LUCIE DEBLOIS

LE DÉVELOPPEMENT DE L'ABSTRACTION EN REGARD DU CONCEPT DE NUMÉRATION POSITIONNELLE CHEZ LES ENFANTS EN DIFFICULTÉ D'APPRENTISSAGE

Thèse
présentée
à l'École des Gradués
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC
SEPTEMBRE 1993

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur Jean J. Dionne, professeur au département de didactique. Comme directeur de recherche, son intérêt, ses remarques et ses questions ont contribué à l'approfondissement des observations et des interprétations de cette recherche. Des remerciements sont aussi adressés à Madame Andrée Boisclair, professeure au département de psychopédagogie. À titre de conseillère, elle a su distinguer les éléments les plus pertinents afin que je puisse les approfondir. Merci aussi à Monsieur Gérald Noelting et Madame Nicole Nantais pour leur précieuse contribution à l'évaluation de cette thèse.

Un merci sincère aux enfants, aux orthopédagogues, aux directrices, aux enseignants et aux enseignantes qui m'ont accueillie si chaleureusement. Sans eux, les observations réalisées n'auraient pu contribuer à aider d'autres enfants.

Un merci particulier aux membres de ma famille Thérèse, Ernest, Murielle, Marie-France, Marc, Vincent, Jacques, Samuël, Maxime, Gaston, Lucie, Julie qui ont toujours conservé une foi inébranlable dans mon cheminement. Merci à mes amis Monique, François, Guy, Chantal, Louise, Michel, Dominique pour leurs judicieux conseils, leurs rires, leur affection. Merci aussi aux employés du Café Kriegoff, François, Marie, Andrée, Mathieu, Éric, Rémi, Michel qui sont restés discrets et disponibles durant mes longs après-midis de correction sur une table devant une tisane.

Enfin, si une thèse comme celle-ci se réalise grâce à l'énergie de tous les gens qui nous entourent, elle se concrétise aussi avec l'aide de la contribution financière de différents organismes. Je tiens donc à remercier l'université du Québec à Rimouski, le Fonds pour la Formation de Chercheurs et l'Aide à la Recherche ainsi que le Fonds de soutien de l'Université Laval pour le soutien financier qu'ils ont su m'apporter.

RÉSUMÉ

Le but de cette recherche est d'observer le développement de la compréhension du concept de numération positionnelle, chez six enfants en difficulté d'apprentissage âgés entre 8 et 11 ans. Des évaluations cliniques et des expérimentations didactiques ont permis d'apprécier la compréhension initiale et finale des enfants et de mettre en place des interventions adaptées à leurs besoins. Nos analyses présentent les critères de la compréhension au début et à la fin des expérimentations, d'après le modèle de Bergeron et Herscovics, ainsi que les coordinations entre les régulations et les transferts qui permettent la construction de réflexions, d'après le modèle de Piaget. Ces analyses ont permis d'identifier que pour ces enfants, les grands nombres sont d'abord conçus comme la juxtaposition des chiffres correspondant aux groupes et aux éléments, ensuite comme le résultat du comptage des éléments et des groupements, puis comme le résultat d'une opération entre les différentes unités de mesure de quantité.

RÉSUMÉ

Le but de cette recherche est d'observer le développement de la compréhension du concept de numération positionnelle, chez six enfants âgés entre 8 et 11 ans. Nous nous sommes arrêtée d'abord sur des questions comme : «Qui est l'enfant en difficulté d'apprentissage? Qu'est-ce que la compréhension»? Ces questions ont favorisé le choix d'une perspective constructiviste. Par la suite, la question de recherche suivante a été retenue : dans une situation de dialogue entre une orthopédagogue et un enfant en difficulté d'apprentissage, en regard du concept de numération positionnelle, comment s'effectue le passage de structurations partielles vers des structurations généralisables et durables?

Les expérimentations ont pris la forme d'études de cas. L'élaboration d'évaluations cliniques et d'expérimentations didactiques, s'appuyant sur le modèle de la compréhension de Bergeron et Herscovics, ont permis d'apprécier la compréhension initiale et finale des enfants et de mettre en place des interventions adaptées à leurs besoins. Ces expérimentations ont été vidéo-filmées et retranscrites, en prenant soin d'inclure aux explications verbales données par les enfants, les explications gestuelles qui les accompagnaient ainsi que les blocages constatés.

Nos analyses présentent les critères de la compréhension de ce modèle au début et à la fin des expérimentations. Elles décrivent aussi les coordinations réalisées entre les transferts et les régulations qui permettent la construction de réflexions, d'après le modèle de l'équilibration cognitive de Piaget. Nos interprétations mettent en lumière les trois systèmes que ces enfants coordonnent durant l'évolution de la compréhension des grands nombres : les quantités, les conventions et les opérations. Selon le type coordination privilégié par l'enfant, la construction favorise une évolution ou un recul de sa compréhension. Ainsi, il est possible d'observer trois étapes dans l'évolution de la

compréhension du concept de numération positionnelle chez ces enfants. Le nombre est d'abord conçu comme la juxtaposition des chiffres qui correspondent aux groupes et aux éléments, ensuite comme le résultat du comptage des éléments et des groupements, puis comme le résultat d'une opération entre les différentes unités de mesure de quantité.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I
LA PROBLÉMATIQUE 4

1.1 Les difficultés d'apprentissage comme cadre contextuel 5
1.1.1 Position du problème 5
1.1.2 Qu'est-ce que l'apprentissage 6
1.1.3 Qui sont les enfants en difficulté d'apprentissage 8
1.1.3.1 En regard de la perspective neuro-psychologique 8
1.1.3.2 En regard de la perspective béha-vioriste 10
1.1.3.3 En regard de la perspective cogni-tive 12
1.1.3.4 En regard des tendances actuelles 13
1.1.3.5 En regard de notre recherche . . . 16

1.2 Le constructivisme comme cadre théorique 17
1.2.1 Le constructivisme 17
1.2.1.1 L'équilibration cognitive 18
1.2.1.2 L'assimilation et l'accommodation 20
1.2.1.3 Qu'est-ce que la compréhension selon Piaget 22
1.2.1.5 L'abstraction réfléchissante . . . 24
1.2.1.6 La représentation 27
1.1.2.7 Les implications de ce choix . . . 29
1.2.2 Le modèle de Bergeron et Herscovics . . 31
1.2.2.1 Définitions propres au modèle de la compréhension élargi de Berge-ron et Herscovics 31
1.2.2.2 Les raisons de ce choix 33
1.2.2.3 Distinctions entre le modèle de Piaget et le modèle de Bergeron et Herscovics 34

1.3 La numération positionnelle décimale comme cadre d'investigation 38
1.3.1 Les raisons de ce choix 38
1.3.2 Analyse conceptuelle de la numéra-tion positionnelle 38
1.3.2.1 Palier logico-physique 42
1.3.2.2 La composante intuitive logico-physique 43
1.3.2.3 La composante procédurale logico-physique 45

1.3.2.4 La composante abstraite logico-physique 47
1.3.2.5 Palier logico-mathématique 50
1.3.2.6 La composante procédurale logico-mathématique 50
1.3.2.7 La composante abstraite logico-mathématique 53
1.3.2.8 La composante formelle logico-mathématique 55

1.4 Question de recherche 56

CHAPITRE 11
LA MÉTHODE 59

2.1 Justification du choix de la méthode par étude de cas 60

2.2 L'évaluation par la méthode clinique 64
2.2.1 Questions de l'entrevue clinique . . . 67
2.2.1.1 Habiletés de comptage 68
2.2.1.2 Composante formelle 69
2.2.1.3 Composante abstraite logico-mathématique 71
2.2.1.4 Composante procédurale logico-mathématique 72
2.2.1.5 Composante abstraite logico-physique 74
2.2.1.6 Composante procédurale logico-physique 75
2.2.1.7 Composante intuitive logico-physique 76

2.3 L'intervention par l'expérimentation didactique . 77
2.3.1 Recherche exploratoire 80
2.3.3 Préparation des expérimentations didactiques 82
2.3.3.1 Compare et ordonne des nombres . . 83
2.3.3.2 Décompose un nombre 86
2.3.3.3 Attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre 88
2.3.3.4 Construis des unités de mesure de quantité 90
2.3.3.5 Arrondis un nombre 92
2.3.3.6 Opère sur les nombres 94
2.3.3.7 Lis et écris des nombres 96
2.3.3.8 Réseau sémantique 102

2.4 Le contexte de l'expérimentation 103
2.4.1 Sélection des sujets 103
2.4.2 Milieux scolaires sélectionnés 104

2.4.3 Rencontre avec les enseignants 105
2.4.4 Contact auprès des parents 106
2.4.5 Présentation aux enfants 106
2.4.6 Le double statut d'orthopédagogue-intervenante et de 107

2.5 Plan d'analyse 109
2.5.1 Analyse des évaluations initiales et finales 112
2.5.2 Analyse des expérimentations didactiques 113
2.5.3 Les résultats des études de cas 115

CHAPITRE III
ANALYSE DES DONNÉES 118

3.1 Étude de cas de Cl. 119
3.1.1 La valeur positionnelle 120
3.1.1.1 Compréhension initiale et finale . 120
3.1.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 122
3.1.1.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes? 124
3.1.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 127
3.1.2 La construction des unités de mesure de quantité 129
3.1.2.1 Compréhension initiale et finale . 129
3.1.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 131
3.1.2.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes? 133
3.1.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 135
3.1.3 La décomposition et la recomposition de nombres 137
3.1.3.1 Compréhension initiale et finale . 137
3.1.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 138
3.1.3.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes? 139
3.1.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 142
3.1.4 Suite de la recomposition et de la décomposition de nombres 143
3.1.4.1 Compréhension initiale et finale . 144
3.1.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 144
3.1.4.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes 146

3.1.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 149
3.1.5 L'approximation des nombres 151
3.1.5.1 Compréhension initiale et finale . 151
3.1.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 153
3.1.5.3 Comment Cl. évolue à travers les différentes composantes 154
3.1.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 156
3.1.6 Les opérations sur les nombres 158
3.1.6.1 Compréhension initiale et finale . 158
3.1.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 159
3.1.6.3 Comment Cl. évolue à travers les différentes composantes 161
3.1.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 164
3.1.7 Entrevue avec l'enseignante 167

3.2 Étude de cas de E. 168
3.2.1 Valeur positionnelle 168
3.2.1.1 Compréhension initiale et finale . 168
3.2.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 170
3.2.1.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes? 172
3.2.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 174
3.2.2 La construction des unités de mesure . 176
3.2.2.1 Compréhension initiale et finale . 176
3.2.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 179
3.2.2.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes? 180
3.2.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 183
3.2.3 Décomposition et recomposition 185
3.2.3.1 Compréhension initiale et finale . 185
3.2.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 186
3.2.3.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes 187
3.2.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 189
3.2.4 L'approximation des nombres 191
3.2.4.1 Compréhension initiale et finale . 191
3.2.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 192
3.2.4.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes 193

3.2.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 195
3.2.5 Opérations sur les nombres 197
3.2.5.1 Compréhension initiale et finale . 197
3.2.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 198
3.2.5.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes 199
3.2.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 202
3.2.6 Réseau sémantique sur les nombres . . . 204
3.2.6.1 Compréhension initiale et finale . 204
3.2.6.2 Cheminement de l'expérimentation . 205
3.2.6.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes 206
3.2.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 207
3.2.7 Entrevue avec l'enseignante 208

3.3 Étude de cas de I. 209
3.3.1 Valeur positionnelle 210
3.3.1.1 Compréhension initiale et finale . 210
3.3.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 214
3.3.1.3 Comment a évolué I. à travers les différentes composantes? 216
3.3.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 221
3.3.2 Décomposition et recomposition de nombres 222
3.3.2.1 Compréhension initiale et finale . 222
3.3.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 223
3.3.2.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes 225
3.3.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 229
3.3.3 La comparaison et l'ordre des nombres . 230
3.3.3.1 Compréhension initiale et finale . 230
3.3.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 231
3.3.3.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes 233
3.3.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 235
3.3.4 Les opérations sur les nombres 237
3.3.4.1 Compréhension initiale et finale . 237
3.3.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 239
3.3.4.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes 240

3.3.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 243
3.3.5 L'arrondissement des nombres 245
3.3.5.1 Compréhension initiale et finale . 245
3.3.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 246
3.3.5.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes 247
3.3.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 250
3.3.6 Le réseau sémantique 251
3.2.6.1 Compréhension initiale et finale . 252
3.3.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 252
3.3.6.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes 253
3.3.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 256
3.3.7 Entrevue avec l'enseignante 257

3.4 Étude de cas de Ch. 258
3.4.1 La lecture de nombres 259
3.4.1.1 Compréhension initiale et finale . 259
3.4.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 260
3.4.1.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes 262
3.4.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 265
3.4.2 Valeur positionnelle 266
3.4.2.1 Compréhension initiale et finale . 266
3.4.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 269
3.4.2.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes 271
3.4.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 273
3.4.3 La décomposition et la recomposition de nombres 275
3.4.3.1 Compréhension initiale et finale . 275
3.4.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 277
3.4.3.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes 279
3.4.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 281
3.4.4 Comparaison et ordre des nombres . . . 282
3.4.4.1 Compréhension initiale et finale . 282
3.4.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 284
3.4.4.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes 285

3.4.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 287
3.4.5 Approximation de nombres 288
3.4.5.1 Compréhension initiale et finale . 288
3.4.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 289
3.4.5.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes 291
3.4.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 293
3.4.6 Réseau sémantique 294
3.4.6.1 Compréhension initiale et finale . 294
3.4.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 294
3.4.6.3 Comment Ch. évolue à travers les différentes composantes 295
3.4.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 297
3.4.7 Entrevue avec l'enseignant 297

3.5 Étude de cas de V. 298
3.5.1 Lecture des nombres 299
3.5.1.1 Compréhension initiale et finale . 299
3.5.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 300
3.5.1.3 Comment évolue V. à travers ces différentes composantes? 302
3.5.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 304
3.5.2 La valeur positionnelle 305
3.5.2.1 Compréhension initiale et finale . 305
3.5.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 307
3.5.2.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes 310
3.5.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 313
3.5.3 L'arrondissement des nombres 315
3.5.3.1 Compréhension initiale et finale . 315
3.5.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 316
3.5.3.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes 317
3.5.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 319
3.5.4 L'écriture de nombres et la comparaison de quantités 321
3.5.4.1 Compréhension initiale et finale . 321
3.5.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 322
3.5.4.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes 324

3.5.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 326
3.5.5 La décomposition et recomposition de nombres 326
3.5.5.1 Compréhension initiale et finale . 326
3.5.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 329
3.5.5.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes 331
3.5.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 334
3.5.6 Réseau sémantique 335
3.5.6.1 Compréhension initiale et finale . 336
3.5.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 336
3.5.6.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes 338
3.5.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 340
3.5.7 Entrevue avec les enseignants 341

3.6 Étude de cas de S. 343
3.6.1 La valeur positionnelle et les opérations 343
3.6.1.1 Compréhension initiale et finale . 343
3.6.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 346
3.6.1.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes 348
3.6.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 351
3.6.2. La décomposition et la recomposition de nombres 352
3.6.2.1 Compréhension initiale et finale . 352
3.6.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 353
3.6.2.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes 355
3.6.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 356
3.6.3 La comparaison et les opérations entre les nombres 357
3.6.3.1 Compréhension initiale et finale . 357
3.6.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 359
3.6.3.3 Comment a évolué S. à travers les différentes composantes 360
3.6.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 362
3.6.4 L'arrondissement des nombres 364
3.6.4.1 Compréhension initiale et finale . 364

3.6.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 365
3.6.4.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes 366
3.6.4.4 Conclusion de l'expérimentation . 369
3.6.5 Construction des unités de mesure de quantité 370
3.6.5.1 Compréhension initiale et finale . 370
3.6.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 372
3.6.5.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes 373
3.6.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique 376
3.6.6 Le réseau sémantique 377
3.6.6.1 Compréhension initiale et finale . 377
3.6.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique 378
3.6.6.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes 379
3.6.6.4 Conclusion de l'expérimentation . 381
3.6.3 Entrevue avec l'enseignante 382

CHAPITRE IV
LES RÉSULTATS 383

4.1 Résultats en regard de l'évolution des enfants . 385
4.1.1 Étude de cas de Cl. 385
4.1.1.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 385
4.1.1.2 Comment évolue la compréhension de Cl. à travers les différentes expérimentations didactiques . . . 389
4.1.2 Résultats de l'étude de cas de E. . . . 393
4.1.2.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 393
4.1.2.2 Comment évolue la compréhension de E. à travers les différentes expérimentations didactiques . . . 397
4.1.3 Résultats de l'étude de cas de I. . . . 400
4.1.3.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 400
4.1.3.2 Comment évolue la compréhension de I. à travers les six expérimentations didactiques 405
4.1.4 Résultats de l'étude de cas de Ch. . . 409
4.1.4.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 409
4.1.4.2 Comment évolue la compréhension de Ch. à travers les différentes expérimentations didactiques . . . 413

4.1.5 Résultats de l'étude de cas de V. 417
4.1.5.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 417
4.1.5.2 Comment évolue la compréhension de V. à travers les différentes expérimentations didactiques . . . 421
4.1.6 Résultat de l'étude de cas de S. . . . 425
4.1.6.1 Structurations partielles, structurations généralisables . . 425
4.1.6.2 Comment évolue la compréhension de S. à travers les différentes expérimentations didactiques . . . 429

4.2 Résultats en regard de l'analyse conceptuelle du concept de numération positionnelle 432
4.2.1 Palier logico-physique 433
4.2.1.1 Juxtaposition des éléments 433
4.2.1.2 Compare des chiffres et des quantités 434
4.2.1.3 Principe de cardinal 435
4.2.1.4 Relations d'équivalence 436
4.2.1.5 Généralisation des relations d'équivalence 437
4.2.1.6 La régularité de la base 10 . . . 438
4.2.2 Palier logico-mathématique 439
4.2.2.1 Approximation de nombres et comparaison de nombres 439
4.2.2.2 Les opérations et le comptage . . 439
4.2.2.3 Le nombre à lire reste inchangé . 441
4.2.2.4 Conservation des unités de mesure de quantité 441
4.2.2.5 Relations d'inclusions 445
4.2.2.6 La lecture de nombres 446

4.3 Résultats en regard de l'hypothèse posée 446

CONCLUSIONS GÉNÉRALES 451

C.1 Rappel de la problématique 452
C.2 Rappel de la méthode 455
C.3 Réponses à la question de recherche 458
C.3.1 Comment évolue la compréhension des enfants 458
C.3.2 Comment se coordonnent et s'intègrent les différentes composantes 467
C.4 Autres conclusions 468
C.4.1 Une forme de validation des critères du tableau de numération 468
C.4.2 L'apport du matériel 471
C.4.3 L'apport du dialogue sur les représentations mentales 472
C.5 Retour critique 473

C.6 Implications pédagogiques et orthopédagogiques . 475
C.7 Vers de nouvelles questions de recherche 477

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES 479

APPENDICE 1 . . . . Cl-1

APPENDICE 2 . . . . E.-1

APPENDICE 3 . . . . I.-1

APPENDICE 4 . . . . Ch.-1

APPENDICE 5 . . . . V.-1

APPENDICE 6 . . . . S.-1

INTRODUCTION

Dans nos écoles, les enseignants sont confrontés régulièrement aux problèmes qui surgissent au cours de l'apprentissage de certains concepts ou certains savoir-faire. Les orthopédagogues deviennent alors les agents vers lesquels se tournent les enseignants pour intervenir auprès des enfants qui éprouvent des difficultés. L'orthopédagogue pose ainsi un geste de rééducation puisqu'un retour sur des concepts et savoir-faire est souvent nécessaire à la construction de nouveaux concepts ou savoir-faire. Le travail de l'orthopédagogue se situe ainsi au coeur d'une expérience où la relation d'aide et la recherche d'interventions adaptées tiennent la première place. Ainsi, forte de cette expérience de travail, nous nous sommes intéressée à l'évaluation des composantes de la compréhension et à l'intervention auprès d'une clientèle d'enfants en difficulté d'apprentissage en mathématique. Nous avons voulu comprendre comment évolue la pensée de l'enfant identifié en difficulté d'apprentissage dans nos écoles primaires. Nous avons cherché à identifier ce qui facilite et ce qui entrave leur apprentissage.

Trois postulats ont servi d'appui à cette recherche.
1- L'enfant en difficulté d'apprentissage est capable d'apprentissage.
2- L'apprentissage n'est pas le fruit d'une accumulation de connaissances ou de savoir-faire mais celui d'un processus de compréhension.
3- les erreurs, sans être nécessaires, sont considérées comme des étapes et non comme des échecs. Revoyons rapidement ce qui nous permet de retenir ces postulats.

En arrivant à l'école, plusieurs apprentissages ont déjà été réalisés. La marche et le développement du langage en sont des exemples. Les apprentissages réalisés à l'école contribuent au développement de la pensée; en ce sens, on parle de développement cognitif. À ce sujet, Piaget a posé les assises d'une théorie, où l'enfant est le constructeur de ses connaissances. Étant le constructeur de ses connaissances, le développement de ces dernières s'effectue par «petits pas» et par des retours en arrière. Le rythme individuel d'apprentissage et la nature de la pensée de l'enfant pourraient expliquer l'apparition de ce que nous appelons difficulté d'apprentissage.

Piaget a aussi exploré les conditions qui facilitent le développement de la pensée. Pour lui, la recherche d'équilibration cognitive occupe une place centrale dans la formation de la pensée. Par cette recherche, l'enfant construit de nouveaux schèmes et de nouvelles structures. Le développement de la compréhension favorise l'assimilation de nouveaux schèmes et leur réorganisation en structure facilitant ainsi l'adaptation de l'enfant au milieu. L'abstraction réfléchissante, où intervient un jeu de transfert et de réflexion, facilite la formation de schèmes et de structures. Dans le cas des enfants du primaire, des tâtonnements ou des actions de toutes sortes interviennent entre les deux aspects de l'abstraction réfléchissante, on les appelle les régulations. Nous avons choisi d'explorer le développement de la pensée de l'enfant en posant l'hypothèse selon laquelle l'abstraction réfléchissante, telle que définie par Piaget (1977a), est le levier qui permet la coordination et l'intégration des différentes composantes de la compréhension en structurations de mieux en mieux adaptées. Cette conception théorique ayant besoin d'un contexte pratique pour s'actualiser, c'est en observant le développement du concept de numération positionnelle, où interviennent les aspects de la notation et de la valeur positionnelle, que nous avons choisi de réaliser cette investigation.

Le but de cette recherche est d'observer le développement de la pensée de l'enfant en difficulté d'apprentissage et de voir à quel point on peut conférer à l'abstraction réfléchissante ce rôle de levier. La présente recherche répond ainsi à la question suivante: dans une situation de dialogue entre l'orthopédagogue et l'enfant en difficulté d'apprentissage en regard du concept de numération positionnelle, comment s'effectue, le passage de structurations partielles vers des structurations généralisables et durables?

Dans un premier chapitre, la problématique est développée. Nous élaborons alors la position du problème, le cadre théorique et le cadre d'investigation. Le deuxième chapitre décrit la méthode utilisée pour réaliser cette recherche. Il expose comment nous avons pu réaliser des études de cas, par des évaluations cliniques et des expérimentations didactiques. Le chapitre trois montre l'analyse des données recueillies. Il est alors possible de faire ressortir les tâches proposées, les explications verbales et gestuelles des enfants ainsi que les blocages observés en cours d'expérimentation. Cette étape favorise l'apparition des critères des différentes composantes de la compréhension ainsi que les transferts et les régulations qui ont facilité l'apparition de ces critères. Le quatrième chapitre regroupe les résultats obtenus. Ces résultats permettent de brosser l'histoire de chacune des études de cas. Enfin la conclusion permet de revoir les différentes composantes de cette recherche, de répondre à la question posée, d'identifier les implications pédagogiques et orthopédagogiques et d'ouvrir sur de nouvelles pistes de recherche.

CHAPITRE I

LA PROBLÉMATIQUE

> ...plus les élèves sont jeunes, plus l'enseignement implique de difficultés si on le prend au sérieux (Jean Piaget, p. 39, 1972).

1.1 <u>Les difficultés d'apprentissage comme cadre contextuel</u>

1.1.1 <u>Position du problème</u>

Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons plus particulièrement aux difficultés d'apprentissage en mathématique. Confrontée à l'intervention rééducative auprès d'enfants chez qui l'apprentissage semble être difficile, nous devons nous rendre à l'évidence, les erreurs qu'ils font ne proviennent pas du hasard.

Un enfant de quatrième année explique comment il est arrivé à écrire l'équation 2x5=50. Pour lui, 2x5=2+5, puis 2+5=5+5 et enfin 5+5=25. Toutefois, étant donné qu'une multiplication est «plus grande» qu'une addition, alors 5x5=50 et 2x5=50. Une autre enfant, en troisième année, doit dénombrer systématiquement les dizaines pour retrouver le nombre correspondant. Par exemple, l'expression «7 dizaines» ne sera associée au nom «soixante-dix» que si les 7 paquets de 10 éléments sont dénombrés. Une troisième, toujours en troisième année, ne reconnaît pas l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation lorsque 126 jetons, placés en vrac sur la table, sont organisés dans 2 enveloppes de 10 et 1 paquet de 100 près desquels sont placés 6 jetons. Elle a pourtant elle-même réorganisé le matériel. Elle explique : «Je regarde l'enveloppe mais pas ce qu'il y a dedans». Elle n'a donc pas oublié, mais rejeté cette information.

Des chercheurs comme Engelmann <u>et al.</u> (1991), Eiserman (1988), Lloyd <u>et al.</u> (1988) se sont questionnés sur les types d'intervention et sur les facteurs qui contribuent à maintenir de faibles performances en mathématique. Ils ont pu démontrer les effets bénéfiques d'un enseignement adapté. Les concepts à l'étude sont alors appris de façon plus cohérente. Toutefois, Jenkins <u>et al.</u> (1991) observent, au cours d'une recherche sur trois modes d'intervention expérimentés en classe (l'apprentissage coopératif, le tutorat et le team-teaching), que ces cadres d'intervention ne permettent pas automatiquement d'améliorer les performances de ce même type d'élèves. Ainsi, un enseignement adapté ne peut se suffire de divers modes d'interventions. Les travaux de Ginsburg et Asmussen (1988), de Kauffman et al. (1988) précisent que la prise en compte de l'enseignement donné ou des carences des enseignants n'est pas suffisante pour expliquer les difficultés des enfants. Nous devons donc aborder la question sous un angle qui tienne compte de l'enfant et de sa façon d'apprendre dans la classe.

Un des buts de l'intervention orthopédagogique au primaire est d'améliorer les capacités d'apprentissage et d'adaptation des enfants dits en difficulté d'apprentissage (Association des Orthopédagogues du Québec, 1990). L'intervention orthopédagogique apparaît alors, au moment où l'enseignant observe que les stratégies utilisées sont inefficaces, que la réutilisation ou la généralisation des apprentissages est difficile pour les élèves. Qui sont les enfants référés en orthopédagogie? Comment sont-ils identifiés? Avant de s'attarder aux différentes définitions véhiculées dans les recherches et dans nos milieux scolaires, il nous faut définir ce que nous entendons par apprentissage. En effet, la notion de difficulté d'apprentissage dépend de ce que nous entendons et de ce que nous attendons de l'apprentissage.

1.1.2 Qu'est-ce que l'apprentissage

La conception de l'apprentissage se colore différemment selon qu'on adhère à des théories cognitivistes, béhavioristes, constructivistes ou à une «mixité» de ces théories.

Pour Bruner (1987, 1960), un des auteurs des théories cognitivistes, l'apprentissage est relié à trois aspects. Le premier, les modes de représentation des individus (sensori-moteur, iconique, symbolique), favorise le conflit entre deux modes de représentations. Les stratégies utilisées pour résoudre ce conflit stimuleraient la croissance cognitive. Le deuxième, la prise de conscience, permet de faire des relations, de tirer des conclusions et de formuler des hypothèses. Le troisième, la volonté et la motivation, suscite l'envie de se surpasser et de mesurer ses progrès. De plus, les tenants de cette théorie observent que «les stratégies sont relativement stables chez les élèves et à travers les tâches» (notre traduction, Poplin, 1988, p. 393).

Les behavioristes, quant à eux, voient l'apprentissage comme un changement de comportements à acquérir, selon des objectifs observables, définis et gradués, du plus simple au plus complexe. Ces objectifs, en se juxtaposant les uns aux autres, contribueraient à l'acquisition de connaissances.

Pour Piaget «l'apprentissage est un processus adaptatif se déroulant dans le temps, en fonction des réponses données par le sujet à un ensemble de stimuli antérieurs et actuels» (Greco et Piaget 1959, p.25). L'apprentissage est alors un processus de transformation qui permet une réorganisation des connaissances.

Avec l'avancement des recherches en épistémologie et en psychologie cognitive, on parle maintenant de l'importance de la compréhension pour être en mesure de «généraliser» des solutions à d'autres domaines et ainsi «créer» des réponses à de nouveaux problèmes. Ainsi, pour Heshusius (1989), apprendre c'est «comprendre les relations plus que les pièces d'une connaissance. C'est une construction personnelle, culturelle et sociale d'un sens réalisée par l'enfant, construction basée sur ce que l'enfant est et ce qu'il connaît» (notre traduction, p.412). À l'instar d'Heshusius, nous croyons qu'apprendre est une transformation plus qu'une addition et un accroissement de connaissances. Si l'apprentissage est une transformation, c'est alors une adaptation réalisée par l'individu, au sens de Piaget. Nous appuierons donc notre recherche sur cette définition de l'apprentissage.

Pour certains élèves, «construire» un sens, comprendre les liens qui existent entre les différentes notions, s'adapter à un nouveau problème semble difficile. Cette recherche tente d'observer le dynamisme du processus d'adaptation qu'est l'apprentissage de la numération positionnelle pour les enfants en difficulté d'apprentissage. Nous pouvons maintenant nous arrêter aux différentes définitions véhiculées dans nos milieux lorsqu'il est question de «troubles d'apprentissage» ou de «difficultés d'apprentissage». Ces définitions sont très importantes. C'est à partir d'elles que nous cernerons la clientèle à laquelle nous nous adressons au chapitre de la méthode de recherche.

1.1.3 Qui sont les enfants en difficulté d'apprentissage

Dans nos milieux scolaires, deux termes sont fréquemment utilisés : trouble d'apprentissage et difficulté d'apprentissage. Le terme «trouble d'apprentissage» est privilégié pour les cas où on postule que la cause est une dysfonction cérébrale mineure, alors que le terme «difficulté d'apprentissage», est réservé aux causes non-organiques. Il est à noter que, dans les recherches que nous avons consultées, cette distinction n'apparaît pas aussi clairement.

1.1.3.1 En regard de la perspective neuro-psychologique

Poplin (1988) rapporte que c'est au cours des années 1940-1950, que les professionnels et professionnelles de la santé auraient observé des similarités entre les adultes qui avaient un dommage cérébral et les enfants dits «retardés mentalement». L'hypothèse d'un dommage cérébral mineur, causant des retards mentaux, est posée et un modèle d'intervention médical est développé.

Kirk (1962) s'est intéressé à faire émerger le concept de trouble d'apprentissage à l'extérieur du modèle médical traditionnel. Sa définition reste toutefois très colorée par le modèle médical. En effet, pour lui:

> une difficulté d'apprentissage réfère à un retard, un désordre ou un délai de développement dans un ou plusieurs processus de communication: langage, lecture, écriture, arithmétique ou autre sujet scolaire résultant d'un handicap psychologique causé possiblement par une dysfonction cérébrale et/ou une perturbation émotive ou comportementale. Elle n'est pas le résultat d'un retard mental, d'une pauvreté sensorielle ou culturelle, ni de facteurs éducatifs (notre traduction, Kirk 1962, p.263).

Pour les tenants de la théorie neuro-psychologique, depuis Kirk en 1962, la définition d'enfants ou d'adultes en trouble d'apprentissage a évolué en conservant comme étiologie une dysfonction du système nerveux central. Cette dysfonction affecterait l'organisation, l'intégration et la synthèse de l'information. Cette position est celle défendue par l'Association des troubles d'apprentissage du Québec (AQETA, 1990). Dans cette perspective, le trouble d'apprentissage persiste avec l'âge et à travers les différentes cultures. Les électroencéphalogrammes, les tests sur les réflexes moteurs involontaires et l'échelle d'intelligence de Weschler sont des outils d'analyse, interprétés dans une perspective neurologique.

Ces diagnostics proposent des interventions très structurées sur les habiletés de base, appelées aussi préalables. On observe la latéralité, la discrimination visuelle et auditive.... En analysant les forces ou les faiblesses de ces aptitudes et de ces habiletés comme des manifestations d'une dysfonction neurologique mineure, les théories neuro-psychologiques offrent peu de modèles d'intervention autres qu'une action sur ces préalables. On parle alors de dyscalculie, de dyslexie, de dysorthographie.

Coles (1987) révèle que les relations entre les difficultés d'apprentissage et les problèmes neurologiques ne sont pas encore aujourd'hui clairement démontrées. Coplin et Morgan (1988), Bryan et al. (1988) confirment d'ailleurs qu'il existe peu de technologie pour vérifier les dysfonctions cérébrales mineures. «Les recherches sur le traitement de l'information (attention, habiletés linguistiques, mémoire de travail, métacognition) ne mesurent pas directement les fonctions du système nerveux central» (notre traduction, Bryan et al. 1988, p.24). Allardice et Ginsburg (1983) ajoutent que malgré la corrélation entre ce dysfonctionnement et les troubles d'apprentissage, une relation de causalité entre la dysfonction cérébrale mineure et ce trouble d'apprentissage n'a pas encore été mise en lumière. La dysfonction cérébrale mineure est donc encore un postulat qui tente d'expliquer la cause des difficultés que rencontrent certains enfants.

Compte tenu de notre conception de l'apprentissage, nous ne pouvons nous inscrire dans une perspective qui place l'enfant dans une position de «patient» que nous devons traiter. D'une part, les traitements proposés, en portant sur les préalables, sont trop éloignés du contexte scolaire ou trop peu signifiants pour les enfants. D'autre part, nous n'avons pas retenu le postulat sous-tendu par cette théorie pour les besoins de cette recherche.

1.1.3.2 En regard de la perspective béhavioriste

Les années 1970, avec leur mouvement d'intégration, ont introduit dans nos écoles un modèle béhavioriste. Le diagnostic permet alors de rendre visible l'écart entre les résultats aux tests d'intelligence et les rendements académiques. La cause des difficultés d'apprentissage n'est donc plus seulement le résultat d'une dysfonction cérébrale mineure, mais la présence de comportements non adaptés. Pour la première fois, on s'intéresse à «ce que l'enfant apprend». Bateman (1965) définit la difficulté d'apprentissage ainsi :

> [Les enfants] manifestent un écart signifiant entre le potentiel intellectuel estimé et le niveau de performance. Ces troubles d'apprentissage peuvent être accompagnés d'une dysfonction nerveuse centrale démontrée. Ils ne proviennent pas d'un retard mental, d'un milieu culturel défavorisé, d'une éducation déficiente, d'une perturbation émotive sévère ou d'une perte sensorielle (notre traduction, p.220).

La perspective béhavioriste, en questionnant la présence du «déficit neurologique», offre une alternative alléchante à qui recherche une intervention rapide et efficace à l'école. La définition d'un trouble d'apprentissage dans cette perspective est simple, il s'agit d'observer l'écart existant entre l'évaluation des habiletés intellectuelles (Q.I) et les performances académiques observées.

Ainsi, une évaluation du quotient intellectuel s'avère-t-elle importante. Une difficulté d'apprentissage se retrouve chez les enfants dont l'intelligence et les capacités sensorielles sont normales. Cette position est celle sur laquelle s'appuie le Ministère de l'Éducation du Québec (1991) pour identifier les enfants en difficulté d'apprentissage. C'est donc celle qui est véhiculée dans nos écoles.

L'intervention privilégie alors un traitement par l'apprentissage des tâches scolaires. Ces tâches sont analysées en terme d'habiletés et de comportements, formulées en objectifs gradués et hiérarchisés, souvent accompagnées de l'application de principes de renforcement.

Cette définition, tout en distinguant l'enfant en difficulté d'apprentissage de celui ou celle qui ne l'est pas, invite à se centrer sur les conditions et le cadre d'enseignement. Dans cette perspective, on met l'accent sur l'organisation du contenu et de l'environnement en attribuant à l'enfant le rôle de récepteur. Le risque est grand à ce moment de devancer le cheminement de l'enfant ou de culpabiliser l'enseignant qui n'a pas réussi à «faire apprendre».

Une intervention basée uniquement sur les conditions d'enseignement ne peut résorber tous les problèmes causés par l'apprentissage de nouvelles notions, comme nous l'avons déjà mentionné. Trop de programmes très bien adaptés ont prouvé qu'ils n'étaient pas suffisants. Poplin (1988) rapporte que les progrès sont jugés insatisfaisants puisqu'ils ne sont ni durables, ni généralisables et ce, malgré l'identification d'objectifs à court-terme et l'observation d'un écart signifiant entre l'enfant en difficulté d'apprentissage et l'enfant qui ne l'est pas.

À nouveau, notre conception de l'apprentissage ne nous permet pas d'adhérer à cette perspective. En effet, si l'apprentissage est un processus d'adaptation, il n'est plus possible de parler de comportements non adaptés en s'appuyant sur une mesure de potentiel intellectuel ou une mesure des performances observées.

1.1.3.3 En regard de la perspective cognitive

Depuis le début des années 80, les idées véhiculées par les théories cognitives ont pénétré nos écoles. Ces théories se préoccupent des processus mentaux. Au diagnostic, qui démontre l'écart entre les résultats au test d'intelligence et ceux obtenus en classe, s'ajoute l'observation de stratégies spécifiques : le traitement de l'information, la gestion mentale, la capacité à passer de stratégies perceptuelles à des stratégies langagières ou des aspects figuratifs aux aspects opératoires. (Kauffman et Kauffman 1983; Feurstein 1979; De La Garanderie 1982; Coplin et Morgan 1988). On observe les stratégies inefficaces et les liens établis entre les connaissances antérieures et actuelles.

L'intervention porte alors sur la modélisation des stratégies efficaces, sur la proposition de contre-exemples, sur l'apprentissage d'un questionnement favorisant la réflexion, sur le choix des stratégies pertinentes à la tâche et sur la prise de conscience des connaissances existantes. L'intervenant devient un médiateur et l'enfant, un chercheur. On observe comment l'enfant gère ses apprentissages mais on prend peu en compte les étapes de développement de la pensée. En effet, Bruner (1960) croit davantage à l'influence des médiateurs dans le développement cognitif de l'enfant, qu'à l'âge et au développement des catégories comme la causalité, le temps, l'espace, le nombre.

Coplin et Morgan (1988), comme Swanson et al. (1990), constatent que les performances en lecture, mathématique, épellation ne requièrent pas seulement l'utilisation de stratégies mais nécessitent aussi l'activité préalable de traiter l'information à partir d'une mémoire à long terme. «Cette combinaison de traitement et de mémoire réfère à une conceptualisation de l'information en système, qui permet d'accumuler et de manipuler l'information temporairement» (Swanson et al., notre traduction, p.60).

1.1.3.4 En regard des tendances actuelles

Actuellement, on cherche à combiner les forces des théories de base que sont les théories neuro-psychologiques, cognitivistes et béhavioristes. On parle de perspective multidimensionnelle, d'approche cognitivo-behaviorale. L'accent est mis sur les effets interactifs entre les facteurs d'apprentissage. On propose de nouvelles classifications de troubles d'apprentissage. Dans ces classifications on retrouve les troubles d'apprentissage liés à une difficulté dans un domaine spécifique (lecture, écriture, mathématique) dont on exclut les enfants qui présentent des difficultés à cause de facteurs associés (Q.I., enseignement inadéquat, lacunes sensorielles...), et on inclut les habiletés métacognitives (Kamhi et Catts, 1989; Siegel, 1988; Bryan et al., 1988; Coplin et Morgan, 1988).

Les définitions qui proposent une classification de ces «désordres hétérogènes» partent des problèmes rencontrés par les individus en touchant un ou plusieurs facteurs: neurologique, cognitif, social. On touche peu au domaine affectif. Cette volonté de combiner les forces des différentes théories, vise à rechercher une nouvelle façon de définir ce qu'est la difficulté d'apprentissage, pour la distinguer de ce qui ne l'est pas, afin d'adapter l'intervention. On admet alors que l'apprentissage peut être réalisé différemment, emprunter des parcours peu connus. Ces différences dans la transformation des connaissances et dans l'adaptation de l'individu pourraient parfois laisser planer des doutes sur les aptitudes et les habiletés d'apprentissage de certains élèves dans les écoles.

Toutefois, le premier postulat posé par cette recherche est à l'effet que : les enfants qui ont des difficultés d'apprentissage sont capables d'apprentissage[1]. Compte tenu de ce postulat et de la définition de l'apprentissage à laquelle nous adhérons, selon laquelle l'apprentissage est une transformation plus qu'une accumulation de connaissances, nous désirons observer le processus de la compréhension développée chez les enfants en difficulté d'apprentissage.

---

[1] Autrement dit, nous ne croyons pas qu'il n'y ait «rien à faire» avec un enfant.

Les critères utilisés pour déterminer la difficulté d'apprentissage ne font pas l'unanimité, comme nous l'avons vu. Les relations entre les dysfonctions cérébrales mineures et les problèmes d'apprentissage ne sont pas clairement démontrées. La définition véhiculée par le Ministère de l'Éducation du Québec, essentiellement béhavioriste, se concentre sur l'écart observé entre les performances académiques attendues en fonction des programmes, et celles réalisées. L'écart entre ces définitions contribue à créer un malaise important non seulement face à l'identification des enfants en difficulté d'apprentissage, mais aussi face aux types d'intervention mis en place et aux résultats obtenus.

D'une part, en exprimant la difficulté d'apprentissage uniquement selon un retard scolaire, nous ne pouvons discriminer les enfants qui utilisent des stratégies où intervient une compréhension limitée à des structurations partielles, difficiles à généraliser. Ces derniers peuvent alors réussir sans véritablement prendre conscience des coordinations réalisées ou utiliser des coordinations sans les adapter et ce, pendant un certain nombre d'années, ce qui rend une intervention difficile par la suite. D'autre part, en nous centrant sur ce qui n'a pas été acquis, les interventions oublient les nouveaux «objectifs» de la classe, ce qui ne permet pas de coordonner conceptualisation et résolution de nouveaux problèmes pour démontrer un progrès visible.

Ainsi, tout en requérant des réflexions sur les différentes composantes de l'apprentissage comme les problèmes liés à l'enseignement et au domaine neurologique, affectif ou social, la recherche de compréhension du problème d'apprentissage scolaire demande d'être à l'écoute de celui qui apprend. Baruk (1973) le souligne d'ailleurs lorsqu'elle écrit : «Comme chaque fois qu'il s'agit d'histoires vraies, tous les invariants trouvés variant allégrement et invariablement dès qu'une situation de plus apparaît. Pourtant cet invariant existe...il n'apparaît que si l'on tente d'être à l'écoute de qui est en situation» (p.87).

1.1.3.5 En regard de notre recherche

Depuis 1936, plusieurs recherches soviétiques ont porté surtout sur l'analyse qualitative des caractéristiques des enfants durant un apprentissage, sans prendre en compte les tests d'intelligence. Des habiletés et des aptitudes mathématiques comme l'attention, la perception, la mémoire, la généralisation, l'imagination, la rapidité et la flexibilité de la pensée ont été identifiées. (Krutetskii, 1969a,b; Menchinskaya, 1975; Kulagina et Puskaeva, 1990).

Nous nous distinguons de ces recherches puisque nous ne cherchons pas à identifier des habiletés ou des aptitudes mais à étudier le développement de la compréhension d'un concept mathématique. Toutefois, comme dans le cas de ces recherches, nous désirons nous «coller» de près à la réalité scolaire vécue par les enfants et par les orthopédagogues. Le premier critère retenu est alors celui de «réalité». Ainsi, le potentiel intellectuel, la dysfonction cérébrale mineure et les comportements hyperactifs ne seront pas retenus comme critères de sélection. D'une part, les interventions orthopédagogiques dans nos écoles ne sont pas précédées de façon systématique par une évaluation du potentiel intellectuel ou par un bilan de santé, où seraient identifiés un déficit du potentiel intellectuel ou une dysfonction cérébrale mineure. Comme nous l'avons déjà mentionné, les relations entre la dysfonction cérébrale mineure et les difficultés d'apprentissage ne sont pas encore démontrées. On questionne d'ailleurs la pertinence de l'identification d'un déficit intellectuel dans la définition d'un enfant en difficulté d'apprentissage (Siegel, 1989). D'autre part, dans nos écoles, un enfant présentant des comportements hyperactifs n'est pas écarté systématiquement des services orthopédagogiques. Pour ces raisons, ces critères ne seront pas retenus pour distinguer un enfant en difficulté de celui qui ne l'est pas.

Nous nous appuierons davantage sur la définition utilisée par l'Association des Orthopédagogues du Québec (ADOQ). Un enfant en difficulté sera celui qui présente une incompréhension persistante des concepts à l'étude dans sa classe (ADOQ, 1992). Toutefois pour saisir l'idée exprimée par cette définition, nous devons nous placer dans le contexte scolaire où on demande aux enfants de nous expliquer ce qu'ils ont compris, d'induire à partir de ce qu'on leur présente, de résoudre de nouveaux problèmes à partir de leurs expériences et de leurs connaissances. Les enfants qui éprouvent des difficultés à réaliser ces tâches sont en difficultés d'apprentissage. Pour les besoins de cette recherche, nous choisissons de nous inspirer de cette définition et de l'enrichir des définitions conceptuelles et opérationnelles de la compréhension.

La recherche de compréhension ne peut se satisfaire d'entraînement sur des préalables ou de transmission de connaissances et de comportements, comme le préconisent les théories neuro-psychologiques et béhavioristes. Ainsi, le choix d'un cadre théorique s'appuyant sur des théories cognitivistes et constructivistes s'impose. Tout en utilisant les forces développées par les premières, nous nous inscrivons dans une analyse psychogénétique, rendue possible par la perspective constructiviste. Ce choix exige que nous nous arrêtions un moment sur ce qu'est le constructivisme et sur les implications de ce choix.

1.2 Le constructivisme comme cadre théorique

1.2.1 Le constructivisme de Piaget

Le constructivisme explique le développement de la pensée par la recherche de compréhension de l'individu, au moyen de constructions de schèmes et de structures cognitives. L'enfant devient un expérimentateur et un observateur en quête d'équilibration cognitive. La pensée de l'individu oscille ainsi entre l'assimilation et l'accommodation. La construction de schèmes ou de structures cognitives est facilitée par les progrès de la prise de conscience. L'abstraction réfléchissante, en portant sur la coordination d'action entre le conscient et l'inconscient, devient un des moteurs du développement cognitif, un des aspects du processus d'équilibration. La représentation intériorise les actions et élargit ainsi la pensée en permettant l'évocation des objets et des actions en leur absence. Décrivons maintenant ces différents thèmes pour en comprendre les implications.

1.2.1.1 L'équilibration cognitive

La perspective choisie nous permet d'observer l'apport des structures cognitives et des schèmes construits par l'enfant dans une recherche de compréhension et donc d'équilibration. Jouant un rôle fondamental dans la perception du monde et dans la coordination des perceptions de l'enfant, les structures cognitives et les schèmes permettent de reconnaître ou d'assimiler des connaissances pour les transférer, puis de les organiser pour les mémoriser. Le schème est un instrument d'assimilation et donc de généralisation.

> Le schème ne connaît jamais de commencement absolu mais dérive toujours, par différenciations successives, de schèmes antérieurs qui remontent de proche en proche, jusqu'aux réflexes ou mouvements spontanés initiaux ...un schème comporte toujours des actions du sujet (de l'organisme) qui ne dérivent pas comme telles des propriétés de l'objet du milieu» (Piaget, 1967, p.26).

La structure cognitive est une organisation que l'enfant donne à ses schèmes en vue d'une meilleure compréhension du monde. Des régulations favorisent les coordinations entre les schèmes de l'enfant et permettent cette organisation des schèmes en structures. D'abord liées à l'action, les régulations mènent à l'élaboration d'une logique de l'action. Ensuite, liées à la pensée, elles favorisent l'élaboration d'une logique opératoire. On reconnaît alors la décentration qui permet la réversibilité. «Le signe psychologique de la structure c'est l'existence d'invariants» nous rappelle Piaget (Bringuier, 1977, p.68)

Quatre facteurs provoquent ou suscitent l'élaboration des structures cognitives: la maturation neurologique, influencée par l'hérédité et par le développement du système nerveux central; les expériences physiques, sensitives et logico-mathématiques; les notions transmises socialement et l'équilibration.

La théorie de l'équilibration des structures cognitives de Piaget (1975) nous apprend que toute nouvelle construction fait appel à des compensations, et que cette construction nouvelle permet une équilibration majorante. Des étapes et des réactions sont prévisibles dans ce cheminement des compensations. Un fait nouveau n'introduira d'abord aucune modification. Puis, l'élément perturbateur est intégré, ce qui modifie le système. L'anticipation des variations possibles permet de poursuivre la compensation. Ainsi l'élément nouveau n'est plus conçu comme perturbateur. Un nouveau schème ou une nouvelle structure est construite ou adaptée.

Le développement cognitif, vu comme une recherche d'équilibre, est donc caractérisé par l'échange constant non seulement entre l'individu et son environnement, mais aussi entre les schèmes de l'individu. L'équilibration apparaît alors lorsque l'adaptation à l'environnement et l'organisation des schèmes, réalisée par l'individu, sont satisfaisantes. Ainsi, la stabilité mobile facilite les transformations par la compensation. La sensibilité aux perturbations extérieures favorise les modifications. Enfin, l'équilibre actif permet des compensations progressives. Ces trois aspects de l'équilibration contribuent à distinguer l'équilibre, qui consisterait à retourner à un état antérieur, de l'équilibration, qui est considéré comme un processus.

Cette équilibration, dynamique et non statique, requiert ainsi un jeu d'assimilation et d'accommodation entre le sujet et le milieu, entre les schèmes déjà construits par l'enfant. «L'assimilation et l'accommodation, en favorisant l'adaptation et l'organisation de schèmes, amènent le développement et l'équilibration progressive des conduites» (Legendre-Bergeron, 1980, p. 10). Voyons maintenant ce que nous entendons par assimilation et par accommodation.

1.2.1.2 L'assimilation et l'accommodation

L'assimilation est une action du sujet. Elle intègre, à une structure ou un schème qui existe déjà chez l'enfant, certains traits de l'objet. Une assimilation nouvelle joue un rôle de construction. Quant à l'accommodation, elle est la modification que le milieu impose à la structure qui existait déjà. Elle suscite une majoration des schèmes ou des structures pour les rendre plus adaptés à la nouvelle situation. L'accommodation nouvelle joue un rôle de compensation. Ainsi, c'est par ce jeu d'assimilation et d'accommodation que les schèmes se différencient, que de nouveaux schèmes se construisent ou se coordonnent et qu'un nouvel équilibre apparaît. Un nouveau schème est extrait par assimilation réciproque ou par coordination des schèmes. L'assimilation réciproque «c'est un début de coordination dont la généralisation comporte une ébauche d'abstraction réfléchissante, donc de mise en acte de ce qui était en puissance dans l'abstraction pseudo-empirique» (Piaget, 1977, p.76). Quant à la coordination, elle est présente par les réunions, les anticipations et les implications.

Ainsi que le résume Fetz (1982), l'assimilation et l'accommodation mettent en évidence les pôles subjectif et objectif de la connaissance et la nécessité de modifier les structures ou les schèmes pour favoriser l'adaptation en fonction du nouveau contexte. Ainsi, la connaissance ne se transmet pas mais se construit par le jeu de l'assimilation et de l'accommodation.

Les expériences vécues par les enfants à travers des contextes différents ou au contact des autres enfants et des adultes, deviennent autant de stimulations qui contribuent à faire émerger la nécessité de développer des relations, non seulement entre les schèmes déjà construits, mais aussi entre les schèmes propres à un enfant et les nouveaux contextes. Les types de relation qui se dégagent de ces rapports, sont d'abord assimilateurs et déformants, comme nous l'avons déjà mentionné. Un déséquilibre engendre la nécessité de les réorganiser. La réorganisation sera perçue comme mieux adaptée et répondant davantage aux besoins identifiés, ce qui permet de progresser. «Dans les cas où il n'y a pas de rééquilibration rapide, il peut y avoir régression avec, ensuite, un nouveau départ» (Piaget dans Bringuier, 1977, p.75).

Souvent les élèves en difficulté d'apprentissage tentent de répondre à une «commande», de trouver une réponse à une question. À ce moment, ils ne cherchent plus à comprendre. Ils mémorisent les informations en les assemblant selon des critères de formes ou de disposition. Il se crée des régressions qui s'expriment sous forme de confusions ou de lenteur provoquant souvent des difficultés. La peur de l'échec et le désintéressement alimentent ces difficultés et les majorent. Piaget nous rappelle que la capacité durable d'accommodation de schèmes aux objets, l'assimilation réciproque des schèmes en sous-schèmes et l'intégration des sous-systèmes permettent le développement de l'équilibration cognitive, de la compréhension en fait. (Piaget, 1977b). C'est donc dire que les difficultés d'apprentissage pourraient provenir d'une difficulté à conserver les schèmes, à organiser des schèmes entre eux ou à modifier une structure déjà élaborée. Arrêterons-nous donc maintenant à ce que Piaget entend par compréhension.

1.2.1.3 Qu'est-ce que la compréhension selon Piaget

La compréhension est vue comme une recherche d'équilibration entre les connaissances antérieures et leur adaptation à un nouveau contexte. Dans le cadre de la perspective choisie, la compréhension s'amorce grâce à l'assimilation de l'objet d'étude. Cette assimilation, nous l'avons vu, n'est toutefois pas nécessairement présente dès l'apparition de l'objet d'étude (Piaget, 1975). À partir du moment où un élément perturbateur est intégré au système, un début d'accommodation se manifeste, un début d'adaptation commence à s'établir, une compréhension s'élabore.

Pour Piaget, «comprendre c'est réussir à dominer en pensée les mêmes situations jusqu'à pouvoir résoudre les problèmes qu'elles posent quant au pourquoi et au comment des liaisons constatées et, par ailleurs, utilisées dans l'action» (1974b, p.237). Ainsi la compréhension est une recherche de raisons qui facilitent la conceptualisation. La compréhension enrichit la pensée, dans la mesure où elle dépasse les réussites pratiques, les théorèmes en acte dont parle Vergnaud (1992).

Qu'est-ce qui justifie l'assimilation d'une nouvelle information? Pour Piaget (1974b), ce pourra être la poursuite d'une fin, le résultat de la réalisation d'une tâche. Par exemple, l'enfant peut observer que le déplacement d'objets ne change pas la quantité. S'il prend conscience du phénomène, un déséquilibre entre ses connaissances et sa nouvelle observation favorise la construction d'un nouvel élément de connaissance du type: tout mouvement n'entraîne pas nécessairement un changement de quantité. L'observation de ce résultat, mais surtout la prise de conscience du lien entre ce résultat et l'information qui vient d'être observée, permet d'amorcer un processus de conceptualisation. «...la prise de conscience d'un schème d'action transforme celui-ci en un concept» (Piaget, 1974a, p.261).

C'est au cours de l'évolution de la prise de conscience qu'apparaît le développement de la compréhension. Les prises de conscience sont déclenchées non seulement à partir des moments où les assimilations ne suffisent plus à solutionner les problèmes présentés, mais comme nous le disions à l'instant, à partir du but à atteindre et du résultat obtenu. La prise de conscience, un processus de conceptualisation, évolue à travers trois grandes étapes.

Au tout début, les prises de conscience sont marquées par des déformations. Les contradictions qui apparaissent sont alors soit déformées soit refoulées puisque cette réaction présente une solution économique. Le deuxième niveau correspond à une prise de conscience de l'action, une intériorisation amenée par la représentation. Cette prise de conscience s'actualise par l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante, mais les structures et leurs mécanismes demeurent inconscients. Devant le déplacement des éléments d'un ensemble, l'enfant sait que la quantité reste inchangée quand on disperse les jetons, mais ne peut expliquer pourquoi. C'est au troisième palier que la prise de conscience se prolonge en réflexion pour permettre les abstractions réfléchies. «L'enfant devient de ce fait apte à faire varier les facteurs en ses expérimentations et à envisager les divers modèles possibles pour l'explication d'un phénomène, quitte à les soumettre au contrôle des faits» (Piaget 1974, p.281). L'enfant pour qui les jetons dispersés représentent la même quantité quelle que soit leur disposition explique cette «évidence» soit en reformant la configuration comme elle était au départ, soit en expliquant que rien n'a été enlevé ou ajouté donc que malgré les apparences, la quantité est inchangée. En devenant ainsi plus «objective», la pensée soulève et résout des questions relatives au pourquoi et au comment.

La recherche de compréhension, et ainsi de raisons, permet le dépassement des résultats pour s'attarder aux «pourquoi est arrivé...» et aux «comment ai-je fait...». Les réponses aux questions relatives aux «comment» permettent un élargissement des possibles. Les solutions apportées aux questions relatives aux «pourquoi» transforment les relations de causalité (causes-conséquences) en relations logiques (si-alors), en portant sur des opérations. L'établissement de relations favorisant la découverte de l'équivalence, de l'invariance, de la réversibilité est le produit du processus d'élaboration de la pensée. Ainsi, nous pouvons poser notre deuxième postulat : la construction de la compréhension d'un concept est un processus. Ce processus est facilité par le développement de la prise de conscience où l'abstraction réfléchissante joue le rôle de moteur.

Attardons-nous maintenant à définir minutieusement ce qu'est l'abstraction réfléchissante puisqu'elle est un des moteurs du développement cognitif et la pierre angulaire de cette recherche.

1.2.1.5 L'abstraction réfléchissante

Comme nous l'avons vu dans l'élaboration de la prise de conscience, Piaget (1977a) distingue deux sortes d'abstraction. La première, liée aux propriétés retenues à partir des objets, est appelée empirique. La deuxième, plus éloignée de ces indices et plus près des «gestes mentaux», est appelée abstraction réfléchissante.

> L'abstraction empirique, tire son information des objets eux-mêmes en retenant d'eux certaines propriétés à l'exclusion des autres, qui existaient avant toute constatation de la part du sujet. La deuxième consiste d'abord à réfléchir au sens d'un réfléchissement (projection) sur un plan supérieur ce qui est tiré de l'inférieur et, d'autre part, à réfléchir au sens d'une réflexion mentale (réflexion) dont le rôle complémentaire est de reconstruire sur le nouveau plan ce qui est abstrait du précédent, d'où une réorganisation qui exige une structuration nouvelle (Piaget, 1978, p.5)

Illustrons cette définition par un exemple. L'enfant de sept ans qui peut dire combien d'objets ont été comptés fait une expérience portant sur des propriétés physiques et manifeste une abstraction empirique. La quantité 7 existe, que l'enfant la constate ou non. Par contre, si l'enfant sait que la quantité d'objets ne diffère pas lorsque l'ordre ou la disposition sont différents, il démontre alors une abstraction réfléchissante puisqu'il coordonne le principe de cardinal (où le dernier mot-nombre représente l'ensemble) et l'identité (aucun prélèvement ou ajout ne s'est produit).

Pour Piaget (1978a) «toute abstraction empirique,..., comporte un minimum d'abstraction réfléchissante, si inconsciente soit-elle» (p.7). Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, nous constatons que la capacité de trouver une propriété à un ensemble demande à l'enfant d'avoir déjà «transféré», par exemple la quantité 7 d'un ensemble à un autre, puis d'avoir «réorganisé» le schème 7, afin d'y inclure tous les ensembles de 7 éléments.

L'abstraction empirique pourrait conduire à des contradictions. Repensons à l'expérience du déplacement des 7 jetons sur la table. Si l'enfant attribue une différence de quantité lorsque la disposition est changée, son abstraction reste intégrée à un cadre spatio-temporel et donne naissance à une contradiction, puisque le comptage des jetons ne lui permet pas de corroborer sa prévision. S'il reconnaît que la quantité est inchangée, quelle que soit la disposition, cette abstraction sort du cadre spatio-temporel, grâce au jeu des réversibilités croissantes. L'enfant sait alors qu'il peut replacer les jetons comme ils étaient «avant», ce qui donne à la coordination une structure logico-mathématique. Cependant, Piaget (1977a) nous rappelle que l'enfant ne parvient à abstraire une propriété que dans la mesure où il la «comprend» au cours de ses actions, donc dans la mesure où naît un début de prise de conscience.

Il est alors intéressant de s'attarder à certains «tons» d'abstraction réfléchissante. Les abstractions pseudo-empiriques (un cas particulier de l'abstraction réfléchissante), jouent un rôle fondamental au stade des opérations concrètes, stade qui nous intéresse plus particulièrement étant donné l'âge des enfants auxquels nous nous adressons. «[Les abstractions pseudo-empiriques] servent de support et d'auxiliaire essentiels aux abstractions réfléchissantes» (Piaget, 1977a, p.307). Ce sont les modifications amenées par les actions de l'enfant, en présence de l'objet, complétées par les propriétés extraites de leurs coordinations qui permettent de reconnaître ce cas particulier. Ainsi, les tâtonnements, permis par la régulation, favorisent une correction des schèmes déjà assimilés, ce mouvement étant, pour Piaget, une semi-réversibilité. Par exemple, l'enfant qui compte et recompte les objets pour découvrir que leur disposition ne change pas leur quantité, démontrerait une abstraction pseudo-empirique. Ce ne sont pas ses réflexions sur la compensation, l'identité ou l'annulation lui permettent de tirer cette conclusion, mais bien les actions effectuées sur les objets.

Deux mouvements permettent le dynamisme de l'abstraction réfléchissante : le réfléchissement et la réflexion. Le réfléchissement est un transfert ou une projection faite à partir des schèmes construits. C'est ici d'ailleurs que Piaget parle d'une abstraction «facilitée par des instruments d'assimilation comme les mises en relation, les significations...»(1977a, p.5) C'est à partir de cette assimilation que l'enfant transpose ou transfère, puis coordonne et reconstruit les éléments et les relations extraits de l'objet perçu et mémorisé. «Cette réorganisation obligée par le réfléchissement (transfert) sera dite réflexion» (Piaget, 1977a, p.6). Soulignons l'importance de la coordination entre le transfert et la régulation pour construire une réflexion au stade des opérations concrètes.

Piaget a dégagé divers degrés de réfléchissement. Ainsi, le premier degré est celui des «actions successives à leur représentation actuelle». L'enfant explique alors ce qu'il fait, au moment où il le fait. Le deuxième, celui de la «reconstitution de la suite des actions», permet à l'enfant de raconter ce qu'il vient de réaliser. Nous voyons intervenir ici une intériorisation de ce qui a été fait. Le troisième, celui des comparaisons, favorise l'émergence des ressemblances et des différences avec les schèmes connus, une intériorisation où apparaît une coordination entre les schèmes. Le quatrième, celui des réflexions sur les réflexions précédentes, aboutit à des «métaréflexions». «De nouveaux paliers de réfléchissements se construisent sans cesse pour permettre les nouvelles réflexions... cette union de la réflexion et du réfléchissement est donc essentiellement formatrice des paliers successifs...» (Piaget, 1977a, p.305).

Comme nous le voyons, c'est à la réflexion que nous devons la réorganisation des schèmes. En effet, placée dans de nouvelles conditions, la réflexion permet des ajustements qui modifient le schème de départ. Le transfert et la réflexion, rendus possibles par l'intériorisation, introduisent l'apport de la représentation.

1.2.1.6 La représentation

La représentation joue un rôle important dans le développement de l'abstraction. Elle permet, comme nous l'avons déjà mentionné, l'intériorisation. La représentation n'est pas considérée par Piaget comme un champ de connaissance, mais comme un schème ou une structure.

La représentation apparaît avec la fonction symbolique, par les imitations, les jeux symboliques, les représentations graphiques, les images mentales, le langage. La représentation est donc présente dès l'abstraction empirique, en extrayant un schème des observables. Elle l'est aussi dans l'abstraction réfléchissante, en extrayant un nouveau schème des schèmes déjà constitués.

> Le propre de la représentation est de dépasser l'immédiat en accroissant les dimensions dans l'espace et dans le temps, du champ de l'adaptation, donc d'évoquer ce qui déborde le domaine perceptif et moteur. Qui dit représentation dit par conséquent, réunion d'un signifiant permettant l'évocation et d'un signifié fourni par la pensée (Piaget, 1970, p. 286).

Les représentations que fait l'enfant sont créées à travers le prisme de ses connaissances ou de ses schèmes. Elles sont influencées par le milieu dans lequel il évolue, par sa vision de ses capacités et de ses habiletés d'apprentissage. Dans le cadre de cette recherche nous nous attarderons non seulement aux représentations figuratives construites par l'enfant mais aussi aux représentations opératoires qui lui permettent de coordonner schèmes et régulations pour construire de nouvelles réflexions.

L'enfant qui expérimente avec succès diverses coordinations, sait qu'il est possible de trouver des solutions à des problèmes ou à des tâches nouvelles. Mais l'enfant dit «en difficulté» ne sait pas justement qu'il peut découvrir des possibles plausibles. Il a trop souvent expérimenté des échecs et ne peut plus croire en ses capacités. Il préfère alors conserver les schèmes ou les structures déjà construits et ayant «fait leurs preuves», ce qui peut l'amener à nier l'information nouvelle ou à juxtaposer les informations sans les coordonner. Il n'a pas construit «le dynamisme du pouvoir» permis par l'expérience des possibles réussis ou encouragés. «Le possible, en tant que lié à des pouvoirs, constitue à la fois un instrument et le moteur des rééquilibrations» (Piaget, p.187, 1981)

1.1.2.7 <u>Les implications de ce choix</u>

Le constructivisme, en interprétant l'apprentissage comme un «processus adaptatif», ose jeter un regard à l'intérieur de la pensée de l'individu, non seulement à titre de gestion du savoir mais en tant qu'adaptation de l'individu. Les rôles attribués aux enfants et à leurs compréhensions, aux intervenants et à leurs interventions sont modifiés. La compréhension se construit dans une interaction entre le sujet qui apprend et l'objet de connaissance mais aussi dans la façon dont l'apprenant appréhende l'information et la coordonne à ses schèmes.

La recherche sur la compréhension développée par les enfants en difficulté d'apprentissage demande une analyse qui ne s'attarde pas qu'aux causes, mais aussi aux implications et aux étapes du développement cognitif. La perspective constructiviste permet l'explication des phénomènes s'inscrivant dans un ensemble où il est possible de tenir compte de ces étapes.

Ensuite, les résultats obtenus, les erreurs observées, les forces ou les faiblesses dépistées ne sont plus placés selon un angle où il y a un «état» de manque à combler, mais plutôt selon un point de vue où on tient compte d'une démarche d'apprentissage ou d'évolution. Ainsi, à l'instar d'Heshusius (1989) nous croyons que : «les erreurs ne sont pas la mauvaise pièce de la connaissance, mais une voie qui donne un sens et qui provient de l'intérieur, expliquant comment l'enfant pense et raisonne» (notre traduction, p. 412). Pour adapter notre intervention nous comptons alors regarder attentivement l'enfant et suivre sa pensée en essayant de «désembrouiller le processus» (Poplin, 1988, p.413).

Notre troisième postulat est donc à l'effet que les erreurs, sans être nécessaires, sont des étapes normales du processus de compréhension. Ce qui leur donne un caractère de difficulté pourrait être le temps plus ou moins long requis pour développer des coordinations où interviennent une prise de conscience et «un dynamisme du pouvoir», dans un contexte où la construction de schèmes et de structures cognitives se poursuit chez les autres enfants du même groupe.

Dans le cadre de cette recherche, nous étudierons donc le développement de la compréhension des grands nombres, que nous avons appelé numération positionnelle décimale, par l'observation de l'abstraction réfléchissante dont il vient d'être question. À ce moment-ci, nous distinguons toutefois le terme «compréhension» de la définition usuelle des milieux scolaires et de la définition conceptuelle dont il a été question précédemment. En effet, nous ne cherchons plus ici à observer le développement de la compréhension du concept de numération positionnelle chez l'enfant dans le cadre naturel de la classe ou de son milieu social. Nous désirons nous attarder à une clientèle particulière d'enfants en difficulté d'apprentissage, donc d'enfants qui ont été en contact avec ce concept durant l'année scolaire et qui, contrairement à leurs camarades de classe, démontrent une «incompréhension persistante» ou une compréhension où interviennent des structurations partielles, difficiles à généraliser. Ces enfants réussissent sans véritablement prendre conscience des coordinations réalisées ou utilisent des schèmes déjà construits sans les adapter. Nous nous arrêterons donc un moment sur les définitions de compréhension et d'abstraction propres à un modèle expérimenté pour les concepts du primaire, puis sur les raisons qui ont motivé ce choix.

1.2.2 Le modèle de Bergeron et Herscovics

1.2.2.1 Définitions propres au modèle de la compréhension élargi de Bergeron et Herscovics

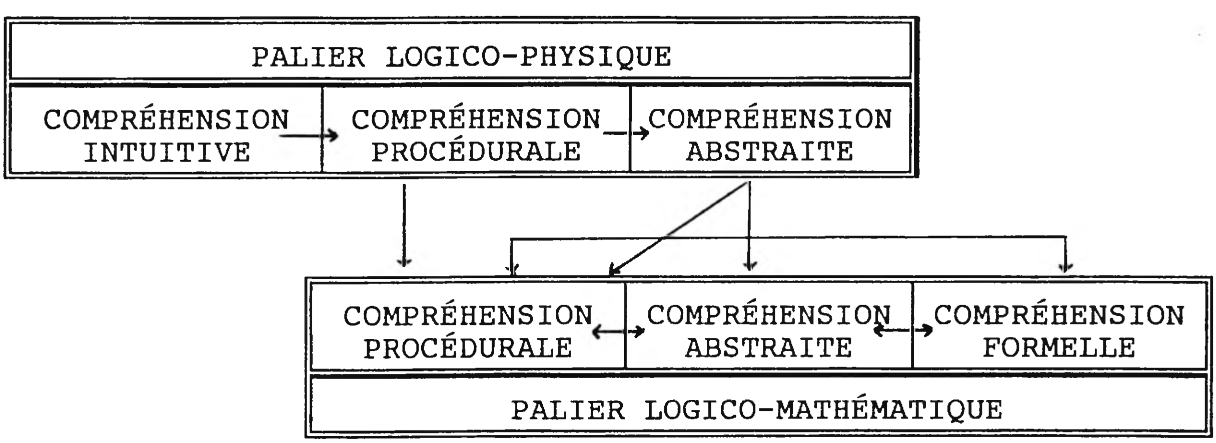
Dans ce modèle, les auteurs ont cherché à décrire la construction de la compréhension d'un concept en tentant de présenter un modèle qui puisse être utile à la didactique à l'école. Ils ont voulu insister sur la présence de compréhension de la part de l'enfant, bien avant que ce dernier ne sache utiliser les symboles mathématiques propres à un concept particulier, comme par exemple le nombre. C'est ce qui a amené l'apparition de deux paliers dans le modèle. Ce modèle se présente en deux paliers qui décrivent la compréhension des concepts physiques préliminaires et la compréhension du concept mathématique émergeant. Le palier qui traite de la compréhension des concepts préliminaires est appelé palier logico-physique et propose une hiérarchie de trois niveaux : celui de la compréhension intuitive, celui de la compréhension procédurale logico-physique et enfin celui de la compréhension abstraite logico-physique. Bergeron et Herscovics définissent ces niveaux ainsi :

> la compréhension intuitive réfère à une perception globale d'une notion , elle est le résultat d'un type de pensée basée essentiellement sur la perception visuelle, elle provient d'approximations rudimentaires non-numériques;
>
> la compréhension procédurale logico-physique réfère à l'acquisition de procédures logico-physiques auxquelles l'apprenant relie ses connaissances intuitives et les utilise de façon appropriée;
>
> la compréhension abstraite logico-physique réfère à la construction d'invariants logico-physique, ou à la réversibilité et la composition de transformations logico-physiques, ou à la généralisation. (1989. p.141-142)

Le second palier ne comprend non plus des niveaux mais des composantes et traite de la compréhension du concept mathématique émergeant. Il est appelé palier logico-mathématique. Ces composantes, au nombre de trois, sont la composante procédurale logico-mathématique, l'abstraction logico-mathématique et la formalisation. Les auteurs décrivent chacune des composantes ainsi:

> la compréhension procédurale réfère à l'acquisition de procédures logico-mathématiques explicites sous-jacentes à la compréhension des concepts physiques préliminaires;
>
> la compréhension abstraite logico-mathématique réfère à la construction d'invariants logico-mathématiques et logico-physiques, ou à la réversibilité et à la composition de transformations et d'opérations logico-mathématiques, ou à la généralisation;
>
> la compréhension formelle réfère à l'interprétation usuelle d'axiomatisation et de preuves formelles mais elle inclut aussi la définition formelle d'une notion mathématique et l'utilisation de symboles mathématiques pour des notions auxquelles une compréhension procédurale ou abstraite existe déjà (Bergeron et Herscovics, 1989, p.143-144).

La coordination entre les différentes composantes et entre les paliers est illustrée dans le tableau suivant.



Il est important de noter à ce moment que la mise au point de ce modèle a été réalisée à partir de concepts comme le petit nombre, l'addition, la mesure. Ainsi, le premier palier s'attarde à décrire les intuitions, les gestes et les réflexions qui donnent naissance au concept à l'étude. Les recherches réalisées ont tenté de cerner et de décrire l'apparition des observables lors du développement de schèmes conceptuels. Ainsi, ce modèle s'attarde davantage aux «quoi» observer.

1.2.2.2 Les raisons de ce choix

Pour les besoins de cette recherche, nous choisissons de définir la compréhension selon ce modèle puisqu'il a été conçu pour étudier les concepts du primaire. Ce modèle, intégrant les modèles de Bruner (1960), de Skemp (1976), de Byers et Herscovics (1977) et de Bergeron et Herscovics (1982), ne présente pas une définition conceptuelle de la compréhension, mais s'attarde à décrire la compréhension en identifiant ses composantes (intuitive, procédurale, abstraite, formelle).

Ce modèle, non linéaire, offrent des avenues intéressantes qui identifient les schèmes et les structures favorisant la compréhension d'un concept. Les schèmes et les structures sont alors des critères qui sont regroupés sous chacune des composantes des paliers. Ces composantes, se complexifiant et s'enrichissant entre elles, contribuent à la construction d'un schème conceptuel.

Bergeron et Herscovics (1982, 1989) ont cherché à décrire la compréhension qui mène à la construction de schèmes conceptuels, plutôt que la compréhension qui intervient dans la résolution de problème, comme le faisaient les premiers modèles. Dans le contexte scolaire du primaire, la résolution de problème s'inscrit dans des champs d'activité (arithmétique, géométrie, mesure), mais s'appuie sur des schèmes conceptuels (nombre, numération, addition, multiplication...). Expérimenté pour les concepts de nombre et d'addition (Bergeron et Herscovics 1989), de multiplication (Nantais et al. 1989), de mesure de longueur et d'aire du rectangle (Héraud 1992), de point et de droite (Boukhssimi 1990), ce modèle a pu rendre de fiers services. Pour réaliser l'étude du concept de numération positionnelle, un problème particulier se pose. En effet, ce concept s'appuie déjà sur le nombre, au premier palier. Nous avons pu trouver des solutions satisfaisantes qui nous ont permis de l'utiliser de façon pertinente. Nous reviendrons sur ce sujet dans la section de l'analyse conceptuelle de la numération positionnelle.

Ayant une expérience d'usage de ce modèle opérationnel de la compréhension, nous avons pu, au plan méthodologique, construire un questionnement et des tâches à partir de critères (des schèmes et des structures) que nous avons identifiés. Enfin, au plan de l'analyse, ce modèle permet des «points d'attention» qui facilitent et précisent «quoi» observer durant les expérimentations. Pour ces raisons, ce modèle nous a semblé le meilleur outil permettant de lier théorie constructiviste et pratique orthopédagogique.

1.2.2.3 Distinctions entre le modèle de Piaget et le modèle de Bergeron et Herscovics

Ces deux modèles, sans être en contradiction, se distinguent comme nous avons pu le constater. Revoyons ces distinctions afin de faciliter la compréhension des outils que nous avons élaborés au chapitre de la méthode.

D'abord, pour Piaget la compréhension est une recherche d'équilibre qui permet à la pensée de conceptualiser les réussites réalisées par l'enfant, les théorèmes en acte dont parle Vergnaud. Pour Bergeron et Herscovics, la compréhension s'exprime par différents critères catégorisés dans les composantes des deux paliers. Cette description de la compréhension permet d'appuyer la symbolisation (appelée formalisation) sur des intuitions, des gestes et des réflexions réalisés par les enfants. Cette façon d'analyser les composantes de la compréhension favorise l'observation des connaissances initiales, des habiletés et surtout de conservation, de réversibilité ou de généralisation qu'il n'est pas toujours possible d'inférer à travers les gestes des enfants. La formalisation définie par Bergeron et Herscovics apparaît alors pour chacun des concepts à l'étude, alors que le stade des opérations formelles de Piaget est une structure de pensée qui ne se présente qu'à partir des environs de 12 ans.

Ainsi, puisque la compréhension se développe à travers les composantes des deux paliers, Bergeron et Herscovics définissent le palier logico-physique et le palier logico-mathématique de leur modèle en parlant d'une compréhension physique préliminaire, correspondant à des raisonnements que l'enfant porte sur des objets physiques où l'espace et le temps font partie de la réflexion pour le premier palier, et selon une compréhension du concept mathématique émergeant, correspondant à des raisonnements que l'enfant porte sur des objets mathématiques où les opérations font partie de la réflexion, pour le second. Ces auteurs s'intéressent donc ici à identifier des observables (quoi) et à les catégoriser selon des intuitions, des gestes et des réflexions qui démontrent une prise de conscience d'invariants. Ils ne se sont pas attardés à décrire les liens ou les relations (comment) qui pourraient permettre de coordonner ces composantes ou ces paliers. Ils ont plutôt identifié des voies (flèches) par lesquelles il est possible de voir apparaître une composante ou une autre.

Piaget, quant à lui, parle d'expérience logico-physique et d'expérience logico-mathématique. Il définit l'expérience logico-physique et l'expérience logico-mathématique par le type de propriétés extraites par l'enfant, propriétés dégagées de l'objet pour la première et propriétés tirées des actions de l'enfant pour la deuxième. Ainsi, l'abstraction empirique et l'abstraction réfléchissante occupent une place centrale dans ces deux formes d'expériences.

À ce titre, la définition de l'abstraction est plus limitative dans le cas de Bergeron et Herscovics que dans celui du modèle de Piaget. Pour les premiers, l'abstraction se manifeste par la reconnaissance d'invariants, la réversibilité ou par la généralisation. Elle est présente pour une composante précise à chacun des paliers.

Pour Piaget, l'abstraction est empirique ou réfléchissante, comme nous l'avons déjà mentionnée. Sa présence à tous les stades de développement est le moteur des rééquilibrations. Ainsi, dans la perspective du modèle de l'équilibration de Piaget, les compréhensions intuitives, procédurales et les formelles dont parlent Bergeron et Herscovics sont des abstractions. À ce moment, ces deux modèles se distinguent vraiment. En cherchant à décrire et à catégoriser des critères, Bergeron et Herscovics accordent une grande place à la lecture des observables. Toutefois, ils ne précisent pas «comment» ces derniers apparaissent ni «comment» ils se coordonnent entre eux.

Le modèle de Piaget pourrait apporter un éclairage intéressant à ce moment. En effet, si l'abstraction réfléchissante dont il a été question plus tôt est présente pour chacun des niveaux et pour chacune des composantes, nous pouvons déduire qu'elle devient de plus en plus sophistiquée au fur et à mesure du développement du concept à l'étude. Ainsi, les procédures sont des schèmes d'action qui faciliteraient les régulations nécessaires à l'abstraction pseudo-empirique.

Nous voyons dans les distinctions entre ces deux modèles des complémentarités, en particulier lorsqu'il s'agit d'intervenir auprès d'une clientèle d'enfants en difficulté d'apprentissage. En effet, à l'école, on croit souvent que les enfants identifiés en difficulté ne comprennent pas les concepts à l'étude. Ce modèle permet de préciser qu'ils comprennent, mais à un niveau plus primitif que les exigences posées par le programme d'étude. S'ils ne réussissent pas à «jouer» avec les symboles de façon pertinente, ils ont des réflexions et des gestes qui illustrent leur compréhension. Ce modèle permet donc non seulement de préciser les appuis sur lesquels nous pouvons poser une intervention, mais aussi d'orienter l'intervenante dans sa démarche d'animation.

Alors que le modèle de Piaget facilite la compréhension du développement intellectuel général des enfants, celui de Bergeron et Herscovics clarifie les composantes qui contribuent à la structuration d'une matrice cognitive pour un concept particulier. Ainsi, dans le contexte scolaire, ce modèle favorise une intervention adaptée pour orienter les coordinations entre les schèmes et les structures cognitives de l'enfant dans le but d'en amener la conceptualisation.

Ainsi, afin d'actualiser cette complémentarité, dans le cadre de cette recherche, nous posons comme hypothèse que l'abstraction réfléchissante, telle que définie par Piaget (1977), constitue le levier qui permet à l'enfant de coordonner et d'intégrer les différentes composantes de la compréhension du modèle de Bergeron et Herscovics (1989). En cherchant à étudier l'évolution de la compréhension du concept de numération positionnelle, nous pourrions observer ce jeu de levier et, le cas échéant, préciser son rôle.

1.3 La numération positionnelle décimale comme cadre d'investigation

1.3.1 Les raisons de ce choix

Dans le contenu notionnel du primaire, Le Ministère de l'Éducation du Québec (1981) prescrit des objectifs précis pour les nombres naturels. La lecture, l'écriture et l'ordre des nombres, la familiarisation avec les caractéristiques de la numération en base 10 et enfin les opérations sont réalisées sur des nombres inférieurs à 1000 en 3e année, inférieurs à 100 000 en 4e année et inférieurs à 1 000 000 en 5e et 6e année (p.21-23). Notre pratique orthopédagogique nous sensibilise aux difficultés éprouvées par certains enfants dans l'acquisition d'une compréhension de ces objectifs.

À partir de cette préoccupation, nous choisissons de nous interroger sur le développement de la compréhension de grands nombres puisque cette compréhension influence toute celle de l'arithmétique au primaire. En effet, plusieurs erreurs observées lors de la réalisation d'opérations proviennent de difficulté avec le concept de numération positionnelle.

1.3.2 Analyse conceptuelle de la numération positionnelle

Nous appellerons numération positionnelle, à la fois les règles d'organisation dans l'écriture des nombres et le sens sous-tendu par les symboles utilisés. C'est à ce titre que nous distinguons deux aspects au concept de numération positionnelle : la notation positionnelle, appelée aussi aspect lexical (Perret 1985), et la valeur positionnelle, appelée aussi aspect sémantique (Perret 1985).

Le premier aspect, la notation positionnelle, est relatif au code et concerne les relations qui pourraient être créées entre les différents éléments du code (chiffres, positions). Selon Fuson (1992), la notation positionnelle apparaît dans divers contextes (mathématiques, culturels ou non-numériques) et facilite l'écriture et la lecture des nombres. Au cours d'une récente recherche, Bergeron et al. (1986) signalent que la notation positionnelle, chez les jeunes enfants, se construit d'abord en concevant le nombre comme une juxtaposition de chiffres, puis selon un ordre chronologique et enfin comme un code conventionnel.

Le deuxième aspect, la valeur positionnelle, touche le sens représenté par les symboles et par leur organisation. Ross (1989) attribue quatre propriétés à cet aspect. La première, la quantité est déterminée par une position. La deuxième propriété est relative à la base 10. Les troisième et quatrième propriétés sont relatives aux opérations d'addition et de multiplication. Pour nous, la valeur positionnelle relève aussi de la conservation des unités de mesure de quantité comme l'unité, la dizaine et la centaine.

Baroody (1990) signale, avec raison, que l'arithmétique écrite n'est pas requise pour introduire les conventions de la valeur positionnelle. Toutefois, comme nous avons voulu identifier des critères qui rendent opérationnel le développement de la compréhension du concept de numération positionnelle chez des enfants entre 8 et 11 ans, nous tiendrons compte de la notation positionnelle et de la valeur positionnelle. Nous croyons, comme Fuson (1990), que la numération positionnelle nécessite une coordination entre la notation de position et la valeur de position pour être fonctionnelle.

Une étude de Kamii (1981) signale que la moitié des enfants de troisième année avec lesquels il a travaillé ne comprennent pas l'aspect relatif à la valeur de la numération positionnelle. Dans le cas qui nous intéresse, nous rencontrons des enfants qui ont entre 8 et 11 ans, donc qui terminent ou ont terminé leur troisième année. Ils ont déjà touché au moins aux opérations d'addition, de soustraction et de multiplication en classe. Nous croyons ainsi pouvoir observer le développement de la compréhension de ce concept pour les enfants identifiés par leurs enseignants comme étant en difficulté d'apprentissage.

Le modèle de compréhension de Bergeron et Herscovics (1989) servira donc de cadre de référence pour l'analyse conceptuelle de la numération positionnelle. Ce modèle nous permet d'identifier des critères pour chacune des composantes décrites, critères élaborés non seulement à partir de nos expériences comme orthopédagogue, mais aussi à partir d'une recension des écrits au sujet de la numération positionnelle.

À ce propos, afin de bien illustrer les différents aspects qui contribuent à la construction de la compréhension du schème conceptuel de la numération positionnelle, nous titrons les sections des tableaux «composante intuitive, composante procédurale, composante abstraite et composante formelle», plutôt que «compréhension intuitive, compréhension procédurale, compréhension abstraite et compréhension formelle», comme le font les auteurs Bergeron et Herscovics (1989). L'identification des critères des diverses composantes nous permet d'observer les schèmes et les coordinations qui favorisent une évolution de la numération positionnelle et en facilitent la conceptualisation.

Précisons maintenant comment nous comptons utiliser ce modèle pour analyser le concept de numération positionnelle, puisque ce dernier, contrairement aux concepts déjà étudiés, s'appuie sur des concepts mathématiques (nombre et addition) et se développe avec eux conjointement.

Les deux aspects de la numération positionnelle, valeur et notation, font appel à la compréhension des petits nombres. Une compréhension des petits nombres est alors l'appui sur lequel il est possible pour l'enfant de construire le concept de numération positionnelle. Ainsi, alors que pour le concept de nombre, l'objet mathématique est la mesure d'une quantité représenté par le nombre, pour le concept de numération positionnelle, l'objet mathématique est l'unité de mesure de quantité (unité, dizaine, centaine...).

Ainsi, en s'appuyant sur le nombre, les critères du premier palier du concept de numération positionnelle introduisent un objet qui a déjà été considéré mathématique, la mesure de quantité représentée par le nombre. Il y a donc une modification dans la définition des composantes du premier palier formulée par Bergeron et Herscovics. Toutefois, l'idée de compréhension préliminaire du concept demeure présente. C'est pourquoi nous conservons l'idée et le vocabulaire proposé. Le nombre est à ce moment considéré comme un objet physique, comme l'illustre les résultats de Bergeron et al. (1986) sur la notation positionnelle, et non comme un symbole mathématique qui représente une quantité totale. En effet, dans le cadre de la construction du concept de numération positionnelle, une majoration des structures implique de prendre appui sur un schème déjà construit, le petit nombre par exemple, pour l'adapter aux grandes quantités d'objets. Une des déformations possibles au départ est alors liée à l'assimilation des nombres comme objets physiques. Les chiffres, considérés comme des objets physiques, se situent alors dans l'espace et le temps, un contexte logico-physique. C'est ce qui permet d'ailleurs à l'enfant de les concevoir comme une juxtaposition de chiffres lorsqu'il écrit des nombres.

Quant à la valeur positionnelle, à ce premier palier, elle réfère à des ensembles qui peuvent être comparés qualitativement ou dénombrés pour retrouver leur cardinal. Ainsi, au palier de la compréhension des concepts préliminaires, les deux aspects (la notation positionnelle et la valeur positionnelle) interviennent sans coordination. Ainsi, l'analyse conceptuelle réalisée tient compte de cette dissociation.

Au second palier, celui de la compréhension du concept mathématique émergeant, les chiffres représentent des unités de mesure de quantité qui se conservent et s'incluent les unes dans les autres. À ce moment, des opérations de réunion apparaissent, distinguant ainsi les observables du premier et du second palier. À ce titre, nous conservons aussi le vocabulaire utilisé par Bergeron et Herscovics. Le développement d'une compréhension du palier logico-mathématique permet à l'enfant de compléter sa construction des nombres par la coordination entre la valeur et la notation positionnelle, coordination facilitée par le comptage et les opérations. Les deux aspects, notation positionnelle et valeur positionnelle, sont alors en interrelation et ne peuvent être séparés dans l'analyse conceptuelle du concept.

Il nous semble important d'ajouter une remarque, générale, mais dont on retrouve toute l'implication dans un modèle comme celui-ci. La compréhension ne peut se transmettre. La volonté chez l'enfant d'une recherche de sens est nécessaire. Une intervention pédagogique ou orthopédagogique n'amènera que peu de résultat si l'enfant ne s'implique pas intellectuellement. Ainsi, si certaines tâches peuvent être proposées et réalisées, elles ne contribueront pas nécessairement à la construction de la compréhension du concept.

1.3.2.1 Palier logico-physique

Les critères de ce palier de la numération positionnelle pourront sembler logico-mathématiques. Rappelons que compte tenu de l'âge des enfants auxquels nous nous adressons et de leurs expériences scolaires, sociales et familiales, ce palier doit prendre en compte la construction du concept de nombre et les habiletés de comptage développées.

La théorie de Case (1982) a permis d'identifier le développement des habiletés de comptage à travers la séquence de développement des tâches mathématiques. Les recherches de Fuson et al.(1982) permettent de hiérarchiser les habiletés de comptage de la récitation de la comptine. Le «counting on» et la comptine des nombres sont des outils précieux qui permettent à l'enfant, par leur familiarité, de jeter les bases de la compréhension de cette composante. Pour Steffe et Von Glaserfeld (1985), le comptage est un schème fondamental. Fuson (1988) ajoute à ce propos que l'habileté de comptage supporte la construction du concept de la numération de la base 10. Les critères décrits pour ce palier nous permettent d'observer que le concept de numération positionnelle ne se développe pas seul mais en interaction avec le concept des petits nombres et les habiletés de comptage. À ce titre nous identifions les critères d'une compréhension du concept préliminaire de la numération positionnelle qui demeure logico-physique par l'organisation que l'enfant fait de ses schèmes et de ses structures, une organisation liée à l'espace et au temps.

1.3.2.2 La composante intuitive logico-physique

Les recherches de Sophian et Adams (1987), Gelman et Gallistel (1986), Young-Loveridge (1989), Bergeron et Herscovics (1989) démontrent que les enfants de trois ou quatre ans possèdent les notions de pluralité ou numérosité et les notions d'ordinalité ou de position.

A) Notation positionnelle

Le premier critère est l'observation selon laquelle plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand. Les expériences familiales et sociales de l'enfant peuvent être nombreuses à ce sujet. L'idée de notation positionnelle présente ici permet à l'enfant de concevoir les chiffres comme autant d'objets physiques qui composent un nombre. C'est la quantité plus ou moins grande de ces «objets» qui facilite une première comparaison entre deux nombres.

Plus il y a de chiffres dans un nombre, plus ce nombre est grand.

B) Valeur positionnelle

Le deuxième critère retenu est celui selon lequel l'enfant accorde un idée de quantité plus ou moins grande aux termes dizaine ou centaine, au sens où ces mots évoquent l'idée de groupement plus nombreux ou moins nombreux. Dans leurs travaux, Steffe et Von Glaserfeld (1983) voient d'ailleurs ce critère comme une première conception, suscitant une compréhension abstraite de la dizaine.

Les termes dizaine ou centaine ne sont pas encore conçus de façon formelle et s'assimilent aux expressions «peu, beaucoup» déjà retenues comme critère de la composante intuitive du nombre (Bergeron, Herscovics 1989). La compréhension de l'ampleur de ces groupements s'appuie sur la compréhension du contenu d'une collection. Ainsi, si une dizaine peut être conçue comme un groupe plus petit qu'une centaine, les termes comme million et mille pourront aussi être perçus comme étant des groupes d'objets très nombreux, sans être nécessairement conçus comme différents.

L'enfant attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux mots : dizaine, centaine, mille, million.

Le troisième critère permet à l'enfant de reconnaître l'existence de groupements dans des situations de la vie courante. Certains enfants, pour qui le regroupement ne représente qu'un pur artifice scolaire, ne reconnaissent souvent aucune utilité à ces groupements. L'enfant qui reconnaît l'existence des groupements aura observé le caractère commode de ces derniers (transport, évaluation, comparaison, comptage). Par exemple, l'enfant à qui on dira que chaque paquet d'oranges contient dix oranges, pourra savoir qu'il est plus rapide de compter par groupe de 10 que de compter un par un. Pour satisfaire ce critère, l'enfant doit alors avoir acquis une habileté avec la comptine des nombres.

L'enfant sait reconnaître l'existence et la commodité des groupements d'objets dans la vie courante.

1.3.2.3 La composante procédurale logico-physique

A) Notation positionnelle

Le premier critère est relatif à la lecture de nombres. Labinowicz (1985) signale d'ailleurs que les procédures pour lire et écrire sont basées sur la notation plus que sur ce qu'il appelle «le sens numérique».

L'enfant organise un grand nombre en groupant les chiffres du nombre à lire. Ce geste lui permet de grouper les chiffres, ce qui démontre l'organisation d'une procédure pour faciliter la lecture de grands nombres. Le fait que la perception de ces groupes de deux ou de trois chiffres soit instantanée rend cette procédure semblable au «subitizing» dont parlent Gelman et

Gallistel (1986). C'est d'ailleurs ce qui donne à ce critère son caractère logico-physique. Ce critère apparaît avec évidence dans les cas où les enfants doivent lire des nombres de cinq chiffres ou de plus de cinq chiffres alors que la coordination avec une procédure logico-mathématique, comme le tableau de numération, n'est pas en place. À ce moment, une organisation minimale facilite la lecture.

L'enfant regroupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre.

Le deuxième critère touche aussi la notation positionnelle. Pour écrire un nombre entendu, dicté ou illustré, l'enfant en juxtapose les éléments. La juxtaposition des chiffres dans la construction de nombre, correspond à la première compréhension de la notation positionnelle (Bergeron et al. 1986). Dans leurs travaux, Bednarz et Dufour-Janvier (1986) rapportent que l'écriture de nombre est vue comme un découpage, un alignement de chiffres, où prédomine l'ordre au détriment de la valeur attribuée aux termes unités, dizaines, centaines. Il s'agit donc d'un critère où il n'est pas encore possible de voir une coordination entre les deux aspects de la numération positionnelle, ce qui caractérise le palier logico-physique.

Par exemple, l'enfant écrit le nombre 6332 entendu, en ne retenant pour ce nombre, que le 6, le 3 et le 32. Le nombre 6332 est écrit sans tenir compte des termes «mille et cent». Des problèmes surgiront lorsqu'il voudra écrire des nombres où apparaît un zéro intercalaire comme pour le nombre 3025. Nous observons à ce moment des écritures comme 300025 ou 325. Labinowicz (1985) nous fait remarquer, à juste titre, que pour l'enfant qui apprend à écrire des nombres, «depuis que des symboles écrits correspondent aux mots de la récitation de la comptine des nombres, aucun symbole ne représente l'absence de nombre» (notre traduction, p.279).

Pour écrire un nombre l'enfant juxtapose ses éléments.

Le troisième critère est relatif à la comparaison entre des nombres. Différentes procédures sont possibles à ce palier. Des procédures de comptage peuvent être utilisées. Le comptage un par un, à rebours ou par bonds à partir d'un nombre jusqu'à un autre nombre (5067, 5068, 5069, 5070...5077) peut permettre de déterminer que le nombre qui vient après est plus grand.

Dans d'autres cas, des parties de nombres pourront être comparées soit en comptant (5067, 68, 69, 70...77), soit en observant uniquement les chiffres qui changent (6 est plus petit que le 7). Le fait de ne retenir que l'élément qui se modifie (67 ou 6) plutôt que l'ensemble du nombre (5067) indique une procédure différente de la récitation de la comptine des nombres.

L'enfant compare deux nombres en utilisant la récitation de la comptine des nombres ou en comparant les chiffres.

B) Valeur de position

Devant des objets en vrac, l'enfant regroupe en paquets de dix pour comparer, dénombrer ou illustrer des quantités. L'enfant compte ici en faisant correspondre aux mots de la récitation de la comptine soit un élément, soit un groupe. Ce critère permet aussi la comparaison mais ne fait pas intervenir la notation positionnelle. Il favorise plutôt l'émergence de l'idée de valeur attachée à un groupe ou à des éléments isolés.

L'enfant compte des éléments et forme des groupes pour comparer ou illustrer des quantités.

1.3.2.4 La composante abstraite logico-physique

A) Notation positionnelle

L'enfant généralise le nom des nombres connus aux nombres plus grands. Par exemple, le nombre soixante-sept sera composé des mêmes symboles (6 et 7) dans soixante-sept mille ou dans soixante-sept millions. Ainsi, la lecture du nombre 67 000 ou 67 000 000 est réalisée à partir de la généralisation du nom du nombre «soixante-sept». Cette généralisation peut donner lieu à certaines difficultés. Il est alors possible d'entendre des enfants lire le nombre 1162 : «Onze mille soixante-deux».

L'enfant généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres.

B) Valeur de position

Le deuxième critère est satisfait lorsque l'enfant illustre un nombre comme 126 et conserve la quantité indépendamment de la disposition de l'ensemble 126. Par exemple l'enfant confirme, sans avoir besoin de dénombrer, qu'une enveloppe de centaine, deux enveloppes de dizaines et six jetons représentent toujours la même quantité lorsque la centaine est défaite. Trois arguments permettent à l'enfant de constater cette conservation : l'identité (on a rien ajouté et rien enlevé), l'annulation (on peut refaire) ou la compensation (...mais...)

Les recherches de Gelman et Gallistel (1986) signalent l'apparition de ce type d'abstraction à la suite des principes de correspondance un-un (bijection), d'ordre stable (succession des termes) et de cardinal (le dernier terme vu comme englobant l'ensemble).

Cette conservation, une de celles mentionnées dans les travaux de Bergeron et Herscovics (1989) sur la compréhension des petits nombres, a été privilégiée. Puisque la compréhension de la numération positionnelle s'appuie sur celle du nombre, nous supposons que l'invariance de la quantité par rapport à l'ordre de comptage est déjà satisfaite. Toutefois, étant donné l'importance des unités de mesure de quantité comme la dizaine, la centaine... dans le développement de la numération positionnelle, il nous a semblé important de vérifier l'invariance d'une quantité non groupée et de la même quantité groupée.

L'enfant reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre.

Le troisième critère est celui qui permet à l'enfant d'établir des relations d'équivalence entre 10 éléments et 1 paquet de dix ou entre 1 paquet de dix et 10 éléments, entre 10 paquets de dix et 1 paquet de 100 et inversement. Copeland (1979) précise que la relation d'équivalence implique la comparaison entre deux ensembles dont l'organisation est différente. Ainsi, pour lui, ce type de conservation ne survient qu'après la conservation du nombre (de la pluralité) par rapport à l'organisation (p.121). Ces échanges entre 1 et 10 requièrent plus qu'une conservation puisqu'il ne suffit pas seulement de conserver l'idée de quantité : 1 paquet est toujours 10 éléments. Ce critère exige de l'enfant qu'il réalise, par la relation d'échange, et explique qu'il est toujours possible de retrouver les dix éléments en défaisant le paquet ou qu'il est toujours possible de faire un paquet de dix, même s'il ne le fait pas maintenant. C'est ce que nous appelons une réversibilité des transformations.

L'enfant reconnaît l'équivalence des quantités organisées différemment.

1.3.2.5 Palier logico-mathématique

À ce palier, la coordination grandissante entre les deux aspects de la numération positionnelle décimale, la notation positionnelle et la valeur positionnelle, ne permet plus de présenter les critères en les séparant. En effet, pour être efficace, les coordinations doivent peu à peu délaisser l'organisation des éléments et des groupes dans un espace (juxtaposition) ou dans un temps (chronologique). Ainsi, le comptage sert à réunir les groupes et les éléments puis est remplacé par les opérations. Ce qui permet de distinguer les critères de ce palier des critères du premier est alors l'opération de réunion entre les groupes et les éléments, opération qui leur donne une conservation.

1.3.2.6 La composante procédurale logico-mathématique

Le premier critère permet à l'enfant de reconnaître les positions des chiffres d'un nombre et d'attribuer un chiffre à chaque position et une position à chaque chiffre. Ainsi, le tableau de numération permet de coordonner les positions unité, dizaine, centaine à travers les différents ordres (unité, mille, million), avec les groupes de 10. Ces groupes deviennent alors des unités de mesure de quantité.

Il est alors possible pour l'enfant de concevoir une position devenue implicite à cause du 0. Par exemple, pour écrire le nombre 3025, l'enfant peut inférer la position des centaines et conserver la position en écrivant le zéro.

Dans le cas d'un nombre à lire, l'enfant fait correspondre un chiffre à chaque position, tenant compte des positions implicites et explicites. Le zéro se doit donc d'être considéré, à ce moment, comme un chiffre qui représente «rien de quelque chose».

L'enfant identifie et attribue un chiffre à chaque position et une position à chaque chiffre en utilisant le tableau de numération.

Le deuxième critère touche la recherche du cardinal. Deux types de procédure sont possibles pour cette composante. Premièrement, l'enfant adapte le comptage. Par exemple, la centaine peut être comptée par 1, par 10 ou par 100 ce qui permet de compter en disant: 10, 20, 30..., 100, 200, 300... ou 1, 2, 3... selon qu'on désire compter les dizaines, les unités ou les centaines elles-mêmes. Ce critère requiert une compréhension intuitive de l'addition des éléments et des groupes (10, 20, 30, 31, 32...) non plus comme une juxtaposition mais comme une réunion. Steffe et Von Glaserfeld (1985) considèrent le comptage comme un schème sensori-moteur qui précède l'opération unifiante. Cette procédure de comptage serait ainsi le premier pas qui introduit un geste, une action. L'opération d'addition devenant un geste «opératoire». Madell (1979) a étudié les modes naturels d'opération chez les enfants. Il a observé les régularités dans les types de raisonnement proposés par les enfants jusqu'à huit ans. Les opérations sont d'abord résolues par le comptage par 1 et par 10 pour l'addition, et le comptage à rebours pour la soustraction.

Deuxièmement, l'enfant pourra aussi tout simplement additionner les différentes unités de mesure de quantité pour retrouver le cardinal. Kamii (1990) et Labinowicz (1985) s'accordent d'ailleurs à dire l'importance des opérations d'addition et de multiplication dans la construction de la compréhension de la valeur positionnelle.

L'enfant trouve le cardinal d'une quantité en adaptant le comptage ou en utilisant l'opération d'addition.

Le troisième critère est celui qui permet à l'enfant de comparer des nombres et des unités de mesure de quantité. Par exemple, l'enfant compare 980 et 908 en observant le 8 des dizaines et le 8 des unités. Il pourra considérer plus grand le premier parce qu'il s'agit de dizaines ou de 80. Il réfère de façon explicite à la quantité représentée par la position.

L'enfant pourra aussi comparer 20 dizaines et 2 centaines puisqu'il pourra tenir compte non seulement du nombre 20 ou 2 mais simultanément des unités de mesure qui accompagnent ces quantités (dizaines, centaines).

L'enfant compare des nombres et des unités de mesure de quantité en référant à la quantité qu'ils représentent.

Le quatrième critère permet de trouver la dizaine ou la centaine, inférieure ou supérieure afin d'arrondir un nombre. À partir de la troisième année, des tâches semblables sont souvent sollicitées dans le but d'amener les enfants à estimer les résultats de leurs opérations. Différentes procédures sont possibles. L'enfant peut utiliser un matériel comme les billets de Monopoly ou le comptage par 10 ou par 100 à partir d'un nombre donné. L'enfant qui utilise «la règle du 5» pour arrondir utilise, à notre avis, une procédure logico-physique, puisqu'il compare les chiffres entre eux (il arrondit 578 à 600 parce que 5 est proche de 6) sans tenir compte de leur valeur relative.

Toutefois, seul le double-comptage permet à l'enfant de vérifier s'il a arrondi à la dizaine ou à la centaine la plus près. C'est ce double-comptage qui permet de mesurer les distances entre les dizaines ou les centaines supérieures ou inférieures. Dans une étude avec de jeunes enfants, Newman et Berger (1984) précisent que, pour eux, l'estimation permet à l'enfant de porter un jugement sur la numérosité. Les résultats de leurs travaux leur permettent de croire que la flexibilité dans la récitation de la comptine des nombres donne un avantage aux enfants pour estimer les nombres ordinaux.

> Pour arrondir un nombre, l'enfant trouve la dizaine, la centaine...inférieure ou supérieure avec un matériel, par comptage ou par double-comptage.

Le cinquième critère permet à l'enfant d'ajouter, d'enlever, de partager une quantité en appliquant les principes d'échange. Selon le matériel utilisé, deux niveaux de difficulté apparaissent. L'enfant qui ajoute, enlève ou partage des quantités sur des objets comme les jetons et les enveloppes observe une correspondance directe entre ce qu'il fait et la valeur des groupes. Dans le cas où les manipulations s'effectuent sur un abaque, ce critère devient formel, le matériel étant un code aussi symbolique que les chiffres des nombres.

> L'enfant ajoute, enlève, partage une quantité déjà groupée en tenant compte des relations d'échange.

1.3.2.7 <u>La composante abstraite logico-mathématique</u>

Le premier critère retenu permet de lire et d'écrire des nombres. Il s'agit pour l'enfant de généraliser aux ordres supérieurs (mille, million...) ce qui existait à l'ordre unitaire (un, deux...dix, vingt, trente...cent, deux cents...). Ce critère se distingue de celui du palier logico-physique par le fait qu'il requiert plus qu'une généralisation fidèle des mots qui existaient à l'ordre unitaire. Il demande une reconnaissance de la régularité des positions à travers les ordres.

> L'enfant généralise aux ordres des mille et des millions ce qui existait à l'ordre unitaire.

Le deuxième critère est celui qui permet à l'enfant de concevoir l'unité, la dizaine, la centaine... comme autant d'unités de mesure d'une quantité. Comme pour le concept de mesure, où un «étalon» comme le mètre ou le centimètre permet de construire des invariants, la numération positionnelle requiert la construction de la conservation des unités de mesure de quantité que sont la dizaine, la centaine...

Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette construction (Kamii et Joseph, 1988; Fuson, 1990; Ross, 1989). Construite sur le système de l'unité, la dizaine est «une structure conceptuelle de «multi-unité» qui requiert la capacité de voir les différentes grandeurs de multi-unité, de comprendre les mots du système de nombre et de comprendre les symboles du système de nombre» (Fuson, 1990, p. 273).

Steffe et Von Glaserfeld (1983) ont décrit, de façon théorique les diverses conceptions de la dizaine chez les enfants entre 3 et 7 ans. Le critère de la composante abstraite logico-mathématique est satisfait lorsque l'enfant sait que la dizaine maintient sa numérosité et qu'elle est une unité de mesure de quantité à la fois semblable et différente de l'unité. Si l'abstraction empirique permet de voir un nombre comme une composition d'unité, c'est l'abstraction réfléchissante qui permet de prendre ces unités comme matériel pour construire une unité qui les comprend.

L'enfant conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité invariante.

Le troisième critère permet à l'enfant de concevoir que l'unité de mesure de quantité comme la centaine, par exemple, ne contient pas uniquement des groupes de dix mais aussi et simultanément des unités. Cette transitivité est une forme de composition des transformations qui permet à l'enfant de comprendre l'inclusion des unités dans les groupes formés de groupes. L'enfant sait l'unité, toujours présente dans la centaine ou dans l'unité de mille... et peut additionner les différentes unités de mesure d'un nombre pour les retrouver.

Pour Vergnaud (1991) l'élaboration d'invariant, un instrument central dans la construction de la représentation, permet la compréhension de l'unité comme unité itérative puis unité de mesure interchangeable. C'est cette conception itérative et inclusive des unités de mesure que nous retrouvons ici.

L'enfant reconnait l'inclusion des différentes unités de mesure (dizaine, centaine, unité de mille...)

1.3.2.8 La composante formelle logico-mathématique

Le premier critère permet à l'enfant d'utiliser de façon conventionnelle les termes dizaine, centaine, unité de mille et d'y associer les groupements correspondants. Ce qui permet de distinguer ce critère de celui que nous retrouvons pour la composante intuitive, est la compréhension de ces termes comme représentant non seulement des groupements plus ou moins grands, mais des unités de mesure de quantité.

L'enfant emploie de façon conventionnelle les termes unité dizaine, centaine, unité de mille..., unité de million...

Le deuxième critère regroupe des activités comme la lecture, l'écriture des nombres et la facilité à ordonner des nombres. Pour cette composante, l'enfant tient compte de la valeur de position autant que de la notation positionnelle. C'est ce qui permet à l'enfant de considérer la notation positionnelle comme une convention de langage qui facilite la communication dans un monde mathématique, ce qui correspond à la dernière étape de la compréhension de la notation positionnelle selon les travaux de Bergeron et al. (1986).

L'enfant lit, écrit et ordonne des nombres en tenant compte des deux aspects de la numération positionnelle.

Le dernier critère est celui qui permet à l'enfant d'accorder une valeur relative aux chiffres d'un nombre. Il permet à l'enfant de savoir que plus un chiffre est à gauche plus grande est sa valeur. Ainsi, l'enfant sait que le 4 de 49 a une valeur supérieure à 9 ou que le 1 de 129 donne une valeur supérieure à 29 et ce même si ce chiffre est plus petit. Ainsi, lorsque l'enfant décompose, opère, trouve le nombre d'unités, de dizaines, de centaines...dans un nombre, il actualise sa compréhension de la valeur relative des chiffres dans un nombre.

L'enfant donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre.

1.4 Question de recherche

Très tôt, dans les classes, il est proposé à l'enfant une représentation de la quantité qui n'est pas à discuter et qui ne provient pas d'une nécessité logique. Elle est transmise socialement d'abord, puis par l'enseignant. On prend alors pour acquis que les illustrations représentent les manipulations effectuées et que les chiffres représentent ces illustrations. L'enfant «associe» donc perceptuellement ces illustrations aux chiffres qui les représentent. Dans ce cas, aucune nécessité n'apparaît et l'enfant pourra réussir les tâches qu'on lui soumet. Le cas de Benny en est un exemple (Erlwanger, 1973). Cet enfant parvenait à résoudre des problèmes et à «performer» en regard de ses résultats scolaires. Toutefois, au moment où on a commencé à le questionner sur ses procédures et ses représentations, les règles et les procédures utilisées démontraient une utilisation des symboles «sans sens» mathématique.

Au chapitre de la numération positionnelle, c'est au moment où apparaît l'apprentissage des nombres à trois chiffres, où les opérations exigent des transformations comme l'emprunt et la retenue et où on interroge l'enfant sur ses procédures et ses représentations, que des difficultés apparaissent. Les associations, facilitées par la mémoire, ne suffisent plus à résoudre les nouveaux problèmes. Dans la façon de résoudre les problèmes posés et dans la façon de les expliquer, nous voyons se construire les structures et les schèmes qui favorisent une conceptualisation de la numération positionnelle chez l'enfant.

Dans le cadre de cette recherche, le langage, l'illustration par le dessin et la manipulation d'objets permettent d'identifier les représentations mentales et les coordinations sur lesquelles l'enfant s'appuie pour construire des structurations de mieux en mieux adaptées aux problèmes posés. Ces représentations et ces coordinations faciliteront l'identification des critères présents, permettant de trouver ce sur quoi les enfants s'appuient. Ces représentations et ces coordinations favoriseront aussi la visibilité de ce dynamisme qu'est l'abstraction réfléchissante, permettant d'étudier comment les critères évoluent. Rappelons que l'abstraction réfléchissante de Piaget (1977a) comporte deux mouvements, le transfert ou réfléchissement et la réflexion ou construction. Dans le cas des enfants du primaire, une coordination entre le transfert et les régulations permet la réflexion, une forme particulière d'abstraction réfléchissante appelée abstraction pseudo-empirique.

Kamii et De Clark (1985) signalent que la principale difficulté relative à l'abstraction réfléchissante dans la compréhension logico-mathématique consiste à construire une structure où interviennent les relations d'inclusion, différentes de celles des inclusions de classe basées sur des différences qualitatives. L'enfant ne pourra construire une compréhension des grands nombres à partir d'objets ou d'images. Les procédures, que cette compréhension induit, deviennent coûteuses et inefficaces. La compréhension des grands nombres demande une abstraction réfléchissante plus sophistiquée.

Saada-Robert (1986) fait remarquer avec justesse que «l'abstraction nécessaire à la construction d'un nombre est en même temps une force et un abus, dans le sens qu'elle suppose une perte de contenu d'où est issu ce nombre et que, de ce fait, elle entraîne de nombreux glissements entre contenus possibles» (p.112). L'hypothèse de cette recherche voit l'abstraction réfléchissante, telle que la définit Piaget (1977), comme le levier qui permet la coordination et l'intégration des différentes composantes de la compréhension du modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Voyons comment s'effectuera le passage de structurations partielles, amenées par la satisfaction de certains critères sans pour autant contribuer à trouver des solutions qui démontrent une compréhension complétée, vers des structurations généralisables et durables, qui indiquent une compréhension complétée. Le but de cette étude est de répondre à la question de recherche suivante : <u>Dans une situation de dialogue entre l'orthopédagogue et un enfant en difficulté d'apprentissage pour le concept de numération positionnelle, comment s'effectue le passage de structurations partielles vers des structurations généralisables et durables?</u>

CHAPITRE 11

LA MÉTHODE

2.1 Justification du choix de la méthode par étude de cas

La didactique des mathématiques est un domaine de recherche qui se développe grâce à plusieurs disciplines comme l'expliquent entre autres Lester (1992) et Boero (1992). La psychologie, la philosophie, l'anthropologie, l'histoire, la sociologie contribuent, par leurs traditions de recherche respectives, à l'élaboration et à l'enrichissement de méthodes de recherche en didactique des mathématiques. La nature des questions posées et leur formulation sont des aspects qui permettent de déterminer le choix de la méthode à privilégier. Examinons ces deux aspects pour les besoins de cette recherche.

La nature de la question de cette recherche explore d'abord le mode de compréhension d'une clientèle particulière d'enfant : les enfants en difficulté d'apprentissage. Ceux qui ont été rencontrés, ont vécu les mêmes situations d'apprentissage que les camarades de leur classe. Toutefois en fin d'année, contrairement à la majorité des enfants de leur classe, ils sont incapables de réutiliser ces apprentissages.

Cette recherche explore d'abord ce qu'ils comprennent. La nature de ces compréhensions apparaît davantage dans des entrevues, où ils peuvent s'exprimer verbalement et gestuellement, que dans des tests écrits. De plus, les entrevues favorisent l'observation des procédures utilisées par l'enfant pour résoudre des problèmes.

Cette recherche explore aussi le processus d'apprentissage de ces enfants. L'exploration de ce processus d'apprentissage est rendue possible par un entretien avec ces enfants. L'apprentissage étant un phénomène individuel, il nous paraît judicieux de privilégier une méthode de recherche par étude de cas pour répondre aux deux volets de notre question de recherche.

Les élèves référés en orthopédagogie éprouvent une ou plusieurs difficultés. Le plan d'action mis en place doit alors tenir compte de leurs particularités. Différents modes d'intervention sont possibles : des interventions à l'intérieur de la classe, des interventions en petits groupes ou des interventions individuelles. Chacun de ces modes d'intervention offre des avantages et des inconvénients.

Les interventions à l'intérieur de la classe facilitent la construction de compréhensions sur des problèmes posés par l'enseignant, qui seront vraisemblablement revus plus tard. Ces interventions permettent aussi à l'enfant de sentir qu'il lui est possible d'apprendre dans le contexte habituel de la classe. Ces interventions nécessitent une coordination entre l'orthopédagogue et l'enseignant. Cette coordination est nécessaire non seulement pour organiser les notions à l'étude mais également pour déterminer les moments où auront lieu ces rencontres. Cependant, les problèmes des enfants doivent être légers et ponctuels si nous voulons profiter des situations proposées par l'enseignant dans sa classe, afin d'éviter l'utilisation de situations parallèles. Prenons l'exemple d'un enseignant qui prépare une situation dans laquelle la multiplication ou la division est privilégiée. Il serait souhaitable alors que les enfants satisfassent certains critères de la compréhension de la numération positionnelle. Lorsque l'écart entre la tâche proposée et les compréhensions de l'enfant est trop grand, l'orthopédagogue se trouve confrontée à un dilemme : soutenir l'enfant dans l'utilisation d'une procédure, comme un algorithme de multiplication, ou revenir sur les critères d'une compréhension préalable, comme ceux de la numération positionnelle. Revenir sur ces critères peut impliquer un long détour avant d'aboutir à la compréhension du concept à l'étude. Ce détour ne permettra pas toujours de revenir à la notion de départ durant le temps passé en classe, et ce, pour différentes raisons. Le problème peut être apparu à la fin de la séance, l'enfant est distrait par ses amis qui vont plus vite, l'exploration de la notion préliminaire est plus longue que prévue... Compte tenu du fait que nous ne désirons pas nous limiter, dans l'exploration des problèmes d'apprentissage des enfants, ce mode d'intervention ne sera pas privilégié.

Les interventions en petits groupes peuvent être réalisées en classe ou dans un local isolé. Ce mode d'intervention a l'avantage de favoriser les échanges entre les enfants. Nous avons déjà pu observer de nouvelles constructions à ces moments, parce que les enfants se «comprennent» mieux entre eux. La coordination entre l'enseignant et l'orthopédagogue est encore nécessaire. Elle permet de déterminer le moment de l'intervention de même que son contenu. Une coordination supplémentaire est exigée dans ce cas. D'une part, il est souhaitable que les enfants de ce groupe aient des difficultés semblables. À ce moment, chacun d'entre eux se sent concerné à tous les moments de l'entretien. D'autre part, il est difficile pour les enfants en difficulté d'apprentissage de distinguer les informations dont ils ont vraiment besoin pour résoudre leurs problèmes de celles qui sont accessoires. Si certains enfants de ce groupe deviennent distraits et perdent de l'intérêt, à nouveau, parce que les interventions sont trop éloignées de leurs connaissances et de leurs compréhensions, ou qu'ils ne peuvent relever des défis à leur taille, ils n'auront pu bénéficier de cette intervention. Vygotsky (traduit par Sève, 1985) mentionne d'ailleurs l'importance de cet écart lorsqu'il est question de zone de proche développement. Pour ces raisons, ce mode d'intervention n'est pas privilégié au cours de cette recherche.

Les interventions individuelles demandent aussi une coordination entre l'enseignant et l'orthopédagogue, autant au niveau des notions travaillées en classe qu'à celui des moments des interventions. Les avantages de ce mode d'intervention se situent au niveau de la grande souplesse dans l'exploration des «incompréhensions persistantes» de l'enfant et dans le temps permis pour la construction ou l'organisation de ses schèmes. Les inconvénients portent sur la difficulté à réutiliser les procédures explorées ou à généraliser les notions, dans les cas où la construction ou l'organisation de schèmes n'est pas terminée. Ce troisième mode d'intervention semble le plus pertinent pour répondre à la question de recherche. Il permet également la souplesse dont nous avons besoin au niveau de l'exploration du processus d'apprentissage.

Dans le cas de cette recherche, deux buts sont poursuivis. Le premier est l'observation de la compréhension des enfants en difficulté d'apprentissage pour un concept précis : la numération positionnelle. Le deuxième est l'exploration de leur processus de construction dans une situation de rééducation. Le mode d'intervention individuel facilite la concentration sur un seul concept, ce qui n'est pas toujours le cas lors d'une intervention en classe ou en petits groupes. Tout en ne niant pas que ces interventions de rééducation puissent contribuer à la construction de structurations généralisables dans des situations de la classe, nous espérons d'abord observer l'évolution de ces structurations.

L'étude de cas, en plus d'être un mode d'investigation important dans la pratique orthopédagogique, est aussi une méthode de recherche (Yin 1981, 1984; Stenhouse, 1988). Comme le soulignent Lessard-Hébert <u>et al.</u> (1990) : «L'étude de cas se caractérise par le fait qu'elle réunit des informations aussi nombreuses et aussi détaillées que possible en vue de saisir la totalité d'une situation».(p.165)

Yin (1984) considère l'étude de cas comme une véritable méthode de recherche parce qu'elle comprend des éléments méthodologiques comme la planification, la cueillette et l'analyse de données. Il précise que c'est au cours de la planification qu'apparaît l'étude des théories existantes et la formulation de la question de recherche. La cueillette de données touche le choix des sujets et la précision des protocoles de collecte de données. Cette cueillette des données s'effectue au moyen d'entrevues, d'observations et de documents. Quant à l'analyse de données, dans un premier temps, il ne s'agit pas de découvrir des relations de cause à effet, mais plutôt de comprendre les phénomènes observés et d'identifier de nouvelles composantes ou de nouveaux facteurs (Lauer et Asher, 1988).

Ainsi, avant d'arriver à des connaissances plus générales à propos des difficultés que rencontrent les enfants pour le concept de numération positionnelle, il nous a semblé important de nous arrêter à des cas particuliers, la pensée de l'enfant étant individuelle. Pour toutes ces raisons, la méthode de recherche par étude de cas s'impose à nous.

Les deux buts de cette recherche sont l'évaluation et l'intervention. À cet effet, tant pour le volet évaluation que pour le volet intervention, deux types d'entrevues semi-standardisées ont été utilisés : la méthode clinique développée par Piaget et l'expérimentation didactique éprouvée par Menchinskaya et Moro (1975).

2.2 L'évaluation par la méthode clinique

Parmi les modes d'évaluation possibles, le choix de la méthode clinique de Piaget s'est imposée. Les examens écrits traditionnels et par objectifs ont été écartés car il est le plus souvent très difficile, sinon impossible, de cerner la pensée de l'enfant dans des écrits qui demeurent habituellement très sommaires. La méthode de recherche par l'analyse des erreurs, exige que l'on attende que se produisent des erreurs ne retenant que celles-ci comme indices. La méthode clinique permet une vision plus globale de la situation de l'enfant.

Le principe de base de la méthode clinique de Piaget est l'entretien individuel. Issue à la fois de l'observation critique, où l'accent est mis sur l'observation naturelle, et de l'entretien clinique, où on privilégie le dialogue, elle permet d'explorer la pensée de l'enfant. Elle part de l'observation de l'action de l'enfant. La méthode clinique pose un postulat. Les actions des enfants se situent à l'intérieur d'une logique naturelle. Ashlock (1982) remarque d'ailleurs que les erreurs observées chez les enfants en difficulté d'apprentissage ne sont pas le fruit du hasard.

L'avantage principal de ce type d'entrevue réside dans le fait qu'il est un instrument de recherche cognitive et ce, tant pour les recherches qui tentent de découvrir les processus cognitifs utilisés par l'enfant, que pour celles qui cherchent à décrire clairement sa pensée (Ginsburg, 1981).

Son aspect semi-standardisé la rend souple et permet d'aller au-delà des procédures observables pour explorer les raisonnements qui les ont amenées. L'entrevue clinique permet de cerner les schèmes déjà construits, puisqu'il est demandé à l'enfant de réfléchir «à voix haute», d'élaborer des explications qui supportent ses jugements ou ses prédictions. La très grande flexibilité de ce type d'entrevue permet de réduire l'anxiété de l'enfant et de créer une atmosphère plus relaxante que celle d'un test standardisé. L'enfant a ainsi plus de facilité à coopérer et à s'exprimer.

Les difficultés reliées à la méthode clinique de Piaget proviennent principalement de deux sources. Une première est créée par la différence de sens qu'accordent l'enfant et l'adulte à un mot ou à une situation. En regard de cette première difficulté, les chercheurs de l'école de Genève suggèrent de procéder à la validation des informations recueillies. L'emploi d'arguments ou de suggestions contradictoires, de recoupement de situations ou de problèmes et le prolongement du questionnement lorsqu'il y a doute sur l'interprétation à donner à une réponse, sont autant de moyens de vérifier l'information recueillie.

Une deuxième difficulté est liée à la difficulté pour l'enfant de verbaliser ses pensées. Nantais (1983) a bien décrit ce qui peut provoquer des réponses de type «n'importequisme» (l'enfant répond n'importe quoi), fabulation (l'enfant invente une histoire) ou croyance suggérée (l'enfant cherche à faire plaisir à l'examinateur). Toutefois, les raisonnements s'observent non seulement par le discours, mais aussi par l'action au cours de la manipulation d'objets. Ainsi, il est possible de distinguer ces types de réponse de ceux qui sont issus du raisonnement de l'enfant.

Ce type d'entrevue permet une évaluation interactive des compréhensions des enfants. Opper (1977) ajoute que l'interviewer doit conserver une attitude d'explorateur qui infère les faits et formule des hypothèses originales. C'est donc dire que les questions préparées pourront voir leur ordre modifié, afin d'adapter l'entrevue à la démarche de l'enfant. Elles pourront aussi être complétées pour vérifier une hypothèse.

Nous utilisons ce type d'entrevue comme évaluation initiale et finale de la compréhension des enfants. Elle sert ainsi à déterminer les structurations partielles des enfants, celles qui sont difficilement généralisables. Elle sert aussi à observer les structurations généralisables qui pourraient s'être construites au cours des entrevues de rééducation.

Pour utiliser cette méthode semi-standardisée, le modèle de compréhension élargi de Herscovics et Bergeron (1989) constitue un outil important. La formulation des questions s'appuie à la fois sur les résultats observés à la suite d'une première recherche de maîtrise (DeBlois 1990) et sur la recension des écrits de la présente recherche. Les questions portant sur les habiletés de comptage, les critères de la composante formelle comme la lecture et l'ordre des nombres, puis sur des critères de la composante abstraite du palier logico-mathématique permettent de commencer l'entrevue. Elle se poursuit par des questions portant sur des composantes intuitives, procédurales et abstraites du palier logico-physique. Finalement, les questions portant sur des critères de la composante procédurale et formelle du palier logico-mathématique terminent l'entrevue. Ce va-et-vient entre les deux paliers permet à l'enfant en difficulté d'apprentissage de reconnaître des tâches familières (lire, ordonner, trouver le nombre d'unités), d'expliquer ses difficultés, de démontrer ses compétences par des critères de la composante procédurale logico-physique, avant de travailler sur des tâches inhabituelles (invariance, conservation, équivalence). De plus, ce va-et-vient s'avère nécessaire puisque dans l'activité scolaire, on ne peut découper de façon catégorique les procédures et les abstractions logico-physiques et logico-mathématiques qui interviennent dans la résolution des problèmes posés.

Les difficultés éprouvées par les enfants leur sont habituellement soulignées. Ainsi l'enfant peut saisir ce qui est en train de se passer et l'orthopédagogue s'assure qu'il comprend et adhère aux buts des interventions de rééducation.

L'entrevue, d'une durée approximative de 40 minutes, est réalisée avec du matériel comme des jetons et des enveloppes de différentes grandeurs, des cubes multi-bases et un abaque. Ce matériel est exploré par l'enfant et reste sur la table tout au long de cette entrevue.

2.2.1 Questions de l'entrevue clinique

La structure de l'entrevue regroupe les questions prédéterminées, suivies de réponses possibles que les enfants peuvent donner (A, B, C..). Les questions prévues cherchent à savoir si les enfants satisfont les critères des différentes composantes de l'analyse conceptuelle pour le concept de numération positionnelle. Ainsi, le critère visé est encadré au-dessus de chacune des questions. Des questions, portant sur les habiletés de comptage, précèdent l'observation des critères des différentes composantes. L'analyse conceptuelle nous a d'ailleurs permis d'illustrer l'importance de ces habiletés dans la construction du concept à l'étude.

La présentation de l'entrevue décrite ci-dessous présente les questions de la composante formelle à la composante intuitive. Rappelons toutefois qu'en cours de l'expérimentation, l'ordre des questions a été adapté. De questions portant sur les habiletés de comptage, nous avons poursuivi l'entrevue par des questions portant sur la composante formelle, comme la lecture et l'ordre des nombres, puis sur la composante abstraite du palier logico-mathématique. Ensuite les questions ont porté sur les critères des trois composantes du palier logico-physique et enfin sur les critères des composantes procédurale et formelle du palier logico-mathématique. Enfin, soulignons qu'il est possible d'observer plus d'un critère lors d'une activité.

2.2.1.1 Habiletés de comptage

1 Demander à l'enfant s'il a déjà compté ou écrit de grands nombres, puis lui proposer de compter par 1 et par 10 à partir de 110 (3e année), de 1110 (4e ou 5e année).

A. compte par 1 à partir d'un nombre donné
   compte par 1 à partir de 0
B. compte par 10 à partir de 110 et conserve la régularité
   compte par 10 à partir de 110 sans conserver la régularité
   compte par 10 à partir de 10 et conserve la régularité
   compte par 10 à partir de 10 sans conserver la régularité

2 Demander à l'enfant de compter de 108 à 115 (3e année) ou de 1008 à 1015 (4e ou 5e année) et de dire le nombre de pas entre les deux nombres.

A. compte de 108 à 115 ou de 1008 à 1015 et dis le nombre de pas
B. compte à partir de 108 ou de 1008 -mais oublie de s'arrêter ou oublie de compter les pas

2.2.1.2 Composante formelle

L'enfant lit, écrit et ordonne des nombres en tenant compte des deux aspects de la numération positionnelle.

1. Proposer à l'enfant de piger des cartons qui sont dans une boîte et de lire les nombres qui sont tirés au hasard. Demander à l'enfant si des nombres sont plus faciles à lire que d'autres et pourquoi?
3e année 306, 207, 131, 207
4e année ajouter 1098, 1198, 908, 908
5e année ajouter 10 198, 70 089, 1 002 148

A. l'enfant lit tous les nombres facilement
B. l'enfant lit les nombres selon une convention qui lui est personnelle (ne tient pas compte du 0, permute les chiffres d'un nombre...)
C. l'enfant ne sait pas lire les nombres plus grands que 1000.

2. Proposer à l'enfant de placer les nombres lus en ordre décroissant et d'expliquer sa procédure (compare les nombres, compare les chiffres des nombres, compare la longueur des nombres).

A. l'enfant ordonne avec précision et rapidité.

B. l'enfant procède par essais et erreurs

C. l'enfant ordonne en ordre croissant de droite à gauche

4. Demander à l'enfant d'écrire les nombre 709, 613, 497 (3e année), ajouter 1012, 3 105 (4e 5e année)

A. l'enfant écrit tous les nombres facilement

B. l'enfant permute des chiffres, oublie les 0, confond 87 et 97

L'enfant donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre.

4. Montrer le nombre 222 (3e année) et 2202 (4e ou 5e année) et demander: est-ce que les 2 valent la même chose? Que valent-ils? Comment le sais-tu?

A. l'enfant reconnaît la valeur relative à la position des chiffres.

B. l'enfant dit que c'est la même chose.

L'enfant emploie de façon conventionnelle les termes unité dizaine, centaine, unité de mille..., unité de million...

5. Demander à l'enfant retrouver tous les cartons avec lesquels il est possible de former le nombre 709. Proposer les cartons 700, 700 unités, 9, 9 unités, 70 dizaines, 7 centaines, 10 dizaines, 7x100. Lui demander quelle opération permet de réunir ces cartes.

A. l'enfant trouve toutes les décompositions possibles et identifie l'opération d'addition

B. l'enfant ne reconnaît pas que 70 dizaines représentent le nombre 700, mais reconnaît l'opération d'addition

C. l'enfant trouve toutes les décompositions possibles et ne reconnaît pas l'opération d'addition

D. l'enfant ne trouve pas toutes les décompositions possibles et ne reconnaît pas l'opération d'addition

2.2.1.3 Composante abstraite logico-mathématique

L'enfant reconnait l'inclusion des différentes unités de mesure (dizaine, centaine, unité de mille...)

6. Montrer le nombre 908 (3e année), 70 089 (5e année) et demander ce que veut dire le zéro.

A. l'enfant reconnaît que le 0 indique une position, et ajoute que les unités de mesure ont été regroupées ailleurs.
B. l'enfant ne comprend pas à quoi sert le 0 (ça ne vaut rien, ça veut dire «rien»)

7. Montrer le nombre 222 (3e année) 2202 (4e 5e année) écrit sur un carton et demander combien il y a de dizaines en tout dans ce nombre, comment il le sait?

A. 22 (220), réponse exacte en additionnant les unités de mesure
B. 2 (0), ne désigne que la position
C. 20 (0), donne la valeur du chiffre dans le nombre
D. 22 (220) l'enfant désigne les chiffres en les juxtaposant

8. Demander combien il y a d'unités en tout dans ce nombre et comment il le sait?

A. 222 (2202), réponse exacte
B. 2 (2), ne désigne que la position
C. 2 (2) donne la valeur du chiffre dans le nombre

L'enfant conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité invariante.

9. Demander à l'enfant de faire une dizaine et une centaine à l'aide des jetons et des enveloppes, puis lui montrer des dizaines déjà faites à l'avance. (Cette proposition vise à observer si l'enfant se souvient de ce que sont des dizaines et des centaines). Si je te montre cela (un paquet de 10), comment l'appelles-tu?

A. l'enfant l'appelle une dizaine.
B. l'enfant l'appelle 10 dizaines
C. l'enfant l'appelle 10.

2.2.1.4 Composante procédurale logico-mathématique

L'enfant compare des nombres et des unités de mesure de quantité.

10. Dis-moi si:
- 20 unités est plus petit, plus grand ou égal à 2 dizaines.
- 20 dizaines est plus petit, plus grand ou égal à 20 unités.
- 20 dizaines est plus petit, plus grand ou égal à 2 centaines.

A. l'enfant compare les quantités en coordonnant les unités de mesure et les nombres
B. l'enfant ne tient compte que des nombres
C. l'enfant ne tient compte que des unités de mesure.

L'enfant ajoute, enlève, partage une quantité déjà groupée en tenant compte des relations d'équivalence.

11. Demander à l'enfant d'enlever 20 au nombre 234 (3e année) 2234 (4e ou 5e année) et de trouver le reste. Le matériel (jetons, enveloppes) est à sa disposition.

L'enfant trouve le cardinal d'une quantité en adaptant le comptage ou en utilisant l'opération d'addition.

Demander ensuite quel est le nouveau nombre obtenu.

A.l'enfant trouve le nombre 214 (2214) avec un matériel ou sans matériel.

B.l'enfant trouve un autre reste

- -il enlève 20 à 23.
- -il enlève 2 à 234
- -il illustre le nombre, enlève 20 mais ne peut lire le reste
- -il illustre le nombre, enlève 2 unités

Pour arrondir un nombre, l'enfant trouve la dizaine, la centaine...inférieure ou supérieure avec un matériel, par comptage ou par double-comptage.

12. Demander à l'enfant d'arrondir le nombre 3105 à la centaine près, le nombre 497 à la centaine près.

A. il arrondit à 3100 et à 500 - en comparant les nombres
- en utilisant la règle du 5

B. il arrondit à 3000 et à 400

L'enfant identifie et attribue un chiffre à chaque position et une position à chaque chiffre en utilisant le tableau de numération.

14. Observer les explications verbales en regard des questions 1 et 7.

2.2.1.5 Composante abstraite logico-physique

L'enfant reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre.

14. Demander à l'enfant d'illustrer le nombre 202 (3e année) ou 2202 (4e 5e année) avec le matériel de son choix. Vider une enveloppe de centaine sur la table ou transformer une centaine en 10 dizaines sur l'abaque et demander à l'enfant s'il y a toujours 202 (2202) sur la table.

A. l'enfant reconnaît qu'il y a la même quantité.
B. l'enfant dit qu'il y en a plus parce qu'il y a plus d'enveloppes ou d'anneaux.
C. l'enfant dit qu'il y a en moins parce qu'il manque 1 centaine.

L'enfant reconnaît l'équivalence des quantités organisées différemment

15. Raconter l'histoire suivante à l'enfant. Tu rencontres un jour 3 bonhommes très riches. Un des bonhommes a 3 paquets de 10, l'autre a 2 paquets de 10 et 10 jetons, le troisième a 30 jetons. Lequel est le plus riche? Comment le sais-tu? (Pour les 4e et 5e année remplacer les paquets de 10 par des paquets de 100).
Pour la dernière entrevue, parler d'une exposition de macarons.

A. l'enfant croit que les trois sont aussi riches les uns que les autres.
B. l'enfant croit que celui qui a 30 jetons est le plus riche.
C. l'enfant croit que celui qui a des paquets avec des jetons est le plus riche.

2.2.1.6 Composante procédurale logico-physique

L'enfant compte des éléments et forme des groupes pour comparer ou illustrer des quantités.

16. Demander à l'enfant d'illustrer le nombre 234 (3e année) 2202 (4e 5e année) avec le matériel de son choix.

A. l'enfant illustre en comptant par 1 ou par 10 les groupes et les éléments
B. l'enfant illustre mais dénombre difficilement les groupes et les éléments
C. l'enfant confond les unités et les dizaines ou les dizaines et les centaines.

Pour écrire un nombre l'enfant juxtapose ses éléments.

17. Observer la procédure qui permet d'écrire (question 3) et d'illustrer un nombre (questions 14-15-16).

L'enfant compare deux nombres en utilisant la récitation de la comptine des nombres ou en comparant les chiffres.

18. Observer la procédure ayant permis de placer en ordre décroissant (question 2).

L'enfant regroupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre.

19. Demander ou observer la procédure ayant permis de lire les nombres (question 1).

2.2.1.7 Composante intuitive logico-physique

L'enfant sait reconnaître l'existence et la commodité des groupements d'objets dans la vie courante.

20. Demander à l'enfant de montrer ou de nommer des objets de la maison, de la classe, du local ou de l'épicerie qui sont regroupés en paquet. Demandez-lui de dire le nom qu'on donne à ces groupes.

A. l'enfant trouve des objets groupés et identifie le nom du groupement
B. l'enfant ne connaît pas le nom des différents groupements

21. Demander à l'enfant quelle est l'utilité de tel groupement.

A. l'enfant y trouve un côté commode comme le comptage, le transport, la comparaison, l'évaluation.
B. l'enfant ne trouve pas un côté commode

Plus il y a de chiffres dans un nombre, plus ce nombre est grand.

22. Observer la procédure de la question 2 (plus il y a de chiffres plus le nombre est grand).

L'enfant attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux mots : dizaine, centaine, mille, million.

23. Observer les explications données lors des questions 4-5 et 10.

L'incapacité à satisfaire les critères des composantes sont autant d'éléments permettant de choisir les thèmes sur lesquels portent les interventions. Ainsi, il est possible de choisir des interventions adaptées et de commencer les expérimentations didactiques par des questions qui raffinent et précisent les observations réalisées, ce qui permet de personnaliser l'intervention.

2.3 L'intervention par l'expérimentation didactique

Il nous fallait choisir une approche cohérente avec la perspective constructiviste, c'est-à-dire qui permette à l'enfant d'être le constructeur de sa compréhension et qui nous facilite l'appui dans cette construction. Selon Ashlock (1982) les principes d'une intervention corrective devraient être, entre autre, une intervention basée sur le diagnostic, qui s'assure que l'enfant comprend le processus avant de lui donner des pratiques, qui permet à l'enfant d'observer ses progrès, qui personnalise l'intervention, qui dispose l'intervention de façon à y sous-tendre les concepts et les procédures connus de l'enfant.

Une méthode s'est alors imposée, celle développée par Menchinskaya et Moro (1975), fortement influencée par les travaux de Vygotsky. Elle est appelée tantôt «expérimentation didactique à la soviétique» (Kieran, 1985; Kantowski, 1978; Rachlin, 1979) ou «expérimentation didactique constructiviste» (Steffe, 1983). Elle se distingue de l'entrevue clinique par le fait que le but poursuivi n'est plus seulement l'observation de l'enfant. Elle intègre l'intervention et permet l'observation du développement de l'enfant sous l'influence de cette intervention. Ainsi, l'introduction de suggestions est souhaitable.

Pour les tenants de cette méthode de recherche, tous les enfants ont le même potentiel d'apprentissage sauf, les cas particuliers d'enfants présentant des dommages organiques ou des retards sévères. L'instruction est vue comme le facteur majeur de l'actualisation du potentiel intellectuel. Elle ne facilite pas seulement l'acquisition de la connaissance mais aussi le développement de la personnalité.

L'expérimentation didactique permet d'observer les forces et les limites d'une intervention pédagogique, sur le développement mental des enfants. Plus près de nous, des chercheurs qui se sont penchés sur le développement de la compréhension de concepts (Boukhssimi 1990, Héraud 1992) ont utilisé des variations de ce modèle pour effectuer leurs recherches. En classe, en petites groupes ou individuellement, les interventions menées à l'aide de cette méthode ont une durée variable, mais tendent toutes vers une majoration des schèmes des enfants.

Les caractéristiques de cette méthode «dynamique» sont sa nature longitudinale, la planification qu'elle exige et la coopération qu'elle nécessite entre les enseignants et les chercheurs. Menchinskaya (1969) souligne «l'introduction de stades préliminaires d'étude dans lesquels l'information initiale, les habiletés, les aptitudes nécessaires pour maîtriser le nouveau matériel sont prises en compte et hiérarchisées» (p.6, traduction libre)

L'avantage de cette méthode est la visibilité du développement du processus mental, sous l'influence d'une intervention didactique. L'expérimentation didactique permet à la fois de saisir l'influence positive ou négative du matériel, l'effet de l'intervention sur l'activité physique et intellectuelle de l'enfant, les processus de pensée mis en jeu et le développement de la compréhension.

Héraud (1992) souligne que l'improvisation qu'imposent certaines réactions des enfants peut créer des difficultés. Dans le cadre de cette recherche, même s'il faut délaisser le plan prévu d'intervention, l'improvisation amenée sera une occasion de suivre le processus de pensée de l'enfant. Nous ne devons pas nier qu'il est parfois difficile de comprendre ce qu'explique un enfant en difficulté, pour proposer des suggestions, des questions ou des manipulations permettant d'approfondir ou d'élargir une compréhension. Toutefois, notre expérience comme orthopédagogue devrait servir de guide. De plus, la flexibilité d'une telle méthode permet des retours en arrière, des essais et des erreurs. Cette flexibilité assure une sensibilité des données, par le fait que les informations recueillies deviennent de plus en plus pertinentes, un des critères de qualité d'une recherche qualitative.

Les qualités que cette improvisation exige sont les connaissances sur le développement cognitif de l'enfant, sur la didactique, sur les programmes d'études et les manuels utilisés en classe. Ainsi, aux instruments prédéterminés que sont l'entrevue clinique et l'expérimentation didactique s'ajoutent les compétences de l'orthopédagogue.

L'intervention de rééducation repose ainsi sur les critères de compréhension évalués. Ils fournissent des pistes ou des balises qui permettent de s'assurer que l'enfant évolue dans un processus de compréhension. Les concepts et les procédures qui soutiennent l'intervention, sont analysés au préalable. En effet, même si le modèle de Herscovics et Bergeron (1989) n'est pas à priori un modèle d'intervention didactique, en décrivant les principales manifestations qui marquent le développement de la pensée de l'enfant, il favorise l'émergence de questions permettant de coordonner les diverses composantes de la compréhension et la centration sur autre chose que la performance.

Durant les expérimentations, l'attention demeure centrée sur les processus de pensée des enfants afin de les faire progresser.

Ainsi, nous avons privilégié une intervention où le plus grand nombre de composantes possibles sont touchées durant la même entrevue, plutôt que de proposer des tâches qui privilégient la construction de critères propres à une seule composante. Ce choix provient de notre connaissance des enfants en difficulté. En effet, nous avons souvent observé des difficultés à lier les informations entre elles pour les coordonner.

De manière à personnaliser l'intervention, les représentations mentales construites par l'enfant servent de déclencheur au dialogue. Une approche centrée sur l'enfant, permet à ce dernier d'observer des incongruités, de lier de nouvelles connaissances aux anciennes, d'apprendre de sa propre activité, ainsi que le suggèrent Ginsburg et Opper (1978, 1979). Notre recherche de maîtrise (DeBlois 1990) a, à ce chapitre, servi de pré-expérimentation.

2.3.1 Recherche exploratoire

Cette recherche a été effectuée auprès d'élèves de troisième année qui présentaient des difficultés dans l'apprentissage du concept de numération positionnelle. Trois approches ont été expérimentées : un jeu, une méthode de résolution de problème (la stratégie de Walt Disney) et un dialogue sur les représentations mentales d'un enfant. Il a été possible d'observer, au cours de cette pré-expérimentation, une nette évolution de la composante abstraite logico-physique et logico-mathématique pour une enfant avec laquelle nous avons privilégié le dialogue à partir de ses représentations mentales. Ces dernières apparaissent non seulement à travers le langage mais aussi par le biais de dessins et de manipulation d'objets.

Le questionnement proposé à partir des représentations et des conceptions de l'enfant fait apparaître les obstacles et les surgénéralisations. Cette approche a donné l'heure juste quant à la nécessité de retourner à des activités logico-physiques pour permettre la construction de nouveaux schèmes ou la réorganisation de structures. Le dialogue a invité l'enfant à recréer dans sa tête, les manipulations réalisées avec le matériel. L'adaptation à de nouvelles situations a été facilitée par le fait que l'enfant est invité explicitement à réorganiser ses schèmes pour s'accommoder à ses nouvelles expériences. Pour ces raisons, cette approche a été retenue pour la réalisation des expérimentations didactiques de la présente recherche.

Par le biais de cette approche, le langage permet un dialogue, un moment privilégié qui favorise l'observation du développement de l'abstraction réfléchissante de l'enfant. Les représentations mentales de l'enfant apparaissent à travers ses explications verbales ou par ses manipulations.

L'enfant étant son propre intermédiaire dans ce cas, nous devons partir de ses propos. Nous les vérifions en lui proposant régulièrement d'illustrer avec du matériel. Par exemple, lorsqu'un enfant dit imaginer le nombre 200 avec les chiffres 2, 0, 0 plutôt que deux groupes de centaines ou 200 jetons, il est possible d'observer qu'il s'appuie sur la notation positionnelle.

Il est proposé à l'enfant de résoudre le problème à voix haute. À l'occasion, l'enfant est invité à prévoir une solution afin de l'amener à poser des hypothèses, puis à transformer ses représentations mentales reproductrices en représentations mentales anticipatrices. Ces gestes mentaux, expression consacrée par De La Garanderie (1982, 1984, 1987), peuvent favoriser des prises de conscience de la part de l'enfant et la recherche de compréhension de pourquoi et de comment.

C'est la représentation mentale telle qu'exprimée qui est observée et sur laquelle s'appuie la suite de l'intervention, sans pour autant considérer que d'autres représentations, non exprimées, soient absentes. À certains moments, l'enfant peut exprimer une représentation mentale qui laisse soupçonner le désir de faire plaisir ou de trouver réponse à une question. Dans ces cas, de nouvelles tâches ou des procédures sont proposées (essaie avec..) afin de permettre à l'enfant de poursuivre sa démarche ou de la confronter. Dans d'autres cas, la répétition de ce que l'enfant vient de dire permet de confirmer ou d'infirmer la solution proposée.

2.3.3 Préparation des expérimentations didactiques

Les différentes interventions ont été construites à partir des tâches qui sont demandées à l'enfant habituellement en classe soient: lire et écrire des nombres, comparer et ordonner des nombres, décomposer et recomposer des nombres, attribuer une valeur relative aux chiffres d'un nombre, retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans le nombre, arrondir, opérer sur les nombres, construire des unités de mesure de quantité. Les tâches préparées ne sont pas toutes proposées aux enfants. En effet, les évaluations qui ont été faites au cours d'une première entrevue servent à la sélection des tâches pertinentes pour chacun des élèves rencontrés. Le matériel de manipulation est toujours à la disposition de l'enfant. Il s'agit de jetons et d'enveloppes de différentes grandeurs, de cubes multi-bases, d'un abaque, de papier et de crayons de différentes couleurs.

Une anecdote qui veut piquer la curiosité des enfants et susciter, le cas échéant, une réflexion sur cette invention qu'est le nombre, est racontée au début de chacune des expérimentations didactiques.

Il peut arriver qu'une situation ne pose plus de problème à l'enfant, soit parce que les manipulations effectuées au cours de la première entrevue ont permis une restructuration de sa pensée, soit parce qu'une intervention faite en classe ou à la maison ait permis cette restructuration. Dans ce cas, une nouvelle tâche sera offerte à l'enfant sur un thème différent.

La structure de chacune des expérimentations didactiques se présente de la même manière. Un tableau de compréhension pertinent à la tâche proposée a été construit, suivi d'une anecdote. Le problème suggéré est accompagné des réponses possibles et du questionnement prévu. Les chiffres qui précèdent les questions correspondent à ceux inscrits dans le tableau de numération. Ces chiffres permettent d'observer les critères touchés durant l'entrevue, afin de solliciter le plus grand nombre de composantes possibles. Ce questionnement n'a pas été suivi à la lettre puisqu'il se voulait une préparation mentale pour l'orthopédagogue. De même chacune des expérimentations didactiques préparées n'a pas été vécue. Elles ont été choisies en fonction des besoins des enfants.

2.3.3.1 Compare et ordonne des nombres

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)reconnaît que plus le nombre a de chiffres plus il est grand attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes.	(2)compare les chiffres et les groupes	(3)établit des relations d'équivalence entre des quantités organisées différemment
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)utilise le tableau de numération compare des nombres compare des unités de mesure	(5)établit des relations d'inclusion	(6)ordonne des nombres lit des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...?
Les gens qui habitaient en Egypte il y a très longtemps avaient une façon d'écrire les nombres, très simple mais très encombrante. Quand ils voulaient écrire 1 000, ils faisaient une fleur, pour 10 000, c'était un doigt, 1 000 000, un génie agenouillé. Ainsi, quand ils voulaient écrire 2 000 000, ils n'avaient que deux signes à dessiner: deux génies. S'ils voulaient écrire 15, ils devaient en utiliser six. Ils ne pouvaient donc pas comparer les nombres en regardant la longueur de leur écriture. Toi, peux-tu comparer deux nombres en comparant la longueur de l'écriture? Dans la classe, comment fais-tu lorsque tu dois comparer des nombres et trouver le plus petit? Écrivons tous tes critères sur une feuille. (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Aux jeux d'Albertville il y avait comme ça (présenter le carton 10 089) de spectateurs à la compétition de ski de vitesse, comme ça (présenter le carton 1 089) de spectateurs à la compétition de patinage artistique, comme ça (présenter le carton 100 089)à la compétition de sauts à ski et comme ça (présenter le carton 9 089) à la compétition de ski de fond. À quel endroit y avait-il le moins de spectateurs? Comment le sais-tu? Ordonne tous ces nombres maintenant?

A) L'enfant compare les nombres et les ordonne.
B) L'enfant compare les nombres deux à deux mais ne peut les ordonner.
C) L'enfant ne peut comparer les nombres et ne peut les ordonner.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(2) Comment imagines[2]-tu ce nombre? Comment imagines-tu cet autre nombre? Veux-tu l'illustrer avec du matériel?
(4) Lequel des deux nombres représente la plus grande quantité? Comment le sais-tu?
(3) Quel nombre est le plus petit 908 ou 908 unités? Comment le sais-tu? Comment te représentes-tu 908 et 908 unités? Est-ce que sera la même chose pour 90 008 et 90 008 unités? Pourquoi?
(4-5) Est-ce qu'un nombre est plus grand quand il a 10 dizaines ou 10 centaines? Comment fais-tu pour le savoir? Si ton nombre avait 10 dizaines de mille, serait-il plus grand, plus petit ou égal à celui qui a 10 centaines? Comment le sais-tu?
(4-3) Compare 1597 et 1598. Lequel est le plus grand? quel moyen utilises-tu pour les comparer? Compare 10 364 et 12 364, lequel est le plus grand? Comment le sais-tu?
(1) Quand tu regardes tous ces nombres, y en a-t-il qui ont une écriture plus longue que les autres? Peux-tu utiliser cette information pour ordonner ces nombres?

---

[2] Nous avons privilégié le terme «imagine» puisqu'il est plus significatif pour les enfants que le mot représente.

2.3.3.2 Décompose un nombre

Cette activité, tirée d'une recherche réalisée par Bednarz et Dufour-Janvier (1986), aurait permis de conclure que les enfants accordent peu de signification à l'écriture des nombres en terme de groupements. Les enfants ne concevraient l'écriture que comme un alignement de chiffres ou une séquence de chiffres et cherchent 3 chiffres pour construire des nombres. Si cette activité permet de mettre en lumière ces conceptions, elle a semblé idéale pour favoriser l'introduction des unités de mesure de quantité.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	(2)compte par 1, par 10, par 100 pour illustrer	(3)reconnaît l'invariance d'une quantité reconnaît la relation d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)trouve le cardinal en adaptant le comptage, en additionnant les unités de mesure	(5)établit des relations d'inclusion	(6)décompose et recompose les nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...
Les gens ont inventé plusieurs façons d'écrire les nombres à travers les siècles. En Amérique centrale, on faisait des traits avec de la peinture sur le corps des gens. En Chine, encore aujourd'hui, les gens écrivent le nombre 3523 ainsi 3 (1000) 5 (100) 2 (10) 3, avec leurs dessins chinois bien sûr! Qu'en

penses-tu? (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Je te donne des cartons sur lesquels tu peux lire des quantités. À quels nombres correspondent ces quantités : 51 centaines (5e année), 51 dizaines, 49 dizaines, ... À l'aide de ces cartons, retrouve le plus de nombres possibles compris entre 420 et 513.

A) L'enfant retrouve des nombres entre 402 et 513 en additionnant les quantités ou en adaptant le comptage des unités de mesure.
B) L'enfant retrouve des nombres entre 402 et 513 en utilisant un seul carton.
C) L'enfant juxtapose les chiffres des cartons sans tenir compte de la quantité qu'ils représentent.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(2)Comment imagines-tu l'illustration de cette quantité?
(1) Montre-moi avec le matériel une dizaine, une centaine, une unité.
(2-4)Compte les centaines...les dizaines...les unités de cette quantité?
(4) Comment comptes-tu ces centaines si tu veux connaître le nombre de dizaines? Et si tu comptais les centaines, comment compterais-tu?
(3-5)Combien as-tu d'unités en tout dans ce nombre? Comment le sais-tu? Combien as-tu de centaines en tout? Comment se fait-il que les centaines n'étaient pas indiquées sur le carton?
(3-5) Peux-tu faire l'échange entre dizaine et centaine dans ta tête? Comment fais-tu pour penser faire l'échange?
(4) Maintenant que tu as reconnu le nombre de dizaines, de centaines et d'unités, comment expliques-tu que tu ne puisses pas additionner 42 dizaines+2=44 pour trouver le nombre 44?

(6) Peux-tu retrouver un nombre qui a 24 dizaines)? Y en aurait-il d'autres qui pourraient avoir 24 dizaines?

2.3.3.3 Attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre

Les travaux de Bednarz et Dufour-Janvier (1986) ont démontré que les enfants voyaient les nombres comme un alignement de chiffres. Il nous a semblé intéressant de partir de l'activité qui a permis de conclure à cette croyance pour introduire un élargissement de cette compréhension. Ainsi, nous tenterons d'introduire l'idée d'une valeur relative des chiffres d'un nombre en lui faisant succéder la comparaison entre les unités de mesure puis une opération de soustraction avec changement à la dizaine. Cette activité laisse intervenir la numération orale et écrite, l'une servant de point d'appui à l'autre.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	(2)illustre des éléments des groupes	(3)reconnaît la régularité de la base 10
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)utilise le tableau de numération compare les unités de mesure compare les nombres utilise le double-comptage	(5)conservation des unités de mesure de quantité reconnaît le nombre de dizaine et de centaine dans un nombre	(6)attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...
L'idée de donner une valeur différente aux chiffres quand ils changent de position a été inventée pour faciliter le nombre de symboles à mémoriser. Auparavant, le nombre 2 893 était lu trois, neuf, huit, deux. Il fallait donc retenir les chiffres et se rappeler leur ordre pour connaître la valeur du nombre. Aujourd'hui comment le dirait-on (numération orale)? Quels mots a-t-on ajoutés? (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Je te présente les chiffres 3, 5, 5, 1 sur des cartons. Place ces cartons pour former le nombre le plus grand possible....Ensuite, je te donne le carton sur lequel est écrit 0. Place ce nouveau carton pour obtenir le nombre le plus grand possible. Comment sais-tu qu'il s'agit du nombre le plus grand que tu puisses former?
Je te donne les chiffres 9, 2, 4, 6, où placeras-tu le 0 pour former le nombre le plus grand?
Maintenant, enlève 30 au nombre 6420?

A) L'enfant forme le nombre 5 531 puis 55 310 en comparant les nombres qu'il est possible de former, puis enlève 30 au nombre 6420 en réalisant l'échange entre les dizaines et la centaine.
B) L'enfant forme le nombre 5 531 et 55 310 en comparant les chiffres des nombres entre eux et ne peut enlever 30 au nombre 6420.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(4) Si tu places le 0 à la position des unités quel nombre obtiens-tu? Si tu le places à une autre position quel nombre obtiens-tu? Entre ces deux nombres, lequel est le plus grand? Peux-tu en trouver un plus grand?

(6) Comment imagines-tu les dizaines... les unités de mille?

(4) À quelle position as-tu la plus petite mesure?

(4) Comment imagines-tu le nombre 30?

(2) Comment illustres-tu le nombre 30?

(3) Quel autre nom donne-t-on à 30?

(5) À quelle position retrouves-tu des dizaines dans le nombre 6420?

(3) Peux-tu faire des échanges?

(4) Maintenant que l'échange est réalisé, peux-tu enlever 3 dizaines?

2.3.3.4 Construis des unités de mesure de quantité

Cette activité, tirée de la même expérience de Bednarz et Dufour-Janvier (1986), révèle que les enfants ne conçoivent pas le codage d'une collection d'éléments comme un élément pertinent. Elle nous est donc apparue intéressante pour favoriser la construction de l'unité de mesure qu'est la dizaine.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	(2)illustre des éléments des groupes	(3)reconnaît la régularité de la base 10
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)utilise le tableau de numération compare les unités de mesure compare les nombres utilise le double-comptage	(5)conservation des unités de mesure de quantité reconnaît le nombre de dizaine et de centaine dans un nombre	(6)attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

PROBLÈME

Je te donne ce carton sur lequel sont dessinés plusieurs petits traits, comment t'y prendrais-tu pour me dire le nombre de traits en utilisant un moyen qui te permette d'être rapide? Quel moyen as-tu pris? Pourquoi as-tu pris ce moyen? Comment appellerais-tu chacun des groupes que tu as formés? Combien as-tu de ces groupes? Combien as-tu de traits qui ne sont pas groupés? Sais-tu à quel nombre correspond cette quantité?

A) L'enfant dénombre, groupe et retrouve le nombre de traits en comptant ou en additionnant les quantités.
B) L'enfant dénombre, groupe et retrouve le nombre de traits en juxtaposant les quantités

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(2)Combien as-tu de groupes? Combien as-tu d'unités qui ne sont pas groupées?
(3)À quel nombre correspond ces groupes et ces traits?
(3)Si je commençais à compter par la fin, à quel nombre est-ce que j'arriverais? Comment expliques-tu ce phénomène? Si j'étale les dizaines sur la table, est-ce que cela change la quantité d'objets? Si je défais une centaine et que j'étale les dizaines, est-ce que j'ai plus d'objets, moins d'objets ou autant d'objets qu'avant? Dans ce cas, peux-tu échanger les dizaines pour des unités... des centaines pour des dizaines? Peux-tu faire d'autre type d'échanges? Est-ce que ces échanges modifient la quantité d'objets? Que faudrait-il faire pour modifier la quantité?
(4)Comment comptes-tu lorsque tu veux retrouver combien il y a d'unités dans les dizaines? Comment comptes-tu lorsque tu retrouver les dizaines dans les centaines?
(4-3)Compte par 10 les dizaines que tu viens de poser sur la table et écoute les mots que tu dis, quand tu arrives à 100 tu t'arrêtes. Dis-moi maintenant combien tu as compté de dizaines?

Écris ce que tu viens de dire. Compte ces autres dizaines qui sont dans cette centaine. Combien de dizaines as-tu comptées cette fois?

(5) Si je te montre cette centaine peux-tu deviner combien elle contient de dizaines? Est-ce que toutes les centaines auront le même nombre de dizaines? Te rappelles-tu combien d'unités il y a dans une centaine? Crois-tu que tu puisses compter la même centaine par 1, par 10, par 100? Comment expliques-tu qu'en comptant par 1, en comptant par 10 ou en comptant par 100, tu puisses arriver à la même quantité?

(6)Pourquoi n'écrit-on pas tous ces chiffres dans un nombre?

2.3.3.5 Arrondis un nombre

Cette activité permet d'introduire la comparaison entre des grands nombres et d'utiliser le double-comptage. C'est par elle que les enfants peuvent arriver à estimer leurs résultats et à les comparer à ceux que l'algorithme leur a permis d'obtenir.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
	(2)compte 1 à 1, par 10, par 100, par 1000 compare des chiffres	
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)utilise le tableau de numération utilise le double-comptage compare des nombres	(5)reconnaît la quantité négligeable par rapport au tout	(6)utilise l'approximation des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...
Dans certaines civilisations, on ne pouvait pas arrondir à la dizaine, à la centaine, à l'unité de mille car on ne faisait pas des groupes à chaque fois qu'on arrivait à dix. On pouvait faire des groupes de douze par exemple, parce qu'on comptait les phalanges d'une main ou on faisait des groupes de soixante. (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Tu as sept billets de 1000, trois billets de 100, cinq billets de 10. Tu veux acheter un Nintendo qui te coûte 149$. Tu dois remettre les billets pour acheter cet objet, quels sont les billets que tu donnes à la caissière? Pourrait-on dire que tu as arrondi le nombre 149? Quel moyen utiliserais-tu pour additionner le plus rapidement possible 90 et 149? Peux-tu arrondir le nombre 5064 à différentes positions? D'autres nombres à arrondir pourront être suggérés pour prolonger l'exploration.

A. L'enfant arrondit 149 à 150 en expliquant qu'il a arrondi à la position des dizaines, puis arrondi pour estimer une somme et arrondi 5064 à différentes positions.
B. l'enfant arrondit 149 à 150 en utilisant la règle du 5 ou la récitation de la comptine des nombres, puis additionne selon l'algorithme pour trouver la somme et arrondit 5064 à 5000.
C.l'enfant croit qu'il arrondit un nombre à un autre nombre (150, 50)

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
Qu'est-ce que c'est pour toi arrondir? À quoi cela sert-il?
(6) Quels sont les billets que tu as utilisés? Ces billets représentent quel groupe?
(4) À quelle position est-il possible d'arrondir?

(4) À quelle position as-tu arrondi. Si tu voulais arrondir le nombre 5 064 à une autre position, quels billets donnerais-tu? À quelle position as-tu arrondi?
(4) Peux-tu arrondir 5064 à l'autre dizaine?
(4-5) Comment sais-tu que 5060 est plus près de 5064 que 5070?

2.3.3.6 Opère sur les nombres

Cette tâche ne porte pas sur les algorithmes mais sur le sens des opérations et sur la transformation des nombres. On est donc ici tout près des algorithmes et de leur compréhension.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	(2)illustre une quantité	(3)reconnaît l'invariance d'une quantité par rapport à son organisation reconnaît l'équivalence entre les quantités
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)ajoute ou enlève des quantités à des unités de mesure	(5)reconnaît les relations d'inclusion conservation des unités de mesure	(6)attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...
Il y a très longtemps, on ne connaissait pas les façons d'additionner, de soustraire, de multiplier ou de diviser? On utilisait des abaques et des bouliers pour opérer sur les nombres. Les

nombres ne servaient qu'à écrire les résultats. Aujourd'hui les Chinois utilisent toujours le boulier. En 1945, un Japonais et un Américain ont fait un concours pour savoir s'il était plus rapide d'opérer avec un boulier ou avec une calculatrice électrique. Sais-tu qui a gagné?... Le japonais. (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

À partir d'un nombre donné, proposer à l'enfant d'enlever à ce nombre 20 dizaines, d'ajouter 800 unités, d'enlever 14 dizaines... ou de partager ce nombre en deux, en trois, en quatre...

A) L'enfant transforme les groupes lorsque cela est utile en établissant des relations d'équivalence entre les différentes unités de mesure.
B) L'enfant ne peut établir de relation d'équivalence
C)L'enfant fait les transformations mais ne peut retrouver le cardinal.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(2)Comment imagines-tu ce nombre? Illustre-le avec un matériel.
(3) Si je commençais à compter par la fin, à quel nombre est-ce que j'arriverais? Comment expliques-tu ce phénomène? Si j'étale les groupes sur la table, est-ce que cela change la quantité d'objets? Si je défais une centaine et que j'étale les dizaines, est-ce que j'ai plus d'objets, moins d'objets ou autant d'objets qu'avant? Que devras-tu faire si tu veux modifier la quantité d'objets?
(3-4)Compte les dizaines dans la centaine que tu viens de poser sur la table. Dis-moi maintenant combien tu as compté de dizaines? Écris ce que tu viens de dire. Compte les dizaines qui sont dans cette autre centaine. Combien de dizaines as-tu comptées cette fois? Compte les centaines dans cette unité de mille sur la

table. Dis combien de centaines tu as comptées. Combien auras-tu de centaines dans cette autre unité de mille?
(3-4)Dans ce cas, peux-tu échanger les dizaines pour des unités... des centaines pour des dizaines, des centaines pour des unités? Peux-tu faire d'autres types d'échange? Est-ce que ces échanges modifient la quantité d'objets? Que faudrait-il faire pour modifier la quantité?
(4)Avec ces échanges, peux-tu enlever les groupes comme je l'ai demandé?
(3)Avec ces échanges, peux-tu réduire le nombre de groupes semblables que tu as après avoir ajouté le nombre demandé?
(4)Quel nombre retrouves-tu? Quel moyen prends-tu pour retrouver le nombre?
(4)Place ces différents groupements dans le tableau de numération, quel nombre retrouves-tu?

2.3.3.7 Lis et écris des nombres

A) LECTURE DE NOMBRES ÉCRITS EN CHIFFRES

Les enfants ont appris à lire des nombres avec et sans dizaines. Ce premier apprentissage laisse des traces en ce sens que chez plusieurs enfants déjà rencontrés, nous observons une tendance à grouper les chiffres deux à deux. De plus, les enfants ont appris à lire des textes en français et on a insisté, en particulier pour les enfants en difficulté, sur le sens de la lecture (de gauche à droite). Cet apprentissage invite l'enfant à utiliser cette même procédure pour la lecture de nombres et de ce fait provoque des tâtonnements et des erreurs de lecture, par exemple 1 002 000 sera d'abord lu 1 002 puis si l'enfant ne s'arrête pas à sa première réaction 1 002 000. À travers les différentes composantes de la compréhension, l'enfant arrive à construire un sens à la lecture de ses nombres.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
(1)sait que plus il y a de chiffres plus le nombre est grand	(2)groupe les chiffres par paquets pour lire un nombre	(3)généralise le nom des petits nombres aux grands nombres
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
(4)utilise le tableau de numération	(5)généralise les noms des nombres de l'ordre des unités aux ordres mille et million	(6)lit un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

Savais-tu que...
Auparavant, il n'existait qu'un seul dessin pour représenter les chiffres de 1 jusqu'à 9, un autre pour représenter les chiffres de 10 à 59 et un dernier pour écrire 60. Les gens n'avaient qu'à placer côte à côte quatre dessins du 1 pour représenter par exemple, le 4, ou à utiliser 3 dessins de 10 pour représenter 30. Nous, combien avons-nous de dessin pour représenter les nombres? Comment les organisons-nous pour être capable de les lire facilement? (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Proposer à l'enfant de regarder divers catalogues (autos, jouets, journaux...), de dire quels objets sont les plus intéressants pour lui ou pour elle et de dire quels en sont les prix.

A) L'enfant identifie tous les prix.

B) L'enfant identifie tous les prix s'ils n'ont pas de zéro.
C) L'enfant lit les nombres selon une convention personnelle.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(2-4) Comment sont disposés les chiffres des nombres que tu as vus dans le catalogue? Sont-ils toujours disposés de la même façon. Sais-tu pourquoi? Seront-ils disposés de la même façon pour les très grands nombres? S'ils ne sont pas disposés de cette façon, qui pourra les organiser pour que tu puisses les lire?
(4) Dans quel sens faut-il lire les nombres pour savoir comment les disposer?
(4) Quelles sont les positions de nombre que tu connais? Comment les placerais-tu dans un tableau de numération?
(5) Quels mots sont les mêmes à travers les ordres? Quels mots sont différents? Est-ce que le mêmes noms reviendront dans tous les ordres?
(6) Choisis un nombre que tu trouves très grand et écris-le. Comment le lis-tu? Dans quel sens as-tu lu? Comment as-tu organisé les chiffres?

B)ÉCRITURE DE NOMBRES EN LETTRES

Cette tâche fait appel à la compréhension en lecture mais permet de connaître les procédures utilisées et l'idée que se fait un enfant d'un nombre entendu. Le même tableau que celui construit pour la lecture de nombres a permis de construire le questionnement.

Savais-tu que...
Au début, les gens écrivaient les chiffres avec les mêmes lettres que celles qui étaient utilisées pour écrire des mots. De plus, dans certaines civilisations, les différents ordres de groupements ne s'appelaient pas unités, mille, million..., elles

s'appelaient jours, mois, années... (tiré de Histoires de comptes, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Dans la classe comment fais-tu quand tu dois lire un nombre écrit avec des mots? Tu sais sur les maisons, on retrouve les adresses des gens. Dans certains cas, les gens écrivent les nombres avec des lettres. Sur ces images, tu vois des adresses dont les nombres sont écrits avec des mots. Peux-tu lire ces nombres et les transcrire en chiffres?

A) L'enfant transcrit tous les nombres en chiffres
B) L'enfant transcrit les nombres dont la position et l'ordre sont explicites.
C) l'enfant transcrit les nombres lorsqu'il n'y a pas de zéro.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE
(3) Y a-t-il des mots que tu reconnais dans ce que tu lis? Lesquels?
(4) Si tu plaçais ces mots dans un tableau de numération, comment les disposerais-tu? Pourquoi?
(4) Comment sais-tu où séparer les groupes de mots?
(5) Comment sais-tu s'il s'agit de dizaine de mille ou de dizaines d'unités, de centaines de mille ou de centaines d'unités, d'unités de mille ou d'unités d'unités?

C. ÉCRIRE UN NOMBRE DICTÉ

C'est au palier logico-mathématique que nous retrouverons les composantes qui permettront à l'enfant de tenir compte des ordres de chiffres. Ainsi, la composante procédurale permettra un découpage plus raffiné de la séquence entendue en ce sens qu'en allant au-delà du découpage du chiffre, elle amène l'enfant à rechercher les ordres et la valeur.

Savais-tu que...
Quand les gens ont commencé à écrire des nombres avec les dessins, le zéro n'existait pas. En effet, ils utilisaient un cadre semblable à notre tableau de numération. Ainsi, lorsqu'un carreau était vide, cela voulait dire que ce groupement n'était pas seul dans le nombre. Quand on a commencé à utiliser le zéro pour marquer la place vide et surtout lorsqu'on a commencé à le considérer comme un nombre, il y a beaucoup de gens qui n'étaient pas d'accord. (tiré de <u>Histoires de comptes</u>, Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F., 1987)

PROBLÈME

Dans la classe comment fais-tu quand ton professeur te demande de trouver une page dans ton livre ou d'écrire les pages que tu auras à étudier dans la semaine?

Dans le texte que je te donne, il y a différentes vitesses pour chacun des animaux ou des éléments. Je te donne la vitesse qu'ils peuvent atteindre et tu écris ces nombres.

Connais-tu les trois animaux les plus rapides sur terre, dans les airs et sous l'eau dans la mer? Il s'agit du guépard qui peut atteindre des pointes de vitesses de ____ kilomètres à l'heure, du faucon pèlerin qui peut voler plus vite que le martinet noir. Ce dernier atteint parfois ____ kilomètres à l'heure. Dans la mer l'espadon nage jusqu'à ____ kilomètres à l'heure. Ce qui ne veut pas dire qu'ils arrivent à attraper leurs proies à chaque fois qu'ils le désirent. Les autres animaux ont aussi des forces. Le zèbre, par exemple, court à environ ____ kilomètres à l'heure et arrive à se sauver parce qu'il a plus d'endurance que le guépard.

Les gens ont inventé des appareils qui servent à augmenter leurs vitesses de déplacement. Une fusée, pour sortir de l'orbite de la terre, doit atteindre ____ kilomètres à l'heure. Les avions peuvent atteindre____ kilomètres à l'heure. Les trains au Japon vont à____ kilomètres à l'heure tandis qu'en France, ils roulent à _____ kilomètres à l'heure. Nos voitures peuvent atteindre ____ kilomètres à l'heure même si elles n'ont pas le droit d'excéder ____ kilomètres à l'heure sur nos autoroutes.

Les éléments de la nature comme la lumière, les éclairs, le tonnerre ont aussi des vitesses. La lumière a une vitesse de _____ kilomètres à l'heure, on donne sa vitesse en général en années-lumière. La vitesse du son est de _____ kilomètres à l'heure. Tu sais que la terre tourne sur elle-même, elle tourne à _____ kilomètres à l'heure. Elle tourne aussi autour du soleil à ____ kilomètres à l'heure.

A) L'enfant écrit tous les nombres dictés.
B) l'enfant oublie les zéros qu'il n'a pas entendus.
C) L'enfant ne peut écrire la séquence de chiffres entendue.

QUESTIONNEMENT POSSIBLE

(2)Peux-tu me redire la séquence que tu as entendue? Comment découpes-tu ces mots dans ta tête pour écrire les chiffres?
(2)Lequel as-tu entendu en premier...ensuite...? Comment feras-tu pour te rappeler du premier puisque je continue de parler après?
(4)Quels sont les mots qui t'indiquent la position des nombres? Quels sont les mots qui t'indiquent les groupes de positions ou les ordres?
(5) Si tu connais les noms que nous avons énumérés tout à l'heure, tu sais qu'on peut les placer dans un tableau de numération, peux-tu lire ce nombre (1042)? Qu'est-ce qui te permet de savoir que tu dois placer un zéro a la position des centaines (1042)?

Dans la classe avec ton professeur comment feras-tu lorsque tu devras écrire des nombres?

2.3.3.8 Réseau sémantique

Une entrevue portant sur un réseau sémantique construit par l'enfant, a été créée à la fin des expérimentations didactiques. Novak et Gowin (1984) utilisent ce type d'entrevue pour évaluer ce qu'ils appellent «une carte de concepts» et orienter une intervention ultérieure. Nous avons voulu adapter cette carte de concepts pour l'intervention. Le but est de laisser émerger les idées des enfants par rapport aux nombres et de voir quels liens ces enfants font entre ces idées. La réalisation de cette activité demande à l'enfant une prise de conscience de sa compréhension, une métacognition. C'est ici qu'il est possible d'observer comment les enfants parlent de leurs connaissances, quel type de langage est utilisé, quels types d'association apparaissent (description ou opération).

Nous nous sommes inspirée des métaphores proposées par Charron (1990). Dans un premier temps, nous avons raconté à l'enfant l'histoire du Petit Poucet. Une attention particulière a été portée sur les cailloux qu'il laissait tomber pour retrouver son chemin. Une relation a été faite entre ces cailloux et les cartons sur lesquels l'enfant écrit les mots (dizaine, paquet, chiffre...) auxquels lui font penser les nombres. Ces cartons représentent les connaissances des enfants, ce à quoi ils peuvent penser lorsqu'ils ont des problèmes à résoudre. Dans un deuxième temps, l'enfant organise ces cartons en réseau, à la manière des poupées russes, qu'il a déjà vues. Finalement, l'enfant explique les relations qu'il a établies.

L'intervention apparaît par la suite. Les explications fournies par les enfants suscitent un dialogue qui permet de confronter, d'enrichir les liens établis pour le premier réseau sémantique. À la suite de cette discussion un nouveau réseau est élaboré et résumé par l'enfant.

2.4 Le contexte de l'expérimentation

2.4.1 Sélection des sujets

Les enfants avec lesquels nous avons travaillé ont été choisis par leurs enseignants. Le critère qui a servi à les sélectionner a été la présence manifeste de difficultés éprouvées dans l'exécution de tâches portant sur la numération positionnelle. Ainsi, ils démontrent de la difficulté à lire ou écrire des nombres, à décomposer, à arrondir, à opérer sur des nombres, à comparer ou à ordonner des nombres.

Six enfants ont participé à l'expérimentation. Le choix de la méthode de recherche par étude de cas, nous a invité à rencontrer un nombre restreint d'enfants afin de permettre l'étude détaillée de leurs processus de pensée.

Nous désirons toutefois observer le développement de la compréhension du concept de numération positionnelle sur plus d'un degré scolaire à la fois. Deux des enfants rencontrés étaient en troisième année, deux étaient en quatrième année et deux étaient en cinquième année. Ces degrés ont été privilégiés puisque l'expérience nous a appris que les difficultés des enfants apparaissaient avec plus d'acuité lorsqu'ils ou elles abordaient la centaine, l'unité de mille, la dizaine de mille dans l'utilisation d'algorithmes et dans la résolution de problèmes mathématiques.

Il faut ajouter que deux élèves de cinquième année dépistés par leur enseignant avant le début de l'expérimentation n'ont pas poursuivi l'expérience. L'évaluation initiale a révélé pour un, que les difficultés de l'enfant ne portaient pas sur la numération positionnelle, et pour l'autre que l'enfant ne démontrait plus de problèmes de compréhension. Deux nouveaux élèves de cinquième année ont été sélectionnés.

Le moment de cette expérimentation est important. Nous avons choisi de faire cette expérimentation à la fin d'une année scolaire (avril à juin). Ainsi, les enfants identifiés en difficulté ont bien vécu les mêmes séquences d'apprentissage que les autres enfants de leur classe durant l'année scolaire.

Trois de ces six enfants ont déjà reçu des services orthopédagogiques en français par l'orthopédagogue de leur école. Dans trois cas, malgré les difficultés observées en mathématique par leurs enseignants, une intervention sur la lecture ou l'écriture a été privilégiée, ces problèmes apparaissant plus «urgents». Pour trois enfants des interventions orthopédagogiques en français se poursuivent durant l'expérimentation. Trois de ces enfants ont déjà repris une année.

2.4.2 Milieux scolaires sélectionnés

L'expérimentation a été présentée comme un service orthopédagogique. Il a été offert dans deux écoles de deux commissions scolaires différentes, dont le milieu socio-économique est moyen. Le critère qui a servi à sélectionner ces écoles est la facilité des contacts, puisque nous connaissions les directrices de ces écoles.

Dans chacune des écoles le contact a été fait auprès de la direction de l'école et de l'orthopédagogue. Ces personnes ont communiqué le projet aux enseignants de troisième, de quatrième et de cinquième année. Les enseignants intéressés ont identifié des enfants selon les critères qui ont été déterminés en rapport avec l'identification des difficultés d'apprentissage exposées dans la section sélection des sujets.

2.4.3 Rencontre avec les enseignants

Une rencontre d'environ une heure a eu lieu pour les enseignants qui ont identifiés des enfants en difficulté en numération et qui se sont montrés intéressés par le projet. À ce moment, on a discuté avec eux d'un échéancier, fixant les dates et les heures où auraient lieu les entrevues avec les enfants. De plus, un cahier a été fourni. Il leur précisait le but de la recherche, les retombées possibles des interventions, les caractéristiques et le contenu de l'expérimentation (tableau de développement de la compréhension).

Nous leur avons demandé de compléter une fiche d'observation des attitudes de l'enfant concernant leur attention, leur mémoire, leur façon de raisonner. Ces éléments ont facilité la connaissance des enfants.

À la fin de l'expérimentation, une rencontre individuelle a eu lieu avec chacun des enseignants afin de connaître l'évolution de l'enfant en classe au cours de cette expérimentation. Deux questions leur ont été posées. Ont-ils pu observer des changements dans la compréhension de l'enfant? Les attitudes par rapport au raisonnement se sont-elles modifiées? Par la suite, la fiche d'observation remplie au début des expérimentations à propos de l'attention, de la mémoire et du raisonnement, a été revue afin de préciser les aspects qui ont pu changer et ceux qui n'ont pas évolués. Cette entrevue a permis de réaliser une triangulation (Guba, 1981; Glaser et Strauss, 1967) donnant une valeur de confiance aux résultats obtenus. Les bulletins scolaires des enfants ont permis dans certains cas d'ajouter un autre élément de triangulation. Dans d'autres cas, les enseignants et les enseignantes n'ont rien noté sur le bulletin pour cet objectif à la quatrième étape.

2.4.4 Contact auprès des parents

Suite à premier contact, les enseignants et des enseignantes ont établi une communication avec les parents. Une lettre a ensuite été envoyée aux parents afin de leur exprimer par écrit les buts de la recherche et de solliciter leur accord pour l'enregistrement des entrevues sur vidéo. Par la suite, nous avons téléphoné à tous les parents avant ou après la première entrevue afin de présenter le projet, les remercier de leur collaboration et leur indiquer l'existence d'un cahier qui permet de garder un lien entre l'enseignant, l'enfant, les parents et nous. Il a été proposé aux parents d'y consigner leurs remarques ou leurs questions en cas de besoin. Ce cahier, pouvant servir de lien entre les enseignants, les parents, la chercheure et les enfants, ne se voulait pas un autre mode de cueillette de données. Il avait pour but de maintenir un contact entre les divers intervenants au sujet des développements de l'expérimentation, d'en assurer la transparence et ainsi de les sécuriser.

2.4.5 Présentation aux enfants

Lors de la première rencontre avec les enfants, nous avons fait la présentation du projet. Ainsi, nous leur avons expliqué le contenu de notre recherche, en faisant référence à des recherches qu'ils ou qu'elles pouvaient faire dans la classe. La discussion s'est poursuivie en expliquant le choix du sujet de recherche et une insistance a été portée sur le fait qu'ils ne sont pas les seuls à éprouver des difficultés en mathématique. Les explications qu'ils fournissent, permettent de mettre les enseignants sur des pistes, de manière à faciliter l'apprentissage chez les autres enfants en difficulté. Par la suite, nous avons demandé aux enfants s'ils désiraient participer à cette expérimentation, ce qu'ils ont accepté sans manifester de réticence.

Nous leur avons aussi expliqué l'utilité de l'enregistrement des entrevues sur vidéo.

2.4.6 Le double statut d'orthopédagogue-intervenante et de chercheure

Compte tenu des débats qui ont cours actuellement en regard des rôles attribués aux orthopédagogues dans divers milieux, il nous est apparu important de situer notre intervention dans le cadre de cette recherche. Le but de notre étude ne nous oriente pas vers un espace politique (Van der Maren, 1987), au sens où il nous faudrait légitimer l'action orthopédagogique. Notre projet s'intéresse à l'intervention en rééducation et à ses aspects fonctionnels dans le but de permettre le développement et le raffinement des connaissances théoriques pour contribuer par la suite au développement de la pratique orthopédagogique. Notre engagement dans le milieu nous oblige à être celle qui étudie le phénomène en même temps que celle qui le suscite.

Ainsi que le laisse prévoir la méthode de recherche exposée, nous jouerons notre rôle habituel d'orthopédagogue-intervenante. Étant donné notre formation, notre expérience en orthopédagogie, l'importance d'une relation de confiance entre l'enfant et l'orthopédagogue, l'analyse de données par la vérification d'hypothèses à faire au fur et à mesure des entrevues, il est souhaitable que nous jouions à la fois le rôle d'évaluatrice et d'intervenante. En effet, nous devons être parfaitement au fait du but visé, qui est la compréhension de l'enfant, et non la seule performance. De plus, une connaissance «d'usage» du modèle de compréhension est nécessaire.

Au cours de l'évaluation, où est utilisée l'entrevue clinique, l'observation est importante. Cependant observer ne veut pas dire être passif devant les événements. Observer signifie regarder avec une question. Nos expériences en orthopédagogie nous permettent d'être cette observatrice de façon privilégiée puisque nous avons déjà été confrontée aux erreurs des enfants et que des hypothèses ont déjà pu être mises à l'épreuve de façon informelle.

Dans l'expérimentation didactique, nous ne tentons pas de simplement transmettre un savoir-faire ou une connaissance mais nous invitons l'enfant à construire ses connaissances. Nous devenons animatrice et guide pour l'enfant dans sa démarche de compréhension. Les interventions, en provoquant la prise de conscience de conflits et d'incongruités, font ressortir les obstacles qui limitent la restructuration des apprentissages de l'enfant.

Les avantages de ce statut se retrouvent au niveau de l'analyse des déclencheurs de compréhension puisque les hypothèses posées peuvent se vérifier au fur et à mesure de leur apparition. Les risques d'être à la fois chercheure et orthopédagogue tiennent au fait de chercher à voir ce que l'on veut bien voir. Dans ce cas, nous avons tenté de minimiser cet obstacle en nous appuyant sur des modèles théoriques pour évaluer et intervenir et en élaborant minutieusement les entrevues. L'influence que peuvent avoir les contraintes scolaires sur l'esprit de la chercheure (classement des élèves, demande de changement d'objet d'intervention de la part de l'enseignant ou de l'enseignante) sont aussi des risques dont il faut tenir compte. Dans ce deuxième cas, nous ferons lecture de ces obstacles comme étant des contraintes réelles, vécues dans le quotidien de ce type d'intervenante. La prise de conscience de ces effets ne pourra qu'être précieuse au moment de la rédaction des implications pédagogiques.

2.5 Plan d'analyse

Le chapitre trois est celui de l'analyse de l'expérimentation de cette recherche. À ce moment, il est important de préciser au lecteur des pistes qui en faciliteront la lecture et la compréhension. Il pourra être plus facile de lire le chapitre 4 avant le chapitre 3, puisque ce dernier est organisé à la manière des ingrédients qu'on retrouve dans une cuisine. Les faits y ont été étalés, découpés, tournés et retournés afin de les étudier le plus minutieusement possible. Ce chapitre permet au lecteur de suivre pas à pas chacune des entrevues ainsi que le travail d'analyse qui a été fait sur ces entrevues. Il rend possible, au besoin, une vérification des résultats obtenus, afin de répondre au critère de qualité relatif à l'objectivité (Guba, 1981). Un expert a déjà fait une vérification de ces analyses. Le chapitre 4 présente plutôt «l'assiette garnie» une fois tous les ingrédients pertinents intégrés.

Ainsi, dans le chapitre 3, les faits observés durant l'expérimentation ont suivi deux traitements. Un premier, où la grille d'analyse est le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Les termes utilisés se réfèrent donc à ce modèle. Un deuxième, où les faits observés sont analysés à partir du modèle de l'équilibration de Piaget. Ce double traitement exige du lecteur qu'il modifie le sens accordé aux mots logico-physique, logico-mathématique, abstraction et formalisation selon qu'il est dans un modèle où dans un autre. En effet, nous l'avons précisé à la section 1.2.2.3, Bergeron et Herscovics ont utilisé ces termes dans un sens souvent plus restrictif que Piaget, ce qui peut, pour le lecteur qui ne s'y attend pas, créer un malaise et provoquer des confusions. Nous apporterons des précisions à ce sujet dans les sections 2.5.1 et 2.5.2. Ainsi, le lecteur saura explicitement à quel moment l'auteure a utilisé un modèle ou l'autre.

De plus, étant donné que nous situons cette recherche dans le cadre scolaire, il a été important d'apporter des nuances aux jugements que nous avons portés sur les faits observés, notamment lorsque nous avons utilisé le modèle de Bergeron et Herscovics. Ainsi, les mots «semble» ou «paraît» ont été privilégiés plus particulièrement lors de l'analyse de la composante formelle, lorsque les enfants utilisaient les symboles de façon pertinente sans pour autant y sous-tendre une aisance avec les relations d'inclusion ou avec la conservation. Ces termes nous sont apparus d'autant plus pertinents que dans la classe, ces enfants «réussissent» souvent à tromper leur entourage par des réponses exactes sans pour autant réaliser des coordinations qui démontrent une compréhension.

Il nous faut ajouter que l'analyse des phénomènes présents s'est inspirée des techniques et des procédures proposées par Glaser et Strauss (1967), Strauss et Corbin (1990). Ces procédures et techniques, issues de la recherche en ethnologie, sont utiles puisqu'il s'agit d'analyser les données d'une recherche qualitative où nous étudions l'évolution de la pensée d'enfants en difficulté et l'apport d'une intervention minutieusement préparée.

C'est ici que cette recherche se distingue d'une recherche ethnologique. D'une part, dans notre recherche, il a été important de préparer soigneusement les entrevues à partir d'un modèle de la compréhension, d'intervenir pour orienter la recherche de l'enfant plutôt que de laisser les enfants vaquer au gré de leurs manipulations. À ce titre, il est important de vérifier si le modèle sur lequel nous nous sommes appuyée s'est avéré pertinent et jusqu'à quel point. D'autre part, les enfants avec lesquels nous avons travaillé sont en situation d'échec en classe. Il apparaissait donc pertinent de les mettre sur des pistes qui favorisent des découvertes les menant vers des structurations généralisables et durables du concept.

Ainsi, nous avons d'abord cherché à identifier les catégories (Glaser et Strauss, 1967: Strauss et Corbin, 1990), un premier niveau d'analyse. L'ouvrage de Inhelder et Cellerier (1992) a inspiré la première partie de cette analyse. Ainsi, dans un premier temps, les vidéofilms des entrevues d'évaluations et d'interventions ont été transcrits afin de retrouver les gestes et les mots échangés. Cet exercice a permis de préciser les questions ou les tâches improvisées et de clarifier, pour les expérimentations didactiques, les tâches, les explications verbales et gestuelles ainsi que les blocages observés chez les enfants. Cette première description se retrouve dans les appendices.

L'observation du développement de ces critères, un deuxième niveau d'analyse, selon Strauss et Corbin (1990), favorise un processus de mise en relation entre les catégories. C'est ici que nous avons introduit, de façon explicite, les deux grilles d'analyse, celle de Bergeron et Herscovics et celle de Piaget. Ainsi, dans le cas de notre analyse, l'identification des composantes et de leur apparition ainsi que le repérage de la coordination entre le transfert et de la régulation d'où émerge la réflexion, facilitent ce niveau d'analyse. À ce propos, nous avons pu nous appuyer sur les travaux de Huberman et Miles (1992) pour justifier un retour vers les protocoles pour chacun des traitements réalisé sur les données.

Dans un troisième temps, les démarches précédentes permettent de reconstituer l'histoire des données, le codage sélectif dont parlent Strauss et Corbin (1990). C'est cette histoire qu'il est possible de retrouver dans le chapitre 4. Nous en expliquerons les détails dans la section 2.5.3. À ce propos, le recueil de Steffe et Cobb (1988) nous a permis d'observer une analyse réaliste d'expérimentations didactiques.

Tout en reconnaissant l'utilité des ouvrages qui ont inspiré le chapitre des analyses, nous nous en sommes démarquée, puisque d'une part, nous avons dû nous rendre compte que nous ne pouvions traiter les données de façon linéaire et que d'autre part, nous n'avons pas retrouvé de documents qui offrent un traitement double des données recueillies.

Il est maintenant possible de présenter l'analyse des données en fonction des deux volets de l'expérimentation. Ces deux volets correspondent aux entrevues cliniques et aux expérimentations didactiques réalisées. Le premier permet d'identifier la compréhension initiale et la compréhension finale des enfants. Le second favorise l'observation du processus d'apprentissage de ces enfants et l'apport du dialogue sur les représentations mentales, pour faciliter une majoration des schèmes.

2.5.1 Analyse des évaluations initiales et finales

Les critères des différentes composantes de la compréhension se posent comme autant de points d'attention utiles à l'intervention, puis à l'analyse. Comme nous l'avons déjà mentionné, contrairement aux procédures et techniques issues de la recherche en ethnologie où le chercheur doit laisser émerger des «catégories» (Glaser et Strauss, 1967), pour nous, les critères des composantes du modèle de la compréhension étaient déjà déterminés.

Ainsi, dans le chapitre trois, au début de chacune des expérimentations didactiques, nous avons décrit et analysé certains des critères des composantes de la compréhension observés durant les évaluations initiales et les évaluations finales. Une partie des critères évalués ont été rapportée au début de chacune des expérimentations didactiques, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique. Cette section a été appelée, compréhension initiale et finale de .... Les critères satisfaits deviennent alors autant de points d'appui sur lesquels il est possible, pour l'enfant, de poser des réfléchissements pour construire de nouvelles réflexions. Les critères qui ne le sont pas permettent d'orienter et de choisir le thème de l'entrevue.

L'observation des mêmes critères, lors de la dernière évaluation permet d'observer la satisfaction de nouveaux critères, issus de la majoration des schèmes et des structures, entre les deux moments de l'évaluation. Cette analyse, tout en examinant la présence des critères prédéterminés, reste ouverte à l'apparition de nouveaux critères qui n'auraient pas été prévus.

Il faut ajouter une remarque à ce moment. Il est important d'éviter les inférences négatives. Ainsi, nous pouvons conclure qu'un enfant satisfait un des critères des composantes de la compréhension en sa présence, mais ne pouvons déduire que ce critère n'existe pas en son absence. Nous devons partir des observables. Les explications verbales et les manipulations, qui justifient les solutions apportées par les enfants, permettent d'observer la satisfaction ou non des critères prédéterminés.

2.5.2 Analyse des expérimentations didactiques

Les expérimentations didactiques ont été choisies et adaptées, comme nous l'avons déjà mentionné, d'après les besoins des enfants. Soulignons que l'analyse des entrevues d'évaluations et des interventions est précédée et terminée par une brève présentation de l'enfant. Cette présentation ne se veut pas une analyse mais rapporte la façon dont l'enseignant voit l'enfant dans sa classe.

Dans un premier temps, les tâches, les explications verbales et les manipulations laissent émerger les critères touchés ou construits par les enfants, pour favoriser une meilleure adaptation aux tâches proposées et une meilleure compréhension des grands nombres. Cette section a été appelée cheminement de l'expérimentation didactique. Cette première étape s'appuie sur le vocabulaire utilisé dans le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Elle permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu. Les critères, qui ont été soit touchés soit construits, sont ordonnés et classifiés dans un tableau de développement de la compréhension qui permet une forme de validation. Ainsi, il nous a semblé plus facile, par la suite, de suivre le développement de la pensée de l'enfant.

Dans un deuxième temps, il s'agit d'observer les réfléchissements et les réflexions qui ont laissé émerger les composantes ou qui se sont créés entre les composantes. Le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent à ce moment au modèle de l'équilibration de Piaget. Cette section a été appelée, «comment évolue ... à travers les différentes composantes». Le déroulement de l'expérimentation didactique est repris. À ce moment, le lecteur pourra éprouver un sentiment de répétition puisque les mêmes faits sont analysés. Toutefois, étant donné la différence entre les deux modèles, il ne nous a pas été possible d'éviter cette redondance. Il faut alors insister sur le fait que ce deuxième traitement permet une analyse plus approfondie des phénomènes.

C'est à ce moment qu'il devient possible d'observer le passage d'une composante vers une autre, par une coordination entre le transfert (réfléchissement) et les régulations, coordination qui favorise une construction (réflexion). Les représentations mentales des enfants, le matériel et le dialogue servent à identifier les coordinations, entre les réfléchissements et les régulations, qui favorisent ou entravent la construction de nouvelles réflexions.

Analyser les réfléchissements (transferts) et les réflexions (reconstructions) des enfants qui ont facilité le passage d'une composante à une autre, permet une analyse de ce que Piaget appelle l'abstraction réfléchissante. Chacune des expérimentations didactiques permet donc de répondre partiellement, à la question de recherche. À ce titre, chacune des expérimentations didactiques se termine par une section appelée, «conclusion de l'expérimentation didactique». Chacune de ces réponses partielles contribue à découvrir des éléments pour répondre à la question de recherche. Une synthèse de ces éléments, correspondant aux résultats des études de cas, apparaît au chapitre 4.

2.5.3 Les résultats des études de cas

Le chapitre 4 regroupe les conclusions de chacune des expérimentations didactiques. Cette synthèse se présente comme «l'histoire» des données, un peu à la manière du codage sélectif dont parle Glaser et Strauss (1967) ainsi que Strauss et Corbin (1990). Elle correspond aux résultats obtenus pour chacune des études de cas.

Ainsi, l'histoire débute par une synthèse de l'évaluation initiale et de l'évaluation finale de chacun des enfants rencontrés. Ces évaluations permettent d'identifier les critères des différentes composantes et de les analyser, afin de comprendre ce qui contribue à maintenir des difficultés d'apprentissage chez les enfants rencontrés. Nous avons appelé cette section : «structurations partielles, structurations généralisables». Ainsi, les structurations partielles ne favorisent pas leur réutilisation, puisque chaque situation est considérée comme unique. Quant aux structurations généralisables, elles apparaissent dans les cas où les enfants réutilisent les constructions élaborées durant les expérimentations didactiques, pour les adapter à des problèmes différents.

Un tableau du modèle de la compréhension résume les critères dont il est question dans le texte. Il facilite une visualisation rapide des critères, des différentes composantes de la compréhension, manifestés par l'enfant. À nouveau, il est possible d'observer la satisfaction de critères de la composante formelle sans que les critères des composantes abstraites ou procédurales ne le soient. Il nous est apparu pertinent de relever ce «paradoxe» puisque dans nos écoles, ces enfants obtiennent des notes satisfaisantes sur leur bulletin sans pour autant «comprendre» vraiment ce qui se passe.

L'histoire se poursuit par une synthèse du volet intervention. Trois thèmes peuvent apparaître : les quantités, les règles et les conventions et enfin le comptage et les opérations. De ces thèmes ont ressurgi les critères des diverses composantes de la compréhension. Il nous est alors possible d'observer l'ensemble du développement du concept étudié et de recueillir les relations construites par les enfants, dans leur aspect dynamique. Nous pouvons aussi remarquer l'influence du dialogue dans la clarification et l'identification des coordinations, de même que l'apport du matériel manipulé. Cette section est intitulée : «comment évolue la compréhension de ... à travers les différentes expérimentations didactiques».

Ce chapitre se poursuit par un retour critique qui permet de revenir sur les résultats de l'expérimentation de cette recherche. À ce moment, il est possible d'identifier les critères qui ont pu se construire, d'après le modèle de Bergeron et Herscovics (1989) et de voir comment, en général, ces enfants élaborent les critères des différentes composantes et quels sont les implications de ces constructions dans leur processus de compréhension. À cette occasion, nous revenons sur l'analyse conceptuelle de la numération positionnelle élaborée dans le chapitre de problématique. Ainsi, il nous est possible, à la suite de ces observations, de confirmer ou d'infirmer l'hypothèse de cette recherche.

CHAPITRE III

ANALYSE DES DONNÉES

3.1 Étude de cas de Cl.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse mais rapporte la façon dont l'enseignante voit l'enfant dans sa classe. Cl. est une fillette de troisième année qui a 8;7 ans au moment de la première rencontre. Elle n'a jamais repris une année scolaire. Son enseignante la réfère pour une difficulté à représenter un nombre de plusieurs façons.

Selon son enseignante, Cl. serait davantage portée à juxtaposer les informations plutôt qu'à les coordonner, démontrant ainsi qu'elle a reçu des informations qui dépassent sa capacité d'intégration. Elle arrive à commencer un travail sans aide. Toutefois, elle prévoit rarement les étapes nécessaires à la résolution d'un problème et reproduit plus facilement qu'elle ne crée des solutions aux problèmes posés. Son bulletin indique 3 (assez facilement) pour les activités sur les nombres naturels à la troisième étape.

Cl. a une bonne capacité de concentration. Sa mémoire ne semble pas lui poser problème majeur cependant il est plus facile pour Cl. de reconnaître les notions lorsqu'elle est en leur présence que lorsqu'elle doit les évoquer. Elle se montre motivée et coopérative en classe. Cl. doute de ses capacités, utilise peu ses intuitions, éprouve de la difficulté à faire des choix et attribue ses réussites tantôt à la chance tantôt à ses habiletés.

3.1.1 La valeur positionnelle

3.1.1.1 Compréhension initiale[3] et finale[4]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique.

Au cours de l'évaluation initiale, Cl. sait que les 2 du nombre 222 ont des valeurs différentes. Ainsi, le premier, à gauche, vaut 200 et le dernier vaut 2. Elle considère que ce nombre contient 222 unités mais seulement 20 dizaines. La vérification de sa conception des unités et des groupements comme unités de mesure de quantité laisse apparaître, malgré les manipulations, une difficulté à coordonner la quantité et les unités de mesure de quantité. Elle explique : «...parce que deux dizaines, c'est toujours plus grand que les 20 unités». Cl. semble satisfaire le critère de la composante formelle. Elle attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre mais le critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique (reconnaît la relation d'inclusion) n'étant pas satisfait, sa compréhension est donc partielle. Nous posons alors l'hypothèse selon laquelle, pour Cl., les chiffres sont utilisés comme des objets, sans relation avec les unités de mesure qu'ils représentent.

Au cours de l'évaluation finale, Cl. sait que le 0 de 1098 veut dire les centaines et qu'il y a des centaines ailleurs dans le nombre, «...dans le 1». Elle explique : «Parce que dans les unités de mille (on met) dix grosses enveloppes blanches ...des centaines». Elle semble comprendre, dans ce cas, l'inclusion des

---

[3] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[4] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

centaines dans les unités de mille.

Par la suite, Cl. constate que les 2 du nombre 202 ne valent pas tous la même chose. Ainsi le 2 des centaines vaut 200 tandis que celui des unités vaut 2 unités. Cl. croit cependant que ce nombre ne contient aucune dizaine. Si l'inclusion des centaines dans l'unité de mille semble comprise, celle des dizaines dans la centaine ne semble pas l'être. Elle explique ensuite qu'il y en a 20 : «... ben on a appris que s'il y a 0 dans le milieu, ça va prendre un 2..parce que s'il y a 0 on ne pourra pas faire une base (en référant au matériel multibase)».

Rappelons que nous nous sommes donnée le droit d'intervenir au cours de cette dernière évaluation. Le jugement portera toutefois sur son raisonnement avant l'intervention. Le fait d'être invitée à illustrer le nombre à l'aide de jetons et d'enveloppes permet à Cl. de compter facilement les 20 dizaines du nombre 202. Elle réutilise ensuite ce matériel pour compter les unités et retrouver les 202 unités du nombre 202. Le comptage est toutefois laborieux, en particulier lors des passages entre 190 et 200 (elle croit qu'il s'agit de 1000) puis entre 199 et 200 (elle croit à nouveau qu'il s'agit de 1000). Elle retrouve ensuite les 234 unités du nombre 234 et les 2220 unités du nombre 2220 sans manipulation, en expliquant qu'elle arriverait à ce nombre si elle les comptait.

Cl. semble satisfaire le critère de la composante formelle, comme au cours de l'évaluation initiale. Elle reconnaît spontanément l'inclusion des centaines dans l'unité de mille mais la manipulation et le comptage du matériel (enveloppes et jetons) sont nécessaires à la reconnaissance des unités dans la centaine et des dizaines dans la centaine. Le critère de l'inclusion des unités de mesure, critère de l'abstraction du palier logicomathématique n'est pas encore satisfait pour toutes les unités de mesure. Au cours de l'entrevue initiale l'hypothèse selon laquelle les chiffres sont utilisés comme des objets, sans relation avec les unités de mesure qu'ils représentent a été posée. Actuellement, elle réfère à du matériel pour expliquer son raisonnement (multibase), donc elle attribue aux chiffres l'idée de représentant. Toutefois, la formalisation du matériel multibase ne semble pas induire pour elle, l'inclusion des unités de mesure de quantité.

3.1.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[5]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

L'expérimentation didactique porte sur la valeur de position des chiffres dans un nombre. Elle débute par le rappel des constructions de dizaines et des centaines effectuées au cours de l'évaluation initiale et de leur identification comme unité, dizaine, centaine.

La construction du nombre le plus grand possible avec les chiffres 5, 3, 5 est réalisée en comparant les nombres entre eux (300-500). «300 c'est petit pis il y a deux 5, ça fait qu'on a pas le choix de mettre 53 parce que 35 c'est petit». Le dialogue favorise la mise en correspondance des positions et des unités de mesure représentées par les enveloppes et les jetons. Puis, aux chiffres déjà donnés, vient s'ajouter le 0 avec la même consigne de former encore une fois le plus grand nombre possible.

Cl. compare les unités de mesure et place le 0 à la position des

[5] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-3 à Cl.-6.

dizaines, le plus petit groupement, pour former le nombre 5 503. «Parce que 50 pis 55 c'est à cause ...ça se peut là mais ...ben ça c'est la position des dizaines, il n'y en pas, pis ça c'est la position des centaines pis ça c'est la position des unités de mille». Le dialogue favorise l'introduction de l'unité comme unité de mesure la plus petite et la comparaison entre les nombres 5 503 et 5 530. Cl. réutilise la comparaison entre les nombres pour former le nombre 4 210. Le 2, qui remplace ensuite le 4, donne lieu à la formation du nombre 2210 que nous utilisons par la suite.

Le retrait de 20 au nombre 2210 qu'elle a illustré sur l'abaque est déclaré impossible : «Il n'y en a pas assez». Le dialogue introduit la relation d'équivalence entre 20 et 2 enveloppes, relation qui n'est cependant pas réalisée immédiatement. La reconstitution des unités de mesure de quantité, de leur contenu et de leur contenant permet d'expliquer : «20 unités... pis 2 dizaines... ben 20 unités, il y en a deux fait que il y a en 20, ça fait 20 pis les unités il y en a dix...fait qu'il y en a dix dans chaque enveloppe, ça fait 20». Le dialogue permet la réutilisation de cette compréhension pour traiter plusieurs cas : 5 dizaines, 30, 12 dizaines, 13 dizaines.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
reconnaît l'idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupements	construit des groupes de 10, de 100... compte par 1, par 10	établit des relations d'équivalence reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-compare des nombres -attribue une position à chaque chiffre et un chiffre à chaque position -compare les unités de mesure	-établit des relations d'inclusion -conçoit les unités de mesure comme autant d'unités de mesure -généralise les relations d'équivalence	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.1.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes?

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

La mise en train de l'expérimentation didactique tente d'introduire la recherche du contenu des unités de mesure (dizaine, centaine) pour résoudre les problèmes posés. Elle favorise le rappel des unités de mesure de quantité (unité, dizaine, centaine, unité de mille) illustrées par les enveloppes, les jetons et les cubes.

Cl. compose ensuite le nombre le plus grand à l'aide des chiffres proposés (553). Le réfléchissement peut s'appuyer sur la comparaison entre les nombres 300 et 500 puis entre les groupes de chiffres. Elle explique que «300 c'est petit pis il y a deux 5 ça fait qu'on n'a pas le choix de mettre 53 parce que 35 c'est petit». Le dialogue invite Cl. à mettre en correspondance les chiffres de chaque position et ce qu'ils représentent (enveloppes de dizaines ou de centaines et jetons).

L'ajout du chiffre 0 permet de poursuivre la recherche du plus grand nombre possible. Cl. le place d'abord à la position des unités puis des dizaines formant ainsi le nombre 5 503. Le réfléchissement s'appuie sur la comparaison entre les groupements. Pour Cl. former le nombre le plus grand implique d'enlever le moins possible de quantité. La dizaine est le plus petit groupement entre tous les groupements, elle y fait correspondre le 0. Elle explique de façon hésitante une comparaison entre 50 et 55 puis une autre entre les différentes positions. Le dialogue sollicite la correspondance entre la position des chiffres et ce que cette position représente, puis la comparaison entre les diverses positions.

Cl. prend conscience que l'unité de mesure la plus petite est l'unité. Les chiffres la rendent hésitante puisque le chiffre 0, représentant le plus petit chiffre, n'est pas à la position représentant la plus petite unité de mesure. Elle explique que ce qui la mêle : «C'est le plus petit entre le 0 et le 3 pis entre le 5 et le 5». Elle déplace le 0 à la position des unités et découvre que le nombre 5 530 est plus adéquat pour répondre à la consigne puisqu'il est plus grand que 5 503. Le réfléchissement de Cl. en coordonnant, premièrement une comparaison entre les unités de mesure de quantité, deuxièmement une comparaison entre les nombres possibles et les chiffres de deux nombres possibles, permet une réflexion qui reconstruit le nombre le plus grand qu'il est possible de former (5 530). Elle explique : «Parce qu'il est plus grand 30 que 3». Elle généralise cette compréhension en formant 4 210. Le réfléchissement de Cl. semble s'appuyer sur une coordination de la comparaison entre les unités de mesure et une comparaison entre les nombres. «S'il y avait eu deux 0, je les aurais mis ici (à la dizaine), un 0 la pis un autre là (à l'unité)... parce que les dizaines, c'est encore un moyen là...plus petit». Si un 2 avait remplacé le 4, elle aurait formé le nombre 2210. «...si je le mettais ici (centaine), ça ferait 1220...».

Enlever 20 au nombre 2210 illustré sur un abaque la rend perplexe. Elle observe qu'elle n'a pas assez de dizaines. Le matériel, de type plus formel, cause peut-être un obstacle. Elle est invitée à utiliser les enveloppes, à établir des relations d'équivalence entre 20 et les enveloppes. Cl. prend 2 enveloppes de dizaines qu'elle appelle «20 dizaines». Elle explique : «Parce que 10+10 ça fait 20». Le dialogue déplace le réfléchissement vers le contenant, l'enveloppe, en identifiant le nombre d'enveloppes qu'elle tient dans les mains. C'est à ce moment qu'elle reconnaît les 2 dizaines. L'équivalence entre 2 dizaines et 20 unités n'est pas reconnue immédiatement. Ce questionnement l'ébranle : «20 unités...pis 2 dizaines...ben 20 unités, il y en a 2 fait que il y a en 20, ça fait 20 pis les unités il y en a dix...fait qu'il y en a dix dans chaque enveloppe, ça fait 20». La réflexion s'appuyant sur le contenu puis sur le contenant, dans un mouvement de va-et-vient, semble favoriser la construction d'une relation d'équivalence entre 2 dizaines et 20 unités.

Une activité «de traduction» permet ensuite à Cl. d'expérimenter différentes relations d'équivalence. L'expression 5 dizaines est mise en correspondance avec 5 enveloppes de dizaines et est appelée : «50 dizaines» puis «50 unités». Le réfléchissement s'appuie d'abord sur une juxtaposition du contenu et du contenant que la réflexion reconstruit lorsque Cl. réalise qu'elle parle d'unités. La manipulation des enveloppes supporte la réutilisation de ces réflexions. Cl. réutilise cette compréhension. 30 est mis en correspondance avec 30 unités puis avec 3 enveloppes de dizaines qu'elle appelle trois dizaines, puis 12 dizaines à 12 enveloppes de dizaines, 120 unités, 120.

Un modèle a été fourni pour illustrer 130 unités (13 enveloppes de dizaines). Un réfléchissement, qui s'appuie sur une coordination entre les unités de mesure et les positions, permet à Cl. d'observer qu'en enlevant le 0 au nombre 130 écrit, elle retrouve les 13 dizaines.

Le dialogue sollicite une nouvelle illustration pour représenter le même nombre (130). La construction d'enveloppes représentant les centaines, le repérage des cent unités et des dix dizaines qu'elle conserve, est nécessaire pour que Cl. illustre le nombre 130 au moyen d'une centaine et de 3 dizaines. Cl. ne se rappelle plus que la centaine contient 100 jetons ou unités et qu'il est possible de compter par cent puisqu'on peut compter les unités. Cela semble la confondre. Elle compte les 13 dizaines, appelle le nombre «centaine», compte 110, 120, 140. Un retour sur cette notion sera effectué.

3.1.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Les premiers réfléchissements de Cl. s'appuient sur différentes comparaisons : comparaisons entre les unités de mesure, comparaisons entre les nombres, comparaisons entre les groupes de chiffres. Ces réfléchissements favorisent l'identification des nombres 553 et 5 503 comme nombres les plus grands qu'il est possible de former. Le dialogue introduit la comparaison entre toutes les unités de mesure de quantité et l'identification de la plus petite : les unités.

Une coordination entre les unités de mesure de quantité et les nombres permet de construire le nombre 5 530 et de réutiliser cette compréhension pour construire 4 210 et 2 210. Une coordination entre deux composantes procédurales du palier logico-mathématique favorise une compréhension du nombre comme représentant d'une quantité.

Le retrait de 20 au nombre 2210 est une occasion pour jouer sur les différentes «traductions» qu'il est possible de retrouver pour une même quantité, traductions menant vers la construction de relations d'équivalence entre unités et dizaines. L'utilisation du matériel (enveloppes et jetons), l'identification du nombre d'enveloppes ou de jetons en main, la mise en correspondance entre ces enveloppes et leur nom conventionnel permettent au réfléchissement un mouvement de va-et-vient entre contenu et contenant, mouvement qui facilite la reconnaissance de relations d'équivalence. Cl. généralise ainsi l'équivalence entre 5 dizaines et 50 unités, 30 et 3 dizaines, 12 dizaines et 120 puis, observant l'écriture du nombre 130, observe que le retrait du 0 de la position des unités correspond à la quantité totale de dizaines (13). Une coordination entre des composantes procédurales et abstraites du palier logico-physique, puis formelle favorise l'établissement et la généralisation de relations d'équivalence entre unités et dizaines.

La construction de relations d'équivalence entre plusieurs dizaines et une centaine requiert la construction d'enveloppes représentant les centaines, le repérage des 100 unités et des 10 dizaines conservées, l'illustration du nombre 130 par une centaine et 3 dizaines, mais la réflexion semble bloquée. Cl. compte les 13 dizaines une à une, appelle le nombre «centaine», puis compte par dix avec difficulté. La coordination entre une composante abstraite du palier logico-physique, une composante procédurale du palier logico-physique et une composante abstraite du palier logico-mathématique semble difficile.

L'abstraction réfléchissante de Cl. évolue de coordinations entre deux composantes procédurales (entre les unités de mesure de quantité et les nombres) vers l'établissement et la généralisation de relations d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités puis entre 100 unités, 10 dizaines, 1 centaine. Cette dernière requiert la coordination entre des relations d'équivalence et la conservation des unités de mesure de quantité pour établir des relations d'inclusion.

La manipulation du matériel, son comptage, sa formalisation ont semblé faciliter l'élaboration de relations d'équivalence entre unités et dizaines. La manipulation, le comptage, la reconnaissance de relations d'équivalence et du principe de cardinal (Gelman et Gallistel), ont pu, à cette occasion, favoriser l'illustration du nombre 130 au moyen d'enveloppes de centaines et de dizaines.

3.1.2 La construction des unités de mesure de quantité

3.1.2.1 Compréhension initiale[6] et finale[7]

Lors de l'évaluation initiale, Cl. reconnaît les groupements d'objets et leur attribue le nom qui leur correspond. Elle sait qu'une douzaine s'appelle ainsi parce qu'elle contient douze éléments et qu'une dizaine en contient dix. Lorsqu'il s'agit de construire une centaine avec des enveloppes, Cl. croit que trois enveloppes de dix seront suffisantes même si elle affirme que cette centaine contient 100 jetons. Cl. semble joindre les informations de deux contextes: le contenu des différentes unités de mesure (100 jetons dans une centaine) et celui des positions (3 positions pour obtenir un nombre qui est dans les centaines : unité, dizaine, centaine).

Elle illustre correctement le nombre 202 sans reconnaître l'invariance de cette quantité par rapport à son organisation. Lorsqu'une des centaines est déchirée, elle explique : «Il y en a trop ici (en montrant les dix dizaines). Il y en a 10 pis ici il y en a 10...pis ça fait...ça fait 2...ça fait 100...2 (en tou-

---

[6] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[7] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

chant la centaine et les 2 jetons)». Le comptage ne lui aide pas à découvrir le nombre puisque tous les éléments sont comptés un par un sans qu'elle ne tienne compte des différences de comptage entre les unités et les centaines. Elle compte ainsi 13 éléments.

D'autre part, dans l'activité où elle doit comparer l'avoir de trois bonhommes (30 jetons, 2 dizaines de jetons et dix jetons, 3 dizaines de jetons), Cl. considère que le deuxième est le plus riche «...parce qu'il a 210» alors que les autres ont respectivement 30 jetons et 30 dizaines.

Cl. satisfait les critères de la composante intuitive, mais ne satisfait pas ceux de la composante abstraite du palier logico-physique (invariance et équivalence) ni celui de la composante procédurale du palier logico-physique qui concerne le comptage des éléments et des groupes pour retrouver le nombre correspondant à la quantité. Nous pouvons donc penser que pour Cl. le comptage des groupes et des éléments isolés entrave le développement de la composante abstraite.

Au cours de l'évaluation finale, Cl. identifie le nom des groupements et explique que cette appellation facilite la communication. Lorsqu'une des deux centaines, du nombre 202 déjà illustré, est défaite pour poser les 10 dizaines sur la table, elle considère qu'il ne s'agit plus du nombre 202 puisque des centaines sont enlevées. Le comptage lui permet de contredire cette affirmation. Elle explique : «Parce que ça va avec, ça peut aller...aussi avec les dizaines». Elle reconnaît par la suite que le fait de déchirer une des dizaines de 202 ne change pas la quantité puisque cette centaine n'est pas «ôtée». Selon Cl., ce qui permettrait de changer 202 serait le fait d'éparpiller les dizaines sur la table ou dans le local, puisque : «C'est comme si elles étaient envolées». La prise de conscience que l'ajout et le retrait de dizaines favorisent la modification du nombre permet de reconnaître l'invariance de la quantité quelle que soit son organisation. Cette prise de conscience ayant été favorisée à la suite d'une intervention didactique, le critère relatif à cette composante n'est pas satisfait.

L'équivalence entre les différentes quantités n'est pas reconnue. 2 paquets de 10 macarons et 10 macarons sont considérés comme plus nombreux que 3 paquets de dix macarons ou 30 macarons : «Parce qu'il a deux paquets de dix pis on en a rajouté 10 macarons». Cl. n'a pas cherché à attribuer une pluralité à chacun des ensembles. Une intervention didactique permet de constater l'équivalence par la manipulation et le comptage des enveloppes.

Les critères des composantes intuitives et procédurales du palier logico-physique sont satisfaits. Ils contribuent, au cours de cette entrevue, à la construction de l'invariance de la pluralité quelle que soit l'organisation. Nous ne pourrions toutefois conclure à la satisfaction de la composante abstraite du palier logico-physique. Au cours de l'évaluation initiale, nous avons cru que le comptage des groupes et des éléments isolés entravait le développement de la composante abstraite. Le comptage semble contribuer à la construction de ce critère actuellement. Toutefois, nous ne pouvons constater la construction d'une invariance de la pluralité ou d'une relation d'équivalence entre des quantités.

3.1.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[8]

La deuxième expérimentation didactique porte sur la construction d'unités de mesure de quantité. Cl. est placée dans une situation où elle cherche à comprendre la construction de l'écriture du nombre 146.

---

[8] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-6 à Cl.-8.

Une feuille, sur laquelle 146 traits sont dessinés, lui est donnée. Le moyen jugé le plus rapide pour retrouver le nombre de traits sur une feuille est de les grouper par dix. La juxtaposition des deux quantités (14 dizaines et 6 unités) permet de retrouver le nombre 146.

Le dialogue introduit un questionnement afin de cerner «pourquoi» on écrit les nombres selon une convention. La construction de 14 dizaines au moyen d'enveloppes, l'ajout de 6 unités, le comptage des dizaines, l'observation de la régularité de la base dix, facilitent la construction de la centaine et la mise en correspondance entre les positions et les unités de mesure de quantité. Cl. retrouve les 14 dizaines du nombre 146. Par la suite, le comptage des unités permet d'observer que Cl. connaît le contenu des dizaines mais pas de celui de la centaine. Le dialogue tente de l'amener à défaire la centaine pour retrouver les unités et ainsi reconnaître la réversibilité.

Elle dénombre ensuite les unités dans une centaine (100) et les unités dans les dizaines puis veut recompter la première centaine. Elle croit ne pas avoir compté les unités de cette centaine. Le dialogue tente de la ramener sur les actions précédentes pour lui permettre de reconnaître le principe de cardinal dont par le Gelman et Gallistel (1986). Ce principe est défini comme étant la compréhension selon laquelle le dernier mot d'une quantité dénombré représente le total de l'ensemble. Elle observe ensuite la similitude entre le nom du nombre et la quantité d'unités. Elle retient que devant une panne elle peut s'aider en comptant. Elle identifie le matériel dont elle doit se préoccuper lorsqu'elle compte les unités, les dizaines ou les centaines (enveloppes ou jetons).

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupements	construit des dizaines et des centaines	-reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation -reconnaît le principe de cardinal -reconnaît la régularité de la base dix
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
fait correspondre un chiffre à chaque position et une position à chaque chiffre (tableau de numération)	établit des relations d'inclusion	comprend que les nombre est le représentant d'une quantité
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.2.3 <u>Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes?</u>

Cl. groupe par dix les traits sur la feuille et dénombre 14 «encerclés», qu'elle identifiera comme étant des dizaines, et 6 unités. En juxtaposant ces deux quantités, elle retrouve le nombre 146. Le réfléchissement s'appuie sur la construction de nombres réalisée, au cours de la dernière expérimentation didactique. La réflexion favorise la juxtaposition des unités et des dizaines pour retrouver le nombre : «Parce que regarde ici (en montrant 14 dizaines) c'est 14 pis ici (en montrant le 6) j'ai rien qu'à le mettre avec le 14 pis ça fait 146».

Le dialogue favorise la recherche du pourquoi il en est ainsi. La reconstruction des quatorze dizaines, l'ajout de 6 jetons pour les unités, le comptage des dizaines, l'observation de la régularité qui permet de former de nouveaux groupements, la reconnaissance de la relation d'équivalence entre dix dizaines en une centaine, aboutit d'abord à l'appellation 146 centaines. Le réfléchissement s'appuie sur la reconstitution de la suite des gestes posés. Le dialogue l'invite à identifier la quantité de centaine (1), de dizaines (4) et d'unités (6). Le réfléchissement de Cl. reconstitue la suite des gestes et met en correspondance chacune des unités de mesure avec les positions du tableau de numération. Cl. explique : «C'est parce qu'on a tout formé, on a avait 14, on en a tout formé, là avec ça (enveloppe de centaine) on en a 10 là-dedans, pis ici (en montrant les dizaines) il y en a 4. On peut former ça avec 4...1...ben 10...centaines, ben 1 centaine je veux dire, pis 4 uni...4 dizaines pis 6 unités. Pis ça fait 146».

Cl. est invitée à retrouver le nombre de dizaines, d'unités et de centaine dans le nombre 146. Elle appuie son réfléchissement sur les positions du tableau de numération et explique qu'il y a 4 dizaines dans le nombre 146. L'observation du matériel, la recherche de la quantité totale de dizaines (dans la centaine comme celles qui sont sur la table) permettent de retrouver les 14 dizaines. Le matériel et la précision apportée à la consigne facilitent une réflexion qui coordonne les dizaines visibles et celles qui sont dans la centaine (invisibles).

Cl. sait qu'il y a beaucoup d'unités dans 146 et croit qu'elle devra compter par dix les enveloppes de dizaines et de centaines. Elle précise ensuite qu'elle compte par cent et par dix parce que ce sont des centaines et des dizaines. Elle ajoute qu'une dizaine contient dix unités, retrouve le nombre de dizaines dans la centaine (10), puis défait la centaine pour compter les unités qui sont dans chaque dizaine et reconnaître les 100 unités. Le dialogue l'invite à porter attention sur ce qui est compté lors-

qu'elle désire retrouver la quantité d'unités ou de dizaines. Elle compte : «100 (en montrant la centaine)...110, 120, 130, 140 (en montrant les dizaines) ...» puis hésite devant la centaine.
«-Les as-tu comptées?
--Non...ceux-là c'est des centaines».
Le réfléchissement de Cl. s'appuyant sur la manipulation des objets favorise une réflexion sur la reconstitution des gestes posés. Le cardinal, résumant l'action ne peut être reconnu. Le dialogue part du cardinal (résumé) pour amener Cl. à reconstruire la suite des gestes posés.
«-Est-ce que tu m'as dit 100 tout à l'heure?
--Oui
-Alors est-ce que tu as compté les unités?
--...oui»
Elle recompte ensuite la centaine (100), les dizaines (par dix) puis les unités et retrouve les 146 unités. Elle explique ensuite : «C'est drôle parce que je compte avec tout ensemble parce que avant on comptait ça (les groupes) à part». Cl. semble tout à coup fatiguée. Ce travail intellectuel semble lui avoir pris beaucoup d'énergie. Cl. réutilise ensuite la construction de la conservation des unités dans la centaine en retrouvant les 200 unités qui composent le nombre 200 : «Parce que c'est tout le nombre».

3.1.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Cl. appuie d'abord son réfléchissement sur la juxtaposition des chiffres correspondant aux dizaines et aux unités. Elle retrouve ainsi le cardinal de la pluralité (146). Le dialogue tente d'enrichir ce réfléchissement en partant à la recherche du pourquoi. La reconstruction des 14 dizaines et l'ajout de 6 jetons ne permettent pas d'introduire immédiatement une procédure de comptage. Cl. observe toutefois qu'elle met ces quantités «ensemble». Le comptage des 14 dizaines et l'observation de la régularité de la base dix rendent possible la reconnaissance d'une relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine.

Le dialogue incite Cl. à identifier le nombre d'unités de mesure de quantité. Cl. coordonne la disposition du tableau de numération (6 unités, 4 dizaines, 1 centaine) et le nombre 146. Une invitation à identifier la quantité de centaines, de dizaines et d'unités donne lieu à des constructions du palier logico-mathématique.

Les enveloppes et les jetons ainsi que la recherche totale de dizaines ou d'unités contenues dans le nombre favorisent la conservation des unités de mesure de quantité et la nécessité d'adapter le comptage selon ce qui est recherché. Elle reconnaît alors les 10 dizaines toujours présentes dans la centaine, puis les 100 unités conservées dans cette même centaine. Une coordination entre des critères de la composante procédurale et de la composante abstraite du palier logico-mathématique permet la reconnaissance de la relation d'inclusion.

Le comptage des 146 unités contenues dans l'enveloppe de centaine, les quatre enveloppes de dizaines et l'ajout des 6 jetons sur la table laisse apparaître la construction du principe de cardinal. Dans un premier temps, même si Cl. a retrouvé les 100 unités de la centaine en la défaisant, elle ne croit pas qu'en disant 100, elle compte les unités de cette centaine. Le dialogue, en coordonnant le rappel de l'enveloppe compté et le sens de ce comptage, semble suffisant pour reconnaître qu'en disant «100», elle a compté les 100 unités. Cl. généralise cette construction en reconnaissant les 200 unités du nombre 200. Elle explique : «Parce que c'est tout le nombre».

L'abstraction réfléchissante de Cl. a donc évolué de la juxtaposition des chiffres représentant des quantités, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, vers l'utilisation de procédures de comptage. Ces dernières favorisent des réflexions qui complexifient la relation d'inclusion. Le dialogue a permis de suggérer des manipulations et d'amener des précisions (pourquoi compter les dizaines par 10...) qui ont introduit des réfléchissements qui s'appuient sur une conservation des unités et des dizaines dans la centaine.

3.1.3 La décomposition et la recomposition de nombres

3.1.3.1 Compréhension initiale[9] et finale[10]

Durant l'évaluation initiale, la décomposition du nombre 709 est réalisée à l'aide des cartes qui représentent des unités : 700 unités et 9 unités, 700 et 9. Cl. ne satisfait pas ce critère de la composante formelle qui veut que les chiffres représentent des valeurs relatives non seulement aux unités mais aussi aux dizaines ou aux centaines. Nous pouvons croire que pour Cl. les nombres correspondent à des ensembles d'unités, ce qui est déjà intéressant. Toutefois, les mots dizaines et centaines écrits à côté des chiffres ne représentent pas nécessairement des quantités.

Durant l'évaluation finale, le nombre 709 est décomposé de plusieurs façons. Cl. retrouve 700 avec 9, 700 unités et 9 unités, 7x100 avec 9 unités, 7 centaines avec 9 unités, 70 dizaines avec 9, ces dernières 70 dizaines étant considérées comme équivalentes à 700. L'écriture sur une feuille de ce qui correspond à ces solutions laisse transparaître la compréhension de Cl. Elle écrit 700, décide d'enlever le 0 et de placer le 9 à

---

[9] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[10] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

la place. Elle reconnaît qu'elle désire les «mettre ensemble» et identifie le signe de l'addition lorsqu'il lui est proposé de choisir entre les quatre opérations. Le calcul fait avec l'algorithme permet la vérification. Cl. satisfait maintenant ce critère de la composante formelle. Au cours de l'évaluation initiale Cl. faisait correspondre le nombre à des ensembles d'unités. Actuellement, elle comprend que les dizaines et les centaines représentent aussi des quantités.

3.1.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[11]

Le but de cette entrevue porte sur la décomposition et la recomposition de nombres. Dans un premier temps un rappel favorise l'identification des représentations mentales que Cl. s'est construites des différents groupements. Elle est appelée ensuite à décomposer comme elle le fait en classe. Elle choisit le nombre 351 et y fait correspondre la valeur de chacun des chiffres (300 50 1) sans y introduire l'addition.

La recherche du nombre d'unités qui compose les 3 centaines et les 5 dizaines offre une occasion d'échange sur les divers comptages (par 10, par 100, par 1) et sur le but à identifier pour savoir quel comptage choisir.

La mise en correspondance entre 42 dizaines et le nom du nombre favorise la généralisation des relations d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine, l'utilisation du comptage et du tableau de numération. Pour retrouver le nombre d'unités, elle explique que «...quand c'est des unités, c'est le même nombre». Elle réutilise cette construction pour mettre en correspondance 3 unités et le nombre 3, puis la généralise en liant 49 dizaines et

[11] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-8 à Cl.-11.

le nombre 490.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
reconnaît l'idée de quantité différentes aux divers groupements	compte par 1, par 10, par 100	reconnaît le principe de cardinal
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en: -adaptant le comptage	reconnaît des relations d'inclusion	décompose et recompose un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.3.3 <u>Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes?</u>

Le début de l'expérimentation didactique permet de revoir les représentations mentales que Cl. se fait des différentes unités de mesure, de leurs relations d'équivalence et de l'inclusion des unités dans la centaine. La décomposition du nombre 351, d'abord réalisée comme étant : 100 50 1 laisse apparaître un réfléchissement qui s'appuie sur une coordination entre le découpage de chacune des positions des chiffres du nombre et la mise en correspondance de leur valeur. En expliquant cette correspondance, elle remplace 100 par 300 en disant : «il n'y a pas de 1». Le dialogue l'invite à identifier ce qui sépare chacun de ces nombres. Les mots centaine, dizaine et unité seront mis en correspondance avec 300 50 1. Elle affirme qu'elle «fait de même dans la classe».

Cl. sait que 300 correspond à 3 centaines et non à 300 centaines. Le dialogue l'invite à retrouver le nombre d'unités contenues «trois enveloppes blanches». Elle compte 100, 110, 120. La manipulation des trois enveloppes, l'identification des 100 unités dans chacune, le comptage par 100 permettent de revoir sa première conception (120) et de reconnaître les 300 unités. Cl. admet qu'elle avait mélangé les enveloppes de dizaines et celles des centaines.

Cl. arrive à reconnaître que les différentes façons de compter la centaine correspondent aux unités de mesure de quantité. Le comptage par 100 correspond aux unités, le comptage par 10 aux dizaines et le comptage par 1 à la centaine. Elle semble comprendre qu'elle a compté les unités lorsque je lui montre le 300 de sa décomposition. Le réfléchissement en s'appuyant sur la reconstitution des gestes posés lui permet de résumer ses actions par une réflexion. Elle reconnaît qu'il y a 3 façons de compter la centaine : «Parce que il y en a trois dans chaque...on compte les centaines, les unités pis les dizaines».

Cette compréhension n'est cependant pas réutilisée. Le 50 de sa décomposition (300 50 1) signifie «les dizaines». La vérification de ses propos avec les enveloppes lui permet de réaliser qu'elle parlait des unités et qu'il y a deux façons de compter les dizaines (par un, par dix). Le dialogue est l'occasion de lui faire prendre conscience de l'importance de bien se représenter mentalement ce dont on parle sans quoi il est impossible de se comprendre.

Cl. part ensuite à la recherche des nombres qui correspondent aux cartes pour former le nombre compris entre 402 et 513. Cl. lit le carton sur lequel est écrit 42 dizaines et admet qu'elle ne peut l'imaginer dans sa tête. Elle cherche d'abord à prendre 4 dizaines et 2 unités puis elle réalise qu'elle a besoin de 42 dizaines. Elle reconnaît qu'il y a des dizaines dans les centaines et commence à les compter par dix (10, 20, 30), adapte ensuite son comptage pour compter par un les dizaines isolées (31...42). Elle hésite à construire une nouvelle centaine devant ses 12 dizaines : «Parce qu'il en reste deux». En appuyant son réfléchissement sur ses expériences de la construction de la centaine, Cl. croit qu'il ne doit plus rester de dizaines après avoir formé la centaine. Le dialogue la rassure sur ce point. Elle observe donc maintenant ses 4 centaines et ses 2 dizaines, qu'elle appelle d'abord des unités. Elle identifie le nombre «402...42...4...4 ...42 dizaines». Le réfléchissement s'appuie sur les unités de mesure devant elle et juxtapose les quantités sans que le comptage ni l'opération d'addition ne lui permettent de reconstruire sa réflexion.

Le dialogue l'invite à revenir à ses expériences scolaires pour trouver un moyen de dépannage. Devant son silence le tableau de numération dont elle a parlé au début de l'expérimentation didactique est suggéré. Elle le confond avec un tableau de «jogging mathématique», ne lui reconnaît aucune aide et le délaisse. Le tableau de numération est dessiné et elle inscrit le 4 dans la colonne des centaines, le 2 dans celle des dizaines et 0 dans celle des unités puisqu'il ne reste pas d'unités qui ne sont pas regroupées, lit avec surprise le nombre 420.

Le dialogue introduit aussitôt la recherche de la quantité d'unités contenues dans ce nombre. Elle dénombre les différentes enveloppes par 100 et retrouve 420 unités. Elle explique : «Parce que c'est toutes des...c'est toutes des chiffres différents, ben c'est normal là...parce que dedans il y en a 20, pis le chiffre est 20, pis ici il y en a 400 mais dans les centaines, ça fait 400». Elle termine en disant «...quand c'est des unités, ça fait le même nombre». Cl. ajoute qu'elle n'avait jamais remarqué cette similitude entre le nombre d'unités et le cardinal et explique qu'elle n'est pas certaine que ce sera la même chose pour un autre nombre.

Elle réutilise cette compréhension lorsqu'elle y est sollicitée en se représentant mentalement 3 unités pour y faire correspondre 3, puis elle fera correspondre rapidement 49 dizaines au nombre 490 : «Parce que 90 c'est un bon chiffre, ben c'est le chiffre qui...ben 490, c'est un plus gros chiffre. On ajoute toujours un 0 parce qu'il y en a pas...de dizaines». Une précision est apportée. La suite se poursuivra au cours de la prochaine expérimentation didactique.

3.1.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Cl. laisse voir où elle en est par rapport à la décomposition. Elle découpe les chiffres du nombre à décomposer en reconnaissant qu'ils ont une valeur différente. La réflexion permet ensuite de juxtaposer les quantités ainsi obtenues les unes aux autres, à la manière de chiffres dont on dispose les différentes positions dans le tableau de numération.

La recherche des unités incluses dans les 3 centaines, favorise la manipulation des enveloppes de centaines, l'identification des 100 unités contenues dans chacune et l'introduction du comptage pour retrouver les 300 unités. Le dialogue tente alors d'amener Cl. à établir un lien entre les comptages possibles et le sens qui les sous-tend.

La recherche du nombre correspondant à 42 dizaines permet de distinguer 42 dizaines de 4 dizaines et 2 unités. La manipulation des 42 dizaines permet de préciser la régularité de la base 10 et la possibilité que des unités de mesure de quantité soit étalées sur la table. Les 4 enveloppes de centaines et les 2 enveloppes de dizaines, qu'elle appelle 2 unités, favorisent la reconnaissance du nombre 402. Le réfléchissement s'appuie sur l'observation des unités de mesure de quantité sans introduire de procédure de comptage ou d'addition. Un retour sur l'organisation des groupements dans le tableau de numération permet à Cl. de mettre en correspondance les groupements et les jetons pour lire avec étonnement le nombre 420. Le dialogue l'invite ensuite à dénombrer les unités contenues dans ce nombre. Le comptage utilisé lui permet d'émettre la réflexion suivante : «Quand c'est des unités, ça fait le même nombre». Cette réflexion ne sera pas réutilisée pour retrouver le nombre qui correspond à 3 unités, puis 49 dizaines. L'évocation de 3 unités et la recherche du nom de cette quantité permet de retrouver le nombre 3, mais c'est par la juxtaposition d'un 0 à la quantité 49 que Cl. retrouve le nombre 490.

L'abstraction réfléchissante de Cl. évolue ainsi de réfléchissements portant sur la valeur des chiffres dans un nombre, une manifestation de la composante formelle, vers l'introduction d'une organisation amenée par l'utilisation du tableau de numération et de l'adaptation du comptage, des critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Le dialogue, en introduisant une recherche de sens au comptage des dizaines ou des centaines, cherche à susciter l'introduction d'une procédure du palier logico-mathématique.

3.1.4 Suite de la recomposition et de la décomposition de nombres

L'activité précédente n'ayant pu être complétée au cours de la deuxième expérimentation didactique, elle se poursuit la semaine suivante.

3.1.4.1 Compréhension initiale[12] et finale[13]

Au cours de l'évaluation initiale, Cl. conçoit les unités de mesure de quantité sans coordination avec le nombre. Malgré ses manipulations, elle affirme : «Deux dizaines c'est toujours plus grand que les 20 unités». Nous pouvons poser l'hypothèse selon laquelle Cl. compare les unités et les dizaines comme étant des ensembles différents à la manière d'une intuition du palier logico-physique.

Au cours de l'évaluation finale, Cl. reconnaît que 2 dizaines est équivalent à 20 unités mais, croit-elle toujours, 20 dizaines est une quantité considérée plus petite que 2 centaines : «Parce que tu dis les centaines c'est plus petit que les dizaines...(c'est) plus grand (se reprend-elle)». Cl. semble avoir évolué de la composante intuitive du palier logico-physique à une composante procédurale du palier logico-mathématique. Elle compare les unités et les dizaines en s'appuyant sur des relations d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités. Cl. ne peut toutefois utiliser le même type de relations pour comparer 2 centaines et 20 dizaines.

3.1.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[14]

Cl. est amenée à poursuivre l'activité entamée la semaine précédente. Elle constate qu'entre 402 et 513 il y a «une tonne» de nombres. Le but de l'expérimentation didactique permet de toucher

---

[12] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[13] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

[14] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-11 à Cl.-14.

la comparaison et l'addition. Il s'agit de recomposer des nombres à l'aide des cartes-nombres pour en former de nouveaux entre 402 et 513. Le rappel du nom des différentes unités de mesure favorise l'établissement de relations d'équivalence et d'inclusion.

Le matériel (enveloppes et jetons) est nécessaire pour retrouver une représentation de ce qu'est l'unité. La dizaine et la centaine sont mises en correspondance avec les enveloppes. Cl. reconnaît leurs contenus respectifs (10 unités, 10 dizaines ou 100 unités) et le généralise en retrouvant les 200 unités de 2 centaines, les 20 dizaines de 2 centaines et les 40 dizaines de 400. Le dialogue permet d'établir une relation entre le matériel utilisé en classe (réglettes), celui utilisé dans ce cas-ci (enveloppes et jetons), le sens accordé aux noms des groupements (12 $\neq$ 1 dizaine, 12 $\neq$ 12 dizaines, 12 dizaines $\neq$ une dizaine, 12 = une douzaine) et la régularité des positions à travers les ordres.

La recherche du nom des nombres correspondant aux cartes sur lesquelles sont inscrites les quantités 5 centaines, 2 unités, 12 unités est aisée. Cl. est appelée à vérifier ses résultats au moyen du matériel. Une confusion entre 4 dizaines et 40 dizaines est d'ailleurs clarifiée à ce moment.

La construction de nombres compris entre 402 et 513 permet l'introduction de l'opération d'addition pour compléter les représentations mentales qu'elle se fait des unités de mesure de quantité. Cl. utilise l'algorithme traditionnel. Ainsi, 5 dizaines et 4 dizaines ne feront plus 540 mais 90, 12 unités et 2 unités ne pourront servir à construire le nombre 122 mais bien 14, 3 centaines, 3 unités et 4 unités ne formeront pas le nombre 433. L'ajout de 5 dizaines au nombre 343 paraît d'abord impossible puisqu'il «y a déjà des dizaines», selon Cl. En effet, le chiffre 4 occupe la position des dizaines. Elle est invitée à identifier le geste qu'elle effectue lorsqu'elle regroupe les différentes unités de mesure («mettre ensemble») et à choisir ensuite une opération qui la représente. Cl. généralise ensuite cette opération pour construire de nouveaux nombres.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupements	compte par 10, par 100, par 1 construit des dizaines et des centaines	établit des relations d'équivalence reconnaît l'invariance d'une quantité quel que soit l'organisation
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en : -adaptant le comptage -en additionnant les unités de mesure	-établit des relations d'inclusion -généralise les positions à travers les ordres -généralise les relations d'équivalence	recompose des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.4.3 Comment évolue Cl. à travers les différentes composantes

La correspondance entre le nombre 500 et 5 centaines est issue d'un réfléchissement à partir du tableau de numération. «On rajoute deux zéros». Le dialogue sollicite ses représentations mentales des centaines. Une invitation à choisir les enveloppes qui correspondent aux centaines, à compter permet de vérifier le résultat obtenu. Le dialogue déplace le réfléchissement vers une coordination entre les unités de mesure et le comptage.

Elle généralise cette construction en faisant correspondre de façon hésitante d'abord 2 unités au nombre 2, puis plus assurée 12 unités, 11 unités, 45 dizaines avec respectivement 12, 11, 450. Elle explique : «Parce que j'ai compté dans ma tête avec les petites enveloppes. J'en ai compté 40...ben j'ai compté par 5 pis ça a fait...j'ai compté 5, 10, 15, 20, 25...parce que je voulais arriver à 45». Le réfléchissement semble s'appuyer sur un souvenir qu'elle explique plus tard : elle compte souvent par 5 dans la classe. Une invitation à dénombrer les cinq dernières enveloppes de dizaines lui permet de réaliser qu'elle a compté par dix. Le dialogue déplace le réfléchissement vers le contenu des enveloppes et a favorisé une prise de conscience de ce qui se passe au cours du comptage. Elle observe qu'elle compte par 10.

Elle généralise la coordination entre les unités de mesure de quantité et le comptage : «J'ai fait de la même manière (pour 42 dizaines) j'ai compté 400, 410, 420..., (pour 3 centaines) j'ai fait comme pour 5 centaines... j'ai dit dans ma tête si les enveloppes blanches, c'est les centaines, je vais en prendre 3. Là j'ai fait 100, 200, 300».

Une confusion apparaît entre 4 dizaines et 40 dizaines. Une discussion sur la représentation mentale des dizaines est cependant suffisante pour lui permettre de dénombrer les quatre dizaines et faire disparaître cette confusion. Elle généralise cette clarification pour retrouver le nombre 30 de 3 dizaines, le nombre 510 pour 51 dizaines en expliquant : «J'ai compté par 100, par 10, j'ai fait... ben j'ai compté jusqu'à 5, 500...après j'ai fait 10». Les réfléchissements de Cl. continuent de s'appuyer sur une coordination entre les unités de mesure de quantité et le comptage. La réflexion qui en émerge permet de généraliser cette coordination.

La construction des nombres qui seront compris entre 402 et 513 amène d'abord Cl. à trouver des solutions où elle peut répondre à la consigne par une seule carte. Le réfléchissement s'appuie sur sa nouvelle construction des unités de mesure de quantité qui coordonne les unités de mesure de quantité et le comptage. La réflexion permet ainsi de comparer ces cardinaux aux nombres 402 et 503. Par exemple, elle tend successivement 45 dizaines, 51 dizaines, 42 dizaines, 43 dizaines, 41 dizaines.

Deux cartes sont juxtaposées par la suite. Les quantités 5 dizaines et 4 dizaines sont considérées comme représentant le nombre 540 même si Cl. reconnaît d'abord que 5 dizaines équivaut à 50 et quatre dizaines à 40. Le réfléchissement de Cl. s'appuie sur la juxtaposition des chiffres et des unités de mesure de quantité. Le dialogue suggère l'addition puis s'attarde sur la signification de «mettre ensemble». Cl. reconnaît «le plus», utilise l'algorithme de l'addition et retrouve le nombre 90. Elle explique qu'elle pense davantage aux chiffres qu'aux enveloppes pour trouver des solutions comme celles de 540. Le dialogue a permis de coordonner les unités de mesure de quantité et l'opération d'addition.

Cl. vérifie cette nouvelle construction en prenant les cartes sur lesquelles sont écrites les quantités 12 unités et 2 unités en demandant : «On peux-tu mettre lui en premier (12 unités) et après lui (2 unités)»? Le dialogue sur la représentation mentale de chacune de ces cartes lui permet un réfléchissement qui coordonne les unités de mesure de quantité et l'addition pour retrouver le nombre 14. La prise de conscience de l'opération requise, l'addition, n'est cependant pas vraiment réalisée.

3 centaines, 3 unités et 4 unités correspondent ensuite au nombre 433. Le dialogue et l'écriture du nombre permettent à Cl. de constater qu'elle a placé le chiffre représentant la position des centaines à la position des unités. Pour Cl. il n'y a qu'un problème d'absence de dizaines qu'elle solutionne en changeant la carte 4 unités pour la carte 4 dizaines. L'attribution des unités

de mesure de quantité correspondant aux différentes positions lui permet de retrouver le nombre 343. Elle observe qu'un changement dans la position des chiffres : «Ça fait un autre nombre».

Le nombre 343 n'étant pas suffisamment grand, Cl. doit encore ajouter des quantités. L'ajout de 5 dizaines est jugé impossible. «Parce qu'il y a déjà une dizaine», explique-t-elle. Le dialogue l'invite à poursuivre sa recherche avec la carte 5 dizaines plutôt que de changer de carte. Invitée à prendre 4 enveloppes de dizaines puis 5 enveloppes de dizaines, Cl. les place d'abord l'une (4) à côté de l'autre (5). Elle est ensuite amenée à identifier l'opération qui correspond à l'action de «mettre ensemble». Ne sachant pas reconnaître d'opération correspondant à son geste, elle est appelée à choisir parmi les quatre opérations connues. Elle identifie l'addition puis compte les dizaines. Cl. écrit ensuite le nombre d'unités de mesure de quantité qui correspond aux différentes positions et elle retrouve le nombre 393. Le dialogue déplace le réfléchissement sur une suite de procédures à réaliser lorsqu'une quantité est ajoutée à une autre mais la réflexion à propos de l'addition semble fragile.

Cl. réutilise l'addition pour ajouter 3 dizaines. L'invitation à utiliser les enveloppes facilite la reconnaissance des 12 dizaines, auxquelles elle fait correspondre le nombre 120. Elle traduit l'expression «mettre ensemble» par 120+300, calcule avec l'algorithme de l'addition et trouve 420. Elle ajoute ensuite les 3 unités qui contribuent à former le nombre 423. Cl. admet ensuite que la formation d'un nombre répondant à la consigne est possible, sans que le mot centaine n'apparaisse sur les cartes. Elle reconnaît aussi que l'addition permet de former les nombres.

3.1.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Cl. appuie d'abord son réfléchissement sur sa connaissance du tableau de numération pour retrouver le nom du nombre. Le dialogue l'invite à vérifier ses résultats en coordonnant l'illustration des unités de mesure de quantité et le comptage. Un problème apparaît lorsque Cl. compte les dizaines par 5 plutôt que par 10. L'établissement d'une coordination entre le comptage et son but (retrouver les unités) est construite, ce qui permet de donner un sens à cette procédure. Cela facilite la généralisation d'une coordination entre les unités de mesure de quantité et le comptage.

L'addition de deux groupes de dizaines (4 dizaines et 5 dizaines) laisse apparaître une juxtaposition des chiffres et des unités de mesure de quantités (40+50=540). Le dialogue s'attarde à la signification de l'expression «mettre ensemble». Le réfléchissement se déplace alors vers l'action, ce qui permet d'introduire une réflexion sur l'opération d'addition. Cette réflexion est réutilisée pour la construction du nombre 14 (12 unités+2 unités) et ce, en s'appuyant uniquement sur les représentations mentales des unités de mesure de quantité.

L'opération d'addition n'ayant pas été identifiée, de nouvelles compositions amènent, une fois de plus, des juxtapositions de chiffres (3 centaines, 3 unités, 4 unités=433). Cl. observe alors l'absence de dizaines, élimine l'élément perturbateur pour former un nouveau nombre (334). L'attribution d'une position correspondant aux unités de mesure de quantité permet d'abord de retrouver le nombre 343 et d'observer le changement de nombre qu'amène une disposition qui n'est pas conventionnelle.

L'ajout de 5 dizaines au nombre 343 introduit à nouveau l'opération d'addition. Encore là, dans un premier temps, Cl. tente d'éliminer l'élément perturbateur plutôt que de l'intégrer par l'addition. Le dialogue l'invite à poursuivre la recherche. Une coordination, entre la manipulation des enveloppes et le comptage qui correspond à l'expression «mettre ensemble», permet ensuite d'effectuer le comptage des dizaines. L'écriture des chiffres aux positions qui correspondent aux unités de mesure de quantité permettent à Cl. de retrouver le nombre 393.

Cl. coordonne ensuite l'opération d'addition avec les relations d'équivalence entre 12 dizaines et 120, 3 centaines et 300 pour retrouver le nombre 420. L'écriture du nombre, un critère de la composante formelle du nombre semble introduire le concept d'addition pour continuer la construction de la compréhension de la numération positionnelle.

L'abstraction réfléchissante de Cl. évolue de coordinations entre la convention d'écriture et la valeur des unités de mesure de quantité, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, vers des coordinations où interviennent les actions (compter, additionner). Le dialogue invite Cl. à prendre conscience du sens sous-tendu par le comptage et par les expressions utilisées pour désigner les différentes unités de mesure de quantité.

3.1.5 L'approximation des nombres

3.1.5.1 Compréhension initiale[15] et finale[16]

En ce qui concerne la récitation de la comptine des nombres, Cl. compte facilement un par un. Le comptage par 10 est remplacé par un comptage par 5 sans qu'elle ne s'aperçoive de l'erreur. Cette erreur persiste tant et aussi longtemps qu'il ne lui est pas proposé de compter par 10 à partir de 0. Cl. éprouve ensuite des

[15] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[16] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

difficultés avec le double-comptage lorsqu'elle doit compter le nombre de pas entre 608 et 615. Il en est de même lorsqu'elle utilise le double-comptage pour vérifier le nombre de pas réalisé entre deux nombres durant son comptage par bonds de dix. Elle ne semble pas penser qu'il y a un espace entre deux nombres ou un pas entre deux nombres. Les habiletés de la récitation de la comptine des nombres restent à développer.

Cl. pense arrondir 613 à la dizaine en proposant 700. Elle arrondit ensuite à la centaine le nombre 497 en proposant 500. Le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique relatif à l'arrondissement des nombres ne semble pas satisfait. En effet, Cl. paraît concevoir qu'arrondir correspond à donner la centaine supérieure.

Au cours de l'évaluation finale, les habiletés de comptage de Cl. ont progressé. Elle compte un par un facilement. Elle sait maintenant compter par 10 dans les cas où elle a 10 ou un multiple de dix (230) comme point de départ. Cependant, elle éprouve des difficultés à s'arrêter à un nombre donné et à réaliser un double-comptage. Elle ajoute le point de départ aux pas à dénombrer.

Cl. peut arrondir les nombres 613, 497 et 709 mais confond la position à arrondir. Le rappel du matériel utilisé favorise la correction. Cl. a amélioré ses habiletés de comptage en particulier, pour le comptage par 10. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique est satisfait lorsqu'elle utilise un matériel. Sa conception d'arrondir réfère maintenant davantage à rechercher une approximation de différentes positions.

3.1.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[17]

Le but de l'entrevue est d'amener Cl. à comprendre l'approximation des nombres et à reconnaître son utilité. Pour Cl. arrondir sert : «À compter...tu mets le montant plus haut». La mise en situation consiste donc à nous imaginer que nous sommes au magasin et que nous devons payer mais sans avoir le montant exact. L'argent de Monopoly sert de monnaie. Des billets de 10 et de 100 sont remis à Cl.

Une première tâche vise à faire réaliser à Cl. qu'elle arrondit des nombres même si elle ne sait pas que cela s'appelle ainsi. Elle arrondit d'abord le nombre 149 en comptant les billets de cent et de dix. Elle obtient 150. Le dialogue permet une coordination entre les positions connues et les billets utilisés puis la reconnaissance de la position arrondie. Cl. arrondit ensuite 149 à la centaine, en reconnaissant la position.

Cl. est invitée à additionner le plus rapidement possible le coût de deux objets à acheter. Elle compte mentalement 149+90. L'approximation des nombres doit être sollicitée et elle arrondit 90 à 89 puis à 100. Cl. observe la plus grande facilité permise par cette approximation (150+100).

Elle arrondit ensuite le nombre 938 à la centaine (900) et à la dizaine (90). La manipulation des billets de Monopoly permet d'observer deux possibilités 930 et 940. Elle explique ensuite que pour arrondir : «On enlève le chiffre, il y en a plus, là ça fait juste 3, pis pour les dizaines, on garde ça comme ça». Le dialogue l'invite à réutiliser les billets de Monopoly.

Ayant à écrire le nombre 62, elle propose 602. La lecture permet

---

[17] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-14 à Cl.-17.

une correction. Elle arrondit à la dizaine la plus loin (70) et la plus près (60). Elle généralise cette compréhension pour arrondir le nombre 615 aux deux centaines qui l'entourent 600 et 700. Pour Cl., arrondir sert : «À avoir moins de misère à compter parce que avant là, il fallait compter ça, plus ça, plus ça».

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
«arrondir sert à compter»	compte par 10 et par 100	
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve la position la plus près et la plus loin	observe la quantité négligeable par rapport au tout	utilise l'approximation des nombres dans des situations d'addition
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.5.3 Comment Cl. évolue à travers les différentes composantes

Devant arrondir un montant de $149., Cl. compte avec hésitation un billet de 100 puis quatre billets de 10, s'arrêtant à 140. Jugeant que ce n'est pas suffisant, elle ajoute un dernier billet de 10. Le réfléchissement s'appuie sur le comptage des billets et permet de répondre à la consigne. Elle admet qu'elle vient d'arrondir mais croit qu'elle a arrondi à la centaine. Invitée à énumérer les différentes positions et à observer les billets utilisés, une coordination lui permet de conclure qu'elle a arrondi à la dizaine. Le questionnement, en sollicitant une coordination entre les positions connues et le geste posé, favorise une réflexion au sens d'une restructuration. Cl.

réutilise cette coordination en considérant qu'elle aurait pu aussi arrondir à la centaine, en prenant deux billets de cent.

Cl. additionne 149 et 90 mentalement pour trouver 239. Les nombres ne sont peut-être pas suffisamment grands pour inciter Cl. à utiliser l'approximation des nombres avant d'additionner, à moins que cet exercice ne soit nouveau. Priée d'arrondir chacun des deux nombres pour estimer le résultat, elle «arrondit» d'abord 90 à 89. L'utilisation des billets lui permet d'arrondir à 100, puis de calculer mentalement 100+150. Elle utilise à nouveau mentalement les étapes de l'algorithme et obtient 250. Cl. considère donc qu'arrondir lui permet de compter. Elle trouve plus facile d'effectuer la deuxième opération. La notion d'approximation des nombres n'est probablement pas encore suffisamment comprise pour favoriser son utilisation dans l'estimation.

En arrondissant le nombre 90 à 89, Cl. démontre qu'elle fonde son réfléchissement davantage sur la récitation de la comptine des nombres que sur une idée d'approximation induite par le matériel. Ce dernier, en ne proposant que des billets qui correspondent aux différentes positions, facilite l'arrondissement de 90 à 100.

Cl. semble réutiliser cette procédure par la suite. Le nombre 938 est arrondi immédiatement à 900, sans utiliser le matériel. L'énumération des différentes positions favorise l'identification de la position arrondie.

Lorsqu'elle arrondit 938 à la dizaine, elle obtient 90. «Parce que quand on a un chiffre des dizaines, c'est toujours avec ...les chiffres là...ben comme mettons, le chiffre 90 là, à l'école on fait, 90 parce que 100, unités c'est 9 pis dizaines c'est 90 c'est 90 pis les centaines c'est 100». Son réfléchissement s'appuie sur sa compréhension de la valeur des positions dans un nombre et elle semble conclure qu'il n'est pas possible d'avoir des centaines. L'utilisation des billets de Monopoly lui est suggérée. Cl. compte d'abord les billets de 100 puis les billets de dix pour s'arrêter à 930 puis à 940. Elle corrige son erreur et explique : «J'avais mélangé avec les...les dizaines, pis les unités pis les centaines. A l'école, on fait les unités, c'est un 9, les dizaines, c'est 90 et les centaines, c'est... 900». Elle soutient que ce moyen est utile dans les examens, pour les problèmes qui ont des chiffres. Elle utilise le nombre 340 pour illustrer ses propos. «...on enlève le chiffre, les deux chiffres...(le 4 et le 0 de 340)...et à la place du 4 on met un 0 pour le 300, pis là après on enlève les deux chiffres, il y en a plus, là ça fait juste 3, pis pour...voyons...les dizaines, on garde ça comme ça». Cl. semble confondre les procédures de deux consignes différentes, celle qu'elle utilise pour trouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre et celle qui sert à arrondir. Un dialogue sur le matériel utilisé pour arrondir, l'identification des consignes qui correspondent aux procédures expliquées, le rappel des enveloppes que cela sous-tend semblent clarifier cette confusion.

62 est d'abord écrit 602. L'orthopédagogue lit le nombre écrit et cela semble suffisant pour réaliser la correction. Cl. arrondit à la dizaine en prenant des billets de 10, s'arrête à 70. Elle est amenée à écrire 70 sous 62 et à retrouver une autre dizaine proche. Elle écrit 60 au-dessus de 62 et reconnaît que 60 est la plus près de 62. Un échange permet d'observer qu'il est possible d'arrondir à deux dizaines et que l'on doit choisir selon notre besoin. Elle réutilise cette compréhension pour arrondir 615 à 600 et 700 en comptant les billets.

3.1.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Le premier réfléchissement s'appuie sur le comptage des billets et permet d'obtenir une approximation du nombre, sans qu'une réflexion n'intervienne à propos des procédures utilisées. Le dialogue facilite une coordination entre les connaissances de Cl. à propos des positions des nombres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, et des billets utilisés, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique.

L'estimation, une opération plus sophistiquée de l'approximation des nombres, démontre que cette notion est encore fragile. C'est à cette occasion que Cl. appuie son réfléchissement sur la comptine des nombres, une habileté de comptage, et arrondit 90 à 89. L'utilisation des billets de Monopoly facilite la correction de l'approximation obtenue. Cette manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique est réutilisée par la suite.

Une confusion entre deux procédures émerge. Cette confusion provient de procédures utilisées pour réaliser deux tâches différentes : retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre et arrondir un nombre. Un dialogue permet de préciser la consigne qui correspond à chacune des procédures et le matériel utile à chacune des tâches.

Cl. arrondit ensuite des nombres à la dizaine supérieure et inférieure, puis à la centaine supérieure et inférieure, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Une coordination entre la manipulation des billets de Monopoly, une manifestation de la composante procédurale du palier du palier logico-physique, et l'écriture des nombres, une manifestation de la composante formelle, favorise une comparaison entre les nombres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette comparaison est issue de la mise en situation qui propose des contextes où le choix d'un nombre plutôt que d'un autre s'avère mieux adapté.

L'abstraction réfléchissante évolue ainsi des habiletés de comptage vers la manipulation de billets représentant des quantités, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Les procédures de comptage par 10 et par 100, que cette manipulation permet, facilite une coordination entre l'identification de la position inférieure et supérieure et la comparaison entre les nombres. Le dialogue clarifie l'arrondissement de nombres et la recherche de la quantité d'unités de mesure de quantité dans un nombre, en distinguant les buts de ces deux tâches.

3.1.6 Les opérations sur les nombres

Cette expérimentation a été introduite suite à une discussion avec l'enseignante de Cl. L'enseignante a expliqué à ce moment les difficultés que Cl. éprouvait avec la décomposition et l'addition des différentes termes des décompositions.

3.1.6.1 Compréhension initiale[18] et finale[19]

Au cours de l'évaluation initiale, l'opération où Cl. doit enlever 20 au nombre 234 est réussie avec le matériel. Sans ce dernier, elle se contente d'enlever le chiffre 2 des centaines pour retrouver le nombre 34. La manipulation lui permet de distinguer la centaine de la dizaine. Elle ne satisfait donc pas ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique puisqu'elle semble enlever des chiffres plutôt que d'opérer sur des quantités.

---

[18] Un résumé de cette évaluation initiale apparaît en appendice 1, p. Cl.-1 à Cl.-3.

[19] Un résumé de cette évaluation finale apparaît en appendice 1, p. Cl.-21 à Cl.-24.

Au cours de l'évaluation finale, Cl. sait retirer 20 au nombre 234 mais à nouveau le comptage pose problème lorsqu'il s'agit de retrouver le nom du nombre. L'observation de l'illustration favorise l'émergence du nom du nombre (214), ce que n'a pas permis le comptage trop laborieux. Le matériel a été nécessaire à la réalisation de cette tâche et a favorisé la satisfaction du critère par l'illustration et le retrait de 2 enveloppes de dizaines, sans tâtonnement ni hésitation. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique semble satisfait. Plutôt que d'enlever des chiffres, comme elle le faisait durant l'évaluation initiale, elle enlève des sur des quantités. Toutefois, la difficulté éprouvée avec le comptage l'invite à juxtaposer les quantités trouvées plutôt qu'à les additionner. Ainsi, nous ne pouvons prétendre à la satisfaction de ce critère du palier logico-mathématique.

3.1.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[20]

Le but de la rencontre est de reconnaître le nombre de dizaines et de centaines dans un nombre afin de faciliter les opérations. Le temps requis pour reconnaître le nombre de dizaines d'unités ou de centaines n'a pas permis de poursuivre l'exploration par des opérations d'ajout ou de retrait. Malgré les manipulations et les discussions réalisées au cours des expérimentations didactiques précédentes, Cl. ne semble pas réutiliser les constructions déjà réalisées.

Cl. attribue une valeur aux chiffres du nombre 340. Pour elle, il y a 40 dizaines dans le nombre 340. Elle explique : «On avait une addition, il était marqué 29+39. Là on mettait une flèche, une autre flèche pis là on faisait la même affaire, on faisait une

[20] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 1, p. Cl.-17 à Cl.-21.

flèche, on marquait 3...30 plus 9, pis là on additionne tout ça». Elle explique son raisonnement en utilisant l'exemple d'une addition par décomposition qu'elle a déjà vue en classe.

20+9 + 30+9 =50+8=58

Le nombre 29 est ensuite illustré par 20 enveloppes de dizaines et 9 jetons. Le dialogue tente de faire surgir des souvenirs pour retrouver l'idée que le nombre représente un ensemble d'éléments. Pour elle, ce sont les actions d'encercler des billes, de faire des flèches qui permettent de trouver le nom du nombre. Le comptage des 20 enveloppes de dizaines et des neuf jetons facilite la distinction entre 29 et 209.

Elle illustre ensuite 29 par 9 jetons et 2 jetons. L'addition lui donne le nombre 11. Elle prend ensuite 2 enveloppes de dizaines et 9 jetons et explique : «C'est mêlant avec les dizaines parce que tu sais pas si c'est les dizaines ou les unités. C'est ça que ça me mêle». Le dialogue fait appel à l'activité de dénombrement des 146 traits sur une feuille réalisée au cours de la deuxième expérimentation didactique et lui facilite la reconnaissance d'un nombre composé à la fois de dizaines et d'unités.

34 unités sont reconnues équivalentes au nombre 340. «Tu mets le 3 pis le 4 pis t'enlèves le 0». Le dialogue suggère une vérification par l'illustration et le comptage. Le nombre d'unités est retrouvé en comptant par 100 et par 10. Le comptage des centaines par dix, puis l'adaptation du comptage aux dizaines favorisent la découverte des 34 dizaines. Elle réutilise cette compréhension pour se représenter mentalement le nombre 329. Un temps de réflexion lui est donné afin qu'elle puisse se faire une représentation mentale de l'illustration de ce nombre. Elle trouve les 329 unités et semble reconnaître que le nombre d'unités correspond au cardinal. Le dialogue l'invite à dénombrer les

enveloppes pour retrouver la quantité de dizaines. L'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure est laborieux. Un dialogue se poursuit sur les conditions facilitant l'apprentissage (repos...). En effet, Cl. semble souvent fatiguée au cours des dernières expérimentations didactiques et cela pourrait influencer sa capacité d'apprentissage.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupements	compte par 1, par 10, par 100 -illustre un nombre	-reconnaît le principe de cardinal -établit des relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en adaptant le comptage des différentes unités de mesure	établit des relations d'inclusion	-décompose un nombre -donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.1.6.3 <u>Comment Cl. évolue à travers les différentes composantes</u>

Cl. écrit le nombre 340 sur sa feuille. Elle explique : «300 dans le 3...le 4, j'en ai 40...40 dizaines...pis j'en ai pas d'unités». Le réfléchissement semble s'appuyer sur la convention du tableau de numération qui lui permet une réflexion sur la valeur des chiffres du nombre. Le dialogue introduit une histoire qui revient, entre autre, sur l'idée que les chiffres d'un nombre remplacent les enveloppes et les jetons. Cl. est ensuite invitée à illustrer le nombre 340 avec les enveloppes et les jetons et à expliquer le contenu des enveloppes. Elle prend 3 enveloppes de centaines puis compte les 4 enveloppes de dizaines qu'elle place sur la table. Elle explique sa confusion avec 40 dizaines en disant : «Tantôt là, je pensais plus à ça...(l'illustration) je regardais juste ce nombre-là (340)». Elle poursuit son explication en introduisant l'exemple d'une addition par la décomposition. Cet exemple permet d'introduire l'illustration du nombre 29, un des termes de son addition.

Pour Cl., le 20 veut dire «les dizaines» et non les unités qu'elles contiennent. 29 est ensuite illustré par 20 enveloppes de dizaines et 9 jetons. 29 billes sont dessinées dans un ensemble. Les 20 enveloppes de dizaines et les 9 jetons représentent la même quantité que les 29 billes dessinées dans un ensemble. Un questionnement favorise la reconnaissance des billes comme unités, puis du nombre 29 comme 29 unités. Cl. conclut que l'illustration du nombre 29 par 20 enveloppes et des 9 jetons ne correspond pas à 29.

Dans l'exemple des 29 billes, c'est le fait d'encercler les billes qui a permis de trouver le nombre. Elle appuie son réfléchissement sur le geste d'encercler et oublie le comptage qui a précédé ou justifié la construction d'un ensemble.

La construction d'un nouvel ensemble dont elle ne connaît pas la quantité, qu'elle compte pour en découvrir le nombre l'amène à redécouvrir que le comptage permet de retrouver le nombre. Elle généralise cette procédure aux 20 enveloppes et des 9 jetons pour retrouver le nombre 209. Ce comptage semble induire l'idée de l'addition puisqu'elle illustre ensuite 29 en utilisant les 9 jetons et 2 jetons qu'elle additionne pour découvrir le nombre 11. Constatant que cela ne correspond toujours pas au nombre 29, elle prend finalement 2 dizaines et 9 unités en expliquant «...quand tu dis 29, c'est mélangeant avec les dizaines parce que tu sais pas si c'est les dizaines ou les unités. C'est ça que ça me mêle».

Le rappel de l'activité où elle découvrait les 146 barres dessinées sur la feuille (en montrant le matériel), les 29 billes dénombrées dans l'ensemble, lui permet de reconnaître que lorsque nous donnons un nom à un nombre, il s'agit du nombre d'unités et que ce nombre peut «en même temps» être composé de dizaines. Elle établit ensuite une relation d'équivalence entre que le 20 du nombre 29 et 20 unités.

Par la suite, un retour au nombre de départ (340) permet de retrouver le nombres d'unités qui le compose. Cl. hésite à attribuer 340 unités au nombre 340. Elle sait qu'il y en a : «300 pis 40», mais croit que ces deux quantités font 34. Le réfléchissement s'appuie sur la juxtaposition des chiffres créée par la décomposition. «Tu mets le 3 pis le 4 pis t'enlèves le 0». Le dialogue l'invite à vérifier, par le comptage des unités. Elle retrouve les 340 unités et explique : «Il faut que tu penses aux...dizaines, les centaines pis les unités». Elle ajoute qu'en comptant par 10 et par 100, elle trouve le nombre d'unités. Le dialogue a permis une coordination entre la valeur des chiffres et le comptage.

Cl. retrouve les 34 dizaines en regardant les enveloppes et en comptant par 10 les dizaines dans les enveloppes de centaines, puis suite à un questionnement à propos de ce qui est compté, par 1 les dizaines isolées. Le nombre de centaines ne pose pas de problème.

Cl. tente de réutiliser cette construction en identifiant le nombre d'unités dans le nombre 329. 3 centaines, 2 dizaines et 9 unités sont identifiées et 313 unités composent ce nombre. «J'ai compté 100, 200 pis 300 pis je comptais les dizaines». Le réfléchissement semble s'appuyer sur une coordination entre la valeur attribuée aux chiffres et le comptage des dizaines par 1 (300, ...313). Cl. a oublié d'adapter le comptage et de compter les unités dans les dizaines. Le dialogue l'invite à illustrer le nombre 329, à distinguer 2 dizaines de 2 unités, à compter les unités dans les dizaines, ce qui lui permet de découvrir les 329 unités. L'illustration du nombre a permis de coordonner les relations d'inclusion et le comptage pour faciliter l'adaptation du comptage des unités incluses dans les dizaines et les centaines.

Le dialogue tente à nouveau de lui faire observer que depuis le nombre 340, 20 et encore maintenant avec le nombre 329 le nom du nombre et la quantité d'unités sont identiques. Elle généralise cette observation en constatant qu'avec le nombre 928, il y aurait 928 unités.

Pour Cl. le nombre 329 contient aussi 329 dizaines. Le réfléchissement s'appuie sur l'idée qu'un nombre peut à la fois contenir les dizaines et des unités. Une transformation de cette relation d'inclusion amène une relation d'équivalence où le nombre de dizaines et d'unités ont la même quantité. Le comptage des dizaines qu'elle se représente mentalement, le support des enveloppes pour compter, l'adaptation du comptage réalisée avec de l'aide (elle compte d'abord les centaines par cent et les dizaines par 10) ne permettent pas d'obtenir le nombre de dizaines dans le nombre 329.

3.1.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

La recherche des unités contenues dans le nombre 340 s'appuie d'abord sur un découpage de ce dernier, selon la valeur relative des chiffres dans le nombre, une manifestation de la composante formelle. Elle obtient ainsi 300 centaines et 40 dizaines. La réflexion de Cl. juxtapose ces valeurs et le nom des positions.

Elle semble traiter des formalisations et des procédures du palier logico-mathématique dans un contexte du palier logico-physique. Un dialogue attire alors l'attention de Cl. sur une coordination entre le fait que les chiffres d'un nombre remplacent les enveloppes ou les jetons et sur l'identification du contenu des enveloppes, ce qui permet de compter les unités pour reconnaître la quantité totale d'unités (340), une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique.

Un échange à propos de cette procédure d'addition nous apprend qu'une confusion persiste entre position des dizaines et valeur de la dizaine. Ainsi, illustrer le nombre 29 est difficile. Différentes coordinations apparaissent. Une coordination entre la reconnaissance des billes, comme étant des unités, et le nombre 29, comme étant composé de 29 unités, favorisent l'observation la comparaison entre 209 et 20. Toutefois, Cl. doit réintroduire le comptage pour retrouver le nombre qui correspond aux 20 enveloppes de dizaines et aux 9 jetons sur la table. Ce comptage, en induisant l'opération d'addition, favorise ensuite la correction de la nouvelle illustration du nombre 29 (9 jetons et 2 jetons), puisque l'addition l'infirme (9+2=11). Enfin, Cl. illustre le nombre 29 par 2 enveloppes de dizaines et 9 jetons. Une coordination entre l'illustration d'un nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, et l'addition, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, favorise une correction de l'illustration.

Le rappel des activités de comptage permet à Cl. d'admettre que le nombre d'unités correspond au nom du nombre et que ce nombre peut aussi être composé de dizaines. Une relation d'équivalence entre 20 unités et 2 dizaines est ensuite reconnue. Une coordination entre l'illustration d'une quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, et le comptage, une habileté, laisse émerger la relation d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique.

Retrouver le nombre de dizaines dans 340 requiert la reconnaissance de la relation d'inclusion. Une coordination entre l'adaptation du comptage aux unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique et la reconnaissance de la conservation de la dizaine dans les centaines, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, permet de retrouver les 34 dizaines.

Cette coordination est réutilisée pour retrouver les 329 unités du nombre 329 lorsqu'il est illustré par des enveloppes et des jetons. Le dialogue tente à nouveau de permettre à Cl. d'établir un lien entre le nom du nombre et la quantité d'unités.

La recherche du nombre de dizaines contenues dans le nombre 329 laisse apparaître une transformation de la relation d'équivalence. 329 unités équivalent alors à 329 dizaines. La coordination entre les enveloppes et le comptage ne semble pas se généraliser pour retrouver le nombre de dizaines dans un nombre.

L'abstraction réfléchissante de Cl. semble évoluer de manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique vers des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Les relations d'équivalence de même que les relations d'inclusion sont souvent estompées au profit de valeurs juxtaposées. Le dialogue sur les représentations mentales qu'elle se fait des unités de mesure de quantité, la manipulation des enveloppes et des jetons et le comptage des différentes unités de mesure ont permis l'exploration de nouvelles coordinations. Toutefois, ces coordinations ne sont pas réutilisées.

3.1.7 Entrevue avec l'enseignante

À la fin de l'expérimentation, une entrevue avec l'enseignante a permis la discussion sur les deux points suivants. A-t-elle pu observer des changements dans la compréhension de Cl.? Les attitudes par rapport au raisonnement se sont-elles modifiées?

L'enseignante m'informe que Cl. doute moins de ses capacités, utilise davantage ses intuitions et choisit plus facilement des solutions pour résoudre les problèmes posés. Cl. a fait des progrès mais ils ne sont pas visibles dans ses réalisations en classe. Elle éprouve encore beaucoup de difficultés avec la formalisation. Par exemple, elle réussit l'addition orale 200+80=280 mais l'écriture de cette opération donne 10. Elle ne semble tenir compte à ce moment que du 2 et du 8.

Son autonomie et sa capacité de concentration sont toujours bonnes. Alors qu'auparavant, elle se jetait à l'eau, elle réussit maintenant à s'accrocher à quelque chose. Elle semble avoir des stratégies. Elle cherche des choses. «Je sens le travail qui se fait dans sa tête». Elle est capable d'aller faire des choix en s'accrochant à quelque chose. Elle semble plus consciente de ses problèmes qu'au mois d'avril parce qu'il se fait un travail dans sa tête.

Elle a peu évolué au niveau de sa mémoire, de sa capacité à prévoir des étapes et à créer des solutions nouvelles aux problèmes posés. Son bulletin de la quatrième étape indique un 3 (satisfaisant) comme à la troisième étape.

3.2 Étude de cas de E.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse mais rapporte la façon dont l'enseignante voit l'enfant dans sa classe. E. est un garçon de troisième année qui a 9;2 ans au moment des entrevues. Il a déjà eu un suivi orthopédagogique en lecture en première et en deuxième année. Il est référé par son enseignante parce qu'il éprouve des difficultés à décomposer un nombre de différentes façons. Le bulletin de E. indique un 3 (assez facilement) à la troisième étape. Toutefois, son enseignante observe une difficulté à choisir des stratégies ou des moyens pour résoudre des problèmes. Il est porté à juxtaposer les informations sans nécessairement chercher à les lier entre elles par un sens. E. démontre ainsi qu'il a reçu des informations qui dépassent sa capacité d'intégration.

Selon cette enseignante, E. a une capacité de concentration moyenne mais peut commencer seul un travail. Il a peu confiance en ses capacités. Il est porté à attribuer ses réussites davantage à la chance qu'à ses habiletés. Il n'éprouve pas de problème particulier avec sa mémoire. Il se montre motivé.

3.2.1 Valeur positionnelle

3.2.1.1 Compréhension initiale[21] et finale[22]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique.

---

[21] Un résumé de l'entrevue initiale est en appendice 2, p. E.1-E.-2

[22] Un résumé de cette entrevue finale est en appendice 2, p. E.-16 à E.-18

Au cours de l'entrevue clinique initiale, E. croit que le zéro du nombre 980 veut dire "rien" et que celui de 908 signifie «une dizaine». Il affirme que les 2 du nombre 222 ne valent pas tous la même chose mais ne peut retrouver le nombre de dizaines et d'unités contenues dans 222. Il confond la valeur attribuée au chiffre des dizaines (20) et la quantité de dizaines dans le nombre. Il explique : «Parce que, comme je t'ai dit tantôt, 2 ça représente 2 dizaines». Si E. semble satisfaire ainsi le critère de la composante formelle qui lui permet d'attribuer une valeur relative aux chiffres d'un nombre, il ne satisfait toutefois pas celui de la composante abstraite du palier logico-mathématique, où il doit retrouver la quantité de dizaines ou d'unités incluses dans le nombre 222. Sa compréhension de la valeur positionnelle est donc incomplète étant donné l'absence de relation d'inclusion. Nous pourrions penser que cette absence pourra influencer sa façon de décomposer les nombres, problème justement soulevé par son enseignante.

Au cours de la dernière entrevue d'évaluation, pour E., le zéro de 908 veut dire «0 dizaine». E. admet toutefois que des dizaines sont contenues dans les centaines de ce nombre. Les chiffres du nombre 222 sont reconnus comme ayant une valeur différente. E. éprouve cependant encore des difficultés à exprimer la valeur de chacun des chiffres. Pour lui : «Le 2 vaut 2 unités, le 2 des dizaines vaut 20 dizaines». E. parle ensuite de relations d'inclusion, entre autre, lorsqu'il explique que les centaines sont composées de dizaines et qu'ainsi le nombre 222 contient 22 dizaines et 222 unités. E. satisfait le critère relatif à l'inclusion des unités de mesure de quantité de la composante abstraite du palier logico-mathématique. Le critère de la composante formelle s'appuie donc maintenant sur un critère de la composante abstraite mais reste difficile à exprimer. Il est sans doute plus facile pour lui de décomposer un nombre de différentes façons.

3.2.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[23]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

L'expérimentation didactique débute par un dialogue à propos des jetons et des enveloppes qui sont sur la table et qu'il a manipulé durant l'évaluation initiale. Les mots unité, dizaine, centaine sont mis en correspondance avec les enveloppes et les jetons. L'histoire racontée lui rappelle que les nombres ont été inventés pour faciliter le comptage d'éléments présents en grandes quantités.

E. doit ensuite former le nombre le plus grand possible avec les chiffres qui lui sont remis (5, 3, 5). Il réalise cette tâche en comparant les chiffres entre eux et obtient 553. L'ajout du zéro aux chiffres qu'il a déjà en main amène une comparaison entre les nombres qu'il est possible de former avec ces chiffres (5503, 5530) puis le choix du nombre 5530. Il déclare : «Le zéro ne vaut rien, ça fait qu'on va le mettre à la position des unités parce qu'il ne vaut rien.» Un deuxième problème semblable, où les chiffres 4, 0, 9, 6 lui sont remis, ne permet pas de réutiliser les procédures et raisonnements précédents. E. conclut que le nombre 9604 est le nombre le plus grand qu'il soit possible de former.

Un dialogue amène la comparaison entre les différentes unités de mesure. E. explique d'abord que pour lui, la dizaine : «C'est des chiffres». Un retour à la manipulation des jetons et des enveloppes facilite l'identification de la dizaine comme sorte de groupe

---

[23] Un résumé de cette expérimentation didactique est en appendice, p. E.-2 à E.-5.

puis la comparaison entre les différentes unités de mesure de quantité. E. reconnaît que l'unité est la plus petite unité de mesure de quantité. Toutefois, lorsqu'il doit choisir l'emplacement du chiffre zéro, E. croit que : «C'est à la dizaine qu'il en manque le moins». Il forme ainsi le nombre 9604. La deuxième tâche favorise l'établissement de relation d'équivalence entre le nombre de dizaines et le nom du nombre. E. explique sa procédure ainsi : «On compte les enveloppes avec les unités». Il est à noter qu'au cours de cette expérimentation didactique, les enveloppes sont considérées successivement comme : «Des chiffres...des nombres...des dizaines». L'illustration d'un nombre, par des enveloppes et des jetons, suivie des procédures de comptage, permettent de résoudre le problème de confusion entre 102 et 120, entre 3 dizaines et 30 dizaines, entre 1 dizaine et 1 unité, entre 305 et 350.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupements	compare les chiffres. compte les éléments et les groupes pour illustrer et comparer compte par 10, par 100	établit des relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-compare les unités de mesure -compare des nombres -utilise le tableau de numération	conçoit l'unité et la dizaine comme des unités de mesure de quantité	attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.2.1.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes?

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

Au début de l'entrevue, le dialogue à propos des unités de mesure de quantité, ne semble pas être utile à E. pour solutionner le premier problème. En effet, pour former le nombre le plus grand avec les chiffres 3, 5 et 5, il compare les chiffres entre eux. La solution apportée est satisfaisante (553). Lorsqu'il forme le nombre le plus grand possible avec les chiffres 5, 3, 5 et 0, il compare les chiffres entre eux puis les nombres 5503 et 5530 entre eux. Ainsi, E. forme le nombre 5503 puis déplace le 0 à la position des unités. Il explique : «Le zéro ne vaut rien, ça fait qu'on va le mettre à l'unité». Le réfléchissement de E. semble s'appuyer d'abord sur la comparaison entre les chiffres puis entre les nombres. Sa réflexion porte sur la valeur de chacun des chiffres compte tenu de la position qu'ils occupent.

Un problème semblable n'est pas solutionné de la même façon. E. compare les chiffres 9, 0, 6 et 4 entre eux sans introduire une procédure de comparaison entre les nombres. Ainsi, il forme le nombre 9 406 puis 9 604. E. explique qu'on forme une unité de mille avec dix centaines. Puis il compare les différentes unités de mesure de quantité (unité, dizaine, centaine, unité de mille). L'unité est considérée comme étant la plus petite de ces unités de mesure de quantité. Ensuite, en plaçant le 0, E. sépare l'unité des autres unités de mesure de quantité. Pour lui, les dizaines représentent la position où il en manque le moins. Il semble donc persister ici une contradiction entre le plus petit groupement et la plus petite unité de mesure de quantité.

La deuxième partie de l'entrevue tente de favoriser l'émergence de la reconnaissance des groupes comme unité de mesure de quantité. E. observe les relations entre le nom du nombre et ses illustrations possibles.

Une première relation de ce type apparaît en manipulant les enveloppes et les jetons. Le nombre 20 et la quantité 2 dizaines, puis le nombre 50 et la quantité 5 dizaines sont mis en relation. Par la suite, E. prend 12 enveloppes de dizaines et leur fait correspondre le nombre 102. Le réfléchissement s'appuie sur une appréhension globale du matériel présent devant lui : 10 paquets et 2 paquets. La réflexion qui en émerge laisse apparaître une confusion entre 2 unités et 2 dizaines. Le dialogue introduit alors l'idée de preuve que E. cherche à réaliser au moyen du comptage. Cette procédure lui permet de retrouver que les 12 dizaines correspondent au nombre 120. L'écart entre le premier résultat (102) et le deuxième (120) n'est pas relevé par l'orthopédagogue. L'attention de E. est plutôt orientée vers les deux appellations de la quantité présente devant lui : 12 dizaines et 120 unités.

L'intervenante amène E. vers une troisième représentation du nombre 120. Une centaine et deux dizaines sont mis en relation avec les 12 dizaines initiales. Le dialogue porte encore sur les différents noms que peut porter une même quantité.

Une deuxième confusion apparaît entre dizaine et unité lorsque E. illustre 31 dizaines au moyen de 3 enveloppes de dizaines et d'un seul jeton. Le dialogue et la manipulation des enveloppes facilitent la distinction entre trois dizaines et 30 dizaines. Un réfléchissement à partir de la relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine est généralisé pour retrouver la relation d'équivalence entre 30 dizaines et 3 centaines.

La reconnaissance et la généralisation de la relation d'équivalence entre 30 dizaines et 3 centaines ne permettent pas d'établir celle qui existe entre 10 unités et 1 dizaine. La confusion entre une dizaine et une unité demeure. C'est le comptage par 10, de l'enveloppe de dizaine, qui permet de distinguer la dizaine de l'unité. E. retrouve ensuite le nombre 310 qui correspond aux 31 dizaines, en observant les trois enveloppes de centaines et l'enveloppe de dizaine.

Il réutilise cette réflexion pour reconnaître que le nombre 305 ne correspond pas à 3 enveloppes de dizaines et 5 unités. Il explique : «Il aurait fallu que tu prennes des centaines...ça c'est 35».

Une troisième confusion apparaît entre les nombres 305 et 350. E. écrit d'ailleurs 305, en citant les chiffres 3, 5, 0. Pour lui : «Ça fait la même affaire». L'intervention lui permet de confronter cette écriture avec le nombre 350, qu'il écrit correctement, puis d'observer l'importance de la disposition des chiffres dans l'expression d'un nombre.

3.2.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Durant la première expérimentation didactique E. s'appuie d'abord sur des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. Il compare les chiffres entre eux pour former le nombre le plus grand (553). Il explique la formation de 5530 en disant qu'on place le 0 à la position de l'unité parce qu'il ne vaut rien. Toutefois, il ne réutilise pas ces observations pour un problème semblable et forme le nombre 9604. L'intervention tente d'enrichir sa réflexion en introduisant deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique : la comparaison entre les unités de mesure de quantité et la comparaison entre les nombres.

La comparaison entre les unités de mesure de quantité permet de distinguer les unités des dizaines. La comparaison entre les nombres introduit la recherche des différents nombres qu'il est possible de former.

L'établissement des relations, entre le nom des nombres et les différentes illustrations, facilite l'utilisation des termes différents pour identifier des quantités équivalentes. L'introduction de relations d'équivalence entre des quantités amène E. à utiliser des procédures de comptage par 10 et par 100. Toutefois, chacun des problèmes posé est encore conçu comme un nouveau problème. En s'appuyant sur une juxtaposition des quantités selon l'ordre des positions du tableau de numération pour déterminer le nom du nombre, E. n'introduit pas de manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, comme l'adaptation du comptage ou l'opération d'addition. La transformation de 10 des 12 dizaines en une seule centaine et le comptage des unités contenues dans chacune des unités de mesure de quantité favorisent ensuite l'introduction du comptage pour reconnaître le nom du nombre (120).

Illustrer 31 dizaines par 3 dizaines et 1 jeton favorise l'émergence d'un dialogue à propos d'une coordination entre deux manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique : la relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine, la généralisation de cette relation d'équivalence. La reconnaissance de la dizaine comme unité de mesure de quantité semble se construire à partir du comptage des unités dans la dizaine, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette reconnaissance de la dizaine comme unité de mesure de quantité est réutilisée pour distinguer 305 de 35. L'écriture du nombre 350 permet ensuite de différencier 305 de 350.

L'abstraction réfléchissante de E. a évolué en posant d'abord des réfléchissements à partir de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique comme la comparaison entre les chiffres d'un nombre. E. utilise ensuite des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique comme la comparaison entre les unités de mesure de quantité et la comparaison entre les nombres. Cependant, l'absence de manifestations de la composante abstraite du palier logico-mathématique de l'unité et de la dizaine comme unités de mesure de quantité conservées, pourrait expliquer les confusions qui apparaissent entre elles. Le dialogue a favorisé l'émergence de relations d'équivalence et de leur généralisation, des manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique, puis la construction de la dizaine «conservée» dans la centaine et l'adaptation du comptage, des manifestations de la composante abstraite et procédurale du palier logico-mathématique.

3.2.2 La construction des unités de mesure

3.2.2.1 Compréhension initiale[24] et finale[25]

Durant l'évaluation initiale, E. retrouve des groupements de la vie courante, connaît le nom des groupements qui leur correspond et explique que ces groupements rendent les objets plus faciles à prendre. E. satisfait ainsi un des critères de la composante intuitive du palier logico-physique.

Par la suite, E. explique que la centaine est construite avec 100 jetons mais il n'est pas certain que cette centaine est toujours composée de dix dizaines. Il illustre le nombre 202 facilement et reconnaît l'invariance de cette quantité par rapport à l'organi-

[24] Un résumé de cette entrevue initiale apparaît en appendice p. E.-1 à E.-2.

[25] Un résumé de cette entrevue finale apparaît en appendice 2 p. E.-16 à E.-18.

sation en expliquant que les enveloppes «...restent comme groupées ensemble». Cependant pour E., il n'y a pas d'équivalence entre les trois ensembles : 30 jetons, 2 dizaines de jetons et 10 jetons et enfin 3 dizaines de jetons. Pour lui, 20 + 10 unités font 210. La confrontation de cette affirmation avec le matériel confirme d'abord, selon lui, sa solution puisqu'à : «20 tu ajoutes 10». Par la suite, le comptage par 10 lui permet d'ajuster sa conception. Nous ne pouvons toutefois conclure qu'il satisfait le critère d'équivalence de la composante abstraite du palier logico-physique. Il satisfait toutefois celui de l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation et celui de la composante procédurale du palier logico-physique (compter des éléments et des groupes pour illustrer). Nous pouvons croire que E. éprouvera des difficultés à construire une relation d'équivalence et une conservation des unités de mesure de quantité s'il n'introduit pas de procédures de comptage ou d'addition dans sa compréhension de la numération.

L'expérimentation didactique précédente, portant sur la valeur positionnelle, laisse apparaître une difficulté dans la compréhension des unités, des dizaines et des centaines comme unité de mesure de quantité. Le but poursuivi durant cette expérimentation didactique vise à faciliter cette construction.

Au cours de l'évaluation finale, E. réfère immédiatement aux différentes unités de mesure de quantité (dizaines, centaines). Il considère qu'il est plus facile de compter lorsque les objets sont groupés. Sa compréhension des groupements et de leur utilité est donc mieux adaptée aux tâches mathématiques.

E. illustre ensuite le nombre 222 facilement et constate l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation lorsqu'une centaine est défaite. Il explique que : «La centaine est encore là, mais sauf qu'elle est pas dans tout le paquet entier». Il reconnaît aussi cette invariance lorsque le nombre est illustré sur un abaque. Il explique à ce moment que le comptage lui permettra de vérifier cette invariance. Cependant, dans les faits, E. tente de refaire la centaine en déplaçant les 10 anneaux de la tige des dizaines sur la tige des centaines. Cette manipulation démontre que E. n'a pas compris la convention de remplacement ou d'échange 10-1 (l'anneau change de valeur lorsqu'il change de tige). Toutefois, la volonté de démontrer qu'on peut effectuer l'opération inverse est présente.

L'équivalence entre l'avoir de trois bonhommes (3 paquets de 100, 2 paquets de 100 et 100, 300) n'est pas reconnue immédiatement. Le deuxième bonhomme est d'abord considéré comme étant le plus riche. La demande d'explication suscite la recherche de la pluralité puis la reconnaissance de l'équivalence.

E. satisfait deux des critères de la composante abstraite du palier logico-physique. Il reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation qu'il explique en disant : «La centaine est encore là mais sauf qu'elle est pas dans tout le paquet entier». Les règles d'organisation d'échange sur l'abaque posent problème mais le raisonnement est juste. L'établissement de relations d'équivalence est présent puisqu'une demande d'explication est suffisante pour la reconnaître. La composante procédurale du palier logico-physique et l'introduction de manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique ont permis ces constructions. Nous devons cependant conclure que la recherche immédiate de réponse entrave le raisonnement de E. et que certaines règles d'organisation de la relation d'échange demeurent problématiques.

3.2.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[26]

La deuxième expérimentation didactique débute par un dialogue sur les représentations mentales de E. à propos des unités, des dizaines et des centaines. Une attention particulière est ensuite portée sur la précision des termes, puisque E. confond une enveloppe de dizaine et une enveloppe de centaine, appelant la deuxième une dizaine.

La première tâche requiert le dénombrement d'un ensemble de traits (145). E. décide de grouper par dix les traits dessinés sur la feuille afin d'accélérer le processus de comptage. Il laisse toutefois apparaître un manque de précision. Il compte deux fois le même trait, oublie des traits. Il tente spontanément de remédier à ce manque de précision par un recomptage. Il trouvera ainsi le nombre 145 en expliquant : «14 dizaines ça se peut pas, c'est comme si ça se pourrait pas, fait que là tu rajoutes un zéro». Dans ce cas, il a remplacé le 0 par un 5.

Il est invité à illustrer la même quantité avec les enveloppes et les jetons, puis à recompter. Il explique qu'il vient de réaliser qu'il confondait 14 dizaines avec 10 dizaines et 4 unités. Cette confusion n'est toutefois pas apparue dans ses manipulations. Le comptage par dix et par un est réalisé sans problème. Il croit cependant avoir 140 dizaines. En prenant des enveloppes dans ses mains, il reconnaît les 14 dizaines puis les 145 unités.

Un dialogue sur les sortes de comptage possibles (par 1, par 10, par 100) favorise l'émergence d'une réflexion sur l'invariance de la quantité par rapport à son organisation. «La centaine est rendue là-dedans...»

---

[26] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 2, p. E.-5 à E.-7.

Par la suite, retrouver le nom du nombre qui correspond à 4 centaines, 4 dizaines et de 5 unités provoque des difficultés de comptage. E. compte les centaines par 10 et croit dénombrer les unités. Il identifie plus facilement le nombre 445 en observant les différents groupements pour les juxtaposer comme on le fait dans un tableau de numération. Pour retrouver les unités contenues dans ce nombre, il lui faudra désigner les dizaines et les centaines puis dénombrer les unités qu'elles contiennent.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux groupes	compte par 1 les unités	invariance de la quantité par rapport à l'organisation
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en : -comptant les unités de mesure de quantité - utilisant le tableau de numération	conservation des unités comme unités de mesure de quantité	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre.
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.2.2.3 <u>Comment évolue E. à travers les différentes composantes?</u>

E. éprouve des difficultés à dénombrer les unités dessinées sur sa feuille. Il oublie un trait, le compte deux fois. Il semble connaître son problème puisqu'il cherche à recompter les unités avant de regrouper en dizaine. Ce processus est toutefois long. E. compte ensuite les paquets de dix qu'il vient de former puis les unités. Il trouve 14 dizaines et 5 unités. Il identifie le nombre 145 sans utiliser l'addition ou le comptage. Il explique : «14 dizaines, ça ne se peut pas il faut ajouter un zéro...c'est comme 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ça se peut, ça c'est des unités. Mais quand tu t'en vas dans les 10, ben ça se pourrait 10 mais il faudrait pas qu'il y ait 2 unités fait que là on marquerait... 140 tu fais 100, 4 s'il y avait pas 2 unités, tu marquerais le 0 de 40...». Avec les 5 unités présentes cela fait :«145». Le réfléchissement s'appuie sur sa conception des unités et des dizaines. Les unités sont les chiffres entre 1 et 9 alors que les dizaines commencent à partir du nombre 10. À partir du moment où E. parle des dizaines, il est plus difficile de suivre son raisonnement. Sa réflexion porte ensuite sur le déplacement des chiffres : «Tu donnerais une centaine à l'autre», ce qui est normal puisque pour lui, le processus en est un de juxtaposition de chiffres.

La construction des 14 enveloppes de dizaines permet un réfléchissement à partir des relations d'équivalence élaborées durant la dernière expérimentation didactique. En effet, E. explique une confusion qu'il vient d'éviter entre les 14 dizaines à prendre et les 10 enveloppes de dizaines auxquelles il a pensé ajouter 4 unités. «...je me suis mélangé comme tantôt parce que 14 fallait que ça prenne moi je me disais dans ici là que ça prendrait 4 unités». La réflexion qui favorise une construction de la dizaine comme unité de mesure semble avoir eu lieu. Le comptage par 10 des 14 dizaines et l'ajout des 5 jetons lui permettent de retrouver le nombre 145, confirmant le résultat prévu. Toutefois, E. ne peut revenir sur cette construction pour dire qu'il y a 14 dizaines dans le nombre 145. Pour lui, 40 dizaines puis 140 dizaines composent le nombre 145. Le réfléchissement, à partir de sa connaissance de la dizaine comme chiffre, ne facilite pas l'introduction des groupes comme unités de mesure de quantité pour retrouver les 14 dizaines de ce nombre. Le dialogue invite E. à illustrer une dizaine. Puis, une coordination intervient entre trois aspects: l'utilisation du mot enveloppe pour identifier la dizaine, le dénombrement des enveloppes qui composent le nombre 145 et l'identification de ce qui est compté quand on compte par 10 ou par 1 ces dizaines. Cette coordination semble favoriser l'introduction des groupes comme unité de mesure de quantité puis semble favoriser une réflexion sur la réversibilité de l'action posée. Les 14 dizaines puis les 145 unités qui composent le nombre 145 sont reconnues.

Par la suite, le regroupement de dix des 14 dizaines sert à la construction de la centaine puis à la reconnaissance de son invariance par rapport à son organisation. E. explique : «La centaine est déplacée».

Le comptage et son adaptation en fonction de ce qu'on veut compter fait l'objet d'un dialogue. On précise ce que signifie compter par 100 des centaines, compter par 10 et par 1 les mêmes centaines. Des réflexions semblables sont amenées à propos des dizaines. Les enveloppes et les jetons, qui représentent les différents groupements, sont identifiés à chaque fois.

Ces réflexions, sur les relations d'inclusion, ne sont pas réutilisées lorsque E. doit retrouver le nombre d'unités et de dizaines dans le nombre 445, et ce, même si le nombre est illustré devant lui. E. croit d'abord que le nombre 445 contient 5 unités puis 40 unités. Il compte par 10 les dizaines dans les centaines, puis cherche à continuer par 10 en pointant les dizaines isolées. Le réfléchissement s'appuie ainsi sur sa connaissance du tableau de numération, où un chiffre et un seul correspond aux différentes unités de mesure de quantité. Habitué à associer un chiffre à chaque unité de mesure et à déterminer le nombre y correspondant, il ne pense pas adapter le comptage pour retrouver le nombre d'unités ou de dizaines dans ce nombre. Un nouveau dialogue l'invite à préciser les endroits où il peut trouver des unités, puis des dizaines. Il arrive ensuite à les dénombrer.

3.2.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Au début de la deuxième expérimentation didactique, E. appuie ses réfléchissements sur une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Les nombres sont des chiffres juxtaposés. La réflexion obtenue porte alors sur le déplacement de chiffres pour former un nombre.

Par exemple, si 14 dizaines et 5 unités servent à former le nombre 145, ce même nombre ne contient pas 14 dizaines mais bien 40 dizaines, puis 140 dizaines. Le réfléchissement s'appuie ici sur une coordination entre l'attribution d'une valeur relative à la position du chiffre dans le nombre, une manifestation de la composante formelle, et l'identification de la position du chiffre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Le nombre 40 semble considéré comme étant une dizaine. L'illustration des enveloppes de dizaines et des jetons n'est pas suffisante pour reconnaître les 14 dizaines du nombre 145, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Une coordination entre des manifestations de la composante procédurale et formelle permet d'établir des relations d'inclusion et de retrouver les 14 dizaines, puis les 145 unités du nombre 145. E. prend une seule dizaine, puis choisit le mot dizaine pour identifier ce groupe. Ensuite il dénombre les dizaines, puis identifie ce qui est compté.

La construction d'une conservation des unités de mesure de quantité comme la dizaine et l'unité surgit d'une coordination entre la manipulation des enveloppes et des jetons et d'une comparaison entre 4 unités et 4 dizaines. Ces constructions amènent une adaptation du comptage aux différentes unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette conservation n'est pas réutilisée pour retrouver le nombre d'unités et de dizaines dans un autre nombre (445). C'est par une invitation à coordonner la conservation des unités et des dizaines, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, et l'adaptation du comptage aux unités de mesure de quantité recherchées, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, qu'une solution satisfaisante est apportée au problème posé.

L'abstraction réfléchissante évolue donc de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, où les nombres sont vus comme une juxtaposition de chiffres, vers la construction de critères de la composante abstraite du palier logico-mathématique, où des invariants sont construits : la dizaine et l'unité. Par la suite, E. réutilise la juxtaposition de chiffres pour solutionner un problème. Une invitation à coordonner des critères de la composante abstraite et de la composante procédurale du palier logico-mathématique lui permet de reconnaître le nombre de dizaines et d'unités dans le nombre 445.

L'intervention a permis à E. la construction d'unités de mesure de quantité sur lesquelles peuvent s'appuyer des coordinations avec le comptage. Cependant, spontanément, il réutilise la juxtaposition de chiffres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Il est vrai que cette procédure du palier logico-physique lui a déjà permis de trouver des solutions satisfaisantes, comme dans les cas où 14 dizaines et 5 unités font 145, 4 centaines et 4 dizaines et 5 unités font 445.

3.2.3 Décomposition et recomposition

3.2.3.1 Compréhension initiale[27] et finale[28]

La décomposition du nombre 709 semble aisée. E. retrouve plusieurs compositions : 7x100 et 9 unités, 700 unités et 9 unités, 7 centaines et 9. Il ajoute 9 à 70 dizaines, quantité considérée équivalente à 700 : «Parce que le 70 ne rentre pas dans les dizaines alors c'est comme si tu mettais une centaine donc 700». Il semble satisfaire le critère relatif à la valeur relative des chiffres dans un nombre. Toutefois les raisons invoquées pour établir l'équivalence entre 70 dizaines et le nombre 700 ne démontre pas une compréhension du palier logico-mathématique, car il juxtapose les chiffres plutôt que de compter ou d'opérer sur eux. Par la suite, E. fait correspondre la quantité 2 dizaines au nombre 20, puis à 20 dizaines. Il explique : «2 dizaines c'est 20...20 dizaines». 20 dizaines et 20 unités sont considérées comme des quantités égales : «Parce que 20 dizaines c'est deux enveloppes de dizaines en les comptant par dix». E. ne satisfait donc pas le critère relatif à la comparaison entre des unités de mesure de quantité, une composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette difficulté à coordonner le nombre et les unités de mesure de quantité pourrait expliquer la procédure de E. lorsqu'il dit que 70 dizaines n'entre pas dans la dizaine. Pour réaliser la décomposition, il déplace alors les chiffres sur le tableau de numération.

Au cours de l'entrevue finale, le nombre 709 est décomposé de différentes façons : 7 centaines et 9 unités, 7x100 et 9 unités, 700 et 9, 70 dizaines et 9 unités, en disant : «70 ça fait 700,

---

[27] Un résumé de cette entrevue initiale apparaît en appendice p. E.-1 à E.-2.

[28] Un résumé de cette entrevue finale est en appendice 2, p. E.-16 à E.-18.

700 unités et 9 unités». Il satisfait ainsi ce critère de la composante formelle.

Sa conception des divers groupements comme autant d'unités de mesure apparaît lorsque E. doit comparer 20 dizaines et 20 unités. Il considère d'abord ces deux quantités comme équivalentes parce que : «20 unités, ça va faire deux dizaines et vingt dizaines, c'est 20 unités». La vérification de sa conception avec les enveloppes et les jetons lui permet de se corriger rapidement. Avec quelques hésitations, E. a pu réutiliser cette construction pour reconnaître ensuite l'équivalence entre 20 dizaines et 2 centaines, en expliquant avoir pensé aux enveloppes de dizaines et de centaines. Cette manifestation de la composante procédurale est satisfaite suite à une intervention didactique, E. réutilise la construction de la relation d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine pour la généraliser à 10 dizaines et 1 centaine.

3.2.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[29]

E. commence immédiatement l'expérimentation en exposant sa façon de réaliser différentes décompositions d'un même nombre lorsqu'il est dans la classe. Nous l'avons vu au cours de l'évaluation initiale, il se débrouille bien avec les chiffres. Un dialogue favorise une mise en correspondance entre les décompositions réalisées et les différentes unités de mesure de quantité. Il retrouve ensuite facilement le nom des nombres qui correspondent à différentes unités de mesure de quantité. Il explique que pour trouver le nombre 40 par exemple, il «ajoute un zéro» au 4 de 4 dizaines. Il réutilise la même procédure avec 41 dizaines : «...tu rajoutes comme un autre...ben comme l'unité...» Le

[29] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 2, p. E.-7 à E.-9.

dialogue tente d'abord de suggérer l'utilisation d'une opération à cette procédure, puis invite E. à explorer les unités de mesure de quantité.

Les manipulations, réalisées avec les enveloppes et les jetons, permettent à E. d'illustrer 41 dizaines. E. prend d'abord 5 dizaines (4+1). Le comptage par 10 des 5 dizaines introduit un doute. E. identifie les 40 unités puis corrige l'illustration en prenant 4 enveloppes de centaine et 1 enveloppe de dizaine. Par la suite, il compare puis additionne entre elles les cartes-nombres proposées pour retrouver des nombres qui sont compris entre 402 et 513. Il utilise alors l'algorithme de l'addition.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
distingue la dizaine de la centaine	compte par 1, par 10, par 100 illustre un nombre	-établit des relations d'équivalence -reconnaît la réversibilité
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-compare des nombres -trouve le cardinal en: -additionnant les unités de mesure -en utilisant le tableau de numération	-reconnaît la conservation de la dizaine par rapport à la disposition -donne une valeur relative aux unités de mesure	décompose et recompose des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.2.3.3 <u>Comment évolue E. à travers les différentes composantes</u>

E. retrouve le nom du nombre correspondant à 4 dizaines et 41 dizaines en ajoutant un 0 à la position des unités. Le réfléchissement de E. ne s'appuie pas sur le comptage ou l'addition des unités de mesure de quantité mais sur sa compréhension du tableau de numération. Il forme ainsi les nombres 300, 30, 410. Sa réflexion l'illustre bien : «Tu rajoutes comme un autre... comme l'unité...»

Il semble toutefois y avoir une coupure entre les positions du tableau de numération, un critère propre au palier logico-mathématique, et les groupes à former, un critère du palier logico-physique. En effet, E. illustre 41 dizaines au moyen de 5 dizaines. Son réfléchissement semble s'appuyer sur la position des chiffres du nombre 41 de 41 dizaines. Toutefois, le 1 de 41 dizaines est aussi considéré comme étant à la position de la dizaine, et non à la position des unités comme nous aurions pu le prévoir. Invité à dénombrer les dizaines, E. s'arrête devant la quatrième dizaine et reste confondu. Il a compté par 10 et obtenu 40. Hésitant, il dénombre la cinquième dizaine en disant quarante et un. Le réfléchissement en s'appuyant sur la juxtaposition des chiffres 4 et 1, considérés comme autant de dizaines, lui pose problème. Le comptage et le dialogue favorisent ensuite une re-construction. En effet, ils permettent de préciser ce qui vient d'être dénombré (40 unités et non 40 dizaines). E. reconnaît les 4 dizaines puis illustre les 41 dizaines. Il les compte et confirme le résultat prévu. (41 dizaines = 410). Il réutilise toutefois la procédure s'appuyant sur le tableau de numération pour retrouver les nombres correspondant à 51 dizaines, 43 dizaines, 5 dizaines, 42 dizaines, 5 centaines, 45 dizaines, 40 dizaines.

C'est la recherche de nombres compris entre 402 et 513 qui introduit l'opération d'addition. E. utilise l'algorithme de l'addition pour réunir, de façon satisfaisante, 42 dizaines et 3 centaines. Il a pris soin de retrouver d'abord les nombres auxquels correspondent ces deux quantités. E. ajoute ensuite 12 unités aux 43 dizaines en additionnant les chiffres (12+43=55), puis annexe un 0. Il retrouve ainsi le nombre 550. Il appuie son réfléchissement à la fois sur l'algorithme de l'addition et sur une règle issue de sa compréhension du tableau de numération. La réflexion qui en émerge ne tient pas compte des unités de mesure de quantité. E. choisit l'algorithme pour vérifier son addition. Il aligne alors les nombres correctement 430 et 12 avant de les additionner. L'utilisation de l'algorithme semble l'avoir invité à retrouver le nom des nombres avant d'effectuer son opération. Il réutilise ensuite l'algorithme de l'addition pour ajouter 3 centaines à 442. Il ajoute aussi 10 unités au nombre 442, en comptant par dix cette fois. La fin de l'expérimentation didactique permet à E. d'utiliser soit le comptage, soit l'algorithme de l'addition pour former des nombres.

3.2.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Au début de l'expérimentation, les réfléchissements de E. s'appuient sur le tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Ainsi, lorsque E. croit qu'il manque des chiffres, il en ajoute, comme il l'explique par la suite. Ces conceptions semblent provoquer une coupure entre le palier logico-physique et le palier logico-mathématique lorsqu'il lui faut illustrer 41 dizaines. En appuyant le réfléchissement d'une part sur l'usage du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, et d'autre part sur une conservation de la dizaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, E. juxtapose 4 dizaines et 1 dizaine pour obtenir 5 dizaines plutôt que 41 dizaines. L'identification de ce qui est compté est alors nécessaire pour reconstruire une coordination qui permet d'observer que la manipulation des enveloppes et des jetons confirme le résultat prévu (410). Cependant, la confirmation du résultat prévu ne semble pas donner un caractère suffisamment important à cette coordination pour être réutilisée. Ainsi, E. continue d'ajouter des zéros pour retrouver les nombres des autres décompositions.

En utilisant tantôt l'addition tantôt l'ajout de chiffres, E. ne peut solutionner de façon satisfaisante chaque problème posé. Les quantités 42 dizaines et 3 centaines sont additionnées correctement, tandis que la réunion des quantités 43 dizaines et 12 unités correspondent d'abord au nombre 550. L'introduction du principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente la totalité de l'ensemble, est nécessaire. C'est par l'algorithme de l'addition que ce principe de cardinal vient enrichir le réfléchissement de E. Toutefois, aucune prise de conscience n'a encore été réalisée par l'enfant, qui lui permettrait d'identifier la source de son erreur.

L'abstraction réfléchissante de E. évolue donc de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, comme l'ajout de chiffres, vers une coordination entre une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, comme l'addition, et une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, le principe de cardinal. L'algorithme de l'addition crée une nécessité, celle de retrouver le cardinal de la quantité. Cette nécessité n'est pas présente dans l'adaptation du comptage des unités de mesure.

Les interventions ont tenté d'inviter E. à vérifier ses prévisions par des questions comme «Crois-tu que ça donnerait la même chose si on les comptait?» Elles confrontent ses représentations mentales et les représentations matérielles («prends 41 dizaines dans tes mains») et elles le font réfléchir sur ses actions («qu'est-ce que tu comptes quand tu dis 10»). Toutefois, ces questions sont orientées vers le comment faire sans y introduire assez régulièrement le pourquoi, qui permettrait la construction de critères des composantes abstraites.

3.2.4 L'approximation des nombres

3.2.4.1 Compréhension initiale[30] et finale[31]

Au cours de l'évaluation initiale, pour E., arrondir c'est enlever. Ainsi 613 arrondi à la dizaine devient 603 et 497 arrondi à la centaine devient 397. E. ne satisfait pas le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique touchant l'arrondissement des nombres. Toutefois, E. compte par 1 et par 10 sans problème. Il est habile avec le double-comptage. Nous pouvons poser comme hypothèse que E. considère l'approximation des nombres comme une opération d'addition ou de soustraction.

Au cours de l'évaluation finale, arrondir est encore difficile puisque E. arrondit 497 en écrivant 507. Le rappel de l'expérimentation didactique déjà vécue lui permet de repenser au matériel (billets de Monopoly), d'arrondir aux différentes positions. Le nombre 613 est alors arrondi à la dizaine supérieure (620) puis inférieure (610). Il utilise le double-comptage pour retrouver la dizaine la plus près. L'évocation d'un matériel approprié permet à E. de satisfaire ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

Les habiletés de comptage de E. ne posent pas de problème. Il compte par 1 et par 10 des nombres plus grands que 100. Il utilise facilement le double-comptage. Toutefois le passage à la centaine semble laborieux. Après 195, il trouve d'abord 115 puis utilise le double-comptage pour se dépanner. Nous pouvons croire que l'approximation des nombres est toujours considérée comme une opération d'addition ou de soustraction. Avec l'introduction du

---

[30] Un résumé de cette entrevue initiale apparaît en appendice 2, p. E.-1à E.-2.

[31] Un résumé de cette entrevue finale est en appendice 2, p. E.-16 à E.-18.

matériel, E. peut développer un jugement sur les nombres et proposer des approximations.

3.2.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[32]

Le début de l'expérimentation laisse place au dialogue où il est question de la mise en correspondance entre les unités de mesure de quantité connues (unité, dizaine, centaine) et le matériel proposé (les billets de Monopoly de 10, 100 et 1000). E. arrondit ensuite différents nombres (149, 5064) à partir du contexte de l'achat en magasin. Il éprouve d'abord des difficultés à identifier à quelle position du nombre il a arrondi. Le comptage des billets utilisés semble faciliter l'établissement d'un lien avec la décomposition. «J'ai juste des billets de dix...» explique-t-il. E. est ensuite invité à explorer l'arrondissement à la dizaine supérieure et inférieure avec le nombre 342.

De nouveaux nombres lui sont proposés afin d'arrondir à la centaine. Le nombre 287, puis le nombre 904 sont proposés. Ce dernier est jugé plus difficile à arrondir. «Je mettrais 914 parce qu'il y en a pas (de dizaine), fait que tu rajoutes comme une dizaine». Le dialogue favorise une prise de conscience du changement apporté à la consigne. E. a ajouté mais n'a pas arrondi. Invité à penser au contexte du magasin, puis à estimer une addition, E. arrondit 904 à la centaine. L'aspect spontané de la solution apportée semble induire une vision magique pour E. puisqu'il ne peut arrondir le nombre 906 par la suite.

De nouvelles tâches sont proposées en lui proposant les nombres 906, 508, 316, 404 et 516. E. doit arrondir tantôt à la dizaine, tantôt à la centaine. Le dialogue s'appuie toujours sur le

[32] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 2, p. E.-9 à E.-11.

contexte du magasin. E. compte les billets, arrondit et observe la quantité négligeable par rapport au nombre entier. Ces différentes manipulations permettent d'enrichir la réflexion de E. Ainsi, les deux dernières tâches favorisent l'utilisation du double-comptage pour vérifier les solutions apportées.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
met en correspondance les unités de mesure et les billets de Monopoly	compte par 10 et par 100	
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-détermine la position arrondie à partir des billets -vérifie par le double-comptage	observe la quantité négligeable par rapport au nombre entier	utilise l'approximation des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.2.4.3 <u>Comment évolue E. à travers les différentes composantes</u>

E. arrondit d'abord le nombre 149 à 150. Il croit avoir arrondi à l'unité. Il appuie son premier réfléchissement sur le chiffre des unités et laisse émerger comme réflexion : «J'ai arrondi à l'unité..ah! non, les dizaines...non, c'est ça, les unités». L'observation du chiffre 9 plutôt que celle des billets comptés aurait induit l'erreur. Invité à compter les billets utilisés, E. conclut qu'il a arrondi à la dizaine près, en expliquant qu'il pense à la décomposition. «J'ai 5 billets de 10, ça fait 50...c'est décomposer là». E. réutilise cette procédure pour arrondir à la dizaine supérieure et inférieure le nombre 342.

Il arrondit ensuite 287 à la centaine la plus près, 300. Son explication démontre toutefois qu'il ne tient compte que du chiffre des unités (7), pour déterminer s'il s'agit de la centaine la plus près ou la plus loin. E. explique : «Le 7 c'est plus haut...c'était plus haut que le 2 de tantôt (342), fait que ça m'a donné une idée». E. utilise comme réfléchissement l'unité et par hasard, cette réflexion suffisante.

Une quatrième tâche est alors proposée afin d'observer E. lorsque le chiffre de la dizaine est 0. Ainsi le nombre 904 arrondi à la dizaine donne 914 «...il n'y en a pas (de dizaine) fait que tu rajoutes une dizaine». Le dialogue favorise la prise de conscience du changement de consigne. Arrondir 904, donne ensuite 804 puis 814. Le dialogue l'invite à distinguer ajouter de arrondir puis à réutiliser le contexte du magasin. E. ne trouve toujours pas de solution. C'est par l'addition de trois nombres de 3 chiffres (904+387+260) que E. arrondit spontanément 904 à 900. Le dialogue n'a cependant pas permis de repérer le processus qui avait servi à faire émerger cette réflexion. Pour E. tout cela est encore un peu confus.

E. arrondit 906 à la centaine (900), mais une confusion demeure lorsqu'il s'agit d'arrondir à la dizaine le nombre 906. Il croit avoir arrondi à la dizaine en proposant le nombre 916. Sa réflexion s'appuie sur l'addition du nombre 906 et du billet de dix utilisé dans sa manipulation. La manipulation des billets de Monopoly lui permet une correction. E. concevrait la notion d'arrondir comme une opération d'addition à effectuer sur un nombre et non comme une approximation facilitant les calculs.

Au cours de la tâche suivante, la situation inverse se produit. E. semble confondre arrondir avec l'opération de soustraction. Il arrondit 508 correctement à la dizaine (510) en utilisant les billets de 100 et de 10. Un réfléchissement à partir du comptage des billets facilite la réflexion. Arrondir à la centaine le même nombre est plus laborieux. 508 est arrondi 600 puis 500 mais E.

introduit aussi le nombre 408. Le contexte du magasin, suggéré par le dialogue, est suffisant pour amener une correction.

E. réutilise les billets pour arrondir le nombre 316 à la dizaine la plus près et la plus loin et introduit le double-comptage pour vérifier. Cette réflexion émerge à la suite de l'écriture des deux nombres arrondis au-dessus et en-dessous du nombre de départ. E. arrondit ensuite sans problème les nombres 404 et 506 à la centaine. Pendant ce temps, un dialogue facilite un échange sur les billets à utiliser pour arrondir aux positions comme la dizaine ou la centaine.

3.2.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Le premier réfléchissement de E. s'appuie sur le comptage de billets par 10 et par 100, ce qui permet de comparer le nombre de départ et le nombre arrondi, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. E. établit ensuite une relation entre arrondir et décomposer. La réutilisation du comptage de billets permet d'arrondir un nouveau nombre à la dizaine. Toutefois lorsque E. doit arrondir le nombre 287 à la centaine, il utilise une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, la comparaison entre le chiffre de la position à arrondir dans le nombre et le chiffre 5.

En classe, E. a appris que lorsque le chiffre de la position à arrondir est plus grand que 5, on change le chiffre de la position à arrondir par celui qui le suit dans la chaîne numérique. Cette procédure semble attirer son attention sur les différents chiffres du nombre, au détriment de leurs positions et de la quantité représentée par le nombre. Cette procédure n'est plus suffisante lorsque le nombre à arrondir possède un chiffre plus petit que 5 à la dizaine comme dans le cas de 904. La nécessité de modifier sa procédure apparaît.

Ainsi, pour le nombre 904 E. doit poursuivre sa réflexion. Au départ, il juge opportun d'ajouter une dizaine. Le dialogue en proposant des contextes différents, celui du magasin puis de l'estimation d'une addition de trois nombres, laisse émerger une solution plus adaptée. Cette solution ne s'appuie toutefois sur aucune réflexion consciente. Un aspect magique apparaît. Il reste donc un sentiment de confusion.

Ainsi, E. ajoute-t-il le billet de dix au nombre de départ pour arrondir un nouveau nombre à la dizaine. À un autre moment il enlève une centaine. Le dialogue permet d'introduire l'écriture de nombres. Cette écriture favorise l'émergence de coordination entre la comparaison entre les nombres et double-comptage, deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique. E. peut maintenant juger de la solution trouvée. Le dialogue porte ensuite sur l'identification des billets et leur correspondance avec les positions arrondies. E. réutilise cette coordination avec succès lors de l'évaluation finale, lorsqu'il y est sollicité.

L'abstraction réfléchissante évolue à partir de réussites spontanées issues de différents contextes (magasin, addition de grands nombres) vers une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique (comparer les chiffres pris isolément dans le nombre) et des réussites comprises et contrôlées par une coordination entre deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique (le double-comptage et la comparaison entre les nombres).

Les interventions ont tenté de faire surgir les compétences de E. et de lui faire prendre conscience des manipulations effectuées par des questions : à quelle position as-tu arrondi? ... qu'est-ce que tu prends quand tu arrondis à la dizaine? ... est-ce que tu changes la consigne?

3.2.5 Opérations sur les nombres

3.2.5.1 Compréhension initiale[33] et finale[34]

Au cours de l'évaluation initiale, E. peut enlever correctement 20 au nombre 234 en considérant le 3 des dizaines. Il retire 2 et retrouver 214. Toutefois, pour E. l'addition de 2 dizaines de jetons et 10 jetons font 210. La confrontation avec le matériel confirme d'abord sa solution : «À 20, tu ajoutes 10». Par la suite le comptage par 10 lui permet d'ajuster sa conception. Le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est donc pas satisfait puisque E. juxtapose des quantités qu'il a devant lui. L'opération de soustraction réalisée mentalement démontre une connaissance des opérations sur les petits nombres. Cette connaissance ne semble pas sous-tendre une compréhension des opérations dans la construction des nombres.

Durant la dernière évaluation, E. enlève 2 dizaines au nombre 234 et trouve le nombre 214 en expliquant que 3-2=1. L'équivalence entre l'avoir de trois bonhommes (3 paquets de 100 macarons, 2 paquets de 100 macarons et 100 macarons, 300 macarons) n'est pas reconnue immédiatement. Le deuxième bonhomme est considéré comme étant le plus riche. Invité à expliquer son choix, E. réalise une addition. La relation d'équivalence est reconnue. E. satisfait ainsi le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique relative à l'ajout et le retrait de quantité. Contrairement à la première entrevue, E. comprend maintenant que les nombres représentent des quantités qu'il peut réunir.

---

[33] Un résumé de cette entrevue initiale apparaît en appendice 2, p. E.1 à E.-2.

[34] Un résumé de cette entrevue finale est en appendice 2, p. E.-16 à E.-18.

3.2.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[35]

L'expérimentation débute par un dialogue sur la façon de procéder de E. lorsqu'il doit retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre. Cet échange permet à E. de distinguer les deux types de questions posées habituellement : Combien y a-t-il... et quel chiffre est à la position...? Le nombre 340 est le nombre de départ. La confusion entre le nombre d'unités et le chiffre qui occupe la position des unités permet de retourner à l'illustration du nombre 340, puis au comptage de toutes les unités dans les différentes unités de mesure de quantité. À la suite de ce comptage, E. conclut : «...tout le chiffre est fait avec des unités».

E. doit ensuite effectuer différentes opérations. Enlever 20 dizaines au nombre 340, ajouter 800 unités au nombre 140, enlever 40 unités au nombre 940, diviser en trois parties égales le nombre 900, enlever 10 dizaines au nombre 300, ajouter 13 unités au nombre 200. Des confusions apparaissent. Confusions entre 2 dizaines et 20 dizaines, entre 40 unités et 40 dizaines, entre 10 dizaines et 10, entre 13 unités et 3 dizaines. Le dialogue apporte d'abord des précisions à propos de la distinction entre les unités de mesure de quantité, puis suscite l'établissement de relations d'équivalence. La difficulté pour E. semble être «d'entendre» les mots qui accompagnent les nombres. Nous convenons alors d'écrire la consigne avant de la réaliser.

---

[35] Un résumé de cette expérimentation apparaît en appendice 2, p. E.-11 à E.-14.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différentes mots unité, dizaine, centaine, mille, million	compte par dix, par un, par cent les enveloppes et les jetons	-établit des relations d'équivalence entre les quantités -reconnaît le principe de cardinal
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
enlève, ajoute ou partage des centaines, des dizaines, des unités utilise le tableau de numération	conçoit les unités comme unités de mesure de quantité	donne une valeur relative aux chiffres du nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.2.5.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes

Pour E. le nombre 340 contient 4 dizaines. Il ne réutilise pas les précisions qui ont été apportées pendant le dialogue qui a précédé cette tâche, dialogue qui a porté sur la distinction entre la position des unités et le nombre d'unités. Il appuie son réfléchissement sur l'identification du chiffre qui occupe la position des dizaines, donc sa connaissance du tableau de numération. Il ne semble pas pouvoir imaginer la dizaine à la fois comme position et comme représentante d'une quantité. L'illustration du nombre 340, le dénombrement de toutes les dizaines qu'il comprend et le rappel de la question en spécifiant «en tout» semblent faciliter l'identification du nombre de dizaines (34) qui composent le nombre 340. E. réutilise ensuite le comptage de toutes les unités pour retrouver les 340 unités qui composent le nombre 340. La manipulation du matériel et le dialogue qui accompagne ce comptage, déplacent le réfléchissement vers la valeur sous-tendue par les positions et l'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure de quantité. Une réflexion sur l'invariance de l'unité quelle que soit l'organisation du nombre émerge : «Tout le chiffre est fait avec des unités».

Enlever 20 dizaines au nombre 340 donne 320 à E. Il a transformé l'information afin de la rendre conforme à ce qui lui est familier, les unités. Il enlève ainsi 20 unités. E. réutilise donc la réflexion réalisée précédemment («Tout le chiffre est fait avec des unités») sans la réorganiser et l'adapter au contexte des dizaines. Il ne réalise pas que les dizaines, tout en contenant des unités, sont en elles-mêmes des unités de mesure différentes. Le questionnement sur la représentation mentale de 20 dizaines sert de réfléchissement à l'établissement de relation d'équivalence entre 20 dizaines et le nombre 200. Cette relation d'équivalence doit être reconstruite au cours des manipulations des enveloppes et des jetons qui suivent. E. a de nouveau confondu 20 dizaines et 20 unités, en montrant 2 enveloppes de dizaines. Le problème de la distinction entre 20 dizaines et 20 unités semblait pourtant résolu. Il ne l'était probablement qu'au niveau du palier logico-mathématique.

Une question et la désignation de l'enveloppe de dizaine («Ça, c'est combien de dizaines?»), favorisent à nouveau une prise de conscience de la distinction entre 2 dizaines et 20 dizaines. Cette prise de conscience sert de réfléchissement à la correction de ses manipulations. E. montre ensuite 20 enveloppes de dizaines. Une réflexion à propos de l'invariance de l'unité de mesure de quantité qu'est la dizaine n'est pas apparue.

E. ajoute ensuite 800 unités au nombre 140, en expliquant la réunion des centaines, puis l'ajout des dizaines. «Tu rajoutes une centaine, ça fait 900, pis le reste tu le rajoutes, 940». E. appuie son réfléchissement sur la relation d'équivalence entre 800 unités et le nombre 800 pour opérer.

E. confond par la suite 40 unités et 40 dizaines lorsqu'il doit enlever 40 unités au nombre 940. Il obtient 540. Cette opération, réalisée mentalement, a pu être influencée par le problème précédent où le nombre d'unités à ajouter correspondait aux trois chiffres du nombre de départ (140+800). Ici l'opération est «asymétrique» puisqu'elle demande d'effectuer 940-40 et non 940-400. E. utilise les chiffres (94-40) plutôt que la valeur des unités de mesure de quantités (dizaines) qui accompagnent le nombre 40. La confrontation entre le résultat prévu et l'illustration du nombre de départ (940) et le questionnement sur une relation d'inclusion («Combien il y a d'unités dans l'enveloppe de la centaine?») déplacent le réfléchissement sur la valeur sous-tendue par 40 dizaines (400). Sa réflexion reste toutefois au niveau des chiffres. Il explique : «Des fois j'oublie... des fois je prends avec un 94...des fois avec le 40 ici (9<u>40</u>), c'est ça que j'ai oublié». Il lui est proposé d'écrire la consigne pour supporter sa mémoire.

La cinquième opération remet en question l'hypothèse de l'oubli. Il est demandé à E. d'enlever 10 dizaines au nombre 300. E. transcrit une partie de la consigne (10), celle qu'il juge utile et pertinente. Le mot dizaine qui accompagne le nombre n'est pas écrit sur sa feuille. Le dialogue favorise un réfléchissement s'appuyant sur la relation d'équivalence entre 10 et 10 unités, puis 10 dizaines et 100.

La prise de conscience de l'importance à accorder au mot écrit à côté des chiffres lui permet ensuite d'ajouter 13 unités au nombre 200 en tenant compte de la valeur des 13 unités. Cependant, la vérification avec le matériel est laborieuse. Le problème semble résolu, sans pour autant faire intervenir le critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique, relatif à la conservation des unités de mesure de quantité. E. confond 13 unités et 3 dizaines. Le questionnement est suffisant pour amener un réfléchissement sur l'équivalence entre 10 unités et une dizaine pour illustrer 13 unités correctement. La réflexion qui en émerge porte sur la pertinence de l'organisation des unités de mesure de quantité. «Pour s'en souvenir», explique-t-il d'abord et ne pas avoir besoin de les refaire chaque fois qu'on en a besoin.

3.2.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Au début de l'expérimentation E. appuie ses réfléchissements sur des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique sans toutefois les coordonner entre elles. Il observe les positions des chiffres qui composent le nombre (340 a 4 dizaines), en oubliant le contenu des unités de mesure de quantité (340 a 34 dizaines). Les interventions tentent d'introduire, par la manipulation d'enveloppes et de jetons et par un questionnement adapté, l'idée de coordination entre les unités de mesure de quantité et les différentes positions. La réflexion qui en émerge permet de construire une conservation de l'unité comme unité de mesure.

E. utilise le principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente le total de l'ensemble, pour opérer une addition (140+800 unités). Toutefois, il ne le réutilise pas pour faire correspondre les 40 unités au nombre 40 avant d'opérer la soustraction de 40 unités (940-40 unités). Il semble appuyer son réfléchissement sur une manifestation de la composante du palier logico-physique. Le zéro ne vaut rien, donc ne change rien. L'illustration et le questionnement déplacent à nouveau le réfléchissement vers la valeur sous-tendue par 40 unités. E. explique qu'il oublie et semble confus devant le choix de chiffres à utiliser pour opérer.

Cette réflexion se doit d'être reconstruite pour la dizaine. Des questions permettent des réfléchissements à partir de relations d'équivalence (20 dizaines=200). La réflexion demeure toutefois centrée sur la réponse obtenue et non sur la construction d'une conservation de l'unité de mesure de quantité qu'est la dizaine, ce qui ne permet pas sa réutilisation. La même démarche, reprise avec les enveloppes et les jetons (20 dizaines=20 enveloppes de dizaines), favorise une réflexion sur les relations d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités. Toutefois, aucune réflexion portant sur la conservation de la dizaine n'émerge.

L'écriture de la consigne laisse apparaître une difficulté à coordonner chiffres et unités de mesure de quantité. L'écriture du nombre 10 permet de distinguer unité et dizaine. Une coordination entre chiffres et unités de mesure de quantité apparaît. Cette prise de conscience est réutilisée pour prévoir le résultat de l'addition de 13 unités au nombre 200. Toutefois, le réfléchissement de E. ne s'appuie pas sur la relation d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine lorsqu'il illustre les 13 unités. C'est par un questionnement, que le réfléchissement se déplace vers la relation d'équivalence. La réflexion porte sur le côté pratique de l'organisation des nombres en unités de mesure de quantité, un des critères de la composante intuitive.

L'abstraction réfléchissante a donc évolué de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, centrées sur les positions des chiffres d'un nombre, vers une coordination entre ces positions et les unités de mesure de quantité que ces positions représentent. Puis, elle a évolué vers des critères de la composante abstraite du palier logico-physique, comme les relations d'équivalence. La réflexion à propos de la conservation des unités de mesure de quantité permet une construction abstraite du palier logico-mathématique de l'unité, mais pas de la dizaine. Au cours de cette expérimentation, les interventions cherchent à favoriser des coordinations. Coordinations entre les chiffres et les unités de mesure de quantités, entre ces dernières et les enveloppes et les jetons, entre ce matériel et entre leur symbolisation.

3.2.6 Réseau sémantique sur les nombres

Cette expérimentation didactique, un peu particulière, invite l'enfant à parler de ses représentations mentales et de leurs relations. Il est demandé à l'enfant de nommer tout ce qui lui rappelle les nombres. Le matériel est à sa disposition pour l'aider. Chacun des termes est alors inscrit sur un morceau de papier. Par la suite, l'enfant organise ces petits papiers en un premier réseau qu'il explique. Le dialogue qui suit permet d'enrichir le réseau et d'en construire une deuxième.

3.2.6.1 Compréhension initiale et finale

Contrairement aux autres expérimentations didactiques, celle-ci porte sur les liens que l'enfant établit entre les divers éléments qui apparaissent dans l'étude de la numération positionnelle. Nous pourrions parler des compréhensions initiales et finales au début et à la fin de l'expérimentation didactique mais elles sont l'essence même de cette expérimentation. Pour cette raison, elles n'ont pas été présentées de façon isolée.

3.2.6.2 Cheminement de l'expérimentation[36]

Dans un premier temps, E. énumère les positions et les actions, puis il pense aux groupes. Il classifie ensuite les mots de ces trois catégories en deux colonnes : la première, les chiffres et les positions (unité, dizaine, centaine, ajouter et arrondir), la deuxième, les actions (moins-, + additionner, x fois, décomposer, compter, calculer). Finalement, il annexe aux mots et aux symboles de cette colonne le mot groupes.

10 chiffres	12 -
7 unités	11 +
6 centaines	9 décomposer
5 dizaines	8 groupes
4 ajouter	3 compter
1 arrondir	2 calculer

Le dialogue, qui suit ce premier réseau de sens construit par E., permet d'observer les relations qu'il établit à l'intérieur de chacune de ces classifications. Ensuite, E. explique les relations entre les mots des deux colonnes. Le dialogue permet aussi de préciser le sens accordé aux termes utilisés et de construire un deuxième réseau, où E. établit davantage de coordinations.

	nombre	chiffres		
	décompose	unité		
			enlève	-
		arrondis		
			ajoute +	x
		dizaine		
compter	groupes	centaine	calculer	
		unité de mille		

[36] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 2, p. E.-14 à E.-16.

3.2.6.3 Comment évolue E. à travers les différentes composantes

a) Un premier réseau qui sépare les opérations des quantités

E. pense d'abord faire correspondre le mot nombre aux positions (unité, dizaine, centaine). Des actions comme arrondir, décomposer, additionner, soustraire, multiplier sont ajoutées. Par la suite, E. revient à des valeurs (groupes). Finalement, il retourne à des actions (calculer, compter, ajouter). Ce va-et-vient entre l'organisation des nombres et les opérations permet de construire un premier réseau où E. coordonne les groupes avec les actions puis les positions avec les chiffres et le terme arrondir. Le réfléchissement s'appuie ainsi sur sa connaissance des positions, ce qui amène des actions. À leur tour, ces actions semblent favoriser des réflexions sur des quantités.

b)Vers un deuxième réseau

E. explique ensuite sa classification. Arrondir demeure associé à ajouter. Cela qui rend plausible l'hypothèse émise au cours de la cinquième expérimentation didactique, hypothèse selon laquelle l'approximation de nombre est une opération à effectuer sur les nombres. Le dialogue tente de susciter une distinction entre arrondir et calculer. Cette distinction ne sera pas établie.

Selon E., décomposer un nombre permet de retrouver des groupes (des unités, des dizaines, des centaines). L'échange permet ensuite de coordonner les mots des deux colonnes. Ainsi les groupes correspondent aux dizaines, centaines, unités de mille. Les réflexions de E. lient l'utilité des opérations et la composition du nombre. Ces réflexions émergent d'un réfléchissement qui s'appuie sur la reconstitution de la séquence d'actions nécessaires à la construction de groupes. Ainsi, plusieurs centaines forment un gros nombre. Un questionnement plus précis lui permet d'expliquer qu'avec des dizaines, on forme des centaines.

Pour E., les mots compter et calculer sont synonymes. L'identification de ce qui est compté suggère un nouveau lien entre cette action et les différents groupes (dizaines...). L'énumération des actions calculer et ajouter fait émerger une confusion entre l'addition et la soustraction. Le dialogue tente de lui faire préciser la nature du geste sous-tendu par le «plus», puis par le «moins». Incapable d'identifier le geste d'ajouter ou d'enlever, c'est par l'ajout et le retrait de jetons que E. découvre qu'on fait un moins quand on enlève. Par la suite, il fait correspondre la multiplication, le «fois», à l'idée d'ajouter plusieurs fois. Le dialogue lui a permis de d'enrichir le réfléchissement en coordonnant les symboles (=, -, x) et les gestes qu'ils sous-tendent. E. cherche ensuite à coordonner chiffres avec dizaines, centaines...

L'intervention favorise la réorganisation des mots de façon moins dichotomique. Les deux colonnes (chiffres, positions et actions) du premier réseau ont disparu durant le dialogue au profit d'un tableau où les positions représentent maintenant non seulement des groupes ou des unités de mesure de quantités, mais les points de départ de différentes opérations.

3.2.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Les premiers réfléchissements de E. utilisent les termes de la composante formelle (unités, dizaines, centaines) et les mettent au service de manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique (ajouter, arrondir). Le dialogue intervient pour favoriser une coordination entre les unités de mesure de quantité et les positions. Pour E., ces groupes «forment des nombres», une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Le dialogue permet d'ajouter une relation d'inclusion. «Avec les dizaines, on forme des centaines». Ces réflexions reviennent ensuite vers des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique (calculer, décomposer, arrondir...).

Un échange, à propos du sens des symboles utilisés pour réaliser les opérations, introduit une coordination avec les gestes comme enlever ou ajouter, gestes qui leur correspondent. La compréhension des symboles semble ensuite amener E. à considérer les chiffres comme les représentants des unités de mesure de quantité, donc ayant une valeur relative à leur position.

L'abstraction réfléchissante a permis de construire une conservation de la dizaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, puis une coordination entre chiffres et valeurs relatives, une manifestation de la composante formelle.

3.2.7 Entrevue avec l'enseignante

À la fin de l'expérience, une entrevue avec l'enseignante a permis la discussion sur les deux points suivants. A-t-elle pu observer des changements dans la compréhension de E.. Les attitudes par rapport au raisonnement se sont-elles modifiées?

La mise en place de «compréhensions» est faite selon son enseignante. Les évaluations le démontrent. E. réussit à reconnaître la valeur des nombres, à additionner, à trouver le nombre d'unités et de dizaines dans un nombre. La décomposition est encore difficile mais ce ne serait pas par manque de compréhension. Nous avons pu observer à ce sujet, sa recherche impulsive de réponses. E. fait des choix plus facilement et arrive même à reconnaître que ses habiletés lui permettent de réussir.

D'autre part, E. a amélioré sa concentration, sa confiance en lui, son attitude en général. Il est plus motivé par les défis et utilise davantage ses intuitions. Puisqu'il se fait plus confiance, il tend à proposer des solutions nouvelles, à déduire à partir des informations plutôt que de se contenter de reproduire des modèles. Le bulletin de E. démontre un 3 (assez facilement) pour les activités portant sur les nombres naturels, comme au début de l'expérimentation. Toutefois ses stratégies, ses attitudes et sa compréhension semblent s'être grandement améliorées.

3.3 Étude de cas de I.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse mais rapporte la façon dont l'enseignante voit l'enfant dans sa classe. I. est une fillette de 10:9 ans. Elle a repris sa première année. Actuellement, elle est en quatrième année. Elle est très timide. Son enseignante la réfère pour un problème de compréhension des nombres, mais elle bénéficie simultanément d'un suivi orthopédagogique en français. Son bulletin descriptif indique un C (satisfaisant) pour la capacité à exécuter des tâches reliées aux nombres naturels et aux entiers relatifs.

Selon son enseignante, I. est portée à juxtaposer les informations qu'elle connaît, démontrant ainsi qu'elle a reçu des informations qui dépassent sa capacité d'intégration. Elle utilise peu ses intuitions et organise les étapes d'un travail au fur et à mesure de sa réalisation plutôt que de les prévoir. Elle reproduit plus facilement qu'elle n'invente des procédures.

I. semble avoir des difficultés de concentration. C'est une enfant qui doute de ses capacités, qui a de la difficulté à faire des choix. I. semble peu motivée par les défis même si elle démontre une bonne collaboration. I. parle peu. Cette attitude a eu des conséquences au plan de l'analyse. Ainsi, à quelques occasions, ses réflexions ont dû être inférées à partir des manipulations qu'elle réalisait et des résultats qu'elle obtenait.

3.3.1 Valeur positionnelle

3.3.1.1 Compréhension initiale[37] et finale[38]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique.

Durant l'évaluation initiale, I. peut construire des dizaines et des centaines. Elle affirme que la centaine sera toujours composée de 10 paquets de dix. Elle ajoute que les dizaines servent : «À acheter des choses». Elle donne ainsi à la dizaine un sens auquel nous ne nous attendions pas. I. sait que la centaine réfère à une quantité plus imposante que la dizaine. I. attribue deux fonctions aux groupes : classer et corder, qui sont une classification et une sériation d'objets. Mais elle est incapable de reconnaître dans son environnement, des groupes égaux et semblables. I. satisfait le critère de la composante intuitive relatif à l'attribution d'une quantité plus ou moins grande aux différents termes.

I. illustre ensuite le nombre 202 avec deux enveloppes de

---

[37] Un résumé de l'entrevue d'évaluation initiale apparaît en appendice 3, p. I.-1 à I.-3.

[38] Un résumé de l'entrevue d'évaluation finale apparaît en appendice 3, p. I-24 à I-27.

centaines et deux jetons. Elle constate l'invariance de la quantité par rapport à son organisation en disant : «On a juste enlevé...il y a encore 100 dedans...ça fait encore 202». Elle reconnaît aussi l'équivalence entre 30 jetons, deux paquets de dix et 10 jetons, puis trois paquets de 10 jetons en expliquant que les trois ont chacun 30. Elle satisfait ainsi le critère de la composante procédurale requis pour illustrer un nombre. Les critères de la composante abstraite du palier logico-physique sont satisfaits.

Au palier logico-mathématique, elle appelle une enveloppe de dizaine «dix», mais ne comprend pas la question lorsque je lui demande à combien de dizaines correspond l'enveloppe que je lui montre. Elle reste accrochée à dix. Elle ne satisfait pas explicitement le critère de la composante abstraite de ce palier, où elle doit concevoir que les différents groupes sont autant d'unités de mesure de quantité.

I. reconnaît que les 2 du nombre 2 202 ne valent pas tous la même chose. Ainsi, le 2 des unités de mille vaut 2000 alors que celui de la position des centaines : «...veut dire les centaines, pis le dernier ça veut dire les unités». Lorsque je lui demande combien de dizaines contient ce nombre, elle considère qu'il n'y en a pas : «Parce que les dizaines c'est un 0, pis il n'y en a pas». Lorsque je lui demande ce que veut dire le 0 du nombre 10 198, elle avoue ne pas savoir. I. ne saura pas non plus retrouver le nombre d'unités contenues dans le nombre 2 202 même si j'ajoute à ma question les mots «en tout». Elle croit : «Il y a juste 2 unités dans ça». I. reconnaît le critère de la composante formelle où on attribue une valeur différente à chaque chiffre d'un nombre, mais ne peut retrouver le nombre de dizaines ou d'unités totales dans un nombre.

Nous pouvons donc poser comme hypothèse que les unités de mesure de quantité ne sont ni conservées, ni incluses les unes dans les autres. Les chiffres qui les représentent indiquent des positions, mais ces positions ne représentent pas nécessairement des quantités. Il existerait donc une coupure entre ses conceptions des quantités et celle relatives aux chiffres.

Au cours de l'évaluation finale, la recherche de groupements dans une situation de la vie courante semble lui faire apparaître l'idée de remplacement, puisqu'elle parle à nouveau de $1 avec lesquels on peut faire des billets de dix. Cette conception des groupements ne correspond pas à la définition que nous nous sommes donnée de ces critères de la composante intuitive. Sans être fausse, cette conception ne permet pas à I. de reconnaître que grouper des objets rend le comptage plus rapide ou plus facile, ce qui, pour nous, donne un sens à la construction des unités de mesure de quantité.

I. reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation pour le nombre 2220 et explique qu'elle peut remettre les enveloppes déchirées dans une enveloppe groupée. Elle reconnaît l'équivalence entre 300, 2 paquets de 100 et 100 jetons, puis 3 paquets de 100 macarons en expliquant que chacun a 300 macarons. Les critères relatifs à l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et à l'équivalence entre trois quantités sont satisfaits.

Au palier logico-mathématique, l'enveloppe contenant 10 unités est maintenant reconnue comme étant une seule dizaine. Ce critère de la conservation des unités de mesure est satisfait. I. sait que les chiffres 2 de 2220 ne valent pas la même chose. Elle sait aussi que les zéros du nombre 70 089 représentent l'absence des unités de mille et des centaines, mais elle ne croit pas ces unités de mesure présentes dans la dizaine de mille. Le critère de la composante formelle semble satisfait puisqu'elle retrouve la valeur relative des chiffres d'un nombre. Toutefois, la composante abstraite qui donnerait un sens à ces formalisations est absente.

I. illustre le nombre 2220 avec des enveloppes. Le comptage du nombre total de dizaines est laborieux. Elle identifie d'abord 1000 dizaines dans une unité de mille (confusion entre unité et dizaine), compte les unités dans la dizaine et enfin retrouve les 222 dizaines. Le critère relatif à l'adaptation du comptage selon les besoins, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, ne semble pas satisfait car elle doit être soutenue continuellement pour adapter cette procédure.

I. additionne les unités de toutes les unités de mesure de quantité pour retrouver les 2220 unités de ce nombre. Lorsqu'elle doit retrouver le nombre de centaines, elle compte les 10 centaines de la première unité de mille, ajoute la deuxième, mais obtient 2000 centaines. Pour elle, 10 centaines plus 10 centaines donnent 1000. C'est en revenant à l'addition 10+10 qu'elle retrouve le total (20) et identifie les 22 centaines. La généralisation de cette manipulation avec un nombre plus petit (202) présente encore des difficultés. L'apport d'une précision de la question, dans laquelle le nombre de dizaines est distingué du chiffre à la position des dizaines, semble lui apporter un soutien. Toutefois, elle n'en affirme pas moins que 10 dizaines plus 10 dizaines donnent : «200 dizaines...20...20 centaines». Le critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique relatif à l'inclusion n'est donc pas entièrement satisfait.

Nous pouvons donc conclure que les unités de mesure de quantité sont maintenant conservées et incluses les unes dans les autres. Les chiffres représentent à la fois des positions et des quantités. Toutefois, l'addition et le comptage des unités de mesure de quantité pose problème.

3.3.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[39]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

L'expérimentation didactique commence par l'observation des positions dans un nombre lu (2893). I. est appelée, après avoir identifiée les positions des chiffres de ce nombre, à former le nombre le plus grand possible au moyen des chiffres 3, 5, 1 et 5. Elle forme le nombre 5531 en déplaçant les cartons et elle explique son choix en comparant les chiffres entre eux : «Parce que le 5 est plus grand que 3 et 1». L'ajout du 0 à la collection de chiffres donnée lui permet de former immédiatement le nombre 50 531. À plusieurs reprises, l'intervenante demande à I. s'il est possible de former un autre nombre. De nouveaux nombres sont lus, puis comparés entre eux.

À cette occasion, un échange au sujet de l'organisation des chiffres dans un nombre et de leur lecture a lieu. I. observe, en lisant les nombres écrits dans un catalogue, que les chiffres sont séparés entre 100 et 1000. Elle reconnaît les positions des chiffres de l'ordre des unités et le généralise aux ordres supérieurs. Elle termine en disant qu'on groupe par 2 ou par 3 les chiffres d'un nombre. Afin de l'amener à élaborer sa pensée, les chiffres 6, 6, 0, 6, 6 lui sont donnés pour qu'elle les organise en vue de faciliter la lecture. Elle laisse un espace entre l'unité de mille et la centaine. Elle répète cette procédure pour reconstruire le nombre 550 31. Malgré sa tendance à séparer les chiffres en groupe de trois à partir de la gauche plutôt que de la droite, I. identifie correctement les positions

[39] Un résumé de cette expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-3 à I.-9.

et distingue la valeur des unités par rapport aux unités de mille, celles des dizaines et des dizaines de mille.

Revenant alors au problème de former le plus grand nombre possible avec les chiffres 0, 5, 1, 3 et 5, elle déplace le 0 à la position des centaines pour former 55 031. Elle forme ensuite 55 301, puis 55 310. L'introduction du 0 lui a permis de comparer les nombres entre eux. Par la suite, le dialogue l'invite à mettre en correspondance les positions et les unités de mesure.

Devant sa difficulté à dire ce qu'est une dizaine, un retour sur les manipulations effectuées durant l'évaluation initiale facilitent la construction d'une dizaine. 10 jetons sont placés dans une enveloppe. I. reconnaît ensuite la centaine en prenant une enveloppe contenant dix dizaines. I. est ensuite amenée à généraliser des relations d'équivalence (3 centaines=3 enveloppes blanches, 8 dizaines=80).

Plusieurs précisions sont ensuite apportées. Ces précisions se rapportent au comptage des dizaines dans les centaines, à l'identification des comptages possibles (par 1, par 10, par 100), à la comparaison entre 1 centaine et 100 centaines, à la reconnaissance de l'invariance des quantités par rapport à l'organisation. Ces précisions ne laissent plus de temps pour comparer les unités de mesure de quantité du nombre de départ.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine.	-compare les chiffres d'un nombre -construit des unités de mesure -groupe les chiffres par 2 et par 3	-reconnaît l'invariance d'une quantité par rapport à l'organisation -reconnaît des relations d'équivalence -généralise des relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-donne une position à chaque chiffre et un chiffre à chaque position (tableau de numération) -compare des nombres -compare des unités de mesure	établit des relations d'inclusion	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.3.1.3 Comment a évolué I. à travers les différentes composantes?

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

Après observation des positions des chiffres du nombre 2 983, I. forme le nombre le plus grand possible à l'aide de quatre chiffres (5, 3, 5, 1). Elle reconnaît que le nombre 5 531 est le nombre le plus grand qu'il est possible de former avec ces chiffres. Elle appuie ses réfléchissements sur la comparaison des chiffres entre eux. La réflexion ne se construit donc pas sur une comparaison entre les nombres qu'il est possible de former mais entre les chiffres qu'elle a en main. Ce nombre lui paraît déjà très grand, il a 4 chiffres.

Avec l'ajout du zéro, elle forme le nombre 50 531. Ce n'est qu'après la troisième invitation à chercher un nombre encore plus grand à former avec les mêmes chiffres qu'elle cherche «le» nombre le plus grand et propose elle-même un quatrième nombre. Elle a ainsi formé 50 531, 55 031, 55 301 et 55 310. Des invitations répétées l'amènent à construire de nouveaux nombres qu'elle compare successivement les uns aux autres. Le dialogue lui a permis, en explorant les possibilités, de déplacer son réfléchissement vers la comparaison entre les nombres pour déterminer que 55 310 est le nombre le plus grand qu'il est possible de former avec ces chiffres. Les premiers réfléchissements s'appuient sur sa connaissance des cardinaux de 1 à 9 et favorise une réflexion sur la comparaison des chiffres entre eux, réflexion issue de la composante procédurale du palier logico-physique. L'ajout du zéro et les invitations répétées à explorer de nouvelles possibilités en déplaçant les chiffres, permettent d'amener I. à comparer des nombres entre eux. L'intervention facilite ainsi l'émergence de critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

Cette tâche permet de s'arrêter à l'organisation des chiffres dans les nombres, puis à la valeur des différentes unités de mesure représentées par les positions d'un nombre. Chacun de ces thèmes est présenté dans les paragraphes qui suivent.

L'activité a été une occasion de parler de lecture de nombres et ce plus particulièrement lorsqu'elle forme le nombre 550 31. Dans sa lecture de ce nombre I. oublie la convention d'écriture qui permet de faciliter la lecture. Après avoir lu «cinq cent cinquante» I. est bloquée et ne sait plus quoi dire. Le dialogue l'invite à observer différents nombres de 5 chiffres et un nombre de 6 chiffres puis à identifier les positions à travers les différentes ordres (unité, mille, million). D'une conception initiale, où elle croit qu'on groupe les chiffres par 2 et quelquefois par un, elle arrive à une réorganisation où on sépare les chiffres entre la position des centaines et des unités de mille. Elle appuie alors son réfléchissement sur la compréhension qu'elle construit de la convention d'écriture observée et réutilise cette compréhension pour restructurer le nombre 55 031 et pour le lire. L'exploration laisse émerger l'oubli de la convention d'écriture au profit de la recherche du nombre le plus grand. Le blocage de I., devant la lecture de 550 31, permet de reconstruire ce critère de la composante procédurale du palier logico-physique, en identifiant les positions et l'emplacement des espaces dans les nombres à lire.

I. sait que les chiffres d'un nombre correspondent aux différentes positions. Cependant, ces positions ne semblent pas correspondre à des unités de mesure de quantité. Ainsi, dans le nombre 55 310, le 0 : «C'est l'unité». Le 1 est à la position «des dizaines» et le 3 à celle des centaines. Toutefois, I. avoue ne pas savoir ce qu'est une dizaine. Le dialogue l'invite à retourner aux expériences réalisées durant l'évaluation initiale. Elle parle de compter par 10 puis de «10 petites choses dedans» et explique que ces petites choses sont «comme l'argent». Elle prend 10 jetons pour les mettre dans une enveloppe. Elle réutilise une autre enveloppe de dizaine et reconnaît les «deux 10» de 2 dizaines, puis les «huit 10» de 8 dizaines. Le dialogue a favorisé la construction d'une mise en correspondance entre la position «dizaine» et l'unité de mesure du même nom. Le réfléchissement de cette construction apparaît dans la généralisation des «deux 10, et des huit 10» de 2 dizaines et de 8 dizaines, selon son expression.

Si elle peut montrer les enveloppes représentant la position des centaines, elle poursuit en disant de 300 : «Trois nombres 100».

La vérification de la représentation mentale qu'elle se fait de cette expression nous apprend qu'elle parle de paquets de 10 puis, qu'elle considère les unités comme des paquets de 1. Les précisions, par rapport aux noms des différentes unités de mesure de quantité et par rapport à leur inclusion, sont apportées par l'intervenante mais la réflexion qui suit exprime une persistance de l'erreur. Pour I., 3 centaines veut dire : «Des paquets de 10». La répétition de sa phrase par l'intervenante amène I. à se corriger pour dire : «Des paquets de 100».

Un dialogue permet d'envisager la possibilité que des paquets de 10 demeurent dans les paquets de 100. Les 10 dizaines de chacune des centaines sont identifiées. I. leur fait correspondre 300 paquets de 10, puis 3 paquets de 10. Son réfléchissement, s'appuyant sur la reconstitution des gestes posés, ne permet pas à la réflexion de coordonner l'addition et les unités de mesure de quantité (10+10+10). I. ne peut reconnaître ce qui la mêle. L'utilisation de différents comptage, pour une même centaine, semble favoriser une exploration plus poussée.

Par la suite, l'intervention tente de lui faire comparer 100 centaines et 1 centaine. I. prend 1 centaine, puis commence à rassembler des centaines pour obtenir 100 centaines. Après la troisième centaine, elle admet qu'il serait long de les rassembler. Elle reconnaît ensuite que l'enveloppe qu'elle a dans les mains correspond à «une» centaine. La difficulté à reconnaître que le mot «cent» correspond aux unités que la centaine contient s'estompe après avoir identifié les 100 petits jetons à l'intérieur, jetons qui s'appellent aussi «unités». Elle généralise cet apprentissage en reconnaissant que lorsqu'elle parle de 10 en montrant l'enveloppe de centaine, elle parle des «10 petits paquets», qu'on appelle aussi les dizaines. Le réfléchissement de I. s'appuie à ce moment sur sa nouvelle construction (100 correspond au contenu, 100 jetons, 1 correspond au contenant, la centaine) et la réflexion la reconstruit pour le cas des dizaines.

Cette compréhension n'est pas réutilisée spontanément dans le cas de 8 dizaines. Pour elle, 8 dizaines : «Ça ne se peut pas». Son réfléchissement s'appuie ici sur les relations d'équivalence reconnues entre 1 centaine et 10 dizaines, 10 dizaines et 1 centaine, 1 centaine et 100 unités. Mais sa réflexion ne lui permet pas de les généraliser à des quantités intermédiaires. Les mêmes manipulations devront être reprises.

La construction des 8 dizaines lui fait identifier 80 dizaines. La manipulation de 8 enveloppes de dizaines ne lui permet pas de reconnaître la relation d'équivalence entre 8 dizaines et 80 unités. Son réfléchissement juxtapose les 80 unités, le contenu, aux 8 enveloppes de dizaines, le contenant. Un questionnement sur ce que représente le nombre 80 lui permet de reconnaître qu'il s'agit des unités, alors que pour 8, on parle des dizaines. Toutefois pour I. il n'y a pas d'équivalence entre 80 unités et 8 dizaines. Elle ne reconnaît plus l'invariance des quantités par rapport aux différentes organisations (80 jetons et 8 enveloppes de 10 jetons).

En déchirant les 8 dizaines I. explique : «Ça arrive à 80 parce que 8 fois 10, ça donne 80». Le dialogue insiste sur la distinction à apporter entre déchirer une enveloppe et enlever une enveloppe. Par la suite, I. constate que la quantité demeure la même sur la table et admet que l'organisation ne change pas la quantité. Cependant, les quantités 8 dizaines et 80 unités sont encore considérées différentes : «C'est pas la même chose d'objets, il y en a qui sont tous seuls». Il n'y a plus invariance de la quantité par rapport à son organisation comme le montre ce qui suit.

Son réfléchissement, qui privilégie les mots dizaines et unités, semble masquer l'invariance de la quantité déjà observée. Elle explique ensuite : «80 unités c'est plus petit que 8 dizaines». Le dialogue l'invite à imaginer que les jetons sont des «smarties». L'équivalence entre les quantités est reconnue : «Parce que dans les enveloppes pis les tous seuls de même, c'est la même chose parce que c'est le même nombre qu'on a». Les smarties auraient-ils permis de distraire I. des mots dizaines et unités pour se concentrer sur la quantité? Elle réutilise cette construction et fait correspondre 2 unités, 2 dizaines et 2 centaines en donnant la quantité de smarties qui leur correspond, 2, 20, 200.

3.3.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

La comparaison entre les valeurs que représentent les différentes positions permet d'observer que I. ne fait pas correspondre positions des chiffres et unités de mesure de quantité. Une coordination entre ces deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique favorise l'élaboration d'une construction de la dizaine, puis de la centaine, groupes considérés alors comme unités de mesure de quantité (composante abstraite du palier logico-mathématique). Cette construction nécessite la reconstruction des critères de la composante abstraite du palier logico-physique, reconstruction puisqu'au cours de l'évaluation initiale, ces critères semblaient reconnus. Voyons maintenant comment.

La construction de l'unité, comme unité de mesure de quantité, semble se réaliser par la mise en correspondance entre les jetons et son nom. Quant à la construction de la dizaine, elle s'effectue par la coordination entre la fabrication d'un groupe de 10 jetons, puis de 8 groupes de 10 jetons, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique et une reconstruction de l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et de l'équivalence entre des quantités organisées différemment, des manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique. I. distingue alors le comptage du contenu et du contenant.

La construction de la conservation de la centaine semble se réaliser en coordonnant d'une part, la manipulation de jetons, d'enveloppes et la comparaison entre 1 centaine, 100 centaines, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, et d'autre part, des relations d'équivalence de la quantité entre le contenant et leur contenu et le nom des unités de mesure de quantité. Par la suite I. reconnaît l'inclusion des «10 petits paquets» contenus dans la centaine, qu'on appelle des dizaines.

L'abstraction réfléchissante de I. a évolué de critères de la composante procédurale du palier logico-physique vers des critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. I. compare d'abord les chiffres d'un nombre, puis elle compare des nombres et les unités de mesure de quantité. I. a aussi été amenée à coordonner le but d'une activité (rechercher le nombre le plus grand) et les exigences des conventions de l'écriture de nombres (groupe les nombres par ordre).

3.3.2 Décomposition et recomposition de nombres

3.3.2.1 Compréhension initiale[40] et finale[41]

Au cours de l'évaluation initiale, I. décompose le nombre 709 en utilisant les cartes : «700 pis 9 unités, 7x100 pis 9, 7 centai-

[40] Un résumé de l'entrevue d'évaluation initiale apparaît en appendice 3, p. I.-1 à I.-3.

[41] Un résumé de l'entrevue d'évaluation finale apparaît en appendice 3, p. I.-24 à I.-27.

nes pis 9 unités». Elle reconnaît que le «pis» qu'elle utilise lorsqu'elle réunit les deux quantités veut dire «plus». I. ne satisfait cependant pas le critère de la composante formelle relatif à la décomposition, puisqu'elle ne reconnaît pas toutes les compositions possibles parmi celles qui sont écrites sur les cartes-nombres. Nous devrons être attentive au critère relatif à la conservation des unités de mesure de quantité au cours de cette expérimentation didactique.

Durant l'évaluation finale, la recomposition de 709 est faite à l'aide des cartes : «700 avec 9, 7 centaines avec 9 unités, 7 fois 100 avec 9 unités, 700 avec 9 unités, 700 unités avec 9, 7 centaines avec 9». La carte 70 dizaines est délaissée. I. affirme que cette quantité ne fait pas 700. I. ne satisfait pas le critère de la composante formelle relatif à la décomposition. Plusieurs décompositions se sont ajoutées, mais la composition qui requiert la reconnaissance de la relation d'équivalence entre 70 dizaines et 700 est absente. Nous pouvons donc penser que I. devra vivre de nouvelles expériences à propos des unités de mesure de quantité et de leur addition.

3.3.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[42]

L'expérimentation didactique débute par un dialogue au sujet des représentations mentales que se fait I. des unités de mesure déjà manipulées et des différences entre elles. Les unités sont mises en correspondance avec les nombres (1, 9, 80), puis avec les objets (cubes). La dizaine est d'abord associée à l'enveloppe de centaine, puis à celle contenant 10 unités.

Elle décompose ensuite le nombre 1089. Cette décomposition

---

[42] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-9 à I.-13.

favorise un dialogue à propos de l'opération qui y est associée (l'addition) et facilite la mise en correspondance entre les nombres et les unités de mesure de quantité.

La mise en correspondance entre différentes unités de mesure de quantité et leur cardinal permet de réaliser la recomposition de plusieurs nombres comme 3 centaines=300, 5 centaines=500. 51 dizaines est associé au nombre 51. La manipulation des enveloppes de dizaines et des jetons permet la généralisation de la relation d'équivalence. Ainsi, I. réutilise cette construction pour identifier le nombre qui correspond à 41 dizaines, puis à 5 dizaines, mais confond 11 unités avec 10 dizaines et 1 unité. À nouveau la manipulation des jetons et des enveloppes facilite la correction.

La recherche de nombres compris entre 402 et 513 permet d'ajouter à la généralisation des relations d'équivalence, l'addition de différentes unités de mesure de quantité. Elle juxtapose 4 dizaines et 5 dizaines pour former le nombre 450. La recherche des pluralités rattachées à ces deux quantités, écrites sur des cartons, permet de corriger la juxtaposition et de généraliser l'opération d'addition.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine	-construit des dizaines et des centaines -compte par 10 par 100	-établit des relations d'équivalence -généralise les relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en: -adaptant le comptage -additionnant les unité de mesure compare les unités de mesure	-conserve les unités de mesure que sont les dizaines, les unités, les centaines.	décompose et recompose des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.3.2.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes

Nous amorçons l'expérimentation didactique en discutant des types de groupements connus et de leur contenu. Pour I. une unité correspond d'abord au chiffre 1, puis à un jeton, ensuite à 9 unités, puis à 80 unités et finalement à des cubes éparpillés sur la table. Cette énumération a permis à I. de reconnaître que l'unité correspond à n'importe quel objet unitaire. Son réfléchissement s'appuie d'abord sur sa connaissance des positions dans un nombre, puis une juxtaposition des chiffres et des jetons avant de reconnaître des objets unitaires.

La dizaine est d'abord erronément illustrée par une enveloppe de centaine. Le réfléchissement s'appuie sans doute ici sur le souvenir que la dizaine est un contenant. Le dialogue lui permet de revenir sur ses manipulations précédentes pour compléter sa réflexion et retrouver les enveloppes contenant 10 jetons. La comparaison entre les unités et les dizaines laisse émerger la réflexion suivante : «Des dizaines c'est plus gros que des unités». Le dialogue attire son attention sur la composition de la dizaine comme contenant d'unités en comparant 7 dizaines et 7 unités. Elle explique maladroitement : «C'est 10 dizaines de plus que 7 unités». Le dialogue l'invite à distinguer une unité de plusieurs unités, une dizaine de plusieurs dizaines, une centaine de plusieurs centaines en montrant le matériel.

I. décompose le nombre 1089 en juxtaposant les groupes de chiffres 1000, 80, 9, les séparant par des virgules sans qu'aucune opération n'intervienne. Le réfléchissement s'appuie uniquement sur l'identification de la valeur attribuée à chacune des positions. Plusieurs étapes précèdent la reconnaissance de l'opération d'addition entre ces groupes de chiffres : un retour sur la décomposition du nombre 709 réalisée au cours de l'évaluation initiale, la prise de conscience de l'action «mettre ensemble», en opposition avec celle de séparer, l'énumération des opérations connues, l'identification des symboles qui représentent ces opérations. Le dialogue permet de préciser le rôle de la virgule pour la réserver aux fractions.

Le dialogue invite I. à retrouver de nouvelles décompositions du même nombre, ce qui lui semble impossible au premier abord. En appuyant son réfléchissement sur la valeur de chacune des positions I. ne peut envisager la possibilité de «dire autrement», puisque cela correspondrait à «dire autre chose». L'utilisation des enveloppes favorise l'écriture de nouvelles décompositions par la mise en correspondance entre ce qui est sur la table et la façon de l'écrire. Elle construit une unité de mille en prenant 10 centaines, ajoute 8 enveloppes de dizaines et 9 jetons. Elle est invitée à écrire ce qu'elle vient de manipuler. Elle inscrit :
100+100+100+100+100+100+100+100+100+100+10+10+10+10+10+10+10+10+9
Elle généralise cette compréhension en écrivant ensuite 500+500+50+30+5+4. Son réfléchissement s'appuie ici sur le regroupement des unités de mesure de quantité en deux paquets. Elle explique : «Je me rappelais des unités, que 5 plus 3 ça donne 8, pis j'ai fait 50+30, ça fait 80». Elle utilise ensuite la même procédure et propose 1000+20+20+20+20+1+1+1+1+1+1+1+1+1. I. appuie d'abord son réfléchissement sur une manifestation de la composante formelle, la valeur de chacune des positions. Invitée à manipuler les enveloppes et les jetons, à le mettre en correspondance avec l'écriture pour construire de nouvelles décomposi-

tions du même nombre, I. pense à mettre l'opération d'addition entre les unités de mesure de quantité. Elle généralise les procédures d'addition en regroupant les unités de mesure différemment et en les coordonnant avec ses connaissances des additions de petits nombres («5+3=8 ainsi 50+30=80»), offrant ainsi de nouvelles décompositions.

Elle fait ensuite correspondre le carton sur lequel est écrit 5 centaines au nombre 500 et 3 centaines au nombre 300, mais elle croit que 51 dizaines, c'est 51. Les réfléchissements s'appuient sur sa connaissance des chiffres, sans égard aux unités de mesure de quantité. Le cas des 51 dizaines semble nécessiter une coordination supplémentaire. Une intervention lui rappelle que 51 correspond aux 51 jetons, puis l'invite à illustrer 51 dizaines. I. pense alors aux 50 dizaines, en parlant des 50 enveloppes contenant 10 jetons, auxquelles elle ajoute un jeton. Le réfléchissement de I. associe les positions des chiffres et les unités de mesure (51 dizaines = 50 dizaines+1 unité). Une deuxième précision est apportée afin de clarifier la confusion entre dizaine et unité. Cette précision permet à I. de retrouver un des critères de la composante abstraite du palier logico-mathématique, en établissant des relations d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités, et de lui coordonner un critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique, le comptage des centaines par 10 jusqu'à 60. I. prend ensuite 5 enveloppes de centaines pour illustrer les 51 dizaines. Elle compte par 10 ces centaines, d'abord de façon hésitante, puis plus assurée (10, 200...20, 21...non 20..60...30, 40, 50, 60). Une troisième précision lui permet de défaire une des 6 centaines, pour n'utiliser qu'une seule dizaine. Elle reconnaît le nombre 510 en observant les 5 centaines et la dizaine posées sur la table, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Elle réutilise cette construction pour retrouver le nom du nombre de plusieurs autres quantités (450 à 45 dizaines, 430 à 43 dizaines, 420 à 42 dizaines, 410 à 41 dizaines). Elle explique : «Je fais des paq...je fais des centaines, 4 centaines pis 1 dizaine». Elle fonde son réfléchissement sur la construction de relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine et sur la généralisation de cette relation. Elle retrouve aussi 400 depuis 40 dizaines, 50 depuis 5 dizaines, en imaginant les dizaines dans sa tête, puis 40 (4 dizaines), 30 (3 dizaines), 12 (12 unités).

Les relations d'équivalence entre unités et dizaines doivent être reconstruites. La quantité 12 unités est équivalente à 1 dizaine et 2 unités, mais la pluralité 11 unités est considérée d'abord comme 1 unité et 10 dizaines. Pour retrouver la quantité de dizaines à partir d'unités (11 unités), I. appuie son réfléchissement sur la juxtaposition du contenu et du contenant de la dizaine (11=1 unités et 10 dizaines), ce qui n'avait pas été le cas pour 12 unités. La répétition de sa phrase par l'intervenante semble suffisante pour apporter une correction, mais la reconstruction ne semble pas solide, puisque 10 unités est ensuite confondue avec 10 dizaines. Son réfléchissement s'appuie encore sur la combinaison des chiffres et des unités de mesure. Le dialogue l'invite à prendre 10 unités. I. prend un grand nombre d'enveloppes. Devant la répétition de la consigne, elle prend une seule enveloppe. L'identification du nombre de paquets en main et la mise en correspondance entre les mots enveloppes et paquets semblent favoriser la prise de conscience de la différence entre 10 dizaines et 10 unités, réflexion relative à la conservation de cette unité de mesure de quantité. Elle explique : «J'ai pas 10 dans les mains».

Lorsqu'il s'agit de composer des nombres pour trouver ceux compris entre 402 et 513, I. réunit 4 dizaines et 5 dizaines pour former le nombre 450. L'addition d'unités de mesure (4 dizaines+5 dizaines) s'appuie sur la juxtaposition des chiffres (45 dizaines), coordonnée aux relations d'équivalence réalisées précédemment entre dizaine et centaine (450). Le dialogue permet d'identifier le nombre qui correspond à ces quantités. L'identification du cardinal de ces deux ensembles permet leur addition et l'identification du nombre 90. L'addition se dégage comme opération nécessaire. I. réutilise l'addition pour former le nombre 430 à l'aide des pluralités de 4 dizaines, 5 dizaines, 5 unités, 2 unités, 1 unités, 3 dizaines, 3 centaines.

3.3.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de I. évolue en s'appuyant d'abord sur des structurations partielles des unités de mesure de quantité. Par exemple, pour elle, les unités sont d'abord des chiffres. La dizaine est un contenant (enveloppe), sans égard à la quantité qu'elle renferme. Une dizaine équivaut à 10 dizaines, alors que 4 dizaines plus 5 dizaines forment le nombre 450.

La décomposition permet de reconnaître une valeur aux unités de mesure de quantité et de construire une première conservation de ces unités de mesure de quantité. La construction de l'unité, comme unité de mesure de quantité, s'appuie sur une manifestation de la composante formelle, la position unité. Cette position devient la représentante d'objets. La compréhension de la dizaine comme unité de mesure est plus complexe.

Cette manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique se construit en établissant des relations d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités, en les coordonnant au comptage des centaines, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette conservation continue de se construire, en coordonnant la manipulation de 10 unités dans une enveloppe et en identifiant le nombre de paquet en main, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, en les mettant en correspondance avec le mot dizaine, une manifestation de la composante formelle, puis en comparant 10 unités et 10 dizaines.

Si I. semble un moment satisfaire le critère relatif à la décomposition de nombres, une manifestation de la composante formelle, réaliser l'opération inverse en retrouvant le nombre à partir d'un décomposition laisse apparaître des problèmes. Une coordination entre la comparaison «mettre ensemble» et «séparer», une manifestation de la composante intuitive de l'addition, et l'énumération des opérations connues où intervient l'identification des symboles, une manifestation de la composante formelle de l'addition, laisse émerger l'opération d'addition. Le réfléchissement retourne toutefois à la juxtaposition des chiffres et des unités de mesure de quantité pour retrouver la pluralité de deux quantités (4 dizaines et 5 dizaines=450). C'est la recherche du nom des nombres de chacune des quantités inscrite sur les cartes-nombres qui permet d'utiliser l'addition. I. réutilise cette manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique pour former le nombre 430.

3.3.3 La comparaison et l'ordre des nombres

3.3.3.1 Compréhension initiale[43] et finale[44]

Au cours de l'évaluation initiale, I. utilise une procédure intéressante pour ordonner des nombres. Elle «divise», selon son expression, les cartes-nombres qui contiennent 3 chiffres, 4 chiffres et 5 chiffres pour ensuite les disposer sur la table du plus grand au plus petit. Elle semble satisfaire le critère de la composante intuitive qui considère que plus il y a de chiffres plus le nombre est grand. Cette procédure ne lui permet cependant pas de corriger une erreur. En effet, elle place les nombres

---

[43] Un résumé de l'entrevue d'évaluation initiale apparaît en appendice 3, p. I.-1 à I.-3.

[44] Un résumé de l'entrevue d'évaluation finale apparaît en appendice 3, p. I.-24 à I.-27.

70 089, 1198, 10 198 et les lit correctement sans réaliser qu'un des nombres a un chiffre de moins. Sa lecture de nombres ne semble pas induire une idée de quantité plus ou moins grande puisqu'elle ne lui facilite pas la correction. Elle ne satisfait donc pas le critère de la composante formelle relatif à l'ordre des nombres.

Durant l'entrevue finale, I. ordonne facilement des nombres jusqu'à 5 chiffres qui contiennent un ou plusieurs zéros. Hésitante devant les nombres 10 198 et 1198, elle explique que la relecture du nombre suffit à lui faire prendre conscience qu'il ne s'agit pas de 11 mille mais bien de 1 (mille). I. compare les chiffres de l'ordre des mille pour distinguer ces deux nombres. I. satisfait ce critère de la composante formelle en ordonnant des nombres et en utilisant la lecture de ceux-ci pour reconnaître leur valeur.

3.3.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[45]

L'expérimentation didactique débute par un dialogue sur les représentions mentales que I. se fait de l'unité, de la dizaine, de la centaine et sur la construction qu'elle prévoit utiliser pour former l'unité de mille et la dizaine de mille. La généralisation de cette prévision à deux unités de mille est difficile et offre une occasion de manipuler les enveloppes, observer leur contenu et utiliser le tableau de numération. I. identifie correctement les positions à travers les différents ordres.

Le nombre de centaines contenues dans le nombre 3000 fait l'objet d'une exploration, au moyen du comptage du contenu de chaque enveloppe d'unité de mille.

---

[45] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-13 à I.-16.

La régularité de la base dix est reconnue en reconstruisant la dizaine, la centaine, l'unité de mille. Toutefois, la dizaine de mille est d'abord appelée million avant que l'observation du tableau de numération ne favorise la correction.

Les nombres 10 089, 1089, 100 089 et 9089 sont lus et ordonnés en utilisant leur appellation et leur proximité par rapport aux million, aux centaine et aux dizaines.

Une comparaison entre 10 364 et 12 364 permet d'observer la procédure utilisée (comparaison entre les chiffres de l'ordre mille). Les expressions 908 et 908 unités sont considérées différentes parce que : «908 unités c'est plus petit que 908 000». L'utilisation du tableau de numération et la comparaison entre 908 et 908 000 permet une construction qui sera réutilisée correctement pour comparer 90 008 unités et 90 008.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
reconnaît l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux dizaines, centaine, unités de mille.	compare des groupes de chiffres	-établit des relations d'équivalence -reconnaît la régularité de la base 10
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
compare des unités de mesure compare des nombres utilise le tableau de numération	généralise les positions à travers les ordres	ordonne des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.3.3.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes

L'expérimentation didactique débute par une discussion sur les différents termes utilisés pour désigner les unités de mesure de quantité et sur les représentation mentales que I. a conservées des manipulations déjà effectuées. L'unité, la dizaine, la centaine sont reconnues. La régularité de la base dix permet à I. de prévoir comment s'effectue la construction de l'unité de mille : «Les unités de mille c'est...10 enveloppes blanches enveloppées dans une autre grosse enveloppe». I. assimile de façon erronée 2 unités de mille à 10 unités de mille, puis à 10 dizaines de mille. Le réfléchissement semble s'appuyer sur l'idée que 2 unités de mille forment la dizaine de mille. La manipulation lui permet ensuite de reconnaître les 2 unités de mille, puis les 3 unités de mille, sans qu'elle puisse pour autant leur faire correspondre le nombre 2000 ou 3000. Le dialogue introduit la construction du tableau de numération, qui permet à I. d'observer la régularité des positions à travers les ordres et de généraliser cette régularité à l'ordre des millions. Il favorise ensuite la mise en correspondance entre les unités de mesure de quantité et les différentes positions. I. retrouve facilement les nombres qui correspondent aux diverses unités de mesure de quantité.

I. trouve 3 centaines dans le nombre 3000, représenté par trois enveloppes de mille. Le réfléchissement semble prendre appui sur les unités de mesure visibles et non sur le contenu des diverses enveloppes les représentant d'où la confusion entre les unités de mille et les centaines. Le dialogue l'invite à compter les 10 centaines contenues dans chacune des 3 unités de mille. I. leur attribue un total de 1000. En lui présentant les enveloppes d'unités de mille, I. compte par 10 chacune d'elles et retrouve les 30 centaines.

L'ajout d'une autre unité de mille crée une confusion entre 4000 et 40 000. Le dialogue introduit le tableau de numération, l'identification de sa position et la reconnaissance du nombre 4000. Elle généralise cette compréhension à l'ajout successif d'unités de mille jusqu'à 10 000.

La reconnaissance du nombre 10 000 est une occasion pour échanger à propos de la régularité dans l'apparition d'un nouveau groupement à chaque groupe de dix. La manipulation des enveloppes est nécessaire car la centaine est oubliée. I. reconnaît ensuite l'unité de mille. Malgré la construction du tableau de numération, où I. a énuméré les différentes positions, le regroupement de 10 unités de mille lui apparaît être le «million». Le réfléchissement s'appuie sur une conception selon laquelle les positions se succèdent : unité, dizaine, centaine, mille et million. Le retour au tableau de numération lui permet de découvrir la dizaine de mille et de prévoir les nombres qui correspondent à 2 dizaines de mille (20 000), 3 dizaines de mille (30 000), de 4 dizaines de mille (40 000) et la construction de la centaine de mille avec 10 dizaines de mille. Le réfléchissement s'appuie ici sur la connaissance des positions du tableau de numération coordonnée à la régularité de la base dix.

Le dialogue lui suggère de réutiliser ces compréhensions pour lire, comparer puis ordonner les nombres 10 089, 1089, 100 089 et 9089. I. lit les nombres, montre 9089, comme le plus petit puis se rétracte et explique que 1089 est le nombre le plus petit. «Parce qu'il est plus petit que les autres parce que c'est juste 1089 pis l'autre 9089». Le réfléchissement de I. s'appuie sur la comparaison des nombres et non des chiffres. Elle explique sa confusion initiale en disant : «Parce que 9 là est petit, il n'est pas plus grand que 10 000, ni 100 000». Elle place ensuite facilement les nombres en ordre décroissant en expliquant : «100 000...c'est proche du million...10 089 il est proche des centaines, 9000 c'est proche des dizaines». La comparaison entre 10 364 et 12 364 laisse apparaître une autre procédure. «Je regarde les dizaines de mille... je regarde c'est qui qui a le plus petit pis je le trouve».

Priée de comparer 908 et 908 unités, I. apparaît en pleine confusion. Pour elle, les 908 unités sont plus petites que 908 : «Parce que 908 unités c'est plus petit que 908 000». Son réfléchissement paraît s'appuyer sur une conception selon laquelle les unités sont plus petites et elle transforme le deuxième nombre. C'est l'écriture des deux nombres dans le tableau de numération qui permet de lever la confusion entre 908 et 908 000. Cette confusion dissipée, l'équivalence entre l'ensemble de 908 unités et le cardinal (908) est reconnue : «Parce que c'est la même chose parce que c'est dans la même famille. Le réfléchissement de I. s'appuie sur les positions qu'ils occupent dans le nombre. Elle généralise cette observation en réutilisant le tableau de numération pour comparer 90 008 et 90 008 unités. Elle retient de son expérimentation qu'elle a appris à «placer des nombres».

3.3.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Une coordination entre la généralisation de la régularité de la base dix, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et la régularité des positions à travers les ordres du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, facilite à I. l'établissement d'une correspondance entre les unités de mesure de quantité (2 unités de mille) et le nom du nombre (2000). Cette coordination n'est cependant pas généralisée puisqu'une confusion demeure entre 4000 et 40 000. La réintroduction du tableau de numération et l'identification des positions permet à I. de généraliser cette coordination.

La construction d'une nouvelle unité de mesure (dizaine de mille) et sa réutilisation requièrent la reconnaissance de la régularité de la base 10, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, coordonnée à l'énumération des positions qui se succèdent, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

Ces coordinations ne sont pas suffisantes pour établir des relations d'équivalence. Selon les dires de I., 3 centaines composent 3000. Le dénombrement par 10 des centaines contenues dans les unités de mille, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, lui permet cependant de reconnaître par la suite, que 30 centaines sont nécessaires pour obtenir le nombre 3000.

Différentes procédures du palier logico-physique et du palier logico-mathématique permettent à I. de comparer et d'ordonner des nombres : comparaison entre deux nombres, comparaison entre groupes de chiffres du même ordre, recherche de l'unité de mesure de quantité la plus près.

La comparaison entre le nom du nombre et les unités de mesure a été résolue par l'écriture des «deux» nombres (908 et 908 unités) dans le tableau de numération. Cette procédure est ensuite généralisée pour comparer 90 008 et 90 008 unités.

L'abstraction réfléchissante de I. a donc évolué d'une première généralisation de la régularité de la base dix (jusqu'à l'unité de mille) à une plus grande généralisation de cette régularité jusqu'à la centaine de mille. Cette abstraction a aussi évolué d'ajout de zéros lorsqu'on ajoute des unités de mesure de quantité vers l'introduction du comptage entre les unités de mesure de quantité. Le principe de cardinal permet de mettre en correspondance le nom d'un nombre et les unités qui le composent. Les interventions, en introduisant l'utilisation du tableau de numération, l'observation de la régularité à travers les ordres, la correspondance unités de mesure de quantités et positions et le comptage par dix, favorisent l'apparition de manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

3.3.4 Les opérations sur les nombres

3.3.4.1 Compréhension initiale[46] et finale[47]

Durant l'évaluation initiale, lorsque I. doit enlever 20 au nombre 202 déjà illustré par une enveloppe de centaine, dix enveloppes de dizaines et deux unités, elle retire deux enveloppes de dizaines, mais ne sait pas à quel nombre le reste correspond. Elle choisit de se dépanner en comptant par dix les dizaines et retrouve le nombre 182. Son explication nous laisse toutefois songeuse. Elle affirme en effet qu'il y a 100 centaines, 80 dizaines, 2 unités et que ces éléments donnent 182. I. satisfait donc le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique mais les procédures utilisées laissent apparaître une difficulté à retrouver le nom du nombre et à identifier la valeur relative des chiffres d'un nombre.

Les questions portant sur la compréhension des unités étalons comme mesure de quantité laisse surgir des problèmes de compréhension. I. croit en effet que 2 dizaines est plus grand que 20 unités : «Parce que 2 dizaines ça veut dire 2 dix, pis 20 unités ça veut dire 20 jetons». I. affirme aussi que 20 dizaines est plus grand que 20 unités : «Parce que 20 dizaines c'est 20, c'est 2 fois le nombre 10 pis 20 unités, c'est 20 petits jetons». De plus, l'expression 20 dizaines est considérée équivalente à 2 dizaines : «Parce que c'est moins gros que deux centaines».

---

[46] Un résumé de l'entrevue d'évaluation initiale apparaît en appendice 3, p. I.-1 à I.-3.

[47] Un résumé de l'entrevue d'évaluation finale apparaît en appendice 3, p. I.-24 à I.-27.

L'expression 2 centaines est vue comme étant 2 fois le nombre 100. Ce critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique n'est certainement pas satisfait. Nous pouvons donc penser que les groupes de 10 ou de 100 ne sont pas conçus comme autant de mesure de quantité.

Au cours de l'évaluation finale, I. enlève 20 au nombre 2234 en retirant 20 à 30 pour retrouver 2214, mais elle ajoute qu'elle : «...enlève 20 dizaines». Elle utilise une soustraction simple des chiffres 3 et 2. I. satisfait le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique et sa procédure laisse apparaître une réutilisation de sa compréhension de la soustraction des petits nombres, sans compréhension d'une formalisation de la valeur relative des chiffres dans un nombre.

Les expressions 20 dizaines et 20 unités sont d'abord considérées comme étant équivalentes. Par la suite, la quantité 20 unités est perçue comme plus petite que 2 dizaines. La confrontation avec le matériel permet une intervention didactique qui facilite la correction et la restructuration de sa compréhension. Le problème de comparaison entre 20 dizaines et 2 centaines ne sera pas résolu. I. change la question. Plutôt que de parler de 20 dizaines, elle parle de 2 dizaines, puis elle confond 200 centaines avant de réaliser qu'il s'agissait de 200 jetons. Ce critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique n'est toujours pas satisfait. I. montre une résistance à reconnaître que non seulement les chiffres, mais les unités de mesure de quantité représentent des quantités.

3.3.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[48]

L'expérimentation didactique débute par un échange sur les unités de mesure de quantité, sur leur construction (10x10=100) et leur composition (2000=200 dizaines). La dizaine de mille est reconstruite en mettant en correspondance les positions des chiffres d'un nombre et les unités de mesure de quantité.

À la suite de cette mise en situation, I. établit des relations d'équivalence. «908 c'est la même chose que 908 unités, parce qu'on fait la même chose pis ça arrive à la même chose». Elle opère ensuite en retirant 800 unités au nombre 1008, puis 20 dizaines au nombre 208, et 14 dizaines au nombre 8. Le dialogue invite I. à établir régulièrement des relations d'équivalence entre unités de mesure et cardinal de cette quantité pour vérifier le résultat de ses opérations.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
reconnaît l'idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupements	compte par 1, par 10, par 100	établit des relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en: -adaptant le comptage -en additionnant les unités de mesure -en multipliant	établit des relations d'inclusion	attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre.
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

[48] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-16 à I.-18.

3.3.4.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes

I. distingue les différentes unités de mesure de quantité, explique leur construction en utilisant la régularité de la base dix, et leur composition, au moyen de la multiplication. «Il y a 100 petites unités dedans (la centaine), parce que 10 fois 10 ça fait 100» ou (il y a 100 dizaines dans l'unité de mille) : «Parce que 100 fois 10 ça fait 1000». I. appuie son réfléchissement sur une coordination de la régularité de la base dix et de la multiplication pour reconstruire les différentes unités de mesure de quantités.

I. confond d'abord les dizaines et les unités dans le nombre 2000. Elle croit que 2000 dizaines composent le nombre 2000. Le réfléchissement semble s'appuyer sur la construction des deux enveloppes. La réflexion reste liée à cette action. Ainsi, 2 enveloppes de mille contient 2000 dizaines. Le dialogue facilite la reconstitution du nombre de dizaines dans chacune des unités de mille, quantité que I. additionne ensuite.

L'unité de mesure qui contient dix unités de mille (dizaine de mille) est d'abord appelée «million». Le réfléchissement de I. s'appuie sur une conception primitive qui ordonne les positions ainsi : unité, dizaine, centaine, mille, million. Le dialogue permet l'écriture d'un nombre à 6 chiffres (125 304) et l'identification des différentes positions qu'elle comprend. Deux découvertes apparaissent. D'abord I. s'aperçoit que les différentes unités de mesure de quantité correspondent aux positions, ensuite l'identification de la position dizaine de mille permet la reconnaissance de l'unité de mesure de quantité dizaine de mille. Le dialogue déplace ainsi le réfléchissement vers la structure conventionnelle du système de numération. À partir de là, I. généralise la reconstruction des unités de mesure de quantité en identifiant la centaine de mille comme unité de mesure qui contient 10 dizaines de mille.

La relation d'équivalence découverte la semaine précédente (908=908 unités) est exprimée différemment à la suite de ces explorations et de la représentation mentale de chacun des ensembles : «908 unités c'est la même chose que 908 parce qu'on fait la même chose pis ça arrive à la même chose». Le réfléchissement, en prenant appui sur la représentation mentale que I. se fait du nombre 908, facilite une réflexion sur la relation d'équivalence.

L'ajout de 100 au nombre 908 déjà imaginé lui permet d'obtenir le nombre 1008. Le réfléchissement pourrait s'appuyer sur l'addition des chiffres 9+1=10, sur le comptage par 100, ou sur l'addition des deux nombres. Elle s'explique : «Parce que j'ai fait 908 plus 900...plus 100 ça fait que ça arrive à 1008». Le dialogue favorise la reconstitution des actions effectuées sur les unités de mesure de quantité et la mise en évidence de ce qui a été découvert.

L'opération de soustraction demandée (1008-800 unités) est réalisée rapidement (208). Ici encore le réfléchissement pourrait s'appuyer sur la soustraction de petits nombres (10-2) ou sur celle des nombres 1008-208. I. explique : «J'ai fait 1008 moins 800 fait que ça m'arrivait à 208». Elle ajoute : «J'ai enlevé 800 enveloppes blanches (centaines)». La relation d'équivalence déjà établie (908 = 908 unités) ne semble pas généralisée. Croyant à une distraction, une précision est donnée par l'intervenante, précision concernant le retrait de 8 enveloppes blanches.

Au nombre 208 maintenant obtenu, I. retire 20 dizaines. Cette confusion entre les unités de mesure resurgit lorsqu'elle croit que 20 dizaines c'est 2 enveloppes brunes (dizaines). La répétition par l'intervenante de son affirmation (20 dizaines=2 enveloppes brunes), lui permet de rechercher le cardinal (200), de le mettre en correspondance avec les 2 enveloppes de centaines et de réaliser l'opération facilement (208-200=8). Le dialogue a immédiatement placé le réfléchissement de I. sur les représentations mentales des unités de mesure de quantité pour favoriser l'établissement de relations d'équivalence avant le retrait.

Ces réorganisations ne sont pas issues d'une nécessité ressentie par I., mais de l'intervention et c'est au cours de la tâche où elle doit ajouter 14 dizaines à 8 unités que réapparaît le problème. Elle additionne les deux nombres 14 et 8 pour trouver 22. Son réfléchissement s'appuie trop directement sur l'opération d'addition des petits nombres. La réflexion permet de retrouver une somme. «14 dizaines... je fais 8 plus 14, ça fait 14 plus 8...ça fait 14 plus 8 ça fait 22». Le dialogue l'invite à illustrer les quantités à additionner pour vérifier. I. prend 8 jetons puis 14 unités. Le réfléchissement s'appuie ici sur les chiffres en délaissant les unités de mesure de quantité. La réflexion qui émerge est la transformation de la question. Elle explique qu'elle doit ajouter 14 unités. I. reformule ensuite la question (14 dizaines) et reprend 14 jetons. Le dialogue l'invite à montrer une seule dizaine, puis 14 dizaines avant qu'elle ne prenne les 14 enveloppes contenant 10 unités pour les additionner aux 8 jetons et retrouver le nombre 148. Le dialogue a favorisé le déplacement du réfléchissement vers une coordination entre les chiffres et les unités de mesure. La réflexion lui permet de reconnaître la source de la confusion. Elle explique son erreur en disant : «Parce que je pensais que c'était une unité que j'avais compris, pis j'ai fait ça de même». Hésitante, elle explique : «14 dizaines, c'est comme des centaines». Le réfléchissement de cette confrontation ne permet pas de reconnaître la relation d'inclusion. La réflexion demeure limitée à une relation de comparaison.

3.3.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Dès le début de l'expérimentation didactique, I. appuie son réfléchissement sur la coordination de la régularité de la base dix, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et la multiplication, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, pour établir des relations d'équivalence entre 10 centaines et 1 unité de mille, 10 dizaines et 1 centaine. Ces réflexions devront être reconstruites pour être généralisée (20 centaines= 2000).

I. appelle ensuite la dizaine de mille, «million». Les positions et les ordres se confondent (unité, dizaine, centaine, mille, million). L'écriture du nombre, une manifestation de la composante formelle, et l'utilisation du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, facilitent la coordination entre position et unités de mesure de quantité. I. généralise cette coordination en identifiant la centaine de mille et la relation d'équivalence entre 908 et 908 unités.

Les opérations permettent différentes constructions. Si l'ajout d'une centaine au nombre 908 et le retrait de 800 unités ne permettent pas de reconnaître avec clarté la compréhension que I. se fait des opérations sur les unités de mesure, le retrait de 20 dizaines et l'ajout de 14 dizaines favorisent la clarification de cette compréhension. Ainsi, une confusion entre 20 dizaines et 2 dizaines est levée, en manipulant les enveloppes et en répétant son affirmation (20 dizaines=2 dizaines?). La conservation des unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, semble se construire par la coordination entre la comparaison entre 20 dizaines et 2 centaines et la reconnaissance de la relation d'équivalence.

Cette coordination ne sera pas généralisée immédiatement. Ainsi, 14 dizaines et 8 donnent 22. L'illustration des quantités, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, permet d'observer la transformation de la question («j'ajoute 14 unités»). La reformulation de la question, par I.(14 dizaines), coordonnée à une conservation de la dizaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, permettent de retrouver le nombre 148. Cette coordination entre chiffres et unités de mesure de quantité facilite une réflexion sur la source de l'erreur et sur une relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine. Toutefois, la comparaison de I. ne laisse pas deviner qu'elle a intégré cette relation d'équivalence. Elle explique : «14 dizaines c'est comme des centaines».

L'abstraction réfléchissante permet de construire de nouvelles unités de mesure de quantité en coordonnant la régularité de la base 10, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et la multiplication, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Une nouvelle coordination entre positions et unités de mesure de quantité élargit cette construction. Une reconstruction de ces coordinations est nécessaire pour réaliser l'ajout ou le retrait (-20 dizaines, +14 dizaines) d'unités de mesure de quantité.

Le dialogue introduit la manipulation des unités de mesure de quantité, la comparaison entre elles, l'utilisation du tableau de numération et la reconnaissance des relations d'équivalence.

3.3.5 L'arrondissement des nombres

3.3.5.1 Compréhension initiale[49] et finale[50]

Au cours de l'évaluation initiale, I. arrondit correctement le nombre 3105 à la centaine. Elle semble satisfaire le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique. De plus, elle compte par un, par dix. Le double-comptage indique toutefois qu'elle dénombre les chiffres dits plutôt que les pas entre ces derniers. Ainsi, elle trouve 9 pas entre 1108 et 1115. Une activité comme celle de l'arrondissement de nombres demeure une occasion d'utiliser le double-comptage à l'intérieur d'un contexte qui rend cet exercice signifiant. Il permet de comparer les nombres.

Au cours de l'évaluation finale, priée une nouvelle fois d'arrondir 3105 à la centaine la plus près, I. le fait, mais à la centaine «la plus loin» (3200). La comparaison avec l'autre centaine lui fait réajuster sa solution (3100). Elle explique : «5 est plus proche de 100». I. satisfait ce critère de la composante procédurale en retrouvant les deux centaines qui entourent le nombre 3105. I. compte par un et par dix sans problème, mais éprouve toujours des difficultés avec le double-comptage. Elle compte toujours les nombres dits plutôt que les pas entre les nombres. L'expérimentation au moyen de la marche lui fait cependant réaliser son erreur. Les habiletés de comptage ont permis de développer un jugement sur l'approximation des nombres mais n'ont pas permis de raffiner les habiletés de double-comptage.

---

[49] Un résumé de l'entrevue d'évaluation initiale apparaît en appendice 3, p. I.-1 à I.-3.

[50] Un résumé de l'entrevue d'évaluation finale apparaît en appendice 3, p. I.-24 à I.-27.

3.3.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[51]

Le contexte du magasin donne lieu à une expérimentation sur l'arrondissement des nombres à la valeur supérieure, où il sera possible d'explorer le comptage par 10, par 100, par 1000 et le double-comptage.

I. arrondit, à l'aide de billets de 10 de 100 et de 1000, le nombre 149 à 150, puis à 250 en identifiant les positions. Ces manipulations donnent lieu à des mises en correspondance entre les billets utilisés et les positions à identifier.

Elle arrondit ensuite le nombre 5064 à la dizaine (5070), à l'unité de mille qu'elle considère la plus proche (6000) en expliquant : «5 est plus proche de 10, il faut arrondir à la dizaine». L'écriture des nombres 5064 et 6000 facilite sa reconnaissance de 6000 comme étant plus loin et laisse émerger une confusion dans le choix des chiffres à observer pour arrondir. L'apparition de la recherche de «l'autre» unité de mille, qu'elle croit être 7000, donne lieu à des discussions où I. utilise le double-comptage, la comparaison entre les nombres entiers et entre les chiffres de deux nombres.

Un retour au nombre 5064 permet une comparaison entre 5000 et 7000 pour identifier l'unité de mille la plus près de 5064. Le comptage un à un entre 5064 et 5000, puis entre 5064 et 7000 permet de reconnaître le nombre le plus près. La recherche de la source de l'erreur permet d'observer que si 5 est proche de 7, 5000 est loin de 7000. I. réutilise cette construction pour arrondir 599 à la centaine la plus près (600) et la plus loin (500) en expliquant : «99 est proche de 100 de 5 proche de 6». Le dialogue lui permet de vérifier son résultat au moyen du compta-

---

[51] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-18 à I.-20.

ge.

Arrondir le nombre 1228 est une occasion pour distinguer «arrondir» de «opérer». Le choix d'une position, l'utilisation des billets de Monopoly permet de comparer des groupes de chiffres dans les nombres : «200 c'est plus petit que 300».

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
on arrondit à 50, à 70...	-compte par 1, par 10, par 100, par 1000 -compare des chiffres et des groupes de chiffres	
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-identifie les positions -utilise le double-comptage -compare des nombres	identifie la quantité négligeable	comprend l'approximation des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.3.5.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes

Pour I. arrondir signifie qu'on change le nombre. Elle arrondit le nombre 149 en comptant un billet de 100 et 5 billets de 10. I. explique qu'elle a arrondi la position «cinquante». Le réfléchissement s'appuie sur le comptage des billets. Le dialogue l'invite à préciser la position arrondie. I. reconnaît qu'il s'agit de la position des dizaines.

Pour arrondir à la centaine, elle ne semble pas repartir du nombre de départ (149). Ainsi, elle arrondit en proposant le nombre 250. Un dialogue favorise un retour vers le nombre de départ et utilise le contexte du magasin pour favoriser l'observation des billets utilisés pour arrondir à la centaine puis à la dizaine.

Le caractère spontané de ses actions apparaît davantage lorsqu'elle cherche à utiliser 5 billets de 1000 et 64 billets de dix pour arrondir 5064. Le questionnement déplace sa réflexion et I. pense prendre 7 billets de dix en ajoutant qu'elle arrondira ainsi à la position «soixante-dix». À nouveau le réfléchissement s'appuie sur le comptage anticipé des billets de Monopoly et favorise une réflexion sur le résultat.

Devant le manque de billets de 10, I. arrondit le nombre 5064 à l'unité de mille. Elle identifie 6000 et le considère proche de 5064 : «Parce que 5 est plus proche de dix, il faut arrondir à la dizaine». Le réfléchissement, en utilisant la règle du 5, favorise une réflexion sur la comparaison des chiffres entre eux. L'écriture du nombre de départ (5064) et du nombre trouvé (6000) semble remettre en question cette première conception. I. ne sait plus s'organiser. Elle montre le chiffre des unités (4) et explique : «C'est plus proche de 6 (50<u>6</u>4)». Le dialogue l'invite à identifier la position à arrondir (unité de mille) et à déterminer ce qui est utile à cette activité (billets de 1000). Elle écrit 7000 sur sa feuille en expliquant : «Il faut le monter». Elle appuie son réfléchissement sur l'expérience précédente où elle a observé que le nombre avait augmenté (149-150, 149-200) et tente de généraliser cette observation. Le dialogue tente de lui faire observer l'utilité d'arrondir les nombres par des contextes comme celui du magasin et celui de l'estimation d'une opération.

Elle y voit d'abord une façon de trouver le nombre «le plus proche» et croit qu'elle ajoute des dizaines ou des centaines.

Par la suite, l'estimation d'une addition lui permet d'expliquer à quoi ça sert. «À savoir si le nombre est assez proche du nombre d'avant».

C'est par le contexte du calcul qu'elle identifie 6000 comme plus facile à utiliser que 5064, mais elle ne peut admettre que 5000 est plus près de 5064. Son réfléchissement s'appuie sur l'idée d'ajouter ou d'augmenter le nombre pour arrondir, comme elle l'a déjà expliquée. La réflexion qui émerge est que 6000 et 7000 permettent d'arrondir le nombre 5064, mais pas 5000. Le dialogue l'invite à reconnaître quelle est, entre 5000 et 7000, l'unité de mille la plus proche de 5064. Le comptage par un de 5000 à 5064, puis le début du comptage de 5064 à 7000, déplacent son réfléchissement sur la distance qui sépare les nombres, ce qui lui permet de découvrir que 5000 est plus près de 5064 que 7000. Le dialogue tente d'associer les contextes de magasin et d'activités réalisées en classe qui justifient d'arrondir au plus près ou au plus loin. Elle généralise cet apprentissage en reconnaissant la centaine la plus près et la plus loin de 599. I. explique : «Parce que 99 c'est proche de 100 et 5 c'est proche de 6». Le dialogue permet de vérifier, par un double-comptage, la solution proposée.

Elle confond toutefois arrondir et ajouter pour le nombre 1228 : elle arrondit à 1229. Le dialogue l'amène à distinguer l'ajout de l'arrondissement, puis à choisir une position avant de poser une action. Une réorganisation de cette conception lui permet d'arrondir à la dizaine la plus proche (1230) et à la dizaine qu'elle croît la plus loin (1000). Une difficulté subsiste donc toujours, celle de retrouver «l'autre» dizaine ou «l'autre» centaine. Le réfléchissement semble s'appuyer sur les nombres, mais un glissement de sens crée une confusion entre l'autre dizaine et l'autre position (unité de mille ou centaine). Le dialogue l'invite à porter son attention sur les dizaines et à utiliser des billets de Monopoly. La manipulation des billets lui permet de reconnaître 1220. Elle généralise cet apprentissage en arrondissant à la centaine la plus loin (1300), puis la plus près (1200) et à l'unité de mille la plus près (1000) et la plus loin (2000). «Parce que 1228 est plus proche de 1000 que 2000, parce que je regarde les nombres ici (228)». Le dialogue invite I. à observer que la distance entre 5 et 7 est différente de celle entre 5000 et 7000.

3.3.5.4 <u>Conclusion de l'expérimentation didactique</u>

Les réfléchissements de I. se fondent d'abord sur le comptage des billets, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Après qu'elle ait identifié les billets utilisés, I. reconnaît les positions auxquelles ces billets correspondent et reconnaît la position où elle a arrondi.

La recherche de deux positions possibles crée des confusions. Premièrement, I. ne sait quel chiffre comparer, puisque l'utilisation de la règle du 5, devient impossible. Deuxièmement, un glissement de sens s'installe entre arrondir à «l'autre» position (dizaine) et arrondir à «une autre» position (centaine, unité de mille...). Ces deux confusions ont pu se dissiper en introduisant le double-comptage, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Le double-comptage permet de se rendre compte de la distance qui sépare les deux nombres arrondis, du nombre de départ. Cette coordination est sollicitée pour arrondir le nombre 599.

Un nouveau glissement apparaît entre «arrondir» et «ajouter», au moment où I. arrondit 1228 au nombre 1229. Une coordination entre l'identification des positions, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, et la manipulation des billets de Monopoly, une manifestation de la composante du palier logico-physique, favorise la correction et la généralisation de la nouvelle distinction.

L'abstraction réfléchissante évolue ainsi de manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, comme la comparaison entre les chiffres, vers une coordination entre des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, comme l'identification de la position arrondie et des positions supérieure et inférieure. Ces coordinations favorisent la construction de réflexions où I. privilégie la comparaison entre le nombre de départ et les nombres possibles, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

Le dialogue, en invitant I. à manipuler, à identifier les billets manipulés, à écrire les nombres possibles au-dessus et au-dessous du nombre à arrondir et à considérer la distance qui sépare le nombre de départ et le nombre arrondie, favorise la vérification des solutions apportées.

3.3.6 Le réseau sémantique

Cette expérimentation didactique, un peu particulière, invite l'enfant à parler de ses représentations mentales et de leurs relations. Le matériel est à sa disposition pour l'aider à se rappeler. Il est demandé à l'enfant de nommer tout ce qui lui vient à l'esprit au sujet des nombres. Chacun des termes est alors inscrit sur un morceau de papier. Par la suite, l'enfant organise ces petits papiers en un premier réseau qu'il explique. Le dialogue qui suit permet d'enrichir le réseau et d'en construire une deuxième.

3.2.6.1 Compréhension initiale et finale

Contrairement aux autres expérimentations didactiques, celle-ci porte sur les liens que l'enfant établit entre les divers éléments qui apparaissent dans l'étude de la numération positionnelle n'a pas eu lieu. Nous pourrions parler de compréhension initiale et finale au début et à la fin de l'expérimentation didactique mais elles sont l'essence même de cette expérimentation. Pour cette raison, elles n'ont pas été présentées de façon isolée.

3.3.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[52]

I. inscrit d'abord sur ses papiers les symboles (x, ÷, -), puis les mots géométrie, paquets de 10, de 100, de 1000, de 10 000, de 1 000 000, chiffres, compter écrire des nombres et compter par bonds. Le tableau qu'elle construit possède 4 colonnes. La première superpose les opérations : «Parce que c'est presque la même affaire». La deuxième regroupe les papiers sur lesquels elle a écrit les mots chiffre, paquets de 10 et écrire, puisque : «...il y a des chiffres...pour savoir comment ils s'écrivent...». La troisième colonne réunit géométrie et arrondir, sans que I. ne puisse expliquer ce qui les regroupe. La dernière colonne rassemble les termes compte et compte par bonds .

x		géométrie	
–	chiffre	arrondir	
÷	écrire des nombres		
	paquets de 10		compter
	paquets de 100		compter par
	paquets de 1000		bonds
	paquets de 10 000		

---

[52] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 3, p. I.-20 à I.-24.

Le dialogue qui s'engage autour des explications apportées sur ce premier réseau favorise d'abord chez I. la reconnaissance de l'addition comme opération inverse de la soustraction. Ensuite, I. identifie les unités de mesure de quantité (unité, dizaine, centaine...) et déplace les termes liés au comptage vers les opérations. Enfin, les opérations sont reliées au sens des opérations (réunit, ajouter, partager...). Le nouveau tableau, qu'elle intitule nombre et tableau de numération, voit apparaître des correspondances entre les symboles des opérations et les mots qui en expriment le sens, entre les différents paquets et leurs noms conventionnels. Entre ces deux grandes classes s'insèrent les termes «enveloppes» et «dessins».

```
                            nombres tableau de numération
   compter par bonds        arrondir   position   chiffre
   compter   unité  paquets dizaine
                  de 10
-  enlève    enve-  paquets centaine
            loppes de 100
÷ partage         paquets   unité de mille
                  de 1000
          dessin
          paquets dizaine de
                  de 10 000 mille
+  réunit         paquets   centaine de
                  de 100 000 mille
x  ajoute
```

3.3.6.3 Comment évolue I. à travers les différentes composantes

a) Un premier réseau en quatre colonnes

Les différents symboles et mots qui sont énumérés (x, ÷, -, géométrie, écrit, paquets de 10, de 100 de 100, de 10 000, de 1 000 000, chiffre, compter, écrire des nombres et compter par bonds) surgissent de l'observation des objets qu'il y a sur la table, d'un questionnement et de ses expériences en classe. Le réfléchissement s'appuie ainsi sur la juxtaposition des diverses expériences et favorise l'émergence d'autant d'éléments connus. Une première organisation regroupe les éléments en quatre thèmes : les opérations, les façon d'écrire, le comptage et les autres. Le dialogue en questionnant l'idée qui a permis de créer ces thèmes favorise un échange qui laisse apparaître les premières conceptions de I., premières conceptions décrites dans les paragraphes qui suivent.

À propos des opérations, I. explique : «C'est presque la même affaire». Elle précise que la division c'est l'inverse de la multiplication : «Quand on dit 3 fois 10, ça fait 30, 30 fois 10, ça fait 3; c'est pareil». I. ajoute que l'inverse signifie : «C'est...la réponse, on prend l'autre chiffre qui est dans la multiplication pis on fait la division. La reconnaissance de l'opération «inverse» s'appuie, dans le cas de la multiplication et de la division, sur l'observation du déplacement des chiffres lors de ces deux opérations. La réflexion reste liée à la reconstitution du déplacement des chiffres et ne semble pas rejoindre un sens. I. ne se rend pas compte que 30 fois 10 ne fait pas 3, mais que le 30 doit être «partagé» en 10.

Pour I., la soustraction est toujours «toute seule». Une histoire, à propos de perte de billes, facilite la reconnaissance de la soustraction comme l'inverse de l'addition. Le réfléchissement, en s'appuyant sur l'histoire de perte de billes, semble faciliter l'identification de l'addition comme opération inverse. Le résumé que fait I. à la fin de l'expérimentation didactique, revoit d'ailleurs les liens entre les opérations. I. ajoute alors leur sens (réunit, ajoute, partager, enlever). I. hésite cependant à expliquer ce qui lie ces opérations à «compter». Elle termine en disant : «Pour comment on avait d'affaires».

Un dialogue à propos du deuxième thème, les chiffres, lui permet d'expliquer que les chiffres servent : «Pour savoir comment ils s'écrivent pis nous autres, on écrit les nombres qu'il y a là...». Le réfléchissement semble s'appuyer sur la recherche de sens dont il a été question durant les expérimentations didactiques précédentes. La réflexion se poursuit à partir du mot arrondir. Il est approché des mots nombre et paquets. Elle fait ensuite correspondre les paquets et les positions, revient sur les paquets auxquels elle associe les mots enveloppes et dessins. C'est à ce moment que le dialogue l'amène à préciser que : «On peut faire des paquets de 10 avec les unités» et que les unités ne sont pas des paquets. Le réfléchissement, en s'appuyant sur la construction des unités de mesure favorise une réflexion qui distingue : «Les unités sont des paquets.» de «On utilise des unités pour faire des paquets». À la fin de l'expérimentation didactique, elle fait correspondre aux différents groupements leur nom formel (dizaine, centaine...) et termine en disant que : «Ça (les dizaines...) c'est des nombres». Ces derniers peuvent être arrondis ou comptés par bonds. Le tableau de numération aide, reconnaît-elle, à trouver la position des chiffres et ainsi on peut écrire des nombres.

Le troisième thème, le comptage, considéré d'abord de façon isolé, a ensuite été associé aux groupements puis à l'addition. Le réfléchissement se fonde sur un questionnement, où la recherche de relations permet de lier les différents thèmes. La réflexion projette une recherche de sens issue de l'utilité : «On peut compter par bonds de 10, de centaines, d'unités de mille». Le dialogue propose un choix d'actions (ajouter, enlever, réunir, partager) à mettre en correspondance avec les différentes opérations. I. croit d'abord qu'elle additionne : «Quand elle additionne». Elle poursuit en disant qu'elle multiplie : «Quand tu vas partager». Le dialogue amène l'exemple d'un partage et la reconnaissance par I. de la division. Elle découvre qu'on ajoute plusieurs fois quand on multiplie et qu'on enlève quand on fait un «moins». Le dialogue a ici favorisé le déplacement du réfléchissement des symboles vers le sens des opérations.

Le quatrième thème, pour lequel il lui est difficile de trouver des explications qui justifient le regroupement des mots géométrie et arrondir, a servi de déclencheur à l'élaboration de relation entre les termes «arrondir» et «paquets» puis entre les termes «paquets» et «unité, dizaine...» et enfin entre les termes «position et tableau de numération». Le retour sur le réseau final a favorisé une réflexion où les opérations sont considérées comme des comptages sur des unités et des paquets. Ces comptages favorisent la construction de nouveaux groupes qui conservent les unités et les paquets. Ces groupes ont des noms conventionnels qui facilitent l'écriture de nombres, reconnaît-elle.

3.3.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Un premier réseau laisse apparaître une classification en quatre thèmes : les opérations, les chiffres, le comptage et les autres. Le dernier réseau permet d'établir des relations entre les différents thèmes.

Les premiers réfléchissements sur le thème des opérations s'appuient sur l'observation du déplacement des chiffres dans les opérations, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Ces réflexions sont ensuite enrichies par une manifestation de la composante intuitive du palier logico-physique des opérations. L'histoire de la perte de billes favorise la découverte de l'addition comme opération inverse de la soustraction, alors que les mises en correspondance entre les symboles et les verbes d'action permettent une réflexion sur l'utilité des opérations, une manifestation de la composante abstraite puis formelle des opérations.

Les réflexions à propos des chiffres fondent leurs réfléchissements sur des aspects du palier logico-mathématique : la valeur, l'arrondissement des nombres, la relation entre les groupes et les positions. Le réfléchissement, en s'appuyant sur la construction des unités de mesure favorise l'émergence de réflexions sur la formation de nombres.

Le troisième thème, le comptage, questionne immédiatement les relations à établir. Ce réfléchissement favorise une réflexion à propos de ce qui est compté «des centaines, des unités de mille...» et la mise en correspondance entre les opérations et leur sens. I. explique que lorsqu'elle multiplie : «On ajoute plusieurs fois». Elle ajoute : «On enlève», quand il y a un moins. Ce thème a donc permis d'établir un pont entre le palier logico-physique et le palier logico-mathématique.

L'abstraction réfléchissante de I. a ainsi permis de construire des réflexions où une action du palier logico-physique comme le comptage, amène des constructions nouvelles comme les unités de mesure de quantité. Ces dernières nécessitent une organisation conventionnelle comme celle qu'on retrouve dans le tableau de numération, puisque sans cette convention d'organisation, la communication ne peut avoir lieu.

3.3.7 Entrevue avec l'enseignante

À la fin de l'expérience, une entrevue avec l'enseignante a permis la discussion sur les deux points suivants. A-t-elle pu observer des changements dans la compréhension de I. et les attitudes par rapport au raisonnement se sont-elles modifiées?

En classe, son enseignante remarque des changements au niveau de ses performances. Ses contrôles sont mieux organisés et mieux réussis dans toutes les matières. Elle réalise ses additions et ses soustractions plus facilement maintenant. Elle fait moins de fautes. Elle doute moins de ses capacités et commence à attribuer plus souvent ses réussites à ses habiletés. Elle semble améliorer sa mémoire, entre autre, dans les contrôles de fin de semaine. Elle est très ordonnée mais cela provoque parfois une collision entre des informations. Son enseignante évoque aussi des difficultés dans les tâches qui demandent de la logique.

Depuis quelques temps, I. raconte ce qui se passe durant les entrevues. Elle prend de l'assurance mais a toujours besoin de l'adulte pour commencer un travail. Elle se perçoit de façon plus positive. Elle est encore insécure, par exemple, elle ne lève la main pour répondre à une question que si elle est certaine de sa réponse. Cette insécurité colore ses façons d'apprendre. Elle a plus de facilité avec les consignes données verbalement. Elle s'occupe beaucoup des autres dans la classe. Elle se plaint d'être distraite par les autres. Son bulletin descriptif indique un C (satisfaisant) sur son bulletin de la quatrième étape et un C (satisfaisant) pour le bilan sommatif de fin d'année, résultat semblable à celui de la troisième étape. Toutefois, ses attitudes se sont améliorées.

3.4 Étude de cas de Ch.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse, mais rapporte la façon dont l'enseignant voit l'enfant dans sa classe. Ch. est une fillette de 11 ans. Elle a repris sa première année scolaire. Son bulletin montre un D (insatisfaisant) pour la deuxième et la troisième étape. Elle bénéficie d'un suivi orthopédagogique en français au moment de l'expérimentation. Selon son enseignant, en classe, elle est débordée. Malgré sa concentration, sa bonne volonté et sa motivation, ses résultats scolaires progressent peu.

Elle a peu confiance en elle-même, éprouve de la difficulté à faire des choix et attribue ses réussites davantage à la chance. Ch. est portée à juxtaposer les informations, démontrant ainsi qu'elle a reçu des informations qui dépassent sa capacité d'intégration. Au cours de la première évaluation, elle identifie ses difficultés et les explique. Elle privilégie davantage la recherche de règles et de conventions plutôt que celle de valeur sous-tendue par les nombres.

3.4.1 La lecture de nombres

3.4.1.1 Compréhension initiale[53] et finale[54]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique.

Au départ, les règles d'organisation du tableau de numération semblent inconnues à Ch. Pour elle, les zéros sont «mêlants» et les gros nombres, difficiles à lire. Ainsi, 70 089 est d'abord lu 70 000 puis 70 089. Elle explique ensuite qu'elle aurait pu confondre 70 089 avec 700 089. Le nombre 10 089 est considéré facile : «Dix, ça se sépare mieux». Le nombre 1198 est bien lu. Ch. ajoute : «Je pensais que tout ça (en montrant les deux 1 du nombre 1198) c'était deux un ensemble et ça (98) c'était quatre vingt-dix-huit...». Ces difficultés ne permettent pas à Ch. de satisfaire le critère de la composante formelle relatif à la lecture de nombre. Elle semble coordonner des manifestations des composantes procédurale et abstraite du palier logico-physique pour lire des grands nombres. Ainsi, elle groupe les chiffres et

---

[53] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 4, p. Ch.-1 à Ch.-5.

[54] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 4, p. Ch.-33 à Ch.-40.

généralise le nom des termes connus aux grands nombres. Le problème de lecture de nombres de Ch. semble provenir de l'absence de procédure du palier logico-mathématique comme celle que permet l'utilisation du tableau de numération.

Au cours de l'évaluation finale, Ch. lit des nombres de 5, 6, et 7 chiffres sans problème. Elle est attentive aux positions des chiffres et à leur organisation dans le nombre. Elle se corrige sans aide lors de sa confusion entre 1188 et 1198 et entre 908 et 9008 en expliquant que les trois chiffres «tassés» lui ont fait penser qu'il y avait un autre 0. Elle satisfait donc le critère de la composante formelle du palier logico-physique et semble utiliser une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique (tableau de numération) devant une situation problématique.

3.4.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[55]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

Au début de la première expérimentation didactique, un dialogue permet de mettre en lumière les connaissances de Ch. à propos de la lecture de nombres. Elle sait que des espaces et des virgules sont à l'intérieur des nombres, mais elle n'utilise pas ces connaissances pour faciliter sa lecture. Elle croit ensuite qu'après la position des mille vient celle des millions. Plus tard, elle arrive à dire que la position des «mille de mille» succède à la centaine de mille. Les chiffres collés semblent

---

[55] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-5 à Ch.-9.

former, pour elle, un nombre différent de celui dont les chiffres sont séparés par tranche. Il est vrai que la lecture qu'elle en fait s'en trouve modifiée. Ch. débute donc avec des connaissances dont certaines, mal assurées, pourraient expliquer les difficultés qu'elle reconnaît avoir et que nous avons pu observer durant l'entrevue clinique initiale.

Ses conceptions initiales sont ébranlées dès la première tâche. Elle est amenée à construire une règle selon laquelle il faut séparer les chiffres dans un nombre. Cette règle est rapidement prolongée en affirmant qu'il faut grouper les chiffres par tranches de 2 et de 3. Le fait d'identifier les positions et les ordres provoque chez elle un approfondissement de cette règle.

La lecture d'autres nombres de 5 chiffres laisse apparaître une permutation de chiffres dans les nombres. L'intervenante amène Ch. à établir une comparaison entre la valeur des groupes de chiffres lus par rapport à ceux qui sont écrits (Ch. voyait 500 au lieu de 50 dans 27 050).

La lecture de nombre de 6 chiffres est ensuite réalisée en revenant à l'identification des positions et des ordres. À ce moment, une précision est apportée sur l'orientation de la lecture (de gauche à droite), puisque l'identification des positions et des ordres n'est pas suffisante à Ch. pour lire le nombre. Cette identification et la précision du sens de la lecture favorisent l'émergence d'une nouvelle règle : 230 040 se lit. «C'est 230 mille parce qu'on est dans les mille et ici c'est 40 dizaines».

La lecture d'un nombre de 7 chiffres lui permet d'approfondir sa règle sur la séparation des chiffres en tranches, puisque Ch. prend une conscience plus nette que de séparer les chiffres rend la lecture plus facile. Elle constate de plus que les positions (unité, dizaine, centaine) sont présentes à travers chacun des ordres (unité, mille, million).

En transcrivant en chiffres des nombres écrits en lettres, Ch. arrive pour la première fois à pressentir l'idée de valeur positionnelle. Pour distinguer 90 de 80, elle constate que 9, c'est un peu plus que 8 et qu'il s'agit ici de dizaines.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
plus il y a de chiffre plus le nombre est grand	groupe par 2 et par 3 les chiffres d'un nombre	généralise les termes des petits nombres aux grands nombres
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
identifie les positions à travers les ordres attribue une position à chaque chiffre	reconnaît l'invariance d'un nombre à lire qu'il y ait ou non des espaces	lis des nombres de plus de 3 chiffres en leur attribuant une valeur
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.4.1.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composante?

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

Au début de la rencontre, elle a utilisé ce qu'elle connaissait des nombres, notamment la position des chiffres. Ainsi, elle lit le premier nombre qu'elle a écrit : «Un million mille deux cent trente-quatre (11234)». Cette lecture erronée a été refusée par l'intervenante. Ch. a dû poursuivre sa recherche et a opté pour une organisation du nombre par tranche de 2 et de 3. Le réfléchissement de Ch. coordonne le regroupement de chiffres dans un nombre et la généralisation des termes connus à des nombres plus grands. La lecture réalisée est jugée adéquate. Cette lecture a favorisé l'établissement d'une réflexion qui permet à Ch. de satisfaire le critère de la composante procédurale du palier logico-physique. Ce critère touche le regroupement des chiffres dans un nombre. «Je groupe par 2 et par 3», explique-t-elle.

Ch. est ensuite invitée à identifier les positions et les ordres. On vise ici à l'amener à préciser et approfondir sa règle, en éliminant le groupement par 2, par une réflexion sur la structure de la lecture (unité, dizaine, centaine à travers les ordres).

Un nouveau problème survient durant la lecture de nombres de 5 chiffres, celui de la permutation des chiffres dans le nombre 27 050. Ch. lit 27 500. La coordination entre deux composantes du palier logico-physique, amorcée par l'organisation du nombre en tranches, ne semble pas suffisante : les chiffres ne paraissent pas encore conçus comme des symboles représentant des unités de mesure de quantité, mais, précise-t-elle, comme des signes «...qu'on met et qu'on enlève». Ainsi, il n'y a pas grand mal à les permuter. Un questionnement qui permet de comparer les groupes de chiffres dans les nombres a suscité une première observation : la valeur est modifiée. Le réfléchissement s'appuie sur ce qu'elle connaît de la valeur des petits nombres (50-500) pour le transférer dans un contexte où les nombres sont plus grands que 1000. Ch. reconnaît alors la modification de la valeur qu'une permutation apporte.

La lecture de nombre de 6 chiffres et de 7 chiffres confirme l'adéquation de la procédure d'identification des positions et de découpage. Ch. réutilise l'identification des positions et des ordres avant de lire le nombre. Cette réutilisation semble faire partie de l'élaboration de la réflexion. Elle n'est toutefois pas suffisante puisqu'une fois les positions des six chiffres reconnues, de droite à gauche, une intervention doit lui faire prendre conscience que la lecture se fait de gauche à droite. Le dialogue l'invite ainsi à une nouvelle réflexion : «C'est 230 mille parce qu'on est dans les **mille** et ici c'est 40 **dizaines** (230 040)».

C'est avec la lecture de nombres de 7 chiffres et le dialogue à propos du pourquoi d'une organisation particulière, que Ch. semble concevoir que le nombre à lire n'est pas changé qu'il y ait ou non des espaces entre les chiffres. Le réfléchissement utilise le tableau de numération, une procédure du palier logico-mathématique. La recherche du pourquoi de l'organisation favorise une réflexion, construction d'une forme d'invariance.

Afin d'introduire une réflexion à propos de la valeur relative des chiffres dans un nombre, un nouveau défi est nécessaire. C'est la lecture de nombres écrits en lettres (mille cent quatre-vingt-dix-huit) qui ramène une réutilisation de la valeur des chiffres dans un nombre. Les chiffres du nombre sont d'abord permutés. Ch. confond 89 de 98. Une première comparaison avait eu lieu antérieurement, au moment où la permutation entre 27 050 et 27 500 s'était produite. Dans ce cas-ci, Ch. réutilise la stratégie s'appuyant sur la valeur d'un groupe de chiffres dans le nombre, laissant apparaître la source de sa confusion : la ressemblance entre les mots utilisés. Le réfléchissement, en coordonnant la valeur des petits nombres dans les grands nombres avec leur nom, permet de comprendre la source de l'erreur. Une réflexion à propos de la valeur du dix qui s'ajoute au mot quatre-vingt favorise une restructuration.

3.4.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Durant la première expérimentation didactique, Ch. appuie ses premiers réfléchissements sur des représentations physiques, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. Elle énonce les règles suivantes : «Je groupe par 2 et par 3, je mets et j'enlève des chiffres....» Ces premières réflexions, encore maladroites, donnent naissance à des permutations de chiffres dans le nombre et à des blocages lorsque les nombres ont plus de 5 chiffres.

Les coordinations s'appuient ensuite sur une manifestation de la composante du palier logico-mathématique, comme la régularité des position à travers les différentes ordres (unité et mille) et la comparaison entre la valeur des groupes de chiffres dans un nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. À partir du moment où interviennent ces coordinations, Ch. semble apte à reconnaître l'invariance du nombre à lire, qu'il y ait ou non des espaces entre les chiffres. En un mot, elle semble se dégager des représentations physiques pour appuyer sa réflexion sur une manifestation de la composante formelle, lire en nombre en sachant qu'il est le représentant d'une quantité.

L'intervention suscite la recherche de pourquoi, en comparant la valeur de groupes de chiffres dans un nombre, en comparant des nombres dont les chiffres sont «collés» et les mêmes qui sont «séparés». L'intervention a donc permis à Ch. de développer son abstraction réfléchissante en déplaçant les réfléchissements, de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique (groupe par tranches de 2 ou de 3) vers des manifestations de la composante formelle du palier logico-mathématique.

3.4.2 Valeur positionnelle

3.4.2.1 Compréhension initiale[56] et finale[57]

Ch. explique que le nombre 2 202 contient : «...zéro dizaine...et deux unités en tout». Un peu plus tôt, elle avait expliqué que le 0 de 70 089 : «Ça veut dire les unités de mille», désignant ainsi une position. Ainsi, le 0 et ce qu'elle dit des 2 le montre, les chiffres seraient des indicateurs de position. Une valeur semble attachée aux positions, mais l'idée de valeur ne déborde pas de la position. Elle voit 7 dizaines de mille et 0 mille, mais ne peut reconnaître la relation d'inclusion des unités de mille dans la dizaine de mille. Ch. ne satisfait donc pas le critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique relatif aux relations d'inclusion.

Pour illustrer le nombre 202, Ch. utilise 2 enveloppes de centaines et 2 jetons. Elle ne reconnaît cependant pas l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation lorsqu'une des deux centaines est déchirée et que les dizaines qu'elle contient sont étalées. «Parce qu'il y a juste un paquet, pis un paquet c'est 10, fait que il y en aurait juste 112».

Ch. ne constate pas immédiatement l'équivalence entre trois organisations différentes d'une même quantité. Elle n'imagine pas, dans un premier temps, faire correspondre la pluralité rattachée aux différents groupements avant de les comparer. Elle décide que là où il y a le plus de groupements (3), là est la quantité la plus grande. L'explication qu'elle apporte ensuite lui permet de reconnaître l'équivalence entre les trois ensem-

---

[56] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 4, p. Ch.-1 à Ch.-5.

[57] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 4, p. Ch.-33 à Ch.-40.

bles. «Ça fait 30 pareil. Les trois sont égals». Nous pouvons considérer qu'elle possède ce critère de l'équivalence entre des quantités puisque l'explication qu'elle apporte est suffisante pour la reconnaître.

Lorsqu'elle est priée d'enlever 2 dizaines au nombre 202 (illustré par une enveloppe de centaine, dix enveloppes de dizaines et 2 jetons), elle enlève deux enveloppes de dix parmi celles qui sont étalées. Toutefois, elle ne sait pas retrouver le cardinal du nouvel ensemble. Elle ne pense pas compter ou additionner les différentes unités de mesure de quantité. Elle ne satisfait pas le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique relatif aux opérations sur des quantités. Nous pouvons penser que l'absence de comptage ou d'opération dans sa construction de nombres entrave le développement de critères du palier logico-mathématique.

Au cours de la dernière évaluation, le nombre 2 220 est bien lu et pour Ch. chacun des 2 qui composent ce nombre a un sens différent. Le 2 des unités de mille «est plus gros» que le deux des centaines. Toutefois, ce nombre ne contient, selon elle, que 20 dizaines et 0 unité. Par la suite, Ch. croit qu'il y a trois dizaines dans le nombre 2220, puisqu'il y a des dizaines à trois positions : celles des dizaines, des centaines et des unités de mille. Une intervention l'invite à compter les dizaines présentes dans toutes les unités de mesure de quantité. Le dialogue sur le contenu des différentes unités de mesure de quantité, lui permet de reconnaître que 2220 contient 2220 unités. Les mêmes questions posées à propos du nombre 202 démontreront que Ch. ne satisfait toujours pas le critère relatif aux relations d'inclusion des unités de mesure dans le nombre. Le 0, entre autre, est pour elle un obstacle. Ainsi, dans 202 il y a 22 dizaines : «Parce que le zéro, il y en a pas... Ça fait que là j'ai ôté le zéro, ça faisait 22». Par la suite, elle pense qu'il y a 22 unités, se reprend pour en trouver 202 et explique : «...il y a le 0 là, ben ça c'est toutes des unités».

Ch. illustre le nombre 2220 sur un abaque. Dans un premier temps, elle constate l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation sur l'abaque. Elle tente de l'expliquer par le comptage. Des difficultés à adapter le comptage aux changements de groupements (de l'unité de mille à la centaine, de la centaine à la dizaine) rendent impossible cette preuve et cela semble l'ébranler. La même question est posée, en utilisant cette fois, les enveloppes et les jetons. Ici, elle admet immédiatement l'invariance en expliquant : «Même si tu en as pas un paquet, tu l'as pareil parce que t'as juste enlevé les enveloppes du paquet. C'est encore pareil». Elle explique ainsi que la quantité demeure ce qu'elle est, que les paquets soient «enveloppés» ou non. Le retour à l'abaque avec la même question amène l'explication par l'emprunt. Elle explique sa confusion : «Je <u>l'ai vu</u> parce que tu fais juste enlever l'enveloppe et tu gardes les petites enveloppes et ça donne la même affaire». Ch. satisfait le critère relatif à l'invariance d'une quantité par rapport à son organisation lorsque celle-ci peut être représentée par un matériel où il y a une correspondance bi-univoque entre les mots de la comptine des nombres et les unités de mesure de quantité. Elle constate immédiatement l'équivalence entre trois groupements différents en comparant leur pluralité.

Enlever 20 au nombre 2234 lui donne 220 après une longue réflexion. Comme elle l'explique plus loin, elle a plutôt fait 2220-20=220, substituant 2220 du problème précédent à 2234 et considérant que 20-20= 0. Elle a tenté d'opérer mentalement avant de se représenter le nombre. La vérification demandée l'invite à utiliser des étapes, d'abord illustrer puis opérer. Elle trouve le nombre 2214. C'est alors qu'elle explique qu'auparavant : «Ça fait comme si mettons j'aurais eu vingt là (en montrant 34) et je l'enlèverais le vingt et la j'ai pensé que ça ferait zéro». Ch. ne satisfait pas le critère relatif au retrait de quantité de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

La satisfaction des critères de la composante abstraite du palier logico-physique ne permettent pas automatiquement le développement de ceux de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Les règles de l'échange 10-1 ne semblent pas encore installées.

3.4.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[58]

L'expérimentation didactique s'amorce par un dialogue sur les unités de mesure de quantité (jetons et paquets) et sur leur composition. Ce dialogue amène des précisions sur leur dénomination et l'établissement d'une première règle. Une enveloppe s'appelle une dizaine et non dix dizaines : «Parce qu'il y a dix, le mot dix, il y a dizaine dedans». La manipulation de la centaine est utilisée pour en faciliter l'identification. Ces échanges favorisent l'exploration de la composition de l'unité de mille, réalisée à partir du comptage des enveloppes de centaines par 100. Ch. constate l'envergure de cette unité de mille en s'apercevant que dix paquets de 100 la compose.

La première tâche demande de former un nombre aussi grand que possible à l'aide des chiffres 5, 3, 5 et 1. Après qu'elle y soit arrivée, elle est invitée à former un nouveau nombre. Un 0 lui est donné. Elle groupe les chiffres par tranche de 2 et de 3 pour comparer les groupes de chiffres entre eux et déterminer le nombre le plus grand qu'il lui est possible de former. L'intervenante, en lui demandant de préciser ce que représente chacune des positions (unité, dizaine, centaine...), tente de l'amener à comparer les unités de mesure entre elles. La première

[58] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-9 à Ch.-14.

construction amène Ch. à dire qu'il y a plus de choses d'enlevées si le 0 est à la position des unités de mille.

Le retrait de 30 au nombre 6420 illustre la compréhension des nombres qu'a Ch. Elle illustre le nombre de départ sur l'abaque et cherche à enlever 30 à 6000. Le dialogue indique qu'elle confond 30 avec 30 dizaines et 30 centaines. Un retour aux enveloppes et aux jetons et l'identification de la quantité d'enveloppes qu'elle a en main sont nécessaires à l'établissement d'une mise en correspondance entre le nombre 30 et la représentation : 3 dizaines. Un deuxième retour aux enveloppes et aux jetons s'avère essentiel lorsqu'elle doit passer à l'action. Elle cherche à enlever 3 paquets de mille au nombre 6000. Un troisième retour aux enveloppes et aux jetons favorise la compréhension de la relation d'équivalence entre une centaine et dix dizaines. L'emprunt réalisé, la lecture se heurte au problème de la permutation des chiffres. La répétition de la lecture qu'a faite Ch. est suffisante pour l'amener à se corriger.

L'expérimentation de l'algorithme de la soustraction favorise finalement l'émergence d'une réflexion. Les concrétisations des nombres dans le matériel et les opérations sur les actions physiques correspondent aux algorithmes appris en classe.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine...	forme un groupe de mille en comptant par 100. compare les chiffres d'un nombre	-établit des relations d'équivalence 10 unités c'est 1 dizaines, 100 c'est 10 dizaines, 1000 c'est 10 paquets de 100 -reconnaît la réversibilité des actions -reconnaît le principe de cardinal
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
compare des nombres	-établit des relations d'inclusion -conçoit les groupes comme des unités de mesure de quantité(prend «un» paquet de dix).	les chiffres ont une valeur relative «on peut prendre les chiffres plus petits pour les transformer».
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.4.2.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes

Sur le plan de la valeur des unités de mesure, Ch. émet des réflexions qui juxtaposent le contenu et le contenant. Ainsi elle dira que l'enveloppe contenant 10 unités s'appelle 10 dizaines et plus tard, que 30 c'est 30 dizaines. Le questionnement sur ce qu'elle prend dans ses mains «force» une réflexion qui se détache des éléments individuels pour retenir comme élément la construction d'un paquet. À partir de cette réflexion, Ch. observe les ressemblances entre les mots dix et dizaine et élabore une règle : «Il y a le mot dix dedans...». C'est aussi à partir de cette première réflexion qu'en prenant l'enveloppe contenant dix dizaines, elle admet avoir une centaine. Cela ne sera pas suffisant pour élaborer la reconnaissance de la régularité de la base 10 de notre système de numération.

En effet, pour construire une unité de mille, elle compte par 100 jusqu'à 1000, prouvant ici que la réflexion à propos de la régularité de dix n'a pas encore eu lieu et qu'elle ne peut servir de réfléchissement. Elle utilise une procédure efficace par ailleurs pour résoudre le problème, le comptage. Cette procédure s'appuie sur le réfléchissement de constructions qui ont déjà eu lieu : la dizaine et la centaine.

Ces réflexions n'ont pas été utilisées pour réaliser les premières tâches (construire le plus grand nombre possible). Ch. construit ce nombre en utilisant comme réfléchissement la comparaison des chiffres entre eux, ce qui donne des résultats satisfaisants. L'introduction du zéro ne s'appuie pas sur la comparaison entre les diverses unités de mesure, comme nous aurions pu le supposer mais sur la coordination de deux réfléchissements : l'organisation du palier logico-physique de la lecture de nombres déjà élaborée (par tranche de 2 et de 3) et la comparaison de groupes de chiffres de l'ordre mille. Cette coordination n'introduit toutefois qu'une structuration partielle puisque la comparaison effectuée, en s'appuyant sur la notation positionnelle au détriment de la valeur des unités de mesure, oublie l'ordre des unités. 55 301 est considéré comme le nombre le plus grand qu'il est possible de former avec les chiffres proposés. Comparer les groupes de chiffres possibles de l'ordre mille ne permet pas de considérer tous les nombres possibles. Le dialogue sur la valeur des unités de mesure amène une réflexion au sujet de l'unité, la plus petite mesure. Cette réflexion sert de réfléchissement pour le problème suivant. Ch. forme alors le nombre 96 420 et constate : «Les chiffres peuvent pas être plus petits que 0».

C'est avec le retrait de 30 au nombre 6420, représenté sur l'abaque, que nous voyons apparaître une coordination entre la valeur des unités de mesure de quantité et la notation positionnelle. Ch. n'utilise pas la réflexion effectuée à propos de la composition de la dizaine ou de la centaine du début de l'entrevue, comme réfléchissement pour comprendre la composition du nombre 30. Elle juxtapose, comme elle l'a déjà fait, les diverses actions qui ont permis la construction des 3 dizaines. Les 30 jetons manipulés et les enveloppes appelées dizaines deviennent 30 dizaines.

L'intervention permet de retrouver les trois enveloppes qui correspondent au nombre 30. Ch. défait une unité de mille puis l'une des centaines avant de compter par 10 chacune des dizaines et d'isoler 3 enveloppes de 10 unités. Le comptage par 10 sert de réfléchissement. La réflexion posée juxtapose les actions (défaire la centaine et isoler 3 dizaines). Ainsi, 30 c'est 10 dizaines. Le geste de prendre trois enveloppes de dizaines «force» la réflexion selon laquelle 30 c'est aussi 3 dizaines. Le dialogue amène une autre réflexion : quand on dit 30 on parle en unités.

Ces réflexions ne sont pas généralisables. En cherchant à enlever 3 de 6, Ch. appuie le réfléchissement sur sa compréhension de la notation positionnelle, où elle compare les chiffres d'un nombre. Conséquemment, 6 est plus grand que 3 et la soustraction est possible. Elle assimile ensuite 3 à 3000. L'intervention l'amène à prendre conscience du changement apporté à la consigne, de la nécessité de lui rester fidèle, et force la réflexion vers l'emprunt : «Il faut baisser... à la centaine plutôt qu'à l'unité de mille. Ch. utilise ensuite comme réfléchissement l'emprunt de l'algorithme fait en classe. Elle déplace un seul anneau de la tige des centaines vers la tige des dizaines. L'intervention invite à revenir aux enveloppes et à leur contenu. Ch. remplace ensuite un anneau de la tige des centaines par dix anneaux sur la tige des dizaines.

La lecture du résultat puis l'algorithme de la soustraction utilisé en classe sont mis en correspondance avec les manipulations. Ch. termine en disant : «On peut prendre les chiffres plus petits pour les transformer».

3.4.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Un dialogue sur les unités de mesure de quantité a permis la construction de la dizaine, de la centaine et de l'unité de mille. Toutefois les réflexions sur la régularité de la base dix et la conservation des unités de mesure de quantité ne sont pas réalisées.

Il ne semble pas y avoir de coordination entre les unités de mesure de quantité et les chiffres d'un nombre, ni entre les unités de mesure et les positions (unités dizaines, centaines...). Ch. résout adéquatement la première partie du problème, où il s'agit de former le nombre le plus grand possible. Elle compare les chiffres entre eux, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Par la suite la coordination entre la comparaison entre des groupes de chiffres et la formation de ces groupes par tranche de 2 et de 3, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, permettent de former un nouveau nombre avec l'ajout du zéro. La comparaison entre les différentes unités de mesure de quantité invite Ch. à déplacer le 0 à la position où l'unité de mesure de quantité est la plus petite et à apporter une solution plus satisfaisante.

Pour prélever 30 à 6420, Ch. ne réutilise pas les unités de mesure de quantité comme réfléchissement pour construire le nombre 30. Elle juxtapose les divers éléments, le nombre et l'unité de mesure de quantité (30=30 dizaines). Une coordination entre la fabrication de la dizaine et le comptage des dizaines qui correspondent au nombre 30 permettent de reconnaître une relation d'équivalence. Ch. ne réutilise pas cette réflexion pour retirer 30 de 6420. Elle s'appuie à nouveau sur la comparaison entre les chiffres, où elle sait que 6 est plus grand que 3. Par conséquent, elle tente d'enlever 3 de 6.

Une coordination entre l'observation du changement apporté à la consigne et les expériences précédentes de Ch. en classe l'invite à utiliser l'emprunt. La réflexion est toutefois court-circuitée.

Ch. déplace un anneau de la tige des centaines sur celle de la tige des dizaines. L'intervention invite à reconnaître la relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine avant d'opérer. Cette dernière surgit d'une coordination entre la manipulation d'une enveloppe de centaine et le comptage des dizaines contenues dans cette centaine.

À nouveau durant cette entrevue, les interventions tentent d'inviter l'enfant à se détacher des actions immédiates pour utiliser des réfléchissements qui s'appuient sur leur résultat. Nous observons une plus grande facilité chez Ch. à utiliser des critères de la composante procédurale du palier logico-physique où son habileté lui permet de comparer des chiffres et de fabriquer des groupements. La nature humaine étant de se tourner vers ce qui est le mieux connu pour résoudre des problèmes, Ch. réutilise plus facilement ces procédures que celles qui impliquent la prise en compte des unités de mesure de quantité.

3.4.3 La décomposition et la recomposition de nombres

3.4.3.1 Compréhension initiale[59] et finale[60]

Ch. énumère les différents groupements de la vie courante. Elle parvient à se rappeler qu'un groupe de douze est appelé une douzaine mais ne sait pas comment appeler un groupe de dix. Le début d'une formulation (un sac de...) l'invite à continuer... «une dizaine». Ce n'est que par la suite qu'elle explique que : «Dix, c'est une dizaine». Elle sait qu'elle utilisera dix paquets de dix pour faire une centaine. Elle reconnaît aussi le nom des

---

[59] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 4, p. Ch.-1 à Ch.-5.

[60] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 4, p. Ch.-33 à Ch.-40.

groupements composés de vingt, cinquante ou cent éléments. Le côté commode de ces groupements est qu'ils sont plus faciles à «ramasser». Elle refuse d'admettre dans un premier temps, que cette dizaine puisse être utile en mathématique. Ch. satisfait les critères de la composante intuitive du palier logico-physique. Les groupes sont des «contenants» et ils ont une utilité usuelle.

La dizaine est d'abord perçue comme étant un groupe de deux jetons, correspondant à la quantité de chiffres nécessaires pour écrire des nombres supérieurs ou égaux à 10 (c'est à dire dans les dizaines). Ch. ne satisfait donc pas ce critère de la composante formelle du palier logico-mathématique.

Ch. doit trouver toutes les décompositions possibles, parmi celles qui sont écrites sur des cartes, pour le nombre 709. Elle confond 70 dizaines avec le nombre soixante-dix, lui additionne la carte-nombre 9 et déclare qu'il s'agit de 79. Elle choisit ensuite 10 dizaines et 7 centaines qu'elle multiplie entre eux (7x10). Elle leur ajoute ensuite 9 unités et identifie le nombre 79 plutôt que 709. Elle utilise ensuite les cartes 7x100 et 9 unités pour former 709. Ch. ne satisfait pas le critère de la composante formelle relatif à la décomposition de nombres. Les unités de mesure de quantité sont tantôt additionnées, tantôt multipliées entre elles sans tenir compte de ce qu'elles représentent. Nous pouvons croire que les groupes de 10 ou de 100 ne sont pas encore conçus comme des unités de mesure de quantité.

Au cours de l'évaluation finale, Ch. connaît le nom des différents groupes auxquels elle attribue la commodité du comptage. Elle satisfait ces critères de la composante intuitive.

Lorsqu'il lui faut retrouver, parmi les cartes-nombres proposées, les décompositions possibles au nombre 709, Ch. choisit 700 et 9 unités, 700 unités et 9, 7x100 et 9. Elle hésite devant 7 centaines et 10 dizaines. Elle croit d'abord qu'il s'agit ici de 70 (10x7) puis de 17 (10+7). Invitée à prendre les enveloppes qui correspondent aux centaines et aux dizaines, elle retrouve le nombre 800. Ces manipulations lui permettent de sélectionner 7 centaines et 9 unités puis 70 dizaines et 10 dizaines, qu'elle additionne en trouvant 80 dizaines. Elle peut leur faire correspondre le nombre 800 avec les enveloppes de centaine. Le soutien apporté par des questions et des manipulations favorisent l'utilisation des cartes 70 dizaines et 9 unités. Ch. semble chercher un sens, ce qui est nouveau, mais les décompositions semblent encore difficiles lorsqu'il s'agit de compositions où interviennent les multiplications. Ch. ne satisfait pas encore, malgré ses progrès. le critère de la composante formelle relatif à la décomposition de nombres. Elle ne semble pas avoir complété sa construction de la conservation des unités de mesure de quantité.

3.4.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[61]

La décomposition de nombres facilite la mise en correspondance des unités de mesure de quantité et des positions des chiffres. Un dialogue sur les représentations mentales de Ch. à propos des différentes unités de mesure, précède la première décomposition. Durant ce dialogue intervient la construction de la dizaine de mille. L'intervention qui suit, demande plus d'une décomposition pour le même nombre. Ch. réutilise ses représentations de différentes unités de mesure. Ces représentations mentales des unités de mesure ne s'avèrent pas suffisantes pour favoriser une compréhension formelle de la décomposition. Cette manifestation de la composante formelle requiert l'introduction des opérations.

Les compositions simples sont maintenant réalisées facilement.

---

[61] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-14 à Ch.-20.

Ch. généralise les relations d'équivalence (3 centaines c'est 300, 3 dizaines c'est 30, 10 unités c'est 1 dizaine). Dans le cas des 51 dizaines Ch. croit que 51 dizaines équivaut au nombre 51. C'est avec la recherche du nombre qui correspond à 51 dizaines que Ch. est confrontée à une recomposition de groupes. L'intervention l'amène à expliquer l'équivalence en utilisant les enveloppes de dizaines contenues dans les centaines. L'observation des 5 centaines et de la dizaine ne lui permet pas de retrouver le nombre 510. Le nom du nombre ne sera découvert que par l'introduction d'un nouvel élément : le tableau de numération.

Plus tard, la recherche de nombre compris entre 402 et 513 facilite la réunion d'unités de mesure de quantité (5 centaines et 5 dizaines, 3 dizaines et 5 dizaines). Ch. réutilise les unités de mesure auxquelles elles correspondent, cherche leur pluralité avant d'effectuer l'opération d'addition.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes.	compte des éléments et des groupes pour illustrer	généralise la régularité de dix reconnaît la réversibilité des transformations
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-met en correspondance les unités de mesure et les chiffres dans le tableau de numération -additionne des unités de mesure	reconnaît des relations d'inclusion	utilise de façon conventionnelle les mots unités, dizaine, centaine...
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.4.3.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes?

Ch. réutilise les constructions des différentes unités de mesure de quantité vues lors de l'expérimentation didactique précédente. La composition de la dizaine de mille est réalisée en généralisant la régularité de la base 10. Les décompositions réalisées sur un même nombre invitent Ch. à utiliser comme réfléchissement ses représentations mentales des différentes unités de mesure de quantité. Ces représentations ne sont toutefois pas suffisantes puisque la décomposition oblige l'utilisation des opérations d'ajout en utilisant les symboles comme + et x. Le dialogue amène l'enfant à mettre en correspondance le langage («10 fois 100, mettre ensemble») et sa symbolisation (10x100, +). Une première mise en correspondance entre les chiffres d'un nombre et la représentation de l'unité de mesure à laquelle ces chiffres correspondent est établie. Ch. réalise alors que les enveloppes permettent différentes organisations et de ce fait différentes décompositions d'un même nombre. La réflexion de Ch. par rapport aux opérations est liée à l'action immédiate : «On met un x quand il y a beaucoup de chiffres...»

Ces constructions ne sont pas réutilisées lorsqu'il s'agit de retrouver le nom du nombre qui possède 51 dizaines. Elle utilise comme réfléchissement une explication donnée au cours de la deuxième expérimentation didactique où, pour elle, les unités s'arrêtent à 9 : «Parce que 10, c'est rendu une dizaine». En effet, le dialogue permet d'observer l'équivalence pour Ch. entre 51 dizaines et 51 unités et, ainsi, la conclusion selon laquelle ces 51 dizaines correspondent au nombre 51. La manipulation des enveloppes, quant à elle, laisse apparaître une compréhension de la centaine comme étant une centaine et non pas, simultanément, dix dizaines. Une situation de la vie courante, où Ch. peut reconnaître que des fleurs peuvent aussi s'appeler des géraniums, facilite une réflexion sur les différentes appellations que peut avoir cette centaine. Ouvrir chacune des centaines amène une première réflexion sur la réversibilité des actions posées (les 10 dizaines sont toujours incluses), une deuxième sur leurs relations d'équivalence (10 dizaines=1 centaine) et leurs différents noms .

Le comptage par 10 de chacune des centaines, permet de placer sur la table les 5 enveloppes de centaines. La dernière dizaine (cinquante et unième) est d'abord illustrée par un jeton avant qu'une question ne permette à Ch. de reconnaître une enveloppe comme contenant 10 jetons.

Le réfléchissement, amené par le comptage par 10 des 5 centaines, et par 1 de la dizaine, ne permet pas de retrouver le nombre 510 mais bien le nombre 51 (10, 20, 30, 40, 50, 51). Ch. n'a pas compté les unités dans les enveloppes. L'intervention suggère un réfléchissement à partir du tableau de numération dans lequel chacune des positions est d'abord identifiée et mis en correspondance avec les unités de mesure de quantité, avant d'y faire correspondre une quantité. La réflexion de Ch. s'arrête à ce qui est visible et non à ce que représente les symboles. «Les dizaines ne sont pas séparées, quand il y a rien (pas d'unités isolées) on met un zéro».

Cette procédure est réutilisée efficacement dans le cas des nouvelles compositions semblables (42 dizaines, 5 dizaines, 4 dizaines, 41 dizaines). Elle est reconstruite pour 11 unités puis réutilisée pour 3 unités, 45 dizaines, 5 unités, 43 dizaines, 0 unités, 12 unités et 40 dizaines.

Un nouveau défi est nécessaire pour élargir cette compréhension. La recherche de nombres compris entre 402 et 513 permet un retour à la manipulation des différentes unités de mesure. Ces manipulations servent de réfléchissement pour corriger la croyance selon laquelle 5 dizaines+5 centaines font 500 sans y introduire de façon consciente l'opération d'addition. Un doute arrête son premier geste lorsqu'elle doit retrouver la composition de 3 dizaines et de 5 dizaines. Ce doute permet une réutilisation de ses représentations mentales des enveloppes de dizaines d'y introduire l'opération d'addition avant de trouver une solution satisfaisante (80).

Ch. réutilise ensuite cette coordination entre les unités de mesure de quantité et l'opération d'addition pour réunir 4 dizaines et 8 dizaines (120), 3 centaines, 5 dizaines, 3 dizaines et 4 dizaines (420).

3.4.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Durant la troisième expérimentation didactique Ch. appuie ses réfléchissements sur les représentations mentales des différentes unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique. Le dialogue l'invite à coordonner ces unités de mesure de quantité avec l'opération d'addition.

Une première coordination survient lorsque la quantité 51 dizaines est conçue comme étant 51 unités. La manipulation des enveloppes et la comptage des dizaines et des unités qu'elles contiennent favorisent l'établissement de relations d'équivalence (5 centaines=50 dizaines), puis de relations d'inclusion (500 unités sont dans 5 centaines). Une nouvelle coordination entre la manipulation des enveloppes et le comptage des unités permet de reconnaître la dizaine comme unité de mesure de quantité. Ces coordinations permettent d'illustrer la quantité, mais Ch. ne peut retrouver la pluralité de cette quantité. Elle n'a pu dégager le principe de cardinal, où le dernier mot-nombre correspond à la quantité d'objets dans le nombre.

Le dialogue invite Ch. à faire correspondre les positions aux unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette coordination est aussitôt mémorisée et sert de réfléchissement pour la solution de problèmes semblables.

Cependant, la réunion d'unités de mesure semblables (seulement des dizaines) et différentes (dizaines avec des centaines ou dizaines avec des unités) favorise l'émergence d'un doute. Ce doute met un frein à la mémorisation. Il suscite la construction d'étapes intermédiaires entre une question posée et la réponse donnée pour apporter des solutions satisfaisantes. Ch. doit alors retrouver le nom de chacune des quantités et introduire l'opération d'addition pour former des nombres.

L'abstraction réfléchissante de Ch. évolue en se familiarisant avec les unités de mesure de quantité. Elle découvre leur utilité, ce qui permet l'introduction de l'opération d'addition. La prise en compte de ces unités de mesure de quantité, tantôt incarnées dans le matériel, tantôt illustrées dans la représentation mentale de ce matériel, introduisent chez Ch., l'expérimentation d'étapes intermédiaires entre le but et le point de départ.

3.4.4 Comparaison et ordre des nombres

3.4.4.1 Compréhension initiale[62] et finale[63]

L'ordre décroissant est réalisé de droite à gauche, du plus petit

[62] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 4, p. Ch.-1 à Ch.-5.

[63] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 4, p. Ch.-33 à Ch.-40.

petit au plus grand. Cette procédure pourrait s'expliquer par le fait que Ch. éprouve de la difficulté à lire des nombres plus grands que 1000. Ce critère de la composante formelle est satisfait mais la procédure utilisée laisse planer un doute sur sa compréhension des nombres.

D'autre part, pour Ch., 20 unités et 2 dizaines : «C'est pareil». 20 dizaines et 20 unités : «C'est pas pareil...parce que deux centaines c'est plus grand que deux dizaines...». À deux reprises, par la suite, Ch. élabore des explications qui ont peu de rapport avec la tâche immédiate. Elle croit que 20 dizaines : «C'est pas pareil parce que 2 centaines c'est plus grand que 2 dizaines». Elle parle ensuite de dollars pour expliquer la comparaison entre 20 dizaines et 2 centaines. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est donc pas satisfait. La comparaison entre des quantités ne s'appuie pas sur des relations d'équivalence entre ces pluralités.

Au cours de l'évaluation finale, Ch. ordonne facilement les nombres en ordre décroissant du plus grand au plus petit et de gauche à droite. Elle satisfait ce critère de la composante formelle en coordonnant sa réalisation avec un autre critère de cette composante : la lecture de nombres.

Ch. croit que la quantité représentée par 20 unités est plus petite que celle représentée par 2 dizaines. Elle corrige spontanément sa conception lorsqu'elle doit l'expliquer. Elle donne l'exemple de 930 et 930 unités. Elle considère cependant que 20 dizaines équivalent à 20 unités. Elle explique ce résultat en substituant 20 dizaines à 2 dizaines. De même, elle modifie la consigne lorsqu'il s'agit de comparer 20 dizaines et 2 centaines, en parlant de 2 dizaines et de 2 centaines. Elle considère que 2 centaines est plus gros. Elle ne cherche plus à trouver un point de comparaison, la pluralité de la quantité par exemple, étape intermédiaire qui lui faciliterait la tâche. Elle ne satisfait toujours pas ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Elle transforme la consigne plutôt que de reconstruire ses compréhensions.

3.4.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[64]

Cette expérimentation didactique débute par un dialogue sur les représentations mentales de Ch. à propos des unités de mesure de quantité qui sont dans l'ordre des mille. Ce dialogue favorise la généralisation de relations d'équivalence entre 20 dizaines et 2 centaines, 40 dizaines et 4 centaines. Le refus de l'intervenante d'appeler «million» la position immédiatement après celle des unités de mille favorise la réutilisation de la généralisation des positions à travers les ordres. Cette généralisation a introduit la reconnaissance de la régularité de la base 10, amenée par la construction de la dizaine et de la centaine de mille.

Par la suite, la comparaison de nombres s'appuie sur leur lecture. Lors de ces comparaisons, deux confusions apparaissent : la première entre 100 089 et 10 089, la deuxième entre 1089 et 10 089. Ces deux confusions, une fois constatées, amènent Ch. à réutiliser l'identification des positions et des ordres.

Par la suite, Ch. ordonne les quatre nombres lus. Un dialogue a lieu sur le sens des mots croissant et décroissant. Puis elle compare les nombres à l'aide des chiffres de l'ordre des mille. «Pour comparer j'ai regardé les plus gros chiffres parce que ça finit toujours par les mêmes chiffres».

Une dernière tâche requiert la comparaison entre 908 et 908

---

[64] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-20 à Ch.-24.

unités. Les unités sont d'abord considérées plus petites que le nombre 908. Un dialogue sur les représentations mentales des unités de mesure de quantité et leur comparaison permet d'élaborer la réflexion suivante : «908 unités ce sont des unités et 908 ce sont aussi des unités, parce que pour faire 908 il faut des unités et pour faire 908 unités, il faut aussi des unités».

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
plus il y a de chiffres plus le nombre est grand	compare les chiffres illustre un nombre	reconnaît la régularité de la base dix reconnaît le principe de cardinal
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-additionne des unités de mesure -compare les unités de mesure -compare des nombres	établit des relations d'inclusion	comprend le nombre comme le représentant d'un ensemble d'élément et de groupes
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.4.4.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes

Dans un premier temps, le dialogue sur les représentations mentales des différentes unités de mesure permet d'observer deux généralisations : généralisation des relations d'équivalence entre les dizaines et les centaines, généralisation de la régularité de la base 10.

La lecture des nombres 10 089 et 1089 a requis un réfléchissement à partir de l'identification des positions et des ordres. Le refus de la lecture faite a rendu nécessaire l'utilisation de cette procédure. Ce réfléchissement favorise une réflexion de la part de Ch. à propos de ce qui l'a confondu : les 0 et leur ressemblance avec les nombres 10 et 100. Cette réflexion ne s'est toutefois pas approfondie par un dialogue sur la valeur des nombres, même si dans l'action, Ch. a pu corriger sa comparaison de nombres.

La mise en ordre décroissant des quatre nombres a été réalisée au moyen de la comparaison des chiffres de l'ordre des mille, chiffres vus comme des unités d'un ordre supérieur. La résolution du problème s'appuie donc sur un réfléchissement de la compréhension des nombres plus petits que 100 et la réflexion qu'elle soulève correspond à la comparaison entre les chiffres, un critère de la composante procédurale du palier logico-physique.

C'est à partir de la tâche où Ch. doit comparer 908 et 908 unités qu'intervient la valeur des unités de mesure de quantité. Dans un premier temps, l'affirmation selon laquelle 908 est plus grand que 908 unités laisse apparaître une coupure entre le nombre, représentant une quantité et le nombre, symbole écrit ou dit. Elle appuie sa réflexion sur la représentation matérielle des jetons et l'idée de la centaine entendue dans le mot neuf cent huit. «C'est juste 908 ici, pis ici c'est 900». Ch. compare ainsi les unités et les centaines pour conclure que les centaines sont plus grandes. Un dialogue sur les représentations mentales des 9 centaines, de leur contenu, des 8 unités à permis de comparer les deux illustrations de ces quantités. Une réflexion sur leur propriété commune, les unités, permet de reconnaître leur correspondance.

3.4.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Durant la quatrième expérimentation didactique, il est encore possible d'observer une coupure entre les nombres et les quantités. En effet, après avoir généralisé les relations d'équivalence et la régularité de la base 10, deux critères de la composante abstraite du palier logico-physique, Ch. traite les positions et les ordres strictement comme des conventions d'écriture. La comparaison entre les nombres n'est pas coordonnée à la reconnaissance du principe de cardinal, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique. C'est ainsi que pour comparer, elle s'appuie sur une lecture de nombres où les chiffres sont comparés. La généralisation des termes relatifs au petits nombres est coordonnée avec la comparaison entre les chiffres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique.

La proposition d'une tâche inédite (comparer 908 et 908 unités) ébranle Ch. D'abord influencée par la comparaison entre centaine et unité, le dialogue l'invite à imaginer les unités de mesure de quantité connues pour retrouver leurs compositions, avant de comparer les deux quantités. Le dialogue introduit ainsi, une étape dans le processus de solution, étape qui introduit une coordination entre la conservation des unités de mesure de quantité et le comptage des unités incluses dans les centaines.

L'intervention a permis à Ch. d'expérimenter, à nouveau, l'introduction d'étape intermédiaire entre la question et la réponse.

3.4.5 Approximation de nombres

3.4.5.1 Compréhension initiale[65] et finale[66]

Selon son enseignant, l'arrondissement de nombres : «C'est du chinois pour Ch.». Au cours de l'entrevue initiale, Ch. arrondit le nombre 3105 à la centaine la plus près en proposant 3000. Ainsi, Ch. ne satisfait pas ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

Ch. démontre aussi une difficulté à compter par bonds de 10 les nombres plus grands que 1000 (1135, 1145, 1155, 1065, 1075 ... 1095, 1605). Elle connaît le double-comptage mais ne l'utilise pas comme moyen de dépannage pour le comptage par bonds. Ces habiletés de double-comptage et de comptage par bonds n'ont pas été travaillées de façon isolée. Elles ont plutôt été intégrées aux différentes activités des expérimentations didactiques. Nous pouvons penser que le développement des habiletés de comptage pourra faciliter la compréhension de l'estimation de nombres.

Au cours de l'évaluation finale, Ch. arrondit à la dizaine, à la centaine, en comparant les dizaines ou les centaines supérieures ou inférieures. Elle satisfait ainsi ce critère de la composante procédurale logico-mathématique.

Elle est plus habile pour compter par 10 oralement mais éprouve toujours une difficulté au passage à la centaine, croyant encore qu'«après 100 c'est 1000». Sa compréhension de la position des chiffres dans un nombre (après les centaines on trouve des unités de mille...) semble influencer ses habiletés de comptage. Depuis,

---

[65] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 4, p. Ch.-1 à Ch.-5.

[66] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 4, p. Ch.-33 à Ch.-40.

lorsque le comptage s'effectue sur du matériel, elle ne peut poursuivre la régularité par 100 ou par 10. Elle éprouve aussi des difficultés à adapter le comptage lorsqu'elle doit compter des dizaines dans les centaines (compter par 10) puis des dizaines isolées (compter par 1). Le double-comptage est remplacé au profit de l'opération de soustraction, jugée probablement plus rapide. Ainsi, entre 1008 et 1015 il y a 7 pas : «Parce que 15-8 ça fait 7».

Les habiletés de comptage de Ch. se sont améliorées, de même que sa compréhension de l'approximation de nombres. Toutefois, il reste à Ch. à lier le comptage à un sens.

3.4.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[67]

Un dialogue sur les représentations mentales des différentes unités de mesure qui composent 930 et 930 unités, précède le début de l'expérimentation didactique. Il inclut un échange sur l'organisation spatiale requise pour faciliter la lecture de nombres et sur la conception de Ch. de l'arrondissement de nombres. Par la suite, dans cet échange, Ch. ne semble plus s'appuyer sur la représentation mentale des unités de mesure puisqu'elle n'établit plus de relation d'équivalence entre une dizaine et dix unités pas plus qu'elle n'établit de relation entre l'enveloppe de la dizaine et la position dizaine.

Arrondir le nombre 149 est réalisé en comptant les billets de Monopoly par 10 et par 100. Une deuxième tâche permet l'estimation d'une somme (149+90) en utilisant l'approximation une nouvelle fois. Une troisième tâche, arrondir le nombre 5064, permet à Ch. d'observer les positions où il est possible d'arrondir un

---

[67] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-24 à Ch.-29.

nombre et de dégager la règle : «Si je veux arrondir à la dizaine, je dois prendre des billets de dix».

Ainsi, il est proposé à Ch. d'arrondir le nombre 5064 à une autre dizaine, près du nombre initial. Le dialogue permet d'identifier des moments, dans la classe ou dans un magasin, où arrondir à la dizaine supérieure plus adapté qu'arrondir à la dizaine inférieure. Il demeure toutefois difficile pour Ch. de se rappeler le nombre de départ pour effectuer un deuxième arrondissement : elle cherche le plus souvent à arrondir à partir du dernier nombre obtenu.

Le nombre 1228 est ensuite arrondi à la dizaine supérieure et inférieure, puis à l'unité de mille inférieure. Elle confond l'unité de mille supérieure (2000) en proposant la centaine inférieure (1200). La manipulation des billets lui permet de retrouver l'unité de mille supérieure (200) et de comparer 28 et 1000 puis 28 et 2000. Elle arrondit enfin à la centaine qu'elle croit inférieure (1100) puis supérieure (1300). En identifiant la centaine la plus loin (1300), elle corrige sa première estimation en proposant 1200) et explique : «28 à 100 c'est plus loin que 300...». Arrondir sert maintenant à avoir le montant exact.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
on arrondit à des nombres (30, 40, 100, 200...)	compte par 10 par 100	généralise «si je veux arrondir à..., je dois prendre des billets de...»
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
on arrondit à des positions plus près ou plus loin	identifie la quantité négligeable par rapport au total	utilise l'approximation des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.4.5.3 Comment évolue Ch. à travers les différentes composantes

Le dialogue à propos de la conception d'arrondir révèle que pour Ch. arrondir des nombres : «Ça sert à mettre plus haut». C'est d'ailleurs à ce moment qu'elle croit : «On arrondit à 100, 200, 300». L'histoire et le rappel des positions du tableau de numération semble la préparer à la première tâche.

Ainsi, la résolution du premier problème, arrondir le nombre 149, s'appuie sur un réfléchissement à partir du comptage des billets de Monopoly et une réflexion sur la reconnaissance de la position arrondie. Notons que le contexte du magasin proposé pour cette tâche pousse vers un type d'approximation à la valeur supérieure.

La deuxième tâche cherche à faire observer à Ch. une autre fonction de l'arrondissement des nombres. Ainsi, l'estimation d'une somme est demandée (149+90). Ch. arrondit les nombres spontanément, utilisant le nombre arrondi au cours de la première tâche. Puis elle additionne et déclare qu'arrondir sert à «payer plus».

Arrondir le nombre 5064 permet des arrondissements à différentes positions. Les réfléchissements et la réflexion s'appuient sur la manipulation des billets de Monopoly. Ainsi, elle prend 5 billets de 1000 et un billet de 100 pour arrondir 5064 et conclut avoir arrondi à la centaine. Lorsqu'elle veut arrondir à la dizaine, elle écrit 6000 et déclare encore avoir arrondi à la centaine. C'est par un dialogue sur la mise en correspondance entre les billets de Monopoly, les positions des chiffres dans un nombre et l'observation des actions réalisées précédemment (je donnais des mille pour arrondir à l'unité de mille...) qu'émerge une deuxième réflexion : «Si je veux arrondir à la dizaine, je dois prendre des billets de 10».

Cette première construction ne facilite pas encore l'évaluation des solutions apportées puisqu'elle n'expose pas les solutions possibles (dizaine supérieure ou inférieure) pour ensuite les comparer. La recherche du nombre arrondi à la dizaine ou à la centaine la plus près et la plus loin, invite Ch. à comparer les nombres, à porter un jugement sur la solution trouvée. Ainsi, elle retrouve la dizaine la plus près et la plus loin de 1228 spontanément. Elle poursuit en expliquant qu'elle peut arrondir à «30, 70, 60». Sa réflexion demeure très liée aux actions réalisées, aux gestes posées. Le dialogue l'invite à se détacher de l'action pour identifier plutôt des positions : dizaine, centaine, unité de mille.

Elle arrondit ensuite 1228 à l'unité de mille la plus proche spontanément (1000) mais pense que la plus loin est 1200. Elle semble confondre «l'autre» unité de mille avec «l'autre» position (dizaine, centaine). Un dialogue l'invite à retrouver la réflexion déjà formulée au sujet de la correspondance entre les billets utilisés et de la position qui y correspond. Elle utilise le matériel, arrondit à 2000 puis compare 28 et 1000 et 28 et 2000. Elle considère ensuite que 2000 est l'unité de mille la plus loin de 1228. Elle explique : «Quand je prends ici 28 là, il est plus proche de 1000 que de 2000».

En cherchant à arrondir à la centaine le même nombre, Ch. propose le nombre 1100. Un questionnement lui permet de réutiliser le contexte du magasin pour évaluer sa solution. Elle retrouve la centaine supérieure (1300), ce qui lui permet de corriger la solution déjà proposée en écrivant 1200 comme centaine inférieure. Elle compare à nouveau 28 à 100, puis à 300. Ainsi, elle compare un certain nombre de chiffres du nombre 1228 (28) à la centaine (200) plutôt que le nombre entier (1228 à 1200).

3.4.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

C'est par une coordination entre le comptage des billets de Monopoly, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, et la connaissance des positions que peuvent occuper les chiffres d'un nombre que Ch. reconnaît la position du nombre arrondi. Une nouvelle coordination entre le comptage des billets de Monopoly et les positions des chiffres dans un nombre favorise l'arrondissement des nombres 5064, puis 1228 à plus d'une position. Ch. compare ensuite des groupes de chiffres dans le nombre pour reconnaître le nombre à la position la plus près ou la plus loin du nombre de départ.

Ch. confond ensuite moyen et but. Ainsi, elle croit qu'on arrondit à des nombres et non à des positions, elle compare la même partie du nombre (28) pour évaluer sa solution lorsqu'elle arrondit à différentes positions.

L'abstraction réfléchissante a ainsi évolué vers des coordinations entre des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, sans pouvoir dégager une régularité dans l'organisation de la tâche. Le dialogue a invité Ch. à se dégager de la séquence de ses actions pour s'attarder aux positions et pour réutiliser des coordinations (pour arrondir à ... je compte des billets de...).

3.4.6 Réseau sémantique

Cette expérimentation didactique, un peu particulière, invite l'enfant à parler de ses représentations mentales et de leurs relations. Le matériel est à sa disposition pour l'aider à se rappeler. Il est demandé à l'enfant de nommer tout ce qui lui vient à l'esprit lorsqu'il pense aux nombres. Chacun des termes est alors inscrit sur un morceau de papier. Par la suite, l'enfant organise ces petits papiers en un premier réseau qu'il explique. Le dialogue qui suit permet d'enrichir le réseau et d'en construire une deuxième.

3.4.6.1 Compréhension initiale et finale

Contrairement aux autres expérimentations didactiques, celle-ci porte sur les liens que l'enfant établit entre les divers éléments qui apparaissent dans l'étude de la numération positionnelle. Nous pourrions parler d'une compréhension initiale et finale au début et à la fin de l'expérimentation didactique, mais elle est l'essence même de cette expérimentation. Pour cette raison, ces compréhensions n'ont pas été présentées de façon isolée.

3.4.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[68]

Ch. énumère d'abord les différents termes utilisés lorsqu'on parle des nombres et organise ces termes en deux colonnes : celle des positions, celle du matériel et des opérations. Puis elle explique son premier réseau.

---

[68] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 4, p. Ch.-29 à Ch.-33.

-	unité	paquet	jeton
+	dizaine		
x	centaine		
	unité de mille		
	dizaine de mille		
	centaine de mille		
÷	enveloppe		

Elle hiérarchise ensuite les termes de ces colonnes en ordre croissant. L'intervention l'invite alors à créer des liens qui ne seraient pas uniquement hiérarchiques mais inclusifs et réversibles en questionnant la construction des unités de mille et l'utilité des opérations. Durant ce dialogue, Ch. déplace les termes écrits sur des petits papiers pour créer un deuxième réseau.

x + -	nombres	chiffres	position	écrit	ordonne
÷	arrondir	unité			jeton
	paquet		enveloppe		
		dizaine			
		centaine			
		unité de mille			
		dizaine de mille			
		centaine de mille			

3.4.6.3 <u>Comment Ch. évolue à travers les différentes composantes</u>

a) Un premier réseau qui sépare les positions des opérations

Au départ, Ch. témoigne de réflexions primitives pour les opérations : «...il n'y a pas beaucoup d'unités c'est comme un moins (-)» ou «...le plus (+) donne des dizaines», «...tu multiplies du plus petit au plus gros et tu divises du plus gros au plus petit». Les réfléchissements semblent s'appuyer sur une conception selon laquelle les opérations représentent des valeurs de nombres. Ainsi, les opérations sont d'abord ordonnées «...du plus petit au plus grand», explique-t-elle.

L'intervention tente de relativiser ces affirmations en proposant des contre-exemples (est-ce qu'on peut soustraire des dizaines?...2 154 000 - 1 203 000 donne-t-il un gros nombre), en identifiant les confusions possibles («Du plus petit au plus grand, c'est multiplier ou ordonner?»), en racontant une histoire où apparaît une inversion des opérations. Ch. observe ses diverses contradictions et élabore une réflexion qui demeure «collée» à la séquence des actions discutées. «Ça parle...ça fait comme un moins au début parce que tu en as perdu et après tu fais un plus».

Les unités de mesure de quantité, quant à elles, sont mises en correspondance avec les enveloppes et les jetons. Ch. explique que les jetons correspondent aux unités et qu'avec ces dernières elle construit des paquets, appelés aussi dizaines, centaines... Au cours de l'explication, elle met en correspondance les termes usuels (enveloppes, paquets) et les termes conventionnels (unités, dizaine, centaine...).

b) Un deuxième réseau où les nombres représentent des quantités

Des réfléchissements sur la notation positionnelle et les unités de mesure de quantité apparaissent lorsque Ch. explique que l'unité est un chiffre. L'intervenante tente de faire relativiser cette affirmation en faisant observer que la dizaine s'écrit aussi avec un chiffre. La réflexion qui émerge s'appuie sur une procédure du palier logico-physique propre à la lecture de nombre : grouper par 3. Un questionnement oriente la réflexion de Ch. sur le contenu des unités de mesure de quantité. Elle structure sa pensée en expliquant : «Avec les chiffres on forme des nombres». Elle fait correspondre deux actions à ces nombres : écrire et ordonner.

3.4.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

La sixième entrevue expose des réflexions liées aux «quoi» plutôt qu'aux comment et aux pourquoi. Une première réflexion, où les opérations semblent représenter une valeur de nombres, est liée à l'observation du résultat final des opérations. L'orthopédagogue tente d'orienter la réflexion vers le processus sous les opérations (enlever, ajouter...). Les explications de Ch. restent toutefois liées aux résultats des opérations (le reste, la somme).

Les explications de Ch. au sujet des unités de mesure de quantité semblent apporter des modifications à ses réflexions. Ainsi, pour Ch. les unités, les dizaines... correspondent d'abord à des positions. Par la suite, elle les fait correspondre aux groupes (paquets, enveloppes). Toutefois, elle ne réutilise pas cette coordination entre position et groupes, puisqu'elle considère ensuite que l'unité est un chiffre. L'orthopédagogue l'amène à observer l'existence de chiffres à d'autres positions, puis le contenu des unités de mesures de quantité. La réflexion qui en émerge est orientée vers l'action puisqu'elle met alors les chiffres au service des nombres et enfin ces derniers au service des opérations.

L'abstraction réfléchissante de Ch. a évolué de l'identification des résultats des opérations vers les processus ou la représentation mentale qu'elle se fait des opérations et des unités de mesure de quantité. Par une intervention, elle a été invité à s'attarder aux processus, qui sont autant de relations entre les divers éléments.

3.4.7 Entrevue avec l'enseignant

Les huit semaines se terminent par une rencontre avec l'enseignant. En classe, il considère que Ch. a fait des progrès important. Elle est plus motivée par les défis, cherche à prévoir les étapes de réalisation d'un problème, s'arrête et réfléchit avant de proposer une solution. Elle effectue ses soustractions avec emprunt facilement et peut arrondir alors qu'auparavant, pour elle, c'était du chinois. Selon son enseignant, Ch. a maintenant des moyens afin de poursuivre sa scolarité. Son bulletin montre un C (satisfaisant) pour la quatrième étape alors qu'elle n'avait qu'obtenu qu'un D (insatisfaisant) au cours des autres étapes.

Elle a amélioré sa confiance en elle-même et reconnaît ses habiletés lors de ses réussites plutôt que de les attribuer à la chance. Sa capacité de concentration est meilleure, elle peut évoquer les notions déjà vues en leur absence, comprendre les consignes écrites.

3.5 Étude de cas de V.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse mais rapporte la façon dont les enseignants voient l'enfant dans sa classe. V. est une fillette de cinquième année. Elle est âgée de 11 ans au moment de la première entrevue. Elle n'a jamais repris d'année scolaire. Ses enseignants la réfèrent pour une difficulté à comprendre les nombres naturels. Ils redoutent une reprise d'année. Elle a reçu un suivi orthopédagogique en lecture et en mathématique en cours d'année. Son bulletin descriptif indique la lettre D (insatisfaisant) en ce qui concerne sa capacité à exécuter des tâches reliées aux nombres naturels.

V. est considérée comme une enfant hyperactive et prend du ritalin depuis sa troisième année. Elle éprouve des difficultés de concentration, de motivation et de mémoire. V. manque de confiance en elle. Elle ne sait pas choisir des stratégies pour solutionner des problèmes. Elle est souvent distraite par ses amis et elle s'arrête très rapidement dans l'exécution d'une tâche. Elle est la première à abandonner ou à terminer une tâche. Elle a l'habitude de travailler vite pour montrer qu'elle peut suivre les autres. Elle accorde beaucoup d'importance à ce que pensent ses camarades de classe.

3.5.1 Lecture des nombres

3.5.1.1 Compréhension initiale[69] et finale[70]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le choix de l'expérimentation didactique.

Durant l'entrevue initiale, V. explique qu'elle a de la difficulté avec la lecture des nombres à quatre chiffres. Elle hésite devant le nombre 10 198. Elle explique que le 0 la mêle, ne sachant pas ce qu'il signifie. Elle lit le nombre 1 002 249 sans problème, mais ne peut reconnaître ce qui l'a aidé à lire. V. ne satisfait pas ce critère de la composante formelle. Nous pouvons poser comme hypothèse que le fait de ne savoir identifier les procédures qui lui permettent de lire les grands nombres entrave le développement de la construction de ce critère.

Au cours de l'entrevue finale, la lecture de nombres s'effectue en groupant les positions des chiffres à l'intérieur des ordres (unité, mille, million). V. satisfait maintenant ce critère de la composante formelle. Elle utilise ainsi une manifestation de

---

[69] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 5, p. V.-1 à V.-3.

[70] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 5, p. V.-20 à V.-23.

la composante procédurale logico-mathématique pour faciliter sa lecture.

3.5.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[71]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

L'expérimentation didactique débute par un échange permettant de dénombrer la quantité de chiffres (10) qui servent à écrire les nombres. Les connaissances acquises par V. à propos de leur organisation (espaces entre les chiffres, ordres) apparaissent lorsqu'elle écrit les nombres 756, 1005, 12 670. Elle explique ensuite l'organisation du nombre 12 670 : «... j'ai mis 12 comme le chiffre 12...»

V. croit que le nombre est différent si son organisation spatiale est différente. «Tout collé, tu pourrais pas dire 12 670...ça ferait rien que des chiffres groupés». Elle explique ensuite sa difficulté à lire les nombres, ce qui justifie la nécessité de mettre des espaces à tous les 3 chiffres.

La lecture de nombres de 4 et 5 chiffres, écrit dans un catalogue, est réalisée aisément. Il est alors demandé à V. d'écrire des nombres qu'elle considère difficiles à lire. C'est à partir des nombres de 6 chiffres que V. éprouve des problèmes. Le nombre 200040 qu'elle a écrit, est lu : «Vingt millions quarante». L'observation des espaces et de leur régularité dans d'autres nombres ainsi qu'une précision donnée par l'orthopédagogue à propos du

---

[71] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-3 à V.-5.

sens de la lecture (gauche droite), permettent de reconnaître que le nombre à lire est le même, qu'il y ait des espaces ou non.

V. écrit ensuite le nombre 542 00031. À cette occasion, elle réutilise et reconstruit partiellement les réflexions précédentes. Les ordres et les positions sont ensuite identifiés, la régularité des positions et des espaces est soulignée. V. modifie alors l'écriture du nombre. Elle écrit 54 200 031, ce qui facilite la lecture.

V. organise les chiffres du nombre 910 121 000 pour le lire. Les positions n'ont pas été identifiées, ce qui semble induire une lecture erronée (91 121 000). Une fois les positions reconnues, elle lit correctement le nombre. Elle lit ensuite 23 040 100, puis le compare à 23040100. Elle reconnaît que le nombre reste inchangé qu'il soit ou non composé d'espaces.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
connaît les chiffres (0 à 9) qui permettent d'écrire les nombres	organise les chiffres en groupes de 2 ou de 3	généralise les noms des petits nombres aux grands nombres
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
donne une position à chaque chiffre et un chiffre à chaque position (tableau de numération)	reconnaît l'invariance de la lecture du nombre qu'il y ait ou non des espaces	lis un nombre de plus de 3 chiffres en lui attribuant une valeur
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.5.1.3 Comment évolue V. à travers ces différentes composantes?

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

V. écrit, puis lit le nombre 12 670. Elle explique l'écriture de ce nombre en appuyant son réfléchissement sur la généralisation des noms des nombres plus petits que 100. «J'ai commencé par la dizaine de mille, j'ai mis 12 000, j'ai pris 1 mille j'ai mis 12 comme le chiffre 12, pis j'ai pas mis le zéro parce que j'ai d'autres chiffres après, ça ferait trop long, pis là j'ai mis le six cents après ça j'ai mis le 70...j'ai mis un espace».

V. croit ensuite que le nombre est autre si son organisation spatiale est différente. Le réfléchissement semble s'appuyer ici sur une conception primitive selon laquelle les objets distants sont plus nombreux que les objets rapprochés. «Tout collé, tu pourrais pas dire 12 670 ... ça ferait rien que des chiffres groupés». Le dialogue l'invite à exprimer sa difficulté à lire des nombres «collés», puis à reconnaître l'utilité des espaces qui composent le nombre.

Les problèmes de lecture de nombres surgissent plus particulièrement avec les nombres de 6 chiffres, qu'elle lit comme étant des millions. Elle écrit le nombre 200040, puis le lit : «Vingt millions quarante». Le réfléchissement s'appuie sur sa connaissance de la position des chiffres dans un nombre, connaissance selon laquelle unité, dizaine, centaine, mille et million se succèdent. Le dialogue l'invite à observer les nombres déjà lus, puis à redisposer les chiffres du nombre avant de le lire. Elle explique alors : «Tu prends 200, pis t'ajoutes un mille parce que ça fait dans les mille, pis là tu dis 40».

La difficulté qu'éprouve V. à observer que le nombre à lire reste le même, qu'il y ait ou non un espace entre les chiffres d'un nombre, réapparaît. «Si on mettait pas les espaces, ça ferait pas le même chiffre, le même problème. Faut mettre un espace après les trois chiffres». Le changement apporté par la lecture ne permet pas d'observer l'invariance de la quantité. Étant donné que les problèmes de V. n'apparaissent qu'avec les nombres de cinq ou six chiffres, il est difficile d'utiliser un matériel qui rend l'invariance de la quantité facile à observer visuellement. Les manipulations de ce grand nombre d'objets peut faire apparaître des confusions. Un dialogue s'amorce donc sur le rôle des espaces dans un nombre. V. reconnaît que : «C'est le même nombre, mais ça ne sonne pas pareil». La lecture de nouveaux nombres permet de réutiliser cette observation.

V. organise ensuite un nombre de 8 chiffres en groupes de trois et de cinq (542 00031). Elle ajoute ensuite un espace, ce qui donne 542 000 31. V. réutilise l'organisation de chiffres par groupe de trois, mais compte les chiffres à partir du premier, plutôt qu'à partir des unités. Le dialogue permet l'identification des positions, l'observation de la régularité des positions. De plus, l'examen des nombres écrits dans un catalogue permet à V. de reconnaître qu'il y a un espace après chaque centaine. L'écriture du nombre est corrigée 54 200 031. La poursuite du dialogue permet de reconnaître que la lecture se fait de gauche à droite et que les espaces se placent à partir des unités. La lecture du nombre 54 200 031 demande la réidentification des positions et des ordres (unités et mille). La généralisation des mêmes positions apparaît dans l'ordre des millions. La lecture est alors hésitante, mais juste.

V. réutilise ces procédures pour écrire et lire un nombre de 9 chiffres (910 127 000). Elle identifie les ordres, lit de gauche à droite : «91 127 000». V. a confondu 910 et 91 dans l'ordre des millions. Elle n'avait pas identifié les positions de chacun des chiffres. La répétition par l'orthopédagogue, du nombre qu'elle a lu, est suffisante pour apporter une correction.

V. lit ensuite sans problème les nombres 1024, 23 040 100. Elle réutilise les espaces et l'identification des ordres puis reconnaît que le nombre à lire reste inchangé devant l'écriture du nombre 23 040 100 et 23040100. «Ce serait pareil, mais j'aurais de la difficulté à le lire». Elle transcrit facilement par la suite les nombres écrits en lettres pour les écrire avec des chiffres (1002, 670, 98, 10 008).

3.5.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Les premiers réfléchissements permettent de généraliser ses connaissances des petits nombres («le chiffre» 12 dans 12 000). La construction de nombres dans le nombre apparaît. La différence entre la lecture d'un nombre qui a des espaces et le même qui n'en a pas, invite V. à croire que le nombre à lire varie, puisque la lecture qu'elle en fait est différente.

L'organisation des chiffres d'après le tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, ne sera pas immédiatement réutilisée. Une deuxième invitation à utiliser cette organisation et l'attribution d'un rôle particulier aux espaces dans un nombre, permettent d'approfondir la conception selon laquelle le nombre à lire est inchangé quel que soit son organisation, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique.

V. réutilise ensuite cette organisation des chiffres d'un nombre, sans introduire l'identification des positions à travers les ordres. L'écriture du nombre 542 000 31 est d'abord réalisée de façon non conventionnelle. L'absence de coordination entre les ordres et les positions provoque ensuite une lecture du nombre

910 127 000 comme étant 91 127 000. Ces erreurs ont été autant d'occasions de reconnaître l'importance des positions à travers les ordres, puis de distinguer ordre et position pour la lecture d'autres nombres. Cette construction requiert l'observation des groupes de 3, l'identification de ces groupes à l'intérieur de chacun des ordres, puis la reconnaissance de la régularité des positions.

L'abstraction réfléchissante de V. évolue donc de coordinations entre les groupes de chiffres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, et de la généralisation des noms des petits nombres, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, vers des coordinations du palier logico-mathématique. Ces dernières coordinations tiennent compte des conventions de lecture et d'écriture de nombres, connues grâce au tableau de numération, et de la reconnaissance que le nombre à lire reste inchangé qu'il soit composé ou non d'espace.

3.5.2 La valeur positionnelle

3.5.2.1 Compréhension initiale[72] et finale[73]

Au cours de l'évaluation initiale, V. accorde une valeur différente aux chiffres 2 du nombre 2 202. Elle distingue d'abord 2 centaines dans le nombre 2 202, puis reconnaît les 22 centaines en expliquant : «Je me rappelle Céline avait dit quand c'est le chiffre des centaines tu fais ça (en traçant une ligne entre 22 et 02) pis ça te donne ton chiffre. Parce que tu coupes comme ça,

---

[72] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 5, p. V.-1 à V.-3.

[73] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 5, p. V.-20 à V.-23.

22¦02 ça fait ton chiffre». Elle retrouve aussi les 2202 unités à l'aide de ce truc. V. semble satisfaire le critère de la composante formelle, en attribuant une valeur relative aux chiffres d'un nombre. La reconnaissance de l'inclusion des centaines dans le millier est réalisée au moyen d'une procédure qui n'implique pas nécessairement la reconnaissance des unités de mesure de quantité comme incluses les unes dans les autres, ni leur addition. Nous ne pouvons donc conclure pour l'instant à la satisfaction de ce critère.

V. enlève ensuite 20 du nombre 202 en utilisant l'illustration de ce nombre déjà réalisée. Elle défait 2 enveloppes parmi les 10 enveloppes de dizaines sur la table et met les jetons de côté. Elle trouve comme reste, 102. Le comptage, sollicitée par l'orthopédagogue, permet de corriger l'erreur et de retrouver le reste, 182. Elle explique alors qu'elle croyait que les enveloppes étaient des unités. Elle satisfait le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique, relatif au retrait d'une quantité, puisqu'elle enlève correctement les 2 dizaines mais ne retrouve pas le cardinal de cette quantité.

Nous pouvons poser comme hypothèse que les nombres sont conçus comme une juxtaposition de chiffres ou de quantités, sans que la réunion de quantité ne soit présente.

Durant l'évaluation finale, V. croit que le 0 de 7<u>0</u> 089 représente les unités de mille qui sont dans le nombre, mais ne peut reconnaître que ces unités de mille sont dans les dizaines de mille. Cette question amène d'ailleurs une confusion entre l'ordre des mille et la position unité de mille. Cette confusion empêche V. de reconnaître l'enveloppe qui correspond à l'unité de mille, de même que la quantité de centaine nécessaire à la construction de l'unité de mille.

La valeur des chiffres dans un nombre est reconnue comme relative à leur position, mais la quantité d'unités et de groupements est toujours reconnue grâce à un truc. «...tu mets une barre dans le milieu de la dizaine pis de l'unité, pis tu regardes ton chiffre avant (222|0)». V. ne satisfait donc pas le critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique relatif aux relations d'inclusion des unités de mesure de quantité, aucune opération n'apparaissant.

Plusieurs erreurs auront lieu au cours de l'entrevue lorsque V. doit effectuer un comptage, où il y a passage à la centaine ou à l'unité de mille. Elle ne semble pas non plus lier le comptage à une intention de dénombrement. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est pas satisfait.

V. choisit ensuite d'illustrer 2234 sur l'abaque avant de retrouver le nombre obtenu quand on enlève 2 dizaines. Elle retrouve le nombre 2214. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique est satisfait et le cardinal de la quantité est retrouvé en observant les anneaux de l'abaque.

Nous pouvons conclure que les relations d'équivalence semblent présentes, comme cela était le cas au cours de l'évaluation initiale. Toutefois, les actions de comptage et les opérations ne sont pas encore introduites pour résoudre les problèmes qui ont été posés. Les nombres sont toujours conçus comme une juxtaposition de chiffres et de quantités.

3.5.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[74]

Le dialogue permet de revoir la lecture de nombres puis de mettre en correspondance les positions et les enveloppes qui sont sur la

[74] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-5 à V.-8.

table. Cet échange favorise la construction de dizaines, de centaines, d'unités de mille. V. confond 10 centaines et 100. La confusion disparaît lorsque V. est invitée à prendre 10 centaines dans ses mains. Elle reconnaît ensuite les 20 centaines du nombre 2000, mais confond 50 centaines et 50 centaines de mille. Le manque de précision dans l'utilisation de ce vocabulaire et la distinction entre les positions des deux ordres est soulignée par l'orthopédagogue.

À l'aide des cartons 3, 1, 5 et 5, V. forme ensuite le nombre 5 531, en comparant les chiffres entre eux. L'ajout du carton sur lequel est écrit 0 permet de former le nombre 50 531. V. le lit en disant : «Cinq millions...». L'organisation des chiffres et des espaces du nombre est pourtant correcte. Un dialogue invite à réviser les positions des différents ordres. La relecture est correcte. V. est amenée à justifier le choix de 50 531 comme nombre le plus grand. Cette question favorise le déplacement du 0 et la construction de nouveaux nombres comme 55 031, 55 031, 55 130, 55 310. V. compare ainsi les nombres entre eux et identifie 55 310 comme étant le plus grand.

Un dialogue invite ensuite V. à faire correspondre aux chiffres, les unités de mesure de quantité qu'ils représentent, puis à comparer les unités de mesure de quantité entre elles, à construire par la suite une unité de mille et enfin, à prévoir la construction de la dizaine de mille. Une correspondance entre le nom du nombre et la quantité de dizaines de mille s'établit. V. explique ensuite que si elle oublie ce qu'est une dizaine de mille, elle pourra penser à grouper les chiffres par trois. Une intervention sur le contenu des unités de mesure de quantité apporte une précision à propos du contenu de la dizaine de mille. V. réutilise cette information pour former le nombre 96 420, après avoir prévu que le 0 serait ... à la position des unités de mille!

V. illustre ensuite le nombre 6420 sur l'abaque pour y enlever 30. Des problèmes surgissent puisqu'elle considère qu'il n'y a pas suffisamment de dizaines dans le nombre 6420. Elle enlève alors un anneau de la tige des centaines. Un dialogue sur le contenu des unités de mesure de quantité permet de reconnaître la relation d'équivalence entre 1 centaine et 10 dizaines, puis de compléter l'opération. Le nombre obtenu (6390) est lu 6 036, 3000, 6036, 6305, 3000 puis 6309. V. semble inverser intentionnellement le 9 et le 0. En effet, elle écrit les chiffres qui correspondent à la quantité d'anneaux sur l'abaque, en inversant le 0 et le 9. Elle justifie cette permutation en amenant l'exemple du nombre 5304, qui n'a aucun rapport avec la tâche.

Des relations d'équivalence entre 9 dizaines et le nombre 90, entre 3 dizaines et le nombre 30 ou 30 unités, entre 1 centaine et 10 dizaines puis 100 unités, complètent la discussion.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
reconnaît une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	-construit des groupes -compte par 1000 -compare des chiffres	-établit des relations d'équivalence entre les unités et la dizaine, entre les dizaines et la centaine -généralise les relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-compare les unités de mesure -utilise le tableau de numération -trouve le cardinal en adaptant le comptage	reconnaît la conservation des unités de mesure de quantité	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.5.2.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes

Au début de l'expérimentation didactique, la révision de la lecture de nombres permet à V. de faire correspondre les unités au chiffre 3 du nombre 2893. Une question l'amène à intégrer à cette formalisation, aux jetons puis à d'autres objets unitaires. Les dizaines, les centaines sont connues, mais cela ne semble pas être le cas des unités de mille qui ne sont identifiées comme «mille», qu'à la suite de leur construction avec 10 enveloppes de centaines. Le réfléchissement s'appuie alors sur la manipulation des enveloppes et des jetons et permet de faire le pont entre le nom des positions et les unités de mesure de quantité.

V. réutilise la connaissance de cette unité de mille pour prévoir la quantité de centaines dans 2 unités de mille, mais ne peut y arriver pour 5 unités de mille. La relation d'équivalence construite entre 20 centaines et 2000 a pu s'appuyer sur celle de l'équivalence entre 10 centaines et 1 unité de mille, mais elle n'a pu être réutilisée. Ainsi, V. juxtapose les deux mots (centaine et mille) et trouve 50 centaines de mille dans le nombre 5000, plutôt que de considérer les 50 centaines incluses dans les 5 unités de mille. Le dialogue tente d'amener V. à distinguer les unités des unités de mille, les dizaines des dizaines de mille, les centaines des centaines de mille, en demandant à V. de faire correspondre les positions aux enveloppes. On a alors insisté sur l'importance de la précision du vocabulaire.

La formation du nombre le plus grand à l'aide des chiffres 3, 5, 1 et 5 s'appuie sur la comparaison des chiffres entre eux. Ce réfléchissement permet la formation du nombre 5531. V. forme ensuite le nombre 50 531 lorsque lui est donné un 0. Elle présente une difficulté à lire le nombre formé. 50 531 est d'abord lu cinq millions. Le réfléchissement s'appuie sur sa connaissance des positions comme étant ordonnées de l'unité vers la dizaine, la centaine, le mille et le million. Le dialogue sollicite l'identification des ordres (unités, mille), ce qui amène la correction de la lecture.

V. explique ensuite que 50 531 est le nombre le plus grand qu'il est possible de former, en comparant 50 à 60. Elle ne pense pas, dans un premier temps, à une comparaison entre des nombres qu'il est possible de former avec les chiffres qu'elle a en main (55 031, 55 301, 55 310). Le réfléchissement s'appuie sur la comparaison entre une partie d'un nombre qu'il est possible de former (50 dans 50 531) et un autre (60) qui n'a aucun rapport avec la tâche. Invitée à former de nouveaux nombres le 0 est déplacé à différentes positions et les nombres sont comparés. V. arrive à la conclusion que le nombre le plus grand qu'il est possible de former est 55 310.

Ce tâtonnement introduit une erreur dans l'organisation des chiffres d'un nombre. Ainsi, V. groupe l'ordre des unités avec deux chiffres et l'ordre des mille avec 3 chiffres (550 31). Un retour sur l'organisation observée la semaine précédente, facilite l'identification des positions et la correction de l'organisation.

Le dialogue tente ensuite de faire comparer à V. les différentes unités de mesure de quantité à partir de l'observation de la position des différents chiffres. V. décrit ce qu'elle voit. Ainsi, le chiffre 0 représente le premier chiffre de la position de droite. Invitée à y faire correspondre le matériel, elle associe ensuite les positions aux enveloppes et aux jetons, puis compare les différentes unités de mesure de quantité entre elles. Devant la position de la dizaine de mille, V. montre les enveloppes de centaine. Elle ne peut imaginer la fabrication de la dizaine de mille, démontrant ici qu'elle n'a pas encore pris conscience de la régularité dix qui permet de construire les différents groupements. Une intuition est toutefois présente. Elle reconnaît les enveloppes des unités de mille qui correspondent à 2000, 3000...9000. L'addition d'une autre unité de mille la fait hésiter entre 20 000 et 10 000 : «Parce qu'il ne faut pas dire 10». Le dialogue permet de préciser que l'arrivée de la dixième enveloppe permet de construire une nouvelle unité de mesure de quantité : la dizaine de mille. Lorsqu'elle doit expliquer un peu plus tard ce qu'elle fera si un problème avec les dizaines de mille réapparaît, elle retourne à une règle de la lecture de nombres, on groupe par 3 (unités, dizaines, centaines). Le réfléchissement de V. ne semble pas concevoir que les positions sont aussi des unités de mesure de quantités, illustrées par des enveloppes et des jetons. Le dialogue et la manipulation ne semblent pas suffisants. Un nouveau retour sur le contenu des enveloppes semble clarifier la situation.

Suite à ce dialogue, V. prévoit la position du 0 pour former le nombre le plus grand possible avec de nouveaux chiffres (6, 9, 4, 2). Elle explique que le 0 devra être à la position des unités de mille, mais le pose immédiatement à la position de l'unité (96 420). Elle ne peut expliquer son choix autrement que par sa volonté de placer le 0 à la position des unités.

Le retrait du nombre 30 au nombre 6420 illustre comment il est important pour V. d'être en activité. Elle illustre le nombre 6420 sur l'abaque, retire une centaine et trouve le nombre 32. Le réfléchissement s'appuie sur une compréhension des chiffres du nombre comme étant autant de nombres. Elle ajoute : «Là des unités, j'en ai pas, ça fait que je peux pas l'enlever». Le dialogue amène une remise en question du retrait de la centaine. Elle explique : « Je peux pas l'enlever j'ai rien que 20. Tu m'as dit d'enlever 30, pis là j'ai rien que 20, ça fait que je peux pas l'enlever». Une discussion tente de la faire revenir sur le souvenir de ses manipulations et sur le contenu de la centaine. V. déplace alors un anneau de la tige des centaines sur la tige des dizaines. Le dialogue introduit la comparaison entre l'anneau de la tige des centaines sur l'abaque et l'enveloppe de centaines qui contient 10 dizaines. V. utilise comme réfléchissement la relation d'équivalence entre dizaine et centaine. Enfin elle transforme la centaine en 10 dizaines puis enlève 3 dizaines.

Devant l'illustration obtenue sur l'abaque (6390), elle perd à nouveau ses moyens. Elle lit successivement 6 036, 3000, 6036, 6305, 3000 puis 6309. La lecture des quantités représentées sur l'abaque ne lui est d'aucun secours, puisqu'elle écrit les chiffres 6309, permutant ainsi le 0 et le 9. La mise en correspondance entre la position des chiffres de l'écriture et la position des anneaux de l'abaque l'invitent à expliquer son inversion. «Faudrait que me mettes un 9 pis un 0 inversés». Elle explique son erreur en utilisant un exemple extérieur à la tâche. «Parce que...on marque 5 304, ben on marque 6 300 pis on met un 0 pis avant un 4». Une précision apportée quant à l'organisation conventionnelle permet la lecture correcte du nombre.

Des relations d'équivalence entre 9 dizaines et 90 unités s'établissent ensuite. Elle résume toutefois en expliquant : «Quand c'est une dizaine je vais dire que j'ajoute un 0, parce que c'est comme dans 10, 20, 30, 40, il y a toujours un 0 parce que c'est 30 dizaines mettons, 10 dizaines.» L'orthopédagogue attire son attention sur les deux noms que peuvent porter une même quantité 9 dizaines et 90 unités, une centaine et 10 dizaines et encore 100 unités.

3.5.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Les premiers réfléchissements de V. s'appuient sur la comparaison entre les chiffres et les groupes de chiffres d'un nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, puis sur une relation d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique. V. montre une difficulté à coordonner la composante abstraite du palier logico-physique et la composante procédurale du palier logico-mathématique. Ainsi, 50 centaines de mille formeraient le nombre 5000.

Plusieurs confusions naissent de cette difficulté à réaliser cette coordination. Une difficulté à lire le nombre construit (cinq millions), à construire une dizaine de mille, à enlever 30, puisqu'elle ne voit que 2 dizaines dans le nombre 6420 et à transformer la centaine en 10 dizaines.

Pour susciter des coordinations entre la composante abstraite du palier logico-physique et la composante procédurale du palier logico-mathématique, l'orthopédagogue tente de faciliter la comparaison entre les unités de mesure de quantité et la généralisation de la régularité de la base dix, ensuite entre le comptage des unités de mille et la construction d'unités de mesure de quantité et enfin entre l'établissement de relations d'équivalence et leur généralisation.

La grande quantité d'erreurs observées au cours d'une même tâche rend difficile l'aboutissement d'une réflexion. V. semble «réagir» avant d'«agir» devant une tâche. Elle n'a pas de temps d'arrêt et pose les actions avant que la consigne ne soit exprimée. Étant donné cette façon de travailler, V. appuie d'abord ses réfléchissements sur des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, avant d'utiliser les unités de mesure de quantité représentées par les chiffres d'un nombre.

3.5.3 L'arrondissement des nombres

3.5.3.1 Compréhension initiale[75] et finale[76]

V. arrondit le nombre 3105 à la centaine en donnant 3000 et en expliquant qu'elle arrondit le 1. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est pas satisfait.

V. semble habile avec le comptage. Elle compte par 1 et par 10 des nombres plus grands que 1000 sans problème. Elle soustrait mentalement 15-8 pour trouver le nombre de pas entre deux nombres. Nous pouvons donc penser que les habiletés de comptage pourraient contribuer à ses progrès en regard de ce critère.

Au cours de l'évaluation finale, V. arrondit correctement 3105 à 3100 et explique : «Si le chiffre est moins que 5, ça va rester des 0 pis s'il est plus haut que 5, ça va changer ton chiffre ici, ça va monter de 2». Elle semble satisfaire la composante procédurale du palier logico-mathématique mais elle compare les chiffres plutôt que les nombres. Ainsi, nous ne pouvons conclure que ce critère est satisfait.

Les habiletés de comptage ne sont plus aussi assurées. V. compte par 1 et par 10 sans problème. Le passage à la centaine est hésitant puisqu'après 1095, elle identifie 2005. Lors du double comptage, V. compte les nombres et non les pas entre 1008 et 1015. L'action de marcher lui permet d'identifier cette erreur. V. explique : «Si on compte le premier nombre ça ne donne pas le bon nombre». Elle ne semble pas s'apercevoir qu'elle ne fait pas de «pas» lorsqu'elle est à son point de départ. Le fait d'intro-

---

[75] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 5, p. V.-1 à V.-3.

[76] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 5, p. V.-20 à V.-23.

duire des habiletés de comptage dans la réalisation d'une tâche amènerait-il V. à régresser dans ces habiletés? S'agirait-il d'un problème qui apparaît lorsque des habiletés plus fines sont sollicitées?

3.5.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[77]

L'expérimentation didactique débute par la reconnaissance de la régularité de la base dix. V. explique ensuite sa conception de à propos de l'arrondissement de nombres. Pour elle, arrondir : «C'est changer de chiffres». Elle connaît bien la règle selon laquelle on compare des chiffres, (plus haut ou plus bas que 5) pour arrondir.

Le contexte du magasin et les billets de 10 de 100 et de 1000 qui lui sont remis, facilitent l'émergence des connaissances de V. Elle arrondit le nombre 149 à 150. Elle confond l'identification du nombre et de la position arrondie, disant «50» plutôt que dizaine. L'explication demandée à ce sujet, amène une rectification. «J'ai le 50 comme 10, ici j'ai 49 c'est pas l'unité, faut je vienne ici parce que 49 après c'est 50, ça fait que c'est aux dizaines».

V. arrondit ensuite le nombre 5064 à l'unité de mille puis à la centaine. Cette activité donne lieu à une autre, au sujet de l'écriture du nombre. Elle inscrit successivement 50 064, 5000 64, 5 00064. Un retour sur ses connaissances de la lecture de nombres, sur le tableau de numération et sur la composition des unités de mesure de quantité est nécessaire.

Le nombre 3 080 est arrondi à l'unité de mille (3000). Puis le

---

[77] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-8 à V.-12.

nombre 7 930 à 7 000 puis 8 000, en utilisant les billets de mille. Elle explique son choix en récitant la règle du 5 et en illustrant son propos par un exemple avec un nouveau nombre (5 800). Un dialogue l'invite à représenter avec des enveloppes les différentes unités de mesure de quantité, pour identifier la quantité négligeable par rapport au tout (5 000-5 800 et 5 800-6 000). Les nombres 5 200, 6 023 et 934 sont ensuite arrondis en comptant les billets, sans réutiliser la recherche de «l'autre» position.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
«arrondir c'est changer de chiffres»	compte par 1000, par 100, par 10	généralise la régularité de la base dix
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
utilise le tableau de numération	-conçoit les groupes comme unité de mesure de quantité -détermine la quantité négligeable par rapport au tout.	-arrondis un nombre -écrit un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.5.3.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes

Au début de l'expérimentation didactique, V. conçoit la notion d'arrondir comme étant une façon de changer les chiffres d'un nombre. Elle applique une règle (si le chiffre à côté de la position à arrondir est plus haut que 5, on met un chiffre plus haut (+1), s'il est plus bas que 5, on le garde). L'utilisation des billets de 100 et de 10 lui permettent d'arrondir le nombre

149 à 150 sans utiliser cette règle. À l'observation des billets, elle constate qu'elle vient d'arrondir à la dizaine plutôt qu'à l'unité, comme elle le croyait au départ. Son réfléchissement s'appuie toutefois sur la récitation de la comptine des nombres (après 49 c'est 50) plutôt que sur les billets utilisés (100 et 10).

Le nombre 5 064 d'abord arrondi à 5 000, puis à 5 100 lorsqu'elle tient compte du contexte du magasin. Elle appuie ainsi son réfléchissement sur l'application de la règle sans observer le matériel qu'elle manipule. «J'ai regardé, pis là c'est 5 064 mais s'il y avait un 0 avant les centaines, s'il y avait un 0 ça fait que j'ai su que c'était le chiffre avant le 0». Sa réflexion porte sur la comparaison entre les chiffres. «Parce que à cause du 0, c'est pas un 0 parce que j'ai mis un 1 pis le 100 parce que c'est plus bas là, fallait que je change mon chiffre pis là on met des 0 fait que ça dépend de mon chiffre». Elle réutilise ce raisonnement pour affirmer que 3 000 est l'unité de mille la plus près de 3 080.

Le nombre 5064 a été une occasion pour revoir l'écriture de nombres. En effet, V. appuie son réfléchissement sur une compréhension de l'écriture comme étant une juxtaposition de chiffres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Cela lui fait écrire le nombre 5 064 de diverses façons : 50 064, 5000 64, 5 00064, 500 064. Le dialogue favorise un retour vers la lecture de nombres et le tableau de numération. V. attribue ensuite les chiffres 4, 6 et 0 aux positions unité, dizaine et centaine. L'échange permet d'identifier la position du 5 comme étant toujours une unité, mais de l'ordre mille, par opposition à la dizaine ou la centaine de mille. Une coordination entre les ordres et les positions apparaît. V. réutilise cet apprentissage lorsqu'elle écrit le nombre 3 080. Elle explique le changement dans la lecture du nombre si elle ajoutait des zéros à côté du 3 : «Trois cent mille quatre-vingt».

Un autre problème survient au même moment. Pour V., les unités de mille contiennent des dizaines de mille. Le rappel de la composition de chacune des unités de mesure de quantité lui permet la correction. Cela illustre bien le réfléchissement de V. par rapport à l'écriture des chiffres d'un nombre. Elle fait appel à des positions spatiales qui ne sont pas coordonnées avec les unités de mesure de quantité.

Le nombre 7930 a été une occasion pour amener l'idée qu'il existe deux possibilités lorsqu'il est question d'arrondir à une position. Ici encore, V. utilise d'abord la règle du 5 en observant le chiffre à côté de celui à arrondir. Elle donne l'exemple de 5 000 comme étant l'unité de mille la plus près de 5 800. Le dialogue propose l'illustration du nombre de départ (5 enveloppes d'unités de mille et 8 enveloppes de centaines) puis de 5000. Une comparaison entre les centaines à enlever ou à ajouter pour arriver à 5000 puis à 6000, facilitent l'observation de la quantité négligeable par rapport à l'ensemble (5800 par rapport à 5000 puis à 6000). V. explique toutefois qu'il faut regarder le chiffre de la position à arrondir pour arrondir au plus loin, utilisant ainsi la règle qui s'appuie sur les changements de chiffres pour réfléchir.

Elle ne réutilise pas l'observation de la quantité négligeable par rapport au tout puisqu'elle arrondit ensuite 5 200 à 4 000. L'utilisation des billets de Monopoly la soutiennent pour se corriger et arrondir 6 023 à l'unité de mille (6000), 934 à la centaine (900) puis à la dizaine la plus près (930).

3.5.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

V. appuie ses réfléchissements d'abord sur la récitation de la comptine des nombres. L'abstraction réfléchissante de V. prend ensuite appui essentiellement sur la comparaison entre les chiffres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. L'introduction de la recherche de l'autre position (plus loin-plus près) permet de comparer les nombres, plutôt que les chiffres du nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette recherche n'a pas été sollicitée par la suite, mais V. choisit d'appuyer ensuite ses réfléchissements sur le comptage des billets de Monopoly de 10, de 100 et de 1000. La juxtaposition des chiffres dans l'écriture du nombre 5 064 a permis d'observer que pour V., chaque ordre est un nombre qui, juxtaposé à un autre ordre permet de former un nombre plus grand.

Le dialogue en amenant une coordination entre la lecture de nombres et le tableau de numération, permet d'expérimenter des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique. La manipulation des enveloppes et des jetons conjuguée à l'idée de deux dizaines où il est possible d'arrondir favorise l'introduction de l'observation de la quantité négligeable par rapport au tout, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique. Cette observation ne permet pas une réflexion du palier logico-mathématique, de la part de V.

Au cours de cette entrevue, sous prétexte de m'expliquer sa pensée, V. choisit des exemples qui lui posent de nouveaux problèmes. Par exemple, elle explique que 8 000 est l'unité de mille la plus près de 7 930 en prenant le nombre 5 800 et en l'arrondissant à 5 000. Les interventions cherchent d'abord à comprendre ce qu'elle dit, puis à suivre sa pensée. Cela semble provoquer une dispersion difficile à contrôler. V. a de la difficulté à construire une «réflexion» sur ses actions puisque ses explications, même lorsqu'elles s'appuient sur du matériel, la mènent vers de nouveaux sujets. La dispersion ne laisse pas apparaître les confrontations nécessaires. Lorsque ces confrontations se produisent, cela semble grandement inquiéter V. Pour elle, il semble important de trouver une réponse immédiate à une question.

3.5.4 L'écriture de nombres et la comparaison de quantités

3.5.4.1 Compréhension initiale[78] et finale[79]

Durant l'entrevue initiale, V. ordonne et écrit les nombres sans problème. L'apparition de la difficulté à écrire des nombres durant l'expérimentation didactique précédente justifie le thème de l'expérimentation didactique du jour.

V. considère la quantité 20 unités «plus petite» que la quantité 2 dizaines. L'écriture des deux quantités amène une nouvelle réflexion. Ces deux quantités seraient maintenant équivalentes. «2 dizaines, tu sais le 0 est pas là mais c'est comme s'il serait là pis le 20 unités ça donne pareil ça, tu marques le 2 pis le zéro ça fait l'unité». 20 dizaines est ensuite considéré équivalent à 20 unités : «Le 20 des dizaines ça fait tout le chiffre pis quand tu fais 20 unités ça fait rien que...mais non, ça fait le chiffre aussi...non il est plus petit...je le sais pas». L'expression 20 dizaines est ensuite reconnue équivalente à 2 centaines. Elle explique : «Parce que 20 dizaines quand tu le mets unités dizaine centaine, ça fait mais ça dépend de ton chiffre en avant là pis le 2 centaines aussi quand tu le mets dizaine, centaine je peux pas le dire parce que j'ai pas mon chiffre». Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est donc pas satisfait. Nous pouvons poser comme hypothèse que V. ne peut coordonner les chiffres et les unités de mesure de quantité

---

[78] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 5, p. V.-1 à V.-3.

[79] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 5, p. V.-20 à V.-23.

puisque la construction de ces dernières n'est pas complétée.

Au cours de l'entrevue finale, l'écriture de nombres ne pose pas de problème. La comparaison entre les unités de mesure n'est cependant pas réalisée correctement. Les quantités 20 et 2 dizaines sont reconnus comme équivalent mais, quelques minutes plus tard, elles sont reconnus inégales : «20 est plus gros que 2». À ce moment, seuls les chiffres sont retenus. V. transforme ensuite la consigne en changeant 2 dizaines pour 2 unités. Elle transforme aussi 20 dizaines en prenant 2 enveloppes de dizaines. Elle confond aussi 2 centaines et 20 centaines. V. ne satisfait pas le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique (compare des unités de mesure). L'ambivalence manifestée nous laisse croire toutefois qu'une construction est amorcée. Déjà le fait de transformer la consigne révèle une prise de conscience par rapport à une demande inhabituelle.

3.5.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[80]

Le tableau de numération est vu par V. comme un outil facilitant l'écriture des nombres. Le dialogue permet de s'arrêter sur l'invention et le rôle du zéro. L'écriture de plusieurs nombres ne pose pas de problème. 109, 200, 104, 85, 39 400 sont inscrits en «groupant par 3». 618, 706, 250, 180 et enfin 300 000 000 ne créent pas de difficulté particulière. Les nombres 3 300 et 107 280 sont écrits en les répétant au moment même où ils sont dictés. Cette méthode de travail fait l'objet d'une exploration de ses avantages et de ses inconvénients.

Le nombre 98 786 est ensuite écrit 88 486. Un dialogue, invitant V. à une plus grande fidélité de sa répétition. Cette interven-

---

[80] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-12 à V.-14.

tion est suffisante pour amener la correction. Les nombres 1 875 et 75 487 sont écrits sans problème.

Une comparaison entre le nombre 1875 et la quantité 1875 unités met en lumière les conceptions de V. «C'est le même chiffre... c'est la même place le 5 et le 5, ils sont à la même place, pareils, le 8, le 8 c'est pareil». Elle reconnaît les 18 centaines de ce nombre et explique l'existence des centaines à la position des unités de mille : «Parce que c'est des chiffres avant...c'est parce qu'en dedans de 875 c'est plus petit que 1000 pis dans 1000, il y a 875». Un dialogue permet un retour sur les représentations mentales de V. à propos des différentes unités de mesure de quantité et sur leurs relations d'inclusion. Ce dialogue ne permet pas de réutiliser les unités de mesure de quantité pour justifier les 754 centaines contenues dans le nombre 75 487. «Dans 75 000 il y a 487», explique-t-elle. Un nouveau dialogue favorise la reconnaissance des unités de mesure de quantité et leur relation d'inclusion.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupements.	-groupe les chiffres par 3 -compare les chiffres	établit des relations d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-utilise le tableau de numération	établit des relations d'inclusion	écrit des nombres de façon conventionnelle
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.5.4.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes

Dans un premier temps, V. dit grouper les chiffres par 3 lorsqu'elle doit écrire un nombre de cinq chiffres. Lorsqu'apparaît un nombre de 9 chiffres (300 000 000), elle construit un tableau de numération, identifie les positions et les ordres (unités, mille, million) et écrit le nombre correctement. Le réfléchissement s'appuie ici sur une coordination entre la convention d'écriture, rappelée au cours de l'expérimentation didactique précédente, et la méthode de travail afin de mémoriser le nombre entendu.

Au cours de cette tâche, V. est amenée à prendre conscience que son attention pourrait être perturbée par la répétition simultanée qu'elle fait des nombres dictés. Elle choisit de modifier sa procédure de mémorisation en ne répétant les nombres dictés qu'à la fin de leur séquence. La réflexion qui en émerge lui permet de visualiser le nombre entendu avant de l'écrire.

V. confond ensuite 88 000 et 98 000, malgré sa répétition correcte du nombre dicté (98 786). Les activités précédentes, en se centrant sur la convention d'écriture de nombre, n'ont pas invité V. à introduire l'idée de quantité qui sous-tend chacun des nombres. Le réfléchissement, en s'appuyant sur la coordination entre les règles de la convention d'écriture et la méthode de travail, ne permet pas l'introduction de la valeur de nombres. L'intervention attire donc l'attention de V. sur la transformation opérée entre ce qu'elle a répétée et ce qu'elle a écrit (88 786). L'erreur ne se reproduit pas par la suite.

La comparaison entre le nombre 1875 et 1875 unités permet d'observer que pour V., il y a équivalence parce que les chiffres qui les composent sont disposés de la même façon. Le réfléchissement s'appuie sur la comparaison entre les chiffres des deux nombres. La réflexion qui en émerge demeure au niveau de la convention d'écriture des nombres.

V. retrouve ensuite les 18 centaines qui composent le nombre 1875, en s'appuyant sur une règle apprise par coeur : isoler les chiffres jusqu'à la position demandée 18¦75, puis lire le nombre isolé. Le réfléchissement se fonde sur sa connaissance du tableau de numération. La réflexion introduit alors l'existence de centaines à la position des unités de mille en comparant les ordres (unité et mille) entre eux, à la manière d'une inclusion : «... dans 1000, il y a 875». Le réfléchissement se fonde sur la comparaison des deux ordres d'un même nombre. La réflexion qu'elle exprime indique qu'elle voit donc le nombre comme une composition de deux nombres. Un dialogue sur le «comment» on fabrique l'unité de mille a lieu. Il permet de vérifier le contenu de cette unité de mille et de reconnaître le chiffre 1 représente aussi des centaines.

Elle ne réutilise pas cette observation pour expliquer le nombre de centaines dans 75 487. Elle compare à nouveau les deux ordres (75 000 et 487). Le réfléchissement permet d'observer que V. a compris qu'il y a un phénomène d'inclusion. Cependant, plutôt que d'inclure les unités de mesure de quantité, elle inclut les groupes de chiffres. La réflexion qui en émerge est ainsi basée sur la comparaison entre l'ordre des unités et des mille, concevant à nouveau chacun d'eux comme des nombres. Le dialogue tente d'introduire l'idée de valeur sous les positions. V. décompose l'unité de mille en centaines mais ne peut décomposer la dizaine de mille en unités de mille où sont incluses des centaines. Elle croit qu'il s'agit de centaines de mille, juxtaposant ainsi les ordres (mille) aux groupements (centaine).

Le matériel (enveloppes) confronte V. à ses affirmations et lui permet de prendre conscience qu'elle n'utilise pas les enveloppes et les jetons pour solutionner les problèmes posés.

3.5.4.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de V. s'appuie, tout au long de l'expérimentation, sur des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique des nombres. Une coordination entre une connaissance du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, et une méthode de travail, facilite la concentration de V. Cette coordination n'est pas utilisée régulièrement, ce qui laisse apparaître des confusions. Juxtaposant les chiffres ou les groupes de chiffres (ordre), V. introduit des réflexions sur l'inclusion des chiffres de l'ordre des unités dans ceux de l'ordre des mille.

Le matériel confronte cette juxtaposition et favorise la prise de conscience de l'absence de ces unités de mesure de quantité dans les solutions apportées. Cette prise de conscience favorise une certaine prise en compte des unités de mesure de quantité représentées par les chiffres aux différentes positions, unités de mesure de quantité amenées par la reconstruction des unités de mille, puis des dizaines de mille.

3.5.5 La décomposition et recomposition de nombres

3.5.5.1 Compréhension initiale[81] et finale[82]

Durant l'évaluation initiale, V. illustre le nombre 202 en utilisant 10 enveloppes de dizaines qu'elle place dans une enveloppe de centaine. Elle ajoute une autre enveloppe de

[81] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 5, p. V.-1 à V.-3.

[82] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 5, p. V.-20 à V.-23.

centaine et deux enveloppes de dizaines. L'établissement d'une association entre les jetons et les unités est nécessaire pour amener une illustration correcte. Elle ne satisfait pas ce critère de la composante procédurale du palier logico-physique.

L'invariance de la quantité n'est pas reconnue immédiatement. V. croit que les dizaines qui ne sont plus dans l'enveloppe de centaines. «Il manque une centaine...elle n'est pas dedans je l'ai enlevé une enveloppe, ça me fait 102». Une précision entre défaire et enlever permet de reconnaître l'invariance. L'équivalence entre l'avoir de trois bonhommes (300 jetons, 2 paquets de cent jetons plus 100 jetons et enfin 3 paquets de 100 jetons) n'est pas reconnue. Pour V. le troisième bonhomme est le plus riche parce qu'il a trois paquets de 100 jetons. L'explication de V. amène la correction par la découverte de la pluralité de chacun des ensembles. V. explique que pour elle, dans un premier temps, 3 paquets de 100 faisaient 900. Elle ne satisfait pas les critères de la composante abstraite du palier logico-physique relatifs à l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et à l'équivalence entre des quantités organisées différemment.

Les décompositions proposées pour le nombre 709 sont multiples (7x100+9, 700+9, 700 unités+9, 7x100+9 unités). Ces décompositions ne comprennent pas toutefois, de compositions comme 70 dizaines. Ce critère de la composante formelle n'est donc pas satisfait. Nous pouvons poser comme hypothèse que pour V., l'absence de constructions abstraites des unités de mesure de quantité entrave le développement de ce critère de la numération positionnelle.

Au cours de l'entrevue finale, V. illustre le nombre 2220 avec l'abaque. Dans un premier temps, V. ne peut reconnaître l'invariance de la quantité, lorsque un anneau sur la tige des centaines est transformé en 10 anneaux sur la tige des dizaines.

Elle explique l'absence de l'invariance de la quantité en comptant les anneaux de l'abaque. Ce comptage est laborieux, mais il permet à V. de découvrir que la quantité est la même. Elle explique que ce qui l'a mêlée c'est : «Qu'il y en avait plus ici (sur la tige des dizaine)». Une deuxième expérience du genre sur l'abaque, où la centaine est transformée en dix dizaines, ne lui permet pas de reconnaître l'invariance de la quantité, à nouveau le comptage est nécessaire. L'invariance de la quantité est cependant reconnue lorsqu'elle est illustrée par des enveloppes. «Ce serait plus mêlant à dire parce qu'ils seraient tous pognés, il faudrait que tu les comptes une par une mais quand tu les as mis dans les enveloppes, c'est plus facile». V. satisfait ce critère de la composante abstraite du palier logico-physique lorsqu'elle utilise un matériel qui permet une correspondance entre les mots de la récitation de la comptine des nombres et l'illustration des groupements et des unités.

L'équivalence entre trois quantités (3 paquets de 100 macarons, 2 paquets de 100 plus 100 macarons, 300 macarons) est reconnue en retrouvant la pluralité des trois ensembles.

Elle recompose le nombre 709 en utilisant plusieurs décompositions proposées. L'addition de 70 dizaines et de 10 dizaines font 80 dizaines et représente le nombre 80. Le rappel des enveloppes est suffisant pour amener la correction et ajouter les cartes-nombres 70 dizaines et 9 unités. V. satisfait le critère de la composante formelle relatif à la décomposition.

Les nombreuses expériences de V. sur les différentes quantités semblent avoir permis des constructions procédurales, au sens où en présence d'un matériel comme les enveloppes et les jetons, V. compte, voit les changements, ce qui lui permet de réaliser sa tâche. Toutefois, ces constructions ne sont pas expliquées de manière à voir apparaître une réversibilité des transformations. Elles ne sont donc pas complétées par la construction de schèmes.

3.5.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[83]

La lecture de différentes décompositions amène l'identification des nombres qui leur correspondent. La quantité lue sur le premier carton amène un blocage. La quantité 51 centaines est mise en correspondance avec le nombre 51. Le dialogue et la manipulation des enveloppes permettent de construire des unités de mesure comme l'unité de mille et la centaine, d'introduire intuitivement la multiplication et l'addition répétée puis une coordination entre le nombre et les unités de mesure de quantité. Au terme de ce processus, V. explique que 51 centaines s'appelle 5100 : «Parce qu'ils ont collé les deux 0». Le dialogue lui permet de reconstituer ses actions.

V. fait ensuite correspondre 41 dizaines à 410 dizaines. La manipulation du matériel et le comptage ne lui permettent pas de reconsidérer cette conception. Le dialogue rend cependant possible l'identification de la quantité de jetons contenus dans les groupements, puis le comptage des jetons et la mise en correspondance entre jetons et unités et enfin entre unités et nom du nombre. V. retrouve ensuite le nom des nombres qui correspondent à 43 dizaines, 3 dizaines, 42 dizaines, 51 dizaines et 3 centaines, sans toutefois expliquer sa procédure.

Une nouvelle confusion surgit entre 5 dizaines et 50 dizaines. L'illustration et le dénombrement devront être complétés par la comparaison entre 5 dizaines et 50 dizaines, puis par l'explicitation d'un règle : le nom d'un nombre n'est jamais appelé unité même s'il les représente. La mise en correspondance entre 451 dizaines et le nombre 4 510 est réalisé au moyen de la multiplication par 10.

---

[83] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-14 à V.-17.

La recherche de nombres compris entre 402 et 513 permet d'observer une coupure entre l'écriture des nombres et l'écriture des unités de mesure de quantité. L'élimination des cartons 3 centaines, 42 dizaines, sous prétexte qu'ils ne sont pas «marqués avec 100», illustre cette coupure. Le dialogue permet d'introduire une relation d'équivalence que V. ne fait pas spontanément : il y a des centaines lorsqu'il y a 42 dizaines. V. reconnaît alors que soit le matériel, soit la multiplication devront précéder ses choix.

Elle réutilise cette observation pour identifier les nombres qui correspondent à 43 dizaines, 41 dizaines, 51 dizaines. Elle additionne correctement 40 dizaines et 11 unités (411), 4 dizaines et 5 dizaines (90) mais l'ajout de 3 dizaines au deux groupes de dizaines déjà additionné (90+3 dizaines) pose problème. Elle retrouve le nombre 103. L'identification de ce qui est dénombré (les unités) est suffisante pour corriger l'erreur (120), mais la procédure ne sera pas réutilisée.

L'ajout de 3 centaines au dernier nombre (120) lui donne 3120. La représentation mentale des unités de mesure devra être complétée par la manipulation pour amener une correction. V. croit avoir trop compté. Le dialogue l'amène à mettre en correspondance les unités de mesure et le tableau de numération et à prendre conscience de la valeur du nombre trouvé initialement.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupements.	compte par dix, par cent, par un construit des unités de mesure	-établit des relations d'équivalence entre les quantités -généralise les relations d'équivalence -reconnaît le principe de cardinal
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
trouve le cardinal en : -adaptant le comptage -additionnant -multipliant des unités de mesure -utilise le tableau de numération	-reconnaît la conservation des unités de mesure	-décompose et recompose un nombre. -associe les unités aux jetons
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.5.5.3 Comment évolue V. à travers les différentes composantes

Pour V., au départ, 51 centaines correspond au nombre 51. Elle ne tient compte que des chiffres de l'expression sans leur coordonner les unités de mesure de quantité que sont les centaines. Aucune procédure ne lui vient à l'esprit. Invitée à prendre les 51 enveloppes de centaines, elle dira que 10 centaines font le nombre 100. Le dialogue l'invite à déterminer le nombre de centaines contenues dans la première unité de mille, à prévoir le contenu des quatre autres unités de mille. Elle regroupe 5 enveloppes d'unités de mille devant elle, mais ne retrouve pas le nom du nombre qui correspond à cette quantité. Elle doit d'abord retrouver le nom du nombre qui correspond à l'enveloppe appelée centaine, puis elle découvre le nombre 5100. Le réfléchissement s'est donc déplacé des chiffres vers les unités de mesure de quantité, de celles-ci vers le comptage par 1000 et par 100. V. retient : «Qu'ils ont collé deux zéros».

V. ne réutilise pas cette succession de procédures et de coordinations pour identifier le nombre qui correspond à 41 dizaines. Elle fait correspondre 41 dizaines à 410 dizaines. Sollicitée à prendre 41 dizaines, le comptage qui suit (par 10) la confirme dans la solution trouvée. Elle ne trouve pas le cardinal de cette quantité. Elle est invitée à compter les jetons qui sont dans les centaines (comptage par 100). Le réfléchissement s'appuie sur le comptage des unités, mais l'absence de coordination avec la conservation des unités dans les dizaines ne permet pas de reconstruire une réflexion où 410 correspond à la fois aux jetons, aux unités et au nom du nombre. C'est grâce à une discussion sur ce qui est compté (les unités) qu'elle prend conscience de ce que veut dire «compter les jetons», puis qu'elle identifie la quantité de jetons comptés, pour substituer les unités aux jetons. Le réfléchissement a dû emprunter le chemin de la mise en correspondance entre unités et jetons pour comprendre que le nombre 410 représente 410 unités.

L'idée que le cardinal représente le dernier mot-nombre d'une quantité semble encore très éloignée de V., attachée à illustrer les groupements et à leur faire correspondre un nom, au sens d'une formalisation. Elle explique qu'elle réutilise cette compréhension pour retrouver le nombre qui correspond à 43 dizaines, 3 dizaines, 42 dizaines, 51 dizaines et 3 centaines.

Une nouvelle confusion survient lorsque V. fait correspondre 5 dizaines à 50 dizaines. Le réfléchissement, en s'appuyant sur le contenu des unités de mesure et leur contenant a provoqué une juxtaposition. La manipulation et le dénombrement des unités de mesure devront être coordonnés à un dialogue, où apparaît la comparaison entre ces deux quantités. Une prise de conscience, à l'effet que le nombre représente toujours la quantité totale d'unités, survient.

Parallèlement au dénombrement des enveloppes, V. nous avait parlé, dès l'apparition de 51 centaines, de la multiplication, un truc donné par son enseignante explique-t-elle. Cette procédure a été conservée et rappelée au cours des manipulations de dizaines (x10) et de centaines (x100). Cette procédure est reprise lorsque V. doit retrouver le cardinal de 451 dizaines. Elle multiplie par 10 en utilisant l'algorithme et retrouve 4 510. Le réfléchissement semble s'appuyer ici sur la connaissance de la dizaine comme une addition répétée de 10. La réflexion en est une multiplication par 10 des dizaines connues.

Pour retrouver un nombre entre 402 et 513, V. part à la recherche de cartes-nombres qui sont «dans les 100». Elle élimine ainsi plusieurs cartes (3 centaines, 42 dizaines, 51 centaines) où le mot «cent» n'apparaît pas de façon explicite. Son réfléchissement se fonde ainsi sur la recherche explicite de solutions. Le dialogue l'invite à rechercher le cardinal de 42 dizaines puis à observer les centaines présentes dans 420. La réflexion qui en émerge donne des moyens (des enveloppes ou de la multiplication) pour rechercher les informations données implicitement.

L'addition des différentes unités de mesure utilisées est difficile. Ainsi, 4 dizaines et 5 dizaines donne 90 mais l'ajout de 3 autres dizaines donne 103. Le réfléchissement s'est appuyé d'abord sur l'addition puis sur le comptage. Le questionnement permet d'observer que V. transforme le comptage par 10 en comptage par 1. Le dialogue, en lui demandant de retrouver ce qu'elle a compté, favorise l'identification des unités et la poursuite du comptage par 10, puis la reconnaissance de la somme (120).

V. ajoute 3 centaines au nombre 120 en juxtaposant le chiffre 3 au nombre déjà trouvé (120). Notons qu'elle ne s'est pas attardée à identifier la pluralité de 3 centaines. V. est ensuite questionnée sur les représentations mentales qu'elle se fait de 120 et de 3 centaines. Cela ne résout pas le problème de juxtaposition. La manipulation des trois enveloppes de centaines déplace son réfléchissement vers les unités de mesure de quantité. Elle attribue son erreur au comptage : «Parce que j'avais pas assez compté, j'avais compté trop, je veux dire». Le dialogue permet d'introduire l'utilisation du tableau de numération pour retrouver la source de l'erreur et l'influence de cette erreur sur la valeur du nombre. V. réutilise cette compréhension pour additionner 2 dizaines, 5 unités et 12 unités (37) en respectant leur position dans le tableau de numération.

3.5.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante prend appui essentiellement sur la comparaison entre les chiffres et la juxtaposition des quantités, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. Ainsi, la procédure de comptage ne vient pas à l'esprit de V. lorsqu'il s'agit de retrouver le cardinal d'une quantité. L'introduction des relations d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, coordonnée à la mise en correspondance entre jetons et unités et enfin au principe de cardinal, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, facilitent l'introduction du comptage, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. La réflexion de V. qui émerge ensuite ne retient pas l'action (compter), mais la convention du tableau de numération) : «Ils ont collé deux 0».

Cette réflexion n'est pas généralisable. V. juxtapose les unités de mesure et le comptage par 10 des enveloppes de dizaines, pour retrouver comme équivalent, 41 dizaines et 410 dizaines, 5 dizaines et 50 dizaines. La comparaison entre 5 dizaines et 50 dizaines s'ajoute.

V. peut alors réutiliser les coordinations entre relations d'équivalence et comptage, puis introduit la multiplication par 10, pour retrouver le nombre 4510, à partir de la quantité 451 dizaines.

Des changements par l'ajout favorisent l'établissement de coordinations entre les positions du tableau de numération et les opérations sur les unités de mesure de quantité, deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique. L'ajout de 3 dizaines au nombre 90 qui lui donne 102 et l'ajout de 3 centaines au nombre 120, où le résultat obtenu est 3 120, suscitent l'exploration de coordinations entre ces procédures du palier logico-mathématique.

Le dialogue l'invite à utiliser des moyens comme la manipulation d'enveloppes et l'utilisation des opérations, avant de proposer des solutions. La coordination de ces moyens n'est pas aisée, mais rend plus apparente les étapes intermédiaires lui permettant à V. de résoudre des problèmes. C'est ce qu'illustre la difficulté à additionner les unités de mesure.

3.5.6 Réseau sémantique

Cette expérimentation didactique, un peu particulière, invite l'enfant à parler de ses représentations mentales et de leurs relations. Le matériel est à sa disposition pour l'aider à se rappeler. Il est demandé à l'enfant de nommer tout ce qui lui vient à l'esprit lorsqu'on parle des nombres. Chacun des termes est alors inscrit sur un morceau de papier. Par la suite, l'enfant organise ces petits papiers en un premier réseau qu'il explique. Le dialogue qui suit permet d'enrichir le réseau et d'en construire une deuxième.

3.5.6.1 Compréhension initiale et finale

Contrairement aux autres expérimentations didactiques, celle-ci porte sur les liens que l'enfant établit entre les divers éléments qui apparaissent dans l'étude de la numération positionnelle. Nous pourrions parler de compréhension initiale et finale au début et à la fin de l'expérimentation didactique, mais elles sont l'essence même de cette expérimentation. Pour cette raison, elles n'ont pas été présentées de façon isolée.

3.5.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[84]

Les premiers mots que V. écrit sur ses cartons sont les symboles relatifs aux opérations et aux comparaisons (+, -, ÷, x, =, >, <), puis les mots chiffres, fractions, arrondir, unité, dizaine... centaine de million. Elle organise ensuite ses cartons en deux colonnes : la première, celle des symboles, la deuxième, celle des unités de mesure de quantité. Elle complète ce premier réseau en séparant les deux colonnes par les mots nombres, chiffres et fractions. V. explique ensuite les relations qu'elle établit entre les termes d'une même colonne, puis entre les termes des deux colonnes.

---

[84] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 5, p. V.-17 à V.-20.

1.-	8.nombres	10.fractions	11.arrondir
2.÷	9.chiffres		12.unités
3.+			13.dizaines
4.x			14.centaines
5.=			15.unités de mille
6.≥			16.dizaines de mille
7.≤			17.centaines de mille

D'abord, dans la première colonne, les symboles relatifs aux opérations : «...vont te faire trouver la réponse... d'additionner... d'enlever, ajouter, diviser ou... rester comme ça (=)», dit-elle. Par la suite, les termes chiffres et nombres entre les deux colonnes, sont associés : «Parce que dans le nombre, il y a des chiffres, pis dans des chiffres, il y a des nombres». V. reconnaît toutefois que la lecture de nombres est facilitée par le regroupement de chiffres. En ce qui concerne la deuxième colonne, elle explique que la relation entre arrondir et position de chiffres est de l'ordre de la fonction : «On arrondit à des positions». Enfin, les noms des unités de mesure de quantité sont conçus comme étant les représentants à la fois de positions et de valeurs.

Les explications amenées par V. favorisent peu à peu l'apparition de nouveaux mots comme ordonner, comparer, lire, symboles, enlever, ajouter, rajouter (quelle réserve à la multiplication), séparer, enveloppes et jetons. Ces termes donnent alors à V. l'occasion d'établir de nouvelles relations et de créer un second réseau.

Le nouveau tableau, remanié au fil de la discussion, n'est plus aussi dichotomique. Les opérations sont maintenant associées aux actions (ajouter, enlever...). Ces opérations précèdent alors les nombres. Ces derniers sont entourés par des activités comme la lecture et l'arrondissement de nombres, mais aussi par des notions de quantité comme les positions et les valeurs qui découlent des unités de mesure de quantité. Durant la manipulation et le déplacement des cartons, V. parle alors de la représentation de la quantité permise par les unités et les groupes. Au cours de son résumé final, elle découvre que les illustrations ou dessins permettent de faire un lien entre les nombres et les objets.

```
                                        lire mieux
                                        groupe de 3
ajouter partager ordonner comparer nombres arrondir
                                        objets
enlever rajouter          chiffres  position valeur
                                        unités   jetons
                              fractions dizaines
                                        centaines
                                        unités m.
                                        enveloppes
                                        dizaines de m.
                                        centaines de m.
```

3.5.6.3 <u>Comment évolue V. à travers les différentes composantes</u>

a) Un premier réseau en deux colonnes

V. regroupe les symboles et leur attribue une utilité dans les problèmes où il faut opérer. Le réfléchissement s'appuie sur sa connaissance des problèmes mathématiques et permet de construire la réflexion selon laquelle ces symboles permettent «de trouver la réponse». Elle ajoute ensuite que le signe = veut dire : «Rester comme ça» et illustre sa compréhension par une comparaison entre les nombres 16 et 500 puis entre 16 et 16.

Les termes chiffres et nombres qui séparent les deux colonnes, sont regroupés parce qu'ils s'incluent mutuellement. «Dans le nombre, il y a des chiffres, pis dans les chiffres, il y a des nombres», explique-t-elle. Le questionnement permet de savoir que la façon de placer les chiffres (par groupe de 3) facilite la lecture.

Elle explique les relations entre les termes de sa deuxième colonne en disant qu'aux positions correspondent des valeurs. Elle croit toutefois que des groupes de 2 permettent de former des dizaines, puis change d'idée et parle de groupes de 3. Un questionnement sur le nombre d'unités contenues dans une dizaine lui permet de distinguer les groupes d'objets des groupes de chiffres (ceux qui facilitent la lecture). La réflexion qui émerge est la mise en correspondance entre les groupes de 10 et la valeur positionnelle, puis entre les groupes de 3 et la lecture de nombres.

b) Un deuxième réseau

V. accroche ensuite un nouveau terme, «compare», à «chiffre» puis, devant mon questionnement, aux nombres. Cela reflète bien les manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, observées à maintes reprises au cours des expérimentations didactiques. Elle y juxtapose ensuite à cette comparaison, les symboles <, > et =.

Les symboles relatifs aux opérations sont ensuite mis en correspondance avec leurs sens (ajouter, enlever, rajouter, séparer) puis avec comparer. Dans un premier temps, elle établit une relation de comparaison entre - et + : «Parce que le - il est plus petit que le +». Le dialogue l'invite à faire correspondre les mots ajoute et enlève aux symboles, ce qui lui permet d'établir une relation qu'elle appelle «le contraire». La relation où la soustraction défait ce qui a été réalisée par l'addition est généralisée à la multiplication et la division.

Devant la grande quantité d'informations et de termes retrouvés durant l'expérimentation didactique, V. est invitée à résumer ce qu'elle retient de cette activité. Elle explique alors qu'on arrondit des nombres à des positions. Pour elle, les unités et les dizaines sont d'abord des nombres, puis des positions, et enfin représentent une valeur, à laquelle elle fait correspondre les enveloppes et les jetons. Elle explique d'ailleurs la composition des différentes unités de mesure au moyen de l'expression «groupe par 10». Ses réflexions lui permettent de passer successivement de l'action d'arrondir aux nombres, puis positions qui correspondent à des valeurs illustrées par du matériel et enfin à la reconnaissance de la régularité de la base de 10.

Le nombre l'invite ensuite à poser des actions comme comparer, ordonner, partager. Elle découvre ensuite, que les nombres représentent des objets qui peuvent s'ajouter ou se partager... Cette connaissance théorique sera complétée par un dialogue sur l'identification de ce que représente 149 ou 206 lorsqu'on a 149 poupées ou 206 voitures. C'est ainsi que naît la réflexion selon laquelle l'illustration permet de lier les objets aux nombres.

3.5.6.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de V. s'appuie sur différentes constructions effectuées au cours des expérimentations didactiques. Les thèmes de la lecture, de la composition de nombres, de la comparaison de nombres et de l'arrondissement des nombres apparaissent.

Cette expérimentation didactique permet de distinguer certaines manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, confondues avec des manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique : les groupes de 3 chiffres et les groupes de 10 objets, les opérations et la comparaison.

Ainsi, V. ne distingue pas les règles de la convention d'écriture et de lecture de celle de la régularité de la base 10 de notre système de numération. Le retour vers des manifestations de la composante intuitive et procédurale du palier logico-physique permet d'identifier le nombre d'unités qui composent la dizaine, puis de réintroduire le matériel utilisé pour illustrer les groupes (enveloppes et jetons) et enfin de reconnaître une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, la régularité de la base 10.

Pour V. les symboles relatifs aux opérations permettent de trouver des réponses et sont ordonnés du plus petit au plus grand (le moins (-) est plus petit que le plus (+)). L'introduction des gestes comme enlever ou ajouter, permet de détacher les réflexions de V. des formalisations et des procédures du palier logico-physique, pour construire des réversibilités entre les opérations, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique. Le nombre l'invite maintenant à poser des actions sur des objets.

L'intervention a tenté d'élargir et de clarifier les relations déjà établies. Un dialogue permet d'illustrer les conceptions, de les confronter et de les étendre à des manifestations du palier logico-mathématique.

3.5.7 Entrevue avec les enseignants

À la fin de l'expérience, une entrevue avec les deux enseignants a permis la discussion sur les deux points suivants. Ont-t-ils pu observer des changements dans la compréhension de V.. Des modifications dans les attitudes de V. par rapport au raisonnement sont-elles apparues?

Son enseignante de mathématique observe une amélioration dans les multiplications et les soustractions, en particulier lorsqu'elles ont un zéro. Pour l'enseignant de français une amélioration est perceptible dans la structuration de ses textes. V. démontre une plus grande confiance en elle qu'en avril, même si elle éprouve des difficultés à choisir des stratégies pour solutionner des problèmes. Elle reproduit encore plus facilement un modèle qu'elle ne prévoit les étapes d'une solution. Aucune lettre n'apparaît sur son bulletin descriptif de la dernière étape. Elle reprendra toutefois sa cinquième année, ce qui nous laisse croire que les progrès n'ont pas été jugés suffisants pour lui permettre de poursuivre sa scolarité selon le rythme normal.

V. est toutefois plus motivée, elle se sent soutenue, disent ses enseignants. Selon l'un d'eux, les interventions individuelles permettent de l'aider à «retourner à elle» et à se faire confiance. La durée de concentration de V. est encore très courte. Les difficultés avec sa mémoire persistent. Elle est souvent distraite par ses amis et elle s'arrête toujours très rapidement dans l'exécution d'une tâche. En classe, elle est la première à abandonner une tâche démontrant ainsi, selon eux, peu d'intérêt à réaliser une tâche correctement. Elle a conservé l'habitude de travailler vite pour montrer qu'elle peut suivre les autres. Elle accorde beaucoup d'importance à ce que pense ses amis. Le ritalin ne semble pas apporter les effets observables chez d'autres enfants, comme de permettre la concentration à une tâche, l'attention. V. contourne encore souvent la difficulté plutôt que de l'affronter. Les consignes écrites semblent la perdre alors que les consignes verbales ne sont pas toujours comprises.

3.6 Étude de cas de S.

Rappelons que la présentation faite dans cette section ne se veut pas une analyse, mais rapporte la façon dont l'enseignante voit l'enfant dans sa classe. S. est un garçon de cinquième année qui a 11:11 ans au moment de la première entrevue. Il a repris sa deuxième année. Il ne reçoit pas de suivi orthopédagogique actuellement. Il nous est référé pour une difficulté à exécuter des tâches reliées aux nombres naturels et aux entiers relatifs. En avril, il est candidat pour un classement dans une classe ressource. Son bulletin de la troisième étape indique un D (insatisfaisant) en ce qui concerne les nombres naturels.

En classe, S. est coopératif. Selon son enseignante, sa concentration est moyenne, mais il arrive à se mettre seul au travail. Il doute de ses capacité et éprouve des difficultés avec sa mémoire. Il comprend mieux les consignes données verbalement que lorsqu'elles sont écrites. Il est porté à juxtaposer les informations plutôt qu'à les coordonner pour en déduire de nouvelles. Il démontre ainsi qu'il a reçu des informations qui dépassent sa capacité d'intégration. Il éprouve des difficultés à organiser les étapes d'une solution.

3.6.1 La valeur positionnelle et les opérations

3.6.1.1 Compréhension initiale[85] et finale[86]

Rappelons que seulement une partie des critères évalués est rappportée à ce moment de l'analyse, ceux qui ont justifié le

[85] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 6, p. S.-1 à S.-3.

[86] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 6, p. S.-17 à S.-21.

choix de l'expérimentation didactique.

Au cours de l'entrevue initiale, S. explique hésitant, que le 0 du nombre 1098 veut dire «les centièmes». Ce manque d'assurance proviendrait, selon lui, d'une confusion entre centième et millième. La distinction faite par l'orthopédagogue entre centaine et centième permet d'apporter des précisions avant de poursuivre l'entrevue.

Les 2 du nombre 22 220 ne valent pas tous la même chose pour S. Il explique : «Parce qu'ils ne sont pas à la même position». Il semble satisfaire le critère de la composante formelle relatif à l'attribution d'une quantité plus ou moins grande aux différents chiffres d'un nombre. Toutefois, les relations d'inclusion entre les diverses unités de mesure de quantité ne sont pas présentes. Ainsi, S. ne peut retrouver la quantité de dizaines dans le nombre donné (22 220). Il en trouve 2, puis 20. Pour y retrouver la quantité d'unités, il regarde tous les chiffres en expliquant : «Ben, regarde je prends tous les chiffres...on met un 0».

Il enlève 20 au nombre 2234 en utilisant mentalement l'algorithme de la soustraction : «J'enlève un 2, je fais moins 2 au 3, pis là ça fait 1». S. semble donc avoir établit une équivalence entre 20 et 2 dizaines avant d'effectuer sa soustraction, puisque se sont bien 2 dizaines qu'il enlève alors que la question disait 20.

Suite à ces procédures et raisonnements, nous pouvons poser comme hypothèse que la construction des unités de mesure de quantité n'est pas complétée. C'est ce qui pourrait expliquer les confusions entre les termes utilisés pour les identifier. C'est aussi ce qui pourrait expliquer la procédure privilégiée pour retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans le nombre 22 220.

Durant l'évaluation finale, S. explique maladroitement, ce que le 0 du nombre 70 089 veut dire. «Il y en avait 10 ici (unité de mille), ça faisait une centaine, ça été 7 fois là, ça a donné 70, pis il fallait mettre un 0». Il sait que les 2 du nombre 2220 ne valent pas la même chose parce que leurs positions sont différentes. Il ajoute qu'il y a 222 dizaines, 2220 unités et 22 centaines dans ce nombre. Il explique : «Je compte combien il y a de dizaines ici (position de la dizaine), combien il y a dans la centaine de dizaines, il y en a 20, pis dans l'unité de mille, il y en a 200, pis la ça fait 222». Il satisfait ainsi le critère de la composante formelle en attribuant une valeur différente aux chiffres d'un nombre et sous-tend cette compréhension par une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, où les relations d'inclusion sont reconnues.

Lorsque S. doit enlever 20 au nombre 2234, il affirme d'abord qu'il ne peut le faire parce que je lui ai pas dit s'il s'agissait de dizaines ou d'unités. Ce problème résolu, il illustre le nombre 2234 sur l'abaque. Il enlève ensuite 2 anneaux de la tige des dizaines de l'abaque, en place 20 sur la tige des unités, échange les 20 unités contre 2 dizaines qu'il replace sur la tige des dizaines. Il obtient ainsi le nombre 2234. Pour lui, il ne semble pas y avoir d'incohérence à enlever 20 et à obtenir comme résultat le même nombre qu'au départ. S. explique : «Tu sais quand t'en as 10, ça fait une centaine, quand t'en as 10, ça fait une dizaine pis quand t'en as 20, ça fait 2 dizaines». Le dialogue qui s'engage permet d'observer une confusion entre transformer et enlever. Pour S. transformer des unités en dizaines, c'est enlever. Nous identifions ce problème et expérimentons par la suite l'action d'enlever. C'est alors qu'il arrive au nombre 2214. S. a voulu transformer 20 en 2 dizaines mais il a oublié la deuxième partie de la question (enlever). Il ajoutera par la suite 20 dizaines, en ajoutant 2 anneaux sur la tige des centaines et trouvera 2414. S. semble satisfaire ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique.

La compréhension des unités de mesure de quantité est complétée et s'opérationnalise par l'opération d'addition. Toutefois, une confusion entre les relations d'équivalence et le changement par le retrait persiste.

3.6.1.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[87]

Rappelons qu'à cette étape le vocabulaire utilisé s'appuie sur le modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Ce traitement des données permet au lecteur de retrouver le plan de l'expérimentation didactique réellement vécu.

L'expérimentation didactique débute par un dialogue sur les représentations que S. se fait des unités, des dizaines, des centaines et de leur contenu. La première tâche, où S. forme un nombre le plus grand possible à l'aide des chiffres 3, 5, 1 et 5 ne permet pas de réutiliser ces connaissances. S. forme le nombre 5531 en comparant les chiffres entre eux. Le dialogue permet de donner ensuite une valeur à chacune des unités de mesure puis de comparer les unités de mesure qu'elles représentent. L'ajout du zéro, comme chiffre supplémentaire pour former à nouveau le nombre le plus grand possible, l'invite à comparer les groupes de chiffres entre eux pour former le nombre 50 531. «50 c'est plus gros que 500...50 000 pis ça c'est rien que 531». S. compare ainsi les groupes de chiffres des deux ordres pour justifier son choix. Le dialogue qui suit l'amène à comparer les unités de mesure de quantité. Il déplace le zéro et compare les nombres 55 031 et 55 310. Il réutilise la procédure de comparaison des nombres entre eux pour former le nombre 96 420 par la suite. «Si je le mettrais là (le 0 à la centaine) ça ferait 96 000», explique-t-il.

---

[87] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-3 à S.-6.

La tâche suivante l'amène à se questionner sur la quantité que représente 30, avant d'enlever 30 au nombre 6420. Les enveloppes et les jetons favorisent la construction d'une relation d'équivalence entre 30 et 3 dizaines. L'opération de soustraction laisse apparaître une confusion entre le changement par le retrait et la relation d'équivalence entre 1 centaine et 10 dizaines. S. obtient 6300. L'illustration de 6420 sur l'abaque doit être complétée par celle des enveloppes et des jetons pour permettre d'établir l'équivalence entre 1 centaine et 10 dizaines, plutôt qu'entre 1 centaine et 1 dizaine, puis de réaliser l'emprunt. S. explique sa confusion : «À la place de mettre les 9 là (à la position des dizaines), j'en ai mis 1 là (à la position des centaines), ça fait un 0 (à la position des centaines)».

Les tâches suivantes favorisent la réutilisation de cette compréhension. Il lui est demandé d'ajouter 200 à 6390, ce qu'il réalise sans difficulté. L'ajout de 41 dizaines au nombre 6590 pose problème. À nouveau, une confusion apparaît entre la relation d'équivalence (10 dizaines et 1 centaine) et la relation de changement par l'ajout. Une nouvelle difficulté surgit lorsqu'il doit illustrer 41 dizaines. Il montre 5 enveloppes de dizaines. Le dialogue qui s'engage insiste sur la clarification de l'équivalence entre 41 dizaines et sa pluralité, 410. Il explique sa confusion ainsi : «Je les avais toutes mis ici là (aux dizaines). J'avais mis 41».

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupes	compare les chiffres et les groupes de chiffres «50 est plus gros que 500, 50 000...»	établit des relations d'équivalence 1 centaine=10 dizaine, 1 dizaine= 10 unités, 30=3 dizaines,
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
compare les nombres 55 031, 55 310	invariance de l'unité et de la dizaine comme unité de mesure établit des relations d'inclusion	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.6.1.3 <u>Comment évolue S. à travers les différentes composantes</u>

Rappelons que le vocabulaire et la grille d'analyse correspondent maintenant au modèle de l'équilibration de Piaget. C'est ici qu'il est possible d'observer le mouvement dynamique permis par l'abstraction réfléchissante.

S. compare d'abord les chiffres entre eux pour former le nombre 5531. Lors de l'introduction du zéro, la comparaison entre les chiffres du nombre n'est pas réutilisée. S. semble concevoir chacun des ordres (mille et unité) comme des nombres différents, puisqu'il les compare entre eux pour déterminer le nombre le plus grand possible. Son réfléchissement s'appuie ainsi sur sa compréhension des groupes de chiffres comme constituant autant de nombres, ce qui favorise une réflexion où apparaissent des nombres dans le nombre 50 531. «50 c'est plus gros que 500...». Le dialogue amène S. à comparer les unités de mesure entre elles, à déterminer la plus petite (les unités) puis à comparer les nombres entre eux. Cette intervention permet à S. de savoir quoi comparer (les nombres, les unités de mesure) et comment le faire (le tâtonnement ou la comparaison entre les unités de mesure). S réalise ensuite que : «...mettons quand je le mets là (à la centaine) ça fait 55 031, pis si je le mets là, ça fait 55 310». Le réfléchissement s'appuie ainsi sur la comparaison entre les différents nombres qu'il est possible de former. Sa réflexion prend alors en compte le nombre entier. S. réutilise cette réflexion dans une situation semblable. Ainsi, il compare les nombres qu'il est possible de former en déplaçant le 0, puis forme les nombres 96 042 et 96 420.

Le cas du retrait de 30 au nombre 6420 laisse apparaître deux confusions. Une première surgit entre le nombre 30 et l'unité de mesure de quantité (30 dizaines). Une deuxième, où une transformation d'une centaine en 10 dizaines est considérée par S. comme le déplacement d'une centaine à la position des dizaines. Prenons chacun des cas isolément.

Le nombre 30 est d'abord reconnu comme étant «des dizaines». S. expose ensuite son raisonnement : «Dans une dizaine, il y en a 10, pour faire 30, il faut 30 enveloppes...3 enveloppes comme ça (dizaines)». Ainsi, il appuie d'abord son réfléchissement sur la quantité 30, puis le déplace vers le contenu des enveloppes qu'il a devant lui. Il s'arrête à une relation d'équivalence, où la quantité 30 est contenu dans 3 dizaines, une invariance de la quantité quelque soit sa disposition.

S. enlève ensuite 2 au nombre 6 420 et le remplace par 0, obtenant 6 400. Il enlève ensuite 1 à 4 en expliquant : «...faudrait que j'en enlève à lui (la centaine) ... là c'était un 4 là (6 400) c'est devenu un 3 (6 300), pis là ça y en donnerait à lui (6 300) ... 10, là je lui en enlèverais ça ferait 30, le 30 dizaines pis là je mettrais un 0». La relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine est oubliée au profit du changement amené par le retrait. Le premier réfléchissement de S. s'appuie sur le retrait des chiffres comme signes (2-2=0). N'ayant plus de chiffre à la position des dizaines, S. tente «d'emprunter». Il se tourne vers la position des centaines, retire une centaine puis la transforme (10 dizaines). Des 10 dizaines, il veut enlever 1 dizaine mais retire 30 dizaines.

Ainsi 30-30=0 et le résultat obtenu est 6 300.

L'illustration sur l'abaque ne permet pas à S. de comprendre l'emprunt. La quantité sous-tendue par l'anneau sur la tige des centaines est aussi formelle que la quantité représentée par les chiffres. S. déplace un anneau de la tige des centaines pour le placer sur la tige des dizaines. Le dialogue l'invite alors à illustrer l'opération à effectuer au moyen des enveloppes et des jetons. La correspondance entre l'abaque et les enveloppes, matériel qui permet la correspondance bi-univoque entre les unités de mesure de quantité et la comptine des nombres, invite S. à transformer la centaine en 10 dizaines avant réaliser la soustraction d'une seule dizaine.

Le dialogue a donc tenté de déplacer le réfléchissement vers la relation d'équivalence mais la réflexion qui en émerge est encore très liée aux symboles. «À la place de mettre les 9 là (dizaines), j'en ai mis rien que 1, là ça fait un 0».

Si l'ajout de 200 est immédiatement mis en correspondance avec les deux anneaux de la tige des centaines de l'abaque, l'ajout de 41 dizaines au nombre 6 590 pose problème. S. ne semble pas envisager la possibilité d'introduire une étape intermédiaire (déterminer ce qu'est 41 dizaines) avant résoudre le problème. S. ajoute immédiatement une dizaine, transforme ensuite les 10 dizaines obtenues en une centaine, puis ajoute 3 centaines. Il obtient donc le nombre 6 900. Il explique qu'il a ajouté la quatrième centaine au moment où il établissait la relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine. Son réfléchissement s'appuie ainsi sur la substitution l'ajout par une relation d'équivalence entre 1 centaine et 10 dizaines.

Le dialogue invite S. à chercher le cardinal qui correspond à la quantité 41 dizaines d'abord. Une confusion entre 41 dizaines et 5 dizaines apparaît. S. explique son choix en comptant par 10 les quatre dizaines : «40 dizaines», dit-il. Son réfléchissement s'appuie sur la compression des deux chiffres à la position des dizaines : «Je les avais toutes mis ici là (dizaines). La réflexion qui en émerge est illustré par les 5 dizaines qu'il prend pour montrer 41 dizaines.

Un dialogue permet de préciser que le résultat du comptage ne correspond pas à 40 dizaines. S. reconnaît alors les 40 unités. Il confond ensuite 1 dizaine et 10 unités. Suite à l'identification de l'enveloppe de dizaine comme étant <u>une</u> dizaine, il retrouve les 41 dizaines. Ainsi 41 dizaines = 410. Le dialogue l'invite à préciser que la dizaine est une unité de mesure de quantité, à considérer les relations d'équivalence possibles entre les dizaines et les centaines puis entre les dizaines et les unités. Le réfléchissement se déplace ainsi, de la compression des chiffres vers les relations d'équivalence entre les unités de mesure de quantités.

3.6.1.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de S. évolue de comparaisons entre les chiffres et les groupes de chiffres d'un même nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, vers la comparaison entre les nombres puis entre les unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique est généralisée pour la formation du nombre 96 420.

Les opérations permettent une réutilisation des unités de mesure de quantité, en introduisant l'apport de relations d'équivalence et leur généralisation. Les réfléchissements se fondent d'abord sur une collision entre le cardinal et sa mesure (30=30 dizaines), collision issue d'une coordination incomplète entre des manifestations de la composante procédurale et abstraite du palier logico-physique. Cette coordination réalisée, une difficulté à coordonner une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique et une composante abstraite du palier logico-physique apparaît. Un anneau de la tige des centaines est déplacé sur la tige des dizaines, sans que soit respectée la relation entre dizaine et unité. Une deuxième difficulté à coordonner ces composantes apparaît lorsque S. ne distingue pas la relation d'équivalence du changement par l'ajout. Il considère qu'une centaine a été ajoutée au moment de la transformation de 10 dizaines en 1 centaine.

Le dialogue invite S. à illustrer les actions successives au moyen d'enveloppes et de jetons, à identifier la dizaine comme unité de mesure distincte, à établir des relations d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine, à généraliser les relations d'équivalence.

3.6.2. La décomposition et la recomposition de nombres

3.6.2.1 Compréhension initiale[88] et finale[89]

Durant l'évaluation initiale, S. décompose le nombre 709 en utilisant les cartes 7x100 et 9, 7 centaines et 9 unités, 700 et 9, 700 unités et 9 unités, mais ne peut concevoir que ce «et» qu'il dit «pis», représente une opération mathématique et ce, même si les quatre opérations sont énumérées. Il complète la décomposition en prenant 70 dizaines et 9 unités qu'il appelle d'abord 7 dizaines, puis le délaisse sous prétexte que cela ne

[88] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 6, p. S.-1 à S.-3.

[89] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 6, p. S.-17 à S.-21.

fait pas 700. S. ne satisfait pas le critère de la composante formelle relatif à la décomposition. Nous pouvons poser comme hypothèse qu'étant donné que les opérations ne permettent pas à S. de réunir des quantités, il ne choisit que des quantités qui peuvent être juxtaposées.

Durant l'évaluation finale, S. décompose le nombre 709 en utilisant toutes les possibilités offertes, y incluant le carton 70 dizaines, quantité vue comme correspondant au nombre 700. Il pose les différents cartons en identifiant l'opération à effectuer : «700 plus 7...7 fois 100 plus 9, 70 dizaines plus 9...700 unités avec 9 unités, 7 centaines avec 9 ça fait 709, 700 avec 9». Il satisfait le critère de la composante formelle relatif à la décomposition. Les opérations et les relations d'inclusion des unités de mesure de quantité font maintenant parti de sa construction de nombres. Ainsi, les quantités ne sont plus juxtaposées mais réunies ou retirées.

3.6.2.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[90]

L'expérimentation didactique débute par un dialogue sur les représentations mentales que S. se fait des différentes unités de mesure de quantité. Le rappel du matériel utilisé, pour illustrer les différents groupements, facilite le dialogue sur ses représentations mentales. S. est invité à les utiliser pour trouver des solutions aux problèmes posés. Il illustre ensuite avec facilité la décomposition de nombres en réalisant deux décompositions pour le nombre 2 234.

Il est amené à retrouver le nombre qui correspond à différentes quantités inscrites sur des cartons, par exemple 2 unités, 40

[90] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-6 à S.-8.

dizaines, 41 dizaines. S. utilise trois procédures différentes. D'abord, il explique que 40 dizaines correspond à 4 centaines : «...dans 10 ça fait une centaine, pis là il y en a 4, ça fait 4 diz...4 centaines». Ensuite, pour retrouver le nombre qui correspond à 51 centaines, S. reprend le même raisonnement, qu'il semble adapter : «Pour faire une centaine, ça prend 10 dizaines pis là, il y en a 51 ça fait 5100». Enfin, pour retrouver le nombre qui correspond à 452 dizaines il explique : «...j'ai mis un 0 à l'unité».

Trouver des nombres compris entre 402 et 513 permet à S. de coordonner des relations d'équivalence et des opérations d'addition. Si la réunion de 3 dizaines, 10 unités et 3 unités donne d'abord 403, selon lui, l'explication qu'il amène par la suite lui permet de corriger son erreur. Un dialogue sur la source de l'erreur et la façon de l'éviter lui permet de choisir de se représenter mentalement les différentes unités de mesure de quantité avant de donner sa solution. Il réutilise cette réflexion en additionnant 3 centaines, 5 dizaines, 4 dizaines et 3 dizaines pour retrouver le nombre 420.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupes	construit une centaine avec dix dizaines, une dizaine avec dix unités	établit des relations d'équivalence généralise la relation d'équivalence
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
additionne différentes unités de mesure utilise le tableau de numération	conserve la dizaine comme unité de mesure de quantité	décompose et recompose un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.6.2.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes

S. décompose d'abord le nombre 2234 de deux façons :
2234= 2x1000+2x100+3x10+4
2234= 1x1000+1x1000+1x100+1x100+1x10+1x10+1x10+4.
Il recompose ensuite un nombre à partir de différentes décompositions inscrites sur des cartes. Trois procédures différentes sont utilisées et l'une d'entre elle a été majorée. Examinons le détail de ses raisonnements.

Premièrement, pour S., 2 unités, 40 dizaines, 41 dizaines... correspondent aux nombres 2, 400 et 410. Il appuie son réfléchissement sur les unités de mesure de quantité que sont les dizaines, établit une relation d'équivalence entre 10 dizaines et une centaine, puis effectue une opération de multiplication. Il explique : «...dans 10 ça fait une centaine, pis là il y en a 4, ça fait 4 diz...4 centaines».

Deuxièmement, il réutilise ces coordinations pour retrouver le nombre qui correspond à 51 centaines en reconstruisant les unités de mesure de quantité que sont les centaines. Il généralise alors la relation d'équivalence entre centaine et unité de mille (10 centaines et 1000, 50 centaines et 5000). Ainsi, une majoration de sa compréhension des unités de mesure de quantité apparaît. Il fait correspondre le nombre 5100 à 51 centaines. «...pour faire une centaine, ça prend 10 dizaines pis là, il y en a 51 ça fait 5... mille, là pis plus 1 là je le laisse aux centaines». Le vocabulaire est précisé, en reprenant sa phrase avec les mots «unité de mille composé de 10 centaines».

Troisièmement, une autre procédure est utilisée pour faire correspondre le nombre 4520 à la quantité 452 dizaines. S. s'appuie ici sur sa connaissance du tableau de numération, où la position des unités suit celle des dizaines. Il explique : «Ben je les ai laissées comme ça sauf que j'ai mis un 0 là (unité)...

après la dizaine il n'y a qu'un 0».

La comparaison entre les nombres 402 et 513, permet à S. de retrouver des relations d'équivalence et de coordonner l'une d'entre elle avec l'opération d'addition. Il identifie ainsi les nombres 430 (43 dizaines), 404 (40 dizaines et 4 unités), 410 (41 dizaines) et 403 (3 dizaines, 10 unités, 3 unités). Pour ce dernier nombre, S. semble avoir à la fois additionné et juxtaposé les cartons (30+10=40 et juxtapose 3, 403). Son réfléchissement s'appuie d'abord ici sur une juxtaposition de la relation d'équivalence et de l'addition. Il explique ensuite : «3 dizaines, ça fait 30..., 10 unités a fait 10...ça fait 40 plus 3 ça fait...ça fait 43». Il semble généraliser l'erreur où 10 dizaines valent 10 unités, ainsi 40 devient 40 dizaines. Il explique sa confusion. «C'est les...les unités là...ça fait rien que 40, j'en ai pas assez pris de dizaines».

S. réutilise la coordination entre les relations d'équivalence et l'opération d'addition pour retrouver le nombre 510 (51 dizaines) et le nombre 420 (3 centaines, 5 dizaines, 4 dizaines, 3 dizaines).

3.6.2.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de S. évolue surtout au niveau de la coordination entre les relations d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et les opérations d'addition, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Les réfléchissements de S. s'appuient ensuite sur la généralisation des relations d'équivalence et la généralisation de la régularité de la base 10, de nouvelles manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique, ce qui laissent apparaître l'opération de multiplication.

Trouver un nombre compris entre 402 et 513 favorise la réutilisation de ces manifestations dans un nouveau contexte. La coordination entre la généralisation de relations d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et l'addition, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, est d'abord incomplète. Un glissement survient, provoquant une juxtaposition des dizaines et des unités (403). La demande d'explication est suffisante pour corriger l'erreur. S. redevient attentif aux coordinations, distinguant les relations d'équivalence des changements par l'ajout.

Le dialogue sollicite l'utilisation des représentations mentales de S. et les explications qui justifient les solutions trouvées.

3.6.3 La comparaison et les opérations entre les nombres

3.6.3.1 Compréhension initiale[91] et finale[92]

Durant l'entrevue initiale, la quantité 2 dizaines, que S. appelle d'abord 2 dixièmes, est considérée égale à 20 unités. Par la suite S. croit que 20 dizaines représentent une quantité plus petite que 2 centaines, sans pouvoir expliquer pourquoi. Il croit, au même moment que la quantité 20 dizaines est égale à 20 unités. Ces observations nous laissent croire que S. s'arrête tantôt aux chiffres sans les coordonner avec les mesures de quantité, tantôt aux unités de mesure de quantité sans les coordonner avec le nombre. Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique n'est donc pas satisfait. Nous

[91] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 6, p. S.-1 à S.-3.

[92] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 6, p. S.-17 à S.-21.

pouvons poser comme hypothèse que l'absence de coordination entre nombre et unités de mesure de quantité entrave l'introduction des opérations dans la construction d'une compréhension de la numération positionnelle. En effet, le nombre apparaît au cours d'une action de comptage. Ce geste pourrait être à la naissance du geste du palier logico-mathématique qu'est l'addition.

Durant l'évaluation finale, pour S. 20 unités et 2 dizaines sont équivalents. Il explique : «Quand t'as 20 unités, 10 ça fait 1 dizaine pis les 10 autres, ça fait une autre dizaine pis là, ça fait 20». La quantité 20 dizaines est considérée plus grande que 20 unités parce que : «20 dizaines là, j'en ai 20, j'en enlève 10, ça me fait 1 centaine, j'en enlève 10 autres, ça m'en fait une autre». 20 dizaines est alors équivalent à 2 centaines : «...j'en enlève 10, là ça m'en fait une, là j'en enlève 10 autres, ça m'en fait une». De plus, l'équivalence entre 20 centaines et 2000 est reconnue : «J'ai 20 dizaines, j'en enlève 10, ça m'en fait 1, j'en enlève 10 autres, ça m'en fait une autre pis là...2...2000, ça fait 2000, pis 20 centaines ça fait 2000». Ce critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique est satisfait.

La comparaison s'appuie maintenant soit sur une coordination entre nombre et unités de mesure de quantité, soit sur une coordination entre les unités de mesure de quantité. Les relations d'équivalence sont généralisées. S. dit qu'il «enlève» plutôt que «transforme» les différentes unités de mesure de quantité. Ce geste opératoire permet la comparaison entre les quantités.

3.6.3.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[93]

L'expérimentation didactique débute par le rappel de la représentation mentale que S. se fait des différentes unités de mesure de quantité et de leur contenu. Le dialogue lui permet de découvrir la régularité des positions à travers les ordres (mille, million).

Dans un premier temps, S. croit que le nombre 908 est plus grand que la quantité représentée par 908 unités. Un dialogue sur les représentations mentales du nombre 908 et des 908 unités ne lui permet pas de reconnaître l'équivalence entre ces deux quantités. L'illustration, au moyen de l'abaque, permet d'observer que ces deux quantités sont représentées de la même manière. S. n'est cependant pas convaincu. L'illustration par des enveloppes et des jetons lui fait reconnaître, après un moment de réflexion, l'équivalence entre ces deux quantités. «C'est rien qu'ils sont pas enveloppés en paquets, en paquets de 100».

S. distingue par la suite la relation d'équivalence entre 908 et 908 unités, de celles d'addition et de soustraction en expliquant que pour que ce ne soit plus 908 : «Il aurait fallu ajouter ou enlever».

Le retrait de 20 dizaines au nombre 908 laisse voir la confusion qui existe 20 dizaines et 2 dizaines. Le dialogue et la manipulation des enveloppes permettent d'apporter des précisions. Elles amènent la correction, sans pouvoir identifier la source de l'erreur.

L'ajout de 400 unités puis le retrait de 14 dizaines sont réalisés correctement en identifiant les représentations mentales

[93] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-8 à S.-11.

que S. se fait de ces quantités.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux différents groupes	compte des groupes différents	reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à son organisation établit des relation d'équivalence entre des quantités
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
-additionne, soustrait des unités de mesure différentes -identifie les positions et les ordres -compare des nombres et des unités de mesure	reconnaît des relations d'inclusion -reconnaît la conservation des unités de mesure de quantité.	attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.6.3.3 Comment a évolué S. à travers les différentes composantes

Au départ, pour S. le nombre ne semble pas être le représentant d'un ensemble d'unités. Ainsi, 908 et 908 unités sont différents. Le réfléchissement de S. semble pourtant s'appuyer sur le contenu des différentes unités de mesure de quantité. Il explique : «Parce que 908 unités faut toute que t'abaisses le 9 là pis que t'ailles les mettre chez les dizaines pour faire les dizaines c'est à cause c'est des unités. Faut que tu mettes des dizaines comme celui-là t'as 9 centaines, 0 dizaine pis 8 unités». Un glissement semble se produire lorsqu'il recompose l'action. Il reconstruit la séquence à partir de la dizaine. La réflexion pourrait avoir été influencée par cette reconstruction, où l'unité est oubliée.

Le dialogue invite S. à illustrer la quantité 908 unités sur l'abaque. La nécessité d'organiser les anneaux sur l'abaque pour que soit possible cette illustration des 908 unités et l'observation de l'équivalence entre les deux illustrations (908 et 908 unités) ne semble pas convaincante pour S. Une deuxième illustration, réalisée au moyen des enveloppes et des jetons, rend la première observation crédible. Les jetons, représentant les unités, sont visibles. S. explique d'ailleurs qu'il <u>l'a vu</u>. Il peut alors accepter l'idée que des termes différents (908 et 908 unités) puissent représenter la même quantité et que cette dernière n'est modifiée que par le retrait ou l'ajout. La reconstruction de l'invariance de la quantité semble nécessaire à la reconnaissance de la relation d'équivalence entre le nombre 908 et la quantité 908 unités.

La relation d'équivalence n'est pas réutilisée par la suite. S. confond 2 dizaines et 20 dizaines lors d'une opération de soustraction. Le réfléchissement s'appuie sur les chiffres de l'expression 20 dizaines et laisse tomber les unités de mesure de quantité. Ainsi, 908 moins 20 dizaines lui donne 888. Le dialogue facilite la prise de conscience du paquet de 10 comme étant <u>une</u> dizaine puis favorise la correction. La relation d'équivalence est ensuite réutilisée pour être coordonnée avec une opération d'addition. 400 unités ajoutées au nombre 708 donnent une somme de 1 108.

Le retrait de 14 dizaines au nombre 1 108 est réalisé sans y faire correspondre la quantité (140). S. enlève les groupements de dizaines après avoir réalisé un échange entre les unités de mille et les centaines et retrouve le nombre 960. Son réfléchissement s'appuie donc non seulement sur la relation d'équivalence entre les dizaines et les centaines mais aussi sur celle entre les centaines et les unités de mille, avant d'opérer le retrait.

L'explication qu'il propose ensuite l'amène à un autre résultat (68) qu'il ne remet pas en question. «Là t'as rien que 10 (1108)...dix dizaines...pis là ici, ça revient à 0 (1008), là ça revient à 1 là (1108), ça fait 10 (1108)...faut que j'aille à lui (1108)...pour en enlever...pour en échanger... pis là ça va être 10 centaines...pis là j'en enlève à lui (1108)...pis là ça vient à lui (1108), là ça fait 20 (dizaines) ici (à la position des dizaines). Là faut que j'en enlève 14 (dizaines), ça fait...ça fait 6 (dizaines)... Ça fait 68». L'échange entre l'unité de mille et les centaines, entre la centaine et les dizaines, puis le retrait des 14 dizaines aux 20 dizaines trouvées, lui font oublier la quantité restante (9 centaines). Sa méthode de travail ne semble pas lui permettre de conserver un contact avec l'idée de grandeur du nombre de départ par rapport au nombre d'arrivée. Il ne semble pas surpris de trouver que 1108 - 14 dizaines puisse lui donner le nombre 68. Le fait de ne pas avoir une idée précise de la quantité à enlever ne facilite peut-être pas une évaluation de la solution trouvée.

Le dialogue invite à manipuler des enveloppes lui permettant une prise de conscience et une correction de l'erreur. Toutefois, il n'y a pas eu de dialogue portant sur la méthode de travail pour éviter ce type d'erreur.

3.6.3.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

Les premiers réfléchissements de S. s'appuient sur le contenu des différentes unités de mesure de quantité (dans la centaine il y a des dizaines et des unités). Cette conservation des unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique ne semble pas complétée. La réversibilité des transformations (l'idée des unités dans les dizaines) laisse apparaître un glissement lorsqu'il s'agit de reconstruire ces unités de mesure. L'abstraction réfléchissante de S. reconstruit une invariance de la quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, puis une relation entre 908 et 908 unités, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique du nombre.

L'introduction des opérations favorise la coordination entre une relation d'équivalence d'une part (20 dizaines = 200), une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et les opérations d'additions et de soustractions d'autre part, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Le contexte des opérations semble faire oublier à S. la relation d'équivalence nécessaire avant l'opération. Ainsi, «908 - 20 dizaines = 888». L'explication de S. permet une réflexion qui amène la coordination entre la relation d'équivalence et la relation de changement par le retrait. Cette coordination est réutilisée puis à nouveau oubliée.

Si la demande d'explication peut parfois favoriser des corrections, elle laisse apparaître aussi des erreurs comme nous l'avons vue dans le cas de 1108 - 14 dizaines = 68. Il devient donc important que S. puisse poser sa propre évaluation aux solutions qu'il propose.

3.6.4 L'arrondissement des nombres

3.6.4.1 Compréhension initiale[94] et finale[95]

Durant l'entrevue initiale, le comptage par 1 et par 10 de nombres plus grands que 1000 ne pose pas de problème. Cependant, le double-comptage s'avère plus ardu. S. compte le nombre de départ. Il énumère à ce moment les nombres dits en déplaçant ses doigts et conclut que le nombre de doigts déplacés correspondent au nombre de pas.

S. arrondit ensuite le nombre 3105 à la centaine (3100). Toutefois, plus tard au cours d'une des expérimentations didactiques, S. compare souvent les chiffres d'un nombre plutôt que les nombres entre eux. Cette procédure laisse apparaître, pour nous, un doute sur sa façon de procéder lorsqu'il arrondit un nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Une activité sur l'approximation de nombres est une occasion de travailler le double-comptage dans un contexte et d'approfondir sa compréhension de cette notion. C'est que qu'on va retrouver dans le déroulement de cette expérimentation didactique.

Au cours de l'entrevue finale, S. compte facilement par 1 et par 10, mais le double-comptage pose toujours problème. C'est à l'expérimentation du double-comptage en marchant, que S. réalise qu'il ne doit pas compter le point de départ puisqu'il ne s'agit pas d'un pas. Le changement de centaine lors du comptage par 10 le laisse hésitant. Il croit d'abord que 1005 suit 1095, puis il explique en arrivant à 95 : «Ça fait une centaine, ça fait que là

---

[94] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 6, p. S.-1 à S.-3.

[95] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 6, p. S.-17 à S.-21.

ça faisait 1105».

Arrondir n'est pas facile. Il connaît un truc (regarder si le chiffre de la position à arrondir est plus grand ou plus petit que 5), mais ne peut l'utiliser pour faire la preuve de ce qu'il avance. Ainsi 3105 est arrondi à la centaine (3100) en expliquant : «Ben le 1 est pas plus haut que le 5, là ça fait, là je mets deux 0 à la fin, ça fait que là ça fait 3100». S. n'arrive pas à trouver «l'autre centaine» qui est près de 3105. Pour lui, 4000 suit 3100. Il utilise les enveloppes pour découvrir 3200. La recherche du nombre de pas entre 3100 et 3105, puis entre 3105 et 3200, lui permet de prouver que 3100 est le plus près. Par la suite, 497 est arrondi à la centaine qu'il considère la plus proche (400) en utilisant son truc. À nouveau le double-comptage lui permet de comparer avec «l'autre» centaine (500) et de choisir la plus près. Il identifie ensuite 500 comme étant le plus proche parce que «3 pas» le sépare de 497. Nous pouvons donc observer l'influence des habiletés de comptage sur le jugement numérique de S..

3.6.4.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[96]

Pour S., arrondir sert à «ne pas avoir le chiffre exact». En utilisant des billets de Monopoly et le contexte d'achat dans un magasin, S. arrondit 149 à la centaine supérieure, puis à la dizaine supérieure sans problème. Il reconnaît les positions où il a arrondi et explique que : «Ça sert à donner plus pour que ce soit mieux... pour mieux redonner, comme là, c'est redonner l'argent, comme là elle me redonnerait 1».

Une deuxième tâche lui permet d'arrondir pour estimer une

[96] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-11 à S.-13.

addition. Il constate que : «Ça va plus vite pour compter». Le nombre 5064 est ensuite arrondi à différentes positions : la centaine puis la dizaine et enfin l'unité de mille. Un dialogue amène, par la suite, l'idée de la position la plus près et la plus loin. Cette idée, d'abord confondue avec celle des différentes positions, permet d'expérimenter le double-comptage. Cette procédure n'est pas réutilisée pour arrondir le nombre 5228. S. retourne au truc connu (regarder le chiffre de la position à arrondir et le comparer à 5) et ce, même si ce truc ne lui permet pas de vérifier le résultat obtenu.

L'expérimentation didactique se termine en disant qu'arrondir sert : «À prendre le chiffre le plus haut ou le plus bas...pour faire des...quand t'en as beaucoup, elle te fait arrondir».

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
arrondir sert «à ne pas avoir le chiffre exact»	compare les chiffres entre eux compte par 10, par 100	
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
compare les nombres entre eux, en utilisant le double-comptage	observe la quantité négligeable par rapport au tout	utilise l'approximation des nombres
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.6.4.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes

Le contexte proposé invite S. à remettre à la caissière le montant suffisant pour payer un objet qui coûte \$149., sans autre recommandation. S. réalise facilement cette approximation et ce, à deux positions différentes : centaine (200) et dizaine (150). Il appuie son réfléchissement sur le comptage des billets de 100, puis sur celui des billets de 10, pour comparer le nombre obtenu au nombre de départ. La réflexion qui en émerge permet de comparer les nombres. Il explique sa conception de l'approximation : «Ça sert à donner plus pour que ce soit mieux ...»

S. ne réutilise pas spontanément ces procédures pour estimer le résultat de l'addition de 149 et 90. Le calcul mental et la calculatrice lui semblent suffisamment pratiques. Le dialogue l'invite à expérimenter l'addition de ces deux nombres arrondis (150+100). Il constate la rapidité d'exécution permise. Notons que depuis le début de l'entrevue, les approximations proposées par S. sont toutes supérieures au nombre de départ.

Avec le nombre 5064, les choses se compliquent. S. arrondi à la centaine (5100) puis à la dizaine (5070) en appuyant son réfléchissement sur le comptage des billets de Monopoly et en comparant le nombre obtenu, au nombre de départ. Il explique : «Ça fait 5064 pis là, je prends sept 10 (billets), ça fait plus haut que 64». Le dialogue l'invite à retrouver «l'autre» dizaine près de 5064, ce qu'il n'arrive pas à réaliser. Il cherche d'abord à arrondir à une autre position, la centaine puis à utiliser le nouveau nombre comme nombre de départ (5070). L'identification de ce problème résolu, S. trouve l'autre dizaine (5060). Il explique : «Le 4 ça aurait été comme un 5 comme en quatrième année, je le mettais plus haut pis c'était bon, pis je pouvais le laisser là, pis c'était bon pareil». Le réfléchissement s'appuie ici sur son truc où les chiffres sont comparés à 5, puis conservés ou modifiés. Le dialogue l'invite à utiliser le double-comptage pour déterminer le nombre de pas qui sépare 5064 de 5060 puis 5064 de 5070. Le temps de comptage plus long et la quantité de pas entre 5064 et 5070 permettent à S. d'identifier la dizaine la plus près (5060). Le nombre de pas n'a toutefois pas encore été précisé. S. sait seulement qu'il y en a plus.

Cette procédure est réutilisée pour arrondir 5064 à l'unité de mille. S. compte les billets de Monopoly puis écrit 5000 au dessus de 5064 puis 6000 en-dessous. Le résultat obtenu le laisse songeur : «Ici (en montrant la position de la centaine), il y a pas de chiffre...ben 0, c'est à cause qu'il est pas plus haut que 5. Il aurait fallu que j'aille là (la position de la dizaine) pour voir si l'autre 5...» Le réfléchissement «forcé» à partir des billets de Monopoly et la recherche de deux nombres où il est possible d'arrondir, semblent remettre en question le truc qu'il utilise habituellement.

Le nombre 5228 est arrondi aux deux unités de mille qui l'entourent (5000 et 6000). «...c'est à cause que le 2 est pas plus haut que 5». Le dialogue l'invite à compléter son truc par le double-comptage. Il arrondit ensuite 5228 aux deux centaines qui l'entourent, sans la manipulation des billets (5300, 5200). Il s'appuie sur le contexte du magasin, pour distinguer la centaine la plus loin, et sur celui de la classe, pour repérer la centaine la plus près. Pour arrondir à la position des dizaines, le rappel du nombre de départ est à nouveau nécessaire. S. trouve 5230 puis explique : «C'est la même chose, c'est à cause que le 8 est plus haut que 5». Le retour au nombre de départ, écrit sur sa feuille, lui permet de retrouver 5220. «Ben à la place de changer le nombre, je le laisse là pis à la place le 0, je le mets là (à la position des unités)».

À la fin de l'entrevue, sa conception de l'approximation des nombres est expliquée par la description des dernières actions : «Ça sert à prendre le chiffre le plus haut ou le plus bas...» Il confond alors le but de la tâche et la procédure à utiliser pour la réaliser.

Durant l'évaluation finale, comme nous l'avons vu, l'expérimentation de la marche pendant le comptage vient compléter l'expérimentation didactique. L'utilisation des enveloppes lui permet de retrouver l'autre centaine et de compter les pas qui séparent 3105 de 3100 et ceux qui séparent 3105 de 3200. Le double-comptage, appuyé par l'abaque, permet d'introduire la comparaison entre les nombres, de réutiliser cette procédure pour arrondir le nombre 497 et d'observer la quantité négligeable par rapport au tout.

3.6.4.4 Conclusion de l'expérimentation

L'abstraction réfléchissante de E. semble évoluer à partir du comptage par 10, par 100 et de la comparaison entre les chiffres, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, vers la comparaison entre des nombres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. L'introduction de deux nouveaux aspects : la possibilité de retrouver une «autre » dizaine ou une «autre» centaine qui soit près du nombre de départ et une habileté de comptage (le double-comptage) semblent favoriser cette évolution.

La réflexion de S. retourne ensuite vers des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. Il compare des chiffres, ce qui le laisse insatisfait et confus. Ainsi arrondir 5064 à 5060 est considéré comme bon, non pas parce qu'il n'y a que 4 pas entre ces deux nombres mais parce que le 0 n'est pas considéré comme un chiffre : «Il y a pas de chiffre...c'est à cause il est pas plus haut que 5». Lorsque le réfléchissement s'appuie sur ce truc, il amène la comparaison des chiffres entre eux, excluant la possibilité de comparer les nombres entre eux. À la fin de l'expérimentation didactique, le contexte du magasin plutôt que le double-comptage sert encore pour juger de la vraisemblance d'une solution. C'est au cours de l'évaluation finale que S. utilise le double-comptage, après une invitation à le faire.

Le dialogue tente d'enrichir les réflexions. L'intervention permet l'exploration d'une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, mais cette construction implique l'abandon d'une procédure qui a déjà fait ses preuves. Elle ne sera donc pas retenue immédiatement.

L'utilité de l'approximation des nombres qui se construit au cours de cette expérimentation est encore confondue avec la procédure pour réaliser l'activité. Ainsi : «Arrondir, ça sert à donner plus...», ça accélère l'exécution d'une opération d'addition, «Ça fait plus haut que 64 (arrondi 5064 à 5070)».

3.6.5 Construction des unités de mesure de quantité

3.6.5.1 Compréhension initiale[97] et finale[98]

Durant l'entrevue initiale, S. retrouve des groupements qui existent dans la vie courante mais ne peut identifier le nom qui correspond à un ensemble de 12, ou à un paquet de 10. Il appelle ce dernier, comme nous l'avons déjà vu, «un dixième». Cette confusion persiste, au cours de l'entrevue, entre dixième et dizaine, centième et centaine. S. satisfait le critère de la composante intuitive relatif à la reconnaissance de groupements dans la vie courante, mais ne satisfait pas celui où il doit attribuer une idée de quantité plus ou moins grande aux différents groupements.

S. illustre le nombre 202 et reconnaît l'invariance de la quantité. Après avoir défait une centaine, il sait qu'il s'agit

---

[97] Un résumé de l'évaluation initiale apparaît en appendice 6, p. S.-1 à S.-3.

[98] Un résumé de l'évaluation finale apparaît en appendice 6, p. S.-17 à S.-21.

encore du nombre 202 parce qu'il peut remettre les enveloppes de dizaine dans la centaine. La relation d'équivalence semble plus difficile à reconnaître. S. compare les trois ensembles (300 jetons, 200 jetons et une centaine de jetons et enfin 3 centaines de jetons) et croit que le troisième ensemble (3 centaines) est celui qui contient le plus d'éléments. Il montre alors les 3 enveloppes de centaine. Devant le rappel du contenu des deux autres ensembles, il hésite devant 200 jetons et une centaine. Enfin, il retrouve la pluralité de chacun des ensembles, mais reste hésitant. S. satisfait le critère relatif à l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et l'explique en disant que seule la disposition est changée. Il ne satisfait toutefois pas celui relatif à la reconnaissance de l'équivalence entre des quantités. Nous pouvons poser comme hypothèse que sa méconnaissance des unités de mesure de quantité entrave la reconnaissance de relations d'équivalence entre les quantités, puisqu'il n'y fait correspondre les enveloppes qu'à la suite de sa première réponse.

Au cours de la dernière évaluation clinique, S. connaît le nom des différents groupements et considère qu'ils facilitent le comptage. Il satisfait ainsi les critères de la composante intuitive.

Il illustre correctement le nombre 2220 sur l'abaque, reconnaît l'invariance en retransformant les dix dizaines en une centaine. L'équivalence entre trois personnages qui ont respectivement 3 paquets de 100 macarons, 2 paquets de cent macarons et 100 macarons et enfin 300 macarons, n'est pas reconnue immédiatement. Les paquets du deuxième personnage lui semblent plus importants. Appelé à justifier son choix, il reconnaît l'équivalence. Il satisfait alors les critères de la composante abstraite du palier logico-physique.

Sa connaissance des unités de mesure de quantité ne semble pas lui permettre la reconnaissance de relations d'équivalence entre les quantités. La réflexion de S. doit être sollicitée par une demande d'explication. S. ne se donnerait pas le droit de prendre du temps pour réfléchir avant de fournir une réponse.

3.6.5.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[99]

L'expérimentation didactique débute par un dialogue sur les différentes unités de mesure de quantité que nous avons déjà manipulées. Le nombre 159 est le nombre qui sert de point de départ aux différentes manipulations qui seront effectuées durant l'expérimentation. D'après la représentation mentale que S. se fait du nombre 159, 50 dizaines, puis 150 dizaines le composent. Une vérification avec les enveloppes et les jetons amène la correction. Il explique : «J'avais enlevé ça (9 des unités) pour le remplacer par 0».

Il réutilise ses représentations mentales sur le nombre 159, pour retrouver les 159 unités en expliquant le contenu de chacune des unités de mesure. «Dans les centaines, il y a 100 unités, dans les dizaines, il y en a 50 pis dans les unités, il y en a 9».

Ces relations d'inclusion ne seront pas réutilisées de façon efficace pour retrouver le nombre de dizaines dans 1150. Il en retrouve 160. La vérification avec les enveloppes et les jetons laisse apparaître une confusion dans le comptage des dizaines. Le comptage par 10 doit alors être changé pour un comptage par 1. La relation d'équivalence entre 1 dizaine et 10 unités reconnue, S. peut poursuivre sa réflexion.

Un dialogue facilite la mise en correspondance entre les repré-

---

[99] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-13 à S.-15.

sentations mentales que S. se fait des différentes unités de mesure de quantité et la position des chiffres d'un nombre. L'écriture et la lecture successive du nombre 104 306 permet de s'arrêter sur les positions des chiffres dans un nombre, la position de l'espace et sur son utilité.

La dernière tâche favorise une opération inverse de celles réalisées au début de l'expérimentation didactique. S. doit retrouver des nombres qui ont 24 dizaines. Il découvre qu'il y en a plus d'un et peut réutiliser sa compréhension pour identifier des nombres qui ont 104 centaines.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
distingue les différents groupes	compte par 10, par 100	établit des relations d'équivalence (1 dizaine=10 unités)
COMPOSANTE INTUITIVE	COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
adapte le comptage aux différentes unités de mesure additionne les unités de mesure	établit des relations d'inclusion invariance de la dizaine	donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre
COMPOSANTE PROCÉDURALE	COMPOSANTE ABSTRAITE	COMPOSANTE FORMELLE

3.6.5.3 Comment évolue S. à travers les différentes composantes

Au début de l'expérimentation didactique, un échange permet de retrouver les relations d'équivalence qui existent entre les différentes unités de mesure de quantité. Toutefois S. ne coordonne pas ses connaissances puisqu'il considère que 50 dizaines puis que 150 dizaines composent le nombre 159. Le réfléchissement cherche à s'appuyer sur le contenu des unités de mesure de quantité, mais le comptage des enveloppes de dizaines à coordonner à ces unités de mesure, pose problème. Il explique que : «Dans 100, il y en a... 10, plus 5, ben 50 là, ça fait 150».

Le dialogue invite S. à vérifier le résultat prévu. Il prend 1 enveloppe de centaine, 5 de dizaines et 9 jetons puis dénombre les enveloppes de dizaines (15). La coordination entre le comptage et les unités de mesure a été remplacée par une autre, plus efficace. Il a additionné les 10 dizaines de la centaine et les 5 dizaines pour retrouver 15. Le réfléchissement s'appuie sur le contenu des unités de mesure coordonné avec l'opération d'addition. Il explique son erreur, en disant qu'il a utilisé le déplacement de chiffres que lui permet sa connaissance du tableau de numération.

Pour identifier le nombre de dizaines qui composent 1150, S. cherche à nouveau le contenu des groupements représentés par le chiffre des unités de mille et des centaines. Cependant, en introduisant le comptage plutôt que l'addition il trouve 160 dizaines. Il n'a pas su arrêter la recherche du «contenu» au groupements des dizaines, ces dernières contenant des unités. Ainsi, il a retrouvé les 100 dizaines de l'unité de mille, compté par 10 la centaine, puis poursuivi son comptage par 10 pour les 5 dizaines.

L'invitation à illustrer le nombre au moyen d'enveloppes et de jetons permet d'observer la reproduction de cette erreur. C'est par une prise de conscience de ce qu'il cherche (le nombre de dizaine), au moyen d'une question (combien as-tu de dizaines), qu'il reconnaît la dizaine comme unité de mesure de quantité, puis adapte le comptage (par un). Il explique d'ailleurs son erreur en disant : «...je les avais mis là avec les centaines».

S. est ensuite invité à construire une procédure lui facilitant l'identification de la quantité de dizaines et de centaines dans un nombre. Il observe la présence ou l'absence de centaines, par exemple, aux différentes positions d'un nombre. Il identifie la valeur relative des chiffres d'un nombre et retrouve le nombre de centaines. Cette procédure est utilisée avec succès pour retrouver les 15 dizaines dans 159, les 11 centaines de 1150. «J'ai regardé où ce qu'il y avait des centaines. Il y en a dans les centaines pis dans les unités de mille, ça fait 11». Il coordonne alors la valeur relative des chiffres d'un nombre et l'opération d'addition.

L'écriture d'un nombre à 6 chiffres contenant un 0 à la position des dizaines de mille permet d'observer que S. n'est toujours pas à l'aise avec le 0 : il écrit 14 306 alors que lui est dicté le nombre 104 306. Le réfléchissement juxtapose les chiffres entendus sans tenir compte de la valeur sous-tendue par les positions. Un échange l'invite à lire le nombre écrit. Ce n'est pas suffisant pour amener S. à se corriger. Il ne voit pas la différence entre ce qu'il lit (quatorze mille trois cent six) et ce qui a été demandé (104 306). La répétition du nombre dicté lui permet la correction et l'identification de ce qui le confond, le 0. La réflexion de S. semble avoir produit un glissement, qui a modifié la consigne. Un dialogue l'invite à être attentif aux différentes positions, aux espaces entre les chiffres et à leur utilité.

S. retrouve ensuite un nombre qui contient 24 dizaines. Il identifie le nombre 240 mais il croit, dans un premier temps, que seul ce nombre peut contenir 24 dizaines. Le réfléchissement s'appuie sur l'ajout du zéro à la position des unités, chiffre considéré comme ne dérangeant pas la quantité puisqu'il ne vaut rien. Il est invité à retrouver le nombre de dizaines qui composent le nombre 245. S. découvre avec surprise les 24 dizaines. Il propose ensuite de nouveaux nombres qui ont la même quantité de dizaines (246, 247). Le réfléchissement s'est appuyé sur une conservation de la dizaine dans le nombre. Il explique : «C'est pas plus haut, tu m'as pas dit de compter les unités». S. réutilise cette compréhension pour retrouver des nombres composés de 104 centaines (10 400, 10 412).

3.6.5.4 Conclusion de l'expérimentation didactique

L'abstraction réfléchissante de S. évolue à l'intérieur de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Il passe du comptage des unités de mesure de quantité à l'opération d'addition. Le réfléchissement de S. s'appuie ensuite sur le contenu des unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, mais la coordination avec le comptage des dizaines, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, pose problème. Ainsi le nombre 159 contient 150 dizaines. Le matériel favorise l'utilisation de l'opération d'addition (10+5), une autre procédure du palier logico-mathématique. Cette addition n'est pas immédiatement réutilisée pour un autre problème.

La prise de conscience de la dizaine, comme unité de mesure de quantité (une enveloppe=<u>une</u> dizaine), facilite l'adaptation du comptage, puis la reconstruction de la procédure d'addition (100+50+5, 10+1). Cette coordination entre l'unité de mesure de quantité qu'est la dizaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique et l'opération d'addition, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, rend ensuite possible la conservation de la centaine dans un nombre. Cette conservation de la dizaine et de la centaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, s'approfondit grâce à sa coordination avec la reconstruction de nombres contenant 24 dizaines, une compréhension formelle du nombre. Cette coordination est réutilisée pour reconstruire le nombre 1150 à partir de 115 dizaines.

Le dialogue favorise l'utilisation du matériel par la manipulation des enveloppes et l'élaboration d'une procédure efficace pour trouver le nombre d'unités de mesure de quantité (l'opération d'addition). Il permet aussi à S. de réfléchir sur ses solutions, par exemple, en relisant le nombre écrit.

3.6.6 Le réseau sémantique

Cette expérimentation didactique, un peu particulière, invite l'enfant à parler de ses représentations mentales et de leurs relations. Le matériel est à sa disposition pour l'aider à se rappeler. Il est demandé à l'enfant de nommer tout ce qui lui vient à l'esprit lorsqu'on parle des nombres. Chacun des termes est alors inscrit sur un morceau de papier. Par la suite, l'enfant organise ces petits papiers en un premier réseau qu'il explique. Le dialogue qui suit permet d'enrichir le réseau et d'en construire une deuxième.

3.6.6.1 Compréhension initiale et finale

Contrairement aux autres expérimentations didactiques, celle-ci porte sur les liens que l'enfant établit entre les divers éléments qui apparaissent dans l'étude de la numération positionnelle. Nous pourrions parler d'une compréhension initiale et finale au début et à la fin de l'expérimentation didactique, mais elles sont l'essence même de cette expérimentation. Pour cette raison, elles n'ont pas été présentées de façon isolée.

3.6.6.2 Cheminement de l'expérimentation didactique[100]

S. inscrit d'abord sur les cartons les types d'enveloppes avec lesquels il a travaillé. Une invitation à compléter cette expression par celle, plus formelle qui lui correspond (dizaine, centaine...), lui permet de faire coïncider ensuite jetons et unités, puis grosse enveloppe brune et unité de mille. Il ajoute les opérations et le pourcentage. Le premier réseau divise ces expressions en deux colonnes : les opérations et les unités de mesure de quantité.

nombres	
enveloppe brune	calculer
(unité de mille)	
enveloppe blanche	+
(centaine)	
enveloppe brune	÷
(dizaine)	-
jetons(unités)	+
	%

S. explique que les noms des groupements sont disposés «du plus gros au plus petit», alors que les opérations sont regroupées entre elles : «Parce que c'est pas des chiffres».

Le dialogue lui permet d'ajouter le mot position ainsi que de nouvelles unités de mesure de quantité comme les dizaines de mille, les centaines de mille, les unités de million, les dizaines de million, les termes valeur et chiffre. Une restructuration du tableau s'amorce. Les chiffres représentent à la fois une position et une valeur. Une nouvelle organisation est réalisée lorsque S. conçoit qu'il réalise des calculs avec des chiffres. Les opérations sont alors déplacées sous les unités de mesure de quantité. Il ne reconnaît toutefois pas encore la

---

[100] Un résumé de l'expérimentation didactique apparaît en appendice 6, p. S.-15 à S.-17.

réversibilité des opérations.

Nombres
position
valeur
chiffre
...
unité de million
centaine de mille
dizaine de mille
grosse enveloppe brune (unité de mille)
enveloppe blanche (centaine)
enveloppe brune (dizaine)
jetons (unités)
x
÷
-
+
%
calculer

3.6.6.3 <u>Comment évolue S. à travers les différentes composantes</u>

a) Un premier réseau en deux colonnes

Les cartons sur lesquels S. a écrits les différents termes laissent apparaître deux thèmes : les unités de mesure de quantité (enveloppe brune, enveloppe blanche, enveloppe brune, jetons, unité de mille, centaine...) et les opérations (calculer, +, -, x, -).

Les mots de ces deux thèmes sont d'abord ordonnés «du plus gros au plus petit», comme l'explique S.. Sa réflexion hiérarchise les unités de mesure de quantité. Le questionnement amène la prise en compte de ces unités de mesure de quantité comme étant aussi des positions. De nouvelles positions et de nouvelles unités de mesure de quantité sont identifiées. S. place ensuite le mot «chiffre» au-dessus des termes «positions» et «valeurs» en expliquant : «Il y a tout le temps une position pis la valeur avant le chiffre. Ben, le chiffre là c'est après...il y a l'unité pis tout ça (en montrant les autres unités de mesure)...». S. considère alors que le chiffre représente une quantité relative à sa position.

S. croit ensuite que les chiffres aident à former des unités, des dizaines, des unités de mille. Toutefois, les unités de mesure de quantité ne seront pas expliquées comme étant incluses les unes dans les autres, mais comme ordonnées : «C'est à cause que unité de million, c'est le plus gros pis l'unité, c'est le plus petit, Il faut que je mette dans le milieu les autres, en ordre».

Le deuxième thème, les opérations, sont séparées des unités de mesure de quantité : «C'est à cause ça va tout ensemble, c'est tout...tu sais là, c'est pas des chiffres...» Son réfléchissement, en s'appuyant sur une relation de comparaison, laisse émerger une différence. Un dialogue permet de reconnaître que les opérations se réalisent avec des chiffres qui sont autant d'unités de mesure de quantité. Le dialogue introduit une réflexion favorisant l'établissement de relations entre les deux colonnes (unités de mesure et opérations). S. explique : «Il y a tous les chiffres avant pis il faut que tu en aies d'autres pour calculer»

b) Un deuxième réseau

S. n'établit pas la relation inverse entre la multiplication et la division ni entre l'addition et la soustraction. Il explique : «Tu peux multiplier pis après, tu peux diviser...tu peux soustraire pis tu peux additionner». Le problème suggéré, où il doit successivement retrouver les billes perdues le soir puis les billes en main le matin ne lui permet pas de reconnaître cette relation. «Ben tu peux trouver combien t'avais de billes le matin pis combien qui t'en reste, ça fait un lien». La réflexion demeure sur la reconstitution des étapes du récit, sans introduire la recherche du processus de retrait ou d'ajout.

Le résumé que S. fait du nouveau réseau lui permet de reconnaître que les nombres sont des indicateurs à la fois de position et de valeur, sur lesquels il peut opérer. Ce réseau est à ce moment moins dichotomique. Il a réuni en une seule colonne les unités de mesure de quantité et les opérations.

3.6.6.4 Conclusion de l'expérimentation

Au départ, la réflexion de S. à propos des unités de mesure de quantité et des opérations, laisse apparaître des relations d'ordre (de la plus petite à la plus grande) et de temps (avant tu multiplies, après tu divises), réflexion davantage du palier logico-physique. Le réfléchissement en s'appuyant sur la différence entre ces deux colonnes («C'est pas des chiffres») plutôt que sur les actions ne permet pas d'identifier la réversibilité des opérations, une réflexion du palier logico-mathématique. L'introduction d'une histoire, où il est possible de retrouver des billes perdues dans la journée ne permet pas la reconnaissance de la relation inverse. La relation entre l'addition et la soustraction et entre la multiplication et la division demeurent liées à la reconstitution des étapes du récit de cette histoire.

L'intervention tente ensuite de déplacer la réflexion vers la prise de conscience des chiffres, comme représentant à la fois une valeur et une position, sur lesquels il est possible d'opérer. Le dialogue sollicite ainsi une compréhension du palier logico-mathématique.

L'abstraction réfléchissante a pu évoluer de relations de comparaisons (opposition des chiffres et des non-chiffres), une manifestation de la compréhension du palier logico-physique, vers l'établissement de relations d'actions entre les différentes unités de mesure de quantité, une manifestation de compréhension du palier logico-mathématique.

3.6.3 Entrevue avec l'enseignante

A la fin de l'expérience, une entrevue avec l'enseignante a permis la discussion sur les deux points suivants. A-t-elle pu observer des changements dans la compréhension de S.? Les attitudes par rapport au raisonnement se sont-elles modifiées?

Selon son enseignante, S. fait davantage appel à la réflexion, à ses capacités. Il semble avoir développé une confiance en ses capacités. Il prend des chances alors qu'il n'osait pas le faire auparavant. En cinquième année, «...on fait appel à toutes sortes de choses sans les nommer» explique l'enseignante. La mémorisation des tables est encore difficile.

S. est un enfant effacé qu'on ne voit pas agir dans la classe. Il pose peu de questions mais il est très coopératif. Il est ouvert à recevoir de l'aide. Il n'aime pas apprendre par essais et erreurs. Il cherche à obtenir un résultat correct immédiatement. Il ne semble pas accepter qu'au début d'un apprentissage, il y ait des choses embrouillées qui se précisent au fur et à mesure de la démarche. Son bulletin de la quatrième étape ne donne pas d'indication sur son évolution. Aucune lettre n'est inscrite. Il est toutefois inscrit à une classe-ressource pour l'année suivante, ce qui nous laisse soupçonner des difficultés encore importantes en classe.

CHAPITRE IV

LES RÉSULTATS

Le but de ce chapitre est triple. Dans un premier temps, on répond à la question de recherche en faisant une synthèse de chacune des études de cas. Dans un deuxième temps, on identifie les relations, ou coordinations, qui ont permis de construire les critères que nous avons déterminés dans l'analyse du concept de numération positionnelle. Enfin, ce chapitre est aussi l'occasion de confirmer l'hypothèse que nous avons posée au début de cette recherche.

Pour répondre à la question de recherche, nous faisons une synthèse critique des entrevues d'évaluations. Les entrevues d'évaluation initiales et finales facilitent la reconnaissance des critères sur lesquels les enfants peuvent appuyer leurs réfléchissements. Ces structurations sont alors considérées partielles, puisque des difficultés subsistent. De plus, ces évaluations permettent aussi l'observation des critères présents à la fin des expérimentations. Ces structurations peuvent alors être considérées comme des structurations généralisables et durables, si et dans la mesure où elles sont réutilisées au cours de la dernière entrevue clinique d'évaluation. La synthèse des évaluations apparaît dans les tableaux où nous voyons apparaître un i et un f, entre parenthèses. Le i, signale l'apparition du critère au cours de l'évaluation initiale, alors que le f identifie que ce critère a pu se développer au cours de l'expérimentation et qu'il s'est manifesté durant l'évaluation finale.

Chacune des expérimentations didactiques présentées dans le chapitre trois apporte aussi des éléments de réponses à la question de recherche. La synthèse des six expérimentations didactiques de ce chapitre cherche à laisser émerger les moments les plus importants afin de répondre au «comment» de la question de recherche.

4.1 Résultats en regard de l'évolution des enfants

4.1.1 Étude de cas de Cl.

4.1.1.1 Structurations partielles, structurations généralisables

Au début des expérimentations didactiques, les structurations de Cl. sont les suivantes. Ses habiletés de comptage sont rudimentaires. Elle compte par 1 à partir d'un nombre donné, mais le comptage par 10 se transforme en comptage par 5 si elle doit commencer à compter à partir d'un autre nombre que 0. De plus, le double-comptage n'est pas réalisé de façon satisfaisante.

Au palier logico-physique, Cl. satisfait les critères des composantes intuitives et procédurales. Ceux de la composante abstraite, relatifs à l'invariance de la pluralité par rapport à son organisation et à l'équivalence entre trois quantités organisées différemment, ne sont pas satisfaits.

Au palier logico-mathématique, Cl. est déjà habile à lire, écrire et attribuer une valeur relative aux chiffres des nombres. Elle retrouve des décompositions au nombre 709, où seules les unités sont prises en compte (700 unités+9 unités, 700+9). En effet, les unités de mesure de quantité sont hiérarchisées de la plus petite à la plus grande, à la manière d'une compréhension intuitive du palier logico-physique. Ces unités de mesure de quantité ne sont pas coordonnées aux nombres. Lorsque Cl. doit comparer 20 dizaines et 2 centaines par exemple, elle ne tient compte que des groupes. Le retrait du chiffre 2 pour enlever 20 au nombre 234 (234-20=34), reflète bien la prédominance de la notation positionnelle sur l'idée de valeur positionnelle.

Ainsi, au départ, Cl. déplace les chiffres comme des objets. Elle enlève alors des chiffres plutôt que des quantités à un nombre

(234-20=34). Sa difficulté avec le comptage pourrait entraver le développement de critères comme la reconnaissance de l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation et de l'équivalence entre des quantités organisées différemment, critères sur lesquels Cl. pourrait s'appuyer pour élaborer l'idée de valeur positionnelle.

À la fin des expérimentations didactiques, les habiletés de comptage de Cl. se sont améliorées. Elle compte par 10 à partir d'un multiple de 10, ce qui est nouveau. Le passage à la centaine de même que l'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure sont toutefois encore laborieux. Les difficultés à réaliser un double-comptage demeurent. Le comptage est une procédure à laquelle elle accorde peu de confiance. Elle cherche à arriver au résultat «prévu», plutôt qu'à utiliser le comptage comme moyen pour obtenir un résultat

Au palier logico-physique, Cl. satisfait les mêmes critères de composante intuitive et de la composante procédurale que lors de l'évaluation initiale. Pour la composante abstraite, l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation est construite durant l'évaluation. Nous pouvons alors constater la contribution de ses habiletés de comptage. Elle ne reconnaît cependant pas l'équivalence entre trois quantités organisées différemment. Elle généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres pour lire des nombres plus grands que 1000.

Au palier logico-mathématique, tous les critères de la composante formelle sont maintenant satisfaits. De nouvelles compréhensions procédurales et abstraites sont observées. Cl. satisfait les critères relatifs à l'arrondissement et à la comparaison de nombres, de même que celui relatif au retrait de quantité. Elle satisfait cette fois les critères relatifs à la conservation et parfois celui relatif aux relations d'inclusion. Ainsi, l'unité de mille peut contenir des centaines («dans le 1 de 1098», dit-elle). Toutefois, elle éprouve de la difficulté à dénombrer les différentes unités de mesure de quantité dans un nombre. Le critère relatif aux relations d'inclusion tel que formulé requiert aussi la réunion des différentes unités de mesure soit par une adaptation du comptage soit par l'addition des différentes unités de mesure de quantité. Cl. reconnaît encore plus facilement le nom d'un nombre d'après la configuration de l'illustration que par une procédure de comptage ou d'addition, d'où l'importance de la configuration spatiale dans son raisonnement. La difficulté éprouvée à adapter le comptage aux différentes unités de mesure de quantité l'invite alors à juxtaposer les quantités. Ainsi, encore maintenant, la comparaison des unités de mesure de quantité, à la manière d'une compréhension intuitive, nuit à la coordination où la valeur des unités de mesure est relative à leur quantité.

En conclusion, Cl. réfère actuellement à un matériel lorsqu'elle explique son raisonnement sur la valeur des chiffres dans un nombre, le matériel multibase utilisé en classe. Elle attribue alors aux chiffres l'idée de représentant, ce qui est nouveau. Toutefois, les structurations nouvelles ne peuvent être généralisables, puisque les régulations introduites par le comptage ne favorisent pas une reconstruction. Des problèmes d'attention surgissent. Elle oublie ce qu'elle cherche.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(if)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille million		(if)généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres.
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand.	(i)découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10) ou à 100) et le recompose en juxtaposant les éléments	
(if)reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante.	(i)compare les chiffres	(f)reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre
(f)reconnaît le caractère commode des groupements (communication)	(if)compte des éléments et des groupes pour comparer ou illustrer	réalise l'équivalence entre des quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(if)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre		(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine, centaine, unité de mille
-(f)compare les nombres -compare les unités de mesure de quantité	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	(if)lit, (if)écrit, (f)ordonne des nombres
trouve le cardinal en : -adaptant le comptage aux différentes unités de mesure de quantité -en additionnant les unités de mesure de quantité	reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	(if)plus le chiffre d'un nombre est à gauche plus sa valeur est grande (f)décompose un nombre de différentes façons
(f)trouve la dizaine, la centaine..qui précède ou suit -avec un matériel, -par un comptage, -un double-comptage		
(f)ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange		

4.1.1.2 <u>Comment évolue la compréhension de Cl. à travers les différentes expérimentations didactiques</u>

Deux thèmes touchent plus particulièrement la conception du nombre de Cl. au cours de ces expérimentations didactiques, celui des quantités et celui du comptage et des opérations. L'abstraction réfléchissante de Cl. évolue de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique vers des coordinations entre deux critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cl. reconnaît des relations d'équivalence entre 1 dizaines et 10 unités et généralise ces relations, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique. La coordination entre des manifestations de la composante procédurale et abstraite du palier logico-mathématique demeure difficile. Les opérations d'addition étant rarement introduites dans la construction du nombre, les relations d'inclusion entre unité, dizaine, centaine sont parfois oubliées.

a) les quantités

Cl. observe la configuration de l'illustration pour retrouver le cardinal de la quantité. Elle expérimente d'abord un réfléchissement à partir de l'attribution d'une valeur aux chiffres d'un nombre, une manifestation de la composante formelle, pour revenir ensuite vers une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Ainsi, elle met en correspondance les unités de mesure de quantité et les positions du tableau de numération. Elle tente aussi d'adapter le comptage aux unités de mesure de quantité.
Le principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente la quantité totale d'objets, se construit en coordonnant le comptage 1 par 1 et le sens de ce comptage. Cl. généralise la reconnaissance de ce principe au cours de la même entrevue, mais ne le réutilise pas pour retrouver le cardinal d'un ensemble durant l'entrevue suivante.

Cl. doit reconstruire le critère relatif à l'illustration d'un nombre. Elle coordonne alors les unités au principe de cardinal. Elle peut aussi construire ce critère lorsqu'elle coordonne les unités et le comptage ou l'addition.

La manipulation des enveloppes et des jetons et sa formalisation sont coordonnées au comptage pour reconnaître des relations d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine. Cl. ne généralise pas facilement ces relations d'équivalence entre 2 dizaines et 20 unités, par exemple. Une nouvelle coordination permet de revoir la relation d'équivalence, Cl. coordonne la régularité de la base 10 et le comptage.

L'idée d'une conservation des unités de mesure de quantité est amenée lors d'une association entre les chiffres et les enveloppes et les jetons, coordonnée au comptage des unités. De nouvelles coordinations touchent plus particulièrement chacune des unités de mesure de quantité. Ainsi, la conservation de l'unité apparaît lors d'une coordination entre le principe de cardinal et le comptage des unités dans le nombre 200. La conservation de la dizaine, quant à elle, surgit de la coordination entre l'illustration de 42 dizaines et la régularité de la base 10, puis de cette même illustration et du comptage.

Des relations d'inclusion apparaissent ensuite. Différentes coordinations les introduisent. Une première coordination entre le tableau de numération et la comparaison entre les unités de mesure de quantité, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, incitent Cl. à poser des actions : compter, puis additionner pour retrouver le nombre d'unités dans un nombre. Ces actions ne sont pas réutilisées.

Une deuxième coordination entre la conservation des unités de mesure, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, et l'adaptation du comptage aux unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique, favorisent une réflexion qui réintroduit la relation d'inclusion. Ainsi, Cl. identifie la quantité de dizaines ou d'unités dans le nombre. L'absence de l'opération d'addition et la difficulté avec les habiletés de comptage semblent entraver la généralisation de ces relations. En effet, au cours de la dernière expérimentation didactique, les relations d'inclusion sont estompées au profit de juxtapositions de quantité.

C'est avec un troisième type de coordination, celle-ci entre les relations d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et la conservation des unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, que Cl. rétablit les relations d'inclusion.

L'<u>approximation de nombres</u> est d'abord confondue avec les relations d'inclusion. Toutefois, Cl. a pu construire une compréhension de l'approximation des nombres en coordonnant le comptage des billets de monopoly, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, et l'écriture des nombres arrondis, une manifestation de composante formelle du palier logico-mathématique.

La compréhension du nombre comme étant le représentant d'une quantité apparaît à la suite d'une première coordination entre les chiffres et la comparaison entre les unités de mesure de quantité, puis d'une deuxième coordination entre les relations d'équivalence et l'addition.

b) le comptage et les opérations

La nécessité d'adapter le comptage aux unités de mesure de quantité intervient au moment où Cl. doit retrouver le nombre qui correspond aux 42 dizaines. Une coordination entre les enveloppes et leur position dans le tableau de numération amène cette nécessité puisque Cl. avait confondu les unités et les dizaines. Ensuite L'illustration des unités de mesure de quantité puis le comptage de ces dernières favorisent une nouvelle adaptation du comptage aux unités de mesure de quantité. Enfin, une coordination entre l'illustration des unités de mesure de quantité et le but du comptage facilite une nouvelle utilisation de ce critère.

L'addition apparaît à la suite d'une coordination entre l'illustration d'unités de mesure de quantité et une réflexion à propos de l'action de mettre ensemble, une compréhension intuitive de l'opération d'addition.

Le dialogue suggère la manipulation du matériel et son comptage, introduit la formalisation des noms des unités de mesure de quantité et la prise de conscience nécessaire à la reconnaissance du principe de cardinal et des relations d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine. Il invite aussi Cl. à prendre conscience du sens sous-entendu par le comptage. Cl., davantage orientée vers «le résultat attendu» plutôt que «le résultat à découvrir», confond alors, pour nous, le moyen utilisé, le comptage, et le but poursuivi. Toutefois, pour elle, étant donné sa difficulté avec le comptage, son but est de «bien compter».

4.1.2 Résultats de l'étude de cas de E.

4.1.2.1 Structurations partielles, structurations généralisables

Les habiletés de comptage de E. semblent présentes dès le début de l'expérimentation. Au palier logico-physique, E. satisfait les critères de la composante intuitive, de même que ceux de la composante procédurale du palier logico-physique. Nous ne pouvons toutefois conclure qu'il satisfait le critère d'équivalence entre des quantités organisées différemment. Il satisfait toutefois celui de l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et généralise le nom des petits nombres, aux nombres plus grands que 1000.

Au palier logico-mathématique, il satisfait la plupart des critères de la composante formelle. E. lit, écrit et ordonne les nombres facilement. Pour ordonner, il s'appuie, entre autre, sur une manifestation de la compréhension intuitive. Il compare la longueur des nombres. E. attribue ensuite une valeur relative aux chiffres d'un nombre et retrouve toutes les décompositions du nombre 709.

Toutefois, l'absence de conservation des unités de mesure de quantité laisse deviner l'utilisation d'une formalisation souvent privée de sens. Ainsi, E. n'est pas certain de la conservation de la centaine. (Est-ce qu'on prend toujours 10 dizaines pour former 1 centaine? oui, des fois», «70 dizaines n'entre pas dans la dizaine... ça fait 700»). Il ne peut retrouver la quantité de dizaines ou d'unités dans un nombre.

Le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique, relatif aux opérations sur des quantités, n'est pas satisfait. Tantôt E. juxtapose des quantités qu'il a devant lui (2 enveloppes de dizaines et 10 jetons donnent 210), tantôt réalise mentalement une opération de soustraction (234-20=3-2=1, 214).

À la fin de cette première entrevue, les procédures de comptage ou d'addition ne font pas partie de la compréhension de la numération positionnelle de E.. Ainsi, il n'est pas surprenant de voir E. répondre à des tâches en coordonnant les unités de mesure de quantité et les règles du tableau de numération, comme nous l'avons vu lorsqu'il déplace les chiffres et ajoute un 0 à la position des unités. Ces règles, en se situant dans un contexte logico-physique, peuvent devenir difficiles à généraliser. Son enseignante le réfère d'ailleurs pour un problème à représenter un nombre de différentes façons.

A la suite des six expérimentations didactiques, les habiletés de comptage servent à faciliter le comptage par 10 lorsqu'il a un passage à la centaine.

Au palier logico-physique, E. explique l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation en disant qu'il est possible de revenir au point de départ. Les règles d'organisation de l'abaque lui posent toutefois problème, malgré un raisonnement juste. Le critère relatif à l'établissement de relation d'équivalence est satisfait, puisque la demande d'explication est suffisante pour permettre à E. de corriger son erreur. Les critères des composantes procédurale et intuitive sont satisfaits.

Au palier logico-mathématique, les formalisations de E. sous-tendent maintenant des manifestations de la composante abstraite du palier logico-mathématique. E. satisfait le critère relatif à l'inclusion des unités de mesure de quantité et celui de la conservation des unités de mesure de quantité comme l'unité et la dizaine. Les comparaisons entre les différentes unités de mesure de quantité sont encore laborieuses. Toutefois, la manipulation de jetons et d'enveloppes permet de satisfaire ce critère en établissant des relations d'équivalence.

Les critères de la composante procédurale sont satisfaits. E. additionne, plutôt que de juxtaposer les différentes unités de mesure de quantité. L'évocation des billets de monopoly permet à E. de satisfaire le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique relatif à l'arrondissement des nombres.

Contrairement à la première entrevue, E. comprend maintenant que les nombres représentent des quantités qu'il peut réunir. Il est beaucoup plus précis dans l'exécution de ses tâches. Il est en mesure de trouver des moyens de dépannage pour solutionner ses problèmes. E. satisfait maintenant le critère relatif à l'inclusion des unités de mesure de quantité et réutilise la relation d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine pour généraliser la régularité à 10 dizaines et 1 centaine.

Tous les problèmes ne sont pas résolus pour autant. E. éprouve toujours de la difficulté à exprimer la valeur des chiffres d'un nombre. La recherche d'une réponse immédiate entrave le raisonnement de E. De plus, les règles d'organisation de la relation d'échange 10-1 demeurent problématiques, comme l'a illustré l'activité sur l'abaque.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(if)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille, million		(if)généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand	(i)découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10 ou à 100) et le recompose en juxtaposant les éléments ou les quantités	
(if)reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante	(if)compare les chiffres	(if)reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre
(if)reconnaît le caractère commode des groupements (transport, comptage)	(if)compte des éléments et des groupes pour comparer ou illustrer	(f)reconnaît l'équivalence entre des quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(f)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre		(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine, centaine
(f)compare les nombres compare les unités de mesure de quantité	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	(if)lit, (if)écrit, (if)ordonne des nombres
(f)trouve le cardinal en: -adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité -en additionnant les unités de mesure de quantité	(f)reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	-(if)plus le chiffre d'un nombre est à gauche plus sa valeur est grande -(f)décompose un nombre de différentes façons
(f)trouve la dizaine, la centaine..-qui précède ou suit - avec un matériel, - par un comptage -par un double-comptage		
(f)ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange		

4.1.2.2 Comment évolue la compréhension de E. à travers les différentes expérimentations didactiques

Deux thèmes touchent la conception du nombre de E. au cours de ces expérimentations didactiques, celui des quantités et du comptage et celui des opérations. Nous observerons le cheminement de E. pour chacun de ces thèmes puisque ces derniers nous permettent de répondre à la deuxième partie de la question de recherche.

L'abstraction réfléchissante a évolué en appuyant d'abord des réfléchissements à partir de critères de la composante procédurale du palier logico-physique, puis en coordonnant des critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Enfin, l'abstraction réfléchissante permet une première une conservation des unités de mesure de quantité que sont la dizaine et l'unité. Voyons le détail de cette évolution.

a) les quantités et le comptage

Pour E. le nombre est d'abord une juxtaposition de chiffres. Cette conception, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, implique des extensions qui ne sont pas généralisables. Par exemple, c'est par la comparaison entre les chiffres d'un nombre que E. forme le nombre le plus grand. C'est aussi par la comparaison entre les chiffres d'un nombre qu'il arrondit. La juxtaposition des chiffres qui correspondent aux différentes unités de mesure rend possible la construction d'un nombre. 14 dizaines juxtaposées à 5 unités forment le nombre 145, 4 centaines et 4 dizaines et 5 unités forment le nombre 445. Ces réalisations rendent difficiles l'introduction de procédures de comptage ou d'opération qui s'appuient sur une conservation des unités de mesure de quantité. Des confusions entre le nom du nombre et ses unités de mesure de quantité apparaissent, des difficultés à considérer qu'un nombre peut être illustré de différentes façons sont présentes.

L'établissement de relations entre le nombre et ses diverses illustrations permet de revoir le principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente la quantité totale d'objets. À partir de ce principe, se construit une adaptation du comptage aux différents groupements. Puis, la recherche d'unités à travers les différents groupements permet d'adapter le comptage aux groupements, des derniers devenant alors des unités de mesure de quantité conservées.

La construction d'une conservation de la dizaine, comme unité de mesure de quantité, se bâtit à partir de l'établissement de relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine, de la généralisation de cette relation d'équivalence (30 dizaines=3 centaines), et enfin par l'adaptation du comptage (unités dans la dizaine). Cette conservation s'élabore et s'approfondit par la succession de différentes procédures et formalisations : prendre 1 seule dizaine, mettre en correspondance le vocabulaire courant (enveloppe) et formel (dizaine), compter des dizaines, identifier ce qui est dénombré. Des relations d'inclusion, facilitées par l'identification de la quantité d'unités de mesure de quantité dans un nombre, surgissent. Par la suite, l'addition semble favoriser une évolution de la compréhension de la numération positionnelle chez E.

b) Les opérations

L'utilisation de l'algorithme, pour former des nombres compris entre 402 et 513, crée la nécessité de retrouver le nombre qui correspond à une quantité. Cette nécessité n'est pas présente lorsque E. vérifie le nombre qui correspond à une ou plusieurs quantités en comptant ou en observant les enveloppes et les jetons. Par des interventions, on cherche alors à faire prendre conscience à E. de la présence de relations entre le nom du nombre et les quantités, puis de la réunion de ces quantités par l'addition. Le réseau sémantique a d'ailleurs facilité un enrichissement en coordonnant les opérations et les unités de mesure de quantité, puis les symboles et les unités de mesure de quantité.

E. réalise correctement l'<u>approximation de nombres</u> à la suite d'une coordination entre l'écriture du nombre de départ et des nombres arrondis et le double-comptage.

Au cours de ces expérimentations didactiques, l'intervention a facilité l'enrichissement des réfléchissements par l'introduction de coordinations entre les différentes composantes. Le dialogue a tenté de faire surgir les compétences spontanées de E. Pour être réutilisées, des prises de conscience doivent avoir eu lieu non seulement à propos des manipulations effectuées, mais aussi à propos des choix de procédures sélectionnées et des solutions apportées. Sans ces prises de conscience, la solution du problème est «magique», non explicable et ne permet pas une réutilisation, comme nous l'avons vu dans l'expérimentation didactique sur l'approximation de nombres. Le dialogue a aussi favorisé l'exploration des relations d'équivalence, la construction d'unités de mesure, la coordination entre le nombre et ses unités de mesure de quantité.

4.1.3 <u>Résultats de l'étude de cas de I.</u>

4.1.3.1 <u>Structurations partielles, structurations généralisables</u>

Au terme de la première entrevue, I. compte par 1 et par 10 sans problème. Elle ne réalise pas le double-comptage. La plupart des critères du palier logico-physique sont satisfaits. Toutefois, nous relevons certaines particularités. Ainsi, I. attribue deux fonctions aux groupes : «classer et corder», qui sont en fait, une classification et une sériation d'objets. Mais elle est incapable de reconnaître, dans son environnement, des ensembles où tous les groupes du même type (sac de pomme, douzaines d'oeufs) sont égaux. Elle peut toutefois attribuer une idée de quantité plus ou moins grande aux groupes connus.

Au palier logico-mathématique, les critères de la composante procédurale, relatifs au retrait, à la comparaison et à l'arrondissement de nombres sont satisfaits. Les critères où elle doit comparer des unités de mesure de quantité et celui où elle doit retrouver le cardinal en adaptant le comptage ou en additionnant les unités de mesure ne sont pas satisfaits.

Les critères de la composante abstraite du palier logico-mathématique ne sont pas satisfaits. Elle ne peut dire que l'enveloppe contenant dix jetons, qu'elle a pourtant construite elle-même, correspond à une dizaine. Elle l'appelle «dix» ou «des dizaines». Elle ne peut pas, non plus, retrouver le nombre de dizaines ou d'unités totales dans un nombre.

La lecture des nombres ne semble pas liée à l'idée de valeur, puisqu'à deux reprises, durant l'activité où elle place en ordre décroissant, la lecture de la séquence ne lui permet pas de reconnaître que 10 198 est plus grand que 1198. Elle ne satisfait donc pas le critère de la composante formelle relatif à l'ordre des nombres ni à la lecture de nombre. Elle attribue une valeur différente à chaque chiffre d'un nombre, mais ne satisfait pas le critère de la composante formelle relatif à la décomposition, puisqu'elle ne reconnaît pas toutes les compositions possibles parmi celles qui sont écrites sur les cartes-nombres.

Nous pouvons donc poser comme hypothèse que les chiffres représentent des positions mais ces positions ne représentent pas nécessairement des quantités. Les unités de mesure de quantité ne sont ni conservées, ni incluses les unes dans les autres. Il existerait donc une coupure entre les quantités et les chiffres.

À la fin des six expérimentations didactiques, les habiletés de comptage par 1 et par 10 de I. sont jugées satisfaisantes. Toutefois, le double-comptage demeure difficile.

Au palier logico-physique, I. ne satisfait toujours pas deux des critères de la composante intuitive, critères relatifs à la reconnaissance de groupement et à leur utilité. Les critères de la composante procédurale sont satisfaits de même que ceux de la composante abstraite. En effet, I. généralise le nom des petits nombres aux grands nombres, reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à son organisation et l'équivalence entre trois quantités semblables organisées différemment.

Au palier logico-mathématique, plusieurs nouveaux critères apparaissent. Les critères de la composante procédurale touchant l'arrondissement, le retrait, l'identification des positions à travers les ordres et la comparaison des nombres sont toujours satisfaits. Elle éprouve toutefois encore des difficultés à retrouver le nombre qui correspond à une quantité soit en adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité, soit en additionnant les unités de mesure de quantité. Si elle réussit à compter les centaines dans les unités de mille, il lui est encore difficile de les additionner. Pour elle, 10 centaines plus 10 centaines donnent 1000, 10 dizaines plus 10 dizaines donnent 20 centaines.

Le critère relatif à la conservation des unités de mesure de quantité, critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique, est satisfait, mais celui qui touche à l'inclusion des unités de mesure de quantité ne l'est pas, ce qui est normal compte tenu de ses difficultés avec les opérations.

La lecture de nombres est davantage liée à la valeur. L'écriture et l'ordre des nombres sont réalisés facilement en utilisant la lecture pour en comparer la valeur. Le critère de la composante formelle relatif à la valeur des chiffres dans le nombre semble satisfait, mais celui relatif à la décomposition ne l'est pas. Plusieurs décompositions se sont ajoutées, mais la reconnaissance de la relation d'inclusion des 70 dizaines dans le nombre 700 est absente. I. refuse de reconnaître cette inclusion.

Nous pouvons conclure que les unités de mesure de quantité sont maintenant conservées, sans être incluses les unes dans les autres. Les chiffres représentent maintenant à la fois des positions et des quantités. Ainsi, décomposer et ordonner des nombres en utilisant la lecture est plus facile. Toutefois, I. montre encore une résistance à reconnaître qu'il est possible de réunir les unités de mesure de quantité. Elle est donc portée à modifier la consigne lorsqu'elle doit retrouver la pluralité pour comparer des unités de mesure de quantité ou à oublier l'addition et le comptage des unités de mesure de quantité.

I. a encore besoin de manipuler concrètement le matériel qui représente les unités de mesure de quantité. Elle prend peu d'initiative si elle n'y est pas stimulée. Elle n'ose pas poser des hypothèses qu'elle pourrait vérifier. I. considère cependant cette évaluation finale comme plus facile que la première.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(if)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille mil-lion	(f) groupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre (subitizing)	(if) généralise les termes relatifs aux noms des petits nom-bres.
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand.	(if) découpe un grand nombre en petits nom-bres (inférieurs à 10) ou à 100) et le recom-pose en juxtaposant les éléments	
reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante.	(f)compare les chif-fres	(if) reconnaît la con-servation de la plura-lité à travers les différentes illustra-tions d'un nombre
(i)reconnaît le caractère commode des groupements (transport, évaluation, comparaison, comptage).	(if)compte des élé-ments et des groupes pour comparer ou il-lustrer	(if) réalise l'équi-valence entre des quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(if)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre	(f) généralise aux ordres des mille ou des millions ce qui existait à l'ordre des unités	(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine ..., unité de mille.., unité de million..
(if)compare les nombres compare les unités de mesure	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	(f)lit, (if)écrit, (f)ordonne des nombres
trouve le cardinal en -adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité -en additionnant les unités de mesure de quantité	reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	décompose en utilisant toutes les possibilités proposées
(if)trouve la dizaine, la centaine..qui précède ou suit avec un matériel, par un comptage ou un double-comptage		(if)plus le chiffre d'un nombre est à gauche plus sa valeur est grande
(if)ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange		

4.1.3.2 Comment évolue la compréhension de I. à travers les six expérimentations didactiques

Trois thèmes touchent la conception du nombre de I. au cours de ces expérimentations didactiques : celui des conventions, celui des quantités et enfin celui des opérations. Nous observerons le cheminement de I. pour chacun de ces thèmes puisque ces derniers nous permettent de répondre à la deuxième partie de la question de recherche.

L'abstraction réfléchissante de I. a évolué de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique, sans coordination entre elles ou avec les autres composantes, vers des coordinations entre les critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. I. a aussi été amenée à coordonner le but d'une activité et les exigences des conventions de l'écriture de nombres. Voyons le détail de cette évolution.

a) les conventions

Une première coordination s'établit entre la régularité de la base dix, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et la régularité des positions à travers les ordres du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Cette coordination n'est pas réutilisée sans la réintroduction du tableau de numération par l'orthopédagogue. Ces deux types de régularité n'apparaissent ensuite que pour identifier des unités de mesure de quantité connues. Une troisième introduction du tableau de numération permet de généraliser la régularité de la base dix et des positions jusqu'à la centaine de mille.

b) les quantités

L'abstraction réfléchissante de I. a aussi construit des réflexions où les actions comme le comptage amènent des constructions nouvelles de type logico-mathématique : les unités de mesure de quantité. Ces nouvelles coordinations apparaissent d'abord entre un critère de la composante formelle, la lecture d'un nombre, et un critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique, les unités de mesure de quantité.

La construction de l'unité, comme unité de mesure de quantité, semble se réaliser au moyen d'une simple correspondance entre la position unité et la désignation d'objets unitaires.

La construction de la dizaine, comme unité de mesure de quantité, semble plus complexe. Pour I. la construction de la dizaine s'effectue d'abord par la comparaison entre un seul groupe de 10 jetons et 8 groupes de 10. Ensuite, se construit une invariance de la quantité par rapport à son organisation et une relation d'équivalence entre des quantité organisées différemment. Ces manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique apparaissent suite à la distinction dans le comptage du contenu et du contenant, et facilite l'adaptation du comptage aux unités de mesure de quantité. De nouvelles relations d'équivalence, entre 1 dizaine et 10 unités, coordonnées au comptage des dizaines dans des centaines s'élaborent. Le développement de la dizaine comme unité de mesure de quantité continue de se construire. Prendre 10 unités, identifier le nombre de paquet en main, mettre en correspondance ce paquet avec le mot dizaine, distinguer 10 unités de 10 dizaines sont des coordinations qui contribuent à cette construction.

La construction de la centaine semble se réaliser en coordonnant des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique (manipulation de jetons et d'enveloppes, comparaison 1 centaine$\neq$100 centaines) et des manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique (relations d'équivalence entre le contenant et leur contenu), où interviennent des formalisations (le nom du contenant et du contenu : les unités de mesure de quantité). Cette coordination permet de reconnaître les «10 petits paquets» contenus dans la centaine, paquet qu'on appelle des dizaines.

La construction d'une nouvelle unité de mesure de quantité, la dizaine de mille, requiert une coordination entre la régularité de la base 10, élément appartenant à la composante abstraite du palier logico-physique, et l'énumération des positions qui se succèdent, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. En coordonnant la multiplication et une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, comme la régularité de la base 10, de nouvelles unités de mesure de quantité apparaissent.

Les constructions d'une conservation des diverses unités de mesure ne sont pas suffisantes pour établir des relations d'inclusion. 3 centaines composent 3000, pense encore I.. Le dénombrement des centaines contenues dans les unités de mille, dénombrement effectué par bonds de 10, favorise la reconnaissance des 30 centaines qui les composent. Malgré cette reconnaissance, l'ajout ou le retrait de quantités, comme 20 dizaines ou 14 dizaines, est laborieux.

Une compréhension de l'approximation de nombres, un aspect particulier de la numération positionnelle, se construit par des coordinations entre l'identification de la position supérieure et inférieure, une manifestation de la composante du palier logico-mathématique, et la comparaison entre les nombres en utilisant le double-comptage.

c) les opérations

Les opérations introduisent un nouvel aspect à la construction de nombres. Plusieurs étapes sont nécessaires avant que I. ne réalise l'importance de l'addition dans la construction du nombre. Une comparaison entre les actions «mettre ensemble» et «séparer», une manifestation de la composante intuitive de l'addition, conjuguée à l'énumération des opérations connues et à leur symbolisation, une manifestation de la composante formelle de l'addition, avaient laissé émerger l'opération d'addition durant l'activité sur la décomposition et la recomposition de nombres. Le réfléchissement s'appuie toutefois sur la juxtaposition des chiffres et des unités de mesure pour composer un nombre avec les quantités 4 dizaines et 5 dizaines (450). C'est par la réunion des pluralités des quantités inscrites sur les cartes-nombres, que se dégage l'addition comme opération nécessaire pour former un nombre. I. réutilise cette coordination pour former le nombre 430.

Par la suite, les relations entre les opérations sont expliquées par l'observation du déplacement de leurs chiffres, plus particulièrement au cours de la construction du réseau sémantique. Ces réflexions, appuyées sur des formalisations sont ensuite enrichies par une histoire. Cette dernière favorise la découverte de l'addition comme opération inverse de la soustraction, alors que les mises en correspondance entre les symboles et les verbes d'action permettent une réflexion sur l'utilité des opérations «pour comment on avait d'affaires». Un retour à propos de ce qui est compté favorise ensuite la mise en correspondance entre les opérations et leur sens. La réflexion qui émerge permet à I. d'expliquer : «qu'on ajoute plusieurs fois» quand on multiplie et «qu'on enlève » quand il y a un moins. Un pont s'établit entre le palier logico-physique et le palier logico-mathématique.

Les interventions, en invitant I. à utiliser et à construire des critères de la composante du palier logico-mathématique, favorisent la vérification des solutions apportées.

4.1.4 Résultats de l'étude de cas de Ch.

4.1.4.1 Structurations partielles, structurations généralisables

Au début des expérimentations, Ch. est habile à compter par 1. Elle utilise le double-comptage de façon efficace. La compréhension initiale de Ch. semble s'appuyer davantage sur des composantes du palier logico-physique. Ainsi, Ch. satisfait les critères de la composante intuitive et de la composante procédurale. Elle compare les chiffres entre eux, compte des éléments et des groupes pour illustrer ou comparer. Ch. ne reconnaît toutefois pas l'invariance de la pluralité lorsqu'une des deux centaines est déchirée et que les dizaines qu'elle contient sont étalées. Elle reconnaît cependant l'équivalence entre trois quantités organisées différemment. Elle généralise aussi les termes relatifs aux petits nombres pour lire les grands nombres. Deux des trois critères de la composante abstraite de ce palier sont satisfaits.

Au palier logico-mathématique, Ch. ne satisfait pas les critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique, pas plus que ceux de la composante abstraite. Certains critères de la compréhension formelle semblent satisfaits, mais les procédures utilisées laissent planer un doute. Ainsi, elle place les nombres en ordre décroissant en déplaçant les cartes-nombres de droite à gauche, la lecture de nombres est réalisée en groupant les chiffres par tranche et en généralisant le nom des termes connus aux grands nombres. De plus, elle ne semble pas reconnaître la valeur des chiffres d'un nombre, la décomposition de nombres est laborieuse.

Ainsi, au début de cette expérimentation didactique nous pouvons penser que pour Ch., l'absence de manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, comme celles que permettent l'utilisation du tableau de numération, le comptage ou les opérations semblent nuire au développement de critères du palier logico-mathématique. Ainsi, la décomposition de nombres et la lecture de nombres sont réalisées sans tenir compte des quantités représentées.

À la fin des six expérimentations didactiques, les habiletés de comptage de Ch. s'élaborent. Elle compte par 1 et par 10, mais éprouve des difficultés lors du changement de centaine. L'opération de soustraction remplace avantageusement le double-comptage. La compréhension finale de Ch. semble laisser intervenir plus fréquemment l'aspect unité de mesure de quantité, mais sa coordination avec les positions des chiffres est encore laborieuse.

Tous les critères des composantes du palier logico-physique sont satisfaits. Ch. satisfait maintenant le critère relatif à l'invariance d'une quantité par rapport à son organisation, lorsque celle-ci peut être représentée par un matériel où il y a une correspondance bi-univoque entre les mots de la comptine des nombres et les unités de mesure de quantité. Les règles de l'échange de la base 10 (10-1) ne semblent pas encore installées, comme l'illustre ses manipulations sur l'abaque.

Au palier logico-mathématique, la plupart des critères sont satisfaits. Ch. utilise le tableau de numération et conçoit les groupes comme des unités de mesure de quantité. Un critère de la composante abstraite du palier logico-mathématique n'est pas satisfait : l'inclusion des unités de mesure de quantité. D'une part, le 0 est pour elle un obstacle. Ainsi, dans 202 il y a 22 dizaines. D'autre part, la comparaison entre les différentes unités de mesure de quantité laisse apparaître une transformation de la consigne plutôt qu'une reconstruction de coordinations.

Elle reconnaît toutefois la valeur relative des chiffres dans un nombre, ordonne des nombres en coordonnant sa réalisation avec la lecture de nombres.

Ch. ne satisfait pas encore, malgré ses progrès, le critère de la composante formelle relatif à la décomposition de nombres. Actuellement, Ch. semble chercher un sens à ses actions et à leurs représentations, ce qui est nouveau. Ses habiletés de comptage se sont améliorées, de même que sa compréhension de l'approximation de nombres. Ch. éprouve encore des difficultés à répondre à la question posée sans la transformer et à utiliser ses représentations mentales des unités de mesure de quantité pour solutionner les problèmes posés. Il reste à Ch. à lier le comptage à un sens et à introduire une étape intermédiaire qui lui faciliterait la réflexion avant de réaliser une tâche.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(f)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille, million	(f)groupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre (subitizing)	(if)généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand	(if)découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10) ou à 100) et le recompose en juxtaposant les éléments	
(if)reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante.	(if)compare les chiffres	(f)reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre
(if)reconnaît le caractère commode des groupements (ramasser, compter)	(if)compte des éléments et des groupes pour comparer ou illustrer	(if)réalise l'équivalence entre les quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(f)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre	(f)généralise aux ordres des mille ou des millions ce qui existait à l'ordre des unités	(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine ..., unité de mille.., unité de million..
-(f)compare les nombres -compare des unités de mesure de quantité	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	(f)lit, (if)écrit (if)ordonne des nombres
trouve le cardinal en: -adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité -additionnant les unités de mesure de quantité	reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	-(if)donne une valeur relative aux chiffres d'un nombre -Décompose un nombre en utilisant toutes les compositions possibles
(f)trouve la dizaine, la centaine..qui précède ou suit avec un matériel, par un comptage ou un double-comptage		
(f)ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange		

4.1.4.2 <u>Comment évolue la compréhension de Ch. à travers les différentes expérimentations didactiques</u>

Trois thèmes touchent la conception du nombre de Ch. au cours de ces expérimentations didactiques, celui des conventions, celui des quantités et celui des opérations. Nous observerons le cheminement de Ch. pour chacun de ces thèmes puisque ces derniers nous permettent de répondre à la deuxième partie de la question de recherche.

Au départ, Ch. se laisse très peu de temps pour raisonner, un peu comme quelqu'un qui ne se reconnaît pas un droit à la réflexion ou qui croit que la réussite est directement liée à la vitesse avec laquelle elle trouve une solution. L'abstraction réfléchissante de Ch. a évolué de manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique vers des coordinations entre des manifestations des composantes du palier logico-mathématique. Voyons le détail de cette évolution.

a) les conventions

Au cours de l'évaluation initiale et des deux premières expérimentations, Ch. s'appuie d'abord sur des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. Il est alors possible de retrouver des réflexions comme « une dizaine c'est un paquet de 2» ou «les chiffres collés forment un gros gros nombre». Sa grande habileté à utiliser des manifestations de cette composante pourrait expliquer son rôle dominant. Appuyant ses réflexions sur des aspects logico-physiques, Ch. est ainsi amenée à porter une attention particulière aux configurations spatiales. Ceci entraîne une juxtaposition des unités de mesure de quantité dans la construction des nombres, juxtaposition généralisée aux relations d'équivalence. Les différents éléments intervenant lors de ces manipulations sont considérés comme tout aussi importants les uns que les autres. Ainsi elle considère 10 unités comme étant 10 dizaines, 30 comme 30 dizaines. Afin de traduire fidèlement, ce qu'elle a fait, elle cherche à retenir tous les éléments, estimant la collection complète des images plus importante que l'évolution et le résultat du processus.

b) les quantités

La reconnaissance de la régularité de la base 10, de relation d'équivalence et de la conservation des unités de mesure de quantité permettent les premières coordinations entre les paliers. L'abstraction réfléchissante de Ch. établit un pont entre les réfléchissements qui s'appuient sur la configuration spatiale (grouper, mettre, enlever des chiffres), pour introduire une coordination entre les positions et les unités de mesure de quantité. Ainsi, des relations d'équivalence se généralisent. 10 unités c'est une dizaine, 30 c'est 3 dizaines.

C'est au cours de la troisième expérimentation que Ch. se familiarise davantage avec les unités de mesure de quantité. Elle utilise tantôt le matériel tantôt la représentation mentale de ce matériel. Ainsi, Ch. construit une conservation de ses unités de mesure de quantité à partir de la régularité de la base 10, une manifestation de la composante abstraite du palier logicophysique, coordonnée au comptage par 100 de l'unité de mille, une manifestation de la composante procédurale du palier logicomathématique.

La reconnaissance de l'unité existant toujours dans le nombre, peu importe comment il est présenté, permet la construction d'une conservation de cette unité de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique. Ainsi, le nombre 908, c'est 9 centaines, 0 dizaine et 8 unités mais, découvrira-t-elle, c'est aussi et encore 908 unités. Au début de l'expérimentation, il était possible d'observer une difficulté à concevoir l'unité toujours présente dans le nombre. Le principe de cardinal semblait se perdre au fur et à mesure que les nombres devenaient imposants pour être remplacé par la juxtaposition de plusieurs chiffres qui représentent chacun des unités de mesure de quantité. Ainsi, les chiffres pouvaient se mettre et s'enlever pour faire un nombre, alors que le 0 ne valait rien. La réversibilité des transformations semble faciliter l'émergence de cette conservation de l'unité.

La compréhension formelle du nombre comme représentant d'une quantité coordonnée à la comparaison entre les groupes de chiffres permet de reconnaître ensuite l'unité de mesure de quantité la plus près ou la plus loin, lorsqu'il s'agit d'arrondir le nombre.

c) les opérations

Au cours des rencontres, et plus particulièrement durant la construction du réseau sémantique, Ch. semble réserver l'idée de valeur aux opérations. Ainsi, elle explique : «On multiplie quand on a beaucoup de chiffres...on soustrait quand il n'y a pas beaucoup d'unités... additionner ça donne des dizaines». Cette conception doit alors se déplacer vers les unités de mesure de quantité dans le nombre et être remplacée par l'idée de processus (enlever, ajouter...). L'utilisation de contre-exemples ébranle ces croyances et semble y introduire l'idée d'un processus.

Au cours de ces expérimentations didactiques, la manipulation de matériel et le dialogue sur les représentations mentales introduisent l'idée d'une étape intermédiaire séparant la question de la réponse. En fait, ces manipulations et ce dialogue y glissent l'idée d'un processus. Ch. se rend compte que la réponse ne doit pas nécessairement suivre immédiatement l'énoncé du problème et elle fait l'expérience du processus de «construire» cette réponse. Le matériel joue un rôle important dans cette construction. Pour être efficace, il doit demeurer près de l'activité de dénombrement et ne pas être trop strictement symbolique, l'abaque n'aurait pu convenir. Nous avons d'ailleurs pu observer comment l'abaque, utilisant un contexte symbolique plus près de la notation positionnelle, facilitait le retrait de l'idée de processus ou d'étapes intermédiaires entre la question et la solution.

L'adoption d'étapes intermédiaires permet d'introduire le doute et l'explication, ce qui freine le geste trop impulsif et invite à une réflexion. Les dialogues ont invité Ch. à s'attarder aux différents processus qui sont autant de comment, menant vers la conceptualisation du concept de numération positionnelle décimale. Reste à développer les pourquoi, qui eux facilitent la construction des invariants du concept à l'étude.

4.1.5 Résultats de l'étude de cas de V.

4.1.5.1 Structurations partielles, structurations généralisables

Au cours de l'entrevue initiale, V. considère l'évaluation trop facile. Toutefois ses erreurs ne lui ont pas été soulignées. Ses habiletés de comptage sont exécutées facilement. Au palier logico-physique, elle satisfait trois des quatre critères de la composante intuitive. Le critère relatif à la comparaison entre les groupements ne semble pas satisfait. Elle ne semble pas, non plus, satisfaire le critère de la composante procédurale du palier logico-physique relatif à l'illustration des nombres. Elle montre deux enveloppes de 10 pour représenter 2 unités. Elle satisfait toutefois certains critères de la composante procédurale, en comparant les chiffres entre eux et en juxtaposant les quantités. Elle ne satisfait pas les critères de la composante abstraite du palier logico-physique. L'invariance de la quantité par rapport à son organisation n'est pas reconnue. La demande d'explication amène la reconnaissance de la relation d'équivalence entre des quantités organisées différemment.

Au palier logico-mathématique, elle écrit, ordonne, attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre, mais aucun critère des composantes procédurale ou abstraite ne semble sous-tendre ces formalisations. Ainsi, sa formalisation est très souvent instrumentale, sans véritable compréhension. La reconnaissance des relations d'inclusion est réalisée par une procédure qui n'implique pas nécessairement la conservation des unités de mesure de quantité. Elle sépare les chiffres du nombre. Elle semble satisfaire le critère de la composante procédurale du palier logico-mathématique relatif au retrait d'une quantité, puisqu'elle enlève correctement les 2 dizaines, mais elle ne retrouve pas le cardinal du reste.

Nous pouvons poser comme hypothèse que pour V., les nombres sont conçus comme des juxtapositions de chiffres ou de quantités, sans que des procédures conscientes et donc réutilisables n'y soient introduites. Ainsi, elle ne peut identifier les procédures qui lui permettent de lire les grands nombres, pas plus qu'elle n'utilise les habiletés de comptage pour retrouver le nom d'une quantité illustrée. Elle ne peut donc coordonner les chiffres et les unités de mesure de quantité pour les comparer.

Au terme des six expérimentations didactiques, V. juge l'entrevue finale moyennement difficile. Elle compte par 1 et par 190 facilement lorsqu'il n'y a pas de passage à la centaine. Elle éprouve des difficultés avec le double-comptage.

Tous les critères du palier logico-physique sont satisfaits, ce qui n'était pas le cas lors de l'évaluation initiale, en particulier pour les critères touchant les groupements (reconnaître une idée de quantité aux groupements). L'invariance de la quantité par rapport à son organisation est reconnue lorsqu'un matériel qui permet une correspondance entre les mots de la récitation de la comptine des nombres et l'illustration est utilisée. V. reconnaît maintenant immédiatement l'équivalence entre des quantités organisées différemment.

Au palier logico-mathématique, les critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique relatifs au tableau de numération et à la comparaison de nombres, sont satisfaits. Restent ceux relatifs à l'adaptation du comptage, au retrait d'une quantité et à l'arrondissement de nombres. Ainsi, V. enlève une quantité à un nombre, mais retrouve le cardinal de la quantité en observant les anneaux de l'abaque, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique. Elle semble satisfaire la composante procédurale du palier logico-mathématique relative à l'arrondissement de nombre, mais utilise une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, la comparaison des chiffres.

La composante abstraite du palier logico-mathématique demeure incomplète. L'inclusion des unités et des groupes dans les regroupements n'est pas reconnue. Elle reconnaît toutefois que le nombre à lire est inchangé quel que soit son organisation et conçoit les groupes comme autant d'unités de mesure de quantité. V. semble satisfaire tous les critères de la compréhension formelle. Toutefois, encore maintenant, une utilisation instrumentale des symboles ne permet pas de conclure que V. a une compréhension réelle, au sens où les chiffres représentent des unités de mesure de quantité conservées et incluses les unes dans les autres.

Une plus grande assurance à reconnaître les relations d'équivalence semble présente maintenant. V. utilise des procédures qui lui facilitent la lecture de nombre. Les nombreuses expériences de V. sur les différentes quantités semblent avoir permis des constructions au sens où, en présence d'un matériel comme les enveloppes et les jetons, V. compte et voit les changements, ce qui lui permet de réaliser sa tâche. Toutefois, ces constructions ne peuvent encore être expliquées par la réversibilité des transformations.

L'utilisation de procédures du palier logico-physique limite la généralisation des structurations, puisque V. ne peut prouver ce qu'elle avance. Elle doit encore se fier à l'intervenante pour évaluer les résultats obtenus. V. utilise encore plusieurs trucs, même si, à quelques reprises, elle observe leurs limites. Toutefois, en lui ayant permis de vivre des réussites, ce sont vers ces trucs que V. se tourne d'abord pour résoudre des problèmes.

Si le comptage permet d'introduire les opérations, alors on peut s'attendre à ce que ces dernières ne soient pas encore introduites pour résoudre les problèmes qui ont été posés. Ainsi, la comparaison entre des unités de mesure de quantité est encore difficile.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(f)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille million	(if)groupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre (subitizing)	(if)généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres.
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand.	(if)découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10) ou à 100) et le recompose en juxtaposant les éléments	
(if)reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante.	(if)compare les chiffres	(f)reconnaît la conservation de la pluralité à travers les différentes illustrations d'un nombre
(if)reconnaît le caractère commode des groupements(transport,évaluation, comparaison).	(f)compte des éléments et des groupes pour comparer ou illustrer	(f)réalise l'équivalence de quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(f)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre	(f)reconnaît l'invariance du nombre à lire	(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine ..., unité de mille.., unité de million..
(f)compare les nombres -compare les unités de mesure	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	(f)lit, (if)écrit, (if)ordonne des nombres
trouve le cardinal en : -adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité -additionnant les unités de mesure de quantité	reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	(if)plus le chiffre d'un nombre est à gauche plus sa valeur est grande (f)décompose un nombre de plusieurs façons
(f)trouve la dizaine, la centaine..qui précède ou suit -avec un matériel, -par un comptage ou -un double-comptage		
ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange		

4.1.5.2 Comment évolue la compréhension de V. à travers les différentes expérimentations didactiques

Trois thèmes touchent la conception du nombre de V. au cours de ces expérimentations didactiques : celui des conventions, celui des quantités et enfin celui des opérations. Nous observerons le cheminement de V. pour chacun de ces thèmes puisque ces derniers nous permettent de répondre à la deuxième partie de la question de recherche.

L'abstraction réfléchissante de V. évolue de généralisations issues de la composante procédurale du palier logico-physique, comme celle de grouper les chiffres par 3 à travers les ordres tout en conservant la régularité des positions, vers des généralisations qui coordonnent la valeur de position, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. La régularité de la base 10, les relations d'équivalence et la généralisation des relations d'équivalence, des manifestations de la composante abstraite du palier logico-physique, se construisent.

a) les conventions

La construction d'une compréhension des règles du tableau de numération, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique est découpée en étapes. Ainsi, l'observation des groupes de 3, la reconnaissance de ces groupes à l'intérieur de chacun des ordres, puis la reconnaissance de la régularité des positions à travers les ordres permettent une première construction. La difficulté à lire un nombre qui n'est pas organisé, amène la reconnaissance de la nécessité de cette organisation. Des réflexions successives («c'est le même nombre mais ça sonne pas pareil», «ce serait pareil mais j'aurais de la difficulté à le lire») permettent à V. de reconnaître que la lecture du nombre est inchangée quelle que soit son organisation.

b) les quantités

C'est en s'appuyant sur une coordination entre le tableau de numération et les unités de mesure de quantité, deux manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, que V. établit et généralise des relations d'équivalence entre 3 dizaines et 30, puis entre 1 centaine et 10 dizaines, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique. Cette construction ne permet pas l'abandon de la comparaison de chiffres entre eux ou la juxtaposition des quantités pour former un nombre, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-physique. L'abstraction réfléchissante de V. prend encore souvent appui essentiellement sur des manifestations de cette composante. Ainsi, V. généralise des relations d'équivalence (3 dizaines=30) et la régularité de la base 10, mais conclut qu'on ajoute des chiffres («on colle des 0»).

De tels trucs mémorisés permettent souvent de trouver des réponses justes, ce qui ne favorise pas, chez V., la nécessité de les compléter en éléments de compréhension, de sorte qu'elle demeure bien souvent instrumentale dans ses apprentissages. Ce n'est qu'avec la prise de conscience de l'absence des unités de mesure de quantité dans l'élaboration de plusieurs de ses solutions que V. semble recréer une coordination entre le tableau de numération et les unités de mesure de quantité, des manifestations de la composante procédurale du palier logico-mathématique, et la régularité de la base 10, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique.

La manipulation des enveloppes et la comparaison entre 5 dizaines et 50 dizaines permet de construire une conservation de la dizaine. La conservation de la centaine apparaît à la suite d'une coordination entre les unités de mesure de quantité et la régularité de la base 10, puis d'une coordination entre les unités de mesure de quantité et le comptage.

L'approximation de nombres est réalisée à la suite d'une coordination entre les positions où il est possible d'arrondir et la comparaison entre les nombres. Une deuxième coordination est privilégiée. V. utilise alors les billets de monopoly et les coordonne aux positions où il est possible d'arrondir. Par la suite, la manipulation des enveloppes et des jetons permet de comparer la quantité négligeable par rapport au tout.

b) les opérations

Ce n'est qu'avec l'arrivée des opérations que V. prend conscience que la valeur relative des chiffres implique la présence de leurs unités de mesure de quantité. L'emprunt, à réaliser lors d'une opération de soustraction, semble créer la nécessité de reconnaître que les chiffres ont une valeur relative. La conception des opérations de V. évolue alors de réfléchissements qui s'appuient sur les chiffres juxtaposés les uns aux autres, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, vers des réfléchissements qui s'appuient sur des relations d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique.

L'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure de quantité apparaît à la suite de coordination entre les relations d'équivalence entre des quantités organisées différemment et leur formalisation, puis d'une deuxième coordination entre le principe de cardinal et les positions du tableau de numération.

La juxtaposition disparaît lorsque V. comprend que les positions du tableau de numération représentent ces unités de mesure de quantité. Les relations de changements par l'ajout et le retrait, en facilitant l'introduction du tableau de numération, créent une relation entre convention et valeur. Le réseau sémantique favorise d'ailleurs un dialogue à ce propos lorsque V. attribue à la soustraction et la division la relation «contraire» de celle de l'addition et de la multiplication. La multiplication est d'ailleurs introduite à la suite d'une coordination entre les relations d'équivalence et le comptage.

Un mot au sujet des attitudes de V. Comme nous l'avons vu au cours de l'expérience, au début des huit semaines, V. semble «réagir» avant d'«agir» devant une tâche. L'exploration de nouvelles coordinations entre les différentes composantes semble créer beaucoup de désordre dans sa pensée. Elle ne s'accorde pas de temps d'arrêt, pose les actions avant que la consigne ne soit exprimée, propose des exemples qui amènent de nouveaux problèmes. Cela rend difficile l'aboutissement d'une réflexion logico-mathématique.

Nous cherchons d'abord à comprendre ce que dit V., puis à suivre sa pensée. En cours d'expérimentation nous avons dû nous questionner sur les suggestions à formuler et sur la pertinence d'utiliser tous ses «lapsus» et exemples. À certains moments nous avons choisi de proposer des suggestions à d'autres de ne pas retenir toutes les erreurs qui apparaissaient.

V. a besoin de construire une «réflexion» sur ses actions mais ces constructions, même lorsqu'elles s'appuient sur du matériel, la mènent vers de nouveaux sujets. La dispersion qui en résulte ne laisse pas apparaître les confrontations nécessaires. Lorsqu'elles se produisent, cela semble grandement insécuriser V.. Pour elle, il est important de trouver une réponse à une question, quelle qu'elle soit.

Au fil des expérimentations, le dialogue tente d'introduire la comparaison entre les nombres et la prise en compte des chiffres comme représentants d'unités de mesure de quantité au moyen du matériel (enveloppes et billets de monopoly, abaque). V. inscrit alors dans sa démarche de résolution, des étapes intermédiaires, introduisant un temps d'arrêt entre la question et la réponse.

4.1.6 Résultat de l'étude de cas de S.

4.1.6.1 Structurations partielles, structurations généralisables

Au cours de l'évaluation initiale, S. satisfait plusieurs critères du palier logico-physique. Toutefois, le critère de la composante intuitive, relatif à l'idée de quantité plus ou moins grande des différents groupements, est gênée par la confusion entre dizaine et dixième, centaine et centième. S. satisfait quand même les critères de la composante procédurale. Un des critères de la composante abstraite du palier logico-physique n'est pas satisfait : la reconnaissance de l'équivalence entre des quantités organisées différemment.

Au palier logico-mathématique, le critère de la composante procédurale logico-mathématique, relatif à la comparaison entre les unités de mesure de quantité, n'est pas satisfait. S. établit toutefois une équivalence entre 20 et 2 dizaines avant d'effectuer sa soustraction et utilise la soustraction des petits nombres (3-2=1). Les critères de la composante abstraite, relatifs aux relations d'inclusion et à la conservation des unités de mesure de quantité, ne sont pas satisfaits.

S. semble satisfaire les critères de la composante formelle. Il a appris à attribuer une quantité plus ou moins grande aux différentes chiffres d'un nombre, à lire, à écrire et ordonner des nombres. Il ne peut toutefois satisfaire le critère de la composante formelle relatif à la décomposition, ce qui semble normal étant donné sa difficulté avec les unités de mesure de quantité.

Suite à ces procédures et raisonnements, nous savons que la construction des unités de mesure de quantité n'est pas complétée. Ainsi, S. confond les termes utilisés pour les identifier, privilégie une procédure liée à la juxtaposition de chiffres pour retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans le nombre 22 220, trouve des décompositions du nombre 709 en choisissant des quantités qui peuvent être juxtaposées, sans penser les réunir. L'absence de coordination entre nombre et unités de mesure de quantité semble entraver la construction des opérations dans sa compréhension de la numération positionnelle. Ainsi, des actions comme le comptage et les opérations n'apparaissent pas durant l'entrevue, si elles ne sont pas sollicitées explicitement.

Au terme des six expérimentations didactiques, l'évaluation finale démontre que tous les critères du palier logico-physique sont satisfaits. Au palier logico-mathématique les critères de la composante procédurale sont satisfaits. S. compare des unités de mesure de quantité, arrondit en utilisant le double-comptage pour comparer les nombres. S. est plus habile à reconnaître l'invariance des différentes unités de mesure de quantité et les relations d'inclusion qu'elles amènent. Il additionne maintenant les unités de mesure de quantité pour en retrouver la quantité dans un nombre. Malgré ces manifestations, il semble y avoir encore quelques «trous». Une confusion entre relations d'équivalence et changement par le retrait persiste.

S. satisfait maintenant tous les critères de la composante formelle lors de l'évaluation finale. Il attribue une valeur différente aux chiffres d'un nombre et décompose un nombre. Il considère toutefois encore la lecture de nombres composés de 7 chiffres difficile.

En conclusion, des structurations généralisables et durables sont présentes comme le démontre la satisfaction de plusieurs critères du palier logico-mathématique. La compréhension des unités de mesure de quantité est complétée et devient fonctionnelle en utilisant l'addition. Les opérations et les relations d'inclusion des unités de mesure de quantité font maintenant parti de sa construction de nombres. La comparaison s'appuie maintenant soit sur une coordination entre nombre et unités de mesure de quantité, soit sur une coordination entre les unités de mesure de quantité. Les relations d'équivalence sont généralisées. Nous pouvons observer l'influence des habiletés de comptage sur le jugement numérique de S..

Sa connaissance des unités de mesure de quantité ne semble pas suffisante pour éliminer la confusion entre relations d'équivalence et changement par le retrait. Lorsqu'il lui est demandé de faire la preuve, des relations d'établissent, des confrontations émergent, ce qui semble introduire un aspect réflexif. S. n'est toutefois pas encore en mesure d'utiliser cette réflexion seul même s'il juge l'évaluation finale plus facile que l'évaluation initiale.

PALIER LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
(f)attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille, million	(if)groupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre (subitizing)	(if)généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres
(if)considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand	(if)découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10) ou à 100) et le recompose en juxtaposant les éléments	
(if)reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante	(if)compare les chiffres	(if)reconnaît la conservation de la quantité à travers les différentes illustrations d'un nombre
(if)reconnaît le caractère commode des groupements (comptage)	(if)compte des éléments et des groupes pour comparer ou illustrer	(f)reconnaît l'équivalence entre des quantités organisées différemment

PALIER LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
(f)identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre	(if)généralise aux ordres des mille ou des millions ce qui existait à l'ordre des unités	(f)utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine ..., unité de mille.., unité de million..
(f)compare les nombres (f)compare des unités de mesure de quantité	(f)conçoit les différents groupements comme autant d'unités de mesure d'une quantité	lit, (if)écrit, (if)ordonne des nombres
(f)trouve le cardinal en: adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité en additionnant les unités de mesure de quantité	(f)reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	(f)décompose un nombre de plusieurs façons
(f)trouve la dizaine, la centaine..qui précède ou suit avec un matériel, par un comptage ou un double-comptage		(if)plus le chiffre d'un nombre est à gauche plus sa valeur est grande
(if)ajoute, enlève ou partage les unités de mesure en y appliquant les relations d'équivalence		

4.1.6.2 <u>Comment évolue la compréhension de S. à travers les différentes expérimentations didactiques</u>

Deux thèmes touchent la conception du nombre de S. au cours de ces expérimentations didactiques, celui des quantités et celui des opérations. Nous observerons le cheminement de S. pour chacun de ces thèmes puisque ces derniers nous permettent de répondre à la deuxième partie de la question de recherche.

L'abstraction réfléchissante de S. évolue de réfléchissements s'appuyant sur les groupes de chiffres vus comme nombre dans le nombre, une manifestation de la composante procédurale du palier logico-physique, vers la conception des nombres comme représentants de quantités, une manifestation de la composante formelle. Cette évolution apparaît à la suite de différentes coordinations entre des composantes des deux paliers, mais aussi entre des composantes du palier logico-mathématique. Par la conservation des unités de mesure de quantité et les relations d'inclusion, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, des généralisations importantes apparaissent.

a) les quantités

Au départ, les unités de mesure de quantité sont oubliées au profit des chiffres. Ainsi la quantité 41 dizaines est illustrée par 5 enveloppes de dizaines. La compréhension abstraite du palier logico-mathématique de la dizaine comme unité de mesure de quantité qui est «conservée» à l'intérieur des autres unités de mesure de quantité, introduit une coordination entre, d'une part, une relation d'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et d'autre part, l'addition entre les quantités (400+10=410), une manifestation de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Ainsi, S. reconnaît que 41 dizaines = 410. Cette coordination produit toutefois une confusion, encore présente à la fin des expérimentations didactiques : S. croit que l'équivalence entre 10 dizaines et 1 centaine implique l'ajout de cette centaine automatiquement.

Cette coordination entre relation d'équivalence et addition s'élabore «par petits pas». D'abord par la réunion d'unités de mesure semblables, comme 41 dizaines ou 51 centaines. Ensuite, par l'addition d'unités de mesure de quantité distinctes (3 dizaines, 10 unités et 3 unités). Cette addition exige une coordination supplémentaire. Une relation d'équivalence, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, et une conservation des unités de mesure de quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique, précèdent l'opération d'addition.

Notons que la comparaison que S, réussit finalement à établir entre 908 et 908 unités, exige de sa part non seulement la reconnaissance de l'invariance de la quantité, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, mais aussi une reconnaissance de celle d'équivalence entre 9 centaines et 900 unités.

Une nette évolution apparaît ensuite dans les coordinations entre deux critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique, la comparaison entre les unités de mesure de quantité et l'opération d'addition, desquelles émergent une conservation de la dizaine et de la centaine, une manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique. S. parle alors du contenu des unités de mesure de quantité, représenté par les chiffres et les additionne entre eux.

b) les opérations

Les opérations sont très liées à notion de quantité, comme nous venons de le voir. Ainsi, une coordination entre les relations d'équivalence et la conservation des unités de mesure de quantité semble avoir introduit l'opération d'addition entre les unités de mesure de quantité. Cette opération contribue par la suite à la généralisation de relations d'équivalence et à la construction de nouvelles unités de mesure de quantité.

Au cours des six expérimentations didactiques le dialogue tente de faciliter la distinction et la coordination entre les relations d'équivalence et les opérations. Une demande d'explication, une question ou la manipulation des enveloppes et des jetons deviennent suffisants pour reconnaître une confusion ou pour substituer l'opération d'addition au comptage et pour amener une utilisation ultérieure de la correction effectuée. Les explorations de nouvelles structurations généralisables se réalisent. Ces explorations impliquent parfois l'abandon de procédures ayant déjà fait leurs preuves. Elles ne seront donc pas retenues immédiatement.

4.2 Résultats en regard de l'analyse conceptuelle du concept de numération positionnelle

Cette section nous permet d'observer comment se construisent les critères des différentes composantes de la compréhension du modèle de Bergeron et Herscovics (1989). Les critères du tableau de développement de la compréhension élaborés pour le concept de numération positionnelle ont resurgi des thèmes identifiés lors de l'analyse des études de cas. Le fait de regrouper les informations en thèmes (les quantités, les opérations ou les conventions) a permis de retrouver des coordinations entre les réfléchissements et les régulations. Ces coordinations favorisent la construction de réflexions, des schèmes ou des structurations.

Nous nous attarderons davantage aux critères que les enfants ont construits durant les expérimentations didactiques. Ainsi, pour la plupart des enfants les critères de la composante intuitive et de la composante procédurale étaient déjà installés. Nous ne retiendrons de ces critères que ceux relatifs à la juxtaposition des chiffres dans le nombre et à l'illustration d'un nombre. En effet, le premier critère semble particulièrement difficile à abandonner, alors que le deuxième est essentiel à la formation des critères du palier logico-mathématique. C'est pour ces raisons qu'ils attirent notre attention.

Par la suite, nous observerons comment se sont construits les critères des composantes abstraites du palier logico-physique et du palier logico-mathématique, puis les critères de la composante procédurale du palier logico-mathématique. Les critères de la composante formelle ne seront pas analysés pour la même raison que ceux des composantes intuitive et procédurale du palier logico-physique. Mis à part, celui où il est question de la décomposition de nombres, ils sont souvent en place dès le début des expérimentations.

Il est à noter que nous porterons une attention toute spéciale aux critères qui sont apparus importants pour les enfants dans le déroulement des expérimentations didactiques, critères que nous avions considérés comme déjà présents chez les enfants où que nous avions assimilés à d'autres.

4.2.1 Palier logico-physique

4.2.1.1 Juxtaposition des éléments

Ce critère est issu d'un réfléchissement qui s'appuie sur la connaissance des chiffres ou des groupements manipulés et sur une régulation qui utilise l'organisation spatiale. Cette organisation peut être conventionnelle, en étant fidèle aux positions du tableau de numération, ou non conventionnelle. Berdnarz et Dufour-Janvier (1986) avait d'ailleurs démontré la prédominance de ce type de procédure chez les enfants de troisième année.

Ces conceptions permettent de trouver des solutions satisfaisantes pour former des nombres. Par exemple, 14 dizaines et 5 unités forment le nombre 145, 4 centaines et 4 dizaines et 5 unités forment le nombre 445, le nombre 5531 est le plus grand qu'il est possible de former avec les chiffres 3, 5, 1 et 5. Ces réalisations permettent de trouver des solutions justes, que ces enfants peuvent vérifier en «regardant» la disposition des objets, sans l'opération de réunion propre à l'addition. Cela rend d'autant plus difficile l'introduction de procédures de comptage ou d'opérations.

Les implications de telles conceptions, pour les cas d'enfants que nous avons rencontrés, ont été les suivantes. L'utilisation de ce critère permet de comparer les chiffres d'un nombre entre eux lorsqu'il s'agit de former le nombre le plus grand. Il amène toutefois des réflexions comme «une dizaine c'est un paquet de 2» ou «les chiffres collés forment un gros gros nombre». Dans d'autres cas, les enfants juxtaposent les différents éléments intervenant lors des manipulations. Ainsi, les chiffres et les quantités sont juxtaposés, considérés comme tout aussi important les uns que les autres. À ce moment un paquet de 10 unités est appelé 10 dizaines, 30 est appelé 30 dizaines. Il arrive même que l'utilisation des relations d'équivalence, présentes pour résoudre une tâche, soient estompées au moment où l'enfant explique ce qui a été fait. «On colle des 0», explique V. pour former le nombre 5100 avec la quantité 51 centaines.

4.2.1.2 Compare des chiffres et des quantités

Dans l'analyse théorique réalisée, ce critère, relatif à la comparaison entre des nombres, laissait apparaître différentes procédures. Le comptage un par un, à rebours ou par bonds à partir d'un nombre jusqu'à un autre nombre, le comptage d'une partie d'un nombre à une autre partie d'un autre nombre permettait de comparer des nombres.

Les comparaisons réalisées par I., E. Ch., V. permettent de nous rendre compte de l'importance de ce geste non seulement dans le cas où des chiffres sont comparés mais aussi dans les cas où des groupes sont comparés. Ainsi, l'enfant compare des groupes différents. Il compare aussi un groupe et plusieurs groupes (1 dizaine et 10 dizaines), ce qui favorise un début de compréhension de la conservation des groupes.

Les implications de cette procédure pour les enfants rencontrés ont été les suivantes. Cette procédure permet l'émergence de l'idée de conservation de la dizaine ou de la centaine. Toutefois, une utilisation privilégiée de cette procédure, en particulier dans le cas des relations d'équivalence et de la généralisation des relations d'équivalence, ne permet pas d'introduire des gestes où interviennent le comptage et l'opération de réunion. L'enfant n'arrive pas, à ce moment à se dégager d'un arrangement où prédominent les aspects qualitatifs, pour y introduire des aspects quantitatifs.

4.2.1.3 Principe de cardinal

Pour E. il faut revenir sur l'établissement de relations entre le nombre et le comptage de ses diverses illustrations pour revoir le principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente la quantité totale d'objets (Gelman et Gallistel, 1986). Dans le cas de S., une coordination entre l'invariance de la quantité quelle que soit son organisation et la relation d'équivalence entre deux quantités identifiées différemment a permis de reconnaître que 908 et 908 unités étaient des quantités équivalentes. Pour Cl., le comptage des unités permet de le construire.

Nous n'avions pas retenu, au départ, ce principe comme critère de la compréhension. Nous avons cru que les enfants possédaient ce principe et pouvait l'utiliser. Force nous est de constater que pour les enfants de troisième année, entre autre, il doit être reconstruit. Rappelons que Cl. cherchait à recompter l'enveloppe de centaine qu'elle venait d'appeler 100. Le principe de cardinal, que nous avons déterminé comme étant une manifestation de la composante abstraite du palier logico-physique, requiert que l'enfant abstraie des éléments comptés, uniquement «leurs caractéristiques d'entités distinctes», comme le disent Shipley et Shepperson (1990).

Nous avons pu observer les implications de ce principe au moment où il sert de réfléchissement pour coordonner une régulation: le comptage des unités à travers les différents groupes. Ainsi, il devient possible de construire une conservation de l'unité et d'adapter le comptage aux différentes unités de mesure de quantité.

Dans le cas où le comptage n'est pas coordonné avec le principe de cardinal, nous pourrons voir apparaître des juxtapositions de quantités. Ainsi, comme le dit I. durant l'évaluation initiale, 202 moins 20 donne le nombre 182 et 182 c'est : «100 centaines, 80 dizaines et 2 unités».

4.2.1.4 Relations d'équivalence

La reconnaissance de relations d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine, entre 10 dizaines et 1 centaine est amenée par un réfléchissement qui s'appuie sur une invariance de la pluralité par rapport à l'organisation et une régulation permise par la manipulation du matériel. Dans le cas de I. des comparaisons non seulement entre 1 dizaine et plusieurs dizaines ont été nécessaires. Il a aussi fallu comparer le contenant et le contenu et associer les mots enveloppe et dizaine. C'est ici que cette association est facilitée si l'enfant a une connaissance du nom des groupements utiles dans la vie courante. D'autre part, une régulation où intervient les habiletés de comptage, permet aux enfants de constater eux-mêmes l'équivalence entre les quantités organisées différemment, sans besoin de l'approbation de l'adulte.

V. appuie son réfléchissement sur sa connaissance du tableau de numération qu'elle coordonne avec les unités de mesure de quantité. Toutefois, des retours en arrière sont visibles. Ainsi, ce n'est qu'avec la prise de conscience de la régularité de la base 10, que les relations d'équivalence semblent plus stables.

Les implications de ce critère apparaissent lorsque S., par exemple, les utilise pour construire une conservation de la dizaine comme unité de mesure de quantité. De plus, la généralisation des relations d'équivalence semble introduire un schème fondamental : le comptage.

Copeland (1979) observait la reconnaissance d'une relation d'équivalence chez les enfants à la suite de la construction d'une invariance de la quantité. Nous avons pu remarquer la manifestation de ce critère dans le cas de Ch., alors qu'elle ne reconnaît pas l'invariance de la pluralité durant l'évaluation initiale, ce qui ne se produit pas pour les autres enfants.

4.2.1.5 <u>Généralisation des relations d'équivalence</u>

Ce critère apparaît lorsque I. et S. s'appuient sur un réfléchissement à partir de la reconnaissance de la relation d'équivalence entre des quantités (10 unités c'est 1 dizaine) qu'ils coordonnent au comptage (30 c'est 3 dizaines). C'est alors, que se généralisent les relations d'équivalence. Nous n'en avions pas fait un critère distinct de celui de la relation d'équivalence. Toutefois, au cours des expérimentations didactiques, nous observons la difficulté éprouvée par les enfants à introduire les opérations ou le comptage. Ainsi, même si «perceptivement» les enfants reconnaissent l'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine, ils doivent nécessairement introduire le comptage pour reconnaître que 30 est équivalent à 3 dizaines. Sans l'introduction de cette régulation, les quantités sont juxtaposées, comme le démontre E. lorsqu'il dit que 20 plus 10 unités donnent 210.

4.2.1.6 La régularité de la base 10

Considéré d'abord comme faisant parti du critère qui permet à l'enfant de reconnaître les relations d'équivalence, ce critère s'est avéré distinct. Il se situe au carrefour des deux paliers et c'est ce qui le rend difficile à classifier. D'une part, il se construit par une coordination entre la fabrication de dizaines avec des unités, de centaines avec des dizaines et l'observation des relations d'équivalence entre les quantités. D'autre part, il s'approfondit en coordonnant les positions du tableau de numération et les groupements. Un pont entre des régulations portant sur des déplacements logico-physiques (grouper, mettre, enlever des chiffres) et une coordination entre les positions et les groupements apparaît.

Toutefois, en étant une régularité conventionnelle, ce critère peut être mémorisé et utilisé de façon strictement instrumentale. C'est ce qui pourrait expliquer le peu de succès de nos interventions lorsque nous introduisons les différentes bases pour faciliter la compréhension de notre système de numération. Les enfants en difficulté considèrent chacune des bases comme autant d'apprentissage à réaliser, plutôt que d'y retrouver le concept de régularité.

Les implications de la présence de ce critère sont relatives à la construction d'une conservation des unités de mesure de quantité, à l'utilisation d'une procédure pour lire un nombre considéré difficile. Les généralisations n'apparaissent d'abord que pour des unités de mesure connues. La familiarisation avec le tableau de numération permet une généralisation de la régularité à de nouvelles unités de mesure de quantité, en utilisant une coordination entre la régularité de la base 10 et les opérations, comme la multiplication.

4.2.2 Palier logico-mathématique

4.2.2.1 Approximation de nombres et comparaison de nombres

Ces deux critères se construisent et s'enrichissent mutuellement. Par un réfléchissement qui prend pour appui l'identification de la position à arrondir, puis de la position supérieure et inférieure, l'enfant coordonne une régulation par le double-comptage pour construire une réflexion où est privilégiée la comparaison entre les nombres. Les enfants n'utilisent pas immédiatement le double-comptage comme régulation. Il semble plus facile d'utiliser le contexte du magasin, où il faut arrondir à une position supérieure, et le contexte de la classe, où il est souvent demandé d'arrondir à une position inférieure. Par la suite, le double-comptage introduit l'idée de distance entre le nombre arrondi et le nombre de départ, ce qui permet de comparer les nombres entre eux, et de délaisser la comparaison entre les chiffres du nombres et le chiffre 5. Seul S. semble construire une réflexion selon laquelle, il n'y a que «5 pas entre...».

L'implication de la construction d'un tel critère est l'idée de quantité qu'il implique lorsque l'enfant lit ou écrit des nombres. Ainsi, comme le disent Newman et Berger (1984), ce critère permet à l'enfant de porter un jugement sur la numérosité.

4.2.2.2 Les opérations et le comptage

Les opérations introduisent un nouvel aspect à la construction de nombres. Plusieurs observations sont nécessaires avant que les enfants ne réalisent l'importance des opérations dans la construction du nombre. Ainsi, l'algorithme de l'addition, la soustraction avec emprunt créent la nécessité de retrouver le nombre qui correspond à une quantité avant de réunir ou de retirer des quantités, nécessité qui n'est pas présente lorsqu'on compte ou qu'on observe les enveloppes et les jetons.

Par la suite, la discussion suscitée par la construction d'un réseau sémantique facilite, chez E. , V. et Ch., un enrichissement en coordonnant les opérations et les unités de mesure de quantité, reconstruisant une réflexion sur le sens des symboles et le processus (enlever, ajouter...) qui peut se «défaire».

Ensuite, la recherche de la pluralité des quantités à réunir permet de dégager l'addition comme opération nécessaire. Une coordination entre le comptage et ce qui est compté (les unités ou les dizaines) favorise la mise en correspondance entre les opérations et leur sens. Enfin, une demande d'explication ou une question, durant la manipulation de matériel, permet à l'opération d'addition de se substituer au comptage.

L'exploration de ces coordinations ne signifie toutefois pas que des retours en arrière ne se feront plus. Ainsi, I. explique les relations entre les opérations, lors de la dernière expérimentation didactique, en observant le déplacement de leurs chiffres. S. confond relation d'équivalence et changement par l'ajout. Relation d'équivalence et conservation des unités de mesure de quantité, précèdent la nécessité d'utiliser l'opération d'addition.

Ces explorations impliquent toutefois l'abandon de procédures ayant déjà fait leurs preuves. Elles ne seront donc pas retenues immédiatement. Cependant, lorsque les opérations font partie de la construction de nombres de l'enfant, elles rendent les raisonnements des enfants logico-mathématiques. Elles permettent à l'enfant de se dégager de raisonnement où l'espace est pris en compte.

Il nous a semblé, comme l'ont souligné Von Glaserfeld et Steffe (1985) que le comptage précédait l'opération unifiante. En effet, en particulier dans les cas où l'enfant doit adapter le comptage selon les différentes unités de mesure de quantité, ce schème introduit une représentation mentale des unités ou des dizaines, un début de conservation des unités de mesure de quantité. Ce geste (compter) mental (représentation mentale) semble faciliter l'émergence de l'addition comme le montre S. lorsqu'il retrouve les 15 dizaines du nombre 159.

4.2.2.3 Le nombre à lire reste inchangé

V. et Ch. ont construit une observation selon laquelle le nombre reste inchangé qu'il y ait ou non des espaces entre les chiffres. Ce critère est nouveau pour nous. Il se construit par une coordination entre la reconnaissance de la nécessité d'organisation et la connaissance des positions du tableau de numération. Cette nécessité apparaît lorsqu'un nombre est jugé difficile à lire. Des réflexions successives («c'est le même nombre mais ça sonne pas pareil», «ce serait pareil mais j'aurais de la difficulté à le lire») permettent alors de construire ce critère. Nous l'avons jugé particulier au palier logico-mathématique puisqu'il implique la connaissance d'un critère de la composante procédurale (attribue un chiffre à chaque position et un position à chaque chiffre) et qu'il introduit l'idée du nombre entier comme représentant d'une quantité.

4.2.2.4 Conservation des unités de mesure de quantité

Les actions de comptage amènent, comme nous l'avons vu, des réflexions sur les unités de mesure de quantité. Ces unités de mesure de quantité nécessitent une organisation conventionnelle, comme celle que propose le tableau de numération. Cependant, des relations d'équivalence entre les quantités sont nécessaires à la construction de la conservation des unités de mesure de quantité.

Ainsi, les enveloppes et les jetons, la représentation mentale de ce matériel servent de réfléchissement pour construire la régularité de la base 10, sur laquelle peut s'appuyer soit le comptage des unités ou des dizaines soit l'opération sur les différentes unités de mesure de quantité. De nouvelles unités de mesure se construisent en coordonnant des manifestations de la régularité de la base 10 et des opérations. Fuson (1990), Ross (1989), (Kamii et Joseph, 1988) pensent que les différentes unités de mesure de quantité se construisent sur le système de l'unité. Voyons comment les élèves rencontrés ont construit ce critère.

a) l'unité

Deux types de coordinations sont observés. Une première, où la présence de l'unité dans le nombre, peu importe comment ce nombre est présenté, est reconnue. Par exemple, le nombre 908, c'est aussi et encore 908 unités. Cette conservation est très près de celle du principe de cardinal, principe qui semble se perdre au fur et à mesure que les nombres deviennent imposants. Par la construction d'une conservation de l'unité comme unité de mesure de quantité, le principe de cardinal semble maintenant reconnue. Une deuxième où, la construction de l'unité semble se réaliser au moyen d'une simple mise en correspondance entre la position unité et les objets unitaires.

a) la dizaine

La construction d'une conservation de la dizaine comme unité de mesure de quantité se bâtit à partir de réfléchissements appuyés sur des relation d'équivalence et d'une régulation où intervient le comptage. Elle se construit aussi par une coordination entre la manipulation des enveloppes et des jetons et le comptage. L'adaptation du comptage en fonction des unités de mesure recherchées rend est alors nécessaire la construction de cette conservation.

Les différentes coordinations entre des critères des composantes procédurales et formelles, introduites par l'adaptation du comptage, favorisent cette conservation. Ainsi, prendre 1 seule dizaine dans ses mains et la mettre en correspondance le vocabulaire courant (enveloppe) puis formel (dizaine), permet ensuite de compter ces dizaines pour identifier ce qui est dénombré.

La construction de la dizaine comme unité de mesure de quantité s'effectue aussi en observant l'opposition entre une dizaine et plusieurs. Ces comparaisons ont été très importantes pour I., entre autre. Une invariance de la quantité par rapport à son organisation et une équivalence entre des quantité organisés différemment doivent alors être reconnues. Ces constructions servent de réfléchissement pour distinguer le comptage entre le contenu et le contenant.

c) la centaine

La construction de la centaine semble se réaliser en appuyant un réfléchissement sur la manipulation de jetons et d'enveloppes et une régulation où intervient le comptage. Une relation de comparaison entre 1 centaine et plusieurs centaines a été nécessaire à I.. Apparaissent ensuite des réfléchissements qui s'appuient sur des relations d'équivalence. La généralisation de ces relations d'équivalence permet d'introduire soit le comptage soit les opérations et de reconnaître la réversibilité des transformations.

d) dizaine de mille

La construction de la dizaine de mille requiert un réfléchissement à partir de la régularité de la base 10, élément appartenant à la composante abstraite du palier logico-physique. La régularité des positions qui se succèdent permet la coordination nécessaire à la construction de cette manifestation de la composante abstraite du palier logico-mathématique.

Les implications de telles constructions comme unités de mesure «conservée» à l'intérieur des autres unités de mesure, introduisent une réflexion sur l'addition comme opération nécessaire pour réunir des quantités (400+10=410). L'absence d'une compréhension abstraite du palier logico-mathématique de l'unité comme unité de mesure invariante laisse apparaître des confusions entre le nom du nombre et ses unités de mesure de quantité. Ainsi, 145 contient 40 dizaines et le nombre 202 a 20 dizaines.

Ces constructions laissent apparaître l'importance pour les enfants, de concevoir les différentes unités de mesure de quantité comme «multi-unité» de grandeurs différentes, de comprendre les mots et les symboles du système de numération comme le mentionne Fuson (1990). En effet, des coordinations entre des procédures et des formalisations ont semblé contribuer à la construction de ce critère.

De plus, les diverses conceptions décrites par Steffe et Von Glaserfeld (1983) en regard des types de dizaines pour les enfants de 7 ans correspondent à des manifestations observées chez les enfants que nous avons rencontrés. Ainsi, pour ces chercheurs, l'enfant de 7 ans conçoit d'abord la dizaine comme unité de mesure équivalente à une unité dans la perspective d'unité et différente dans une perspective de numérosité. À cet effet, nous avons vue apparaître des réflexions comme 10 unités c'est 10 dizaines ou 30 c'est 30 dizaines. Par la suite, la dizaine maintient sa numérosité de 10. Les relations d'équivalence entre 10 unités et 1 dizaine peuvent être reconnues. Troisièmement l'enfant compte par 10 et par 1 la dizaine. Nous avons appelé cette étape : adapte le comptage selon les unités de mesure de quantité. Quatrièmement la dizaine est vue comme une unité itérative. Nous avons pu observer à ce moment la capacité de généraliser les relations d'équivalence. Enfin, la dizaine est interchangeable avec les 10 unités, ce qui facilite les opérations avec emprunt et retenue.

4.2.2.5 Relations d'inclusion

Les relations d'inclusion, qui facilitent l'identification de la quantité d'unités de mesure de quantité dans un nombre, peuvent surgir de la conservation des unités de mesure de quantité. L'addition semble favoriser une évolution de la compréhension de cette relation d'inclusion. Sans l'intervention de cette opération, la manifestation de relations d'équivalence sert de réfléchissement et le comptage de régulation, mais la généralisation des relations d'inclusion n'est pas observée, comme le démontre Cl. La construction des diverses unités de mesure de quantité à elle seule, n'est pas suffisante non plus pour établir des relations d'inclusion. Ainsi, I. croit que 3 centaines composent 3000. Ch. croit que le nombre 202 contient 22 dizaines, parce que le 0 ne compte pas. Les relations d'inclusion sont alors encore estompées au profit de juxtapositions de quantité.

Les implications de la construction de ce critère ne sont pas apparues clairement durant les expérimentations puisque seul S. réutilise ces relations. Elle semble toutefois faciliter les opérations où interviennent des changements aux unités de mesure de quantité.

4.2.2.6 La lecture de nombres

La construction de ce critère apparaît à la suite de plusieurs petites étapes pour Ch. et pour V.. Premièrement, elles observent les nombres et leur découpage (groupe de 3 chiffres). Deuxièmement, elles reconnaissent que ces groupes existent à l'intérieur de chacun des ordres. Enfin la régularité des positions à travers les ordres est observée. La difficulté à lire un grand nombre sans organisation est nécessaire pour compléter cette construction. Toutefois, considérer les grands nombres comme les représentants de quantité requiert soit la construction des critères de la composante abstraite du palier logico-mathématique comme la relation d'inclusion, soit une association entre chiffres et unités de mesure de quantité. Sans ces constructions, la lecture et l'écriture de nombres sont basées, sur des procédures sans «sens numérique», comme le mentionne Labinowicz (1985).

4.3 Résultats en regard de l'hypothèse posée

Rappelons que l'hypothèse a été posée afin de répondre de façon théorique à la question de recherche. Ainsi, la question tente d'étudier comment la compréhension des enfants (au sens de Bergeron et Herscovics) évolue pour le concept de numération positionnelle. L'hypothèse résout ce problème en expliquant que l'abstraction réfléchissante constitue le levier qui favorise le passage et l'intégration des critères des différentes composantes entre elles.

À la lecture des résultats de la recherche nous constatons que l'hypothèse de recherche est confirmée dans certaines conditions. Ainsi, les enfants rencontrés reconnaissent fréquemment les particularités pertinentes à la construction de schèmes généralisables et durables. Ainsi, ils transfèrent des schèmes ou des structures, le premier mouvement de l'abstraction réfléchissante.

Toutefois, les mécanismes régulateurs utilisés semblent leur poser des problèmes. Rappelons qu'une coordination entre transfert et régulation permet de construire une réflexion, une forme particulière de l'abstraction réfléchissante. Ces problèmes invitent alors les enfants à revenir vers des réflexions, le second mouvement de l'abstraction réfléchissante, où l'organisation des groupes et des chiffres dans un espace donné est privilégiée. Nous nous attarderons un moment sur les mécanismes régulateurs utilisés par les enfants.

Plusieurs régulations différentes apparaissent au cours des expérimentations. Le comptage, le double-comptage mais aussi la comparaison et la mémorisation de convention.

Chez tous les enfants, le comptage apparaît régulièrement comme mécanisme régulateur. La recherche du nom de la pluralité illustrée, la reconnaissance de relations d'équivalence et leur généralisation, la conservation des unités de mesure de quantité et l'identification de la quantité d'unités de mesure de quantité incluses dans un nombre sont les tâches qui sollicitent cette régulation.

Une difficulté dans les habiletés de comptage ne permet pas à l'enfant de construire une réflexion adaptée à des nombres plus grands. En étant «court-circuitée» durant son processus, la réflexion de l'enfant revient à des structurations connues, comme la juxtaposition de quantités et de chiffres. Cl. illustre bien ce retour en arrière lorsqu'elle éprouve des difficultés à compter les enveloppes et les jetons pour retrouver le nom du nombre.

Le double-comptage, une autre forme de régulation, arrive dans les cas où l'enfant doit vérifier l'approximation de nombres. Cette régulation n'est pas utilisée efficacement par tous les enfants. Elle est donc remplacée, au départ, par le comptage des billets de monopoly, le contexte du magasin et l'évaluation de la distance ou du temps de comptage entre deux nombres.

La comparaison, une troisième régulation apparue au cours des expérimentations, sert plus particulièrement à I., lors de la construction de la conservation des unités de mesure de quantité. Ce mécanisme régulateur, bien qu'intéressant dans les cas où I. compare une dizaine et plusieurs dizaines, laisse intervenir davantage un aspect logico-physique. Ainsi, I. observe, mais n'introduit pas nécessairement une opération de réunion.

Des conventions apparaissent aussi comme mécanismes régulateurs. C'est le cas de la régularité de la base 10, des règles d'organisation du tableau de numération. À ce moment, c'est souvent l'approbation de l'adulte qui favorise la construction d'une réflexion plus évoluée. C'est ce qui arrive dans le cas où I. et V. construisent les règles du tableau de numération. Toutefois, dans ces cas, l'enfant devient dépendant de l'approbation de l'adulte puisque les conventions sont essentiellement des choix sociaux.

Chez S., lorsque la réversibilité apparaît, aucune autre régulation ne semble intervenir. À ce moment, la pensée permet de contourner les difficultés que peut apporter l'utilisation de régulations comme le comptage, où l'enfant est moins habile, ou la comparaison, où l'enfant observe des aspects qualitatifs.

Toutefois, cette forme de pensée n'apparaît que dans les cas où les coordinations ont été suffisamment nombreuses et fructueuses pour être remplacées. Reix (1982) rappelle d'ailleurs que pour Piaget «toute connaissance nouvelle résulte de régulations, donc d'une équilibration, le mécanisme régulateur étant toujours supposé héréditaire ou résultant d'apprentissages plus ou moins complexes» (p.390).

Sans l'intervention de mécanismes régulateurs, les schèmes ou les structures peuvent être «observés» par les enfants, sans qu'il n'y ait construction ou structuration nouvelle. Certaines régulations semblent d'ailleurs susciter davantage appropriation et prise de conscience. À ce moment, les structurations ont plus de chance de devenir généralisables et durables puisqu'un début de compréhension intervient chez l'enfant au sujet de la coordination qui a permis la réussite. Durant les expérimentations sur l'approximation des nombres, où le contexte du magasin facilite l'apparition de solutions adaptées, E. ne peut identifier les coordinations qui lui permettent de solutionner son problème. Sans cette identification, la résolution du problème lui semble magique. La satisfaction apportée par l'approbation de l'adulte ne permet pas la recherche de compréhension.

L'absence de cette recherche de compréhension ne favorise pas l'identification des aspects particuliers d'une tâche afin d'établir des liens entre les problèmes. Ainsi, il n'est pas possible pour les enfants de retrouver les points de ressemblance et de différence. Chaque problème est considéré différent du précédent. Les schèmes et les structures ne peuvent alors se majorer.

Nous observons aussi que les réflexions des enfants portent souvent sur les régulations plutôt que sur le résultat des régulations. C'est à ce moment qu'apparaît une confusion entre le moyen utilisé et le but recherché. Cl. illustre ce fait lorsqu'elle oublie que le comptage lui permet de retrouver le cardinal d'une quantité, trop occupée à réaliser un comptage correct.

La construction d'une compréhension du concept de numération positionnelle semble donc facilitée dans les cas où l'enfant est capable d'utiliser efficacement ses habiletés de comptage. Ce schème permet à l'enfant de se dégager du contexte logico-physique utilisé lorsqu'il juxtapose les quantités et les chiffres.

Lorsque le comptage doit s'adapter aux différents groupements, il exige une conservation du contenu de ces groupements. D'où l'importance du principe de cardinal, où le dernier mot-nombre représente le total de l'ensemble. Ce principe semble opérer en transformant les groupes en unités de mesure de quantité, en particulier lorsque l'enfant doit retrouver la quantité de dizaines ou de centaines. C'est ici qu'apparaît l'intérêt et le rôle d'un dialogue sur les représentations mentales que se font les enfants des différents groupements. Le principe de cardinal, en favorisant la transformation des groupes en unités de mesure de quantité facilite aussi l'introduction des opérations dans la construction de nombres.

La construction du concept de numération positionnelle semble donc évoluer en trois grandes étapes, passant d'une organisation des groupes et des chiffres dans un espace donné à une organisation des quantités où intervient la réunion. Ainsi, l'enfant conçoit la formation d'un grand nombre :
1- comme le résultat de l'arrangement des différents groupes et des chiffres;
2- comme le résultat du comptage des différents groupes;
3- comme le résultat d'une opération entre les différentes unités de mesure de quantité.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

La seule façon de défendre ses idées et ses principes est de les faire connaître.
(Wilfrid Laurier).

C.1 Rappel de la problématique

Le but de cette recherche est d'observer le développement de la pensée chez les enfants en difficulté d'apprentissage. Cette recherche porte ainsi sur l'évaluation des composantes de la compréhension et sur l'intervention en mathématique. De façon plus précise, nous nous sommes intéressée au concept de numération positionnelle, en fait la compréhension des nombres écrits. Ce concept supporte la compréhension des nombres sur lesquels s'appuient et se construisent à la fois les opérations et toute l'arithmétique au primaire.

Nous savons que les erreurs des enfants ne sont pas l'objet du hasard, mais le fruit de relations construites par les enfants. Nous admettons que la prise en compte de l'enseignement, des retards de développement observés chez les enfants, des aspects neurologiques, sociaux ou affectifs ne sont pas suffisants pour expliquer les difficultés des enfants. Nous abordons la question sous un angle qui tient compte de la façon d'apprendre de l'enfant.

Les différentes définitions véhiculées dans les recherches et dans nos milieux scolaires, par rapport à l'identification des enfants en difficulté d'apprentissage, nous permettent de nous rendre compte que les théories d'apprentissage, de même que notre représentation personnelle de l'apprentissage, colorent nos attentes et, de ce fait, notre conception de la difficulté d'apprentissage. Dans le cadre de cette recherche, nous choisissons de définir l'apprentissage comme un processus de transformation qui permet à l'individu de s'adapter aux nouveaux problèmes, en créant des solutions de plus en plus adaptées. L'enfant en difficulté d'apprentissage est ainsi celui qui, après avoir vécu les mêmes expériences scolaires que ses camarades de classe, ne parvient pas à réutiliser les concepts et les savoir-faire utiles à la création de solutions adaptées. Nous dirons alors que cet enfant présente une incompréhension persistante des concepts à l'étude dans sa classe.

Cette définition nous permet de discriminer les enfants qui ont des résultats satisfaisants, mais qui utilisent des stratégies où une compréhension limitée intervient. Elle permet aussi de nous appuyer sur des acquis pour intervenir. Elle nous amène à présumer que l'apprentissage peut être réalisé différemment par chacun des enfants et emprunter des parcours peu connus. Ainsi, nous pouvons poser notre premier postulat : <u>les enfants qui ont des difficultés d'apprentissage sont capables d'apprentissage</u>[101].

Le choix de la perspective constructiviste, où il est admis que l'individu construit lui-même ses connaissances, nous permet d'apprécier le rôle fondamental que jouent les structures cognitives. C'est par elles, que l'enfant assimile de nouveaux schèmes pour s'approprier des connaissances.

Dans la perspective constructiviste, la recherche de compréhension est une recherche d'équilibre cognitif. Elle est d'abord amenée par l'assimilation d'une information nouvelle, la poursuite d'une fin ou le résultat d'une tâche. L'intégration d'une information à la structure et, si nécessaire, la réorganisation de la structure cognitive, en fait, l'accommodation, est alors justifiée. L'observation de ce résultat, mais surtout la prise de conscience de ce qui a amené ce résultat permet d'amorcer un processus de compréhension et de conceptualisation.

C'est par le dynamisme de l'abstraction réfléchissante que l'enfant arrive à transférer (réfléchissement) et construire (réflexion) de nouveaux schèmes ou de nouvelles structures. Dans le cas des abstractions pseudo-empiriques, une forme d'abstrac-

---

[101] Autrement dit, nous désirons nous démarquer de la phrase souvent entendu «il n'y a plus rien à faire avec cet enfant».

tion réfléchissante qui nous intéresse plus particulièrement puisqu'il touche les enfants de 8 à 11 ans que nous avons rencontrés, des mécanismes régulateurs s'introduisent dans le processus. Ces régulations contribuent à la construction de nouveaux schèmes ou de nouvelles structurations. Cette perspective permet de poser notre deuxième postulat : <u>la construction de la compréhension d'un concept est un processus.</u>

Un modèle didactique permet de définir le processus de compréhension de façon opérationnelle, le modèle de développement de la compréhension élaboré par Bergeron et Herscovics (1989). Ce modèle présente la compréhension selon des composantes qui favorisent une structuration de plus en plus adaptée des connaissances. Il nous a semblé le meilleur outil permettant de lier théorie constructiviste et pratique orthopédagogique.

Ainsi, nous ne concevons plus les erreurs observées chez les enfants en difficulté d'apprentissage comme des échecs, mais plutôt comme des étapes. Nous appuyons ainsi notre recherche sur un troisième postulat : <u>les erreurs, sans être nécessaires, sont des étapes normales.</u> Les schèmes et les structures doivent être réorganisés en schèmes et en structures mieux adaptés. La peur de l'échec et le désintéressement face à l'objet d'étude sont des aspects qui alimentent les difficultés d'apprentissage. Les enfants cessent alors de chercher à comprendre ce qui se passe et tentent de mémoriser en assemblant de façon qualitative les informations qui leur parviennent.

Étant donné le contexte d'investigation choisi, la numération positionnelle, c'est dans la façon de résoudre les problèmes posés et dans la façon de les expliquer que nous verrons comment se développent les structurations et les schèmes de la numération positionnelle chez l'enfant, que ces schèmes et ces structurations soient logico-physiques ou logico-mathématiques. Notre hypothèse de recherche peut maintenant être posée. <u>L'abstraction</u>

<u>réfléchissante, telle que définie par Piaget (1977), constitue le levier qui permet la coordination et l'intégration des différentes composantes de la compréhension, du modèle de Bergeron et Herscovics (1989), en structurations de plus en plus adaptées</u>.

Dans le cadre de cette recherche, le langage, l'illustration par le dessin et la manipulation d'objets permettent de rendre visibles les schèmes et les structurations sur lesquelles l'enfant s'appuie, pour coordonner transfert et régulations et construire des réflexions mieux adaptées.

Des critères ont donc été pré-déterminés afin de faciliter l'identification des schèmes et des structures. Nous avons identifié ces critères non seulement à partir des définitions théoriques de Bergeron et Herscovics (1989), mais aussi en s'appuyant sur les recherches qui ont étudié le nombre et la numération. Ces critères de la compréhension offrent des «points d'attention» qui facilitent et précisent «quoi» observer dans le processus.

Le but de cette recherche est alors de répondre à la question: <u>Dans une situation de dialogue entre l'orthopédagogue et un enfant en difficulté d'apprentissage en regard du concept de numération positionnelle, comment s'effectue le passage de structurations partielles vers des structurations généralisables et durables</u>?

C.2 <u>Rappel de la méthode</u>

Cette recherche explore d'abord ce que les enfants en difficulté d'apprentissage comprennent. Elle explore ensuite le processus d'apprentissage de ces enfants. Ces deux buts sont réalisés au moyen d'entrevues individuelles. Ces entrevues permettent d'identifier les besoins des enfants, puis d'intervenir en utilisant comme pistes et comme balises les critères des différentes composantes de la compréhension. Tout en souhaitant que ces interventions de rééducation puissent contribuer à la construction de structurations généralisables dans des situations de la classe, nous espérons d'abord identifier ces structurations et observer leur évolution.

Pour atteindre notre premier but, la méthode clinique de Piaget, issue à la fois de l'observation critique où l'accent est mis sur l'observation naturelle, et de l'entretien clinique où on privilégie le dialogue, a été retenue. Elle permet de construire une entrevue d'évaluation de la compréhension initiale et de la compréhension finale des enfants. La méthode clinique pose comme postulat que les actions des enfants se situent à l'intérieur d'une logique naturelle. Cet instrument de recherche cognitive tente de découvrir les processus cognitifs utilisés par l'enfant. Elle est souple et permet d'aller au-delà des procédures observées, par l'exploration des raisonnements posés par les enfants et les réflexions à voix haute qui sont formulées. Une atmosphère plus relaxante que celle d'un test standardisé est ainsi créée.

Pour atteindre notre deuxième but, l'expérimentation didactique constructiviste a été choisie. Développée par Menchinskaya (1969, 1975), fortement influencée par les travaux de Vygotsky, elle se distingue de l'entrevue clinique par le fait que le but poursuivi n'est plus seulement l'observation de l'enfant, mais l'observation de son développement sous l'influence d'interventions adaptées. Ainsi, l'introduction de suggestions est désirable. L'influence positive ou négative du matériel, l'effet de l'intervention sur l'activité physique et intellectuelle de l'enfant sont observés. Il est donc très important de structurer cette intervention, d'où l'importance d'une étude exploratoire.

Cette étude exploratoire nous a permis de reconnaître l'importance d'un dialogue qui porte sur les représentations mentales que l'enfant a déjà construites. Une intervention, où on sollicite continuellement l'enfant à retourner vers ses représentations mentales, donne l'heure juste quant à la nécessité de retourner à des activités logico-physiques. Le dialogue invite aussi l'enfant à recréer, dans sa tête, les manipulations réalisées avec le matériel. Compte tenu de la clientèle à laquelle nous nous adressons, il est très important de mettre les enfants sur des pistes qui favorisent des découvertes, les menant à des compréhensions plus élaborées et à des réussites comprises.

Cette approche facilite l'observation du développement de l'abstraction réfléchissante de l'enfant. Les représentations mentales, apparues à travers les explications verbales ou par les manipulations, sont stimulées par des tâches qui sont habituellement demandées à l'enfant en classe. Les thèmes qui sont touchés sont : la lecture et l'écriture des nombres, la comparaison et l'ordre des nombres, la décomposition et la recomposition des nombres, l'attribution d'une valeur relative aux chiffres d'un nombre, la recherche du nombre de dizaines ou d'unités dans le nombre, l'arrondissement de nombres, les opérations sur les nombres, la construction des unités de mesure de quantité.

Nous avons rencontré six enfants, dont deux étaient en troisième année, deux en quatrième année et deux en cinquième année. Les enfants ont été rencontrés durant la quatrième étape, durant huit semaines entre les mois d'avril et juin. Chacune des rencontres a été vidéofilmée, retranscrite puis analysée. Nous cherchons à mettre à l'épreuve les critères des composantes déjà identifiés théoriquement. Ainsi, dans un premier temps, les explications verbales, les blocages, les manipulations et les découvertes faites par les enfants servent jusqu'à un certain point à valider le tableau de compréhension de la numération positionnelle décimale et à découvrir, le cas échéant, de nouveaux critères.

Les explications verbales et les manipulations ont ensuite été analysées dans le but d'identifier la coordination entre le transfert et les régulations qui facilitent la construction de structures ou de schèmes mieux adaptés, selon le dynamisme de l'abstraction réfléchissante.

C.3 Réponses à la question de recherche

C.3.1 Comment évolue la compréhension des enfants

Dans le chapitre trois, nous identifions d'abord les critères de compréhension satisfaits, sur lesquels l'enfant prend appui pour construire des structurations plus sophistiquées. Les analyses permettent ensuite d'observer l'évolution de la pensée de chacun des enfants rencontrés.

Ainsi, dès l'entrevue d'évaluation initiale, Cl. réussit à illustrer un nombre, à lire, écrire, attribuer une valeur relative aux chiffres d'un nombre. Toutefois, elle éprouve des difficultés à compter par 10 à partir d'un nombre donné, à reconnaître des manifestations des composantes abstraites du palier logico-physique et logico-mathématique et à utiliser des procédures du second palier.

Durant les six expérimentations didactiques, nous l'avons vu construire le principe de cardinal, des relations d'équivalence, une conservation des unités de mesure de quantité, des relations d'inclusion, l'adaptation du comptage et l'utilisation de l'opération d'addition.

La connaissance des positions (unité, dizaine, centaine) lui permet d'adapter le comptage aux différentes unités de mesure de quantité pour retrouver le <u>cardinal</u> d'une quantité. Par la suite, la reconnaissance de <u>relations d'équivalence</u> entre 10 unités et 1 dizaine se construit à partir d'une coordination entre la manipulation du matériel et son comptage. À cette occasion une mise en correspondance entre les enveloppes et les jetons et leur nom conventionnel permet une formalisation.

La conservation des unités de mesure de quantité naît de coordinations entre les chiffres et les groupes d'objets, puis des groupes d'objets et d'un comptage dans lequel intervient le principe de cardinal.

Les relations d'inclusion apparaissent ensuite. D'abord la comparaison entre les unités de mesure de quantité incite Cl. à compter, puis à additionner pour retrouver la quantité totale de groupes ou d'unités. Par la suite, une conservation de ces unités de mesure de quantité permet à nouveau d'adapter le comptage pour retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre.

Enfin, une coordination entre les relations d'équivalence et la conservation des unités de mesure de quantité favorise la reconnaissance des relations d'inclusion. Ce type de relation n'est pas encore généralisée. Pour Cl. chaque problème est considéré comme différent du précédent, la juxtaposition des quantités apparaît encore, en particulier lorsque le comptage lui pose problème. De plus, Cl. n'introduit que rarement l'opération d'addition pour retrouver le nombre d'unités ou de dizaines dans un nombre. Ainsi, son raisonnement est toujours placé dans un contexte où elle doit adapter le comptage, une procédure encore difficile à réaliser pour elle.

Lors de l'entrevue d'évaluation finale, Cl. éprouve toujours des difficultés à retrouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre. Le comptage est une procédure qu'elle tente d'adapter au résultat «attendu» plutôt qu'aux différentes unités de mesure de quantité. Ainsi, elle réalise plusieurs tâches correctement comme lire, écrire, décomposer des nombres. Cependant, les relations d'équivalence et des relations d'inclusion ne sont toujours pas reconnues. Les mécanismes régulateurs qu'elle utilise sont tantôt les conventions du tableau de numération, tantôt le comptage.

Pour le deuxième enfant de troisième année, E., la lecture, l'écriture, l'ordre et l'attribution d'une valeur différente aux chiffres d'un nombre ne posent pas de problème au départ. Il reconnaît l'invariance d'une quantité par rapport à son organisation. Toutefois, la conservation des unités de mesure de quantité est absente, de même que les relations d'équivalence et d'inclusion. E. juxtapose les quantités plutôt que de les additionner.

Au cours des expérimentations didactiques, E. construit le principe de cardinal, adapte le comptage aux différentes unités de mesure de quantité, construit une conservation de la dizaine, puis introduit l'opération d'addition à sa compréhension de la numération positionnelle.

Ainsi, une coordination entre un nombre lu et l'illustration de ce nombre de différentes façons (avec des enveloppes et des jetons) permet de revoir le <u>principe de cardinal</u>, où le dernier mot-nombre représente la quantité totale d'objets. Par la suite, E. appuie son réfléchissement sur ce principe pour construire une <u>adaptation du comptage</u> aux groupements.

La reconnaissance de relations d'équivalence entre des quantités organisées différemment permettent de construire une <u>généralisation de ces relations d'équivalence</u> entre des unités de mesure de quantité, en adaptant le comptage aux unités de mesure de quantité.

La <u>conservation des unités de mesure</u> de quantité s'élabore et s'approfondit par des coordinations entre la manipulation de matériel et la formalisation des termes utilisés (dizaine), puis par des coordinations entre le comptage et l'identification de la quantité d'unités de mesure de quantité dénombrées.

Enfin, l'introduction de l'addition dans la construction de nombres est amenée par la réunion de différentes unités de mesure de quantité qui incite à la recherche de leur cardinal avant la réunion. L'addition se construit donc par la coordination entre le cardinal de plusieurs pluralités et la réunion de ces pluralités.

À la fin des expérimentations didactiques, E. reconnaît la conservation des unités et des dizaines, résout des problèmes liés à l'inclusion en utilisant l'addition. La juxtaposition des quantités a disparu au profit de la réunion. Les mécanismes régulateurs qui sont apparus sont le comptage puis l'addition. Les règles d'organisation de l'échange de la base 10 (10-1) posent encore problème, comme l'illustre l'échange des anneaux sur l'abaque.

I., une fillette de quatrième année, démontre au départ une bonne connaissance des critères du palier logico-physique. Elle explique la relation d'équivalence en retrouvant la pluralité. Elle reconnaît l'invariance de la pluralité quelle que soit l'organisation en conservant la quantité. Toutefois, adapter le comptage aux différentes unités de mesure de quantité, les comparer, les concevoir comme conservées et incluses les unes dans les autres, lire des nombres en conservant l'idée de quantité est difficile à réaliser. Une coupure entre quantités et nombres apparaît.

Au cours des différentes expérimentations didactiques, les critères de plusieurs composantes sont touchés. Ainsi, I. reconnaît la régularité des positions et des groupes en observant l'organisation du tableau de numération, revoit le principe de cardinal, compare des nombres, reconstruit une reconnaissance de l'invariance et de l'équivalence entre des pluralités, élabore une conservation des différentes unités de mesure de quantité et introduit les opérations et leur sens.

L'observation de la régularité de la base 10 et des positions à travers les ordres permet une première compréhension des conventions propres au <u>tableau de numération</u>. Par la suite, le comptage des groupes qui correspondent aux positions du tableau de numération permet une première coordination pour retrouver les <u>unités de mesure de quantité</u>.

Pour construire le <u>principe de cardinal</u>, I. compte les groupes et les unités. Par la suite, la manipulation des groupes et des jetons et l'utilisation du comptage favorisent la reconnaissance de l'<u>invariance de la pluralité</u>. La reconnaissance de la <u>relation d'équivalence</u> entre des quantités émerge d'une coordination entre contenu et contenant des unités de mesure de quantité et le comptage.

La construction de l'<u>unité</u> est réalisée lorsque I. coordonne la position et la désignation d'objets unitaires. La construction de la <u>dizaine</u> s'appuie, dans un premier temps, sur la manipulation et la comparaison un-plusieurs. Dans un deuxième temps, le comptage permet de conserver la dizaine dans les autres unités de mesure de quantité, puis de comparer 10 unités et 10 dizaines. La construction de la <u>centaine</u> débute par la construction d'une centaine et par la comparaison entre une et plusieurs centaines. Suit une coordination entre la relation d'équivalence et la formalisation. Quant à la <u>dizaine de mille</u>, elle est construite à partir d'une coordination entre la reconnaissance de la régularité de la base 10 et des positions. De nouvelles unités de mesure apparaissent à partir de la coordination entre la régularité de la base 10 et de la multiplication.

Les <u>opérations</u> naissent d'une coordination entre la construction d'une conservation des unités de mesure de quantité et l'adaptation du comptage pour retrouver leur nombre. Par la suite, la comparaison entre le sens des opérations et le rappel des opérations connues facilitent la formalisation. Enfin, la réunion de plusieurs unités de mesure de quantité différentes permet l'utilisation de l'algorithme et l'introduction des opérations dans la construction de nombres. La réversibilité des opérations apparaît lorsqu'une histoire permet à un réfléchissement de prendre appui sur le sens du processus en jeu. Le sens des opérations est à nouveau touché lorsque I. identifie le but recherché lorsqu'elle compte.

À la fin des expérimentations didactiques, un seul critère n'est pas observé au palier logico-physique : la reconnaissance des groupements d'objets dans la vie courante. Au palier logico-mathématique, il reste l'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure de quantité, la reconnaissance de l'inclusion et la décomposition de nombres à construire. I. privilégie, dans un premier temps, la comparaison comme mécanisme régulateur. Elle semble résister à introduire le comptage ou les opérations dans la construction de nombres. Cela l'amène à modifier les consignes dans le cas où des opérations et des comparaisons avec des unités de mesure de quantité sont sollicitées.

Pour Ch., une enfant de quatrième année, les tâches portant sur les quantités et les nombres sont d'abord résolues en tenant compte des aspects logico-physiques. Ch. porte alors une attention particulière aux configurations spatiales. Ainsi, la dizaine est un groupe de 2, l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation n'est pas reconnue, la lecture de nombres et l'ordre qu'elle leur attribue n'est pas fonction de la quantité qu'ils représentent mais de la généralisation de ce qu'elle connaît des petits nombres.

Au cours des expérimentations didactiques, Ch. a pu construire une coordination entre les deux paliers, puis une conservation de la dizaine et de l'unité, une invariance du nombre à lire, des relations d'équivalence généralisables et développer une procédure relative à l'approximation des nombres.

La <u>coordination entre les deux paliers</u> est issue d'une coordination entre la régularité de la base 10 et la construction d'une conservation de l'unité de mesure de quantité. Un retour sur les relations d'équivalence et l'introduction du comptage des groupements permet la <u>généralisation des relations d'équivalence</u>.

Par la suite, la régularité de la base 10 est utilisée comme réfléchissement pour construire une <u>conservation des unités de mesure de quantité</u>. Cette construction requiert toutefois une coordination avec le comptage des unités de mesure de quantité. Une invariance de la pluralité quelle que soit son organisation permet aussi la construction d'une conservation de l'unité, cette fois la réversibilité remplace le comptage.

Le critère relatif à l'<u>approximation des nombres</u>, quant à lui, est construit à partir d'un réfléchissement où le nombre représente une quantité. Le double-comptage est la régulation qui permet cette construction.

Au terme de ces expérimentations didactiques, Ch. introduit fréquemment les unités de mesure de quantité dans la construction de solutions aux problèmes posés. Cela permet d'insérer une étape intermédiaire dans la recherche de solutions. Toutefois, le 0, représentant «rien de quelque chose» pose encore un problème, en particulier dans les cas où la relation d'inclusion est sollicitée. Le mécanisme régulateur le plus souvent sollicité est le comptage.

Pour V., une enfant de cinquième année, les habiletés de comptage semblent présentes au départ. Toutefois, la majorité des critères du palier logico-physique ne sont pas satisfaits. Ainsi, elle illustre difficilement le nombre 202 et ne reconnaît pas l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation. Elle a développé des procédures qui lui permettent d'écrire, d'ordonner des nombres, d'attribuer à leur chiffre une valeur relative et de retrouver le nombre d'unités de mesure de quantité dans le nombre. Ces procédures sont cependant strictement instrumentales.

Durant les expérimentations didactiques, V. construit différents critères dont une connaissance des conventions de lecture et d'écriture de nombres, la reconnaissance des relations d'équivalence, d'une coordination entre position et quantité et enfin une compréhension de la valeur relative des chiffres dans un nombre. Elle abandonne alors la juxtaposition des chiffres au profit de la réunion des unités de mesure de quantité.

Les régulations de V. sont très souvent liées à l'évaluation du résultat par l'orthopédagogue à la fin de la tâche. Ainsi, dans le cas de la <u>lecture</u>, différents réfléchissements s'additionnent: grouper les chiffres par 3, observer la régularité de ces groupes, observer la régularité des positions puis la difficulté de la lecture et enfin reconnaître que le nombre à lire reste inchangé qu'il ait ou non des espaces. Ces coordinations doivent être sollicitées régulièrement avant que V. ne les réutilise seule.

Les <u>relations d'équivalence</u> naissent d'une coordination entre les positions du tableau de numération et des unités de mesure de quantité. Ces relations d'équivalence, régulées par l'observation de la régularité de la base 10 favorisent un approfondissement du critère selon lequel on juxtapose les chiffres. C'est au moyen d'un réfléchissement qui s'appuie sur un truc (découpage du nombre) et de la reconnaissance de l'absence des unités de mesure de quantité dans les solutions apportées que position et <u>unités de mesure de quantité</u> seront de nouveau coordonnées.

La construction de la <u>centaine</u> apparaît lors d'une coordination entre les groupes et la régularité de la base 10, puis lors d'une comparaison entre les unités de mesure de quantité et le comptage.

Une compréhension de l'approximation des nombres naît de coordinations entre les positions des chiffres et la comparaison entre les nombres, puis de la manipulation de matériel et de la comparaison entre des quantités.

Par la suite, les opérations qui nécessitent un changement par emprunt ou retenue d'unités de mesure de quantité servent de réfléchissement pour construire une compréhension de la valeur relative des chiffres dans un nombre et l'abandon de la juxtaposition des chiffres.

Au terme des expérimentations didactiques, tous les critères du palier logico-physique sont satisfaits. Ces structurations ne sont toutefois pas généralisables, puisque V. ne peut utiliser des manifestations du palier logico-mathématique pour prouver ce qu'elle avance. Les opérations n'apparaissent pas régulièrement dans la résolution des tâches proposées. Elle semble privilégier d'abord des mécanismes régulateurs où interviennent les conventions comme la régularité de la base 10, l'organisation du tableau de numération ou la comparaison. Ces mécanismes doivent alors être approuvés par l'adulte.

Pour S., le dernier élève de cinquième année, dès le début, la plupart des critères du palier logico-physique sont satisfaits. Une confusion entre dixième et dizaine, entre centième et centaine est toutefois présente. Il peut lire, écrire, ordonner des nombres, attribuer une valeur relative aux chiffres d'un nombre, mais sans conservation des unités de mesure de quantité ni inclusion de ces dernières les unes dans les autres.

Au cours des expérimentations didactiques, S. construit une conservation de la dizaine, une reconnaissance du principe de cardinal et introduit les opérations dans sa compréhension des nombres.

La conservation de la <u>dizaine</u> apparaît à partir d'une coordination entre des relations d'équivalence et l'addition des unités de mesure de quantité, et ce à deux moments. Le <u>principe de cardinal</u> émerge d'un réfléchissement à partir de l'invariance de la pluralité par rapport à son organisation coordonnée à la relation d'équivalence entre deux quantités auxquelles on a donné un nom différent.

Les <u>opérations</u>, déjà introduites dans la construction des unités de mesure de quantité, ressurgissent à partir de coordinations où interviennent la manipulation de matériel et la réunion. Elles impliquent l'abandon de procédures connues et ayant déjà permis des réussites.

À la fin des expérimentations didactiques avec S., tous les critères du palier logico-physique sont satisfaits. Une confusion persiste entre relation d'équivalence et changement par l'ajout. La compréhension des unités de mesure de quantité est complétée et devient fonctionnelle avec les opérations.

C.3.2 <u>Comment se coordonnent et s'intègrent les différentes composantes</u>

À la lecture des constructions réalisées par les enfants, nous constatons que ce qui permet à un enfant d'apprendre c'est, effectivement, sa capacité de construire des schèmes et des structurations nouvelles. Ces schèmes et ces structurations, des réflexions nouvelles, se développent par la coordination entre la reconnaissance, qui permet le transfert, et l'expérimentation, facilitée par les régulations, de certaines particularités plutôt que d'autres. Ce qui confirme notre hypothèse de recherche. Toutefois, nous avons pu constater que lorsque les régulations posaient des problèmes, la majoration des schèmes s'estompait au profit d'un recul. Ainsi, plutôt que d'évoluer d'une composante du palier logico-physique vers une composante du palier logico-mathématique, l'enfant restait ou retournait au palier logico-physique.

Nous avons pu découvrir à ce moment que ce n'est pas le schème ou la structure sur lequel s'appuie l'enfant qui rend sa structuration partielle ou généralisable, mais plutôt la régulation qui y est coordonnée pour construire une réflexion. Ainsi, au départ, les critères des composantes du palier logico-physique ne sont pas nécessairement partiels. C'est la régulation amenée par l'arrangement des quantités ou des chiffres dans un espace donné qui rendent les structurations partielles et ainsi difficiles à généraliser. Les critères du palier logico-mathématique tendent à être généralisables et ce, à cause des actions de comptage puis d'opérations qu'ils nécessitent.

Nous avons pu constater aussi que la composante procédurale des deux paliers correspondait souvent aux régulations utilisées par les enfants. Ainsi, des régulations où interviennent davantage un arrangement physique des quantités et des chiffres permettent à l'enfant de concevoir le nombre comme une juxtaposition de quantités ou de chiffres. L'introduction d'un comptage entre les différents groupes favorise le passage d'un palier vers un autre, alors qu'une opération suscite des réflexions du palier logico-mathématique.

C.4 <u>Autres conclusions</u>

C.4.1 <u>Une forme de validation des critères du tableau de numération</u>

Les critères qui ont surgi au cours de ces expérimentations permettent, comme nous nous y attendions, une forme de validation des critères définis dans le tableau de numération. Ainsi, deux nouveaux critères apparaissent pour la composante abstraite logico-physique : la reconnaissance de la régularité de la base 10 et la généralisation des relations d'équivalence. Le premier, que nous considérions à l'intérieur de la reconnaissance des relations d'équivalence, se dégage vraiment comme critère distinct. Nous avons pu nous rendre compte de son importance lorsqu'il intervient comme réfléchissement dans l'élaboration de relation d'équivalence.

Le deuxième critère, la généralisation des relations d'équivalence, a permis l'introduction du schème d'action, le comptage. Ainsi, par ce dernier, un pont s'établirait entre les deux paliers.

Au palier logico-mathématique un troisième critère apparaît, en particulier pour V. En effet, il a été important pour elle de se rendre compte que le nombre à lire reste inchangé qu'il y ait ou non des espaces entre les chiffres. Ce critère a été jugé logico-mathématique, puisqu'il demande de se dégager de la configuration spatiale pour s'attarder à l'idée de quantité que le nombre représente. Le nouveau tableau du développement de la compréhension apparaît ci-dessous.

PREMIER PALIER COMPRÉHENSION LOGICO-PHYSIQUE		
COMPOSANTE INTUITIVE	**COMPOSANTE PROCÉDURALE**	**COMPOSANTE ABSTRAITE**
attribue l'idée d'une quantité plus ou moins grande aux mots dizaine, centaine, mille, million	groupe les chiffres par paquets pour lire un grand nombre (subitizing)	généralise les termes relatifs aux noms des petits nombres
considère que plus il y a de chiffres dans un nombre plus le nombre est grand	découpe un grand nombre en petits nombres (inférieurs à 10) ou à 100) et juxtapose les éléments	reconnaît la régularité de la base 10
reconnaît l'existence des groupements d'objets dans la vie courante	compare les chiffres et les groupes	reconnaît l'invariance de la pluralité par rapport à la disposition
		reconnaît le principe de cardinal
reconnaît le caractère commode des groupements(transport, évaluation, comparaison, comptage)	compte des éléments et des groupes pour illustrer	reconnaît l'équivalence entre des quantités organisées différemment
		généralise les relations d'équivalence

SECOND PALIER COMPRÉHENSION LOGICO-MATHÉMATIQUE		
COMPOSANTE PROCÉDURALE	**COMPOSANTE ABSTRAITE**	**COMPOSANTE FORMELLE**
identifie les positions et attribue un chiffre à chaque position, une position à chaque chiffre	généralise la régularité des positions aux différents ordres	utilise de façon conventionnelle les mots: unité, dizaine.., unité de mille.., unité de million..
compare les nombres compare les unités de mesure de quantité	reconnaît que le nombre à lire reste inchangé qu'il ait ou non des espaces	lit, écrit, ordonne des nombres
trouve le cardinal en: -adaptant le comptage selon les unités de mesure de quantité -en additionnant les unités de mesure de quantité	conçoit les groupements comme autant d'unités de mesure de quantité invariantes	attribue une valeur relative aux chiffres d'un nombre décompose un nombre
trouve la dizaine, la centaine... qui précède ou suit -avec un matériel, -par un comptage ou -un double-comptage		
ajoute, enlève ou partage une quantité en y appliquant les principes de l'échange	reconnaît l'inclusion des sous-groupes dans les groupes (trouve les unités, les dizaines dans les nombres)	

C.4.2 <u>L'apport du matériel</u>

Les enfants avaient à leur disposition des cubes (cubimaths), des jetons de couleurs, des enveloppes de différentes dimensions, un abaque, du papier et des crayons de couleur. Les jetons, les enveloppes et l'abaque ont été le plus souvent utilisés. Nous avons pu observer, en particulier chez E. et chez Ch., une difficulté particulière avec l'abaque. Ce matériel, en utilisant un contexte symbolique très près de la notation positionnelle, semble exclure l'idée de processus dans la construction d'une solution. En effet, ces enfants ont semblé oublier qu'un seul anneau pouvait en représenter dix, selon la position occupée. Ils ont aussi oublié la relation d'échange lors des opérations.

Les jetons et les enveloppes, plus près de l'activité de dénombrement, ont joué un rôle important dans l'expérience du processus de construction d'une réponse. Ils ont permis aux enfants de «voir», comme ils le disent, l'invariance de la pluralité par rapport à son organisation et l'équivalence entre différents groupements, de mettre en correspondance les chiffres d'un nombre et les groupes que ces chiffres représentent. La manipulation des enveloppes et des jetons a même facilité, chez S., l'introduction de l'opération d'addition dans la construction de nombres.

C.4.3 L'apport du dialogue sur les représentations mentales

Le dialogue permet d'introduire, comme nous l'avions prévu, les moments où il est important pour l'enfant de revenir à des manipulations. Il facilite différentes prises de conscience, entres autres, la prise de conscience de la quantité sous-entendue par le comptage par 10 ou par 100 pour Cl., la prise de conscience de l'absence des unités de mesure de quantité dans la construction de réponses pour V., la prise de conscience de compétences spontanées de E.. Nous avons ainsi pu observer que ces prises de conscience favorisent et alimentent la réflexion. Toutefois, pour majorer ses schèmes, la tâche doit être signifiante pour l'enfant, comme plusieurs recherches en psychologie cognitive le mentionnent. Elle doit permettre à l'enfant une assimilation des données.

Le dialogue facilite l'exploration de différentes relations d'équivalence ou d'inclusion, l'introduction de suggestions où interviennent les différentes composantes et la recherche d'une forme de validation des solutions apportées.

Pour Ch. et pour V. le dialogue a facilité l'introduction d'étapes intermédiaires ou de processus avant d'arriver à répondre à la question posée. Le doute suscité par une question, l'explication sollicitée à la suite de la réponse apportée freinent le geste impulsif et invitent à la réflexion. Chez I. le dialogue sur les représentations mentales a favorisé la recherche de validation des solutions apportées.

C.5 Retour critique

L'élaboration de la problématique a permis de comprendre pourquoi il est difficile d'identifier et d'intervenir auprès des enfants en difficulté d'apprentissage. D'abord, la diversité des théories d'apprentissage et l'influence qu'elles exercent sur nos attentes contribuent à maintenir des confusions.

Un problème particulier a surgi lorsque nous avons tenté d'exploiter le modèle de Piaget et celui de Bergeron et Herscovics. En effet, ces deux modèles utilisent des termes semblables pour identifier des «réalités» différentes. Au plan théorique, des confusions se créent. Nous avons tenté de résoudre ce problème en nous attachant aux idées véhiculées par ces deux modèles. Ainsi, le palier logico-physique et le palier logico-mathématique de Bergeron et Herscovics sont les reflets d'une compréhension préliminaire puis d'une compréhension mathématique. Ensuite, les compréhensions des deux paliers ont été conçues comme les composantes d'une compréhension globale du concept à l'étude. Enfin, les critères des compréhensions procédurales des deux paliers sont des schèmes d'action souvent utilisés comme régulations à coordonner à un transfert. Ces quelques clarifications nous ont aidé à poursuivre notre travail de recherche et à répondre à notre question de recherche.

Au plan méthodologique, en appuyant notre recherche sur le critère de réalité vécue par les orthopédagogues dans les milieux scolaires, nous avons tenté d'explorer le développement de la pensée de six enfants, afin d'apporter un éclairage qui facilite la compréhension de l'intervention rééducative.

Le fait d'utiliser le critère de réalité comme assise a l'avantage de nous donner l'heure juste en ce qui concerne le développement de l'enfant que nous rencontrons dans notre quotidien et ainsi d'adapter plus facilement les résultats de cette recherche au plan des implications orthopédagogiques. Il a toutefois l'inconvénient de nous placer en situation d'urgence, au sens où, comme cela arrive souvent dans le milieu scolaire. Le «contrat didactique» (Schubauer-Leoni, 1986) se modifie selon les thèmes vus en classe laissant ainsi orthopédagogue, enseignant et enfant en face d'un dilemme : travailler sur les structures cognitives par le biais d'un concept déjà choisi ou revoir le thème incompris en classe en privilégiant l'acquisition de procédures.

À ce propos, le contenu de la dernière expérimentation didactique a été modifié pour Cl. Nous avons alors revu les unités de mesure de quantité, puisque les décompositions réalisées en classe s'avéraient encore difficiles. C'est aussi ce qui a motivé les interventions ponctuelles, réalisées durant la dernière entrevue d'évaluation de la compréhension. La «carrière» scolaire des enfants ne se terminant pas avec la fin de l'expérimentation de cette thèse, nous avons trouvé important de susciter de nouvelles constructions, lorsque cela s'est avéré possible.

Nous devons constater qu'au cours de l'expérimentation de cette recherche, des analyses rudimentaires ont été réalisées. L'avantage du type d'analyse effectué durant l'expérimentation permet toutefois de rester en contact avec le critère de réalité déjà évoqué.

Le travail auprès d'enfants en difficultés d'apprentissage requiert, comme nous avons pu le constater au cours des expérimentations didactiques, une adaptation particulière pour suivre le cheminement de la pensée de ces enfants, adaptation qui n'est pas nécessaire pour la plupart des enfants d'une classe régulière. Ainsi, nous avons dû réagir avec vivacité et ouverture devant les relations imprévisibles réalisées par les enfants, tout en conservant un équilibre entre suivre leur pensée et encadrer leur démarche.

La réalisation des analyses, quoique laborieuse, a permis de mettre au point un modèle d'étude diagnostique qui pourrait être utile aux orthopédagogues en exercice. En effet, identifier les observables et analyser les coordinations que les enfants font intervenir pour réaliser leurs réflexions facilite une intervention pointue sur les habiletés à développer ou les coordinations à susciter.

Enfin, les résultats obtenus ont permis de comprendre que, pour les enfants rencontrés, les coordinations utilisées ne sont pas toujours les mêmes pour un même critère. Ainsi, si certaines favorisent une réflexion adaptée, d'autres sont entravées par un mécanisme régulateur peu efficace ou par l'absence de prise de conscience de la coordination réalisée.

C.6 Implications pédagogiques et orthopédagogiques

Les implications des conclusions de cette recherche touchent à la fois le domaine pédagogique et orthopédagogique. Au plan pédagogique, elles permettent de comprendre pourquoi l'enfant en difficulté réussit «quelquefois», alors qu'au plan orthopédagogique, elles illustrent la cause des confusions entre préalables à l'apprentissage et réussite scolaire et permettent de mettre au point un modèle d'évaluation diagnostique.

Au plan pédagogique, le fait que les régulations choisies par les enfants favorisent ou entravent la construction de nouveaux schèmes ou de nouvelles structures, illustre bien la difficulté à cerner la cause de la difficulté. Cela montre aussi l'importance à accorder en classe à l'identification des coordinations qui ont facilité l'apparition de solutions adaptées qu'elles soient réutilisées ou non.

Au plan orthopédagogique, les tergiversations autour de l'idée de préalables, d'habiletés prennent tout leur sens. En effet, puisque les régulations comme la comparaison, le comptage, la mémorisation de règles conventionnelles se coordonnent aux structurations ou aux schèmes déjà construits, elles pourraient être appelées préalables. Un travail sur ces préalables pourrait favoriser une amélioration de ceux-ci sans pour autant susciter la construction de nouveaux schèmes puisque la construction requiert une coordination entre régulation et transfert. La compréhension des enfants fluctue au gré des coordinations réalisées.

Le modèle d'analyse élaboré suite à l'expérimentation permet aujourd'hui non seulement de développer un mode d'évaluation nouveau pour les orthopédagogues, mode qui facilite l'identification des réflexions et des coordinations réalisées par les enfants. À partir des critères de la compréhension présents durant une évaluation ou une intervention, une analyse plus fine pourrait être réalisée, identifiant à ce moment, le point de départ qui sert de transfert ou de réfléchissement et la régulation qui permet ou entrave la réflexion de l'enfant.

La parole qui est donnée à l'enfant contribue ainsi non seulement à l'inciter à revenir sur ses gestes, à identifier ses coordinations qui permettent des réussites, elle permet aussi à l'orthopédagogue d'observer si les régulations prennent la place de la réflexion.

C.7 Vers de nouvelles questions de recherche

Au terme de cette recherche, nous pouvons à la fois questionner la place du conflit cognitif dans le processus d'adaptation et d'apprentissage des enfants en difficulté et la place de la parole dans le développement de ce processus.

Dans les recherches qui s'intéressent au développement affectif, nous pourrions formuler la question suivante. Un conflit cognitif peut-il être masqué chez un enfant qui a l'habitude de vivre des conflits affectifs ou autres, où aucune résolution n'intervient? Se pourrait-il que des enfants habitués à vivre des conflits sans solution en viennent à penser qu'un conflit ne se solutionne pas, qu'il n'implique pas d'adaptation ou de réaménagement?

Dans le courant de pensée qui s'intéresse actuellement au développement métacognitif dans l'apprentissage, nous pourrions poursuivre cette recherche en questionnant les effets de l'argumentation dans l'évolution de la prise de conscience de l'enfant, élément facilitant la majoration des schèmes de pensée des enfants.

Au plan didactique, il serait intéressant d'identifier les régulations que les enfants introduisent pour résoudre les problèmes posés en regard d'autres concepts. Quelles seraient alors les stratégies et les habiletés les plus souvent sollicitées dans les mécanismes régulateurs par rapport au concept d'addition, de nombres relatifs par exemple?

Au terme de cette recherche, nous souhaitons que l'identification des mécanismes régulateurs qui interviennent dans le dynamisme de l'abstraction réfléchissante, lorsque l'enfant construit sa compréhension de la numération positionnelle, et que la compréhension du processus nécessaire au développement de ce concept, favorisent non seulement une meilleure compréhension des enfants en difficultés d'apprentissage, mais aussi la prévention de ces difficultés.

BIBLIOGRAPHIE ET RÉFÉRENCES

Les astérisques signifient que ces ouvrages ont été cités dans le texte.

Adda J. (1976) Difficultés liées à la présentation des questions mathématiques. Educational studies in mathematics, (7), 3-22.

*Allardice B.S. et Ginsburg H.P. (1983) Children's psychological difficulties in mathematics. The development of mathematic thinking. Academic Press inc. p. 319-350.

*Ashlock R.B. (1982) Errors patterns in computation a semi-programmed approched Charles E. Merrill Publishing. 161 p.

*Association québécoise des troubles d'apprentissage (AQETA) (1990) Fiche documentaire. 284 Notre-Dame ouest, bureau 300, Montréal, H2Y 1T7.

*Association des Orthopédagogues du Québec (1992) Définition des problèmes d'apprentissage.

*Association des orthopédagogues du Québec (1990) L'orthopédagogue un intervenant, une intervenante.

*Baroody A.J. (1990) How and When Should place value concepts and skills be taugh? Journal for research in mathematics education. Juillet, 21 (4), 281-285.

Barth B.M. (1985) Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. Communication et langage. (66), 47-58.

*Baruk S. (1973) Échec et math. Édition du Seuil. 310 p.

*Bateman B. (1965) An educational view of a diagnostic approach to learning disorders. Learning disorders. Dans J. Hellmuth Editions. (1), 219-239.

Bednarz N. et Janvier-Dufour B. (1984) La numération. Les difficultés suscitées par son apprentissage. Une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. 1ière partie. Revue N.(33), 5-31.

Bednarz N. et Dufour-Janvier B.(1985) La numération. Les difficultés suscitées par son apprentissage. Une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. Deuxième partie. Revue N. (34), 5-17.

*Bednarz N. et Dufour-Janvier B. (1986) Une étude des conceptions inappropriées développées par les enfants dans l'apprentissage de la numération au primaire. European Journal of psychology of education. 1(2), 17-23

*Bergeron J.et Herscovics N.(1982) Pourquoi et comment décrire un modèle de la compréhension mathématique, Bulletin de l'AMQ. Mars, XXII (1) 9-17.

*Bergeron J. et Herscovics (1989) Un modèle de la compréhension pour décrire la construction de schèmes conceptuels mathématiques. Actes de la 41 ième rencontre de la Commission Internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. Bruxelles. p.139-147.

*Bergeron J., Herscovics N. et Bergeron A. (1986) The Kindergartner's symbolization of numbers. Proceedings of the eight annual meeting. North american chapter of the international group for the psychology of mathematics education. p. 35-41.

Bideaud J. (1992). Les chemins du nombre. Confrontations et perspectives. Les chemins du nombre. Presses Universitaires de Lille. J. Bideaud, Cl. Meljac et J.P. Fisher éds. p. 435-450.

Bodalev A.A. (1982) The development of the psychology of people cognition of one another. Soviet psychology, XX (4), 37-51.

*Boero P. (1992) Methodological choices concerning research in mathematics education : internal constraints and limitations. Conférence donnée au International Congress of mathematical education. Université Laval. Québec.

*Boukhssimmi D. (1990) Analyse épistémologique des influences d'un logiciel et des interventions du maître sur la compréhension de la droite et de son équation. Thèse de doctorat. Université Laval.

Bonnet K.A. (1989) Learning disabilities : a neurological perspective in humans. Rase, 10 (3), 8-17.

*Bringuier J.C. (1977) Conversations libres avec Jean Piaget. Editions Robert Laffont. Paris. 221 p.

Bromme R. Juhl K. (1988) How teachers construe pupil understanding of tasks in mathematics relating the content to cognitive processes of the learner. Journal of curriculum studies, 20 (3), 269-275.

*Bruner J. (1987) Making sense. The child's construction of the world. Methuen. 204 p.

*Bruner J. (1960) The process of education. Cambridge, Mass.: Harvard Univer. Press.

*Bryan T., Bay M. et Donahue M. (1988) Implications of the learning disabilities definition for the regular education initiative. Journal of learning disabilities, 21 (1), 23-28.

*Byers et Herscovics N. (1977) Understanding school mathematics. Mathematics teaching. 81, 21-27.

Commission des Écoles catholiques de Montréal (1991) L'enseignement à la C.E.C.M. des interventions pédagogiques adaptées. Service des études. Mars. 37 p.

Capra F. (1989) Le temps du changement. Éditions du Rocher. 406p.

Carnine D.W., Kameenui E.J. (1990) The general education initiative and children with special needs: A false dilemna in the face of true problems. Journal of learning disabilities, 23 (3), 141-144.

Carnine D.W. (1991) Curricular interventions for teaching higher order thinking to all students: Introduction to the special series. Journal of learning disabilities, 24 (5), 261-269.

*Case R. (1982) General developmental influences on the acquisition of elementary concepts and algorithms in arithmetic. Addition and substraction: A cognitive perspective. LEA publishers. Hillsdale, New-Jersey. p. 156-170.

*Cerquetti-Aberkane F. et Jannequin F.(1987) Histoires de comptes. Épigones. 30 p.

Clements D.H. (1989) Consensus, more or less. Journal for research in mathematics education, 20 (1), 111-119.

*Coplin J.W. et Morgan S.B. (1988) A learning disabilities: a multidimentional perspective. Journal of learning disabilities, 21 (10), 614-622.

*Coles G. (1987) The learning mystique. A critical look at learning disabilities. Fawcett Columbine. New-York. 330 p.

*Copeland R.W. (1979) How children learn mathematics. 3e édition. MacMillan Publishing Co. Inc. 420 p.

Davydov V.V. (1981) The category of activity and mental reflection in the theory of A.N. Leon'ev.Soviet psychology, XIX (4), 3-29.

*De La Garanderie (1987) Comprendre et imaginer. Le Centurion. 193 p.

*De La Garanderie (1984) Le dialogue pédagogique. Le Centurion. 125 p.

*De La Garanderie (1982) Pédagogie des moyens d'apprendre. Le Centurion. 131 p.

*DeBlois L.(1990) Étude de trois approches pouvant favoriser l'atteinte de la compréhension abstraite logico-mathématique de la numération chez des élèves de troisième année. Thèse de maîtrise. Université Laval. 125 p.

Desbiens J.P. (1968) Introduction à un examen philosophique de la psychologie de l'intelligence chez Jean Piaget.P.U.L. 196 p.

*Charron R. (1990) Apprendre à apprendre. Vie pédagogique. Septembre-Octobre (68) 4-7.

Dionne J.J.(1988) Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire: le problème de la didactique des mathématiques. Collection Prix Grégoire, faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal. 328 p.

Drevillon J. (1980) Pratiques éducatives et développement de la pensée opératoire. P.U.F. Paris. 360 p.

Dubinsky Ed. et Lewin P. (1986) Reflexive abstraction and mathematics education : the genetic decomposition of induction and compactness. Journal of mathematical behavior. 5, 5-92.

Ducret J.J. (1990) Jean Piaget. Biographie et parcours intellectuel. Delachaux et Nieltlé. Neuchâtel et Paris. 163 p.

*Eiserman W.D.(1988) Three types of peer tutoring : effects on the attitudes of students with learning disabilities and their regular class peers. Journal of learning disabilities, 21 (4), 249-252.

El'konin D.B.(1967) The problem of instruction and development in the works of L.S. Vygotsky. Soviet psychology, V, 34-41

Ellis E.S., Lenz K.B. et Sabonie E.J. (1987a) Generalization and adaptation of learning strategies to natural environments: Part 1: critical agents. Remedial and Special education, 8 (1), 6-20.

Ellis E.S., Lenz K.B. et Sabonie E.J. (1987b) Generalization and adaptation of learning strategies to natural environments: Part 2: critical agents. Remedial and Special education, 8 (2), 6-23.

*Engelmann S., Carnine D. et Steely D.G. (1991) Making connections in mathematics. Journal of learning disabilities, 24 (5), 292-303.

*Erlwanger S.H.(1973) Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. Journal of Children's mathematical behavior. (1) 7-27.

Fayol M. (1990) L'enfant et le nombre. Delachaux et Niestlé. 180 p.

*Fetz R.L. (1982) Pour une ontologie génétique Jean Piaget et la philosophie moderne. Revue internationale de philosophie. 36(142-143), 409-434.

*Feurstein R. (1979) The dynamic assessment of retarded performers. The learning potential assessment device, theory, instruments and techniques. University Park Press. 413 p.

Flessas J. (1988) Les tests Kauffman assessment battery for children. Revue québécoise de psychologie, 9 (1), 145-150.

Forness S.R. Kavale K.A. (1987) Holistic inquiry and the scientific challenge in special education: a reply to Iano. Remedial and Special education, 8 (1), 47-51.

*Fuson K.C. (1992) Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. Dans Les chemins du nombres. Dideaud J., Meljac Cl. Fisher J.P. éds. Presses Universitaires de Lille. 159-183.

*Fuson K.C. (1988) Children's counting and concepts of number. Springer-Verlag. New-York. 446 p.

*Fuson K.C. (1990) Issues in place value and multidigit addition and subtraction learning and teaching. Journal of research in Mathematics Education. 21(4), 273-280.

*Fuson K.C., Richards J. et Briars D.J. (1982) The acquisition and elaboration of the number word sequence. Dans C. Brainerd Edition. Progress in cognitive development research: Vol. 1. children's logical and mathematical cognition. Springer- Verlag. New-York. (pp. 33-92).

Gagné R. (1989) Les troubles d'apprentissage peut-on y survivre en dehors de la neuro-psychologie. Bulletin de liaison GIPS, 2 (1), 22-26.

Galperin (1975) Dans Bauer B.A.Some views on soviet psychology Greenwood Press. 285 p.

*Gelman R. et Gallistel C.R. (1986) The child's understanding of number. Deuxième édition. Cambridge, M.A : Havard University Press.

*Ginsburg H.P. et Asmussen (1988) Hot mathematics. Children's mathematics. G.B. Saxe et M. Gearhart Eds. San Francisco. 89-111.

*Ginsburg H.P.(1981) The development of mathematical thinking. New-York, Academic Press.

*Ginsburg H. et Opper S.(1979) Piaget's theory of intellectual development. Prentice Hall inc. 253 p.

*Ginsburg H.P. et Opper S. (1978) Piaget's theory of intellectual development. Second Édition. Prentice Hall. 277 p.

*Glaser B.G. et Strauss A.L.,(1967) The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research. Chicago, Aldine Publishing Co. 271 p.

Golden J.C., Anderson S. (1949) Learning disabilities and brain dysfonction an introduction for educators and parents. Charles C. Thomas Publisher. U.S.A. 161 p.

*Guba E.G. (1981) Criteria for assessing the trutwortthiness of naturalistic inquiries. Educational communication and technology. a journal of theory, research and development. 29(2), 75-91.

*Greco P. et Piaget J.(1959) Apprentissage et connaissance. P.U.F. 181 p.

Hammill D.D. (1990) On defining learning disabilities: an emerging consensus. Journal of learning disabilities, 23 (2), 74-83.

Héraud B. (1992) Genèse de la notion de mesures spatiales: construction de la mesure bilinéaire .Thèse de doctorat. Université de Montréal. Mars.

*Héraud B. (1989) Analyse conceptuelle de la longueur et de sa mesure. Proceedings of the thirtheenth annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education. pp.

*Herscovics N. et Bergeron J. (1989) Analyse épistémologique des débuts de l'addition. Actes de la 41e rencontre de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques. pp.155-165.

*Heshusius L. (1989) The Newtonian mechanistic paradigm, special education and contours of alternatives. Journal of learning disabilities, 22 (7), 403-415.

*Huberman A.M. et Miles M.B. (1991) Analyse des données qualitatives. Recueil de nouvelles méthodes. Editions du renouveau pédagogique. 472 p.

*Inhelder B. et Cellerier G.(1992) Le cheminement des découvertes de l'enfant. Delachaux et Niestlé. Neuchâtel. 319 p.

Inhelder B. et Piaget J. (1967) La genèse des structures logiques élémentaires. 2e édition. Delachaux et Niestlé. 295 p.

*Jenkins J.R., Jewell M., Leicester N., Jenkins L. et Troutner N.(1991) Development of a school building model for educating students with handicaps and at-risk students in general education classrooms. Journal of learning disabilities, 24 (5), 311-320.

*Kamhi A.G. et Catts H.W. (1989) Language and reading : terminology, definitions and subtyping issues. Reading disabilities : a development langage perspective. Kamhi A.G. et Catts H.W. (Ed). pp. 35-66.

*Kamii C.(1990) Les jeunes réinventent l'arithmétique. Peter lang. Berne. 171 p.

*Kamii C. et Joseph L.(1988) Teaching place value and double column addition. Aritmetic teacher. Février, 35(6), 48-52.

*Kamii C.K. et DeClark G.(1985) Young children reinvent aritmetic. Implications of Piaget's theory. Teachers College Press.

*Kamii M. (1981) Children's ideas about written number. Topics in Learning and Learning disabilities. (1), 47-59.

*Kauffman J.M., Gerber M.M. et Semmel M.I. (1988) Arguable assumptions underlying the regular education initiative. Journal of Learning Disabilities. 21(1), pp. 6-11.

*Kauffman A.S. Kauffman N.L.(1983) Kauffman assessment battery for children: interpretative manual. USA. American Guidance Service.

*Kantowski (1978) The teaching experiment and soviet studies of problem solving. Dans L.L.Hatfield (Ed).Mathematical problem solving. Columbus, Ohio: ERIC Clearinghouse of science mathematics and environmental education, 43-52.

*Kieran C. (1985) The soviet teaching experiment. Research methods for studies in mathematics education: some considerations and alternatives. Ed. T.A. Romberg. Madison Wisconsin. Education Research Center.

Kilpatrick J. Wirszup I. (1969) Preface Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, 1, I-V.

Kimball W.S. Heron T.E. (1988) A behavioral commentary on Poplin's discussion of reductionistic fallacy and holistic constructivist principles.Journal of learning disabilities, 21 (7), 420-425.

*Kirk S.A. (1962) Educating exceptionnal children. Boston: Houghton Mifflin.

Kronick D. (1990) Holism and empirism as complementary paradigm.Journal of learning disabilities. , 23 (1), 5-8.

*Kulagina IU. Puskaeva T.D. (1990) Cognitive activity and its determinants in delayed mental development (DMD). Soviet Education. 32(10), 58-70.

*Krutetskii V.A. (1969a) An analysis of the individual structure of mathematical habilities in schoolchildren. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, 2, Ed. Kilpatrick J. Wirszup I. pp.59-104.

Krutetskii V.A. (1969b) Mathematical aptitudes. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics, 2 ED. Kilpatrick J. Wirszup I. pp. 113-128.

*Labinowicz E.(1985) Learning from children. New beginings for teaching numerical thinking : a Piagetian approach. Addison-Wesley publishing co. 454 p.

*Lauer J.M. et Asher J.W. (1988) Composition research. Empirical designs. Oxford University Press. 302 p.

*Legendre-Bergeron M.F. (1980) Psychologie du développement. Gaëtan Morin et associés ltée. Chicoutimi. 238 p.

*Lessard-Hébert M., Goyette G. et Boutin G. (1990)Recherches qualitative: fondements et pratiques. Editions Agence d'arc inc.180 p.

*Lester F.K. (1992) What should mathematics education research be about? Conférence donnée au International Congress of mathematical education. Université Laval. Québec.

Lewin P. (1986) Reflexive abstraction ad representation. ED 277481. Sixteen Annual Symposium of the Jean Piaget Society. Philadelphia. May

*Lloyd, Crowley, Lolher et Strain (1988) Redefining the applied research agenda : cooperative learning, prereferral, teacher consultation and peer-mediated interventions. Journal of learning disabilities. 21(1) 43-52.

*Madell R. (1986) Addition et soustraction. Les modes naturels d'opération chez les enfants. Traduit par Jean Dionne. Département de didactique. Université Laval.

*Menchinskaya N.A. et Moro M.I. (1975) Questions in the methods and psychology of teaching arithmetic in the elementary grades. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. XIV. pp. 169-194.

*Menchinskaya (1969) Fifty years of soviet instructional psychology. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. I, 5-7

Meuris G. (1984) A travers l'oeuvre de Piaget.Bulletin de psychologie scolaire et d'orientation. 33e année (1), 114-127.

Mikhal'skii K.A. (1975) The solution of complex arithmetic problems in auxiliary school. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics IX, 90-100.

*Ministère de l'éducation du Québec (1991) Declaration et définitions d'élèves en difficulté ou handicapé d'apprentissage pour une compréhension et une gestion commune. Document de travail. 42 p.

*Ministère de l'éducation du Québec (1981) Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Fascicule A. Guide général. 34 p.

Minskaya G.I. (1975) Developing the concept of number by means of the relationships of quantities. Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics. VII, 207-261.

Naglieri J.A. Das J.P. (1988) Planning-Arousal simultaneous Successive (pass): a model for assessment. Journal of School psychology (26), 35-48.

*Nantais N., Boulet, G. Bergeron J. et Herscovics N. (1989) Compréhension logico-physique de la multiplication chez l'enfant. Rôles et conceptions des programmes de mathématique. Actes de la 41e rencontre internationale de la CIEAEM. Bruxelles. pp. 193-198.

*Nantais N. et Herscovics N. (1989) Epistemologique analysis of early multiplication. Phychology of mathematics education Actes de la 13e conférence internationale, Paris, pp 18-24.

*Nantais, N. (1983) Synthèse et critique des méthodes permettant de cerner la pensée de l'enfant. Université de Sherbrooke. 46 p.

*Newman R.S. et Berger C.F.(1984) Children's numerical estimation: Flexibility in the use of counting. Journal of Educational Psychology. 76(1), 55-64.

*Novak J.D., Gowin D.B.,(1984) Learning how to learn. Cambridge University Press.

*Opper S. (1977) Piaget's clinical method. The journal of children's mathematical behavior. 1(4) 90-107.

*Perret J.F. (1985) Comprendre l'écriture des nombres. Ed. Peter Lang.

*Piaget J.(1981) Le possible et le nécessaire 1. P.U.F. 188 p.

Piaget J. (1979) L'épistémologie génétique. P.U.F. 126 p.

*Piaget J. (1978a) Recherches sur la généralisation. P.U.F. 262p.

*Piaget J.(1977a) Recherches sur l'abstraction réfléchissante 1. L'abstraction de l'ordre des relations logico-mathématiques. P.U.F. 147 p.

*Piaget J. (1977b) Recherches sur l'abstraction réfléchissante.2 L'abstraction des relations spatiales. P.U.F.326 p.

Piaget (1977c) L'évolution du nécessaire chez l'enfant P.U.F. 173 p.

*Piaget J. (1975) L'équilibration des structures cognitives. P.U.F.(XXXIII), 188 p.

*Piaget (1974a) La prise de conscience. P.U.F. 177 p.

*Piaget J. (1974b) Comprendre et réussir P.U.F. 253 p.

*Piaget J. (1972) Où va l'éducation. Denoël Gonthier. U.N.E.S.C.O. 133 p.

*Piaget J. (1970) La formation du symbole chez l'enfant. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé. 310 p.

*Piaget J. (1967) Biologie et connaissance. Paris: Gallimard.

Piaget J. (1966) L'image mentale chez l'enfant P.U.F. 458 p.

Piaget J. (1964) Six études de psychologie. Denoël Gonthier. 188p.

Piaget J. (1964) La genèse du nombre chez l'enfant 3e édition. Delachaux et Niestlé. 317 p.

Piaget J. (1963) La construction du réel chez l'enfant. Delachaux et Niestlé. Neuchâtel. 342 p.

Piaget J. (1961) Mémoire et intelligence P.U.F. 482 p.

Ponomarev Ya A. (1981) Creativity and psychology Soviet psychology , XX (1), 47-61.

*Poplin M.S. (1988) The reductionistic fallacy in learning disabilities: replicating the past by reducing the present. Journal of learning disabilities, 21 (7), 389-400.

*Rachlin S. (1979) Clinical approaches to the study of Mathematical habilities. Presented at the Symposium on Mathematical hability. San Francisco.

Reid D.K. (1988) Reflection on the pragmatics of a paradigm shift. Journal of learning disabilities , 21 (7), 417-420.

Riley N.J. (1989) Piagetian cognitive functionning in students with learning disabilities. Journal of learning disabilities. , 22 (7), 444-451.

Rose Park (1982) The park school systems approach to piagetian education. ERIC ED 24 3572 18 p.

*Ross S.H. (1989) Parts, Wholes, and place value: a developmental view. Arithmetic teacher. 36 (6), 47-51.

Rubtsov V.V. (1981) The role of cooperative in the development of intelligence. Soviet psychology. , XIX (4), 41-61.

*Saada-Robert M. (1986) Le nombre, significations et pratiques. Recherches en didactique des mathématiques. 7, 105-148.

Saxe G.B., Becker J., Sadeghpour M. et Steven S. (1989) Developmental differences in children's understanding of number word conventions. Journal for research in mathematics education, 20 (5), 468-488.

*Schubauer-Leoni M.L. (1986) Le contrat didactique: un cadre interprétatif pour comprendre les savoirs manifestés par les élèves en mathématique. European Journal of Psychology of Education. 1(2), 139-153.

*Siegel L.S. (1989) IQ is irrelevant to the definition of learning disabilities. Journal of learning disabilities. 22(8) 469-478.

*Siegel L.S. (1988) Definitional and theoritical issues and research on learning disabilities. Journal of learning disabilities, 21(5), 264-266.

Siegel I.E. et Holgren A. (1982) A constructivist cognitive view of the development of the person. Dans Progress in psychology of personnality. Ed. A. Kossakowski et K. Obuchosski. North Holland. pp.63-73.

Sierpinska A. (1990) Some remarks on understanding in mathematics. For the Learning of Mathematics. 10 (3), 24-41.

Sierpinska A. (1992) Sur l'acte de compréhension en mathématiques. Conférence prononcée à l'Université Laval. Québec.

*Skemp (1976) Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics teaching. 77

Skemp R. (1981) The formation of mathematical concepts. Developing mathematical thinking. Addison-Wesley Publishers Ltd. 79-86.
Shipley E.F. et Shepperson B.(1990) Countable entities : Developmental change. Cognition. 34, 109-136.

*Steffe L.P. et Cobb P.(1988) Construction of arithmetical meanings and strategies. Springer-Verlag. New-York. 343 p.

*Steffe L.P. et Von Glaserfeld E.(1985) Helping children to conceive on number. Recherches en Didactique des Mathématiques. 6(2-3), 269-303.

*Steffe L. (1983) The teaching experiment methodology in a constructivist research program. Proceedings of the fourth international congress on mathematical education. Boston : Birkhauser, 469-471.

*Steffe L. et Von Glaserfeld E. (1983) The construction of arithmetical units. Proceedings of the fifth annual meeting. PME-NA.

*Stenhouse L.(1988) Case study methods. Educational Research methodology, and measurement. An international handbook. Pergamon Press. p.49-53.

*Strauss A.L. et Corbin J.(1990) Basics of qualitative research. Grounded theory procedures and techniques. Publications Sage. London. 270 p.

Smirnov S.D. (1981) The world of images and the image of the world. Soviet psychology. , XX (2 pp.3-27.

*Sophian C. et Adams N.(1987) Infants' understanding of numerical transformations. British Journal of Developmental Psychology. 5, 257-264.

Strommen E. (1988) Confirmatory factor analysis of the Kauffman Assessment battery for children : a reevaluation. Journal of school psychology, (26), 13-31

*Swanson H.L., Cochran K.F. et Ewers C.A. (1990) Can learning disabilities be determined from working memory performance? Journal of learning disabilities. 23(1), 59-67.

Tardif, Lessard (1991) L'évolution de l'enfance inadaptée et l'insertion en milieu scolaire des orthopédagogues. Apprentissage et socialisation, 14 (3), 203-215.

Torgensen J.K., Wong B.(Eds) Psychological and educational perspectives on learning disabilities. Academic Press. pp.329-360.

*Van der Maren J.M.(1987) Méthodes qualitatives de recherche en éducation. Centre interdisciplinaire de recherches sur l'apprentissage et le développement en éducation. Université du Québec à Montréal. 101 p.

*Vergnaud G. (1992) L'appropriation du concept de nombre : un processus de longue haleine. Dans Les chemins du nombre. J. Bideaud, Cl. Meljac et J.P. Fisher eds. Presses Universitaires de Lille. 271-282.

*Vergnaud G. (1991) Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. Revue Française de Pédagogie. (96), 79-86.

Vergnaud G. (1991) L'enfant, la mathématique et la réalité. Peter Lang. Berne. 4e édition. 218 p.

Vinh Bang (1966) La méthode clinique et la recherche en psychologie de l'enfant. Psychologie et épistémologie génétique. Paris: Dunod. 67-81.

*Vygotski (1985) Pensée et langage. Traduction de Françoise Sève. Editions sociales. 2e édition. Paris. 416 p.

*Yin R.K.,(1981) The case study as a serious research strategy. Knowledge. Sage publications Ltd. 97-114.

*Yin R. K. (1984) Case study research, design and methods. Beverly Hill, Sage, 160 p.

*Young-Loveridge J. (1989) The development of children's number concepts : the first year of school. New-Zealand Journal of Educational Studies. 24(1), 47-64.

Young-Loveridge J.M. (1987) Learning mathematics. British Journal of Developmental Psychology. 5, 155-167.

APPENDICE 1

Étude de cas de Cl.

I. Première évaluation clinique

Habiletés de comptage

Cl. compte facilement 1 par 1, mais le comptage par 10 est remplacé par un comptage par 5 sans s'apercevoir de son erreur. Tant et aussi longtemps qu'il ne lui est pas proposé de compter par 10 à partir de 0, Cl. continue son comptage par 5. Cl. éprouve aussi des difficultés avec le double-comptage. Elle compte les nombres plutôt que les pas entre 608 et 615. D'autre part, elle n'utilise par le double-comptage pour vérifier le comptage par bonds de 10.

Palier logico-physique

Cl. reconnaît les groupements d'objets de la vie courante et leur attribue le nom qui leur correspond. Ainsi, elle sait qu'une douzaine s'appelle ainsi parce qu'elle contient douze éléments et qu'une dizaine en contient dix. Lorsqu'il s'agit de construire une centaine avec des enveloppes, elle croit que trois enveloppes de dix seront suffisantes, en expliquant simultanément cette centaine contient 100 jetons. Elle réfère d'abord au nombre de chiffres nécessaires pour former un nombre qui comporte des dizaines, puis à la quantité d'éléments individuels contenus dans cette centaine, qui donne le nom à ce groupement.

Elle illustre ensuite correctement le nombre 202, mais l'invariance de cette quantité n'est pas reconnue lorsqu'une des centaines est déchirée. Elle explique : «il y en a trop ici (en montrant les dix dizaines). Il y en a 10, pis ici il y en a 10...pis ça fait...ça fait 2...ça fait 100...2 (en touchant la centaine et les 2 jetons)». Le comptage ne l'aide pas à découvrir le nombre, puisque tous les éléments sont comptés 1 par 1 sans qu'elle tienne compte des différences entre la valeur des unités et la valeur des centaines. Elle compte donc 13 éléments. D'autre part, dans l'activité où elle doit comparer l'avoir de trois bonhommes (30 jetons, 2 dizaines de jetons et dix jetons, et enfin 3 dizaines de jetons), elle considère que le deuxième est le plus riche. elle explique alors : «il a 210, alors que les autres ont 30 jetons et 30 dizaines».

Palier logico-mathématique

Elle lit, écrit et ordonne les nombres en observant s'ils sont dans les «mille» ou non. Une erreur en ordonnant les nombres 306 et 270 est expliquée ainsi : «C'est parce que je voyais le mot pis j'ai pensé qu'il y avait juste 70, il y avait un gros chiffre pis il y avait juste 6». Elle explique ensuite que 270 est plus grand que 207 parce que : «il y a un 0 ici (207), pis là (270) il y en a pas, ils ont rien qu'inversé».

Cl. sait que les 2 du nombre 222 ont des valeurs différentes. Ainsi, le premier vaut 200 et le dernier vaut 2. Elle considère que ce nombre contient 20 dizaines, puis 222 unités. La comparaison entre les unités et des groupements comme unités de mesure différentes laisse apparaître, malgré les manipulations, une difficulté à coordonner nombre et unités de mesure de quantité. Devant les 20 jetons et les deux enveloppes de dizaines, elle croit que 20 unités est plus petit que 2 dizaines : «Parce que 2 dizaines c'est toujours plus grand que les 20 unités». Elle croit ensuite que les deux enveloppes de dizaines qu'elle déchire contiennent 20 dizaines. Une intervention lui permet de reconnaître l'équivalence entre les quantités. Elle croit par la suite que 20 dizaines est plus petit que 2 centaines.

Elle arrondit 613 à la centaine (600), plutôt qu'à la dizaine comme on lui a demandé. Elle arrondit ensuite le nombre 497 à la centaine (500) comme je lui ai demandé.

Cl. recompose le nombre 709 à l'aide des décompositions proposées. Elle utilise les cartes qui représentent des unités (700 unités et 9 unités, 700 et 9). Elle décide de ne pas choisir la carte 70 dizaines.

L'opération où Cl. doit enlever 20 au nombre 234 est réussie avec le matériel. Sans ce dernier, elle se contente d'enlever le chiffre 2 des centaines pour retrouver le nombre 34. La manipulation lui permet de reconnaître sa confusion entre centaine et dizaine.

1. Première expérimentation didactique (valeur positionnelle)

L'expérimentation didactique porte sur la valeur de position des chiffres dans un nombre. L'entrevue débute par le rappel de la construction de dizaines et de centaines et par la mise en correspondance avec les termes utilisés pour les identifier. L'histoire permet à Cl. d'observer la différence entre notre façon de lire un nombre et une façon de lire qui aurait déjà existé, où on ne disait que les chiffres de droite à gauche. Cl. explique ce qui distingue ces deux types de lecture. Pour elle, actuellement «on les dit tous en groupes» alors qu'avant on les disait à l'envers (3, 9, 8 pour 893).

Dans une première tâche, Cl. doit retrouver le nombre le plus grand qu'il est possible de former à l'aide des chiffres proposés (3, 5 et 5). Elle forme le nombre 553. Elle explique que : «300 c'est petit, pis il y a deux 5 ça fait qu'on n'a pas le choix de mettre 53 parce que 35 c'est petit».

Après avoir mis en correspondance les chiffres de chaque position aux enveloppes et aux jetons qu'ils représentent, je donne à Cl. le chiffre 0, afin qu'elle puisse à nouveau former le nombre le plus grand possible. Elle place d'abord le 0 à la position des unités, puis à celle des dizaines, formant ainsi le nombre 5 503. Elle explique : «Parce que 50 pis 55 c'est à cause...ça se peut là mais...tu sais c'est pas...comment je pourrais dire ça...Ben ça c'est la position des unités, pis ça c'est la position des dizaines, il y en a pas, pis ça, c'est la position des centaines pis ça c'est la position des unités de mille». Pour Cl. former le nombre le plus grand implique d'enlever le moins possible de quantité, la dizaine étant le plus petit groupement entre tous les groupements.

A nouveau la correspondance entre la position des chiffres et ce qu'elle représente est réalisée. Cette mise en correspondance favorise la reconnaissance de l'unité de mesure de quantité la plus petite : les unités. Un conflit surgit chez Cl. qui hésite alors entre l'unité de mesure la plus petite et 0, représentant le plus petit chiffre. Elle explique ce qui la mêle : «c'est le plus petit entre le 0 et le 3 pis entre le 5 et le 5». Elle déplace le 0 à la position des unités et découvre que le nombre 5 530 est plus adéquat pour répondre à la consigne, puisqu'il est plus grand que 5 503. Elle explique que le 0 va à la plus petite place mais trouve que...«c'est embêtant un peu».

Par la suite, les chiffres 4, 2 et 1 lui permettent de former 4 210. Elle ajoute : «S'il y avait eu deux 0, je les aurais mis ici (à la dizaine), un 0 la pis un autre là (à l'unité)... parce que les dizaines, c'est encore un moyen là...plus petit». Si un 2 avait remplacé le 4, elle aurait formé le nombre 2 210.

Le nombre 2210 est illustré sur un abaque et je lui propose d'y enlever 20. Cette tâche la rend perplexe. Elle considère qu'elle n'en a pas assez mais ne pense pas à établir des relations d'échange entre les dizaines et les centaines. Le matériel, de type formel, cause peut-être un obstacle. A moins qu'elle ne fasse correspondre à chaque nom de nombre une représentation et une seule.

Elle sait que 20 correspond à deux enveloppes de dizaines et accepte de confirmer que 20 unités et 2 dizaines c'est pareil. Toutefois, elle n'arrive pas à verbaliser que 20 c'est 2 «dizaines». Elle croit que c'est 20 dizaines. Elle accepte le fait qu'on puisse parler de 2 dizaines et de 20 en même temps, mais pense que ça ne veut pas dire la même chose. Elle arrive ensuite à concevoir ces appellations comme synonymes en expliquant : «20 unités...pis 2 dizaines...ben 20 unités, il y en a 2, fait que il y a en 20, ça fait 20 pis les unités, il y en a 10... fait qu'il y en a dix dans chaque enveloppe, ça fait 20». Cl. éprouve aussi des problèmes à concevoir plus d'un nom pour une représentation.

Nous nous arrêtons ainsi un bon moment sur les différentes «traductions» possibles. Ainsi, Cl. met en correspondance 5 dizaines avec 50 dizaines, puis avec 50 unités lorsqu'elle réalise qu'elle parle d'unités. 30 unités est ensuite mis en correspondance avec 3 enveloppes de dizaines qu'elle appelle 3 dizaines. Cl. fait ensuite correspondre 12 dizaines à 120 unités. Elle écrit alors 120 unités sur une feuille, puis fait correspondre 120 unités au nombre 120.

Cl. reconnaît qu'on peut compter les unités par 1 et les dizaines par 10, elle ne pense pas compter les centaines autrement que par 1. Elle ne se rappelle plus que la centaine contient 100 jetons ou unités et qu'il est possible de compter par 100 lorsqu'on veut compter les unités. Construire une centaine, la défaire, compter les unités de chacune des dizaines permettra à Cl. de découvrir qu'il est possible de compter la centaine par 100.

L'écriture du nombre 130 permet à Cl. d'observer qu'elle peut retrouver le nombre de dizaines contenues dans ce nombre en enlevant le 0 qui est à la position des unités. Construire 13 dizaines, en utilisant 1 centaine et 3 dizaines n'est pas facile pour Cl.. Elle compte les 13 dizaines 1 par 1 et appelle le nombre «centaine». Il faut revenir au contenu de la centaine, puis au comptage des dizaines 1 à 1 pour réaliser l'illustration du nombre 130 et retrouver son nom.

2. Deuxième expérimentation didactique (construction d'unités de mesure de quantité)

La deuxième expérimentation didactique porte sur les différents groupements représentés par les positions des chiffres dans un nombre. L'histoire racontée permet à Cl. de s'apercevoir qu'il a déjà existé différentes conventions dans le nombre d'unités requis pour faire des groupements. Nous touchons ici l'idée des différentes bases sans nous y attarder.

Ainsi, lorsque je lui propose de trouver le moyen le plus rapide pour retrouver le nombre de traits sur une feuille, elle pense à grouper par 10. Elle dénombre alors 14 «encerclés», comme elle les appelle, qu'elle identifie ensuite comme étant des dizaines. Elle compte aussi 6 unités. En juxtaposant ces deux quantités, elle retrouve le nombre 146. Elle explique : «Parce que regarde ici (en montrant 14 dizaines) c'est 14 pis ici (en montrant le 6) j'ai rien qu'à le mettre avec le 14 pis ça fait 146».

Voyant qu'elle ne peut expliquer autrement l'apparition du nombre 146 que par la juxtaposition des chiffres, je lui demande si elle aimerait chercher pourquoi «on peut mettre le 6 à côté du 14». Je lui demande d'abord comment elle pourrait faire pour répondre à cette question. Elle reconstruit les 14 dizaines avec les enveloppes, ajoute 6 jetons pour les unités et explique : «Parce que ça, les dizaines, il y en a 14 pis les unités, il y en a 6. Pis on peut toutes les mettre ensemble, pis on peut les mettre dans des enveloppes». Elle réfléchit un moment puis, sur mon invitation, compte les dizaines 1 par 1 jusqu'à 14. Ce comptage et la reconnaissance de la régularité 10 dans la fabrication de groupements lui permettent de construire une centaine.

Cl. appelle la centaine qu'elle est en train de fabriquer «des centaines» puis «146 centaines». Une fois l'enveloppe de la centaine terminée, elle reconnaît qu'elle a 1 centaine. Elle ajoute qu'il y a aussi 4 dizaines et 6 unités. Elle explique ensuite qu'on peut mettre le 6 à côté du 14 : «C'est parce qu'on a tout formé, on a avait 14, on en a tout formé, là avec ça (enveloppe de centaine) on en a 10 la-dedans, pis ici (en montrant les dizaines) il y en a 4. On peut former ça avec 4...1...ben 10...centaines, ben 1 centaine je veux dire, pis 4 uni...4 dizaines pis 6 unités. Pis ça fait 146».

Je lui demande alors combien de dizaines sont contenues dans 146. Elle identifie d'abord 4 dizaines, puis devant l'illustration et la précision apportée selon laquelle je veux connaître la quantité totale de dizaines, elle compte les dizaines dans la centaine et trouve 14 dizaines. Elle sait alors qu'il faut compter les dizaines qui sont dans la centaine.

Je lui demande ensuite si elle peut me dire combien d'unités sont dans le nombre 146. Elle reconnaît tout de suite qu'il y en a beaucoup et choisi de compter par 10. La diversité des groupes lui pose problème. Elle ne sait plus si elle doit compter par 5, par 10 ou par 100. Elle explique enfin qu'elle compte par 100 et par 10 parce que les enveloppes correspondent à des dizaines et des centaines. Le questionnement qui suit me permet de voir qu'elle tient compte des unités contenues des dizaines et des dizaines contenues dans la centaine, sans pouvoir retrouver les unités contenues dans la centaine. En effet, elle sait qu'une dizaine contient 10 unités mais n'arrive pas à retrouver le nombre d'unités qui composent une centaine. Elle défait alors la centaine, compte les unités dans les dizaines et retrouve les 100 unités qui composent la centaine.

Elle compte ensuite les unités sur la table. «100 (en montrant la centaine)...110, 120, 130, 140 (en montrant les dizaines) ...». Elle s'arrête et hésite devant la centaine déjà compté. Elle explique qu'elle n'a pas compté les unités qui la compose. Je lui demande alors :
«-As-tu fini de compter toutes les unités?
-Non, il y en a la-dedans (en montrant la centaine).
-Les as-tu comptées?
-Non...ceux-là c'est des centaines.
_Est-ce que tu m'as dit 100 tout à l'heure?
-Oui
Alors est-ce que tu as compté les unités?
-...oui»
Elle retrouve 146 unités et explique : «C'est drôle parce que je compte avec tout ensemble parce que avant on comptait ça (les groupes) à part». Elle retient que devant une panne elle peut s'aider en comptant, identifie ce dont elle doit se préoccuper lorsqu'elle compte les unités, les dizaines ou les centaines. Elle retrouve les 200 unités qui composent le nombre 200. Nous arrêtons l'entrevue à ce moment.

3. Troisième expérimentation didactique (décomposition et recomposition de nombres)

Le but de cette expérimentation didactique est la décomposition et la recomposition de nombres. Le début de l'entrevue permet de mettre en lumière la compréhension de Cl. en ce qui concerne l'inclusion des unités dans les centaines. L'accent est mis sur la représentation mentale que se fait Cl. des différents groupements. L'histoire qui suit ce rappel, permet de reconnaître que les Chinois écrivent leurs nombres à la manière dont Cl. décompose en classe. Elle semble faire allusion à l'organisation du tableau de numération lorsqu'elle explique l'organisation des chiffres et des positions.

Dans un premier temps Cl. est appelée à décomposer, comme elle le fait en classe, un nombre qu'elle choisit. Puis elle montre les enveloppes et les jetons qui correspondent à chacun des termes de sa décomposition. Elle décompose ainsi le nombre 351. Elle écrit 100 50 1 sous le nombre 351. Cl. découpe ainsi chacun des termes du nombre 351 et les fait correspondre aux 3 enveloppes de centaine, 5 enveloppes de dizaines et au jeton. En expliquant cette correspondance, elle corrige le nombre 100 qu'elle remplace par 300 en disant : «il n'y a pas de 1». Cl. sait que 300 correspond à 3 centaines et non 300 centaines, mais elle est incapable de découvrir que 300 correspond aussi à 300 unités. Elle compte les centaines, sans les toucher, en disant 100, 110, 120. En prenant les trois enveloppes blanches qui correspondent aux centaines, elle compte 100, 200, 300 et s'aperçoit ensuite qu'elle avait confondu les enveloppes de dizaines et celles des centaines.

Cl. arrive ensuite à reconnaître les différentes façons de compter la centaine, selon que l'on compte les unités (par 100), les dizaines (par 10), ou la centaine (par 1). Elle explique qu'elle a compté les unités, lorsque je lui montre le 300 de sa décomposition. Le 50 de sa décomposition (300 50 1), lui a permis de compter les dizaines. Nous vérifions cette conception avec les enveloppes. Elle réalise qu'elle parle encore des unités. Elle reconnaît alors qu'il y a deux façons de parler de la même quantité. Le 50 représente les unités alors que le 5 représente les dizaines. Je profite de l'occasion pour lui faire prendre conscience de l'importance de bien se représenter mentalement ce dont on parle toutes les deux, sans quoi il est impossible de se comprendre.

La deuxième tâche consiste à retrouver les nombres qui correspondent aux quantités inscrites sur les cartes, afin de former des nombres compris entre 402 et 513. Je lui propose alors de lire la carte sur laquelle est inscrit 42 dizaines, puis d'illustrer cette quantité. Elle cherche d'abord à enlever le 2 pour prendre 4 dizaines puis, devant mon questionnement, elle réalise qu'il y a des dizaines dans les enveloppes de centaine. Elle commence à les compter par 10, adapte ensuite son comptage pour compter par 1 les dizaines manquantes. Elle hésite à construire une nouvelle centaine devant ses 12 dizaines «parce qu'il en reste deux». Pour elle, fabriquer une centaine semble impliquer qu'on ne laisse rien d'autre sur la table. Je la rassure à cet effet. Elle observe donc maintenant les 4 enveloppes de centaines et les 2 enveloppes de dizaines. Elle appelle d'abord ces 2 enveloppes, des unités et croit qu'elle a illustré le nombre 402.

Je lui demande si elle a moyen pour trouver le nom de ce nombre. Devant son silence, je lui propose d'utiliser le tableau de numération dont elle m'a parlé au début de l'entrevue. Elle ne semble plus savoir de quoi il s'agit, me dessinant un tableau de «jogging mathématique» que je n'ai jamais vu auparavant. Elle ne lui reconnaît aucune aide et le délaisse. Je lui dessine donc le tableau de numération dont je lui parlais et elle inscrit le 4 dans la colonne des centaines, le 2 dans celle des dizaines et 0 dans celle des unités, puisqu'il ne reste pas d'unités qui ne sont pas regroupées. Elle lit avec surprise le nombre 420.

Je lui demande aussitôt combien d'unités contient ce nombre. Elle dénombre les différentes enveloppes et retrouve les 420 unités.

Elle sait que le nombre s'appelle 420 et qu'il contient 420 unités et explique : «Parce que c'est toutes des...c'est toutes des chiffres différents, ben c'est normal là...parce que dedans il y en a 20, pis le chiffre est 20, pis ici il y en a 400 mais dans les centaines, ça fait 400». Elle termine en disant «...quand c'est des unités, ça fait le même nombre». Je lui demande si le comptage des unités lui permet toujours d'obtenir le nom du nombre. Elle ne sait pas.

Ainsi, avant de reconnaître que 3 unités correspondent au nombre 3, elle se représente mentalement les 3 unités et cherche le nom de cette quantité. Elle n'est toujours pas certaine que le comptage des unités correspond au nom du nombre. Elle fait correspondre rapidement 49 dizaines au nombre 490 en expliquant : ...c'est un plus gros chiffre. On ajoute toujours un 0 parce qu'il y en a pas...de dizaines». Je lui indique qu'il n'y a pas de petites unités toutes seules.

4. <u>Quatrième expérimentation didactique (suite de la décomposition et la recomposition)</u>

Le but de l'entrevue est de recomposer des nombres à l'aide des quantités inscrites sur des cartes afin de former des nombres qui seront compris entre 402 et 513. À cet effet, Cl. constate qu'entre ces deux nombres, il y a «une tonne» de nombres. L'histoire racontée favorise la prise de conscience de la régularité du nom des positions à travers les différents ordres. Le rappel du nom des différents groupements et l'identification du matériel utilisé en classe permettent une brève révision.

La tâche qui suit consiste d'abord à lire les cartes et à y faire correspondre le nom du nombre. Cl. fait correspondre le nombre 500 à la carte sur laquelle est inscrit 5 centaines. Elle explique : «on rajoute deux zéros». A ma demande, elle illustre les 5 centaines. Elle choisit les enveloppes de centaines, les compte par 100, ce qui confirme le résultat prévu.

Elle fait ensuite correspondre 2 unités au nombre 20 puis au nombre 2, 12 unités au nombre 12 et 11 unités au nombre 11. La quantité 45 dizaines est ensuite associée au nombre 450 en me disant qu'elle a compté par 5, parce qu'elle voulait arriver à 45. Le comptage des enveloppes de dizaines lui permet de réaliser qu'elle a compté par 10. Les autres nombres sont retrouvés facilement. La rapidité avec laquelle sont faites ses correspondances me permet de penser que Cl. utilise davantage le tableau de numération que le calcul mental des enveloppes.

Une confusion apparaît entre 4 dizaines qui équivaut à 40 et 40 dizaines. Pour Cl., 40 dizaines «ça peut pas se dire». Une discussion sur la représentation mentale qu'elle se fait des dizaines est suffisante pour retrouver les quatre dizaines et faire disparaître cette confusion.

La deuxième tâche consiste à construire des nombres qui seront compris entre 402 et 513. Les premières solutions apportées ne posent pas de problème puisque CL. ne présente qu'une seule carte à la fois. Par exemple, elle me tend 45 dizaines, 51 dizaines, 42 dizaines, 43 dizaines, 41 dizaines.

Lorsqu'elle me donne les deux cartes sur lesquelles sont écrites les quantités 5 dizaines et 4 dizaines, elle juxtapose les chiffres et ajoute un 0, pour retrouver le nombre 540. Pour elle, 50 avec 40 ça fait 540. Elle m'explique qu'elle pense davantage aux chiffres qu'aux enveloppes pour trouver des solutions comme celles de 540. Je lui suggère d'additionner les deux quantités. C'est grâce à l'addition des deux quantités, au moyen de l'algorithme de l'addition, qu'elle retrouve le nombre 90.

Elle vérifie cette nouvelle construction en prenant les cartes sur lesquelles sont écrites les quantités 12 unités et 2 unités. Elle demande alors : «On peux-tu mettre lui en premier (12 unités) et après lui (2 unités)»? Le dialogue introduit la représentation mentale de chacune des quantités, ce qui permet d'éliminer l'hypothèse selon laquelle ces deux cartes forment le nombre 122.

Une autre difficulté surgit lorsque Cl. utilise les cartes sur lesquelles est écrit 3 centaines, 3 unités et 4 unités. Elle fait correspondre le nombre 433 à ces quantités plutôt que le nombre 307. Le dialogue et l'écriture du chiffre qui correspond à chacune de ces quantités permet de constater que Cl. a placé la position des centaines à la positions des unités selon l'ordre chronologique dans lequel elle avait pris les cartons. Pour Cl., il n'y a là qu'un problème d'absence de dizaines, explique-t-elle. Elle solutionne le problème en changeant la carte 4 unités pour la carte 4 dizaines et peut ainsi trouver le nombre 334. L'attribution d'une position qui correspond à la fois aux chiffres et aux quantités permet de retrouver le nombre 343 et de constater l'influence d'un changement de position. «Ça fait un autre nombre», explique-t-elle.

Le nombre 343 n'étant pas jugé suffisamment grand, Cl.doit encore ajouter des éléments. Elle tente d'ajouter 5 dizaines, déclare cette addition impossible : «Parce qu'il y a déjà une dizaine». A nouveau, elle cherche à éliminer l'élément perturbateur en prenant une nouvelle carte (40 dizaines). Je l'invite à poursuivre sa réflexion en conservant la carte 5 dizaines.

Je lui demande ce qu'elle peut faire lorsqu'elle a 5 autres dizaines. Elle prend 4 enveloppes de dizaines, puis 5 enveloppes de dizaines. Elle place les deux paquets un à côté de l'autre. Un dialogue lui demande de préciser s'il s'agit de mettre un à côté de l'autre ou de mettre ensemble. Cl. choisit de mettre ensemble en regroupant les dizaines. Je lui demande alors si ce geste correspond à une addition, une soustraction, une multiplication ou une division. Le choix proposé facilite l'apparition de l'addition et le comptage des dizaines par 1. Elle place le chiffre 9 à la position des dizaines et retrouve le nombre 393.

Ce nombre n'est pas encore assez grand. «Il me manquerait 400», dit-elle. Je rectifie en disant qu'il lui manque pour aller jusqu'à 400. Elle ajoute la carte 3 dizaines, l'additionne aux cartes 5 dizaines et 4 dizaines, trouve 12 dizaines auxquelles elle fait correspondre le nombre 120. Elle reconnaît l'addition. Elle hésite, puis écrit les nombres pour les calculer. Elle décide de calculer en utilisant l'algorithme de l'addition. Elle obtient 420, ajoute les 3 unités qui contribuent à former le nombre 423. Elle le juge adéquat pour répondre à la consigne.

5. Cinquième expérimentation didactique (approximation des nombres)

Le but de l'entrevue est d'amener Cl. à comprendre la notion d'arrondir en connaissant son utilité. L'histoire lui rappelle que nous avons déjà construit des groupements différents de ceux de la base 10. La mise en situation, qui suit, consiste à nous imaginer que nous sommes au magasin et que nous devons payer la caissière, en sachant que nous n'avons pas le montant exact. L'argent de monopoly sert de monnaie.

La première tâche vise à faire réaliser à Cl. qu'elle arrondit déjà des nombres, même si elle ne s'en aperçoit pas. Pour acheter son Nintendo au coût de $149, Cl. compte d'abord un billet de 100, puis avec hésitation les billets de 10. Elle s'arrête à 140, et voyant que ce n'est pas suffisant, ajoute un dernier billet de 10. Elle constate qu'elle vient d'arrondir, mais ne peut dire à quelle position. À ma demande, elle énumère les différentes positions qui existent, ce qui lui permet de mettre en correspondance les billets manipulés et les positions pour conclure qu'elle a arrondi à la dizaine. Cl. considère qu'elle aurait pu aussi arrondir à la centaine et qu'à ce moment, elle aurait donné deux billets de cent. Elle explique : «Parce que c'est tous les deux, des chiffres centaines... pis ils ont beaucoup de chiffres.»

La deuxième tâche vise la reconnaissance d'une autre utilité de cette notion : estimer. Dans ce cas, Cl. est toujours au magasin et veut acheter un système de son de $90, en plus de son Nintendo. Elle est pressée et n'a pas de calculatrice, mais elle veut être certaine d'avoir assez d'argent. Comment fera-t-elle?

Cl. additionne d'abord 149 et 90 mentalement pour trouver 239. Je lui propose ensuite d'arrondir 149 et 90 pour les réunir. Elle arrondit le nombre 90 à 89. Je l'invite à utiliser les billets et à penser à ce qu'elle doit donner à la caissière. Elle arrondit alors le nombre 90 à 100. Cl. calcule mentalement 100+150 en faisant les étapes de l'algorithme de l'addition. Elle obtient ainsi 250 et trouve plus facile d'effectuer la deuxième opération. Je lui indique que dans le deuxième cas, elle a estimé et que cela lui permet de savoir combien ces objets coûtent environ. Cl. considère ensuite qu'arrondir lui permet « de compter...».

La troisième tâche cherche à vérifier si Cl. saura utiliser les procédures expérimentées pour arrondir, lorsqu'elle est en classe. Je lui propose donc le nombre 938, qu'elle arrondit immédiatement à 900. Elle ne sait pas identifier la position où elle a arrondi. Suite à l'énumération des différentes positions que je lui propose, elle reconnaît avoir arrondi à la position des centaines. Lorsqu'elle arrondit à nouveau 938 mais à la dizaine, elle trouve 90. Elle explique : «Parce que quand on a un chiffre des dizaines, c'est toujours avec ...les chiffres là...ben comme mettons, le chiffre 90 là, à l'école on fait, 90 parce que 100 unités c'est 9, pis dizaines c'est 90 c'est 90, pis les centaines c'est 100». Elle n'a pas utilisé encore les billets de monopoly. Son explication est confuse. Elle cherche à lier notation positionnelle et valeur de position mais je ne sais pas comment utiliser ces informations.

Je lui propose de prendre l'argent de monopoly et de me montrer comment elle arrondit le nombre 938 à la dizaine. Elle compte d'abord par 100 les billets de 100, puis par 10 les billets de 10 pour s'arrêter à 930, puis à 940. Elle corrige son erreur, puisqu'elle avait écrit 90 sur sa feuille, puis explique ce qui l'a mêlé. «J'avais mélangé avec les...les dizaines, pis les unités pis les centaines. A l'école on fait les unités, c'est un 9, les dizaines, c'est 90 et les centaines, c'est...900». Il s'agit de la même explication que tout à l'heure. Ici, je m'arrête et lui demande des détails.

Elle soutient d'abord que ce moyen est utile dans les examens, pour les problèmes qui ont des chiffres. Elle utilise le nombre 340 pour illustrer ses propos. «...on enlève le chiffre, les deux chiffres...(le 4 et le 0 de 340)...et à la place du 4 on met un 0 pour le 300, pis là après on enlève les deux chiffres, il y en a plus, là ça fait juste 3, pis pour...voyons...les dizaines, on garde ça comme ça», J'ai cru qu'elle m'expliquait sa procédure lorsqu'elle cherchait à trouver le nombre de dizaines ou d'unités dans un nombre. Je tente de l'amener en dehors des procédures liés au déplacement de chiffres, en lui demandant à quoi elle pourra penser lorsqu'elle devra arrondir dans la classe. Elle répond «aux dizaines». Le rappel des billets de 10 pour arrondir à la dizaine et des billets de 100 pour arrondir à la centaine, semble déplacer son attention vers des quantités.

La dernière tâche vise à faire reconnaître à Cl. qu'il est possible d'arrondir à la dizaine supérieure ou inférieure. Cette reconnaissance pourrait favoriser la comparaison entre les nombres et la possibilité de poser un jugement sur l'approximation qu'elle propose. Je lui demande d'écrire sur sa feuille le nombre 62 qu'elle écrit d'abord 602. Je lui indique qu'il s'agit du nombre 602 et non du nombre 62. Après sa correction, elle choisit d'arrondir à la dizaine. Elle prend les billets de 10, compte par 10 et s'arrête à 70. Elle reconnaît ensuite qu'un autre dizaine est près de 62, il s'agit de 60. CL. affirme que 60 est plus près de 62. Je lui explique que ces deux dizaines sont possibles lorsqu'on arrondit ce nombre, mais que l'on doit choisir le nombre en fonction des besoins. Elle sait alors choisir quel est le nombre le plus approprié dans le contexte du magasin ou de la classe.

Je cherche à vérifier si cette compréhension est généralisable aux nombres qui ont des centaines. Je lui propose le nombre 615. Elle compte six billets de 100, puis ajoute un septième billet. Elle écrit donc 600 au-dessus du nombre 615 et 700 en-dessous. Elle choisit correctement la centaine appropriée au contexte du magasin et au contexte de la classe.

A la fin de l'entrevue, pour Cl., arrondir sert «à avoir moins de misère à compter, parce que avant là, il fallait compter ça plus ça plus ça».

6. Sixième expérimentation didactique (les opérations)

Le but de l'expérimentation didactique est de reconnaître le nombre de dizaines et de centaines dans un nombre, afin de faciliter la compréhension des opérations. L'histoire racontée sensibilise Cl. aux débuts des opérations, qui ne se réalisaient pas avec les algorithmes mais sur des bouliers.

Dans un premier temps, Cl. est amenée à expliquer «le truc» qu'elle a expliqué lors de la dernière entrevue en utilisant le nombre 340. Cl. retrouve aisément «le truc» qui lui permet de déterminer la quantité de dizaines et d'unités dans un nombre. «[Les unités] j'en ai 3, les dizaines j'ai 30, les centaines j'en ai 300». Je lui propose d'abord d'écrire le nombre 340. Elle me dit alors qu'elle a 300 dans le 3 et 40 dans le 4. Il s'agit, pour Cl., de 40 dizaines. Je lui propose de vérifier ses dires en utilisant des enveloppes et des jetons. Elle explique alors que si cela ne fonctionne pas, il faudra «faire un autre truc».

Elle illustre le nombre 340 sans problème. Elle identifie d'abord 300 centaines, puis le distingue de 3 centaines. Elle reconnaît les 3 centaines du nombre 340. Elle explique ensuite pourquoi elle croit qu'il y a 40 dizaines. « ...on avait une addition, il était marqué 29 plus 39. Là on mettait une flèche, une autre flèche, pis là on écrivait à côté de la flèche, on écrivait 20 plus 9, pis là, on faisait la même affaire, on faisait une flèche, on marquait 3...30 plus 9, pis là on additionne tout ça». Cl. rappelle l'addition par décomposition, où on décompose les nombres. Elle conçoit comme juxtaposés les différents éléments de sa décomposition sans attacher un sens aux unités de mesure de quantité et aux symboles. Ainsi, lorsque je lui demande d'illustrer le nombre 29 dont elle vient de me parler, elle montre 20 enveloppes de dizaines et 9 jetons. Je lui dessine 29 billes dans un ensemble et lui rappelle l'activité de dénombrement qu'elle réalisait en première année, en plaçant l'étiquette où elle inscrivait le cardinal. Elle croit que ces deux illustrations représentent la même quantité. A la suite d'un questionnement, elle reconnaît que les billes dénombrées correspondent aux unités, que le 29 dont on parlait voulait dire aussi des unités et que l'illustration des 20 enveloppes et des 9 jetons ne correspond pas au nombre 29.

Elle ne sait pas spontanément comme faire pour connaître le nom du nombre qui correspond à son illustration. Elle considère que dans l'exemple des 29 billes, ce qui a permis de trouver le nom du nombre est le fait d'encercler les billes. Je dois ainsi lui proposer un nouvel ensemble dont elle ne connaît pas la quantité, pour qu'elle découvre qu'en comptant elle en connaîtra le nombre.

Elle constate toutefois qu'elle ne peut compter les unités puisque les dizaines ne sont pas des unités, oubliant de ce fait de quoi sont composées les dizaines. La reconnaissance des unités qui composent la dizaine réalisée, elle compte par dix les enveloppes de dizaines pour trouver le nombre 209. Elle réalise qu'il ne s'agit pas du nombre 29.

Elle illustre ensuite le nombre 29 en utilisant les 9 jetons déjà sur la table, auxquels elle ajoute 2 unités. Elle les additionne et obtient le nombre 11, qui ne correspond toujours pas au nombre 29. Elle prend finalement 2 enveloppes de dizaines et 9 jetons en expliquant : «...quand tu dis 29, c'est mélangeant avec les dizaines parce que tu sais pas si c'est les dizaines ou les unités. C'est ça que ça me mêle».

Le rappel de l'activité où elle découvrait les 146 barres dessinées sur la feuille, puis le dénombrement des 29 billes de l'ensemble dessiné, lui permettent de reconnaître que lorsque nous donnons un nom à un nombre, il s'agit du nombre d'unités qui peut «en même temps» être composé de dizaines.

Par la suite, Cl. reconnaît 34 unités au nombre 340 : «Tu mets le 3 pis le 4, pis t'enlèves le 0». Le comptage des jetons qui composent l'illustration du nombre, lui permet de dénombrer les 340 unités. Elle explique qu'en comptant par dix et par 100, elle trouve le nombre d'unités.

Je lui propose alors de me dire combien elle a de dizaines dans le nombre 340. Elle regarde les enveloppes de centaines, compte par 10 ces enveloppes, puis continue à compter par 10 les enveloppes de dizaines isolées. Avec mon aide, elle compte par 1 les dizaines et obtient 34 dizaines. Le nombre de centaines ne pose pas de problème.

Elle décide d'expérimenter cette nouvelle construction avec le nombre 329. Un temps de réflexion lui est donné afin qu'elle puisse se faire une représentation mentale de l'illustration de ce nombre. Elle identifie «3 centaines, 2 dizaines et 9 unités». Je lui demande combien d'unités sont contenues dans ce nombre, en l'invitant à distinguer cette question de celle où elle doit retrouver le chiffre qui est à la position des unités. Elle retrouve 313 unités dans ce nombre. Elle illustre le nombre 329 avec les enveloppes et les jetons, compte les unités dans les dizaines et obtient 329 unités. Je tente à nouveau de lui faire observer qu'avec le nombre 340, le nombre 20 et encore maintenant avec le nombre 329, le nom du nombre et la quantité d'unités sont identiques. Elle constate qu'avec le nombre 928, il y aurait 928 unités.

Elle poursuit en expliquant que le nombre 329 contient aussi 329 dizaines. Le comptage des dizaines qu'elle se représente mentalement ne suffit pas à lui faire retrouver le nombre de dizaines. Elle doit à nouveau utiliser le support des enveloppes pour compter. L'adaptation du comptage aux différentes unités de mesure de quantité est difficile, puisqu'elle compte d'abord les centaines par 100, oubliant qu'elle veut dénombrer les dizaines qui sont à l'intérieur. Par la suite, elle compte par 10, mais poursuit le comptage par 10 lorsque les dizaines sont isolées, oubliant que l'enveloppe de dizaine correspond à une seule dizaine. Je lui rappelle alors qu'un paquet de 12 s'appelle une douzaine et elle croit qu'un paquet de vingt s'appellera une «vindouzaine».

Nous terminons l'entrevue sur ces propos. Cl. semble avoir de la difficulté à se concentrer. Elle explique d'ailleurs s'être couchée vers 10:30 heures la veille.

F. Évaluation finale

Habiletés de comptage

Cl. compte 1 par 1 facilement, mais éprouve des difficultés à s'arrêter au nombre donné et à réaliser un double-comptage. Elle ajoute le point de départ aux pas à dénombrer. Elle sait maintenant compter par 10 dans les cas où elle a 10 ou un multiple de dix (230) comme point de départ. Compter par 10 à partir de 115 ou de 15 pose problème «je compte par 10, ben je pars de 10, je m'en vais à 15...non, ben je pars de 10...jusqu'à...20». Elle ne peut réutiliser le double-comptage pour réaliser le comptage par 10. Elle confond le point de départ et le comptage par 10.

Palier logico-physique

Cl. identifie le nom de ces groupements et explique que cette appellation facilite la communication. Lorsque je défais une des deux centaines du nombre 202 déjà illustré pour poser les 10 dizaines sur la table, elle considère qu'il ne s'agit plus du nombre 202, puisque j'ai enlevé les centaines. Le comptage contredit cette affirmation et elle explique : «ça va avec, ça peut aller...aussi avec les dizaines». Elle reconnaît par la suite que le fait de déchirer une des dizaines de 202 ne change pas la quantité, puisque cette centaine n'est pas «ôtée». Selon Cl., ce qui permettrait de changer 202 serait le fait d'éparpiller les dizaines sur la table ou dans le local puisque «c'est comme si elles étaient envolées». La vérification de cette hypothèse par l'ajout et le retrait de dizaines favorise la prise de conscience de ce qui modifie le nombre.

L'équivalence entre les différentes quantités n'est pas non plus reconnue. Deux paquets de 10 macarons et 10 macarons sont considérés comme plus nombreux que trois paquets de dix macarons ou trente macarons : «parce qu'il a deux paquets de dix, pis on en a rajouté 10 macarons». Cl. n'a pas cherché à attribuer le nom de la pluralité à chacun des ensembles.

Palier logico-mathématique

Cl. lit, écrit et ordonne les nombres qu'ils aient ou non des zéro. Elle explique que le 0 de 1098 veut dire les centaines et qu'il y a des centaines ailleurs dans le nombre «dans le 1», parce que ces unités de mille sont composées de centaines. Les 2 du nombre 202 ne valent pas tous la même chose. Ainsi le 2 des centaines vaut 200, tandis que celui des unités vaut 2 unités. Mais Cl. croit que ce nombre n'a aucune dizaine. Ce qui contredit ce qu'elle avait dit auparavant à propos du 0 du nombre 1098. Elle constate ensuite que le 0 de 202 «veut dire aussi 20...parce que quand nous autres on a appris à l'école, dans la classe, ben on a appris que s'il y a 0 dans le milieu, ça va prendre un 2». L'illustration du nombre permet à Cl. de s'apercevoir que le nombre 202 contient 20 dizaines, quand on les compte.

Le comptage est toutefois laborieux. Elle est préoccupée par ce qu'elle veut compter, cherche à adapter le comptage au résultat voulu, croit qu'on dit 1000 après 190. En comptant 1 par 1, elle dira de nouveau 1000 après 199. Ma répétition permet la correction.

Elle sait retirer 20 au nombre 234, mais à nouveau le comptage pose problème lorsqu'il s'agit de retrouver le nom du nombre.

L'observation de l'illustration favorise l'émergence du nom du nombre (214), ce que n'a pas permis le comptage trop laborieux.

La comparaison entre des quantités où apparaissent des dizaines et des unités est comprise, ce qui n'est pas le cas lorsqu'apparaissent les dizaines et les centaines, ce dernier groupement étant considéré comme étant plus grand que la dizaine. La découverte de l'équivalence entre 20 dizaines et 2 centaines est très difficile.

Cl. peut arrondir les nombres 613, 497 et 709 mais confond la position à arrondir. Le rappel des billets de monopoly favorise la distinction entre les positions.

Le nombre 709 est décomposé de plusieurs façons. Cl. retrouve 700 avec 9, 700 unités et 9 unités, 7x100 avec 9 unités, 7 centaines avec 9 unités, 70 dizaines avec 9, ce dernier étant considéré synonyme de 700. Cl. écrit alors 700, enlève le 0 et place le 9. Elle reconnaît qu'elle désire les «mettre ensemble» mais n'identifie pas l'addition avant que je ne lui propose de choisir entre les quatre opérations. Le calcul de 700=9 fait avec l'algorithme permet de vérifier le résultat prévu.

APPENDICE 2

Étude de cas de E.

I. Évaluation initiale

Habiletés de comptage

E. compte par 1 et par 10 sans problème. De plus, il est habile avec le double-comptage.

Palier logico-physique

E. retrouve des groupements de la vie courante (échalotes, oeufs), connaît le nom des groupements qui leur correspondent et explique que ces groupements rendent les objets plus faciles à prendre. Pour E. la centaine est construite avec 100 jetons mais il n'est pas certain que cette centaine est toujours composée de dix dizaines. E. illustre ensuite le nombre 202 facilement et reconnaît l'invariance de cette quantité en expliquant que les enveloppes «restent comme groupées ensemble». D'autre part, pour E. il n'y a pas d'équivalence entre 30 jetons, 2 dizaines de jetons et 10 jetons et 3 dizaines de jetons. 20 +10 unités font 210. La confrontation avec le matériel confirme d'abord, selon lui, sa solution. A 20, tu ajoutes 10, explique-t-il. Par la suite, le comptage par dix lui fait corriger cette juxtaposition.

Palier logico-mathématique

E. lit, écrit et ordonne les nombres sans problème. Les unités de mesure de quantité ne sont toutefois pas conçues comme telles. Par exemple, pour E. deux dizaines ça fait 20 donc 20 dizaines et inversement 20 dizaines et 20 unités sont équivalentes, parce que

20 dizaines c'est deux enveloppes de dizaines en les comptant par dix.

E. croit que le zéro dans le nombre 980 veut dire «rien» et que celui de 908 signifie «une dizaine». E. affirme ensuite que les 2 du nombre 222 ne valent pas tous la même chose, mais ne peut retrouver le nombre de dizaines et d'unités contenues dans 222. Il confond la valeur attribuée au chiffre des dizaines (20) et la quantité de dizaines dans le nombre (il ne trouve encore 20). Il peut enlever correctement 20 au nombre 234 en considérant le 3 des dizaines, lui retirant 2 dizaines pour retrouver 214.

D'autre part, la décomposition semble aisée. E. retrouve plusieurs compositions (7x100 et 9 unités, 700 unités et 9 unités, 7 centaines et 9). 70 dizaines est considérée comme 700 «parce que le 70 ne rentre pas dans les dizaines alors c'est comme si tu mettais une centaine donc 700». Pour E., arrondir c'est enlever. Ainsi 613 arrondi à la dizaine devient 603 et 497 arrondi à la centaine devient 397.

1. <u>Première expérimentation didactique</u>

L'expérimentation didactique touche la valeur relative des chiffres dans un nombre. Je questionne E. afin de savoir s'il se rappelle des unités de mesure de quantité que nous avons fabriquées la semaine précédente. Il reconnaît les 10 jetons contenus dans l'enveloppe de dizaines, puis les 100 jetons regroupés en 10 dizaines dans l'enveloppe de centaine. L'histoire que je lui raconte ensuite rappelle qu'on a inventé les nombres pour répondre à des besoins comme le comptage, les échanges. Elle illustre aussi une ancienne façon de lire les nombres, dire les chiffres un à un de droite à gauche.

La première tâche permet à E. de former le nombre le plus grand possible en utilisant les chiffres 5, 3 et 5. E. compare les chiffres entre eux pour former le nombre 553. Je lui donne ensuite le chiffre 0. L'ajout du 0 favorise l'utilisation d'un autre mode de résolution de problème : la comparaison entre les nombres. E. place le 0 à la position des dizaines, regarde le nombre, puis le déplace à la position des unités pour former le nombre 5530. Il justifie son choix en se référant à la valeur des chiffres pris individuellement et en mentionnant leur position. Il ajoute : «Le 0 ne vaut rien, ça fait qu'on va le mettre à la position des unités parce qu'il ne vaut rien. Le trois, on va le mettre comme à la suite il vaut ...encore 3 dizaines, le 5 vaut 5 centaines et l'autre 5, 5 mille».

Un deuxième problème semblable, où je lui remets les chiffres 4, 9, 0 et 6 ne lui permet pas de réutiliser sa solution. En effet, E. place les cartons de manière à former le nombre 9604 en affirmant qu'il s'agit du plus grand nombre qu'il est possible de former. Il explique qu'il a mis le 0 à cet endroit : «Parce que ça déterminait l'unité de mille». Je l'invite à comparer les unités de mesure de quantité et à chercher la position où «il en manque le moins». À cette occasion, nous revoyons la fabrication des différentes unités de mesure de quantité. Il admet qu'il en manque moins lorsqu'il met le 0 à la position des centaines plutôt qu'à celle des unités de mille et affirme qu'il en manque moins lorsqu'il met le 0 à la position des dizaines plutôt qu'à celle des unités. Je lui demande s'il ne croit pas plutôt qu'il en manque moins en étant à la position des unités. Il le reconnaît et explique que les dizaines et les unités le mêlent parce que : «...je pense que c'est tout ensemble...» Il ajoute que pour se démêler, il pourrait penser aux enveloppes et aux jetons. Le premier réflexe de E., alors, est de m'informer que c'est à moi de lui faire penser à ses jetons et ses enveloppes. Cette discussion permet de positionner la responsabilité de chacun de nous dans l'apprentissage.

Invité à prendre 20 dans ses mains, E. choisit 2 enveloppes de dizaines. Il reconnaît que lorsqu'on dit 20, on parle des unités. E. reconnaît ensuite la relation d'équivalence entre 5 dizaines et 50. Il explique qu'il compte «les enveloppes avec les unités». E. compte ensuite 12 enveloppes brunes (dizaines) mais croit qu'elles contiennent 102 unités. Devant ma suggestion, un comptage permet la vérification. E. compte les unités des différents groupements. Il illustre par la suite, à ma demande, le nombre 120 en utilisant une centaine, deux dizaines et compte la centaine (100) et les dizaines (10-20). Le comptage a permis d'explorer cette nouvelle illustration du nombre 120. E. reconnaît les relations d'équivalence entre les 120 unités et les 12 dizaines, entre les 10 dizaines et 1 centaine, entre les 100 unités et la centaine. Elles doivent cependant être sollicitées.

Je demande ensuite à E. de me montrer 31 dizaines. Curieusement, E. confond 3 dizaines et 30 dizaines. Il prend 3 enveloppes de dizaines et ajoute 1 jeton. Il corrige sa méprise lorsque je lui demande de montrer «une» dizaine. Une première prise de conscience a été suscitée, par la confrontation entre 1 enveloppe de dizaine et 30 enveloppes de dizaines, amenant la première correction.

Par la suite, la confusion entre une dizaine et une unité apparaît. Une deuxième prise de conscience, par le comptage cette fois, a été nécessaire pour comparer à nouveau sa représentation de la dizaine, confondue cette fois avec l'unité. Ainsi 31 dizaines n'est pas vu comme tel mais comme 3 dizaines et 1 unité, ce qui n'avait pas été le cas pour 12 dizaines.

Une nouvelle confusion survient entre 305 et 350, lorsqu'il me demande d'illustrer le nombre 305. Je lui montre 3 enveloppes de centaines et 5 enveloppes de dizaines. Il accepte ma représentation même si en la comptant il dénombre 350. «350 et 305 c'est la même affaire», explique-t-il. Pour E. le zéro n'influence pas la valeur du nombre. Sa représentation du zéro est «qu'il ne vaut rien». Est-ce ainsi que E. aurait pu raisonner pour considérer que le nombre 9604 est le nombre le plus grand? E. complète son explication en disant qu'il voulait demander d'illustrer le nombre 350.

Les interventions ont porté sur la confrontation entre les représentations mentales que se fait l'enfant des différentes unités de mesure de quantité et le matériel (enveloppes et jetons), en utilisant le comptage de ce matériel. Elles ont tenté de susciter des prises de conscience à propos des conséquences de certaines erreurs (confusion entre 305 et 350, entre unités et dizaines).

2. Deuxième expérimentation didactique (construction d'unités de mesure de quantités)

L'expérimentation didactique touche la construction des unités de mesure de quantité qui sont représentées par les chiffres d'un nombre. L'histoire racontée sensibilise E. à l'existence de différentes bases qui ont contribuées à la construction de notre système de numération actuel.

La première tâche amène E. à dénombrer un grand nombre de traits dessinés sur une feuille et à identifier le nombre y correspondant. Afin de dénombrer plus rapidement, E. groupe les traits par dix en les encerclant. Toutefois, il manque de précision. Il oublie un trait, le compte deux fois. Il vérifie son travail en recomptant les traits du groupe qu'il vient d'encercler. Je lui demande ce qu'il pourrait faire pendant qu'il compte. Il décide de cocher chaque trait au fur et à mesure du comptage. Malgré l'expérimentation satisfaisante de cette procédure, E. sent le besoin de recompter les éléments de son groupe.

Le comptage n'a pas été nécessaire à E. pour repérer le nom du nombre. Il identifie les groupements (14) et les unités (5), juxtapose les chiffres et forme le nombre 145. Il explique : «...14 dizaines ça se peut pas, c'est comme si ça se pourrait pas, fait que là tu rajoutes un zéro».

J'invite E. à utiliser le comptage pour vérifier le résultat obtenu (145). Il prend 14 enveloppes de dizaines auxquelles il ajoute 6 jetons. Il explique ensuite qu'il vient de réaliser que le 4 de 14 signifie qu'il lui faut 4 enveloppes de dizaines et non 4 unités. Il compte par 10 et par 1 pour retrouver le nombre 145. Cependant, la construction et le comptage ne lui permettent pas de conclure qu'il y a quatorze dizaines dans 145. Il croit qu'il y en a quarante. Afin de favoriser un comptage adéquat, je lui demande de me montrer une dizaine. Il montre une enveloppe de dizaine puis retrouve les 14 dizaines de ce nombre. Nous poursuivons l'activité en discutant des types de comptage et de leur sens.
«Alors si je te demande de compter les unités, comment tu vas compter ça (en montrant une enveloppe de dizaine)?
-10 unités
-Tu vas compter par...
-10
-Si je te demande de compter les unités, comment tu vas compter ça (en montrant une enveloppe de centaine)?
- Ben une centaine, je sais qu'il y en a 100 dedans
-Alors tu vas compter par...
-10, ben par 100».
E. retrouve ensuite les 145 unités contenues dans le nombre 145 en montrant ce qu'est une unité, puis en comptant les unités contenues dans chacune des dizaines et enfin les unités étalées sur la table. E. construit ensuite une centaine en prenant 10 des 14 dizaines et reconnaît qu'il a toujours la même quantité devant lui : «La centaine est rendue la-dedans», explique-t-il. Nous revenons alors sur les différents types de comptage qui corres-

pondent à la recherche des unités, des dizaines ou des centaines.

Ce dialogue nous permet de retrouver quatre enveloppes de centaines, quatre enveloppes de dizaines et cinq jetons sur la table. E. retrouve le nombre 445 immédiatement. Il semble mettre en correspondance le chiffre et la position. Comme pour le nombre 145, il identifie d'abord le chiffre de la position des unités plutôt que la quantité totale d'unités dans le nombre. Il croit que 445 contient 5 unités, puis quarante unités. Une invitation à me montrer où sont les unités permet de compter par 100, puis de retrouver les 445 unités. Pour retrouver la quantité de dizaines dans le nombre 445, E. compte par 10 les dizaines dans les centaines, puis continue par dix en pointant les dizaines isolées. Je l'arrête et lui montre une enveloppe de dizaine en lui demandant «c'est combien de dizaines». Il adapte le comptage et retrouve alors les 44 dizaines.

3. Troisième expérimentation didactique

Cette expérimentation didactique touche la décomposition et tente à nouveau d'amener E. à établir une correspondance entre les nombres et les quantités. Nous savons que E. réussit à attribuer une valeur aux chiffres d'un nombre, à retrouver le nom du groupement qui correspond à chaque chiffre et à illustrer ces groupements. L'histoire racontée permet de décrire l'écriture de nombres que les Chinois utilisent. Cette écriture ressemble beaucoup à notre décomposition, cependant les opérations n'apparaissent pas. E. observe : «Ils l'[le chiffre] ont tout détaché».

Durant la première tâche, E. propose des décompositions du nombre 223 où apparaissent des correspondances entre le nom des positions et leur écriture. Les compositions proposées sont réalisées à partir des unités (50+50+50+50 ou 100+100+20+3 et 3+20+100+100).

La tâche suivante amène E. à recomposer des nombres à partir de décompositions. E. doit donc réaliser l'opération inverse de celle de la tâche ci-dessus. Dans un premier temps, il retrouve rapidement le nombre correspondant aux quantités écrites sur des cartes (3 centaines, 3 dizaines, 41 dizaines). Il explique : «Ça fait 41, mais tu rajoutes comme un autre...comme l'unité 410 ça fait ça». Il se débrouille bien sans illustration.

Je lui demande s'il arriverait au même nombre s'il prenait 41 petites enveloppes de dizaines. Il éprouve de la difficulté à illustrer 41 dizaines et à le distinguer de 41 unités. Il compte les unités dans les 4 dizaines qu'il réunit et reste confondu. Il dénombre 40 mais ce ne sont pas 40 dizaines... Je lui confirme que ses 4 dizaines contiennent bien 40 unités. Par la suite, il prend 41 enveloppes de dizaines et les compte, ce qui confirme la solution déjà trouvée (41 dizaines = 410). La correspondance entre 42 dizaines et 420, 43 dizaines et 430, 51 dizaines et 510, 45 dizaines et 450 se fait aisément mais sans explication verbale.

Dans un deuxième temps, E. est invité à utiliser plusieurs des cartons lus et mis en correspondance avec les nombres, pour construire des nombres compris entre 402 et 513. Il est intéressant de constater que, malgré mon invitation à utiliser plusieurs cartons, E. propose d'abord des cartons où les quantités représentent un nombre suffisamment grand. Il propose d'abord 51 dizaines (510), 42 dizaines (420)... Ce n'est que par la suite qu'il suggère des compositions (43 dizaines+12 unités+10 unités). Il calcule 430 qu'il réunit à 12 unités. Il retrouve le nombre 550. Le calcul mental de ces nombres lui posant problème, il choisit de vérifier cette réunion avec l'algorithme de l'addition.

E. additionne au nombre choisi (430), les unités (12 et 10) en utilisant l'algorithme, sans juxtaposer les chiffres, ce qui est nouveau. Qu'en aurait-il été s'il avait choisi deux cartons de dizaines comme 3 dizaines et 51 dizaines? Il n'a malheureusement pas été possible de vérifier cette question malgré les invitations répétées à utiliser plusieurs cartons et la modification de la consigne au fur et à mesure de ses trouvailles (trouve le nombre entre 402 et 513, puis entre 420 et 513, puis entre 450 et 513, et enfin entre 450 et 510).

4. Quatrième expérimentation didactique (arrondissement de nombres)

Cette expérimentation didactique touche l'arrondissement d'un nombre. L'histoire racontée permet de revenir sur la quantité d'objets contenus dans un groupe. Il est alors question de groupes de 12 ou de 60 qui ont déjà été utilisés dans des civilisations anciennes. Je lui propose ensuite de s'imaginer qu'il est au magasin. Des billets de monopoly lui sont remis (7 billets de 1000, 3 billets de 100 et 5 billets de 10), puis mis en correspondance avec leur unité de mesure de quantité (enveloppes de dizaines, de centaines).

Au début de l'expérimentation didactique, E. arrondit le nombre 149 en comptant les billets de 100 et de 10. Il croit qu'il vient d'arrondir à l'unité. Il recompte les billets puis décide qu'il a arrondi à la dizaine. Il explique la confusion en disant : «Moi je pensais à 9 dans ma tête à 9, 149».
-«Qu'est-ce qui t'a dit que t'avais arrondi à la dizaine?
-J'ai juste cinq billets de dix, ça fait cinquante.
-C'est en voyant les billets de 10...
-...c'est ça (en montrant 149) décomposer là.»

Il reconnaît qu'il s'agit de la dizaine la plus près. Il ajoute que dans la classe, il arrondit à la dizaine la plus près. Le contexte du magasin lui permet de s'apercevoir qu'il peut aussi arrondir à la dizaine la plus loin.

Il arrondit à la dizaine la plus loin le nombre 342, en comptant 3 billets de 100 et 5 billets de 10. Il retrouve ensuite la dizaine la plus près en proposant le nombre 340. Il arrondit le nombre 287 à la centaine en prenant trois billets de 100. Il explique : «Ben le 7 c'est plus haut...c'était plus haut que le 2 (en montrant 342) fait que ça m'a donné une idée».

Je lui propose donc d'arrondir un nombre (904) où le chiffre zéro occupe la position des dizaines. E. désigne 914 «Je mettrais 914 parce qu'il y en a pas, fait que tu rajoutes comme une dizaine». Mon questionnement lui fait réaliser qu'il vient d'ajouter une dizaine et qu'ainsi il change ma consigne. Il suggère ensuite 810 puis 804. La mise en situation où E. est au magasin ne semble pas l'aider. Je lui propose d'additionner 904, 387 et 260. Cette addition a permis de faire ressortir ses compétences spontanées. Ainsi, pour E., le nombre 904 arrondi à la centaine c'est 900. Sans ce contexte, le problème ne pouvait être solutionné.

Je lui propose ensuite d'arrondir à la dizaine le nombre 906. Il arrondit d'abord à la centaine en proposant le nombre 900. Pour arrondir à la dizaine, il prend les billets de monopoly, compte 9 billets de 100 puis 1 billets de 10. Il trouve 916, puis 910.

Dans le cas suivant, le nombre 508 est d'abord arrondi à la centaine. E. croit que 600 est la centaine la plus près tandis que 408 est considéré comme étant la centaine la plus loin. La manipulation du matériel et le rappel du contexte du magasin l'invite à trouver l'un (500) pour découvrir l'autre (600). E. peut maintenant arrondir à la centaine la plus loin, mais confond arrondir et enlever pour arrondir à la centaine la plus près. La distance peut paraître grande entre 8 et 100 pour E.. Il lui arrive encore de comparer les chiffres plutôt que les nombres. Il peut être difficile pour lui de considérer que le nombre 500 est près de 508.

Je lui propose le nombre 316 qu'il décide d'arrondir à la dizaine la plus près. La comparaison entre 310 et 320 permet d'expérimenter le double-comptage pour faire un choix éclairé. Sans cette comparaison, il ne peut trouver immédiatement la dizaine la plus près.

Je reprends avec un nombre qui contient un zéro, 404. E. choisit d'arrondir à la centaine la plus loin, prend 4 billets de 100, puis explique qu'il va prendre un 10. Je lui demande s'il doit prendre des dizaines s'il veut arrondir à la centaine. Il identifie alors le nombre 500, sachant que 400 est la centaine plus près. Il fera de même avec le nombre 506, désignant d'abord 500 puis 600.

Au cours de l'évaluation finale, E. a de nouveau éprouvé des difficulté avec cette notion. Il ne sait plus quel a été le matériel utilisé, il ne semble plus avoir de points de repère. Le rappel des billets de monopoly lui permet de les faire correspondre aux positions où on peut arrondir. Il confond ensuite arrondir et additionner. Ainsi, arrondir 497 à la centaine la plus près devient 597. Arrondir lui fera aussi penser à grouper. C'est en comparant les nombres 497 et 500 puis 497 et 400 en utilisant le double comptage que E. retrouve la dizaine la plus près.

5. Cinquième expérimentation didactique

Le but de l'expérimentation didactique est de trouver combien il y a d'unités, de dizaines ou de centaines dans un nombre afin de faciliter les opérations. L'histoire racontée permet à E. de donner un sens à l'activité puisqu'il s'aperçoit que cette compréhension favorise les calculs rapides. Il apprend qu'un japonais a calculé mentalement plus rapidement qu'une calculatrice et qu'un Belge a calculé une opération plus rapidement qu'un ordinateur.

La première tâche permet à E. de retrouver le nombre d'unités et de dizaines qui composent le nombre 93. Cette activité m'amène à revoir le vocabulaire de E. et le sens accordé aux consignes comme: combien y a-t-il de..., quel chiffre est à la position...que vaut le... Par la suite, E. est invité à opérer sur un nombre.

Pour E. le début de l'expérimentation didactique est marquée par une confusion entre deux types de consignes. Celle du type «combien de...» et l'autre du type «quel chiffre». Le rappel de la question du premier type en spécifiant «en tout», ajoutée à l'identification du chiffre 3 qui occupe la position des unités est suffisant pour que E. retrouve les 93 unités. Il m'explique que le nombre lui a fait penser.

La compréhension de la consigne établie (distinguer combien y a-t-il de quel chiffre occupe la position...), nous poursuivons l'expérimentation didactique en nous attardant à l'inclusion des groupes. E. reconnaît d'abord 4 dizaines dans le nombre 340. Je lui propose d'illustrer le nombre 340. Il met sur la table les 3 enveloppes de centaines puis 4 enveloppes de dizaines. Il retrouve les 34 dizaines contenues dans le nombre 340 en comptant les enveloppes contenues dans les centaines et celles qui sont étalées. Il retrouve facilement les 340 unités en expliquant : «C'est le nombre en tout».

Lorsque E. doit enlever 20 dizaines au nombre 340, il s'arrête pour réfléchir et obtient le nombre 320. Notons que E. a effectuée cette opération sans l'algorithme. Il explique qu'il a enlevé 20 unités.
-«...moi je t'avais demandé d'enlever quoi?

-322...20 unités.
-Non.
-...20 dizaines...200...20 unités».

E. n'a donc pas oublié ma consigne mais l'a transformé puisqu'elle ne correspondait pas à un schème familier. Par la suite, sachant qu'il a 34 dizaines, il tente d'enlever 20 dizaines. Il réfléchit et parle de 200...puis s'arrête au nombre 140.

Je lui propose de vérifier son résultat en utilisant du matériel. À nouveau, la confusion entre 20 dizaines et 20 unités apparaît. E. illustre le nombre 340, puis prend 2 dizaines pour les enlever. Je l'arrête et lui demande ce qu'il a en main. Il reconnaît les 2 dizaines et s'aperçoit tout à coup qu'il doit en enlever 20. Il prend alors 2 enveloppes de centaines. Il lui reste les 14 enveloppes de dizaines qu'il fait correspondre au nombre 104 puis 140.

Les chiffres qui composent le nombre ne sont plus juxtaposés mais bien additionnés en tenant compte de leur valeur. Ajouter 800 unités au nombre 140 ne pose pas de problème. E. réfléchit et trouve 940 en expliquant qu'à «800, si tu rajoutes une centaine, ça fait 900, pis le reste tu le rajoutes, 940». Toutefois, enlever 40 unités à ce nombre est d'abord confondu avec enlever 40 dizaines. Cette confusion a pu être provoqué par la fatigue mais il se peut aussi que E. ait été influencé par le problème précédent, où le nombre d'unités à enlever correspondait aux trois chiffres du nombre de départ (940-800). C'est la confrontation avec l'illustration du nombre 940 et le questionnement que je lui propose («combien il y a d'unités dans cette enveloppe») au moment où il enlève qui lui permet de se corriger. En effet, il saisit d'abord une enveloppe de centaine et réalise qu'il ne doit enlever que 40 unités. E. explique qu'il a d'abord pris le 94 de 940, puis le 40 de 940, et ajoute qu'il oublie la consigne.

Afin de l'aider à se rappeler je lui propose d'écrire la consigne pour supporter sa mémoire.

Je lui demande d'enlever 10 dizaines au nombre 300. Il écrit 10 sur sa feuille.
-«Est-ce que c'est 10 que j'ai dit ou 10 dizaines?
-10 dizaines
-...si t'écris juste 10, à quoi ça va te faire penser?
-A 10 unités».

Il prend alors conscience de l'importance du terme qui accompagne le nombre, ajoute le mot dizaine à côté du 10. Il effectue la soustraction (300-100) et obtient 200. Les vérifications réalisées avec le matériel lui permettent de corroborer la solution déjà trouvée.

Finalement, E. additionne mentalement 13 unités au nombre 200 pour trouver 213, mais les vérifications faites avec le matériel doivent être questionnées. Il prend 3 enveloppes de dizaines pour représenter le nombre 13. Je lui demande : «Ca c'est quoi?» en montrant les 3 enveloppes de dizaines. Cette question est suffisante pour que E. réalise son erreur, prenne 1 enveloppe de dizaine et 3 jetons.

6. Sixième expérimentation didactique (le réseau sémantique)

Je raconte à E. l'histoire du Petit Poucet en lui rappelant que, grâce aux petits cailloux qu'il avait placés sur son chemin, il a pu retrouver sa route. Je poursuis en lui disant que les cartons sur lesquels il écrira les mots qui lui viennent à l'esprit lorsqu'il pense aux nombres, pourront lui servir à trouver des moyens pour solutionner des problèmes de la classe.

Je propose ensuite à E. d'écrire sur de petits cartons tout ce qui lui fait penser aux nombres.

E. écrit d'abord les termes unités, dizaines et centaines. Il s'oriente ensuite vers les actions : arrondir, décomposer, additionner, soustraire, multiplier. C'est à la suite de l'énumération de ces actions qu'il identifie le mot groupe. Il retourne ensuite aux actions comme calculer, compter, ajouter.

Je lui suggère ensuite d'organiser ces cartons en réseau. Je lui fait penser aux poupées russes, où on retrouve toujours une plus petite poupée à l'intérieur d'une plus grande. La classification qu'il propose d'abord est en deux colonnes et se lit de bas en haut. Les numéros correspondent à l'ordre dans lequel la classification s'est effectuée.

10 chiffres	12 -
7 unités	11 +
6 centaines	9 décomposer
5 dizaines	8 groupes
4 ajouter	3 compter
1 arrondir	2 calculer

Les réflexions de E. à propos de cette classification ne sont pas de l'ordre de l'inclusion (malgré la mise en situation à partir des poupées russes). Il explique : «...faudrait des chiffres pour arrondir...tu peux ajouter des dizaines, des centaines et des unités...tu groupes des dizaines...tu décomposes des groupes...tu comptes les unités, les dizaines, les centaines...».

Les interventions portent alors sur l'identification des liens : « qu'est-ce qui fait que tu as envie de mettre ça ensemble?» mais aussi sur la précision du vocabulaire : «...tu groupes des chiffres ou des unités...tu décomposes des chiffres ou un nombre...» et sur l'anticipation «...tu peux grouper des dizaines et ça va former...». Il est intéressant de constater que ajouter et +, de même que enlever et - n'étaient pas liés. Seul calculer venait à l'esprit de E. lorsqu'il parlait d'additionner et de soustraire.

Peu à peu, un nouveau tableau se forme

	nombre	chiffres			
	décompose	unité			
			enlève	-	
		arrondis			
			ajoute	+	x
		dizaine			
compte	groupes	centaine	calculer		
		unité de mille			

Les liens sont relatifs aux fonctions attribuées aux mots et ainsi liés à des reconstitutions d'action. E. reconnaît toutefois que tout ce tableau correspond à la fois à ce qui se fait en classe et à ce que nous avons fait au cours des expérimentations didactiques.

F. Évaluation finale

Habiletés de comptage

E. compte sans problème par 1 et par 10 des nombres plus grands que 100. Il utilise facilement le double-comptage. Toutefois le passage à la centaine semble laborieux. Après 195, il trouve d'abord 115 puis utilise le comptage pour retrouver 205.

Palier logico-physique

E. ne retrouve pas de groupements d'objets de la vie courante, il réfère immédiatement aux différentes unités de mesure de quantité (dizaines, centaines). Il connaît le nom des différents groupements et considère qu'il est plus facile de compter lorsque les objets sont groupés. Il illustre le nombre 222 facilement et constate l'invariance de la quantité lorsqu'une centaine est défaite en expliquant que «la centaine est encore là mais sauf qu'elle est pas dans tout le paquet entier». Il reconnaît cette invariance aussi avec l'abaque en expliquant que le recomptage lui permet de vérifier. Dans les faits, il tente de refaire la centaine en prenant 10 anneaux de la tige des dizaines qu'il déplace sur la tige des centaines. La manipulation démontre que E. n'a pas compris que l'anneau pouvait changer de valeur et que c'est ce qui se produisait lorsqu'il changeait de tige. Toutefois, la volonté de démontrer qu'on peut effectuer l'opération inverse est présente.

L'équivalence entre l'avoir de trois bonhommes (3 paquets de 100, 2 paquets de 100 et 100, 300) n'est pas immédiatement reconnue. Il croit que le deuxième bonhomme est le plus riche. La recherche du pourquoi l'amène à rechercher la pluralité et à constater l'équivalence.

Palier logico-mathématique

E. lit, écrit et ordonne des nombres de 3 et de 4 chiffres sans problème. Il explique d'ailleurs sa procédure. Il compare les chiffres différents entre deux nombres qui ont la même quantité de chiffres.

Les chiffres du nombre 222 sont reconnus comme ayant une valeur différente, même s'il confond 20 dizaines et 20. E. parle de relations d'inclusion entre autre lorsqu'il explique que les centaines sont composées de dizaines et qu'ainsi le nombre 222 contient 22 dizaines et 222 unités. Il enlève 2 dizaines au nombre 234 et trouve le nombre 214 en expliquant que 3-2=1.

L'illustration de sa conception des divers groupements comme autant d'unités de mesure apparaît lorsque E. doit comparer 20 dizaines et 20 unités. Il considère ces deux quantités comme égales parce que «20 unités, ça va faire deux dizaines et vingt dizaines, c'est 20 unités». La vérification avec le matériel lui permet d'ajuster immédiatement cette représentation. Avec quelques hésitations, E. a pu réutiliser cette construction pour le problème suivant en expliquant avoir pensé aux enveloppes de dizaines et de centaines. Il a ainsi comparé correctement 20 dizaines et 2 centaines.

Arrondir est encore difficile puisque E. arrondit 497 en écrivant 507. Le rappel de l'activité déjà réalisée avec les billets de monopoly permet d'arrondir aux différentes positions. Le nombre 613 est alors arrondi à 620 puis à 610, après avoir utilisé le double-comptage. Le nombre 709 est décomposé de différentes façons (7 centaines et 9 unités, 7x100 et 9 unités, 70 dizaines et 9 unités, 700 unités et 9 unités). Il est alors possible pour E. d'expliquer que «70 dizaines ça fait 700».

APPENDICE 3

Étude de cas de I.

I. Évaluation initiale

Habiletés de comptage

I. apprend que le but de notre première entrevue est de faire un portrait de ce qu'elle comprend et de ce qu'elle ne comprend pas. Les questions difficiles seront donc reprises au cours des entrevues suivantes.

Elle compte par un, par dix sans problème. Le double-comptage indique toutefois qu'elle dénombre les chiffres dits, plutôt que les pas entre ces derniers. Ainsi, elle trouve 9 pas entre 1108 et 1115.

Palier logico-physique

I. sait qu'il y a des objets qui sont groupés. Elle identifie d'abord les feuilles qui sont en groupes de 1000, des livres sur les rayons de la bibliothèque, des boîtes de conserve, des bananes, en reconnaissant que les paquets ne sont pas tous égaux. Elle ne retrouve pas des groupes qui seront égaux. Je lui propose les groupes composés d'oeufs comme exemple mais elle ne peut continuer. Elle explique que ces groupes servent à classer et à corder.

Elle peut construire des dizaines et des centaines en sachant que ce sera toujours des paquets de dix et explique que les dizaines servent «à acheter des choses».

Elle illustre le nombre 202 avec deux enveloppes de centaines et deux jetons, constate l'invariance de la quantité en disant : «parce qu'on a juste enlevé...il y a encore 100 dedans...ça fait encore 202». Elle relève aussi l'équivalence entre 30 jetons, deux paquets de dix et 10 jetons et trois paquets de 10 jetons en expliquant que les trois ont chacun 30.

Palier logico-mathématique

Elle lit et écrit des nombres contenant jusqu'à 5 chiffres sans problème. I. utilise une procédure intéressante pour ordonner des nombres. Elle «divise», selon son expression, les cartes-nombres qui contiennent 3 chiffres, 4 chiffres et 5 chiffres pour ensuite les disposer sur la table du plus grand au plus petit. Cette procédure ne lui permet pas toutefois de corriger une erreur. En effet, elle place les nombres 70 089, 1198, 10 198 en les lisant correctement, mais elle ne réalise pas qu'un des nombres a un chiffre de moins. Sa lecture ne semble pas induire une idée de quantité plus ou moins grande puisqu'elle ne lui facilite pas la correction. Lorsque je lui demande ce que veut dire le 0 du nombre 10 198, elle avoue ne pas savoir et l'erreur ne sera pas corrigée.

I. sait que les 2 du nombre 2 202 ne valent pas tous la même chose. Ainsi, le 2 des unités de mille vaut 2000 alors que celui de la position des centaines «veut dire les centaines pis le dernier ça veut dire les unités». Lorsque je lui demande combien ce nombre contient de dizaines, elle considère qu'il n'y en a pas «parce que les dizaines c'est un zéro, pis il n'y en a pas». I. ne saura pas non plus retrouver le nombre d'unités contenues dans le nombre 2 202 même si à la question s'ajoutent les mots «en tout». Elle considère qu'«il y a juste 2 unités dans ça». Notons qu'elle appelle une enveloppe de dix «10» mais ne comprend pas la question lorsque je lui demande à combien de dizaines correspond cette enveloppe, que je lui montre. Elle reste accrochée à dix.

Lorsque I. doit enlever 20 au nombre 202 déjà illustré par une centaine, dix dizaines et deux unités, elle retire deux enveloppes de dizaines mais ne sait pas à quel nombre cela correspond. Devant ma répétition, elle choisit de se dépanner en comptant par dix les dizaines et retrouve le nombre 182. I. explique qu'il y a 100 centaines, 80 dizaines, 2 unités et que ces éléments donnent 182.

Les questions portant sur la compréhension des unités étalons comme mesure de quantité laisse surgir les problèmes de compréhension. I. croit que 2 dizaines est plus grand que 20 unités «parce que 2 dizaines ça veut dire deux dix pis 20 unités ça veut dire 20 jetons». I. affirme aussi que 20 dizaines est plus grand que 20 unités «parce que 20 dizaines c'est 20, c'est 2 fois le nombre 10 pis 20 unités, c'est 20 petits jetons». De plus, 20 dizaines est considéré comme étant 2 dizaines («parce que c'est moins gros que deux centaines») et 2 centaines comme 2 fois le nombre 100.

I. décompose le nombre 709 en utilisant les cartes 700 et 9 unités, 7x100 et 9, 7 centaines et 9 unités. Elle réunit les cartons en disant «pis», puis elle reconnaît que le «pis» qu'elle utilise veut dire «plus». Elle arrondit le nombre 3105 à la centaine sans problème.

1. Première expérimentation didactique (valeur positionnelle)

Le but de l'entrevue est l'élaboration d'une construction à propos de la valeur relative de chiffres dans un nombre. L'histoire permet à I. de se rendre compte que les nombres n'ont pas toujours été lus de la façon dont on les lit aujourd'hui. À une époque, les différents chiffres d'un nombre permettaient de connaître combien il y avait de chaque type de groupements mais on devait retenir l'ordre dans lequel ils avaient été énumérés. L'histoire favorise la mise en situation de la tâche puisque I. doit former le nombre le plus grand possible en utilisant les chiffres 1, 5, 3 et 5.

I. forme rapidement le nombre 5531. Elle explique que le 5 est plus grand que le 3 et le 1. Je lui remets un carton sur lequel est écrit 0 et lui propose de former, à l'aide de ces 5 chiffres, le nombre le plus grand possible. Elle forme d'abord 50 531 et le lit correctement. Devant ma suggestion de voir s'il n'y en a pas un autre plus grand, elle déplace le 0 et forme le nombre 55 031, en interchangeant le deuxième et le troisième carton. Ce nouveau nombre est lu facilement. Lorsque je lui demande à nouveau de former un nombre plus grand, elle déplace le carton sur lequel est écrit 0, vers le 5 de la position des unités de mille. Elle forme ainsi le nombre 550 31 et lit «cinq cent cinquante...». Je l'arrête et nous entamons une discussion sur les conventions qui régissent la lecture de nombre.

Elle croit d'abord qu'on groupe les chiffres par groupe de deux et quelquefois par groupe de 1 en ajoutant «les grands nombres ...on peut les placer n'importe comment». Nous ouvrons un catalogue où apparaissent le prix des voitures. Elle observe à nouveau que les chiffres sont groupés par deux (33 145...). En observant plus attentivement, elle constate qu'on a séparé les 1000 et les 100, puis que dans l'ordre des unités il y a 3 chiffres. Elle prévoit le nombre de positions qui existent dans l'ordre des mille et dans celle des millions. Elle ajoute aussi qu'on peut retrouver des groupes de 4 chiffres. Elle conclut en disant que le plus souvent, on groupe les chiffres par 2 ou 3.

J'écris sur une feuille les chiffres 6, 6, 0, 6, et 6 et lui demande comment séparer les chiffres de ce nombre. Elle choisit de séparer entre la position de l'unité de mille et celle de la centaine. Je lui propose ensuite un nombre de 6 chiffres qu'elle sépare au même endroit. Nous identifions ensuite chacune des positions, dans les différents ordres. Elle compare l'unité et l'unité de mille, observe leur différence. Elle ajoute qu'on ne groupe pas par trois lorsqu'on fait un petit nombre (ceux qui n'ont pas de mille).

Nous revenons à son nombre «550 31». Elle replace le zéro à la position des centaines en expliquant «parce que ça un zéro, il n'y en a pas un là (ordre des unité) et là (ordre des mille) il y en a un».

Je lui demande de former un nombre encore plus grand avec les mêmes chiffres. Elle hésite. Je lui demande si elle peut placer le 0 ailleurs. Elle décide de le placer à la position des dizaines et forme le nombre 55 301. Presqu'aussitôt, elle le déplace à nouveau et forme le nombre 55 310, qu'elle considère comme étant le plus grand.

Elle croit que le 0 vaut l'unité, alors que le 1 est à la position des dizaines. Elle ne peut me dire ce qu'est une dizaine. Un dialogue s'engage à ce propos. Je lui demande de se rappeler nos manipulations de la semaine précédente. Elle se rappelle qu'on peut compter par 10, qu'une dizaine est faite de 10 petites choses dedans, puis appelle ces petites choses de l'argent. Je lui demande de me montrer ce dont elle me parle. Elle prend les jetons, en compte 10 et les place dans une petite enveloppe. Elle sait que cette unité de mesure de quantité correspond à une dizaine et que 2 ou 8 dizaines correspondent à 2 ou 8 enveloppes semblables, qu'elle appelle «dix».

Je lui montre le chiffre 3 du nombre 55 310 et elle m'indique qu'il s'agit de la position des centaines. Elle croit qu'une centaine est fait «avec trois 100, trois nombres 100». Je lui demande de le montrer avec du matériel. Elle cherche 3 paquets de 100. Elle retrouve une centaine déjà construite, se rappelle qu'elle faisait des paquets de 10, puis qu'elle mettait 10 paquets à l'intérieur. Je lui demande à quoi elle pensera lorsqu'on parlera de centaines. Elle répond : «paquets de dix», puis se corrige. Je profite de l'occasion pour lui confirmer qu'il y a bien toujours des paquets de 10 à l'intérieur. Elle poursuit en disant qu'à l'intérieur de ces derniers, il y a des paquets de un. Nous rectifions le vocabulaire en précisant que nous ne parlons pas de paquet lorsqu'il y en a 1, on parle plutôt d'unités.

Je reviens sur la représentation mentale qu'elle peut se faire de trois centaines. I. parle de paquets de dix, devant mon air interrogateur, corrige en parlant de paquets de 100. Je lui suggère donc de m'indiquer le nombre de paquets de 10 qu'il y aurait dans 3 centaines. Je pointe la première enveloppe de 100 pendant qu'elle en compte 10. Je pointe la deuxième, puis la troisième pendant qu'elle parle encore de 10 dizaines dans chacune. Au total, elle trouve 300.
«-Ca en ferait hein...300 tu penses?
-...3 paquets de 10 là...
-Ici...(en montrant la première centaine)
-Un paquet de 100...

I. semble confuse, mais ne sait pas dire ce qui la mêle. Je lui explique que nous pouvons compter la centaine par 100, par 10 ou...elle ajoute par 1. Cette prise de conscience permet de continuer le dialogue sur ce qui correspond aux différents types de comptage. Elle croit que si elle compte par 100 les centaines, elle compte les centaines. Je lui propose de prendre 100 centaines dans ses mains. Elle prend une centaine en disant qu'il s'agit de 100 centaines. Je lui suggère ensuite de prendre 1 centaine dans ses mains. Elle montre la même enveloppe et constate que 100 centaines et 1 centaine ce n'est pas pareil. Je lui demande de me dire de quoi aurait l'air 100 centaines. Elle compte 1, 1 centaine, constate qu'elle doit en fabriquer une autre...Je lui demande s'il serait long de construire 100 centaines. Devant son affirmation, je réitère la question de départ. Elle ne sait pas découvrir que 100 correspond aux 100 unités à l'intérieur de la centaine et ce, même si j'énumère les différents groupes et les unités. C'est moi qui lui dirai, mais elle sera incapable de le répéter.

Je continue en lui demandant «il y a 100 quoi là-dedans (en montrant la centaine)»? Elle reconnaît les 100 jetons, les appelle ensuite unités, puis sait que lorsqu'elle parle de 100, elle parle des «jetons». Ce n'est qu'après cette compréhension qu'elle saura que lorsqu'elle dit «1» en montrant l'enveloppe de la centaine, cela correspond à «1 centaine», et que si elle dit 10, elle parle de «10 petits paquets». Il est à noter qu'elle appelle d'abord ces petits paquets des centaines, puis des dizaines.

Je révise les différentes façons de parler de la centaine, en lui demandant si elle désire parler avec les «mots savants» (unités, dizaines, centaines) ou avec les mots «petites enveloppes, petits jetons». Elle choisit les mots savants et jusqu'à la fin de l'entrevue nous utiliserons ces termes.

Elle semble reconnaître de quoi il est question lorsqu'on dit 100, 10, ou 1 en montrant l'enveloppe de la centaine. Cela ne semble pas poser de problème supplémentaire lorsqu'on parle de la dizaine (10 unités ou 1 dizaine). Un problème surgit quand je lui parle de 8 dizaines. Elle croit que 8, ça ne se peut pas. La fabrication des 8 dizaines lui permet d'appeler son illustration d'abord 8 dizaines puis...80 dizaines. Je reprends le dialogue dans l'ordre où il a été construit précédemment. Elle sait que lorsqu'elle parle de 80, il est question des unités et que si elle parle de 8, il est question des dizaines mais ne reconnaît pas l'équivalence entre ces quantités.

Je lui propose de me montrer 8 dizaines. I. pointe les enveloppes de dizaines qu'elle vient de construire. Lorsque je lui suggère de défaire toutes les dizaines, elle croit qu'elle retrouverait 80...dizaines. Je l'invite à déchirer les 8 dizaines. Elle commence à placer les unités que ces enveloppes contiennent sur la table, s'arrête et m'explique que «ça arrive à 80 parce que 8 fois 10 ça donne 80». Je lui suggère de continuer. Elle compte par 10 chacun des paquets défaits, reconnaît que 80 unités est la même quantité d'objets que 8 dizaines. Elle explique que ce qui change c'est «juste les unités pis les cent... les unités pis les dizaines». Je précise en parlant de leur organisation et elle accepte de dire qu'il s'agit de la même quantité d'objets.

«-Alors c'est des noms différents 8 dizaines et 80 unités, c'est des mots différents, mais est-ce que ça veut dire la même chose d'objets?

-Non...oui...non c'est pas la même chose d'objets, il y en a qui sont tous seuls...»

-C'est tous des tous seuls ça? (en montrant les jetons étalés)

-Ils sont par groupes.

-Lesquels sont par groupes?

-Ceux dans les enveloppes (elle semble parler de d'autres groupes).

-On les a toutes défaites les enveloppes, est-ce qu'ils [les jetons] sont encore dans les enveloppes?

-Non.

-Ils sont où là.

-Ils sont tous seuls, pis ils sont 80 unités.

-Pis tantôt dans les enveloppes ça s'appelait comment (en montrant les enveloppes déchirées)?

-8 dizaines.

Est-ce que c'est la même quantité d'objets?

-Non.

-Pourquoi?

-Parce que 80 unités, c'est plus petit que 8 dizaines».

Je lui suggère de remplacer les jetons par des smarties. Elle accepte ici l'équivalence des quantités et explique «parce que dans les enveloppes, pis tous seuls de même [les jetons], c'est la même chose parce que c'est le même nombre qu'on a». Les smarties auraient-ils permis de distraire I. des mots dizaines et unités pour se concentrer sur la quantité? Elle constate par la suite l'équivalence entre 8 dizaines et 80 unités. Elle trouve la quantité de smarties qui correspond à 2 unités, 2 dizaines et 2 centaines.

2. Deuxième expérimentation didactique (décomposition et recomposition de nombres)

Le but de la deuxième entrevue est la décomposition et la recomposition de nombres. L'entrevue débute par le rappel des représentations mentales qu'a pu construire I. au cours de la dernière expérimentation didactique. I. explique alors que pour elle, les unités sont des petits nombres. Malgré mon insistance à lui demander de me montrer sur la table, ce qui constitue des unités, I. associera un nombre (9, 80) aux unités qu'elle montre (cubes, jetons). Je lui demande alors quelle est la différence entre une dizaine et une unité. La représentation mentale de la dizaine ne semble guère plus assurée. Elle sait que la différence entre les unités et les dizaines consiste en leur grandeur «des dizaines c'est plus gros que des unités» mais elle montre d'abord une enveloppe de centaines, avant de désigner les enveloppes des dizaines.

Pour répondre à la question posée au sujet de la différence entre une dizaine et une unité, I. cherche dans sa mémoire. Plutôt que d'utiliser ce qu'elle voit sur la table, elle explique qu'elle «ne se rappelle plus». La différence entre 7 unités et 7 dizaines ne sera pas facile à construire. Elle explique alors «C'est 10 dizaines de plus que 7 unités». Je lui propose alors de me montrer une unité et plusieurs unités, une dizaine et plusieurs dizaines, une centaine et plusieurs centaines. Il est alors plus facile pour elle de trouver le contenu de chaque unité de mesure de quantité, que d'identifier la différence entre une centaine et une dizaine. «Les centaines c'est fait avec 10 dizaines et les dizaines c'est fait avec des unités». Une nouvelle question lui permet de reconnaître que les centaines sont aussi faites avec des unités.

Je lui demande alors ce que veut dire pour elle décomposer. «Décomposer, c'est décomposer des mots là, pas les mots, des chiffres là...il y a plein de décompositions avec des chiffres». C'est à ce moment que je lui raconte comment les Chinois écrivent les nombres (3 (100) 4 (10) 2). Je lui propose ensuite de me montrer comment elle a appris à décomposer les nombres dans la classe, en lui suggérant de décomposer le nombre 1089.

Elle écrit sur sa feuille «1000, 80, 9». Elle explique qu'elle met des virgules pour séparer les chiffres. Je lui demande de revenir sur le moment de l'évaluation, où elle avait recomposé le nombre 709 en prenant «700 pis 9» et en m'expliquant ce qu'avait voulu dire le «pis». Elle ne se rappelle pas. Je lui rappelle les quantités qu'elle avait utilisées. Elle reconnaît qu'elle «mettait ensemble» ces quantités. Je lui demande de m'indiquer les opérations mathématiques qu'elle connaît. Suite à cette énumération, elle reconnaît l'utilisation de l'addition, qu'elle appelle «plus».

Dans un premier temps, elle refuse de concevoir que 1000 et 80 vont ensemble, puis elle admet faire un «plus». Je profite de l'occasion pour lui indiquer que la virgule est réservée aux fractions qu'on retrouve aussi avec l'argent.

I. n'a plus d'autres façons de décomposer le nombre 1089. Je lui demande si un moyen ne l'aiderait pas à trouver de nouvelles décompositions. Elle compte des enveloppes de 100 jusqu'à 1000 en disant qu'elle va écrire 100 centaines. Je lui demande si elle a vraiment 100 centaines, elle s'arrête, hésite, utilise un double-comptage en montrant chacune de ses 10 centaines sur ses doigts puis écrit :

100+100+100+100+10100+100+100+100+100+100+10+10+10+10+10+10+10+10-+9,

ensuite 500+500+50+30+5+4. Elle m'explique ici avoir utilisé 5+3 pour trouver 50+30.

Je lui propose ensuite de retrouver des nombres compris entre 402 et 513, en utilisant les cartes sur lesquelles sont écrites des quantités. Elle fait correspondre rapidement 5 centaines et 3 centaines aux nombres 500 et 300. Un blocage survient lorsqu'elle fait correspondre 51 dizaines au nombre 51. À ma demande, elle montre des enveloppes de dizaines, les fait correspondre au 5 de 51 et pointe un jeton pour représenter le 1. Je lui indique qu'il ne s'agit pas de 51 unité mais de 51 dizaines. Elle prend alors 6 enveloppes de centaines en les comptant par 10 et s'arrête à 60. Je lui indique à nouveau que je ne veux pas 60 dizaines mais bien 51. Elle enlève une dizaine de l'enveloppe de centaine, la place avec les 5 centaines déjà sur la table et retrouve le nombre 510.

Les autres cartes nombres ne posent pas de problème. I. explique «Je fais des paq...je fais des centaines, 4 centaines pis 1 dizaine (pour 41 dizaines)». Elle hésite devant 5 dizaines. Je lui suggère d'imaginer dans sa tête les dizaines. Elle fait correspondre rapidement 50.

Un nouveau blocage survient devant 11 unités. Elle explique qu'on peut dire «11 unités ou une unité et 10 dizaines». Lorsque je répète sa phrase (dix dizaines?), elle réalise qu'il s'agit d'une seule dizaine. La confusion persiste entre 10 et 1, entre les mots unités et dizaines devant le carton sur lequel est indiquée la quantité 10 unités. Je lui suggère de prendre 10 unités. Elle cherche à prendre 10 enveloppes de dizaines. Je lui rappelle la question. Elle prend alors une seule enveloppe de dizaine. Je lui demande combien elle a de dizaines. Elle ne sait que répondre. Je poursuis:

«-Combien tu as d'enveloppes dans les mains?

-Un

-C'est combien de dizaines.

-10».

Ici I. confond le contenu de l'enveloppe (unités) et le nom attribué à l'enveloppe (dizaine). C'est par le biais d'un vocabulaire courant (paquet) et la mise en correspondance du mot paquet avec le mot dizaine qu'elle réalise que ce n'est pas 10 dizaines. «Je n'en ai pas 10 dans les mains».

Nous revenons à la question de départ (trouver un nombre entre 402 et 513). I. énumère d'abord différentes possibilités (403, 404, 405, 406), puis prend des enveloppes pour l'aider à réfléchir. Elle tend d'abord la carte 45 dizaines en disant 450, puis 5 centaines, 51 dizaines, 42 dizaines, 43 dizaines en leur faisant correspondre le nom du nombre. Elle juxtapose toutefois 4 dizaines et 5 dizaines pour former le nombre 450. Elle a pourtant bien identifié 4 dizaines comme étant 40. Devant mon refus, elle trouve le cardinal de chaque quantité, fait l'opération d'addition mentalement, obtient 90 et reconnaît qu'il aurait fallu avoir 4 centaines pour former 450.

Enfin, elle construit correctement le nombre 430 avec, dans l'ordre, les cartes sur lesquelles les quantités 4 dizaines, 4 dizaines, 5 unités, 2 unités, 3 unités, 3 centaines et 3 dizaines apparaissent.

3. Troisième expérimentation didactique (comparer et ordonner des nombres)

L'expérimentation didactique porte sur des nombres à ordonner. Elle commence par le rappel de la composition des différentes unités de mesure de quantité. Unités, dizaines, centaines sont décrites grâce au matériel déjà manipulé. L'unité de mille est anticipée, puisqu'elle n'a jamais été fabriquée avec les enveloppes. Un blocage survient lorsque I. cherche à trouver le nombre qui correspond aux 2 enveloppes représentant les unités de mille. Elle croit qu'il s'agit de 10 unités de mille, puis de 10 dizaines de mille. Je lui propose de vérifier ses dires en observant le matériel.

Je lui montre une deuxième enveloppe d'unité de mille, dans laquelle nous imaginons les 10 centaines. Elle sait qu'il s'agit de 2 unités de mille. L'ajout d'une autre unité de mille lui permet de retrouver les 3 unités de mille en ajoutant «c'est des paquets de 100». Je l'approuve en précisant qu'il est vrai que ces unités de mille sont fabriquées avec des paquets de 100. I. ne semble toutefois pas concevoir qu'il s'agit d'une nouvelle unité de mesure de quantité qui a un contenu. Je tente de dissiper cette confusion en lui faisant observer non seulement les unités de mesure de quantité incluses dans les unités de mille ou les centaines, mais aussi le fait qu'il s'agit de nouvelles unités de mesure de quantité.

Je poursuis en demandant à I. d'identifier le nom qui correspond à ces 3 unités de mille. Un nouveau blocage survient. Je lui dit qu'il s'agit de 3000 et lui propose d'utiliser le tableau de numération qu'elle ne semble pas reconnaître. Je le construis devant elle en lui demandant ce qu'on y retrouve. Elle pense qu'on y inscrit des numéros. J'écris le nom des différentes positions. Après la centaine, I. identifie «mille». Je lui précise la position des unités de mille et elle pourra anticiper les dizaines et les centaines de mille, de même que les positions de l'ordre des millions. Elle inscrit un 3 dans la colonne des unités de mille et trois 0 pour représenter l'absence de groupements de centaines, de dizaines et d'unités à côté de ces unités de mille. I. retrouve ensuite sans peine le nom du nombre (3000). Elle explique «Je m'en rappelais plus de cette manière là, mais on en a appris d'autres».

I. hésite et est confuse lorsque je lui demande le nombre de centaines dans 3000. Elle compte 300 ou 3 centaines en disant qu'elle pense aux 10 centaines dans chaque enveloppe. Je lui propose de compter chacune des enveloppes d'unités de mille, ce qu'elle fait en comptant par 10, mais elle obtient «1000». Elle répète une deuxième fois la même erreur. Je crée un distracteur avec une devinette qui n'a aucun rapport avec notre contenu. Elle comptera les 30 centaines par la suite.

Devant la succession d'ajout d'enveloppes d'unité de mille, elle hésite à reconnaître 4000, pense à 40 000, hésite à nouveau entre 5000 et 50 000. Elle peut toutefois se corriger seule en utilisant le tableau de numération en disant «parce que c'est l'unité». I. explique, en regardant son tableau de numération, qu'elle ajoute des 0 aux positions des unités des dizaines et des centaines «parce qu'il n'y en a pas». Je ne relève pas cette expression.

Un blocage survient lorsqu'elle a 10 enveloppes d'unités de mille. Elle ne pense pas former une dizaine de mille. Je révise avec elle la régularité utilisée depuis le début (10), elle bloque à 10 dizaines, prend du matériel, découvre le paquet de 100. Elle poursuit la construction de groupements pendant que j'appuie (avec l'expression encore!) à chaque fois que survient la régularité. Elle croit ensuite qu'avec 10 dizaines de mille arrive le million. I. a donc l'idée d'un nouveau groupement, très grand mais ne lui donne pas le bon nom. L'observation du tableau de numération lui permet de trouver ce nom. Elle anticipe par la suite le nom de différentes dizaines de mille, puis la fabrication de la centaine de mille.

Une révision m'indique que pour I., les unités de mille «c'est comme les unités mais c'est...plus gros que l'unité...mais je pense au mille». À ma demande, elle montre l'enveloppe de l'unité de mille et je profite de l'occasion pour lui faire observer la différence entre l'unité et l'unité de mille. A nouveau, semble surgir ici la difficulté à concevoir que le contenant a un nom différent de son contenu, tout en conservant son contenu.

L'amorce de la rencontre ayant été plus longue que prévue, je lui raconte l'histoire où elle peut observer que la longueur d'un nombre nous donne des indices, lorsqu'on veut les comparer entre eux. Je lui demande, par la suite de m'indiquer le nombre le plus petit, en lui faisant lire 10 089, 1089, 100 089 et 9098 qu'elle lit d'abord 989. Elle constate que 1089 est le plus petit en insistant sur le nom des nombres, puis sur le chiffre de l'ordre des mille. Elle ne semble pas avoir utilisé la longueur de l'écriture. Elle ordonne les nombres sans problème en insistant à nouveau sur le nom des nombres et sur leur proximité par rapport aux termes million, centaine, dizaine.

Je propose ensuite à I. de comparer 10 364 et 12 364 afin d'observer ce qu'elle fera lorsque les deux nombres ont des dizaines de mille. Elle identifie le plus petit nombre en expliquant qu'elle regarde les dizaine de mille (10 et 12). Je lui suggère de comparer le nombre 908 et 908 unités. Elle croit que 908 unités est plus petit «parce que 908 unités c'est plus petit que 908 000». L'utilisation du tableau de numération dissipe cette confusion car j'y ajoute la façon dont je lui aurais parlé du nombre pour lui faire savoir qu'il s'agissait de 908 000. Elle explique par la suite que 908 et 908 unités sont «de la même famille» et qu'il en est de même pour 90 008 unités et 90 008.

4. Quatrième expérimentation didactique (opérer avec les nombres)

Le but de l'entrevue est de travailler l'ajout et le retrait, sans l'algorithme. I. me rappelle la composition des dizaines, des centaines et des unités de mille en utilisant la multiplication. «...10x10 ça fait 100 fait que...il y a 100 petites unités dedans (la centaine)». La composition de 2000 pose problème, puisqu'elle croit que 2000 dizaines sont contenues dans le nombre. Elle réfléchit...mais reste en panne. Je lui propose de revenir à une unité de mille et cette idée est suffisante pour lui faire découvrir les 200 dizaines contenues dans le nombre 2000.

Une erreur survient lorsque je demande à I. d'identifier le nom du groupement qu'on peut construire avec dix unités de mille. Elle croit qu'on peut faire des millions. L'observation des enveloppes de mille n'est pas suffisante. Nous n'avons pas encore construit de dizaines de mille, nous ne les avons qu'imaginé ou observé sur le tableau de numération durant l'expérimentation didactique précédente. L'écriture d'un grand nombre (125 304) et l'identification de chacune des positions lui permet de découvrir la dizaine de mille. I. semble surprise devant la mise en correspondance entre le nom des positions et les différents groupements.

Ce rappel réalisé, je lui raconte une histoire qui lui permet de réaliser qu'on peut opérer sur les nombres sans utiliser les algorithmes. Je lui apprends par la suite que le but de l'entrevue est de nous «pratiquer à faire des calculs dans sa tête».

Je reviens à une représentation mentale qu'elle avait construite la semaine précédente. Elle sait comparer 908 et 908 unités en utilisant les représentations mentales qu'elle se fait de 908 et en expliquant que : «908 unités là c'est la même chose que 908 parce qu'on fait la même chose, pis ça arrive à la même chose».

Par la suite, elle ajoute et retire les unités demandées en établissant des échanges entre 10 centaines et 1 unité de mille. Elle explique le retrait de 800 unités, en confondant 800 unités et 800 centaines et ce même si l'opération est réalisée facilement mentalement (1008-800). En effet, le fait de discuter à propos des enveloppes de centaines et d'unité de mille lui fait dire «j'ai enlevé 800 enveloppes blanches». Je précise qu'elle a enlevé 8 enveloppes blanches, qui équivalent à 800 unités.

Une nouvelle confusion surgit lorsqu'elle doit retirer 20 dizaines au nombre 208. Elle tente d'utiliser l'algorithme mentalement. J'insiste pour qu'elle identifie d'abord le nombre qui correspond à 20 dizaines. Elle s'aperçoit qu'il s'agit de 200 et réalise l'opération facilement (208-200=8).

Je lui propose enfin d'ajouter 14 dizaines au 8 unités qui lui restent. Elle additionne 14 et 8 pour trouver 22, démontrant ainsi sa préoccupation à additionner plutôt qu'à juxtaposer, mais en considérant les quantités comme des nombres. L'utilisation de matériel démontre bien qu'elle conçoit 14 dizaines comme étant 14 unités... elle prend 14 jetons dans ses mains. Je lui demande de me reformuler la question, ce qu'elle fait en disant «14 unités». Je lui dis que ce n'est pas ce que je lui ai demandé. Elle se corrige en s'exclamant «14 dizaines»! Elle m'assure comprendre maintenant. Elle prend cependant encore des jetons pour illustrer les 14 dizaines. Je lui demande de montrer une dizaine. I. reprend pour une troisième fois les jetons. Je lui demande pourquoi elle reprend des unités. Elle explique qu'elle doit faire 14 unités. Nous revenons sur la formulation de la consigne et I. la reformule correctement (14 dizaines). Je lui demande de me montrer une dizaine, ce qu'elle fait. Je lui indique que j'en veux 14 et lui suggère de choisir entre celles qui sont à construire ou celles qui sont déjà formées sur la table. Elle choisit d'utiliser celles qui sont déjà là. Elle en compte 14 et trouve le nombre 148. Je l'approuve en lui montrant, avec le matériel, qu'effectivement on peut remplacer 10 dizaines par 1 centaine. I. réalise que le nombre 14 lui a fait considérer qu'il s'agissait d'unités plutôt que de dizaines et termine en expliquant : «Tu sais dizaine ca veut dire ... de ... de...14 dizaines...c'est comme des centaines là...»

5. <u>Cinquième expérimentation didactique (l'arrondissement de nombres)</u>

Le but de l'entrevue est d'amener I. à comprendre ce qui se passe lorsqu'elle arrondit un nombre. L'histoire favorise la discussion à propos des groupements autre que dix, qui ont contribué à l'évolution de la numération, et la facilité avec laquelle on peut arrondir aujourd'hui grâce aux groupements de dix.

Je suggère à I. de s'imaginer que nous sommes dans un magasin pour réaliser les tâches qui suivent. Dans un premier temps, elle doit choisir, parmi 3 billets de 100, 7 billets de 1000 et 5 billets de 10, ce qu'elle donne à la caisse lorsqu'elle veut acheter un Nintendo qui coûte $149. Elle hésite, puisqu'elle n'a pas de 9, puis montre les billets représentant le nombre 150. Elle explique qu'elle vient d'arrondir à 50 et qu'il s'agit de la position des dizaines. I. ajoute ensuite une billet de 100 pour arrondir à la centaine, obtenant ainsi 250. Une question à propos de la nécessité de donner 250 lui permet de réaliser que 2 billets de 100 sont suffisants. I. observe ainsi, que lorsqu'elle arrondit à la centaine, les billets de 10 ne sont pas nécessaires.

Au cours de la deuxième tâche, I. doit arrondir un nombre à quatre chiffres (5064). Elle donne 5 billets de 1000 et tente de donner 64 billets de 10. Devant ma surprise, elle se reprend et cherche 7 billets de 10, sachant que cela correspond à 70. Elle considère d'abord ce nombre comme une position avant de dire qu'elle vient d'arrondir à la dizaine. N'ayant pas les 7 billets de 10, elle décide d'arrondir à l'unité de mille en donnant 6000. Elle explique qu'il s'agit de l'unité de mille la plus proche puisque : « 5 est plus proche de dix, il faut arrondir à la dizaine». Je lui propose donc d'écrire le nombre 5064 ainsi que le nombre 6000 qu'elle a déjà trouvé. En l'écrivant en-dessous de 5064, elle constate qu'il s'agit de l'unité de mille la plus loin. Elle montre le 4 des unités et explique qu'il est plus proche de 6. Une confusion dans les procédures semble apparaître. Elle ne sait plus quel chiffre est pertinent.

Elle écrit 7000 au-dessus du nombre 5064 croyant qu'il s'agit de l'unité de mille la plus proche en expliquant : «Il faut le monter...». En revenant au nombre déjà arrondi, elle explique qu'elle en avait ajouté. Je lui propose alors une situation où elle doit additionner 149 et 90 sans l'algorithme. Elle choisit d'arrondir, puis d'additionner découvrant 250. Elle explique par la suite qu'arrondir sert à «savoir si le nombre est assez proche du nombre d'avant».

Nous revenons au nombre 5064 et je lui propose de me dire lequel de 5000 ou de 7000 est le plus près de 5064, elle ne le découvre pas. Je lui suggère de compter de 5000 à 5064 afin de lui faire découvrir, par le comptage, la différence entre 5000 et 5064 puis entre 5064 et 7000. Elle admet à ce moment que 5000 est plus près de 5064 que 7000. Un dialogue s'engage sur le moment où seront utilisés l'une ou l'autre des unités de mille. Elle sait ensuite arrondir à la centaine le nombre 5064, en identifiant 5100.

Pour la troisième tâche, je lui suggère de choisir un nombre et de l'arrondir à la position de son choix. Elle écrit le nombre 599, choisit d'arrondir à la centaine, prend 6 billets de 100 pour la centaine la plus près et parle de 500 comme étant la plus loin. Elle explique que «99 est proche de 100 et 5 proche de 6». Je lui suggère le comptage qui lui permet d'arriver à la même conclusion.

Je lui propose enfin d'écrire le nombre 1228, qu'elle choisit d'arrondir à 1229. Devant ma question, elle constate qu'elle n'a pas arrondi mais bien ajouté une unité. Je lui demande de choisir une position avant d'arrondir. Elle choisit la dizaine, parle de 1230 que je lui propose d'écrire. Elle dit qu'il s'agit de la dizaine la plus proche et je lui demande de trouver «l'autre». Elle écrit 1000. Je précise qu'il s'agit d'arrondir à la dizaine et non à l'unité de mille. Elle inscrit 1210 puis 1200. Je lui suggère de prendre les billets de monopoly. Elle ajoute 2 billets de 10, en expliquant que 1230 est plus haut que 1220, ne considérant pas le nombre de départ 1228.

Elle arrondit ensuite à la centaine, en identifiant immédiatement 1300. «Parce que 200, c'est plus petit que 300». I. a donc pensé aux deux centaines avant d'identifier la plus loin. Elle fait de même avec l'unité de mille.

J'entreprends une discussion à propos de l'erreur entre 5000 et 7000 afin de lui faire observer d'où cela proviendrait. Elle explique que ces nombres lui ont fait penser à ça. Je lui demande si en comptant, 5000 est près 7000 ou si 5 est près de 7. Elle observe l'éloignement de l'une et la proximité de l'autre, prenant ainsi conscience de l'influence que peut avoir le fait de ne considérer que les chiffres pris isolément.

6. <u>Sixième expérimentation didactique (le réseau sémantique)</u>

J'annonce à I. que nous allons faire une activité qui nous permet de mettre ensemble tout ce qu'on a vu ensemble depuis six semaines. Je lui parle des réseaux qu'elle a déjà utilisés dans la classe et lui dit que nous essaierons de construire un réseau de mots qui pourrait faciliter la recherche de moyens de dépannage lorsqu'elle est devant un problème de mathématique. Je lui raconte l'histoire du Petit Poucet qui était parvenu à retrouver son chemin grâce à des petits cailloux.

Les cartons sur lesquels les mots seront écrits feront office de petits cailloux. Elle y inscrit d'abord les opérations x, ÷, -, géométrie, puis sur ma suggestion d'utiliser ce qu'il y a sur la table, ajoute les termes paquets de 10, de 100 de 1000, de 10 000, de million. Je lui demande avec quoi on peut écrire des nombres. Cela lui permet de compléter par les mots chiffre, compter, écrire des nombres et compter par bonds.

Je lui parle ensuite des poupées russes, qu'elle dit ne pas connaître, mais qu'elle reconnaît lorsque je lui décris. Je lui demande de placer les mots écrits sur ses cartons à la manière des poupées russes. Elle construit le tableau suivant.

x		géométrie	
-	chiffre	arrondir	
÷	écrire des nombres		
	paquets de 10		compter
	paquets de 100		compter par
	paquets de 1000		bonds
	paquets de 10 000		

Elle explique ensuite les regroupements des mots ainsi. Pour elle, x, ÷ et - vont ensemble parce «c'est presque la même affaire». Elle ne peut expliquer comment, mais elle ajoute que x et ÷ «c'est l'inverse», alors que le moins «il est toujours tout seul». J'apprends que l'inverse veut dire «c'est ...la réponse, on prend l'autre chiffre qui est dans la multiplication, pis on fait la division». Elle ne croit pas que la soustraction ait une opération inverse. Une histoire à propos de billes perdues dans la journée, lui permet de découvrir, en prenant la journée à l'envers, que l'addition est l'inverse de la soustraction.

Elle place les mots chiffres et écrire des nombres ensemble parce que «il y a des chiffres là, des chiffres comme ça là... pour savoir comment ils s'écrivent, pis nous autres, on écrit les nombres qu'il y a là...» Son explication est confuse. J'ai cru qu'elle me dirait qu'elle utilise des chiffres pour écrire des nombres, mais elle m'indique qu'elle utilise un crayon. Nous ne sommes donc plus au même diapason.

Elle ne peut expliquer pourquoi elle a rassemblé les mots géométrie et arrondir, mais explique qu'on peut arrondir les nombres. Elle déplace ainsi ce carton d'abord vers l'ensemble des paquets, puis vers le mot nombre. Cela lui permet d'ajouter les termes dizaine, centaine, unité de mille, dizaine de mille, centaine de mille. Le tableau commence à se modifier.

Elle place côte à côte les noms des positions et les types de paquets leur correspondant, ajoute le mot position qu'elle place à côté de arrondir et enfin les mots enveloppes et dessins, qui lui permettent de représenter les différents paquets.

Le contenu de la dizaine lui rappelle le mot unité, qu'elle ajoute en m'indiquant que les unités «c'est comme des paquets d'unités». Je lui précise que les unités ne sont pas des paquets. Elle complète en expliquant qu'on fait des paquets avec les unités.

Compter et compter par bonds ont été rassemblés, mais devant ma suggestion de les attacher quelque part, elle les déplace vers l'ensemble des paquets. Elle explique qu'on peut compter par bonds de 10, de 100, de 1000. Elle place le mot compter vis-à-vis le mot unité. Elle ajoute qu'elle peut compter «...par plus...» m'indiquant ici le lien qu'elle fait entre les opérations et le mot compter.

Elle éprouve des difficultés à choisir quel contexte l'amène à additionner. Le choix que je lui offre parmi enlève, ajoute, réunit ou partage ne semble pas l'aider. Elle additionne quand elle additionne. L'écriture des mots à choisir semble tout à coup faciliter cette compréhension. Ainsi elle additionne lorsqu'elle réunit puis quand elle ajoute. Toutefois, elle considère qu'elle multiplie quand elle partage. Le nombre de morceaux augmentant lorsqu'elle divise amènerait-il cette confusion? Lorsque je lui parle des morceaux, elle reconnaît la division. C'est à la suite de la constatation selon laquelle on «n'enlève pas quand on multiplie», qu'elle découvre qu'on ajoute plusieurs fois quand on multiplie. Le nouveau tableau se lit ainsi.

				Nombres	Tableau de numération	
	compter par bonds			arrondir	position	chiffre
	compter	unité	paquets de 10	dizaine		
-	enlève	envelop-pes	paquets de 100	centaine		
÷	partage		paquets de 1000	unité de mille		
		dessin	paquets de 10 000	dizaine de mille		
+	réunit		paquets de 100 000	centaine de mille		
x	ajoute					

I. résume ensuite le tableau en expliquant les liens entre les opérations et leur sens (réunir, ajouter, partager, enlever). Elle hésite cependant à expliquer ce qui les rapproche de compter. «Pour comment on avait d'affaires», dit-elle.

Elle utilise l'action pour associer les groupements et compter, puis explique bien l'inclusion des sous-groupes dans les groupes.

Elle fait correspondre aux différents groupements leur nom mathématique et termine en disant que «ça c'est des nombres». Ces derniers peuvent être arrondis ou comptés par bonds. Le tableau de numération l'aide à trouver la position des chiffres et ainsi on peut écrire des nombres, explique-t-elle.

I. reconnaît que les opérations sont des choses qu'elle fait en classe de même que les dessins, les positions et l'écriture des nombres. Elle explique qu'il y avait des choses qu'elle n'avait pas encore vu parmi celles que nous avons réalisées ensemble.

F. Évaluation finale

Habiletés de comptage

I. compte par 1 et par 10 sans problème. Elle éprouve toutefois des difficultés avec le double-comptage. Elle compte les nombres dits, plutôt que les espaces entre les nombres. L'expérimentation, au moyen de la marche, lui fait réaliser son erreur.

Palier logico-physique

La recherche de groupements, dans une situation de la vie courante, semble faire penser à I. à des remplacements. Elle parle de $1, avec lesquels on peut faire des billets de dix. L'enveloppe contenant 10 unités est ensuite reconnue comme étant une dizaine.

Elle reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à l'organisation. Elle explique qu'elle peut remettre les enveloppes étalées dans une enveloppe groupée. Elle reconnaît immédiatement l'équivalence entre 300 macarons, 2 paquets de 100 macarons et 100 macarons et enfin 3 paquets de 100 macarons en expliquant que chacun a 300 macarons.

Palier logico-mathématique

Elle lit, écrit et ordonne facilement des nombres jusqu'à 5 chiffres qui contiennent un ou plusieurs zéros. Hésitante devant le nombres 10 198 et 1198, elle explique que la relecture du nombre suffit pour reconnaître qu'il ne s'agit pas de 11 mille mais bien de 1 (mille). L'utilisation de cette procédure laisse apparaître la comparaison entre les chiffres 1 et 11 dans l'ordre des mille.

Les zéros du nombre 70 089 sont considéré comme représentant l'absence d'unités de mille et des centaines. I. ne croit pas ces unités de mesure de quantité présentes dans la dizaine de mille. De même, I. sait que les chiffres 2 de 2220 ne valent pas la même chose. Elle pense que 2 dizaines composent le nombre 2220, en tout. La fabrication du nombre 2220 avec des enveloppes, lui permet de reconnaître le nombre de dizaines, de centaines et d'unités contenues dans ce nombre. Le comptage des dizaines est laborieux, puisqu'elle identifie d'abord 1000 dizaines dans une unité de mille (confusion entre unité et dizaine), puis ajoute les unités des dizaines avant de retrouver les 222 dizaines. Elle additionne les unités de toutes les unités de mesure pour retrouver les 2220 unités de ce nombre. Lorsqu'elle doit retrouver le nombre de centaines, elle compte les 10 centaines de la première unité de mille, ajoute la deuxième, puis elle obtient 2000. Pour elle 10 centaines+10 centaines=1000. C'est en revenant à l'addition 10+10 qu'elle retrouve le total (20) et identifie les 22 centaines.

Elle enlève 20 au nombre 2234 en enlevant 20 à 30 pour retrouver 2214, mais elle ajoute qu'elle «enlève 20 dizaines». Elle n'utilise donc pas la relation d'échange mais bien une soustraction simple. La question suivante semble confirmer cette incompréhension puisque 20 dizaines et 20 unités sont d'abord considérés comme étant la même chose. Par la suite, 20 unités est considéré comme plus petit, sans pouvoir expliquer pourquoi. 20 unités est aussi perçu comme étant plus petit que 2 dizaines. La confrontation avec le matériel permet une restructuration de cette croyance. La comparaison entre 20 dizaines et 2 centaines ne sera pas résolue de façon satisfaisante. La question a été modifiée (2 dizaines), puis 2 centaines a été confondu avec 200 centaines.

La recomposition du nombre 709 est réalisée à l'aide de toutes les cartes qui ne présentent pas de composition. Ainsi, 70 dizaines est délaissé parce qu'il ne correspond pas au nombre 700. I. arrondit ensuite le nombre 3105 à la centaine «la plus loin». La comparaison avec l'autre centaine lui fait réajuster sa solution en expliquant «5 est plus proche de 100».

APPENDICE 4

Étude de cas de Ch.

I. Évaluation initiale

Habiletés de comptage

Le comptage par 1 ne pose pas de problème. Toutefois, Ch. a éprouvé des difficulté à compter par 10 les nombres plus grands que 1000 (1135, 1145, 1155, 1065, 1075...1095, 1605). Le double-comptage est réalisé efficacement pour le cas proposé (10 008 à 10015). Elle retrouve sept pas. Le double-comptage n'a pu servir de guide pour compter par dix.

Palier logico-physique

Avant d'en arriver à la vérification des différentes composantes de la compréhension de la numération positionnelle décimale, nous avons construit les groupements d'objets que manipule Ch. depuis plusieurs années. La dizaine est d'abord perçue comme étant un groupe de deux jetons, correspondant à la quantité de chiffres nécessaires pour obtenir des dizaines. Ch. se reprend et m'indique que :«Dépendant du chiffre, il pourra y en avoir trois». Elle semble à nouveau référer à la quantité de chiffres dans un nombre.

Nous en venons à l'énumération des différents groupements qui existent dans la vie courante. Elle énumère d'abord les boîtes de conserve en faisant référence au classement selon leurs dimensions. Elle reconnaît que des aliments comme des radis, des carottes, des «choux de Siam» sont regroupés. Elle parvient à se rappeler qu'un groupe de douze oeufs est appelé une douzaine. Elle ne sait pas comment appeler un groupe de dix oranges, puis devant le début de ma formulation (un sac de...) dira qu'il s'agit d'une dizaine d'oranges. Ce n'est que par la suite qu'elle explique que : "...dix c'est une dizaine". Nous construisons ainsi quelques dizaines, puis je lui demande comment on fabrique une centaine. Elle sait qu'elle utilisera dix paquets de dix. Par la suite, elle reconnaît aussi le nom des groupements composés de vingt, cinquante ou cent éléments. Le côté commode de ces groupements est leur facilité à être «ramassés» (transport), explique-t-elle. Elle refuse d'admettre dans un premier temps, que la dizaine, groupement de la vie courante, puisse être utile en mathématique.

Elle accepte d'illustrer le nombre 202 seulement après avoir appris qu'elle peut fabriquer de nouveaux groupements, puisque nous n'avons pas suffisamment de centaines sur la table. Je déchire ensuite une des deux enveloppes de centaines, étale les dix dizaines devant elle et lui demande s'il y a encore 202 jetons. Elle croit qu'après avoir déchiré une enveloppe de cent, il y a 112 jetons. Pour elle, «il y a juste un paquet et un paquet c'est dix». La centaine est considérée comme enlevée. Elle ne peut exprimer que pour qu'il y ait une différence, il aurait fallu en enlever ou en ajouter.

Le problème des trois bonhommes qui ont respectivement trente jetons, deux paquets de dix jetons et dix jetons et enfin trois paquets de dix jetons, lui est présenté. Elle décide que celui qui a trois paquets de dix jetons est le bonhomme le plus riche.
_«Pourquoi?
-...non parce qu'il en a deux en fin de compte, parce que le premier en a trente, l'autre a trois paquets de dix et trois paquets de dix ça fait trente. ...Les deux qui ont trente sont plus riche que l'autre parce que l'autre a juste vingt, vingt jetons».

Je lui rappelle que cet autre a aussi dix jetons, en plus de ses deux paquets de dix. À ce moment elle reconnaît l'équivalence des trois ensembles («Ca fait 30 pareil. Les 3 sont égal»).

Palier logico-mathématique

La lecture de grands nombres est difficile. Ch. explique que les grands nombres lui posent des problèmes particuliers. Ainsi, le nombre 70 089 est d'abord lu 70 000 puis 70 089. Elle ajoute que : «Le zéro au début du huit est un peu mélangeant...des fois t'accroches l'autre zéro avec lui et là tu fais...700 089». Le nombre 10 089 est considéré plus facile à lire : «...parce que dix ça se sépare mieux». Les nombres à trois chiffres (980, 908, 207, 131, 720, 306) sont considérés faciles, alors que les nombres de quatre chiffres peuvent porter à confusion. Ch. lit correctement 1198 mais ajoute: «...je pensais que tout ça (en montrant les 1 1) c'était deux un ensemble et ça (98) c'était quatre vingt-dix-huit...» Le nombre 1098, 2202 sont lus facilement.

L'écriture des nombres 709, 613, 797, 1 012, 3 105 est réalisé sans problème. Toutefois lorsqu'il s'agit de retrouver, parmi les cartes-nombres proposées, le plus de décompositions possibles au nombre 709, les choses se compliquent. Elle prend 70 dizaines l'appelle soixante-dix, lui additionne la carte-nombre 9 et déclare qu'il s'agit de 79, se reprend devant mon interrogation et dit : «709». Elle choisit ensuite 10 dizaines puis 7 centaines qu'elle considère ensemble comme 70 (7x10), ajoute 9 unités pour l'appeler 79. Elle utilise ensuite les cartes 7x100 et 9 unités pour former 709.

L'ordre décroissant a été réalisé de façon peu conventionnelle. En effet, étant donné que pour Ch. les nombres les plus petits sont considérés plus faciles que les grands, elle a préféré placer les cartes-nombres de la droite vers la gauche (du plus petit au plus grand), réalisant ainsi l'ordre décroissant à partir de l'ordre croissant.

Pour Ch. le nombre 2 202 contient «zéro dizaine parce que ici (en montrant la position des dizaines), c'est la dizaine de deux (unités). Disons si c'était un quatre, ce serait quarante-deux parce que si t'enlevais le deux, ce serait quarante». Un peu plus tôt Ch. avait expliqué que le 0 de 7<u>0</u> 089 :«Ca veut dire les unités de mille».
-«Et en ayant un zéro ici (en désignant encore l'unité de mille), ça voudrait dire quoi?
-Je le sais pas».

Le zéro semble désigner une position. D'autre part, pour Ch., le nombre 2 202 a deux unités <u>en tout</u>. Une investigation à propos des différentes unités de mesure de quantité indique que pour elle, vingt unités et deux dizaines sont «pareils» et que vingt dizaines et vingt unités «c'est pas pareil», observant à ce moment les mots unités et dizaines, puis les comparant à 2 sous et 20 cents. Vingt dizaines et deux centaines sont jugés différents : «...parce que deux centaines c'est plus grand que deux dizaines...» . Par la suite, elle élabore sur ce qu'il est possible d'acheter avec $100 et $20.. A deux reprises, Ch. élabore des explications qui ont peu de rapport avec la tâche immédiate, puisqu'il n'y a pas de correspondance entre les dollars dont elle parle et la quantité de la consigne. Elle semble comprendre la coordination entre les nombres et les unités de mesure de quantité dans le cas des unités et des dizaines. Il ne semble pas en être ainsi dans le cas où elle compare les dizaines et les centaines, ni les dizaines et les unités, lorsque les premières sont au nombre de 20.

Lorsque je lui demande d'enlever deux dizaines au nombre 202 déjà illustré, elle enlève 2 enveloppes de 10 parmi celles qui sont déjà étalées (10 dizaines), mais ne sait pas quel est le reste.

Elle ne pense pas de compter pour trouver le nom du nouveau nombre.

La question portant sur le fait d'arrondir un nombre à la centaine la plus près n'a pas été exploité à fond. Ch. a tout de même jugé approprié d'arrondir à la centaine près le nombre 3 105 en disant 3000. Son enseignant m'informe toutefois que pour Ch. cet exercice est très difficile.

1. Première expérimentation didactique (lecture de nombres)

Le but de l'activité est la lecture de nombres. L'histoire prévue a servi de déclencheur. Ch. a donc pu se rendre compte, après les avoir écrit sur une feuille, que seulement dix chiffres différents nous permettent d'écrire tous les nombres. Lorsque je demande à Ch. comment on organise ces chiffres quand on a de grands nombres, elle convient qu'il y a soit des espaces, soit des virgules qui facilitent la lecture de nombre. Je lui demande : «Les espaces on les met quand?». Elle élude cette question en disant : «Tu laisses un espace parce que si c'était tout collé ensemble ce serait un gros, gros chiffre...»

Je lui propose une première tâche où elle doit écrire un «gros gros nombre... les chiffres tout collés» pour voir ce qui arrive dans ce cas, puisqu'elle n'a pu le prévoir. Elle écrit 11234. Je lui propose de lire ce nombre. Elle lit avec hésitation : «Un million, mille deux cent trente-quatre». Elle m'indique que le deuxième 1 correspond à mille puisque le 2 correspond à 100 mais pense, sans en être certaine, que le premier «c'est les millions».
Je lui demande:
-«Qu'est-ce que tu pourrais faire pour que ce soit plus facile à lire?
-Les séparer.»

En reproduisant la série de chiffres, elle ajoute l'espace après le 11 et lit sans hésiter: «Onze mille deux cent trente quatre». Elle explique qu'elle sépare le nombre en tranche de 2 (le plus souvent) et en tranche de 3. L'identification de la position des chiffres 1 est pénible. Elle leur attribue finalement la position «des mille».

Je lui demande le nom de la position qui correspond au premier 1 du nombre 11 234. Elle répond en attribuant la valeur des unités de mille. Je lui montre alors le second (11 234) et approuve son affirmation. Je poursuis immédiatement en lui montrant le premier 1 (11 234). Elle y fait correspondre immédiatement la dizaine de mille et peut continuer en disant que la position suivante serait la centaine de mille puis...«le mille de mille». Un retour sur le nom des positions des chiffres 4, 3, 2 puis 1 et 1 lui permettent de réaliser qu'on regroupe les chiffres par trois et que les positions seront toujours celles des unité, dizaine, centaine mais que les ordres: unité, mille, million, milliard différeront. Elle explique ensuite : «Dans 11 234...ici il y en a deux... parce que c'est 11 et 11 ne peut pas avoir trois chiffres».

Je lui propose une deuxième tâche où elle lit le prix de certaines voitures que nous retrouvons dans une revue. Elle lit les nombres 18 600, hésite au nombre 26 050, le zéro des centaines semblant la déstabiliser. Elle utilise les espaces et découvre que l'on entend pas le nom de la centaine. Elle continue de lire 27 700, 43 900, 27 050 pour 27 500. Elle explique que pour elle il y a une confusion entre 50 et 500 parce que : «C'est à l'envers. Ils enlèvent un chiffre, celui de l'unité. Ils mettent le 0 puis le 5 est rendu à la dizaine puis le 0 est rendu à la centaine». Je lui demande alors si cela transforme la valeur du nombre. Elle conçoit que 500 est plus grand que 50.

Elle poursuit la lecture des nombres 32 450, 33 000, confond 34 000 et 44 000 en expliquant qu'elle avait pensé «le quatre à la place du trois et le trois à la place du quatre». Je profite de l'occasion pour lui demander si elle se rend compte des moments où elle fait des erreurs. Elle convient que lorsqu'elle révise, il lui arrive de voir ses erreurs. Je lui propose de se questionner sur le sens de ce qu'elle fait : «Si ça n'a pas de sens, ça va nous permettre de savoir qu'il faut se corriger». Les autres nombres sont devenus faciles à lire, puisqu'ils présentent tous le même niveau de difficulté, tous comporte cinq chiffres. Pour Ch. le zéro ne semble plus poser de problème. Elle résume en expliquant que maintenant elle sait qu'elle peut séparer les chiffres d'un nombre par trois à partir des unités.

Je lui propose une troisième tâche qui l'invite à lire un nombre de six chiffres (230 040). Elle lit deux mille trente...deux mille... et avoue ne pas savoir le lire. Devant sa panne, je lui demande ce qu'elle peut faire. Elle décide d'attribuer une position à chaque chiffre en partant des unités jusqu'aux centaines de mille, mais ne peut lire le nombre. Je lui parle donc de la convention de lecture qui veut qu'on lise de gauche à droite même si on explore d'abord de droite à gauche. Elle parvient à lire le nombre.

C'est à ce moment qu'elle identifie un «truc» en expliquant: «Ici c'est 230 mille parce qu'on est dans les mille et ici c'est quarante dizaines». Je relève cette erreur en disant qu'il s'agit de quarante et lui explique que la prochaine entrevue portera sur la valeur des chiffres dans le nombre. Je lui propose ensuite de lire 908 406. Elle réutilise la même procédure, cependant lorsqu'il s'agit de lire le nombre, les choses se compliquent. «Neuf mille huit cent quatre cent six...» Je répète sa phrase. Elle se corrige et lit le nombre correctement. Lorsque je lui demande ce qui l'a aidé, elle explique : «On est dans les cent et le quatre m'a aidé parce que le quatre est dans les centaines».

Pour la quatrième tâche, je lui propose d'écrire elle-même un nombre qu'elle pense difficile à lire. Elle inscrit sur sa feuille 5367 218, puis elle identifie chacune des positions depuis les unités jusqu'aux millions. Je lui demande alors de me dire comment on regroupe les chiffres. Elle reconnaît les groupes de trois et, après quelques hésitations, précise que le chiffre 5 est à la position des unités de million. Elle lira par la suite le nombre d'abord à partir du sept pour dire sept mille puis, sur ma proposition commencera par le chiffre 5 pour le lire correctement. Ch. admet à nouveau ici que le fait de coller les chiffres rend la lecture difficile et qu'elle a maintenant un «truc» qui peut l'aider. Elle constate à nouveau que les positions reviennent régulièrement mais que les ordres, mille, million... changent. Le nom des ordres a toutefois besoin d'être répété, puisque après l'ordre des unités, elle croit qu'il s'agit de l'ordre des dizaines et des centaines.

Une dernière tâche touche la lecture de nombres écrits en lettres. Elle la considère plus facile et elle transcrit les chiffres sur son carton. Ainsi, 10 020 est bien écrit, tandis que 90 098 est confondu avec 888 qu'elle lit 88 000. L'identification de chacune des positions lui permet de lire le nombre : «Huit cent quatre-vingt-dix-huit». Avec mon support, elle se corrige et constate que ce n'est pas ce qu'elle a lu sur la carte-consigne (90 098). Ch. écrit 88 et me dit qu'il s'agit de quatre-vingt-huit. Je lui dit que ce n'est pas ce qui est demandé. Elle s'écrie tout à coup qu'elle sait que le neuf et le huit font 98. Elle explique que la différence entre les deux c'est : «Quatre-vingt-dix-huit c'est après le huit, mais ça se dit pareil quatre-vingt, mais parce que c'est neuf». Je conviens avec elle qu'une partie du mot est semblable, mais que ce qui les distingue, c'est le dix entendu. Elle admet que ce dix veut dire dizaine. J'ajoute que cette dizaine est une dizaine de plus et je lui demande si le 9, dans ce cas, veut bien dire une dizaine de plus que le 8. Elle approuve. Elle utilisera cet apprentissage pour écrire le nombre

670, puis écrira sans problème le nombre 1 002. Par la suite, nous convenons d'appeler «chiffres» les symboles qui composent un nombre afin de parler des mêmes choses et de mieux nous comprendre.

2. Deuxième expérimentation didactique (valeur positionnelle)

Le but de l'expérimentation didactique est la valeur positionnelle. L'histoire racontée a permis d'observer que dans notre façon de lire les nombres, la position des chiffres est souvent explicite. Je lui présente ensuite le matériel que nous utiliserons au cours de cette rencontre. Elle se rappelle l'avoir utilisé lors de l'entrevue initiale. Toutefois, l'enveloppe de dizaine est d'abord appelé 10 dizaines, puis 10 centaines et enfin 10 unités. Nous faisons correspondre un jeton à l'unité, dix jetons placés dans une enveloppe à la dizaine. C'est en prenant «une» dizaine dans ses mains, elle réalise qu'elle n'a bien qu'une seule enveloppe et que cette dernière s'appelle dizaine. «Parce qu'il y a dix, le mot dix, il y a dizaine dedans». Par la suite, elle saura que lorsque nous parlerons de cinq dizaines, il s'agit de cinq enveloppes de dix jetons et qu'une centaine contient dix dizaines. Elle le montre en prenant l'enveloppe dans ses mains.

Je lui demande de prévoir la construction d'une unité de mille avec des enveloppes et des jetons. Elle déclare d'abord qu'elle ne sait pas comment faire, puis elle compte les enveloppes de centaines en disant 100, 200, 300...1000. Les enveloppes de dizaines nécessaires à la construction d'autres centaines sont complétées jusqu'à ce qu'elle obtienne 1000. Elle place les 10 enveloppes de centaines dans une grande enveloppe brune. Je lui suggère de garder en mémoire comment sont fabriqués les différents groupements afin de répondre aux questions suivantes.

Au cours de la première tâche Ch. doit former le nombre le plus grand possible à l'aide des chiffres 5, 3, 5 et 1. Elle dispose les cartons ainsi 5 531 et lit le nombre facilement. Elle le considère comme étant le nombre le plus grand qu'il est possible de former avec ces chiffres : «Parce que le 5 est plus grand que le 3 et il est plus grand que le 1».

Je lui demande alors de former le nombre le plus grand possible en ajoutant aux chiffres déjà donnés le chiffre 0. Elle place d'abord les chiffres par groupes de deux et de trois (__ ___) puis fait différentes tentatives. Elle pose le 0 à la position des centaines, le déplace à la position des dizaines et s'arrête sur le nombre 55 301 qu'elle considère comme étant le plus grand possible. Elle explique : «Si je fais le contraire comme ça (en échangeant le 0 à la centaine et le 3 à la dizaine), ça va être 53, il va être plus petit. Si je prends le zéro je le mets là (en le déplaçant à l'unité de mille pour amener le 5 à la centaine), ça va être encore plus petit (50)... Si je mets le 1 (en déplaçant le 1 à l'unité de mille), ça va être encore plus petit. Et si je mets un 5 (en plaçant le 5 à l'unité de mille) c'est plus haut que les chiffres».

Je lui propose d'imaginer les représentations qui correspondent aux différentes positions. Pour ce qui est des unités elle dit: «Pour moi ça s'arrête à 9 les unités, parce que 10 c'est rendu une dizaine». Elle ajoute qu'une unité c'est fait avec un jeton et continue en faisant correspondre la dizaine à l'enveloppe de 10 jetons, la centaine au paquet de 10 enveloppes de dizaines. Par la suite, je lui propose de poser son zéro à l'endroit où la mesure est la plus petite. Elle forme le nombre 55 310.

Je lui demande comment elle construit l'unité de mille. Elle identifie la grande enveloppe contenant dix centaines. Je lui propose de placer le 0 à la position de l'unité de mille, désirant ici lui faire comparer les unités de mesure de quantité, de l'unité à l'unité de mille (50 531). En comparant le 0, lorsqu'il est à la position des unités et à la position des unités de mille, elle admet qu'il y a plus de choses enlevées si elle le place à la position des unités de mille.

Je lui propose de prévoir l'endroit où elle devra placer le 0 pour former le nombre le plus grand possible avec de nouveaux chiffres. Elle m'explique qu'il faudrait le placer à la position des unités de mille pour regrouper trois chiffres ensemble afin de faire un nombre plus grand que s'il a deux chiffres ensemble. Elle croit que je lui demande d'ajouter un nouveau chiffre au cinq chiffres qu'elle a déjà en main. Je lui propose donc les chiffres 2, 4, 6, 9 et lui demande de faire le nombre le plus grand possible. Elle forme 9 642. Lorsque je lui donne le zéro, elle groupe deux chiffres, puis trois chiffres (__ ___) et place sans hésiter le 0 à la position des unités, formant ainsi 96 420 même si elle le lit 86 420. Elle admet que pour tous les nombres à former, si on veut faire le nombre le plus grand on devra placer le zéro à la position des unités «...parce que les chiffres peuvent pas être plus petits que zéro, il va être tout le temps à l'unité».

Je propose par la suite à Ch. d'enlever 30 au nombre 6420. Elle choisit d'utiliser un abaque, qu'elle dit connaître. Elle considère que l'illustration de ce nombre avec des enveloppes et des jetons sera très longue à réaliser. Elle place 4 anneaux sur la tige des dizaines de mille, hésite, se dit qu'il faut enlever 30 dans 6000. La discussion qui s'ensuit m'informe qu'il subsiste une confusion entre le nombre 30, 30 dizaines et 30 centaines. À ma demande, elle tente d'illustrer 30 sur l'abaque et place des anneaux sur la tige des unités de mille. J'insiste pour retourner à des manipulations avec les jetons et les enveloppes. Elle ouvre une centaine, prend trois enveloppes de dix jetons en comptant par 10 et déclare que 30 c'est 10 dizaines. En les prenant dans ses mains, elle s'apprête à défaire une enveloppe de dizaines.
-Tu as combien d'enveloppes?

-Une
Tu m'en as montré combien d'enveloppes pour 30 (en montrant les deux autres enveloppes qu'elle avait posées sur la table)?
-Trois
-Alors tu as combien de dizaines?
-...Trois.
-Qu'est-ce qui te mélangeait?
-C'est que il y avait dix dedans et je me suis trompée.

Nous convenons ici de dire que lorsque nous parlons du nombre trente, nous parlons en unités et non en dizaines.

Je poursuis donc en lui demandant si elle peut enlever 3 dizaines au nombre 6420. Devant son affirmation, je lui demande comment elle va s'y prendre. Elle s'arrête, réfléchit, puis pense illustrer le nombre avec les enveloppes et les jetons, mais elle considère à nouveau que cela serait long. Elle explique alors qu'elle pourrait enlever 3 paquets de mille au nombre 6000. Je lui indique que je ne lui ai pas demandé d'enlever des paquets de 1000 mais bien des paquets de 10 et qu'elle change ainsi ma consigne. Une discussion portant sur le thème de l'importance à accorder à la fidélité de la consigne et les conséquences d'un changement de cette consigne se déclenche.

De retour à la tâche elle hésite, puis explique qu'elle doit baisser le chiffre qui est à la position des unités de mille. Elle change d'idée, montre la position des dizaines, abandonne, reprend en disant qu'il faut modifier le 6000 parce que : «... c'est celui-là qui fait le...le haut chiffre».

Je lui demande s'il n'y aurait pas un endroit où il serait plus économique d'enlever 3 dizaines. Elle montre la position des dizaines, observe qu'il n'y a que 2 dizaines et qu'on ne peut en enlever 3. Je lui demande si dans la classe elle n'a pas un moyen de dépannage pour ces cas. Elle convient qu'on peut emprunter à la centaine. Le lien qu'elle a tenté de faire tout à l'heure lorsqu'elle parlait de «baisser quelque chose» est maintenant établi. Je lui demande s'il est plus facile pour elle de tout faire dans sa tête ou si elle préfère utiliser l'abaque. Elle choisit d'illustrer son nombre sur l'abaque.

Nous convenons de la position des chiffres correspondant aux différentes tiges sur l'abaque. Elle place correctement les anneaux sur les tiges de l'abaque. Nous reprenons la discussion qui nous permettait de conclure que 30 est la même chose que 3 dizaines. Cela permet d'établir un lien entre les 3 enveloppes déjà comptées et l'abaque.

Elle m'informe que pour l'instant, elle ne peut enlever 3 dizaines sur l'abaque. Elle peut en enlever 2. Je lui demande où elle peut trouver la dizaine qui lui manque. «À la centaine», dit-elle. Elle prend donc un anneau sur la tige des centaines et tente de le placer sur la tige des dizaines, sans transformation. Je l'arrête, prends une enveloppe de centaine et lui demande si une dizaine et une centaine c'est pareil. Devant sa réponse négative, je poursuis:

-...tu es en train de prendre une centaine comme ça (en tenant l'enveloppe de centaine), de la sortir de là (en montrant la tige de centaine) et d'essayer de la rentrer ici (en désignant la tige de dizaines) est-ce que ça marche?

-Non.

-Qu'est-ce qu'il faudrait faire pour la (centaine) rentrer là (sur la tige des dizaines)?

-Faudrait enlever (en défaisant l'enveloppe de centaine).

-Faudrait trans...

-former une dizaine...en unités de dizaines...en dizaines.

-Si tu la transformes en dizaines, tu arrives à combien de dizaines?

-10.

-Est-ce que maintenant tu aurais le droit de les mettre dedans (en montrant la tige des dizaines)?
-Oui.
Elle transforme la centaine en 10 dizaines, prends 10 anneaux et les place sur la tige des dizaines, puis enlève le dernier anneau. Elle identifie le nouveau nombre en l'appelant 6 309 plutôt que 6 390. Elle se corrige lorsque je répète ce qu'elle vient de dire.

Nous profitons de l'occasion pour discuter des emprunts qu'elle fait en classe et pour expérimenter l'algorithme de la soustraction avec les nombres qu'elle vient de manipuler. Chacun des chiffres qu'elle écrit sur sa feuille, en réalisant l'opération, est mis en correspondance avec ce qui vient de se passer sur l'abaque. Elle observe, pour la première fois selon elle, que les illustrations correspondent aux algorithmes de la classe.

3. Troisième expérimentation didactique (la décomposition et la recomposition de nombres)

L'entrevue commence par le rappel de l'activité de la semaine précédente. Je suggère à Ch. d'utiliser ses jetons et ses enveloppes au besoin, mais de tenter aujourd'hui de travailler avec celles «qu'on a mis dans notre tête», étant donné que dans la classe ce matériel n'est pas disponible.

L'histoire racontée se rapporte à la façon qu'ont les Chinois d'écrire les nombres. Ainsi le nombre 3523 s'écrit 3(1000) 5(100) 2(10) 3. Cette histoire sert de mise en situation puisque le thème de l'expérimentation didactique est la décomposition de nombres.

Ch. m'explique comment elle décompose dans la classe. Elle écrit 4 136 sur une feuille lui fait correspondre 4000+100+30+ 6. Je lui demande si elle peut le décomposer d'une autre façon. Elle réfléchit, puis explique une illustration que je ne connais pas.

«Je fais des rectangles...». Je continue en tentant de lier l'écriture et la représentation des différentes unités de mesure de quantité. Elle sait que l'unité de mille contient 10 enveloppes de centaines, mais elle pense qu'il faut écrire 10+100, puis en regardant le contenu de l'enveloppe écrit 10x100.
-«Il y a 10 plus 100 dedans (en lui montrant à nouveau les positions possibles)?
-Non il y a...10 fois 100.»

Elle écrit donc 10x100 une première fois, ajoute un autre 10x100. Elle hésite et cherche ce qui pourrait séparer les deux 10x100. Je lui demande donc si elle on met ces enveloppes ensemble. Devant son affirmation j'ajoute : «Comment on écrit ça en mathématique pour dire mettre ensemble»? Elle répond : «On fait un ensemble». Devant ma suggestion entre les différents signe (+, -, x et ÷), elle choisit le «plus». J'ajoute que ce signe veut dire réunir. Ch. complète sa décomposition en écrivant un troisième 10x100, correspondant à sa troisième enveloppe de mille (que je dessine dans les airs), puis un quatrième.

Elle croit que 100 c'est : «10 enveloppes de 100». Devant mon air interrogateur, elle corrige : «10...10 enveloppes de...de 10 unités...de 10 dizaines»! Elle hésite, veut mettre ce nouveau groupement à part, avoue ne pas savoir comment écrire ce qu'elle vient de trouver. Je révise le sens des symboles +, -, x, ÷. Elle découvre alors que 10 enveloppes de dizaines s'écrit 10x10. Pour le nombre 30, elle imagine «trois dix» et décide d'écrire 10+10+10. Elle conviendra qu'elle aurait tout aussi bien pu écrire 20+10 ou 3x10. Pour le 6 des unités, elle écrit 3+3. La deuxième décomposition est celle-ci :
10x100+10x100+10x100+10x100+10x10+10+10+10+3+3. Ch. observe qu'elle a surtout pensé aux enveloppes pour arriver à cette écriture.

Je lui demande à nouveau s'il existe d'autre façon de décomposer le nombre (en dessinant les quatre enveloppes de mille dans les airs). Elle n'en est pas certaine. Elle trouve pourtant 2000x2 pour le 4000 ou 2000+2000. Une discussion s'amorce sur le sens du x et du +. Cela ne semble pas très clair pour Ch. Elle croit d'abord qu'on utilise un fois (x) quand il y a beaucoup de chiffres... différents.

«-Oui? Tes centaines, est-ce qu'elles sont toutes différentes, tes centaines dans ton unité de mille, est-ce qu'elles sont toutes différentes?

-Non, elles sont toutes pareilles.

-Regarde ce que tu as fait quand elles sont toutes pareilles (en montrant 10x100)...tu as une enveloppe là (dizaine) et une autre à côté, tu en as juste deux des enveloppes

-10 plus 10.

-Ou bien...Tu as combien de fois ton 10?

-2 fois 10.

Pour la deuxième tâche Ch. doit retrouver un nombre entre 402 et 513. J'écris ces nombres sur une feuille et dessine une boîte entre les deux. Je lui présente des quantités écrites sur des cartons et je lui demande de les utiliser pour recomposer un nombre entre 402 et 513. Elle devra donc faire l'opération inverse de ce que nous venons d'expérimenter, retrouver un nombre à partir de sa décomposition. En lui donnant les cartons sur lesquels sont écrits les quantités, je lui demande de les lire et de me dire à quel nombre chacun correspond.

Ch. fait correspondre facilement 10 unités, 1 unité, 3 centaines, 3 dizaines au nom du nombre. Toutefois, 51 dizaines est, pour Ch., pareil comme le nombre 51. Elle ne sait pas comment expliquer «çà». Je lui suggère d'imaginer les groupements. Elle les substitue à 51 unités. Elle explique : «Dizaines est plus gros que l'unité».

Devant son blocage je lui demande quel est le moyen qui pourrait l'aider. Elle se propose de prendre les enveloppes brunes. Elle saisit une enveloppe de centaine. Elle sait qu'il y a 10 dizaines à l'intérieur. Je lui demande alors si on peut les laisser dans cette enveloppe (en centaine) et «garder ça en disant 10». Elle croit que non parce que cette enveloppe est une enveloppe de centaine. Je lui demande alors si cette même enveloppe est aussi «10 dizaines». Elle répond affirmativement. Je fais une analogie qui lui permet d'observer la présence de plusieurs mots pour désigner un même objet (fleur-géranium). Elle convient donc que 10 dizaines peut être en même temps 1 centaine. Je poursuis en lui demandant combien cette centaine a d'unités. Elle croit qu'il y en a 10. À l'observation du contenu de la centaine, elle découvre qu'il y a 100 jetons et donc 100 unités dans la centaine. Elle conclut que cette enveloppe a plusieurs noms : 1 centaine, 100 unités et 10 dizaines.

Elle reprend sa centaine, hésite... J'ouvre l'enveloppe. Ch. reconnaît qu'elle contient aussi 10 dizaines et qu'il lui en manque pour en avoir 51. Elle prend une autre enveloppe de centaine, hésite à nouveau. J'ouvre l'enveloppe et elle affirme qu'elle a maintenant 20 dizaines. Elle prend une troisième enveloppe de centaine, qu'elle n'a pas besoin d'ouvrir et qui lui permet d'obtenir 30 dizaines, puis 40 et enfin 50. Elle ajoute un jeton pour compléter la cinquante et unième dizaine. Devant mon interrogation, elle se rend compte qu'elle a confondu la dizaine et l'unité. Ch. remplace le jeton par une enveloppe de 10 unités. À ce moment, elle pense encore que 51 dizaines correspondent au nombre 51.

Je lui dessine un tableau de numération. J'indique les positions des chiffres et je lui propose d'inscrire les chiffres qui correspondent aux positions. Elle écrit 1 dans la colonne des dizaines et le 5 dans la colonne des centaines, en observant les 5 paquets de centaines sur la table. Elle ne peut trouver le nombre à partir de l'écriture 5 1 _ réalisée. Je lui demande si elle a de petites unités qui ne sont pas regroupées en centaine ou en dizaine. Elle sait qu'il n'y en a pas. Je lui demande ce qu'on devra inscrire à la position des unités puisqu'il n'y en a pas. Elle écrit «0». Par la suite elle reconnaît le nombre 510.

Ch. continue en identifiant le nombre qui correspond à 5 centaines, 4 unités et hésite devant 42 dizaines.
-A quoi tu peux penser?
-A des petites enveloppes brunes...
-Pis t'en as combien de petites enveloppes brunes?
-42
-42, est-ce que c'est beaucoup?
-Oui.
-Peux-tu les imaginer dans ta tête pour être capable de trouver ce nouveau nombre? Explique-moi comment tu t'imagines ça?
-Ben je vois...42 petites enveloppes là, ensemble (en dessinant les enveloppes sur la table) et je vois rien à côté pis ça me donne un chiffre qui me vient juste dans ma tête, ça me donne 420.

Elle n'hésite plus pour faire correspondre 5 dizaines à 50, 4 dizaines à 40 et 41 dizaines à 410. Elle explique : «Parce que j'ai repensé à tantôt là, parce que les dizaines sont pas séparées, elles sont toutes ensemble tandis qu'il y a rien à côté, ça fait 410». À nouveau, elle a un moment de réflexion devant 11 unités, puis lui fait correspondre le nombre 11. Par la suite, elle lit et identifie très rapidement le nombre qui correspond à 3 unités, 45 dizaines, 5 unités, 43 dizaines, 0 unité, 12 unités et 40 dizaines, 2 unités.

Je reviens à la consigne de départ qui est de former un nombre entre 402 et 513. Je lui signale qu'elle peut utiliser plus d'un carton à la fois. Elle réfléchit sans regarder les cartons, prend le carton sur lequel est inscrit 5 centaines, puis 5 dizaines en disant...500... Je lui suggère de me dire ce qu'elle peut imaginer dans sa tête. Pour découvrir le nom du nombre, elle prend 5 enveloppes de dizaines. À ce moment seulement elle reconnaît le nombre 550. Elle le délaisse, puisqu'il est jugé trop grand pour répondre à la consigne. Elle fera de même avec 3 centaines et 4 unités, quantités jugées trop petites.

Elle prend 3 dizaines, puis déclare : «Là je sais pas comment faire». Elle veut le mettre avec le 5 dizaines. Elle pense former 35, mais a des doutes devant cette solution. Je lui suggère de retourner avec ses images dans ta tête. «Ça fait 30 plus 50, ben le chiffre là», dit-elle.
-«Ça fait quoi 30+50.
-80».
Pour la première fois Ch. est confrontée à l'addition de deux quantités. Elle hésite à les juxtaposer, mais ne pense pas utiliser seule, les représentations mentales.

Ch. prend ensuite 4 dizaines en y faisant correspondre le nombre 40 qu'elle tente d'ajouter à 80 mentalement. «Plus 40 ça donne... parce que 8+4 ça donne 12 là, faut que je retienne le 2 ben le 1 parce que le 2 il va... ». Je lui propose d'effectuer cette opération sur papier. Elle calcule 80+40=120 et déclare qu'il en manque encore. Elle essaie d'ajouter 45 dizaines. Je lui demande à quel nombre correspond ce carton. Elle délaisse les additions antérieures et conclut que 450 répond à la consigne.

Je lui demande s'il est possible de trouver d'autres nombres. Elle s'arrête, me donne 43 dizaines, 42 dizaines, 51 dizaines. Elle prend ensuite le carton sur lequel est écrit 3 centaines, mais déclare que 300 est trop bas. Je lui demande si elle peut l'additionner avec d'autres. Elle y ajoute 5 dizaines en disant 50, décide de calculer sur la feuille (300+50=350), ajoute 30 (3 dizaines) et continue de calculer (350+30=380). Enfin elle ajoute 40 (4 dizaines), pour trouver le nombre 420.

4. <u>Quatrième expérimentation didactique (comparaison et ordre des nombres)</u>

Ch. sait qu'une dizaine est représentée par une enveloppe brune dans laquelle il y a 10 jetons et que ceux-ci représentent les unités. Elle ajoute que la centaine est «une enveloppe blanche avec (qui contient) 10 enveloppes brunes». Elle généralise cette connaissance en retrouvant les 20 dizaines de 2 enveloppes blanches et les 40 dizaines de 4 enveloppes blanches. Ch. retrouve aussi les 100 unités qui composent 1 centaine et les 500 unités qui sont incluses dans 5 centaines. Ch. se rappelle que 10 enveloppes blanches (centaines) contribuent à former «une grande unité de mille» et explique la composition de cette unité de mille, sachant que la façon de vérifier est le comptage. «C'est à cause que là, ce serait long à compter par exemple». Elle compte par 10 dans sa tête et affirme qu'il y a 100 dizaines dans une unité de mille.

Je poursuis l'expérimentation didactique en lui demandant quel sera le prochain groupement après l'unité de mille. Indécise, elle lance : «Million, je pense». Devant mon refus, elle reprend : «Dizaine de mille». Elle explique facilement par la suite que 10 unités de mille forment 1 dizaine de mille et 10 dizaines de mille 1 centaine de mille.

Suite à ce long préambule, je lui raconte l'histoire où les Anciens ne pouvaient comparer les nombres à partir de leur écriture, puisque six signes permettaient d'écrire le nombre 15 alors qu'avec deux, on écrivait le nombre 2 000 000. Je lui demande quel moyen elle utilise pour comparer des nombres dans la classe. Elle m'explique qu'elle fait des dessins. Je lui propose d'écrire ce moyen sur une feuille et d'ajouter les jetons et les enveloppes. Par la suite je lui dis que nous comparerons des nombres et je lui demande d'observer quel moyen elle utilisera pour les comparer.

Je lui raconte, en lui présentant la première tâche, qu'aux Jeux d'Albertville il y a 9089 spectateurs qui regardent la compétition de ski de fond. Elle lit sur le carton qu'il y en a 1089 pour la compétition de patinage artistique, 100 089 pour le saut à skis et confond 100 089 et 10 089 pour le ski de vitesse.
-«Qu'est-ce qui t'a mêlé ici?
-C'est à cause je l'avais vu tassé et là je pensais qu'il était ensemble ça fait que ça m'a fait ça».
Elle poursuit en expliquant qu'elle les sépare en groupe de 3. Je lui demande de m'indiquer la compétition à laquelle assistent le moins de spectateurs. Elle déclare que l'endroit où il y a le moins de spectateurs est celui où il y en a 9089 : «Parce qu'il est plus petit que 10 089» (en lisant le carton où est inscrit 1089) Je lui demande s'il s'agit du nombre 10 089. Elle se reprend et corrige en disant 1089. Elle m'explique qu'elle pensait que c'était 10 000 à cause du 0 à côté du 1.

Ch. continue en disant que 1089 est plus petit parce qu'en les plaçant «...en 3, pis là de la fin (unité) jusqu'au début (unité de mille)». Je lui demande si elle a pris un autre moyen comme imaginer ou illustrer. Elle explique qu'elle a imaginé. Ce sur quoi j'ai des doutes, puisque très peu de temps s'est écoulé entre la fin de la question et sa réponse. Elle ajoute tout de même que si un sac dans un coin c'est 9000, se reprend et corrige en disant :
-«...neuf sacs, ça fait neuf mille... Là j'avais juste un sac, ça faisait mille. Il y en a plus dans neuf mille que dans mille».

Je poursuis l'entrevue avec une deuxième tâche. Je lui propose de placer les quatre nombres lus (9089, 1089, 10 089 et 100 089) en ordre décroissant. Elle croit d'abord qu'il s'agit de les disposer du plus petit au plus grand. Je l'informe qu'il s'agit plutôt de les placer du plus grand au plus petit et j'ajoute :
-«Comment on pourrait faire pour se rappeler que le mot décroissant veut dire du plus grand au plus petit?

-Ça commence de la fin jusqu'au début parce qu'il est grand, il est trop grand tandis que l'autre croissant, c'est à cause que lui est plus petit, fait que t'as pas besoin de partir au début pis t'en aller jusqu'au... partir à la fin, jusqu'au début parce qu'il est grand».

Devant mon incompréhension, elle prend un papier et un crayon et inscrit 9033, puis continue son explication : «Là, tu pars de la fin jusqu'à ici (en montrant les unités, 3) parce qu'il est trop grand (sous-entendu pour le lire sans séparation) tandis que lui (en montrant le chiffre à la position de mille, 9) est tout seul, il y a juste deux (chiffres) fait qu'il est plus facile à lire».

Je reviens au but de l'activité qui est d'ordonner les nombres. Elle m'explique que le moyen qu'elle vient de décrire est pour lire les nombres. Je lui demande ce qu'elle doit faire pour comparer les nombres. Elle prend 100 089 et ajoute : «100 est plus gros que...que 1000 parce que c'est 100 000». Elle place ensuite 10 089 en disant que le 10 est plus gros que le 9 (9089) et que s'il est plus gros que le 9, il est plus gros que le 1 (dans 1089). Puis elle lit 100 089, 10 089, 9089, 1089.

Je lui propose de comparer deux nombres de 4 chiffres (1598 et 1597), en les écrivant sur un carton et de m'indiquer lequel est le plus petit. Elle pointe 1597 en disant : «97 c'est comme partir du plus petit jusqu'au plus grand tandis que lui (1598), tu pars du plus grand jusqu'au plus petit». Je lui demande alors si elle a regardé les unités pour les comparer. Devant sa réponse affirmative j'ajoute:

-«Tantôt tu avais regardé quoi pour le trouver...?

-Les plus gros chiffres ici (en pointant les unités de mille).

-Pourquoi tu n'as pas eu besoin de regarder les trois derniers chiffres?

-Parce que ça finit toujours par 0, 9, 8».

Je lui propose une quatrième tâche, en écrivant sur une feuille, 908 et 908 unités. Elle rétorque qu'il y en a un qui est plus grand en montrant le nombre 908 parce que l'autre : «...c'est juste 908 unités pis ici c'est 900». Je lui propose à ce moment de comparer soit en illustrant soit en imaginant. Elle choisit d'imaginer.

-«Imagine-toi le nombre 908. Comment il est fait?
-C'est 9 paquets de 100.
-Qu'est-ce qu'il y a dedans les paquets de 100?
-Des paquets de 10.
-Qu'est-ce qu'il y a dedans les paquets de 10?
-Des unités.
-Combien il y a d'unités dans un paquet de 100?
-9...10.
-Combien d'unités, pas de dizaines.
-1
-C'est quoi une unité?
-C'est un jeton
-Combien tu as d'unités, combien tu as de jetons dans un paquet de 100 (en dessinant l'enveloppe dans les airs)
-...100
-Alors dans 9 paquets de 100, tu as combien de jetons?
-900».

Je lui propose de continuer d'imaginer 908. Elle ajoute les 8 unités pour conclure que les deux ensembles sont pareils.
«Parce que lui (908 unités) c'est des unités, pis lui aussi c'est des unités (908), parce que lui (908) pour faire ce chiffre-là, il faut des unités, pis lui (908 unités) il faut des unités».

Nous discutons un moment sur les façons de travailler tantôt mécaniquement, tantôt en imaginant, pour conclure que de travailler de façon mécanique (en ne regardant que les chiffres) peut nous jouer des tours.

Je termine la rencontre en lui demandant si un nombre est plus grand lorsqu'il a 10 dizaines ou 10 centaines. Elle constate que le nombre qui a 10 centaines sera plus grand parce que: ... «100 est plus gros que 10». J'ajoute alors qu'il y a ainsi moins d'unités dans les enveloppes de dizaines. Je continue en disant : «Si ton nombre avait 10 dizaines de mille, est-ce qu'il serait plus grand, plus petit ou égal à celui qui a 10 centaines»? Elle répond : «égal» en regardant l'heure. Je lui propose d'imaginer les enveloppes. Elle se rend compte qu'elle vient de confondre les dizaines de mille et les unités de mille, mais que de toute façon «10 unités de mille est plus gros que 10 centaines». Elle termine en constatant que ça va mieux pour répondre lorsqu'on imagine d'abord.

5. Cinquième expérimentation didactique (l'approximation des nombres)

Un bref retour sur les activités réalisées au cours de la dernière expérimentation didactique permet à Ch. de se rappeler que nous avons parlé d'ordonner des nombres. Elle ne se rappelle pas comment elle s'y prenait mais elle sait que les nombres sont composés d'unités et qu'ainsi 930 et 930 unités sont «pareils». Je lui annonce qu'aujourd'hui on va arrondir des nombres. Elle m'explique le sens qu'elle attribue à arrondir un nombre : «Arrondir...c'est mettons, c'est pareil comme mettons le chiffre là, 900 comme mettons, tu l'arrondies à 100 là, ça veut dire que tu le mets plus petit que...je sais pas vraiment...
-A quelle position il est possible d'arrondir?
-200, à 100, à 300».

Je lui raconte alors mon histoire où il est question de gens qui font des groupements de douze ou des groupements de soixante. Je désire attirer son attention sur le fait que nous arrondissons aux différentes positions. Je lui demande par la suite combien d'objets nous plaçons dans nos groupements. Elle répond : «3» Je lui demande à quoi elle pense pour me dire cela. Elle continue : «...quand t'es rendue à 1230 bien il faut que tu les comptes par 3». Je lui souligne qu'elle réfère ainsi au tableau de numération, servant à placer les chiffres d'un nombre, et que ce n'est pas ce dont je lui parle. Je reprends ma question en lui précisant - : «Comment on regroupe les unités?» Elle sait qu'on regroupe en paquets de 10 et que cela permet de faire ces centaines, des dizaines. Je lui demande alors à quelle position on peut arrondir. Elle répond : «100». Je complète en disant :«À la centaine».

Je révise la fabrication des divers groupements. Elle hésite, sait qu'avec 10 unités elle peut faire un paquet de 10, mais ne pense pas que ce paquet de 10 s'appelle aussi «1» dizaine. Elle l'appelle «10» dizaines. Elle ne songe pas plus à faire la correspondance entre ce paquet de 10 et la position dizaine.

Je lui demande quelle autre position existe dans le tableau de numération. Elle nomme la position mille. Je lui indique ainsi qu'on peut arrondir à l'unité de mille. Elle complète en ajoutant qu'on peut arrondir à la dizaine de mille, à la centaine de mille. Elle ne sait toutefois pas encore à quoi sert arrondir.

Dans une première tâche, je lui propose d'imaginer qu'elle est dans un magasin où elle doit acheter un Nintendo au coût de $149. Je lui donne 5 billets de $10., 3 billets de $100. et 7 billets de $1000. Je lui demande de montrer les billets qu'elle doit remettre à la caissière. Elle s'arrête un moment, puis me montre 1 billet de $100. et 5 billets de $10., en expliquant qu'elle ne pouvait pas avoir 49.

Elle reconnaît qu'elle a arrondi à la dizaine près, mais ne sait toujours pas à quoi sert cette action. Pour elle, arrondir a servi : «À mettre le chiffre plus haut». Je lui indique qu'il lui a permis de donner suffisamment d'argent pour payer.

Je lui propose une deuxième tâche où, en plus d'acheter un Nintendo à $149., elle veut aussi se procurer un système de son au coût de $90. Je lui demande comment elle pourra calculer rapidement ses dépenses avant d'arriver à la caisse. Elle décide d'arrondir le nombre 90, puis de l'additionner à 150 pour trouver 350. En refaisant l'addition toutes les deux (150+100), elle se corrige et trouve le nombre 250.

-A quoi ça peut servir aussi arrondir?

-A vouloir plus payer...

Je lui indique ici qu'arrondir lui a permis de calculer rapidement afin d'estimer combien coûterait ses articles.

Je lui propose de retourner une dernière fois dans son magasin où elle veut acheter un ordinateur avec une imprimante, le tout pour $5064. Elle réfléchit, puis me tend $5100. Elle sait qu'elle vient d'arrondir à la centaine. Je lui demande si elle peut arrondir à une autre position. Elle est indécise puis, à la suite de ma suggestion, ose croire qu'elle peut arrondir à la position des dizaines. Je lui demande quel nombre elle trouverait si elle arrondissait à cette position. Devant son indécision, je lui suggère de penser à ce qu'elle donnerait à la caissière si elle arrondissait à la dizaine. Elle inscrit 6000 sur sa feuille et m'indique qu'elle vient d'arrondir à la position des centaines. Je lui propose donc de me donner $6000., comme si j'étais la caissière. Elle remarque qu'elle ne m'a donné que des billets de 1000, ce qui lui permet de conclure qu'elle vient d'arrondir à la position des «1000». Je précise qu'elle a arrondi à la position des unités de mille.

Je lui demande ce qu'elle a fait lorsqu'elle a arrondi, plus tôt, à la position des unités de mille ou des centaines. Elle explique qu'elle donnait des billets de 1000 ou de 100. Elle conclut que si elle veut arrondir à la position des dizaines, elle doit utiliser des billets de 10. Elle écrit 5 070 sur sa feuille.

Je lui demande si elle peut arrondir à une autre dizaine. Elle inscrit sur sa feuille 5060, mais explique qu'elle ne peut donner ce montant à la caissière puisque c'est trop peu. Je lui demande quelle est la dizaine la plus près de 5064. Elle sait que 5060 est la dizaine la plus près et que 5070 est la plus loin.

Nous entamons une discussion qui permet de faire la distinction entre ce qui est fait en classe et ce qui est fait dans la vie courante. Elle croyait que dans la classe, on arrondissait à la position la plus loin. Nous observons que souvent dans la classe, il est demandé d'arrondir à la position la plus près, alors que les besoins de la vie courante nous demandent d'arrondir à la position la plus loin.

Je lui propose d'arrondir un dernier nombre pour vérifier si elle a bien compris. Je lui demande si elle est en forme puisqu'elle semble fatiguée. Elle raconte qu'elle est un peu fatiguée, qu'elle s'est couchée tard la veille. Une discussion s'amorce sur les conséquences possibles de sa fatigue et sur ce qu'elle peut faire pour y remédier.

Je lui demande d'écrire le nombre 1228 et de choisir la position où elle veut arrondir. Elle écrit immédiatement 1220 sur sa feuille. Elle considère que 1230 est la dizaine la plus près et que 1220 est la plus loin.

Je lui demande si elle peut arrondir à une autre position. Devant son refus, je lui demande à quelle position elle a arrondi les autres nombres auparavant. Elle répond : «30...70, 60». Je précise qu'elle vient d'arrondir à la dizaine et elle reconnaît qu'elle peut le faire aussi à la centaine et à l'unité de mille. Elle inscrit sur sa feuille 1000 et déclare qu'elle a arrondi à l'unité de mille la plus près. Je lui demande d'arrondir à l'unité de mille la plus loin. Elle écrit 1200.

-«Qu'est-ce que tu prends quand tu arrondis à la dizaine dans ton paquet (en montrant l'argent de monopoly)?
-Un 10.
-Qu'est-ce que tu prends quand tu arrondis à la centaine?
-Les 1000...les 100.
-Qu'est-ce que tu vas prendre quand tu vas arrondir à l'unité de mille?
-Les 1000».

Elle observe, dans le cas présent, qu'elle vient d'utiliser des billets de 100 et qu'ainsi elle n'a pas répondu à sa consigne. Elle s'arrête, réfléchit, puis inscrit 2000 en disant : «J'ai pensé que le 2 est plus loin que 1000 ...quand je prends ici 28 là, il est plus proche de 1000 que de 2000». Je lui demande si elle peut prendre le 228 pour faire cette comparaison. Elle acquiesce.

Je lui demande à nouveau si elle peut arrondir à une autre position, en pensant aux billets de monopoly que nous avons déjà utilisés. Elle hésite, inscrit 1100 sur sa feuille, dit qu'il y a 200... et reconnaît avoir arrondi à la centaine.
-Est-ce que la caissière en a assez de 1100?
Elle rature 1100, puis écrit 1300 en sachant que c'est un montant suffisant pour la caissière. Elle sait qu'il s'agit de la centaine la plus loin. À partir de ce moment, elle affirme que 1200 est la centaine la plus près. Elle explique : «28 à 100 c'est plus loin que 300, que mettons ici c'est plus loin que 100, ça va être 8, tandis que si tu baisses ça va être plus proche de 1 que de 100». Elle m'indique que ce qui l'a mêlée c'est qu'elle a considérée 1228 comme étant 1128.

Une dernière révision sur le sens de cette activité indique qu'elle sait que arrondir ça sert à savoir combien d'argent donner dans un magasin. À la toute fin elle ajoute : «Ça sert à avoir le montant exact». J'ajouterai que cela facilitera ses estimations.

Je lui dis que les billets de monopoly que nous avons utilisés pourront l'aider lorsqu'elle aura à arrondir dans la classe. Nous inscrivons, comme après chacune des rencontres, les thèmes qui ont été vus.

6. <u>Sixième expérimentation didactique (le réseau sémantique)</u>

Je commence en demandant à Ch. d'écrire sur les petits cartons les mots ou les images qui lui viennent à l'esprit quand elle pense aux nombres. Je lui parle de ce dont elle peut se servir (ce qu'on a utilisé ici ou dans la classe). Lentement elle énumère les unités, dizaines, centaines, mille.
-«Qu'est-ce qu'il y a dans les mille?
- Des unités de mille, dizaines de mille, centaines de mille...
-Avec quoi tu écris des nombres?
-Des jetons.
-Tu écris tes nombres avec des jetons? Ça représente des jetons mais avec quoi tu écris tes nombres?
- Les enveloppes, les jetons, les paquets...»
Elle ajoute ensuite les quatre opérations (+ - x ÷).

Tous ses cartons sont superposés les uns au-dessus des autres, selon leur ordre d'apparition. Je lui parle ensuite des poupées russes qui contiennent toujours une poupée plus petite. Elle connaît ces poupées. Je lui propose donc de placer les mots afin que je puisse voir «lesquels contiennent d'autres mots, lesquels de ces mots-là vont ensemble».

Elle place les signes des opérations en colonne, puis les positions des chiffres dans une deuxième colonne, terminant cette dernière par le mot «enveloppe». Elle place le mot «paquet» vis-à-vis le mot «unité» et enfin le mot jeton vis-à vis le mot «paquet». Cela donne le tableau ci-dessous.

-	unité	paquet	jeton
	dizaine		
x	centaine		
	unité de mille		
	dizaine de mille		
	centaine de mille		
÷	enveloppe		

Ch. explique qu'elle a mis «-» avec «unité» : «Parce que moins, unités tu sais, il y en a pas beaucoup d'unités, c'est comme un moins». Je lui demande si elle peut soustraire autre chose que des unités lorsqu'elle fait des soustractions. Elle acquiesce en énumérant les centaines, les dizaines, les unités de mille, les dizaines de mille, les centaines de mille. Maintenant qu'elle réalise qu'on peut soustraire à toutes les unités de mesure de quantité, elle avoue ne pas trop savoir comment disposer son tableau. Je lui demande si elle pourrait placer «-» à côté du mot «nombre». Elle accepte. Cela lui donne des idées pour l'addition qu'elle décide de déplacer près du mot «nombre». elle explique : «...le plus, ça me donne des dizaines, mais parce que un plus, tu peux faire un plus avec des centaines et les unités de mille et les dizaines de mille». Elle ajoute qu'avec un «-» les chiffres sont plus petits.

J'utiliserai ce prétexte pour lui rappeler que les nombres sont composés de chiffres et elle ajoutera un carton sur lequel elle écrit le mot chiffre. Je profite de l'occasion pour lui demander si 2 154 000 - 1 203 000 donne comme résultat un gros nombre. Elle convient que le nombre sera grand et qu'on peut obtenir de grands nombres autant avec les soustractions qu'avec les additions.

Ch. décide de déplacer le «x» (fois) pour le mettre à côté du «+» en disant qu'on «peut faire des fois avec les unités, les dizaines, les centaines...» Elle déplace ensuite le «÷» à côté du «x» parce qu'il vient après mais explique : «Tu multiplies du plus petit jusqu'au plus gros et là (en montrant ÷) du plus gros jusqu'au plus petit». Je lui fais observer qu'elle me parle d'ordonner des nombres et elle inscrit «ordonne» sur un nouveau carton qu'elle ne place pas immédiatement. Ch. ne voit pas de lien entre la multiplication et la division ni entre l'addition et la soustraction. Je lui raconte une histoire.

-«Quand tu dis le matin, je suis arrivée à l'école avec 9 billes. À la récréation, j'en ai perdu 5, à la fin de la journée il m'en restait 4. Dans ce temps-là, tu fais quelle opération?
-Un plus et un moins...un moins je veux dire.
-Pourquoi?
-Parce que tu en avais 9 au début, et après tu t'es ramassée avec moins parce que t'en as perdues.
-Si tu prenais ta journée à l'envers, avec ta soirée, serais-tu capable de deviner combien tu avais de billes au début de la journée? À la fin de la journée, tu en avais 4 et tu en as perdu 5 dans la journée. Es-tu capable de savoir combien il y en avait dans la journée, au début?
Oui.
-Combien?
-9
-Comment tu as fait?
-J'ai fait un plus.
Est-ce que tu vois un lien qui pourrait y avoir entre le moins et le plus?
-Oui
-Ça serait quoi?
-Ben c'est que, tu sais que t'as...mettons que tu te rends compte à la fin de la soirée que t'as rien que 4 billes, là tu comptes les autres que t'avais avant et tu dis que tu en a perdu 5. Là tu as fait un plus et là bien ensemble, tu t'es dit qu'il y en avait 9.
-Alors c'est quoi le lien qu'il y a entre le moins et le plus?

-Parce que ça parle. Tu sais je veux dire ça fait comme un moins au début parce que tu en as perdu et après tu fais un plus. Je ne sais pas expliquer çà. Nous laissons tomber cet aspect pour le moment.

Elle explique ensuite que le mot «paquet» se place à côté des unités parce qu'avec les unités on fait des paquets, ces derniers pouvant s'appeler dizaines, centaines... Elle tente de placer le mot «paquet» à côté du mot nombre, parce qu'un nombre est fait avec des paquets. Je lui suggère plutôt de le placer près des termes énumérés plus tôt. Nous convenons toutes deux qu'ainsi nous saurons que les dizaines, les centaines... sont des sortes de paquets.

Le terme «enveloppe» est d'abord déplacé à côté du mot «dizaine», puis au-dessus du mot «jeton» parce que : «Des fois on a des enveloppes avec des jetons». Elle déplace ensuite le mot «jeton» près du mot «unités», puisque les jetons sont des unités. Elle tente de replacer le mot «paquet» près de jeton. Je lui demande si les enveloppes et les paquets veulent dire la même chose. Elle est d'accord. Elle place donc paquet et enveloppe vis-à-vis et au centre dispose les sortes de paquets possibles (dizaines, centaines...).

Ch. ajoute le mot «chiffre» sous le mot «unité», en expliquant que l'unité est un chiffre. Je lui demande si la dizaine s'écrit aussi avec un chiffre. Elle tente alors de placer le mot chiffre avec le mot «enveloppe», puisque «on fait des paquets avec des paquets de 3 chiffres». Je demande à Ch. si ce n'est pas plutôt avec les jetons qu'on fait des paquets. Elle en convient et ajoute qu'avec des chiffres on fait des nombres. Elle décide donc de placer le mot «chiffre» à côté du mot «nombre» et d'ajouter le mot «écrit» sur un carton qu'elle place, avec le mot «ordonne», à côté du mot «chiffre».

Devant ma suggestion, Ch. ajoute le mot «arrondir», puis «position» sur un carton et décide de placer le premier en-dessous du mot «nombre» et le deuxième à côté du mot «chiffre». Le tableau s'est transformé au cours de notre discussion et il devenu celui-ci.

```
x + - nombres  chiffres  position  écrit   ordonne
÷   arrondir      unité                       jeton
    paquet                  enveloppe
               dizaine
               centaine
               unité de mille
               dizaine de mille
               centaine de mille
```

Je lui propose maintenant de me parler de tout le tableau en partant du mot nombre. «Les nombres sont des chiffres...on les écrit...il y a la position des chiffres...ça va nous aider à ordonner, à arrondir, à faire des moins, des plus, des fois, à diviser».

F. <u>Évaluation finale</u>

<u>Habiletés de comptage</u>

Ch. débute l'entrevue fatiguée. Elle dit s'être couchée à dix heures la veille. Le comptage par dix et par cent n'est pas aisé. Si la régularité du comptage oral est présent à l'intérieur d'une même centaine, elle hésite lorsqu'elle doit effectuer un changement à la centaine et à l'unité de mille (...1095, 1105, non...2005). À titre d'exemple, elle explique : «Après ça (1095 en comptant par dix) c'est mille, bien c'est encore deux mille, je veux dire mettons c'est mille, je suis rendue à quatre-vingt-cinq, si je continue encore par cent, ça va donner deux mille».

À différents moments de l'entrevue, Ch. a eu le loisir d'utiliser le comptage des nombres plus grands que mille et à maintes reprises, lorsqu'elle compte des anneaux de l'abaque ou les jetons, elle éprouve des difficultés à conserver le rythme. Les occasions qui pourraient s'offrir d'utiliser le double-comptage sont remplacées au profit de la soustraction.

<u>Palier logico-physique</u>

Ch. connaît le nom des différents groupements auxquels elle attribue la commodité du comptage. Elle tente d'illustrer le nombre 2220 avec les enveloppes et les jetons. Réalisant, après avoir fabriqué une unité de mille, l'ampleur de la tâche, elle accepte ma proposition d'illustrer ce nombre sur un abaque. Je lui demande si cette représentation de 2220 est la même chose que celle qui aurait été réalisée avec 2220 jetons. Elle approuve.

Je remplace l'anneau sur la tige des unités de mille par dix anneaux sur la tige des centaines et lui demande si elle a encore le nombre 2220. Elle approuve à nouveau, mais elle ne sait pas expliquer comment cela est possible. Elle commence à compter, mais éprouve des difficultés à adapter le comptage aux changements de groupements (de l'unité de mille à la centaine, de la centaine à la dizaine). Je tente de lui donner des indices en lui demandant si je peux prendre un anneau des centaines pour le placer sur la tige des unités des mille. Elle acquiesce, puis hésite et ce, même si elle vient à l'instant de m'expliquer qu'on doit prendre dix enveloppes pour construire une unité de mille. Elle semble construire une règle différente pour l'abaque, règle induite par le matériel, ou un anneau change de valeur selon sa position. Il est vrai qu'elle peut mettre un anneau sur n'importe quelle tige mais dans une situation d'échange ou de transformation, la règle de dix s'impose. Ch. ne semble pas avoir perçu ce changement de contexte.

Je lui pose la même question en utilisant cette fois, les enveloppes et les jetons. Ici, elle admet immédiatement l'invariance en expliquant : «Même si tu en as pas un paquet, tu l'as pareil parce que t'as juste enlevé les enveloppes du paquet. C'est encore pareil». Je retourne à l'abaque avec la même question. À ce moment, elle explique qu'elle a toujours 2220 : «Parce que t'as juste emprunté une dizaine (en parlant de l'unité de mille), c'est comme ici (en montrant les enveloppes d'unités de mille). Ici tu fais juste enlever l'enveloppe, tu l'as encore tandis que lui tu fais juste enlever une dizaine, tu l'as encore pareil». Elle appelle l'unité de mille, une dizaine. Lapsus ou représentation selon laquelle tous les groupements sont des dizaines? Lorsqu'elle fait la comparaison entre les deux matériels (l'abaque et les enveloppes), il est intéressant de constater qu'elle utilise le terme «emprunté» dans le cas des enveloppes alors qu'elle privilégie «enlevé» dans le cas de l'abaque.

Elle explique sa confusion: «Moi je pensais que c'était ici (en montrant la tige des unités de mille) comme dix et moi je pensais qu'il pouvait pas aller ici (en montrant la tige de la centaine). Je pensais que c'était pareil tandis que tu m'as montré d'enlever les enveloppes là et tu m'as dit si j'ai encore 2220. Je <u>l'ai vu</u> parce que tu fais juste enlever l'enveloppe et tu gardes les petites enveloppes et ça donne la même affaire». Nous pouvons donc considérer que Ch. possède une invariance de la quantité lorsqu'elle peut être représenté par un matériel où il y a une correspondance bi-univoque entre le comptage et la représentation d'une quantité, mais ne la reconnaît pas encore lorsqu'elle utilise un matériel où un même anneau peut vouloir dire dizaine ou centaine selon la position qu'il occupe et selon le contexte dans lequel le problème se pose.

Je lui présente le problème des trois personnes qui ont respectivement trois paquets de cent macarons, deux paquets de cents plus cent macarons et enfin trois cents macarons. Elle constate immédiatement que les trois personnes ont un nombre identique de macarons puisque chacune en a trois cents.

Palier logico-mathématique

La lecture de nombres ne pose plus de problème. Ch. est attentive aux positions des chiffres, à leur organisation dans le nombre. Elle se corrige sans aide lors de sa confusion entre 1188 et 1198 puis entre 908 et 9008, en expliquant que les trois chiffres «tassés» lui ont fait pensé qu'il y avait un autre zéro.

L'écriture des nombres dictés est réalisée aussi facilement que lors de la première entrevue. De plus, lorsqu'il lui faut retrouver, parmi les cartes nombres proposées, les décompositions possibles du nombre 709, elle choisit 700 et 9 unités, 700 unités et 9, 7x100 et 9. Elle hésite devant 7 centaines et 10 dizaines. Elle croit d'abord qu'il s'agit ici de 70 en disant : «7 centaines...c'est plus...10 dizaines...dix plus sept, ça donne 17...non...parce que ça c'est une centaine pas une dizaine...7 fois 10». C'est en prenant les enveloppes qui correspondent aux centaines et aux dizaines, sur mon invitation, qu'elle retrouvera le nombre 800. Ces manipulations lui permettent de sélectionner 7 centaines avec 9 unités, puis 70 dizaines plus 10 dizaines (qu'elle additionne en trouvant 80 dizaines, mais qu'elle ne peut faire correspondre au nombre 800 sans les enveloppes de centaines). Avec le soutien de questions et de manipulations, elle utilise les cartes 70 dizaines et 9 unités. Ch. semble chercher un sens, ce qui est nouveau, mais les décompositions semblent encore difficiles lorsqu'il s'agit de compositions.

L'ordre décroissant a été réalisé facilement en disposant les cartes-nombres du plus grand nombre au plus petit. Le sens du terme «décroissant» pose encore problème mais lorsque cette notion est clarifiée, Ch. explique sa procédure. «Il y en aurait beaucoup là et à chaque fois tu descends, tu en enlèves un (paquet d'enveloppes)».

La valeur relative des chiffres dans un nombre est tributaire de sa perception du zéro et de sa représentation des chiffres dans le nombre. Le zéro est toujours considéré comme le représentant d'une position (unité de mille). Il est encore difficile pour Ch. de concevoir que les unités de mille sont présentes, mais à une autre position (dans les dizaines de mille). Pour arriver à cette constatation, nous devons remonter la filière de la construction de chacun des groupements.

Le nombre 2 220 est bien lu et pour Ch. chacun des 2 qui composent ce nombre a un sens différent parce que le 2 des unités de mille «est plus gros» que le 2 des centaines. Son explication concorde ici avec le cas qui nous intéresse. Toutefois, ce nombre ne contient, selon elle, que 20 dizaines : «Parce que là (en montrant la position des dizaines), c'est les dizaines et ici c'est deux, et deux bien c'est une dizaine fait que deux, il peut pas être tout seul parce qu'il y a zéro, ça fait qu'ensemble ça fait vingt». De nouveau, nous reprenons une discussion sur la filière qui permet la construction de chacun des groupements en prenant appui constamment sur les enveloppes qui correspondent à ces groupements. À un moment, elle pense qu'il y a trois dizaines puisqu'il y a des dizaines aux positions des dizaines, des centaines et des unités de mille. Elle arrive enfin à considérer qu'il faut compter les dizaines présentes dans tous les groupements. Ce sont ces manipulations qui favorisent sa correction lorsqu'elle m'indique d'abord que dans le nombre 2 220 il y a zéro unité. Par la suite, elle sait que ce nombre contient 2220 unités. Les mêmes questions posées à propos du nombre 202 démontrent que Ch. ne comprend toujours pas ce critère et que le zéro est pour elle un obstacle. Ainsi, dans 202 il y a 22 dizaines : «Parce que le zéro, il y en a pas, parce que les unités, tu fais ça avec les dizaines et les centaines. Ca fait que là j'ai ôté de zéro, ça faisait 22». Par la suite, elle pense qu'il y a 22 unités, se reprend pour en trouver 202 et explique :«...il y a le 0 là, ben ca c'est toutes des unités pis c'est fait avec des dizaines pis des centaines»

Elle compare ensuite 20 unités et 2 dizaines en disant de 20 unités qu'il est plus grand. Elle modifie sa conception lorsqu'elle doit l'expliquer, en rappelant que 930 et 930 unités en disant étaient équivalents. Elle considère ensuite 20 dizaines équivalent à 20 unités. Elle ne peut représenter 20 dizaines, le substituant aux 2 dizaines du problème précédent et le trouve équivalent à 20 unités. De même, 20 dizaines et 2 centaines ne pourront être comparées. Elle modifie la consigne en parlant de 2 dizaines et de 2 centaines et considère que 2 centaines est plus gros. Ch. semble commencer à tenir compte des unités de mesure de quantité. Ainsi les unités sont plus petites que les dizaines, les dizaines plus petites que les centaines. À d'autres moments, elle considère uniquement le mot-nombre (20 dizaines=20 unités) ou modifie la consigne pour la rendre conforme à du connu. Elle ne cherche pas à trouver un point commun, la pluralité, étape intermédiaire qui lui permettrait ensuite de les comparer.

Je lui demande d'enlever 20 au nombre 2234. Elle réfléchit longuement, cherche à enlever 20 au 34 de 2234 et trouve 220. Elle a plutôt fait 2220-20=220, substituant 2220 du problème précédent à 2234 et laissant tomber le 0 des unités. Elle n'a pas cherché à utiliser du matériel comme les enveloppes et les jetons, elle a tenté d'opérer mentalement. Je lui propose de vérifier. Elle utilise l'abaque et choisit de «marquer le chiffre avant, ça va aller mieux». Le matériel semble l'inviter à utiliser des étapes, d'abord illustrer, puis opérer. Elle trouve le nombre 2214. Elle m'explique qu'auparavant : «Ça fait comme si mettons j'aurais eu 20 là (en montrant 34) et je l'enlèverais le 20 et la j'ai pensé que ça ferait 0».

La question portant sur la notion d'arrondir ne semble pas poser de problème. Elle sait arrondir à la centaine, à l'unité de mille et explique que pour arrondir à la centaine le nombre 3 105 : «Je me dis que le 5, il est proche de 100 fait que...il est loin de 200».

APPENDICE 5

Étude de cas de V.

I. Évaluation initiale

Habiletés de comptage

V. compte par 1 et par 10 des nombres plus grands que 1000 sans problème. Elle soustrait mentalement 15-8 pour trouver le nombre de pas entre deux nombres, plutôt que d'utiliser un double-comptage.

Palier logico-physique

V. retrouve les objets groupés dans la vie courante (les sortes de pains, de biscuits, de crème glacée, boîte de conserve) et leur attribue une fonction de transport. «Ça sert quand tu veux pas les amener un par un».

Elle illustre le nombre 202 en utilisant dix enveloppes de dizaines qu'elle place dans une enveloppe de centaine, ajoute une autre enveloppe de centaine, puis deux enveloppes de dizaines. Une association entre les jetons et les unités est nécessaire pour corriger l'illustration des 2 unités. L'invariance de la quantité n'est pas reconnue. Elle croit que les dizaines qui ne sont plus dans l'enveloppe de centaines, qu'elles sont enlevées. «Il manque une centaine...elle n'est pas dedans je l'ai enlevé une enveloppe, ça me fait 102». Je souligne la différence entre défaire et enlever, ce qui permet à V. de reconnaître l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation. L'équivalence entre l'avoir de trois bonhommes (300 macarons, 2 paquets de cent macarons plus 100 macarons et enfin 3 paquets de 100 macarons) n'est pas reconnue. Pour V. le troisième bonhomme est le plus riche, parce qu'il a trois paquets de 100 jetons. La recherche de la pluralité de chacun des ensembles amène la reconnaissance de la relation d'équivalence. V. explique ensuite que dans un premier temps, trois paquets de cent faisait 900.

Palier logico-mathématique

V. explique qu'elle a de la difficulté avec la lecture les nombres de quatre chiffres. Elle hésite devant 10 198 expliquant que le 0 la mêle. Elle ne sait pas ce qu'il signifie. Elle lit le nombre 1 002 249 sans problème, mais ne peut reconnaître ce qui l'a aidé à lire. Par la suite, les nombres sont ordonnés et écrits facilement.

V. accorde une valeur différente aux chiffres 2 du nombre 2 202. Pour retrouver le nombre de centaines contenues dans le nombre, elle regarde d'abord les chiffres de cette position, puis elle ajoute : «je me rappelle Céline avait dit quand c'est le chiffre des centaines tu fais ça pis ça te donne ton chiffre. Parce que tu coupes comme ça, 22¦02 ça fait ton chiffre». Elle retrouve les 2202 unités en utilisant la même procédure.

V. enlève ensuite 20 au nombre 202 en défaisant deux enveloppes de dizaines pour mettre les 20 jetons de côté. Elle dit qu'il reste 102 jetons. Devant ma répétition, elle compte, puis trouve 182 jetons. Elle explique qu'elle croyait que les enveloppes étaient des unités.

Elle considère que la quantité 20 unités est plus petite que 2 dizaines. L'écriture de ces quantités amène une nouvelle réflexion, puis l'affirmation selon laquelle ces deux quantités sont égales. «2 dizaines, tu sais le zéro est pas là, mais c'est comme s'il serait là pis le 20 unités ça donne pareil ça, tu marques le

2 pis le zéro ça fait l'unité». Toutefois 20 dizaines est d'abord vu comme équivalent à 20 unités «le 20 des dizaines ça fait tout le chiffre, pis quand tu fais 20 unités ça fait rien que...mais non, ça fait le chiffre aussi...non il est plus petit...je le sais pas». La quantité 20 dizaines est reconnue équivalente à 2 centaines «parce que 20 dizaines quand tu le mets unités dizaine centaine, ça fait, mais ça dépend de ton chiffre en avant là pis le 2 centaines aussi quand tu le mets dizaines, centaines je peux pas le dire parce que j'ai pas mon chiffre».

Enfin, V. considère qu'elle arrondit le nombre 3105 à la centaine en donnant 3000. Elle explique qu'elle arrondit le 1.

Les décompositions proposées sont multiples (7x100+9, 700+9, 700 unités+9, 7x100+9 unités). Elle ne mentionne pas 70 dizaines, même si le début de l'activité lui a permis de le lire. Elle reconnaît que l'opération d'addition permet de réunir ces quantités seulement lorsque je lui demande de choisir parmi les quatre opérations. Pour V. cette évaluation est trop facile. Je dois toutefois souligner que je ne lui ai pas dit où étaient ses erreurs.

1. Première expérimentation didactique (la lecture de nombres)

Le but de l'entrevue est de donner à V. des moyens qui facilite sa lecture de nombre. Elle reconnaît sa difficulté avec les nombres de plusieurs chiffres. L'histoire racontée amène la prise de conscience du nombre limité de chiffres, servant à écrire tous les nombres.

L'entrevue débute par une précision sur le sens des termes chiffres et nombres. C'est en écrivant les différents chiffres que V. prend conscience qu'il n'y en a que 10 qui servent à écrire tous les nombres. J'explore ensuite sa connaissance de leur organisation dans un nombre. Elle les groupe spontanément par trois et explique comment elle a écrit 12 670. «J'ai commencé par la dizaine de mille, j'ai mis 12 mille, j'ai pris 1 mille j'ai mis 12 comme le chiffre 12, pis j'ai pas mis le 0, parce que j'ai d'autres chiffres après, ça ferait trop long, pis là j'ai mis le 600 après ça j'ai mis le 70...J'ai mis un espace». Elle généralise ce qui existait à l'ordre inférieur. V. croit ensuite que le nombre est autre si son organisation spatiale est différente. «Tout collé, tu pourrais pas dire 12 670...ça ferait rien que des chiffres groupés». Le dialogue l'invite à exprimer sa difficulté à lire des nombres «collés» et à reconnaître l'utilité de mettre des espaces à tous les 3 chiffres.

La lecture de nombres de quatre et cinq chiffres ne pose pas de problème. C'est lorsque je lui demande d'écrire un nombre de six chiffres que les difficultés surgissent. Elle écrit sans espace 200040, le lit comme étant vingt millions quarante et croit à nouveau que ce nombre change lorsqu'on y met des espaces, puisque la lecture en est différente (deux cent mille quarante). L'intervention tente de lui faire prendre conscience du rôle des espaces.
- «Est-ce que c'est à cause de l'espace que ça change de nom ou si c'est parce que tu sais mieux le lire?
- C'est l'espace...Je sais mieux le lire».

Son approbation semble provenir davantage du désir de me faire plaisir que de celui de comprendre. Elle écrit ensuite le nombre 542 00031. Nous nous attarderons pour identifier les positions, les ordres, la régularité dans le nom des positions ainsi que la position de l'espace (après la centaine). L'observation de différents nombres lui permet de constater facilement que l'espace est toujours après la centaine. Le nom des positions de l'ordre million, ne sera identifié qu'après avoir comparé les deux premiers ordres (unité et mille). Par la suite, V. peut transférer ces régularités au nombre 54 200 031 pour le lire d'abord avec hésitation puis, une fois identifié le 200 000, correctement.

V. réutilise ces procédures (balayer de droite à gauche, identifier les ordres) pour lire le nombre 910 121 000. Toutefois, elle confond 91 000 000 et 910 000 000. Elle n'a pas identifié les positions lors de ses procédures. Ma relecture du nombre est suffisante pour qu'elle apporte la correction nécessaire.

Je lui propose ensuite de lire le nombre 23 040 100, puis 23040100. Elle affirme que le deuxième s'appellerait «pareil» mais qu'elle aurait de la difficulté à le lire. La lecture de nombres écrits en lettres ne pose pas de problème. V. les lit et les transcrit facilement.

2. Deuxième expérimentation didactique (valeur relative des chiffres dans le nombre)

Cette deuxième entrevue touche la valeur relative à accorder aux chiffres d'un nombre. Le questionnement sur le nom des différents groupements a permis d'observer le manque de précision dans le vocabulaire utilisé et la correspondance entre les unités et le chiffre 3 du nombre 2893, puis avec les jetons. De nouveaux objets ont pu être qualifiés d'unités (cubes, anneaux). V. la fabrication des dizaines et des centaines, alors que l'unité de mille doit être construite. Un blocage apparaît à ce moment puisque pour V., 10 centaines font 100 ou 10 centaines. Prévoir la fabrication de 2 unités de mille est réalisée correctement, mais prévoir celle de 5 unités de mille laisse émerger une confusion entre 50 centaines et 50 centaines de mille. Une précision est apportée à propos des noms des différents groupements (dizaines, centaines, unités de mille) et de leur illustration (différentes grandeurs d'enveloppes).

La première tâche lui permet de placer les cartons sur lesquels sont inscrits 5, 3, 5 et 1, pour former le nombre 5 531. V. croit qu'il s'agit du nombre le plus grand qu'il lui soit possible de former. «...J'ai mis un 5 là (position des unités de mille), ben il y a deux 5, il y en a pas plus haut, fait que tu mets les 5 en premier...ensuite de ça, tu mets l'autre plus haut, ben le 3, pis après ça tu mets le 1». L'ajout du 0 est immédiatement placé à la position des unités de mille. Malgré la présence de l'espace pour faciliter la lecture du nombre, V. commence en disant : «cinq millions...». C'est la révision des différents ordres que je lui propose, qui favorise une correction de cette lecture. Pour V. 50 531 est le nombre le plus grand qu'il est possible de former parce que : «Tu mets un 0, ça va faire ben 50, mettons 60 si tu mets un 5 pis un 0, ça fera pas la même affaire». La manipulation effectuée pendant l'explication amène la construction d'un autre nombre (55 031), la comparaison avec 50 531, puis le déplacement du 0 aux autres positions afin de former d'autres nombres. Elle forme 550 31. Nous revenons sur les procédures de la semaine précédente, puis elle propose 55 130, puis 55 310

Pour V. le chiffre 0 dans le nombre 55 310 : «C'est le premier chiffre le 0, (la position des unités représente) celle de droite». Je l'invite à faire la correspondance entre les groupements et les unités sur lesquels nous nous sommes mis d'accord au début de l'entrevue. Cela favorise la comparaison de ces unités de mesure de quantité et le choix de l'endroit «où il en manque le plus».

Un blocage survient lorsqu'elle doit imaginer la dizaine de mille. Ayant imaginé, sans la réaliser, la fabrication de l'unité de mille, il est trop difficile de prévoir la fabrication des dizaines de mille. C'est à la suite de la fabrication de l'unité de mille, qu'elle peut prévoir la dizaine de mille. En comptant 1000 par 1000 les différentes unités de mille qui s'additionne les unes après les autres, elle passe de 9 000, en faisant correspondre à 9 enveloppes de mille, à 20 000. Elle explique : «Parce que je pensais qu'il fallait à 9 là, pas dire 10, pis sauter à 2000». D'où lui vient cette règle, y a-t-il dans son affirmation un lapsus? Mystère et boule de gomme... Je devrai choisir ce sur quoi je m'arrête, sinon je ferai ployer V. sous le nombre de questions. Ce qu'elle retient de cette manipulation? Que pour se dépanner devant la dizaine de mille, elle pourra penser à grouper les chiffres par 3 (unité, dizaine, centaine). Un retour aux manipulations est nécessaire pour lui remémorer le contenu des unités de mesure de quantité.

Avant de passer à la deuxième tâche, je lui demande de prévoir la position du 0, en sachant qu'elle doit encore former le nombre le plus grand possible. Elle identifie la position des unités de mille «le deuxième», puis forme 96 420 qu'elle lit correctement. Elle reconnaît que le 0 est à la même position, mais ne peut y trouver une raison.

Une troisième tâche est proposée. Le nombre 6420 est illustré d'abord avec des enveloppes et des jetons, puis sur l'abaque. Le temps requis pour construire six enveloppes de mille étant considéré trop long. V. identifie une couleur pour chacune des positions. Je lui demande d'enlever 30. Elle enlève un anneau de la tige des centaines : «parce que ça fait 32 (6<u>32</u>0)», explique-t-elle. Pour elle, on ne peut pas enlever d'unités, puisqu'il n'y en a pas. Elle ne voit pas de moyen lui permettant de retirer 30 autrement. Elle essaie d'ajouter un anneau rouge (dizaine) en expliquant qu'ainsi, elle pourrait en enlever 3.

Je l'invite à penser à ce qu'est une dizaine. Elle explique que c'est «les rouges». Une discussion permet un retour sur la fabrication de dizaines et de centaines avec les enveloppes, sur leurs contenus et invite V. à transformer avant de chercher à enlever. Elle explique d'abord qu'elle prend un anneau des centaines pour le placer sur l'anneau des dizaines. À nouveau V. cherche à «réagir», au sens où elle ne conçoit pas d'étapes intermédiaires facilitant la solution du problème. L'enveloppe de centaine devant elle, l'amène à observer les 10 dizaines qui y sont contenus. Elle tente de mettre immédiatement 8 anneaux sur la tige des dizaines, ayant déjà retiré un certain nombre de dizaines. Je la ramène au contenu de la centaine, à sa transformation en dizaines, puis au retrait des 3 dizaines. Le nombre obtenu (6 390) est lu successivement 6 036 puis 3000, 6 036, 6 305, 3000.

Elle identifie enfin le nombre 6 309. L'écriture de ce nombre sur une feuille, confirme que c'est bien ce qu'elle a voulu dire. La correspondance entre le nombre d'anneau sur les tiges et les chiffres inscrits sur sa feuille m'indique qu'elle a inversé le 9 et le 0 intentionnellement. Une mise en correspondance entre les positions des chiffres dans un nombre et les tiges de l'abaque favorisent une écriture correcte et une lecture révisée.

L'intervention qui suit tente de lui faire utiliser le comptage pour retrouver le nom d'un nombre. Ce comptage lui permet de découvrir qu'un nombre peut avoir plusieurs noms, selon le comptage effectué. (30 unités s'appelle aussi 3 dizaines, 9 dizaines s'appelle 90 unités, une centaine s'appelle à la fois 10 dizaines et 100 unités).

3. Troisième expérimentation didactique (arrondissement d'un nombre)

L'entrevue porte sur la compréhension de la notion d'arrondir. Les noms attribués aux jetons et aux différentes enveloppes correspondent sont revus. V. observe la régularité qui permet de former les groupes et peut prévoir la construction des centaines de mille. L'histoire s'attarde aux différents groupements qui étaient utilisés au début de l'invention des nombres. Par la suite, nous entamons une discussion à propos de sa conception de l'arrondissement de nombres.

Pour V., arrondir un nombre «...c'est changer de chiffre. Si c'est plus haut que 5, tu le changes, si c'est plus bas que 5, tu rajoutes trois 0 après». Elle donne l'exemple du nombre 70 620 qu'elle arrondi à l'unité de mille, au nombre 71 000. Il est important pour moi de vérifier si cette procédure, qui ne semble pas liée à une idée d'approximation, peut amener des erreurs.

Pour réaliser la première tâche je lui propose des billets de monopoly (5 billets de 10, 3 billets de 100 et 7 billets de 1000) et lui propose de s'imaginer qu'elle est dans un magasin. Elle doit payer un Nintendo au coût de $149. Elle remet $150. Elle arrondit le nombre 149 à 150, en reconnaissant qu'elle a voulu donner le plus près possible pour obtenir le moins de change. Elle croit avoir arrondi à la position des unités, puis se reprend pour expliquer qu'il s'agit des dizaines. «J'ai le 50 comme 10, ici j'ai 49 c'est pas l'unité, faut je vienne ici parce que 49 après c'est 50, ça fait que c'est aux dizaines». Elle n'a pas fait le lien avec les billets utilisés ($10), mais plutôt avec la comptine des nombres.

Au cours de la deuxième tâche, le nombre 5 064 est d'abord arrondi à 5000. Le 64 qui reste lui pose problème et elle décide d'ajouter un billet de 100. Elle ne donne pas le nombre obtenu, mais identifie la position où elle a arrondi. «J'ai regardé, pis là c'est 5064, mais s'il y avait un 0 avant les centaines, s'il y avait un 0 avant les centaines, ça fait que j'ai su que c'était le chiffre avant... le 0». Son explication n'est pas très claire. Je lui propose d'écrire le nombre sur une feuille, ce qui me permettra de comprendre ce qu'elle veut dire par ces «0».

Elle inscrit d'abord 50 064 puis 5000 64, ensuite 5 00064. Je lui propose d'utiliser ce qu'elle connaît de la lecture de nombres pour écrire son nombre. Elle commence à écrire les unités (4), les dizaines (6), les centaines (0), puis inscrit 500 pour cinq mille. Un dialogue sur la position de «cinq mille» et un choix parmi les unités, dizaines et centaines de mille est nécessaire à V. pour identifier la position du chiffre 5. V. croit dans un premier temps qu'il y a des dizaines de mille dans 5000, un dialogue s'engage donc à propos de la composition des différentes unités de mesure de quantité (enveloppes).

Elle pourra écrire ensuite 5 100 et reconnaître avoir arrondi à la centaine : «Parce que...à cause du 0, c'est pas un 0 parce que j'ai mis un 1 pis le 100 parce que c'est plus bas là, fallait que je change mon chiffre pis, là on met des 0 fait que ça dépend de mon chiffre». J'ai cru comprendre que le 0 de 5064 est plus petit que le 5 (règle déjà expliquée) et qu'ainsi, elle doit choisir le plus petit chiffre, en l'occurrence le 1, ayant changé ce chiffre, elle conclut qu'elle a arrondi à la centaine puisqu'après ce changement on met des 0 (règle déjà expliquée).

La troisième tâche lui demande donc d'arrondir à l'unité de mille la plus près de 3 080. Elle écrit sur sa feuille 3080 en expliquant qu'elle a pensé au 5000 et qu'il ne faut pas mettre les deux 0, ce qui auraient donné le nombre 300 080. Avec l'écriture du nombre, elle considère 3 comme étant l'unité de mille la plus près, puis devant mon questionnement (c'est 3 ou 3000), précise qu'il s'agit bien de 3000. L'écriture du nombre arrondi qui suit cette affirmation est particulière. En effet, après avoir écrit correctement 3 080 elle inscrit le nombre 3000 à travers 3080, ce qui donne 3<u>000</u>080.

Par une quatrième tâche, je tente d'amener la comparaison entre deux possibilités, arrondir «au plus loin et au plus près». Le nombre 7930, arrondi à l'unité de mille la plus près, est choisi en comptant 7 billets de 1000 puis un huitième. Elle explique qu'elle a d'abord pensé à 7000 : «Parce que le chiffre le haut de 5...c'est le chiffre en haut de 5». Elle n'arrive toujours pas à préciser la position du chiffre qu'elle considère en haut de 5. Elle prend l'exemple de 5 800, l'écrit sur la feuille, barre le

8 et inscrit 5000 : «Là c'est à la limite, je fais 5 (unité de mille) je descends le 0, 0 pis là je le barre (le 8), je mets 0 comme ça... Quand c'est en bas, je mets des 0 mais quand c'est en haut, je change le chiffre, je mets un 8 pis ici je mets des 0». Elle conclut en disant que 5000 est l'unité de mille la plus près de 5800. Le fait de tenter de suivre le fil de sa pensée ne semble que permettre à V. de se disperser davantage.

J'essaie de proposer des balises à l'aide des représentations que nous nous sommes données, à propos des différents groupements, afin de permettre à V. de considérer les unités de mesure de quantités. L'illustration de 5 800, en imaginant les enveloppes, la comparaison entre les 8 centaines à enlever pour arriver à 5 000 et les 2 centaines à ajouter pour arriver à 6 000, lui font opter pour 6 000 comme unité de mille la plus près. Un retour au nombre 7 930, lui permet de constater qu'elle avait dû regarder le chiffre des centaines pour trouver à 8 000. Elle retient toutefois que si elle regarde uniquement le chiffre de la position à arrondir, cela va donner le nombre arrondi au plus loin.

Au cours d'une cinquième tâche, V. arrondit le nombre 5 200. Arrondi à l'unité de mille la plus près, il devient 4000. Les billets de monopoly favorisent la correction (5000). Je lui fais penser que sa recherche de trucs pourrait être stérile et lui propose de se servir de son imagination, en utilisant les billets ou les enveloppes. Elle choisit d'utiliser les billets pour arrondir 6 023. Elle réussit l'opération à la centaine (6000), à l'unité de mille (6 000). Elle inscrit 9034 pour 934, se corrige devant sa propre lecture, trouve la centaine la plus près (900) puis la dizaine la plus près (930).

4. <u>Quatrième expérimentation didactique (écriture et comparaison de nombres)</u>

La quatrième entrevue touche l'écriture de nombres. Elle débute par le rappel de la difficulté éprouvée par V. avec l'écriture de nombres, au cours de la dernière rencontre et par l'identification des moments où cette écriture est utile dans la classe. L'histoire qui suit, évoque les débuts de l'écriture. Il est question de l'absence du chiffre 0 et l'utilité d'un tableau de numération pour marquer l'espace vide. V. reconnaît le tableau de numération utilisé pour la lecture des nombres à virgules, nombres auxquels elle attribue les positions décimètre et centimètre plutôt que dixième et centième. Elle identifie le nom des positions des chiffres d'un nombre naturel et considère que le tableau de numération peut l'aider à écrire des nombres. Je lui précise qu'elle peut entendre l'ordre des nombres (mille, million).

Au cours de la première tâche, elle écrit sans problème les nombres 109, 200, 104, 85, 39 400. Elle explique que pour écrire ce dernier, elle groupe par 3. Elle ne semble pas tenir compte du mot «mille» entre le 39 et le 400. Suivent les nombres 618, 706, 250, 180 et 300 000 000, nombre pour lequel elle construit et utilise le tableau de numération. Elle reconnaît le nom de l'ordre qu'elle appelle «le troisième» plutôt que le «million». 3 300, 107 280 sont écrits en répétant les nombres simultanément. Elle explique son écriture en tenant compte de l'ordre des mille qu'elle a entendu.

Je demande alors à V. de répéter le nombre dicté en même temps que je le dicte. Mon but est de la sensibiliser à une procédure qu'elle utilise spontanément. Elle se rend compte que ça la mêle et décide d'attendre avant de répéter le nombre.

La deuxième tâche lui propose d'écrire le nombre 98 786 qu'elle répète correctement, mais qu'elle écrit 88 486. Une transformation s'opère entre le moment de sa répétition et le moment de son écriture. Elle dit qu'elle voit les nombres dans sa tête pendant que je parle, mais qu'elle ne les utilise pas pour les placer sur la feuille. Les nombres 1875 et 75 487 sont ensuite écrits correctement.

Je lui propose une troisième tâche où je tente de lier écriture de nombre et valeur de nombre. La comparaison entre le nombre 1875 et 1875 unités est correcte, mais l'explication qu'elle en donne n'est relié qu'au code d'écriture. «C'est le même chiffre...c'est la même place le 5 et le 5, ils sont à la même place, pareils des unités, le 8, le 8 c'est pareil... Je lui demande ensuite combien de centaines sont contenues dans le nombre 1875. Elle s'appuie sur des règles construites à partir du code d'écriture. Elle identifie 18 centaines «...tu viens aux centaines, à la centaine, tu fais ça (18|75) et tu dis le chiffre qu'il y a dedans». Les choses se compliquent lorsqu'elle doit expliquer comment elle sait qu'il y a des centaines au quatrième chiffre. «Parce que c'est des chiffres avant ...c'est parce qu'en dedans de 875 c'est plus petit que 1000 pis dans 1000, il y a 875». Le code a permis la construction de règles, sans lien avec les unités de mesure de quantité. Un dialogue s'engage. Il est question des enveloppes et de leur contenu.

Une quatrième tâche lui permet de retrouver les 754 centaines du nombre 75 487, mais à nouveau elle explique : «C'est dans 75 000, il y a 487. C'est que le 75 000 est plus gros que 487, ça veut dire que 487 rentre dedans le 75 000». Un nouveau dialogue permet à V. de retrouver les centaines dans les unités de mille, les unités de mille dans les dizaines de mille. Elle croit toutefois qu'il y a des centaines de mille dans les dizaines de mille. L'utilisation des enveloppes remet en question cette croyance. Elle s'aperçoit qu'elle ne se représente pas, mentalement, les différents groupements déjà manipulés lorsqu'elle répond à mes questions. Elle fonctionne de façon mécanique.

5. Cinquième expérimentation didactique (décomposition et recomposition de nombres)

L'entrevue porte sur la recomposition de nombres. L'histoire racontée favorise l'observation de différentes façons d'écrire des nombres. J'introduis ainsi l'idée du but de la journée : décomposer et recomposer des nombres.

Dans un premier temps de demande à V. d'identifier le cardinal qui correspond à la lecture de chacun des cartons. Dès la lecture de la première quantité, un premier blocage survient. V. ne peut faire correspondre 51 centaines au nombre 5100. Elle le fait correspondre au nombre 51. Sur ma suggestion, V. prend les enveloppes de centaines et constate «j'en prendrais 51..., 51 fois 51..., le 51...les centaines». Elle ne pense pas compter pour découvrir le nom du nombre. À ma demande, elle construit les centaines manquantes. Au cours de ce processus, elle confond 100 et 1000, croyant qu'avec 10 centaines, nous obtiendrons le nombre 100. Après la fabrication de cette première unité de mille et la distinction entre 100 et 1000, elle prévoit la formation de 2000 (20 centaines), de 3000, de 4000 et arrive à 5000 (50 centaines). Elle hésite devant 51 centaines l'appelant d'abord «cinq mille et une», «cinq mille et une centaine», puis «cinq mille centaines». Il y a un nouveau blocage devant le nom correspondant à la centaine. Le rappel du nombre de jetons à l'intérieur amène, après plusieurs tâtonnements, le mot «100». Suite à cette construction, V. dégage une règle. Ainsi 51 centaines s'appelle 5100 : «Parce qu'ils ont collé les deux 0». L'intervention tente d'amener V. sur le terrain de la réflexion en lui demandant de reconstituer les actions qui ont permis la découverte du nom du nombre. Elle sait qu'elle a utilisé les enveloppes et ajoute : «Je les ai mis dedans». Elle oublie de dire qu'elle a compté le contenu de la centaine.

Elle tente de prévoir la correspondance entre 41 dizaines et le nombre 410 en expliquant qu'elle pense aux enveloppes de dizaines. Elle fait correspondre 410 dizaines. La vérification par l'illustration des 41 dizaines ne permet pas de contredire cette perception. Elle compte par 10 les 4 centaines et retrouve 41 dizaines. Sur ma suggestion, elle compte les jetons des 4 centaines et de la dizaine et retrouve...410 dizaines. V. ne semble pas considérer que le nom du nombre représente les unités. Nous amorçons une discussion sur ce qui vient d'être compté, sur ce qui a été compté pour retrouver le nombre 5100. Elle considère toutefois qu'elle n'a pu retrouver le nombre 5100 que «...en le mettant en ordre», ce qui signifie en le construisant avec les enveloppes. En effet elle n'avait pas poursuivi sa réflexion pour le nombre 5100. Après avoir affirmé qu'elle avait mis les enveloppes dedans, je lui avais indiqué qu'elle les avait comptées. Je lui propose donc de dénombrer les jetons des 41 dizaines. C'est à ce moment qu'elle arrive à 410 jetons, puis qu'elle découvre qu'on a compté les unités, ce qui permet d'arriver au nom du nombre. Les autres groupements lus sur les cartons sont mis en correspondance avec le nom du nombre qu'ils représentent. Ainsi 43 dizaines correspond à 430, 3 dizaines à 30, 42 dizaines à 420, 51 dizaines à 510 et 3 centaines à 300. V. reconnaît qu'à chaque fois qu'elle retrouve le nom du nombre, il s'agit du nom de l'ensemble illustré par les jetons qui sont dans les enveloppes.

Une confusion apparaît entre 50 et 50 dizaines lorsqu'elle doit faire correspondre le nom de 5 dizaines. L'illustration du nombre et le dénombrement des unités ne suffisent pas à la contredire. C'est avec la comparaison de 5 dizaines et de 50 dizaines que V. reconnaît la différence entre ces quantités. Cette comparaison amène une précision. En effet, le nom d'un nombre n'est jamais appelé unités, même si on sait que c'est ce qu'il représente. Cette règle implicite des noms de nombres doit être rendue explicite pour V.

Parallèlement au dénombrement des enveloppes, V. nous avait parlé, dès l'apparition de 51 centaines, de la multiplication, qui pour elle est un truc donné par son enseignante. Cette procédure a été conservée, rappelée au cours des manipulations de dizaines (x10) et de centaines (x100), et elle est reprise lorsqu'elle doit retrouver le cardinal de 451 dizaines. Elle multiplie par 10 avec l'algorithme et retrouve 4510.

Une deuxième tâche, où je suggère à V. de retrouver des nombres compris entre 402 et 513, est proposée. La formation de nombres débute curieusement. V. décide qu'elle doit chercher les cartes «...qui sont dans les centaines...qui sont marquées avec 100». Elle élimine 5100, puis 300 (inscrit 3 centaines) et enfin 42 dizaines. Je l'arrête et lui demande de retrouver le nom du nombre qui correspond à la dernière quantité. Elle identifie 420. Je lui demande s'il y a des centaines dedans. Elle le reconnaît et s'aperçoit que ce n'était pas écrit, mais qu'elle devait le trouver : «En faisant soit les enveloppes ou soit le multiplier». V. recompose ensuite les nombres 420, 430, 410 et 510 sans réunir les quantités de deux cartes.

Au cours de cette deuxième tâche, je tente de lui en faire réaliser quelques réunions. Elle additionne 40 dizaines et 11 unités sans problème. Une difficulté survient lorsque 4 dizaines et 5 dizaines sont jugées insuffisants, après leur addition (90). V. tente d'ajouter 3 dizaines et trouve 103, ayant dénombré par 10, puis par 1 les dizaines après le passage de 100. Je l'invite à prendre conscience qu'elle privilégie le comptage des unités au détriment des dizaines. Cela est suffisant pour amener la correction (120). Toutefois, la quantité étant jugée à nouveau insuffisante, elle ajoute 3 centaines et trouve 3120. La représentation mentale des deux quantités ne permet pas à V. de se corriger. C'est lorsqu'elle prend les 3 centaines dans ses mains et qu'elle y ajoute 120 qu'elle identifie 420. Elle croit que la cause de son erreur est d'avoir trop compté. L'écriture du nombre 3120 et l'identification de la position des chiffres dans le tableau de numération lui permet de se rendre compte qu'elle avait placé le 3 dans la colonne des unités de mille.

Par la suite, V. utilise le comptage, l'illustration des enveloppes et additionne 25 et 12 pour retrouver 37, le rejette puisqu'il n'est pas assez grand.

6. Sixième expérimentation didactique (le réseau sémantique)

Le but de la sixième expérimentation didactique est de résumer et de lier entre elles les différentes tâches qui ont touché la numération positionnelle. L'histoire du Petit Poucet qui retrouve son chemin, sert de mise en situation et illustre l'utilité des liens, puisqu'ils servent à trouver des solutions aux problèmes posés.

V. écrit d'abord les symboles relatifs aux opérations et aux comparaisons comme +. -, ÷, x, =, < et >. Les termes chiffres, fractions, arrondir, unité, dizaine, centaine, unité de mille, dizaine de mille et centaine de mille apparaissent. Le rappel des poupées russe lui permettent de construire un premier réseau sémantique. Les premières idées de V. à propos des nombres sont liés ainsi. Les chiffres correspondent à l'ordre dans lequel les termes et les symboles ont été placés.

1.-	8.nombres	10.fractions	11.arrondir
2.÷	9.chiffres		12.unités
3.+			13.dizaines
4.x			14.centaines
5.=			15.unités de mille
6.≥			16.dizaines de mille
7.≤			17. centaines de mille

Le contexte d'inclusion amené par l'illustration des poupées russes amène les réflexions suivantes. Les signes correspondant aux chiffres de 1 à 7 sont liés entre eux, pour V., par le fait qu'ils sont des symboles utilisés dans des problèmes : «Qu'ils vont te faire trouver la réponse...d'additionner...d'enlever, ajouter, diviser ou ...rester comme ça (=)». V. illustre ses propos par la comparaison entre 16 et 500.

Les mots chiffres et nombres ont associés : «Parce que dans le nombre, il y a des chiffres, pis dans des chiffres, il y a des nombres». J'amène la précision selon laquelle on prend des chiffres... V. complète en disant «pour faire un nombre». Elle sait que les chiffres seront groupés par trois pour favoriser la lecture.

Elle associe arrondir avec les positions des chiffres. Nous voyons surgir la correspondance entre arrondir et positions. V. ajoute que les unités dizaines...ne sont pas uniquement des positions mais aussi des valeurs. Elle a oublié la quantité d'objets contenus qui correspond à ces valeurs, hésitant entre les groupes de chiffres pour lire et les groupes d'unités regroupées. Elle réalise qu'on fait des groupes de 10 à partir des unités qui sont dans la dizaine. V. concilie les deux fonctions attribuées aux positions des chiffres : position pour la lecture, valeur.

Les fractions sont à part. On écrit des fractions avec des chiffres et on peut arrondir des fractions, explique-t-elle. Ce terme sera donc déplacé sous chiffres.

Différents mots ont été ajoutés pendant que V. expliquait les liens déjà établis. Ainsi, ordonner, comparer, lire, symboles, enlever, ajouter, rajouter, séparer, enveloppes, jetons. Pour V. les termes reliés aux quatre opérations vont avec comparer : «Parce que le - il est plus petit que le +». Elle sait que le x et le ÷ vont ensemble sans savoir expliquer pourquoi. La reconnaissance de ce qui relie ajoute et enlève («le contraire») lui permet de reconnaître le même rapport entre x et ÷. Le tableau réalisé à la suite de cette discussion est celui-ci.

```
                                             lire mieux
                                             groupe de 3
ajouter partager ordonner comparer nombres arrondir
                                              objets
enlever rajouter         chiffres  position valeur
                                                unités   jetons
                                          fractions dizaines
                                                      centaines
                                                      unités m.
                                                      enveloppes
                                                      dizaines de m.
                                                      centaines de m.
```

Pour V. la valeur correspond aux unités et est illustrée par les jetons et les enveloppes. Les mots enveloppe et groupes de 10 sont placés «au milieu», parce cela touche tous les groupes, explique-t-elle. Pour V. on peut ordonner et comparer des nombres, de même on peut partager des nombres.

Je lui rappelle que les liens ainsi établis lui permettent de mémoriser ses connaissances, mais elle traduira plus tard qu'elle doit mémoriser les liens.

Finalement, pour V., le nombre représente des symboles et des positions qui peuvent être arrondi, comparé, ordonné. Il est difficile de concevoir que les nombres représentent des objets et que ce sont ces objets qu'on peut partager, fractionner. Appelée à choisir entre partager des nombres et partager des objets, elle choisit de partager des objets qui sont représentés par des nombres. «Le divisé» est considéré comme étant le lien entre nombre et fraction, le nombre représentant à ce moment une fraction.

F. Évaluation finale

Habiletés de comptage

V. compte par 1 et par 10 sans problème. Le passage à la centaine est hésitant puisqu'après 1095, elle identifie 2005. Lors du double-comptage, V. compte les nombres et non les pas entre les 1008 et 1015. L'action de marcher lui permet d'identifier cette erreur. V. explique ensuite que si on compte le premier nombre ça ne donne pas le bon nombre. Elle ne semble pas s'apercevoir qu'elle ne fait pas de pas lorsqu'elle est à son point de départ.

Palier logico-physique

V. retrouve des groupements de la vie courante (boîtes de conserve, pains, crèmes glacées) et leur attribue une fonction de rangement. Elle illustre le nombre 2220 avec l'abaque. Il est plus facile pour V. de reconnaître l'invariance de la quantité lorsque le nombre est illustré avec les enveloppes plutôt qu'avec l'abaque. Le comptage des anneaux de l'abaque est laborieux. Il lui permet toutefois de reconnaître l'invariance de la pluralité, même si une tige possède 12 anneaux. Une deuxième expérience du genre ne lui permet pas de reconnaître l'invariance de la quantité, à nouveau le comptage est nécessaire. L'illustration de la quantité illustrée par des enveloppes et des jetons lui permet de reconnaître l'invariance de la pluralité par rapport à l'organisation. Elle explique que sans organisation «ce serait plus mêlant à dire, parce qu'ils seraient tous pognés, il faudrait que tu les comptes une par une mais quand tu les as mis dans les enveloppes, c'est plus facile».

L'équivalence entre trois quantités (3 paquets de 100 macarons, 2 paquets de 100 plus 100 macarons et enfin 300 macarons) est reconnue, en retrouvant le cardinal des trois ensembles.

Palier logico-mathématique

La lecture de nombres s'effectue en groupant les positions à l'intérieur des ordres (unités, mille, million). V. croit ensuite que le 0 de 70 089 représente les unités de mille qui sont dans le nombre mais ne peut reconnaître que ces dernières sont dans les dizaines de mille. Cette question amène une confusion entre l'ordre des mille et la position unité de mille. Cette confusion empêche V. de reconnaître l'enveloppe qui correspond à l'unité de mille et la quantité de centaines nécessaires à sa fabrication. Elle ordonne et écrit les nombres sans problème.

La valeur des chiffres dans un nombre est reconnue comme relative à leur position mais la quantité d'unités et de groupements est reconnue grâce à un truc. «...tu mets une barre dans le milieu de la dizaine pis de l'unité, pis tu regardes ton chiffre avant (222|0)».

Plusieurs erreurs de comptage auront lieu au cours de l'entrevue lorsque V. doit effectuer un passage à la centaine ou à l'unité de mille, que ce soit en récitant la comptine ou en dénombrant des objets. Elle ne semble pas lier le comptage à une intention de dénombrement.

V. choisit ensuite d'illustrer le nombre 2234 avant de retrouver le reste quand on enlève 2 dizaines. Son résultat et sa procédure sont corrects. Par la suite, 20 et deux dizaines sont reconnus équivalents puis, quelques minutes plus tard, ils sont reconnus comme inégaux «20 est plus gros que 2». A ce moment, le seul contexte retenu est celui de la quantité. Elle transforme alors la consigne en changeant 2 dizaines pour 2 unités, en prenant 2 dizaines pour 20 dizaines ou 2 centaines pour 20 centaines.

V. arrondit correctement, mais explique «si le chiffre est moins que 5, ça va rester des 0 pis s'il est plus haut que 5, ça va changer ton chiffre ici, ça va monter de 2».

Elle recompose le nombre 709 en utilisant plusieurs cartons, mais l'addition de 70 dizaines et de 10 dizaines font 80 dizaines qui représente le nombre 80. Le rappel des enveloppes a été suffisant pour amener la correction. Elle considère comme moyenne la difficulté de cette évaluation.

APPENDICE 6

Étude de cas de S.

I. Évaluation initiale

Habileté de comptage

Le comptage par 1 et par 10 de nombres de quatre chiffres ne pose pas de problème. Toutefois, S. compte le nombre de départ lorsqu'il a à effectuer un double-comptage. Il énumère à ce moment les nombres dits, en déplaçant ses doigts et donne comme résultat le nombre de doigts déplacés.

Palier logico-physique

S. retrouve des groupements qui existent dans la vie courante (paquets de saucisses, de bonbons). Toutefois, il ne peut identifier le nom qui correspond à un ensemble de 12. Un peu plus tard, il croit qu'un paquet de dix s'appelle un dixième.

Il illustre le nombre 202 et reconnaît l'invariance de la quantité par rapport à son organisation. Après avoir défait une centaine, il sait qu'il s'agit encore du nombre 202, parce qu'il peut remettre les enveloppes de dizaines dans la centaine. Cette réversibilité semble plus difficile à utiliser dans le cas de la comparaison entre trois ensembles (300 jetons, 200 jetons et une centaine et enfin 3 centaines de jetons). D'abord, il choisit le troisième ensemble comme étant le plus nombreux (3 centaines) en montrant 3 enveloppes de centaines. Devant le rappel du contenu des deux autres ensembles il hésite devant 200 jetons et une centaine, puis retrouve le cardinal de chacun des ensembles au moyen des enveloppes, mais sans assurance.

Palier logico-mathématique

La lecture de nombres est réalisée aisément, mis à part une hésitation entre 10 198 et 10 188. Le nombre 1 002 249 est lu 1 milliard... S. explique que les deux 0 le confondent. Il ordonne ensuite les nombres en observant la quantité de chiffres qui les composent.

Une confusion persiste au cours de l'entrevue entre dixième et dizaine, centième et centaine. Elle apparaît lorsque S. identifie la position des chiffres des nombres et lorsqu'il écrit les nombres, plaçant une virgule au lieu de l'espace qu'on laisse habituellement entre les différents ordres. Pour S., il est difficile de s'adapter, puisqu'il écrivait les nombres de plusieurs chiffres avec une virgule avant l'apprentissage des entiers relatifs. De plus, lorsqu'il explique ce qu'il entend par nombre à virgule, il parle des dollars en indiquant que la virgule sépare le 1 du 25 dans $1,25.

S. hésite à dire que le 0 du nombre 1098 veut dire «les centièmes». Son manque d'assurance proviendrait, selon lui, d'une confusion entre centième et millième. La distinction entre centaine et centième, les derniers réservés aux nombres à virgule, permettent de poursuivre l'entrevue.

Les 2 du nombre 22 220 ne valent pas tous la même chose pour S. : «Parce qu'ils ne sont pas à la même position». Toutefois, il ne peut retrouver la quantité de dizaines dans ce nombre. Il en trouve 2, puis 20. Il regarde tous les chiffres pour retrouver la quantité d'unités (22 220) en expliquant : «Ben, regarde je prends tous les chiffres...on met un 0».

Il enlève 20 au nombre 2234 en utilisant mentalement l'algorithme de la soustraction (3-2=1). «J'enlève un 2, je fais moins 2 au 3 pis là ça fait 1». Il semble donc avoir établi une équivalence entre 20 et 2 dizaines avant d'effectuer sa soustraction.

L'activité suivante illustre la difficulté à concevoir les différentes unités de mesure de quantité. 2 dizaines, appelé d'abord 2 dixièmes, est considéré équivalent à 20 unités. Il croit 20 dizaines plus petit que 2 centaines, sans pouvoir expliquer pourquoi. Il croit au même moment que 20 dizaines est la même chose que 20 unités. Ces observations nous laissent croire que S. s'arrête tantôt aux chiffres, sans les coordonner avec les mesures de quantité, tantôt aux unités de mesure de quantité sans les coordonner avec leur quantité respective.

S. recompose le nombre 709 avec les cartes 7x100 et 9, 7 centaines et 9 unités, 700 et 9, 700 unités et 9 unités. Il ne peut concevoir que ce «et» qu'il dit «pis», représente une opération mathématique et ce, même si j'énumère les quatre opérations. Il complète en prenant 70 dizaines et 9 unités qu'il appelle d'abord 7 dizaines avant de le délaisser sous prétexte que cela ne fait pas 700. Il arrondit 3105 à la centaine (3100).

1. <u>Première expérimentation didactique (valeur positionnelle)</u>

Le but de l'entrevue est de développer une compréhension de la valeur relative des chiffres dans un nombre. S. se rappelle les noms des différents groupements. L'histoire lui permet d'observer les différences entre les lectures d'autrefois et celle d'aujourd'hui.

La première tâche lui permet de former facilement le nombre le plus grand possible avec les chiffres 5, 1, 3 et 5. S. forme le nombre 5 531 et explique : «T'as deux 5, pis le 5 est plus gros que le 3, pis le 1. Le 3 est plus gros que le 1». Il identifie les positions de chacun des chiffres auxquels il fait correspondre les groupements. Il complète en comparant les unités de mesure de quantité, puis en identifiant la plus grande (unité de mille) et la plus petite (unité).

Je lui donne alors un 0 et lui demande de former, à nouveau, le nombre le plus grand. Il place le 0 à la position des unités de mille formant ainsi 50 531. Il explique : «50 c'est plus gros que 500...50 000 pis ça rien que 531». Nous entamons un dialogue sur la valeur des différentes unités de mesure et sur la position où le zéro illustre «le plus petit manque». S. reconnaît que l'unité est la plus petite unité de mesure de quantité. Toutefois, c'est en déplaçant le 0 à la position des centaines, puis des unités qu'il arrive à former le nombre 55 310. Je lui suggère alors de refaire l'exercice avec les chiffre 9, 2, 6, 4 et 0. Il forme immédiatement le nombre 96 420 en expliquant son choix par la comparaison avec une autre possibilité (96 042).

Je lui propose ensuite d'enlever 30 au nombre 6420. Il hésite d'abord sur le sens de 30. Il part du raisonnement selon lequel quand on parle de 30, il s'agit de dizaines «...dans une dizaine, il y en a 10 pour faire 30, il faut 30 enveloppes...3 enveloppes comme ça (brunes)». Il conclut que 30 c'est 3 dizaines. Pour enlever 30 de 6420, il décide d'enlever le 2 et de mettre le 0. «Ben il faudrait que tu aies que un autre 0, pis là à la place de mettre un 4, je mettrais un 3 pis la ça ferait 6300». Il utilise donc mentalement un algorithme, mais ne transforme pas la centaine en dix dizaines. Il déplace tout simplement le chiffre de la position des centaines à la position des dizaines, sans transformation.

Je lui propose d'illustrer le nombre sur l'abaque pour observer ce qu'il vient de réaliser. Il place correctement les anneaux sur les tiges, enlève les deux anneaux de la tige des dizaines, puis un anneau de la tige des centaines. Je l'arrête et lui montre ce qu'il vient de faire en comparant les enveloppes et les jetons aux anneaux de l'abaque. Il constate rapidement qu'il doit défaire la centaine avant de l'amener à la position des dizaines, puis enlève 3 dizaines parmi les 12 dizaines. Il trouve par la suite le nombre 6390, constate qu'il ne s'agit pas du même nombre que le premier résultat. Il explique : «À la place de mettre les 9 là (dizaines), j'en ai mis rien que mis 1, là ça fait un 0». L'utilisation de l'algorithme lui permet de constater qu'il s'agit de la même chose, qu'il réalise l'opération sur l'abaque ou avec l'algorithme.

Je lui suggère d'ajouter 200 au nombre obtenu. Il ajoute immédiatement 2 anneaux à la position des centaines pour trouver 6590. L'opération suivante, l'ajout de 41 dizaines, pose des problèmes, non seulement à cause de la procédure utilisée, mais aussi parce que S. ne semble pas envisager la possibilité d'introduire une étape intermédiaire pour résoudre le problème.

Il ajoute d'abord 1 anneau sur la tige des dizaines, transforme les 10 dizaines en 1 centaine (un anneau sur la tige des centaines), puis ajoute seulement 3 anneaux sur la tige des centaines. Il explique : «J'en ai rajouté une tantôt». Il a donc effectué correctement les transformations 41 dizaines en 4 centaines et une dizaine, mais ne semble pas s'apercevoir qu'il a fondu deux étapes : former une centaine avec 10 dizaines parmi les 41 et former une centaine avec 9 dizaines déjà présentes auxquelles il ajoute une autre dizaine.

Nous commençons donc un dialogue sur ce qu'est 41 dizaines. Il semble savoir que 41 dizaines est différent de 41 unités et explique sans problème ce qu'est 41 unités (4 dizaines et une unité). Pour expliquer 41 dizaines, il revient à son opération et perd de vue que le 4 vaut 40 dizaines. Il montre 5 enveloppes de dizaines pour illustrer 41 dizaines. Le brouillard semble se faire plus épais. 4 dizaines plus 1 font 41 dizaines. Je lui dis qu'il s'agit de 5 dizaines. Il rassemble rapidement les 41 dizaines, forme 4 centaines, puis découvre la correspondance entre 41 dizaines et le nombre 410.

Nous devons arrêter l'entrevue ici, la récréation étant sacrée pour lui. Nous reprendrons à la prochaine entrevue.

2. Deuxième expérimentation didactique (la décomposition)

Le but de l'entrevue est de familiariser S. avec les différentes façons d'identifier les nombres, entres autres, au moyen de la décomposition. Le rappel du matériel utilisé pour illustrer les différents groupements facilite le dialogue sur les représentations mentales. Je suggère à S. d'utiliser des «images mentales» pour trouver des solutions aux problèmes posés. L'histoire racontée, à propos de la façon qu'ont les Chinois d'écrire leurs nombres, ne suggère pas a S. l'idée de la décomposition comme je l'aurais cru. Je lui indique ce lien et lui demande de décomposer un nombre de son choix.

Il décompose le nombre 2234 en écrivant 2x1000+2x100+3x10+4. Il ajoute ensuite 1x1000+1x1000+1x100+1x100+1x10+1x10+1x10+4. Je lui propose ensuite la tâche où il doit retrouver, à l'aide des cartons où sont inscrites des quantités différentes, le plus de nombres possibles compris entre 402 et 513.

Il fait correspondre le nom du nombre aux différentes quantités écrites sur les cartons (2 unités, 40 dizaines, 41 dizaines...), en expliquant ses solutions à partir de la composition de la centaine. «...dans 10 ça fait une centaine, pis là il y en a 4, ça fait 4 diz...4 centaines». L'explication donnée à propos des 51 centaines qui correspondent au nombre 5100 est un peu confuse. «Ben dans 500...dans...50, il y a...pour faire une centaine, ça prend 10 dizaines pis là, il y en a 51 ça fait 5...1000 là pis plus 1, là je le laisse aux centaines». Il m'est difficile ici de savoir si S. généralise la régularité dix à la composition de l'unité de mille, puisqu'il cite la composition de la centaine et y juxtapose les 51 centaines, ou s'il a plutôt assimilé la composition de l'unité de mille en transférant la composition de la centaine. Quoi qu'il en soit, il reprend le raisonnement à partir du contenu d'un groupement et multiplie par 5. Je précise le vocabulaire en reprenant sa phrase avec les mots «unité de mille composée de 10 centaines».

La procédure utilisée pour faire correspondre le nombre 4520 à 452 dizaines est différente. S. explique «Ben je les ai laissées comme ça sauf que j'ai mis un 0 là (unités)». Il ajoute que ça ne pouvait prendre deux 0, puisqu'après la dizaine il n'y a qu'un 0. Je lui précise qu'effectivement, après la dizaine, il n'y a que la position des unités.

Le temps venu de retrouver les nombres entre 402 et 513, il élimine 51 centaines, puisqu'il est «trop gros» et mentionne 430 (43 dizaines), 404 (40 dizaines et 4 unités), 410 (41 dizaines) et 403 (3 dizaines, 10 unités, 3 unités). Il explique «3 dizaines, ça fait 30..., 10 unités ça fait 10...ça fait 40 plus 3 ça fait...ça fait 43». Il constate son erreur en expliquant son addition et remarque que les unités l'ont confondu.

Je profite de l'occasion pour commencer un dialogue à propos de ce qui a provoqué cette erreur. On parle de distraction, du besoin d'améliorer la concentration. Trouver des moyens pour améliorer sa concentration n'est pas facile. Il énumère le fait de ne pas parler, de penser aux chiffres, aux nombres, de les voir, utilise l'exemple de 51 dizaines et identifie la représentation mentale qu'il pourrait se faire des groupements. Je lui suggère de généraliser ce moyen aux nouvelles solutions qu'il m'apportera durant l'entrevue et même de le généraliser dans la classe. Nous essayons immédiatement.

Il me tend le nombre 510 (51 dizaines) et je lui demande de m'expliquer ce qu'il a imaginé, ce qu'il fait sans problème. Il prend ensuite un long moment pour réfléchir et me tend le nombre 420 (3 centaines, 5 dizaines, 4 dizaines, 3 dizaines). Il explique le contenu de ses représentations mentales et observe que malgré le temps que cet exercice requiert, il est «payant» de le faire. Il inscrit ce moyen sur une feuille qu'il apporte en classe.

3. Troisième expérimentation didactique (comparer et opérer sur des nombres)

Le but de l'entrevue est la comparaison et l'opération sur les nombres à partir de leurs différentes unités de mesure de quantité. Nous commençons l'entrevue par l'identification des divers groupements. Les unités de mesure de quantité sont facilement représentées, mais le comptage des sous-groupes dans les groupes est un peu plus lent. Ainsi, trouver le nombre d'unités dans la centaine et le nombre de dizaines dans l'unité de mille demande à S. un moment de réflexion. Ses explications montrent qu'il utilise la centaine et son contenu, de même que la règle selon laquelle on ajoute un 0 lorsqu'on multiplie par 10 pour retrouver le nombre de dizaines dans l'unité de mille.

Un premier blocage survient lorsque S. ne sait plus quel groupement succède à celui des centaines de mille. Il parle de million sans pouvoir identifier la première position de cet ordre. Un simple retour sur la première position de l'ordre des mille suffit pour lui suggérer la régularité des positions des unités, régularité qu'il sait continuer sans problème.

La première tâche consiste à lui faire comparer 908 et 908 unités. Il constate d'abord que 908 est plus gros : «Parce que 908 unités faut toute que tu, que t'abaisses le 9 là, pis que t'ailles les mettre chez les dizaines pour faire les dizaines, c'est à cause c'est des unités. Faut que tu mettes des dizaines comme celui-là t'as 9 centaines, 0 dizaine pis 8 unités». Pour S. dans cet ensemble (9 centaines, 0 dizaine et 8 unités), il n'y a pas 908 unités.

Je lui suggère d'imaginer le nombre 908. Il ferme les yeux et se représente mentalement 9 enveloppes blanches en sachant expliquer leur contenu (900 unités) et les 8 unités. Je l'invite ensuite à imaginer 908 unités. Il réalise que cela fait beaucoup d'unités, mais il ne croit pas qu'il y a la même quantité d'unités entre ces deux ensembles. Je lui propose de me dire les différences. Il utilise l'abaque et constate la nécessité d'organiser l'ensemble des 908 unités parce que : «Tu peux pas toutes les 908 unités là (en montrant la tige des unités)». Il prend l'abaque, place les anneaux correctement, mais en parlant dit qu'il doit «abaisser le 9». Je lui demande pourquoi puisque je ne l'ai pas invité à enlever. La réponse étant dans la question, je n'obtiendrai pas de nouvelle réponse. S. continue de placer les anneaux sur l'abaque, identifie le nombre 908, puis me montre la même illustration pour 908 unités. Il ne semble pas convaincu que 908 et 908 unités sont équivalents.

Je lui suggère de prendre des enveloppes et des jetons. Il construit 9 enveloppes de centaines, auxquelles il ajoute 8 jetons. À côté, il amoncelle 600 jetons et imagine les autres puisqu'il en manque. A la question : «Est-ce que c'est la même quantité?», il répond d'abord non. Il réfléchit et constate l'équivalence en expliquant : «C'est rien qu'ils sont pas enveloppés en paquets, en paquets de 100». Il ajoute que ce qu'il l'a aidé à comprendre c'est qu'il a vu qu'il s'agissait de jetons. «...il y avait des enveloppes, mais ils étaient pas dans des enveloppes ça fait que là j'ai pensé que ce serait la même affaire parce qu'ils sont pas regroupés». Je lui propose l'idée de synonymes qu'on retrouve en français. Il est d'accord. Je lui demande ce qu'il faudrait faire pour que ces ensembles ne soient pas équivalents. Il sait qu'il faut enlever ou ajouter.

Je lui propose donc une deuxième tâche où il doit enlever 20 dizaines. Il réfléchit, obtient le nombre 888. Il vérifie avec les enveloppes et les jetons, sur mon invitation. Il prend 2 dizaines en disant qu'il enlève 20 dizaines.
«-Qu'est-ce que tu as enlevé là?
-2 dizaines.
-Moi j'ai demandé d'enlever quoi?
-20 dizaines».
Il enlève deux enveloppes de centaines et trouve le nombre 708. S. observe la confusion mais ne sait pas expliquer sa provenance. Je lui propose une autre tâche où je lui suggère d'être attentif à la consigne. Je lui demande d'ajouter 400 unités. Il réfléchit, obtient 1108, explique qu'il a ajouté 400 unités au 7 de la centaine pour trouver 11. Il a donc transformé 400 unités pour lui faire correspondre le nombre, mais il n'en a pas pris conscience. Je l'invite donc à exprimer que 400 unités c'est pareil comme «400», ce qu'il fait sans problème.

Je lui suggère une troisième tâche, où il doit enlever 14 dizaines au nombre 1108. Après réflexion, il trouve le nombre 960 et explique «Là t'as rien que 10 (1108)...dix dizaines...pis là ici, ça revient à 0 (1008), là ça revient à 1 là (1108), ça fait 10 (1108)...faut que j'aille à lui (1108)...pour en enlever...pour en échanger... pis là ça va être 10 centaines...pis là j'en enlève à lui (1108)...pis là ça vient à lui (1108), là ça fait 20 (dizaines) ici (à la position des dizaines). Là, faut que j'en enlève 14 (dizaines), ça fait...ça fait 6 (dizaines). Il identifie toutefois 68 à la fin de son explication et l'écrit sur sa feuille.

Je lui propose de montrer ce qu'il vient de faire avec le matériel. Il manipule les enveloppes et les jetons, conformément à ce qu'il vient de m'expliquer, et trouve le nombre 968. L'erreur ne provient pas de la transformation des différents groupements mais de l'oubli, d'abord des unités puisqu'elle n'ont pas été utilisées durant l'opération, puis des centaines.

4. Quatrième expérimentation didactique

Le but de l'entrevue est de travailler l'arrondissement des nombres. L'histoire permet à S. de voir que divers groupements (12, 60) ont contribué à former des nombres au cours des siècles. Les groupes de 10 qui sont utilisés maintenant facilitent certaines approximations comme arrondir. S. sait qu'on peut arrondir à différentes positions mais pour lui arrondir ça sert «à ne pas avoir le chiffre exact».

Je lui propose donc une première tâche où il doit acheter un Nintendo qui coûte $149. Il a en main 7 billets de 1000, 3 billets de 100 et 5 billets de 10. Il me tend d'abord 200, puis se ravise et me donne 150. Il admet qu'il a arrondi à la centaine, puis à la dizaine et explique l'utilité ainsi. Ca sert «à donner plus pour que ce soit mieux...pour mieux redonner, comme là, c'est redonner de l'argent, comme là elle me redonnerait $1.

Je lui suggère une deuxième tâche où, toujours dans son magasin, il doit acheter un Nintendo et un système de son coûtant $149. et $90.. Il utilise mentalement l'algorithme de l'addition et trouve $239. Je le place ensuite dans un contexte où il doit calculer très rapidement. Il pense à utiliser une calculatrice, mais pas à arrondir. Je lui indique qu'il avait déjà arrondi 149 à 150. Il poursuit et additionne 150 et 100 pour trouver 250. Il constate la rapidité d'exécution comparativement à l'algorithme et conclut qu'arrondir «ça va plus vite pour compter» et admet que cela donne un résultat proche, sans être précis. Je lui indique qu'il vient d'estimer.

Une troisième tâche l'invite à prévoir ce qu'il donnerait s'il achetait un ordinateur et une imprimante au coût de $5064. Il me tend 5100, sachant qu'il vient d'arrondir à la centaine. Je lui propose d'arrondir à une autre position, ce qu'il réalise sans difficulté. Il propose 5070. Je profite de l'occasion pour entamer une discussion à propos de la dizaine ou la centaine supérieure et inférieure. Ainsi, si 5064 est arrondi à 5070 adéquatement pour une situation comme celle du magasin, il n'en va pas de même, lorsque son enseignante lui demande d'arrondir en classe au plus près.

Il est difficile pour S. de trouver l'autre dizaine proche de 5064. Il cherche des centaines ou des unités de mille. Je dois lui dire d'oublier 5070 et de repartir à 5064 pour qu'il parvienne à trouver 5060. Le comptage des nombres entre 5060 et 5064, puis entre 5064 et 6070 lui permet de constater qu'un des parcours est le plus court, sans pour autant identifier le nombre de pas effectués. Il reconnaît toutefois la pertinence d'arrondir au plus loin, dans le contexte d'un magasin.

Il arrondit ensuite 5064 à l'unité de mille la plus loin (6000) et la plus près (5000) après avoir hésité devant le 0 de 5064 car pour lui «il n'y a pas de chiffre». Je lui suggère d'arrondir à la même position avec le nombre 5228, là où il y a un chiffre, comme il dit. Il semble plus en confiance ici quand il explique : «5000, c'est à cause que le 2 est pas plus haut que 5». S. réfère au truc donné en classe. Pour arrondir, on regarde le chiffre de la position suivante, s'il est plus haut que 5, on change le chiffre de la position demandée, s'il est inférieur, on le laisse là en y ajoutant des 0. Il sait arrondir aux deux centaines qui encadrent le nombre 5228.

Il a un blocage pour arrondir à la dizaine supérieure et inférieure, quand il oublie le nombre de départ (5228) et qu'il cherche à arrondir le nombre déjà arrondi (5030). Le problème est résolu lorsque je lui indique qu'il doit revenir au nombre de départ. Il trouve 5220 en expliquant : «À la place de changer le nombre, je le laisse là pis à la place le 0, je le mets là (unités). Il conclut qu'arrondir sert «à prendre le chiffre le plus haut ou le plus bas...pour faire des...quand t'en as beaucoup, elle te fait arrondir là».

5. Cinquième expérimentation didactique (unités de mesure de quantité)

Le but de l'entrevue est de rendre S. à l'aise avec les différentes unités de mesure de quantité qui constituent le nombre. L'histoire racontée (le berger qui compte ses moutons) permet à S. d'observer la nécessité non seulement de créer des groupements et des regroupements pour évaluer une quantité, mais aussi celle de conserver ces groupements. S. identifie rapidement par la suite les différentes unités de mesure de quantité, des unités aux unités de mille.

Pour la première tâche, S. choisit de travailler à partir du nombre 159 qu'il écrit sur sa feuille. Il explique la représentation mentale qu'il se fait du nombre (une enveloppe blanche, 5 brunes et 9 jetons). Il considère d'abord qu'il y a 50 dizaines, puis qu'il y a 150 dizaines parce que : «Dans 100, il y en a...10, plus 5, ben 50 là, ça fait 150». Je lui suggère de vérifier avec le matériel. Il trouve 15 dizaines et explique son erreur en indiquant qu'il avait enlevé le chiffre des unités pour le remplacer par un 0. J'ajoute qu'il ne pensait pas aux enveloppes et aux jetons. Je lui propose des les utiliser pour la question suivante, afin de constater si cela devient plus facile.

Devant le matériel, il distingue bien les questions relatives à l'identification des chiffres aux différentes positions de même que celles relatives à la valeur de chacun des chiffres. Il retrouve facilement les 159 unités de ce nombre et explique : «Dans les centaines, il y a 100 unités, dans les dizaines, il y en a 50 pis dans les unités, il y en a 9».

La deuxième tâche lui demande de retrouver le nombre de dizaines dans le nombre 1150. Il en trouve 160 en expliquant : «Dans l'enveloppe brune (unité de mille), il y a 10 centaines, pis dans les centaines, il y a 10 dizaines, ça fait que là, j'ai compté çà». Il semble y avoir eu un glissement dans l'adaptation du comptage aux dizaines (100+10+<u>50</u> plutôt que 5). S. aurait dénombré correctement les 100 dizaines de l'unité de mille, les 10 dizaines de la centaine, mais aurait ajouté 5 dizaines ou compté par 10 les dizaines au lieu de le faire 1 à 1. L'explication qu'il donne est difficile à comprendre. La vérification avec les enveloppes permet de dénombrer correctement les dizaines dans l'unité de mille et la centaine, mais on voit apparaître l'ajout de 50 unités aux 110 dizaines. En s'arrêtant sur le comptage de chacune des dizaines, S. s'aperçoit qu'il doit les compter par 1. Je l'invite ensuite à observer son nombre (1150), puis à écrire 115 dizaines en dessous. Il admet que ces deux écritures veulent dire la même chose et explique que la seule différence entre les deux est le fait d'avoir enlevé le 0 pour l'avoir remplacé par le mot dizaine. Je l'invite à réfléchir sur ce que nous retrouvons comme regroupement pour chacune des positions. Il réalise qu'il n'y a pas de dizaine à la position des unités mais qu'il y en a partout ailleurs. Une vérification de cette procédure avec le nombre 159 lui permet de valider sa procédure. Il utilise la même procédure pour retrouver le nombre de centaines dans 1150 et vérifie son hypothèse avec le matériel.

Une troisième tâche lui permet d'écrire le nombre 104 306. Il le confond avec 14 306 et sans réaliser son erreur lorsque je lui demande de lire ce qu'il vient d'écrire. La répétition du nombre demandé est nécessaire. Il semble avoir oublié ce qui a été demandé. Il admet toutefois que le 0 le mêle. Un dialogue à propos des différentes positions dans un nombre facilite l'identification des endroits où on écrit les chiffres.

La quatrième tâche lui permet de trouver un nombre qui a 24 dizaines. Il identifie d'abord le nombre 240 et croit qu'il n'existe pas d'autres nombres qui répondent à cette condition. Je lui demande combien de dizaines composent le nombre 245. Il en trouve 24 et peut identifier de nouveaux nombres répondant à cette condition. Il trouvera les nombres 10 400, 10 412 lorsque je lui demande de former un nombre qui a 104 centaines.

6. Sixième expérimentation didactique

Le but de l'entrevue est de discuter des liens que peut faire S. à propos des aspects vus depuis le début des rencontres. L'histoire du Petit Poucet permet de créer une analogie entre le réseau qui a facilité au Petit Poucet le retour à la maison et le réseau que S. va construire pour lui permettre de retrouver des idées pour solutionner les problèmes posés.

Les premiers mots qu'écrit S. sont enveloppe blanche, enveloppe brune. Je lui demande donc d'ajouter à ce vocabulaire, les termes formels que nous avons utilisés (centaine, dizaine). Il poursuit avec les mots jetons, sous lequel il écrit unité, grosse enveloppe brune (unité de mille) puis calculer, x, ÷, -, +, %.

Je l'invite à placer ces mots en réseau à la manière des poupées russes (inclusion). Il construit le tableau suivant après que j'aie complété la consigne par «quels mots vont ensemble?»

nombres	
enveloppe brune	calculer
(unité de mille)	
enveloppe blanche	+
(centaine)	
enveloppe brune	÷
(dizaine)	-
jetons(unités)	+
	%

Il explique que les groupements sont disposés du plus gros au plus petit «à cause que les unités de mille, c'est le chiffre le plus haut». Sur ma demande, il précise que l'unité de mille est une position, qu'il ajoute sur un papier, et identifie de nouvelles positions comme la dizaine de mille, la centaine de mille, l'unité de million en disposant les cartons les uns au-dessus des autres.

Je lui demande de préciser si ces positions indiquent autre chose qu'une position. «Ben comment que t'as de...de choses...de billes là». Je lui suggère alors le mot valeur, qu'il écrit et place à côté du mot position au-dessus des diverses unités de mesure.

Il dispose ensuite le mot chiffre entre positions et valeur et les différentes unités de mesure de quantité parce que : «Il y a tout le temps une position pas la valeur avant le chiffre. Ben, le chiffre là c'est après...il y a l'unité pis tout ça, c'est à cause que là c'est en haut». Son explication ne me semble pas très claire. Il ajoute que le chiffre nous aide à former, les unités et les dizaines... sans parvenir à dire qu'il forme des nombres avec les chiffres.

Les différentes opérations sont groupées : «À cause ça va ensemble, c'est tout...tu sais là, c'est pas des chiffres...» Concevant toutefois qu'il calcule avec des chiffres, il déplace le mot calculer sous la colonne des diverses unités de mesure et fait suivre les autres cartons (+, -, ÷, x, %). Le nouveau tableau a donc la forme suivante.

Nombres
position valeur
chiffre
...
unité de million
centaine de mille
dizaine de mille
grosse enveloppe brune (unité de mille)
enveloppe blanche (centaine)
enveloppe brune (dizaine)
jetons (unités)
x
÷
-
+
%
calculer

Il précise à nouveau devoir placer du plus gros au plus petit, en ordre, mais ne fait pas de lien entre x et ÷ si ce n'est «Tu peux multiplier, pis après, tu peux diviser». Il en est de même pour les opérations d'addition et de soustraction. Un problème de billes perdues à l'école et le fait de prendre ce problème à partir du début ou de la fin, ne lui permet pas d'induire l'opération inverse.

S. reconnaît que tout ce dont il vient d'être question est mentionné dans la classe. Il explique qu'avec des nombres, il doit trouver la position et la valeur, et même qu'il doit opérer.

F. Évaluation finale

S. sait qu'il pourra évaluer sa progression aujourd'hui en observant la facilité avec laquelle il résout les problèmes que je lui pose. Il semble encouragé par cette perspective.

Habiletés de comptage

S. compte facilement par 1 et par 10, mais le double-comptage pose problème. C'est à l'expérimentation du double-comptage en marchant que S. réalise qu'il ne faut pas compter le point de départ, puisqu'il ne s'agit pas d'un pas. De même, le changement de centaine lors du comptage par 10 le laisse hésitant. Il croit d'abord que 1005 suit 1095, puis il explique qu'en sachant qu'il s'agit de dizaines, en arrivant à 95, : «Ça fait une centaine, ça fait que là ça faisait 1105».

Palier logico-physique

S. connaît le nom des différents groupements et considère qu'ils facilitent le comptage. Il illustre correctement le nombre 2220 sur l'abaque, reconnaît l'invariance en retransformant les dix dizaines en une centaine. L'équivalence entre trois personnages qui ont respectivement 3 paquets de 100 macarons, 2 paquets de cent macarons avec 100 macarons et enfin 300 macarons, n'est pas reconnue immédiatement. Les paquets du deuxième personnage semblent plus importants. Devant mon questionnement, il reconnaît l'équivalence.

Palier logico-mathématique

Les nombres de moins de 7 chiffres sont lus sans problème.
1 002 249 est lu «cent mille deux mille deux cent quarante-neuf», puis «dix millions deux mille deux cent quarante-neuf». Après avoir lu tous les autres nombres, c'est en énumérant les différentes positions à partir de l'unité de mille, qu'il arrive à se dépanner. Il ordonne correctement en utilisant d'abord le nombre qui a le plus de chiffres, puis en regardant le premier chiffre (7̲0 089) et enfin, lorsqu'ils sont semblables, le chiffre suivant.

L'écriture de nombres ne pose pas de problème, sauf pour le nombre 3 105 qu'il écrit 3000 105. La lecture de ce nombre lui permet de lire ce qu'il vient d'écrire, de le confronter à ce qui a été demandé et de corriger lui-même son erreur au moyen de l'identification des positions. Il explique qu'il avait entendu 300 105.

Le 0 du nombre 70 089 veut dire : «Il y en avait 10 ici(unité de mille), ça faisait une centaine, ça été 7 fois là, ça a donné 70, pis il fallait mettre un 0». S. sait que les 2 du nombre 2220 ne valent pas la même chose parce que leur position sont différentes. Il ajoute qu'il y a 222 dizaines, 2220 unités et 22 centaines. Il peut en faire la preuve en comptant le nombre de dizaines, d'unités ou de centaines pour chacune des positions et en les additionnant. «Je compte combien il y a de dizaines ici (position de la dizaine), combien il y a dans la centaine de dizaines, il y en a 20, pis dans l'unité de mille, il y en a 200, pis la ça fait 222».

Lorsque S. doit enlever 20 au nombre 2234, il affirme d'abord qu'il ne peut le faire parce que je ne lui ai pas dit s'il s'agissait de dizaines ou d'unités. Ce problème résolu, il enlève 2 anneaux de la tige des dizaines, en place 20 sur la tige des unités, échange les 20 unités contre 2 dizaines, qu'il replace sur la tige des dizaines et obtient le nombre 2234. Pour lui, il ne semble pas y avoir d'incohérence à enlever 20 et à obtenir le même nombre qu'au départ. S. explique : «Tu sais quand t'en as 10, ça fait une centaine, quand t'en as 10, ça fait une dizaine pis quand t'en as 20, ça fait 2 dizaines». Le dialogue qui s'engage me permet d'observer une confusion entre transformer et enlever. Pour S. lorsqu'il transforme des unités en dizaines, il les enlève. Nous identifions ce problème et expérimentons par la suite l'action d'enlever. C'est alors qu'il arrive au nombre 2214. S. a voulu transformer 20 en 2 dizaines, mais il a oublié la deuxième partie de la question (enlever) possiblement parce qu'il confond enlever et transformer. Il ajoutera par la suite 20 dizaines, en ajoutant 2 anneaux sur la tige des centaines et trouvera 2414.

Pour S. 20 unités et 2 dizaines sont équivalents. «Quand t'as 20 unités, 10 ça fait une dizaine, pis les 10 autres ça fait une autre dizaine, pis là, ça fait 20». 20 dizaines est plus grand que 20 unités parce que : «20 dizaines là, j'en ai 20, j'en enlève 10, ça me fait une centaine, j'en enlève 10 autres, ça m'en fait une autre». 20 dizaines est équivalent à 2 centaines «...j'en enlève 10, là ça m'en fait une, là j'en enlève 10 autres, ça m'en fait une». 20 centaines est lui aussi équivalent à 2000 : «J'ai 20 dizaines, j'en enlève 10, ça m'en fait 1, j'en enlève 10 autres, ç m'en fait une autre pis là... 2... 2000, ça fait 2000, pis 20 centaines ça fait 2000». Lors de chacune de ses explications, il dira qu'il «enlève» plutôt que «transforme» les différentes unités de mesure.

Arrondir n'est pas facile. Il connaît le truc, mais ne peut l'utiliser pour faire la preuve de ce qu'il avance. Ainsi 3105 est arrondi à la centaine (3100) en expliquant : «Ben le 1 est pas plus haut que le 5, là ça fait, là je mets deux 0 à la fin, ça fait que là ça fait 3100». S. n'arrive pas à trouver «l'autre centaine» qui est près de 3105 sans utiliser les enveloppes. Pour lui, 4000 suit 3100. Lorsqu'il découvre 3200, il croit qu'il y a 4 pas qui séparent 3105 de 3100 et 195 pas qui séparent 3105 de 3200. La soustraction selon l'algorithme ne lui est d'aucun secours, puisqu'il dit «0-9=9 et 0-5=0» (3200-3195=190). L'abaque lui permet de se corriger et de constater l'écart entre ce qu'il a fait sur l'abaque et ce qu'il a écrit sur la feuille. Le nombre de pas entre 3100 et 3105 et 3105 et 3200 lui permet de prouver que 3100 est le plus près. Le nombre 497 est arrondi à la centaine la plus proche en proposant 400. À nouveau, je lui suggère de trouver «l'autre» centaine et d'utiliser le double-comptage. Il parvient à se corriger.

Il recompose le nombre 709 en utilisant toutes les possibilités offertes.

Nous terminons l'évaluation en discutant du contenu des entrevues. Il a trouvé la dernière évaluation plus facile, même s'il trouve difficile de faire la preuve de ce qu'il avance. Il ajoute qu'il a bien aimé les histoires et que les questions qui l'ont le plus aidé sont celles qui ont porté sur la composition des nombres (dizaines...). Il considère toujours difficile de lire des nombres à 7 chiffres.