergie. En particulier, la structure du modèle standard suggère plusieurs symétries approximatives qui semblent être brisées : la symétrie chirale droite (*custodial symmetry* avec $SU(2)_R$), la symétrie baryonique/leptonique, la symétrie entre les générations et la supersymétrie. Il ne semble alors y avoir aucune raison pour laquelle toutes ces symétries devraient être brisées en même temps à partir d'un seul groupe parent, si ce n'est que les scénarios GUT ($SU(5)$, $SO(10)$) fonctionnent presque trop bien avec la supersymétrie. Leur seul défaut est qu'ils prédisent la désintégration du proton⁷,

6. C'est également un scénario controversé, car il n'est pas clair que l'image de potentiel effectif s'applique au *landscape*. Voir par exemple [44] pour quelques arguments contre le principe anthropique.

7. L'argument est basé sur le fait que, si les particules se retrouvent toutes dans un multiplet d'un groupe unificateur, alors il devrait exister en particulier une transformation de jauge à haute énergie reliant le proton et le positron. Ainsi, le proton ne serait plus protégé par une symétrie comme la particule la plus légère de sa charge, et pourrait se désintégrer par l'intermédiaire d'un boson massif. En suivant le groupe de renormalisation

pour laquelle il existe de fortes contraintes observationnelles.

Nonobstant cette contrainte, il est envisageable qu’une unification progressive des symétries puisse résoudre le problème de la hiérarchie en plusieurs étapes, ce qui pourrait rendre plausible l’échelle observée, et serait une explication plus séduisante que l’explication courante (qui est souvent d’invoquer un mécanisme inconnu). Un pas décisif dans cette direction serait de mieux comprendre quelles sont les contraintes sur la structure des groupes dans les fonctions β pour obtenir un scénario de grande unification. En particulier, si l’unification se produit par étapes plus simples, il n’est pas nécessaire d’avoir une intersection parfaite entre les trois constantes de couplage à l’échelle Λ_{GUT} , ce qui permet possiblement une plus grande variété de scénarios. Toutefois, il existe plusieurs contraintes cosmologiques sur les mécanismes d’unification et de brisure de la supersymétrie. Pour plus de détails sur les contraintes cosmologiques, voir [45–51].

Mis à part une brisure de symétrie, plusieurs autres mécanismes dynamiques ont été proposés pour résoudre le problème de la hiérarchie, dont le relaxion [52] et le couplage UV/IR (entre la physique à haute et basse énergie) [53]. Pour plus de détails sur l’état actuel du problème de la hiérarchie, voir [41].

4.6 | Calcul du potentiel effectif

On peut compléter le calcul du lagrangien effectif (4.39) en calculant les corrections à λ dues aux deux diagrammes de la figure 4.2b (en incluant les canaux t et u). La correction due à la boucle du Higgs est calculée en annexe, alors que la correction due à la boucle de fermions est plus longue à calculer. Sans faire le calcul explicitement, on s’attend à avoir un résultat allant comme

$$\Delta\lambda_f \sim y_f^4 \log \frac{\Lambda_{\text{EW}}}{\Lambda}, \quad (4.43)$$

car à haute énergie la masse des fermions est négligeable et il n’y a donc pas d’autres échelles dans la théorie. Puisque la constante de couplage doit être sans dimensions, la seule manière d’écrire un terme qui donne une contribution nulle à $\Lambda = \Lambda_{\text{EW}}$ est avec (4.43). De plus, l’amplitude doit s’écrire avec un logarithme pour respecter le théorème optique.

L’équation (4.43) est intéressante, parce que pour une énergie suffisamment élevée, la constante de couplage devient négative sous l’effet des corrections du quark top. Autrement dit, il existe un point où $\Delta\lambda(\Lambda) > \lambda(\Lambda_{\text{EW}})$, c’est-à-dire que pour obtenir la valeur de λ prédite par le modèle standard à basse énergie, il faut que la constante de couplage devienne négative à une échelle $\Lambda \gg \Lambda_{\text{EW}}$. En faisant un calcul plus raffiné, on conclut que λ redevient positif à plus

à basse énergie, cette transition devrait être atténuée, mais les modèles prédisent une demi-vie beaucoup plus faible que la borne expérimentale inférieure.

haute énergie, lorsqu'il est dominé par les corrections dues aux bosons de jauge. Ainsi, le potentiel effectif du boson de Higgs développe un second minimum à une échelle transplanckienne ($\Lambda \sim M_P$). Si ce minimum est plus bas que le minimum électrofaible, alors la discussion des chapitres précédents montre qu'il y a des contraintes sur la stabilité du vide électrofaible.

Une première chose que l'on devrait vérifier est de savoir si ce nouveau minimum est un artifice de la procédure de renormalisation qui disparaît lorsqu'on inclut les corrections d'ordres supérieurs, ou s'il s'agit bien d'une solution physique. Reportons pour un instant l'analyse des conséquences physiques d'un tel scénario et commençons d'abord par présenter les arguments justifiant l'apparition d'un minimum transplanckien.

Grâce à la quantité impressionnante de données amassée par le LHC, la physique des particules est entrée dans une ère de mesures de précision : avec le modèle standard maintenant complet, il devient important d'en mesurer précisément les paramètres afin de les comparer aux prédictions théoriques et obtenir des indices sur la physique à plus haute énergie. Cette motivation se fait d'autant plus sentir à l'heure où la supersymétrie perd de son attrait pour résoudre les problèmes à basse énergie à cause des contraintes expérimentales. Il y a donc une motivation phénoménologique importante à calculer les corrections aux ordres supérieurs, et nous avons maintenant accès à un calcul complet à 2 et 3 boucles complété dans [54]. Les corrections aux ordres supérieurs sont cohérentes avec la prédiction à une boucle, avec une marge d'erreur théorique assez faible. La figure 4.4 présente l'évolution de la constante de couplage en fonction de l'échelle d'énergie pour les paramètres du modèle standard.

À cet ordre de précision, il est difficile d'imaginer que des diagrammes d'ordres supérieurs viennent contrebalancer cet effet suffisamment pour invalider la conclusion. On peut évidemment douter que la théorie UV qui se réduit au modèle standard à basse énergie soit celle esquissée par cette analyse du groupe de renormalisation, car il reste plusieurs problèmes qui ne trouvent pas d'explication dans le modèle standard. Toutefois, il semble beaucoup plus probable que cette description soit erronée à cause d'une extrapolation à partir d'une théorie effective incomplète qu'à cause d'un effet inattendu dues à des corrections aux ordres supérieurs.

4.7 | Stabilité du vide électrofaible

Les résultats du groupe de renormalisation en main, nous pouvons maintenant nous pencher sur les conséquences physiques en suivant l'analyse présentée dans [11]. En évaluant l'action à l'échelle Λ , on obtient un potentiel effectif $V(h) \sim \lambda(\Lambda = h)h^4/4!$, qui se décline en trois catégories (stable, métastable ou instable) selon la valeur du minimum instable. Quelques exemples de potentiels effectifs en fonction de la masse du Higgs sont donnés à la figure 4.5.

En calculant le potentiel effectif en fonction de M_h et M_t , on peut caractériser l'espace de

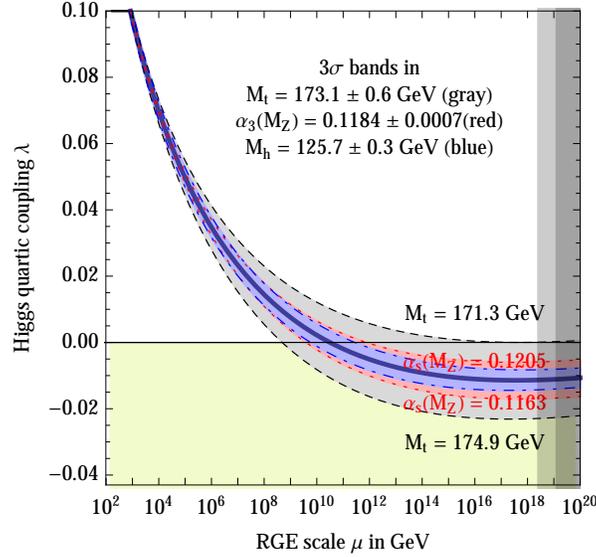


FIG. 4.4 : Évolution de la constante de couplage quartique du Higgs en fonction de l'échelle d'énergie. L'incertitude associée aux paramètres (à 3σ) est indiquée dans les courbes grise, rouge et bleue, pour respectivement la masse du quark top M_t , la constante des interactions fortes α_s et la masse du boson de Higgs M_h . La zone en gris indique la physique à l'ordre de ou au-delà de la masse de Planck, où la gravité quantique est dominante. Remarquons que λ devient négatif autour de 10^{10} GeV et commence à remonter vers 10^{16} GeV. Tiré de [54].

paramètres en fonction de la stabilité du vide électrofaible, ce qui est illustré à la figure 4.6a. Dans la zone stable (verte), la masse du top est trop faible pour créer une instabilité, alors que dans la zone instable (rouge), le potentiel développe un minimum de type AdS proche de la masse de Planck. On remarque que le Higgs se situe remarquablement proche de la zone de stabilité absolue du potentiel [55]. Puisque notre analyse des chapitres précédents nous indique qu'un potentiel métastable peut être dynamiquement stable s'il suit les contraintes 2.94, on pourrait penser que le Higgs se situe à cette limite de stabilité. Si tel était le cas, alors non seulement le modèle standard serait stable jusqu'à l'échelle de Planck (ce qui est une bonne nouvelle pour la vie sur Terre), mais on éviterait également les problèmes conceptuels reliés à une transition dS \rightarrow AdS.

4.7.1 | Contrainte sur la masse du Higgs

En appliquant les techniques des chapitres précédents, on peut évaluer κ_c pour chacun des potentiels, et comparer à $\kappa \sim \frac{M}{3m_P}$, où $M = h_I - h_{EW}$ et h_I est le minimum instable. La forme du potentiel est très sensible aux valeurs des masses M_h et M_t autour de la limite de stabilité, puisque les effets sont amplifiés par le groupe de renormalisation à haute énergie. Remarquons à cet effet que la différence entre les différentes masses du Higgs à la figure 4.5 est très faible (10^{-4} GeV, ce qui est moins que la largeur totale du Higgs $\Gamma \sim 4 \times 10^{-3}$ GeV).

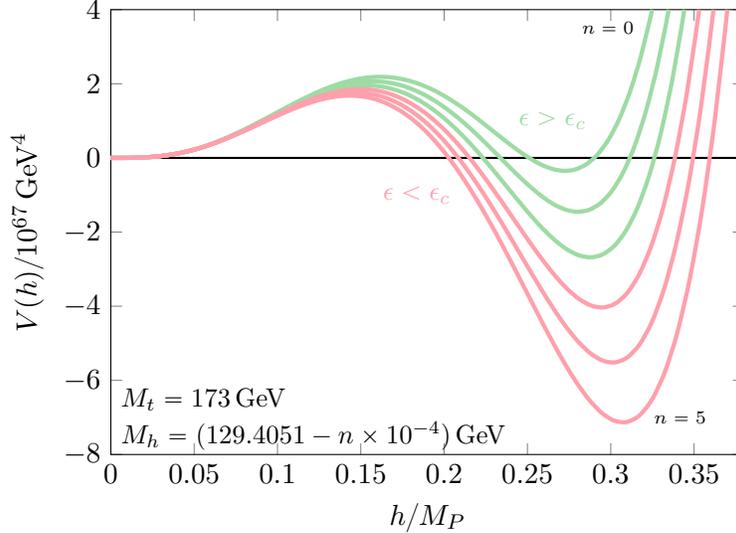


FIG. 4.5 : Potentiel effectif du Higgs pour différentes valeurs de la masse du Higgs indiquant les potentiels dynamiquement stables ou métastables.

Ainsi, il n'est pas surprenant de voir que la courbe de stabilité $\kappa = \kappa_c$ (en rouge) est presque superposée à la courbe de stabilité absolue (en noir) à la figure 4.6b.

Que conclure de cet exercice ? Il y a essentiellement trois possibilités : soit la valeur expérimentale est erronée à l'ordre de 3σ (98 % de certitude) et le Higgs est en fait à la limite de stabilité, soit le vide électrofaible est vraiment instable et on ne comprend pas bien la transition dS \rightarrow AdS, ou alors il manque un ingrédient au modèle standard pour que la théorie soit cohérente jusqu'à l'échelle de Planck.

Il y a de bonnes raisons pour douter des prédictions théoriques avant d'essayer d'y accommoder les résultats expérimentaux. En effet, notre discussion des contraintes sur le modèle standard est basée sur une extrapolation sur 16 ordres de grandeur jusqu'à la masse de Planck. À titre de comparaison, les physiciens du début du XX^e siècle pensaient que la physique était essentiellement complète, sauf quelques anomalies à l'échelle de l'électronvolt (soit essentiellement 11 ordres de grandeur sous l'échelle électrofaible), dont la catastrophe ultraviolette. La suite de l'histoire est connue, et l'ampleur des révolutions qui ont suivies (dont l'avènement de la théorie quantique) est une leçon d'humilité. Il y a donc fort à parier que la théorie est modifiée à un niveau fondamental à plus haute énergie (ce n'est pas un candidat pour une théorie du tout), et il serait mal avisé de tirer des conclusions définitives sur la stabilité du modèle standard à partir de cette extrapolation⁸.

8. Évidemment, il y a des arguments pour penser que la physique est (presque) complète jusqu'à une échelle élevée, comme les succès des scénarios de grande unification. Toutefois, les problèmes reliés à la matière sombre, l'énergie noire, la violation de la symétrie CP, le problème de la hiérarchie, de la constante cosmologique, le scénario d'inflation, la désintégration du proton et bien d'autres devraient au moins nous mettre en garde contre des conclusions hâtives.

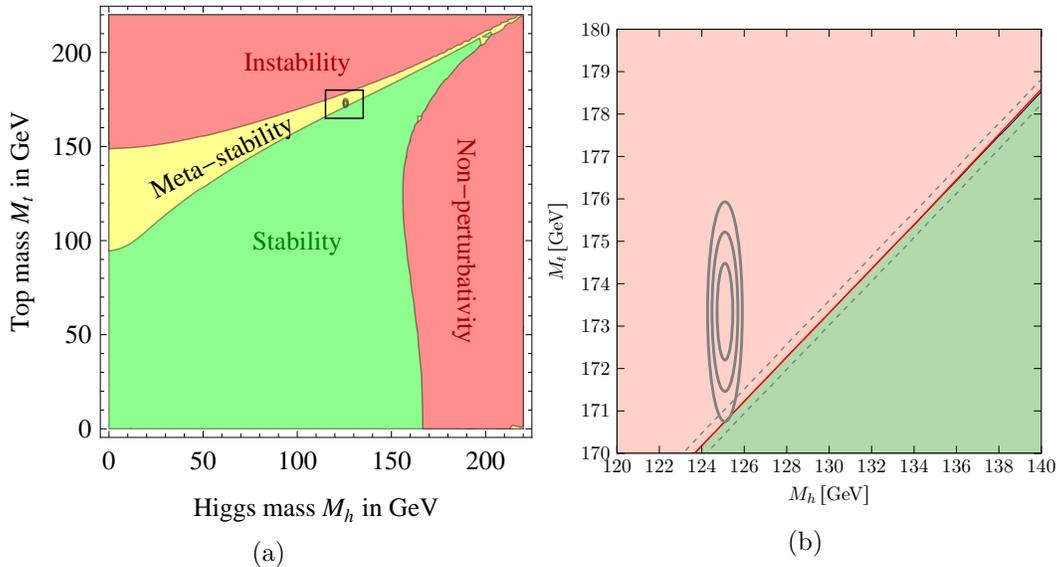


FIG. 4.6 : Diagramme de stabilité du potentiel effectif du Higgs en fonction de la masse du Higgs M_h et du quark top M_t . À gauche (4.6a), on remarque que le modèle standard est remarquablement proche de la zone de stabilité (tiré de [54]). À droite (4.6b), un agrandissement autour de la masse expérimentale. En rouge, le vide est métastable, alors qu'il est stable (jusqu'à l'échelle de Planck) dans la région verte. Les ellipses représentent l'incertitude expérimentale (de 1σ à 3σ) pour $M_t = 173.34(76)$ GeV et $M_h = 125.09(24)$ GeV [56]. Les lignes pointillées représentent l'incertitude sur $\alpha_s(M_Z) = 0.1184(7)$ [57].

Les deux autres options sont plus délicates, car elles reposent sur des hypothèses concernant respectivement la gravité quantique et la physique au-delà du modèle standard. Il est difficile d'exclure complètement la possibilité que le vide soit métastable, car la durée de vie peut être extrêmement longue (un calcul récent montre que la durée de vie du vide électrofaible serait de l'ordre de 10^{145} s [58, 59]).

La troisième option semble la plus intéressante, car elle pourrait être testée si l'on connaissait la bonne théorie à haute énergie. Dans ce cas, il faudrait s'attendre à ce que de nouveaux éléments modifient l'analyse précédente afin d'expliquer l'existence et la stabilité du vide électrofaible. On peut alors interpréter l'incohérence de la borne inférieure dans le graphique 4.6b comme un indice pointant vers une nouvelle théorie ultraviolette. Cette hypothèse est cohérente avec la liste des problèmes non-résolus par la physique moderne, qui suggère également une nouvelle physique au-delà du modèle standard (nouvelles particules, nouvelles symétries, unification, etc.). Cette option permettrait également de mettre en évidence un mécanisme dynamique qui expliquerait pourquoi le vide électrofaible est aussi proche de la limite de stabilité.

4.7.2 | Contrainte sur la constante cosmologique

Enfin, si on suppose que la contrainte sur la masse du Higgs est satisfaite, alors on peut utiliser l'équation (2.94) pour obtenir une borne supérieure sur la constante cosmologique. En prenant $\Delta v \sim 2 \times 10^{67} \text{ GeV}^4$ (voir la figure 4.5), on obtient une borne $\rho_{\text{vac}}^{1/4} \lesssim 5 \times 10^{16} \text{ GeV}$, ce qui est peu contraignant par rapport à la valeur expérimentale ($\rho_{\text{vac}}^{1/4} \sim 2.24 \times 10^{-12} \text{ GeV}$). Toutefois, l'ajout de scalaires légers dans la théorie (comme les axions ou les modulis) permet d'obtenir une borne beaucoup plus contraignante, car si leur potentiel contient également plusieurs minima, les échelles impliquées sont de l'ordre de leur masse (qui est très petite), ce qui pourrait mener à une contrainte importante sur la densité d'énergie du vide. Par exemple, pour le scénario relaxion (voir l'annexe 4.C), on peut établir la borne $\rho_{\text{vac}}^{1/4} \lesssim 10^{-1} \text{ GeV}$, ce qui est déjà beaucoup plus contraignant.

Compléments

4.A | Groupe de renormalisation

Soit une fonction de partition

$$Z[J] = \int D\phi e^{-S[\phi] + \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} J\phi}. \quad (4.44)$$

Les observables sont les fonctions de corrélation⁹, qui correspondent aux dérivés

$$\langle \mathcal{O}_i^{n_i} \rangle = \left. \frac{\delta^{n_i}}{\delta J_{\mathcal{O}_i}^{n_i}} \ln Z[J_i] \right|_{J_i=0}. \quad (4.46)$$

Le groupe de renormalisation décrit comment les fonctions de corrélation d'une théorie évoluent selon l'échelle d'énergie à laquelle elle est testée, à partir de paramètres fixés pour une échelle donnée M . Plus fondamentalement, il s'agit d'une conséquence de la cohérence d'une théorie sous changement d'échelle. La prescription pour calculer ces effets repose essentiellement sur l'intégrale de chemin : à partir d'une fonction de partition $Z[J]$, on peut développer l'exponentielle en série de puissance jusqu'à l'ordre λ^n et intégrer les termes pour obtenir une fonction de partition effective. En comparant les paramètres de la fonction de partition effective aux paramètres originaux, on peut déterminer l'évolution des coefficients selon l'échelle d'énergie. Cette procédure correspond à calculer les diagrammes de Feynman qui représentent un processus donné jusqu'à un nombre de boucles n .

Considérons par exemple la théorie ϕ^4 . L'action est

$$S[J] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right]. \quad (4.47)$$

Cette formulation est intéressante, car elle souligne que la théorie est basée sur des interactions locales, mais les vecteurs propres de la théorie libre sont les champs $\phi(p)$ pour un moment

⁹. Plus précisément, il faut sommer les photons de basse énergie (*soft photons*) que l'on ne peut pas détecter, ce qui correspond à ajouter

$$\sum_n \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \int_0^\mu \frac{d^d k_i}{(2\pi)^d} \frac{\delta^n}{\delta J_\gamma^n(k)} \ln Z[J_\gamma] |_{J_\gamma=0} \quad (4.45)$$

aux fonctions de corrélation. μ correspond à l'énergie minimale détectable.

linéaire p donné¹⁰. En réécrivant l'action dans cette base, on trouve

$$\begin{aligned}
S[J] = & \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} J(p_1) \phi(p_1) + \int \frac{1}{2} \prod_{i=1}^2 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \phi(p_1) (p_1^2 - m^2) \phi(p_2) \delta^d(p_1 - p_2) \\
& - \lambda \int \frac{1}{4!} \prod_{i=1}^4 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \delta^d(p_1 + p_2 + p_3 + p_4). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Appelons les termes de la première ligne S_{libre} , et ceux de la deuxième ligne S_{int} . En développant l'action à l'ordre λ , on a

$$Z[J] \simeq \int D\phi \left[1 - \lambda \int \frac{1}{4!} \prod_{i=1}^4 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \delta^d(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right] e^{-S_{\text{libre}}[J]}. \tag{4.49}$$

L'intégrale est nulle sauf si $p_i = k$ le moment d'une source $J(k)$, ou si $p_i = p_j$, ce qui correspond aux contractions de Wick. De cette manière, on doit sommer sur toutes les contractions possibles entre les champs et les sources, c'est-à-dire que l'on somme sur tous les diagrammes de Feynman qui correspondent à un processus donné.

Évaluons la correction à λ selon l'échelle d'énergie. Les deux diagrammes qui contribuent à une boucle sont présentés à la figure 4.7. Le premier diagramme est trivial : il peut être lu directement à partir du lagrangien. Le deuxième s'évalue facilement en utilisant les astuces et les résultats standards de la théorie quantique des champs (QFT) :

$$i\mathcal{M} = \frac{(i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k-p)^2 - m^2}, \quad p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \tag{4.50}$$

$$= -\frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \log [x(1-x)p^2 - m^2] dx + \text{cste}. \tag{4.51}$$

Ce diagramme peut être resommé pour donner une action effective

$$\delta S_{\text{eff}} = - \int \frac{1}{4!} \prod_{i=1}^4 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} i\mathcal{M} \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \delta^d(p_1 + p_2 + p_3 + p_4).$$

On doit redéfinir la constante de couplage pour respecter les conditions de renormalisation, soit dans ce cas

$$i\mathcal{M} = -i\lambda, \quad \text{à} \quad s = p^2 = 4m^2, u = t = 0, \tag{4.52}$$

10. Ce commentaire est valide lorsque l'action est une déformation du point fixe trivial. Dans le cas où la théorie est une CFT, les champs sont des représentations du groupe conforme et sont identifiés par leur spin et leur dimension conforme, donc la transformation n'est plus valide. La théorie peut toutefois être formulée en termes de particules soit dans l'espace de plongement, soit (via holographie) dans une théorie de la supergravité.

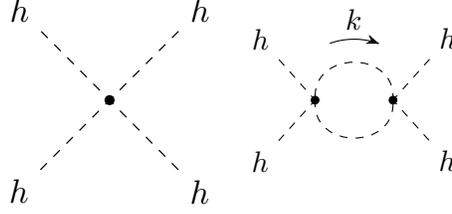


FIG. 4.7 : Diagrammes contribuant à la constante de couplage quartique λ à une boucle pour une théorie ϕ^4 .

où on utilise les variables de Mandelstam. On obtient donc finalement

$$S[J] = \int \frac{d^d p_1}{(2\pi)^d} J(p_1) \phi(p_1) + \int \frac{1}{2} \prod_{i=1}^2 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \phi(p_1) (p_1^2 - m^2) \phi(p_2) \delta^d(p_1 - p_2) - \int \frac{1}{4!} \prod_{i=1}^4 \frac{d^d p_i}{(2\pi)^d} \lambda'(p^2) \phi(p_1) \phi(p_2) \phi(p_3) \phi(p_4) \delta^d(p_1 + p_2 + p_3 + p_4), \quad (4.53)$$

$$\lambda' = \lambda + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 \left\{ \log \left[\frac{m^2 - x(1-x)s^2}{m^2 - x(1-x)4m^2} \right] + \log [1 - x(1-x)t/m^2] + t \rightarrow u \right\} dx. \quad (4.54)$$

Le terme de masse reste inchangé pour les corrections à une boucle. Pour calculer les corrections aux ordres supérieurs, il est plus simple d'utiliser les contre-termes pour assurer la cohérence de la théorie.

4.B | Théorie quantique des champs à température non-nulle

Cette annexe résume succinctement les effets d'une température non-nulle sur la stabilité du vide. Pour une analyse plus complète, se référer à [60–63].

En prenant l'analogie avec la fonction de partition en physique statistique à température finie, on peut modifier la relation (1.27) pour écrire

$$Z[J] = \int D\phi e^{-\beta E[J, \phi]}, \quad E = S_E - \int d^d x J(x) \phi(x). \quad (4.55)$$

Ici, E est analogue à l'énergie libre de Helmholtz, et $\beta \propto T^{-1}$ est un paramètre inversement proportionnel à la température¹¹. À partir de $E[J]$ on peut évaluer l'action effective $\Gamma[\phi_{cl}]$. Curieusement, les états respectent la symétrie $\phi(\tau, x) \rightarrow \phi(\tau + \beta, x)$ (ce qui est connu sous le nom d'état Kubo-Martin-Schwinger [64, 65]). En d'autres termes, les solutions admettent des conditions périodiques en temps euclidien de période β . Cette symétrie peut être retracée au fait qu'un observateur dans un Univers à une température finie peut voir le flux de particules incident comme provenant de l'effet Unruh et interpréter la température comme un artéfact

11. Cette formulation correspond à l'ensemble canonique en physique statistique.

dû au fait qu'il se trouve dans un repère accéléré (dans les coordonnées de Rindler). Or, dans ce cas, une étude de l'espace de Sitter euclidien montre que l'espace de recouvrement universel est une sphère, ce qui implique la périodicité annoncée (voir l'annexe 2.B).

La périodicité des solutions nous permet de décomposer les champs en modes de Fourier, i.e.

$$\phi(\tau, \vec{x}) = \sum_n e^{in\tau/\beta} \phi_n(\vec{x}). \quad (4.56)$$

Le propagateur de Klein-Gordon devient alors

$$\partial^2 = \partial_\tau^2 + \partial_x^2 = -(n/\beta)^2 + \partial_x^2, \quad (4.57)$$

donc le champ acquiert une masse effective de l'ordre de $\delta m^2 = n^2 T^2$, qui peut être incluse au potentiel effectif, et l'espace effectif possède une dimension de moins. Pour une température suffisamment élevée, le mode $n = 0$ est dominant et les autres modes sont non-dynamiques, alors que dans la limite où $T \rightarrow 0$, les modes de Kaluza-Klein régénèrent la dimension perdue à température finie.

Si le mode zéro reproduit les résultats à température nulle (avec une dimension en moins), on doit intégrer les modes plus lourds, ce qui génère des corrections au flot du groupe de renormalisation. La correction au potentiel effectif à une boucle est calculée dans [60] et donne

$$V_1^\beta(\phi_{cl}^2) = \frac{1}{2\pi^2\beta^4} \int_0^\infty x^2 \ln \left[1 - e^{-x^2 + \beta^2 \Lambda^2} \right] dx, \quad (4.58)$$

où Λ est l'échelle de renormalisation. Une fois cette correction au potentiel effectif prise en compte, l'analyse est identique au cas sans température en dimensions $d - 1$.

La correction (4.58) stabilise le potentiel. Toutefois, lorsqu'on augmente la température, le champ a plus d'énergie pour traverser la barrière de potentiel, ce qui produit l'effet inverse. Pour les paramètres du modèle standard, la correction quantique domine et l'effet global est de stabiliser le potentiel [45].

Il serait intéressant d'approfondir la relation entre les corrections dues à la température et celles dues à la gravité. En effet, selon le principe d'équivalence et l'effet Unruh, on pourrait s'attendre à ce que les deux effets soient équivalents. Pour supporter cette idée, il est intéressant de noter qu'il existe également une température critique au-delà de laquelle la transition ne se produit pas. Notons que cette correspondance est non-triviale, car elle relie les propriétés d'instantons dans deux systèmes avec un nombre de dimensions différents. Ces indices pointent également dans la direction de la correspondance AdS/CFT.

4.C | Axions

Les axions sont des scalaires légers introduits pour solutionner le problème de la violation CP en chromodynamique quantique (QCD) (*strong CP-problem*). Pour comprendre comment le problème survient, on peut considérer une version simplifiée de QCD avec un seul fermion en suivant [66]. Le lagrangien s'écrit alors comme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi. \quad (4.59)$$

Or, il n'y a rien qui impose *a priori* que la masse soit réelle. Si on prend $m = |m| e^{i\theta}$, alors on peut faire une transformation $\psi \rightarrow e^{i\theta/2} \psi$ et $\bar{\psi} \rightarrow e^{i\theta/2} \bar{\psi}$ pour absorber la partie imaginaire dans une redéfinition du champ. Le lagrangien est invariant, ce qui correspond à un courant chiral global conservé $\partial_\mu j^{5\mu} = 0$. L'action subit quant à elle des corrections quantiques, car la mesure $D\psi D\bar{\psi}$ n'est pas invariante sous la transformation¹²; il y a donc une contribution non-nulle due à une anomalie ce qui brise la symétrie globale. Dans la théorie effective, l'anomalie prend la forme

$$\delta\mathcal{L}_{eff} = \frac{\theta}{32\pi^2} \text{Tr} F\tilde{F}. \quad (4.60)$$

En QED, l'anomalie n'affecte pas la physique, mais pour une théorie non-abélienne comme QCD, l'anomalie peut avoir des effets physiques observables. En particulier, le terme $\delta\mathcal{L}_{eff}$ brise la symétrie CP, et on s'attendrait alors à mesurer un dipole électrique anomal au neutron de l'ordre de $e\Lambda_{neutron} \sim e \times 10^{-14}$ cm, ce qui est exclu par l'expérience jusqu'à $e \times 10^{-25}$ cm. L'écart entre la valeur attendue et expérimentale implique que $\theta < 10^{-9}$, ce qui est faible (mais moins que le problème de la hiérarchie). Comprendre pourquoi θ est aussi faible en QCD constitue le *strong CP-problem*.

Une solution simple pour expliquer pourquoi θ est aussi faible est de supposer qu'il y a un champ scalaire a avec comme lagrangien

$$\mathcal{L}_{axion} = (\partial_\mu a)^2 + \frac{a/f_a + \theta}{32\pi^2} \text{Tr} F\tilde{F}. \quad (4.61)$$

Si la théorie possède également la symétrie $a \rightarrow a + \alpha$, alors on peut absorber le paramètre θ dans une redéfinition du champ a , l'axion. Un calcul de l'énergie du vide $E(\theta)$ donne un potentiel pour l'axion, et on peut montrer que V admet un minimum à $\theta = 0$, ce qui résout le problème par un mécanisme dynamique. Il existe plusieurs contraintes phénoménologiques pour les théories contenant des axions, mais on suppose en général que $f_a \sim 10^{10}$ GeV – 10^{12} GeV, ce qui est compatible avec les expériences.

12. La méthode est détaillée dans [67].

4.C.1 | Modèle relaxion

Une variation sur le thème des axions offre également une solution potentielle au problème de la hiérarchie et de l'inflation ; par exemple le modèle *relaxion* [52]. On modifie le lagrangien précédent comme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SM}} + (-M^2 + ga) |H|^2 + V(ga) + \frac{1}{32\pi^2} \frac{a}{f_a} \text{Tr} F \tilde{F}, \quad (4.62)$$

avec M^2 le *cutoff* de la théorie. La masse du Higgs est donc naturelle dans la théorie renormalisable, puisqu'elle est comparable à l'échelle d'énergie à laquelle la théorie est définie. Si on prend la limite $g \rightarrow 0$, alors la théorie possède la symétrie $a \rightarrow a + 2\pi f_a$.

Si on regarde le potentiel effectif pour a , on a des termes linéaires provenant des valeurs moyennes dans le vide de $g |H|^2$ et $\text{Tr} F \tilde{F}$, et un potentiel généré par les corrections quantiques dues à QCD. À haute énergie, la symétrie n'est pas brisée, donc $V = 0$. Le champ a évolue donc linéairement, ce qui génère l'inflation. Lorsque $m_h^2 = -M^2 + ga \geq 0$, le Higgs acquiert une valeur moyenne non-nulle, car $m_h^2 = 0$ devient un point instable. La brisure de symétrie génère des corrections au potentiel $V(a) \propto m_h^4$, donc l'amplitude de la perturbation croît proportionnellement à la valeur moyenne du Higgs. Lorsque l'amplitude devient trop grande, l'axion s'arrête, ce qui fixe le minimum électrofaible.

Le modèle relaxion permet d'obtenir le minimum électrofaible pour des valeurs raisonnables des paramètres (*technical naturalness*), mais le nombre de e -fold attendu est alors 10^{40} , ce qui n'est pas fondamentalement problématique, mais est surprenant. À l'échelle du modèle standard, le potentiel de l'axion serait de l'ordre de $V \sim f_\pi^2 m_\pi^2 \sim 3 \times 10^{-4} \text{ GeV}^4$.

Conclusion et perspectives

Les difficultés associées à l'inclusion de la gravité dans la physique des particules ne sont pas nouvelles. Outre les difficultés techniques substantielles découlant d'une géométrie dynamique, la théorie quantique des champs manifeste des incohérences qui semblent ancrées aux fondements même de la théorie : non-renormalisabilité, absence d'une définition unique de l'état du vide, instabilité de l'espace, problèmes d'échelle des paramètres, *etc.*

Tous ces problèmes suggèrent que la théorie quantique des champs n'est pas le formalisme approprié pour décrire une théorie de la gravité quantique. Et pourtant, les succès de la QFT portent étonnamment loin. Entre les théories de la grande unification et le modèle naïf de stabilité du vide électrofaible développé ici, on trouve une panoplie d'indices dont les échecs sont si proches d'offrir une réponse satisfaisante à des problèmes qui semblent pourtant résolument dépendre d'une théorie de la gravité quantique, qu'il est difficile de croire au hasard. Aussi, bien qu'il soit difficile d'y voir clair et d'exposer au grand jour les mécanismes sous-jacents, on aurait tort de négliger l'importance de ces quasi-succès. En particulier, bien que la borne obtenue sur la masse du Higgs ne constitue pas une solution au problème de la hiérarchie, il est difficile de croire qu'elle ne joue aucun rôle dans sa résolution.

Plus généralement, notre étude de l'inclusion de la gravité dans un modèle de stabilité du vide met en lumière l'inconsistance de la transition de l'espace dS vers l'espace AdS par un argument entropique, ce qui suggère également une résolution. Lorsque la probabilité de transition est suffisamment faible, on suppose que la transition peut être interprétée comme une récurrence à un état de faible entropie, ce qui élimine l'incohérence.

Le reste de notre analyse vise à établir les conditions pour lesquelles cette solution spéculative est applicable. En revisitant l'approximation thin-wall, nous avons pu mettre en évidence son lien avec le théorème d'énergie positive et l'instanton Hawking-Moss. Nous avons également vérifié nos résultats analytiques par des méthodes numériques, montré que ces résultats offraient une bonne prédiction pour la majorité des cas et suggéré des directions futures. Parmi ces dernières, nous avons mentionné comment on pourrait déterminer la dépendance des états finaux de l'instanton en fonction des paramètres du modèle, ce qui viendrait compléter l'analyse thin-wall. Également, nous avons souligné comment une étude plus complète de l'instanton dans le régime thermique pourrait établir plus clairement le lien entre l'instanton CdL et HM, ce qui pourrait permettre de mettre en évidence la nature des paramètres α et ξ^* suggérés par l'analyse thin-wall, et ainsi formuler adéquatement la théorie. Finalement, nous

avons suggéré un parallèle entre le modèle avec gravité et celui à température non-nulle, ce qui suit l'idée d'AdS/CFT, mais dans un espace de de Sitter. Une meilleure compréhension de cette dualité pourrait permettre d'établir les critères de cohérence de l'espace de de Sitter quantique.

Bibliographie

- [1] Sidney Coleman. Fate of the false vacuum : Semiclassical theory. *Physical Review D*, 15(10) :2929–2936, may 1977. doi : 10.1103/PhysRevD.15.2929. URL [#](http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:Fate+of+the+False+Vacuum)4http://prd.aps.org/abstract/PRD/v15/i10/p2929_1<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2929>.
- [2] Ali Masoumi, Xiao Xiao, and I-Sheng Yang. Bubble nucleation of spatial vector fields. *Phys. Rev.*, D87(4) :45008, 2013. doi : 10.1103/PhysRevD.87.045008.
- [3] Curtis G Callan and Sidney Coleman. Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections. *Physical Review D*, 16(6) :1762–1768, 1977. ISSN 05562821. doi : 10.1103/PhysRevD.16.1762.
- [4] S. Coleman, V. Glaser, and A. Martin. Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations. *Communications in Mathematical Physics*, 58(2) :211–221, 1978. ISSN 00103616. doi : 10.1007/BF01609421.
- [5] Roman V. Buniy. An iterative method for spherical bounces. 2016.
- [6] Ali Masoumi, Sonia Paban, and Erick J. Weinberg. Tunneling from a Minkowski vacuum to an AdS vacuum : A new thin-wall regime. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 94(2) :1–17, 2016. ISSN 15502368. doi : 10.1103/PhysRevD.94.025023.
- [7] Kfir Blum, Masazumi Honda, Ryosuke Sato, Masahiro Takimoto, and Kohsaku Tobioka. $O(N)$ Invariance of the Multi-Field Bounce. *JHEP*, 05 :1–8, 2016. doi : 10.1007/JHEP05(2017)109,10.1007/JHEP06(2017)060. URL <http://arxiv.org/abs/1611.04570>.
- [8] Aditya Aravind, Brandon S DiNunno, Dustin Lorshbough, and Sonia Paban. Analyzing multifield tunneling with exact bounce solutions. *Physical Review D*, 91(2) :025026, 2015.
- [9] Ryosuke Sato and Masahiro Takimoto. An Absolute Lower Bound on the Bounce Action. 2017.
- [10] Ali Masoumi, Alexander Vilenkin, and Masaki Yamada. Inflation in random gaussian landscapes. *arXiv preprint arXiv :1612.03960*, 2016.

- [11] José R. Espinosa, Jean François Fortin, and Maxime Trépanier. Consistency of scalar potentials from quantum de Sitter space. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 93(12) :1–20, 2016. ISSN 15502368. doi : 10.1103/PhysRevD.93.124067.
- [12] S Coleman and F De Luccia. Gravitational effects on and of vacuum decay. *Physical Review D*, 1980. URL <http://prd.aps.org/abstract/PRD/v21/i12/p3305{ }1>.
- [13] Thomas Banks, Carl M Bender, and Tai Tsun Wu. Coupled anharmonic oscillators. I. Equal-mass case. *Physical Review D*, 8(10) :3346, 1973.
- [14] T. Banks and M. Johnson. Regulating Eternal Inflation. *ReCALL*, page 37, 2005. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0512141>.
- [15] Anthony Aguirre, Tom Banks, and Matthew Johnson. Regulating Eternal Inflation II : The Great Divide. *Journal Of High Energy Physics*, 2006 :65, 2006. ISSN 1029-8479. doi : 10.1088/1126-6708/2006/08/065. URL <http://iopscience.iop.org/1126-6708/2006/08/065>.
- [16] L. F. Abbott, D. Harari, and Q. H. Park. Vacuum decay in curved backgrounds. *Classical and Quantum Gravity*, 4(6) :L201–L204, 1987. ISSN 0264-9381. doi : 10.1088/0264-9381/4/6/001.
- [17] EJ Weinberg and A Wu. Understanding complex perturbative effective potentials. *Physical Review D*, 36(8) :2474–2480, 1987. URL <http://scholar.google.com/scholar?hl=en{&}btnG=Search{&}q=intitle :No+Title{#}0http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.36.2474>.
- [18] James C Hackworth and Erick J Weinberg. Oscillating bounce solutions and vacuum tunneling in de sitter spacetime. *Physical Review D*, 71(4) :044014, 2005.
- [19] Erick J. Weinberg. New bounce solutions and vacuum tunneling in de Sitter spacetime. *AIP Conference Proceedings*, 805 :259–265, 2005. ISSN 0094243X. doi : 10.1063/1.2149708.
- [20] Raphael Bousso, Ben Freivogel, and Matthew Lippert. Probabilities in the landscape : The decay of nearly flat space. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 74(4), 2006. ISSN 15507998. doi : 10.1103/PhysRevD.74.046008.
- [21] Adam R. Brown and Erick J. Weinberg. Thermal derivation of the Coleman-De Lucia tunneling prescription. *Phys. Rev.*, D76 :064003, 2007. doi : 10.1103/PhysRevD.76.064003.
- [22] Michael Koehn, George Lavrelashvili, and Jean-Luc Lehners. Towards a Solution of the Negative Mode Problem in Quantum Tunnelling with Gravity. *Phys. Rev.*, D92(2) : 023506, 2015. doi : 10.1103/PhysRevD.92.023506.

- [23] Assaf Shomer. A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity. *arXiv*, page 0709.3555v2, 2007. URL <http://arxiv.org/abs/0709.3555>.
- [24] G E Andrews, R Askey, and R Roy. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999. ISBN 9780521789882. URL <https://books.google.ca/books?id=qZWuYQbpdMC>.
- [25] Juan Maldacena. Vacuum decay into Anti de Sitter space. *arXiv*, pages 1–10, 2011. URL <http://arxiv.org/abs/1012.0274>.
- [26] Edward Witten. A new proof of the positive energy theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 80(3) :381–402, 1981. ISSN 00103616. doi : 10.1007/BF01208277.
- [27] W Boucher. Positive energy without supersymmetry. *Nuclear Physics, Section B*, 242 (2) :282–296, 1984. ISSN 05503213. doi : 10.1016/0550-3213(84)90394-8.
- [28] L.F. F Abbott and Q.-H. Park. Gravitational stabilization of scalar potentials. *Physics Letters B*, 156(5) :373–375, 1985.
- [29] Richard Schoen and Shing-Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Communications in Mathematical Physics*, 65(1) :45–76, 1979.
- [30] Lars Gerhard Jensen and Paul Joseph Steinhardt. Bubble nucleation and the coleman-weinberg model. *Nuclear Physics B*, 237(1) :176 – 188, 1984. ISSN 0550-3213. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(84\)90021-X](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(84)90021-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138490021X>.
- [31] Lars Gerhard Jensen and Paul Joseph Steinhardt. Bubble nucleation for flat potential barriers. *Nuclear Physics B*, 317(3) :693–705, 1989.
- [32] Puneet Batra and Matthew Kleban. Transitions between de sitter minima. *Physical Review D*, 76(10) :103510, 2007.
- [33] Erick J Weinberg. *Classical solutions in quantum field theory : Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press, 2012.
- [34] Michele Maggiore. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. *Phys. Rept.*, 331 :283–367, 2000. doi : 10.1016/S0370-1573(99)00102-7.
- [35] Stephan J. Huber and Thomas Konstandin. Gravitational Wave Production by Collisions : More Bubbles. *JCAP*, 0809 :022, 2008. doi : 10.1088/1475-7516/2008/09/022.
- [36] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Phys. Rev. D*, 15 :2738–2751, May 1977. doi : 10.1103/PhysRevD.15.2738. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.15.2738>.

- [37] S.W. Hawking and I.L. Moss. Supercooled phase transitions in the very early universe. *Physics Letters B*, 110(1) :35 – 38, 1982. ISSN 0370-2693. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693\(82\)90946-7](http://dx.doi.org/10.1016/0370-2693(82)90946-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382909467>.
- [38] Naritaka Oshita and Jun'ichi Yokoyama. Entropic interpretation of the Hawking–Moss bounce. *PTEP*, 2016(5) :053E02, 2016. doi : 10.1093/ptep/ptw053.
- [39] Paul Langacker. Grand unified theories and proton decay. *Physics Reports*, 72(4) :185–385, 1981.
- [40] P. Binetruy. *Supersymmetry : Theory, experiment and cosmology*. 2006.
- [41] C. Patrignani and Particle Data Group. Review of particle physics. *Chinese Physics C*, 40(10) :100001, 2016. URL <http://stacks.iop.org/1674-1137/40/i=10/a=100001>.
- [42] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. F. Giudice, and A. Romanino. Aspects of split supersymmetry. *Nucl. Phys.*, B709 :3–46, 2005. doi : 10.1016/j.nuclphysb.2004.12.026.
- [43] Steven Weinberg. Anthropic Bound on the Cosmological Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 59 : 2607, 1987. doi : 10.1103/PhysRevLett.59.2607.
- [44] Tom Banks. The Top 10^{500} reasons not to believe in the landscape. page 38, 2012. URL <http://arxiv.org/abs/1208.5715>.
- [45] Jose R. Espinosa, Gian F. Giudice, Enrico Morgante, Antonio Riotto, Leonardo Senatore, Alessandro Strumia, and Nikolaos Tetradis. The cosmological Higgstory of the vacuum instability. *JHEP*, 09 :174, 2015. doi : 10.1007/JHEP09(2015)174.
- [46] Alan H Guth and Erick J Weinberg. Could the universe have recovered from a slow first-order phase transition? *Nuclear Physics B*, 212(2) :321–364, 1983. ISSN 0550-3213. doi : [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(83\)90307-3](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(83)90307-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383903073>.
- [47] Andrey Katz. On the thermal history of calculable gauge mediation. *Journal of High Energy Physics*, pages 1–22, 2009. URL <http://iopscience.iop.org/1126-6708/2009/10/054>.
- [48] Willy Fischler and Vadim Kaplunovsky. Meta-stable supersymmetry breaking in a cooling universe. *Journal of High ...*, pages 0–18, 2007. URL <http://iopscience.iop.org/1126-6708/2007/03/107>.
- [49] A. D. Linde. A new inflationary universe scenario : A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108(6) :389–393, 1982. ISSN 03702693. doi : 10.1016/0370-2693(82)91219-9.

- [50] SA Abel and CS Chu. SUSY breaking by a metastable ground state : Why the early universe preferred the non-supersymmetric vacuum. *Journal of High Energy ...*, 2007. URL <http://iopscience.iop.org/1126-6708/2007/01/089>.
- [51] NJ Craig, PJ Fox, and JG Wacker. Reheating metastable O’Raifeartaigh models. *Physical Review D*, 2007. URL <http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.75.085006>.
- [52] Peter W. Graham, David E. Kaplan, and Surjeet Rajendran. Cosmological Relaxation of the Electroweak Scale. *Phys. Rev. Lett.*, 115(22) :221801, 2015. doi : 10.1103/PhysRevLett.115.221801.
- [53] Shiraz Minwalla, Mark Van Raamsdonk, and Nathan Seiberg. Noncommutative perturbative dynamics. *JHEP*, 02 :020, 2000. doi : 10.1088/1126-6708/2000/02/020.
- [54] Giuseppe Degrandi, Stefano Di Vita, Joan Elias-Miro, Jose R Espinosa, Gian F Giudice, Gino Isidori, and Alessandro Strumia. Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO. *JHEP*, 08 :98, 2012. doi : 10.1007/JHEP08(2012)098.
- [55] Dario Buttazzo, Giuseppe Degrandi, Pier Paolo Giardino, Gian F. Giudice, Filippo Sala, Alberto Salvio, and Alessandro Strumia. Investigating the near-criticality of the Higgs boson. *JHEP*, 12 :089, 2013. doi : 10.1007/JHEP12(2013)089.
- [56] Georges Aad et al. Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 114 : 191803, 2015. doi : 10.1103/PhysRevLett.114.191803.
- [57] Siegfried Bethke. World summary of α_s (2012). *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 234 :229 – 234, 2013. ISSN 0920-5632. doi : <http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysbps.2012.12.020>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920563212005452>. 16th International Conference in Quantum Chromodynamics.
- [58] Anders Andreassen, William Frost, and Matthew D. Schwartz. Scale Invariant Instantons and the Complete Lifetime of the Standard Model. 2017.
- [59] So Chigusa, Takeo Moroi, and Yutaro Shoji. State-of-the-Art Calculation of the Decay Rate of Electroweak Vacuum in Standard Model. 2017.
- [60] L Dolan and R Jackiw. Symmetry behavior at finite temperature. *Physical Review D*, (1 1), 1974. URL <http://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.9.3320>.
- [61] Steven Weinberg. Gauge and global symmetries at high temperature. *Phys. Rev. D*, 9 : 3357–3378, Jun 1974. doi : 10.1103/PhysRevD.9.3357. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3357>.

- [62] Jean Zinn-Justin. Quantum field theory at finite temperature : An Introduction. 2000.
- [63] AD Linde. Decay of the false vacuum at finite temperature. *Nuclear Physics B*, 216 :421–445, 1983. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321383902936>.
- [64] Ryogo Kubo. Statistical-mechanical theory of irreversible processes. i. general theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *Journal of the Physical Society of Japan*, 12(6) :570–586, 1957. doi : 10.1143/JPSJ.12.570. URL <http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.12.570>.
- [65] Paul C. Martin and Julian Schwinger. Theory of many-particle systems. i. *Phys. Rev.*, 115 :1342–1373, Sep 1959. doi : 10.1103/PhysRev.115.1342. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.115.1342>.
- [66] M. Dine. *Supersymmetry and String Theory : Beyond the Standard Model*. Cambridge University Press, 2007. ISBN 9781139462440. URL <https://books.google.ca/books?id=MWcnme8c9NEC>.
- [67] Kazuo Fujikawa and Hiroshi Suzuki. *Path integrals and quantum anomalies*, volume 122. Oxford University Press on Demand, 2004.