



Paramétrisation du champ de pion dans une extension quasi-BPS du modèle de Skyrme

Mémoire

Nicolas Giasson

Maîtrise en physique
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Nicolas Giasson, 2015

Résumé

Le modèle de Skyrme, dont la première apparition remonte au milieu du 20^{ième} siècle, est maintenant interprété comme une théorie efficace de la chromodynamique quantique dans la limite des basses énergies. Dans ce modèle, une description des noyaux atomiques les plus stables s'avère possible à l'aide d'une structure solitonique qui possède une charge topologique conservée. Ce présent travail s'appuie sur une récente extension du modèle de Skyrme original suggérée par Marleau *et coll.*, c'est-à-dire le modèle de Skyrme quasi-BPS, et propose l'étude de deux hypothèses de départ (*ansatz*) pour la paramétrisation du champ mésonique. Les résultats obtenus à partir de ces deux hypothèses de départ ont été comparés et analysés selon deux approches principales, la première favorisant un développement perturbatif des équations de champs (qui permet des solutions analytiques) et la seconde s'appuyant sur un algorithme de recuit simulé pour obtenir des solutions numériques complètes du modèle au niveau classique.

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des tableaux	vii
Table des figures	ix
Remerciements	xi
Introduction	1
1 Un modèle basé sur les solitons topologiques	7
1.1 Introduction aux solitons	7
1.1.1 Le modèle de sine-Gordon	8
1.1.2 Notions de topologie élémentaire	11
1.2 Le modèle de Skyrme original	12
1.2.1 Champs de pions et symétries internes	13
1.2.2 Le modèle σ non linéaire	15
1.2.3 Les solitons en physique des particules : le lagrangien de Skyrme	17
1.2.4 Topologie et nombre baryonique	19
1.2.5 Ansatz hérisson et énergie statique	20
1.2.6 Quantification des états solitoniques	22
2 Le modèle de Skyrme BPS	27
2.1 Fondements mathématiques du modèle	28
2.1.1 Formulation du lagrangien et solutions analytiques	28
2.1.2 Détermination de la borne BPS	31
2.2 Résultats et applications du modèle BPS	33
2.2.1 Densité baryonique et énergie statique	33
2.2.2 Quantification du modèle	35
2.2.3 Considérations de nature phénoménologique	37
3 Extension quasi-BPS	39
3.1 Idées de bases et développement du modèle	39
3.1.1 Énergie de Coulomb	43
3.1.2 Optimisation des paramètres et résultats avec la solution axiale (ap- proche perturbative)	46
3.2 L'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS	50

3.2.1	Introduction à l'application rationnelle	50
3.2.2	Solution analytique et solutions numériques	54
3.2.3	La quadrature de Gauss-Legendre à N points	55
3.2.4	Principaux résultats obtenus avec l'application rationnelle	58
3.3	Analyse et discussion	60
Conclusion		65
A Équation différentielle angulaire du modèle de Skyrme BPS		69
B Approche perturbative		73
C Calculs explicites avec la solution axiale (approche perturbative)		75
C.1	Table des intégrales numériques	75
C.2	Énergie statique et moments d'inertie	75
C.3	Énergie de Coulomb	76
D Calculs explicites sous l'application rationnelle (approche perturbative)		79
D.1	Énergie statique et moments d'inertie	79
D.2	Énergie de Coulomb pour le cas $B = 2$	80
D.3	Énergie de Coulomb pour le cas $B = 4$	82
E Solutions numériques complètes du modèle quasi-BPS		85
Bibliographie		87

Liste des tableaux

3.1	Optimisation des paramètres libres du modèle quasi-BPS.	48
3.2	Distribution énergétique des deux configurations étudiées avec la solution axiale dans le modèle quasi-BPS (approche perturbative).	49
3.3	Résultats obtenus par [34] pour les quatre premiers noyaux stables.	53
3.4	Distribution énergétique des deux configurations étudiées avec l'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS (approche perturbative ($\nu = 0$)).	59
C.1	Compilation des intégrales numériques les plus utilisées.	75
E.1	Données sur l'optimisation de l'énergie statique du modèle quasi-BPS avec la solution axiale (approche numérique).	85
E.2	Données sur l'optimisation de l'énergie statique du modèle quasi-BPS avec l'application rationnelle (approche numérique).	86

Table des figures

1.1	Représentation schématique du potentiel dans le modèle de sine-Gordon.	10
1.2	Représentation artistique de la configuration hérisson telle que présentée par [26].	20
2.1	Représentation schématique du profil radial (a) et de la densité baryonique (b) normalisés à $R_n = 1$ et $n = 1$ pour le modèle de Skyrme BPS.	33
3.1	Représentation graphique du profil radial (a) et de la densité baryonique (b) normalisés à $a = 1$ et $n = 1$ pour le modèle de Skyrme quasi-BPS avec la solution axiale.	41
3.2	Énergie de liaison par nucléon [MeV] (a) et énergie de Coulomb [MeV] (b) en fonction du nombre baryonique n pour les noyaux pairs les plus stables.	48
3.3	Surfaces de densité baryonique constante traditionnellement obtenues avec l'application rationnelle pour a) $B = 1$, b) $B = 3$ et c) $B = 4$ telles que présentées par [22].	53
3.4	Surfaces de densité baryonique constante normalisées à $\mathcal{B}^0 = 1$ obtenues avec l'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS pour a) $B = 2$ et b) $B = 4$	58
3.5	Ratio ($R_n^\nu[h]$) de l'énergie statique du deutéron (a) et de l'hélium-4 (b) en fonction du paramètre ν pour la solution axiale (SA) et l'application rationnelle (AR). Le ratio obtenu expérimentalement est illustré à l'aide du trait continu.	59
3.6	Transition $0 \leq \nu \leq 0.05$ pour (a) le deutéron et (b) l'hélium-4.	60
3.7	Minimisation numérique de l'énergie statique du modèle quasi-BPS en l'absence du terme $E_4^{[h]}$ proportionnel à β	63

Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier mon directeur de recherche, le professeur Luc Marleau, de m'avoir permis de poursuivre ma formation académique aux cycles supérieurs en physique, ainsi que pour son soutien et ses conseils tout au long de mon projet de recherche. Un merci spécial également aux étudiants diplômés du groupe de recherche en physique théorique, Ludovic, Marc-Olivier, Olivier et Raphaël, pour les nombreuses discussions enrichissantes et toujours aussi intéressantes. Parmi ceux-ci, j'aimerais souligner en particulier l'aide précieuse de Marc-Olivier tout au long de ce projet. Celui-ci a grandement facilité mon passage à la maîtrise tout en rendant cette expérience beaucoup plus agréable et enrichissante. De plus, j'aimerais également remercier Michelle Addy pour ses conseils linguistiques lors de la rédaction de ce mémoire ainsi que pour sa bonne humeur et son entrain inégalé. Merci également à mes parents, pour leur appui inconditionnel ainsi qu'aux membres de la famille et aux amis qui ont manifesté de l'intérêt pour ce projet de recherche et qui ont, par la même occasion, motivé mon envie de parfaire mes connaissances en physique théorique. Finalement, ce travail a été réalisé avec le soutien du conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada.

Introduction

It is in the peculiar confluence of special relativity and quantum mechanics that a new set of phenomena arises : particles can be born and particles can die. It is this matter of birth, life and death that requires the developement of a new subject in physics, that of quantum field theory. -A. Zee

La recherche en physique des particules élémentaires a joué un rôle important dans le développement scientifique et technologique du 20^{ième} siècle. Au fur et à mesure que les progrès techniques ont permis de sonder de plus en plus profondément la matière, de nouvelles particules ont fait leur apparition, nécessitant la construction de modèles théoriques capables d'expliquer ces observations et d'offrir des prédictions intéressantes sur l'évolution de ces systèmes. Aujourd'hui plus que jamais, la physique des particules occupe une place importante dans la recherche fondamentale de pointe. Avec un nombre toujours grandissant de particules ayant des noms parfois étranges ainsi qu'une panoplie de propriétés et de lois de conservations, cela fait en sorte qu'il peut s'avérer difficile de s'y retrouver. Cependant, dans toute cette apparente confusion règne une structure cohérente qui rend possible une classification détaillée des phénomènes microscopiques observés. Pour bien comprendre la place qu'occupe le modèle de Skyrme [50] dans la physique des particules actuelle, il devient donc important de bien connaître cette classification et les lois qui la régissent.

Le point de vue moderne en physique des particules passe donc nécessairement par ce qui est aujourd'hui appelé le modèle standard [8]. Celui-ci regroupe sous une même structure mathématique, c'est-à-dire une théorie quantique des champs particulière, l'ensemble des connaissances acquises¹ au cours des derniers siècles sur la physique des particules et leurs interactions. Il constitue ainsi une synthèse de trois des quatre interactions fondamentales de la nature, soit les interactions électromagnétiques, faibles et fortes. Le cadre mathématique établi par la théorie quantique des champs permet d'associer un champ physique à chaque particule élémentaire. Sous ce formalisme, les particules émergent de la théorie en tant qu'états excités de ces champs, générés par le processus de quantification. En fait, la possibilité de décrire la création/annihilation de particules est l'une des propriétés les plus importantes de la théorie quantique des champs, qui permet de traiter les systèmes où le nombre de particules change

1. À l'exception des interactions gravitationnelles, qui demeurent à ce jour décrites par une théorie classique basée sur la géométrie de l'espace-temps plutôt que sur les symétries internes des objets étudiés. Il est également important de noter que l'origine de la masse des neutrinos demeure inexpliquée dans ce modèle.

au cours du temps (systèmes ayant un nombre de degrés de liberté infini). Cela fait en sorte que celle-ci est un outil fondamental dans l'étude de tout système physique comprenant des particules élémentaires. Puisque le modèle standard correspond à une théorie quantique des champs renormalisable [45], les interactions qui y sont décrites peuvent être représentées par les diagrammes d'échanges de Feynman et les mécanismes qui en découlent.

Ainsi, la force électromagnétique, qui est responsable, entre autres, du lien qui maintient en orbite les électrons autour des noyaux atomiques, est représentée par un échange de photons virtuels entre particules chargées. La section du modèle standard qui décrit ces interactions se nomme l'électrodynamique quantique (QED, *Quantum electrodynamics*) et elle détaille de façon précise l'ensemble des interactions entre la lumière (photon) et la matière ainsi que les interactions entre particules chargées. De plus, cette théorie est celle qui reproduit avec le plus haut niveau de précision (de l'ordre de 10^{-11}) les résultats expérimentaux, ce qui en fait l'une des théories physiques les plus précises jamais construites. De façon analogue, le modèle standard introduit la force nucléaire faible, qui permet par exemple les réactions nucléaires responsables de la production d'énergie de notre soleil (fusion nucléaire) et la désintégration β (partie importante du phénomène de radioactivité), comme une interaction ayant comme particules médiatrices les bosons W^- , W^+ et Z^0 . De plus, lorsque les niveaux d'énergie atteints sont suffisamment élevés ($\simeq 100$ GeV), il s'avère que les interactions électromagnétiques et les interactions faibles correspondent à une représentation du même phénomène et peuvent être unifiées sous une seule et même structure connue sous le nom de force électrofaible. C'est également dans cette section du modèle standard que le désormais célèbre mécanisme de Higgs prend ses racines, introduit pour la première fois dans le but de générer la masse des bosons W^\pm et Z^0 ainsi que celle de toutes les particules fondamentales par la brisure spontanée de la symétrie électrofaible à basse énergie. L'unification de ces deux interactions est en réalité à la base du modèle standard puisque cela suggéra l'idée que les interactions fortes pourraient également être décrites sous une même structure mathématique que les deux précédentes.

Quant aux interactions fortes, celles-ci sont de nature beaucoup plus complexe. Représentant une partie importante du modèle standard, la chromodynamique quantique (QCD, *Quantum chromodynamics*) est la théorie utilisée depuis la fin des années 1960 pour décrire les interactions à l'intérieur des noyaux atomiques et de façon plus générale, la structure des particules soumises aux interactions fortes. Celle-ci prédit l'existence de six variétés de particules appelées quarks qui sont strictement confinées par groupe de deux ou trois à l'intérieur de particules appelées hadrons. Ces combinaisons particulières sont dites de couleur neutre, c'est-à-dire qu'il existe trois types de chaque variété de quarks, et que ces trois types sont étiquetés par une « couleur » spécifique. Les hadrons sont donc des combinaisons de quarks/antiquarks dans lesquelles les charges fortes (couleurs) s'annulent parfaitement. De plus, tel que mentionné précédemment, il existe deux types de configurations hadroniques stables. Les hadrons

formés de trois quarks font partie de la catégorie des baryons et ceux formés de deux quarks (plus spécifiquement d'un quark et d'un antiquark), des mésons. La force nucléaire forte, qui assure la cohésion des noyaux atomiques, se divise donc en deux catégories dues à la structure composite de ceux-ci et à la propriété de confinement des quarks. En premier lieu, le noyau peut être considéré comme composé de protons et de neutrons. La force qui lie les protons et neutrons à l'intérieur du noyau se nomme la force nucléaire forte résiduelle et peut être vue comme un échange de mésons entre ces constituants, principalement de pions (le méson le plus léger). Cependant, cette théorie stipule que les protons et les neutrons, étant des baryons, sont formés d'une combinaison particulière de trois quarks. La chromodynamique quantique doit donc également prédire l'existence d'une particule d'échange pour décrire cette sous-structure. Ainsi, de façon équivalente, la force qui confine les quarks à l'intérieur des protons et neutrons est appelée la force nucléaire forte fondamentale et est représentée par un échange continu de gluons entre les quarks. La confirmation expérimentale de l'existence des quarks, au début des années 1990, par l'expérience de diffusion inélastique profonde à l'université de Stanford solidifia significativement les racines de QCD et mena à un prix Nobel de physique.

L'interprétation des forces fondamentales comme un échange de bosons de jauge est l'un des grands succès du modèle standard, qui donne la possibilité de calculer avec précision les diverses propriétés des phénomènes microscopiques observés. Une partie de ce succès provient de l'utilisation de méthodes perturbatives dans la résolution des équations de champs et du fait que la théorie est renormalisable. Cependant, parmi toutes les questions que le modèle standard laisse sans réponses, la dynamique de QCD à basse énergie revêt un intérêt particulier. Dans le régime des basses énergies (inférieur à $\Lambda_{QCD} \sim 200$ MeV), les méthodes perturbatives ne peuvent plus être utilisées pour extraire de l'information sur les noyaux atomiques à partir de la chromodynamique quantique. Ceci est dû au fait que la constante de couplage g_s , qui gère les interactions entre les champs de quarks et de gluons, dépend de l'énergie du système dû au processus de renormalisation. Dans cette limite, celle-ci devient beaucoup trop grande ($g_s \geq 1$) pour être utilisée comme paramètre dans un développement en série de puissance. Par ailleurs, l'étude de QCD aux basses énergies s'avère très importante d'un point de vue pratique puisque c'est dans cette limite que la théorie donne des prédictions sur les propriétés hadroniques telles que la masse, la taille, le temps de vie, les moments magnétiques, les propriétés de diffusion et, en principe, sur tout phénomène nucléaire connu. En réalité, dans la limite des basses énergies, les degrés de liberté pertinents de QCD ne sont plus les quarks et les gluons mais plutôt les hadrons, qui sont les seuls états observables de la théorie dû au confinement (une conséquence directe de l'interaction des gluons avec eux-mêmes). Cela suggère qu'en première approximation, une théorie efficace considérant les hadrons comme degrés de liberté fondamentaux pourrait être envisagée comme solution pour pallier la complexité des calculs de QCD. Dans les années 1970, les travaux effectués par [54, 57] vinrent appuyer cette idée et montrèrent que dans cette limite, QCD peut être décrite par une théorie

efficace de mésons. Ceci motiva l'utilisation de modèles plus simples pour étudier, du moins d'un point de vue phénoménologique, les propriétés des noyaux dans cette limite.

Cette recherche de modèles plus simples, consistant en une théorie efficace de mésons de la chromodynamique quantique, raviva l'intérêt porté au modèle proposé pour la première fois par T.H.R. Skyrme. Bien qu'historiquement le modèle de Skyrme (1954) ait été introduit avant l'avènement de la chromodynamique quantique, celui-ci fut pratiquement éclipsé par cette dernière en raison de ses multiples succès dans la description du spectre hadronique aux hautes énergies. Les motivations derrière la construction de ce modèle sont diverses. En 1984, lors d'une présentation à caractère historique sur les fondations de son modèle [15], Tony Skyrme identifia trois motifs principaux sur lesquels ses recherches furent orientées. En premier lieu, celui-ci souhaitait entreprendre l'unification des bosons et des fermions. Cela implique donc la construction d'un modèle comprenant seulement un type de particule fondamentale, dans ce cas-ci les bosons, et où les fermions émergeraient des interactions entre champs bosoniques. Le second point abordé fut l'utilisation de la renormalisation pour gérer les quantités infinies. L'utilisation de cette technique mathématique est en réalité directement reliée à la notion de particules ponctuelles. La raison pour laquelle les particules élémentaires sont traitées comme des points (sans dimension ou extension géométrique) en première approximation relève du fait que leur réelle structure à des échelles de distances très petites reste inconnue. Ce faisant, puisqu'il n'y a pas de coupure naturelle à cette échelle, des techniques de renormalisation doivent être utilisées pour traiter les divergences ainsi générées. Une façon de pallier ce problème (celle utilisée par Skyrme) sans faire intervenir la renormalisation est de traiter les particules élémentaires comme des objets étendus dans l'espace qui possèdent une topologie non triviale. Finalement, le troisième élément considéré lors de la construction de son modèle fait référence à la nature même des fermions. En fait, la raison pour laquelle le modèle repose sur les bosons comme particule fondamentale est principalement due à la perception plutôt négative que Skyrme avait des fermions. À cette époque, les objets se comportant de façon quantique n'ayant pas d'analogue distinct au niveau classique étaient souvent remis en question. L'idée était donc de faire ressortir le comportement « étrange » des fermions sans traiter ceux-ci comme des constituants fondamentaux.

En termes plus spécifiques, le modèle de Skyrme consiste en une théorie de champs classiques non linéaire admettant des solutions solitoniques pouvant être associées à des particules appelées skyrmions. Les solutions ainsi générées émergent du champ scalaire du triplet de pions (π^+ , π^0 , π^-), qui sont les seuls degrés de liberté considérés, et correspondent à un type de soliton particulier appelé soliton topologique. Autrement dit, ceux-ci se distinguent par leur configuration étendue dans l'espace ainsi que par une charge topologique conservée. Cela implique donc que par construction, les skyrmions ne sont pas des objets ponctuels. Par ailleurs, afin que ce modèle puisse être appliqué à la description de réelles particules, certaines associa-

tions doivent être faites. L'intuition de Skyrme fut d'associer la charge topologique conservée au nombre baryonique. Ce faisant, il devint également possible d'associer les skyrmions générés par le modèle aux baryons et aux nucléons qui composent la matière. Au fil du temps, plusieurs généralisations et extensions [48] furent introduites dans le but d'obtenir une description plus détaillée de la matière à l'échelle d'énergie hadronique. Plus récemment, il fut établi [4] qu'un modèle purement « BPS » (Bogomol'ny-Parasad-Sommerfield) construit à partir d'un lagrangien comprenant un terme d'ordre 6 en dérivées du champ de pions ainsi qu'un terme de masse relié au potentiel représente une base intéressante pour la description des noyaux atomiques. Cette approche particulière utilise un processus de sélection qui restreint les termes possibles du lagrangien en tirant profit de symétries préservées par l'interaction forte. Ceci a comme avantage de simplifier les calculs et de rendre possible l'obtention de solutions analytiques. En utilisant ce modèle-jouet comme point de départ dans la construction d'un modèle plus complet incorporant également les termes de Skyrme originaux, une extension quasi-BPS fut développée [10, 11, 12], menant à des résultats qui reproduisent avec un remarquable niveau de précision les énergies de liaisons (par nucléon) des noyaux les plus stables.

Dans le but d'obtenir une description plus réaliste des nucléons (protons et neutrons) ainsi qu'une représentation détaillée des noyaux atomiques les plus stables dans la limite des basses énergies, ce présent travail considère une extension quasi-BPS du modèle de Skyrme original. L'introduction d'un ansatz plus spécifique pour la représentation et la paramétrisation du champ de Skyrme, l'application rationnelle, est étudiée en détail à l'intérieur de ce modèle. Les conséquences liées à l'insertion de cet ansatz sont abordées de façon systématique en comparaison avec les résultats de la solution axiale précédemment utilisée dans le but de déterminer celle qui offre les configurations énergétiques les plus stables. Le premier chapitre sert d'introduction aux solitons et au modèle de Skyrme original de façon à bien établir les bases et les limites du modèle. Par la suite, le chapitre deux est consacré au modèle BPS tel que proposé par [4]. La borne BPS y est introduite ainsi que ses propriétés et les différents avantages à construire un modèle qui sature cette dernière. Le chapitre trois est dédié à l'étude du modèle quasi-BPS selon l'approche proposée par [12]. Il y est entre autres question des implications liées à la combinaison des deux modèles précédents par une approche perturbative puisque ceux-ci ne partagent pas nécessairement les mêmes symétries. Les problématiques liées à l'utilisation de la solution axiale dans ce contexte sont abordées et l'application rationnelle y est introduite dans le but de corriger certains de ces problèmes. Les propriétés spécifiques au modèle telles qu'une densité baryonique constante (configuration pleine), l'inclusion de différentes contributions énergétiques ainsi que le développement d'une nouvelle méthode de calcul pour tenir compte des effets de l'énergie de Coulomb associée aux densités de charges électriques y sont également discutées. Ce chapitre termine sur les résultats obtenus à partir de ce modèle et l'analyse que l'on peut en faire. Celui-ci est ensuite suivi d'une conclusion résumant l'ensemble du travail accompli et les travaux futurs qui peuvent être envisagés.

Chapitre 1

Un modèle basé sur les solitons topologiques

Les solitons, ou ondes solitaires, sont désormais présents dans plusieurs champs d'application de la science. En effet, la propagation de signaux dans une fibre optique, l'échange d'information entre les neurones du cerveau, les monopoles magnétiques en électrodynamique, l'hydrodynamique et la physique des particules sont quelques exemples de domaines de recherche qui peuvent bénéficier des propriétés des solitons lors de la conception d'un dispositif ou de la modélisation d'un phénomène. La formulation de ce concept remonte à 1834, en raison d'une observation faite par un ingénieur civil anglais du nom de John Scott Russel. Celui-ci observa le déplacement de l'eau dans un canal causé par le passage d'un bateau. À sa grande surprise, lorsque le bateau s'immobilisa, la vague générée par le déplacement du bateau continua de se propager à la même vitesse sur une grande distance (plusieurs kilomètres) sans se déformer ou se dissiper.

1.1 Introduction aux solitons

D'un point de vue mathématique, les solitons émergent en tant que solution de certaines équations différentielles non linéaires particulières. Ce faisant, les conditions nécessaires à l'obtention de ce type de solution impliquent la non-linéarité de l'équation différentielle et la présence de termes favorisant la dispersion. En effet, les propriétés uniques des solitons découlent du fait que les effets non linéaires (qui tendent à comprimer l'onde temporellement et spatialement) et les effets dispersifs (qui étendent celle-ci et la diluent) s'annulent parfaitement. Il est à noter que ces effets, pris individuellement, ne permettent pas la formation d'une onde solitaire. Les propriétés des solutions solitoniques ainsi obtenues peuvent donc se résumer de la façon suivante :

- Celles-ci sont localisées dans l'espace (une densité d'énergie finie à un temps donné dans une région de l'espace) ;
- La forme des solutions est permanente (aucune déformation ou dissipation possible) ;

- Elles n'obéissent pas au principe de superposition standard lors d'une interaction (une interaction entre deux solitons laisse ceux-ci inchangés) ;
- Elles satisfont l'équivalent d'une relation de dispersion (certaines ondes voyagent plus vite que d'autres).

De plus, tel que mentionné par [39], en se limitant à une théorie de champs locaux relativiste, les solutions solitoniques peuvent être classifiées selon deux catégories.

- ◇ *Les solitons topologiques.* La condition frontière à l'infini (spatial) d'un état solitonique doit être topologiquement différente de l'état physique du vide. Ce qui implique des états du vide dégénérés ;
- ◇ *Les solitons non topologiques.* La condition frontière à l'infini est la même que celle de l'état du vide. L'état du vide n'est donc pas dégénéré. Leur existence est due à la présence d'une loi de conservation additive.

Ainsi, ces deux types de solitons partagent les propriétés mentionnées ci-haut, cependant leurs lois de conservation sont de nature différente. Dans le premier cas, ceux-ci se démarquent par une charge topologique conservée à partir de laquelle découle leur stabilité. Les solitons non topologiques, quant à eux, possèdent également une charge conservée, mais celle-ci provient du théorème de Noether. Pour des raisons qui deviendront claires dans les prochains chapitres, ce présent travail est entièrement basé sur les solitons topologiques.

1.1.1 Le modèle de sine-Gordon

L'un des exemples les plus simples de soliton topologique en 1+1 dimensions (une dimension spatiale et une dimension temporelle) est sans contredit le modèle de sine-Gordon. L'attrait particulier de ce modèle réside dans sa simplicité et la possibilité d'un traitement analytique complet. Bien que très restreint d'un point de vue physique (seulement une dimension d'espace), celui-ci permet de bien visualiser l'émergence des propriétés des solitons ainsi que les notions de topologie cruciales à l'étude du modèle de Skyrme. Afin d'étudier ce modèle plus en détail, quelques notions de théorie des champs classiques s'imposent. En général, il est toujours possible d'écrire la densité lagrangienne la plus simple d'un système en 1+1 dimensions de la façon suivante [27]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - 2V(\phi_i)). \quad (1.1)$$

Les ϕ_i représente des champs scalaires classiques qui sont des composantes du champ $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ et le terme $V(\phi_i)$ représente le potentiel d'interaction entre ces composantes. On note également que le premier terme, constitué des dérivées du champ, représente le terme cinétique associé aux vitesses généralisées. De plus, dans ce formalisme, le lagrangien est donné par

$$L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \int \mathcal{L} dx, \quad (1.2)$$

avec $\mu \in \{t, x\}$, et l'action qui en découle s'exprime de la façon suivante

$$S = \int L(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) dt = \int \mathcal{L} dx dt. \quad (1.3)$$

La dynamique du système est obtenue en appliquant le principe de moindre action sur S . Cela implique que la densité lagrangienne doit satisfaire les équations d'Euler-Lagrange suivantes

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0. \quad (1.4)$$

De plus, dans le cas spécifique du modèle que l'on souhaite étudier, le nombre de composantes du champ ϕ est équivalent au nombre de dimensions de l'espace-temps ($m = 2$), et une contrainte supplémentaire doit être satisfaite, soit

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = f^2. \quad (1.5)$$

Cette contrainte non linéaire, qui stipule que les composantes du champ doivent prendre des valeurs sur un cercle de rayon f , permet de restreindre les degrés de liberté possibles de l'espace interne où est défini le champ. Cela permet ainsi d'éviter les degrés de liberté non physiques et d'assurer en quelque sorte la présence d'une solution solitonique. Pour satisfaire (1.5), une approche fort utile est de recourir à la paramétrisation des composantes ϕ_i . Ainsi, il devient possible d'écrire les composantes sous la forme suivante

$$\phi_1 = f \cos\left(\frac{\theta}{4}\right), \quad \phi_2 = f \sin\left(\frac{\theta}{4}\right). \quad (1.6)$$

Bien que ce choix de paramétrisation ne soit pas unique, celui-ci facilite grandement l'interprétation des équations de champs. Les composantes deviennent donc fonction d'une seule variable, l'angle θ , qui peut être vu comme la coordonnée angulaire sur le cercle que décrit l'espace interne du champ. Il reste maintenant à définir un potentiel d'interaction pour coupler les composantes ϕ_1 et ϕ_2 . Le modèle de sine-Gordon utilise l'un des couplages les plus simples, qui correspond au choix $V(\phi_i) \rightarrow V(\phi_1, \phi_2) = 2\lambda\phi_1^2\phi_2^2$. Cela revient à écrire

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda (f^4 - \phi_1^4 - \phi_2^4) \quad \rightarrow \quad V(\theta) = \frac{f^4}{4} \lambda (1 - \cos(\theta)). \quad (1.7)$$

Considérant que $\theta = \theta(t, x)$, un calcul direct mène ensuite à la densité lagrangienne suivante

$$\mathcal{L}_{sG} = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{4}\right)^2 (\partial_t \theta)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{f}{4}\right)^2 (\partial_x \theta)^2 - V(\theta). \quad (1.8)$$

En appliquant ensuite (1.4) sur \mathcal{L}_{sG} , ayant préalablement défini les quantités suivantes

$$\varphi = \frac{f}{4} \theta, \quad g = \frac{4}{f}, \quad \alpha = 4\lambda f^2, \quad (1.9)$$

on obtient l'équation différentielle du modèle de sine-Gordon, soit

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{\alpha}{g} \sin(g\varphi) = 0. \quad (1.10)$$

Dans ce cas-ci, la constante g est associée à la constante de couplage du modèle et α représente un facteur d'échelle. Afin de bien visualiser les propriétés associées aux solitons, il est suffisant de s'attarder au cas statique, c'est-à-dire de supposer que les champs ne dépendent pas du temps. Par ailleurs, il est plus simple de résoudre (1.10) en reformulant celle-ci de la façon suivante

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (1.11)$$

qui peut être intégré pour obtenir

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2. \quad (1.12)$$

Il devient donc possible de résoudre cette équation en y substituant $V(\varphi)$, ce qui donne

$$\varphi(x) = \frac{4}{g} \arctan \left(e^{\pm \sqrt{\alpha}(x-x_0)} \right). \quad (1.13)$$

Cette solution solitonique particulière centrée en x_0 , qui en réalité représente une famille de solutions pour différentes valeurs de x_0 , est appelée un *kink* lorsque l'argument de l'exponentiel est positif et un *antikink* dans le cas contraire.

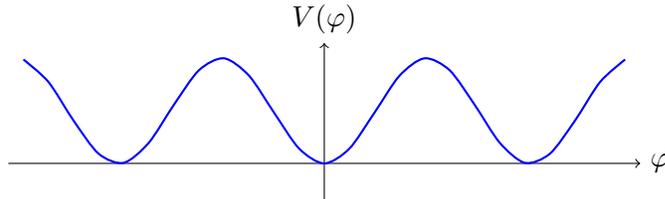


FIGURE 1.1: Représentation schématique du potentiel dans le modèle de sine-Gordon.

Ensuite, il est possible de constater à partir de la figure 1.1 qu'il existe une infinité de champs scalaires $\varphi = \frac{2\pi n}{g}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ menant au minimum du potentiel $V(\varphi) = 0$. Tel que mentionné précédemment, cette dégénérescence du vide est essentielle pour l'existence des solitons topologiques. En fait, l'énergie du soliton se trouve confinée entre deux états de vide différents, ce qui interdit toute dissipation. Pour calculer l'énergie statique du soliton, on a que

$$\begin{aligned} E_{stat} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + V(\varphi) \right) dx = \int_0^{\frac{2\pi}{g}} \sqrt{2V(\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{g}} \sqrt{\frac{2\alpha}{g^2} (1 - \cos(g\varphi))} d\varphi = \frac{8\sqrt{\alpha}}{g^2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

L'intégrale de la première ligne est obtenue à partir de la relation entre le potentiel $V(\varphi)$ et les dérivés du champ $\varphi(x)$, qui découle de l'équation (1.12). On constate ainsi que la solution statique du modèle de sine-Gordon possède une énergie finie confinée entre deux minima du potentiel, soit $n = 0$ et $n = 1$ dans cet exemple. De plus, cette énergie dépend uniquement des bornes de la fonction, soit $\varphi(-\infty) = 0$ et $\varphi(\infty) = 2\pi/g$ (signe positif de (1.13)), et de la forme du potentiel. Celle-ci est également circonscrite dans un volume fini.

1.1.2 Notions de topologie élémentaire

Dans le modèle étudié à la sous-section précédente, la stabilité de la solution $\varphi(x)$ suggère la présence d'une quantité conservée. Dans cet exemple, la contrainte topologique (1.5) implique que l'on peut toujours définir un champ scalaire complexe $\Phi(x)$ qui agit comme une application entre deux espaces, soit

$$\Phi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1. \quad (1.15)$$

L'espace réel (l'axe des x) est donc transposé sur un cercle \mathbf{S}^1 de l'espace interne du champ par le biais d'une application unitaire que l'on peut représenter par

$$\Phi(x) = \frac{1}{f} (\phi_1 + i\phi_2) = e^{i\frac{g}{4}\varphi(x)}, \quad (1.16)$$

qui découle directement de la contrainte non linéaire (1.5). Cela signifie que pour chaque point de l'espace réel correspond un point dans l'espace interne du champ. Les bornes imposées à la fonction $\varphi(x)$ jouent également un rôle important dans l'interprétation de cette application. En réalité, les conditions frontières imposent une compactification de l'axe réel en un cercle \mathbf{S}^1 , ce qui implique que Φ peut être vue comme une application faisant le lien entre un cercle \mathbf{S}^1 de l'espace réel et un cercle \mathbf{S}^1 de l'espace des champs. Par exemple, dans le cas de la fonction (1.13), en retournant à la paramétrisation en θ , on a que $\theta(-\infty) = 0$ et que $\theta(\infty) = 2\pi$, ce qui implique que l'axe des x s'enroule une fois autour d'un cercle de rayon unitaire. Ce même raisonnement implique donc que pour un soliton possédant la borne $\theta(\infty) = 2\pi n$, l'axe réel est enroulé n fois autour de l'espace des champs. De façon plus générale, les solutions interpolant deux états de vide distincts sont dites topologiquement non triviales puisque la condition $\theta(-\infty) \neq \theta(\infty)$ assure qu'il est impossible de les déformer de façon continue vers l'état fondamental ($n = 0$) aux deux bornes. Le soliton est donc contraint d'exister de par les propriétés topologiques de l'espace (enroulement autour de l'espace interne du champ). En fait, il est possible de démontrer que la contrainte topologique à laquelle est soumis l'espace réel génère un courant conservé de la forme

$$J^\mu = \frac{g}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi(x), \quad (1.17)$$

qui obéit à la loi de conservation $\partial_\mu J^\mu = 0$. Il est important de mentionner ici que la conservation de ce courant ne découle pas du théorème de Noether. Cette conservation existe pour

une raison purement algébrique, c'est-à-dire la continuité de la fonction $\varphi(x)$. Celle-ci n'est donc pas reliée aux symétries du lagrangien. De plus, à chaque courant conservé peut être associée une charge Q également conservée. Dans ce cas, on a que

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} J^0 dx = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x} dx \\ &= \frac{g}{2\pi} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] = \Delta n. \end{aligned} \tag{1.18}$$

La charge topologique ($Q = 1$ dans cet exemple) peut donc être interprétée comme le nombre d'enroulements, c'est-à-dire le nombre de fois que l'espace \mathbf{S}^1 est recouvert lors de la transition $x = -\infty \rightarrow \infty$. Il est intéressant de mentionner également que d'un point de vue mathématique, l'ensemble des solutions solitoniques du modèle de sine-Gordon peut être caractérisé par le premier groupe d'homotopie

$$\pi_1[\Phi] = \pi_1[\mathbf{S}^1]. \tag{1.19}$$

Puisque ce groupe est isomorphe aux entiers \mathbb{Z} sous l'addition, cela a pour conséquence que $Q \in \mathbb{Z}$. La stabilité des solitons provient donc du fait qu'il n'existe aucune déformation continue qui peut lier des solutions appartenant à des classes d'homotopie différentes. Il est à noter que le passage entre le modèle à 1+1 dimensions présenté dans cette section et une généralisation à 3+1 dimensions ne s'effectue pas de façon directe. En effet, le théorème de Derrick-Hobart [20, 31] stipule qu'une densité lagrangienne de la forme (1.1) ne mène pas à des configurations énergétiques stables (autre que la configuration triviale) pour un nombre de dimensions $D > 2$. L'ajout par Skyrme d'un terme stabilisateur dans le lagrangien a permis de contourner ce problème, tel qu'il en sera fait mention à la section suivante.

1.2 Le modèle de Skyrme original

Les propriétés mentionnées précédemment correspondent étonnamment bien avec celles des particules élémentaires qui composent la matière. En fait, l'idée directrice de Skyrme fut d'incorporer ces caractéristiques dans un modèle capable de décrire les constituants fondamentaux sur une base théorique solide tout en reproduisant certains résultats empiriques avec un niveau de précision élevé. D'un point de vue historique, ce modèle fut le premier à ainsi tenter une description du spectre hadronique en utilisant les solitons topologiques. Pour bien comprendre les étapes qui ont mené à la formulation de ce modèle, il est nécessaire d'introduire en premier lieu certaines notions propres aux interactions fortes à basse énergie telles que les champs de pions, le concept d'isospin et la symétrie chirale. Ce contexte particulier sert par la suite à l'étude du modèle σ non linéaire, qui joue un rôle important en physique nucléaire et par le fait même dans le modèle de Skyrme.

1.2.1 Champs de pions et symétries internes

La présence de symétries dans un système physique, qu'elles soient représentées de façon exacte ou approximative, dicte généralement la manière dont les lois de la nature sont construites. Dans le cas des nucléons, le fait que les interactions fortes soient insensibles à la charge électrique permet l'introduction d'un nouveau concept, la symétrie globale d'isospin $SU(2)$, pour la description des états hadroniques. Sous cette symétrie, les protons (p) et neutrons (n^0) sont traités comme deux états possibles d'une même particule, le nucléon. Cependant, puisqu'en réalité ceux-ci se distinguent toujours par leur masse respective ($m_p = 938.27$ MeV et $m_{n^0} = 939.56$ MeV), la symétrie est dite approximative. De façon plus spécifique, on dit que la symétrie d'isospin est brisée par les interactions électromagnétiques, puisque ce sont elles qui sont responsables en grande partie de cette faible différence de masse observée. La symétrie globale d'isospin [43] nécessite l'introduction d'un nouvel opérateur, l'opérateur d'isospin $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$, qui mène naturellement à la conservation de nouveaux nombres quantiques, I et i_3 , définis respectivement comme la valeur propre de l'opérateur \mathbf{I} et de la troisième composante du vecteur d'isospin I_3 . Ici, par définition, la valeur propre i_3 est associée à la charge électrique et agit donc comme une étiquette servant à différencier le proton et le neutron sous le régime des interactions fortes. L'algèbre associée à l'isospin est en tout point similaire à celle du spin, c'est-à-dire que les relations suivantes sont respectées

$$\mathbf{I}^2 |I, i_3\rangle = I(I+1) |I, i_3\rangle \quad (1.20)$$

$$I_3 |I, i_3\rangle = i_3 |I, i_3\rangle \quad (1.21)$$

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl} I_l. \quad (1.22)$$

Les composantes I_i correspondent donc aux générateurs de rotation dans l'espace d'isospin. Pour reconstruire cette symétrie de façon exacte à partir des constituants du noyau, il est toujours possible de définir la masse du nucléon de la façon suivante $m_N = (m_p + m_{n^0})/2$. Ce faisant, si on ignore les contributions électromagnétiques, on peut représenter le nucléon N comme un doublet d'isospin

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n^0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, les états respectifs du proton et du neutron sont donnés par

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \quad |n^0\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (1.23)$$

Lorsqu'appliqué à l'étude des noyaux atomiques, une définition fort utile de i_3 , donnée par

$$i_3 = \frac{1}{2} (n_p - n_{n^0}) = q_e - \frac{n}{2}, \quad (1.24)$$

est couramment utilisée. Celle-ci représente la somme du nombre de protons et de neutrons qui constitue le noyau, pondérée par leur isospin respectif. Ici, q_e est la charge électrique,

n_p, n_n le nombre de protons/neutrons et n le nombre de nucléons. Ce concept fondamental ne se limite pas qu'au proton et au neutron. Il est en effet possible d'étendre ce raisonnement à tous les hadrons puisque ceux-ci sont également soumis aux interactions fortes. L'un des exemples les plus simples qui illustrent bien les mécanismes derrière cette symétrie est celui du pion. En supposant que des pions virtuels sont échangés entre les nucléons, la réaction de base de Yukawa donnée par

$$N \rightarrow N' + \pi, \quad (1.25)$$

doit conserver l'isospin. Puisque les nucléons ont un isospin de $1/2$ et que celui-ci se combine de la même façon que le spin (vectoriellement), cela laisse les possibilités $I = 0$ et $I = 1$ pour l'isospin du pion. Le cas $I = 0$ impliquerait l'existence de seulement un type de pion tandis que le cas $I = 1$ en génère trois différents. En réalité, les observations expérimentales montrent clairement la présence de trois hadrons avec une masse d'environ 140 MeV et ils peuvent être regroupés sous un multiplet d'isospin de la façon suivante

$$\psi_\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Les états respectifs sont donnés par

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle, \quad (1.27)$$

ce qui représente les champs de pions. L'avantage d'écrire ces champs sous forme de multiplets d'isospin est que cela permet de regrouper des particules ayant approximativement les mêmes propriétés pour n'en former qu'une seule. Celles-ci possèdent, par exemple, le même spin, le même nombre baryonique, la même hypercharge et la même parité intrinsèque mais différent quelque peu par leur masse. Les différents membres d'un multiplet d'isospin représentent en quelque sorte la même particule, mais sous différentes directions dans l'espace d'isospin. L'exemple du pion, qui s'avère particulièrement important pour le type de modèle que l'on souhaite construire, montre bien que les propriétés de l'espace réel et de l'espace d'isospin ne sont pas reliées puisque le pion est un vecteur dans l'espace d'isospin et un scalaire (spin 0) dans l'espace réel. De façon à décrire convenablement les interactions fortes sous ce formalisme, une généralisation de la symétrie d'isospin $SU(2)$ doit être introduite pour rendre possible un mélange d'états de parité différente. En plus des trois générateurs d'isospin I_i (qui laissent la parité des états inchangée), il faut donc introduire trois générateurs axiaux A_i correspondant à des « boosts » de Lorentz le long de l'axe i . Sous une transformation de parité, on a donc que $PI_iP^{-1} = I_i$ et $PA_iP^{-1} = -A_i$. La nouvelle algèbre ainsi formée est représentée par

$$[I_j, I_k] = i\epsilon_{jkl}I_l, \quad [I_j, A_k] = i\epsilon_{jkl}A_l, \quad [A_j, A_k] = i\epsilon_{jkl}I_l. \quad (1.28)$$

De plus, on peut toujours décomposer les A_i et I_i comme une somme particulière d'opérateurs, c'est-à-dire $A_i = R_i - L_i$ et $I_i = R_i + L_i$, avec

$$L_i = \frac{1}{2}(I_i - A_i) \quad R_i = \frac{1}{2}(I_i + A_i). \quad (1.29)$$

Ces opérateurs se nomment respectivement les générateurs chiraux gauche et droit. Cela a pour effet de découpler les relations de commutations précédentes en deux sous-algèbres $su(2)$

$$[L_j, R_k] = 0, \quad [L_j, L_k] = i\epsilon_{jkl}L_l, \quad [R_j, R_k] = i\epsilon_{jkl}R_l. \quad (1.30)$$

C'est cette extension de la symétrie d'isospin qui définit la symétrie chirale, représentée par le groupe $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, qui possède la même algèbre de Lie que le groupe de rotation en 4 dimensions $O(4)$ [1]. Cette généralisation de l'espace d'isospin implique donc qu'un vecteur quelconque dans cet espace, dénoté $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, doit être complété pour former un quadrivecteur par l'ajout d'une composante ϕ_0 , qui agit comme un champ supplémentaire qui découle de la présence d'une symétrie de niveau supérieur. Ce processus est complètement analogue à celui du groupe de Lorentz en relativité restreinte, qui ajoute une composante temporelle aux trois dimensions d'espace existantes pour étendre le groupe de rotation spatiale $SO(3)$ au groupe de Lorentz $SO(3,1)$. De plus, les opérateurs A_i et I_i agissent sur les composantes du quadrivecteur de la façon suivante

$$\begin{aligned} [I_j, \phi_k] &= i\epsilon_{jkl}\phi_l & [I_j, \phi_0] &= 0 \\ [A_j, \phi_k] &= -i\delta_{jk}\phi_0 & [A_j, \phi_0] &= i\phi_j. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Il s'en suit que si l'on suppose que les ϕ_i sont associés à des particules isovectorielles, ϕ_0 correspond à un champ de parité positive de spin et d'isospin nuls [21]. L'étude de cette symétrie est motivée par le fait que le lagrangien de QCD possède cette propriété à basse énergie, c'est-à-dire dans le régime où la masse des quarks devient négligeable devant celle des nucléons et peut être considérée comme nulle. De plus, la brisure spontanée de cette symétrie continue à basse énergie génère les pions via le mécanisme de Nambu-Goldstone [59] et dicte les interactions entre ceux-ci et les baryons.

1.2.2 Le modèle σ non linéaire

La symétrie chirale est donc très importante à l'échelle d'énergie hadronique. Par ailleurs, celle-ci impose des contraintes sur les termes du lagrangien que le modèle doit avoir dans ce régime d'énergie. Par analogie avec l'invariance de Lorentz, un lagrangien invariant chirale ne peut contenir que des produits scalaires du quadrivecteur ϕ_ν et ses dérivées. De plus, pour décrire l'interaction forte en termes de champs mésoniques (échange de pions), la densité lagrangienne doit être constituée de champs scalaires. La construction d'un lagrangien efficace qui reste invariant sous transformation chirale débute donc en considérant le terme le plus

simple possible satisfaisant ces contraintes, soit celui du modèle de type σ

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_\nu)^2. \quad (1.32)$$

Pour retrouver la dynamique des pions à basse énergie telle que décrite par QCD, les composantes du quadrivecteur ϕ_ν peuvent être associées aux champs du pion [32] selon $\vec{\phi} = \vec{\pi}$, où $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ correspond aux trois états possibles du pion représentés par (1.26). De plus, la composante ϕ_0 est associée au champ σ du modèle, ce qui mène à une densité lagrangienne de la forme

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) \quad (1.33)$$

pour des particules libres. Afin de supprimer la contribution de la « particule σ » au lagrangien, qui n'est pas une particule réelle, il faut introduire la contrainte non linéaire généralisée à 3+1 dimensions imposée par Skyrme, qui s'écrit

$$\phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = f^2, \quad (1.34)$$

qui implique $\phi \in \mathbf{S}^3$ et qui représente le fait que la longueur du champ reste invariante sous rotation dans l'espace interne. La contrainte (1.34) peut donc être réécrite en termes des champs de pions de façon à retrouver la notation utilisée dans la littérature, ce qui donne

$$\sigma^2 + \pi_i \pi^i = f^2. \quad (1.35)$$

Celle-ci est d'une grande importance puisqu'elle permet de diminuer le nombre de champs indépendants de 1, c'est-à-dire que le nouveau champ $\phi_0 = \sigma$ (qui ne possède pas de signification physique intuitive), introduit pour des raisons de symétrie, ne vient pas s'ajouter aux degrés de liberté déjà existants dans l'espace d'isospin. La façon la plus naturelle de combiner ces quatre champs de manière à respecter (1.35) est par l'introduction d'une application unitaire $U \in \text{SU}(2)$ de façon analogue à (1.16), avec $UU^\dagger = \mathbb{I}_2$ et $\det(U) = 1$, soit

$$U = \frac{1}{f} (\mathbb{I}_2 \sigma + i \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = e^{i \vec{\tau} \cdot \vec{\varphi}}, \quad (1.36)$$

ce qui implique qu'il n'existe en réalité qu'un seul champ indépendant comme quantité dynamique [32], le nouveau champ $\vec{\varphi}$. Les éléments de la matrice U sont donc décomposés sur les générateurs du groupe d'isospin $\text{SU}(2)$ donné par les trois matrices de Pauli $\vec{\tau}$ plus la matrice identité 2x2, \mathbb{I}_2 . Cela correspond donc à la représentation quaternionique de $\text{SU}(2)$. La matrice U est appelée le champ chiral (parfois champ de Skyrme) et sert d'application pour passer de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$. De plus, la possibilité de paramétrer U sous la forme exponentielle (1.36) (qui est un résultat général pour toute matrice $U \in \text{SU}(2)$) permet d'identifier $\sigma = f \cos(|\vec{\varphi}|)$ et $\pi_i = f \frac{\varphi_i}{|\vec{\varphi}|} \sin(|\vec{\varphi}|)$, à partir desquels on tire que dans la limite $|\vec{\varphi}| \rightarrow 0$ où le champ est faible, $\sigma \simeq f$ et $\pi_i \simeq f \varphi_i$. Cela implique que le champ $\vec{\varphi}$ peut être identifié au champ mésonique du

pion. Sous transformation chirale, la matrice U se comporte de la façon suivante

$$U \rightarrow U' = LUR^{-1} \quad U^\dagger \rightarrow U'^\dagger = RU^\dagger L^{-1}, \quad (1.37)$$

avec $L \in \text{SU}(2)_L$ et $R \in \text{SU}(2)_R$. Le lagrangien (1.32) peut donc ensuite être réécrit en fonction des dérivées du champ U , soit

$$\mathcal{L}_{\sigma_{nl}} = \frac{f^2}{4} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right), \quad (1.38)$$

ce qui correspond au lagrangien du modèle σ non linéaire. Une simple substitution permet ensuite de vérifier l'invariance sous transformation chirale, soit $\mathcal{L}_{\sigma_{nl}} \rightarrow \mathcal{L}'_{\sigma_{nl}} = \mathcal{L}_{\sigma_{nl}}$ (de par la propriété cyclique de la trace et sachant que $\partial_\mu L = \partial_\mu R = 0$). Dans ce modèle, les conditions frontières génèrent également une compactification de l'espace réel et celles-ci sont déterminées par le fait qu'une configuration donnée du champ aura une énergie finie seulement si $U \rightarrow cte$ pour $r \rightarrow \infty$. Par simplicité, il est toujours possible de définir cette constante comme étant la matrice identité ($U \rightarrow \mathbb{I}_2$), sans perte de généralité. Sous cette compactification, le champ U doit plutôt être regardé comme une application servant à passer de $\mathbf{S}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$, de façon analogue au modèle de sine-Gordon. Cela implique également que l'état du vide du modèle tel que défini par ces conditions frontières brise la symétrie chirale. En effet, $LU_{vide}R^{-1} = L\mathbb{I}_2R^{-1} \neq \mathbb{I}_2$ car L et R n'agissent pas dans le même espace. Il y a donc une brisure spontanée de la symétrie chirale dans ce régime, ce qui est souhaitable pour représenter le fait que celle-ci n'est pas une symétrie exacte de la nature. Dans cette limite, seule la transformation d'isospin laisse l'état du vide inchangé, c'est-à-dire que $\text{SU}(2)_L \otimes \text{SU}(2)_R \rightarrow \text{SU}(2)_I$. De plus, selon le théorème de Goldstone, cela donne lieu à l'émergence de trois bosons sans masse dans le spectre des interactions puisque $\text{SU}(2)$ possède trois générateurs. Les pions peuvent donc être interprétés en terme de faibles fluctuations du champ U autour du vide. Cela signifie qu'un développement de U dans cette limite $U \simeq \mathbb{I}_2 + \frac{i\vec{r} \cdot \vec{\pi}}{f} + \dots$, donne le comportement du champ de pion loin de la solution solitonique et que (1.38) retombe bien sur le terme cinétique des pions libres du lagrangien de Klein-Gordon.

1.2.3 Les solitons en physique des particules : le lagrangien de Skyrme

Comme mentionné précédemment, le modèle en 3+1 dimensions décrit par (1.38) ne mène pas à des configurations énergétiques stables sous changement d'échelle. Celles-ci tendent plutôt à se contracter en un point, comme le démontre le théorème de Derrick. Par ailleurs, cette stabilité est essentielle puisque pour éventuellement être identifiées aux baryons, les solutions solitoniques doivent être quantifiées. Cela implique que des objets classiques étendus doivent avoir une énergie bien définie qui possède un minimum stable, soit $\delta E = 0$ et $\delta^2 E > 0$. Le travail fait par Skyrme fut donc d'introduire un terme stabilisateur dans le lagrangien qui respecte les contraintes du modèle. Pour stabiliser le terme du modèle σ non linéaire, le nouveau terme doit avoir la dilatation inverse sous le changement d'échelle $\vec{r} \rightarrow \Lambda \vec{r}$, qui se

traduit par $U(\vec{r}) \rightarrow U(\Lambda\vec{r})$. Cela implique que la fonctionnelle d'énergie doit s'écrire

$$E_{stat}(\Lambda) = \frac{1}{\Lambda} E_{\sigma_{nl}} + \Lambda E_4 \quad \text{où} \quad \min(E_{stat}(\Lambda)) = E_{stat}\left(\sqrt{E_{\sigma_{nl}}/E_4}\right), \quad (1.39)$$

avec Λ un facteur d'échelle et E_4 l'énergie associée au terme de Skyrme. L'équation (1.39) montre bien la présence d'un minimum stable sous ce changement d'échelle. De plus, celle-ci montre également qu'en considérant seulement le terme $E_{\sigma_{nl}}$, les solutions tendent à se contracter en un point lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$ (condition d'énergie minimale). Il est important de noter cependant que le théorème de Derrick-Hobart ne constitue qu'un test simple et efficace de la stabilité sous dilatation, celui-ci ne correspond en aucun cas à une preuve rigoureuse de la stabilité du modèle [1]. Afin de respecter l'invariance chirale, le terme le plus général possible d'ordre 4 en dérivée de champ qui satisfait également (1.39) s'écrit

$$\mathcal{L}_4 = \alpha_1 \text{Tr}([L_\mu, L_\nu]^2) + \alpha_2 \text{Tr}(\{L_\mu, L_\nu\}^2) + \alpha_3 \text{Tr}((\partial_\mu L_\nu)^2). \quad (1.40)$$

Ici, la notation conventionnelle en terme des courants chiraux gauche et droit a été utilisée.

$$L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U, \quad R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger. \quad (1.41)$$

Le choix de L_μ par rapport à R_μ est totalement arbitraire et n'a aucune conséquence puisque, par construction, \mathcal{L}_4 est invariant chirale, c'est-à-dire invariant sous l'échange $L_\mu \leftrightarrow R_\mu$. Le choix de termes d'ordre pair uniquement en dérivée de champ s'explique également par le fait que le lagrangien doit demeurer un scalaire de Lorentz pour préserver les lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Le lagrangien doit donc demeurer inchangé sous transformation de Lorentz et sous transformation de parité. Toujours dans le but d'effectuer une quantification qui permet de générer les nombres quantiques associés aux baryons, le choix de Skyrme s'arrêta sur le cas $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ puisque le terme proportionnel à α_1 est le seul possédant un produit de dérivée temporelle au plus du deuxième ordre. Cela permet donc une quantification des états avec la formulation hamiltonienne tout en évitant les problèmes de stabilité qui surviennent avec des termes d'ordre supérieur [9]. Le lagrangien complet du modèle de Skyrme original peut donc s'écrire

$$\mathcal{L}_{Sk} = -\alpha \text{Tr}(L_\mu L^\mu) + \beta \text{Tr}([L_\mu, L_\nu]^2). \quad (1.42)$$

Le premier terme de (1.42) correspond au modèle σ non linéaire et le second correspond au terme ajouté par Skyrme [49] (la signature $+, -, -, -$ est utilisée). Les constantes de couplages α et β peuvent être associées respectivement à la constante de désintégration du pion F_π (qui correspond au f de (1.34) lorsque les bonnes unités sont réintroduites) et à un paramètre d'interaction sans dimension e , appelée la constante de Skyrme, de la façon suivante [1]

$$\alpha = \frac{F_\pi^2}{4}, \quad \beta = \frac{1}{32e^2}. \quad (1.43)$$

Il est important de noter qu'en principe, rien ne limite le nombre de termes qu'un lagrangien efficace de QCD devrait contenir lorsque tous les degrés de liberté sont pris en considération de cette façon. Ces termes ont été choisis principalement pour des raisons de symétrie qui permettent une description de la physique des pions à basse énergie. De ce point de vue, le terme de Skyrme peut être vu comme une correction d'ordre supérieur au lagrangien efficace, représentée par l'échange du méson ρ [58]. L'ajout d'un terme de potentiel dans le lagrangien, qui est optionnel du point de vue du théorème de Derrick, fut également considéré par Skyrme. Celui-ci est généralement construit de façon à effectuer une brisure explicite de la symétrie chirale et sa forme est souvent choisie pour s'adapter à une situation physique particulière. Le potentiel, également connu sous le nom de « terme de masse » puisqu'il permet de retrouver la masse du pion, joue un rôle important dans le modèle BPS et sera étudié en détail dans les prochains chapitres.

1.2.4 Topologie et nombre baryonique

La manière dont l'espace est contraint dans ce modèle mène au courant topologique conservé suivant

$$\mathcal{B}^\mu = \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{24\pi^2} \text{Tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma), \quad (1.44)$$

à partir duquel découle la charge topologique conservée

$$\begin{aligned} B &= \int \mathcal{B}^0 d^3r = \frac{1}{24\pi^2} \int \epsilon^{0\nu\rho\sigma} \text{Tr} (L_\nu L_\rho L_\sigma) d^3r \\ &= -\frac{\epsilon^{ijk}}{24\pi^2} \int \text{Tr} (L_i L_j L_k) d^3r. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Le raisonnement derrière ces résultats constitue une généralisation de celui utilisé pour le modèle de sine-Gordon. Une propriété importante du courant (1.44) est qu'il demeure conservé indépendamment des équations de champs. La nature topologique de celui-ci implique qu'il dépend seulement des propriétés de l'espace, plus particulièrement d'un état du vide dégénéré. La charge topologique B correspond au nombre d'enroulements de l'espace réel \mathbb{R}^3 autour de l'espace des champs \mathbf{S}^3 généré par l'application U et celle-ci est conservée de façon additive. L'étape cruciale qui permet à Skyrme d'utiliser les solitons topologiques pour décrire les baryons et nucléons qui composent la matière fut d'associer cette charge au nombre baryonique et par le fait même \mathcal{B}^μ au courant baryonique. Cette association n'est cependant qu'une conjecture qui reflète le fait que la charge topologique possède des propriétés similaires à celles du nombre baryonique. Celle-ci offre cependant une explication élégante de la conservation du nombre baryonique, qui est un phénomène observé qui n'a jamais pu jusqu'à ce jour être démontré, contrairement, par exemple, à la conservation de la charge électrique. De plus, pour que les solutions puissent formellement être identifiées aux baryons, il faut étudier le spectre physique obtenu par la quantification, qui permet de lever la dégénérescence en spin et en isospin des solutions. Les particules ainsi décrites par le modèle sont appelées skyrmions.

1.2.5 Ansatz hérisson et énergie statique

Pour pouvoir étudier le modèle de Skyrme plus en détail, il faut maintenant introduire une paramétrisation du champ U qui permet d'obtenir des résultats concrets en se ramenant à l'espace réel. En se limitant pour l'instant au cas statique, la paramétrisation de (1.36) proposée par Skyrme correspond au choix $\vec{\varphi} = F(r)\hat{r}_1$ et prend donc la forme suivante

$$U(\vec{r}) = e^{iF(r)(\vec{\tau}\cdot\hat{r}_1)} = \cos(F(r))\mathbb{I}_2 + i\vec{\tau}\cdot\hat{r}_1 \sin(F(r)), \quad (1.46)$$

où $\vec{r} = |\vec{r}|\hat{r}_1$ et $|\vec{r}| = r$. Les composantes de $\vec{\pi}$ et le champ σ sont donc représentés par

$$\vec{\pi} = f \sin(F(r))\hat{r}_1, \quad \sigma = f \cos(F(r)), \quad (1.47)$$

ce qui constitue en quelque sorte le lien entre l'espace réel et l'espace d'isospin. La fonction arbitraire $F(r)$, appelée l'angle chiral (l'angle entre $\vec{\pi}$ et σ), possède une dépendance uniquement radiale et \hat{r}_1 est un vecteur unitaire pointant radialement dans l'espace des coordonnées

$$\hat{r}_1 = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)), \quad (1.48)$$

valide seulement dans le secteur $B = 1$. La configuration donnée par (1.46), qui minimise l'énergie statique du modèle pour ce secteur topologique, possède la symétrie sphérique et est appelée la configuration hérisson.

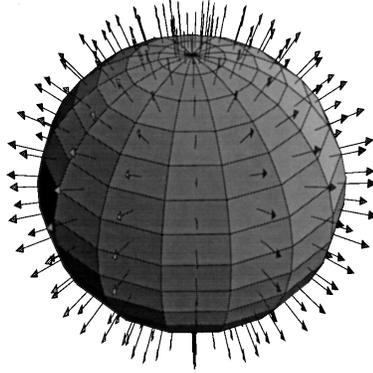


FIGURE 1.2: Représentation artistique de la configuration hérisson telle que présentée par [26].

Il devient maintenant possible de calculer la charge topologique de façon explicite par simple substitution de cet ansatz dans (1.45).

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2\pi^2} \int \frac{\sin^2(F(r))}{r^2} F'(r) d^3 r \\ &= -\frac{2}{\pi} \int \sin^2(F(r)) dF(r) \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{2} [F(\infty) - F(0) + \cos(F(0)) \sin(F(0)) - \cos(F(\infty)) \sin(F(\infty))]. \quad (1.49) \end{aligned}$$

Afin de s'assurer que (1.46) donne des solutions d'énergie finie qui mènent à la charge topologique $B = 1$, les bornes de la fonction $F(r)$ doivent être choisies telles que $F(\infty) = 0$ et $F(0) = \pi$. Pour un secteur topologique arbitraire $B = n$, la borne à l'origine serait plutôt choisie de façon à ce que l'origine spatiale ne soit projetée qu'en un seul point dans l'espace des configurations de champs, soit $F(0) = n\pi$. Ce faisant, on retrouve bien la condition $F(\infty) \neq F(0)$ qui mène à des configurations non triviales. Le champ U a donc la possibilité de faire le lien entre deux secteurs topologiques différents. Dans la limite $U \rightarrow \mathbb{I}_2$ qui décrit l'état du vide du modèle, on retrouve une charge topologique nulle ($B = 0$), ce qui correspond au secteur mésonique (les mésons ne possèdent pas de nombre baryonique) qui décrit la physique des pions. Le secteur baryonique correspond donc aux configurations de champs non triviales pour lesquelles $|B| > 0$. De retour au cas d'intérêt, l'énergie statique associée à cette solution, ou de façon équivalente la masse du soliton, est donnée par

$$E_{stat} = \int \mathcal{H} d^3r = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi_i)} \partial_t \phi_i - \mathcal{L} \right) d^3r = - \int \mathcal{L}_{Sk} d^3r \quad (1.50)$$

$$= \frac{2\pi F_\pi}{e} \int_0^\infty \left[\left(F'^2 + 2 \frac{\sin^2(F)}{r^2} \right) + \frac{\sin^2(F)}{r^2} \left(2F'^2 + \frac{\sin^2(F)}{r^2} \right) \right] r^2 dr. \quad (1.51)$$

Le changement de variable suivant $r \rightarrow \frac{eF_\pi}{\sqrt{2}} r$ a été utilisé et la dépendance radiale de $F(r)$ a été omise pour alléger l'expression. Cette quantité est obtenue en considérant que les dérivées temporelles sont toutes nulles, c'est-à-dire le cas où L_0 correspond à la matrice nulle $L_0 = 0_{2 \times 2}$. Le profil radial $F(r)$ qui minimise l'énergie statique est obtenu en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange radiale

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{\partial \mathcal{L}_{Sk}}{\partial (\partial_r F)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{Sk}}{\partial F} = 0 \quad (1.52)$$

sur \mathcal{L}_{Sk} avec la paramétrisation (1.46). Ce faisant, on obtient

$$\frac{\sin(F) \cos(F)}{r^2} (F'^2 - 2) + \frac{2F'}{r} + F'' \left(1 + \frac{\sin^2(F)}{r^2} \right) - \frac{\sin^3(F) \cos(F)}{r^4} = 0. \quad (1.53)$$

Cette équation se résout numériquement pour $F(r)$ de façon à respecter les bornes prédéterminées (pas de solutions analytiques). Une fois cette fonction obtenue, en principe, toutes les quantités qui découlent du modèle peuvent être calculées. La généralisation de cet ansatz aux secteurs topologiques $B > 1$ n'est cependant pas directe. Dans ce cas, la forme du vecteur \hat{r}_1 qui donne la configuration d'énergie minimale pour un secteur donné n'est pas connue et il faut donc recourir à des méthodes d'optimisation numériques qui mixent les composantes angulaires et radiale de façon complexe [41]. Certaines techniques astucieuses, telles que l'application rationnelle (AR), furent développées pour obtenir une approximation analytique de ces géométries et alléger les calculs numériques, ce qui fera l'objet du chapitre 3. Afin de clore cette section, mentionnons également qu'il est possible de déterminer une borne inférieure pour l'énergie statique du modèle, qui est responsable de la stabilité des solitons et qui dé-

coule de la contrainte topologique sur l'espace. Par conséquent, celle-ci est donc indépendante du choix de la paramétrisation et ne dépend que des bornes de $F(r)$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il est possible de montrer [58] que l'énergie statique est bornée de la façon suivante

$$E_{stat} \geq 48\pi^2 \sqrt{2\alpha\beta} |B| = \frac{6\pi^2 F_\pi}{e} |n|. \quad (1.54)$$

La borne (1.54), généralement appelée borne de Bogomol'ny (BPS), était bien connue de Skyrme [50, 51] et constitue une preuve remarquable de la stabilité du modèle. Celle-ci illustre bien le mécanisme par lequel la géométrie particulière de la compactification de l'espace introduit une stabilité locale au niveau classique, ce qui est typique d'une stabilité topologique. Cependant, il est important de mentionner qu'il n'existe aucune solution non triviale de (1.53) qui mène à une énergie statique qui sature cette borne pour un secteur topologique donné. Cela implique que les noyaux atomiques tels que décrits par ce modèle possèdent déjà de l'énergie de liaison au niveau classique. Le problème, par contre, est que la prédiction sur cette énergie est environ dix fois supérieure à celle observée expérimentalement. L'idéal serait donc d'avoir un modèle qui sature de façon exacte la borne inférieure sur l'énergie statique, auquel il serait possible d'ajouter certaines contributions énergétiques de façon « contrôlée » pour tenter de reproduire les faibles énergies de liaison observées. C'est dans cette optique que le modèle de Skyrme BPS est introduit au chapitre 2, qui est ensuite utilisé comme point de départ dans la construction du modèle quasi-BPS proposé au chapitre 3.

1.2.6 Quantification des états solitoniques

Le processus de quantification des skyrmions est nécessaire afin de générer les bons nombres quantiques associés aux baryons, et donc à l'obtention du spectre physique. Le modèle de Skyrme original stipule que les propriétés particulières des solitons topologiques classiques permettent de croire qu'ils sont reliés d'une quelconque façon à des particules physiques de la théorie quantique correspondante. Cette supposition s'avère exacte. Cependant, la connexion entre des solutions classiques et des objets ayant un comportement quantique n'est pas triviale. Puisque le modèle de Skyrme décrit des objets étendus dans l'espace et correspond à une théorie de champ classique non renormalisable, la procédure de quantification standard telle que formulée en théorie quantique des champs ne peut pas être utilisée pour obtenir le spectre.

Historiquement, les premières tentatives de quantification du modèle sont attribuables à Adkins, Nappi et Witten [7]. L'idée était de quantifier le champ statique U sous l'ansatz hérisson (pour $B = 1$) en considérant des rotations du champ à l'aide d'une matrice A élément de $SU(2)$. En promouvant celle-ci au titre de variable quantique et en y incorporant une dépendance temporelle, les auteurs purent obtenir la quantification des modes de rotation et d'isorotation du nucléon et de la résonance delta, ce qui permet d'obtenir certaines de leurs propriétés statiques telles que le rayon électromagnétique et leurs moments magnétiques. Cette méthode fait intervenir une approximation semi-classique, valide pour une théorie de champs

faiblement couplés, ce qui mène à des états quantiques non perturbatifs étendus spatialement. En principe, il faudrait quantifier le champ de mésons sous-jacent au modèle, mais dans une théorie non linéaire cela amène une infinité de modes à traiter [1]. En utilisant les symétries du modèle classique lorsque l'on étudie les fluctuations quantiques autour de la solution classique, il est possible d'identifier les modes dominants (ceux qui proviennent des transformations de symétries de l'hamiltonien) et ainsi simplifier ce problème. Une approche plus générale basée sur ces considérations, qui permet une quantification des skyrmions dans une configuration arbitraire, sera utilisée dans ce document. Celle-ci est basée sur les travaux de [13, 33, 40] et est connue sous le nom de quantification des coordonnées collectives (mode zéro) ou de quantification du rotateur rigide (qui suppose une géométrie indéformable). Le point de départ correspond toujours au champ statique $U(\vec{r})$, auquel on incorpore une dépendance temporelle

$$U(\vec{r}) \rightarrow \tilde{U}(\vec{r}, t) \quad (1.55)$$

en introduisant deux matrices de rotation $A(t)$ et $B(t)$ éléments de $SU(2)$, qui agissent respectivement dans l'espace d'isospin et de spin (espace réel). Le champ dynamique \tilde{U} est donc donné par

$$\tilde{U}(\vec{r}, t) = A(t)B(t)U(\vec{r})B^\dagger(t)A^\dagger(t), \quad (1.56)$$

ce qui correspond aux configurations dégénérées en énergie obtenue par rotation de la configuration statique. Cela signifie que par construction, les skyrmions sont invariants sous une rotation dans l'espace réel suivi d'une rotation dans l'espace d'isospin (les rotations doivent être combinées). Il est important de noter que la rotation dans l'espace physique, représentée ici par la matrice $B \in SU(2)$, possède un équivalent dans le groupe de rotation $SO(3)$, donné par la matrice de rotation associée $R_{ij}(B) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\tau_i B \tau_j B^\dagger)$. La quantification semi-classique s'obtient en promouvant les coordonnées collectives $A(t)$ et $B(t)$ (les modes zéro) au titre de degrés de liberté dynamiques. Leur dépendance temporelle explicite est donnée par

$$A(t) = e^{-iI_k a_k t}, \quad B(t) = e^{-iJ_k b_k t}. \quad (1.57)$$

Les générateurs du groupe d'isospin I_k et de spin J_k agissent sur le champ U de la façon suivante

$$I_k U = \frac{\tau_k}{2} U, \quad J_k U = -i\epsilon_{ljk} r_l \partial_j U, \quad (1.58)$$

et les quantités a_k et b_k correspondent aux vitesses de rotation dans l'espace d'isospin et de spin respectivement. Elles sont données [13] par

$$a_k = -i\text{Tr}(\tau_k A^\dagger \dot{A}), \quad b_k = i\text{Tr}(\tau_k B^\dagger \dot{B}). \quad (1.59)$$

De plus, les composantes r_i qui se retrouvent dans J_k sont simplement les composantes du vecteur position \vec{r} dans l'espace réel, habituellement prises en coordonnées sphériques. La quantification par cette méthode peut également générer des modes de vibrations et de trans-

lations [40], c'est-à-dire que l'on devrait également considérer un champ statique de la forme $U(\vec{r} - \vec{R})$ avec \vec{R} qui représente les degrés de liberté translationnels. Ces modes de translations sont principalement utilisés pour décrire des interactions entre skyrmions de la forme $U(\vec{r}) = U_1(\vec{r} - \vec{R}_1)U_2(\vec{r} - \vec{R}_2)$, où il y a un transfert de quantité de mouvement. Cependant, puisque l'on souhaite décrire les états de spin et d'isospin seulement, les modes de vibrations et de translations seront ignorés et par conséquent les skyrmions seront quantifiés dans le repère d'impulsion nulle. L'insertion de cette dépendance temporelle a pour effet d'ajouter une contribution supplémentaire au lagrangien puisque désormais $L_0 \rightarrow \tilde{L}_0 \neq 0_{2 \times 2}$. En substituant le champ dynamique (1.56) dans le lagrangien de Skyrme, celui-ci peut se séparer en deux parties distinctes

$$L_{Sk} = -L_{stat} + L_{rot}, \quad (1.60)$$

où L_{stat} est le lagrangien de Skyrme précédemment obtenu (intégré sur tout l'espace d^3r) en considérant $L_0 = 0_{2 \times 2}$ et L_{rot} est la partie « temporelle » du lagrangien introduite par la rotation, celle-ci prend la forme suivante

$$L_{rot} = \int \left[-\alpha \text{Tr}(\tilde{L}_0 \tilde{L}_0) - 2\beta \text{Tr}([\tilde{L}_0, \tilde{L}_i]^2) \right] d^3r. \quad (1.61)$$

Les courants dynamiques sont obtenus en substituant (1.56) dans (1.41), ce qui donne

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0 &= \tilde{U}^\dagger \partial_0 \tilde{U} \\ &= AB(-T_k a_k - b_k \epsilon_{ijk} r_i L_j) B^\dagger A^\dagger, \end{aligned} \quad (1.62)$$

où $T_k \equiv iU^\dagger [\frac{T_k}{2}, U]$, ainsi que

$$\tilde{L}_i = \tilde{U}^\dagger \partial_i \tilde{U} = AB L_i B^\dagger A^\dagger. \quad (1.63)$$

Du point de vue du lagrangien, il n'est pas nécessaire de substituer la forme spécifique des matrices A et B lorsque l'on connaît (1.62) et (1.63) puisque les courants \tilde{L}_μ sont toujours compris dans une trace et donc, de par la propriété cyclique de celle-ci, les matrices A et B s'annulent toujours ($AA^\dagger = \mathbb{I}_2$ et $BB^\dagger = \mathbb{I}_2$). Une fois les \tilde{L}_μ obtenus, l'expression (1.61) peut être reformulée de la façon suivante

$$L_{rot} = \frac{1}{2} a_i U_{ij} a_j + \frac{1}{2} b_i V_{ij} b_j - a_i W_{ij} b_j. \quad (1.64)$$

Les quantités U_{ij} et V_{ij} sont définies comme les moments d'inertie associés à une rotation dans l'espace d'isospin et de spin respectivement. Conséquemment, la matrice W_{ij} est associée aux

moments d'inertie d'une rotation « mixte » entre ces espaces. Ceux-ci sont donnés par

$$U_{ij} = - \int [2\alpha \text{Tr}(T_i T_j) + 4\beta \text{Tr}([L_k, T_i][L_k, T_j])] d^3 r \quad (1.65)$$

$$V_{ij} = - \int [2\alpha \text{Tr}(S_i S_j) + 4\beta \text{Tr}([L_k, S_i][L_k, S_j])] d^3 r \quad (1.66)$$

$$W_{ij} = - \int [2\alpha \text{Tr}(T_i S_j) + 4\beta \text{Tr}([L_k, T_i][L_k, S_j])] d^3 r, \quad (1.67)$$

où la définition de S_k provient du second terme de \tilde{L}_0 , soit $S_k \equiv -\epsilon_{lmk} r_l L_m$. De plus, une somme sur l'indice muet k est sous-entendue dans les expressions (1.65) à (1.67). Puisque le lagrangien (1.64) contient des vitesses généralisées, soit a_i et b_i , qui peuvent être traitées comme des variables canoniques, les moments conjugués correspondants sont donnés par

$$K_i = \frac{\partial L_{rot}}{\partial a_i} = U_{ij} a_j - W_{ij} b_j \quad (1.68)$$

$$M_i = \frac{\partial L_{rot}}{\partial b_i} = -W_{ij}^T a_j + V_{ij} b_j \quad (1.69)$$

Les opérateurs \mathbf{K} et \mathbf{M} correspondent en réalité aux opérateurs du moment cinétique d'isospin et de spin respectivement dans le repère de la particule. Ceux-ci peuvent être ramenés dans le repère du laboratoire, où l'on retrouve les quantités bien connues \mathbf{I} (isospin) et \mathbf{J} (spin), par le biais d'une rotation [13], c'est-à-dire

$$I_i = -R_{ij}(A) K_j, \quad J_i = -R_{ij}^T(B) M_j. \quad (1.70)$$

À partir de cette relation, il est possible de déduire les invariants de Casimir, qui doivent donc satisfaire

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{K}^2, \quad \mathbf{J}^2 = \mathbf{M}^2. \quad (1.71)$$

Les opérateurs \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} et \mathbf{M} forment ainsi une algèbre de Lie sous le groupe $O(4)_{I,K} \otimes O(4)_{M,J}$ [13]. L'hamiltonien du système peut donc s'écrire [33] en termes des variables canoniques et des moments conjugués définis précédemment (valide pour U avec symétrie axiale)

$$H_{rot} = K_i a_i + M_i b_i - L_{rot} \quad (1.72)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\left(M_i + W_{ii} \frac{K_i}{U_{ii}} \right)^2}{V_{ii} - \frac{W_{ii}^2}{U_{ii}}} + \frac{K_i^2}{U_{ii}} \right]. \quad (1.73)$$

À partir de cet hamiltonien, l'énergie de rotation peut être obtenue en calculant ses valeurs propres lorsqu'il agit sur un état de spin et d'isospin bien défini. De plus, la base sur laquelle repose les fonctions d'ondes est représentée par $|I, i_3, k_3\rangle \otimes |J, j_3, m_3\rangle$, c'est-à-dire le produit tensoriel d'états d'un corps rigide dans l'espace réel et dans l'espace d'isospin. Pour aller plus loin dans les calculs, il faut donc supposer une symétrie particulière pour la paramétrisation

du champ de Skyrme U (telle que supposée à l'équation (1.72)), qui impose des contraintes spécifiques sur l'espace d'Hilbert généré par ces états. Dans le prochain chapitre, la symétrie axiale sera utilisée, ce qui permet d'obtenir un calcul détaillé de l'énergie de rotation et des moments d'inertie pour des skyrmions de nombre baryonique $B \geq 1$. L'énergie de rotation, qui contient les bons nombres quantiques de spin et d'isospin, permet ensuite de lever la dégénérescence en énergie des solutions classiques précédemment obtenues.

Cependant, certains problèmes persistent toujours avec cette méthode de quantification. Par exemple, celle-ci ne permet pas de retrouver tous les bons états d'énergie minimum [33] connus expérimentalement pour plusieurs configurations multiskyrmions. Cela peut s'expliquer en partie par le fait que cette méthode est sensible au choix des paramètres imposés (F_π, e, m_π) lors du calcul des minimums classiques. En effet, dans un modèle où la masse du pion m_π est non nulle (voir très grande), la structure des skyrmions de nombres baryoniques élevés s'en trouve significativement changée, ce qui altère les symétries sur lesquelles la procédure de quantification repose. L'inclusion d'un terme de masse (le potentiel) dans le lagrangien permet d'obtenir des résultats plus réalistes en choisissant celui-ci de façon à briser explicitement la symétrie chirale, redonnant ainsi des pions massifs. La condition $m_\pi > 0$ est en réalité essentielle pour que cette méthode de quantification soit viable [14] pour des particules physiques. En somme, la quantification des modes zéro demeure une approximation semi-classique dont la validité repose sur deux conditions essentielles [46], c'est-à-dire qu'elle est applicable dans une théorie de champ faiblement couplée et qu'elle requiert la connaissance de solutions classiques non triviales bien définies. Cependant, il n'en demeure pas moins que les résultats obtenus avec cette méthode ne sont pas de nature moins « quantique » que ceux obtenus par des méthodes perturbatives standard. En réalité, celles-ci peuvent être vues comme un cas spécial de la méthode semi-classique [46], qui consiste à quantifier les fluctuations autour de solutions classiques possédant une géométrie triviale (particules ponctuelles). Il ne fait aucun doute que ce modèle pourrait bénéficier d'une procédure de quantification plus complète, mais la forme spécifique de celle-ci demeure un problème ouvert. Dans le prochain chapitre, des calculs concrets seront réalisés dans le but de visualiser comment les différentes quantités sont obtenues dans le cas d'un modèle simplifié en 3+1 dimensions permettant des calculs analytiques.

Chapitre 2

Le modèle de Skyrme BPS

Ce chapitre concerne l'étude du modèle proposé pour la première fois par le groupe d'Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczyński [5]. Il s'agit en réalité d'un sous-modèle faisant partie d'une classe plus large de modèles de type Skyrme axés sur la construction d'actions efficaces de QCD à basse énergie. La construction de ce sous-modèle répond directement au besoin de corriger certains aspects du modèle de Skyrme original qui furent lourdement critiqués au cours des années. Parmi les points les plus importants, on retrouve [4] :

- *Énergies de liaison.* Le modèle proposé par Skyrme, ne correspondant pas à une théorie BPS exacte, ne possède pas de solution qui sature la relation linéaire correspondante (1.54) entre l'énergie et la charge topologique (supérieure d'environ 23% pour le cas $B = 1$ et d'un peu moins de 4% pour $B > 1$). Cela mène naturellement à la présence d'une énergie de liaison pour les noyaux les plus stables. Cependant, les prédictions sur cette énergie sont beaucoup plus élevées (environ 10% de la masse totale) que celles observées de façon expérimentale, qui ne dépassent jamais 1% de la masse totale ;
- *Généralisation aux multibaryons.* Dans la limite où la charge topologique est grande, le modèle de Skyrme décrit la matière comme des états cristallins plutôt que comme un liquide incompressible. De plus, des structures de type coquille sont privilégiées aux dépens d'une densité baryonique constante à l'intérieur du noyau, ce qui tend à être en désaccord avec les observations expérimentales.

La façon dont le lagrangien de Skyrme est construit, soit sur un développement en faibles puissances des dérivées de champ, semble aussi générer certains problèmes conceptuels. Ceux-ci peuvent déjà être entrevus lors du développement au quatrième ordre en dérivée donné par (1.40). Cette méthode ne permet pas d'ignorer la contribution des termes proportionnels à α_2 et α_3 puisque ceux-ci contribuent sur un même pied d'égalité dans l'action efficace. Par ailleurs, tel que mentionné précédemment, l'inclusion de l'un de ces termes mène à des problèmes importants au niveau de la dynamique et de la quantification des solutions. Le raisonnement derrière cette méthode ne justifie donc pas de restreindre le lagrangien à un nombre de termes particuliers alors qu'en contrepartie, le développement en $1/N_c$ de QCD à basse énergie (supposant $N_c \rightarrow \infty$, où N_c est le nombre de couleurs des quarks) permet de tronquer la série obtenue pour garder seulement les puissances dominantes de dérivées [4].

Cette coupure survient généralement aux termes d'ordre 4 ou 6. L'utilisation de cette méthode dans la limite $N_c \rightarrow \infty$ pourrait donc en principe s'avérer problématique.

2.1 Fondements mathématiques du modèle

Le lagrangien du modèle de Skyrme BPS est construit à partir de deux termes principaux, l'un correspondant au potentiel et l'autre à un terme d'ordre 6 en dérivée de champ. Le potentiel choisi est celui privilégié par Skyrme et le terme d'ordre 6, étudié pour la première fois par [36] pour inclure la contribution du méson ω dans le lagrangien de Skyrme (1.42), sert à la stabilisation du soliton et fait le lien avec les notions de topologie nécessaires à l'existence des skyrmions. Cette combinaison particulière de termes possède des propriétés importantes dont l'étude a permis d'établir une base solide pour une meilleure description phénoménologique des noyaux [2, 3, 4, 5, 6].

2.1.1 Formulation du lagrangien et solutions analytiques

Le lagrangien du modèle BPS prend donc la forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BPS} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_6 \\ &= -\mu^2 V(U) - \pi^4 \lambda^2 \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}^\mu. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le premier terme (\mathcal{L}_0) correspond au terme de masse, construit à partir d'un potentiel $V(U)$ qui dépend de U seulement, et le second terme (\mathcal{L}_6) correspond au carré de la densité de courant baryonique (définie par (1.44)), qui est le seul terme d'ordre 6 possible en se limitant à des dérivées premières du champ ainsi qu'à deux dérivées temporelles. Les constantes de couplage μ et λ sont laissées pour l'instant à titre de paramètres libres. La forme de paramétrisation standard (1.46) pour le champ U est également utilisée. Cependant, contrairement au choix précédent pour le vecteur \hat{r}_1 , qui découlait de la représentation d'un quaternion unitaire en coordonnées sphériques [30], un nouveau vecteur unitaire \hat{n} est introduit. Ce vecteur peut être relié à un scalaire complexe u par le biais de la projection stéréographique

$$\hat{n} = \frac{1}{(1 + u\bar{u})} (u + \bar{u}, -i(u - \bar{u}), 1 - u\bar{u}), \quad (2.2)$$

et mène à des solutions (pour $B > 1$) de forme quasi sphérique. La projection stéréographique est utilisée de façon générale pour transposer une sphère dans un plan. Celle-ci ne préserve pas nécessairement les distances ou l'aire des figures, mais plutôt les angles de celles-ci, ce qui en fait une application conforme. Cette projection reflète le fait qu'il existe une correspondance une à une entre un point sur une sphère et un point sur un plan, ce qui permet de représenter les nombres complexes comme des points sur une sphère. L'idée est donc de transposer les coordonnées angulaires de l'espace réel (θ, ϕ) dans le plan complexe étendu (u, \bar{u}) pour faciliter l'analyse des symétries et éviter les singularités aux pôles. La forme particulière de la

fonction u est ensuite déterminée par les équations du mouvement du modèle. En remplaçant \hat{r}_1 par \hat{n} dans (1.46), le lagrangien prend donc la forme

$$\mathcal{L}_{BPS} = -\frac{\lambda^2 \sin^4(F)}{(1 + u\bar{u})^4} (\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2 - \mu^2 V(F), \quad (2.3)$$

où la notation suivante a été utilisée, soit $F_\nu = \partial_\nu F$, $u_\rho = \partial_\rho u$ et $\bar{u}_\sigma = \partial_\sigma \bar{u}$. Le potentiel s'avère dépendre de F seulement puisque sa dépendance par rapport au champ U est supposée de la forme $V(\text{Tr}(U + U^\dagger))$. Étant donné qu'il existe deux quantités scalaires d'intérêt, u (ou de façon équivalente \bar{u}) et F , les équations d'Euler-Lagrange correspondantes qui minimisent l'énergie statique sont données par

$$\frac{\lambda^2 \sin^2(F)}{(1 + u\bar{u})^4} \partial_\mu \left(\sin^2(F) \frac{\partial(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial F_\mu} \right) + \mu^2 \frac{\partial V(F)}{\partial F} = 0 \quad (2.4)$$

pour la partie radiale et

$$\partial_\mu \left(\frac{1}{(1 + u\bar{u})^2} \frac{\partial(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial \bar{u}_\mu} \right) = 0 \quad (2.5)$$

pour la partie angulaire. S'attardant à des solutions statiques topologiquement non triviales, les auteurs proposent l'ansatz suivant

$$F = F(r), \quad u(\theta, \phi) = g(\theta) e^{in\phi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

de sorte que u couvre tout le plan complexe et que \hat{n} recouvre au moins une fois \mathbf{S}^2 . La fonction F demeure comprise dans l'intervalle $F \in [0, \pi]$ et est complètement découplée de la partie angulaire. La nouvelle fonction introduite $g(\theta)$ doit être déterminée en résolvant l'équation différentielle angulaire (2.5), qui devient, après substitution (voir annexe A pour les détails),

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{g^2 g_\theta}{(1 + g^2)^2 \sin(\theta)} \right) - \frac{g g_\theta^2}{(1 + g^2)^2 \sin^2(\theta)} = 0. \quad (2.7)$$

La solution qui possède les bornes appropriées est donnée par

$$g(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.8)$$

Le vecteur \hat{n} , qui encode l'information sur la partie angulaire, devient après substitution,

$$\hat{n} = (\sin(\theta) \cos(n\phi), \sin(\theta) \sin(n\phi), \cos(\theta)). \quad (2.9)$$

La propriété d'intégrabilité du modèle permet donc de trouver les configurations qui minimisent l'énergie pour tout $n > 0$ de façon analytique et l'hypothèse (2.6) est connue sous le nom de solution axiale (SA). Pour le cas $n = 1$, on voit que l'on retombe bien sur la géométrie

sphérique (1.48) mais pour $n > 1$, cela correspond à des sphères plus ou moins déformées. Il est également possible de constater que l'enroulement de l'espace s'effectue selon l'axe ϕ dans ce modèle dû aux symétries particulières de celui-ci. Ceci contraste avec le modèle de Skyrme original, où l'enroulement de l'espace est radial et représenté par les bornes de la fonction $F(r)$, soit $F(0) = n\pi$ et $F(\infty) = 0$. Dans ce modèle, le profil radial $F(r)$ est déterminé par l'équation différentielle (2.4), qui peut être reformulée de la façon suivante après substitution de (2.6) et (2.8)

$$\frac{n^2\lambda^2}{2} \frac{\sin^2(F)}{r^2} \partial_r \left(\frac{\sin^2(F)F'}{r^2} \right) - \mu^2 \frac{\partial V(F)}{\partial F} = 0. \quad (2.10)$$

En effectuant le changement de variable $x = \frac{\sqrt{2}\mu r^3}{3n\lambda}$, on obtient

$$\sin^2(F) \partial_x \left(\sin^2(F) F_x \right) = \frac{\partial V(F)}{\partial F}. \quad (2.11)$$

Cette expression peut ainsi être intégrée sur F de la façon suivante

$$\int \sin^2(F) \partial_x \left(\sin^2(F) F_x \right) dF = \int dV, \quad (2.12)$$

pour obtenir (en gardant fixe F_x durant l'intégration)

$$V(F) = \frac{1}{2} \sin^4(F) F_x^2. \quad (2.13)$$

On peut par la suite restaurer la dépendance radiale, ce qui donne la contrainte que le modèle impose au potentiel

$$V(F) = \frac{n^2\lambda^2}{4\mu^2} \frac{\sin^4(F) F'^2}{r^4}. \quad (2.14)$$

Cette contrainte est cruciale à l'obtention de solutions BPS, tel qu'il en sera fait mention à la prochaine section. Pour obtenir $F(r)$, il faut donc faire le choix d'un potentiel et le substituer dans (2.14), ce qui revient à résoudre une équation différentielle d'ordre 1. Le choix du potentiel dans ce modèle est donc de première importance pour bien représenter les propriétés des noyaux. La forme exacte de celui-ci demeure jusqu'à ce jour inconnue. Cependant, les contraintes imposées par le modèle et les propriétés physiques des objets que l'on souhaite étudier sont suffisantes pour proposer des formes générales qui reproduisent relativement bien les observations expérimentales. L'un des choix les plus simples qui respectent tous les critères liés à l'existence de solutions solitoniques est celui proposé pour la première fois par Skyrme, soit

$$V(U) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbb{I}_2 - U), \quad (2.15)$$

ou de façon équivalente sous la paramétrisation (1.46),

$$V(F) = 1 - \cos(F(r)). \quad (2.16)$$

Ce potentiel a l'avantage de décrire convenablement la structure nucléaire (les caractéristiques élémentaires) ainsi que les objets de tailles finies. C'est le potentiel que le groupe d'Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczyński propose d'étudier dans le modèle BPS. En résolvant l'équation différentielle

$$1 - \cos(F) = \frac{n^2 \lambda^2 \sin^4(F) F'^2}{4\mu^2 r^4} \quad (2.17)$$

pour $F(r)$ tout en imposant les bornes appropriées, les auteurs proposent une solution de type compacton

$$F(r) = \begin{cases} 2 \arccos\left(\frac{1}{R_n} r\right) & r \in [0, R_n] \\ 0 & r \geq R_n \end{cases}, \quad (2.18)$$

où R_n est défini comme étant le rayon du compacton $R_n \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}\lambda n}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$. La nature compacte des skyrmions ainsi générés pour un nombre baryonique n implique donc que ceux-ci ont une taille finie et un volume bien défini. De plus, la densité d'énergie et la densité baryonique obtenues pour tout n avec ce type de solution correspondent à des fonctions continues qui possèdent la symétrie sphérique et qui atteignent leur valeur maximale à $r = 0$, ce qui permet de générer des configurations pleines en accord avec les observations expérimentales.

2.1.2 Détermination de la borne BPS

La borne BPS est d'une grande importance en physique nucléaire. Celle-ci décrit les états d'énergie minimum d'une théorie de champs classique et prend la forme d'une borne inférieure sur l'énergie statique ou la masse de ces états. Les solutions d'un modèle qui sature cette borne ne possèdent pas d'énergie de liaison et ne peuvent donc pas décrire des états liés. Cela est représenté par le fait que l'énergie statique du modèle possède une dépendance linéaire en fonction du nombre baryonique. En d'autres mots, cela revient à dire que la masse d'un « noyau » ne possédant pas d'énergie de liaison serait simplement la somme de celle de ses constituants, ce qui corrobore les observations expérimentales. La borne inférieure sur l'énergie statique du modèle BPS se calcule donc de la façon suivante

$$\begin{aligned} E_{stat} &= E_0 + E_6 \\ &= \int \left[\mu^2 V(F) + \frac{\lambda^2 \sin^4(F)}{(1+u\bar{u})^4} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l)^2 \right] d^3 r \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$= \int \left[\left(\pm \mu \sqrt{V(F)} \right)^2 + \left(\pm \frac{\lambda \sin^2(F)}{(1+u\bar{u})^2} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l) \right)^2 \right] d^3 r \quad (2.20)$$

$$E_{stat} \geq \int 2\mu\lambda\sqrt{V(F)} \frac{\sin^2(F)}{(1+u\bar{u})^2} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l) d^3 r. \quad (2.21)$$

Le signe $+$ a été choisi pour respecter $B = n > 0$ (solutions physiques) et l'inégalité arithmétique $a^2 + b^2 \geq 2ab$ a ensuite été utilisée (valide pour $a > 0$, $b > 0$). Pour construire un modèle qui sature cette borne de façon exacte, il est toujours possible de compléter le carré à

la ligne (2.20). Ce faisant, on obtient la quantité suivante

$$\int \left[\left(\mu \sqrt{V(F)} \pm \frac{\lambda \sin^2(F)}{(1+u\bar{u})^2} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l) \right)^2 \mp \frac{2\mu\lambda \sqrt{V(F)} \sin^2(F)}{(1+u\bar{u})^2} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l) \right] d^3r. \quad (2.22)$$

En imposant que l'énergie E_{stat} soit strictement égale à la borne (2.21), il est possible de conclure que la condition

$$\mu \sqrt{V(F)} \pm \frac{\lambda \sin^2(F)}{(1+u\bar{u})^2} (i\epsilon^{mnl} F_m u_n \bar{u}_l) = 0 \quad (2.23)$$

doit être respectée. Lorsque l'on substitue la solution obtenue pour $u(\theta, \phi)$ dans (2.23), on trouve que

$$V(F) = \frac{n^2 \lambda^2 \sin^4(F) F'^2}{4\mu^2 r^4}, \quad (2.24)$$

ce qui correspond exactement à la même contrainte sur le potentiel que celle trouvée à partir des équations du mouvement (2.14). La solution axiale proposée comme hypothèse de départ est donc tout à fait adéquate pour minimiser l'énergie statique du modèle puisque toute fonction $F(r)$ qui satisfait (2.14) pour un choix judicieux de potentiel résout par conséquent la contrainte imposée par la saturation de la borne BPS. Le fait d'imposer la borne BPS a également permis de diminuer à l'ordre 1 l'équation différentielle de départ, soit (2.10), qui est d'ordre 2. Cette technique est souvent utilisée dans ce genre de situations pour simplifier l'équation différentielle à résoudre. Dans notre cas cependant, l'intégrabilité du modèle fait en sorte que l'équation (2.10) peut se résoudre de façon analytique. Pour compléter le calcul de la borne BPS (2.21), on peut y substituer le potentiel choisi (2.16) ainsi que la solution axiale (2.6) précédemment obtenue. Ce faisant, on obtient

$$\begin{aligned} E_{stat} &\geq \mu\lambda |n| \int \sqrt{V(F)} \frac{\sin^2(F)}{r^2} \left(\frac{dF}{dr} \right) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \\ &\geq 4\pi\mu\lambda |n| \int_0^\pi \sqrt{V(F)} \sin^2(F) dF \\ E_{stat} &\geq \frac{64\sqrt{2}\pi}{15} \mu\lambda |n|, \end{aligned} \quad (2.25)$$

ce qui correspond à la borne BPS du modèle. À partir de ce calcul, il est important de constater que cette borne dépend uniquement de la forme du potentiel et non de la forme spécifique des solutions (seules les bornes de $F(r)$ sont nécessaires lorsque l'on connaît $V(F)$). Ce résultat suggère également que les paramètres μ et λ soient des réels positifs puisqu'ils sont reliés à l'énergie des solutions. Comme mentionné précédemment, le modèle de Skyrme original possède une borne BPS, mais aucune solution ne sature cette dernière alors que dans le cas présent, toutes les solutions du modèle saturent la borne.

2.2 Résultats et applications du modèle BPS

Le choix particulier de potentiel, et par conséquent du profil radial $F(r)$, combiné avec la représentation angulaire (2.9) permet d'obtenir des résultats intéressants sur la phénoménologie des noyaux atomiques. En premier lieu, il s'avère nécessaire de calculer explicitement l'énergie statique des solitons et, par le fait même, vérifier que l'expression est linéaire en fonction du nombre baryonique. La quantification du rotateur rigide peut ensuite être appliquée aux états solitoniques pour obtenir l'énergie de rotation correspondante et ainsi introduire en quelque sorte l'énergie de liaison prédite par le modèle.

2.2.1 Densité baryonique et énergie statique

La densité baryonique \mathcal{B}^0 , qui représente la distribution de matière à l'intérieur du noyau, est définie comme la composante $\mu = 0$ de (1.44) et peut donc être calculée de la façon suivante

$$\mathcal{B}^0 = -\frac{\epsilon^{ijk}}{24\pi^2} \text{Tr}(L_i L_j L_k). \quad (2.26)$$

Celle-ci correspond à la seule composante non nulle du courant baryonique dans le cas statique. Après substitution de la solution axiale, incluant le profil radial (2.18), on obtient

$$\mathcal{B}^0(r) = -\frac{n}{2\pi^2} \frac{\sin^2(F)F'}{r^2} = \frac{4n}{\pi^2 R_n^3} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_n}\right)^2}. \quad (2.27)$$

Les courbes respectives sont donc représentées par la figure suivante.

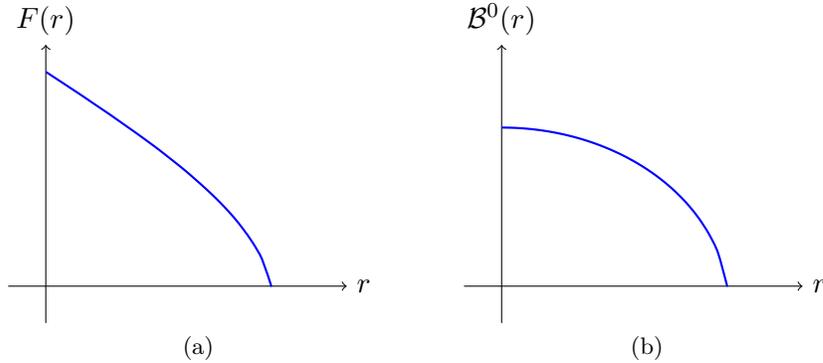


FIGURE 2.1: Représentation schématique du profil radial (a) et de la densité baryonique (b) normalisés à $R_n = 1$ et $n = 1$ pour le modèle de Skyrme BPS.

À titre de formalité, on peut vérifier que le nombre baryonique est bien représenté par un entier,

$$B = 4\pi \int_0^{R_n} \mathcal{B}^0(r) r^2 dr = \frac{16n}{\pi R_n^3} \int_0^{R_n} r^2 \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_n}\right)^2} dr = n. \quad (2.28)$$

L'énergie statique associée à la contribution de chaque terme du lagrangien s'écrit

$$E_0 = \mu^2 \int V(F) d^3r \quad (2.29)$$

$$E_6 = \pi^4 \lambda^2 \int \mathcal{B}_0 \mathcal{B}^0 d^3r. \quad (2.30)$$

Après une simple substitution, on obtient

$$E_0 = \frac{32\sqrt{2}\pi}{15} \mu \lambda |n|, \quad E_6 = \frac{32\sqrt{2}\pi}{15} \mu \lambda |n|. \quad (2.31)$$

Cela mène naturellement à

$$E_{stat} = E_0 + E_6 = \frac{64\sqrt{2}\pi}{15} \mu \lambda |n|, \quad (2.32)$$

ce qui correspond précisément à la borne (2.25) précédemment obtenue. Ce résultat est évidemment sans grande surprise puisque le modèle est construit pour saturer cette borne de façon exacte. En réalité, la contrainte (2.14) peut être réécrite de la façon suivante

$$V(F) = \frac{\pi^4 \lambda^2}{\mu^2} \mathcal{B}_0^2, \quad (2.33)$$

à partir de laquelle il devient clair que $E_0 = E_6$, indépendamment du choix du potentiel et de la fonction $F(r)$, à condition qu'ils satisfassent (2.33) bien entendu. La densité baryonique permet également d'obtenir une autre quantité d'intérêt, soit le rayon baryonique moyen (r.m.s, *root mean square*) représentant la taille moyenne des skyrmions. Celui-ci est donné par

$$\langle r_B^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\int r^2 \mathcal{B}_0 d^3r}{\int \mathcal{B}_0 d^3r} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.34)$$

On obtient donc, après substitution,

$$\langle r_B^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} R_n = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} = r_0 n^{\frac{1}{3}}, \quad (2.35)$$

où $r_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}}$ est le rayon *r.m.s* du noyau $n = 1$, dont la valeur expérimentale est approximativement de 1.23 fm (avec le facteur de conversion $1 \text{ fm}^{-1} = 197.329 \text{ MeV}$). À partir de (2.25), on constate également que la valeur de r_0 sera toujours plus petite que celle du rayon du compacton, qui est donnée par $R_0 = \left(\frac{2\sqrt{2}\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}}$. Cette relation de proportionnalité en $n^{\frac{1}{3}}$ du rayon baryonique moyen est bien connue expérimentalement et correspond donc à un résultat souhaitable pour tout modèle qui tente une description de la physique nucléaire.

2.2.2 Quantification du modèle

Étant donné que l'on envisage la description d'états liés, l'ajout de l'énergie de rotation est essentiel dans un modèle « BPS » puisque celle-ci agit à titre d'énergie de liaison. La procédure de quantification est la même que celle utilisée au chapitre précédent. En premier lieu, il faut obtenir les moments d'inertie du rotateur rigide. Ceux-ci s'obtiennent avec un calcul analogue à celui de la section 1.2.6, avec comme seule contribution les dérivées temporelles du terme d'ordre 6 (le potentiel ne contient aucune dérivée temporelle du champ U et donc ne contribue d'aucune façon à la dynamique de rotation). Les moments d'inertie sont donc donnés par

$$U_{ij} = -\frac{\lambda^2}{4^3} \int \text{Tr} ([T_i, L_p] [L_p, L_q] [L_q, T_j]) d^3r \quad (2.36)$$

$$V_{ij} = -\frac{\lambda^2}{4^3} \int \text{Tr} ([S_i, L_p] [L_p, L_q] [L_q, S_j]) d^3r \quad (2.37)$$

$$W_{ij} = -\frac{\lambda^2}{4^3} \int \text{Tr} ([T_i, L_p] [L_p, L_q] [L_q, S_j]) d^3r, \quad (2.38)$$

avec T_i et S_i tels que définis précédemment. La solution axiale utilisée dans ce modèle implique des symétries importantes au niveau des moments d'inertie. Par exemple, les matrices U_{ij} , V_{ij} et W_{ij} sont toutes diagonales et leurs éléments obéissent aux relations suivantes : $W_{11} = W_{22} = 0$ pour $|n| \geq 2$, $U_{11} = U_{22}$, $V_{11} = V_{22}$, $W_{11} = W_{22}$ pour $n = 1$ et $n^2 U_{33} = n W_{33} = V_{33}$. Les principaux moments d'inertie (ceux qui seront nécessaires aux calculs subséquents) peuvent donc être calculés de façon analytique, ce qui donne

$$U_{11} = \frac{64\pi\sqrt{2}\lambda^2}{105} (3n^2 + 1) \left(\frac{\mu}{n\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \quad V_{11} = \frac{256\pi\sqrt{2}n\mu\lambda}{105} \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.39)$$

$$U_{33} = \frac{256\pi\sqrt{2}\lambda^2}{105} \left(\frac{\mu}{n\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \quad W_{33} = \frac{256\pi\sqrt{2}\mu\lambda}{105} \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.40)$$

De plus, sous la solution axiale, la contrainte imposée à l'espace d'Hilbert prend la forme

$$(M_3 + nK_3) |I, J, i_3, j_3\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad m_3 + nk_3 = 0, \quad (2.41)$$

ce qui implique simplement qu'une rotation spatiale (d'un angle θ) à partir des axes de symétrie peut être compensée par une isorotation dans le sens inverse (d'un angle $-n\theta$) à partir de l'axe τ_3 . Le cas spécifique $B = n = 1$ est d'un intérêt particulier puisque l'hamiltonien, et par conséquent l'énergie de rotation du skyrmion, possèdent la symétrie sphérique. Dans ce cas, il existe une correspondance exacte entre le spin et l'isospin des états excités (la contrainte (2.41) se généralise aux autres composantes de \mathbf{M} et \mathbf{K}) et plusieurs simplifications sont possibles puisque les moments d'inertie sont tous égaux (aucune direction privilégiée). L'hamiltonien de rotation (1.72) devient donc

$$H_{rot}^{B=1} = \frac{\mathbf{K}^2}{2U_{11}} = \frac{\mathbf{I}^2}{2U_{11}}. \quad (2.42)$$

L'utilisation de l'opérateur de spin \mathbf{J}^2 est également valable dans cette expression, car celui-ci est équivalent à celui d'isospin dans ce cas. De plus, le choix de U_{11} est arbitraire puisque $U_{11} = U_{22} = U_{33}$. En agissant sur un état donné avec cet opérateur, on obtient l'énergie de rotation

$$E_{rot}^{B=1} = \frac{I(I+1)}{2U_{11}} = \frac{3}{8U_{11}} = \frac{315}{2048\pi\sqrt{2}\lambda^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.43)$$

puisque le nucléon possède un spin de $J = 1/2$ et un isospin de $I = 1/2$. Par ailleurs, il est important de constater que ce résultat ne fait pas de distinction entre le proton et le neutron (ne dépend pas de i_3) et peut mener à des états non physiques pour un mauvais choix de I (absence de contrainte sur le spin et l'isospin). Dans le cas d'un nombre baryonique quelconque qui respecte $B = |n| > 1$, l'hamiltonien de rotation se réduit à la forme suivante [11]

$$H_{rot} = \frac{1}{2} \left[\frac{\mathbf{M}^2}{V_{11}} + \frac{\mathbf{K}^2}{U_{11}} + \left(\frac{1}{U_{33}} - \frac{1}{U_{11}} - \frac{n^2}{V_{11}} \right) K_3^2 \right]. \quad (2.44)$$

Ce résultat peut évidemment être relié aux quantités du laboratoire avec les invariants de Casimir (1.71). L'énergie de rotation obtenue par l'application de cet opérateur sur un vecteur d'état prend donc la forme

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \left[\frac{J(J+1)}{V_{11}} + \frac{I(I+1)}{U_{11}} + \left(\frac{1}{U_{33}} - \frac{1}{U_{11}} - \frac{n^2}{V_{11}} \right) k_3^2 \right]. \quad (2.45)$$

À partir de cette expression, certaines réflexions s'imposent. Le premier point concerne la valeur propre k_3 , qui représente la troisième composante d'isospin dans le repère du skyrmion. En combinant la contrainte (2.41), qui implique $k_3 = -m_3/n$, avec l'inégalité bien connue $m \geq |m_3| \rightarrow J \geq |m_3|$, on obtient $|k_3| = \left| \frac{m_3}{n} \right| \leq \left| \frac{J}{n} \right|$. En considérant par la suite que la valeur maximale de spin que peut prendre un noyau est donnée par le nombre de particules qui le constitue multiplié par $1/2$, soit $J \leq n/2$, on obtient

$$|k_3| \leq \frac{1}{2}. \quad (2.46)$$

Puisque k_3 doit être entier pour les noyaux pairs et fractionnaire pour les noyaux impairs, le choix naturel qui s'impose afin de respecter (2.46) est $k_3 = 0$ et $k_3 = 1/2$ respectivement. Ce faisant, la description des noyaux de type fermionique (n impair) n'est plus possible puisque cette contrainte impose des valeurs de spin trop élevées pour ceux-ci, soit $J \geq n/2$, ce qui est en contradiction avec les valeurs de spin connues pour $n > 1$ avec n impair. Ce modèle est donc limité à l'étude des noyaux de type bosonique (n pair), pour lesquels la valeur $k_3 = 0$ ne pose aucun problème. Les seuls états fermioniques pouvant être décrits par le modèle sont donc ceux du proton et du neutron, pour lesquels $k_3 = 1/2$ génère les bons nombres quantiques de spin. Les arguments supportant cette discussion peuvent être trouvés dans [3, 9]. De plus, afin de pouvoir comparer les énergies de rotation obtenues avec celles connues expérimentalement

pour les noyaux atomiques les plus stables (de mêmes nombres quantiques B , J et i_3), la supposition $I = |i_3|$ sera utilisée. Cela provient du fait que ces noyaux sont ceux étant les plus liés et donc la contribution de l'énergie de rotation qui minimise la masse totale est celle où $I = |i_3|$, c'est-à-dire la valeur la plus petite que I peut prendre. En prenant ces éléments en compte dans le calcul de l'énergie de rotation, celle-ci devient

$$E_{rot} = \frac{105}{512\pi\sqrt{2}\lambda^2} \left(\frac{n\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{J(J+1)}{n^2} + \frac{4|i_3|(|i_3|+1)}{(3n^2+1)} \right], \quad (2.47)$$

valide pour les noyaux pairs avec $B > 1$. On peut ensuite choisir d'inclure d'autres contributions énergétiques basées sur des observations physiques. La prochaine étape logique serait d'inclure l'énergie de Coulomb pour améliorer les prédictions du modèle. Cependant, cette discussion sera réservée au chapitre suivant puisque celle-ci est basée sur une méthode développée par [11] dans le contexte du modèle quasi-BPS. Pour obtenir des prédictions concrètes sur l'énergie de liaison (et par conséquent sur les masses) des noyaux les plus stables, les paramètres μ et λ doivent être ajustés par le biais d'une régression sur les données expérimentales de façon à ce que celles-ci soient reproduites le plus fidèlement possible. La raison pour laquelle l'accent est mis sur les énergies de liaison est que celles-ci permettent un ajustement fin des paramètres. À ce jour, aucun modèle théorique en physique nucléaire n'est parvenu à reproduire cette courbe (figure 3.2) de façon exacte. L'analyse détaillée du type de régression proposée par [3] et des résultats qu'elle génère ne sera pas présentée dans ce travail puisqu'elle partage plusieurs similarités avec celle introduite au prochain chapitre. Il est intéressant de mentionner cependant que les valeurs des paramètres μ et λ obtenues dans cette étude sont $\mu = 9114.84 \text{ MeV}^2$ et $\lambda = 0.00537 \text{ MeV}^{-1}$, ce qui permet en principe d'obtenir des prédictions concrètes comparables aux valeurs expérimentales.

2.2.3 Considérations de nature phénoménologique

En premier lieu, il est important de mentionner que la méthode de construction du modèle BPS telle que présentée dans ce chapitre n'est pas unique. En réalité, des travaux récents présentés par Sutcliffe [53] suggèrent la construction d'un modèle BPS exacte par l'ajout d'un nombre important de mésons vectoriels aux degrés de liberté du modèle de Skyrme original (le champ de Skyrme U est couplé à une tour infinie de mésons vectoriels). Il en résulte que dans la limite où seulement le premier méson vectoriel est considéré, le modèle de Skyrme se rapproche significativement d'un modèle BPS. Cette approche est cependant beaucoup plus complexe et son lien avec la méthode présentée dans ce chapitre demeure obscur et devrait être étudié davantage. Le modèle proposé par Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczyński constitue une approche fondamentalement différente mais beaucoup plus directe. Mentionnons cependant que le modèle BPS tel que présenté dans ce chapitre ne peut pas être relié directement à des particules physiques dû à l'absence du terme non linéaire σ dans le lagrangien, responsable de la propagation des pions. Cependant, les caractéristiques spécifiques de celui-ci en font

une base solide pour la description de certaines propriétés phénoménologiques des noyaux. En particulier, il est possible de constater que déjà au niveau classique, celui-ci reproduit certains aspects d'un fluide incompressible qui peuvent être reliés au modèle de la goutte [56] en physique nucléaire. Les relations de proportionnalités de la masse (linéaire en n) et de la taille moyenne (proportionnel à $n^{\frac{1}{3}}$) en sont de bons exemples. Cette description classique est cependant susceptible d'être plus appropriée pour les gros noyaux pour les raisons suivantes. L'absence du terme cinétique $\mathcal{L}_{\sigma_{nl}}$ implique, pour le champ chiral U , qu'il est impossible d'identifier convenablement les degrés de liberté du modèle à ceux des champs pions (σ , $\vec{\pi}$) dans la limite $r = \infty$ et cette distinction influence significativement la taille des skyrmions (prédiction de rayons trop petits). Cependant, cet effet diminue lorsque n devient grand. De plus, la contribution de l'énergie de rotation (qui provient de la quantification) à la masse totale joue également un rôle important dans le pouvoir prédictif du modèle, mais cette contribution tend à diminuer plus le nombre baryonique augmente puisque les moments d'inertie augmentent avec n . Négliger cette contribution au niveau classique est donc plus approprié pour les gros noyaux. Par ailleurs, il est généralement admis que la description des noyaux atomiques en tant que goutte liquide de matière est plus appropriée pour les noyaux de nombre baryonique élevé (se référer à la courbe de Weizsäcker pour les énergies de liaisons par exemple). Un autre point important à considérer est que les deux termes présents dans le lagrangien furent choisis spécifiquement pour représenter certaines propriétés des interactions fortes sous-jacentes au modèle. Le terme \mathcal{L}_6 correspond au carré de la densité de courant baryonique, qui est construit entièrement sur des considérations topologiques, et le terme de potentiel \mathcal{L}_0 est choisi de façon à briser explicitement la symétrie chirale dans la théorie de champ efficace. Celui-ci peut donc en principe être utilisé pour générer la masse du pion. Cependant, il n'existe aucune raison qui justifie de prime abord de privilégier le potentiel de Skyrme par rapport à un autre, ce qui implique que d'autres formes de potentiels peuvent également être envisagées, basées sur certaines propriétés physiques des noyaux.

Les propriétés mentionnées ci-haut découlent du fait que ce modèle possède des solutions qui saturent exactement la borne BPS et celles-ci offrent donc une explication naturelle pour de faibles énergies de liaisons, ce qui contraste avec le modèle de Skyrme original. Bien que ce modèle corrige plusieurs aspects du modèle de Skyrme, celui-ci demeure un modèle-jouet avec un domaine d'applicabilité limité. Un modèle plus complet devrait donc préserver les forces de celui-ci, soit sa simplicité (pour décrire la dynamique et les symétries du système) et son analyticité (qui permet un calcul efficace des différentes pr ddictions du modèle), tout en incorporant des éléments du modèle de Skyrme cruciaux à une théorie de champ efficace de QCD. Afin d'étendre le rayon d'action du modèle BPS et ainsi obtenir une description plus adéquate des noyaux dans cette limite d'énergie, une extension quasi-BPS est proposée au chapitre suivant. Celle-ci utilise le modèle BPS comme point de départ et tente l'inclusion du modèle de Skyrme \mathcal{L}_{Sk} selon deux approches distinctes (perturbation/numérique).

Chapitre 3

Extension quasi-BPS

Il est question dans ce chapitre de l'extension quasi-BPS proposée par Marleau *et coll.* [10, 11, 12] et de la méthode utilisée pour incorporer le modèle de Skyrme original au modèle BPS. Les différences conceptuelles entre ces deux modèles, qui déterminent en grande partie le choix de l'hypothèse de départ pour la paramétrisation du champ U , sont abordées du point de vue des géométries favorisées par ces modèles respectifs. Cette paramétrisation est ensuite utilisée pour faire le lien entre ces deux modèles et ainsi générer les configurations d'énergie minimale pour $B > 1$. Les conséquences liées à l'utilisation de la solution axiale dans un contexte perturbatif sont étudiées à l'aide des résultats précédemment obtenus dans [9], ce qui mène naturellement à la problématique sur laquelle est axée ce présent travail. De récents développements ont en effet suggéré que les effets liés à l'utilisation de la solution axiale dans ce contexte précis peuvent introduire une déstabilisation des solutions classiques obtenues lorsque les coefficients devant les termes du lagrangien de Skyrme sont non nuls. C'est pourquoi cette étude se tourne vers l'ansatz communément utilisé dans la littérature pour la description des multibaryons dans le modèle de Skyrme original, c'est-à-dire l'application rationnelle, pour la paramétrisation du champ U du modèle quasi-BPS dans le but d'optimiser la contribution des termes du lagrangien de Skyrme \mathcal{L}_{Sk} . L'idée est donc d'obtenir une amélioration globale des configurations d'énergie minimale pour le modèle quasi-BPS, ce qui entrainerait en principe une meilleure compréhension de la structure des noyaux atomiques stables.

3.1 Idées de bases et développement du modèle

Cette section détaille les études précédentes réalisées sur le modèle quasi-BPS et présente les résultats à partir desquels ce présent projet fut élaboré. Tel que mentionné précédemment, l'idée de base est d'étudier une généralisation plus réaliste du modèle de Skyrme BPS dans la limite où la contribution des termes de \mathcal{L}_{Sk} est petite. Le lagrangien est donc composé de quatre termes et peut être écrit de la façon suivante

$$\mathcal{L}_{\text{qBPS}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6, \quad (3.1)$$

avec la contribution de chaque terme donnée par

$$\mathcal{L}_0 = -\mu^2 V(U) \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_2 = -\alpha \text{Tr} (L_\mu L^\mu) \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}_4 = +\beta \text{Tr} \left([L_\mu, L_\nu]^2 \right) \quad (3.4)$$

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{3}{2} \frac{\lambda^2}{16^2} \text{Tr} ([L_\mu, L_\nu][L^\nu, L^\rho][L_\rho, L^\mu]). \quad (3.5)$$

L'expression (3.5) correspond au carré de la densité de courant baryonique $\mathcal{B}_\mu \mathcal{B}^\mu$ écrit sous forme de commutateurs des courants gauches du champ mésonique ($L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$) pour une notation plus uniforme. Les travaux précédemment réalisés sur ce modèle partent donc tous de la supposition que la contribution des termes \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_6 est dominante, ce qui ouvre la porte à une approche perturbative pour obtenir la dynamique du système. Dans ce contexte, le choix naturel pour la paramétrisation du champ U correspond donc à la solution axiale puisque celle-ci est un excellent minimiseur dans le cas du modèle BPS. De plus, de par sa simplicité, celle-ci offre la possibilité de solutions analytiques pour toutes valeurs de n , c'est-à-dire que les configurations d'énergie minimale sont connues, en principe, pour tous les noyaux stables. Cependant, il n'existe aucune garantie à l'effet que cette solution soit un bon minimiseur pour les termes de Skyrme et du modèle σ non linéaire. En réalité, il a été démontré depuis un certain temps déjà [38, 55] que la solution axiale telle que décrite au chapitre 2 ne génère pas les configurations d'énergie minimale pour le modèle de Skyrme original, mais puisque α et β sont supposés très petits par rapport à μ et λ , ces effets sont négligés en première approximation. La dynamique s'obtient donc de la façon suivante. Premièrement, l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{9n^2 \lambda^2}{4} \frac{\sin^2(F)}{2r^2} \partial_r \left(\frac{\sin^2(F) F'}{r^2} \right) - \mu^2 \frac{\partial V(F)}{\partial F} + \frac{2\alpha (2r^2 F'' + 4r F' - (n^2 + 1) \sin(2F))}{r^2} + \\ \frac{32\beta \sin(F) (\sin(F) ((n^2 + 1) r^2 F'' - n^2 \sin(2F)) + (n^2 + 1) r^2 F'^2 \cos(F))}{r^4} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

est résolue dans la limite où $\alpha = \beta = 0$, ce qui revient à résoudre l'équation (2.10) (avec un paramètre λ légèrement modifié) pour un choix de potentiel donné. En se basant sur les travaux de [9, 10], le terme de potentiel est choisi pour représenter une propriété importante des noyaux, soit une densité baryonique constante à l'intérieur suivie d'une coupure près du rayon baryonique moyen, tel qu'observé expérimentalement par des expériences de diffraction d'électrons. Le potentiel obtenu par [10] est

$$V_{BeM}(U) = -\frac{448}{45} \frac{\text{Tr} \left(\left(\frac{2\mathbb{1}_2 + U + U^\dagger}{8} \right) \left(\frac{2\mathbb{1}_2 - U - U^\dagger}{8} \right)^3 \right) \left(1 - \frac{14}{5} \ln \left(\text{Tr} \left(\frac{2\mathbb{1}_2 - U - U^\dagger}{8} \right) \right) \right)}{1 - \sqrt{1 - \frac{14}{5} \ln \left(\text{Tr} \left(\frac{2\mathbb{1}_2 - U - U^\dagger}{8} \right) \right)}}, \quad (3.7)$$

qui devient, sous la solution axiale,

$$V_{BeM}(F) = \frac{7(\cos(F) - 1)^3(\cos(F) + 1) (14 \ln(\sin^2(\frac{F}{2})) - 5)}{90 \left(\sqrt{25 - 70 \ln(\sin^2(\frac{F}{2}))} - 5 \right)}. \quad (3.8)$$

Il devient maintenant possible de résoudre l'équation différentielle d'ordre un correspondante,

$$\frac{7(\cos(F) - 1)^3(\cos(F) + 1) (14 \ln(\sin^2(\frac{F}{2})) - 5)}{90 \left(\sqrt{25 - 70 \ln(\sin^2(\frac{F}{2}))} - 5 \right)} = \frac{9n^2 \lambda^2 \sin^4(F) F'^2}{16\mu^2 r^4}, \quad (3.9)$$

ce qui donne, en imposant les bornes appropriées pour $F(r)$,

$$F_{SA}(r) = 2 \arcsin \left(e^{-a^2 r^2 - \frac{7}{5} a^4 r^4} \right), \quad (3.10)$$

où l'on défini $a \equiv \left(\frac{\mu}{18n\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$. En réalité, pour bien voir d'où le potentiel tire cette forme particulière et comprendre les choix qui ont mené à la forme de la solution (3.10), il faut appliquer le raisonnement inverse et imposer des contraintes sur la fonction $F(r)$. Cela signifie que l'on souhaite obtenir une solution basée sur les travaux de [11], de forme générale

$$F(r) = 2 \arcsin \left(e^{-a^2 r^2 - c_1 a^4 r^4 - c_2 a^6 r^6 - c_3 a^8 r^8 - \dots} \right), \quad (3.11)$$

qui, une fois substituée dans l'expression pour la densité baryonique (2.27), donne un plateau constant pour de petites valeurs de r . Les coefficients c_1 , c_2 et c_3 sont donc obtenus en imposant que les premières dérivées paires de $\mathcal{B}^0(r)$ soient nulles dans la limite $r \rightarrow 0$, ce qui donne

$$c_1 = \frac{7}{5}, \quad c_2 = \frac{1384}{525}, \quad c_3 = \frac{6302}{1125}. \quad (3.12)$$

Il s'avère suffisant de tronquer la série à c_1 pour maintenir un équilibre entre la forme plateau et l'intégrabilité des expressions qui dépendent de $F(r)$, ce qui donne le résultat (3.10). Il s'agit par la suite de trouver un potentiel $V(U)$ qui redonne bien la fonction (3.10) sous la solution axiale, ce qui mène à l'expression (3.7). Les courbes respectives du profil radial et de la densité baryonique sont donc données par la figure suivante.

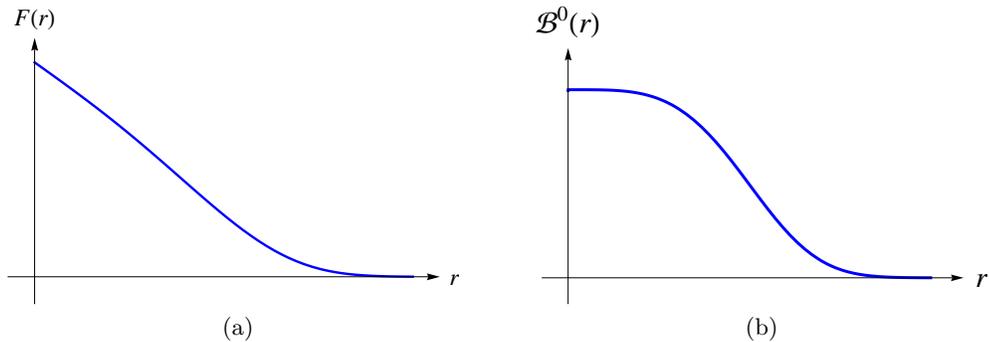


FIGURE 3.1: Représentation graphique du profil radial (a) et de la densité baryonique (b) normalisés à $a = 1$ et $n = 1$ pour le modèle de Skyrme quasi-BPS avec la solution axiale.

De plus, la densité baryonique est donnée par l'expression suivante

$$\mathcal{B}^0(r) = \frac{8na^2}{\pi^2} \left(1 + \frac{14}{5}a^2r^2 \right) \frac{e^{-3(a^2r^2 + \frac{7}{5}a^4r^4)} \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{5}a^2r^2(5+7a^2r^2)}}}{r}. \quad (3.13)$$

Ces dernières années, plusieurs types de fonctions $F(r)$, et par conséquent de potentiels, furent étudiés dans le contexte précis de ce modèle [9], chacune possédant des propriétés distinctes. Celle présentée dans ce chapitre correspond au cas le plus récemment étudié, qui mène à des configurations pleines (sans coquille) pour les noyaux les plus stables. Dans une approche perturbative standard, la prochaine étape serait d'inclure les termes \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_4 en tant que petite perturbation d'ordre ϵ au lagrangien BPS ($\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_6$), et de résoudre l'équation différentielle correspondante (voir annexe B) à l'ordre ϵ pour inclure une contribution dépendante des paramètres α et β dans la fonction (3.10). Cependant, cette équation différentielle n'est pas soluble de façon analytique et, par conséquent, des méthodes numériques plutôt lourdes devraient être employées pour arriver à cette fin. Puisqu'une étude détaillée de cette équation n'a pas encore été réalisée, l'approche consiste donc à substituer la fonction $F(r)$ préalablement obtenue (3.10) dans les termes \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_4 et de calculer les différentes quantités qui en dépendent en supposant toujours que cette contribution demeure minimale. Ayant maintenant ces informations en main, il devient alors possible de faire le calcul de l'énergie statique pour la contribution de chaque terme du lagrangien. Cette quantité est particulièrement importante pour les termes E_2 et E_4 puisque leur dépendance en n sous la solution axiale est une bonne indication de la stabilité du soliton au niveau classique. Par conséquent, elle permet de déterminer si la solution axiale est appropriée dans ce contexte. Ce faisant, on obtient

$$E_0^{[\text{SA}]} = 4\pi\mu^2 \int V_{BeM}(F)r^2 dr \quad (3.14)$$

$$E_2^{[\text{SA}]} = 8\pi\alpha \int (F'^2 r^2 + (n^2 + 1) \sin^2(F)) dr \quad (3.15)$$

$$E_4^{[\text{SA}]} = 64\pi\beta \int \left((n^2 + 1) \sin^2(F) F'^2 + n^2 \frac{\sin^4(F)}{r^2} \right) dr \quad (3.16)$$

$$E_6^{[\text{SA}]} = \frac{9\pi\lambda^2 n^2}{4} \int \frac{\sin^4(F) F'^2}{r^2} dr, \quad (3.17)$$

et donc $E_{stat}^{[\text{SA}]} = E_0^{[\text{SA}]} + E_2^{[\text{SA}]} + E_4^{[\text{SA}]} + E_6^{[\text{SA}]}$. Une fois la fonction $F(r)$ substituée dans ces expressions, les intégrales sont évaluées numériquement à l'aide d'un algorithme adaptatif. On introduit ainsi la notation suivante sous un changement de variable $x = ar$

$$\mathfrak{J}_{lmn}(x) = x^l \left(\frac{\sin(F)}{x} \right)^m (\partial_x F)^n \quad \text{et} \quad I_{lmn}^p(y) = \int_0^y \mathfrak{J}_{lmn}(x) x^{2p} dx, \quad (3.18)$$

ce qui permet de factoriser la dépendance des paramètres en avant des intégrales numériques $I_{lmn}^p(y)$. À titre de référence, une table contenant les principales intégrales numériques est

présentée à l'annexe C. Cette notation concerne seulement l'intégration sur la variable r (ou x) puisque l'intégration angulaire sous la solution axiale dans ce cas est toujours triviale et génère les facteurs de 4π et n . La quantification (des rotations et isorotations) de ce modèle est sensiblement la même que celle introduite au chapitre précédent puisque sous la solution axiale, les moments d'inertie sont tous diagonaux. Cependant, puisque l'angle chiral $F(r)$ est différent et qu'il faut ajouter la contribution des termes \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_4 , les moments d'inertie non nuls vont être différents également. Ceux-ci se calculent donc de la façon suivante

$$\begin{aligned} U_{ij} &= - \int \left(2\alpha \text{Tr}(T_i T_j) + 4\beta \text{Tr}([L_k, T_i][L_k, T_j]) + \frac{9\lambda^2}{16^2} \text{Tr}([T_i, L_p][L_p, L_q][L_q, T_j]) \right) d^3 r \\ &= \int \mathcal{U}_{ij} d^3 r, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ce faisant, les expressions pour V_{ij} et W_{ij} peuvent donc être obtenues en suivant la règle

$$V_{ij} = \int \mathcal{V}_{ij} d^3 r = \int \mathcal{U}_{ij}(T_j \rightarrow S_j) d^3 r \quad (3.20)$$

$$W_{ij} = \int \mathcal{W}_{ij} d^3 r = \int \mathcal{U}_{ij}(T_i \rightarrow S_i, T_j \rightarrow S_j) d^3 r. \quad (3.21)$$

Les quantités \mathcal{U}_{ij} , \mathcal{V}_{ij} et \mathcal{W}_{ij} sont définies comme étant les densités d'inertie. Les principales densités sont données à l'annexe C, ainsi que leurs moments d'inertie respectifs. L'énergie de rotation est donnée par la même équation que celle obtenue dans le cas du modèle étudié au chapitre 2 (2.45), avec comme seule modification les nouveaux moments d'inertie.

3.1.1 Énergie de Coulomb

L'énergie de Coulomb joue un rôle important dans la dynamique des noyaux atomiques. Celle-ci est souvent négligée dans l'étude du modèle de Skyrme original puisque cette contribution est supposée très petite par rapport aux larges énergies de liaisons du modèle. Bien que celle-ci demeure petite, les faibles énergies de liaisons du modèle quasi-BPS offrent la possibilité d'inclure cette contribution et de distinguer ses effets sur l'optimisation des paramètres, et donc sur les prédictions du modèle quasi-BPS. Cette contribution énergétique provient de la force électromagnétique répulsive entre les charges positives dans le noyau, les protons, et contribue donc à faire augmenter la masse totale des noyaux stables.

Dans ce travail, l'énergie de Coulomb occupe une place importante puisque son comportement sous l'insertion des deux hypothèses de départ (solution axiale/application rationnelle) est également un bon indicateur de la stabilité des configurations obtenues. Un calcul détaillé est donc nécessaire pour la comparaison des résultats. Par ailleurs, ce calcul a dû être réexaminé dans le cadre de ce projet en ce qui concerne la forme du courant électromagnétique (par rapport à l'expression obtenue précédemment dans [11]) afin de tenir compte de la contribution des bons moments (et densités) d'inertie. On débute donc avec la forme générale que prend

l'énergie de Coulomb pour une distribution de charges continue

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \int \rho(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rho(\vec{r}') d^3r d^3r'. \quad (3.22)$$

Dans la dernière expression, $\rho(\vec{r})$ représente la distribution de charges, et donc le potentiel scalaire généré par cette distribution est

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'. \quad (3.23)$$

En adoptant l'approche proposée par [17] et utilisée dans [3, 10, 11], on utilise le développement multipolaire du potentiel de Coulomb (3.23) pour ensuite développer la densité (distribution) de charges $\rho(\vec{r})$ sur ses harmoniques sphériques, ce qui permet d'écrire l'énergie de Coulomb sous la forme suivante

$$E_c = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l U_l^m, \quad (3.24)$$

où les U_l^m représentent la contribution de chaque multipôle donné par

$$U_l^m = 2\pi\alpha_{em} \int_0^{\infty} r^{-2l-2} |Q_l^m(r)|^2 dr. \quad (3.25)$$

Par conséquent, ceux-ci ne doivent donc pas être confondus avec les moments d'inertie (3.19). De plus, la constante de couplage adimensionnelle qui caractérise les interactions électromagnétiques est $\alpha_{em} = 1/137.0359$. La quantité $Q_l^m(r)$, qui est équivalente à un moment multipolaire de la distribution de charge (pour de grandes distances), peut être représentée par l'expression suivante

$$Q_l^m(r) = \int_0^r r'^{l+2} \rho_l^m(r') dr', \quad (3.26)$$

où la distribution est donnée par

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \rho_l^m(r) Y_l^{m*}(\theta, \phi). \quad (3.27)$$

Dans cette expression, les harmoniques sphériques usuelles sont représentées par $Y_l^m(\theta, \phi)$ et l'opération (*) dénote le complexe conjugué. Par la suite, en se référant aux travaux de [7], il est possible d'identifier le courant électromagnétique généré par une densité de charge à l'intérieur d'un skyrmion,

$$\tilde{J}_{em}^{\mu} = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{B}}^{\mu} + \tilde{J}_V^{3\mu}, \quad (3.28)$$

où $\tilde{\mathcal{B}}^{\mu}$ est la densité de courant baryonique usuelle et $\tilde{J}_V^{3\mu}$ représente la contribution de la troisième composante de la densité de courant vectoriel. La forme précise de $\tilde{J}_V^{3\mu}$ pour le

modèle quasi-BPS peut être trouvée dans [9, 29] et est donnée par

$$\tilde{J}_V^{3\mu} = 2\alpha \text{Tr}(\tilde{T}_3 \tilde{L}^\mu) + 4\beta \text{Tr}([\tilde{T}_3, \tilde{L}_\nu][\tilde{L}^\mu, \tilde{L}^\nu]) + \frac{9\lambda^2}{16^2} \text{Tr}([\tilde{T}_3, \tilde{L}_\nu][\tilde{L}^\nu, \tilde{L}^\omega][\tilde{L}_\omega, \tilde{L}^\mu]). \quad (3.29)$$

Ces quantités sont bien entendu dépendantes du temps, c'est-à-dire que \tilde{L}_0 est donné par (1.62), \tilde{L}_i par (1.63) et que $\tilde{T}_3 = R_{3j}(A^\dagger) A B T_j B^\dagger A^\dagger$. Puisque l'on s'intéresse à la composante \tilde{J}_{em}^0 pour extraire une expression en termes de quantités connues pour la densité de charge électrique, il suffit de substituer \tilde{L}_0 , \tilde{L}_i et \tilde{T}_3 dans (3.29) pour obtenir

$$\tilde{J}_V^{30} = R_{3j}(A^\dagger) (\mathcal{U}_{ij} a_j - \mathcal{W}_{ij} b_j). \quad (3.30)$$

Il devient ensuite possible d'utiliser la relation (1.68) pour obtenir

$$a_1 = \frac{K_1}{U_{11}}, \quad a_2 = \frac{K_2}{U_{22}}, \quad a_3 = \frac{K_3 + W_{33} b_3}{U_{33}} = \frac{K_3}{U_{33}} + n b_3, \quad (3.31)$$

puisque les moments d'inertie sont diagonaux. Une fois ces expressions combinées, on a que

$$\tilde{J}_V^{30} = R_{31}(A^\dagger) \frac{\mathcal{U}_{11}}{U_{11}} K_1 + R_{32}(A^\dagger) \frac{\mathcal{U}_{22}}{U_{22}} K_2 + R_{33}(A^\dagger) \frac{\mathcal{U}_{33}}{U_{33}} K_3. \quad (3.32)$$

En tirant profit de la symétrie $U_{11} = U_{22}$, il devient possible de définir une densité moyenne $\langle \mathcal{U}_{11} \rangle = (\mathcal{U}_{11} + \mathcal{U}_{22})/2$ pour simplifier les expressions et ainsi éliminer la dépendance en ϕ de ces densités. On utilise également les relations obtenues par [13] pour les matrices de rotations, c'est-à-dire l'équation (1.70), ce qui permet d'écrire au final (notons au passage que cette expression diffère de celle trouvée dans [11, 29])

$$\tilde{J}_V^{30} = \frac{\langle \mathcal{U}_{11} \rangle}{U_{11}} I_3 + \left(\frac{\langle \mathcal{U}_{11} \rangle}{U_{11}} - \frac{\mathcal{U}_{33}}{U_{33}} \right) R_{33}(A^\dagger) K_3. \quad (3.33)$$

À partir de ces expressions, il est possible de vérifier que la charge électrique d'un noyau est donnée par

$$q_e = \int \tilde{J}_{em}^0 d^3 r = \int \left(\frac{1}{2} \mathcal{B}^0 + \tilde{J}_V^{30} \right) d^3 r = \frac{n}{2} + i_3, \quad (3.34)$$

où la notation suivante est sous-entendue $\langle i, i_3, k_3 | \tilde{J}_{em}^0 | i, i_3, k_3 \rangle$, ce qui implique que la distribution de charges est donnée par

$$\rho(\vec{r}) = \langle i, i_3, k_3 | \tilde{J}_{em}^0 | i, i_3, k_3 \rangle \quad (3.35)$$

$$= \frac{1}{2} \mathcal{B}^0 + \frac{\langle \mathcal{U}_{11} \rangle}{U_{11}} i_3 + \left(\frac{\langle \mathcal{U}_{11} \rangle}{U_{11}} - \frac{\mathcal{U}_{33}}{U_{33}} \right) \langle i, i_3, k_3 | R_{33}(A^\dagger) K_3 | i, i_3, k_3 \rangle. \quad (3.36)$$

Pour obtenir l'énergie de Coulomb, il suffit donc d'exprimer la partie angulaire de (3.36) en termes des harmoniques sphériques, ce qui permet d'isoler les $\rho_l^m(r)$ correspondants et ainsi compléter le calcul du développement multipolaire (3.24). La démarche utilisée dans cette

section est appelée l’approche des densités de charges électrostatiques. Il est important de mentionner qu’une nouvelle approche fut récemment développée par [9], qui donne des résultats similaires pour l’énergie de Coulomb, mais qui repose sur des concepts quelque peu différents. L’approche des facteurs de formes telle que proposée par [9] a l’avantage d’être plus générale, ce qui permet un calcul complet de l’énergie électromagnétique (incluant la partie reliée au magnétisme) et inclut également une prédiction sur les premiers moments magnétiques non nuls des noyaux les plus stables. Cependant, les approximations faites dans cette approche ne permettent pas de tenir compte des contributions angulaires supplémentaires à Y_{00} . Cela demeure sans grande importance du point de vue de la solution axiale, mais a de profondes répercussions lorsque l’on introduit l’application rationnelle. Pour cette raison, l’approche des densités de charges est privilégiée dans ce présent travail.

Les expressions détaillées des moments multipolaires sont présentées à l’annexe C ainsi que le calcul complet de l’énergie de Coulomb, valide pour tout n . Une autre remarque importante concerne la contribution des termes proportionnels à K_3 et I_3 dans (3.36). Tel que mentionné à la section 2.2.2, les contraintes sur l’espace d’Hilbert imposées par la solution axiale ne permettent pas de décrire adéquatement les noyaux de type « fermionique » pour $n > 1$. Ce faisant, ces contributions sont ignorées dans le calcul de l’énergie de Coulomb puisque seulement les noyaux pairs sont traités. Seul le cas $n = 1$ peut être traité par ce modèle pour les noyaux impairs. Puisque les symétries particulières de cette configuration impliquent $U_{11} = U_{33}$, seule la partie proportionnelle à Y_{20} du terme en K_3 contribue à l’énergie de Coulomb (annexe C équations (C.26) et (C.27)), cette contribution est par ailleurs négligeable par rapport à celle de \mathcal{B}^0 .

3.1.2 Optimisation des paramètres et résultats avec la solution axiale (approche perturbative)

Avant de pouvoir faire une optimisation des paramètres μ , α , β et λ à partir des données expérimentales, une dernière contribution énergétique doit être considérée. Puisque le modèle ne brise pas naturellement la symétrie d’isospin $SU(2)$, il faut introduire une nouvelle contribution énergétique qui reproduit la bonne séparation entre la masse du proton et du neutron de façon à pouvoir les distinguer et reproduire plus fidèlement les résultats expérimentaux. L’énergie d’isospin [3, 11], qui correspond en fait à une différence d’énergie dans ce cas-ci, prend donc la forme suivante

$$E_I = a_I i_3. \quad (3.37)$$

Ici, la constante a_I est fixée à partir de la différence de masse expérimentale entre le neutron et le proton, soit $\Delta M_{exp}^{n^0-p} = 1.293$ MeV. Puisque ceux-ci possèdent la même énergie statique et la même énergie de rotation, cela implique que

$$a_I = \left(E_c^{n^0} - E_c^p \right) - \Delta M_{exp}^{n^0-p}. \quad (3.38)$$

En résumé, la masse totale d'un noyau dans le modèle quasi-BPS est donnée par

$$E_{\text{qBPS}}(n, j, i_3) = E_{\text{stat}}^{\text{[SA]}}(n) + E_{\text{rot}}(n, j, i_3) + E_c(n, i_3) + E_I(n, i_3), \quad (3.39)$$

ce qui correspond à la quantité à optimiser pour trouver la valeur des paramètres libres. La dépendance de cette quantité par rapport aux nombres quantiques est illustrée ci-haut pour refléter les symétries préservées par l'interaction forte dont il faut tenir compte dans nos calculs. La démarche utilisée pour l'optimisation des paramètres a été expliquée en détail dans [9, 29]. Conséquemment, seules les grandes étapes seront résumées dans ce présent travail de façon à familiariser le lecteur à cette méthode. L'idée directrice de celle-ci consiste à minimiser l'écart entre les valeurs prédites par le modèle (E_{qBPS}) et celles obtenues expérimentalement (E_{exp}), que l'on peut trouver dans toute bonne table de physique nucléaire. Bien entendu, plusieurs types de régressions peuvent être envisagées à partir de cette approche. Celle qui fut déterminée comme étant la plus efficace consiste à résoudre un problème de moindres carrés avec l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Le problème consiste donc à imposer la condition

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{(E_{\text{exp}})_i - (E_{\text{qBPS}})_i}{(E_{\text{exp}})_i} \right)^2 = 0, \quad (3.40)$$

où l'indice i réfère au $i^{\text{ème}}$ noyau considéré et ne correspond pas nécessairement au nombre baryonique. En d'autres mots, cela veut dire que l'on souhaite que la somme des erreurs au carré sur les N noyaux pris en considération soit nulle (ou très petite). À partir de cette somme de carrés, l'algorithme permet ensuite d'obtenir la valeur des paramètres qui donne la plus petite somme possible (qui tend vers 0). Cependant, comme bien des méthodes d'optimisation numérique, celle-ci ne donne que des minimums locaux, ce qui veut dire qu'elle peut être sensible aux valeurs de départ (μ_0, α_0, β_0 et λ_0) qui sont introduites pour démarrer l'algorithme. Ces valeurs doivent donc être choisies judicieusement. Dans cette étude, celles-ci sont obtenues en se référant à la masse expérimentale du calcium-40 (noyau doublement magique), l'un des noyaux les plus stables [10]. L'estimation des paramètres de départ basée sur le ^{40}Ca dans la limite $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ donne les valeurs suivantes $\mu_0 = 12322.3 \text{ MeV}^2$ et $\lambda_0 = 0.00474 \text{ MeV}^{-1}$. De plus, afin de caractériser au niveau statistique la précision de la régression, on introduit un estimateur de la variance non biaisé, qui est donné par

$$\sigma^2(E_{\text{qBPS}}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N ((E_{\text{exp}})_i - (E_{\text{qBPS}})_i)^2, \quad (3.41)$$

ce qui revient à dire que la minimisation proposée (3.40) est également une minimisation de la variance. En utilisant ces valeurs ainsi que la contrainte $\mu, \alpha, \beta, \lambda \geq 0$ qui assure que l'énergie statique du modèle possède une borne inférieure bien définie (se référer aux expressions (1.54) et (2.25)), la contrainte $\alpha = \beta = 0$ est assouplie pour permettre à l'algorithme de sélectionner les paramètres qui donnent la plus petite variance. La meilleure régression obtenue correspond

aux paramètres suivants.

TABLEAU 3.1: Optimisation des paramètres libres du modèle quasi-BPS.

Paramètre	$\mu[\text{MeV}^2]$	$\alpha[\text{MeV}^2]$	$\beta[\text{MeV}^0]$	$\lambda[\text{MeV}^{-1}]$
Valeur	13937.069	0.0015541	0	0.0041836

Afin de vérifier si ce minimum correspond à la meilleure régression possible dans la région d'intérêt (près de μ_0 , α_0 , β_0 et λ_0), une autre minimisation peut être construite, soit

$$C_1^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{(E_{exp})_i - (E_{qBPS})_i}{(E_{exp})_i} \right)^2 + C_2^2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{(El_{exp})_j - (El_{qBPS})_j}{(El_{exp})_j} \right)^2 = 0, \quad (3.42)$$

où l'on définit l'énergie de liaison d'un noyau donné de la façon suivante

$$El_{qBPS} = \left(n_p E_{qBPS}^{(p)} + n_n E_{qBPS}^{(n^0)} \right) - E_{qBPS}. \quad (3.43)$$

Les constantes n_p et n_n représentent le nombre de protons et de neutrons du noyau, qui sont pondérés par leur masse respective $E_{qBPS}^{(p/n^0)}$. L'idée est donc d'ajuster la pondération relative de chaque contribution (les coefficients C_1 et C_2) de façon à voir comment le résultat de l'optimisation est affecté. Il en résulte que le meilleur minimum est atteint dans la limite $C_1 \gg C_2$, ce qui correspond au premier cas étudié. La limite $C_1 \ll C_2$, qui correspond essentiellement à une régression sur l'énergie de liaison par nucléon, produit également des courbes avec une bonne variance $\sigma^2(El_{qBPS}/n)$. Cependant, dans ce cas, l'échelle d'énergie n'est pas toujours préservée. Une régression sur l'énergie de liaison peut donc donner des paramètres qui produisent une courbe très près des points expérimentaux (une faible variance) mais qui, une fois introduits dans la formule de la masse, donnent des résultats loin des masses expérimentales. Afin d'illustrer les différents types de courbes que le modèle peut produire, les courbes suivantes ont été générées à partir des paramètres obtenus (tableau 3.1).

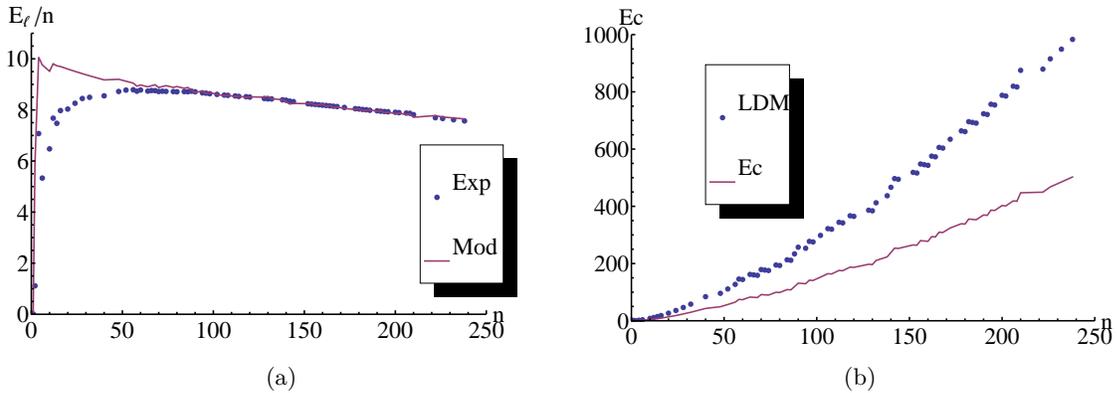


FIGURE 3.2: Énergie de liaison par nucléon [MeV] (a) et énergie de Coulomb [MeV] (b) en fonction du nombre baryonique n pour les noyaux pairs les plus stables.

Dans les figures 3.2 (a) et (b), bien que la prédiction du modèle soit représentée par un trait continu pour la distinguer des points expérimentaux, il est important de se rappeler que celui-ci n'offre aucune prédiction pour des valeurs de n qui ne sont pas entières ou qui ne représentent pas un noyau physique stable. Dans le cas de l'énergie de Coulomb, les prédictions du modèle sont comparées avec celles du modèle de la goutte en physique nucléaire (LDM, *liquid drop model*). Les quantités sur lesquelles l'accent a été mis dans cette méthode sont donc l'énergie de liaison et la masse totale, puisque ce sont ces quantités qui permettent un ajustement fin des paramètres et donc d'offrir des prédictions intéressantes sur quelques propriétés des noyaux. Comme mentionné au chapitre 2, l'idée est de reproduire le plus fidèlement possible la courbe de l'énergie de liaison par nucléon (figure 3.2 (a)), ce qui mène aux paramètres du tableau 3.1. Une fois ces paramètres obtenus, les différentes prédictions du modèle peuvent être calculées explicitement. Par exemple, la valeur r.m.s du rayon baryonique peut être obtenue en se référant à l'équation (2.34), ce qui donne

$$\langle r_B^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4\pi}{a^2} I_{021}^2(\infty)} \simeq 1.3982 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ MeV}^{-1} = 1.847 \text{ fm} \quad (3.44)$$

pour le cas $B = 1$. Ce résultat, qui est environ 1.5 fois plus grand que celui attendu (1.23 fm), a une conséquence directe sur les prédictions liées à l'énergie de Coulomb. En effet, il est possible de constater à partir de la figure 3.2 (b) qu'une densité de charges répartie sur un plus grand volume mène à des prédictions en dessous des valeurs attendues (dans les mêmes proportions) pour l'énergie de Coulomb. Bien que l'on puisse obtenir les configurations énergétiques de tous les noyaux stables avec cette méthode, deux configurations ont un intérêt particulier pour ce projet, soit $B = 2$ et $B = 4$. Les principaux résultats sont résumés au tableau suivant.

TABLEAU 3.2: Distribution énergétique des deux configurations étudiées avec la solution axiale dans le modèle quasi-BPS (approche perturbative).

Énergies (MeV)	Deutéron ($B = 2$)			Hélium-4 ($B = 4$)		
	Prédiction	% E_{qBPS}	$R_2^0[\text{SA}]$	Prédiction	% E_{qBPS}	$R_4^0[\text{SA}]$
$E_0^{[\text{SA}]}$	928.617	49.76	2	1857.23	49.99	4
$E_2^{[\text{SA}]}$	0.00442	2.36×10^{-4}	1.76	0.0119	3.20×10^{-4}	4.74
$E_6^{[\text{SA}]}$	928.617	49.76	2	1857.23	49.99	4
E_{rot}	8.49128	0.46	0.84	0	0	0
E_c	0.29237	0.016	0.79	0.92821	0.025	2.50
El_{qBPS}/n	5.90376	0.32	-	10.0628	0.27	-
E_{qBPS}	1866.02	-	1.988	3715.41	-	3.959

Les contributions de E_4 et E_I n'ont pas été incluses dans ce tableau puisque celles-ci sont nulles dans les deux cas et n'apportent donc aucune information supplémentaire. La colonne $\%E_{\text{qBPS}}$ représente la proportion de la masse totale occupée par les différentes contributions énergétiques et celle du ratio représente le rapport entre ces contributions et celles de la configuration fondamentale (pour la solution axiale [SA]), soit $R_n^0[\text{SA}] = \frac{E_x^{[\text{SA}]}(B=n)}{E_x^{[\text{SA}]}(B=1)}$. Ces résultats seront discutés en détail avec ceux de la section suivante, où l'on introduit l'application rationnelle et étudie ses effets sur ces configurations énergétiques particulières.

3.2 L'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS

L'application rationnelle est traditionnellement introduite dans le contexte du modèle de Skyrme original comme une approximation analytique permettant de trouver la configuration d'énergie minimale des multibaryons de nombre baryonique $B = n \leq 22$. Les premiers travaux sur cette méthode appliquée au modèle de Skyrme sont attribuables à [34] et furent développés en étudiant la ressemblance entre les monopoles BPS et les skyrmions. Les méthodes numériques précédemment employées pour trouver la géométrie exacte des noyaux, qui étaient exigeantes en puissance de calcul et en temps, sont maintenant reconnues comme étant très bien approximées par l'application rationnelle pour les noyaux $B \leq 22$, avec une énergie de seulement 3-4% supérieure à celles obtenues numériquement [44].

Puisque le but de ce travail est d'optimiser les termes du lagrangien de Skyrme pour obtenir une meilleure description des noyaux dans le modèle quasi-BPS, l'utilisation de l'application rationnelle s'impose donc comme le second choix le plus naturel après la solution axiale. La raison pour laquelle cette application n'a jamais été testée dans ce type de modèle est que celle-ci s'applique difficilement aux multibaryons de nombre baryonique élevé sans faire d'approximations qui supposent une propriété physique particulière, telle que le cristal de Skyrme [22]. Même dans ce cas, le domaine d'applicabilité demeure limité, car ce ne sont pas toutes les configurations d'énergie minimale qui peuvent être obtenues par cette approche dû à la difficulté de distinguer ces dernières les unes des autres (plusieurs minimums possibles très près les uns des autres) et à la complexité des calculs numériques. Dans ce travail, seules les configurations $B = 2$ et $B = 4$ seront étudiées puisqu'aucune ambiguïté n'apparaît sur celles-ci et qu'elles possèdent des symétries simples tout en correspondant à des noyaux pairs, ce qui permet une comparaison avec les résultats précédemment obtenus. De plus, ces configurations sont générées par des applications relativement simples qui permettent un calcul détaillé de l'énergie de Coulomb qui leur est associée.

3.2.1 Introduction à l'application rationnelle

De façon plus spécifique, une application rationnelle de degré n est une fonction holomorphe $R(z)$ qui sert à passer de $\mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$, où chaque \mathbf{S}^2 peut être traité comme une sphère de

Riemann ayant une coordonnée complexe z . On introduit donc

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad \bar{R}(\bar{z}) = \frac{\bar{p}(\bar{z})}{\bar{q}(\bar{z})}, \quad (3.45)$$

où $p(z)$ et $q(z)$ sont des polynômes en z qui ne doivent pas dépasser le degré n , mais où au moins un des deux doit être de degré n . De plus, ceux-ci ne doivent pas posséder de facteurs (racines) communs et sont construits de façon à minimiser l'énergie statique du modèle. Ce faisant, le nombre baryonique devient le degré topologique de l'application $R : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$, ou de façon équivalente, le degré algébrique de $R(z)$. Celui-ci peut être obtenu par la relation $B = \max[\deg(p), \deg(q)] = n$. Puisque le modèle de Skyrme est une application $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{S}^3$, certains ajustements doivent être faits avant de pouvoir appliquer cette méthode au modèle de Skyrme. L'idée est de considérer le domaine \mathbf{S}^2 comme des sphères concentriques dans \mathbb{R}^3 et l'espace de la cible \mathbf{S}^2 comme des sphères de latitudes sur \mathbf{S}^3 , c'est-à-dire que R est une application lisse entre une 2-sphère dans l'espace réel ayant un rayon donné et une 2-sphère dans $SU(2)$ à une distance donnée de l'identité \mathbb{I}_2 [16]. Cela implique donc que \mathbb{R}^3 peut être décomposé comme le produit des composantes angulaires (θ, ϕ) qui forment \mathbf{S}^2 et de la composante radiale r . Concrètement, cela se traduit par le fait que pour un point $P \in \mathbb{R}^3$ donné par les coordonnées sphériques usuelles (r, θ, ϕ) , il est possible de transposer ses coordonnées angulaires (θ, ϕ) dans le plan complexe (z, \bar{z}) par le biais de la projection stéréographique $z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}$, une technique couramment utilisée en analyse complexe. La direction z dans le plan complexe correspond à son tour à un vecteur unitaire cartésien \hat{n}_z sur la sphère \mathbf{S}^2 , donné par

$$\hat{n}_z = \frac{1}{1 + z\bar{z}} (z + \bar{z}, -i(z - \bar{z}), 1 - z\bar{z}). \quad (3.46)$$

Puisque, par définition, l'application rationnelle est une application pour passer d'un point z dans le plan complexe à un autre point $R(z)$ dans le plan complexe, l'image R du point z peut donc être encodée par le vecteur unitaire suivant dans l'espace d'isospin

$$\hat{n}_{R(z)} = \frac{1}{1 + R\bar{R}} (R + \bar{R}, -i(R - \bar{R}), 1 - R\bar{R}). \quad (3.47)$$

Un point $P \in \mathbb{R}^3$ peut donc être exprimé par ses coordonnées (r, z, \bar{z}) avec r correspondant à la distance à partir de l'origine et $\hat{n}_{R(z)}$, la direction à partir de celle-ci. Cela se traduit par l'ansatz suivant [34] pour le champ de Skyrme (le choix $\vec{\varphi} = F(r)\hat{n}_{R(z)}$)

$$U(r, z, \bar{z}) = e^{iF(r)\hat{n}_{R(z)} \cdot \vec{\tau}}. \quad (3.48)$$

Pour que le champ U soit bien défini à l'origine, il faut que $F(0) = k\pi$ pour un entier quelconque k , ce qui laisse entrevoir la possibilité d'un enroulement sur la partie radiale ainsi qu'un nombre baryonique donné par $B = kn$. Cependant, seul le cas $k = 1$ sera étudié dans

ce travail puisque des enroulements multiples de $F(r)$ ne mènent pas à des configurations stables et sont par ailleurs souvent utilisés pour générer des états excités [37]. De cette façon, l'application rationnelle peut être vue comme une extension de la solution hérisson proposée par Skyrme, construite en supposant que les coordonnées radiale et angulaire sont découplées. La différence majeure avec cet ansatz est que celui-ci introduit une dépendance angulaire explicite dans trois des quatre termes du lagrangien, qui sont maintenant donnés par

$$\mathcal{L}_0 = -\mu^2 V(F) \quad (3.49)$$

$$\mathcal{L}_2 = 2\alpha F'^2 + \frac{4\alpha (1+z\bar{z})^2 \sin^2(F)}{r^2(1+R\bar{R})^2} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \quad (3.50)$$

$$\mathcal{L}_4 = \frac{32\beta (1+z\bar{z})^2 \sin^2(F) F'^2}{r^2(1+R\bar{R})^2} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} + \frac{16\beta (1+z\bar{z})^4 \sin^4(F)}{r^4(1+R\bar{R})^4} \left(\frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right)^2 \quad (3.51)$$

$$\mathcal{L}_6 = \frac{9\lambda^2 \sin^4(F) F'^2}{16} \frac{(1+z\bar{z})^4}{r^4} \left(\frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right)^2. \quad (3.52)$$

Le potentiel ne dépend pas des angles puisque sa dépendance par rapport au champ U est de la forme $V(\text{Tr}(U + U^\dagger))$, ce qui élimine toute dépendance angulaire explicite sous l'application rationnelle. De plus, un potentiel qui favorise une direction particulière pourrait mener à des problèmes conceptuels puisque l'orientation spatiale des skyrmions n'est pas nécessairement connue. À partir de ces expressions, l'énergie statique peut être obtenue, soit

$$E_0^{[\text{AR}]} = 4\pi\mu^2 \int V(F)r^2 dr \quad (3.53)$$

$$E_2^{[\text{AR}]} = 8\pi\alpha \int (F'^2 r^2 + 2n \sin^2(F)) dr \quad (3.54)$$

$$E_4^{[\text{AR}]} = 64\pi\beta \int \left(2n \sin^2(F) F'^2 + \frac{\mathcal{I} \sin^4(F)}{r^2} \right) dr \quad (3.55)$$

$$E_6^{[\text{AR}]} = \frac{9\pi\lambda^2}{4} \int \frac{\mathcal{I} \sin^4(F) F'^2}{r^2} dr, \quad (3.56)$$

ce qui donne $E_{\text{stat}}^{[\text{AR}]} = E_0^{[\text{AR}]} + E_2^{[\text{AR}]} + E_4^{[\text{AR}]} + E_6^{[\text{AR}]}$. Ici, \mathcal{I} est une intégrale purement angulaire définie comme

$$\mathcal{I} \equiv \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{(1+z\bar{z})^2}{(1+R\bar{R})^2} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right)^2 \frac{2i}{(1+z\bar{z})^2} dz d\bar{z}, \quad (3.57)$$

et les relations suivantes ont été utilisées

$$\int \frac{2i}{(1+z\bar{z})^2} dz d\bar{z} = 4\pi, \quad \int \frac{2i}{(1+R\bar{R})^2} dR d\bar{R} = 4\pi n. \quad (3.58)$$

La première expression de (3.58) est simplement l'élément d'aire (qui provient du jacobien de la transformation) intégré sur tout le plan; la seconde correspond au *pull-back* de l'élément d'aire sur l'espace de la cible \mathbf{S}^2 de $R(z)$. L'expression pour la densité baryonique peut donc

également être obtenue,

$$\mathcal{B}^0(r, z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2(F)F'}{r^2} \frac{(1+z\bar{z})^2}{(1+R\bar{R})^2} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}}, \quad (3.59)$$

où la nouvelle dépendance angulaire ainsi introduite joue un rôle important dans le calcul de l'énergie de Coulomb. La variation de l'énergie statique δE_{stat} mène ensuite à l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \frac{9\mathcal{I}\lambda^2 \sin^2(F)}{4} \frac{\sin^2(F)F'}{2r^2} \partial_r \left(\frac{\sin^2(F)F'}{r^2} \right) - \mu^2 \frac{\partial V(F)}{\partial F} + 8\alpha \left(-\frac{n \sin(F) \cos(F)}{r^2} + \frac{F'}{r} + \frac{1}{2} F'' \right) + \\ 64\beta \left(\frac{nF'' \sin^2(F)}{r^2} + \frac{nF'^2 \sin(F) \cos(F)}{r^2} - \frac{\mathcal{I} \sin^3(F) \cos(F)}{r^4} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Dans le but de minimiser l'énergie statique, la technique utilisée dans [34] consiste d'abord à minimiser la quantité \mathcal{I} sur toutes les applications $R(z)$ de degré n possibles, pour ensuite trouver le profil radial en résolvant l'équation (3.60). Par ailleurs, dans le modèle de Skyrme original (1.42), les configurations multibaryons obtenues numériquement permettent de bâtir la forme des polynômes $R(z)$ à partir des symétries observées sur ces solutions, ce qui permet d'obtenir les résultats suivants.

TABLEAU 3.3: Résultats obtenus par [34] pour les quatre premiers noyaux stables.

B	$R(z)$	\mathcal{I}	Symétrie
1	z	1.00	$O(3)$
2	z^2	5.81	$D_{\infty h}$
3	$\frac{z^3 - \sqrt{3}iz}{\sqrt{3iz^2 - 1}}$	13.58	T_d
4	$\frac{z^4 + 2\sqrt{3}iz^2 + 1}{z^4 - 2\sqrt{3}iz^2 + 1}$	20.65	O_h

Ces résultats mènent aux configurations baryoniques suivantes lorsque les surfaces où $\mathcal{B}^0 = cte$ sont tracées en coordonnées cartésiennes dans \mathbb{R}^3 .

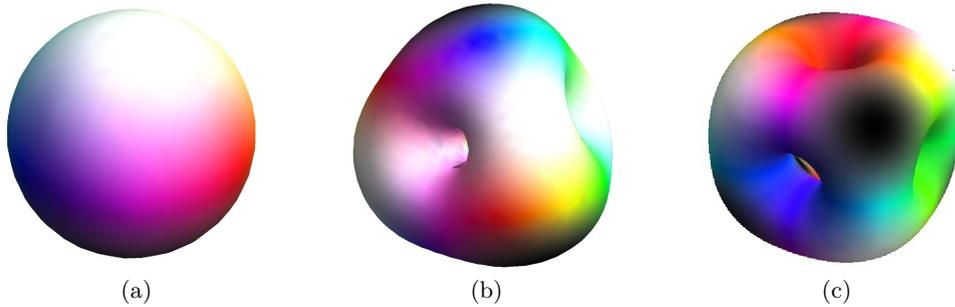


FIGURE 3.3: Surfaces de densité baryonique constante traditionnellement obtenues avec l'application rationnelle pour a) $B = 1$, b) $B = 3$ et c) $B = 4$ telles que présentées par [22].

Puisque l'on s'intéresse à l'optimisation des termes du lagrangien de Skyrme au sein du modèle quasi-BPS, les résultats du tableau 3.3 seront utilisés dans les calculs subséquents pour les configurations $B = 2$ et $B = 4$, la configuration $B = 1$ étant la configuration hérisson et $B = 3$ possédant une composante k_3 non nulle.

3.2.2 Solution analytique et solutions numériques

L'équation différentielle (3.60) est en grande partie semblable à celle obtenue avec la solution axiale (3.6). Cependant, l'introduction d'une dépendance angulaire non triviale due à notre nouvelle hypothèse de départ permet de distinguer deux différences majeures dans la forme de celles-ci. En premier lieu, on constate que les puissances de n dans certains des termes proportionnels à α et β se sont réduites à une dépendance linéaire, ce qui s'explique directement par la forme des termes $E_2^{[\text{AR}]}$ et $E_4^{[\text{AR}]}$ de l'énergie statique (équations (3.54) et (3.55)). En second lieu, la présence du facteur \mathcal{I} (introduit précédemment) dans le terme proportionnel à λ^2 , qui occupe la place du facteur en n^2 obtenu avec la solution axiale, indique que la solution BPS préalablement utilisée (3.10) n'est plus valide. Ces différences ont donc nécessairement une influence sur les solutions possibles de l'équation (3.60) pour $F(r)$. Dans ce travail, deux types de solutions sont proposées. Dans un premier temps, le choix le plus naturel (par rapport aux résultats précédents) impose une solution dans le régime perturbatif ($\alpha = \beta = 0$) de la forme

$$F_{\text{AR}}(r) = 2 \arcsin \left(e^{-a_1^2 r^2 - \frac{7}{5} a_1^4 r^4} \right), \quad (3.61)$$

où $a_1 \equiv \left(\frac{\mu}{18\sqrt{\mathcal{I}\lambda}} \right)^{\frac{1}{3}}$ et où le potentiel V_{BeM} a été utilisé. Cette solution a l'avantage d'être simple et de pouvoir tenir compte des différentes applications utilisées (facteur de $\sqrt{\mathcal{I}}$), ce qui facilite également les calculs et la comparaison des résultats. Cependant, puisque la densité baryonique est proportionnelle aux dérivées de $R(z)$ (voir équation (3.59)) et compte tenu de la nature polynomiale de cette application, le nombre total de points où la densité baryonique est nulle est donné par le nombre d'endroits où le wronskien $W(z) = p'(z)q(z) - q'(z)p(z)$ est nul, c'est-à-dire $2(n-1)$ en comptant les multiplicités. Cette nouvelle dépendance signifie donc que l'on ne peut s'attendre à obtenir une densité baryonique constante au centre, mais plutôt des configurations « trouées » telles que présentées à la figure 3.3. Les impacts de cette solution sont néanmoins étudiés en détail à l'annexe D et les résultats sont présentés à la section 3.2.4. De plus, puisque l'on sait d'après les résultats du chapitre 2 que la solution axiale est un excellent minimiseur du modèle BPS pur et que, tel que mentionné dans ce chapitre, l'application rationnelle est l'un des meilleurs candidats pour optimiser le modèle de Skyrme original, il s'avère intéressant de vérifier à partir de quel régime d'énergie s'effectue la coupure entre les deux approches pour le modèle quasi-BPS. Pour ce faire, des solutions numériques sont proposées, obtenues en minimisant simultanément les quatre contributions à l'énergie statique. De façon plus spécifique, en ajustant la force relative de chacun des sous-modèles par l'introduction d'un nouveau paramètre ν (qui permet l'ajustement de la

pondération relative entre ceux-ci), compris entre $0 \leq \nu \leq 1$, il devient possible d'écrire l'énergie statique de la façon suivante

$$E_{stat}^{[h]} = (1 - \nu)E_0^{[h]} + \nu E_2^{[h]} + \nu E_4^{[h]} + (1 - \nu)E_6^{[h]}, \quad (3.62)$$

pour $h \in \{\text{SA}, \text{AR}\}$, ce qui permet d'obtenir une vue d'ensemble du comportement des solutions dans les deux limites d'intérêt ainsi que la transition entre celles-ci. De plus, à des fins de comparaisons, deux types de minimisations sont effectuées, soit l'énergie statique sous la solution axiale $E_{stat}^{[\text{SA}]}(n, \nu)$ et celle sous l'application rationnelle $E_{stat}^{[\text{AR}]}(n, \mathcal{I}, \nu)$ (voir annexe E). Ces expressions sont minimisées à l'aide d'un algorithme de recuit simulé [19] pour des valeurs de ν prises à intervalle régulier entre 0 et 1, ce qui permet d'obtenir numériquement les différentes fonctions $F(r)$ à chacun de ces points. La nouvelle pondération ainsi introduite n'a évidemment aucune signification physique particulière, mais cela demeure sans grande importance puisque dans le cadre de ce projet, seuls les différents ratios d'énergie ont une réelle signification pour la comparaison des résultats. Les résultats sont également présentés à la section 3.2.4 et l'analyse de ceux-ci suit un raisonnement analogue à celui proposé dans [24].

Une fois de plus, ces états classiques doivent être quantifiés. Cependant, le processus de quantification sous l'application rationnelle n'est pas aussi simple que pour la solution axiale. En réalité, chaque configuration doit être étudiée séparément puisque les contraintes imposées sur l'espace d'Hilbert reposent sur la forme spécifique des configurations obtenues (figure 3.3). Cela signifie que les symétries sous rotations ne seront pas les mêmes dépendamment de la forme de $R(z)$. Ces contraintes particulières sont déterminées par la méthode de Finkelstein-Rubinstein (FR) [23], ce qui correspond à appliquer les exigences du principe d'exclusion de Pauli aux noyaux atomiques. Une étude détaillée de ce processus peut être trouvée dans [40, 42]. Dans notre cas cependant, la géométrie particulière de $B = 2$ (toroïdale) possède la symétrie axiale et donc les contraintes FR se simplifient aux résultats du chapitre 2 avec $n = 2$. De plus, puisque l'on étudie uniquement la configuration fondamentale de $B = 4$ et que celle-ci possède les nombres quantiques $I = J = 0$ (obtenus en résolvant les contraintes FR [35]), cela implique que cette configuration ne possède pas d'énergie de rotation. Les différences attendues entre la solution axiale et l'application rationnelle sont donc plus susceptibles de survenir au niveau de l'énergie statique et de l'énergie de Coulomb, c'est pourquoi la section suivante introduit une méthode numérique nécessaire à l'obtention de l'énergie de Coulomb sous l'application rationnelle.

3.2.3 La quadrature de Gauss-Legendre à N points

Le calcul de l'énergie de Coulomb débute donc en se référant au résultat (3.36), à partir duquel on tire que la densité de charge des configurations d'intérêt est simplement donnée par

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mathcal{B}^0(r, z, \bar{z}) \quad (3.63)$$

puisque $i_3 = 0$ dans les deux cas, ce qui implique la forme suivante en coordonnées sphériques

$$\rho_n(\vec{r}) = \frac{1}{2} A_n \frac{\sin^2(F) F'}{r^2} f_n(\theta, \phi), \quad n \in \{2, 4\}. \quad (3.64)$$

Dans cette notation, A_n est une constante qui dépend de la configuration et $f_n(\theta, \phi)$ correspond à la partie angulaire associée à celle-ci. Puisque le développement multipolaire nécessaire à l'obtention de l'énergie de Coulomb requiert d'exprimer la densité de charges sous forme d'harmoniques sphériques, il faut donc développer $f_n(\theta, \phi)$ en une série infinie (convergente) d'harmoniques sphériques et garder les termes dominants du développement. Pour ce faire, on introduit le résultat général

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi), \quad (3.65)$$

qui stipule que toute fonction angulaire peut être décomposée en une somme d'harmoniques sphériques [18], et où les coefficients f_l^m sont donnés par

$$f_l^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (3.66)$$

Cela signifie que les harmoniques sphériques constituent une base orthonormée dans l'espace des fonctions $f(\theta, \phi)$, qui implique également l'existence d'une relation de fermeture. La problématique se résume donc à calculer ces coefficients pour une fonction arbitraire donnée par l'application $R(z)$. Cependant, si la dépendance angulaire devient le moins complexe, les intégrales de (3.66) ne s'obtiennent plus de façon analytique. Il faut donc entrevoir l'utilisation d'une approximation numérique pour arriver à cette fin. Suivant ce raisonnement, on introduit donc la quadrature de Gauss-Legendre. Il s'agit de l'approche privilégiée dans ce travail puisqu'elle fut déterminée comme étant celle qui offre la démarche la plus générale tout en obtenant une précision remarquable sur les approximations numériques. L'idée de base derrière la quadrature de Gauss-Legendre est d'approximer l'intégrale définie d'une fonction par une somme pondérée des valeurs que prend cette fonction évaluée à des points précis dans l'intervalle d'intégration, ces points étant donnés par les racines du polynôme de Legendre correspondant au nombre de points choisis. Dans le cas d'une fonction d'une seule variable, la quadrature de Gauss-Legendre à N points [25] s'exprime donc de la façon suivante

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq \sum_{i=1}^N w_i f(x_i), \quad (3.67)$$

où le domaine d'intégration $[-1, 1]$ est utilisé de façon conventionnelle dans cette approximation. De façon plus générale, pour une fonction ayant un domaine d'intégration arbitraire, on

doit appliquer le changement de variable suivant

$$x = \frac{(b-a)}{2}y + \frac{(a+b)}{2} \Rightarrow dx = \frac{(b-a)}{2}dy. \quad (3.68)$$

On obtient ainsi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)}{2}y + \frac{(a+b)}{2}\right) dy \quad (3.69)$$

$$\simeq \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^N w_i f\left(\frac{(b-a)}{2}y_i + \frac{(a+b)}{2}\right). \quad (3.70)$$

Les points y_i où est évaluée la fonction sont appelés « points d'intégration » et sont donnés par les racines du polynôme de Legendre $P_N(y)$ correspondant au nombre de points choisis (normalisé à $P_N(1) = 1$), c'est-à-dire qu'ils satisfont l'équation

$$P_N(y_i) = 0. \quad (3.71)$$

Ici, les polynômes de Legendre [28] sont donnés par (représentation de Rodrigues)

$$P_N(y) = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dy^N} (y^2 - 1)^N. \quad (3.72)$$

Dans cette quadrature, les poids w_i sont obtenus avec la fonction de poids suivante

$$w_i = \frac{2}{(1 - y_i^2) P_N'^2(y_i)} \text{ avec } P_N'(y) = \frac{d}{dy} P_N(y). \quad (3.73)$$

De plus, dans le cas qui nous intéresse, cette quadrature peut être généralisée à une fonction de deux variables de façon directe. En effet, on a que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \simeq \frac{(b-a)}{2} \frac{(d-c)}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j f\left(\frac{(b-a)}{2}x_i + \frac{(a+b)}{2}, \frac{(d-c)}{2}y_j + \frac{(c+d)}{2}\right) \quad (3.74)$$

en supposant un élément d'intégration quadrilatérale standard (carrée), ce qui correspond au résultat souhaité dans le but de faire une approximation précise de (3.66). Les calculs détaillés peuvent être trouvés à l'annexe D. Pour la configuration $B = 2$, les coefficients ont été obtenus de façon analytique alors que pour $B = 4$, une quadrature de Gauss-Legendre à $N = 50$ points a dû être utilisée. On obtient ainsi

$$E_c(B = 2) = 0.00192227 (\mu/\lambda)^{\frac{1}{3}} \text{ et } E_c(B = 4) = 0.00602202 (\mu/\lambda)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.75)$$

Dans les deux cas, le développement fut tronqué à l'ordre $\mathcal{O}(Y_8^m)$ puisque la contribution de tout terme d'ordre supérieur à l'énergie de Coulomb devient alors négligeable.

3.2.4 Principaux résultats obtenus avec l'application rationnelle

Dans le cas de la solution exacte à l'ordre 0 du développement perturbatif, donnée par l'équation (3.61), on obtient les densités baryoniques suivantes.

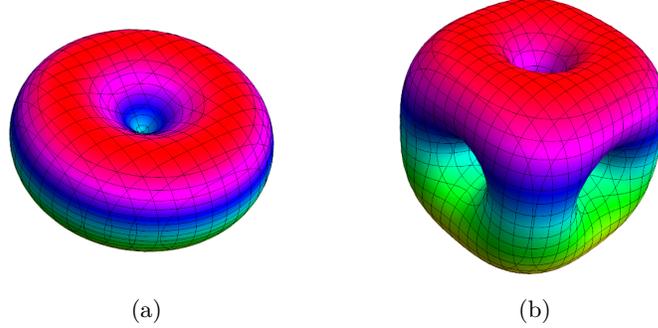


FIGURE 3.4: Surfaces de densité baryonique constante normalisées à $\mathcal{B}^0 = 1$ obtenues avec l'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS pour a) $B = 2$ et b) $B = 4$.

Sans grande surprise, on obtient les mêmes géométries que celles obtenues pour le modèle de Skyrme original puisque l'on utilise les mêmes polynômes $R(z)$. Cependant, le nouveau profil radial (3.61) a pour effet d'atténuer l'importance des « trous » qui sont présents par un assouplissement graduel de la surface vers le centre, réduisant significativement la taille de ceux-ci. Cela signifie que l'on obtient en quelque sorte les configurations les plus « pleines » possible avec ce type de contrainte angulaire. Puisque la solution étudiée est seulement valide pour les deux configurations d'intérêt (dépendance en \mathcal{I}), il devient impossible d'effectuer le type de régression précédent pour l'obtention des paramètres libres. Différentes approches sont proposées dans la littérature pour le traitement des paramètres, développées principalement pour le modèle de Skyrme original. Cependant, puisque la comparaison des résultats de ce travail repose sur deux hypothèses de départ radicalement différentes, la valeur spécifique des paramètres μ , α , β et λ n'est pas vraiment significative. L'information nécessaire à la comparaison des résultats se trouve dans les différents ratios énergétiques, que l'on peut obtenir en tirant certaines conclusions des résultats de la section 3.1.2, c'est-à-dire en supposant que

- La valeur des paramètres ne change pas de façon significative entre les différentes configurations générées par une même hypothèse de départ ;
- Dans le régime perturbatif, les paramètres α et β demeurent petits pour l'ensemble des configurations étudiées ;
- Les paramètres μ , α , β et λ sont des nombres réels positifs.

Les différents ratios énergétiques obtenus avec (3.61) sont présentés au tableau 3.4. Ces résultats sont évidemment valides uniquement dans le secteur dominé par le sous-modèle BPS. De plus, comme mentionné précédemment, le ratio d'une contribution énergétique $E_x^{[h]}$ est calculé selon (pour l'application rationnelle $h = \text{AR}$) $R_n^0[\text{AR}] = \frac{E_x^{[\text{AR}]}(B=n)}{E_x^{[\text{AR}]}(B=1)}$ pour une configuration n donnée. On s'intéresse ensuite aux solutions numériques de (3.62), valides dans des secteurs arbitraires déterminés par le nouveau paramètre ν . L'idée est de générer deux graphiques, soit

un pour le deutéron et un pour l'hélium-4, où le ratio de l'énergie statique totale est exprimé en fonction du paramètre ν pour chacune des configurations.

TABLEAU 3.4: Distribution énergétique des deux configurations étudiées avec l'application rationnelle dans le modèle quasi-BPS (approche perturbative ($\nu = 0$)).

Énergies (MeV)	Deutéron ($B = 2$)		Hélium-4 ($B = 4$)	
	Prédiction	$R_2^0[\text{AR}]$	Prédiction	$R_4^0[\text{AR}]$
$E_0^{[\text{AR}]}$	$19.1943\mu\lambda$	2.41039	$36.1863\mu\lambda$	4.54423
$E_2^{[\text{AR}]}$	$408.727\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$	1.69636	$716.59\alpha \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$	2.97409
$E_4^{[\text{AR}]}$	$1801.38\beta \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$	1.93146	$3703.35\beta \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$	3.97078
$E_6^{[\text{AR}]}$	$19.1943\mu\lambda$	2.41039	$36.1863\mu\lambda$	4.54423
E_c	$0.00192227\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$	0.77442	$0.00602202\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$	2.42608

Pour chaque valeur de ν prise à intervalle de 0.05 entre 0 et 1, l'algorithme de recuit simulé minimise l'énergie statique et génère une fonction $F(r)$ numériquement, ce qui permet de calculer le ratio voulu. De plus, sur chacun des graphiques sont présentées deux courbes, soit les ratios obtenus avec la solution axiale et ceux obtenus avec l'application rationnelle. On obtient donc les graphiques suivants.

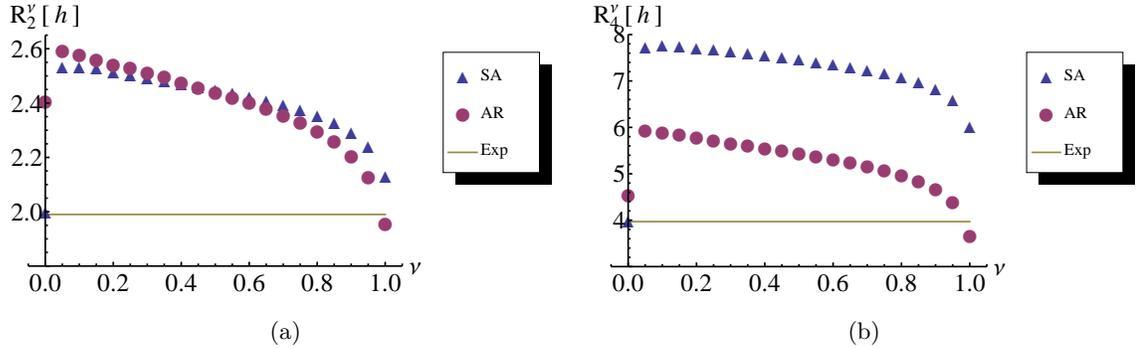


FIGURE 3.5: Ratio ($R_n^\nu[h]$) de l'énergie statique du deutéron (a) et de l'hélium-4 (b) en fonction du paramètre ν pour la solution axiale (SA) et l'application rationnelle (AR). Le ratio obtenu expérimentalement est illustré à l'aide du trait continu.

Ici, le ratio est simplement donné par $R_n^\nu[h] = \frac{E_{stat}^{[h]}(B=n)}{E_{stat}^{[h]}(B=1)}$, où $E_{stat}^{[h]}$ correspond à l'équation (3.62). À première vue, ces graphiques suggèrent une variation rapide du ratio lors de la transition $0 \leq \nu \leq 0.05$, ce qui implique que plus de points doivent être pris dans cette région pour s'assurer d'obtenir le comportement global des solutions. On subdivise alors cet intervalle en 20 points distincts pris à espacement régulier tout en répétant la même procédure que pour le cas précédent. Ce faisant, on obtient les deux graphiques de la figure 3.6. De cette façon, il est maintenant possible de visualiser la transition complète à partir du modèle BPS ($\nu = 0$)

jusqu’au modèle de Skyrme original ($\nu = 1$) tout en comparant les deux hypothèses de départ.

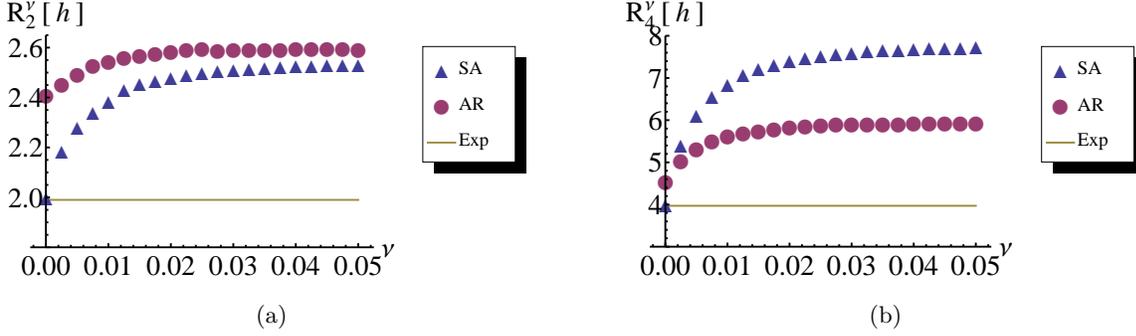


FIGURE 3.6: Transition $0 \leq \nu \leq 0.05$ pour (a) le deutéron et (b) l’hélium-4.

Les données brutes concernant l’énergie statique et les ratios ($R_n^\nu[h]$) des deux configurations, obtenues après minimisation avec l’algorithme de recuit simulé, sont présentées à l’annexe E. Celles-ci sont commentées à la section suivante.

3.3 Analyse et discussion

Plusieurs résultats ont été présentés au cours de ce troisième chapitre, obtenus par différentes méthodes et dans différentes limites du modèle quasi-BPS. Il convient donc maintenant de faire le lien entre ceux-ci afin de pouvoir tirer les conclusions de ce travail. Conséquemment, il s’avère utile de dresser un portrait global qui résume l’ensemble des résultats obtenus tout en y incorporant l’analyse que l’on peut en faire. Les résultats de la section 3.1.2 constituent le point de départ de cette étude. Ceux-ci ont été entièrement obtenus avec la solution axiale à partir d’une fonction $F(r)$ qui résout les équations du développement perturbatif à l’ordre 0. Cette approche favorise une densité baryonique ayant un profil radial constant pour de petites valeurs de r . De plus, la géométrie obtenue lorsque l’on trace les surfaces de densité baryonique constante est de type sphérique pour tout n . Le type de régression utilisé permet ensuite d’obtenir des prédictions sur l’énergie de liaison par nucléon avec une variance globale de $\sigma(E_{\text{qBPS}}/n) = 1.03 \text{ MeV}/n$ ainsi qu’une prédiction sur les masses avec une variance de $\sigma(E_{\text{qBPS}}) = 14.04 \text{ MeV}$, ce qui est remarquable pour un modèle possédant seulement 4 paramètres.

L’un des premiers constats que l’on peut faire à partir des valeurs numériques obtenues pour les paramètres libres (tableau 3.1) est que le terme \mathcal{L}_4 du lagrangien, proportionnel à β , ne contribue aucunement à l’énergie totale. En fait, $\beta = 0$ suggère que son absence améliore la minimisation de l’énergie. En principe, puisque le terme \mathcal{L}_6 assure déjà la stabilité des solutions solitoniques du point de vue du théorème de Derrick, cela implique que l’on peut effectivement retirer \mathcal{L}_4 du lagrangien sans conséquence sur les fondations du modèle. Les travaux de [6] montrent en effet qu’un lagrangien constitué des termes \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_6 possède

une borne inférieure sur l'énergie statique de nature topologique au même titre que celles obtenues précédemment pour le modèle BPS et le modèle de Skyrme. Les résultats du tableau 3.2 montrent également que la majeure partie de la masse d'un noyau provient de l'énergie statique. La contribution de l'énergie de Coulomb et d'isrotation, ajoutée « à la pièce » (ne provenant pas du lagrangien) pour raffiner les prédictions sur l'énergie de liaison, ne contribue pas en proportion significative à la masse totale. De plus, lorsque l'on regarde la contribution des quatre termes qui constituent l'énergie statique, on constate que la majeure partie de la masse provient des termes $E_0^{[SA]}$ et $E_6^{[SA]}$, une conséquence de l'approche perturbative utilisée. Un autre point important concernant ces deux contributions est leur ratio respectif $R_n^0[SA]$, soit 2 et 4. Le fait que ces ratios soient exacts provient directement de la propriété « BPS » du sous-modèle de départ, c'est-à-dire qu'il sature exactement la borne inférieure en énergie, qui est linéaire en n . On peut en effet montrer que la borne du sous-modèle BPS avec le potentiel V_{BeM} est donnée par

$$E_0^{[h]} + E_6^{[h]} \geq 6\pi\mu\lambda |n| \int_0^\pi \sqrt{V_{BeM}(F)} \sin^2(F) dF \simeq 15.926\mu\lambda |n|, \quad (3.76)$$

qui joue également un rôle important pour la description des résultats obtenus avec l'application rationnelle. Un dernier point digne de mention parmi les résultats de la section 3.1.2 correspond à la contribution du terme $E_2^{[SA]}$, qui est proportionnel au paramètre α . Bien que cette contribution ne soit pas significative du point de vue de la masse totale, le ratio $R_n^0[SA]$ d'une configuration à l'autre semble augmenter rapidement, car celui-ci passe de 1.76 à 4.74. En fait, il n'est pas difficile de se convaincre que pour de grandes valeurs de n , ce ratio augmente comme $n^{\frac{7}{3}}$ (voir équation (C.2)), ce qui peut entraîner un effet déstabilisant pour les solutions classiques. Cet effet, combiné au fait qu'il est généralement admis [55] que la solution axiale n'est pas un bon minimiseur pour le modèle de Skyrme original, suggéra l'introduction d'une nouvelle hypothèse de départ pour obtenir les configurations d'énergie minimale du modèle quasi-BPS.

L'application rationnelle a ainsi été introduite et une nouvelle fonction $F(r)$ a pu être obtenue en utilisant l'approche perturbative précédente, ce qui a permis d'obtenir certains des résultats de la section 3.2.4, plus spécifiquement du tableau 3.4 dans la limite $\nu \rightarrow 0$. Cela permet donc une comparaison directe avec les résultats du tableau 3.2 afin de vérifier l'impact sur chacune des contributions énergétiques considérées. En regardant plus attentivement les nouveaux ratios $R_n^0[AR]$ ainsi obtenus, on constate que cette nouvelle solution ne donne plus de ratios exacts pour $E_0^{[AR]}$ et $E_6^{[AR]}$. Au lieu d'être proportionnels à n , ces ratios sont désormais proportionnels à $\sqrt{\mathcal{I}}$, ce qui implique que l'énergie statique n'est plus exactement égale à la borne BPS (3.76) pour ces deux contributions. Puisque l'on peut déduire [34] la relation suivante $\mathcal{I} \geq n^2$ à partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des relations (3.57) et (3.58), cela résulte donc inévitablement en une augmentation de l'énergie. Cette augmentation de l'énergie statique pour $E_0^{[AR]}$ et $E_6^{[AR]}$, qui est de l'ordre de 20 % pour le deutéron

et de 14 % pour l'hélium-4, est une conséquence directe du fait que la solution obtenue n'est plus « BPS ». Cet effet non désiré peut cependant être contrebalancé par une diminution de l'énergie $E_2^{[\text{AR}]}$ et $E_4^{[\text{AR}]}$ ainsi que par une diminution de l'énergie de Coulomb. Les résultats du tableau 3.4 montrent en effet une diminution de l'énergie pour ces contributions si $\beta = 0$, qui est de l'ordre de 4 % pour $E_2^{[\text{AR}]}$ et de 2.5 % pour E_c dans le cas du deutéron, et de 37 % et 20 % respectivement pour l'hélium-4. Cependant, même si ces contributions sont mieux optimisées par l'application rationnelle, leur impact sur l'énergie totale demeure minime dans le cas du deutéron, ce qui résulte en fin de compte par une augmentation de l'énergie totale de 11 %. Cet effet semble par contre prendre de l'importance lorsque n augmente tels que le suggèrent les résultats obtenus pour l'hélium-4, ce qui mène effectivement à une diminution de 5 % de l'énergie totale pour cette configuration. Cependant, aussitôt que l'on permet $\beta > 0$, aucun gain n'est possible avec l'application rationnelle dans ce contexte en comparaison avec les résultats précédents. Les résultats traités jusqu'à maintenant ont tous été obtenus avec une approche perturbative dans l'espoir d'obtenir des solutions analytiques qui minimisent convenablement l'énergie du modèle quasi-BPS. Cette discussion est donc basée sur un certain nombre d'hypothèses qui sont vérifiables uniquement lorsque la solution complète du modèle est connue.

Afin de compléter l'analyse des résultats, des solutions numériques complètes du modèle quasi-BPS ont donc été proposées dans un contexte où les deux sous-modèles sont introduits en proportion variée (le modèle de Skyrme original n'est plus considéré comme une petite correction au modèle BPS dans la limite $\nu \rightarrow 1$). Les résultats présentés aux figures 3.5 et 3.6 et détaillés à l'annexe E permettent d'étudier la transition d'un modèle à l'autre en fonction des deux ansatz étudiés. Un certain nombre de tests peuvent être effectués afin de s'assurer de l'exactitude des résultats numériques. En premier lieu, puisque l'application rationnelle et la solution axiale se simplifient à la configuration hérisson proposée par Skyrme pour le cas $B = 1$, cela implique que l'énergie statique obtenue pour la configuration $B = 1$ doit être la même dans les deux cas, ce qui est confirmé à l'annexe E. De plus, comme mentionné précédemment, les cas limites $\nu = 0$ et $\nu = 1$ sont maintenant bien connus et les résultats obtenus numériquement peuvent donc leur être comparés. Le cas $\nu = 0$ correspond en effet au modèle BPS pur et les ratios obtenus doivent donc être exactement de 2 et 4 pour la solution axiale ($R_n^{\nu=0}[\text{SA}]$, les résultats du tableau 3.2 pour $E_0^{[\text{SA}]}$ et $E_6^{[\text{SA}]}$) et de $\sqrt{\mathcal{I}}$ pour l'application rationnelle ($R_n^{\nu=0}[\text{AR}]$, les résultats du tableau 3.4), ce qui est également vérifiable aux tableaux E.1 et E.2. De plus, dans ce contexte, l'échelle d'énergie est fixée par la borne BPS et donc pour le cas $B = 1$, il faut obtenir la borne (3.76) une fois le produit $\mu\lambda$ posé égal à 1. Le cas $\nu = 1$ correspond donc au modèle de Skyrme original. Dans cette limite, tout ce que l'on peut dire sur l'échelle d'énergie est que celle-ci doit être plus grande que celle de la borne BPS correspondante, donnée par (1.54). Cependant, certains ratios ($R_n^{\nu=1}[h]$) sont connus dans la littérature [24, 38, 55] et donc une comparaison devient possible. Par exemple,

le ratio obtenu dans [55] pour le deutéron dans le modèle de Skyrme avec la solution axiale est de 2.14 et celui obtenu dans [24] avec l'application rationnelle, de 1.962, alors que notre calcul numérique donne respectivement $R_2^{\nu=1}[\text{SA}] = 2.134$ et $R_2^{\nu=1}[\text{AR}] = 1.958$. Une dernière comparaison peut également être faite à partir de [24], c'est-à-dire que les auteurs obtiennent le ratio 3.691 pour la configuration $B = 4$ dans le modèle de Skyrme avec l'application rationnelle et que notre calcul numérique donne $R_4^{\nu=1}[\text{AR}] = 3.682$. Par ailleurs, les ratios $R_{2,4}^{\nu=1}[\text{AR}]$ illustrent clairement la force de l'application rationnelle dans cette limite puisque celle-ci génère des états liés. De plus, une simple comparaison avec les résultats obtenus par [38] permet d'estimer l'ordre de grandeur de l'échelle d'énergie du modèle de Skyrme pour le deutéron, qui correspond également aux résultats de l'annexe E. Une fois la validité des résultats numériques confirmée, il devient possible d'étudier la transition entre les cas limites plus en détail.

À partir des figures 3.5 et 3.6, un premier coup d'oeil permet de conclure qu'il n'existe aucun état lié possible au niveau classique avec ces deux hypothèses de départ lors de la transition entre $\nu = 0$ et $\nu = 1$. Un ratio $R_n^{\nu}[h]$ supérieur à 2 ou 4 (dépendamment de la configuration étudiée) signifie en effet que la configuration obtenue possède une énergie plus grande que la somme de celle de ses constituants. Ces configurations classiques sont donc dites instables. Cela signifie, dans le cas du deutéron par exemple, que cette configuration peut éventuellement se désintégrer en deux états distincts $B = 1$. Le même raisonnement s'applique également pour l'hélium-4. L'augmentation rapide de $R_n^{\nu}[h]$ est principalement due à l'importante différence entre les deux échelles d'énergie des sous-modèles respectifs. Lorsque l'on calcule les bornes respectives des deux modèles pour le cas $B = 1$, c'est-à-dire $E_0^{[h]} + E_6^{[h]} \geq 15.926$ et $E_2^{[h]} + E_4^{[h]} \geq 669.970$, il devient possible de constater qu'aussitôt que $\nu \neq 0$, l'énergie augmente de façon importante. Cela laisse croire que le modèle de Skyrme ne peut pas être considéré comme une petite correction au modèle BPS dans ce contexte. Cette différence importante entre les deux modèles s'explique principalement par la présence du terme $E_4^{[h]}$ dans (3.62). En effet, puisque les résultats précédents suggèrent tous $\beta = 0$, un simple test peut désormais être effectué pour vérifier cette hypothèse. En éliminant le terme $E_4^{[h]}$ dans (3.62) tout en appliquant à nouveau l'algorithme de recuit simulé sur cette expression, on obtient les graphiques suivants.

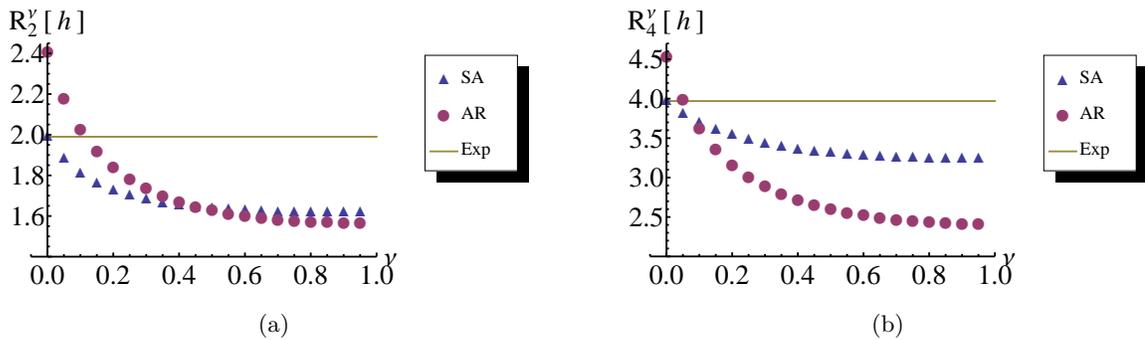


FIGURE 3.7: Minimisation numérique de l'énergie statique du modèle quasi-BPS en l'absence du terme $E_4^{[h]}$ proportionnel à β .

La figure 3.7 illustre bien la possibilité d'états liés (stables) qui satisfont la condition $R_n''[h] < n$ lorsque l'on pose $\beta = 0$. La nouvelle limite ainsi obtenue pour $\nu = 1$ est cependant sans signification physique particulière puisque comme mentionné au chapitre 1, le théorème de Derrick stipule qu'un lagrangien constitué de \mathcal{L}_2 uniquement ne mène pas à des configurations stables en trois dimensions et l'énergie statique tend vers 0, ce qui correspond au comportement observé dans ce calcul. La conclusion la plus importante qu'il faut tirer de cette nouvelle analyse est que dans la région sélectionnée par la régression sur les données expérimentales, c'est-à-dire $\nu \sim 10^{-3}$ (tableau 3.1), il existe des états liés possibles et ces états sont mieux décrits par la solution axiale ($R_n''[\text{SA}] < R_n''[\text{AR}]$). Les calculs numériques réalisés dans ce présent travail permettent donc de conclure que si l'on souhaite optimiser les quatre termes de l'énergie statique simultanément, la solution axiale et l'application rationnelle ne sont pas adéquates pour un tel traitement et un nouvel ansatz doit être construit pour obtenir des états stables nécessaires à la quantification et aux calculs subséquents. Cet ansatz pourrait en principe être un hybride entre les deux hypothèses de départ étudiées dans ce document, mais sa forme exacte demeure un problème ouvert.

Un premier pas dans le développement d'une nouvelle hypothèse de départ pourrait consister à obtenir les fonctions $R(z)$ qui minimisent la partie angulaire du modèle quasi-BPS complet au lieu de minimiser uniquement la partie qui concerne le lagrangien de Skyrme. Cela pourrait en effet améliorer grandement les prédictions sous l'application rationnelle puisque le ratio $R_n^{\nu \simeq 0}[\text{AR}]$ dépend fortement de $\sqrt{\mathcal{I}}$ dans la limite $\nu \rightarrow 0$, qui est la région d'intérêt. Cette approche nécessiterait cependant de connaître les configurations d'énergie minimale obtenues numériquement en minimisant le modèle quasi-BPS complet en trois dimensions. Cela permettrait d'obtenir les symétries sur lesquelles s'appuyer pour générer les nouveaux polynômes, ce qui n'est pas une simple tâche. Par contre, si l'on choisit d'ignorer la contribution du terme de Skyrme au lagrangien, qui est maintenant optionnel dans ce contexte, il existe des états stables possibles avec la solution axiale et l'application rationnelle. Le choix entre ces deux ansatz est déterminé par la valeur du paramètre libre devant \mathcal{L}_2 . À la lumière de ces résultats, il est donc possible de conclure que l'approche proposée par [11, 12] demeure valide tant que $\beta = 0$ et que α reste petit devant le produit $\mu\lambda$. De plus, pour s'approcher le plus près possible du ratio expérimental, la figure 3.7 suggère une valeur du paramètre α approximativement bornée par $0 \leq \alpha \leq 10^{-2}$, ce qui favorise également l'approche perturbative proposée à la section 3.1.2.

Conclusion

Don't ever believe anyone who tells you that elementary particle physics is elegant.

-L. Susskind

Les idées proposées par Skyrme au milieu du 20^{ième} siècle ont désormais passé l'épreuve du temps. Celles-ci ont beaucoup évolué au cours des années, mais les racines du modèle sont restées les mêmes. La notion de soliton topologique est en effet toujours bien présente dans les versions modernes du modèle, qui sont maintenant interprétées comme des théories efficaces de QCD dans la limite des basses énergies. L'approche privilégiée dans ce travail a d'abord consisté à construire un lagrangien efficace en considérant des termes qui respectent les symétries préservées par les interactions fortes, parmi lesquelles on retrouve les symétries usuelles de l'espace-temps (symétries de Lorentz) ainsi que certaines symétries internes telle que la symétrie chirale. Les symétries internes sont éventuellement brisées (spontanément ou explicitement) par divers mécanismes pour respecter les observations physiques et les équations obtenues en appliquant le principe de moindre action permettent d'obtenir des solutions solitoniques caractérisées par une charge topologique conservée. Cette charge topologique, qui provient du comportement du soliton à l'infini spatial, peut ensuite être associée au nombre baryonique en physique nucléaire et illustre par le fait même la loi de conservation de ce dernier. Le processus de quantification des états solitoniques assure ensuite que ces états possèdent les bons nombres quantiques, ce qui fait en sorte qu'ils peuvent être utilisés pour décrire la matière nucléaire.

La problématique étudiée dans ce travail réside dans la notion de paramétrisation des champs, qui est au coeur du modèle d'intérêt puisque celle-ci influence directement la géométrie et l'énergie des configurations résultantes. Puisque la structure réelle des noyaux n'est pas connue à ce jour, deux hypothèses ont été testées et comparées. Celles-ci ont été choisies de façon à faire ressortir les particularités et les points forts de chacun des deux sous-modèles à partir desquels est construit le modèle quasi-BPS décrit dans cet ouvrage. Tel que l'on peut maintenant le constater, la difficulté provient du fait que l'on souhaite combiner deux modèles qui, pris individuellement, génèrent des configurations qui ne partagent pas les mêmes types de géométrie. Il en résulte donc que si l'on souhaite minimiser simultanément les quatre termes de l'énergie statique, ces deux hypothèses de départ ne conviennent pas à la description des états classiques. De plus, l'approche perturbative n'est pas justifiée puisque la contribution

énergétique du modèle de Skyrme ne correspond pas à une petite correction de celle du modèle BPS. Le modèle de Skyrme original possède de façon naturelle un poids beaucoup plus important que celui du modèle BPS. Une solution possible consiste à éliminer le terme de Skyrme (\mathcal{L}_4) du lagrangien du modèle quasi-BPS, ce qui permet d'obtenir des états stables décrits par la solution axiale dans la région d'intérêt. À défaut d'avoir une meilleure paramétrisation, cette approche permet à nouveau d'utiliser un développement perturbatif à partir de solutions analytiques du modèle BPS. En fait, une approche similaire a également été proposée dans [3], à la différence que celle-ci incorpore un terme de potentiel supplémentaire au premier ordre perturbatif en plus du terme \mathcal{L}_2 . Aucun résultat n'a été publié à ce jour concernant cette proposition.

Les résultats présentés dans ce travail amènent également un certain nombre de pistes qu'il pourrait s'avérer intéressant d'explorer dans des travaux futurs. En premier lieu, il serait intéressant de généraliser la méthode numérique aux noyaux de nombre baryonique plus élevé puisque les résultats de la figure 3.7 semblent montrer que les rôles pourraient éventuellement être inversés lorsque n augmente, c'est-à-dire que l'application rationnelle pourrait donner de meilleurs états stables que la solution axiale dans la limite d'intérêt. Une telle adaptation devrait être en principe assez directe puisque si l'on se concentre sur les solutions numériques obtenues en minimisant uniquement l'énergie statique, seule la connaissance du paramètre \mathcal{I} est nécessaire. Les valeurs numériques traditionnellement admises de ce paramètre sont connues pour $1 \leq n \leq 22$ inclusivement, mais une approximation numérique peut être trouvée dans [44], soit $\mathcal{I} \simeq 1.28n^2$, valide pour de grandes valeurs de n . Cela permet donc en principe une généralisation à tous les noyaux stables, ce que la solution axiale permet également. De plus, comme mentionné précédemment, la construction d'un ansatz hybride serait un bon point de départ vers une meilleure description du modèle quasi-BPS puisque certains problèmes peuvent toujours survenir avec les noyaux de nombre baryonique élevé (en relation avec la dépendance en n de chacun des termes de l'énergie statique). Une première approche serait d'optimiser le paramètre angulaire \mathcal{I} pour les quatre termes de l'énergie statique, ce qui permettrait de raffiner les prédictions possibles avec l'application rationnelle tout en développant de nouvelles configurations pour les surfaces de densité baryonique constante. Dans le même ordre d'idée, on peut également penser à un problème d'optimisation numérique plus complexe en 2 dimensions qui consisterait à adapter l'algorithme de recuit simulé pour minimiser l'énergie statique (les quatre termes) et trouver une fonction de la forme $F(r, \theta)$ numériquement tout en laissant la partie en $e^{i\phi}$ (ou $e^{in\phi}$) inchangée. Finalement, de récents travaux proposés par [52] suggèrent de regarder un traitement incluant des applications harmoniques « restreintes » pour la paramétrisation du champ, dans un modèle où l'énergie statique prend la forme $E_0 + E_6 + \varepsilon E_2$, où ε est considéré comme un paramètre petit mais non nul qui respecte $\varepsilon > 0$. En ce qui concerne l'approche perturbative, advenant que celle-ci soit privilégiée, l'algorithme de recuit simulé utilisé dans ce travail pourrait potentiellement être

adapté pour résoudre l'équation au premier ordre perturbatif et ainsi trouver une fonction $F_1(r)$ numériquement (voir annexe B avec $\beta = 0$) qui permettrait d'ajouter une correction à la fonction analytique de départ $F_0(r)$. Une fois cette correction introduite, la nouvelle régression sur les données expérimentales devrait en principe améliorer le pouvoir prédictif du modèle, qui posséderait en réalité trois paramètres libres.

D'un point de vue plus général, le modèle de Skyrme et ses extensions ne sont pas simplement limités à la description des noyaux atomiques, des applications aussi variées que l'étude des étoiles à neutrons [44] ou le processus de stockage de l'information sur un disque dur [47] sont également possibles moyennant quelques modifications du modèle de Skyrme original. En physique des particules, la construction de modèles ou de théories efficaces, qui sont en réalité des théories rudimentaires d'une validité restreinte, demeure l'un des moyens les plus profitables pour réaliser des progrès importants là où la théorie généralement admise faillit. Le caractère sélectif de cette démarche et l'absence de principe unificateur pour expliquer la diversité des particules observées et leurs propriétés, qui reflète sans doute un certain manque d'élégance en comparaison à des théories bien établies telles que la relativité générale ou la mécanique quantique, constitue certainement un rappel de la quantité et de l'importance du travail qu'il reste à accomplir dans ce champ de recherche fascinant.

Annexe A

Équation différentielle angulaire du modèle de Skyrme BPS

En premier lieu, considérons la densité lagrangienne obtenue par Adam [4], soit

$$\mathcal{L}_{BPS} = -\frac{\lambda^2 \sin^4(F)}{(1 + |u|^2)^4} (\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2 - \mu^2 V(F), \quad (\text{A.1})$$

avec comme hypothèse de départ

$$F = F(r), \quad u(\theta, \phi) = g(\theta) e^{in\phi}. \quad (\text{A.2})$$

Puisqu'il y a deux champs scalaires d'intérêt, soit u (ou de façon équivalente \bar{u}) et F , il faut appliquer les équations d'Euler-Lagrange pour ces deux champs. La partie angulaire devient

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{BPS}}{\partial (\partial_\mu \bar{u})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{BPS}}{\partial \bar{u}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{K^\mu}{(1 + |u|^2)^2} \right) = 0, \quad (\text{A.3})$$

où l'on définit le quadrivecteur

$$K^\mu = \frac{\partial (\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial \bar{u}_\mu}. \quad (\text{A.4})$$

Calculons ensuite la quantité

$$(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2 = (F_z \bar{u}_y u_x - F_y \bar{u}_z u_x - F_z \bar{u}_x u_y + F_x \bar{u}_z u_y + F_y \bar{u}_x u_z + F_x \bar{u}_y u_z)^2, \quad (\text{A.5})$$

avec la convention $\epsilon^{0123} = +1$. Il faut par la suite réexprimer cette quantité en fonction des coordonnées sphériques dû à notre hypothèse de départ. On introduit donc

$$x = r \sin(\theta) \cos(\phi) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{A.6})$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\phi) \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right) \quad (\text{A.7})$$

$$z = r \cos(\theta) \quad \phi = \arctan \left(\frac{y}{x} \right), \quad (\text{A.8})$$

d'où l'on trouve que (avec la règle de dérivation en chaîne)

$$F_x = \sin(\theta) \cos(\phi) F_r \quad u_x = \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} u_\theta - \frac{\sin(\phi)}{r \sin(\theta)} u_\phi \quad (\text{A.9})$$

$$F_y = \sin(\theta) \sin(\phi) F_r \quad u_y = \frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{r} u_\theta + \frac{\cos(\phi)}{r \sin(\theta)} u_\phi \quad (\text{A.10})$$

$$F_z = \cos(\theta) F_r \quad u_z = -\frac{\sin(\theta)}{r} u_\theta. \quad (\text{A.11})$$

En substituant ces expressions dans l'équation (A.5), on obtient, après simplification

$$(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2 = \frac{F_r^2 (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)^2}{r^4 \sin^2(\theta)}. \quad (\text{A.12})$$

Il devient ensuite possible de calculer les composantes spatiales du quadrivecteur K^μ dans la base des coordonnées sphériques. Puisque ce vecteur contient des dérivées par rapport aux composantes du gradient en coordonnées cartésiennes, on doit également leur appliquer le changement de coordonnées, ce qui fait sortir un facteur en avant des dérivées. On a que

$$K^i = \frac{\partial(\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} F_\nu u_\rho \bar{u}_\sigma)^2}{\partial(\vec{\nabla}\bar{u})_i} \quad \forall i \in \{x, y, z\}. \quad (\text{A.13})$$

Il faut donc transposer les composantes du gradient en coordonnées sphériques, ce qui donne

$$(\vec{\nabla}\bar{u})_x \rightarrow \bar{u}_r, \quad (\vec{\nabla}\bar{u})_y \rightarrow \frac{1}{r} \bar{u}_\theta, \quad (\vec{\nabla}\bar{u})_z \rightarrow \frac{1}{r \sin(\theta)} \bar{u}_\phi. \quad (\text{A.14})$$

À partir de celles-ci, on tire que

$$K^r = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_r} \left(\frac{F_r^2 (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)^2}{r^4 \sin^2(\theta)} \right) = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$K^\theta = r \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\theta} \left(\frac{F_r^2 (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)^2}{r^4 \sin^2(\theta)} \right) = \frac{2F_r^2 u_\phi (-\bar{u}_\phi u_\theta + \bar{u}_\theta u_\phi)}{r^3 \sin^2(\theta)} \quad (\text{A.16})$$

$$K^\phi = r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_\phi} \left(\frac{F_r^2 (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)^2}{r^4 \sin^2(\theta)} \right) = \frac{2F_r^2 u_\theta (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)}{r^3 \sin(\theta)} \quad (\text{A.17})$$

Calculons maintenant l'équation (A.3). Celle-ci représente la divergence du vecteur K , qui doit également être calculée en coordonnées sphériques. On obtient donc

$$\partial_0 \left(\frac{K^0}{(1 + |u|^2)^2} \right) + \partial_i \left(\frac{K^i}{(1 + |u|^2)^2} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{K}}{(1 + |u|^2)^2} \right) = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 \frac{K^r}{(1 + |u|^2)^2} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\sin(\theta) \frac{K^\theta}{(1 + |u|^2)^2} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \left(\frac{K^\phi}{(1 + |u|^2)^2} \right) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\sin(\theta) \frac{K^\theta}{(1 + |u|^2)^2} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \left(\frac{K^\phi}{(1 + |u|^2)^2} \right) = 0, \quad (\text{A.20})$$

puisque la dérivée temporelle est nulle. En substituant les expressions précédemment obtenues,

l'équation de champ devient

$$\frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{1}{(1+|u|^2)^2} \frac{2F_r^2 u_\phi (-\bar{u}_\phi u_\theta + \bar{u}_\theta u_\phi)}{r^3 \sin(\theta)} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \left(\frac{1}{(1+|u|^2)^2} \frac{2F_r^2 u_\theta (\bar{u}_\phi u_\theta - \bar{u}_\theta u_\phi)}{r^3 \sin(\theta)} \right) = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{ing e^{in\phi} (ing e^{-in\phi} g_\theta e^{in\phi} + g_\theta e^{-in\phi} ing e^{in\phi})}{(1+g^2)^2 r^3 \sin(\theta)} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \left(\frac{g_\theta e^{in\phi} (-ing e^{-in\phi} g_\theta e^{in\phi} - g_\theta e^{-in\phi} ing e^{in\phi})}{(1+g^2)^2 r^3 \sin(\theta)} \right) = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{e^{in\phi}}{r \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{-2n^2 g^2 g_\theta}{(1+g^2)^2 r^3 \sin(\theta)} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \partial_\phi \left(\frac{-2ing g_\theta^2 e^{in\phi}}{(1+g^2)^2 r^3 \sin(\theta)} \right) = 0 \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{e^{in\phi}}{r^4 \sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{-2n^2 g^2 g_\theta}{(1+g^2)^2 \sin(\theta)} \right) + \left(\frac{2n^2 g g_\theta^2 e^{in\phi}}{(1+g^2)^2 r^4 \sin^2(\theta)} \right) = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{1}{\sin(\theta)} \partial_\theta \left(\frac{g^2 g_\theta}{(1+g^2)^2 \sin(\theta)} \right) - \frac{g g_\theta^2}{(1+g^2)^2 \sin^2(\theta)} = 0, \quad (\text{A.25})$$

où l'on retrouve effectivement l'expression obtenue dans [4]. Les solutions de cette équation de champ pour $g(\theta)$ sont de la forme

$$g_1(\theta) = 0 \quad (\text{A.26})$$

$$g_2(\theta) = -\sqrt{\frac{-1 - e^{2i\theta} + e^{i\theta+2C_2} (-2 + 4iC_1)}{1 + e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta+2C_2} C_1}} \quad (\text{A.27})$$

$$g_3(\theta) = \sqrt{\frac{-1 - e^{2i\theta} + e^{i\theta+2C_2} (-2 + 4iC_1)}{1 + e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta+2C_2} C_1}} \quad (\text{A.28})$$

$$g_4(\theta) = -\sqrt{\frac{-1 - e^{2i\theta} + e^{i\theta+2C_2} (2 - 4iC_1)}{1 + e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta+2C_2} C_1}} \quad (\text{A.29})$$

$$g_5(\theta) = \sqrt{\frac{-1 - e^{2i\theta} + e^{i\theta+2C_2} (2 - 4iC_1)}{1 + e^{2i\theta} - 4ie^{i\theta+2C_2} C_1}}, \quad (\text{A.30})$$

où C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration. En choisissant ces constantes de façon judicieuse, soit

$$C_1 = \frac{-i}{4}, \quad C_2 = \frac{\ln(2)}{2}, \quad (\text{A.31})$$

on obtient les fonctions suivantes :

$$g_1(\theta) = 0, \quad g_2(\theta) = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad g_3(\theta) = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (\text{A.32})$$

$$g_4(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad g_5(\theta) = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (\text{A.33})$$

La fonction qui respecte les bornes voulues, soit $g(0) = 0$ et $g(\pi) = \infty$, est $g_4(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Annexe B

Approche perturbative

On écrit le lagrangien suivant, où le modèle de Skyrme est ajouté en tant que petite correction (d'ordre ϵ) au modèle BPS

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_6 + \epsilon(\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4). \quad (\text{B.1})$$

On pose que la solution sera de la forme

$$F(r) = F_0(r) + \epsilon F_1(r), \quad (\text{B.2})$$

où $F_0(r)$ correspond à la solution du modèle BPS ($\epsilon = 0$) donnée par l'équation différentielle suivante

$$\frac{9n^2\lambda^2}{4} \frac{\sin^2(F_0)}{2r^2} \partial_r \left(\frac{\sin^2(F_0)F_0'}{r^2} \right) - \mu^2 \frac{\partial V_{BeM}(F_0)}{\partial F_0} = 0. \quad (\text{B.3})$$

Dans cette équation, V_{BeM} est défini par (3.8). Ce qui implique que

$$F_0(r) = 2 \arcsin \left(e^{-a^2 r^2 - \frac{7}{5} a^4 r^4} \right), \quad a = \left(\frac{\mu}{18n\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{B.4})$$

L'équation différentielle du modèle quasi-BPS à l'ordre ϵ est ensuite donnée par

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2\alpha(n^2+1)\sin(2F_0)}{r^2} + \frac{8\alpha F_0'}{r} + 4\alpha F_0'' + \frac{16n^2\beta \sin(2F_0)(\cos(2F_0)-1)}{r^4} + \right. \\ & \quad \left. \frac{32\beta(n^2+1)\cos(F_0)\sin(F_0)F_0'^2}{r^2} + \frac{32\beta(n^2+1)\sin^2(F_0)F_0''}{r^2} \right) + \\ & \quad \left(-\frac{9n^2\lambda^2 \cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0'}{r^5} + \frac{9n^2\lambda^2 \sin(F_0)\sin(3F_0)F_0'^2}{4r^4} + \right. \\ & \quad \left. \frac{9n^2\lambda^2 \cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0''}{2r^4} - \mu^2 V_{BeM}''(F_0) \right) F_1 + \\ & \quad \left(-\frac{9n^2\lambda^2 \sin^4(F_0)}{4r^5} + \frac{9n^2\lambda^2 \cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0'}{2r^4} \right) F_1' + \frac{9n^2\lambda^2 \sin^4(F_0)}{8r^4} F_1'' = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

On a donc la forme suivante

$$h_0(r) + h_1(r)F_1 + h_2(r)F_1' + h_3(r)F_1'' = 0, \quad (\text{B.6})$$

avec les coefficients donnés par

$$h_0(r) = \left(-\frac{2\alpha(n^2 + 1)\sin(2F_0)}{r^2} + \frac{8\alpha F_0'}{r} + 4\alpha F_0'' + \frac{16n^2\beta\sin(2F_0)(\cos(2F_0) - 1)}{r^4} + \frac{32\beta(n^2 + 1)\cos(F_0)\sin(F_0)F_0'^2}{r^2} + \frac{32\beta(n^2 + 1)\sin^2(F_0)F_0''}{r^2} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$h_1(r) = \left(-\frac{9n^2\lambda^2\cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0'}{r^5} + \frac{9n^2\lambda^2\sin(F_0)\sin(3F_0)F_0'^2}{4r^4} + \frac{9n^2\lambda^2\cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0''}{2r^4} - \mu^2 V_{BeM}''(F_0) \right) \quad (\text{B.8})$$

$$h_2(r) = \left(-\frac{9n^2\lambda^2\sin^4(F_0)}{4r^5} + \frac{9n^2\lambda^2\cos(F_0)\sin^3(F_0)F_0'}{2r^4} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$h_3(r) = \frac{9n^2\lambda^2\sin^4(F_0)}{8r^4}, \quad (\text{B.10})$$

ce qui correspond à une équation différentielle non homogène et non linéaire du second ordre. Pour respecter les bornes de la fonction $F(r)$, soit $F(0) = \pi$ et $F(\infty) = 0$, il faut que les bornes de $F_1(r)$ soit $F_1(0) = 0$ et $F_1(\infty) = 0$. Un comportement divergent de $F_1(r)$ lorsque $r \rightarrow \infty$ n'est donc pas souhaitable. La solution de (B.6) pour $F_1(r)$ permettrait donc de réintroduire une dépendance en α et β dans l'angle chiral $F(r)$, améliorant ainsi les prédictions du modèle. Cette solution demeure à ce jour un problème ouvert et il ne fait aucun doute que des méthodes numériques devront être employées pour arriver à cette fin. Le résultat utilisé dans ce document correspond donc à la solution de (3.6) à l'ordre 0.

Annexe C

Calculs explicites avec la solution axiale (approche perturbative)

C.1 Table des intégrales numériques

En se référant à la notation introduite avec (3.18), les intégrales suivantes sont évaluées numériquement.

TABLEAU C.1: Compilation des intégrales numériques les plus utilisées.

Int.	Approximation	Int.	Approximation
$I_{002}^1(\infty)$	2.68798	$I_{220}^1(\infty)$	0.14286
$I_{020}^1(\infty)$	0.48504	$I_{222}^1(\infty)$	1.43364
$I_{022}^1(\infty)$	5.13755	$I_{240}^1(\infty)$	0.35271
$I_{040}^1(\infty)$	1.88155	$I_{242}^1(\infty)$	3.94598
$I_{042}^1(\infty)$	20.2779	$I_{021}^2(\infty)$	0.02265

Celles-ci dépendent uniquement de la fonction $F(r)$, qui est donnée par (3.10).

C.2 Énergie statique et moments d'inertie

L'énergie statique du modèle quasi-BPS sous la solution axiale est donc donnée par

$$E_0^{[\text{SA}]} = \frac{\pi\mu\lambda n}{8} I_{042}^1(\infty) \quad (\text{C.1})$$

$$E_2^{[\text{SA}]} = 8\pi\alpha \left(\frac{18n\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} (I_{002}^1(\infty) + (n^2 + 1) I_{020}^1(\infty)) \quad (\text{C.2})$$

$$E_4^{[\text{SA}]} = 64\pi\beta \left(\frac{\mu}{18n\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} ((n^2 + 1) I_{022}^1(\infty) + n^2 I_{040}^1(\infty)) \quad (\text{C.3})$$

$$E_6^{[\text{SA}]} = \frac{\pi\mu\lambda n}{8} I_{042}^1(\infty). \quad (\text{C.4})$$

Les densités d'inertie utiles au calcul de l'énergie de Coulomb sont données par

$$\langle \mathcal{U}_{11} \rangle = 2\alpha \sin^2(F) + 16\beta F'^2 \sin^2(F) + \frac{16n^2\beta \sin^4(F)}{r^2} + \frac{9n^2\lambda^2 F'^2 \sin^4(F)}{16r^2} + \cos^2(\theta) \left(2\alpha \sin^2(F) + 16\beta F'^2 \sin^2(F) + \frac{16\beta \sin^4(F)}{r^2} + \frac{9\lambda^2 F'^2 \sin^4(F)}{16r^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{U}_{33} = \sin^2(\theta) \left(4\alpha \sin^2(F) + 32\beta F'^2 \sin^2(F) + \frac{32\beta \sin^4(F)}{r^2} + \frac{9\lambda^2 F'^2 \sin^4(F)}{8r^2} \right). \quad (\text{C.6})$$

Les moments d'inertie intégrés sur tout l'espace prennent donc la forme suivante

$$U_{11} = \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{2\alpha}{a^2} I_{220}^1(\infty) + 16\beta (4I_{222}^1(\infty) + (3n^2 + 1)I_{240}^1(\infty)) + \frac{9\lambda^2 a^2}{16} (3n^2 + 1)I_{242}^1(\infty) \right) \quad (\text{C.7})$$

$$V_{11} = \frac{4\pi}{3a} \left(\frac{2(n^2 + 3)\alpha}{a^2} I_{220}^1(\infty) + 16\beta ((n^2 + 3)I_{222}^1(\infty) + 4n^2 I_{240}^1(\infty)) + \frac{9\lambda^2 a^2}{4} n^2 I_{242}^1(\infty) \right), \quad (\text{C.8})$$

où U_{11} et V_{11} en sont quelques exemples.

C.3 Énergie de Coulomb

L'expression (C.5) doit donc par la suite être exprimée en fonction des harmoniques sphériques correspondantes. Sachant que

$$Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad Y_{20}(\theta, \phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} (3\cos^2(\theta) - 1), \quad (\text{C.9})$$

on peut déduire les relations suivantes

$$\cos^2(\theta) = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}Y_{00} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_{20}, \quad \sin^2(\theta) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}Y_{00} - \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}Y_{20}. \quad (\text{C.10})$$

En substituant l'expression pour le cosinus dans (C.5), on peut isoler les $\rho_l^m(r)$ correspondants, ce qui donne

$$\rho_{00}(x) = \sqrt{\pi}\mathcal{B}^0 + \frac{16\sqrt{\pi}\alpha i_3}{3U_{11}a^3}\mathcal{J}_{220}(x) + \frac{32\sqrt{\pi}\beta i_3}{3U_{11}a}(3n^2 + 1)\mathcal{J}_{240}(x) + \frac{128\sqrt{\pi}\beta i_3}{3U_{11}a}\mathcal{J}_{222}(x) + \frac{3\sqrt{\pi}\lambda^2 i_3 a}{8U_{11}}(3n^2 + 1)\mathcal{J}_{242}(x) \quad (\text{C.11})$$

$$\rho_{20}(x) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\alpha i_3}{U_{11}a^3}\mathcal{J}_{220}(x) + \frac{64}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\beta i_3}{U_{11}a}(\mathcal{J}_{240}(x) + \mathcal{J}_{222}(x)) + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\lambda^2 i_3 a}{U_{11}}\mathcal{J}_{242}(x). \quad (\text{C.12})$$

On a donc que

$$Q_{00}(y) = \frac{-n}{2\pi^{\frac{3}{2}}}I_{021}^1(y) + \frac{16\sqrt{\pi}\alpha i_3}{3U_{11}a^3}I_{220}^1(y) + \frac{32\sqrt{\pi}\beta i_3}{3U_{11}a}(3n^2 + 1)I_{240}^1(y) + \frac{128\sqrt{\pi}\beta i_3}{3U_{11}a}I_{222}^1(y) + \frac{3\sqrt{\pi}\lambda^2 i_3 a}{8U_{11}}(3n^2 + 1)I_{242}^1(y) \quad (\text{C.13})$$

$$Q_{20}(y) = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\alpha i_3}{U_{11}a^3}I_{220}^2(y) + \frac{64}{3}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\beta i_3}{U_{11}a}(I_{240}^2(y) + I_{222}^2(y)) + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\frac{\lambda^2 i_3 a}{U_{11}}I_{242}^2(y), \quad (\text{C.14})$$

ainsi que,

$$E_c = 2\pi\alpha_{em}a \int_0^\infty |Q_{00}(y)|^2 y^{-2} + |Q_{20}(y)|^2 y^{-6} dy. \quad (C.15)$$

Alors on définit ensuite deux vecteurs qui regroupent les constantes

$$\mathbf{q}_1 = \left(n, \frac{\alpha i_3}{a^3 U_{11}}, \frac{\beta i_3}{a U_{11}} (3n^2 + 1), \frac{\beta i_3}{a U_{11}}, \frac{\lambda^2 i_3 a}{U_{11}} (3n^2 + 1) \right) \quad (C.16)$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\frac{\alpha i_3}{a^3 U_{11}}, \frac{\beta i_3}{a U_{11}}, \frac{\lambda^2 i_3 a}{U_{11}} \right). \quad (C.17)$$

Il est ensuite possible d'inclure toutes les intégrations numériques sous une forme matricielle compacte, où les éléments sont calculés de la façon suivante

$$M_{00}^{11} = \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{021}^1(y) y^{-2} dy = \frac{1}{4\pi^3} \times 4.371137753 \quad (C.18)$$

$$M_{00}^{12} = M_{00}^{21} = -\frac{8}{3\pi} \int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{220}^1(y) y^{-2} dy = -\frac{8}{3\pi} \times -0.3486443255 \quad (C.19)$$

$$M_{00}^{13} = M_{00}^{31} = -\frac{16}{3\pi} \int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{240}^1(y) y^{-2} dy = -\frac{16}{3\pi} \times -0.9840792843 \quad (C.20)$$

$$M_{00}^{14} = M_{00}^{41} = -\frac{64}{3\pi} \int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{222}^1(y) y^{-2} dy = -\frac{64}{3\pi} \times -3.619599176 \quad (C.21)$$

$$M_{00}^{15} = M_{00}^{51} = -\frac{3}{16\pi} \int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{242}^1(y) y^{-2} dy = -\frac{3}{16\pi} \times -11.01383442 \quad (C.22)$$

...

On obtient donc les matrices suivantes

$$\mathbf{M}_{00} = \begin{pmatrix} 0.035244 & 0.295938 & 1.67062 & 24.5793 & 0.65734 \\ 0.295938 & 2.6131624 & 14.1112 & 215.6395 & 5.56078 \\ 1.67062 & 14.1112 & 79.5851 & 1173.4095 & 31.3461 \\ 24.5793 & 215.6395 & 1173.4095 & 17835.4373 & 462.538 \\ 0.65734 & 5.56078 & 31.3461 & 462.538 & 12.3494 \end{pmatrix} \quad (C.23)$$

$$\mathbf{M}_{20} = \begin{pmatrix} 0.0156167 & 1.62666 & 0.126600028 \\ 1.62666 & 173.309 & 13.9867 \\ 0.126600028 & 13.9867 & 1.20944 \end{pmatrix}. \quad (C.24)$$

Ainsi,

$$E_c = 2\pi\alpha_{em}a (\mathbf{q}_1 \mathbf{M}_{00} \mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2 \mathbf{M}_{20} \mathbf{q}_2^T). \quad (C.25)$$

Dans l'éventualité où la contribution du terme proportionnel à K_3 dans la densité de charge (3.36) pourrait être prise en compte dans le calcul de l'énergie de Coulomb, les deux moments

multipolaires d'intérêt deviennent

$$Q_{00}(y) = \frac{-n}{2\pi^{\frac{3}{2}}} I_{021}^1(y) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} - \frac{C}{U_{33}} \right) \frac{16\sqrt{\pi}\alpha}{3a^3} I_{220}^1(y) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}}(3n^2 + 1) - \frac{4C}{U_{33}} \right) \frac{32\sqrt{\pi}\beta}{3a} I_{240}^1(y) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} - \frac{C}{U_{33}} \right) \frac{128\sqrt{\pi}\beta}{3a} I_{222}^1(y) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}}(3n^2 + 1) - \frac{4C}{U_{33}} \right) \frac{3\sqrt{\pi}\lambda^2 a}{8} I_{242}^1(y) \quad (\text{C.26})$$

$$Q_{20}(y) = \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \frac{8}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\alpha}{a^3} I_{220}^2(y) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \frac{64}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{\beta}{a} (I_{240}^2(y) + I_{222}^2(y)) + \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \lambda^2 a I_{242}^2(y), \quad (\text{C.27})$$

avec $C \equiv \langle i, i_3, k_3 | R_{33}(A) K_3 | i, i_3, k_3 \rangle = \frac{i_3 k_3^2}{i(i+1)}$. Les vecteurs \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 correspondants seraient donc donnés par

$$\mathbf{q}_1 = \left(n, \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} - \frac{C}{U_{33}} \right) \frac{\alpha}{a^3}, \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}}(3n^2 + 1) - \frac{4C}{U_{33}} \right) \frac{\beta}{a}, \right. \quad (\text{C.28})$$

$$\left. \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} - \frac{C}{U_{33}} \right) \frac{\beta}{a}, \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}}(3n^2 + 1) - \frac{4C}{U_{33}} \right) \lambda^2 a \right) \quad (\text{C.29})$$

$$\mathbf{q}_2 = \left(\left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \frac{\alpha}{a^3}, \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \frac{\beta}{a}, \left(\frac{(i_3 + C)}{U_{11}} + \frac{2C}{U_{33}} \right) \lambda^2 a \right). \quad (\text{C.30})$$

Les mêmes calculs numériques (les matrices \mathbf{M}_{00} et \mathbf{M}_{20}) peuvent par la suite être utilisés dans le calcul de l'énergie de Coulomb (C.25) puisqu'ils dépendent seulement du choix de la fonction $F(r)$ et que celle-ci demeure inchangée. De plus, ce calcul est valide pour tout n alors qu'à l'annexe D, seulement deux configurations sont étudiées.

Annexe D

Calculs explicites sous l'application rationnelle (approche perturbative)

On peut donc écrire le champ de Skyrme de la façon suivante

$$U(r, z, \bar{z}) = \exp \left[\frac{iF(r)}{1 + R\bar{R}} \begin{pmatrix} 1 - R\bar{R} & 2\bar{R} \\ 2R & R\bar{R} - 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{D.1})$$

Les règles de transformation associées à cette application sont

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + w^2} \quad x = \frac{r(z + \bar{z})}{1 + z\bar{z}} \quad (\text{D.2})$$

$$z = \frac{x + iy}{\sqrt{x^2 + y^2 + w^2} + w} \quad y = \frac{-ir(z - \bar{z})}{1 + z\bar{z}} \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{z} = \frac{x - iy}{\sqrt{x^2 + y^2 + w^2} + w} \quad w = \frac{r(1 - z\bar{z})}{1 + z\bar{z}}, \quad (\text{D.4})$$

et l'élément de volume devient

$$dx dy dw = \frac{2ir^2}{(1 + z\bar{z})^2} dr dz d\bar{z} = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi. \quad (\text{D.5})$$

D.1 Énergie statique et moments d'inertie

L'énergie statique devient donc, une fois la partie radiale intégrée en utilisant (3.61),

$$E_0^{[\text{AR}]} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{I}}\mu\lambda}{8} I_{042}^1(\infty) \quad (\text{D.6})$$

$$E_2^{[\text{AR}]} = 8\pi\alpha \left(\frac{18\sqrt{\mathcal{I}}\lambda}{\mu} \right)^{\frac{1}{3}} (I_{002}^1(\infty) + 2nI_{020}^1(\infty)) \quad (\text{D.7})$$

$$E_4^{[\text{AR}]} = 64\pi\beta \left(\frac{\mu}{18\sqrt{\mathcal{I}}\lambda} \right)^{\frac{1}{3}} (2nI_{022}^1(\infty) + \mathcal{I}I_{040}^1(\infty)) \quad (\text{D.8})$$

$$E_6^{[\text{AR}]} = \frac{\pi\sqrt{\mathcal{I}}\mu\lambda}{8} I_{042}^1(\infty). \quad (\text{D.9})$$

De plus, les principaux moments d'inertie sous l'application rationnelle sont

$$U_{11} = \int (R^2 - 1)(\bar{R}^2 - 1) \sin^2(F) \left[\frac{4(\alpha + 8\beta F'^2)}{(1 + R\bar{R})^2} + \frac{(1 + z\bar{z})^2 \sin^2(F)(256\beta + 9\lambda^2 F'^2)}{8r^2(1 + R\bar{R})^4} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right] \frac{2ir^2 dr dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (\text{D.10})$$

$$U_{22} = \int (R^2 + 1)(\bar{R}^2 + 1) \sin^2(F) \left[\frac{4(\alpha + 8\beta F'^2)}{(1 + R\bar{R})^2} + \frac{(1 + z\bar{z})^2 \sin^2(F)(256\beta + 9\lambda^2 F'^2)}{8r^2(1 + R\bar{R})^4} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right] \frac{2ir^2 dr dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (\text{D.11})$$

$$U_{33} = \int R\bar{R} \sin^2(F) \left[\frac{16(\alpha + 8\beta F'^2)}{(1 + R\bar{R})^2} + \frac{(1 + z\bar{z})^2 \sin^2(F)(256\beta + 9\lambda^2 F'^2)}{2r^2(1 + R\bar{R})^4} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right] \frac{2ir^2 dr dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (\text{D.12})$$

$$W_{33} = \int \left(z\bar{R} \frac{dR}{dz} + \bar{z}R \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right) \sin^2(F) \left[\frac{8(\alpha + 8\beta F'^2)}{(1 + R\bar{R})^2} + \frac{(1 + z\bar{z})^2 \sin^2(F)(256\beta + 9\lambda^2 F'^2)}{4r^2(1 + R\bar{R})^4} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right] \frac{2ir^2 dr dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (\text{D.13})$$

$$V_{11} = \int (z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1) \sin^2(F) \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \left[\frac{4(\alpha + 8\beta F'^2)}{(1 + R\bar{R})^2} + \frac{(1 + z\bar{z})^2 \sin^2(F)(256\beta + 9\lambda^2 F'^2)}{8r^2(1 + R\bar{R})^4} \frac{dR}{dz} \frac{d\bar{R}}{d\bar{z}} \right] \frac{2ir^2 dr dz d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}. \quad (\text{D.14})$$

Pour le cas $R(z) = z$ ces expressions correspondent bien à celles de la solution axiale à $n = 1$.

D.2 Énergie de Coulomb pour le cas $B = 2$

Pour calculer l'énergie de Coulomb, on doit obtenir la densité baryonique. Ce qui donne

$$\mathcal{B}^0(r, \theta, \phi) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{\sin^2(F) F'}{r^2} \frac{\sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + 1)^2} = \mathcal{B}^0(r) f_2(\theta, \phi). \quad (\text{D.15})$$

En substituant la solution (3.61), on obtient

$$f_2(\theta, \phi) = \frac{\sin^2(\theta)}{(\cos^2(\theta) + 1)^2}, \quad \mathcal{B}^0(r) = \frac{32a_1^2 e^{-\frac{3}{5}a_1^2 r^2 (5+7a_1^2 r^2)} \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{5}a_1^2 r^2 (5+7a_1^2 r^2)}} (5 + 14a_1^2 r^2)}{5\pi^2 r}. \quad (\text{D.16})$$

On doit décomposer la fonction $f_2(\theta, \phi)$ en une série infinie d'harmoniques sphériques, ce qui donne

$$f_2(\theta, \phi) \simeq \sqrt{\pi} Y_{0,0} + \frac{1}{2} \sqrt{5\pi} (3\pi - 10) Y_{2,0} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (236 - 75\pi) Y_{4,0} + \frac{1}{20} \sqrt{13\pi} (1785\pi - 5608) Y_{6,0} + \frac{1}{140} \sqrt{17\pi} (264224 - 84105\pi) Y_{8,0} + \mathcal{O}(Y_{10,0}). \quad (\text{D.17})$$

$$(\text{D.18})$$

La densité de charge devient donc

$$\rho_2(\vec{r}) = \frac{1}{2} \mathcal{B}^0(r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} \rho_l^m(r) Y_l^{m*}(\theta, \phi). \quad (\text{D.19})$$

Avec la relation $Y_l^{0*}(\theta, \phi) = Y_{l,0}^*(\theta, \phi) = Y_{l,0}(\theta, \phi)$, on obtient

$$\rho_{0,0}(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \mathcal{B}^0(r) \quad (\text{D.20})$$

$$\rho_{2,0}(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{5\pi} (3\pi - 10) \mathcal{B}^0(r) \quad (\text{D.21})$$

$$\rho_{4,0}(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (236 - 75\pi) \mathcal{B}^0(r) \quad (\text{D.22})$$

$$\rho_{6,0}(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{20} \sqrt{13\pi} (1785\pi - 5608) \mathcal{B}^0(r) \quad (\text{D.23})$$

$$\rho_{8,0}(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{140} \sqrt{17\pi} (264224 - 84105\pi) \mathcal{B}^0(r). \quad (\text{D.24})$$

On introduit ensuite la densité de charge modifiée, qui correspond aux moments de la densité de charge,

$$Q_l^m(r) = \int_0^r r'^{l+2} \rho_l^m(r') dr'. \quad (\text{D.25})$$

On obtient

$$Q_{0,0}(r) = \int_0^r r'^2 \rho_{0,0}(r') dr' = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^r r'^2 \mathcal{B}^0(r') dr' \quad (\text{D.26})$$

$$Q_{2,0}(r) = \int_0^r r'^4 \rho_{2,0}(r') dr' = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{5\pi} (3\pi - 10) \int_0^r r'^4 \mathcal{B}^0(r') dr' \quad (\text{D.27})$$

$$Q_{4,0}(r) = \int_0^r r'^6 \rho_{4,0}(r') dr' = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (236 - 75\pi) \int_0^r r'^6 \mathcal{B}^0(r') dr' \quad (\text{D.28})$$

$$Q_{6,0}(r) = \int_0^r r'^8 \rho_{6,0}(r') dr' = \frac{1}{2} \frac{1}{20} \sqrt{13\pi} (1785\pi - 5608) \int_0^r r'^8 \mathcal{B}^0(r') dr' \quad (\text{D.29})$$

$$Q_{8,0}(r) = \int_0^r r'^{10} \rho_{8,0}(r') dr' = \frac{1}{2} \frac{1}{140} \sqrt{17\pi} (264224 - 84105\pi) \int_0^r r'^{10} \mathcal{B}^0(r') dr'. \quad (\text{D.30})$$

L'énergie de Coulomb peut donc s'écrire

$$E_c = 2\pi\alpha_{em} \int_0^\infty \left(|Q_{0,0}(r)|^2 r^{-2} + |Q_{2,0}(r)|^2 r^{-6} + |Q_{4,0}(r)|^2 r^{-10} + |Q_{6,0}(r)|^2 r^{-14} + |Q_{8,0}(r)|^2 r^{-18} \right) dr, \quad (\text{D.31})$$

avec $\alpha_{em} = 1/137.0359$. Sous le changement de variable (3.18), la densité baryonique s'écrit

$$\mathcal{B}^0(x, \theta, \phi) = -\frac{2}{\pi^2} \mathfrak{J}_{021}(x) f_2(\theta, \phi). \quad (\text{D.32})$$

Cela implique que

$$Q_{0,0}(y) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} I_{021}^1(y) \quad (\text{D.33})$$

$$Q_{2,0}(y) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{5\pi} (3\pi - 10) I_{021}^2(y) \quad (\text{D.34})$$

$$Q_{4,0}(y) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (236 - 75\pi) I_{021}^3(y) \quad (\text{D.35})$$

$$Q_{6,0}(y) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2} \frac{1}{20} \sqrt{13\pi} (1785\pi - 5608) I_{021}^4(y) \quad (\text{D.36})$$

$$Q_{8,0}(y) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{2} \frac{1}{140} \sqrt{17\pi} (264224 - 84105\pi) I_{021}^5(y). \quad (\text{D.37})$$

L'énergie de Coulomb devient alors

$$\begin{aligned} E_c &= 2\pi\alpha_{em}a_1 \frac{1}{4} \int_0^\infty \left[\left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi^2} I_{021}^1(y) \right)^2 y^{-2} + \left(\frac{1}{\pi^2} \sqrt{5\pi} (3\pi - 10) I_{021}^2(y) \right)^2 y^{-6} + \right. \\ &\quad \left(\frac{1}{\pi^2} \sqrt{\pi} (236 - 75\pi) I_{021}^3(y) \right)^2 y^{-10} + \left(\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{20} \sqrt{13\pi} (1785\pi - 5608) I_{021}^4(y) \right)^2 y^{-14} + \\ &\quad \left. \left(\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{140} \sqrt{17\pi} (264224 - 84105\pi) I_{021}^5(y) \right)^2 y^{-18} \right] dy \quad (\text{D.38}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\pi\alpha_{em}a_1 \frac{1}{4} (0.5639035987 + 0.02455519796 + 0.0007870335979 + \\ &\quad 0.00002383833575 + 7.094363523 \times 10^{-7}) \quad (\text{D.39}) \end{aligned}$$

$$= 0.00192227 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{D.40})$$

comparativement à $E_c = 0.00195759 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{\frac{1}{3}}$ pour la solution axiale. Les intégrales suivantes ont été évaluées numériquement (fonction evalf de Maple)

$$\int_0^\infty I_{021}^1(y) I_{021}^1(y) y^{-2} dy = 4.371137753 \quad \int_0^\infty I_{021}^2(y) I_{021}^2(y) y^{-6} dy = 0.4602057290 \quad (\text{D.41})$$

$$\int_0^\infty I_{021}^3(y) I_{021}^3(y) y^{-10} dy = 0.1685066931 \quad \int_0^\infty I_{021}^4(y) I_{021}^4(y) y^{-14} dy = 0.0860070648 \quad (\text{D.42})$$

$$\int_0^\infty I_{021}^5(y) I_{021}^5(y) y^{-18} dy = 0.05181680190 \quad . \quad (\text{D.43})$$

D.3 Énergie de Coulomb pour le cas $B = 4$

On a la densité baryonique suivante

$$\mathcal{B}^0(r, \theta, \phi) = -\frac{384 \sin^2(F) F' \sin^2(\theta) (35 + 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) - 8 \cos(4\phi) \sin^4(\theta))}{\pi^2 r^2 (53 + 4 \cos(2\theta) + 7 \cos(4\theta) + 8 \cos(4\phi) \sin^4(\theta))^2}. \quad (\text{D.44})$$

On doit développer la partie angulaire sur ses harmoniques sphériques comme dans le cas $B = 2$. Cependant, le calcul des coefficients f_l^m ne se fait pas de façon analytique dû à la

complexité de la dépendance angulaire. Il faut donc recourir à une méthode numérique pour approximer les intégrales. La quadrature de Gauss-Legendre est généralement utilisée pour ce type de problème, celle-ci permet de transposer les intégrales sous forme de sommes finies. Les coefficients du développement sur les harmoniques sphériques seront donc donnés par l'approximation suivante (3.74)

$$f_l^m = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_4(\theta, \phi) Y_l^{m*}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (\text{D.45})$$

$$f_l^m \simeq \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j f_4\left(\frac{\pi}{2}\theta_i + \frac{\pi}{2}, \pi\phi_j + \pi\right) Y_l^{m*}\left(\frac{\pi}{2}\theta_i + \frac{\pi}{2}, \pi\phi_j + \pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\theta_i + \frac{\pi}{2}\right), \quad (\text{D.46})$$

avec

$$f_4(\theta, \phi) = \frac{\sin^2(\theta)(35 + 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta) - 8 \cos(4\phi) \sin^4(\theta))}{(53 + 4 \cos(2\theta) + 7 \cos(4\theta) + 8 \cos(4\phi) \sin^4(\theta))^2}. \quad (\text{D.47})$$

En utilisant une quadrature de Gauss-Legendre à $N = 50$ points tout en gardant une précision de 30 décimales dans l'évaluation des y_i et des w_i , on obtient le développement suivant

$$\begin{aligned} f_4(\theta, \phi) \simeq & 0.01846306088Y_{0,0} - 0.004491521055Y_4^{-4} - 0.007515753297Y_{4,0} - \\ & 0.004491521055Y_4^4 - 0.0005384981597Y_6^{-4} + 0.0002878392540Y_{6,0} - \\ & 0.0005384981597Y_6^4 + 0.0005085933044Y_8^{-8} + 0.0003338105234Y_8^{-4} + \\ & 0.0008876739001Y_{8,0} + 0.0003338105234Y_8^4 + 0.0005085933044Y_8^8 + \\ & \mathcal{O}(Y_{10}^m), \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

qui reproduit avec une étonnante précision la fonction de départ. L'énergie de Coulomb devient donc

$$\begin{aligned} E_c = & 2\pi\alpha_{em}a_1\frac{1}{4}(2.255614378 + 0.01440871149 + 0.005145966957 + \\ & 0.005145966957 + 0.00001078691174 + 0.00003775422254 + \\ & 0.00003775422254 + 0.00006180739849 + 0.00002028966329 + \\ & 0.00002028966329 + 0.000008740446329 + 0.000008740446329) \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

$$= 0.00602202 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{D.50})$$

comparativement à $E_c = 0.00621498 \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}}$ pour la solution axiale.

Annexe E

Solutions numériques complètes du modèle quasi-BPS

Cette section présente les données brutes concernant l'énergie statique des deux configurations d'intérêt et les ratios ainsi obtenus. Les tableaux suivants regroupent les résultats obtenus sous la solution axiale ainsi que ceux obtenus avec l'application rationnelle.

TABLEAU E.1: Données sur l'optimisation de l'énergie statique du modèle quasi-BPS avec la solution axiale (approche numérique).

ν	$E_{stat}^{[SA]}(B = 1)$	$E_{stat}^{[SA]}(B = 2)$	$E_{stat}^{[SA]}(B = 4)$	$R_2' [SA]$	$R_4' [SA]$
0.00	15.919	31.834	63.618	1.999	3.996
0.05	106.026	268.725	821.699	2.534	7.749
0.10	177.057	449.157	1379.499	2.536	7.791
0.15	240.257	608.508	1865.659	2.532	7.765
0.20	298.365	751.019	2306.191	2.517	7.729
0.25	352.678	883.923	2712.254	2.506	7.690
0.30	403.838	1007.870	3089.788	2.495	7.651
0.35	452.293	1123.905	3442.112	2.484	7.610
0.40	498.260	1232.705	3771.264	2.474	7.568
0.45	541.921	1334.648	4078.298	2.462	7.525
0.50	583.327	1429.832	4363.552	2.451	7.480
0.55	622.521	1518.228	4626.736	2.438	7.432
0.60	659.441	1599.609	4866.914	2.425	7.380
0.65	694.008	1673.489	5082.392	2.411	7.323
0.70	726.034	1739.146	5270.459	2.395	7.259
0.75	755.258	1795.432	5426.952	2.377	7.185
0.80	781.263	1840.569	5545.208	2.355	7.097
0.85	803.390	1871.590	5614.021	2.329	6.987
0.90	820.522	1883.090	5612.071	2.294	6.839
0.95	830.494	1863.024	5488.190	2.243	6.608
1.00	827.759	1766.583	4988.888	2.134	6.026

TABLEAU E.2: Données sur l'optimisation de l'énergie statique du modèle quasi-BPS avec l'application rationnelle (approche numérique).

ν	$E_{stat}^{[AR]}(B=1)$	$E_{stat}^{[AR]}(B=2)$	$E_{stat}^{[AR]}(B=4)$	$R_2' [AR]$	$R_4' [AR]$
0.00	15.919	38.335	72.330	2.408	4.543
0.05	106.026	275.137	629.390	2.594	5.936
0.10	177.057	456.778	1044.646	2.579	5.900
0.15	240.257	615.285	1404.816	2.560	5.847
0.20	298.365	758.766	1725.994	2.543	5.784
0.25	352.678	892.818	2020.510	2.531	5.729
0.30	403.838	1015.679	2291.689	2.515	5.674
0.35	452.293	1130.135	2542.181	2.498	5.620
0.40	498.260	1233.520	2773.431	2.475	5.566
0.45	541.921	1332.371	2986.203	2.458	5.510
0.50	583.327	1423.890	3180.646	2.440	5.452
0.55	622.521	1508.004	3356.371	2.422	5.391
0.60	659.441	1584.399	3512.424	2.402	5.326
0.65	694.008	1652.518	3647.164	2.381	5.255
0.70	726.034	1711.475	3758.002	2.357	5.176
0.75	755.258	1759.899	3841.007	2.330	5.085
0.80	781.263	1795.630	3889.791	2.298	4.978
0.85	803.390	1815.049	3893.544	2.259	4.846
0.90	820.522	1811.412	3831.192	2.207	4.669
0.95	830.494	1769.057	3650.186	2.130	4.395
1.00	827.759	1621.547	3048.040	1.958	3.682

Ces résultats ont été obtenus avec un algorithme de recuit simulé sur une grille initiale de 300 points. Les expressions (3.14) à (3.17) pour la solution axiale et (3.53) à (3.56) pour l'application rationnelle ont été minimisées en ayant préalablement effectué le changement de variable $x = ar$ (ou $x = a_1 r$ pour l'application rationnelle) pour les termes $E_0^{[h]}$ et $E_6^{[h]}$, ainsi que $x = \Lambda r$ pour les termes $E_2^{[h]}$ et $E_4^{[h]}$. Cela permet de factoriser la dépendance en paramètres à l'extérieur des intégrales. Le produit $\mu\lambda$, qui détermine l'échelle d'énergie du modèle BPS, a ensuite été factorisé de $E_0^{[h]}$ et $E_6^{[h]}$ et posé égal à 1 pour simplifier le traitement des données. De façon similaire, le paramètre d'échelle Λ du modèle de Skyrme a également été posé égal à 1. En principe, les intégrales doivent être évaluées entre $0 \leq x \leq \infty$. Cependant cet intervalle n'est pas réaliste dans un algorithme d'optimisation numérique. Des estimations ont en effet montré que l'intervalle $0 \leq x \leq 20$ est amplement suffisant dans ce contexte pour obtenir un portrait complet de la densité d'énergie pour tout ν . Cet intervalle a donc été utilisé et deux itérations adaptatives ont été nécessaires pour obtenir la précision voulue. Les résultats de la transition $0 \leq \nu \leq 0.05$ ne seront pas détaillés ici puisque la représentation graphique de la figure 3.6 est suffisante pour le type d'analyse que l'on effectue dans ce travail.

Bibliographie

- [1] A.H. Abdalla. *Stabilization of the Skyrmion by the Quantisation of Collective Vibrations and Rotations*. PhD thesis, McMaster University, Hamilton, Ontario, 1994.
- [2] C. Adam, C.D. Fosco, J.M. Queiruga, J. Sánchez-Guillén, and A. Wereszczyński. Symmetries and exact solutions of the BPS Skyrme model. *J.Phys.*, A46 :135401, 2013.
- [3] C. Adam, C. Naya, J. Sánchez-Guillén, and A. Wereszczyński. Nuclear binding energies from a BPS Skyrme model. *Phys.Rev.*, C88(5) :054313, 2013.
- [4] C. Adam, J. Sánchez-Guillén, and A. Wereszczyński. BPS Skyrme model and baryons at large Nc. *Phys.Rev.D*, 82, 2010.
- [5] C. Adam, J. Sánchez-Guillén, and A. Wereszczyński. A Skyrme-type proposal for baryonic matter. *Phys.Let.B*, 691 :105–110, 2010.
- [6] C. Adam and A. Wereszczyński. Topological energy bounds in generalized Skyrme models. *Phys.Rev.*, D89 :065010, 2014.
- [7] G.S. Adkins, C.R. Nappi, and E. Witten. Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model. *Nuc.Phys.B*, 228, 1983.
- [8] G. Altarelli. The Standard model of particle physics. *arXiv hep-ph*, (2005-206), 2005.
- [9] M.O. Beaudoin. Skyrmions q-BPS : Facteur de forme électromagnétiques. Master's thesis, Université Laval, 2013.
- [10] M.O. Beaudoin and L. Marleau. Near-BPS Skyrmions : Constant baryon density. *Nuclear Physics B*, 883(0) :328 – 349, 2014.
- [11] E. Bonenfant, L. Harbour, and L. Marleau. Near-BPS Skyrmions : Non-shell configurations and coulomb effects. *Phys.Rev.D*, 85, 2012.
- [12] E. Bonenfant and L. Marleau. Nuclei as near BPS Skyrmions. *Phys.Rev.D*, 82, 2010.
- [13] E. Braaten and L. Carson. Deuteron as a toroidal Skyrmion. *Phys.Rev.D*, 38(11) :3525–3539, 1988.
- [14] E. Braaten and J.P. Ralston. Limitations of a semiclassical treatment of the Skyrme soliton. *Phys.Rev.D*, 31 :598–602, 1985.
- [15] G. E. Brown. *Selected Papers, With Commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme*. World Scientific Publishing, 1994.
- [16] G. E. Brown and M. Rho. *The Multifaceted Skyrmion*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009.
- [17] B.C. Carlson and G.L. Morley. Multipole Expansion of Coulomb Energy. *Ame.Jour.Phys.*, 31(3) :209, 1963.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique I*. Hermann, éditeurs des sciences et des arts., 1998.

- [19] M. Davies. Modes de vibration dans le modèle de skyrme avec un terme de masse modifié. Master's thesis, Université Laval, 2008.
- [20] G.H. Derrick. Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. *J.Math.Phys.*5, pages 1252–1254, 1964.
- [21] B. Dion. Génération de champs de Skyrme à partir des instantons. Master's thesis, Université Laval, 1995.
- [22] D.T.J. Feist, P.H.C. Lau, and N.S. Manton. Skyrmions up to Baryon Number 108. *Phys.Rev.*, D87(DAMTP-2012-62) :085034, 2013.
- [23] D. Finkelstein and J. Rubinstein. Connection between Spin, Statistics and Kinks. *J.Math.Phys.*, 9(11) :1762–1779, 1968.
- [24] I. Floratos and B. Piette. Multiskyrmion solutions for the sixth order Skyrme model. *Phys.Rev.*, D64(DCPT-01-25) :045009, 2001.
- [25] A. Fortin. *Analyse numérique pour ingénieurs*, 3^{ième} Éd. Presses internationales Polytechnique, 2008.
- [26] T. Gisiger and Manu B. Paranjape. Recent mathematical developments in the Skyrme model. *Phys.Rept.*, 306(UDEM-GPP-TH-98-57) :109–211, 1998.
- [27] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko. *Classical mechanics*, 3rd Ed. Addison Wesley, 2002.
- [28] M. D. Greenberg. *Advanced engineering mathematics*, 2nd Ed. Prentice-Hall Inc, 1998.
- [29] L. Harbour. Multi-skyrmions quasi-BPS et noyaux atomiques : Énergie de Coulomb et configurations pleines. Master's thesis, Université Laval, 2012.
- [30] J. C. Hart, G. K. Francis, and L. H. Kauffman. Visualizing quaternion rotation. *ACM Trans. Graph.*, 13(3) :256–276, 1994.
- [31] R.H. Hobart. On the instability of a class of unitary field models. *Proc. Phys. Soc. London*, (82), 1963.
- [32] G. Holzwarth and B. Schwesinger. Baryons in the skyrme model. *Reports on Progress in Physics*, 49(8) :825, 1986.
- [33] C. Houghton and S. Magee. A zero-mode quantization of the Skyrmion. *Phys.Let.B*, 632(4) :593–596, 2006.
- [34] C.J. Houghton, N.S. Manton, and P.M. Sutcliffe. Rational Maps, Monopoles and Skyrmions. *Nucl.Phys.B*, 510 :507–537, 1998.
- [35] P. Irwin. Zero mode quantization of multi-Skyrmions. *Phys.Rev.*, D61 :114024, 2000.
- [36] A. Jackson, A.D. Jackson, A.S. Goldhaber, G.E. Brown, and L.C. Castillejo. A modified skyrmion. *Phys.Let.B*, 154(2,3), 1985.
- [37] A. E. Kudryavtsev, B. Piette, and W.J. Zakrzewski. Mesons, baryons and waves in the baby Skyrmion model. *Eur.Phys.J.*, C1(DTP-96-17) :333–341, 1998.
- [38] T. Kurihara, H. Kanada, T. Otofujii, and S. Saito. Baryon Number Two Skyrmion With Axially Symmetric Configuration. *Prog.Theor.Phys.*, 81 :858–865, 1989.
- [39] T.D Lee and Y. Pang. Nontopological solitons. *Physics Reports*, 221(5-6) :251–350, 1992.
- [40] O. V. Manko, N. S. Manton, and S. W. Wood. Light nuclei as quantized skyrmions. *Phys.Rev.*, C76(DAMTP-2007-61) :055203, 2007.
- [41] N. S. Manton and P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.

- [42] N. S. Manton and S. W. Wood. Light Nuclei as Quantized Skyrmions : Energy Spectra and Form Factors. *ARXIV :0809.3501*, 2008.
- [43] L. Marleau. *Introduction à la physique des particules (notes de cours)*. 2013.
- [44] S.G. Nemes. *Skyrmion Stars*. PhD thesis, Durham University, England, 2012.
- [45] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [46] R. Rajaraman. *Solitons and Instantons : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland Publishing Company, 1982.
- [47] N. Romming, C. Hanneken, M. Menzel, J. E. Bickel, B. Wolter, K. von Bergmann, A. Kubetzka, and R. Wiesendanger. Writing and deleting single magnetic skyrmions. *Science*, 341(6146) :636–639, 2013.
- [48] V.I. Sanyuk. Genesis and evolution of skyrme model from 1954 to the present. *Int.J.Mod.Phys.A*, 07, 1992.
- [49] T.H.R. Skyrme. A non-linear theory of strong interactions. *Proc. R. Phys. Soc. London. A*, 247(1249) :260–278, 1958.
- [50] T.H.R. Skyrme. A Nonlinear field theory. *Proc.Roy.Soc.London*, A260 :127–138, 1961.
- [51] T.H.R. Skyrme. A unified field theory of mesons and baryons. *Nuc.Phys.*, 31 :556–569, 1961.
- [52] J.M. Speight. Near BPS Skyrmions and Restricted Harmonic Maps. *arXiv*, 2014.
- [53] P.M. Sutcliffe. Skyrmions, instantons and holography. *JHEP*, 1008(019), 2010.
- [54] G. 't Hooft. A two-dimensional model for mesons. *Nuc.Phys.B*, 72 :461–473, 1974.
- [55] H. Weigel, B. Schwesinger, and G. Holzwarth. Exotic Baryon Number $B = 2$ States in the SU(2) Skyrme Model. *Phys.Lett.*, B168 :321–325, 1986.
- [56] W.S.C. Williams. *Nuclear and Particle Physics*. Oxford University Press, NY, 1991.
- [57] E. Witten. Baryons in the $1/N$ expansion. *Nuc.Phys.B*, 160 :57–115, 1979.
- [58] I. Zahed and G.E. Brown. The Skyrme Model. *Physics Reports*, 142(1-2) :1–102, 1986.
- [59] A. Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell, 2nd Ed*. Princeton University Press, 2010.