

PHILIPPE LEMIEUX-MELLOUKI

# GROUPES D'HOMOTOPIE DES SPHÈRES

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques  
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2012

© Philippe Lemieux-Mellouki, 2012



## Résumé

Ce mémoire porte sur les groupes d'homotopie des sphères  $S^n$ . Plus précisément, on s'intéresse à la méthode des suites spectrales développée d'abord par Jean-Pierre Serre puis raffinée par la suite par d'autres mathématiciens tels que Frank Adams. On expose dans un premier temps les concepts inhérents aux suites spectrales et on introduit ensuite celles-ci pour enfin démontrer certains résultats classiques. Le premier théorème d'importance est que  $\pi_k(S^n)$  est fini sauf si  $k = n$  ou si  $n$  paire et  $k = 2n - 1$ . Dans ce dernier cas, on a que  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$  sont des groupes de type fini avec une seule composante  $\mathbf{Z}$ . On obtient ensuite un contrôle modeste sur la  $p$ -torsion : le premier élément de  $p$ -torsion des groupes d'homotopie de  $S^n$  apparaissent en dimension  $n + 2p - 3$  où la  $p$ -composante est  $\mathbf{Z}_p$ . On utilise enfin l'algèbre de Steenrod pour reproduire certains calculs explicites de groupes d'homotopie effectués par Jean-Pierre Serre :  $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbf{Z}_2$ , ( $n \geq 3$ ),  $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbf{Z}_2$  ( $n \geq 2$ ),  $\pi_6(S^3) = \mathbf{Z}_{12}$  et  $\pi_7(S^4) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_{12}$ .





# Table des matières

Table des matières	iii
1 Introduction	1
<b>I Notions et résultats préliminaires</b>	<b>4</b>
2 La longue suite exacte d'une paire en homotopie	5
2.1 Approximation par un CW complexe	8
2.2 Fibrés et calcul des groupes d'homotopie de $S^1$	10
2.3 Excision et suspension	12
3 Fibration	15
3.1 Tour de Postnikov	18
<b>II Suite spectrale de Serre</b>	<b>22</b>
4 Théorème de Serre et suite spectrale en homologie	23
4.1 Théorème de Serre	28
4.2 Classe de Serre et théorème de Hurewicz généralisé	32
4.3 L'homologie des $K(G,n)$	41
5 Suite spectrale de Serre en cohomologie	46
6 La classe $\mathcal{C}_P$	49
<b>III Applications aux groupes d'homotopie des sphères</b>	<b>52</b>
7 Les sphères de dimension un entier pair	53
8 Structure des groupes d'homotopie des sphères	58
8.1 Calcul de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane	66
8.2 Opérations de cohomologie	70



8.3	Puissances de Steenrod . . . . .	74
8.4	Retour à la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane . . . . .	78
8.5	Calcul de groupes d'homotopie de la sphère . . . . .	83
	<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Extension et relèvement homotopique</b>	<b>94</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Une méthode possible pour classifier des espaces topologiques est de leur associer des invariants. Il s'agit d'objets, par exemple un entier ou un groupe, que l'on espère pouvoir déterminer à partir d'un espace donné et qui restent inchangés si l'on remplace ledit espace par un autre lui étant homéomorphe. Cette idée est bien entendu applicable à d'autres catégories ; pensons à la dimension des variétés ou des espaces vectoriels, à la caractéristique d'un corps, où l'invariant s'exprime par un entier. Au début du siècle, on a vu naître des travaux de Poincaré un nouvel invariant en topologie : l'homologie. Au départ, cet objet prenait la forme d'un entier qui mesure, heuristiquement, le nombre de trous dans un espace. Par exemple, le cercle  $S^1$  possède un trou de dimension 1 et on pourrait lui attacher la suite  $(1, 0, 0, 0 \dots)$  en guise de "un trou en dimension 1 et aucun trou en dimension supérieure". Ce concept a ensuite évolué avec notamment l'intervention d'Emmy Noether et est représenté depuis lors par des groupes au lieu d'entiers. Qui plus est, il s'avéra que cet invariant était en fait davantage adapté à une classification plus grossière des espaces que celle donnée par l'homéomorphisme. L'équivalence homotopique entre deux espaces est la relation naturelle pour ce nouvel invariant. Intuitivement, cette équivalence distingue les espaces à déformation près :  $\mathbb{R}^n$  n'est pas différencié du singleton puisque ce premier espace peut être déformé en un point.

Un concept important inhérent à cette catégorie est celui d'homotopie : deux fonctions  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  sont *homotopes* s'il existe une fonction  $F : X \times I \rightarrow Y$  tel que  $F(x, 0) = f$  et  $F(x, 1) = g$ . On travaille dans les faits avec des espaces et des fonctions pointés, i.e. des paires  $(X, x_0)$  et des fonctions  $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  où  $x_0$  est un point distingué de l'espace  $X$ . Sans commenter davantage cette technicalité, cette définition de l'homotopie entre deux fonctions nous amène à considérer l'ensemble que l'on note  $[Y, X]$  dont les éléments sont des classes d'équivalences de fonctions  $f : Y \rightarrow X$



où  $f \sim g$  ssi  $f$  est homotope à  $g$ . Selon l'espace  $Y$  choisi, on obtient en étudiant  $[Y, X]$  différents types d'informations sur l'espace  $X$ . On aimerait pouvoir définir ainsi des invariants algébriques de  $X$  : pour quel espace  $Y$  l'ensemble  $[Y, X]$  peut-il être doté d'une structure de groupe ? Le premier exemple fut introduit en même temps que l'homologie par Henri Poincaré. En prenant  $Y = S^1$ , Poincaré introduisit l'invariant que l'on note  $\pi_1$  et que l'on appelle le groupe fondamental. La loi de groupe est obtenue par la concaténation de fonctions (souvent nommées boucles)  $S^1 \rightarrow X$ . Ce ne fut pas longtemps après qu'est apparue la généralisation du groupe fondamental en dimension supérieure : les groupes d'homotopie de dimension  $n$ , notés  $\pi_n$  et construits à partir de l'ensemble  $[S^n, *]$ . Géométriquement, il semblerait que ces invariants soient, à l'instar des groupes d'homologie, une mesure de la connectivité, du nombre et de la forme des trous. On imagine facilement un trou de dimension 1 comme étant une fonction de  $S^1$  qui n'est pas homotope à la fonction constante. Bien qu'il y ait un lien important entre ces deux familles d'invariants, il y a des différences dans ce qui est détecté par les groupes d'homotopie et d'homologie et des subtilités dans la manière dont ces formes sont détectées. À titre d'exemple, le premier groupe d'homologie ne permet pas de différencier le tore  $S^1 \times S^1$  de  $S^1 \vee S^1$  tandis que le groupe fondamental le peut : dans un cas on a le  $\mathbb{Z}$ -module libre à deux générateurs et dans l'autre, le groupe libre (non commutatif) à deux générateurs. Le groupe fondamental exhibe donc une nuance entre les deux "trous" de  $S^1 \vee S^1$  et de  $S^1 \times S^1$ . D'ailleurs, le deuxième groupe d'homotopie du tore est nul. Pourtant, il est apparent que le tore possède un trou de dimension 2. Néanmoins, ce trou n'a pas une forme sphérique et est uniquement détecté par le deuxième groupe d'homologie.

L'une des plus remarquables distinctions entre l'homologie et l'homotopie est certes notre incapacité à calculer simplement l'homotopie alors que l'homologie est facilement calculable pour la plupart des espaces qui nous intéressent. L'exemple typique de ce phénomène est la sphère  $S^n$ . Il est élémentaire de déterminer que  $H_k(S^n) = 0$  si  $k \neq 0, n$  et  $\mathbb{Z}$  sinon. Pourtant, à ce jour, il n'est pas possible d'avoir une description de  $\pi_k(S^n)$  pour  $k$  et un  $n$  donné. Comme on le verra, il existe des théorèmes généraux qui nous permettent de connaître ces groupes pour des  $k$  et  $n$  spécifiques, mais ces résultats ne sont aucunement exhaustifs. Cette complexité font des groupes d'homotopie un sujet riche qui a généré de nouvelles théories mathématiques et qui continue encore aujourd'hui à servir de motivation dans le développement de la topologie algébrique.

On s'intéresse dans le présent mémoire aux groupes d'homotopie des sphères  $S^n$ . Il est naturel d'étudier ces espaces en particulier puisque l'invariant est défini à partir de ceux-ci. En effet, la connaissance des groupes d'homotopie de la sphère intervient lorsque l'on considère le problème plus général de déterminer  $\pi_k(X)$  puisqu'un élément de ce dernier groupe est représentable par une fonction  $f : S^k \rightarrow X$  et cette même

fonction nous donne un morphisme  $\pi_*(S^k) \rightarrow \pi_*(X)$  (que l'on note  $f_*$ ). Aussi, on poursuit dans ce texte l'objectif de démontrer certains des résultats connus sur les groupes  $\pi_k(S^n)$  ainsi que de présenter la méthode de calcul développée par Jean-Pierre Serre, qui lui valut d'ailleurs la médaille Fields. Ses techniques reposent sur un outil algébrique qui sera un sujet central dans ce mémoire : la suite spectrale.

Le premier chapitre est consacré aux notions et résultats préliminaires de topologie algébrique. Il s'agit de définitions de base et de résultats souvent élémentaires dont les démonstrations sont omises bien que les références soient données. On construit dans la deuxième partie la suite spectrale de Serre, laquelle sera la pierre angulaire dans la suite des choses. Le reste du travail est dédié à l'étude des structures récurrentes qui surviennent dans les groupes d'homotopie et à la méthode de calcul de Serre qui passe par la connaissance des espaces dits d'Eilenberg-MacLane.

# Première partie

## Notions et résultats préliminaires



## Chapitre 2

# La longue suite exacte d'une paire en homotopie

Dans ce mémoire, toutes les fonctions entre espaces topologiques sont supposées continues. De plus, on présume que le lecteur est familier avec certains concepts de base de la topologie algébrique : l'homologie, la cohomologie, les CW complexes, etc. Un ouvrage de référence est par exemple [6] ou [10]. Il convient aussi d'établir la notation en usage dans ce texte :

$X^n$  : le  $n$ -squelette d'un CW complexe  $X$ .

$S^n$  : La sphère de dimension  $n$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ .

$D^n$  : La boule unité de dimension  $n$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

$\Sigma X$  : La suspension de l'espace  $X$ , l'espace construit à partir de  $X \times I$  où  $X \times \{1\}$  et  $X \times \{0\}$  sont réduits à deux points.

$SX$  : La suspension réduite de l'espace  $X$ ,  $X \times I / \{x_0\} \times I \cup X \times \{0, 1\}$ .

$CX$  : Le cône réduit de l'espace  $X$ , l'espace construit à partir de  $X \times I / \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\}$ .

$I$  : L'intervalle  $[0, 1]$ .

$H^n(X; G)$  : Le  $n$ -ième groupe de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

$H_n(X; G)$  : Le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

$\mathbb{Z}_m$  : Le groupe  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

$\tilde{H}_n(X; G)$  : Le  $n$ -ième groupe d'homologie réduit de  $X$  à coefficients dans  $G$ .

Dans cette section, on rappelle certaines définitions et résultats clés en homotopie.

**Définition 1.** *Étant donné le triplet  $(X, A, a_0)$ , on définit l'ensemble  $\pi_n(X, A, a_0)$  comme l'ensemble des fonctions  $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, a_0)$  où  $J^{n-1}$  est égal*

à  $I^{n-1} \times \{1\} \cup \partial I^{n-1} \times I$  quotienté par la relation d'équivalence :  $f \sim g$  si  $f$  est homotope à  $g$  et que toutes les fonctions composant l'homotopie sont de la forme  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a_0)$ .

Pour clarifier,  $J^{n-1}$  est l'ensemble des faces du cube  $I^n$  sauf celle en  $x_n = 0$ . On peut doter  $\pi_n(X, A, a_0)$  d'une structure de groupe de la façon suivante : pour  $[f]$  et  $[g]$  dans  $\pi_n(X, A, a_0)$ , on définit  $[f] + [g]$  comme étant

$$\begin{cases} f((2x_1, \dots, x_n)) & \text{pour } x_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g((2x_1 - 1, \dots, x_n)) & \text{pour } \frac{1}{2} < x_1 \leq 1. \end{cases}$$

Une fonction  $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a_0)$  peut être vue comme une fonction  $(D^n, \partial D^n, d_0) \longrightarrow (X, A, a_0)$  sachant que l'espace  $I^n/J^{n-1}$  est homéomorphe à  $D^n$ . L'addition de classes  $[f], [g]$  dont le domaine est  $D^n$  devient alors la composée

$$D^n \longrightarrow D^n \vee D^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

où la première fonction affaisse l'équateur en un point.

À l'instar des groupes d'homotopie absolus, on a que si  $A$  est connexe par arcs alors  $\pi_n(X, A, a_0)$  ne dépend pas du point de base  $a_0$ . Il est alors commode d'omettre le point de base dans l'écriture :  $\pi_n(X, A)$ . On dira que la paire  $(X, A)$  est *n-connexe* si  $\pi_k(X, A, a_0)$  est nul pour  $k \leq n$  et tout point de base.

La longue suite exacte en homotopie d'une paire  $(X, A)$  relie les groupes  $\pi_n(X, a_0)$ ,  $\pi_n(A, a_0)$ ,  $\pi_n(X, A, a_0)$  et sa forme est tout-à-fait analogue à celle de la longue suite exacte en homologie. Les applications  $\pi_n(A, a_0) \longrightarrow \pi_n(X, a_0)$ ,  $\pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, a_0)$  sont induites par les inclusions évidentes. L'opérateur de bord

$$\partial : \pi_n(X, A, a_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, a_0)$$

est obtenu en restreignant la fonction  $f$  d'un élément  $[f] \in \pi_n(X, A, a_0)$  à la face  $I^{n-1}$  avec  $x_n = 0$ .

Si l'on voit  $f$  comme une fonction

$$f : (D^n, \partial D^n, d_0) \longrightarrow (X, A, a_0),$$

alors  $\partial : \pi_n(X, A) \longrightarrow \pi_{n-1}(A)$  est obtenu en prenant la restriction de  $f$  à  $\partial D^n = S^{n-1}$ .

**Proposition 1.** *Soit le triplet  $(X, A, a_0)$ . Alors on a la longue suite exacte suivante :*

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(X, a_0) \longrightarrow \pi_n(X, A, a_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(A, a_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(X, x_0) \longrightarrow \cdots$$

*De plus, cette suite exacte est naturelle par rapport aux fonctions entre paires d'espaces.*



Cette suite exacte est fondamentale dans l'étude des groupes d'homotopie. Par exemple, elle permet d'extraire de l'information du groupe  $\pi_n(X, A, a_0)$  à partir des morphismes  $\pi_n(A, a_0) \rightarrow \pi_n(X, a_0)$  induits par l'inclusion. Les groupes  $\pi_n(X, A, a_0)$  sont d'un intérêt particulier pour les CW complexes puisque ceux-ci sont formés à partir de disques  $D^n$ . Une application importante de cette idée est la proposition suivante.

**Proposition 2.** *Soit une fonction  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  avec  $X$  connexe par arcs qui induit des isomorphismes en homotopie en dimension  $\leq n$ . Alors  $f$  induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie (à coefficients dans un groupe quelconque) de dimension inférieure à  $n$  et une surjection en dimension  $n$ .*

On remplace  $Y$  par le *mapping cylinder*  $M_f$  de façon à obtenir une inclusion  $X \rightarrow M_f$ . Le déformation rétractante  $M_f \xrightarrow{r} Y$  induit un isomorphisme en homotopie et la composée  $X \rightarrow M_f \rightarrow Y$  n'est rien d'autre que la fonction  $f$ . On trouve ainsi que l'inclusion  $X \rightarrow M_f$  est un isomorphisme en homotopie jusqu'en dimension  $n$ . On voit par la longue suite exacte en homotopie de la paire  $(M_f, X)$  que les groupes  $\pi_k(M_f, X, x_0)$  sont nuls pour  $k \leq n$ . Pour poursuivre le raisonnement on utilise le lemme suivant.

**Lemme 1.** *Soit  $(A, C)$  une CW paire,  $A$  un CW complexe de dimension  $\leq j$ . Soit  $(W, Z)$  une paire quelconque et  $h : (A, C) \rightarrow (W, Z)$  une fonction. Supposons finalement que  $Z$  est connexe par arcs et que  $\pi_k(W, Z) = 0$  pour  $k \leq j$ . Alors,  $h$  est homotope relativement à  $C$  à une fonction  $h' : (A, C) \rightarrow (Z, Z)$  : ce qui revient à dire que l'homotopie est stable sur  $C$ .*

Voir [6] p. 346 pour la preuve. Afin de terminer la preuve de la proposition 2, il suffit de montrer que  $H_k(M_f, X) = 0$  pour  $k \leq n$  par la longue suite exacte en homologie. Pour s'assurer que cela est plausible, rappelons que l'on peut voir un élément de  $H_k(M_f, X, x_0)$  comme une somme de chaînes dont le bord est dans  $X$ . Notons  $\sigma$  cette somme de chaînes. Par ailleurs, comme le simplexe  $\Delta^k$  est un CW complexe de dimension  $k$ , on peut construire un CW complexe  $A$  représentant  $\sigma$ . Pour ce faire, on utilise une union disjointe  $J := \bigsqcup_i \Delta_i^k$  où l'union est faite sur les chaînes composant  $\sigma$ , ce qui nous permet de définir une fonction continue  $h : J \rightarrow M_f$  donnée par les chaînes. On peut ensuite identifier les faces des  $\Delta_i^k$  qui représentent les mêmes  $k-1$ -chaînes obtenant ainsi un CW complexe  $A$ . Finalement, on a un sous-complexe  $C$  de  $A$  donné par l'ensemble des faces représentées par  $\partial\sigma$ . La fonction

$$h' : (A, C) \rightarrow (M_f, X)$$

est, d'après le lemme précédent, homotope relativement à  $C$  à une fonction  $(A, C) \rightarrow (X, X)$ . Le morphisme associé en homologie  $h'_*$  est donc nul ce qui démontre que  $\sigma$  est dans la classe de l'élément neutre.

Le lemme précédent a aussi comme conséquence le théorème de Whitehead classique qui nous garantit qu'une fonction entre deux CW complexes connexes par arcs  $X$  et  $Y$  est une équivalence homotopique si elle induit des isomorphismes en homotopie en chaque dimension.

## 2.1 Approximation par un CW complexe

L'approximation par un CW complexe d'un espace donné  $B$  est un CW complexe  $A$  ainsi qu'une fonction  $A \rightarrow B$  qui induit des isomorphismes en homotopie pour chaque dimension. Voici donc le théorème principal d'approximation par un CW complexe.

**Théorème 1.** *Pour deux espaces connexes par arcs  $X$  et  $Y$  ainsi qu'une fonction  $f : X \rightarrow Y$ , on peut trouver deux CW complexes  $\Gamma X$ ,  $\Gamma Y$  ainsi que deux fonctions  $g_X : \Gamma X \rightarrow X$ ,  $g_Y : \Gamma Y \rightarrow Y$  puis une fonction  $\Gamma_f : \Gamma X \rightarrow \Gamma Y$  tels que :*

(1) *Les fonctions  $g_X^*$  et  $g_Y^*$  sont des isomorphismes en homotopie pour chaque dimension.*

(2) *Le diagramme suivant commute à homotopie près :  $f \circ g_X$  est homotope à  $g_Y \circ \Gamma_f$ .*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma X & \xrightarrow{g_X} & X \\ \downarrow \Gamma_f & & \downarrow f \\ \Gamma Y & \xrightarrow{g_Y} & Y \end{array} \quad (2.1)$$

*Démonstration.* Voir [10] p.78. □

On a un théorème identique pour les paires  $(X, Y)$  où une approximation par une CW paire  $(A, B)$  signifie que l'on a des fonctions  $A \rightarrow X$ ,  $B \rightarrow Y$  qui sont toutes deux des approximations par un CW complexe. En plus d'être fonctorielle, les CW approximations induisent des isomorphismes en homologie et cohomologie d'après la proposition 2. Ces deux propriétés font en sorte que l'on pourra souvent supposer que l'on travaille avec des CW complexes. L'aspect combinatoire de ces derniers en fait des espaces privilégiés sur lesquels les invariants de la topologie algébrique sont plus faciles à étudier.

Un résultat important sur les fonctions entre CW complexes est le théorème d'approximation cellulaire (sans rapport avec l'approximation par un CW complexe). Une fonction  $f : X \rightarrow Y$  entre deux CW complexes est dite *cellulaire* si elle respecte la



filtration induite par la structure de CW complexe, i.e. si  $f(X^n) \subset Y^n$ . Le théorème d'approximation cellulaire s'énonce alors de la façon suivante.

**Théorème 2.** *Soit  $f : (X, A) \longrightarrow (W, Z)$  une fonction entre deux paires de CW complexes et telle que  $f|_A$  est cellulaire. Alors,  $f$  est homotope relativement à  $A$  à une fonction cellulaire.*

En particulier, une fonction entre deux CW complexes est toujours homotope à une fonction cellulaire.

*Démonstration.* Voir [10] p. 76. □

Une conséquence importante pour le calcul des groupes d'homotopie des CW complexes est le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** *Soit  $X$  un CW complexe. Alors la paire  $(X, X^n)$  est  $n$ -connexe.*

*Démonstration.* Un élément de  $\pi_k(X, X^n, x_0)$  ( $k \leq n$ ) est la classe d'équivalence d'une fonction

$$g : (D^k, \partial D^k, d_0) \longrightarrow (X, X^n, x_0).$$

De plus,  $(D^k, \partial D^k)$  est une CW paire et  $D^k$  est de dimension  $k$ . On peut évidemment supposer que  $d_0$  est une 0-cellule de  $D^k$  et  $x_0$  une 0-cellule de  $X$  de sorte que  $g$  est cellulaire sur le sous-complexe  $d_0$ . Par le théorème d'approximation cellulaire, la fonction  $g|_{\partial D^k}$  est homotope relativement à  $d_0$  à une fonction cellulaire. Par HEP (*homotopy extension property*, [6] p. 14), on peut étendre cette homotopie à tout  $D^k$  obtenant ainsi une fonction dont la restriction à  $\partial D^k$  est cellulaire. En réappliquant encore une fois le théorème 2, on obtient une deuxième homotopie relativement à  $\partial D^k$  dont le résultat est une fonction cellulaire  $h$  sur  $D^k$ . En somme, comme  $k \leq n$ , on a trouvé que  $g$  était homotope relativement à  $d_0$  à une fonction

$$h : (D^k, \partial D^k, d_0) \longrightarrow (X^n, X^n, d_0).$$

On peut maintenant pré-composer cette fonction via une déformation rétractante de  $D^k$  dans  $d_0$  ce qui montre que  $g$  est homotope relativement à  $d_0$  à une fonction constante. □

Avec ce résultat et la longue suite exacte en homotopie, on déduit que l'inclusion  $X^n \longrightarrow X$  du  $n$ -squelette induit des isomorphismes en homotopie jusqu'en dimension  $n - 1$ . Pour l'espace  $S^n$ , le  $(n - 1)$ -squelette est réduit à un point puisque  $S^n$  peut

être construit à partir du disque  $D^n$  dont la frontière est envoyée sur un point. Par conséquent, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Pour un entier  $k < n$ , on a que  $\pi_k(S^n) = 0$ .*

On calculera le premier groupe d'homotopie non trivial de  $S^n$  en utilisant les fibrés ainsi que l'homomorphisme de suspension. Le concept de fibré fera l'objet de la prochaine section.

## 2.2 Fibrés et calcul des groupes d'homotopie de $S^1$

On commence avec la définition d'un fibré.

**Définition 2.** *Un fibré est la donnée d'un quadruplet  $(p, E, B, F)$  où  $E, B$  et  $F$  sont des espaces,  $p : E \rightarrow B$  est une fonction telle qu'il existe un recouvrement ouvert  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  de  $B$  pour lequel  $p^{-1}(U_\alpha)$  est homéomorphe à  $U \times F$  via une fonction qui respecte les fibres, i.e. le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times F \\ \downarrow p & \swarrow & \\ U_\alpha & & \end{array} \quad (2.2)$$

*commute. On dit alors que  $E$  est l'espace total,  $B$  est la base et  $F$  la fibre.*

On dénotera parfois le fibré tout simplement  $p : E \rightarrow B$ . L'appellation fibre pour  $F$  est justifiée par le fait que toutes les fibres  $p^{-1}(b_0)$  sont homéomorphes à  $F$ .

Un des intérêts des fibrés est qu'ils satisfont la propriété du relèvement homotopique relativement aux paires de CW complexes. Autrement dit, pour toute paire de CW complexes  $(X, A)$ , le quadruplet  $(A, X, E, B)$  satisfait la propriété HLEP (voir l'annexe A).

Pour la preuve que les fibrés possèdent cette propriété pour les CW complexes, on se réfère à [6] p. 376. En utilisant cette propriété pour les paires  $(I^n, \partial I^n)$  on peut démontrer sans difficulté le résultat suivant.

**Lemme 2.** *Soit  $p : E \rightarrow B$  un fibré,  $x_0$  un point de  $E$  et  $b_0 = p(x_0)$ . Soit de plus  $F = p^{-1}(b_0) \subset E$ . Alors l'application*

$$p_* : \pi_m(E, F, x_0) \rightarrow \pi_m(B, b_0)$$



est une bijection.

En conséquence, dans le contexte du lemme précédent, les termes  $\pi_m(E, F, x_0)$  de la longue suite exacte de la paire  $(E, F)$  peuvent être substitués par  $\pi_m(B, b_0)$ . La nouvelle longue suite exacte ainsi obtenue permet de relier les groupes d'homotopie de  $F$ ,  $B$  et  $E$ .

Comme application de ce résultat, considérons le fibré  $(p, \mathbb{R}, S^1, \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\})$  où  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  est donné par la fonction  $x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . On remarque que la fibre est effectivement une union disjointe dénombrable de singletons. En appliquant le lemme précédent pour par exemple  $(1, 0) \in S^1$ , on obtient que l'ensemble  $\pi_1(\mathbb{R}, \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}, 0)$  est en bijection avec le groupe  $\pi_1(S^1)$ . Deux fonctions  $f, g$  de la forme  $(I, \{0, 1\}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}, 0)$  sont homotopes si et seulement si  $f(1) = g(1)$ . En effet, le cas échéant, alors  $f$  est homotope à  $g$  par la fonction  $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ . Sinon, il est clair que l'on ne peut avoir une telle homotopie  $F$  car  $F(1, t) \in \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}$  qui est un ensemble discret. Une façon simple de caractériser  $\pi_1(\mathbb{R}, \bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\}, 0)$  est de le faire correspondre avec l'ensemble des fonctions  $(f_z)_{z \in \mathbb{Z}}$  où  $f_z : x \mapsto zx$ . L'ensemble  $\pi_1(S^1)$  est donc constitué des classes d'équivalences  $[pf_z]$ . Finalement, en reparamétrisant au besoin, il n'est pas difficile de voir que  $pf_z \sim zpf_1$  ce qui montre que  $\pi_1(S^1, 0) \simeq \mathbb{Z}$  et est généré par la restriction  $p|_{[0,1]}$ .

La longue suite exacte du fibré nous donne aussi un isomorphisme  $\pi_k(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_k(S^1)$  pour  $k > 1$  puisqu'alors  $\pi_{k-1}(\bigsqcup_{z \in \mathbb{Z}} \{z\})$  est nul. L'espace  $\mathbb{R}$  étant contractile, on déduit que  $\pi_k(S^1) = 0$  si  $k > 1$ . En résumé :

**Proposition 3.** *Le groupe  $\pi_k(S^1)$  vaut*

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Un des outils fondamentaux dans l'étude des groupes d'homotopie de la sphère est le foncteur suspension qui à un espace  $X$  associe la suspension  $\Sigma X$ . Puisque la suspension de  $S^n$  est naturellement homéomorphe à  $S^{n+1}$ , on remarque que ce foncteur pourrait nous donner un moyen de définir une application entre  $\pi_i(S^k)$  et  $\pi_{i+1}(S^{k+1})$ . En fait, pour respecter les points de bases, il convient de remplacer la suspension par la suspension réduite  $S$ . La prochaine section est consacrée à l'homomorphisme de suspension qui permet d'obtenir des isomorphismes

$$\pi_n(S^n) \simeq \pi_{n-1}(S^{n-1}) \simeq \dots \simeq \pi_1(S^1)$$

## 2.3 Excision et suspension

Pour un CW complexe  $X$  avec une 0-cellule  $x_0$ , on définit l'homomorphisme de suspension  $\pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(\Sigma X, (x_0 \times 0))$  comme la composition

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n+1}(CX_+, X, x_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_n(X, x_0) \\ \downarrow & & \\ \pi_{n+1}(SX, CX_-, x_0) & \xleftarrow{\cong} & \pi_{n+1}(SX, x_0) \xleftarrow{\cong} \pi_{n+1}(\Sigma X, (x_0 \times 0)) \end{array} \quad (2.3)$$

où l'on voit  $SX$  comme l'union de deux hémisphères  $CX_+$  et  $CX_-$ , les indices  $+$  et  $-$  différenciant les deux hémisphères. La première fonction est un isomorphisme car  $CX_+$  est contractile. Il en est de même pour la troisième flèche. Le dernier morphisme est induit par le quotient  $\Sigma X \rightarrow SX$  qui affaisse  $x_0 \times I$  en un point. Cette flèche est donc un isomorphisme puisque  $x_0 \times I$  est contractile. Pour mieux nous représenter cette composition, considérons un élément de  $\pi_n(X, x_0)$  comme une fonction

$$f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0).$$

En voyant  $D^{n+1}$  comme  $S^n \times I/S^n \times \{1\}$  (en prenant des sphères de rayons de plus en plus petits par exemple), on voit qu'on peut prendre comme image de l'inverse de  $\partial : \pi_n(X, x_0) \leftarrow \pi_{n+1}(CX_+, X, x_0)$  la fonction

$$f' : S^n \times I/S^n \times \{1\} \rightarrow CX_+$$

induite par  $f$ . Cette fonction  $f'$  vue comme représentant d'un élément de  $\pi_{n+1}(SX, CX_-, x_0)$  est équivalente à la fonction

$$\tilde{f} : S^n \times I/S^n \times \{1\} \rightarrow SX$$

induite par  $f$ . Finalement, la fonction  $S^n \times I/S^n \times \{1\} \rightarrow \Sigma X$  induite par  $f$  est clairement l'image par le quotient  $\Sigma X \rightarrow SX$  de la fonction  $\tilde{f}$  et il s'agit ainsi de l'image de l'homomorphisme de suspension.

Le seule morphisme de cette longue composition qui n'est pas automatiquement un isomorphisme est l'application  $\pi_{n+1}(CX_+, X, x_0) \rightarrow \pi_{n+1}(SX, CX_-, x_0)$  induite par l'inclusion. Le théorème d'excision pour l'homotopie nous garantit sous certaines hypothèses sur la connectivité de  $X$  que cette dernière application est un isomorphisme.

**Théorème 4.** *Soit  $X$  un complexe et  $A, B$  deux sous-complexes tels que  $A \cup B = X$ . Supposons que  $C := A \cap B$  soit connexe par arcs, que  $(A, C)$  soit  $m$ -connexe et finalement que  $(B, C)$  soit  $n$ -connexe. Alors, l'application  $\pi_k(A, C) \rightarrow \pi_k(X, B)$  induite par l'inclusion est un isomorphisme pour  $k < m + n$  et une surjection pour  $k = m + n$ .*



*Démonstration.* Voir [6] p. 360. □

Comme corollaire, on obtient le théorème de suspension de Freudenthal.

**Corollaire 2.** *Soit  $X$  un CW complexe  $n$ -connexe. Alors l'homomorphisme de suspension  $\pi_m(X) \rightarrow \pi_{m+1}(\Sigma X)$  est un isomorphisme pour  $m \leq 2n$  et une surjection pour  $m = 2n + 1$ .*

*Démonstration.* Rappelons qu'il suffit d'étudier l'application

$$\pi_*(CX_+, X, x_0) \rightarrow \pi_*(SX, CX_-, x_0).$$

On prend  $A = CX_+$  et  $B = CX_-$  dans les hypothèses du théorème 4. Un regard sur la longue suite exacte en homotopie de la paire  $(A, X)$  nous assure que celle-ci est  $(n + 1)$ -connexe puisque  $CX_+$  est contractile et  $\pi_k(X) = 0$  pour  $k \leq n$ . Ainsi, le théorème précédent permet de conclure que  $\pi_k(A, X) \rightarrow \pi_k(SX, B)$  est un isomorphisme pour  $k < 2n + 2$  et une surjection en  $k = 2n + 2$  ce qui implique le théorème. □

En utilisant ce théorème avec le résultat  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ , on est en mesure de déterminer  $\pi_n(S^n)$ . Plus précisément, on trouve que  $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2)$  est une surjection et que  $\pi_k(S^k) \rightarrow \pi_{k+1}(S^{k+1})$  est un isomorphisme si  $k > 1$ . L'homologie et la notion du degré d'une fonction  $f : S^n \rightarrow S^n$  permettent de lever l'ambiguïté sur le groupe  $\pi_2(S^2)$ . En effet, on peut montrer qu'il existe des fonctions  $S^n \rightarrow S^n$  de degré arbitraire et donc  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z} = \pi_n(S^n)$ . De plus, les éléments de  $\pi_n(S^n)$  sont en fait uniquement déterminés par leurs degrés. Pour le voir, on utilise la proposition suivante.

**Proposition 4.** *Soit  $f, g$  des fonctions  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  qui représentent deux éléments de  $\pi_n(X)$ . Alors,  $(f + g)_* = f_* + g_*$  en homologie où la première addition est la loi de groupe de  $\pi_n$  et la deuxième est l'addition en homologie.*

*Démonstration.* Notons  $W$  l'espace  $I^n \sqcup I^n$  quotienté par le plan  $x_1 = 1$  d'un cube et le plan  $x_1 = 0$  de l'autre cube. Soit la fonction  $h : I^n \rightarrow W$  obtenue en affaissant le plan  $x_1 = \frac{1}{2}$  et en reparamétrisant comme dans notre définition de l'addition en homotopie. On dénote finalement par  $s$  la fonction quotient  $s : W \rightarrow X$  obtenue à partir de la fonction

$$f \sqcup g : I^n \sqcup I^n \rightarrow X.$$

Aussi, la composition  $I^n \xrightarrow{h} W \xrightarrow{s} X$  n'est rien d'autre que l'addition  $f + g$ . Alors, pour un élément fixé  $\sigma \in H_n(I^n, \partial I^n)$ , on peut écrire  $(f + g)_*(\sigma) = s_* \circ h_*(\sigma)$ . On s'intéresse maintenant à calculer  $h_*(\sigma)$ . Dans ce but, considérons les fonctions quotients

$p_1, p_2 : W \rightarrow I^n$  qui affaissent la première ou la deuxième composante  $I^n$  de  $W$ . On a que  $p_i \circ h$  est homotope à la fonction quotient  $q$  qui affaisse le plan  $x_1 = 1$  ou  $x_1 = 0$  et ainsi  $(p_i \circ h)_*(\sigma) = q_*(\sigma)$ . On sait de plus que

$$H_n(W, \partial W) = H_n(I^n, \partial I^n) \oplus H_n(I^n, \partial I^n),$$

où l'inclusion des composantes est donnée par les morphismes induits par les fonctions  $i_1, i_2 : (I^n, \partial I^n) \rightarrow W$  données par l'inclusion de  $I^n$  dans l'une ou l'autre des composantes de  $I^n \sqcup I^n$  suivie du quotient  $I^n \sqcup I^n \rightarrow W$ . Ainsi, étant donné un élément  $i_{1*}(\gamma) \oplus i_{2*}(\beta)$  de  $H_n(W, \partial W)$ , on voit que l'application  $p_{1*}$  (resp.  $p_{2*}$ ) élimine  $i_{1*}(\gamma)$  (resp.  $i_{2*}(\beta)$ ) et donc  $p_{1*}$  et  $p_{2*}$  agissent comme les projections. Par conséquent, puisque l'on avait  $(p_i \circ h)_*(\sigma) = q_*(\sigma)$ , on trouve que

$$h_*(\sigma) = q_*(\sigma) \oplus q_*(\sigma)$$

et finalement

$$s(q_*(\sigma) \oplus q_*(\sigma)) = s(q_*(\sigma)) + s(q_*(\sigma)) = f(\sigma) + g(\sigma)$$

comme voulu. □

Ce résultat et le fait que  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$  nous assurent que l'application  $\pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  donnée par le degré est un isomorphisme. Comme conséquence, on déduit que l'identité  $S^n \rightarrow S^n$  génère la composante  $\mathbb{Z}$  de  $\pi_n(S^n)$  étant donné qu'il s'agit d'un homéomorphisme, donc d'une fonction de degré  $\pm 1$ .

Sous un autre point de vue, en appliquant la suspension telle qu'expliquée précédemment, on observe que la suspension de la fonction identité  $S^n \rightarrow S^n$  nous donne un générateur  $(D^{n+1}, \partial D^{n+1}) \rightarrow (S^{n+1}, s_0)$  de  $\pi_{n+1}(S^{n+1})$ . Ce générateur identifie  $D^{n+1}/S^n$  à  $S^{n+1}$  en voyant ces deux espaces comme construits à partir de  $S^n \times I$  en affaissant une ou deux extrémités. Le but de cette observation est de voir qu'il est possible d'écrire la suspension d'un élément quelconque  $f : S^k \rightarrow S^n$  de  $\pi_k(S^n)$  en l'étendant à  $(D^{k+1}, S^k) \rightarrow (D^{n+1}, S^n)$  et en appliquant par la suite le générateur  $(D^{n+1}, S^n) \rightarrow (S^{n+1}, s_0)$ .



# Chapitre 3

## Fibration

Les fibrations sont des fonctions fondamentales en homotopie. En homologie, notre capacité à déterminer les groupes repose fortement sur la longue suite exacte en homologie et sur le succès de l'excision qui se traduit par l'équivalence  $\tilde{H}_n(X, A) \simeq \tilde{H}_n(X/A)$ . Il suffit pour l'homologie que l'on ait un voisinage de  $A$  qui se déforme dans  $A$ . Dans un tel contexte, on pourrait donc dire que la fonction  $A \hookrightarrow X$  est compatible avec l'homologie. Pour ce qui est de l'homotopie, l'excision (4) n'est valide que sous des hypothèses très strictes et donc la longue suite exacte en homotopie est souvent incomplète. Une autre suite exacte est néanmoins accessible. Elle apparaît à partir des fibrations et c'est pourquoi l'on dit que les fibrations sont les objets naturels en homotopie. On se consacre dans cette section à développer brièvement les points élémentaires de la théorie des fibrations qui seront les objets de prédilection de la suite spectrale de Serre.

**Définition 3.** Une fonction  $p : E \rightarrow B$  est une fibration si pour tout espace  $X$ , étant donné une homotopie  $f_t : X \rightarrow B$  et un relèvement  $\tilde{f} : X \rightarrow E$  de  $f_0 : X \rightarrow B$ , il existe un relèvement  $\tilde{f}_t$  de  $f_t$  avec  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ . L'espace  $E$  est alors appelé l'espace total et  $B$ , la base.

De façon équivalente, une fonction  $p : E \rightarrow B$  est une fibration si elle a la propriété du relèvement homotopique pour tout espace  $X$  (i.e.  $(E, B, X)$  a la propriété HLP selon l'annexe A). En particulier, cette propriété avec  $X = D^n$  (pour tout  $n$ ) implique cette même propriété pour toutes les paires de CW complexes  $(A, C)$  et on peut alors montrer comme dans le lemme 2 qu'on a un isomorphisme naturel

$$\pi_n(E, p^{-1}(b_0), x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$$

où  $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ . Pour une fibration, lorsque  $B$  est connexe par arcs, chaque fibre  $p^{-1}(b_0)$  est homotopiquement équivalente. Aussi, on note souvent  $F$  la fibre indépendamment

de  $b_0$ . La longue suite exacte des groupes d'homotopie prend alors la forme suivante :

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0. \quad (3.1)$$

Il sera intéressant pour la suite de voir comment apparaît l'équivalence homotopique entre deux fibres au-dessus de deux points connectés par un arc. C'est l'objet de la prochaine proposition.

**Proposition 5.** *Soit  $p : E \longrightarrow B$  une fibration et  $b_1, b_2$  deux points de  $B$  connectés par un arc  $\gamma : I \longrightarrow B$ . Alors  $F_1 = p^{-1}(b_1)$  est homotopiquement équivalent à  $F_2 = p^{-1}(b_2)$ .*

*Esquisse de preuve.* On considère l'homotopie  $\omega_t : F_1 \longrightarrow B$  donnée par  $\omega_t(x) = \gamma(t)$ . La fonction  $\omega_0$  admet un relèvement évident, à savoir l'inclusion  $F_1 \hookrightarrow E$ . En relevant cette homotopie, on aboutit à une fonction  $\tilde{\omega}_1 : F_1 \longmapsto F_2$  qui est une équivalence homotopique. Pour une preuve de cette affirmation voir [6].  $\square$

**Remarque 1.** *Cette dernière propriété des fibrations met en contraste ce concept avec celui de fibré. Tandis que les fibres d'un fibré sont nécessairement homéomorphes, il peut advenir que les fibres d'une fibration soient uniquement équivalentes homotopiquement. Il existe plusieurs exemples simples de fibration n'ayant pas des fibres homéomorphes. Cependant, tout fibré dont la base est paracompacte est une fibration selon un théorème de Huebsch et Hurewicz dont une démonstration est présentée dans le livre Algebraic topology de Spanier (1966).*

Un autre concept important est celui de produit fibré.

**Définition 4.** *Étant donné une fibration  $p : E \longrightarrow B$  et une fonction  $g : D \longrightarrow B$ , on définit le produit fibré  $E \times_B D$  comme l'ensemble  $\{(e, d) \in E \times D : g(d) = p(e)\}$ .*

On obtient alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} E \times_B D & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow g \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \quad (3.2)$$

La projection  $E \times_B D \longrightarrow D$  est une fibration. Pour le vérifier, on se donne une homotopie  $f_t : X \longrightarrow D$  et un relèvement  $\tilde{f}_0 : X \longrightarrow E \times_B D$ . La deuxième coordonnée de l'homotopie  $\tilde{f}_t$  est évidemment l'homotopie  $f_t$ . Pour obtenir la première coordonnée, on considère l'homotopie composée  $X \xrightarrow{f_t} D \xrightarrow{g} B$ . La composée  $X \xrightarrow{\tilde{f}_0} E \times_B D \longrightarrow E$



est un relèvement de  $g \circ f_0$ . On peut donc relever cette homotopie et ceci nous donne la première coordonnée.

On termine avec une autre construction importante. De façon générale, on peut transformer une fonction  $f : X \rightarrow B$  en une fibration  $p : X_f \rightarrow B$  où  $X_f$  est un espace qui se déforme sur  $X$  et la fonction  $f$  se factorise selon le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} X_f & \xrightarrow{p} & B \\ \uparrow \iota & \nearrow f & \\ X & & \end{array} \quad (3.3)$$

Plus précisément,  $X_f$  est le sous-ensemble de toutes les paires  $(x, \gamma) \in X \times B^I$  avec  $\gamma(0) = f(x)$ . On rappelle que  $B^I$  est l'espace des fonctions continues de  $I$  dans  $B$  doté de la topologie dite "compact-ouvert". L'inclusion  $\iota : X \hookrightarrow X_f$  est tout simplement donnée par des chemins constants de valeurs  $f(x)$  et la fibration  $p$  par  $p(x, \gamma) = \gamma(1)$ . L'espace  $X_f$  se déforme en  $X$  en rétrécissant les chemins  $\gamma$  par les fonctions  $\gamma_i(t) = \gamma((1-i)t)$ ,  $i \in [0, 1]$ .

Si on utilise cette technique pour transformer une fonction  $p : X \rightarrow B$  qui est déjà une fibration, alors il n'est pas difficile de montrer que l'inclusion  $X \rightarrow X_p$  est une équivalence homotopique de fibrations : on peut trouver une fonction  $g : X_p \rightarrow X$  telle que les compositions  $X_p \xrightarrow{g} X \rightarrow X_p$  et  $X \rightarrow X_p \xrightarrow{g} X$  sont homotopes à l'identité via une homotopie qui respecte les fibres.

Ce résultat nous amène à étudier les suites de fibrations. Soit une fibration  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} B$  que l'on transforme en une fibration équivalente  $F_p \rightarrow X_p \rightarrow B$  avec  $F_p$  homotopiquement équivalent à  $F$ . On a que la fonction  $F_p \rightarrow X$  donnée par la projection est aussi une fibration. En effet, il s'agit tout simplement de la fibration du produit fibré  $\{b_0\}_i \times_B X \rightarrow X$  où  $b_0$  est le point par rapport auquel la fibre  $F$  est prise et  $\{b_0\}_i$  est la fibration construite à partir de l'inclusion  $i : b_0 \rightarrow B$ . Explicitement,  $\{b_0\}_i$  est tout simplement l'espace des chemins débutant en  $b_0$ . On vérifie par inspection que la nouvelle fibre est  $\Omega B$  : l'espace des boucles de  $B$  (avec point de base  $b_0$ ). On a donc obtenu la séquence  $\Omega B \rightarrow F \rightarrow X \rightarrow B$ . Il sera parfois plus pratique de travailler avec la deuxième fibration :  $\Omega B \rightarrow F \rightarrow X$ .

L'altération d'une fonction en fibration est très utile. Une première application nous permet d'approximer un CW complexe  $X$ , de façon heuristique, par des produits tordus d'espace d'Eilenberg-MacLane. La notion de produit tordu vient du fait que pour une fibration  $p : E \rightarrow B$  telle que  $B$  est localement contractile, on peut trouver une

trivialisation de  $B$  : des ouverts  $U_\alpha$  qui recouvrent  $B$  et pour lesquels  $p^{-1}(U_\alpha)$  est homotopiquement équivalent (au sens des fibrations) au produit  $U_\alpha \times F$ . Ainsi, on a une version homotopique du produit tordu des fibrés. Il nous faut maintenant parler des espaces d'Eilenberg-MacLane et du procédé d'approximation qui passe par la construction d'une tour de Postnikov.

### 3.1 Tour de Postnikov

Soit  $X$  un CW complexe connexe par arcs, de sorte que les groupes d'homotopie ne dépendent pas du point de base. On construit une tour d'approximations  $X_n$  de  $X$  de la forme suivante :

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 X_{n+1} \\
 \downarrow \\
 X_n \\
 \downarrow \\
 \vdots \\
 \downarrow \\
 X_1
 \end{array}
 \quad (3.4)$$

$X$

$\nearrow$        $\searrow$

Les espaces  $X_n$  que l'on cherche à obtenir doivent être tels que  $X$  est naturellement inclus dans  $X_n$  et cette inclusion induit des isomorphismes  $\pi_k(X) \simeq \pi_k(X_n)$  pour  $k \leq n$ . Les  $X_n$  ont de plus la propriété que  $\pi_k(X_n) = 0$  pour  $k > n$ . Ces espaces peuvent donc être vus comme des approximations de plus en plus fines de  $X$ . On remarque que pour  $X_1$  tous les groupes d'homotopies sont nuls à l'exception possiblement de  $\pi_1(X_1) = \pi_1(X)$ .  $X_1$  est un espace  $K(\pi_1(X), 1)$ , aussi appelé espace d'Eilenberg-MacLane. Plus généralement, un espace est  $K(G, n)$  pour un groupe  $G$  et un entier  $n$  si le seul groupe d'homotopie non trivial est en dimension  $n$  et est isomorphe à  $G$ .

Revenons à la construction de  $X_n$ . Dans un premier temps, observons que le théorème 2 nous assure que chaque élément de  $\pi_{n+1}(X, x_0)$  admet comme représentant une fonction cellulaire  $f : (S^{n+1}, s_0) \rightarrow (X^{n+1}, x_0)$ . Ainsi, on peut attacher à  $X$  des cellules de dimension  $n + 2$  de façon à éliminer le  $(n + 1)$ -ième groupe d'homotopie de  $X$  (avec point de base une 0-cellule  $x_0$ ). Pour ce, considérons un élément non nul de ce



groupe, i.e. la classe d'une fonction  $f : (S^{n+1}, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ . On peut attacher une nouvelle cellule de dimension  $n + 2$  par une fonction cellulaire homotope relativement à  $s_0$  à  $f$ . Le nouvel espace ainsi obtenu aura la propriété que  $[f] = 0$ , l'homotopie étant donnée par la composition d'une contraction dans  $D^{n+2}$  de  $(S^{n+1}, s_0)$  en  $s_0$  avec la fonction caractéristique de la cellule. En appliquant ce procédé simultanément pour chaque générateur de  $\pi_{n+1}(X, x_0)$ , on obtient un CW complexe  $Z_1$  dont le  $(n + 1)$ -squelette est  $X^{n+1}$  et dont chaque fonction  $f : S^{n+1} \rightarrow X \subset Z_1$  est nulle. Aussi, étant donné la surjection de  $\pi_{n+1}(X, x_0)$  sur  $\pi_{n+1}(Z_1, x_0)$  on trouve que  $\pi_{n+1}(Z_1) = 0$ . On recommence ce processus avec  $Z_1$  afin d'éliminer le groupe d'homotopie de dimension  $n + 2$ , créant ainsi  $Z_2$ , puis  $Z_3$ , etc. Par induction, on construit ainsi l'espace  $X_n$ , un CW complexe potentiellement de dimension infinie. L'inclusion de  $X$  dans  $X_n$  donne les isomorphismes voulus puisque  $X$  et  $X_n$  ont le même  $(n + 1)$ -squelette. En effet, comme  $\pi_k(X, X^{n+1}) = \pi_k(X_n, X^{n+1}) = 0$  pour  $k \leq n$  par le corollaire 1, la conclusion souhaitée suit de la longue suite exacte des groupes d'homotopie des paires  $(X, X^{n+1})$  et  $(X_n, X^{n+1})$ . De la même façon, comme  $Z_k$  et  $X_n$  ont par construction le même  $(n + k + 1)$ -squelette, on voit que  $\pi_m(X_n) = 0$  si  $m > n$ .

On organise maintenant l'ensemble des approximations grâce à des fonctions  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  que l'on va construire de façon à obtenir le diagramme commutatif présenté ci-haut qui justifie l'appellation de "tour". Pour obtenir les fonctions  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  on étend à  $X_{n+1}$  la fonction identité  $X_{n+1} \supset X \xrightarrow{Id} X \subset X_n$  en la définissant sur le  $(n + 3)$ -squelette de  $X_{n+1}$ , puis sur le  $(n + 4)$ -squelette et ainsi de suite. Une fonction ainsi obtenue sera continue sur chaque squelette et donc globalement continue. Considérons la fonction caractéristique  $\phi : (D^{n+3}, S^{n+2}) \rightarrow (X_{n+1}, X)$  d'une cellule de dimension  $n + 3$  dans  $X_{n+1}$ . Clairement, la composée  $f\phi : S^{n+2} \rightarrow X^n$  est homotopiquement nulle puisque  $\pi_{n+2}(X_n) = 0$ . Via l'identification de  $S^{n+2} \times I / S^{n+2} \times \{1\}$  avec  $D^{n+3}$ , on peut voir cette homotopie comme une fonction de  $D^{n+3}$  dans  $X_n$  telle que la restriction à  $\partial D^{n+3} = S^{n+2}$  est  $f\phi$ . Cette fonction définit l'application voulue sur la cellule considérée. On étend ainsi  $f$  sur toutes les  $(n + 3)$  cellules et par induction le raisonnement se poursuit en dimension supérieure.

On a vu plus tôt comment obtenir à partir d'une fonction continue quelconque  $f : X \rightarrow B$  une fibration  $X_f \rightarrow B$ . Appliquons cette méthode à la fonction  $X_2 \rightarrow X_1$  d'une tour de Postnikov pour  $X$ . Ceci a pour effet de transformer  $X_2$  en, disons,  $X'_2$ . On a encore une inclusion  $X \hookrightarrow X'_2$  qui satisfait les mêmes propriétés déjà discutées et les groupes d'homotopie de  $X'_2$  sont nuls en dimension plus grande que deux. En effet, cela découle du fait que  $X'_2$  est homotopiquement équivalent à  $X_2$  via l'inclusion.

Finalement, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X'_2 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X_1 \end{array} \quad (3.5)$$

est préservée, étant induite par la commutativité du diagramme de la fibration en (2).

Cette même méthode fonctionne aussi pour la composée  $X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X'_1$ . En poursuivant de cette façon on obtient une nouvelle tour de Postnikov pour  $X$  où chaque fonction  $X_{n+1} \rightarrow X_n$  est une fibration. La longue suite exacte d'une fibration, présentée en (1), nous permet de calculer les groupes d'homotopie des fibres  $F_n$  des fibrations  $X_{n+1} \rightarrow X_n$ . Pour  $k \leq n-1$ , on a les isomorphismes  $\pi_{k+1}(X_{n+1}) \rightarrow \pi_{k+1}(X_n)$  et  $\pi_k(X_{n+1}) \rightarrow \pi_k(X_n)$ ; par conséquent la portion de la suite exacte qui nous intéresse a la forme

$$\pi_{k+1}(X_{n+1}) \rightarrow \pi_{k+1}(X_n) \xrightarrow{0} \pi_k(F_n) \xrightarrow{0} \pi_k(X_{n+1}) \rightarrow \pi_k(X_n).$$

On en déduit que  $\pi_k(F) = 0$  si  $k \leq n-1$ . Remarquons qu'il y a une différence quand  $k = 0$ , car certains des ensembles ne sont plus des groupes, mais on peut y donner un sens tout de même, de sorte que  $\pi_0(F_n) = 0$ . On justifie du même coup l'omission des points de base. Pour  $k = n$ , la situation est semblable avec cependant  $\pi_{n+1}(X_n) = 0$ , ce qui permet de tirer la même conclusion, soit  $\pi_n(F_n) = 0$ . Pour  $k > n+1$  tous les groupes dans la portion intéressante de la suite sont nuls et donc il n'y a qu'en dimension  $n+1$  où le groupe d'homotopie de  $F_n$  est possiblement non nul :

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_{n+1}(F_n) \rightarrow \pi_{n+1}(X_{n+1}) \rightarrow 0.$$

Bref,  $F_n$  est un  $K(\pi_{n+1}(X_{n+1}), n+1)$ . Par conséquent, on peut heuristiquement voir  $X_2$  comme un produit tordu d'un  $K(\pi_1(X), 1)$  avec un  $K(\pi_2(X), 2)$ , puis  $X_3$  comme un produit tordu de  $X_2$  avec un  $K(\pi_3(X), 3)$  et donc aussi un produit tordu de  $K(G, n)$  par induction, etc.

La tour de Postnikov permet d'éliminer les groupes d'homotopie supérieurs d'un CW complexe. Une deuxième décomposition réalise en quelque sorte l'inverse : celle de Cartan-Serre-Whitehead. Considérons  $X_1$ , le premier espace construit dans une tour de Postnikov pour  $X$ . Comme on l'a mentionné,  $X_1$  est un  $K(\pi_1(X), 1)$ . On transforme l'inclusion  $X \hookrightarrow K(\pi_1(X), 1)$  en une fibration  $X' \rightarrow K(\pi_1(X), 1)$  dont la fibre est notée  $\tilde{X}_2$ . Pour  $k > 1$ , la longue suite exacte de la fibration nous donne immédiatement des isomorphismes  $\pi_k(X) \simeq \pi_k(\tilde{X}_2)$ . On trouve de plus que  $\pi_k(\tilde{X}_2) = 0$  si  $k < 2$  car  $X' \rightarrow K(\pi_1(X), 1)$  induit un isomorphisme sur  $\pi_1$ . Comme  $\tilde{X}_2$  est simplement connexe



et que  $\pi_2(\tilde{X}_2) = \pi_2(X)$ , on a une inclusion  $\tilde{X}_2 \hookrightarrow K(\pi_2(X), 2)$  qui peut s'obtenir comme lorsqu'on a développé le deuxième espace de la tour de Postnikov pour  $\tilde{X}_2$ . Il est donc possible de poursuivre par induction cette méthode : on obtient des espaces  $\tilde{X}_n$  avec  $\tilde{X}_n$   $n$ -connexe et  $\pi_k(\tilde{X}_n) \simeq \pi_k(X)$  pour  $k > n$ . Il s'agit ainsi, d'une certaine façon, de l'inverse d'une tour de Postnikov. On résume la construction par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \dots \\
 & & \searrow \\
 & & \tilde{X}'_2 \\
 & \nearrow & \searrow \\
 \tilde{X}_2 & \longrightarrow & K(\pi_2(X), 2) \\
 & \searrow & \\
 & X' & \\
 & \nearrow & \searrow \\
 X & \longrightarrow & K(\pi_1(X), 1)
 \end{array} \tag{3.6}$$

## Deuxième partie

### Suite spectrale de Serre

# Chapitre 4

## Théorème de Serre et suite spectrale en homologie

Le concept de suite spectrale fut introduit par Leray en 1946. Serre utilisa dans sa thèse ce nouvel outil pour étudier l'homologie d'une fibration, ce qui lui permit d'effectuer une percée sans égale dans le calcul des groupes d'homotopie de la sphère. La suite spectrale est avant tout un outil algébrique qui est maintenant utilisé dans plusieurs autres domaines. Il n'est donc pas étonnant qu'en elle-même la suite spectrale soit insuffisante : il faudra allier ce cadre de calcul à des théorèmes de nature topologique afin de pouvoir l'utiliser dans l'étude de l'homologie d'une fibration. Formellement, la suite spectrale est une série de pages, chacune composée d'un tableau bidimensionnel dont le nombre d'entrées est a priori indexé par  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . La première page est l'initialisation. Les arguments d'entrées qu'on y place dépendent du problème mais dans tous les cas on passe d'une page à la suivante en prenant l'homologie de complexes différentiels formés des entrées de ladite page. Avant de passer à la construction générale d'une suite spectrale, nous tournons notre attention vers le cas particulier de la suite spectrale de Serre pour une fibration, ce qui permettra de motiver les futures définitions.

Pour une fibration  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} B$  avec  $B$  un CW complexe, on a une filtration naturelle de la base  $\cdots \supset B^p \supset B^{p-1} \supset \cdots$  où comme toujours  $B^p$  dénote le  $p$ -squelette de  $B$ . Cette filtration en induit une sur l'espace total  $X$  en prenant  $X_p = p^{-1}(B^p)$ . On sait exactement comment se servir de la filtration naturelle d'un CW complexe  $B$  pour calculer les groupes d'homologie à coefficients dans un groupe  $G$  implicite. En effet,

considérons le complexe différentiel suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_n(B^n) & & H_{n-1}(B^{n-1}) \\
 & \nearrow \partial & & \searrow j & \\
 H_{n+1}(B^{n+1}, B^n) & \longrightarrow & H_n(B^n, B^{n-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(B^{n-1}, B^{n-2}) \\
 & & \nearrow \partial & & \searrow j
 \end{array}$$

où  $\partial$  et  $j$  sont les morphismes de la longue suite exacte des groupes d'homologie.

Le  $n$ -ième groupe d'homologie de  $B$  est alors le groupe d'homologie de cette section du complexe différentiel, aussi appelé homologie cellulaire. Sachant que  $H_k(B^k, B^{k-1})$  est isomorphe à une somme directe, indicée par les  $k$ -cellules de  $B$ , de groupes  $G$ , on peut obtenir le  $k^e$  groupe d'homologie de  $B$  en étudiant le degré des fonctions par lesquelles les  $k$ -cellules sont attachées. Cette méthode permet dans nombre de cas de connaître l'homologie d'un CW complexe.

Il s'agirait maintenant d'induire cette technique à la filtration

$$\cdots \supset X_p \supset X_{p-1} \supset \cdots$$

de l'espace total  $X$ . On voudrait pouvoir déterminer  $H_n(X)$  à partir de  $H_n(X_p, X_{p-1})$ , puisqu'il sera possible d'identifier ces termes en fonction de l'homologie de  $B$  et  $F$ , dévoilant ainsi un lien entre l'homologie des trois espaces formant une fibration. Évidemment, pour ce qui est du calcul de  $H_n(X)$  via les groupes  $H_n(X_p, X_{p-1})$ , la situation n'est plus aussi claire que pour l'homologie cellulaire du CW complexe  $B$ . Dans un premier temps, il nous faut remplacer le complexe différentiel ci-dessus par un cadre algébrique plus général : la suite spectrale. Cette suite spectrale sera composée de plusieurs pages, ou itérations, dont la première contient le complexe différentiel de l'homologie cellulaire. Néanmoins, il est complètement faux pour la filtration induite  $X_p$  que le groupe d'homologie au niveau de  $H_n(X_n, X_{n-1})$  est égal à  $H_n(X)$ . La suite spectrale donnera un lien beaucoup moins direct : on aura plutôt de l'information sur une certaine filtration de  $H_n(X)$ , et ce, après plusieurs itérations. Ce sera suffisant pour déduire certaines propriétés clés de la structure de groupe de  $H_n(X)$ . Ainsi, dans la suite de cette section, on développe la suite spectrale en gardant comme objectif et motivation la suite spectrale de la filtration par les espaces  $X_p$  associée à une fibration  $F \rightarrow X \rightarrow B$ .

Comme il vient d'être mentionné, le premier complexe différentiel de la suite spectrale de Serre est calqué sur l'homologie cellulaire. Posons

$$E_{p,n}^1 = H_n(X_p, X_{p-1}),$$

puis

$$A_{p,n}^1 = \begin{cases} H_n(X_p) & \text{pour } n \geq 0, \\ 0 & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$



avec la convention que  $X_p = \emptyset$  si  $p$  est négatif. On a ainsi les homomorphismes de la longue suite exacte en homologie

$$E_{p,n}^1 \xrightarrow{\partial} A_{p-1,n-1}^1, \quad A_{p,n}^1 \xrightarrow{j} E_{p,n}^1, \quad A_{p,n}^1 \xrightarrow{i} A_{p+1,n}^1,$$

( $i$  étant induit par l'inclusion) pour tout  $p$  et  $n$ . Il s'agit d'un léger abus de notation que de noter  $i, \partial$  et  $j$  ces morphismes indépendamment de  $p$  et  $n$  mais aucune ambiguïté n'en résultera. Pour aller à la page suivante de la suite spectrale, on passe aux groupes d'homologie du complexe différentiel formé des compositions  $E_{p,n}^1 \xrightarrow{j\partial=d} E_{p-1,n-1}^1$ .

C'est là un cas particulier de suite spectrale. En général, pour avoir une suite spectrale, il suffirait que l'on ait des groupes donnés  $A_{p,n}^1$  et  $E_{p,n}^1$  et des morphismes  $E_{p,n}^1 \rightarrow A_{p-1,n-1}^1$ ,  $A_{p,n}^1 \rightarrow E_{p,n}^1$  et  $A_{p,n}^1 \rightarrow A_{p+1,n}^1$  tels qu'on ait les suites exactes suivantes :

$$\cdots \rightarrow E_{p,n}^1 \rightarrow A_{p-1,n-1}^1 \rightarrow A_{p,n-1}^1 \rightarrow E_{p,n-1}^1 \rightarrow \cdots$$

ce qui correspond tout simplement à la longue suite exacte en homologie pour le cas particulier où  $E_{p,n}^1 = H_n(X_p, X_{p-1})$  et  $A_{p,n}^1 = H_n(X_p)$ .

Écrivons  $E_{p,n}^2$  pour le groupe  $\ker(d)/\text{im}(d)$  en  $E_{p,n}^1$  où l'on rappelle que  $d = j\partial$ . On pose de plus  $A_{p,n}^2 = i(A_{p-1,n}^1)$ . Ces groupes forment les composantes de la deuxième page et il est maintenant possible d'obtenir un nouveau complexe différentiel. Pour cela, on conserve d'abord la fonction  $A_{p,n}^2 \xrightarrow{i_2} A_{p+1,n}^2$  induite par la fonction  $i$ . Pareillement, on définit  $E_{p,n}^2 \xrightarrow{\partial_2} A_{p-1,n-1}^2$  tout simplement par  $\partial_2[e] = \partial(e)$  où  $[e]$  dénote la classe de  $e$  dans le groupe quotient  $\ker(d)/\text{im}(d)$ . Cette application ne dépend clairement pas du choix de  $e$  puisque  $\partial\partial = 0$ . L'image d'un élément de  $\ker(d)$  par  $\partial$  est dans l'image de  $i$  par la suite exacte garantie par les hypothèses. L'application est ainsi bien définie. Finalement,  $j_2 : A_{p,n}^2 \rightarrow E_{p-1,n}^2$  est obtenue par  $j_2(a) := j(b)$  pour  $a \in A_{p,n}^2$  et  $b \in A_{p-1,n}^1$  tel que  $i(b) = a$ . Le choix de  $b$  est sans conséquence puisque si  $i(c) = i(b)$  alors  $b$  diffère de  $c$  d'un élément  $\partial e$  mais  $\partial e$  est zéro dans  $E^2$ . L'élément  $j(b)$  est clairement dans  $\ker(d)$  car  $\partial j = 0$ . Tout comme à la première page, ces groupes sont liés par une longue suite exacte :

$$\cdots \rightarrow E_{p,n}^2 \xrightarrow{\partial_2} A_{p-1,n-1}^2 \xrightarrow{i_2} A_{p,n-1}^2 \xrightarrow{j_2} E_{p-1,n-1}^2 \rightarrow \cdots$$

L'exactitude de cette suite est un exercice de chasse au diagramme. On peut maintenant itérer ce procédé et produire l'une après l'autre les pages de la suite spectrale. À la  $s^e$  page, on a donc par induction la suite exacte suivante :

$$\cdots \rightarrow E_{p,n}^s \xrightarrow{\partial_s} A_{p-1,n-1}^s \xrightarrow{i_s} A_{p,n-1}^s \xrightarrow{j_s} E_{p-s+1,n-1}^s \rightarrow A_{p-s,n-2}^s \rightarrow \cdots$$

Si l'on prend l'exemple trivial d'une fibration  $pt \rightarrow B \rightarrow B$  avec  $B$  un CW-complexe on obtient comme première page le complexe différentiel de l'homologie cellulaire et on remarque que toutes les pages suivantes sont identiques et contiennent  $H_n(B)$  à l'entrée  $E_{n,n}^r$ . Ce phénomène de stabilité ou de convergence se produit en fait dans le cas d'une fibration quelconque. En général, pour être assuré que la suite spectrale converge, on ajoute l'hypothèse que pour chaque entier  $n$ , il y a seulement un nombre fini de fonctions  $i : A_{p,n}^1 \rightarrow A_{p+1,n}^1$  qui ne sont pas des isomorphismes. Bref, les groupes  $A_{p,n}^1$  se stabilisent pour  $p$  assez grand en valeur absolue. Il est évident que dans l'exemple précédent cette hypothèse est satisfaite puisque  $H_n(B^p) \rightarrow H_n(B^{p+1})$  est un isomorphisme dès que  $p \geq n + 1$  et on a posé  $A_{p,n}^1 = 0$  si  $p$  est négatif.

Le résultat précis de convergence est le suivant : si l'hypothèse précédente sur les fonctions  $A_{p,n}^1 \rightarrow A_{p+1,n}^1$  est réalisée, alors pour tout  $p, n$  il existe un  $N$  tel que si  $r, s \geq N$  alors  $E_{p,n}^r = E_{p,n}^s$ . C'est clair puisque la condition discutée est équivalente à dire que pour  $n$  fixé,  $E_{p,n}^1$  est non nul un nombre fini de fois. Sachant que les différentiels  $d_r = j_r \partial_r$  à la  $r^e$  page se déplacent d'une unité en la seconde coordonnée et de  $r$  en la première coordonnée, on constate que pour  $p$  et  $n$  fixés et  $r$  suffisamment grands, les différentielles entrant et sortant de  $E_{p,n}^r$  proviennent de et atteignent des groupes nuls. On utilise alors les trois notations naturelles  $E_{p,n}^\infty$ ,  $A_{\infty,n}^1$  et  $A_{-\infty,n}^1$  pour les différentes limites. La suite spectrale d'une fibration possède une propriété additionnelle cruciale : les groupes  $A_{p,n}^1 = H_n(X_p)$  sont 0 pour  $p$  suffisamment petit ( $p < 0$ ). Dans ce cas de figure, on peut calculer dans une certaine mesure les groupes  $E_{p,n}^\infty$ .

**Proposition 6.** *Dans la situation précédente,*

$$E_{p,n}^\infty = \text{im}(A_{p,n}^1 \rightarrow A_{\infty,n}^1) / \text{im}(A_{p-1,n}^1 \rightarrow A_{\infty,n}^1)$$

où il est compris que l'application est la composition des  $i$  autant de fois que nécessaire pour atteindre la stabilité.

*Démonstration.* On fixe  $p$  et  $n$ . Rappelons qu'on a la suite exacte suivante à la  $s^e$  page :

$$\cdots \rightarrow E_{p+s-1,n+1}^r \xrightarrow{\partial_s} A_{p+s-2,n}^r \xrightarrow{i_s} A_{p+s-1,n}^s \xrightarrow{j_s} E_{p,n}^s \rightarrow A_{p-1,n-1}^s \rightarrow \cdots$$

Par induction, le groupe  $A_{q,m}^r$  est tout simplement  $i^r(A_{q-r+1,m}^1)$ . Par conséquent, le terme  $A_{p-1,n-1}^s$  est nul si  $s$  est assez grand pour que  $p - s$  soit négatif. On déduit alors de la suite exacte que le groupe  $E_{p,n}^s$  est isomorphe au quotient

$$A_{p+s-1,n}^s / i(A_{p+s-2,n}^s) = i^s(A_{p,n}^1) / i^{s+1}(A_{p-1,n}^1).$$

En prenant  $s$  assez grand on obtient aisément le résultat. □



On notera dorénavant l'image  $\text{im}(A_{p,n}^1 \longrightarrow A_{\infty,n}^1)$  par  $F_n^p$ .

Nous reportons maintenant notre intérêt sur la suite spectrale d'une fibration. Il nous faut vérifier l'hypothèse clef que  $H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X_{p+1})$  est un isomorphisme pour  $p$  assez grand. Il est donc suffisant de montrer que  $H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X)$  est un isomorphisme pour  $p > n$ . Pour ce, on fera usage du résultat de base suivant.

**Proposition 7.** *Soit  $(X, A)$  une paire  $n$ -connexe. Alors  $H_i(X, A) = 0$  pour  $i \leq n$ .*

Il s'agit du résultat de la proposition 2. Si l'on peut démontrer que la paire  $(X, X_p)$  est  $p$ -connexe, on aura grâce à cette proposition que  $H_n(X, X_p) = 0$  pour  $n \leq p$  et ainsi, au moyen de la longue suite exacte, que  $H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X)$  est un isomorphisme pour  $p > n$ . Soit  $[f] \in \pi_n(X, X_p, x_\alpha)$  avec

$$f : (D^n, \partial D^n, d_0) \longrightarrow (X, X_p, x_\alpha).$$

Alors,  $[pf] \in \pi_n(B, B^p, p(x_\alpha))$  et on sait que la paire  $(B, B^p)$  est toujours  $p$ -connexe. Ainsi, il existe une homotopie

$$G := g_t : (D^n, \partial D^n, d_0) \longrightarrow (B, B^p, p(x_\alpha))$$

avec  $g_0 = pf$  et  $g_1(D^n) \subset B^p$ . On peut aussi imposer que cette homotopie soit stable sur  $\partial D^n$  par le "compression criterion" ([6] p. 343). La fonction  $f$  sur  $D^n \cup \partial D^n \times I$  est trivialement un relèvement de  $G$  sur cet ensemble. Ce relèvement peut être complété sur tout  $D^n \times I$  puisqu'une fibration est en particulier une fibration de Serre, i.e. on peut relever des homotopies sur les paires de CW complexes. De ces remarques il est apparu que  $\pi_n(X, X_p, x_\alpha) = 0$  pour tout point de base et  $n \leq p$ . D'après le résultat cité précédemment appliqué à la paire  $(X, X_p)$ , on a que  $H_n(X, X_p) = 0$  si  $n \leq p$ .

Lorsqu'on applique la suite spectrale à une fibration, on a donc que  $E_{p,n}^\infty$  est isomorphe à

$$\text{im}(H_n(X_p) \longrightarrow H_n(X)) / \text{im}(H_n(X_{p-1}) \longrightarrow H_n(X)) = F_n^p / F_n^{p-1}.$$

De plus, puisque  $H_n(X, X_n) = 0$ , l'inclusion  $H_n(X_n) \longrightarrow H_n(X)$  est une surjection et de ce fait on obtient la filtration suivante de  $H_n(X)$  :

$$0 \subset F_n^0 \subset \cdots \subset F_n^n = H_n(X).$$

En calculant les groupes limites  $E^\infty$  on obtient donc de l'information sur  $H_n(X)$  et il s'agit là de l'information indirecte que nous donne la suite spectrale. Le théorème de Serre nous donnera un lien entre l'homologie de la base, de la fibre et des groupes  $E_{p,n}^2$ . En général, on tentera par la suite de poursuivre ce lien jusqu'à  $E^\infty$  pour enfin remonter à  $H_n(X)$  grâce à la filtration. Le tout est dans l'optique de relier l'homologie des trois espaces.

## 4.1 Théorème de Serre

On a vu comment le complexe différentiel de l'homologie cellulaire pouvait se généraliser à la filtration  $X_p$  d'une fibration par la suite spectrale. La dernière étape à franchir est de voir comment les techniques pour calculer les  $H_n(B^n, B^{n-1})$  et les différentiels  $j\partial$  dans le cas de l'homologie cellulaire peuvent se généraliser à la filtration  $X_p$ . Il s'agit en fait de calculer les termes  $E_{p,n}^2$  en déterminant d'abord  $H_n(X_p, X_{p-1})$  et les différentiels  $j\partial$ . Comme on l'a déjà expliqué, les groupes  $H_n(B^p, B^{p-1})$  peuvent s'obtenir aisément dans le cas cellulaire en remarquant que  $B^p/B^{p-1}$  est un bouquet de sphères  $S^p$ . On peut induire cette façon de faire à  $X_p$  grâce à la propriété centrale des fibrations et c'est le point de départ du résultat de cette section. Ce résultat dû à Serre établit donc le lien crucial entre les groupes d'homologie de l'espace total, de la base et de la fibre.

**Théorème 5.** *Soit  $F \rightarrow X \xrightarrow{\pi} B$  une fibration avec  $B$  simplement connexe. Alors, pour la suite spectrale en homologie (à coefficients dans un groupe  $G$ ) associée à la filtration  $X_p$ , on a  $E_{p,p+q}^2 = H_p(B; H_q(F; G))$ .*

*Esquisse de preuve.* La preuve présentée suit celle de [7], on se permet donc d'omettre certains éléments. On commence à la première page avec les groupes

$$E_{p,p+q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}).$$

Les groupes  $H_{p+q}(B^p, B^{p-1})$  sont bien compris : ils sont isomorphes à la somme directe  $\bigoplus_{\alpha \in I} H_{p+q}(D^p, \partial D^p; G)$  où  $I$  indice les cellules  $e_\alpha^p$  de dimension  $p$ . Dans le cas où  $q = 0$  on a déjà fait remarquer qu'on obtient alors

$$H_p(B^p, B^{p-1}; G) = \bigoplus_{\alpha \in I} G,$$

et chaque composante  $G$  de la somme directe est l'image de l'application

$$H_p(D^p, \partial D^p; G) \rightarrow H_p(B^p, B^{p-1}; G)$$

induite par la fonction caractéristique  $c_\alpha$  de la cellule correspondante.

On note pour la suite  $\tilde{D}_\alpha^p$  le produit fibré  $(X \times_B D^p)_\alpha$  de la fonction caractéristique  $D^p \xrightarrow{c_\alpha} B^p$ . On note aussi  $\tilde{S}_\alpha^{p-1}$  les points de  $\tilde{D}_\alpha^p$  au-dessus de  $S^{p-1} = \partial D^p$ . On obtient de façon analogue au cas cellulaire des isomorphismes

$$\bigoplus_{\alpha \in I} H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) \rightarrow H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$$

induits par les projections  $\tilde{D}_\alpha^p \rightarrow X$ . Le calcul de  $H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1})$  est modelé sur celui de  $H_{p+q}(D^p, \partial D^p)$ . On présente donc une technique convenable pour calculer ces



groupes. On considère pour cela la décomposition suivante où  $D_+^{p-1}$  est l'hémisphère nord (sud avec  $-$ ) de la sphère  $S^{p-1}$  :

$$H_{p+q}(D^p, \partial D^p) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(S^{p-1}, D_+^{p-1}) \xleftarrow{i_*} H_{p+q-1}(D_-^{p-1}, S^{p-2}) = H_{p+q-1}(D^{p-1}, \partial D^{p-1})$$

Le premier morphisme est l'homomorphisme connecteur de la longue suite exacte en homologie du triplet  $(D^p, S^{p-1}, D_+^{p-1})$ . Puisque  $D^p$  se déforme dans  $D_+^{p-1}$ , les groupes  $H_k(D^p, D_+^{p-1})$  sont nuls et ainsi l'homomorphisme connecteur de la suite exacte est un isomorphisme. La deuxième application est induite par l'inclusion où  $S^{p-2}$  est l'équateur de  $S^{p-1}$  et donc la frontière de  $D_+^{p-1}$ . En écrivant  $S^{p-1}$  comme l'union  $D_+^{p-1} \cup D_-^{p-1}$ , on déduit au moyen du théorème d'excision en homologie pour les paires de CW complexes que cette application est un isomorphisme. Il s'agit d'une méthode pour calculer l'homologie  $H_n(D^n, \partial D^n)$  par induction puisque l'on a réduit la dimension de 1 via des isomorphismes. Au final, on trouve un isomorphisme  $H_{p+q}(D^p, \partial D^p) \rightarrow H_q(d_0)$  pour un certain point  $d_0$  dans  $D^p$ .

Cette technique fonctionne aussi pour  $H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1})$ . On considère donc la même décomposition pour  $\tilde{D}_\alpha^p$ . Premièrement, la déformation rétractante de  $D^p$  dans  $D_+^{p-1}$  est une homotopie  $r_t : D^p \rightarrow D^p$  avec  $r_0 = id$ . La composition à gauche de cette homotopie par la projection  $\tilde{D}_\alpha^p \rightarrow D^p$  nous donne une deuxième homotopie. Par ailleurs, on a un relèvement  $id : \tilde{D}_\alpha^p \rightarrow \tilde{D}_\alpha^p$  évident de la fonction initiale de cette deuxième homotopie. Celle-ci admet ainsi un relèvement  $f_t : \tilde{D}_\alpha^p \rightarrow \tilde{D}_\alpha^p$  avec  $f_1(\tilde{D}_\alpha^p) \subset \tilde{D}_{\alpha,+}^{p-1}$ . L'homotopie  $f_t$  donne une équivalence homotopique des paires  $(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{D}_{\alpha,+}^{p-1})$  et  $(\tilde{D}_{\alpha,+}^{p-1}, \tilde{D}_{\alpha,+}^{p-1})$ , ce qui montre que le premier morphisme de la longue composition est un isomorphisme.

Pour ce qui est de l'application  $i_*$ , le théorème d'excision était applicable pour  $(D_+^{p-1}, D_-^{p-1})$  car il existe un voisinage  $V$  de  $D_+^{p-1}$  qui se déforme dans ce dernier espace. En considérant l'ouvert correspondant à  $V$  dans  $\tilde{S}_\alpha^{p-1}$ , on s'assure en relevant la déformation rétractante comme précédemment que l'excision est aussi applicable pour  $(\tilde{D}_+^{p-1}, \tilde{D}_-^{p-1})$ . Bref, on obtient l'isomorphisme  $H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1}) = H_q(\tilde{d}_0)$  et on observe que  $\tilde{d}_0$  est simplement la fibre  $F_\alpha \subset X$  au-dessus de  $c_\alpha(d_0)$ . Pour terminer la construction de l'isomorphisme, on se rappelle qu'on a, selon la proposition 5, que chaque fibre  $F_\alpha$  est homotopiquement équivalente à une fibre fixée  $F$  puisque  $B$  est connexe par arcs. On a donc des isomorphismes  $H_q(F_\alpha) \rightarrow H_q(F)$  pour chaque  $\alpha$ . En somme, on obtient des isomorphismes

$$\theta_{p,q} : H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \simeq \bigoplus_{\alpha \in I} H_q(F)$$

où les composantes  $H_q(F)$  sont en correspondance avec les cellules de dimension  $p$ .

On remarque que jusqu'ici les isomorphismes considérés étaient naturels : notre décomposition de  $H_{p+q}(\tilde{D}_\alpha^p, \tilde{S}_\alpha^{p-1})$  est réalisée par des compositions de l'opérateur de

bord  $\partial$  et des morphismes  $i_*$  induits par l'inclusion. Néanmoins, on semble effectuer un choix d'isomorphisme  $H_q(F_\alpha) \rightarrow H_q(F)$  puisque cette équivalence provient du choix d'un arc  $\gamma$  joignant  $\pi(F_\alpha)$  à  $\pi(F)$ . Sachant que  $B$  est simplement connexe, deux arcs coïncidant aux extrémités sont homotopes. On montre au cours de la preuve de la proposition 5 que deux relèvements obtenus de deux arcs homotopes sont homotopes. Ainsi, peu importe le choix de l'arc, on trouve une équivalence homotopique  $F_\alpha \rightarrow F$  qui induit en homologie toujours le même isomorphisme. Les isomorphismes

$$H_q(F_\alpha) \rightarrow H_q(F)$$

sont donc en quelque sorte canoniques. De plus, si on a une homotopie

$$f_t : D_\alpha^p \rightarrow B^p$$

avec  $f_0 = c_\alpha$ , alors on peut relever cette homotopie à  $\tilde{D}_\alpha^p \rightarrow X$  (même technique que précédemment) et on remarque que la fonction  $\tilde{f}_1$  restreint à  $F_\alpha$  est l'équivalence homotopique donnée par l'arc  $f_t|_{d_0}$ . Si on note  $F'$  la fibre où  $F_\alpha$  est envoyé par  $\tilde{f}_1$ , on trouve que la composition  $H_q(F_\alpha) \xrightarrow{\tilde{f}_1^*} H_q(F') \rightarrow H_q(F)$  (le dernier morphisme étant donné par un arc joignant  $\pi(F')$  et  $\pi(F)$ ) est identique à l'isomorphisme

$$H_q(F_\alpha) \rightarrow H_q(F),$$

car les deux applications représentent un arc joignant  $\pi(F_\alpha)$  à  $\pi(F)$ . On a donc que ces isomorphismes entre l'homologie des fibres sont compatibles avec les relèvements d'homotopie  $D^p \rightarrow B$ .

Rappelons qu'en homologie cellulaire, le groupe  $H_q(B; H_q(F))$  se calcule en prenant l'homologie (au milieu) du complexe

$$\oplus_{e_\beta^{p+1}} H_q(F) \xrightarrow{j\partial} \oplus_{e_\alpha^p} H_q(F) \xrightarrow{j\partial} \oplus_{e_\gamma^{p-1}} H_q(F).$$

Pour une composante  $H_q(F)$  correspondant à une cellule fixée  $e_\beta^m$ , l'application  $j\partial$  de cette composante à une autre composante correspondant à une cellule  $e_\gamma^{m-1}$  est donnée par la multiplication par le degré de la fonction  $S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$  obtenue en restreignant  $c_\beta$  à  $S^{m-1}$  et en prenant le quotient  $B^{m-1}/B^{m-1} - e_\gamma^{m-1}$ .

Étant donné les isomorphismes que l'on a obtenus pour  $E_{p,q}^1$ , il suffit de montrer que les dérivations  $d_1$  agissent de la même façon sur les composantes  $H_q(F)$  que l'opérateur  $j\partial$  de l'homologie cellulaire de  $B$ .

La dérivation  $d_1$  d'un élément de  $H_q(F)$  d'une cellule  $e_\omega$  s'obtient par la composition

$$H_{p+q}(\tilde{D}_\omega^p, \tilde{S}_\omega^{p-1}) \rightarrow H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(X_{p-1}) \xrightarrow{j} H_{p+q-1}(X_{p-1}, X_{p-2})$$



appliquée à un élément de  $H_{p+q}(\tilde{D}_\omega^p, \tilde{S}_\omega^{p-1})$  qui correspond, sous la décomposition dont on a discuté, à un élément  $H_q(F_\omega)$  qui est envoyé sur l'élément initial de  $H_q(F)$ . On peut calculer cette composition via l'application

$$H_{p+q}(\tilde{D}_\omega^p, \tilde{S}_\omega^{p-1}) \xrightarrow{\partial} H_{p+q-1}(\tilde{S}_\omega^{p-1}).$$

L'idée générale ensuite est de normaliser la fonction attachante  $S^{p-1} \rightarrow B^{p-1}$  de la cellule  $e_\omega$  par une homotopie de façon à obtenir une fonction qui envoie une collection finie de disques ouverts  $D^m$  ( $m = 1, \dots, k$ ) homéomorphiquement sur une cellule fixée  $e_\gamma$  de dimension  $p-1$  et le complément de ces disques est envoyé à l'extérieur de cette cellule. Le degré de la fonction attachante de  $e_\omega$  dans la cellule  $e_\gamma$  correspond alors à la somme des degrés des homéomorphismes. En effet, on peut étudier l'image d'un élément de  $H_*(S^{p-1})$  par les applications

$$H_*(S^{p-1}) \rightarrow H_*(S^{p-1}, S^{p-1} - D^m) \leftarrow H_*(D^m, \partial D^m)$$

de façon à réduire le problème à l'étude des  $k$  homéomorphismes  $D^m \rightarrow e_\gamma$ . On utilise la même technique pour  $\tilde{S}_\omega^{p-1}$  : on relève d'abord l'homotopie et on utilise la naturalité des isomorphismes  $\theta_{p,q}$  et  $\theta_{p-1,q}$  discutée ci-haut afin de calculer les applications

$$H_{p+q-1}(\tilde{D}^m, \partial \tilde{D}^m) \rightarrow H_{p+q-1}(\tilde{D}_\gamma^{p-1}, \tilde{S}_\gamma^{p-2})$$

et ainsi on obtient l'action de  $d_1$  entre la composante  $e_\omega$  et la composante  $e_\gamma$ .  $\square$

Il sera davantage pratique d'utiliser la notation  $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$  dans la suite, celle-ci étant compatible avec le théorème de Serre.

Il sera aussi souvent utile dans les applications de considérer la forme relative de la suite spectrale de Serre. Soit une paire de CW-complexe  $(B, C)$  avec  $B$  au moins connexe par arcs et une fibration  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} B$ . On note  $A = p^{-1}(C)$  et on s'intéresse au lien entre les groupes  $H_n(F; G)$ ,  $H_n(X, A; G)$  et  $H_n(B, C; G)$ . Dans ce but, considérons la suite spectrale avec

$$A_{p,n-p}^1 = H_n(X_p \cup A, A), \quad E_{p,n-p}^1 = H_n(X_p \cup A, X_{p-1} \cup A).$$

De façon tout à fait analogue au cas absolu, les groupes  $E_{*,*}^1$  mesurent la différence entre les groupes  $A_{*,*}^1$  dans le sens où l'on a la longue suite exacte pour les triplets d'espaces  $(X_n \cup A, X_{n-1} \cup A, A)$ . La convergence est garantie comme précédemment par le fait que  $(X, X_n \cup A)$  est  $n$ -connexe. La preuve du théorème de Serre se généralise immédiatement. En effet, comme  $C$  est un sous-complexe, on peut utiliser l'excision pour déduire que  $H_n(B^p \cup C, B^{p-1} \cup C; G)$  est isomorphe à l'homologie d'un bouquet de sphères de dimension  $p$  indexée par les cellules de  $B^p$  n'appartenant pas à  $C$ . On a ainsi



un complexe différentiel d'homologie cellulaire nous permettant de calculer  $H_n(B, C; G)$  et les différentielles s'obtiennent encore via le degré des fonctions des cellules n'étant pas dans  $C$ . Bref, si  $\pi_1(B) = 0$ , la même preuve permet de conclure que

$$E_{p,q}^2 = H_p(B, C; H_q(F; G)).$$

Comme dernière remarque sur ce théorème de Serre, on peut remplacer l'hypothèse que la base  $B$  est simplement connexe par la condition que l'action du groupe fondamental de  $B$  sur  $H_*(F)$  est triviale. Étant donnée une boucle, on obtient grâce à la proposition 5 une équivalence homotopique  $F \rightarrow F$  qui induit un isomorphisme  $H_*(F) \rightarrow H_*(F)$ . On exige donc que cet isomorphisme soit l'identité.

## 4.2 Classe de Serre et théorème de Hurewicz généralisé

On se souvient que la suite spectrale de Serre procure de l'information sur les quotients successifs des éléments d'une certaine filtration de  $H_n(X)$ . Cependant, il n'est pas toujours possible d'inférer quelque chose sur un groupe en ayant uniquement de l'information sur un sous-groupe ou groupe quotient. C'est pourquoi il est important de considérer certaines propriétés qui sont conservées lorsqu'on effectue des opérations sur les groupes telles le quotient. Dans cette perspective, on introduit le concept de classe de Serre  $\mathfrak{C}$ . Il s'agit d'une classe de groupes abéliens satisfaisant les axiomes suivants :

1. Pour une courte suite exacte  $0 \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow 0$ ,  $A$  et  $C$  sont dans  $\mathfrak{C}$  si et seulement si  $B$  est dans  $\mathfrak{C}$ .
2. Si  $A$  et  $B$  sont dans  $\mathfrak{C}$ , alors  $A \otimes B \in \mathfrak{C}$  et  $Tor(A, B) \in \mathfrak{C}$ .
3. Si  $A \in \mathfrak{C}$ , alors  $H_n(K(A, 1); \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}$  pour  $n > 0$ .

La première propriété est la stabilité par rapport aux quotients et aux sous-groupes dont il était question. La deuxième est faite sur mesure pour le théorème des coefficients universels en homologie :

$$H_n(X; G) = H_n(X; \mathbb{Z}) \otimes G \oplus Tor(H_{n-1}(X; \mathbb{Z}), G).$$

On observe donc que  $G \in \mathfrak{C}$ ,  $H_n(X; \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}$  et  $H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}$  implique que  $H_n(X; G) \in \mathfrak{C}$ . Cette remarque est cruciale étant donné l'identification des termes  $E^2$  obtenue par le théorème de Serre. On comprend alors que ces classes ont été pensées pour être compatibles avec la suite spectrale de Serre. En ce qui concerne l'axiome **3**, on remarque

que, *a priori*, il n'est pas immédiat que les groupes d'homologie d'un espace  $K(G, n)$  ne dépendent pas du choix particulier de l'espace. En fait, on peut démontrer grâce au théorème de Whitehead que deux CW complexes  $K(G, n)$  sont toujours homotopiquement équivalents (voir [6] p. 366). Pour un espace  $K(G, n)$  qui n'est pas un CW complexe, il suffit alors d'approximer cet espace par un CW complexe et de faire appel à la proposition 2. On est ainsi assuré que chaque espace  $K(G, n)$  possède, pour  $G$  et  $n$  fixé, les mêmes groupes d'homologie.

Dans certains cas, on aura besoin d'un axiome plus fort que l'axiome **2**, à savoir :

**4.** Si  $A \in \mathfrak{C}$ , alors  $A \otimes B \in \mathfrak{C}$  pour tout groupe abélien  $B$ .

On prend pour acquis qu'une classe de Serre satisfait **1-3** et on précisera si l'axiome **4** est requis.

Donnons quelques exemples de classes de Serre qui seront utiles :

- La classe  $\mathfrak{C}_{TF}$  des groupes abéliens de type fini.
- La classe  $\mathfrak{C}_P$  où  $P$  est un ensemble de premiers et  $\mathfrak{C}_P$  est formée des groupes abéliens où chaque élément est d'ordre un entier premier à tous les éléments de  $P$ .
- La classe  $\mathfrak{C}'_P$  des groupes finis dans  $\mathfrak{C}_P$ .

$\mathfrak{C}_{TF}$  satisfait clairement l'axiome **1**. La première partie de l'axiome **2** est aussi aisément vérifiée. De plus, les propriétés élémentaires du foncteur  $Tor$  suffisent pour déduire que  $Tor(A, B)$  est de type fini si  $A$  et  $B$  le sont (voir [6]). La propriété **4** n'est pas respectée. Finalement, l'axiome **3** est vrai pour  $\mathfrak{C}_{TF}$  mais la justification demande davantage de travail. On reporte cette discussion à la section 4.3 ainsi qu'au chapitre 6 (p. 48). On dira finalement qu'un morphisme de groupe  $f : G \rightarrow H$  est un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme si  $\ker(f) \in \mathfrak{C}$  et que  $\text{coker}(f) = H/\text{im}(f) \in \mathfrak{C}$ .

Comme principale application de la suite spectrale de Serre, on a un résultat de toute importance pour la suite puisqu'il établit un lien fondamental entre l'homologie et l'homotopie. De plus, comme on le sait, l'homologie est plus simple à calculer.

Ce lien commence avec une application entre le groupe d'homotopie et d'homologie d'un espace appelé morphisme de Hurewicz. On prendra pour la suite l'homologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . On considère une paire quelconque  $(X, A)$  et on fixe un générateur  $\sigma$  de  $H_n(D^n, \partial D^n; \mathbb{Z})$ . Un élément de  $\pi_n(X, A, x_0)$  est la classe d'une fonction  $f : (D^n, \partial D^n, d_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . On peut donc définir l'application

$$\rho : \pi_n(X, A) \mapsto H_n(X, A)$$

$$[f] \mapsto [f_*(\sigma)]$$



Le fait que cette application est un homomorphisme suit de la proposition 4.

On aimerait définir cette même application dans le cas absolu de sorte que les applications induites entre les deux longues suites exactes commutent. Plus particulièrement, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ H_n(X, A, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A, \mathbb{Z}) \end{array}$$

commute. À cette fin, on définit  $\rho : \pi_{n-1}(A) \mapsto H_{n-1}(A; \mathbb{Z})$  par  $\rho([f]) := [f_*(\partial\sigma)]$  pour  $\sigma$  un générateur de  $H_n(D^n, \partial D^n, \mathbb{Z})$  et  $f \in \pi_{n-1}(X)$  vu comme fonction  $(\partial D^n, d_0) \mapsto (X, x_0)$ . Clairement,  $\partial\sigma$  est un générateur de  $H_n(S^{n-1}; \mathbb{Z})$  et on a  $[f_*(\partial\sigma)] = [\partial f_*(\sigma)]$  ce qui montre que le diagramme commute.

Le morphisme de Hurewicz est évidemment naturel puisque  $(fg)_* = f_*g_*$ . On est fin prêt à énoncer le théorème fondamental suivant.

**Théorème 6** (Théorème de Hurewicz mod  $\mathbb{C}$ ). *Soit  $X$  un espace topologique simplement connexe avec  $\pi_i(X) \in \mathbb{C}$  pour  $i < n$ ,  $n > 1$ . Alors  $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$  est un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme.*

Si  $\mathbb{C}$  est réduit au groupe nul on retrouve le théorème de Hurewicz dans sa forme originale. La preuve du théorème se fera par induction. L'étape de base requiert un résultat élémentaire à l'effet que  $\pi_1(X) \xrightarrow{\rho} H_1(X)$  est un isomorphisme si  $\pi_1(X)$  est abélien. En fait, on en sait plus : pour un espace  $X$  connexe par arcs,  $\pi_1(X) \xrightarrow{\rho} H_1(X)$  a pour noyau le sous-groupe engendré par les commutateurs. Le raisonnement inductif de la preuve est assez typique de ceux que l'on fera avec la suite spectrale de Serre. On utilise d'abord l'espace des lacets  $\Omega X$  pour diminuer la dimension de 1 en homotopie et ainsi appliquer l'hypothèse d'induction pour ensuite remonter jusqu'à  $X$  (en homologie) via la fibration de l'espace des chemins  $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ . Par exemple, supposons que l'on veuille déterminer l'homologie des espaces  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . On sait que si l'on applique le foncteur  $\Omega$  à un espace  $K(\mathbb{Z}, 2)$  on obtient un  $K(\mathbb{Z}, 1)$ , un espace qui est faiblement homotope à  $S^1$ . On connaît donc l'homologie de  $\Omega K(\mathbb{Z}, 2)$ . On emploie la suite spectrale sur la fibration  $K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow PK(\mathbb{Z}, 2) \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  et on est en mesure grâce au théorème de Serre de déterminer l'homologie d'un  $K(\mathbb{Z}, 2)$ .

*Démonstration.* On fait la supposition que  $X$  est un CW complexe, quitte à prendre une approximation par un CW complexe, ce qui est compatible avec le morphisme de Hurewicz puisque celui-ci est naturel et l'approximation par un CW complexe induit



des isomorphismes en homologie. On traitera l'étape de base, le cas  $n = 2$ , et l'étape d'induction simultanément. Supposons donc le théorème vrai en dimension  $\leq n-1$ . Soit la fibration de l'espace des chemins  $\Omega X \rightarrow PX \xrightarrow{p} X$  avec  $x_0$  comme point de base. En vertu des remarques sur le morphisme de Hurewicz, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(X, x_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_n(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\Omega X) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ H_n(X, x_0) & \xleftarrow{p_*} & H_n(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(\Omega X) \end{array} \quad (4.1)$$

où il est compris que le morphisme de Hurewicz de gauche est la version relative qui est bien entendu équivalente.

On suppose que  $\pi_2(X) = 0$  si  $n > 2$  et on réduira le cas général à ce cas particulier par la suite. Puisqu'on a  $\pi_k(\Omega X) = \pi_{k+1}(X)$ ,  $\Omega X$  est simplement connexe et satisfait les autres conditions du théorème de sorte que l'hypothèse d'induction s'applique. Ainsi,  $\pi_{n-1}(\Omega X) \xrightarrow{\rho} H_{n-1}(\Omega X)$  est un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme. Pour  $n = 2$ , le groupe  $\pi_1(\Omega X) = \pi_2(X)$  est abélien et donc le résultat préliminaire nous donne un isomorphisme de Hurewicz  $\pi_1(\Omega X) \xrightarrow{\rho} H_1(\Omega X)$ .

Comme  $PX$  est contractile, les longues suites exactes en homologie et en homotopie permettent de conclure que les deux applications  $\partial$  sont des isomorphismes. De plus, pour toute fibration  $F \rightarrow E \rightarrow B$  on a un isomorphisme  $\pi_n(E, F) \xrightarrow{\sim} \pi_n(B, b_0)$ , ce qui implique que l'application en haut à gauche du diagramme (4.1) est un isomorphisme. Il suffit maintenant de montrer que l'application du bas à gauche est aussi un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme pour conclure qu'il en est de même pour le morphisme de Hurewicz à gauche. C'est là qu'intervient la suite spectrale de Serre. Remarquons que l'on utilise dans cet argument le fait que les  $\mathbb{C}$ -isomorphismes se comportent bien par rapport à la composition, ce qui se démontre aisément.

Considérons la suite spectrale relative de la fibration pour la paire  $(PX, \Omega X)$  avec des coefficients entiers. Comme toujours, on débute l'analyse à la deuxième page où le portrait est le suivant.

- $E_{p,q}^2 = H_p(X, x_0; H_q(\Omega X; \mathbb{Z}))$  car  $X$  est simplement connexe, de sorte que le théorème de Serre s'applique. Il est alors immédiat que  $E_{p,q}^2 = 0$  pour  $p = 0$ . Pour  $p = 1$ , on a que  $H_1(X, x_0; G) = 0$  pour tout groupe  $G$  puisque  $(X, x_0)$  est 1-connexe.
- $E_{p,q}^2 \in \mathbb{C}$  si  $1 \leq p \leq n-1$  et  $1 \leq q \leq n-2$ . En effet, on a par induction que  $H_q(\Omega X; \mathbb{Z}) \in \mathbb{C}$  pour  $0 < q < n-1$ . De la même façon, l'induction nous donne que  $H_k(X; \mathbb{Z}) \in \mathbb{C}$  pour  $k < n-1$  et le morphisme de Hurewicz est un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme en dimension  $n-1$ . Aussi, comme  $\pi_{n-1}(X) \in \mathbb{C}$ , on trouve en effet que  $H_{n-1}(X; \mathbb{Z}) \in \mathbb{C}$ .

Pour terminer ce raisonnement, on fait appel aux propriétés d'une classe de Serre qui nous assurent qu'on a alors  $H_p(X; H_q(\Omega X; \mathbb{Z})) \in \mathfrak{C}$ .

Les pages de la suite spectrale sont tournées en prenant certains quotients de certains sous-groupes des  $E_{p,q}^2$ . Ainsi, comme les classes de Serre sont closes par rapport à ces opérations, il est clair que lorsque  $E_{p,q}^2 \in \mathfrak{C}$ , il est aussi vrai que  $E_{p,q}^r \in \mathfrak{C}$  pour  $r > 2$ . En particulier, on a dans cette situation que  $E_{p,q}^\infty \in \mathfrak{C}$ . On peut se servir de cette information en considérant la filtration de  $H_n(PX, \Omega X, \mathbb{Z})$  :

$$0 = F_n^{-1} \subset F_n^0 = E_{0,n}^\infty \subset \dots \subset F_n^n = H_n(PX, \Omega X, \mathbb{Z})$$

Selon les remarques précédentes, on a que  $E_{k,n-k}^\infty = F_n^k / F_n^{k-1} \in \mathfrak{C}$  pour  $k < n$ . Comme le groupe 0 est dans  $\mathfrak{C}$ , on peut remonter cette filtration grâce à la propriété sur les courtes suites exactes de groupes dans  $\mathfrak{C}$  afin d'en déduire que  $F_n^{n-1} \in \mathfrak{C}$ . Le résultat voulu que l'on tire de cette démarche est que la projection  $H_n(PX, \Omega X; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{n,0}^\infty$  est un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme.

On a une inclusion  $E_{n,0}^\infty \hookrightarrow E_{n,0}^2$  puisque les différentielles atteignant les groupes  $E_{n,0}^r$  pour  $r > 1$  proviennent de groupes réduits à 0, ceux-ci ayant une deuxième coordonnée négative ( $q < 0$ ). Le passage de  $E_{n,0}^r$  à  $E_{n,0}^{r+1}$  se fait donc en conservant le noyau, sans quotienter, d'où l'inclusion ci-dessus. Chaque inclusion  $E_{n,0}^r \hookrightarrow E_{n,0}^{r+1}$  est un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme puisque le conoyau de l'application est un sous-groupe de  $E_{n-r,r-1}^r$  qui est dans  $\mathfrak{C}$ .

En résumé, la composée

$$H_n(PX, \Omega X; \mathbb{Z}) \rightarrow E_{n,0}^\infty \hookrightarrow E_{n,0}^2$$

est un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme. Le diagramme commutatif suivant élucide en partie le lien entre la suite spectrale de la fibration et le morphisme  $H_n(PX, \Omega X) \rightarrow H_n(X, x_0)$  :

$$\begin{array}{ccc} H_n(PX, \Omega X) & \xrightarrow{p_*} & H_n(X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ E_{n,0}^\infty & \xrightarrow{p_*} & E'_{n,0}{}^\infty \\ \downarrow i & & \downarrow \simeq \\ E_{n,0}^2 & \xrightarrow{p_*} & E'_{n,0}{}^2 \end{array} \quad (4.2)$$

où les termes  $E'$  proviennent de la suite spectrale relative de la fibration triviale  $x_0 \rightarrow X \rightarrow X$  pour la paire  $(X, x_0)$ . Cette dernière suite spectrale est tout simplement le complexe différentiel de l'homologie cellulaire, ce qui explique les différents



isomorphismes de droite : la suite spectrale est stable après la deuxième page. Les applications entre les termes  $E$  et  $E'$  sont induites par la fonction  $p$  puisque celle-ci respecte la filtration dans le sens où  $p_*(X_p) \subset B_p$ . On a donc une application bien définie entre les deux suites spectrales qui se prolongent à chaque page car  $p_*$  commute avec les différentielles. La commutativité du diagramme est claire étant donné que les applications  $p_*$  proviennent ultimement de la fonction  $C(PX; \mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} C(X; \mathbb{Z})$  et que tous les termes de la suite spectrale sont construits à partir des chaînes. Il nous faut montrer que la fonction horizontale du bas est un isomorphisme. On aurait alors, sachant que

$$H_n(PX, \Omega X; \mathbb{Z}) \longrightarrow E_{n,0}^\infty \hookrightarrow E_{n,0}^2$$

est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme, que

$$p_* : H_n(PX, \Omega X) \longmapsto H_n(X, x_0)$$

est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme. Ce résultat intermédiaire que l'on souhaite démontrer est vrai pour une fibration quelconque.

**Lemme 3.** *Soit  $F \rightarrow (X, A) \xrightarrow{p} (B, C)$  une fibration. Alors, dans le contexte du diagramme (4.2) où  $E'$  dénote les termes de la suite spectrale de la fibration triviale  $pt \rightarrow (B, C) \rightarrow (B, C)$ ,  $E_{n,0}^2 \rightarrow E_{n,0}'^2$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H_{n+1}(X_{n+1} \cup A, X_n \cup A) & \xrightarrow{d} & H_n(X_n \cup A, X_{n-1} \cup A) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(X_{n-1} \cup A, X_{n-2} \cup A) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \downarrow p_* \\ H_{n+1}(B_{n+1} \cup C, B_n \cup C) & \xrightarrow{d} & H_n(B_n \cup C, B_{n-1} \cup C) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(B_{n-1} \cup C, B_{n-2} \cup C) \end{array}$$

Il est suffisant de montrer que les morphismes verticaux sont des isomorphismes afin de déduire que tel est le cas pour  $E_{k,0}^2 \rightarrow E_{k,0}'^2$ . En retournant à la preuve du théorème de Serre, on retrouve le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_n(X_n \cup A, X_{n-1} \cup A) & \longleftarrow & H_n(\coprod_\alpha \tilde{D}_\alpha^n, \coprod_\alpha \partial \tilde{D}_\alpha^n) \\ \downarrow p_* & & \downarrow \\ H_n(B_n \cup C, B_{n-1} \cup C) & \longleftarrow & H_n(\coprod_\alpha D_\alpha^n, \coprod_\alpha \partial D_\alpha^n) \end{array}$$

avec des isomorphismes à l'horizontal et où on se restreint aux cellules  $e_\alpha^n$  n'étant pas dans  $C$ . On peut donc se limiter à montrer que  $H_n(\tilde{D}_\alpha^n, \partial \tilde{D}_\alpha^n) \rightarrow H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$  est un isomorphisme. Dans ce but, on considère, comme dans la preuve du théorème de Serre, le diagramme commutatif entre les décompositions

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\tilde{D}_\alpha^n, \partial \tilde{D}_\alpha^n) & \longleftarrow & H_{n-1}(\tilde{S}_\alpha^{n-1}, \tilde{D}_\alpha^+) & \dots & H_0(F_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \longleftarrow & H_{n-1}(S_\alpha^{n-1}, D_\alpha^+) & \dots & H_0(pt_\alpha) \end{array}$$



Le dernier morphisme vertical à droite est clairement un isomorphisme si  $F$  est connexe par arcs ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

Supposons maintenant que  $\pi_2(X) \neq 0$ . Comme pour la construction d'une tour de Postnikov, on obtient une fonction  $f : X \rightarrow K(\pi_2(X), 2)$ . Considérons l'une des fibrations associées  $\Omega K(\pi_2(X), 2) \rightarrow F \rightarrow X$  où  $F$  est la fibre de la fibration  $F \rightarrow X_f \rightarrow K(\pi_2(X), 2)$  (voir le chapitre 3 p. 18 pour un rappel). On a vu lorsqu'on a étudié la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead que la fonction  $F \rightarrow X$  induisait alors des isomorphismes en dimension  $\geq 3$  et que  $\pi_k(F) = 0$  pour  $k < 3$ . On peut donc d'ores et déjà conclure que  $\pi_i(F) \in \mathfrak{C}$  pour  $i < n$ .

Pour étudier l'homologie de  $F$ , on se sert du diagramme commutatif ci-dessous et du fait que  $\Omega K(\pi_2(X), 2)$  est un espace  $K(\pi_2(X), 1)$  :

$$\begin{array}{ccc} H_k(F) & \longrightarrow & H_k(F, K(\pi_2(X), 1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(X) & \longrightarrow & H_k(X, x_0) \end{array}$$

Le morphisme du haut est un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme pour  $k > 0$  grâce à la longue suite exacte en homologie et selon l'axiome **3** qui nous garantit que  $H_i(K(\pi_2(X), 1)) \in \mathfrak{C}$  en dimension positive. L'application verticale de droite est aussi un  $\mathfrak{C}$ -isomorphisme. En effet, le même argument que l'on a utilisé précédemment pour l'application

$$H_n(PX, \Omega X) \rightarrow H_n(X, x_0)$$

fonctionne encore pour

$$H_k(F, K(\pi_2(X), 1)) \rightarrow H_k(X, x_0)$$

si  $k \leq n$ . En somme, on a des  $\mathfrak{C}$ -isomorphismes  $H_n(F) \rightarrow H_n(X)$ ,  $\pi_n(F) \rightarrow \pi_n(X)$  et  $F$  satisfait les hypothèses du théorème avec de surcroît la propriété que  $\pi_2(F) = 0$ . Par naturalité du morphisme de Hurewicz, on a terminé la preuve du théorème.  $\square$

L'hypothèse que l'espace  $X$  est simplement connexe est essentielle. Il n'est donc pas suffisant de supposer que  $\pi_k(X)$  est dans une classe de Serre pour tout  $k < n$  ( $n \geq 1$ ). À titre de contre-exemple, considérons l'espace  $S^2 \vee S^1$  et la classe de Serre des groupes abéliens de type fini. La rétraction

$$r : S^2 \vee S^1 \rightarrow S^1$$

qui affaisse  $S^2$  nous dévoile que l'homomorphisme

$$i_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^2 \vee S^1)$$

induit par l'inclusion est injectif. De plus, comme  $S^1$  est le 1-squelette de  $S^2 \vee S^1$ ,  $i_*$  est surjectif. En somme, le groupe  $\pi_1(S^2 \vee S^1)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . En admettant le fait que le recouvrement universel de  $S^2 \vee S^1$  est équivalent homotopiquement à un bouquet de  $S^2$  dont les parties sont en correspondances avec  $\mathbb{Z}$ , on déduit l'isomorphisme

$$\pi_2(S^2 \vee S^1) \simeq \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}.$$

Finalement, une application simple de l'excision en homologie et de la longue suite exacte nous assure que

$$i_* : H_2(S^2) \longrightarrow H_2(S^2 \vee S^1)$$

est un isomorphisme. De ces calculs on en vient à la conclusion que  $\pi_2(S^2 \vee S^1)$  n'est pas  $\mathbb{C}$ -isomorphe à  $H_2(S^2 \vee S^1) = \mathbb{Z}$  bien que  $\pi_1(S^2 \vee S^1) \in \mathbb{C}$ .

Ce théorème admet une version relative pour une paire  $(X, A)$ .

**Théorème 7.** *Soit  $(X, A)$  une paire 2-connexe avec  $X$  simplement connexe et  $n$  un entier avec  $\pi_i(X, A) \in \mathbb{C}$  pour  $i \leq n$ . Supposons aussi que  $\mathbb{C}$  satisfait l'axiome 4. Alors,  $H_i(X, A) \in \mathbb{C}$  pour  $i \leq n$  et le morphisme de Hurewicz*

$$\pi_{n+1}(X, A) \longrightarrow H_{n+1}(X, A)$$

*est un  $\mathbb{C}$ -isomorphisme.*

*Démonstration.* On se contente de donner les grandes lignes de la preuve puisque le raisonnement est semblable au cas absolu. On suppose encore que  $(X, A)$  est une paire de  $CW$  complexes, quitte à prendre une approximation de la paire. La stratégie est encore de démontrer le résultat par induction. Le cas de base,  $n = 2$ , se déduit immédiatement puisque  $H_2(X, A) = 0$  la paire  $(X, A)$  étant 2-connexe. Aussi, le morphisme de Hurewicz est un isomorphisme dans ce cas.

Pour l'étape d'induction, on considère d'abord la fibration  $\Omega X \longrightarrow PX \xrightarrow{p} X$  obtenue par l'inclusion du point de base  $a_0$  dans  $X$ . On s'intéresse ensuite plus spécifiquement à la fibration relative de la paire  $(X, A)$  et on dénote dans ce but  $B = p^{-1}(A)$ . Remarquons que  $B$  n'est rien d'autre que l'espace des chemins commençant en  $a_0$  et se terminant en un point de  $A$ . Ainsi, en prenant la fonction constante  $(b_0)$  en  $a_0$  comme point de base naturel de  $B$ , une fonction  $(I^k, \partial I^k) \longrightarrow (B, b_0)$  est en correspondance directe avec une fonction  $(I^{k+1}, \partial I^{k+1}, J^k) \longrightarrow (X, A, a_0)$ , d'où un isomorphisme entre  $\pi_n(B, b_0)$  et  $\pi_{n+1}(X, A, a_0)$ . On considère maintenant le diagramme analogue à celui du cas absolu :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(X, A, a_0) & \xleftarrow{p_*} & \pi_n(PX, B, b_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, b_0) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ H_n(X, A) & \xleftarrow{p_*} & H_n(PX, B) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(B) \end{array}$$



On procède ensuite comme précédemment. Le morphisme de Hurewicz

$$\pi_{n-1}(B, b_0) \longrightarrow H_{n-1}(B)$$

est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme d'après le cas absolu. En effet, on a  $\pi_1(B) = \pi_2(X, A) = 0$  et  $\pi_k(B) = \pi_{k+1}(X, A) \in \mathcal{C}$  pour  $k \leq n-1$  par l'hypothèse d'induction. On montre que  $H_n(PX, B) \longrightarrow H_n(X, A)$  est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme grâce à un argument de suite spectrale identique au raisonnement dans le cas absolu. La seule différence est que l'on ne peut rien dire sur  $H_k(\Omega X)$  et c'est pourquoi on a besoin de l'axiome **4** pour conclure que les groupes d'homologie  $H_p(X, A, H_q(\Omega X))$  sont dans  $\mathcal{C}$  pour  $p < n$ . Pour terminer, l'application  $\pi_n(PX, B) \longrightarrow \pi_n(X, A)$  est un isomorphisme comme on le voit avec le lemme des cinq appliqué entre les deux suites exactes des triplets  $(X, A, a_0)$  et  $(PX, B, p^{-1}(a_0))$ .  $\square$

L'intérêt principal de la version relative du théorème de Hurewicz *mod*  $\mathcal{C}$  est le résultat suivant pour une fonction  $f : X \longrightarrow Y$

**Théorème 8** (Théorème de Whitehead *mod*  $\mathcal{C}$ ). *Soit  $\mathcal{C}$  une classe de Serre qui satisfait l'axiome **4**. Soit de plus  $f : X \longrightarrow Y$  une fonction entre espaces simplement connexes et surjective en  $\pi_2$ . Supposons finalement que pour  $i < n$ ,  $f_*$  induit des  $\mathcal{C}$ -isomorphismes en homologie (resp. homotopie) et une  $\mathcal{C}$ -surjection en dimension  $n$ . Alors,  $f_*$  induit des  $\mathcal{C}$ -isomorphismes en homotopie (resp. homologie) jusqu'en dimension  $n-1$  et une  $\mathcal{C}$ -surjection en dimension  $n$ .*

*Démonstration.* Considérons le *mapping cylinder*  $M_f$  et l'inclusion  $i : X \hookrightarrow M_f$ . Par hypothèse et selon la longue suite exacte en homotopie de la paire  $(M_f, X)$ , on trouve directement que cette paire satisfait les conditions du théorème de Hurewicz relatif :  $(M_f, X)$  est 2-connexe et  $M_f$  est simplement connexe. De plus, pour  $k \leq n$ , le groupe  $H_k(M_f, X)$  fait partie de la courte suite exacte

$$0 \longrightarrow H_k(M_f)/\text{Im}(i_*) \longrightarrow H_k(M_f, X) \longrightarrow \ker(i_*) \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse sur  $i_* : H_k(X) \longrightarrow H_k(M_f)$ , on conclut que les deux groupes aux extrémités de la courte suite exacte sont dans  $\mathcal{C}$ . Ainsi,  $H_k(M_f, X)$  est dans  $\mathcal{C}$ . Par le théorème de Hurewicz relatif *mod*  $\mathcal{C}$ ,  $\pi_3(M_f, X) \longrightarrow H_3(M_f, X)$  est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme (même un isomorphisme) donc  $\pi_3(M_f, X) \in \mathcal{C}$ . On peut refaire le même raisonnement pour  $\pi_4(M_f, X) \longrightarrow H_4(M_f, X)$  et continuer ainsi jusqu'à  $\pi_n(M_f, X) \longrightarrow H_n(M_f, X)$ . On déduit de cette démarche que  $\pi_k(M_f, X) \in \mathcal{C}$  pour  $k \leq n$ . Le résultat suit alors de la longue suite exacte en homotopie de la paire  $(M_f, X)$ . Le raisonnement est complètement analogue si l'on remplace dans les hypothèses les groupes d'homologie par les groupes d'homotopie et vice-versa.  $\square$



Ces théorèmes seront très pratiques pour étudier la structure des groupes d'homotopie de la sphère. La première percée en cette matière a été réalisée par Jean-Pierre Serre qui démontra, en utilisant la classe  $\mathfrak{C}_{TF}$  des groupes abéliens de type fini, que les groupes d'homotopie de la sphère sont tous de type fini. Pour la sphère de dimension supérieure à un, ce résultat est un corollaire direct du théorème de Hurewicz *mod*  $\mathfrak{C}$ , puisque les groupes d'homologie de  $S^n$  sont de type fini. On peut ainsi appliquer ce dernier théorème en dimension 2 et déduire que  $\pi_2(S^n)$  est  $\mathfrak{C}$ -isomorphe à  $H_2(S^n)$  qui est dans  $\mathfrak{C}$ . On peut répéter cet argument successivement en chaque dimension. On obtient évidemment le même résultat pour tout CW complexe simplement connexe avec un nombre fini de cellules en chaque dimension. Afin de compléter cette preuve, il convient de vérifier le dernier axiome **3** pour la classe  $\mathfrak{C}_{TF}$ . On en profite pour faire un léger détournement et discuter de l'homologie des  $K(G, n)$  puisque c'est ce dont il est question. Cette première approche des groupes d'homologie des  $K(G, n)$  sera très incomplète et on y reviendra après avoir développé d'autres outils.

### 4.3 L'homologie des $K(G, n)$

L'objectif central de cette section est de démontrer que la classe  $\mathfrak{C}_{TF}$  satisfait l'axiome **3** en étudiant la structure des groupes  $H_*(K(G, 1); \mathbb{Z})$  pour un groupe abélien de type fini  $G$ . Pour ce, l'outil principal dont on se servira est le théorème suivant.

**Théorème 9.** *Soient  $\mathfrak{C}$  une classe de groupes abéliens satisfaisant les deux premiers axiomes et  $F \rightarrow X \rightarrow B$  une fibration avec  $B$  simplement connexe et  $F$  connexe par arcs. Supposons de plus que deux espaces parmi  $F$ ,  $X$  et  $B$  ont des groupes d'homologie  $H_n$  (à coefficients entiers) en dimension positive dans  $\mathfrak{C}$ . Alors, il en est de même pour le troisième espace.*

*Preuve du théorème.* Les deux cas qui nous concernent sont  $F$  et  $B$  puis  $X$  et  $B$ . Le cas  $X$  et  $F$  est laissé en exercice. Supposons en premier lieu que  $F$  et  $B$  ont des groupes d'homologie dans  $\mathfrak{C}$ . Appliquons la suite spectrale de Serre à cette fibration. À la lumière du théorème des coefficients universels en homologie, le théorème de Serre se réécrit

$$E_{p,q}^2 = (H_p(B) \otimes H_q(F)) \oplus \text{Tor}(H_{p-1}(B), H_q(F)).$$

Les groupes  $H_p(B)$  et  $H_q(F)$  sont dans  $\mathfrak{C}$  pour  $p, q > 0$ . On trouve ainsi par l'axiome **2** que  $E_{p,q}^2$  est dans  $\mathfrak{C}$  pour  $p, q > 0$ . Puisque  $H_0(F) = \mathbb{Z}$  et que  $H_0(B; H_q(F)) = H_q(F)$ , il est apparent que  $E_{p,q}^2 \in \mathfrak{C}$  si seulement un des deux  $p$  et  $q$  est 0. Bref,  $E_{p,q}^2 \in \mathfrak{C}$  pour  $(p, q) \neq (0, 0)$ . On en déduit via **1** que  $E_{p,q}^s$  est dans  $\mathfrak{C}$  pour  $s \geq 2$  puisque  $E_{p,q}^{s+1}$  est un sous-groupe quotient de  $E_{p,q}^s$ . On termine la preuve dans ce cas en considérant la

filtration  $0 \subset \cdots \subset F_n = H_n(X)$ . On a que  $F_k/F_{k-1}$  et  $0$  sont dans  $\mathcal{C}$ , on peut remonter jusqu'à  $H_n(X)$  par induction en utilisant l'axiome **1** :  $A$  et  $C/A$  sont dans  $\mathcal{C}$  ssi  $C$  l'est.

Dans le deuxième cas, on procède par contradiction. Supposons donc qu'il existe  $n$  minimal tel que  $H_n(F) \notin \mathcal{C}$ . Comme précédemment, on a que  $E_{0,n}^2 = H_n(F)$ . La différentielle sortant de ce dernier groupe est nulle puisqu'on aboutit en dimension négative. De plus, la différentielle entrante provient d'un groupe dans  $\mathcal{C}$  par minimalité de  $n$ . Il s'ensuit que  $E_{0,n}^3 = H_n(F)/\text{Im}(d) \notin \mathcal{C}$ . En effet,  $\text{Im}(d)$  est l'image par un homomorphisme d'un groupe dans  $\mathcal{C}$  et donc si  $E_{0,n}^3$  était aussi dans  $\mathcal{C}$ , on serait forcé de conclure via l'axiome **1** que  $H_n(F)$  l'est tout autant. Le raisonnement peut se refaire pour le terme  $E_{0,n}^3$  et on conclut ainsi par induction que  $E_{0,n}^\infty$  n'est pas dans  $\mathcal{C}$ , ce qui contredit le fait que  $H_n(X)$  l'est.  $\square$

En faisant appel à ce théorème il sera facile de démontrer la proposition suivante qui montre entre autres que  $\mathcal{C}_{TF}$  respecte l'axiome **3**.

**Proposition 8.** *Soit  $G \in \mathcal{C}_{TF}$ . Alors  $H_n(K(G, k); \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}_{TF}$  pour tout  $n$  et  $k$ .*

On s'intéresse d'abord au cas d'un  $K(G, 1)$  avec  $G \in \mathcal{C}_{TF}$ . Le cas général sera déduit de ce cas particulier. D'après le théorème fondamental des groupes abéliens de type fini, on peut exprimer  $G$  comme une somme directe finie de  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}_m$  ( $m$  qui varie). De plus, il est direct de montrer que  $\pi_k(X \times Y) \simeq \pi_k(X) \times \pi_k(Y)$ . On peut donc construire un  $K(G, 1)$  à partir de  $K(\mathbb{Z}, 1)$  et de  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  en prenant le produit. Pour restreindre le problème à l'étude d'un  $K(\mathbb{Z}, 1)$  et des  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ , il nous manque ce dernier fait : si deux espaces ont des groupes d'homologie de type fini, alors il est en de même pour leur produit. En effet, si l'on note  $X$  et  $Y$  ces espaces, on peut appliquer le théorème de Serre à la fibration triviale  $Y \rightarrow X \times Y \rightarrow X$ . Il est clair que l'action de  $\pi_1(X)$  est triviale puisque le relèvement l'est. On trouve donc, par le théorème 9, que les groupes d'homologie de  $X \times Y$  sont de type fini.

L'homologie d'un  $K(\mathbb{Z}, 1)$  est celle de  $S^1$ , c'est-à-dire  $\mathbb{Z}$  en dimensions 1 et 0 et réduite à 0 en dimension supérieure. Le résultat est donc évident dans ce cas. Il est aussi possible de calculer explicitement les groupes d'homologie d'un  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  mais cela demanderait plus de travail que de montrer seulement qu'ils sont de type fini. Pour ce faire, on utilisera un  $K(\mathbb{Z}, 2)$  pour obtenir éventuellement un  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ .

Considérons dans un premier temps la fibration obtenue à partir de l'inclusion d'un point  $x_0 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  qui satisfait évidemment les hypothèses du théorème 5 puisque la base est simplement connexe. Comme l'espace total est contractile (donc les groupes d'homologie se réduisent à 0), il suffit de montrer que les groupes d'homologie de la fibre



sont de type fini afin de déduire que c'est aussi vrai pour un  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . On sait que la fibre est un espace  $K(\mathbb{Z}, 1)$ . On déduit donc le résultat voulu pour les espaces  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . On a besoin d'un résultat intermédiaire afin de pouvoir construire une fibration

$$K(\mathbb{Z}_m, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2).$$

De celle-ci, on peut évidemment conclure que l'homologie des espaces  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$  est de type fini.

**Proposition 9.** *Étant donné un homomorphisme  $\phi : G \longrightarrow G$ , on peut trouver un CW complexe  $K(G, n)$ , noté  $X$ , pour lequel il existe une fonction  $f : X \longrightarrow X$  tel que  $f_*$  est  $\phi$ .*

*Démonstration.* Le résultat général est démontré dans [6] p. 366. On se contente ici d'expliquer rapidement comment construire  $X$  et la fonction  $f$  dans le cas particulier qui nous intéresse :  $G = \mathbb{Z}$  et  $\phi$  la multiplication par  $m$ . Tout comme dans la tour de Postnikov, on peut éliminer les groupes d'homotopie de dimension supérieure à 2 de  $S^2$ . L'espace ainsi construit est bien entendu un  $K(\mathbb{Z}, 2)$  dont le 3-squelette est  $S^2$ . On définit  $f$  sur  $S^2$  par la fonction  $f : S^2 \longrightarrow S^2$  qui représente  $m$  fois la fonction identité  $id : S^2 \longrightarrow S^2$ . On étend  $f$  à tout l'espace de la même façon que pour la tour de Postnikov : la condition voulue étant que  $\pi_k(X) = 0$  pour  $k \geq n + 2$ , ce qui est certainement le cas.  $\square$

Soit donc la fonction  $K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  qui induit la multiplication par  $m$  sur le deuxième groupe d'homotopie. On associe à cette fonction sa fibration et par commutativité du diagramme (3.3) p. 17 il est clair que la fibration est encore la multiplication par  $m$  sur  $\pi_2$ . Soit  $F$  la fibre ; alors la longue suite exacte de la fibration montre que  $\pi_k(F) = 0$  pour  $k \neq 1$  et pour  $k = 1$  la longue suite a la forme

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow 0.$$

On a donc bien  $\pi_1(F) \simeq \mathbb{Z}_m$  et ainsi  $F$  est un  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ . Ceci termine la preuve de la proposition (8) pour les  $K(G, 1)$ .

Dans le cas général, on a une fibration  $K(G, n - 1) \longrightarrow \{x_0\}_i \longrightarrow K(G, n)$  qui s'obtient de la même façon que la fibration  $K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow \{x_0\}_i \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  présentée précédemment. Le résultat se déduit donc par induction du cas d'un  $K(G, 1)$  et du théorème 9. Voilà qui termine la preuve que la classe  $\mathfrak{C}_{TF}$  satisfait l'axiome 3. Étant donnée la discussion précédant la présente section, la preuve du théorème suivant est complétée.



**Théorème 10.** *Soit  $X$  un espace simplement connexe. Alors,  $H_*(X)$  est de type fini si et seulement si  $\pi_*(X)$  est de type fini. En particulier,  $\pi_n(S^k)$  est de type fini pour tout  $n > 0$  et  $k > 1$ .*

On présente une preuve alternative qui fait usage de la tour de Postnikov et de la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead, puisque cette technique sera réutilisée lorsqu'on étudiera la méthode de Serre pour calculer les groupes d'homotopie.

*Preuve du théorème 10.* Dans la suite, on remplace sans perte de généralité l'espace  $X$  par une approximation CW de sorte à pouvoir utiliser les décompositions étudiées.

( $\Leftarrow$ ) Considérons une tour de Postnikov avec fibrations pour  $X$  dont la base est  $X_2$ , un  $K(\pi_2(X), 2)$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
 K(\pi_{n+1}(X), n+1) & \longrightarrow & X_{n+1} \\
 & & \downarrow \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow \\
 K(\pi_3(X), 3) & \longrightarrow & X_3 \\
 & & \downarrow \\
 & & X_2 = K(\pi_2(X), 2)
 \end{array} \tag{4.3}$$

Par hypothèse,  $\pi_2(X)$  est de type fini. On conclut au moyen d'un résultat vu précédemment que chaque groupe d'homologie du  $K(\pi_2(X), 2)$  est de type fini. Idem pour le  $K(\pi_3(X), 3)$ . Par conséquent, l'espace total de la fibration  $K(\pi_3(X), 3) \rightarrow X_3 \rightarrow K(\pi_2(X), 2)$  a des groupes d'homologie de type fini. Par induction, on déduit de la sorte que chaque  $X_n$  possède une homologie de type fini. Finalement, rappelons que l'inclusion  $X \hookrightarrow X_n$  induit des isomorphismes sur les  $n$  premiers groupes d'homotopie et donc sur les  $n-1$  premiers groupes d'homologie. On trouve ainsi sans mal que  $H_n(X)$  est de type fini pour tout  $n$ .

( $\Rightarrow$ ) On utilise cette fois la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead pour  $X$  comme dans le diagramme (5). On peut débiter directement avec une inclusion  $X \hookrightarrow K(\pi_2(X), 2)$ . Le théorème de Hurewicz appliqué à  $X$  nous dévoile que  $\pi_2(X)$  est de type fini. On a donc que  $H_n(K(\pi_2(X), 2))$  est de type fini pour tout  $n$ . Il est en de même

pour la fibre  $X_3$ . Puisque  $X_3$  est 2-connexe, le théorème de Hurewicz nous donne un isomorphisme  $\pi_3(X_3) \simeq H_3(X_3)$ . Mais  $\pi_3(X_3) \simeq \pi_3(X)$  et donc  $\pi_3(X)$  est de type fini et on observe que le résultat peut se poursuivre pour les dimensions supérieures et ceci termine la preuve.  $\square$

# Chapitre 5

## Suite spectrale de Serre en cohomologie

Avant de poursuivre avec d'autres applications de la suite spectrale de Serre, on doit améliorer cette suite spectrale en y ajoutant une structure multiplicative issue du produit cup en cohomologie. On introduit donc une version de la suite spectrale de Serre en cohomologie. Le contexte est le même qu'en homologie et seulement quelques remarques suffisent pour adapter la suite spectrale de Serre à la cohomologie. Cependant, le produit cup nous donne une structure additionnelle sur la suite spectrale qu'il sera avantageux d'exploiter. On commence avec la notation. De façon analogue à la construction en homologie, on pose

$$E_1^{p,n} = H^n(X_p, X_{p-1})$$

et

$$A_1^{p,n} = H^n(X_p).$$

Évidemment, les morphismes ne vont plus dans le même sens, mais il s'agit d'une différence superficielle : il suffit principalement de réinterpréter les propositions démontrées dans le cas de l'homologie sous cette nouvelle notation. Le premier résultat important est la convergence de  $E_\infty^{p,n}$  vers le groupe  $F_n^{p-1}/F_n^p$  dont faisait l'objet la proposition 6.

**Proposition 10.** *On dénote en cohomologie  $F_n^p = \ker(A_1^{\infty,n} \rightarrow A_1^{p,n})$ . On a alors que*

$$E_\infty^{p,n} = F_n^{p-1}/F_n^p.$$

Ici,  $A_1^{\infty,n}$  correspond au groupe  $H^n(X)$ . On obtient donc une filtration de  $H^n(X)$  :

$$0 = F_n^n \subset F_n^{n-1} \subset \dots \subset F_n^{-1} = H^n(X).$$



*Démonstration.* On réécrit la suite exacte de la  $s^e$  page que l'on avait obtenue à la proposition 6 :

$$\dots \longrightarrow A_s^{p-s, n-1} \longrightarrow E_s^{p, n} \longrightarrow A_s^{p, n} \longrightarrow A_s^{p-1, n}.$$

En cohomologie, pour  $s$  assez grand, le groupe  $A_s^{p-s, n-1}$  est trivial. On trouve donc pour  $s$  assez grand que  $E_s^{p, n}$  est le noyau de l'application

$$A_s^{p, n} = \text{Im}(H^n(X) \longrightarrow H^n(X_p)) \longrightarrow A_s^{p-1, n} = \text{Im}(H^n(X) \longrightarrow H^n(X_{p-1})),$$

ce qui implique le résultat.  $\square$

On ne saurait fonctionner avec cette suite spectrale sans un lien complémentaire entre la cohomologie de la fibre, de la base et de l'espace total. Heureusement, le théorème de Serre s'applique tel quel en cohomologie.

**Théorème 11.** *Étant donné une fibration  $F \longrightarrow X \longrightarrow B$  avec  $B$  simplement connexe et la suite spectrale de Serre appliquée à cette fibration, on a que  $E_2^{p, p+q} = H^p(B; H^q(F))$ .*

Comme en homologie, on adoptera par la suite la notation  $E_1^{p, q} = H^{p+q}(X_p, X_{p-1})$ .

Le produit cup dans la suite spectrale de Serre en cohomologie est l'élément qui justifiera notre choix d'utiliser cette version de la suite spectrale plutôt que celle en homologie. L'introduction d'un produit cup et la démonstration de ses propriétés fondamentales demandent un certain travail. On se contentera ici de montrer comment le produit cup est défini dans la suite spectrale et on énoncera sans démonstration les propriétés clefs. Pour une preuve complète, on se réfère à [7]. Afin d'avoir un produit cup, on doit supposer que le groupe  $G$  implicite de la suite spectrale est en fait un anneau avec une multiplication.

Une façon de voir le produit cup autre que la définition que l'on a donnée dans les préliminaires est de considérer l'application dite diagonale :

$$\begin{aligned} \Delta : B &\longrightarrow B \times B \\ b &\longrightarrow (b, b). \end{aligned}$$

Il est facile de constater que le produit cup peut s'écrire comme la composition

$$H^n(B) \times H^m(B) \xrightarrow{\otimes} H^{n+m}(B \times B) \xrightarrow{\Delta^*} H^{n+m}(B),$$

où la première fonction est le cross-produit. Un avantage certain de ce point de vue est que l'on peut interpréter le cross-produit en terme du cross-produit cellulaire, qui est plus transparent.

Pour une suite spectrale de Serre en cohomologie, on définit ensuite un produit cup  $E_1^{p,q} \times E_1^{r,s} \longrightarrow E_1^{p+r,s+q}$  comme la composition :

$$\begin{aligned} H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \times H^{r+s}(X_r, X_{r-1}) &\xrightarrow{\otimes} H^{p+q+r+s}(X_p \times X_r, X_{p-1} \times X_r \cup X_p \times X_{r-1}) \\ &\longrightarrow H^{p+q+r+s}((X \times X)_{p+r}, (X \times X)_{p+r-1}) \xrightarrow{\Delta^*} H^{p+q+r+s}(X_{p+r}, X_{p+r-1}) \end{aligned}$$

La deuxième fonction est l'inclusion d'une composante dans le splitting de  $H^{p+q+r+s}((X \times X)_{p+r}, (X \times X)_{p+r-1}) = \bigoplus_{k+l=p+r} H^{p+q+r+s}(X_k \times X_l, X_{k-1} \times X_l \cup X_k \times X_{l-1})$  via l'excision comme dans la preuve du théorème de Serre. La fonction  $\Delta$  n'est pas *a priori* définie de  $X_{p+r}$  dans  $(X \times X)_{p+r}$ . Cependant, sur  $B \times B$ , on peut par une homotopie altérer  $\Delta$  en une fonction cellulaire. Finalement, on relève cette homotopie à  $X$  pour obtenir une fonction  $\Delta$  qui respecte la filtration par les espaces  $X_p$ . Le produit cup des pages subséquentes est obtenu inductivement du produit de la première page. Ce produit cup est bien défini après la première page et ce fait est une des conséquences du théorème suivant.

**Théorème 12.** *Soit une fibration  $F \longrightarrow X \longrightarrow B$  avec  $B$  simplement connexe. Alors pour la suite spectrale de Serre en cohomologie appliquée à cette fibration, on a les propriétés suivantes du produit cup  $E_n^{p,q} \times E_n^{r,s} \longrightarrow E_n^{p+r,s+q}$  :*

- $d_n(xy) = d_n(x)y + (-1)^{p+q}xd_n(y)$
- *Le produit cup respecte les isomorphismes de Serre ainsi que la convergence de la suite spectrale : - Le produit  $E_2^{p,q} \times E_2^{r,s}$  est, sous les isomorphismes du théorème de Serre, le produit*

$$H^{p+q}(B; H^q(F)) \times H^{r+s}(B; H^s(F)) \longrightarrow H^{p+q+r+s}(B; H^{s+q}(F))$$

*multiplié par un facteur  $(-1)^{qs}$ .*

- *Le produit  $E_\infty^{p,q} \times E_\infty^{r,s}$  est celui induit par le produit de  $H^n(X)$  sur les sous-groupes :  $F_{p+q}^p \times F_{r+s}^r, F_{p+q}^{p-1} \times F_{r+s}^{r-1}$ .*

*Démonstration.* Voir [7] p. 26. □

# Chapitre 6

## La classe $\mathbb{C}_P$

On avait laissé en suspens la preuve que la classe  $\mathbb{C}_P$  est bien une classe de Serre. Une fois cette question réglée, on sera en mesure de présenter d'autres applications de la suite spectrale de Serre. Un premier pas vers la vérification de l'axiome **3** est de calculer l'homologie des espaces  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ . On fait encore usage de la fibration utilisée lors de notre première approximation de  $H_*(K(\mathbb{Z}_m, 1))$  :

$$K(\mathbb{Z}_m, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2).$$

En fait, on déterminera plutôt l'anneau de cohomologie  $H^*(K(\mathbb{Z}_m, 1))$  avec la suite spectrale de Serre à coefficients entiers. Ce calcul est basé sur notre connaissance de l'anneau de cohomologie d'un espace  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . On peut déterminer cet anneau par un calcul de suite spectrale avec la fibration de chemins  $K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow \{x_0\}_i \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  ou en se servant du fait que  $\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$  est un espace  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . Dans tous les cas, la conclusion est que

$$H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[x]$$

où  $x$  est de dimension 2. Rappelons qu'il est toujours possible d'obtenir une suite de fibration à partir d'une seule fibration. Une première itération de ce procédé à la fibration ci-dessus nous donne

$$\Omega K(\mathbb{Z}, 2) = K(\mathbb{Z}, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_m, 1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}, 2).$$

La suite spectrale de Serre en cohomologie entière de cette fibration a l'allure suivant à la deuxième page (voir Fig. 6.1).

Puisque  $H_1(K(\mathbb{Z}_m, 1); \mathbb{Z}) = \pi_1(K(\mathbb{Z}_m, 1)) = \mathbb{Z}_m$ , on voit assez facilement que la première dérivation est la multiplication par  $m$ . De ce fait, il en découle que les applications à droite sont aussi la multiplication par  $m$ . Il devient évident alors que la suite



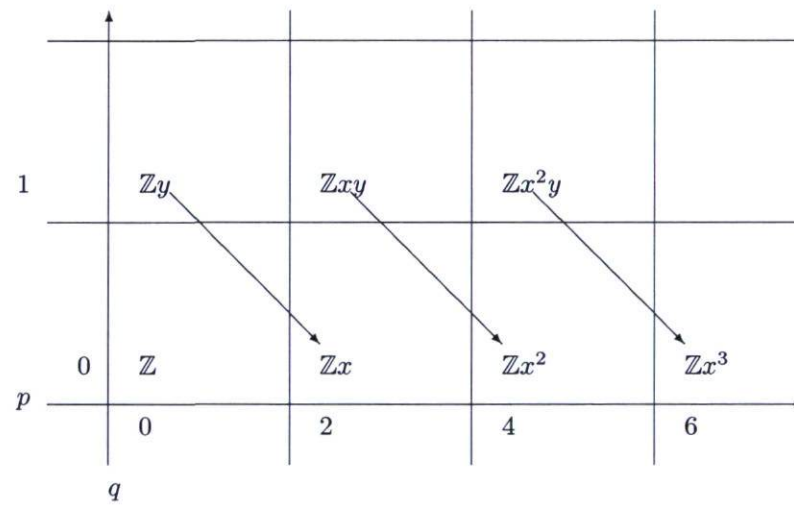


FIGURE 6.1 – Suite spectrale

spectrale se stabilise à la troisième page et que la structure de produit cup de la première rangée est celle de l'espace total. Bref,  $H^*(K(\mathbb{Z}_m, 1), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x]/(mx)$  et par le théorème des coefficients universels en cohomologie on vérifie aisément que  $H_k(K(\mathbb{Z}_m, 1); \mathbb{Z})$  est  $\mathbb{Z}_m$  pour  $k$  impair et 0 pour  $k$  pair et positif. En particulier, on trouve que pour un ensemble de premiers  $P$ , si  $\mathbb{Z}_m \in \mathfrak{C}_P$ , alors  $H_*(\mathbb{Z}_m, 1); \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}_P$ . On en conclut que le même résultat est valide pour un groupe de type fini dans  $\mathfrak{C}_P$ . En effet, un tel espace peut être construit par un produit de  $K(\mathbb{Z}_m, 1)$ , ce qui nous permet de calculer la structure des groupes d'homologie via la suite spectrale ou la formule de Kunneth.

Maintenant, soit  $G$  un groupe abélien dans  $\mathfrak{C}_P$  et soit  $x \in H_*(K(G, 1); \mathbb{Z})$  avec  $x = [\sigma]$  pour un cycle  $\sigma$ . Ainsi,  $\sigma$  est une application continue d'un compact et son image est donc un ensemble compact dans le  $K(G, 1)$ . En supposant que l'espace  $K(G, 1)$  est un CW complexe, on voit que l'image de  $\sigma$  est comprise dans un sous-complexe fini  $A$ . Comme  $A$  comporte un nombre fini de cellules, il est immédiat que son homologie est de type fini. De plus, puisque le morphisme  $\pi_1(A) \xrightarrow{i_*} \pi_1(K(G, 1))$  se factorise à travers l'abélianisation  $\pi_1(A)_{ab} = H_1(A, \mathbb{Z})$ , on constate que l'image de cette application est aussi un groupe de type fini que l'on note  $G'$ . En ajoutant des cellules de dimension  $\geq 2$  à  $A$  dans le but d'éliminer le noyau de  $i_*$  ainsi que les groupes d'homotopie de dimension supérieure, on obtient une inclusion  $A \hookrightarrow K(G', 1)$ . Clairement, on peut étendre la fonction  $A \rightarrow K(G, 1)$  à  $K(G', 1) \rightarrow K(G, 1)$  puisque les applications utilisées pour attacher les cellules à  $A$  sont homotopiquement nulle sur la frontière desdites cellules. En effet, en dimension 2 les cellules sont attachées par des applications du noyau de  $i_*$  et en dimension plus élevée on a que  $\pi_n(K(G, 1)) = 0$ . En somme, l'application  $H_*(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(K(G, 1); \mathbb{Z})$  se factorise à travers  $H_*(K(G', 1); \mathbb{Z})$ , ce qui implique que  $[\sigma]$  est d'ordre un premier  $p \notin P$  puisque tous les éléments de  $H_*(K(G', 1); \mathbb{Z})$  le sont selon les arguments précédents. Comme  $x$  était arbitraire, la conclusion est que  $H_*(K(G, 1); \mathbb{Z}) \in \mathfrak{C}_P$ . Les autres axiomes sont facilement vérifiables pour la classe  $\mathfrak{C}_P$ . En particulier, il est à noter que cette classe satisfait l'axiome **4**, ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Whitehead *mod*  $\mathfrak{C}_P$ .

## Troisième partie

### Applications aux groupes d'homotopie des sphères



# Chapitre 7

## Les sphères de dimension un entier pair

Le but de cette section est d'obtenir un isomorphisme

$$\pi_k(S^n) \simeq \pi_k(S^{2n-1}) \oplus \pi_{k-1}(S^{n-1})$$

valide pour  $n$  pair et si l'on ignore la 2-torsion des groupes. Autrement dit, les deux membres de l'équation sont  $\mathcal{C}'_P$ -isomorphes où  $P$  est l'ensemble des premiers impairs. Cette dernière notation sera en vigueur dans le reste de cette section.

On débute en montrant un résultat algébrique sur les  $\mathcal{C}$ -isomorphismes. Il existe en algèbre plusieurs généralisations possibles de résultats classiques aux  $\mathcal{C}$ -isomorphismes. À titre d'exemple, le lemme des cinq est aussi vrai si l'on remplace dans l'énoncé "isomorphismes" par " $\mathcal{C}$ -isomorphismes". Ces généralisations sont habituellement appelées uniquement au premier axiome d'une classe de Serre. La proposition suivante nous donne un analogue du scindement d'une suite exacte pour une classe de Serre :

**Proposition 11.** *Soit une classe  $\mathcal{C}$  de groupes abéliens satisfaisant le premier axiome et soit*

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E$$

*une suite exacte telle qu'il existe deux morphismes  $a' : B \rightarrow A$  et  $d' : E \rightarrow D$  pour lesquels  $aa'$  et  $dd'$  sont des  $\mathcal{C}$ -isomorphismes. Alors, l'application*

$$\begin{aligned} f : C \oplus E &\longrightarrow D \\ x + y &\longrightarrow c(x) + d'(y) \end{aligned}$$

*est un  $\mathcal{C}$ -isomorphisme.*

*Démonstration.*

(1)  $f$  est une  $\mathbb{C}$ -surjection.

L'homomorphisme  $D \rightarrow E$  induit un homomorphisme entre les espaces quotients :  $D/Im(f) \rightarrow E/d(Im(f))$ . Puisque  $d(c) = 0$ , on voit que  $d(Im(f)) = Im(dd')$ . De plus, le noyau de l'application induite sur les groupes quotients est égale à 0 par exactitude de la suite :  $ker(d) = Im(c)$ . On trouve donc que  $D/Im(f)$  est un sous-groupe de  $E/(Im(dd'))$  mais ce dernier groupe est dans  $\mathbb{C}$  par hypothèse et ceci implique, grâce à l'axiome 1, que  $D/Im(f) \in \mathbb{C}$ .

(2)  $f$  est une  $\mathbb{C}$ -injection.

La projection  $C \oplus E \xrightarrow{\pi} E$  induit un homomorphisme  $ker(f) \rightarrow ker(dd')$ . En effet, si  $x \oplus y \in ker(f)$ , alors  $0 = d(f(x \oplus y)) = dd'y$  et donc  $y \in ker(dd')$ . Le noyau de ce morphisme est clairement donné par l'inclusion  $x \hookrightarrow x \oplus 0$ , ce qui se traduit par la suite exacte suivante

$$ker(c) \rightarrow ker(f) \rightarrow ker(dd').$$

On a de plus  $ker(c) = B/ker(b) = B/Im(a)$ . Puisque  $Im(aa') \subset Im(a)$ , on remarque que  $B/Im(a)$  est un groupe quotient de  $B/Im(aa') \in \mathbb{C}$  et est par conséquent dans  $\mathbb{C}$ . Bref,  $ker(c) \in \mathbb{C}$  puis une dernière application de l'axiome 1 à la courte suite exacte

$$0 \rightarrow ker(c) \rightarrow ker(f) \rightarrow Im(\pi) \rightarrow 0$$

nous permet de conclure sachant que  $ker(dd') \in \mathbb{C}$ . □

On retourne sans plus tarder à la topologie. On introduit l'espace  $O(n)$  comme étant le sous-espace de  $\mathbb{R}^{n^2}$  constitué des matrices de dimension  $n \times n$  dont les colonnes forment une base orthonormée. On sait par l'algèbre linéaire que ces matrices ont toujours un déterminant de  $\pm 1$ . Il est ainsi naturel de considérer le sous-espace noté  $SO(n)$  des matrices de  $O(n)$  de déterminant 1. Il est possible de doter cet espace d'une structure de CW complexe en le comparant avec l'espace  $\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-2} \times \dots \times \mathbb{R}P^1$ . Par exemple,  $SO(2)$  peut être aisément identifié avec  $\mathbb{R}P^1$  en associant à une classe  $[(x, y)] \in \mathbb{R}P^1$  l'isométrie définie par la réflexion par rapport au plan orthogonal au vecteur  $(x, y)$  (en réalité il faut modifier légèrement cette application pour obtenir un élément de déterminant 1). En général, on obtient une cellule  $e^{i_k} e^{i_{k-1}} \dots e^{i_0}$  pour chaque suite  $(i_k, \dots, i_0)$  satisfaisant  $n > i_k > i_{k-1} > \dots > i_0$  en prenant la cellule correspondante  $e^{i_k} \times e^{i_{k-1}} \times \dots \times e^{i_0}$  de  $\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-2} \times \dots \times \mathbb{R}P^1$  et en l'envoyant sur la composition des isométries naturellement associées aux éléments  $[(x_1, \dots, x_r)] \in \mathbb{R}P^r$  comme dans le cas de  $SO(2)$  ci-haut. Il est possible dans une certaine mesure de déterminer le complexe différentiel de l'homologie cellulaire de  $SO(n)$  puisque l'on connaît celui de  $\mathbb{R}P^r$  et donc d'un produit fini de tels espaces.

Ce calcul nous sera utile puisqu'il permet d'étudier d'autres espaces appelés variétés de Stiefel et que l'on note  $V_{n,k}$  ( $n \geq k$ ). L'espace  $V_{n,k}$  est défini comme étant le sous-



espace de  $k$  copies de  $S^{n-1}$  formé de  $k$  vecteurs orthogonaux entre eux. On étudiera plus particulièrement l'espace  $V_{n,2}$  dans la suite. On peut aussi voir  $V_{n,2}$  comme l'espace des vecteurs unitaires tangents à  $S^{n-1}$  et ce point de vue nous montre que  $V_{n,2}$  est un fibré  $S^{n-2} \rightarrow V_{n,2} \rightarrow S^{n-1}$ . Ce fait nous donne un premier lien entre les groupes d'homotopie de  $V_{n,2}$  et les groupes d'homotopie de la sphère. Il nous faut aussi connaître l'homologie de  $V_{n,2}$ . Il serait donc pertinent d'obtenir une structure de  $CW$  complexe sur  $V_{n,2}$ . À cette fin, on considère la projection  $p : SO(n) \rightarrow V_{n,2}$  où l'on retient les deux derniers vecteurs d'un élément de  $SO(n)$ . Il s'agit d'une surjection pour  $n > 2$  et on supposera dorénavant que cette hypothèse est respectée. Cette projection nous permet de transférer la structure de  $CW$  complexe de  $SO(n)$  sur  $V_{n,2}$  et on obtient une cellule en dimensions  $0, n-1, n-2$  et  $n-1+n-2$ . Les frontières de ces cellules sont identiques à celles du complexe de  $\mathbb{R}P^r$  (avec  $r$  suffisamment grand). Ainsi, si  $n$  est impair, on trouve que  $H_k(V_{n,2}, \mathbb{Z})$  est  $\mathbb{Z}_2$  en dimension  $n-2$  et  $\mathbb{Z}$  en dimension  $2n-3$  et  $0$ . Pour la suite, on considère  $V := V_{n+1,2}$  avec  $n$  pair.

On peut diviser la preuve du résultat de la section en deux grandes étapes. On utilise l'homologie de  $V$  pour relier ses groupes d'homotopie à ceux de  $S^{2n-1}$ . Enfin, le lien entre les espaces  $V, S^n$  et  $S^{n-1}$  s'obtient grâce au splitting de la longue suite exacte du fibré  $S^{n-1} \rightarrow V \rightarrow S^n$  qui est exprimé algébriquement dans la dernière proposition. En confrontant ces deux liens, on déduira le résultat voulu.

Tout d'abord, on peut éliminer le cas  $n = 2$  puisqu'on a un isomorphisme  $\pi_k(S^2) \simeq \pi_k(S^3)$  pour  $k \geq 3$  garanti par la fibration de Hopf (et  $\pi_k(S^1) = 0$  si  $k \geq 3$ ). Pour  $n \geq 4$ , la longue suite exacte du fibré

$$\cdots \rightarrow \pi_j(S^{n-1}) \rightarrow \pi_j(V) \rightarrow \pi_j(S^n) \rightarrow \cdots$$

montre que  $V$  est 2-connexe. Il est ainsi facile en utilisant Hurewicz *mod*  $\mathbb{C}_{TF}$  de déduire que les groupes d'homotopie de  $V$  sont de type fini puisque c'est le cas pour ses groupes d'homologie. Une autre application de Hurewicz *mod*  $\mathbb{C}_P$  montre que  $\pi_{2n-1}(V)$  est une somme directe de  $\mathbb{Z}$  avec un groupe de 2-torsion. Considérons une fonction

$$f : S^{2n-1} \rightarrow V$$

telle que  $[f] \in \pi_{2n-1}(V)$  génère la  $\mathbb{Z}$ -composante. Comme  $\pi_{2n-1}(S^{2n-1})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et engendré par  $[id]$ , on voit sans mal que  $f_*$  est injective et que

$$\text{coker}(f_*) = \pi_{2n-1}(V)/\mathbb{Z} \in \mathbb{C}_P$$

(où on a fait de légers abus de notation). Par naturalité du morphisme de Hurewicz, on



a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{2n-1}(V) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ H_{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_*} & H_{2n-1}(V; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Il en découle que l'application  $f_*$  est un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme sur  $H_{2n-1}$ . Néanmoins, tous les groupes  $H_k$  pour  $k \neq 2n - 1$  sont dans  $\mathbb{C}_P$  pour les deux espaces. Aussi,  $f_*$  est un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme dans toutes les dimensions. Le théorème de Whitehead *mod*  $\mathbb{C}_P$  est applicable puisque  $\pi_2(S^{2n-1}) = \pi_2(V) = 0$ . On obtient de ce théorème que  $f_*$  est un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme en homotopie en chaque dimension, i.e. les groupes d'homotopie de  $S^{2n-1}$  diffèrent des groupes d'homotopie de  $V$  par un groupe fini de 2-torsion.

Il convient maintenant d'étudier plus en détails la longue suite exacte du fibré  $V$ .

**Proposition 12.** *Soit  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} S^n$  une fibration ou bien un fibré. Alors l'application*

$$\pi_j(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(F)$$

*de la longue suite exacte en homotopie satisfait  $\partial(\sigma(f)) = \partial(id)_*(f)$  où  $[f] \in \pi_{j-1}(S^{n-1})$ ,  $\sigma$  dénote l'homomorphisme de la suspension,  $id$  est l'application identité de  $S^n$ .*

On donne quelques remarques préliminaires avant de passer à la preuve de la proposition. Premièrement, on voit les éléments des groupes présents dans la proposition comme des fonctions. Cette approche est naturelle puisque les morphismes tels  $\sigma$  et  $\partial$  sont définis sur des fonctions.

Rappelons que l'application  $\partial$  de la longue suite exacte d'une fibration ou d'un fibré provient de la longue suite exacte en homotopie d'une paire. Cette dernière suite exacte s'exprime naturellement par des applications de la forme  $(I^k, \partial I^k, J^{k-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Il est néanmoins plus avantageux de travailler avec des paires  $(D^k, \partial D^k)$  puisqu'elles permettent d'explicitier l'homomorphisme de suspension. En effet, selon ce point de vue, on sait d'après la discussion suivant le théorème de suspension de Freudenthal que la suspension d'une fonction

$$g : (S^n, s_0) \rightarrow (S^m, t_0)$$

s'obtient en étendant  $g$  à

$$g' : (D^{n+1}, S^n, s_0) \rightarrow (D^{m+1}, S^m, t_0)$$

en voyant  $D^k$  comme  $S^k \times I / S^k \times 1$ , puis en appliquant un générateur

$$\gamma : (D^{m+1}, S^m, t_0) \rightarrow (S^{m+1}, t_0, t_0)$$

de  $\pi_{m+1}(S^{m+1}, t_0, t_0)$ .

*Preuve de la proposition.* En vertu des remarques précédentes, étant donné

$$f : S^{j-1} \longrightarrow S^{n-1},$$

on a

$$\sigma(f) : (D^j, S^{j-1}) \longrightarrow (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, s_0).$$

Bref, on voit que  $\sigma(f)$  se factorise à travers une fonction  $g : (D^j, \partial D^j) \longrightarrow (D^n, \partial D^n)$ .

Avec cette écriture,  $\partial(\sigma(f))$  se calcule en déterminant un relèvement

$$\sigma(\tilde{f}) : (D^j, S^{j-1}) \longrightarrow (X, F)$$

et en lui appliquant l'opérateur de bord de la paire  $(X, F)$ . On dénote  $\tilde{id}$  un relèvement  $\tilde{id} : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (X, F)$  d'un générateur  $id : (D^n, S^{n-1}) \longrightarrow (S^n, s_0)$ . Alors, on remarque sans mal que le relèvement de  $\sigma(f)$  s'obtient par la composition  $\tilde{id} \circ g$  à la lumière des égalités

$$p \circ \tilde{id} \circ g = id \circ g = \sigma(f).$$

Lorsqu'on applique l'opérateur de bord à  $\tilde{id} \circ g$ , on retrouve  $\partial(id) \circ f$ .  $\square$

L'homomorphisme de suspension  $\sigma$  joue le rôle de la fonction  $d'$  et  $a'$  dans la première proposition de la section. Il nous faut maintenant montrer que la composition  $\partial \circ \sigma$  est un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme pour pouvoir utiliser cette proposition et conclure que  $\pi_k(S^n)$  se scinde *mod*  $\mathbb{C}_P$  comme  $\pi_{k-1}(S^n) \oplus \pi_k(V)$ . La proposition précédente nous permet de voir  $\partial \circ \sigma([f])$  comme  $\partial([id]) \circ f$  où  $id$  est un générateur de  $\pi_n(S^n)$ . Pour calculer  $\partial([id])$ , remarquons que  $\pi_{n-1}(V) = \mathbb{Z}_2$  selon le théorème de Hurewicz classique et donc on voit via la portion suivante de la longue suite exacte

$$\pi_n(S^n) \longrightarrow \pi_{n-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

que  $\partial([id]) = \pm 2[id]$  où l'on comprend que  $id$  représente l'identité de  $S^{n-1}$  dans le membre de droite. Ainsi, si l'on dénote  $g$  une fonction de degré  $\pm 2$  de  $S^{n-1}$ , on peut écrire  $\partial(\sigma([f])) = g_*([f])$ . En somme, on a  $\partial \circ \sigma = g_*$ . Mais  $g_*$  est clairement un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme en homologie. Le théorème de Whitehead *mod*  $\mathbb{C}_P$  est donc applicable si  $n \geq 4$  de sorte que  $S^n$  soit 2-connexe et on déduit alors que  $g_*$  est aussi un  $\mathbb{C}_P$ -isomorphisme en homotopie.

Pour  $n$  pair, on sait que les groupes d'homotopie de  $V$  sont, modulo la 2-torsion, les mêmes que ceux de  $S^{2n-1}$ . On en déduit maintenant le résultat de cette section.

# Chapitre 8

## Structure des groupes d'homotopie des sphères

Nous nous proposons de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 13.**  $\pi_n(S^i)$  est fini pour  $n > i$  sauf pour  $\pi_{4n-1}(S^{2n})$  qui est la somme directe de  $\mathbb{Z}$  avec un groupe fini.

On utilisera dans la preuve le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.**  $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]$  si  $n$  est pair et  $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$  si  $n$  est impair avec  $x \in H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ .

*Preuve du lemme.* On peut supposer  $n > 1$  pour des raisons évidentes et ainsi avoir que  $K(\mathbb{Z}, n)$  est simplement connexe. On procède par induction et on distingue deux cas selon la parité de  $n$ .

Premier cas :  $n$  pair. Pour l'étape d'induction, supposons donc que

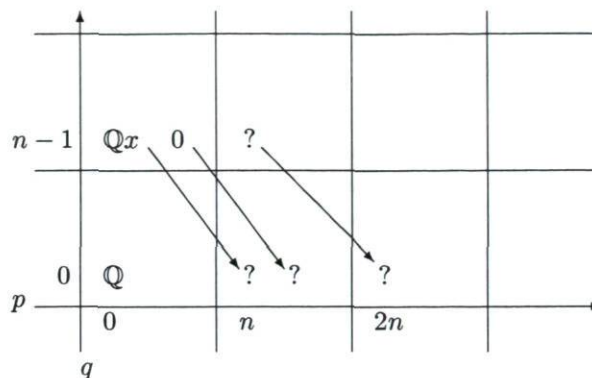
$$H^*(K(\mathbb{Z}, n-1), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[x]/(x^2).$$

Considérons la suite spectrale de Serre en cohomologie à coefficients rationnels pour la fibration  $K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  obtenue par l'inclusion d'un point  $x_0 \hookrightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ . Selon le théorème de Serre, on a

$$E_2^{p,q} = H^p(K(\mathbb{Z}, n); H^q(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})).$$

Aussi, puisque  $K(\mathbb{Z}, n-1)$  est  $n-2$ -connexe et que  $K(\mathbb{Z}, n)$  est  $(n-1)$ -connexe, on remarque que  $E_2^{p,q} = 0$  si  $0 < p \leq n-1$  ou  $0 < q \leq n-2$ . De plus, comme




 FIGURE 8.1 – Suite spectrale, où  $x \in H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})$ 

$H^q(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}) = 0$  si  $q \geq n$  par l'hypothèse d'induction, on obtient que  $E_2^{p,q} = 0$  aussitôt que  $q \geq n$ . Ces informations nous permettent d'obtenir une partie de la deuxième page de la suite spectrale (voir Fig. 8.1).

Le nombre de zéros est très important, de telle sorte que la deuxième page est exactement la même que la  $n$ -ième page : les différentielles  $d_i$  pour  $2 \leq i \leq n-1$  sont tous nulles puisque soit elles proviennent d'entrées nulles, soit elles atteignent des entrées nulles. À cette  $n$ -ième page, on a une différentielle  $d_n : \mathbb{Q}x \rightarrow H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$  qui est forcément injective. En effet, l'entrée  $(0, n-1)$  de la prochaine page est le terme  $E_\infty^{0, n-1}$  étant donné que toutes les différentielles subséquentes émanant de et atteignant l'entrée  $(0, n-1)$  seront nulles. On a ainsi pour l'entrée  $(0, n-1)$  que  $\ker(d_n) = E_\infty^{0, n-1}$  (la différentielle entrante est nulle). Finalement, il est clair que  $E_\infty^{p,q} = 0$  pour  $p+q > 0$  car  $\{x_0\}_i$  est contractile et on a donc  $\ker(d_n) = 0$ . En appliquant un raisonnement similaire à l'entrée  $(n, 0)$ , on observe que  $d_n$  est aussi surjectif et il s'agit par conséquent d'un isomorphisme ( $\mathbb{Q}$ -linéaire). Ceci démontre que  $E_n^{n,0} = H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}d_n x$  et on pose  $d_n x =: y$ .

Étudions maintenant le terme

$$E_n^{n, n-1} = H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})).$$

On sait que le produit cup défini pour les termes  $E_n^{p,q}$  de la  $n$ -ième page de la suite spectrale correspond au produit cup de la deuxième page et celui-ci est, par le théorème de Serre, le produit cup des groupes  $H^p(K(\mathbb{Z}, n); H^q(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}))$ . On a donc un

produit cup  $E_n^{0,n-1} \times E_n^{n,0} \rightarrow E_n^{n,n-1}$  qui est sous les isomorphismes du théorème de Serre le produit cup

$$H^0(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})) \times H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^0(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})) \longrightarrow H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})).$$

On a une identification  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$  qui à  $x$  associe 1. Cet isomorphisme en induit un autre

$$H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) \longrightarrow H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})).$$

On voit alors par la définition du produit cup que cet isomorphisme prend aussi la forme du produit cup :  $\mathbb{Q}y \mapsto \mathbb{Q}yx$ . On déduit alors que les éléments du  $\mathbb{Q}$ -module  $H^n(K(\mathbb{Z}, n); H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q}))$  sont simplement  $\mathbb{Q}xy$ .

Tout comme précédemment, on montre que la différentielle  $d_n : E_n^{n,n-1} \rightarrow E_n^{2n,0}$  est un isomorphisme. Bref,  $H^{2n}(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$  est  $\mathbb{Q}d_n(xy)$  avec  $d_n(x(d_nx)) = (d_nx)^2 = y^2$  via la formule du théorème 11.

Les termes entre  $E_n^{n,0}$  et  $E_n^{2n,0}$  sont nuls puisque les entrées liées à ces termes sont nulles et que les termes  $E^\infty$  correspondants sont nuls. On en déduit du même coup que les termes des même colonnes mais de la rangée  $n-1$  sont aussi nuls puisqu'ils sont isomorphes à ceux de la rangée 0. On peut maintenant compléter une partie de la  $n$ -ième page (voir Fig. 8.2).

Il est aisé de constater que l'on peut poursuivre ce raisonnement inductivement et dévoiler de cette façon tous les termes de la  $n$ -ième page : le produit cup de la première rangée de la  $n$ -ième page étant le même que le produit cup dans  $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q})$ , on déduit le résultat voulu.

Deuxième cas :  $n$  impair. La plupart des remarques du cas précédent s'appliquent encore ici. On se contente d'afficher ce que l'on sait de la  $n$ -ième page (qui est encore la même que la deuxième) (Fig. 8.3).

La structure produit de la première colonne est tout simplement celle de  $H^*(K(\mathbb{Z}, n-1), \mathbb{Q})$  selon le théorème de Serre. L'hypothèse d'induction nous permet ainsi d'écrire complètement cette première colonne. De même qu'auparavant, la différentielle  $d_n : E_n^{0,(n-1)} \rightarrow E_n^{n,0}$  est un isomorphisme. La  $n$ -ième colonne est ainsi complétée.

Les applications  $\mathbb{Q}$ -linéaire  $d_n : E_n^{0,k(n-1)} \rightarrow E_n^{n,(k-1)(n-1)}$  envoient  $x^k$  sur  $kx^{k-1}y$  par la règle de dérivation. On en conclut que chaque application est un isomorphisme  $\mathbb{Q}$ -linéaire. On en déduit entre autres que les entrées à gauche de  $p = n$  sont nulles

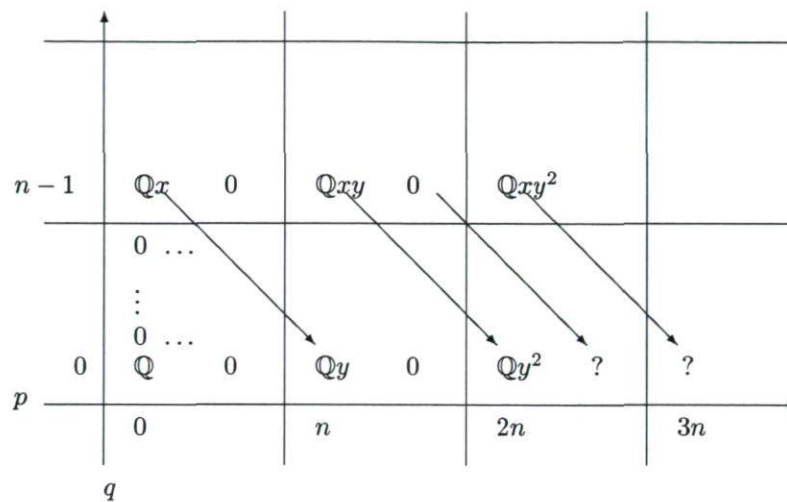


FIGURE 8.2 – Suite spectrale

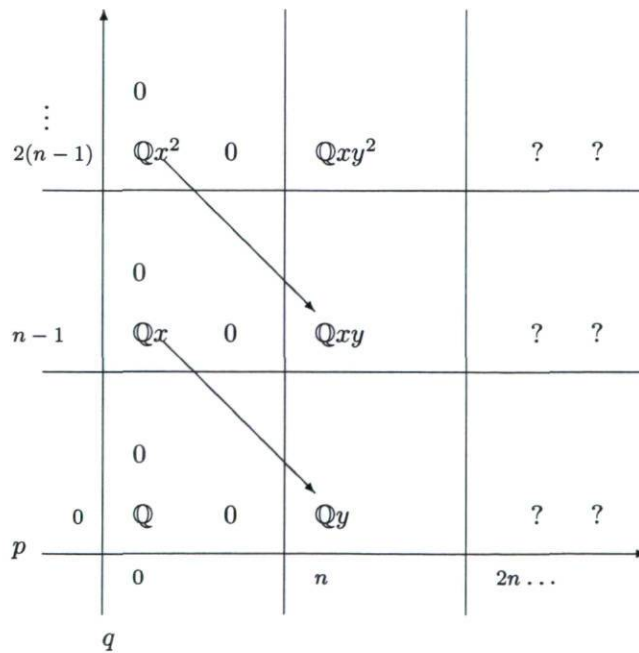


FIGURE 8.3 – Suite spectrale, où  $x \in H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Q})$  et  $y = d_n x$



après la  $n$ -ième page. Il est alors immédiat qu'à la  $n$ -ième page les entrées entre les colonnes  $n$  et  $2n$  exclusivement sont nulles comme dans le premier cas. De plus, on a que les différentielles  $d_n : E_n^{n,k(n-1)} \rightarrow E_n^{2n,(k-1)(n-1)}$  sont zéro puisque leurs noyaux comprennent l'image des différentielles précédentes qui sont surjectives. Comme les différentielles des pages suivantes sont nulles en  $E_n^{2n,0}$ , on conclut que  $E_n^{2n,0} = 0$  et de même en conséquence pour la colonne entière. Il est alors apparent que toutes les entrées à droite de  $p = n$  sont nulles. Voilà qui termine la preuve. □

*Preuve du théorème 13.* Premier cas :  $n$  impair. On considère une fonction  $g : S^n \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  qui induit un isomorphisme sur  $\pi_n$ . On a construit une telle fonction lors de l'étude de la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead des CW complexes. D'après le théorème de Hurewicz classique, la fonction  $g$  induit aussi un isomorphisme en  $H_n(\_ ; \mathbb{Z})$ . Par le théorème des coefficients universels en cohomologie et le lemme 4,  $H_*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = H_*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ , et ainsi pour  $j \neq n$ ,  $H_j(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z})$  n'est que de torsion. Il en est évidemment de même pour  $S^n$  et cela nous permet de conclure que  $g_*$  est un  $\mathbb{C}_0$ -isomorphisme en homologie, i.e. un isomorphisme modulo les groupes de torsion. On peut supposer  $n > 1$  de sorte que le théorème de Whitehead généralisé s'applique et en déduire qu'il est aussi vrai que  $g$  induit des  $\mathbb{C}_0$ -isomorphismes sur les groupes d'homotopie. Bref,  $\pi_m(S^n)$  n'est que de torsion pour  $m > n$ . Ces groupes étant de type fini, on obtient le résultat.

Deuxième cas :  $n$  pair. On considère encore une fonction  $g : S^n \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  telle que  $g_*$  est un isomorphisme en  $\pi_n$ . En transformant  $g$  en fibration, on obtient une fibre  $F$  telle que  $F$  est  $n$ -connexe et  $F \hookrightarrow S^n$  induit des isomorphismes en dimension supérieure à  $n$  (voir la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead). On considère la suite spectrale en cohomologie à coefficients rationnels associée à cette fibration dont la base est simplement connexe. On cherche à déterminer la cohomologie de la fibre connaissant celle de la base et de l'espace total. Soit  $k$  l'entier positif le plus petit tel que  $H^k(F, \mathbb{Q})$  est non nul. On sait que  $k > n$  puisque  $F$  est  $n$ -connexe. À la deuxième page de la suite spectrale, on a que les entrées  $(p, q)$  avec  $0 < q < k$  sont nulles et par conséquent la seule différentielle potentiellement non nulle partant de l'entrée  $(0, k)$  est  $d_{k+1} : E^{0,k} \mapsto E^{k+1,0}$ . Par ailleurs, les entrées  $(p, 0)$  avec  $n < p < 2n$  sont toutes nulles selon le lemme. Si  $E^{k+1,0}$  est 0 alors le terme  $E^{0,k}$  survit à  $E_\infty$  mais cela contredit la cohomologie de  $S^n$ . En conséquence, on a  $k \geq 2n - 1$ . Considérons maintenant la différentielle  $d_{2n} : E^{0,2n-1} \mapsto E^{2n,0} = \mathbb{Q}y^2$ . Celle-ci est forcément un isomorphisme car les deux groupes ne survivent pas à  $E_\infty$ . On a donc la suite spectrale suivante à la deuxième page où les flèches indiquent les futures différentielles de la  $2n$ -ième page (Fig. 8.4) :

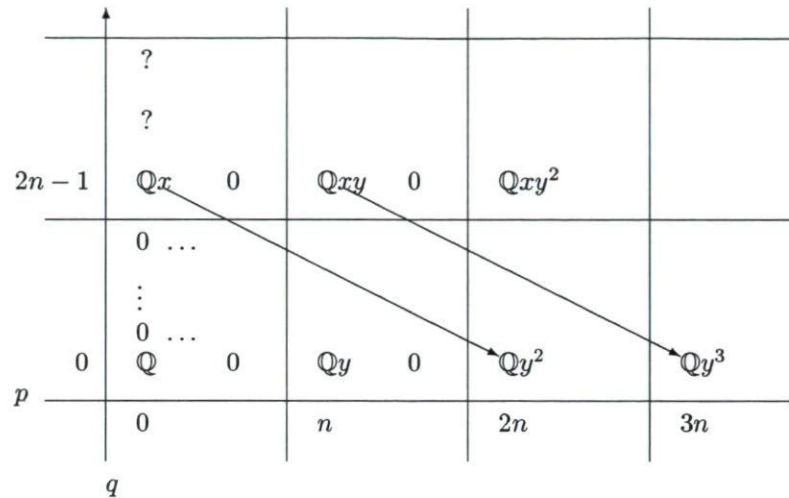


FIGURE 8.4 – Suite spectrale

On sait que  $d_n x = y^2$  et on dénote encore  $k$  l'entier le plus petit strictement supérieur à  $2n - 1$  tel que l'entrée  $(0, k)$  est non nulle. Une des différentielles provenant de  $(0, k)$  doit toucher une entrée non nulle de la Figure 8.4 car dans le cas contraire cette entrée survivrait et cela contredirait la cohomologie de  $S^n$ . On remarque que si aucun des groupes de la Fig 8.4 n'est touché avant la  $2n^e$  page alors les différentielles affichées sont clairement des isomorphismes puisque  $d_{2n} x y^k = y^{2+k}$ . On se rend compte par la suite qu'une différentielle non nulle doit être une surjection puisqu'elle est linéaire et que  $\mathbb{Q}$  est un corps et ceci implique que l'entrée atteinte par cette différentielle sera éliminée à la page suivante. En confrontant ces remarques, il n'est pas difficile de conclure qu'il ne peut exister une entrée qui n'est pas triviale après la rangée  $2n - 1$ .

En appliquant le théorème des coefficients universels en cohomologie, on trouve aisément que  $H_j(F; \mathbb{Z})$  est un groupe de torsion pour  $j \neq 2n - 1$  et est  $\mathbb{Z}$  plus un groupe fini en dimension  $2n - 1$  puisque les groupes d'homologie sont de type fini (les groupes d'homotopie le sont). Le théorème de Hurewicz *mod*  $\mathbb{C}_\theta$  nous donne que  $\pi_j(F)$  est un groupe de torsion fini pour  $j < 2n - 1$  et  $\pi_{2n-1}(F)$  est  $\mathbb{Z}$  plus un groupe fini. Soit une fonction  $f : S^{2n-1} \rightarrow F$  représentant la classe d'un générateur de la  $\mathbb{Z}$ -composante de  $\pi_{2n-1}(F)$ . Alors  $f_* : \pi_{2n-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \pi_{2n-1}(F)$  est un  $\mathbb{C}_\theta$ -isomorphisme. Comme l'homologie des deux espaces est dans  $\mathbb{C}_\theta$  en dimension inférieure à  $2n - 1$ , on peut



appliquer le théorème de Hurewicz *mod*  $\mathbb{C}_0$  aux deux espaces et utiliser la naturalité du morphisme de Hurewicz pour déduire que  $f_* : H_{2n-1}(S^{2n-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{2n-1}(F; \mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{C}_0$ -isomorphisme. C'est clairement le cas pour les autres dimensions puisque l'homologie à coefficients rationnels est triviale pour les deux espaces. Par le théorème de Whitehead *mod*  $\mathbb{C}_0$ , on obtient que  $f_*$  est un  $\mathbb{C}_0$ -isomorphisme en homotopie. Le cas impair ayant été traité plus tôt, on a que  $\pi_j(F)$  est fini sauf pour  $j = 2n - 1$  et cela termine la preuve.

□

On peut procéder comme dans la preuve du précédent théorème en utilisant des coefficients dans un sous-anneau des rationnels. Pour un ensemble de premiers  $P$ , on définit

$$\mathbb{Z}_P := \left( \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : \forall p \in P, (b, p) = 1 \right).$$

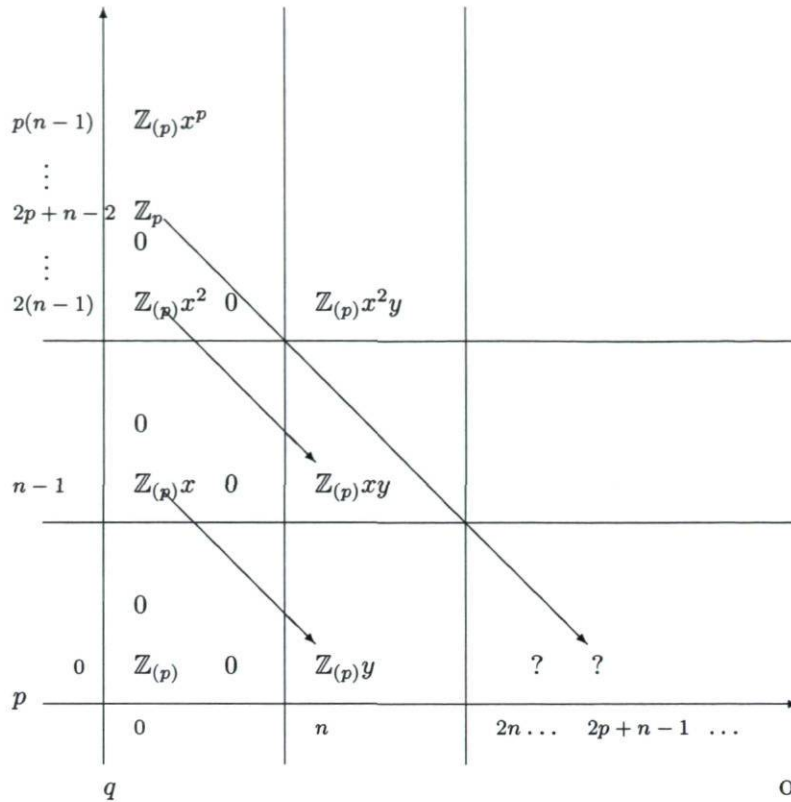
Les rationnels sont donc un cas particulier de cette définition avec  $P = \emptyset$ . Afin d'étudier la  $p$ -torsion des groupes d'homotopie, on sera intéressé à travailler avec l'anneau que l'on dénote  $\mathbb{Z}_{(p)}$  qui est simplement  $\mathbb{Z}_P$  avec  $P = \{p\}$ .

L'intérêt de cet anneau est qu'il détecte la  $p$ -torsion. En effet, pour un groupe d'homologie de type fini, lorsqu'on applique le foncteur  $Hom(\_, \mathbb{Z}_{(p)})$  on obtient une composante  $\mathbb{Z}_{(p)}$  pour chaque composante  $\mathbb{Z}$  du groupe de type fini. De plus, pour chaque groupe cyclique fini l'application du foncteur donne le groupe nul puisque  $\mathbb{Z}_{(p)}$  est sans torsion. Pour ce qui est du foncteur  $Ext(\_, \mathbb{Z}_{(p)})$ , on voit que les composantes  $\mathbb{Z}_{p^k}$  demeurent identiques tandis que le reste est éliminé. Ceci provient du fait que  $\mathbb{Z}_{(p)}/p^k\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{p^k}$  et  $m\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_{(p)}$  si  $(m, p) = 1$ . En utilisant le théorème des coefficients universels en cohomologie, il est donc possible d'obtenir de l'information sur la  $p$ -torsion grâce à la connaissance de la cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$ . En réutilisant les éléments du théorème précédent, mais avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$ , on obtiendra le résultat suivant.

**Théorème 14.** *La  $p$ -torsion des groupes d'homotopie de  $S^n$  avec  $n \geq 3$  est nulle en dimension strictement inférieure à  $n + 2p - 3$  et est isomorphe à  $\mathbb{Z}_p$  en dimension  $n + 2p - 3$ .*

Évidemment, le cas  $n = 2$  est inclus dans le cas  $n = 3$  à cause des isomorphismes  $\pi_j(S^2) \simeq \pi_j(S^3)$  ( $j \geq 3$ ) garantis par la fibration de Hopf. Ce théorème nous permet entre autres de réduire le calcul d'un groupe d'homotopie de la sphère au calcul d'un nombre prédéterminé de  $p$ -composantes. Comme premier exemple, ce théorème nous assure que  $\pi_4(S^3)$  n'est que de 2-torsion et est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2$ .





où  $x$  est un générateur de  $H^{n-1}(K(\mathbb{Z}, n-1); \mathbb{Z}_{(p)})$  et  $y$  un générateur de  $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)})$ .

FIGURE 8.5 – Suite spectrale

Tout comme précédemment, il nous faut d'abord calculer la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane. Les calculs sont très semblables à ce qui a été fait et c'est pourquoi on omet plusieurs détails.

**Lemme 5.** *Pour  $n \geq 3$ , la torsion de  $H^j(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)})$  est 0 pour  $j < 2p + n - 1$  et  $\mathbb{Z}_p$  en dimension  $2p + n - 1$ .*

Remarquons que la non-torsion de  $H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_{(p)})$  a été déterminée précédemment en utilisant les coefficients rationnels. On démontre le résultat par induction sur  $n$  en utilisant encore la fibration des chemins  $K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ . Faisons par exemple l'étape d'induction dans le cas  $n$  impair. Alors en utilisant l'hypothèse d'induction et le théorème de Serre, on détermine une partie la  $n$ -ième page de la suite spectrale de ladite fibration (voir Fig. 8.5). Les applications  $d_n : x^j \mapsto jx^{j-1}y$  sont bien des isomorphismes pour  $j < p$  puisque dans ce cas  $j$  est inversible dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$ . Il est donc clair qu'en-dessous de la rangée  $2p+n-2 (< p(n-1))$ , les entrées non nulles entre les colonnes 0 et  $n$  disparaissent à la  $n$ -ième page, ce qui force l'entrée  $\mathbb{Z}_p$  à s'éliminer sur la première entrée non triviale de la rangée 0 après la colonne  $n$ . L'entrée de la rangée 0 liée à  $(0, 2p+n-2)$  est  $(2p+n-1, 0)$  et ceci démontre le résultat.

Le théorème se démontre en considérant la même fibration  $F \longrightarrow S_g^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  que dans la preuve du théorème 13. On considère la suite spectrale en cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_{(p)}$  associée à cette fibration et on sépare en deux cas selon que  $n$  est pair ou impair. Décrivons brièvement le cas pair en supposant le cas impair démontré. On sait grâce au calcul de la cohomologie de  $F$  à coefficients rationnels qu'on a une  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -composante en dimension  $2n - 1$ . En considérant le premier groupe de torsion sur  $(0, q)$  de la deuxième page selon sa position par rapport à  $2n - 1$ , on arrive à la conclusion que ce groupe est  $\mathbb{Z}_p$  et doit être en  $q = 2p + n - 2$ . Il en découle que la première  $\mathbb{Z}_p$ -composante en homologie est en dimension  $2p + n - 3$ . Ce résultat est suffisant pour terminer la preuve dans le cas où  $2p + n - 3 \leq 2n - 1$  puisque l'on peut alors utiliser le théorème de Hurewicz *mod*  $\mathbb{C}_{\{p\}}$ . Sinon, on transforme l'inclusion  $F \hookrightarrow F_{2n-1}$  en fibration où l'on a dénoté  $F_{2n-1}$  le  $(2n - 1)$ -ième espace de la tour de Postnikov de  $F$  (ou plutôt d'une CW approximation de  $F$ ). On considère encore une fois une fonction  $f : S^{2n-1} \mapsto F_{2n-1}$  qui induit un  $\mathbb{C}_{\{p\}}$ -isomorphisme en  $\pi_{2n-1}$ , ce qui implique qu'on a des  $\mathbb{C}_{\{p\}}$ -isomorphismes en homotopie en dimension  $< 2n + 2p - 3$ . En effet, tous les groupes d'homotopie de  $F_{2n-1}$ , hormis en dimension  $2n - 1$ , sont dans  $\mathbb{C}_{\{p\}}$ , tandis que pour  $S^{2n-1}$  la première dimension où l'on retrouve de la  $p$ -torsion est en  $2n + 2p - 3$  par le cas impair. Le théorème de Whitehead nous donne ainsi que  $f$  induit des  $\mathbb{C}_{\{p\}}$ -isomorphismes en homologie en dimension  $< 2n + 2p - 4$  et un épimorphisme en  $2n + 2p - 4$ . Ceci nous permet de calculer la  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -cohomologie de  $F_{2n-1}$  jusqu'en dimension  $2n + 2p - 3$  inclusivement. On transforme finalement l'inclusion  $F \hookrightarrow F_{2n-1}$  en fibration et un calcul simple sur la suite spectrale associée montre le résultat.

## 8.1 Calcul de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane

Les derniers exemples ont très certainement montré l'importance des espaces d'Eilenberg-MacLane dans le calcul des groupes d'homotopie de la sphère. On s'est satisfait jusqu'à présent de calculs approximatifs des groupes de cohomologie de  $K(G, n)$  pour un groupe de type fini  $G$ . En déterminant plus précisément ces groupes, on parviendra avec l'aide des fibrations usuelles à atteindre en partie son but. Brièvement, on considère la décomposition de Cartan-Serre-Whitehead. La première étape est d'étudier la même fibration qu'auparavant

$$X \longrightarrow S^n \longrightarrow K(\mathbb{Z}, n).$$

En connaissant la cohomologie de l'espace total et de la base, on peut espérer calculer la cohomologie de la fibre. Ce faisant, on aura déterminé  $\pi_{n+1}(S^n) = \pi_{n+1}(X)$  par le théorème de Hurewicz classique sachant que  $X$  est  $n$ -connexe. On poursuit ensuite avec



la deuxième fibration de la décomposition

$$\tilde{X}_2 \longrightarrow X \longrightarrow K(\pi_{n+1}(S^n), n+1).$$

On souhaite encore pouvoir obtenir la cohomologie de la fibre connaissant l'espace total et la base afin de pouvoir appliquer Hurewicz. Il s'agit ainsi d'une méthode inductive. Jean-Pierre Serre présenta cette technique dans son article *Cohomologie modulo 2 des espaces d'Eilenberg-MacLane* [16] et l'utilisa conjointement avec d'autres résultats pour calculer  $\pi_{n+i}(S^n)$  pour  $i \leq 8$  [17].

Il y a néanmoins un obstacle important à cette démarche. Dans une suite spectrale, la connaissance des groupes composant les pages n'est pas la seule variable, il faut parfois aussi connaître l'action des dérivées sur les groupes. Nous avons donc deux problèmes à résoudre : la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane et la détermination des dérivées d'une suite spectrale. En fait, ce dernier problème englobe, dans une certaine mesure, le premier. En effet, on obtiendra d'abord des outils pour calculer certaines dérivées qu'on pourra utiliser en particulier sur la fibration  $K(G, n-1) \longrightarrow x_{0_i} \longrightarrow K(G, n)$  dans le but de déterminer inductivement la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane.

Dans un premier temps, on étudiera une dérivée toute particulière,

$$d_n : E_{0,n-1} \longrightarrow E_{n,0}.$$

En parcourant les preuves de la dernière section, on remarque que cette dérivation a souvent été la clef dans les arguments de suites spectrales. Une première étape à franchir sera donc d'explicitier l'action de cette dérivée sous les isomorphismes du théorème de Serre.

Étant donné une fibration  $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ , on a une longue suite exacte en homotopie. La composante primordiale de cette suite est un isomorphisme  $\pi_n(X, F) \simeq \pi_n(B)$  qui permet de définir l'opérateur de bord  $\partial$  à partir de la longue suite exacte de la paire  $(X, F)$ . On peut tenter de reproduire cette approche en homologie. Par exemple, dans la preuve du théorème de Hurewicz, on avait des fibrations pour lesquelles  $H_n(X, F) \longrightarrow H_n(B)$  étaient des  $(\mathbb{C})$ -isomorphismes et donc on aurait pu leur associer une longue suite exacte en homologie. En général, le mieux qu'on puisse faire est de définir un analogue de l'opérateur de bord en homotopie via le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) \\ & \downarrow p_* & \\ H_n(B) & \xrightarrow{j} & H_n(B, b_0) \end{array}$$



On définit la *transgression* comme l'application

$$\tau : j^{-1}(p_*(H_n(X, F))) \mapsto \partial(H_n(X, F))/\partial(\ker(p_*))$$

déduite à partir de ce diagramme : partant d'en bas à gauche, on atteint le groupe du haut, à droite. Il s'agit donc d'un morphisme d'un sous-groupe de  $H_n(B)$  vers un groupe quotient de  $H_{n-1}(F)$ . Les éléments du sous-groupe de  $H_n(B)$  sont dits *transgressifs*. Rappelons que les isomorphismes du théorème de Serre nous donnent des identifications  $E_{0,n}^2 = H_n(F)$  et  $E_{n,0}^2 = H_n(B)$  si  $F$  est connexe par arcs et que  $\pi_1(B)$  agit trivialement sur  $H_*(X)$ . De plus, puisque la suite spectrale de Serre est une suite spectrale uniquement supportée dans le premier quadrant ( $(p, q)$  avec  $p, q \geq 0$ ), on a souvent remarqué que  $E_{0,n}^k$  est un groupe quotient de  $E_{0,n}^2$  et que  $E_{n,0}^k$  est un sous-groupe de  $E_{n,0}^2$ . Il s'avère que sous les identifications du théorème de Serre ces objets sont en fait le domaine et le codomaine de la transgression et ceci fait l'objet de la prochaine proposition.

**Proposition 13.** *Soit  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} B$  une fibration satisfaisant les hypothèses du théorème de Serre (pour un groupe  $G$  implicite). Alors  $d_n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$  est la transgression, où l'on identifie les groupes grâce aux isomorphismes du théorème de Serre.*

*Démonstration.* On supposera que la fibre  $F$  fixée est au-dessus d'une 0-cellule de  $B$ . On traite ici le cas de l'homologie, mais il va sans dire que la situation est tout à fait analogue en cohomologie. On choisit l'homologie puisque l'on se servira du résultat intermédiaire que l'on avait démontré au cours de la preuve du théorème de Hurewicz. Dans cette preuve, on a étudié l'image de l'application  $p_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(B, C)$  où  $C$  était un sous-complexe de  $B$  et  $A = p^{-1}(C)$ . On avait alors considéré le diagramme suivant, tiré de la suite spectrale de la fibration relative,

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{p_*} & H_n(B, C) \\ \downarrow & & \downarrow \simeq \\ D_{n,0}^\infty & \xrightarrow{p_*} & D'_{n,0}^\infty \\ \downarrow i & & \downarrow \simeq \\ D_{n,0}^2 = H_n(B, C) & \xrightarrow{p_*} & D'_{n,0}{}^2 = H_n(B, C) \end{array}$$

où on note par  $D$  et  $D'$  les termes des fibrations relatives  $(X, A)$  et  $(B, C)$ . Il était clair que les identifications du bas sont compatibles avec l'isomorphisme  $p_*$ . Plus particulièrement, pour  $C = b_0$  une 0-cellule, on observe que  $D_{n,0}^\infty = D'_{n,0}{}^\infty$ . Ceci provient simplement du fait que  $H_0(B, b_0) = 0$ . Comme on le sait,

$$D_{n,0}^\infty = \text{Im}(p_* : H_n(X, F) \rightarrow H_n(B, b_0))$$

via  $p_*$ .

Pour utiliser cette information, il nous faut comparer la suite spectrale de la fibration relative  $(X, F)$  à celle de la fibration  $(X, \emptyset)$ . L'inclusion de cette dernière paire dans la première nous donne un morphisme évident entre ces deux suites spectrales. À la deuxième page de ces suites spectrales, on a, par naturalité, des isomorphismes  $E_{p,q}^2 \simeq D_{p,q}^2$  pour  $p > 0$  provenant de la longue suite exacte en homologie de la paire  $(B, b_0)$ . Par induction, on déduit sans mal qu'en particulier  $E_{n,0}^n = D_{n,0}^n = \text{Im}(p_* : H_n(X, F) \rightarrow H_n(B, b_0))$ , ce qui nous assure que  $E_{n,0}^n$  est bien le domaine de la transgression. Il nous faut maintenant identifier l'action de la dérivation  $d_n$ . Intuitivement, il n'est pas surprenant que cette dérivée agisse comme l'opérateur de bord  $\partial$  puisque l'on a défini les dérivées à partir de cette application ! Plus précisément, on a que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n,0}^n = E_{n,0}^n & \xrightarrow{d_n} & E_{0,n-1}^n \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont les projections.

Pour voir que ce diagramme commute, il s'agit de se rappeler de la construction de la suite spectrale pour constater que les éléments de  $E_{n,0}^n$  sont tout simplement des classes d'équivalences de cycles  $\sigma \in H_n(X, F)$ . En effet, la projection

$$H_n(X, F) \rightarrow E_{n,0}^n$$

provient du morphisme  $H_n(X_n, F) \rightarrow H_n(X_n, X_{n-1})$  de la première page de la suite spectrale relative. Ainsi, la dérivée  $d_n$  d'une classe  $[\sigma] \in E_{n,0}^n$ ,  $\sigma \in C_n(X_n)$ , est définie tout simplement comme la classe d'un élément  $\beta$ ,  $\beta \in H_{n-1}(X_0)$ , pour lequel  $i_n(\beta) = [\partial(\sigma)]$ . Cependant, en ayant pour  $\sigma$  un cycle de  $H_n(X_n, F)$ , on voit qu'on peut directement prendre  $\beta = \partial(\sigma)$  puisque  $\partial(\sigma)$  a une image dans  $F$  donc dans  $X_0$ . Dans ce cas,  $d_n([\sigma]) = [\partial(\sigma)]$ . Voilà qui éclaircit la composée

$$H_n(X, F) \rightarrow E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n.$$

Pour ce qui est de l'autre chemin, il suffit de se convaincre que l'identification  $H_{n-1}(F) \rightarrow E_{n-1,0}^2$  a pour origine la composée

$$H_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X_0) \xrightarrow{qt} E_{n-1,0}^2.$$

C'est facilement vérifiable si l'on retourne à la preuve du théorème de Serre. Pour terminer la preuve, il faut montrer que le noyau de la projection  $H_{n-1}(F) \rightarrow E_{0,n-1}^n$



est l'image sous  $\partial$  du noyau de la projection  $H_n(X, F) \longrightarrow E_{n,0}^n$ . Remarquons que le dernier diagramme nous donne déjà une inclusion. On complète ce diagramme en prolongeant les deux rangées en suites exactes en utilisant la comparaison naturelle des fibrations  $(X, F)$  et  $(X, \emptyset)$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(X) & \xrightarrow{j} & H_n(X, F) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(F) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X) \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \uparrow d \\
 E_{n,0}^\infty & \xrightarrow{i} & D_{n,0}^n = E_{n,0}^n & \xrightarrow{d_n} & E_{0,n-1}^n & \longrightarrow & E_{0,n-1}^\infty
 \end{array}$$

Pour  $\alpha \in \ker(c)$ , on a  $i_*(\alpha) = 0$  par commutativité et donc  $\alpha = \partial(\beta)$ . Par exactitude et puisque  $a$  est surjectif, on trouve un élément  $\gamma$  dans  $H_n(X)$  tel que  $b(j(\gamma)) = b(\beta)$ . Ainsi,  $\alpha = \partial(j(\gamma) - \beta)$ , ce qui montre que  $\ker(c) \subset \partial(\ker(b))$ .  $\square$

En cohomologie la transgression est une application  $\tau$  d'un sous-groupe de  $H^{n-1}(F)$  vers un groupe quotient de  $H^n(B)$  obtenu par le même diagramme qu'en homologie mais avec le sens inversé des flèches. Comme il a été mentionné, le résultat ci-dessus se modifie sans problème pour le cas de la cohomologie. Dans les applications, puisqu'on travaille avec la suite spectrale en cohomologie, ce sera le plus souvent cette version de la transgression qui nous intéressera.

Il serait difficile d'utiliser la transgression en se basant uniquement sur la structure de produit cup de l'espace  $K(G, n-1)$  de la fibration  $K(G, n-1) \longrightarrow x_{0_i} \longrightarrow K(G, n)$ . Ce qu'il nous faut, c'est une structure en cohomologie qui est compatible avec la transgression. Pour cela, on introduit dans la prochaine section les *opérations de cohomologie* dont le produit cup en dimension fixée est un cas particulier. On s'intéressera par la suite à certaines familles d'opérations, que l'on appelle les puissances de Steenrod.

## 8.2 Opérations de cohomologie

**Définition 5.** Une opération de cohomologie de type  $(G, n, H, m)$  est une famille d'applications (au sens ensembliste)  $\theta_X$  pour chaque espace topologique  $X$ ,

$$\theta_X : H^n(X, G) \longrightarrow H^m(X, H),$$



qui est naturelle par rapport aux morphismes d'espaces topologiques. Autrement dit, étant donnée une fonction  $f : X \rightarrow Y$ , on exige que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, G) & \xrightarrow{\theta_X} & H^m(X, H) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^n(Y, G) & \xrightarrow{\theta_Y} & H^m(Y, H) \end{array} \quad (8.1)$$

L'application  $\alpha \rightarrow \alpha^m$  déduite du produit cup est un exemple d'opération de cohomologie. Il y a un résultat important en théorie de l'homotopie qui nous donne une bijection entre l'ensemble  $[X, K(G, n)]$  et  $H^n(X, G)$  pour un CW complexe  $X$  (voir [10] p. 177). Ce théorème nous permet d'établir une autre correspondance entre les opérations de cohomologie de type  $(G, n, H, m)$  et les classes de cohomologie de  $H^m(K(G, n), H)$ . Donc, le calcul de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane est équivalent à la détermination des opérations de cohomologie. Steenrod effectua une percée majeure dans ce domaine lorsqu'il introduisit plusieurs familles d'opérations de cohomologie que l'on regroupe sous le nom de puissances de Steenrod. Avant de passer à ce sujet, on discute d'une opération de cohomologie qui sera utile pour transférer de l'information de la cohomologie *mod p* vers la cohomologie à coefficients entiers. Ce sera pratique puisque l'on se concentrera par la suite principalement sur la cohomologie *mod p* car les puissances de Steenrod sont des opérations de type  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, m)$ .

Pour un espace  $X$ , on peut toujours associer à une courte suite exacte de groupes  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  la suite exacte suivante où comme toujours  $C_n(X; G)$  dénote le groupe des  $n$ -chaînes de  $X$  avec coefficients dans  $G$  :

$$0 \rightarrow C_n(X; A) \rightarrow C_n(X; B) \rightarrow C_n(X; C) \rightarrow 0.$$

Chaque application est celle induite par le morphisme correspondant de la courte suite exacte initiale. On obtient ainsi une suite exacte de complexes différentiels auquel on peut associer une longue suite exacte en homologie grâce au lemme du serpent

$$\cdots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(X; C) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X; A) \rightarrow \cdots$$

On a comme toujours une suite duale en cohomologie.

Pour la suite, nous portons notre attention plus particulièrement sur l'homomorphisme connecteur  $H^{n-1}(X; C) \rightarrow H^n(X; A)$ . Cette application est appelée l'homomorphisme de Bockstein. Rappelons brièvement le procédé par lequel cet homomorphisme est construit. Pour un élément  $[\sigma] \in H^n(X; C)$  avec  $\sigma \in C^n(X; C)$ , on trouve un relèvement  $\sigma' \in C^n(X; B)$  et on obtient un élément  $\gamma \in C^{n+1}(X; A)$  tel que l'image de  $\gamma$  est  $\delta(\sigma')$ . Puisque c'est le passage de la cohomologie *mod p* vers la cohomologie à

coefficients entiers qui nous intéresse, la suite exacte naturelle à étudier dans notre cas est

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

En fait, il sera aussi intéressant de considérer l'homomorphisme de Bockstein associé à la suite exacte  $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$  puisque ces opérations de cohomologie font partie des puissances de Steenrod. De plus, il y a un lien fort simple entre les deux applications. Dénotons d'abord  $\beta$  l'homomorphisme de Bockstein de la première suite et  $\beta'$  celui de la deuxième, puis finalement  $\pi$  l'application  $H^n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_p)$  induite par la projection usuelle. Alors,  $\beta' = \pi(\beta)$ . En effet, on a une application naturelle entre les deux suites exactes grâce aux projections  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ ,  $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$ . Par ailleurs, les homomorphismes de Bockstein des deux suites sont construits via le lemme du serpent à partir des deux complexes différentiels de la cohomologie et des deux suites exactes. Comme le tout est commutatif, le diagramme suivant nous convainc de la relation  $\beta' = \pi(\beta)$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C^n(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^n(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^n(X, \mathbb{Z}_p) & (8.2) \\
 & \swarrow & \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & \\
 C^n(X, \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & C^n(X, \mathbb{Z}_{p^2}) & \longrightarrow & C^n(X, \mathbb{Z}_p) & & & \\
 \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & C^{n+1}(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^{n+1}(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & C^{n+1}(X, \mathbb{Z}_p) & \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 C^{n+1}(X, \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & C^{n+1}(X, \mathbb{Z}_{p^2}) & \longrightarrow & C^{n+1}(X, \mathbb{Z}_p) & & & 
 \end{array}$$

Étant donné une fonction  $f : X \longrightarrow Y$ , on obtient le même genre de diagramme commutatif et il devient clair alors que l'homomorphisme de Bockstein est naturel par rapport aux fonctions entre espaces topologiques. Les homomorphismes de Bockstein sont donc des opérations de cohomologie. On peut les voir comme une famille d'opérations  $(n, \mathbb{Z}_p, n + 1, \mathbb{Z}_p)$  (ou  $(n, \mathbb{Z}_p, n + 1, \mathbb{Z})$  dans le cas de  $\beta$ ).

Il n'est pas difficile de vérifier par inspection que l'homomorphisme de Bockstein est anticommutatif avec l'homomorphisme connecteur  $\delta$  de la longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^{n+1}(X, A) \longrightarrow \dots$$

D'autre part, on rappelle que l'isomorphisme de suspension  $\sigma$  en cohomologie est défini par les applications

$$H^n(X) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(CX, X) \xleftarrow{q_*} H^{n+1}(SX).$$

Par conséquent, les homomorphismes de Bockstein commutent, à un signe près, avec l'isomorphisme de suspension. Une telle famille d'opération est appelée *stable* ; on discutera de cette propriété plus en détails dans la prochaine sous-section.



Un des intérêts majeurs de  $\beta$  est qu'il permet de différencier, dans une certaine mesure, les éléments d'ordre  $p$  des éléments d'ordre  $p^k$  pour  $k > 1$  du groupe  $H^n(X, \mathbb{Z})$ . Plus précisément, on voit par le théorème des coefficients universels en cohomologie qu'une composante  $\mathbb{Z}_{p^k}$  de  $H_n(X, \mathbb{Z})$  devient une composante  $\mathbb{Z}_p$  dans  $H^n(X, \mathbb{Z}_p)$ . Bref, l'exposant  $k$  est perdu si l'on connaît uniquement la cohomologie modulo  $p$ . Néanmoins, on a le résultat suivant qui nous permet dans certaines situations de corriger cette imprécision.

**Proposition 14.** *Soit  $X$  un espace dont l'homologie à coefficients entiers est de type fini. Soit  $n$  un entier,  $p$  un premier et écrivons*

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{k_m}} \oplus G$$

pour un groupe  $G$  sans  $p$ -torsion. Aussi, on écrit

$$H^n(X, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^r \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$$

via le théorème des coefficients universels. Soit finalement  $\gamma$  un générateur d'une composante  $\mathbb{Z}_p$  de  $H^n(X, \mathbb{Z}_p)$  et  $\beta, \beta'$  les homomorphismes de Bockstein pour le premier  $p$ . Alors, si  $\beta'(\gamma) \neq 0$ , la composante correspondante de  $H_n(X, \mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}_p$ . Conséquent,  $\pi : H^n(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_p)$  est injectif sur cette composante  $\mathbb{Z}_p$ . De plus, pour chaque composante  $\mathbb{Z}_{p^{k_j}}$  avec  $k_j > 1$  de  $H_n(X, \mathbb{Z})$  il y a une composante  $\mathbb{Z}_p$  de  $H^n(X, \mathbb{Z}_p)$  et un élément  $\omega$  non nul de cette composante avec  $\beta'(\omega) = 0$ . À l'inverse, un élément  $\omega$  non nul d'une composante  $\mathbb{Z}_p$  de  $H^n(X, \mathbb{Z}_p)$  pour laquelle  $\beta'(\omega) = 0$  correspond soit à une  $\mathbb{Z}_{p^k}$ -composante de  $H_n(X, \mathbb{Z})$ , soit à une composante  $\mathbb{Z}$  de  $H_n(X, \mathbb{Z})$  ou bien à un élément de  $\text{Ext}(H_{n-1}(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$ .

Le résultat est complètement algébrique. Il suffit de se donner un modèle du complexe différentiel de la cohomologie de  $X$  qui nous permet de déterminer l'image du Bockstein  $\beta$  simplement. On peut ensuite calculer  $\beta'$  grâce à la relation  $\pi(\beta) = \beta'$ . On définit donc un nouveau complexe différentiel où pour chaque composante  $\mathbb{Z}_m$  de  $H_j(X, \mathbb{Z})$  on se donne une paire d'éléments  $(\alpha, \omega)$  de dimensions évidentes avec  $\partial\omega = m\alpha$  et  $\partial\alpha = 0$ . Pour les composantes  $\mathbb{Z}$ , il suffit d'ajouter un élément  $\gamma$  avec  $\partial\gamma = 0$ . On a un isomorphisme évident entre ce nouveau complexe et le complexe de l'homologie de  $X$ . Une telle application entre complexes différentiels de groupes libres est aussi un isomorphisme en cohomologie par un résultat algébrique connu. Il s'agit ensuite de calculer la cohomologie du nouveau complexe différentiel ainsi que l'action du Bockstein. Pour une preuve détaillée, voir [6] p. 305.

Dans la pratique, on sera en mesure de connaître l'image du Bockstein  $\beta'$  et la proposition précédente nous servira d'outil principal pour passer de la cohomologie *mod*  $p$  à la cohomologie à coefficients entiers.



### 8.3 Puissances de Steenrod

Les puissances de Steenrod sont des familles d'opérations de cohomologie de type  $(\mathbb{Z}_p, n, \mathbb{Z}_p, m)$  pour un premier  $p$  et deux entiers  $m \geq n$ . Il y a au plus une seule opération de Steenrod d'un type  $(\mathbb{Z}_p, n, \mathbb{Z}_p, m)$  ( $m \geq n$ ). Ces opérations sont regroupées en familles selon le premier  $p$  et la différence  $m - n$ . En cohomologie modulo 2, on a une et une seule opération de Steenrod pour chaque type  $(\mathbb{Z}_2, n, \mathbb{Z}_2, n + j)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . On les appelle communément les *carrés de Steenrod* et on les note

$$Sq_n^j : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+j}(X, \mathbb{Z}_2).$$

Pour les premiers  $p$  impairs, on a les opérations

$$P_n^i : H^n(X, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n+2i(p-1)}(X, \mathbb{Z}_p).$$

Comme on l'a mentionné, on regroupe généralement les opérations  $P_n^i$  ou  $Sq_n^i$  (pour  $i$  fixé et  $n$  variable) ensemble et on se contente donc habituellement d'écrire  $P^i$  ou  $Sq^i$ . Il est naturel de regrouper ainsi ces opérations étant donné l'une des propriétés fondamentales de la famille d'opérations de Steenrod  $P^i$  (ou  $Sq^i$ ) de type  $(\mathbb{Z}_p, n, \mathbb{Z}_p, n + 2i(p-1))$ . Il s'agit de la stabilité sous le morphisme de suspension. Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} H^{n+1}(SX, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{P^i} & H^{n+1+2i(p-1)}(SX, \mathbb{Z}_p) \\ \sigma \uparrow & & \sigma \uparrow \\ H^n(X, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{P^i} & H^{n+2i(p-1)}(X, \mathbb{Z}_p) \end{array} \quad (8.3)$$

où  $\sigma$  dénote l'isomorphisme de suspension  $H^n(X) \longrightarrow H^{n+1}(SX)$  en cohomologie/homologie.

En général, étant donné une opération de cohomologie  $\theta$  de type  $(G, n, H, m)$ , on définit la suspension  $\sigma^*(\theta)$  comme étant l'opération de type  $(G, n-1, H, m-1)$  qui est la composée  $\sigma^{-1} \circ \theta \circ \sigma$ . Une application définie ainsi est naturelle par rapport aux morphismes d'espaces topologiques puisque l'isomorphisme de suspension l'est. Par conséquent, si l'on connaît une opération de Steenrod  $\theta$  de type  $(\mathbb{Z}_p, n, \mathbb{Z}_p, n+j)$ , alors on sait que les opérations de dimension inférieure de type  $(\mathbb{Z}_p, n-k, \mathbb{Z}_p, n-k+j)$  sont données par les itérations  $\sigma^*(\dots(\sigma^*(\theta))\dots)$ . Pour cette même application  $\theta$ , on a que  $\theta(\iota_n)$  (avec  $\iota_k$  une classe fondamentale de  $K(\mathbb{Z}_p, k)$ ) nous donne un élément de  $H^{n+j}(K(\mathbb{Z}_p, n), \mathbb{Z}_p)$ . La suspension de l'application  $\theta$  sous cette identification avec  $H^*(K(\mathbb{Z}_p, n), \mathbb{Z}_p)$  correspond à l'élément  $\sigma^{-1}(f^*(\theta(\iota_n)))$  où  $f : SK(\mathbb{Z}_p, n-1) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n)$  est la fonction associée à l'élément  $\sigma(\iota_{n-1})$ .

Une deuxième propriété fondamentale des carrés de Steenrod est que l'opération  $Sq^i$  de type  $(\mathbb{Z}_2, i, \mathbb{Z}_2, i+i)$  est toujours donnée par  $Sq^i(\alpha) = \alpha^2$ . On aura une propriété

tout à fait analogue pour un premier  $p$  quelconque mais il est plus simple pour l'instant de considérer uniquement la cohomologie modulo 2.

Connaissant ces deux propriétés, on pourrait être tenté de définir les opérations de Steenrod en inversant le procédé de suspension. On débute avec l'application  $\theta_1 : \alpha \mapsto \alpha^2$  de  $H^n(X) \rightarrow H^{2n}(X)$ . Ensuite, on cherche une opération  $\theta_2 : H^{n+1} \rightarrow H^{2n+1}$  telle que  $\sigma^*(\theta_2) = \theta_1$ . On tente donc de définir successivement  $\theta_1, \theta_2, \dots$  en espérant obtenir les opérations qu'on avait noté  $Sq^n$ . Il s'avère que la transgression de la fibration de l'espace des chemins

$$\Omega K(\mathbb{Z}_2, k+1) \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, k+1)$$

nous permet d'inverser la suspension  $\sigma^*$  si l'élément en question est transgressif. Par exemple, si  $\iota_n^2 \in H^{2n}(K(\mathbb{Z}_2, n))$  est transgressif, alors la transgression

$$\tau(\iota_n^2) \in H^{2n+1}(K(\mathbb{Z}_2, n+1))$$

représente une opération de cohomologie dont la suspension donne  $\theta_1$ .

C'est ainsi qu'il est possible, par des arguments de suites spectrales, de définir les carrés de Steenrod comme une suite d'éléments des  $H^*(K(\mathbb{Z}_2, k))$  reliés par la transgression. C'est le point de vue adopté entre autres dans [4]. Cette perspective est d'autant plus intéressante qu'elle dévoile l'analogie entre le calcul des groupes d'homotopie de la sphère et le calcul des groupes de cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane. La dynamique dans les deux cas est très semblable. La transgression joue le rôle de l'homomorphisme de suspension en homotopie et on peut associer à un élément  $\alpha \in H^n(K(\mathbb{Z}_p, m), \mathbb{Z}_p)$  une fonction  $\alpha : K(\mathbb{Z}_p, m) \rightarrow K(\mathbb{Z}_p, n)$  tout comme on associe à  $[f] \in \pi_n(S^k)$  la fonction  $f : S^n \rightarrow S^k$ . Néanmoins, cette méthode pour construire les opérations de Steenrod ne serait pas la plus logique à adopter sachant que notre but est de calculer la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane avec ces opérations et non l'inverse.

Historiquement, ce n'est pas de cette façon que les puissances de Steenrod ont été introduites. La construction de Steenrod se réalise au niveau des cochaînes du complexe différentiel de la cohomologie. Il introduit une généralisation du produit cup  $\cup_i$ . Pour  $i = 0$ , il s'agit du produit cup habituel. Inductivement, les produit cups de dimension  $i$  sont liés au produit cup de dimension  $i - 1$  par la "coboundary formula" (voir [19], théorème 5.1).

Par exemple, dans le cas  $i = 1$ , le produit cup  $\cup_1$  est lié au fait que le produit cup usuel est presque commutatif : pour deux simplexes  $\sigma$  et  $\beta$ , la différence  $\sigma \cup \beta + (-1)^{kl} \beta \cup \sigma$  est un cobord. Il définit finalement pour un élément  $x \in C^n(X, \mathbb{Z}_2)$ ,  $Sq^{n-i}(x) = x \cup_i x$ . Voir [19] pour une référence de l'article de Steenrod.



On peut montrer que les carrés de Steenrod satisfont les propriétés suivantes :

- (1)  $Sq^i$  commute avec l'isomorphisme de suspension.
- (2)  $Sq^i(\alpha) = \alpha^2$  si  $\alpha$  est une classe de cohomologie de dimension  $i$  et  $Sq^i(\alpha) = 0$  si la dimension de  $\alpha$  est strictement plus petite que  $i$ .
- (3)  $Sq^0$  est la fonction identité.
- (4)  $Sq^1$  est l'homomorphisme de Bockstein.
- (5)  $Sq^j(x \cup y) = \sum_{i=0}^j Sq^i(x) \cup Sq^{j-i}(y)$ , cette relation est appelée formule de Cartan.
- (6) Si  $a < 2b$ , alors  $Sq^a \circ Sq^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} \circ Sq^j$ .

La dernière propriété mérite certainement d'être commentée. Tout d'abord, on nomme les relations exprimées en (6) les *relations d'Adem*. Ces relations mettent en évidence une structure additionnelle que l'on avait omise jusqu'à présent : la composition d'opérations de cohomologie. Il est tout à fait naturel de considérer les composées de puissances de Steenrod. L'ensemble des opérations  $Sq^i$  munies de la composition forme une algèbre que l'on note  $A_2$  et qu'on appelle *algèbre de Steenrod modulo 2*. Étant donné les relations d'Adem, on peut modifier cette définition en quotientant cette algèbre par les idéaux engendrés par les différences issues des relations.

Une conséquence de (6) est que chaque élément de  $A_2$  peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de la forme  $Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_n}$  avec  $i_{k-1} \geq 2i_k$ . Si l'élément choisi de  $A_2$  n'est pas de cette forme, il est facile de voir que l'on peut appliquer les relations d'Adem autant de fois que nécessaire pour obtenir une somme de termes de la forme voulue. On dit qu'une suite  $I = (i_1, \dots, i_n)$  d'entiers positifs est admissible si  $i_{k-1} \geq 2i_k$  et on note  $Sq^I := Sq^{i_1} Sq^{i_2} \dots Sq^{i_n}$ .

Pour  $p$  un premier impair, les puissances de Steenrod  $P^i$  satisfont des propriétés analogues à celles satisfaites par les carrés de Steenrod :

- (1)  $P^i$  commute avec l'isomorphisme de suspension.
- (2)  $P^i(\alpha) = \alpha^p$  si  $\alpha$  est une classe de cohomologie de dimension  $2i$  et  $P^i(\alpha) = 0$  si la dimension de  $\alpha$  est strictement plus petite que  $2i$ .
- (5)  $P^j(x \cup y) = \sum_{i=0}^j P^i(x) \cup P^{j-i}(y)$ .
- (6) Si  $a < pb$ , alors  $P^a \circ P^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} \binom{(p-1)(b-1)-j}{a-pj} P^{a+b-j} \circ P^j$ .

Il convient avant de prendre l'algèbre engendrée par ces opérations d'ajouter l'homomorphisme de Bockstein  $\beta'$ . On définit donc  $A_p$  à partir des  $P^i$  et de  $\beta'$ . Il existe d'autres relations d'Adem faisant intervenir  $\beta'$  :

- (7) Si  $a \leq pb$ , alors

$$P^a \beta' P^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta' P^{a+b-j} P^j$$



$$+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a-1}{p} \rfloor} (-1)^{a+j-1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta' P^j.$$

On peut maintenant associer à une suite  $I = (\epsilon_0, i_1, \epsilon_1, i_2, \epsilon_2, \dots, i_n, \epsilon_n)$  d'entiers non-négatifs avec  $\epsilon_k \in \{0, 1\}$ , la composition  $P^I := \beta'^{\epsilon_0} P^1 \beta'^{\epsilon_1} \dots P^n \beta'^{\epsilon_n}$  de façon à avoir une écriture compacte pour les éléments de l'algèbre  $A_p$ . De façon analogue à précédemment, on dira qu'un élément  $P^I$  est admissible si aucune relation d'Adem ne peut être appliquée, i.e.  $i_k \geq p i_{k+1} + \epsilon_k$ .

On supposera pour la suite que les puissances de Steenrod ont été construites et satisfont les propriétés énoncées. Ce qui nous permettra d'utiliser cette nouvelle structure en cohomologie avec la transgression est la propriété (1). Cela est rendu précis dans la proposition suivante.

**Proposition 15.** *Soit  $F \rightarrow X \xrightarrow{p} B$  une fibration satisfaisant les hypothèses du théorème de Serre. Si  $\alpha \in H^{n-1}(F; \mathbb{Z}_p)$  est transgressif, alors  $P^i(\alpha)$  est transgressif et  $\tau(P^i(\alpha)) = P^i(\tau(\alpha))$ .*

*Démonstration.* Rappelons que la transgression est définie comme étant la composition

$$\delta^{-1}(Im(p^*)) \xrightarrow{\delta} Im(p^*) \xrightarrow{p^{*-1}} H^n(B, b_0)/ker(p^*) \rightarrow H^n(B)/ker(p^*)$$

où  $\delta$  représente l'homomorphisme connecteur de la longue suite exacte de la paire  $(X, F)$  et  $p^{*-1}$  est bien défini si l'on prend pour image le quotient par  $ker(p^*)$ .

Tout d'abord, remarquons que  $P^i(ker(p^*)) \subset ker(p^*)$  car  $P^i$  est un homomorphisme qui commute avec  $p^*$ . Les puissances de Steenrod sont donc bien définies sur l'image de la transgression. Il nous faut maintenant voir que les puissances de Steenrod commutent avec l'homomorphisme connecteur  $\delta$ . Si l'on définit ces opérations à partir des chaînes, on peut facilement obtenir les opérations de Steenrod sur les chaînes relatives  $C^n(A, B)$  et la commutativité de  $\delta$  devient alors immédiate. Si l'on se restreint à travailler seulement avec les propriétés énoncées plus tôt, on doit définir les opérations de Steenrod sur la paire  $(X, F)$  en utilisant l'application quotient  $q^* : H^n(X, F) \leftarrow H^n(X/F)$  qui est un isomorphisme dans le cas où  $(X, F)$  est une CW paire. On considère donc une CW approximation  $(Z, A)$  de la paire  $(X, F)$ . Étant donné que  $B$  est supposé un CW complexe, on peut trouver une fonction  $p' : (Z, A) \rightarrow (B, b_0)$  tel que le diagramme suivant commute à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} (Z, A) & \longrightarrow & (X, F) \\ & \searrow p' & \swarrow p \\ & & (B, b_0) \end{array} \quad (8.4)$$

Remarquons que le diagramme des groupes d'homologie associé est commutatif puisqu'en homologie deux fonctions homotopes sont identiques.

Pour la paire  $(Z, A)$ , on a les applications

$$H^{n-1}(A) \xrightarrow{\delta} H^n(Z, A) \longrightarrow H^n(Z/A) \xleftarrow{p'^*} H^n(B).$$

Clairement, les puissances de Steenrod commutent avec l'application  $p'^*$  par naturalité des opérations de cohomologie. En ce qui concerne la composition  $H^{n-1}(A) \longrightarrow H^n(Z/A)$ , on considère les longues suites exactes des paires  $(CA, A)$ ,  $(Z, A)$  et  $(CZ, A)$  ainsi que les inclusions naturelles  $CA \longrightarrow CZ$ ,  $Z \longrightarrow CZ$ . Par naturalité des morphismes des longues suite exactes, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(A) & \longrightarrow & H^n(Z/A) \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ H^n(CA/A) & \longleftarrow & H^n(CZ/A) \end{array} \quad (8.5)$$

L'application  $H^n(CA, A) \longrightarrow H^n(CZ, A)$  est un isomorphisme car  $CZ$  se déforme dans  $CA$ . En effet, étant donné une paire de CW complexes  $(B, C)$ , on peut toujours construire une déformation rétractante de  $B \times I$  dans  $C \times I \cup B \times \{0\}$  : voir la preuve de HEP pour les paires de CW complexes dans [6]. En prenant le quotient par  $B \times \{0\}$ , on obtient la déformation rétractante voulue. Ainsi, on peut obtenir l'application  $H^{n-1}(A) \longrightarrow H^n(Z/A)$  par la composition bas-droite-haut du diagramme. Le premier morphisme de cette composition n'est rien d'autre que la suspension  $H^{n-1}(A) \longrightarrow H^n(CA/A)$  où  $CA/A = SA$  et les deux autres morphismes proviennent de fonctions continues entre espaces topologiques et donc les puissances de Steenrod commutent avec chacune de ces fonctions. Les remarques précédentes nous permettent de déduire que les  $P^i$  commutent avec la transgression pour la fonction  $(Z, A) \longrightarrow (B, b_0)$ . Il n'est pas difficile d'inférer la même conclusion pour la paire  $(X, F)$  en utilisant le premier diagramme. La proposition est donc démontrée.

□

## 8.4 Retour à la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane

Une première simplification sera de calculer la cohomologie modulo  $p$  pour chaque premier  $p$ . Cela est suffisant pour nos besoins.



La dernière proposition nous permet de déterminer l'action de certaines dérivées d'une suite spectrale sur les images d'éléments transgressifs par des puissances de Steenrod. Serre utilisa cette nouvelle structure en cohomologie modulo  $p$  pour calculer l'anneau de cohomologie des espaces  $K(\mathbb{Z}_2, n) = K_{n,2}$ . Cartan [1] obtint de son côté le résultat pour les premiers impairs. Comme on le verra, la méthode utilisée par Serre fonctionne aussi bien pour un espace  $K(\mathbb{Z}, n)$ . Par la formule de Künneth, nous serons donc en mesure de calculer la cohomologie *mod*  $p$  d'un espace  $K(G, n)$  pour n'importe quel groupe de type fini  $G$ .

Attardons-nous pour l'instant à la cohomologie modulo  $p$  d'un  $K_{n,p}$  que l'on étudiera par induction à partir de la fibration  $K_{n-1,p} \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K_{n,p}$ . Pour ce faire, on doit démarrer l'induction en considérant l'espace  $K_{1,p}$ . Commençons par le cas de la cohomologie modulo 2. Ainsi, on s'intéresse à l'espace  $K(\mathbb{Z}_2, 1) = \mathbb{R}P^\infty$ . Effectivement, on a des projections évidentes  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  qui sont en fait des fibrés  $\{-1, 1\} \rightarrow S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ . Puisque  $\mathbb{R}P^n$  est le  $n$ -squelette de  $\mathbb{R}P^\infty$ , on peut utiliser le théorème d'approximation cellulaire et les longues suites exactes des fibrés pour obtenir que  $\mathbb{R}P^\infty$  est un espace  $K_{1,2}$ . Un point de vue équivalent est de voir  $\mathbb{R}P^\infty$  comme l'union des  $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_2$  où l'on plonge  $S^{2n-1}$  dans  $\mathbb{C}^n$  et on quotiente par l'action  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (e^{i\pi} z_1, e^{i\pi} z_2, \dots)$  engendrée par  $\mathbb{Z}_2$ . Dans tous les cas, on est en mesure de déterminer la cohomologie modulo 2 du CW complexe  $\mathbb{R}P^\infty$  (voir [6]). On obtient que  $H^*(K(\mathbb{Z}_2, 1), \mathbb{Z}_2)$  est isomorphe comme anneau à  $\mathbb{Z}_2[\alpha]$  où  $\alpha$  est un générateur de dimension 1. Remarquons que l'on peut écrire  $\alpha^{2^n}$  comme  $Sq^{2^{n-1}} \cdots Sq^2 Sq^1(\alpha)$ . Il est facile de voir que dans la suite spectrale  $K_{1,2} \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K_{2,2}$  le générateur  $\alpha \in H^1(K_{1,2}, \mathbb{Z}_2) = E_{0,1}^2$  est transgressif. On déduit ainsi que  $\alpha^2 = Sq^1(\alpha)$  est transgressif. Il n'est pas difficile finalement de conclure que  $H^3(K_{2,2}, \mathbb{Z}_2) = Sq^1(\tau(\alpha))$  où  $\tau(\alpha)$  est un générateur de  $H^2(K_{2,2})$ . On pourrait tenter de continuer de cette façon pour déterminer la structure de  $H^*(K_{2,2})$ ; cependant il nous faut une procédure globale qui nous permet d'effectuer cette infinité de calculs.

Il s'agira en fait de deviner la réponse et de vérifier qu'elle est juste. C'est précisément ce qu'on peut faire avec le théorème de Borel sur les suites spectrales. Avant d'énoncer ces théorèmes de Borel, Cartan et Serre, il convient de mettre à jour la terminologie relative aux puissances de Steenrod.

Pour une suite admissible  $I = (i_1, \dots, i_k)$ , on définit l'*excès* de  $Sq^I$  comme étant l'entier

$$e(I) = i_k + \sum_{j=1}^{k-1} i_j - 2i_{j+1} = i_1 - \sum_{j=1}^k i_j.$$

Cette dernière écriture nous dévoile que si  $e(I) > m$ , alors  $Sq^I$  est trivial sur les classes de cohomologie de dimension  $\leq m$  en conséquence de la propriété (4). Pour les premiers



impairs, l'excès de  $P^I$  pour une suite  $I = (\epsilon_0, i_1, \epsilon_1, i_2, \epsilon_2, \dots, i_n, \epsilon_n)$  admissible est défini comme étant l'entier

$$e(I) = 2i_n + \sum_{j=1}^{n-1} 2(i_j - pi_{j+1}) - \sum_{j=1}^n \epsilon_j = 2(p-1)i_1 - \epsilon_1 - \sum_{j=2}^n \epsilon_j + 2(p-1)i_j.$$

On remarque encore une fois que la propriété (4) entraîne que  $P^I$  est trivial sur les classes de cohomologie de dimension  $< e(I)$ .

On aura aussi besoin du concept de système de générateurs  $p$ -simple. Étant donné  $A$  une algèbre graduée sur  $\mathbb{Z}_p$ , on dira que  $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$  est un système  $p$ -simple de générateurs si les éléments de l'ensemble

$\{x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_m}^{a_m} : i_1 > i_2 > \dots > i_m \geq 1 \text{ et } 0 < a_j \leq p-1 \text{ si } |x_{i_j}| \text{ est paire, } a_j = 1 \text{ sinon}\}$  forment une base de  $A$  vu comme espace vectoriel.

Nous sommes en mesure d'énoncer les théorèmes de Cartan et Serre.

**Théorème 15.** *Soit  $p$  un premier impair,  $n$  un entier et  $\iota_n$  un générateur de  $H^n(K_{n,p}; \mathbb{Z}_p)$ . Alors,  $H^*(K_{n,p}; \mathbb{Z}_p)$  est l'algèbre libre graduée anticommutative de générateurs  $P^I(\iota_n)$  où  $P^I$  est admissible avec un excès  $e(I) < n$ .*

Une manière de se représenter  $H^*$  de façon plus explicite serait de voir un élément de  $H^*$  comme une combinaison  $\mathbb{Z}_p$ -linéaire d'éléments  $P^{I_1}(\iota_n) \dots P^{I_k}(\iota_n)$  où chaque  $P^{I_j}(\iota_n)$  est vu comme une variable d'un anneau de polynôme et le produit de deux éléments respecte la règle usuelle d'anticommutativité du produit cup. On a donc entre autres les relations  $P^I(\iota_n)^2 = 0$  si la dimension est impaire. Dans le cas où  $p = 2$ , exactement le même théorème est valide mais il est plus simple de dire alors que  $H^*(K_{n,2}; \mathbb{Z}_2)$  est l'anneau des polynômes avec pour variables les générateurs ci-haut mentionnés.

Le théorème de Borel est purement algébrique bien que par simplicité on l'énonce dans un cadre topologique. On énonce le théorème dans le cas des systèmes 2-simples de générateurs, il est donc valide pour le cas  $p = 2$ . Pour le théorème général, voir [11].

**Théorème 16.** *Soit  $F \rightarrow X \rightarrow B$  une fibration satisfaisant les hypothèses du théorème de Serre avec  $X$  contractile. Supposons de plus que  $H^*(F; \mathbb{Z}_2)$  a un système 2-simple de générateurs  $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$  où chaque  $x_i$  est transgressif. Alors,  $H^*(B, \mathbb{Z}_2)$  est l'anneau des polynômes de variables  $\tau(x_1), \dots, \tau(x_k), \dots$*

Ce résultat peut s'énoncer dans un cadre complètement algébrique où l'on suppose entre autres qu'on a une suite spectrale supportée dans le premier quadrant et dont la

deuxième page est le produit tensoriel de la première colonne avec la première rangée. Si  $p$  est impair, les hypothèses restent les mêmes mais on obtient pour conclusion que  $H^*(B; \mathbb{Z}_p)$  est l'algèbre libre graduée de générateurs

$$\{\tau(x_i), \tau(\tau(x_j)x_j^{p-1}) : i, j \geq 1, |x_j| = 2m\}$$

où par abus de notation  $\tau(\tau(x_j)x_j^{p-1})$  signifie que l'élément  $\tau(x_j)x_j^{p-1}$  survit jusqu'à la différentielle atteignant la première rangée et l'on dénote par extension  $\tau$  cette différentielle.

*Démonstration.* Voir [7] p. 55 pour le cas  $p = 2$  et [11] p. 198 pour le cas impair.  $\square$

Revenons au problème initial, c'est-à-dire l'étude de la suite spectrale  $K_{1,2} \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K_{2,2}$ . On remarque que cette fibration satisfait les hypothèses du théorème de Borel. En effet, comme on l'avait mentionné, le générateur  $\iota_1 \in H^1(K_{1,2}; \mathbb{Z}_2)$  est transgressif et  $H^*$  possède un système 2-simple de générateurs : les puissances  $\iota_1^{2^k} = Sq^{2^{k-1}} \cdots Sq^1(\iota_1)$  forment un tel système pour l'anneau de polynômes  $\mathbb{Z}_2[\iota_1] = H^*(K_{1,2}; \mathbb{Z}_2)$ . C'est évident si l'on considère l'écriture d'un entier en base 2. Ce système 2-simple est transgressif par la dernière proposition. Le théorème de Borel et le fait que  $\tau$  commute avec les  $Sq$  impliquent alors que  $H^*(K_{2,2}; \mathbb{Z}_2)$  est l'anneau des polynômes de variables  $Sq^{2^{k-1}} \cdots Sq^1\tau(\iota_1)$ . Il s'agit précisément de l'énoncé du théorème de Serre puisque  $\tau(\iota_1)$  est un générateur de  $H^2(K_{2,2}; \mathbb{Z})$  et les  $Sq^I$  d'excès  $< 2$  sont exactement les éléments de la forme  $Sq^{2^{k-1}} \cdots Sq^1$ .

Pour l'étape d'induction, supposons le résultat pour  $n - 1$ . Remarquons d'abord qu'on a encore un isomorphisme

$$\tau : H^{n-1}(K_{n-1,2}; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(K_{n,1}, \mathbb{Z}_2)$$

qui provient du fait que la page  $E^\infty$  de la suite spectrale est triviale et que  $K_{m,2}$  est  $(m - 1)$ -connexe. Par induction, on sait que  $H^*(K_{n-1,2}; \mathbb{Z}_2)$  est l'anneau des polynômes à variables  $Sq^I(\iota_{n-1})$  où  $I$  est admissible et d'excès  $< n - 1$ . Comme précédemment, il est alors immédiat que  $\{(Sq^I)^{2^j} : j \geq 0, I \text{ admissible et } e(I) < n - 1\}$  est un système 2-simple de générateurs transgressifs. Bref, le théorème de Borel entraîne que  $H^*(K_{n,2})$  est l'anneau des polynômes à variables  $\tau((Sq^I((\iota_{n-1}))^{2^j})$ .

On observe que

$$(Sq^I(\iota_{n-1}))^{2^j} = Sq^{2^{j-1}k} \cdots Sq^k Sq^I(\iota_{n-1})$$

pour  $k = |Sq^I(\iota_{n-1})|$ . Si l'on écrit  $I = (i_1, \dots, i_r)$ , on a  $k = (n - 1) + i_1 + \cdots + i_r$ . Puisque

$$e(I) = i_1 - (i_2 + \cdots + i_r) < n - 1,$$



on voit que  $k \geq 2i_1$  ce qui nous assure que la suite  $I' = (2^{j-1}k, \dots, k, I)$  est admissible. De plus, il est évident que l'excès de  $Sq^{I'}$  est donné par

$$e(I') = k - 2i_1 + e(I) = k - i_1 - i_2 - \dots - i_r = n - 1.$$

Ainsi,  $Sq^{I'}$  est d'excès  $n - 1$ . À l'inverse, étant donné un élément admissible  $Sq^J$ ,  $J = (j_1, \dots, j_r)$ , d'excès  $n - 1$ , on a que

$$Sq^J(\iota_{n-1}) = (Sq^{j_2} \dots Sq^{j_r}(\iota_{n-1}))^2.$$

L'excès de la sous-suite  $J' = (j_2, \dots, j_r)$  est plus petit ou égal à l'excès de  $J$  puisque la suite est admissible. Si  $e(J') = n - 1$  on peut répéter le même procédé pour enfin obtenir que

$$Sq^J(\iota_{n-1}) = (Sq^{j_3} \dots Sq^{j_r}(\iota_{n-1}))^{2^2}.$$

La conclusion de cette observation est que chaque élément admissible d'excès  $n - 1$  s'écrit comme une puissance  $2^k$  d'un élément d'excès  $< n - 1$ . Par conséquent, l'ensemble  $\{\tau(Sq^I)^{2^j} : j \geq 0, I \text{ admissible et } e(I) < n - 1\}$  est en fait l'ensemble  $\{Sq^I(\tau(\iota_{n-1})) : I \text{ est admissible et } e(I) < n\}$ . Comme  $\tau(\iota_{n-1})$  est un générateur de  $H^n$ , on a démontré l'étape d'induction.

Pour ce qui est du théorème de Cartan, i.e. le cas  $p$  impair, la preuve est similaire mais certaines complications surviennent. Premièrement, comme on le remarque dans le théorème de Borel pour le cas impair, il faut pouvoir déterminer les éléments  $\tau(\tau(x_j)x_j^{p-1})$ . On peut utiliser pour cela le théorème de la transgression de Kudo. Le reste de la preuve suit les mêmes lignes que dans le cas pair. À noter cependant qu'il faut pouvoir déterminer la structure de l'anneau de cohomologie d'un espace  $K_{1,p}$ . On peut construire un tel espace en considérant, comme dans le cas pair, l'union

$$\bigcup_n S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$$

où  $S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$  dénote la sphère unité de  $\mathbb{C}^n$  quotientée par l'action

$$g \circ (z_1, \dots, z_n) = (e^{\frac{2q\pi i}{p}} z_1, \dots, e^{\frac{2q\pi i}{p}} z_n)$$

de  $\mathbb{Z}_p$ . La théorie générale du groupe fondamental permet alors de conclure qu'un espace ainsi défini est un  $K_{1,p}$ . On peut ensuite doter cet espace d'une structure de CW complexe avec une cellule en chaque dimension et on peut ainsi obtenir la structure de l'anneau

$$H^*(K_{1,p}; \mathbb{Z}_p) = \Lambda(\iota_1) \otimes \mathbb{Z}_p[\beta'(\iota_1)]$$

(voir [6] p. 304 pour les détails de cette discussion).

Revenons aux espaces  $K(\mathbb{Z}, n)$ . La méthode est la même : on utilise la fibration  $K(\mathbb{Z}, n - 1) \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$  et on suppose connue la structure en cohomologie



de l'espace  $K(\mathbb{Z}, n-1)$ . Pour démarrer l'induction, on considère  $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$ . Pour déduire cette égalité, on détermine les groupes d'homotopie de  $\mathbb{C}P^\infty$  en faisant usage des fibrés  $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ . La cohomologie cellulaire de l'espace  $\mathbb{C}P^\infty$  est la plus simple qui soit : on a une cellule en chaque dimension paire et les opérateurs de bords sont par conséquent automatiquement triviaux. On peut ainsi montrer que

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\alpha].$$

Il serait aussi facile de trouver ce résultat avec la fibration  $K(\mathbb{Z}, 1) \rightarrow \{x_0\}_i \rightarrow K(\mathbb{Z}, 2)$  sachant que la fibre est la sphère  $S^1$ . Comme précédemment, un système  $p$ -simple de générateurs est donné par les puissances  $\alpha^{p^j}$ . Dans le cas de la cohomologie modulo 2, on déduit alors que  $H^*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Z}_2)$  est l'anneau des polynômes avec pour variables les

$$\tau(\alpha^{2^j}) = \tau(Sq^{2^{j-1}} \cdots Sq^2(\alpha)) = Sq^{2^{j-1}} \cdots Sq^2(\tau(\alpha))$$

et on observe qu'il s'agit tout simplement des  $Sq^I(\alpha)$  avec  $I$  admissible qui ne contient aucun terme  $Sq^1$  et dont l'excès est  $< 3$ . Si l'on peut deviner par cet exemple la structure de  $H^*(K(\mathbb{Z}, n))$ , la preuve suit sans difficulté puisque le raisonnement inductif est le même que celui donné pour les espaces  $K_{2,n}$ . Il en est de même pour le cas impair. Les résultats sont les suivants.

**Théorème 17.**  *$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p)$  est l'algèbre graduée libre anticommutative sur  $\mathbb{Z}_p$  de générateurs  $P^I(\alpha_n)$  (ou  $Sq^I$  dans le cas  $p = 2$ ) où  $\alpha_n$  est un générateur de  $H^n(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Z}_p)$  avec  $P^I$  admissible d'excès  $e(I) < n$  et qui ne contient pas un terme  $\beta'$  ( $Sq^1$  dans le cas pair) en dernière position.*

## 8.5 Calcul de groupes d'homotopie de la sphère

Il est fin temps de mettre en oeuvre la méthode que Serre utilisa dans [16] pour calculer certains groupes d'homotopie. Commençons avec  $S^3$  et la première fibration

$$\tilde{X}_4 \rightarrow S^3 \rightarrow K(\mathbb{Z}, 3)$$

d'une décomposition de Cartan-Serre-Whitehead. Remarquons que le théorème 14 nous permet de nous concentrer uniquement sur la  $p$ -torsion de  $\pi_n$  pour un nombre prédéterminé et fini de premiers  $p$ . Aussi, on commence par considérer la suite spectrale de Serre en cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$ . Notre but sera de calculer d'abord la 2-torsion de  $H_4(\tilde{X}_4; \mathbb{Z})$ . Grâce au théorème de Hurewicz classique, on sait que  $H_4(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}) = \pi_4(\tilde{X}_4) = \pi_4(S^3)$ . Malheureusement, le théorème des coefficients universels en cohomologie ne nous permet pas systématiquement de déterminer la  $p$ -torsion de l'homologie à partir de la

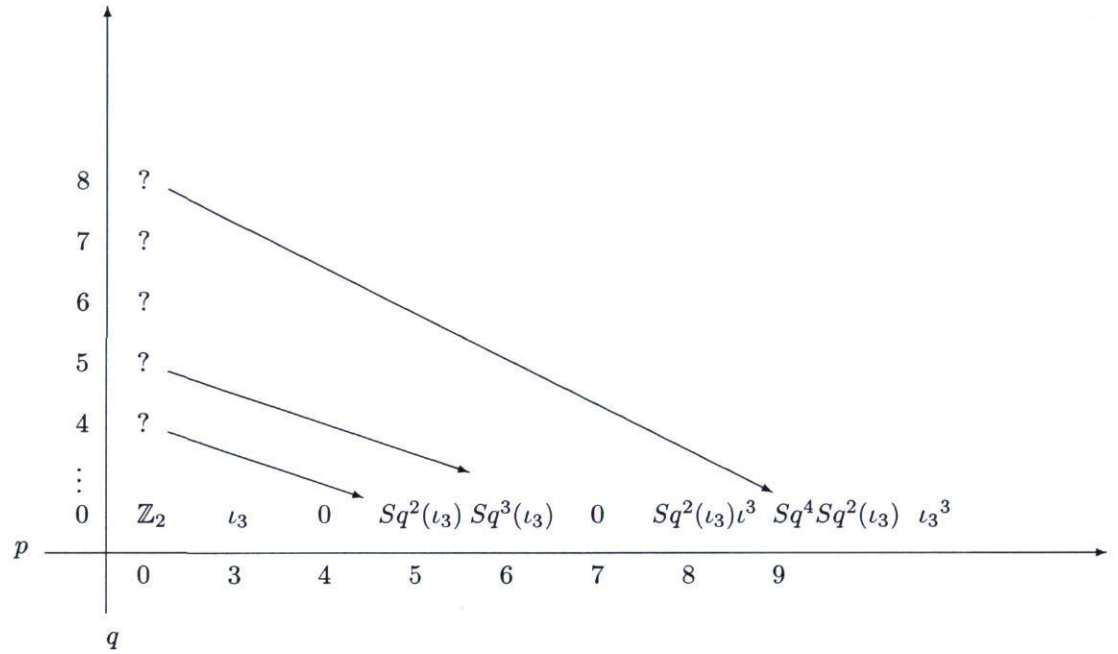


FIGURE 8.6 – Suite spectrale

cohomologie *mod p* puisque  $Hom(\mathbb{Z}_{p^k}, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$  pour n'importe quel entier  $k$ . Cependant, comme on l'a brièvement expliqué, il est possible d'utiliser l'homomorphisme de Bockstein,  $\beta'$  ( $Sq^1$  si  $p = 2$ ), pour récupérer l'information perdue. On aura ainsi tout intérêt à avoir recours aux opérations de Steenrod dans notre étude de la fibration en question. Notre connaissance de la cohomologie modulo 2 d'un espace  $K(\mathbb{Z}, 3)$  nous permet de connaître l'entièreté de la première rangée de la deuxième page (voir Fig. 8.6).

On souhaite obtenir la première colonne de la deuxième page. Il nous faut effectivement collecter suffisamment d'informations sur la cohomologie de  $\tilde{X}_4$  pour pouvoir réutiliser notre technique pour la fibration suivante de la décomposition

$$\tilde{X}_5 \longrightarrow \tilde{X}_4 \longrightarrow K(\pi_4(S^3), 4).$$

Le fait que la base soit 2-connexe et que la fibre soit 3-connexe apporte assez de zéros dans la suite pour déduire que  $E_{0,4}^5 = E_{0,4}^2$  et  $E_{5,0}^5 = E_{5,0}^2$ . De plus, la transgression

$$E_{0,4}^5 \longrightarrow E_{5,0}^5$$



est un isomorphisme puisque

$$H^4(S^3; \mathbb{Z}_2) = H^5(S^3; \mathbb{Z}_2) = 0$$

et donc rien de  $E_{0,4}^5$  et de  $E_{5,0}^5$  ne peut survivre à  $E^\infty$ . On trouve donc que

$$E_{0,4}^5 = \mathbb{Z}_2\alpha$$

avec  $\alpha \in H^4(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2)$  un élément transgressif :  $\tau(\alpha) = Sq^2(\iota_3)$ . De la même façon, on déduit que  $E_{0,5}^6 = E_{0,5}^2$  et  $E_{6,0}^6 = E_{6,0}^2$  avec  $E_{0,5}^6 \simeq E_{6,0}^2 = \mathbb{Z}_2Sq^3(\iota_3)$ . Ainsi,  $H^5(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2$ . Remarquons que l'élément  $Sq^1(\alpha) \in H^5(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2)$  correspond dans la suite spectrale à un élément qui transgresse vers  $Sq^1(\tau(\alpha)) = Sq^1Sq^2(\iota_3)$  qui représente un élément non nul de  $E_{6,0}^6$ . En effet, une des relations d'Adem implique que  $Sq^1Sq^2(\iota_3) = Sq^3(\iota_3)$ . Il est alors obligatoire que  $Sq^1(\alpha)$  soit un élément non nul de  $H^5(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2)$  et on le choisit donc comme générateur. Par les remarques passées sur l'homomorphisme de Bockstein  $Sq^1$ , le fait que  $Sq^1(\alpha) \neq 0$  implique que  $\alpha$  provient d'une composante  $\mathbb{Z}_2$  de  $H_4(X_4; \mathbb{Z})$ . D'après le théorème 14,  $\pi_4(S^3)$  est composé uniquement d'éléments de 2-torsion. Ceci démontre encore que  $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ . Remarquons que l'on est sous les hypothèses du théorème de Freudenthal, de sorte qu'on obtient du même coup que  $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}_2$  pour  $n \geq 3$ .

Pour  $E_{0,6}^2$ , on doit tenir compte de la différentielle

$$E_{0,6}^3 \longrightarrow E_{3,4}^3$$

puisque l'entrée  $E_{3,4}^2$  est non nulle : elle est engendrée par le produit cup  $\alpha\iota_3$ . Puisque les différentielles précédant la cinquième s'annulent toutes sur ce produit par la règle de dérivation,  $E_{3,4}^5$  est un groupe quotient de  $E_{3,4}^2$ . Il est alors encore permis d'écrire  $E_{3,4}^5 = \mathbb{Z}_2[\alpha\iota_3]$  (les crochets dénotent une classe d'équivalence). Comme les éléments  $\alpha$  et  $\iota_3$  survivent à la 5<sup>e</sup> page, on peut encore écrire  $[\alpha\iota_3] = [\alpha][\iota_3]$  sachant que le produit cup d'une page provient naturellement de celui des pages précédentes. Puisqu'on a  $d_5(\alpha\iota_3) = Sq^2(\iota_3)\iota_3 \neq 0$ , on conclut que  $E_{3,4}^5 \neq 0$ , ce qui implique entre autres que la différentielle  $d_3 : E_{0,6}^3 \longrightarrow E_{3,4}^3$  était triviale. Bref, comme il s'agissait de la seule entrée non nulle qui pouvait être rejointe à partir de (0,6), on déduit que  $E_{0,6}^2 = 0$ . En se servant du fait que  $d_5(\alpha\iota_3) = Sq^2(\iota_3)\iota_3$  et que  $d_5(Sq^1(\alpha)\iota_3) = Sq^3(\iota_3)\iota_3$ , on démontre de façon très semblable à précédemment que  $E_{0,7}^2 = 0$ .

L'entrée (0,8) atteint l'entrée (5,4) à la 5<sup>e</sup> page. On sait à présent que  $E_{5,4}^2 = Sq^2(\iota_3)\alpha$ . L'élément  $Sq^2(\iota_3)\alpha$  survit à la 5<sup>e</sup> page et on a  $d_5(Sq^2(\iota_3)\alpha) = Sq^2(\iota_3)^2 \neq 0$ , ce qui entraîne que la différentielle entre les entrées (0,8) et (5,4) est nulle puisque son image est contenue dans le noyau d'une injection. La dernière entrée potentiellement non nulle que touche (0,8) est (9,0). On voit que la composante  $\iota_3^3$  de  $E_{9,0}^2$  est éliminée à la 5<sup>e</sup> page par la différentielle  $d_5 : E_{3,5}^5 \longrightarrow E_{9,0}^5$  et seule  $Sq^4Sq^2(\iota_3)$  survit à la 9<sup>e</sup>



page. Finalement, puisque  $d_9$  est un isomorphisme, on obtient que  $H^8(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ . On peut dire plus car l'élément  $Sq^4(\alpha) \in H^8(\tilde{X}_4; \mathbb{Z}_2)$  transgresse vers  $Sq^4Sq^2(\iota_3)$  et par conséquent un générateur de  $H^8$  est donné par  $Sq^4(\alpha) = \alpha^2$ .

Passons à la fibration  $\tilde{X}_5 \rightarrow \tilde{X}_4 \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 4)$ . L'espace  $\tilde{X}_5$  est donc 4-connexe et ses groupes d'homotopie supérieurs sont ceux de  $S^3$ . On retrouve par le même genre d'arguments le lemme 2 de l'article [16] de Serre :  $H^*(\tilde{X}_5; \mathbb{Z}_2)$  a pour base, en dimension  $\leq 9$ , les éléments  $\alpha, Sq^1(\alpha), \beta, Sq^1(\beta) = Sq^2(\alpha), Sq^2Sq^1(\alpha)$  où  $dim(\alpha) = 5$  et  $dim(\beta) = 6$ . On en conclut que  $\pi_5(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$ . On remarque que le théorème de suspension de Freudenthal ne s'applique pas à ce résultat. La prochaine fibration est particulièrement intéressante puisqu'il s'y passe un phénomène que l'on n'a pas rencontré dans les précédents calculs. Jusqu'à présent, il était facile de déterminer l'homologie à coefficients entiers à partir de la cohomologie à coefficients *mod* 2 puisque l'application du Bockstein nous assurait que les composantes  $\mathbb{Z}_2$  correspondaient à des composantes  $\mathbb{Z}_2$  en homologie entière. Ce ne sera pas le cas pour  $H^7(\tilde{X}_6; \mathbb{Z}_2)$  pour la fibration

$$\tilde{X}_6 \rightarrow \tilde{X}_5 \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 5)$$

. On peut "looper" cette fibration, ce qui donne la fibration

$$K(\mathbb{Z}_2, 4) \rightarrow \tilde{X}_6 \rightarrow \tilde{X}_5.$$

La deuxième page de la suite spectrale est comme dans la Fig. 8.7.

Comme  $\tilde{X}_6$  est 5-connexe, on vérifie par les arguments habituels que  $d_5(\iota_4) = \alpha$ . Cela entraîne que  $d_6(Sq^1(\iota_4)) = Sq^1(\alpha)$  et  $d_7(Sq^2(\iota_4)) = Sq^2(\alpha)$ . Ainsi,  $\beta$  survit à  $E^\infty$  de sorte que  $H^6(\tilde{X}_6; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  et on note  $\gamma$  un générateur. Par ailleurs, en utilisant cette information dans la suite spectrale de la fibration  $\tilde{X}_6 \rightarrow \tilde{X}_5 \rightarrow K(\mathbb{Z}_2, 5)$ , on trouve sans mal que  $Sq^1(\gamma) = 0$ . Notons que  $\gamma$  ne peut provenir d'une composante  $\mathbb{Z}$  de  $H_6(\tilde{X}_6; \mathbb{Z})$  puisque ce groupe est fini. Par conséquent, la 2-torsion du groupe  $H_6(\tilde{X}_6; \mathbb{Z})$  est de la forme  $\mathbb{Z}_{2^k}$  pour un  $k > 1$ . Il s'agit maintenant de déterminer la cardinalité de ce groupe de 2-torsion. Pour ce faire, on considère à nouveau la suite spectrale de la fibration  $K(\mathbb{Z}_2, 4) \rightarrow \tilde{X}_6 \rightarrow \tilde{X}_5$  mais à coefficients entiers. On a évidemment une application entre les groupes de la suite spectrale à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et les groupes de la suite spectrale à coefficients dans  $\mathbb{Z}_2$  donnée à la première page par l'homomorphisme induit  $H^n(\_; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\_; \mathbb{Z}_2)$ . Puisqu'une telle application est compatible avec les opérateurs de la longue suite exacte en cohomologie, on obtient de cette façon une application entre chaque page des deux suites spectrales. Une brève inspection de la preuve du théorème de Serre nous convainc que cette application est aussi compatible avec les isomorphismes de Serre de la deuxième page. Comme  $Sq^1(\iota_4) \neq 0$ , on a un isomorphisme entre la 2-torsion de  $H^5(K(\mathbb{Z}_2, 4); \mathbb{Z})$  et  $H^5(K(\mathbb{Z}_2, 4); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2Sq^1(\iota_4)$ . Cet isomorphisme en est aussi un entre les termes correspondants des deux suites spectrales. Par le même argument, on a une injection entre la 2-torsion de  $H^7(K(\mathbb{Z}_2, 4); \mathbb{Z})$  et

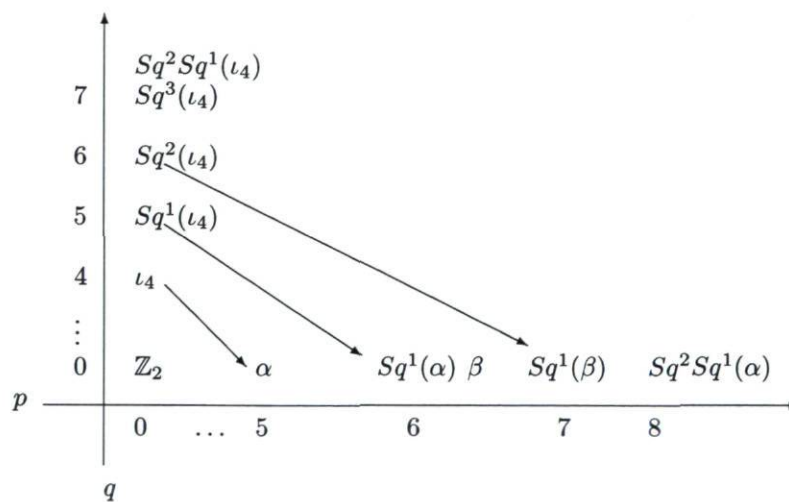


FIGURE 8.7 – Suite spectrale



$H^7(K(\mathbb{Z}_2, 4); \mathbb{Z}_2)$ . Les autres groupes de cohomologie à coefficients entiers de  $K(\mathbb{Z}_2, 4)$  en dimension  $\leq 7$  sont nuls. On peut raisonner de la même façon pour  $H^n(\tilde{X}_5; \mathbb{Z})$  pour  $n \leq 8$  sachant que  $Sq^1(\alpha)$ ,  $Sq^1(\beta)$  sont non nuls. On trouve ainsi un isomorphisme entre les entrées  $(7, 0)$  et une injection en  $(6, 0)$  dont l'image est  $Sq^1(\alpha)$ .

Puisque  $d_5(Sq^1(\iota_4)) = Sq^1(\alpha)$  en coefficients *mod* 2, on conclut que pour la suite spectrale à coefficients entiers,  $d_5 : E_{0,5} \rightarrow E_{6,0}$  est un isomorphisme entre la 2-torsion et  $d_7 : E_{0,7} \rightarrow E_{8,0}$  est nulle pour la 2-torsion. Ceci nous laisse  $\mathbb{Z}_2$  pour  $E_{7,0}^\infty$  et un autre  $\mathbb{Z}_2$  pour  $E_{0,7}^\infty$ . On est confronté ici au problème d'extensions de groupes qui survient dans l'étude d'une suite spectrale. Dans le cas présent, on sait que  $H^7(\tilde{X}_6; \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ . Il y a *a priori* deux possibilités :  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  ou  $\mathbb{Z}_4$ . Heureusement, la seule information cruciale est la cardinalité de cet ensemble qui nous mène à conclure que  $H_6(\tilde{X}_6; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4$ . On infère à l'aide du théorème de Hurewicz que la 2-torsion de  $\pi_6(S^3)$  est  $\mathbb{Z}_4$ . D'après le théorème 14, on sait aussi qu'il y a une composante  $\mathbb{Z}_3$  dans  $\pi_6(S^3)$  et qu'il n'y a pas d'autres premiers présents. En somme,  $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$ .

Serre utilisa cette méthode et certains fibrés dans son article [16] pour obtenir les groupes  $\pi_{n+k}(S^n)$  pour  $k \leq 4$ . Les résultats qu'il a obtenus dans cette publication sont donnés dans le théorème suivant.

**Théorème 18.** *Pour  $n \geq 2$   $\pi_{n+2}(S^n) = \mathbb{Z}_2$ .*

*Pour  $n \geq 5$   $\pi_5(S^2) = \mathbb{Z}_2$ ,  $\pi_6(S^3) = \mathbb{Z}_{12}$ ,  $\pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$  et  $\pi_{n+3}(S^n) = \mathbb{Z}_{24}$ .*

*Pour  $n \geq 6$   $\pi_7(S^3) = \mathbb{Z}_2$ ,  $\pi_8(S^4) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ ,  $\pi_9(S^5) = \mathbb{Z}_2$  et  $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ .*

*Démonstration.* On se réfère à l'article de Serre [16] pour une preuve complète. Néanmoins, à titre informatif, certains des groupes  $\pi_{n+k}(S^4)$  peuvent s'obtenir directement de certains des calculs que l'on a réalisés plus tôt. En effet, en utilisant les quaternions  $\mathbb{H}$  on trouve, comme pour la fibration de Hopf, un fibré

$$S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^1 = S^4.$$

Puisque  $\pi_3(S^7)$  est trivial par le théorème d'approximation cellulaire, l'inclusion  $S^3 \rightarrow S^7$  est homotopiquement triviale et par conséquent l'application  $\pi_*(S^3) \rightarrow \pi_*(S^7)$  est nulle. La longue suite exacte du fibré précédent s'écrit alors concisément :

$$0 \rightarrow \pi_*(S^7) \rightarrow \pi_*(S^4) \rightarrow \pi_*(S^3) \rightarrow 0.$$

Cette suite se scinde étant donné l'homomorphisme  $\pi_{n-1}(S^3) \rightarrow \pi_n(S^7, S^3)$  issu d'une homotopie de l'inclusion  $S^3 \rightarrow S^7$ . On obtient donc un isomorphisme  $\pi_n(S^7) = \pi_{n-1}(S^3) \oplus \pi_n(S^4)$ . En particulier, on trouve  $\pi_6(S^4) = \mathbb{Z}_2$  et  $\pi_7(S^4) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{12}$ .  $\square$

Nous sommes parvenus dans ces exemples à surmonter les deux principaux obstacles de la résolution d'une suite spectrale : la détermination des différentielles et le problème d'extensions de groupes. Cependant, il semble difficile de voir d'après les calculs effectués si les méthodes utilisées nous permettront à tout coup d'aboutir. On s'est servi dans nos déductions des arguments formels et usuels de la suite spectrale de Serre ainsi que des propriétés de l'algèbre de Steenrod. Il s'avère que d'autres outils sont éventuellement nécessaires. Par exemple, Adams utilisa ce qu'on appelle les opérations de cohomologie d'ordre supérieur pour résoudre certaines ambiguïtés survenant dans le calcul de  $\pi_{n+10}(S^n)$  et  $\pi_{n+14}(S^n)$ .

Existe-t-il d'autres méthodes de calcul des groupes d'homotopie qui soient systématiques et qui aboutissent à coup sûr ? Un algorithme autrement dit ? Cette question fut résolue en grande partie par Edgar Brown. Il exposa, dans un article [3] de 1956, une méthode pour calculer les groupes d'homotopie d'un complexe simplicial fini et simplement connexe. En peu de mots, un complexe simplicial  $K$  est la donnée d'un ensemble filtré par des ensembles  $K^q$  qui contiennent ce qu'on nomme des *simplexes de dimension*  $q$  et d'opérateurs  $F_i, D_i$  définis sur chaque  $K^q$  qu'on appelle respectivement les opérateurs de faces et de dégénérescence. On peut associer à un tel complexe simplicial  $K$  sa réalisation géométrique  $|K|$  qui est un CW complexe dont l'homologie singulière peut être obtenue en déterminant l'homologie du complexe naturellement associée à  $K$ . Étant donné un espace  $X$ , si l'on parvient à trouver un complexe simplicial  $K$  ayant un nombre fini de simplexes pour lequel  $|K| \simeq X$ , alors il sera systématique d'obtenir l'homologie singulière de  $X$  en calculant l'homologie de  $K$ . Les complexes simpliciaux sont donc des objets qui nous permettent de ramener les calculs abstraits et infinis d'invariants de la topologie algébrique (comme  $H_n$ ) à des calculs plus mécaniques. L'algorithme de Brown prend en entrée un complexe simplicial fini  $K$  tel que  $|K|$  est simplement connexe et détermine les invariants  $\pi_n(|K|)$ . Ainsi, tout comme pour l'homologie singulière, il est possible de déterminer les groupes d'homotopie d'un espace simplement connexe  $X$  si l'on peut trouver un complexe simplicial  $K$  pour lequel  $|K| \simeq X$ . Par exemple, il n'est pas difficile de construire le complexe dont la réalisation géométrique est  $S^n$  : on prend un simplexe  $\Delta_0$  de dimension 0 représentant le point de base et en dimension  $q < n$  on a pour unique simplexe la dégénérescence de  $\Delta_0$  et en dimension  $n$  on a un simplexe  $\Delta_n$  dont les faces sont la dégénérescence de  $\Delta_0$ . La réalisation géométrique de ce complexe est tout simplement le disque  $D^n$  quotienté par sa frontière, i.e. la sphère  $S^n$ .

Bref, il semblerait que l'on puisse calculer en un temps fini n'importe quel groupe d'homotopie de la sphère avec l'algorithme de Brown. Cependant, cette méthode n'est pas applicable en pratique. Le résultat de Brown a donc surtout une valeur philosophique. Dans les faits, il ne permet pas de calculer de nouveaux groupes d'homotopie de la sphère. D'autres recherches ont été entreprises afin d'améliorer ce type de mé-



thode et il existe maintenant des algorithmes plus récents et performants pour calculer les groupes d'homotopie d'un espace  $X$  à partir d'un complexe simplicial : voir [14]. Néanmoins, comme l'auteur de ce dernier article le dit lui-même, ces méthodes s'appliquant à une grande classe d'espaces ne peuvent probablement pas surpasser en efficacité les méthodes spécifiques à la sphère  $S^n$ .

Il y a un sujet de toute première importance que l'on a négligé dans ce mémoire : les groupes d'homotopie stables. Ce domaine est depuis les années 60 un des centres d'intérêts de la topologie algébrique. Cette théorie de l'homotopie commence avec le théorème de suspension de Freudenthal qui nous assure que pour n'importe quel espace  $X$  l'homomorphisme de suspension

$$\pi_{n+k}(\Sigma^n X) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(\Sigma^{n+1} X)$$

est un isomorphisme pour  $n$  suffisamment grand. On désigne alors par  $\pi_k^S(X)$  le groupe obtenu par la limite directe

$$\pi_k(X) \longrightarrow \pi_{k+1}(\Sigma X) \longrightarrow \dots$$

À la différence des foncteurs  $\pi_k$ , les groupes stables  $\pi_k^S$  définissent une théorie d'homologie sur les CW complexes. L'une des raisons de ce changement est que l'application quotient  $(X, A) \longrightarrow X/A$  induit automatiquement des isomorphismes en homotopie stable puisqu'on peut suspendre ces espaces autant de fois qu'il le faut pour que leur degré de connectivité soit suffisamment élevé afin qu'on puisse appliquer le théorème 4 d'excision en homotopie. De ce fait, on déduit que l'on peut associer à une cofibration  $A \xrightarrow{f} X \longrightarrow C_f$  une longue suite exacte des groupes d'homotopie stables.

Il y a une autre particularité de ces foncteurs si l'on se restreint aux groupes  $\pi_k^S(S^0)$ . Effectivement, on peut munir ces groupes d'un produit et en faire un anneau gradué. Étant donné deux éléments  $\sigma \in \pi_n^S$  et  $\nu \in \pi_m^S$ , on obtient un élément de  $\pi_{m+n}^S$  par la composition de représentants de  $\sigma$  et  $\nu$  adéquatement choisis : on prend  $f \circ g$  avec  $f : S^{n+m+k} \longrightarrow S^{m+k}$  et  $g : S^{m+k} \longrightarrow S^k$  avec  $k$  assez grand. En gardant les mêmes notations, on peut montrer que le produit satisfait la propriété d'anticommutativité  $\sigma\nu = (-1)^{mn}\nu\sigma$ .

Étant donné les propriétés additionnelles de l'homotopie stable par rapport aux groupes d'homotopie usuels, il n'est pas surprenant que les tables de calcul des groupes d'homotopie de la sphère soient plus avancées dans le cas stable : on connaît  $\pi_k^S(S^0)$  jusqu'à au moins  $k \leq 64$  [12] tandis que les groupes instables  $\pi_{n+k}(S^n)$  sont connus pour  $k \leq 20$  [20]. L'un des outils fondamentaux dans le calcul des groupes stables est la suite spectrale d'Adams. À l'instar de la méthode de Serre, la suite spectrale d'Adams permet de relier la cohomologie des espaces d'Eilenberg-MacLane (alternativement les

opérations de Steenrod) avec les groupes d'homotopie. En fait, la suite d'Adams a depuis complètement remplacé celle de Serre. Sans entrer dans les détails de la construction, pour un espace  $X$  et un premier  $p$  fixés, l'idée est d'obtenir une suite de fonctions et d'espaces :

$$\Sigma^n X \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow \dots$$

à partir de cofibrations  $\Sigma X^n \longrightarrow K_1 \longrightarrow X_1, X_1 \longrightarrow K_2 \longrightarrow X_2, \dots$  où  $K_i$  est un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane de groupe  $\mathbb{Z}_p$ . Le tout est conçu pour que le dernier diagramme devienne en cohomologie une suite exacte :

$$0 \longleftarrow H^*(\Sigma^n X) \longleftarrow H^*(K_1) \longleftarrow \dots \quad (8.6)$$

On peut ensuite associer aux cofibrations  $X_i \longrightarrow K_{i+1} \longrightarrow X_{i+1}$  une longue suite exacte des groupes d'homotopie stables et obtenir ainsi une suite spectrale dont les termes  $E^1$  sont les groupes  $\pi_t^S(K_s)$ . Si  $K_s$  est assez connexe pour que  $\pi_t^S(K_s) = \pi_t(K_s)$ , alors on sait qu'une fonction  $f : S^t \longrightarrow K_s$  est caractérisée à homotopie près par l'image en cohomologie des classes fondamentales  $\iota_n$  des espaces  $K(\mathbb{Z}_p, n)$  formant  $K_s$ . Sachant de plus que la cohomologie des espaces  $K(\mathbb{Z}_p, n)$  est un module libre sur  $A_p$ , l'algèbre de Steenrod, en dimension  $< 2n$ , on voit que l'on peut identifier  $\pi_t(K_s)$  avec  $\text{Hom}_{A_p}(H^*(K_s), H^*(S^t))$  où  $H^*$  ne dépasse pas une certaine dimension. La suite exacte en (8.6) est sous cette restriction une résolution libre de  $A_p$ -modules ce qui nous donne une correspondance entre les termes  $E^2$  et les foncteurs  $\text{Ext}_{A_p}$ . Finalement, on peut montrer que cette suite spectrale converge vers la  $p$ -torsion de  $\pi_*^S(X)$ . Dans le cas où  $X = S^0$ , on peut munir cette suite spectrale d'un produit qui correspond sous la convergence au produit dans  $\pi_*^S$ .

Pour pouvoir travailler avec cette suite spectrale, on doit être en mesure de résoudre le problème algébrique de calculer les foncteurs  $\text{Ext}_{A_p}$ , mais ce qui fait que les calculs ne sont pas systématiques est la détermination des dérivées. On pourra consulter [11], [7], et [2] pour un traitement détaillé de la suite spectrale d'Adams et une résolution partielle de ces questions.

La suite spectrale d'Adams admet une généralisation développée par Novikov. L'ouvrage de Ravenel [13] traite exclusivement de cette suite spectrale d'Adams-Novikov. Il est dit que l'idée générale de ce nouvel outil est de remplacer la cohomologie singulière par une théorie de cohomologie quelconque (sans l'axiome de dimension) dont le cobordisme est un exemple. Avec ce choix particulier de cohomologie la suite spectrale aurait remplacé celle d'Adams pour le calcul des groupes  $\pi_k^S(S^n)$ .



# Bibliographie

- [1] *Séminaire Henri Cartan de l'Ecole Normale Supérieure, 1954/1955. Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie.* Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre Curie, Paris, 1956. 2ème éd.
- [2] J. F. Adams. On the structure and applications of the Steenrod algebra. *Comment. Math. Helv.*, 32 :180–214, 1958.
- [3] Edgar H. Brown, Jr. Finite computability of Postnikov complexes. *Ann. of Math. (2)*, 65 :1–20, 1957.
- [4] James F. Davis and Paul Kirk. *Lecture notes in algebraic topology*, volume 35 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [5] Jean Dieudonné. *A history of algebraic and differential topology. 1900–1960*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1989.
- [6] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [7] Allen Hatcher. *Spectral sequences in algebraic topology*. 2004.
- [8] Peter Hilton. Serre's contribution to the development of algebraic topology. *Expo. Math.*, 22(4) :375–383, 2004.
- [9] Sze-tsen Hu. *Homotopy theory*. Pure and Applied Mathematics, Vol. VIII. Academic Press, New York, 1959.
- [10] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [11] John McCleary. *A user's guide to spectral sequences*, volume 58 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, deuxième édition, 2001.
- [12] John Willard Milnor. Differential topology forty-six years later. *Notices of the American Mathematical Society*, 58(6) :804–809, 2011.

- [13] Douglas C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, volume 121 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.
- [14] Francis Sergeraert. The computability problem in algebraic topology. *Adv. Math.*, 104(1) :1–29, 1994.
- [15] Jean-Pierre Serre. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. *Ann. of Math. (2)*, 54 :425–505, 1951.
- [16] Jean-Pierre Serre. Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. *Comment. Math. Helv.*, 27 :198–232, 1953.
- [17] Jean-Pierre Serre. Quelques calculs de groupes d'homotopie. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 236 :2475–2477, 1953.
- [18] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [19] N. E. Steenrod. Products of cocycles and extensions of mappings. *Ann. of Math. (2)*, 48 :290–320, 1947.
- [20] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Annals of Mathematics Studies, No 49. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.



# Annexe A

## Extension et relèvement homotopique

**Définition 6.** *Étant donné un triplet d'espaces  $(X, A, C)$  avec  $A$  un sous-espace de  $X$ , on dit que ce triplet a la propriété de l'extension homotopique (HEP) si toute homotopie  $f_t : A \rightarrow C$  dont  $f_0$  est la restriction d'une fonction  $f : X \rightarrow C$  admet une extension  $\tilde{f}_t : X \rightarrow C$  telle que  $\tilde{f}_t|_A = f_t$  et  $\tilde{f}_0 = f$ .*

Cette propriété se visualise grace au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow f & \uparrow \\ C & \xleftarrow{f_t} & A \end{array} \tag{A.1}$$

C'est un résultat de base, mais crucial, qu'une paire de CW complexes  $(X, A)$  satisfait HEP pour tout espace  $C$ .

Le dual en quelque sorte du HEP est la *propriété du relèvement homotopique* (HLP, *homotopy lifting property*) : il s'agit essentiellement du diagramme précédent avec le sens inversé des flèches.

**Définition 7.** *Étant donné un triplet d'espaces  $(X, B, Y)$  ainsi qu'une fonction  $f : X \rightarrow B$ , on dit que ce triplet a la propriété de l'extension homotopique (HEP) si toute homotopie  $g_t : Y \rightarrow B$  dont  $g_0$  admet un relèvement  $\tilde{g} : Y \rightarrow X$  (i.e.  $f \circ \tilde{g} = g_0$ ) peut être relevé en une homotopie  $\tilde{g}_t : Y \rightarrow X$  tel que  $f \circ \tilde{g}_t = g_t$  et  $\tilde{g}_0 = \tilde{g}$ .*

On illustre cette propriété par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow \bar{g} & \downarrow f \\
 Y & \xrightarrow{g_t} & B
 \end{array} \tag{A.2}$$

On parle de fibrations dans le cas d'une fonction  $f : X \rightarrow B$  qui satisfait la propriété HLP pour tout espace  $Y$  et de cofibrations dans le cas d'une inclusion  $A \rightarrow X$  qui satisfait la propriété HEP pour tout espace  $C$ . L'inclusion d'un sous-complexe dans un CW complexe est donc un exemple de cofibration.

Conceptuellement, il est intéressant de noter qu'on peut définir ces deux propriétés comme un cas particulier de la *propriété du relèvement et de l'extension homotopique relative (HLEP)*.

**Définition 8.** *Étant donné un quadruplet d'espaces  $(Z, Y, B, X)$  avec  $Z$  un sous-espace de  $Y$  et une fonction  $f : X \rightarrow B$ , on dit que ce triplet a la propriété HLEP si pour n'importe quelle fonction (homotopie)  $H : Y \times I \rightarrow B$  dont la restriction à  $Z \times I \cup Y \times \{0\}$  admet un relèvement  $\tilde{H} : Z \times I \cup Y \times \{0\} \rightarrow X$ , alors  $\tilde{H}$  peut être étendu sur tout  $Y \times I$  en un relèvement de  $H$ .*

Un triplet  $(X, A, C)$  a donc la propriété HEP si et seulement si  $(A, X, pt, C)$  a la propriété HLEP avec  $f : C \rightarrow pt$  la fonction constante. Enfin, par définition, une fonction  $f : X \rightarrow B$  satisfait la propriété HLP relativement à un espace  $Y$  si et seulement si  $(\emptyset, Y, B, X)$  a la propriété HLEP.



