MAHA BELKHODJA

LA VISUALISATION EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS EN TANT QUE COMPÉTENCE À DÉVELOPPER À L'ÉCOLE

TOME 1

Thèse présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de doctorat en didactique
pour l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

Mai - 2007

Résumé

L'un des buts de l'apprentissage de la géométrie à l'école est le développement par les élèves de la capacité à « visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ». Il a été grandement négligé par le passé dans les programmes scolaires de mathématiques, notamment à l'époque des « mathématiques modernes », mais depuis les années quatre-vingt on a réaffirmé, au niveau international, la nécessité de le revaloriser en éducation mathématique. Notre recherche porte sur le thème de la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école (le terme « compétence » étant entendu dans le sens que lui donne le M.É.Q. dans le cadre de la réforme en éducation en cours au Québec). Pour atteindre le premier objectif de la thèse, qui était de décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », nous avons commencé par développer, en procédant par analogie avec le cas du « sens numérique », un modèle théorique original pour caractériser le « sens géométrique » dont la capacité en question constitue un aspect particulier. Ce modèle nous a permis de montrer de que cette capacité (avec ses deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » distincts mais complémentaires) est effectivement une « compétence » à développer à l'école. Puis nous avons précisé les principales « ressources » nécessaires à son développement, défini ses « niveaux de développement » (en prenant la théorie de van Hiele comme cadre de référence) et proposé des critères pour évaluer l'atteinte de chacun de ces niveaux. Le deuxième objectif de la thèse était de vérifier quelle importance était accordée au Québec au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, dans l'ancien curriculum de mathématiques pour le secondaire et dans le récent *Programme de formation de l'école québécoise*, de même que dans les diverses séries de manuels utilisées. Au moyen de grilles d'analyse et de questionnaires élaborés à partir du modèle théorique construit précédemment, nous avons analysé ces programmes et manuels et réalisé des entrevues, ce qui nous a permis de constater que la compétence à visualiser en géométrie a été et demeure grandement négligée au secondaire.

Remerciements

La réalisation de ma recherche et la rédaction de ma thèse ont été rendues possibles grâce au soutien de certaines personnes. J'aimerais prendre quelques lignes pour les remercier.

Je tiens d'abord à exprimer ma vive gratitude et ma haute considération à mon directeur de recherche, monsieur Claude Gaulin. J'ai beaucoup apprécié sa grande disponibilité, sa compréhension à mon égard et son soutien constant tout au long de mon cheminement. Il n'a jamais compté son temps et il a su m'encourager et me conseiller – notamment lorsqu'il y a eu des décisions difficiles à prendre. Je ne peux que lui être très reconnaissante.

J'aimerais ensuite remercier les autres membres du jury qui m'ont fait l'honneur de lire cette thèse : monsieur Harry White, qui a mis un soin particulier à en faire la prélecture et dont les critiques pertinentes et le souci de la qualité m'ont beaucoup aidée à l'améliorer ; monsieur Charles Cassidy, qui m'a fait découvrir le domaine de la didactique des mathématiques à l'époque où je faisais des études en mathématiques et qui en tant que mathématicien a encouragé ma recherche et a su en apprécier les résultats ; madame Ewa Puchalska qui, par sa lecture attentive et minutieuse et par ses suggestions judicieuses, a grandement contribué à l'amélioration de la qualité générale de mon travail.

Je tiens également à remercier les professeurs du Département d'études sur l'enseignement et l'apprentissage qui m'ont soutenue tout au long de ma recherche, et de façon spéciale monsieur Jean Dionne, qui m'a apporté un support indéfectible durant toutes ces années, et madame Barbara Bader, que j'ai appréciée en tant que grande amie et comme professeure et dont la présence et le soutien moral constants m'ont été très précieux.

Je veux aussi témoigner ma reconnaissance amicale à madame France Bilodeau pour toute l'aide qu'elle m'a apportée.

Je désire également remercier tout spécialement mes amies Christiane et Mahdokht, qui ont marqué mes années d'études au doctorat. Par leur amitié, elles ont assuré ma survie et je les porte chacune dans mon cœur ! Merci à elles pour les folies, les recettes et les discussions.

Je suis reconnaissante aux étudiantes et étudiants de l'ACCESE pour les échanges intellectuels et culturels qu'ils m'ont eus avec moi.

Je dédie cette thèse à mes parents, Dorra et Mohamed, de qui je tiens ces qualités de détermination et de persévérance qui m'ont permis de la réaliser. Qu'elle soit un témoignage de ma reconnaissance et de mon amour pour eux qui, dans la simplicité et l'humilité, ont su cultiver et transmettre à leurs enfants les plus grandes et les plus nobles des valeurs morales essentielles. Je remercie également mon frère et ma belle-sœur, Imed et Füssun, pour leur présence réconfortante.

Mes dernières pensées, et non les moindres, vont à ma famille. À mon conjoint Imed, qui a su, avec une patience sans cesse renouvelée et une compréhension absolue, m'assurer son soutien durant toutes ces années. À mes enfants, Hend, Heikel et Raché, que j'ai vus grandir en même temps que cette thèse et qui m'ont permis de partager leur lucidité et leur joie de vivre ; à eux trois, je souhaite que cette aventure demeure une preuve qu'il n'y a rien d'impossible et que les rêves sont accessibles à condition qu'on y mette les énergies nécessaires.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction

L'un des objectifs généraux de l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire et secondaire est le développement par les élèves de la capacité à visualiser dans trois et deux dimensions. Cet objectif a été grandement négligé par le passé dans les programmes scolaires de mathématiques, tout particulièrement à l'époque des « mathématiques modernes », l'accent étant principalement mis en géométrie sur les propriétés de figures géométriques élémentaires et sur le raisonnement déductif. Mais depuis les années quatre-vingt, on a réaffirmé et reconnu, au niveau international, la nécessité de revaloriser dans l'enseignement la capacité à visualiser en géométrie. C'est pour cette raison et également parce que la géométrie a toujours suscité grandement notre intérêt que nous avons décidé de faire notre recherche doctorale sur le thème de la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions.

Traditionnellement, on définissait les programmes scolaires au moyen d'une liste d'objectifs à atteindre, de capacités ou d'habiletés intellectuelles à acquérir, et d'attitudes d'ordre intellectuel ou affectif à développer. La partie géométrie des programmes de mathématiques n'échappait pas à la règle. Au moment où nous entreprenions notre travail s'annonçait au Québec une réforme fondamentale de l'éducation au préscolaire et de l'enseignement primaire et secondaire, axée sur le développement de « compétences » générales chez les élèves plutôt que sur l'atteinte d'un ensemble d'objectifs spécifiques. Compte tenu de cela, il nous est apparu pertinent et utile de mener notre recherche dans la perspective d'une « approche par compétences » en éducation. Notre thèse portera donc sur le thème de la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer à l'école (le terme « compétence » étant entendu dans le sens que lui donne le M. É. Q. dans le cadre de la réforme en éducation en cours au Québec).

La partie I de la thèse concerne la problématique et les objectifs de la recherche. Dans le chapitre 1, nous donnerons un aperçu de l'histoire de la géométrie et de son enseignement afin de dégager la place accordée à la « capacité à visualiser dans l'espace physique et en géométrie dans trois et deux dimensions » au fil du temps. Nous montrerons les raisons pour lesquelles il faut accorder, en éducation, une place importante au développement de cette capacité. Ensuite, nous regarderons la nature de cette capacité suivant les quatre principales perspectives présentes dans la littérature. Finalement, nous examinerons les différentes recherches effectuées à son sujet en didactique des mathématiques. Le chapitre 2 portera sur la notion de « compétence » et « l'approche par compétences ». Il en sera question d'abord d'une façon générale et ensuite pour le cas particulier de l'éducation, ceci nous amènera à donner la définition d'une « compétence » qui nous servira de base pour la suite. Au chapitre 3, nous formulerons les deux objectifs de la thèse et les questions de recherche qui leur sont associées, puis nous décrirons la méthode retenue pour répondre à chacune.

La partie II de la thèse est en rapport avec le premier objectif. Au chapitre 4, nous commencerons par décrire ce qu'on appelle le « sens numérique » en nous basant sur le modèle de McIntosh, Reys et Reys (1992), et nous vérifierons qu'il s'agit d'une « compétence » à développer à l'école, tout comme d'ailleurs la « capacité à faire des estimations numériques » qui en est l'un des aspects particuliers les plus importants. En procédant par analogie, nous proposerons un modèle descriptif de ce que nous appelons le « sens géométrique » et nous montrerons qu'il s'agit là également d'une « compétence » à développer à l'école, tout comme la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui en constitue un aspect particulier très important. Au chapitre 5, nous apporterons des précisions concernant cette dernière « compétence » : descriptions des principales ressources nécessaires à son développement, définition de ses niveaux de développement et proposition de critères pour évaluer l'atteinte de ces niveaux.

La partie III de la thèse est en rapport avec le deuxième objectif. Au chapitre 6, nous présenterons les résultats de l'analyse du curriculum en vigueur et des manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*. Le chapitre 7 portera sur l'analyse du nouveau curriculum de mathématiques (cf. *Programme de formation de l'école québécoise)* en vigueur au premier cycle du secondaire et des collections de manuels scolaires correspondants.

Enfin, dans la partie IV (chapitre 8), nous présenterons une synthèse et les conclusions auxquelles nous sommes parvenue, ainsi que quelques recommandations.

N.B. : Dans notre thèse, le genre masculin est utilisé à titre épicène.

PARTIE I

PROBLÉMATIQUE ET OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

Chapitre 1

La capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

Nous entamons dans ce chapitre la présentation de la problématique de notre thèse par un bref rappel de l'histoire de la géométrie et de son enseignement à travers différentes époques. Il ne s'agit pas ici de réécrire l'histoire, mais d'essayer de dégager la place accordée à la capacité à visualiser dans l'espace en géométrie au fil du temps. Nous continuerons en apportant des précisions sur la nature de celle-ci et sur différents types de travaux didactiques qui ont été réalisés à son sujet.

Il est à noter que dans la suite de ce travail, nous parlerons systématiquement de « *capacité* à visualiser » même si plusieurs auteurs préfèrent utiliser l'expression « *habileté* à visualiser »[1]. Toutefois, nous emploierons l'expression *habileté spatiale* qui est couramment utilisée en psychologie.

Également, nous ferons toujours une nette distinction entre *visualiser des formes et des relations spatiales dans l'espace physique environnant à trois dimensions* — nous parlerons alors de « visualisation dans l'espace » ou « visualisation spatiale»[2], — et d'autre part, *visualiser des figures et des relations géométriques dans trois dimensions* (en géométrie de l'espace) *ou dans deux dimensions* (en géométrie plane)[3].

---

[1] De l'examen des différents dictionnaires que nous avons consultés : *Dictionnaire actuel de l'éducation*, *Pédagogie : dictionnaire des concepts clés*, *Grand dictionnaire de la psychologie*, *Dictionnaire encyclopédique de l'éducation* et *Vocabulaire des sciences cognitives*, il ressort que les termes *capacités* et *habiletés* ne sont pas toujours faciles à distinguer, notamment dans le domaine cognitif.

[2] Certains auteurs préfèrent utiliser l'expression « perception spatiale ».

[3] À la limite, nous pourrions aussi parler de visualisation en géométrie dans une dimension (sur une ligne, notamment une ligne droite), mais cela présente peu d'intérêt pour notre travail. C'est pourquoi nous nous contenterons de parler par la suite de « visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions ».

1.1 Rappel d'éléments de l'histoire de la géométrie[4]

L'histoire de la géométrie a été l'objet d'étude de plusieurs auteurs. Même si d'un ouvrage à l'autre, plusieurs auteurs relatent les mêmes évènements, ils ne s'accordent pas cependant sur le nombre de périodes. Smith (1958), par exemple, divise l'histoire de la géométrie en quatre époques. Marchal (1948), pour sa part, distingue sept périodes pour relater l'histoire de la géométrie, tandis que Coolidge (1963) la sépare en six périodes. Quant à Eves (1963), il différencie sept époques pour parler des origines de la géométrie.

Afin de mieux contextualiser le sujet de notre travail, nous allons d'abord rappeler des éléments de l'histoire de la géométrie. Puisqu'il n'y a pas de consensus chez les historiens quant à la subdivision de cette histoire en un certain nombre de périodes, pour les besoins de notre travail, nous en distinguerons six.

PÉRIODE DE LA GÉOMÉTRIE CONCRÈTE (ENVIRON 3000 – 1500 AV. J.-C.)

Plusieurs auteurs (Eves, 1963 ; Marchal, 1948 ; Smith, 1958 ; Coolidge, 1963) s'accordent à dire que la géométrie dans ses débuts fut une science d'observation. Par contre aucune donnée ne leur a permis d'évaluer le nombre d'années ou de siècles que cela a duré. Les premières recherches en géométrie sont généralement attribuées aux Égyptiens et aux Babyloniens. Leurs connaissances se composaient de formules ou de procédures obtenues par la routine de l'expérience sans être jamais justifiées. En Égypte, par exemple, le retour périodique des inondations du Nil obligeait les arpenteurs à reprendre chaque année le tracé des limites des propriétés. Marchal (1948) explique que ces problèmes d'arpentage ont conduit les Égyptiens aux propositions élémentaires de la géométrie. Godeaux (1952) rapporte que pour évaluer l'aire d'un quadrilatère de côtés a, b, c, d, les Égyptiens se servaient de la formule $\frac{a+b}{2} \times \frac{c+d}{2}$ donnant une valeur d'autant plus approchée que les angles du quadrilatère se rapprochent d'angles droits. De même, pour calculer l'aire d'un triangle isocèle de côtés a, a, b, ils utilisaient la formule $\frac{ab}{2}$ qui

---

[4] Nous remercions M. Bernard Hodgson, professeur au Département de mathématiques et statistique à l'Université Laval, d'avoir bien voulu réviser cette section et suggérer des améliorations.

donne une approximation d'autant plus grande que a est plus grand par rapport à b. Toujours d'après le même auteur, les Égyptiens savaient aussi calculer l'aire du cercle, le volume du tronc de pyramide et la surface de la sphère. Ces informations nous parviennent, d'après Godeaux (1952) et Eves (1963), de la traduction du papyrus *Rhind* qui date de 1700 à 2000 av. J.-C.

À Babylone également, la géométrie pratique se développa assez tôt. Les vestiges de cette géométrie sont inscrits sur des tablettes d'argile cuites déterrées en Mésopotamie. L'examen de celles-ci révèle que la géométrie des Babyloniens était intimement reliée aux activités de mesurage (Eves, 1963). Eves (1963) et Caveing (1985) relatent que plusieurs exemples datant de 2000 à 1600 av. J.-C. montrent que les Babyloniens connaissaient des façons de calculer l'aire du carré, du rectangle, des triangles rectangle et isocèle, du trapèze, de même que les volumes d'un cube, d'un parallélépipède rectangle, d'un prisme droit, d'un cylindre et d'un tronc de pyramide à base carrée. Aussi, ils savaient, du moins d'un point de vue numérique, que le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des deux autres côtés du triangle rectangle. Ils pouvaient résoudre quantité de problèmes sur le cercle et le demi-cercle. Taton (1966) souligne que dans les textes à caractère géométrique, les figures, qui sont en général simples, ne servent qu'à illustrer l'énoncé. L'auteur affirme que : « Jamais elles [figures] n'interviennent dans la solution et il arrive fréquemment que les proportions ne soient pas respectées : les Babyloniens ont su calculer « juste » sur des figures fausses » (Taton, 1966 ; p. 103).

Même si ces deux civilisations semblent étrangères l'une à l'autre, il n'en reste pas moins qu'elles ont des points communs. Leur science était essentiellement empirique. Il n'y avait pas de démonstrations, il n'y avait pas de théorèmes, il n'y avait pas d'énoncés théoriques. Pour obtenir un résultat, les Égyptiens et les Babyloniens faisaient preuve d'une grande sagacité, d'une grande habileté technique. Les aspects visuel et intuitif de la géométrie étaient probablement sur quoi ils s'appuyaient pour mener leurs calculs. Quand bien même ils ont donné les éléments essentiels à l'élaboration de la géométrie, il a fallu attendre les Grecs pour en dégager des idées générales et des lois et introduire un merveilleux ordre logique dans la géométrie.

MÉTHODE DÉDUCTIVE ET AXIOMATIQUE EN GÉOMÉTRIE (ENV. 600 AV. J.-C.- 600 AP. J.-C.)

Les connaissances mathématiques égyptiennes et babyloniennes sont parvenues en Grèce à la faveur des échanges commerciaux. Comme nous venons de le voir, la géométrie chez les Orientaux était de nature empirique. Caveing (1985) explique que l'apport initial de la pensée grecque dans les mathématiques réside dans l'étude des relations de grandeurs abstraites d'un dessin, lui même abstrait. Chez les Grecs apparaît également l'idée de démontrer la véracité d'une proposition qui a été découverte intuitivement.

Soulignons qu'à cette époque, le raisonnement déductif était considéré comme la méthode la plus correcte permettant d'obtenir des vérités. À ce propos, Kline (1989) signale l'importance de « comprendre *combien était radicale l'insistance sur les preuves de nature déductive* » (p. 43). Suivant plusieurs auteurs (Godeaux, 1952 ; Eves, 1963 ; Kelly et Ladd, 1965 ; Toretti, 1978 ; Smith, 1958), l'usage de la méthode déductive en géométrie est associé à Thalès de Milet (640–546 av. J.-C.). Marchal (1948) explique qu'il fut le premier à grouper les cas particuliers concrets et isolés pour en dégager une proposition générale à caractère scientifique. Élève de Thalès, Pythagore de Samos (approx. 569–470 av. J.-C.) a aussi été l'auteur de plusieurs découvertes géométriques. Marchal (1948) relate qu'il a trouvé diverses propositions concernant la somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la construction de certains polygones réguliers. L'importance du théorème de Pythagore, expliquent Marchal (1948) et Caveing (1985), réside d'une part en lui même et d'autre part dans la relation naissante entre l'arithmétique et la géométrie. Platon (427–347 av. J.-C.) a aussi joué un rôle important dans le développement de la géométrie, même si une grande incertitude règne au sujet de ses découvertes – notamment en ce qui concerne les cinq polyèdres réguliers convexes (Marchal, 1948).

L'utilisation considérable de l'aspect déductif des mathématiques a fait naître l'idée de développer la géométrie en une suite de propositions successives (Eves, 1963). Suivant le même auteur, il paraît que Hippocrate de Chios a été le premier à tenter, avec peu de succès, une présentation logique de la géométrie sous la forme d'une suite de propositions basées sur un petit nombre de définitions et de suppositions. Vers 300 av.

J.-C., Euclide produit son fameux traité les *Éléments.* Il réunit les éléments épars, les coordonne et en constitue une doctrine comportant des démonstrations rigoureuses. L'ouvrage d'Euclide est composé d'une suite déductive de 465 propositions divisées en treize livres en rapport avec la géométrie plane, la théorie générale des grandeurs et de leurs rapports, l'arithmétique, la classification des incommensurables et la géométrie de l'espace (Godeaux, 1952 ; Eves, 1963). Cet ouvrage est le plus ancien exemple qui a utilisé le modèle axiomatique, c'est-à-dire : « un mode d'exposition des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration et nettement formulées et des raisonnements rigoureux » (Glaeser, 2002). Euclide s'est appuyé sur trois sortes de données de base : les définitions, les postulats et les axiomes. À propos des définitions, Godeaux (1952) fait remarquer que : « les définitions qu'Euclide donne n'impliquent nullement l'existence des objets définis » (p. 14) et il les qualifie d'obscures. Quant aux postulats et axiomes, Eves (1963) attire l'attention sur la distinction adoptée par Euclide : « An axiom is an initial assumption common to all studies, whereas a postulate is an initial assumption pertaining to the study at hand » (p. 19-21). Vitrac (1990) rapporte que la géométrie d'Euclide repose sur vingt trois définitions, cinq axiomes et cinq postulats.

Reconnu comme un des plus illustres savants, Archimède (287–212 av. J.-C.) a fait des découvertes fondamentales dans les domaines les plus divers. En géométrie, ses travaux sont considérables. Ils concernent, entre autres, la sphère et le cylindre, les sphéroïdes et les conoïdes, la quadrature et les coniques (Marchal, 1948 ; Kline, 1989). Un autre géomètre grec qui a marqué l'histoire de la géométrie est Apollonius (262–190 av. J.-C.). Il a poursuivi les recherches sur la parabole, l'ellipse et l'hyperbole entamées par Euclide et a rédigé le célèbre traité classique les *Sections Coniques.* Marchal (1948) affirme que ce traité constitue le premier ouvrage de géométrie pure. Ainsi donc Euclide, Archimède et Apollonius ont marqué l'époque glorieuse de la géométrie grecque. Après eux, pendant quelques temps encore, certains géomètres ont apporté quelques améliorations à cet acquis mais sans que des découvertes de grande importance voient le jour. Chez Ptolémée (98–168 ap. J.-C.), qui est connu par son œuvre *Composition mathématique* ou *Almageste,* on trouve un traité complet de trigonométrie rectiligne et sphérique. Pappus, qui a vécu au III^e^ siècle, est l'auteur de la première quadrature connue d'une surface courbe. Proclus (412–485 ap. J.-C.) a produit un traité sur la sphère et formulé des commentaires sur Euclide qui ont éclairci bien des points de l'histoire de la géométrie grecque (Marchal, 1948 ; Godeaux, 1952).

Même si les aspects déductif et axiomatique de la géométrie ont dominé au cours de cette période, la présence des figures était indéniable. Cependant, la construction d'une figure n'était qu'un support visuel du problème étudié. Il n'est même pas surprenant de supposer que les mathématiciens de l'époque se construisaient des images mentales à propos de certaines figures simples.

PÉRIODE DE STABILITÉ RELATIVE (DE LA FIN DU MONDE ANTIQUE À LA RENAISSANCE)

En Occident, durant les siècles qui se sont écoulés de la fin du monde antique à la Renaissance, on n'a presque pas connu de progrès intellectuel. Marchal (1948) affirme que : « on n'enregistre aucun progrès scientifique, et la stagnation demeure en Occident complète jusqu'au XII^{e} siècle environ » (p.50). La géométrie n'en fait pas exception. Elle « entre dans une ère de stagnation, ou du moins de progrès extrêmement lents » (Marchal, 1948 ; p. 49). En Orient, au cours de cette période, l'Inde et le monde arabe ont contribué à assurer la continuité de l'activité mathématique. Kline (1989) relate que les Arabes ont réalisé des études critiques des œuvres géométriques grecques et ont apprécié pleinement le rôle de la preuve déductive. Cependant, rien de notable ni de fondamental n'a été ajouté aux connaissances déjà acquises. Malgré cela, Tournès (2001) précise que les mathématiciens arabes n'ont pas abandonné les méthodes géométriques de construction. Il explique qu'à défaut de trouver des formules algébriques pour les équations du troisième degré, ils ont approfondi la construction de ces équations par intersection de coniques. La figure a donc continué de jouer le rôle de support visuel dans l'étude des problèmes posés. Suivant Eves (1963), au cours du XI^{e} siècle les connaissances grecques et arabes se sont infiltrées en Europe et des traductions de l'arabe au latin ont été réalisées. Celles-ci se sont intensifiées au siècle suivant. Au XIII^{e} siècle, des traductions d'Euclide ont commencé à devenir plus fréquentes. Il faudra attendre le début de la Renaissance européenne, au XV^{e} siècle, pour que les sciences connaissent un épanouissement.

Nouveaux développements en géométrie et naissance des géométries non euclidiennes (XVII^e et XVIII^e siècles)

Comme nous venons de le mentionner, la géométrie n'a pas connu de découverte significative pendant près de 2000 ans. Elle est restée comme elle était du temps des Grecs. Au début de la période qui a suivi la Renaissance européenne, l'activité mathématique a concerné principalement l'arithmétique, l'algèbre et la trigonométrie (Eves, 1963 ; Verriest, 1951). Mais par la suite ont été découvertes en géométrie une foule de propositions déduites des *Éléments* d'Euclide concernant le cercle et les figures rectilignes (Eves, 1963). À ce propos, Becker et Hofmann (1956) citent notamment les travaux de Lexell qui a surtout travaillé sur les petits cercles de la sphère, de Steiner qui a résolu le problème d'inscrire dans un triangle trois cercles tangents entre eux, et de Cramer qui a posé le problème consistant à inscrire dans un cercle un triangle dont les côtés passent par trois points donnés. Euler (1707–1783) a découvert la relation relative à la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle, a étudié la courbure des sections planes de surfaces, a mis au point la relation (formule d'Euler) entre les nombres de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre convexe et résolu le problème des ponts de Königsberg relevant de la topologie combinatoire, a fait de la trigonométrie une discipline indépendante, etc. Les *Éléments* d'Euclide et toutes ces nouvelles propositions constituent ce que plusieurs auteurs appellent la *géométrie élémentaire moderne*.

Le progrès remarquable qu'a connu l'algèbre au début de la Renaissance européenne, a fait naître chez Descartes (1596–1650) et Fermat (1601–1665) l'idée de l'appliquer à la géométrie. C'est ainsi que la *géométrie analytique* est née. Marchal (1948) explique que son application au plan, à l'espace à trois dimensions et aux dimensions supérieures a conduit à des résultats de la plus haute importance. Il rapporte aussi que les nouveaux résultats obtenus ont conduit à négliger pour un temps la géométrie pure. Un demi-siècle plus tard, le calcul différentiel et intégral est né avec les travaux de Fermat, Pascal, Newton et Leibnitz (Verriest, 1951 ; Marchal, 1948). Son application à la géométrie, a permis de calculer la courbure d'une courbe et celle d'une surface et de résoudre d'innombrables questions inaccessibles aux méthodes antérieures (Verriest, 1951). Ainsi est née une nouvelle branche de la géométrie connue sous le nom de *géométrie infinitésimale*.

Durant cette période, l'algèbre et le calcul infinitésimal ont donc permis à la géométrie de réaliser des progrès considérables. Cependant l'esprit géométrique a disparu. Le mot *droite,* par exemple, fait surtout référence à l'équation d'une droite plutôt qu'à son image géométrique. Ce n'est qu'avec Desargues (1593–1662) que l'intérêt pour les méthodes purement géométriques est réapparu au début du XVII^{e} siècle (Eves, 1963). Vers la fin du XVIII^{e} siècle, le géomètre Monge (1746–1818) a élaboré *la géométrie descriptive* laquelle selon Godeaux (1952) a permis l'étude des propriétés de l'espace ainsi que la découverte de nouvelles propriétés en géométrie plane. La naissance réelle de la *géométrie projective* est attribuée à Poncelet (1788-1867) dont le *Traité des propriétés projectives des figures* publié en 1822 contient de riches idées originales. Comme le souligne Verriest (1951), avec la géométrie projective l'esprit géométrique pur règne de nouveau en maître. Le raisonnement se fait directement sur des figures et non sur des êtres géométriques cachés sous des symboles ou des calculs algébriques. La rupture avec la géométrique analytique est radicale.

Concurremment à ce qui précède sont nées les géométries non euclidiennes. Parmi les postulats qu'Euclide a introduits dans ses *Éléments,* figure le fameux *postulat des parallèles.* Considérant que ce postulat ne semblait pas aussi intuitif et évident que les autres, plusieurs mathématiciens ont tenté de le réduire à un théorème démontrable à partir des autres postulats (Greenwood, 1943). Ne réussissant pas à en faire une démonstration directe, Saccheri (1667–1733) tenta d'en trouver une preuve par l'absurde. Cette nouvelle façon de faire l'amena à créer une nouvelle géométrie sans vraiment le savoir. Greenwood (1943) et Eves (1963) rapportent que, devant la complexité des théorèmes qu'il a obtenus, Saccheri avait la vive conviction que son travail comprenait une contradiction quelque part, ce qui l'a amené à l'abandonner. Kline (1989) relate que par la suite, conscient que le postulat des parallèles ne pouvait pas être prouvé sur la base des autres postulats d'Euclide, Gauss (1777–1855) a construit une géométrie différente de celle d'Euclide qu'il appela *géométrie non euclidienne,* basée sur le postulat selon lequel il existerait plusieurs parallèles à une droite passant par un même point. Malgré sa conviction que sa géométrie était logiquement consistante et qu'elle trouverait éventuellement des applications, il renonça à la publication de ses travaux de peur d'être critiqué par les Béotiens. Les deux mathématiciens à qui on attribue généralement la création d'une telle géométrie non euclidienne sont Lobachevsky (1793–1856) et Bolyai (1802–1860). Indépendamment l'un de l'autre, ces derniers ont édifié une géométrie basée sur la négation du postulat des parallèles d'Euclide. Lobachevsky lui donna le nom de *géométrie imaginaire* ou de *pangéométrie* alors que Bolyai parla d'une *science absolue de l'espace* (Greenwood, 1943). De nos jours cette géométrie s'appelle la *géométrie hyperbolique*.

Plus tard, Riemann (1826–1866) a développé une autre géométrie non euclidienne dite *géométrie elliptique,* parfaitement cohérente où la notion de parallèle n'existe pas et la droite a une longueur finie (Godeaux, 1952). Eves (1963) et Verriest (1951) soulignent que depuis la découverte des géométries non euclidiennes que constituent la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique, d'autres ont pu voir le jour. Plusieurs mathématiciens cherchèrent à savoir si ces géométries ne comprenaient pas une quelconque contradiction. Ceci a été réalisé de façon pleinement satisfaisante grâce aux travaux de Klein (1849–1925) (Russo, 2002). De plus, en associant à chacune des géométries non euclidiennes un groupe de transformations approprié, Klein a montré qu'elles apparaissent comme des cas particuliers de la géométrie projective. Un peu plus tard, en 1872 dans son célèbre mémoire *Programme d'Erlangen,* Klein a proposé la définition suivante d'une géométrie : « Une géométrie est l'ensemble de toutes les notions et de toutes les propriétés qui restent conservées lorsqu'on fait subir à une figure toutes les transformations appartenant à un groupe donné » (Verriest, 1951 ; p. 169).

Une fois de plus, au cours de cette période, les figures ont continué de jouer le rôle de supports visuels au raisonnement.

LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE (XIXe SIÈCLE ET DÉBUT DU XXe SIÈCLE)

La création des géométries non euclidiennes et la rigidité des conceptions classiques de la géométrie ont révélé que certains problèmes de base étaient mal posés, notamment celui des origines des axiomes (Rossier, 1971). À la fin du XIXe siècle, plusieurs géomètres parmi lesquels Pasch, Peano et Veronese, se sont consacrés à l'étude des fondements de la géométrie. Mais c'est surtout avec Hilbert (1862–1943) que la géométrie euclidienne a trouvé toute sa rigueur logique. Dans son ouvrage *Grundlagen der Geometrie* paru en 1899, celui-ci a établi pour la géométrie euclidienne un nouveau système d'axiomes ou de postulats (contrairement à Euclide, il considère ces deux termes comme synonymes). Il a établi vingt et un axiomes et les a répartis en cinq groupes correspondants aux notions d'association, de distribution, de parallélisme, d'égalité et de continuité (Verriest, 1951 ; Godeaux, 1952). Il a ensuite soigneusement démontré que ces axiomes sont indépendants et ne conduisent pas à des contradictions (Verriest, 1951 ; Godeaux, 1952 ; Russo, 2002). Mais ce qu'il a accompli dans cet ouvrage est beaucoup plus que la mise au point de la méthode axiomatique. Hilbert a aussi établi des liens importants entre la géométrie et l'analyse mathématique. Il a créé une nouvelle théorie des aires des polygones. Il a démontré les théorèmes de Desargues et de Pascal sous des aspects nouveaux (Rossier, 1971). Selon Eves (1963), les recherches de Hilbert sont à l'origine de l'étude abstraite de la géométrie du XX^e^ siècle.

Plusieurs décennies plus tard, un groupe de mathématiciens connu sous le pseudonyme de Nicolas Bourbaki a entrepris de reconstruire tout l'édifice mathématique selon la pensée formaliste de Hilbert. Pour sa construction axiomatique, Bourbaki a pris comme point de départ la logique formelle et la théorie des ensembles, et a introduit la notion de structure. Il fait une distinction entre structures algébriques, structures d'ordre et structures topologiques. Tous ses travaux sont basés sur le principe de l'unité de la mathématique. Son influence dans la mathématique contemporaine a été considérable. Dans cette perspective, la géométrie euclidienne est devenue essentiellement une partie de l'algèbre linéaire et son aspect visuel a complètement disparu.

La géométrie de nos jours

Aujourd'hui, la géométrie est considérée comme l'étude des espaces. Eves (1965) explique que les éléments de l'espace sont communément appelés points et l'ensemble des relations auxquelles ils sont soumis est dit structure. Il en résulte qu'il ne faut plus parler de géométrie (au singulier), mais de géométries (au pluriel), chacune étant construite selon son propre système d'axiomes et étant caractérisée par son propre groupe de transformations. On retrouve donc les géométries affine, vectorielle, euclidienne, elliptique, hyperbolique, projective, algébrique, différentielle, etc. La géométrie euclidienne classique, elle, n'existe plus en tant que branche autonome des mathématiques. Elle est devenue une partie de l'algèbre moderne. Cependant, le langage, la méthode et la façon de raisonner restent encore irremplaçables. La géométrie fractale, une des nouvelles créations de la fin du XX^{e} siècle, cherche, en partant des objets géométriques usuels, à se rapprocher des objets de la nature. La figure reprend ainsi son rôle premier. Aussi, les nombreuses recherches faites sur la représentation des figures géométriques à l'aide d'un support informatique ont abouti à la notion de géométrie dynamique. À l'heure des nouvelles technologies, des logiciels comme *Cabri–Géomètre*, *Géoplan* et *Geometer's Sketchpad* permettent d'animer les figures géométriques, de vérifier ou d'illustrer certaines de leurs propriétés. Ainsi, avec ces nouvelles technologies, l'aspect visuel a repris sa place d'antan.

1.2 L'enseignement de la géométrie

Après avoir présenté l'évolution de la géométrie du point de vue des mathématiques, nous allons maintenant nous pencher sur l'enseignement de cette discipline. D'abord nous examinerons les objectifs généraux visés par cet enseignement, puis son évolution et enfin les objectifs spécifiques des programmes scolaires de géométrie.

1.2.1 Les objectifs généraux de l'enseignement de la géométrie

Les objectifs généraux de l'enseignement de la géométrie ont déjà préoccupé plusieurs auteurs et les écrits abondent à leur sujet. Il est intéressant de remarquer qu'au fil des années ces objectifs ont beaucoup évolué. Alors que les raisons invoquées jusqu'au milieu du XX^{e} siècle concernaient particulièrement le développement de la pensée logique, depuis environ une vingtaine d'années d'autres objectifs reliés au quotidien, au social et au développement de la connaissance d'une façon générale sont évoqués. C'est ainsi que la *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* en France cite, dans son *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, les sept raisons suivantes : la vision dans l'espace, l'apprentissage du raisonnement, les aspects esthétiques et culturels de la géométrie, la géométrie dans la vie courante, la formation des techniciens et des ingénieurs, la géométrie dans les autres sciences et la géométrie dans les mathématiques. Usiskin (1997) met l'accent sur la relation qu'offre la géométrie entre les mathématiques et le monde réel physique, sur la représentation qu'elle permet de phénomènes dont l'origine n'est ni physique ni visuel et sur l'étude, par la géométrie, des « modèles » visuels (visual patterns). Hansen (1998) pour sa part met de l'avant la connaissance du plan et de l'espace, la préparation aux applications de la géométrie, la présentation de l'histoire du développement de la géométrie, le développement de capacités et la consolidation de la pensée logique et du raisonnement déductif. Suydam (1985 ; cité dans Clements & Battista, 1992) quant à elle, souligne l'existence d'un consensus concernant les quatre buts suivants : « develop logical thinking abilities, develop spatial intuition about the real world, impart the knowledge needed to study more mathematics, and teach the reading and interpretation of mathematical arguments ». Sherard (1981) évoque les raisons suivantes : l'aide à la communication, les importantes applications aux problèmes de la vie réelle, les importantes applications en mathématiques, la précieuse préparation aux cours supérieurs de mathématiques et de sciences et pour une variété de carrières, le développement de la perception spatiale, la stimulation des habiletés de pensée et de résolution de problèmes, les valeurs culturelles et esthétiques.

Comme nous venons de le constater, chaque auteur valorise certains objectifs particuliers de son choix. Pour les besoins de notre travail, nous retiendrons les cinq objectifs généraux qui suivent pour l'enseignement de la géométrie.

PREMIER OBJECTIF GÉNÉRAL : PERMETTRE À L'ÉLÈVE D'APPRENDRE DES CONNAISSANCES (SAVOIRS ET SAVOIR-FAIRE) UTILES DANS LA VIE QUOTIDIENNE

La géométrie détient un caractère concret, lié à son aspect visuel, qui fait qu'elle peut être utile à chacun dans son métier comme dans sa vie de tous les jours. Cet aspect pratique avait déjà une place dans les livres de géométrie d'autrefois. Par exemple, le traité de géométrie projective de Desargues au XVII^{e} siècle avait pour but essentiel de donner des méthodes fiables pour la taille des pierres. Aussi, un des objectifs de la géométrie descriptive de Monge était son application militaire. L'utilité des notions géométriques dans plusieurs métiers – par exemple, la relation de Pythagore pour les maçons et la géométrie du triangle pour les charpentiers – reste incontournable au fil du temps. De plus, dans les métiers où on utilise des logiciels de dessin, l'appel à la vision géométrique est constant. Mais en dehors de cette utilisation professionnelle, le citoyen ordinaire rencontre plusieurs occasions liées à la vie courante pour utiliser ses connaissances géométriques et résoudre des problèmes. Par exemple, lire une carte routière pour s'orienter dans une ville, comprendre les plans des objets à monter soi-même, interpréter correctement les représentations géométriques de données statistiques, déplacer un meuble en étant capable de prévoir si la manœuvre est possible ou pas, centrer un cadre sur le mur, planter des fleurs dans le jardin, savoir le nombre de pots de peinture nécessaires pour peindre la maison, poser un carrelage, installer l'air climatisé, etc. Et puisque nous vivons dans un environnement physique, des termes géométriques tels que point, ligne, angle, cercle, polygone, cube, sphère, parallèle, perpendiculaire, etc., sont couramment utilisés pour décrire ce qui nous entoure, indiquer le chemin à quelqu'un, et décrire des formes et des relations dans l'espace.

DEUXIÈME OBJECTIF GÉNÉRAL : APPRENDRE À L'ÉLÈVE DES CONNAISSANCES (SAVOIRS) GÉOMÉTRIQUES UTILES POUR D'AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES ET POUR D'AUTRES DISCIPLINES ET DOMAINES

En mathématiques, des exemples et des modèles géométriques sont souvent utilisés pour illustrer des concepts, par exemple la droite dans le cas des nombres réels, des représentations géométriques dans le cas des nombres rationnels, des graphes dans le cas des fonctions, etc. Certaines notions mathématiques ont des définitions et des interprétations géométriques importantes. Par exemple, l'intégrale d'une fonction correspond à l'aire sous la courbe qui la représente, la dérivée d'une fonction en un point est la pente de la tangente au graphe de la fonction de ce point. Il existe aussi de nombreux domaines des mathématiques où la géométrie intervient indirectement de manière essentielle, par exemple : l'étude de nuages de points dans un espace euclidien à n dimensions en statistique ; l'appel aux polyèdres en recherche opérationnelle ; les graphes, les arbres, les maillages, les pavages etc. en géométrie algorithmique. De plus, la géométrie joue un rôle important dans d'autres disciplines et domaines. Par exemple, les notions de longueur, de surface, de volume, de vecteur, de déplacement, etc. sont essentiels en physique ; les propriétés géométriques des diagrammes permettent de prévoir des comportements en physique des particules ; les déplacements de l'espace jouent un rôle essentiel en mécanique des solides ; les coniques sont indispensables à la mécanique céleste ; la triangulation, la latitude, la longitude, les parallèles, les courbes de niveaux, les coupes, les pentes, etc. sont nécessaires en géographie ; les courbes et les surfaces sont utiles dans le design ; les rotations, les translations, les mouvements de rotation et de translation en robotique ; les polyèdres et la géométrie tridimensionnelle sont particulièrement indispensables en cristallographie. Les figures et les propriétés géométriques trouvent de nombreuses applications pratiques en architecture, en topographie, en aéronautique, etc. Pour toutes ces raisons, Audibert (1994) qualifie la géométrie de « discipline de service ».

TROISIÈME OBJECTIF GÉNÉRAL : STIMULER LE DÉVELOPPEMENT DU SENS GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉLÈVE

L'enseignement de la géométrie est de nature à développer le « sens géométrique »[5] des élèves et particulièrement leur capacité à visualiser dans trois et deux dimensions. En effet, à l'occasion d'activités spatiales ou géométriques, les élèves sont amenés à visualiser mentalement des figures (droite, triangle ou sphère, etc.), des relations (par exemple le parallélisme de droites ou de plans), et des transformations (par exemple une symétrie par rapport à une droite ou à un plan) géométriques ; afin de mieux comprendre ou communiquer à autrui certaines notions géométriques, ils peuvent être amenés à utiliser différents moyens (représentations graphiques, terminologie, symbolismes, etc.) pour mieux visualiser ces notions. De telles activités, pouvant stimuler le sens

---

[5] En Amérique du Nord, sous l'influence du National Council of Teachers of Mathematics, il est question dans les programmes et les manuels de mathématiques du développement du « sens spatial » des élèves. De même que l'expression « sens numérique » est couramment utilisée pour désigner les connaissances, capacités et attitudes à développer à l'école en rapport avec le domaine numérique, nous trouvons plus pertinent de parler du « sens géométrique » (plutôt que de « sens spatial ») pour désigner celles à acquérir à l'école dans le domaine géométrique. La capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions constitue donc un volet particulier du « sens géométrique », sur lequel nous reviendrons dans la section 4.2.

géométrique, comprennent par exemple l'étude d'un solide vu sous différents angles, la détermination des diverses sections planes d'un solide, les développements et les représentations planes d'objets tridimensionnels, etc. Il peut s'agir encore d'assembler un objet en suivant les instructions d'un croquis bidimensionnel, d'imaginer à quoi ressemblera une maison lorsqu'on examine son plan, de représenter ce qui nous entoure par un plan, un schéma, une vue en perspective, de produire un plan pour prévoir un trajet, se déplacer dans une ville inconnue, etc. Usiskin (1997) n'affirme-t-il pas : « Geometry is the study of the visualization, drawing, and construction of figures » ?

QUATRIÈME OBJECTIF GÉNÉRAL : INITIER L'ÉLÈVE À LA PENSÉE LOGIQUE (NOTAMMENT AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF) ET LA RIGUEUR

Traditionnellement l'enseignement de la géométrie avait pour objectif principal d'initier l'élève à la pensée logique, au raisonnement déductif et à la rigueur. De nos jours, cet objectif demeure très important. Cet avis est, en effet, soutenu par plusieurs auteurs dont Herstein (1975 ; cité dans Quadling, 1986) qui affirme que « le but de la géométrie (enseignée au secondaire) est d'initier l'élève au raisonnement exact et déductif ». La pensée logique et le raisonnement déductif peuvent se développer avec des activités telles que : trouver des stratégies adéquates pour résoudre des problèmes, généraliser des résultats à partir de cas particuliers, chercher diverses démonstrations pour des énoncés, essayer de formuler une théorie étape par étape et l'organiser de façon cohérente, etc. La richesse du raisonnement déductif en géométrie s'appuie sur l'observation de figures, l'élaboration de conjectures, leur soumission à un examen critique puis leur validation au moyen d'une démonstration mathématique. Par ailleurs, la résolution de véritables problèmes fournit l'occasion aux élèves de développer des stratégies de résolution de problèmes telles que : dégager des régularités, tenter de généraliser un résultat, procéder par essais et erreurs, formuler et vérifier des conjectures, faire appel à des contre-exemples, etc.

CINQUIÈME OBJECTIF GÉNÉRAL : FOURNIR L'OCCASION À L'ÉLÈVE D'APPRENDRE LA DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES ET DE S'INITIER À L'AXIOMATIQUE

Suivant une longue tradition, l'enseignement de la géométrie a aussi pour objectif d'initier l'élève à la démonstration en mathématiques — où chaque affirmation doit découler des précédentes par déduction logique et chaque étape doit être justifiée en s'appuyant sur des propositions admises comme vraies (axiomes ou postulats) ou démontrées précédemment. Le dessin géométrique sert également de support représentatif à certains objets abstraits et propriétés et permet une aide aux enchaînements logiques de la démonstration. C'est pourquoi Glaeser (1987) voit la géométrie comme l'instrument exceptionnel pour faire apprécier l'utilité des démonstrations mathématiques. Par ailleurs, l'élève saisit le sens de la démonstration au moment où il comprend que pour démontrer il faut penser, essayer, raturer et se tromper, c'est-à-dire lorsqu'il différencie l'approche intuitive et l'évidence du raisonnement.

La géométrie étant généralement présentée de façon axiomatique, son enseignement a toujours eu pour rôle pédagogique privilégié d'initier l'élève à l'axiomatique. Cependant, les avis sont partagés à propos de l'organisation axiomatique de la géométrie. En effet, dans l'enseignement traditionnel, la géométrie était organisée globalement sous forme axiomatique. Il s'est avéré que les élèves avaient beaucoup de difficultés à assimiler en général ce mode de présentation de la géométrie. Avec la démocratisation de l'enseignement, l'axiomatisation globale de la géométrie a été éliminée ou reportée plus loin dans le cursus scolaire pour être remplacée par l'axiomatisation locale. Cette dernière consiste en des raisonnements où l'élève peut déduire des propositions à partir de d'autres considérées comme évidentes sans avoir à les formuler auparavant à titre d'axiomes. De toute façon, qu'il s'agisse d'axiomatisation locale ou globale, la géométrie permet à l'élève de s'initier à l'axiomatique.

À propos de la géométrie et des raisons de son enseignement, Alexandrov (1980) écrit : « La géométrie est par essence la combinaison d'une vive imagination et d'une logique rigoureuse qui s'organisent et se guident mutuellement… L'enseignement de la géométrie a par conséquent pour fonction de développer chez l'enfant trois qualités :

l'imagination spatiale, la compréhension concrète et la pensée logique » (cité dans Chernysheva *et al.*, 1987, p. 107).

1.2.2 L'évolution de l'enseignement de la géométrie

L'enseignement, dans le but d'apporter une aide à autrui pour le préparer à la vie, est aussi vieux que l'humanité. Il occupe une place importante dans l'histoire des civilisations. La transmission des connaissances indispensables au développement et à l'organisation de la vie en société entre générations a pu se réaliser au fil du temps par l'existence d'institutions éducatives plus ou moins structurées. Dans ce qui suit, nous examinerons l'enseignement de la géométrie à travers les grandes époques du développement de cette discipline dont nous avons parlé précédemment.

En Égypte et à Babylone

Mialaret et Vial (1981a) relatent que, dans l'ancienne Égypte, l'éducation était perçue comme une obligation. Son but ultime, outre l'apprentissage de la lecture, de l'écriture et du comptage, était d'outiller les jeunes gens pour la vie. Les élèves qui devaient occuper des postes administratifs avaient parmi les matières principales les mathématiques et la géométrie, alors que les écoliers dits « normaux » résolvaient des problèmes pratiques touchant la construction navale, la boulangerie (calcul exact des différents mélanges de farines), la brasserie, le calcul du rendement, de surfaces de textiles et de terres, du volume d'édifice tels des rampes et des pyramides (en vue de l'achat du matériel) (Mialaret & Vial, 1981a). Ces mêmes auteurs signalent que les devoirs de mathématiques portaient entre autres sur le calcul du volume et de la surface de différents solides et figures. Taton (1966), pour sa part, explique que ces traités égyptiens de géométrie proposaient des solutions très condensées aux problèmes, ce qui laisse supposer que ces textes ne constituaient pas la seule source de connaissances de l'étudiant égyptien ; et selon lui, ceux-ci devaient être accompagnés par l'explication orale du professeur. Il fait aussi remarquer que les données des problèmes proposés sont celles qui mènent toujours aux solutions les plus simples et les plus rapides, ce qui laisse supposer que l'enseignement des mathématiques faisait principalement appel à la mémoire. Il explique : « L'élève apprenait sans doute par cœur et données et solutions ; mis en présence de problèmes similaires, il lui suffisait de changer les chiffres du problème « idéal » pour trouver la solution du problème réel » (Taton, 1966 ; p. 36–37).

À Babylone, l'école sumérienne ou « maison des tablettes » est probablement la plus ancienne. L'enseignement portait principalement sur l'écriture cunéiforme, les problèmes de mathématiques étaient assez rares (Mialaret et Vial, 1981a). Ces auteurs relatent qu'une fois cette écriture maîtrisée, l'étudiant pouvait résoudre des problèmes pratiques de la « vie réelle » comme le calcul des salaires, l'arpentage, la rédaction d'un contrat, etc. Avant la fin de ses études, l'étudiant détenait les rudiments d'un large éventail comprenant entre autre la géométrie pratique et les mathématiques. Pour sa part, Taton (1966) précise que des tablettes de problèmes, récemment découvertes, ressemblent plus à des recueils didactiques. Cette supposition est due aux précisions qui devaient probablement être indiquées oralement aux étudiants et que les énoncés ne fournissaient pas. Ces tablettes contiennent un très grand nombre de problèmes, bien séparés les uns des autres, tous du même genre, solubles par des méthodes identiques. Dans les textes à caractère géométrique, les figures sont en général simples et ne servent qu'à illustrer l'énoncé. Elles n'interviennent jamais dans les solutions. Concernant l'aménagement des lieux d'enseignement, Mialaret et Vial (1981a) révèlent que des fouilles ont permis la découverte de classes contenant les bancs des élèves en briques cuites, où quatre personnes au maximum pouvaient s'asseoir. Durant trois millénaires environ, les écoles babyloniennes ont été des regroupements d'apprentis scribes assis sur des bancs autour d'un prêtre. Près des sièges, se trouvaient de petits récipients d'eau dans lesquels on pouvait pétrir la glaise en forme de tablette.

En Égypte comme à Babylone, l'enseignement de la géométrie visait principalement le premier objectif général que nous avons défini (p. 15), soit de permettre à l'élève d'apprendre des connaissances (savoirs et savoir-faire) utiles dans la vie quotidienne. Cette constatation concorde avec ce que nous avons rapporté précédemment à propos de la période de la géométrie concrète (p. 5).

Dans la Grèce antique

L'éducation était axée sur le combat jusqu'à la fin du IV^{e} siècle av. J.-C. Mialaret et Vial (1981a) relatent que suite à des lois non écrites établies par Platon, la pression et une nécessité sociale, l'école a vu le jour. En effet, Platon fonde au cours de ce siècle une école appelée l'Académie. La philosophie, les mathématiques et la gymnastique y étaient enseignées. L'enseignement était prodigué sous forme de discussions et de débats. Durant la première moitié du V^{e} siècle av. J.-C., le système s'organise en une sorte de trivium où poésie, chant et gymnastique forment l'essentiel de l'enseignement. De temps à autre, quelques éléments de calcul sont proposés aux élèves par le grammatiste. Il faut attendre la deuxième moitié du V^{e} siècle av. J.-C. pour que cet idéal d'athlétisme et de musique ne contente plus les exigences culturelles. La philosophie grecque selon laquelle le sage sert mieux la communauté que l'athlète prend de l'ampleur. C'est ainsi que, sans renier l'éducation musicale, Pythagore réussit à faire accepter la découverte de l'harmonie intelligible par les mathématiques. Pour ces études supérieures, il forgea une institution avec un local, des règles, une pédagogie progressive de l'initiation et une rationalisation des exercices intellectuels. À cette époque, n'imaginant pas que l'apprentissage d'un métier puisse être l'objet d'une formation intellectuelle noble, Pythagore et ses disciples vivaient en confrérie séparés du monde. Au cours de cette même période, apparaissent les sophistes, ces intellectuels qui, de cité en cité, cherchent un auditoire pour enseigner l'art de parler en public. Ils ont su forcer le respect et attirer les jeunes gens les plus brillants. Leur enseignement a peu à peu débordé l'apprentissage de la rhétorique pour aborder les sciences pythagoriciennes, l'astronomie, la géométrie, l'arithmétique, l'acoustique, la littérature ancienne et la géographie. Cependant, vers la fin du V^{e} siècle av. J-C. et suite aux menaces de guerre qui pesaient sur Athènes, on ordonna leur expulsion. Ont alors suivi de grands débats sur l'éducation, menés principalement par Platon et Isocrate, où ceux-ci reconnaissaient à la géométrie le mérite d'une gymnastique intellectuelle. Ces débats ont abouti à l'instauration d'un long cheminement d'enseignement qui, au prix d'une sélection sévère, amenait l'homme jusqu'à la sagesse. En effet, de trois à six ans, garçons et filles se retrouvaient dans les jardins d'enfants. De sept à dix ans commençait un enseignement primaire, destiné à tous, durant lequel on proposait aux enfants des exercices de calcul pouvant servir aux futurs gardiens et aux futurs artisans. Entre cet apprentissage élémentaire et l'enseignement supérieur réservé à une élite, s'est établi une période intermédiaire de formation générale. Mialaret et Vial (1981a) avancent qu'en mathématiques, en dépit de la pauvreté des ressources, on enseignait les *Éléments* d'Euclide, puis on familiarisait les élèves à l'enchaînement logique de théorèmes mais sans appliquer les mathématiques aux calculs des surfaces ou des volumes. À partir de l'âge de vingt ans, commençait une longue formation supérieure qui pouvait se continuer jusqu'à cinquante ans et qui était destinée à une élite peu nombreuse et progressivement sélectionnée. Remarquons que tout au long de l'Antiquité, les systèmes éducatifs étaient dotés de structures de plus en plus élaborées qui annonçaient déjà la répartition moderne en trois degrés : élémentaire, secondaire et supérieur.

Tout comme à l'époque des Égyptiens et des Babyloniens, enseigner la géométrie pour répondre aux besoins de la vie de tous les jours était certainement un objectif poursuivi dans la Grèce antique. Ainsi, il est légitime de supposer qu'un minimum de savoir géométrique pratique était inculqué aux enfants qui se préparaient à devenir artisans. Fait nouveau, avec Pythagore et à travers la formation élitiste, un nouvel objectif de l'enseignement de la géométrie a été également mis de l'avant, soit le développement de la pensée logique, de la rigueur, du raisonnement déductif et de l'axiomatique. Ainsi, l'enseignement de la géométrie au cours de cette période visait non seulement le premier objectif général mais également le quatrième et le cinquième que nous avons mentionnés précédemment.

Au Moyen Âge

L'éducation antique continue à survivre durant les VI^e^ et VII^e^ siècles mais se dégrade peu à peu et laisse place à une autre forme de culture uniquement religieuse. Avec l'instauration des écoles chrétiennes, la rupture entre l'enseignement classique et la nouvelle éducation religieuse est totale. Ce n'est qu'avec le règne de Charlemagne (milieu du VIII^e^ – fin du IX^e^ siècles) que les études reprennent leur place d'antan. La géométrie et l'arithmétique faisaient à nouveau partie du programme d'étude que l'on peut appeler secondaire. Dans le monde islamique médiéval, l'enseignement qualifié de

« primaire » consistait à apprendre les versets sacrés ainsi que des notions de lecture, d'écriture et quelques éléments de calcul. À cette époque là, l'éducation était considérée nécessaire. L'enseignement supérieur comprenait diverses disciplines dont les mathématiques. Il se tenait dans des maisons privées, en plein air, dans les simples oratoires ou dans les grandes mosquées. Les élèves s'asseyaient en demi-cercle devant le maître adossé à un mur. Taton (1966) relate que l'école mathématique de Bagdad, à laquelle appartenaient des savants comme al-Khawarizmi et Umar Khayyam, est restée active près de deux siècles ; on y menait sur une grande échelle des travaux en mathématiques, à propos de calculs et de constructions géométriques, tandis qu'à Byzance, l'étude des sciences du quadrivium (arithmétique, géométrie, musique théorique, astronomie) était considérée comme un exercice de l'esprit favorable à l'étude de la philosophie. Le même auteur mentionne également qu'au X^e^ siècle, la traduction d'Euclide et des manuscrits d'arpenteurs était utilisée pour l'enseignement de la géométrie, et que suite aux traductions de manuscrits arabes un intérêt plus prononcé pour les sciences a vu le jour en Occident. Par ailleurs, Mialaret et Vial (1981a) rapportent qu'à la même époque des échanges par lettres entre deux écolâtres ont eu lieu sur la somme des angles intérieurs d'un triangle et sur différentes figures de géométrie et que la quadrature du cercle a suscité bien des interrogations.

Au milieu du XIe siècle, l'enseignement en Occident était très médiocre. Le XIIe siècle a connu une croissance scolaire rapide et spontanée, alors que l'église perdait progressivement le contrôle. Les grands textes des sciences grecques ont été redécouverts, et les œuvres d'Archimède, d'Euclide et de Ptolémée ont été traduits au latin. Les écoles du XIIe siècle étaient de niveau très variable. En France, certaines ont porté un intérêt particulier aux arts du quadrivium. Toutefois, l'école médiévale a généralement eu des visées très pratiques. Son rôle était d'inculquer aux élèves un certain nombre de techniques intellectuelles et de connaissances utiles pour l'exercice d'une activité de type professionnel (Mialaret & Vial, 1981a). Cet essor scolaire a conduit, au XIIIe siècle, à la naissance des universités. Au cours des XIVe et XVe siècles, le réseau universitaire européen s'est considérablement développé. L'enseignement médiéval qui y était offert avait le plus souvent des fins beaucoup plus utilitaires. En mathématiques, on y inculquait très peu d'arithmétique et de géométrie aux élèves

(Taton, 1969). On y enseignait un savoir limité et des techniques intellectuelles précises visant à préparer l'étudiant à l'exercice de certaines activités ou de certains métiers. L'enseignement était généralement oral et les procédés mnémotechniques d'un usage courant. Le maître choisissait un problème et le soumettait à la discussion de son auditoire puis, en guise de conclusion, exposait sa position personnelle (Mialaret & Vial, 1981a). Taton (1969) relate qu'au cours de ce siècle le savoir mathématique se diffusait de plus en plus dans des couches étendues de la population, la géométrie était une géométrie pratique. L'invention du livre a été un des événements qui a contribué à l'accélération de ce mouvement de diffusion.

Au Moyen Âge, force est de constater que l'enseignement de la géométrie est plutôt attaché à ce qui est utile. D'ailleurs, ceci reflète bien l'ère de stagnation des découvertes géométriques dont nous avons parlé précédemment (p. 9). Une fois de plus, le premier objectif général déjà mentionné est mis de l'avant. Cependant, les connaissances géométriques ont été largement utilisées pour d'autres branches mathématiques, notamment l'algèbre avec les savants arabes. Par conséquent, notre deuxième objectif général de l'enseignement de la géométrie (p. 16) prend déjà une place importante.

Du XVI^e au XIX^e siècle

Au XVI^e siècle, le réseau universitaire, déjà étoffé, s'était encore élargi. Dans une Europe sans frontières, les étudiants et les maîtres avaient maintenu la tradition médiévale de parcourir les universités pour poursuivre leurs études et enseigner. Les courants d'échanges intellectuels se faisaient d'un pays à l'autre. Il est donc légitime de supposer que des débats avaient lieu en rapport avec l'évolution des découvertes géométriques de l'époque. Selon Taton (1969), au cours de ce siècle, les mathématiques ont pris de plus en plus de place dans l'enseignement et leur diffusion était de plus en plus large dans les couches de la population. Soutenant la même idée, Mialaret et Vial (1981b) relatent que dans les collèges des Jésuites, nouvelles institutions de l'éducation du second degré où l'enseignement était élitiste dans plusieurs pays d'Europe, on enseignait la logique mathématique et la mathématique supérieure ; la géométrie d'Euclide représentait sans doute une bonne partie des cours donnés. Cet enseignement était destiné à la formation des cadres sociaux. Concernant l'école élémentaire, l'enseignement était plutôt basé sur l'apprentissage des rudiments (Mialaret & Vial, 1981b). Toutefois, en Italie, d'après ces mêmes auteurs, un des manuels scolaires portait le titre *Libro di Arithmético et Geometrica speculative et praticale*, ce qui laisse supposer que les élèves apprenaient certaines notions géométriques. D'ailleurs ils affirment que les connaissances utiles à presque toutes les professions étaient assurées par l'apprentissage en Italie.

Au XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, en Europe Occidentale, l'enseignement des mathématiques dans les écoles élémentaires était encore rudimentaire. En Grande-Bretagne une bonne partie du temps scolaire était réservée à des occupations telles que la menuiserie, le labourage, le jardinage, la cordonnerie, etc. ce qui peut laisser croire que les élèves recevaient une certaine initiation à la géométrie pratique (Miaralet & Vial, 1981b). En France, même si les écoles urbaines se multipliaient, les disciplines qu'on y enseignait demeuraient ecclésiastiques ; par ailleurs, les artisans — dont le métier les obligeait à dessiner et par conséquent à écrire, à lire ou à compter — recevaient après leur travail quelques élèves de différents âges pour leur enseigner des connaissances de base. En Europe occidentale, suite aux crises du XVII^e^ siècle, les universités ont connu un déclin de leurs effectifs. Au siècle suivant, elles ont continué de perdre des étudiants et l'enseignement dans beaucoup d'entre elles est devenu complètement désordonné. Selon Mialaret et Vial (1981b), cette régression est due en partie au manque de possibilités d'études primaires et secondaires offertes aux enfants des classes populaires. Dans ces circonstances, il s'est créé de nouvelles institutions nommées académies où les savants trouvaient la possibilité de développer leurs idées plus librement que dans les universités et dans une ambiance sociale plus conforme à leurs goûts (Mialaret & Vial, 1981b ; Taton, 1969). Le développement des sciences s'étant fait en dehors des universités, l'éducation supérieure s'obtenait alors soit par la lecture soit en étant adopté par un maître.

Le XIX^e^ siècle a marqué le début d'une ère nouvelle dans la conception de l'éducation. La géométrie enseignée au cours de ce siècle a joué un rôle important. En Grèce, d'après Gagatsis (1994), le programme des collèges abordait les angles, les triangles, les droites verticales et obliques, la théorie des parallèles basée sur le postulat d'Euclide, les quadrilatères, les parallélogrammes, les cercles, les mesures des angles circonscrits, l'aire des figures (rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze et autres polygones), le théorème de Pythagore, les polygones réguliers et l'aire du cercle. À cela s'ajoutaient en appendice la géométrie de l'espace à trois dimensions et les mesures de surface et de volume des différents solides, mais sans démonstrations de théorèmes. Au secondaire, le programme y était le même mais on y faisait une présentation plus complète de la géométrie de l'espace. Gagatsis (1994) souligne l'influence considérable, au niveau des manuels scolaires, de l'ouvrage de Legendre *Éléments de géométrie*. En France, la géométrie occupait aussi une place importante dans l'enseignement. Construite sur le modèle d'Euclide, son enseignement était considéré comme le lieu de la formation de l'esprit rationnel (Bkouche, 1997). Cet enseignement s'appuyait sur les deux ouvrages en concurrence à l'époque de Legendre et Lacroix (Gagatsis, 1994 ; Bkouche, 1997). En Angleterre, dans les écoles privées secondaires (Grammar schools), on enseignait la géométrie euclidienne telle que présentée par Euclide, donc à l'aide de théorèmes et d'exercices (Griffiths, 1998). Ce dernier auteur explique que le choix d'enseigner Euclide répondait, à cette époque, à deux exigences. La première était que la pensée grecque devait être connue par tout homme civilisé. La seconde était de satisfaire aux demandes des universités d'Oxford et de Cambridge. Mais on s'est aperçu que les étudiants n'apprenaient pas plus de géométrie qu'ils ne se formaient à la logique. Cet enseignement, très peu soutenu par les enseignants, était inapproprié même pour les étudiants les plus brillants (Griffiths, 1998). La fin de ce siècle a connu, en Angleterre, des débats houleux quant à la place qu'il fallait accorder à la géométrie euclidienne dans l'enseignement secondaire (Fielker, 1987). Cette insatisfaction sera à l'origine de modifications qui verront le jour au début du prochain siècle. En Italie, Galuzzi (1998) explique que le choix d'enseigner la géométrie suivant la méthode euclidienne avait pour but d'apprendre aux étudiants le raisonnement, la démonstration et la déduction. À cette époque, la géométrie euclidienne avait acquis un rôle prééminent car elle contribuait à la formation de la personnalité des étudiants (Galuzzi, 1998). Au Québec, selon Lavoie (2003), les élèves du début du XIX^{e} siècle suivaient deux cycles d'études dans les collèges classiques ; la géométrie ne s'enseignait qu'en deuxième année du deuxième cycle avec la trigonométrie, l'optique, la perspective, la topographie et l'architecture ; et apparemment les contenus enseignés en géométrie ne tenaient pas compte des récentes découvertes. Vers le milieu du siècle, l'enseignement des sciences et des mathématiques a connu un nouvel élan dans les collèges classiques ; dès le premier cycle, les élèves étaient initiés à l'arithmétique, à l'algèbre, à la géométrie et au toisé (Lavoie, 2003). Vers la fin de ce siècle, les mathématiques, considérées de plus en plus importantes, ont vu augmenter leur temps d'enseignement et la géométrie présentée à la façon d'Euclide y a trouvé une bonne place.

En résumé, durant la période du XVI^{e} au XIX^{e}, l'enseignement offert à la population était rudimentaire et avait en général des fins utilitaires en dépit de la relance des découvertes faites en géométrie (p. 10). Par contre, grâce à la géométrie d'Euclide – même si celle-ci n'est pas toujours mentionnée clairement — ceux qui pouvaient bénéficier d'un enseignement plus poussé ont été initiés à la pensée logique, au raisonnement déductif et à la rigueur. Au XIX^{e} siècle, en plus de viser cet objectif, l'enseignement de la géométrie avait implicitement pour but le troisième objectif général déjà mentionné, à savoir le développement du «sens géométrique» de l'élève.

Le XX^{e} siècle

Le XX^{e} siècle a été marqué par la réforme des mathématiques modernes survenue à partir des années 1960-1970. La place de la géométrie dans l'enseignement a varié principalement selon trois périodes que nous décrivons ci-dessous.

Avant la réforme des mathématiques modernes (jusqu'aux années 1960 ou jusqu'à plus tard selon les pays)

Généralement dans le monde, la géométrie enseignée au primaire se résumait à l'étude de quelques formes géométriques (carré, rectangle, triangle, cercle, etc.), de certaines de leurs propriétés et du calcul de leurs aires et périmètres. Au secondaire, on initiait les élèves à la géométrie plane, présentée de manière déductive à la façon d'Euclide. Parfois, à la fin du primaire ou au secondaire, on faisait l'étude de quelques solides et du calcul de leur volume.

En Belgique, par exemple, Lismont et Rouche (2001) rapportent qu'au cours de cette période, on enseignait à l'école primaire une géométrie intuitive comportant principalement des notions sur les figures planes et les solides élémentaires et sur leurs aires et leurs volumes, et au début du secondaire on initiait les élèves à une géométrie axiomatique d'inspiration euclidienne. En Italie, on continuait à enseigner la géométrie selon les *Éléments* d'Euclide (Galuzzi, 1998). En France, selon Laborde (1998) l'enseignement de la géométrie, inspiré de la tradition euclidienne, mettait l'accent particulièrement sur la congruence et la similitude des triangles. D'après la même auteure, au cours de cette période, on retrouvait dans les programmes le dessin géométrique, les transformations géométriques et les vecteurs. En Allemagne, au secondaire, on enseignait aussi la géométrie euclidienne. Neubrand (1998) relate qu'on retrouve les concepts de congruence et de similitude, des constructions à l'aide de la règle et du compas ainsi que des calculs de longueur, d'aire et de volume. Par contre en Angleterre, on n'enseignait guère de géométrie dans les écoles primaires jusque vers 1960 (Fielker, 1987). Au secondaire, les *Éléments* d'Euclide n'étaient plus un manuel de référence dans les Grammar schools ; on y enseignait plutôt une géométrie de type professionnel (Fielker, 1987). Dans les écoles secondaires modernes qui avaient été créées en 1944, la géométrie enseignée faisait intervenir les constructions et les diagrammes, le dessin et la modélisation, la symétrie, les lieux et enveloppes, la topographie et la navigation. Elle était pratique, utilitaire, applicable et purement récréative.

Aux États-Unis d'Amérique, la géométrie enseignée au secondaire était fondamentalement celle d'Euclide (Donoghue, 2003). Cet auteur fait état d'un bon nombre de manuels scolaires rédigés suivant différentes approches pédagogiques et où le contenu reste sensiblement le même. On enseignait donc les droites parallèles et perpendiculaires, les angles, les triangles, les théorèmes de congruence des triangles, les polygones, la proportionnalité, le cercle, différentes constructions de polygones, la géométrie des solides, les mesures d'aire et de volume, etc. Certains manuels accordaient une place de choix à la géométrie expérimentale avant d'introduire les démonstrations où le raisonnement déductif était dominant. La géométrie vectorielle faisait même l'objet d'un chapitre dans quelques manuels. À partir des années quarante, l'idée de l'utilité de la géométrie dans d'autres domaines et de l'enseignement d'autres types de géométries a fait son chemin notamment avec Birkhoff et Beatley (1959) dans leur ouvrage *Basic Geometry* devenu célèbre. Ces derniers, même s'ils ont conservé une approche euclidienne, proposaient des exercices où des applications possibles de la géométrie étaient suggérées et la géométrie analytique s'est retrouvée dans les chapitres de certains manuels. Au Québec, l'enseignement de la géométrie au primaire avait une finalité essentiellement pratique. Selon Bednarz (2000), la géométrie enseignée était expérimentale et avait pour but l'exploration et l'observation. En effet, Bélanger *et al.* (1993) rapportent que le programme de 1923 intégrait le dessin et des exercices de pliage et de découpage, et que celui de 1929 incluait un peu de géométrie plane et spatiale en fin du primaire, alors que le programme de 1938 comprenait le mesurage sur des surfaces rectilignes et curvilignes. Au début des années soixante, l'enseignement au secondaire demeurait de nature très traditionnelle. On retrouvait la géométrie intuitive et la géométrie plane alors que la géométrie analytique et la trigonométrie étaient réservées à certains étudiants des sections scientifiques dans les dernières années du secondaire.

Au cours de cette période, l'apprentissage des savoirs géométriques utiles à la vie quotidienne constitue une préoccupation majeure de l'enseignement. Toutefois, l'utilité de la géométrie pour d'autres domaines et disciplines commence à faire son chemin.

<u>La période de la réforme des mathématiques modernes</u> (à compter des années 1960–1970 ou plus tard selon les pays)

À compter du milieu des années soixante dans un grand nombre de pays du monde – et plus tard dans certains autres pays — est apparue ce que l'on appelle la réforme des « mathématiques modernes » où, sous l'influence de Bourbaki, la mathématique enseignée à l'école est apparue comme une science unifiée grâce à la notion de structure. La géométrie s'est ainsi retrouvée présentée à l'aide du langage ensembliste et des principaux types de structures mathématiques. Au secondaire, elle a perdu sa place privilégiée, alors qu'au primaire ses aspects visuel et intuitif sont restés.

Lismont et Rouche (2001) mentionnent qu'en Belgique cette réforme avait instauré au secondaire une géométrie axiomatique d'inspiration ensembliste où les transformations de l'espace jouaient un rôle majeur. Cette géométrie était fortement algébrisée et convergeait rapidement vers l'algèbre linéaire. En Italie, la géométrie, et particulièrement la géométrie tridimensionnelle, avait pratiquement disparu de l'enseignement secondaire (Galuzzi, 1998). En France, Gispert (2002) rapporte que la géométrie s'était effacée derrière l'algèbre linéaire et l'enseignement de la géométrie élémentaire avait presque disparu du collège et du lycée. Laborde (1998) pour sa part souligne que le rôle des figures géométriques était réduit à la mémorisation des données d'un problème et leur visualisation offrait rarement de l'aide pour l'élaboration d'une preuve. En Allemagne, l'accent était mis sur l'enseignement de la géométrie des transformations, il y avait peu de place accordée au dessin géométrique (Neubrand, 1998). En Angleterre, Fielker (1987) rapporte que cette période avait connu la création d'un certain nombre de projets dont le *School Mathematics Project* (SMP) et le *Midlands Mathematics Experiment* (MME) qui visaient tous deux l'enseignement des propriétés des figures planes et la maîtrise du plan. Le SMP mettait surtout l'accent sur les symétries et les propriétés métriques traditionnelles des longueurs et des angles, alors que le MME était axé sur les transformations décrites sous forme de symboles, de vecteurs ou de matrices en s'appuyant sur la géométrie analytique. Les éléments de géométrie dans l'espace avaient disparu des programmes. En 1965, sous la direction de Edith Biggs un ouvrage a été publié comprenant un chapitre qui traitait du plan, des solides, des réseaux, des angles, des parallèles, de la symétrie et de la similitude. Ces thèmes étaient fondés sur des activités pratiques où l'enfant était incité à découvrir par lui même les notions et où des liens étaient établis entre la géométrie et l'utilisation des nombres, de la mesure et des représentations graphiques. Le *Nuffield Mathematics Project* lancé en 1964 adopte la même philosophie que Biggs. Le matériel qu'il a publié à l'intention des enseignants du primaire comprenait notamment un livret d'activités intitulé *Environmental Geometry.*

Aux États-Unis d'Amérique, Usiskin (1985) relate que les notions d'ensemble, de fonction, de système mathématique et la logique ont joué un rôle prépondérant dans les programmes de mathématiques pour l'enseignement secondaire. D'après ce même auteur, la géométrie des solides a été fusionnée à la géométrie plane, celle-ci étant reformulée avec beaucoup plus de rigueur, le cours de géométrie analytique a presque disparu et des notions comme la pente et les coniques se sont retrouvées intégrées à l'algèbre. En dépit de ce changement notable des contenus, les formes de raisonnement et les normes de rigueur euclidienne ont été conservées (Coxford & Usiskin, 1971 ; cité dans Quadling, 1986). Aussi, selon Donoghue (2003), certains manuels scolaires ont conservé en annexe des informations d'ordre pratique comme l'utilisation de la perspective pour dessiner une figure tridimensionnelle sur le plan. Pour l'école primaire, des recommandations ont été formulées pour que le contenu mathématique soit riche, que l'accent soit mis sur la compréhension des structures fondamentales et que l'apprentissage se réalise à travers les découvertes (Fey & Graeber, 2003). Selon ces mêmes auteurs, ceci a conduit à la rédaction de manuels scolaires où généralement les aspects informel et intuitif ont dominé sur l'aspect déductif. Au Québec, vers la fin des années soixante, la révision des programmes de mathématiques de l'école primaire a conduit à l'introduction des ensembles et des régularités. Suite à la révision des programmes de mathématiques du secondaire, de nouveaux thèmes incluant la théorie des ensembles, les systèmes numériques et l'étude des fonctions y sont apparus. D'ailleurs, l'examen du *Programme d'Études des Écoles Secondaires* de 1974 révèle qu'en géométrie, l'enseignement portait sur quelques figures et solides comme les polygones réguliers, le cercle, les prismes, les pyramides à bases régulières, la sphère et le calcul de leurs aires et volumes. Dans les recommandations de ce document on peut lire : « On ne saurait trop insister … sur l'aspect non rigoureux de traitement des quelques éléments de géométrie » (Commission scolaire régionale Louis-Fréchette, 1974 ; p. 6).

Avec la réforme des mathématiques modernes, le principal objectif de l'enseignement de la géométrie est devenu le développement chez l'élève de la pensée logique, de la rigueur et du raisonnement déductif.

Après la réforme des mathématiques modernes (à compter de la fin des années 1970 ou plus tard selon les pays)

Les résultats de la réforme des mathématiques modernes n'ont pas produit les résultats escomptés et semblent avoir même été désastreux dans certains pays. De Lange (1993) résume la situation par : « Geometry was not really flourishing in the existing program. But this is an international phenomenon. Euclidean geometry suffered greatly from the denouncement by the Bourbakists at the end of the fifties : 'Down with Euclid'. The introduction of 'modern mathematics', based on the theory of sets, did much to accomplish the same » (p. 147). L'échec des « mathématiques modernes » a conduit de nombreux pays à abandonner, dès la fin des années soixante-dix, l'introduction de l'algèbre linéaire qui était la pierre angulaire d'une nouvelle vision de la géométrie. La portée des fondements de l'algèbre linéaire introduite au départ ne pouvait être saisie par les élèves. On a réalisé qu'il fallait accorder beaucoup plus de temps dans l'enseignement des figures qui traditionnellement faisait plus l'objet d'étude en géométrie. Cependant les tentatives pour restaurer la géométrie euclidienne n'ont pas vraiment été couronnées de succès.

La géométrie n'est pas revenue ce qu'elle était auparavant, ni sur le plan des contenus, ni sur le plan des méthodes. En Italie, plusieurs nouveaux projets pour l'enseignement des mathématiques au secondaire ont été proposés mais leurs idées principales sont encore débattues (Galuzzi, 1998). En France, la *Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques* (2000) déplore la disparition dans les programmes actuels des notions comme les coniques, l'inversion et les transformations de l'espace. La Belgique a vécu aussi un malaise du côté de l'enseignement actuel de la géométrie. Au primaire, celle-ci demeure un parent pauvre, au secondaire la disparition de l'axiomatique a entraîné celle de la rigueur, un débat est ouvert sur les places respectives des figures et des transformations, des discussions à propos de la place de la preuve dans l'enseignement fait apparaître des opinions contradictoires (Lismont et Rouche, 2001). En Angleterre, selon Fielker (1987), la géométrie euclidienne est de retour mais sous des traits nouveaux. En effet, l'intérêt aux situations spatiales a regagné du terrain suite à l'adoption d'une approche fondée sur l'investigation. Ainsi, l'exploration de sujets tels que les diagonales, les polyominos, les pavages, les courbes, les amas de cercles, les spirales, les réseaux et les ombres est de nouveau au rendez-vous. Aux Pays-Bas, la géométrie de l'espace a retrouvé sa place d'antan. Doorman et Kooij (1992) rapportent que depuis le début des années quatre-vingt-dix, l'algèbre vectorielle a disparu pour faire place au développement de l'intuition spatiale des élèves non seulement pour préparer le cours de géométrie dans l'espace mais pour les cours de géométrie en général. Ainsi, un accent particulier a été mis pour le développement du codage et du décodage des situations spatiales, la visualisation mentale de l'intersection de plans dans des objets spatiaux, les représentations planes d'objets spatiaux, l'étude de différentes projections et l'examen des objets sous différents angles.

Aux États-Unis d'Amérique, les programmes de « mathématiques modernes » ont entraîné la chute des indicateurs de la qualité de l'enseignement. En plus, le scepticisme des parents envers ces programmes combinés à d'autres insatisfactions ont conduit à un mouvement, connu sous le nom de *back-to-basics* (Fey & Graeber, 2003). Selon ces auteurs, les manuels scolaires du secondaire ont abandonné le langage des structures algébriques, la théorie des ensembles et la logique – quoique certains éléments du langage des ensembles et de la logique sont demeurés. Donoghue (2003) précise que les dessins, la visualisation, l'utilisation de la règle et du compas, les diagrammes et les systèmes de coordonnées sont valorisés dans les nouveaux programmes de mathématiques. Ainsi, des objets géométriques comme les points, les droites et les plans sont réapparus dans certains manuels scolaires. Les figures tridimensionnelles sont réintroduites dans le but de mettre l'accent sur la visualisation et d'améliorer l'habileté à dessiner des élèves. On retrouve même des esquisses de solides en perspective. Au Québec, le *Programme d'études du premier cycle du secondaire* des années quatre-vingt fait une place mince au développement de la visualisation dans l'espace. La section *Orientations générales du programme* est silencieuse à ce sujet. Toutefois, l'un des objectifs intermédiaires traite de reconstruction de solides à partir de formes géométriques planes. Les solides visés sont le prisme droit, le cylindre, le cône, la sphère et les polyèdres. Au deuxième cycle, il est plutôt question de transformations, de congruence et de similitude. La description des contenus en lien avec le cercle et les solides ne laisse pas envisager un quelconque intérêt quant au développement de la visualisation dans l'espace. Ce programme remanié au début des années quatre-vingt-dix a donné lieu à un nouveau programme d'études détaillé pour chaque degré du secondaire. Soulignons que les contenus notionnels sont restés quasiment les mêmes. Des activités d'exploration, de manipulation et de construction sont encouragées dans le cours de géométrie de la première année. Les transformations gardent une place de choix dans le programme tout au long du secondaire. En troisième année, un accent particulier est mis sur le développement de la visualisation spatiale des élèves. Il est clairement dit : « …

l'enseignante ou l'enseignant doit apprendre aux élèves à voir dans l'espace et à représenter des solides » (*Programmes d'études, Mathématique 314*, 1995 ; p. 36). On y ajoute : « il s'agit d'améliorer la perception qu'ont les élèves de l'espace à deux et trois dimensions, des objets qui s'y trouvent et de leurs représentations tantôt d'un point de vue qualitatif, tantôt d'un point de vue quantitatif. Le support visuel est très important en géométrie car il permet de soutenir le raisonnement » (*ibidem*, p. 33-34). Dans les programmes de quatrième et de cinquième, on souligne que l'un des buts de l'enseignement de la géométrie est le développement de l'intuition. Cependant, il ne semble pas clair dans les recommandations comment on peut amener les élèves à développer cette intuition. Au cours de ces deux années, on insiste plutôt sur les aspects formel et rigoureux de la géométrie.

En réaction à la réforme des mathématiques modernes, on a été conduit au niveau international à s'interroger sérieusement sur l'enseignement de la géométrie et sur des améliorations à y apporter. Également, est apparue la nécessité de réviser les curriculums en profondeur de façon à réintroduire dans la géométrie ses aspects intuitif et visuel et à repousser à plus tard son enseignement formel et rigoureux. Zeitler (1990), par exemple, a écrit : « We need more visual content, more concrete geometry, more interesting (nontrivial) problems, more drawings, more constructions, intuitive, heuristic, unstructured geometry, more joy, more, more,… » (p. 24). Effectivement, de nouveaux programmes de mathématiques allant dans ce sens sont apparus dans la majorité des pays du monde.

1.2.3 Les objectifs spécifiques des programmes scolaires de géométrie

Les objectifs spécifiques qui apparaissent explicitement dans la majorité des programmes scolaires de géométrie que nous avons consultés visent le développement :

1) de connaissances (savoirs), notamment de concepts, de propriétés, de théorèmes, de termes et de symboles se rapportant à :
   - des figures géométriques (droites, angles, polygones, cercle, solides, etc.) ;
   - des relations géométriques (parallélisme, perpendicularité, congruence, similitude, complémentarité d'angles, etc.) ;

- des transformations géométriques (translation, rotation, symétrie axiale, isométrie, homothétie, similitude, etc.) ;
- des mesures géométriques (mesure de longueur, d'angle, d'aire, de volume, etc.).

2) de capacités intellectuelles générales (observation, classification, formulation de conjectures, raisonnement déductif, etc.) ;
3) la capacité à faire des démonstrations en géométrie (dans le cadre d'un système d'axiomes ou de « déduction locale ») ;
4) des savoir-faire techniques (utilisation d'instruments, construction de diagrammes, prise de mesures, etc.) ;
5) d'attitudes d'ordre intellectuel ou affectif (curiosité, rigueur, appréciation de la beauté de la géométrie, etc.).

Dans les programmes scolaires définis par objectifs, les objectifs généraux servent de guide à la formulation d'un ensemble de contenus, d'habiletés et d'attitudes qu'on souhaite voir se développer chez l'élève. Autrement dit, les objectifs généraux servent de point de départ pour définir les objectifs spécifiques. L'examen de ces derniers, nous permet de constater que le développement des objectifs généraux est possible à travers les différents savoirs, habiletés, savoir-faire techniques et attitudes retenus dans la majorité des programmes scolaires de géométrie.

1.2.4 Le développement de la capacité à visualiser dans l'espace : un objectif négligé et à valoriser dans l'enseignement de la géométrie

Une raison importante pour enseigner la géométrie à l'école est de susciter chez les élèves le développement de leur habileté spatiale et en particulier de leur capacité à visualiser dans l'espace. Usiskin (1987) affirme : « … what we teach would likely affect students' abilities to visualize. But visualization and drawing are generally neglected in the study of geometry » (Usiskin, 1987 ; p. 26). C'est-à-dire que, selon lui, la visualisation et le dessin sont généralement négligés en géométrie. Dix ans plus tard, Hershkowitz *et al*. (1997) déplorent encore le peu d'intérêt attribué à ces aspects dans les curriculums. Pourtant, plusieurs auteurs comme Brinkmann (1963), Bishop (1980, 1983), Presmeg (1986), Cooper (1989) et Parzysz (1991) ont souligné l'importance du développement chez les élèves de l'habileté spatiale et de l'intuition de l'espace dans l'enseignement de la géométrie. À ce propos, Gaulin (1985) écrit :

> For years mathematics educators like Bishop, Clements, Mitchelmore, Tahta and others have been advocating that one major goal for teaching geometry that has been overlooked during the 'new math' wave and ought to be re-established is the development of students' spatial intuition, including their ability to visualize and to communicate spatial information by various means (p. 64).

Plus récemment, d'autres recherches menées par Mariotti (1989), Clements & Battista (1992), Presmeg (1994), Kopelman & Vinner (1994), Hershkowitz *et al.* (1997), Malara (1998) ont souligné les difficultés qu'éprouvent les élèves, et même les enseignants, lors d'activités qui font appel à la visualisation spatiale. De plus, Hershkowitz *et al.* (1997) dénoncent l'idée naïve que, de façon naturelle, les élèves développent les habiletés de pensée visuelle et s'en servent au besoin, ainsi que le manque d'intérêt qui leur est accordé dans les curriculums :

> « It seems that in both cases there is a hidden naive assumption that somehow students do have visual thinking abilities and that they apply visual reasoning when they have to. We can realize how absurd this situation of visual education in the curricula is when we make an analogy between this area and other similar areas like verbal education or symbol education or the familiarity with the world of numbers and operations in education » (p. 166).

En dépit de ce manque d'attention qu'on lui accorde dans les programmes, de plus en plus, on s'accorde à dire qu'il faut revaloriser dans l'enseignement la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Déjà, dans *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (1989), on peut constater cette tendance :

> « Spatial understandings are necessary for interpreting, understanding, and appreciating our inherently geometric world. Insights and intuitions about two-and three-dimensional shapes and their characteristics, the interrelationships of shapes, and the effects of changes to shapes are important aspects of spatial sense. Children who develop a strong sense of spatial relationships and who master the concepts and language of geometry

> are better prepared to learn number and measurement ideas, as well as other advanced mathematical topics » (p. 48).

Un peu plus loin, il est fortement recommandé de multiplier les occasions où les élèves peuvent visualiser et travailler avec des objets tridimensionnels afin de développer les capacités spatiales nécessaires à la vie quotidienne et aux différentes carrières. Le rapport *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b), en plus d'insister sur le développement du « sens spatial », souligne que : « spatial visualisation (…) is an important aspect of geometric thinking » (NCTM, 2000b ; p. 41). On peut aussi lire qu'elle est fondamentale pour la compréhension des relations géométriques, sert d'outil pour développer des conjectures ou des arguments, permet à l'élève d'interpréter des relations dans le plan, de construire des objets tridimensionnels à partir de leurs représentations bidimensionnelles, et d'acquérir une nouvelle façon de penser. D'ailleurs, ce document recommande de considérer l'utilisation de la visualisation, du raisonnement spatial et de modèles géométriques pour résoudre des problèmes comme un objectif à développer tout au long de la scolarité. De leur côté, Hershkowitz *et al.* insistent sur la nécessité de l'éducation visuelle :

> « Visual education is needed for effective and correct interaction with shapes, relationships between them, transformations on shapes, relationships between shapes and other entities etc. … whenever students have to relate to shapes and space, whether in their eyes or in their minds'eyes they have to apply some sort of visual thinking. Visual ways of thinking and reasonning may be acquired through a well planned visual education » (1997 ; p. 165).

Smit (1998, cité dans Bennie & Smit, 1999) met en valeur l'utilité des capacités spatiales en soulignant le handicap que peut engendrer leur absence puisqu'il n'est pas possible pour quelqu'un de vivre sans avoir l'occasion de communiquer la position et les relations entre les objets, de s'orienter ou d'indiquer la direction à une personne et d'imaginer des changements de positions ou de dimensions d'objets.

En conclusion, la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions est reconnue comme étant importante, que son développement ne va pas de soi et que l'enseignement de la géométrie peut aider à la développer.

1.2.5 Thème général retenu pour notre recherche

Nous avons essayé dans ce qui précède, tant en survolant l'histoire de la géométrie que celle de son enseignement, de mettre en évidence l'importance de la capacité à visualiser dans l'espace et le manque d'attention qu'elle reçoit dans l'enseignement de la géométrie. Cet aspect visuel qu'on retrouve en géométrie et également ailleurs en mathématiques, nous tient particulièrement à cœur. Nous avons donc décidé de faire porter notre thèse sur le thème de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au secondaire. Dans les prochaines sections, nous apporterons des précisions sur la nature de cette capacité et nous présenterons des recherches qui ont été réalisés à son sujet.

1.2.6 Précisions sur la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

1.2.6.1 Nature de cette capacité

Signalons tout d'abord que l'habileté spatiale est considérée comme l'une des composantes de l'intelligence humaine et qu'elle se compose de plusieurs capacités ou habiletés, y compris celle à visualiser dans l'espace. Dans ce qui suit, nous présentons les quatre principales perspectives que l'on rencontre dans la littérature classique suivant lesquelles l'habileté spatiale a été étudiée.

<u>Suivant la perspective de l'analyse factorielle</u> Influencés par les méthodes dites objectives, certains psychologues les ont utilisées pour clarifier la structure de l'intelligence humaine. Spearman (cité dans Bishop, 1980) considérait que la solution de toute tâche nécessite l'application à la fois d'une intelligence générale et d'une intelligence spécifique. Selon Thurstone (cité dans Bishop, 1980), qui n'était pas d'accord avec ce point de vue, il existe plutôt un ensemble de « primary mental abilities » qui sont requises, suivant différentes combinaisons, pour effectuer une tâche dans n'importe quel domaine, y compris en mathématiques. Au cours des années quarante et cinquante, des chercheurs comme Barakat, Werdelin et Wrigley ont tenté de clarifier la nature de « l'habileté mathématique » et de ses relations notamment avec des capacités spatiales, mais leurs résultats ont été peu concluants. Bishop (1980) en retient tout de même

certains points positifs. Ainsi, ces auteurs ont élaboré des épreuves spatiales pouvant être utiles pour évaluer certaines capacités spatiales chez des individus ou pour les entraîner à ces capacités. De plus, leurs travaux ont été un élément déclencheur pour stimuler la réflexion des didacticiens en mathématiques sur la notion d'« habileté spatiale ». Michael *et al.* (1957 ; cité dans Bishop, 1980) sont parvenus à la conclusion que cette notion, en tant que construit unitaire, était inadéquate pour la conceptualisation des processus intellectuels impliqués dans les épreuves « spatiales » mises au point. Il ressort d'autres analyses exhaustives et détaillées (McGee, 1979 ; Lohman, 1979, 1987 ; Eliot & Smith, 1983 ; Pelligrino, Alderton & Shute, 1984 ; cités dans Mongeau, 1993) que la notion d'habileté spatiale, telle que mesurée par les tests psychométriques, est composée de deux principaux facteurs appelés « orientation spatiale » et « visualisation spatiale », que par exemple McGee (1979) définissait ainsi :

1. Spatial visualization (Vz), which involves "the ability to mentally manipulate, rotate, twist or invert a pictorially presented stimulus object",

2. Spatial orientation (SR-O), which involves "the comprehension of the arrangement of elements within a visual stimulus pattern and the aptitude to remain unconfused by the changing orientations in which a spatial configuration may be presented" (cité dans Bishop, 1983 ; p. 182).

Ces définitions, dont Clements (1983) a mis en évidence le caractère contradictoire, ont soulevé beaucoup de controverses concernant la nature de l'habileté spatiale et de ses composantes. Cette polémique a poussé plusieurs chercheurs à ré-analyser les études faites précédemment à ce sujet suivant l'approche psychométrique. C'est ainsi que Lohman (1979 ; cité dans Clements, 1983) a mis en évidence l'existence de trois facteurs de l'habileté spatiale qu'il nomme « relations spatiales », « orientation spatiale » et « visualisation ». Bien qu'il ait été reconnu comme un pas important vers la solution du problème de la définition de l'habileté spatiale, le travail de Lohman n'a pas échappé aux critiques. Clements (1983) trouve, par exemple, que sa définition de la « visualisation » demeure confuse, tandis que Eliot et Hauptman (1981 ; cité dans Clements, 1983) considèrent que la description des facteurs « relations spatiales » et « orientation spatiale » en rendent la mesure difficile.

Depuis longtemps, de l'autre côté de l'océan, un grand nombre de psychologues européens rejettent l'existence de plusieurs facteurs spatiaux. C'est ainsi que Vernon (1961) écrivait : « ...there was only one major underlying spatial ability and that the American 'plethora of spatial factors is more confusing than helpful » (cité dans Clements, 1983 ; p. 12). Quelques années plus tard, Smith (1964) affirmait que les tentatives de différencier les facteurs « visualisation spatiale » et « orientation spatiale » ont échoué et continueront à échouer. Cette position de Smith a reçu l'appui des psychologues gestaltistes américains Guay, McDaniel et Angelo (1978 ; cité dans Clements, 1983). Mentionnons en passant qu'en 1977, Guay et McDaniel, intrigués par la subdivision de l'habileté spatiale en visualisation et orientation, avaient proposé de faire la distinction suivante :

- Low-level spatial abilities were defined as requiring the visualization of two-dimensional configurations, but no mental transformations of those visual images.

- High-level spatial habilities were characterized as requiring the visualization of three-dimensional configurations, and the mental manipulation of these visual images (cité dans Bishop, 1980 ; p. 259).

La nature de l'habileté spatiale nourrit la controverse. Certains psychologues la défendent comme un tout unifié alors que d'autres maintiennent sa subdivision en différentes capacités. De cette divergence d'opinions résulte la difficulté de la définir comme l'affirme Fairweather : "Because so many different interpretations have been given to the term [visualization] it is difficult to report any generalizations which can be safely made from the huge amount of research into spatial abilities which has been reported" (cité dans Clements, 1983, p. 12).

Suivant la perspective de la psychologie du développement Alors que les psychométriciens se perdaient dans leurs tentatives en vue d'identifier et de raffiner différents facteurs spatiaux, Piaget et ses collaborateurs à Genève cherchaient à éclaircir les mystères de l'intelligence humaine et de son développement. En ce qui concerne la genèse de la représentation de l'espace et de la pensée géométrique, Piaget a publié trois œuvres maîtresses : *La représentation de l'espace chez l'enfant* (Piaget & Inhelder, 1947), *La géométrie spontanée de l'enfant* (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948) et *L'image mentale chez l'enfant* (Piaget & Inhelder, 1966).

Dans le cadre d'entrevues cliniques et dans le but d'étudier l'intuition spatiale, Piaget a administré à des enfants de différents âges une grande variété d'épreuves spatiales qui consistaient à reconnaître divers objets par l'exploration tactile, sans les voir. Ces épreuves ont permis à Piaget et Inhelder (1947) d'identifier quatre stades de développement de la pensée du point de vue spatial. Au stade 0 (enfant en dessous de 2 ans et 6 mois) l'expérimentation n'a pas été possible. Au stade I (s'étend environ jusqu'à 3 ans et 6 mois ou 4 ans), l'enfant reconnaît facilement les objets familiers mais n'est pas capable d'abstraire les formes. Puis lorsque débute l'abstraction des formes, les premières reconnues sont des formes topologiques et non euclidiennes. Au cours du stade II (de 4 à 6-7 ans environ) le progrès de la perception qui coordonne les centrations tactiles entre elles et se prolonge en images graphiques et mentales, permet de reconnaître progressivement les formes euclidiennes. Le dessin se développe aussi dans le même sens. Ce n'est qu'au stade III (vers 7-8 ans) que l'enfant sera capable de faire un retour systématique au point de départ de manière à grouper tous les éléments d'une figure autour d'un ou de plusieurs points stables de références.

Les travaux de Piaget et Inhelder ont été autant influents que critiqués (Clements & Battista, 1992). Ces auteurs mentionnent l'utilisation incorrecte de termes mathématiques comme « topologique » et « euclidien » qui a également été soulignée par d'autres chercheurs. La classification des figures comme étant topologiques ou euclidiennes a aussi suscité un débat. Dans le but d'éclaircir ces confusions, d'autres études ont été réalisées. Celles-ci ont appuyé la thèse de Piaget sous certaines conditions. Par ailleurs, d'autres recherches ont confirmé les résultats de Piaget et Inhelder même si d'autres ambiguïtés sont apparues. En conclusion, la thèse de Piaget et Inhelder n'a été ni totalement désapprouvée ni totalement supportée. Il se pourrait bien que les formes topologiques, projectives et euclidiennes se développent, s'intègrent et se synthétisent parallèlement au fil du temps.

Tout comme Piaget et Inhelder, van Hiele (1959/1985) s'est attardé à la compréhension de la pensée géométrique de l'enfant et a identifié cinq niveaux différents allant de la simple reconnaissance des formes à la déduction formelle.

> Level 0 : (Basic Level): Visualization. Students recognize figures as total entities (triangles, squares), but do not recognize properties of these figures (right angles in a square).
>
> Level 1 : Analysis. Students analyze component parts of the figures (opposite angles of parallelograms are congruent), but interrelationships between figures and properties cannot be explained.
>
> Level 2 : Informal Deduction. Students can establish interrelationships of properties within figures (in a quadrilateral, opposite sides being parallel necessitates opposite angles being congruent) and among figures (a square is a rectangle because it has all the properties of a rectangle). Informal proofs can be followed but students do not see how the logical order could be altered nor do they see how to construct a proof starting from different or unfamiliar premises.
>
> Level 3: Deduction. At this level the significance of deduction as a way of establishing geometric theory within an axiom system is understood. The interrelationship and role of undefined terms, axioms, definitions, theorems and formal proof is seen. The possibility of developing a proof in more than one way is seen.
>
> Level 4 : Rigor. Students at this level can compare different axiom systems (non-Euclidean geometry can be studied). Geometry is seen in the abstract with a high degree of rigor, even without concrete examples. (van Hiele, 1959/1985 ; p. 249 – 250)

Suivant cette théorie, l'apprentissage est un processus discontinu, les niveaux sont séquentiels et hiérarchiques, les concepts compris implicitement à un niveau donné le deviennent explicitement au niveau suivant et chaque niveau a son propre langage (Clements & Battista, 1992). Remarquons que contrairement à Piaget, pour van Hiele le progrès d'un niveau à un autre dépend plus de l'instruction que de l'âge ou de la maturation biologique de l'enfant. Tout comme pour les travaux de Piaget, la théorie de van Hiele a eu une grande influence et a suscité plusieurs recherches. Ces dernières ont essayé d'éclaircir différents points comme s'assurer de la fidélité de la description de la pensée géométrique des élèves avec ces niveaux, vérifier la discontinuité entre les différents niveaux, examiner si d'autres caractéristiques ne manquent pas dans la description des cinq niveaux, voir les niveaux de pensée qui se retrouvent dans les manuels scolaires, etc. (Clements & Battista, 1992). Soulignons que la théorie de van Hiele est particulièrement intéressante dans le cadre de notre travail et que nous y reviendrons plus loin avec plus de détails.

Suivant la perspective des différences individuelles Une autre approche qui a été beaucoup utilisée en recherche est celle des différences individuelles. Du point de vue de l'habileté spatiale, mentionnons notamment les études réalisées sur les différences entre filles et garçons (par exemple : Fennema, 1979), les différences entre élèves doués et moins intelligents (par exemple : Stanley *et al.*, 1974 ; Magne, 1978) et les différences culturelles (par exemple : Lancy, 1978). Krutetskii (1976) a réalisé des travaux particulièrement intéressants pour la didactique des mathématiques. En effet, il a été amené à identifier trois types de personnes, suivant leur façon de penser en mathématiques : les « analytiques », les « géométriques » et les « harmoniques ». Lean et Clements (1981) ont par la suite proposé de situer les individus suivant un continuum « visuel-verbal » selon les types de stratégies qu'ils ont tendance à utiliser lorsqu'ils résolvent un problème. De son côté, Bishop (1980) a étudié la relation entre l'habileté spatiale d'un enfant et ses expériences antérieures avec des objets de son environnement, mais il n'a pas obtenu de résultats concluants. Malgré tous les travaux existants, un fait demeure : il ne va pas sans complications d'étudier l'habileté spatiale du point de vue des différences individuelles. À ce propos, Bishop (1980) affirme : « ...the results of such research are never clear » (p. 263).

Suivant la perspective des sciences cognitives Cherchant à comprendre le fonctionnement du cerveau, les sciences cognitives se sont intéressées à éclaircir les processus d'apprentissage de la géométrie chez l'élève. À cette fin, Anderson (1983) a élaboré un modèle où il présuppose l'existence de deux types de connaissances : déclarative et procédurale. Suivant ce modèle, toute connaissance se présente d'abord sous forme déclarative et doit être interprétée par des procédés généraux. Ainsi, l'apprentissage procédural a lieu seulement en exécutant une tâche. Clements et Battista, (1992) mentionnent que l'apprentissage suivant cette théorie se passe en quatre étape : l'acquisition de la connaissance déclarative, l'application de celle-ci à de nouvelles situations au moyen de recherche et d'analogie, la rédaction des travaux dans le domaine spécifique et la consolidation de la connaissance déclarative et procédurale.

Poursuivant le même but, Greeno (1980) a aussi développé un modèle de résolution de problèmes de géométrie. Pour le valider, un programme informatique de simulation a été conçu pour résoudre les mêmes problèmes que les élèves et faisant appel à trois étapes. À la première étape, des propositions sont utilisées pour faire des inférences qui sont des étapes principales pour résoudre des problèmes de géométrie. À la deuxième étape, des concepts de perception sont utilisés pour reconnaître les modèles mentionnés dans les antécédents de plusieurs propositions. À la troisième étape, des principes stratégiques sont utilisés dans la réalisation des buts et l'organisation. Selon Greeno (1980), les enseignants n'identifient pas nécessairement ces principes stratégiques dans leur enseignement et les élèves doivent les acquérir de façon implicite à partir des étapes développées dans la résolution de problèmes. Ces principes stratégiques sont donc sous la forme de connaissance procédurale tacite impliquant des processus que l'élève peut perfectionner mais ne peut décrire ou analyser. À ce niveau, le modèle de Greeno rejoint celui d'Anderson. Clements et Battista (1992) soulignent l'importance qu'accorde Greeno à l'enseignement de ces principes. Cet auteur ne croit pas à l'efficacité de leur découverte. Il soutient plutôt leur enseignement explicite.

D'autres recherches en science cognitive ont proposé des modèles comme le *Parallel Distributed Processing (PDP) Networks.* Ce dernier explique les représentations de patron holistique des premiers niveaux de van Hiele. Clements et Battista (1992) rapportent que ce réseau possède des unités de traitement représentant des objets conceptuels tels que les caractéristiques, les mots ou les concepts et les connections avec des poids d'activation entre ces unités. Le système de traitement de la structure de la connaissance est défini à partir des interconnections entre ces unités. Revenons aux différents niveaux de van Hiele. Au niveau de la « pré-reconnaissance », les unités du réseau neural qui reconnaissent certaines caractéristiques visuelles survenant couramment se forment. Ainsi, ces caractéristiques deviennent reconnaissables. Les formes sont reconnues lorsque certains liens entre les caractéristiques sont établis et permettent à l'enfant de répondre à n'importe quelle classe de stimulant visuel. Lorsqu'un nombre suffisant de caractéristiques visuelles devient reconnaissable et leurs détecteurs reliés entre eux en modèle qui correspond aux formes courantes, l'enfant progresse au niveau visuel (niveau 0 de van Hiele). À ce niveau, les réseaux des unités de détection servent d'« identificateur de forme » avec des modèles d'activation représentant la structure initiale des figures. Les figures qui s'accordent suffisamment aux prototypes visuels activent certains modèles et en retour les figures sont reconnues, mais non leurs propriétés. En utilisant des instructions appropriées, des unités de reconnaissance de propriétés commencent à se former, des caractéristiques visuelles sont liées aux étiquettes verbales. À ce stade, l'élève devient capable de réfléchir sur les caractéristiques visuelles et reconnaître ainsi les propriétés des figures menant éventuellement à un niveau supérieur de pensée (niveau 1 de van Hiele).

La science cognitive amène une précision aux modèles de la pensée géométrique qui ne sont pas toujours présents dans les théories de Piaget et de van Hiele. Clements et Battista (1992) font remarquer que les modèles d'Anderson et de Greeno identifient en détail les structures de la connaissance et les processus. Alors que le modèle PDP fournit explicitement certains aspects spécifiques des représentations des élèves aux premiers niveaux.

Ainsi, la majorité des auteurs définissent la capacité à visualiser dans l'espace comme étant une composante de l'habileté spatiale ou des habiletés spatiales. Néanmoins, quelle que soit l'approche utilisée, on se heurte à de grandes difficultés quand on essaie de trouver une définition spécifique de cette capacité.

1.2.6.2 Travaux didactiques en rapport avec cette capacité

L'intérêt accordé à l'habileté spatiale par les psychologues a fini par interpeller les éducateurs de mathématiques (Clements, 1983). C'est ainsi que des travaux théoriques et expérimentaux ont été réalisées en rapport avec la capacité à visualiser. Nous présentons ici les recherches qui ont été menées à son sujet.

Recherches sur la nature de la capacité à visualiser Un certain nombre de travaux portent sur *le processus de visualisation.* Il ressort des propos de Bishop (1989) que les premières recherches réalisées pour essayer de comprendre ce processus utilisaient l'approche psychométrique. Mais celle-ci s'est révélée stérile. D'autres types de recherches ont alors vu le jour ayant pour but de montrer que différents individus approchent un même problème de différentes façons. À la suite d'une étude réalisée avec quatre-vingt sujets, Burden et Coulson (1981 ; cité dans Clements, 1983) ont proposé de caractériser toute stratégie utilisée pour répondre à une épreuve spatiale par les trois propriétés : « the *representational mode* that an individual uses when attempting a spatial task, the *processing focus* which the individual uses when attending to the stimulus presented in the task, the *processing 'aid'* which the individual uses ». Ils ont proposé également de distinguer trois modes de représentation : un mode visuel, un mode verbal et un mode mixte constituant un continuum allant du visuel au verbal, et de s'en servir pour classifier les sujets en trois catégories : « high visualizers », « mixed » et « low visualizers ».

D'autres travaux concernent *les objets de la visualisation.* Bishop (1989) a souligné l'aspect personnel et varié des images visuelles — et ceci même dans le cadre restreint de l'activité mathématique — et a fait remarquer que leur qualité varie de façon notable selon la « vividness of imagery ». Il a aussi insisté sur les aspects positifs d'une image visuelle : « its integrative power, its exemplary use, its concretization of abstract ideas and its, sometimes sudden, illuminative aspect » (p. 8). De son côté, Presmeg (1986a) a réussi à identifier cinq types d'images visuelles utilisées par ses élèves : « Concrete imagery (pictures-in-the-mind), Pattern imagery (pure relationships depicted in a visual-spatial scheme), Memory images of formulae, Kinaesthetic imagery (imagery involving muscular activity); Dynamic (moving) imagery ». Malheureusement, les images visuelles peuvent aussi être une source de difficulté. Ainsi, Hoz (1981 ; cité dans Bishop, 1989) parle de la « rigidité géométrique » suscitée par l'impossibilité de « voir » un diagramme de différentes façons ; cette difficulté est d'autant plus grande que la visualisation est un symbole pour l'objet en question. Par ailleurs, Laborde (1988) signale la faible distinction qui existe entre une figure géométrique et sa représentation graphique.

D'autres travaux encore ont pour but d'étudier *les composantes de la capacité à visualiser*. Définir celle-ci ou en préciser les composantes est un sujet qui a préoccupé les chercheurs depuis le début du siècle dernier. Smith (1964) relate que Kelly (1928) a avancé l'existence de deux composantes. La première comprend la perception et la mémorisation des formes géométriques, et la seconde a trait à la manipulation mentale des formes. Plus tard en 1948, Guilford a caractérisé ainsi la capacité à visualiser : « to make discriminations as to the direction of motion such as up and down, left and right and in and out » (cité dans Smith, 1964 ; p. 85). De son côté, Thurstone (1950) a énuméré trois facteurs ayant rapport avec la capacité à visualiser dans l'espace : S1 : « the ability to recognize the identity of an object when it is seen from different angles » ou bien « the ability to vizualize a rigid configuration when it is moved into different positions » ; S2 : « the ability to imagine the movement or internal displacement among the part of a configuration » ; S3 : « the ability to think about those spatial relations in which the body orientation of the observer is an essential part of the problem » (cité dans Smith, 1964 ; p. 85). Pour sa part, French (1951) a interprété la visualisation spatiale comme : « the ability to comprehend imaginery movement in three-dimensional space, or the ability to manipulate objects in imagination » (cité dans Smith, 1964 ; p. 86). Il est important de remarquer que toutes ces définitions restent valables telles quelles dans le contexte particulier de la géométrie.

Parzysz (1989) explique le *conflit voir/savoir* par la perte, la plupart du temps, d'information lors de la représentation plane d'un objet tridimensionnel. Ce conflit est, pour les élèves, la source de problèmes pour la réalisation ou la lecture d'un dessin de géométrie de l'espace, par exemple d'un dessin en perspective – qui, comme le rappelle Parzysz, est une projection dans un plan d'une figure géométrique spatiale. En effet, l'auteur rapporte que les élèves ont fréquemment l'illusion qu'ils peuvent, au moyen d'un dessin suffisamment perfectionné, faire une représentation sans ambiguïté de l'objet. De façon similaire, quand ils décodent un dessin, ils regardent ses propriétés comme étant les propriétés de l'objet même. Ces difficultés sont, entre autres, dues aux reproductions de stéréotypes n'impliquant en aucune façon une maîtrise des principes de la représentation. D'autres part, il ressort de l'étude menée par l'auteur que la perspective parallèle semble être un outil bien adapté à l'apprentissage visé de la géométrie de l'espace au secondaire, à condition de bien contrôler le transfert de propriétés.

Partant de l'idée qu'il est impossible d'établir ce qu'est au juste l'habileté spatiale et avec l'intention avouée d'aider les chercheurs à centrer leurs travaux sur les aspects les plus pertinents de cette habileté du point de vue de la didactique des mathématiques, Bishop (1983) a proposé de mettre l'accent, dans l'enseignement et la recherche, sur les deux capacités (en anglais : abilities) suivantes plutôt que sur l'habileté spatiale en général :

> The ability for interpreting figural information (IFI). This ability involves understanding the visual representations and spatial vocabulary used in geometric work, graphs, charts, and diagrams of all types. Mathematics abounds with such forms and IFI concerns the reading, understanding, and interpreting of such information. It is an ability of content and of context, and relates particularly to the form of the stimulus material (1983, p. 184).
>
> The ability for visual processing (VP). This ability involves visualization and the translation of abstract relationships and non figural information into visual terms. It also includes the manipulation and transformation of visual representations and visual imagery. It is an ability of process, and does not relate to the form of the stimulus material presented (1983, p. 184).

Comme on le voit, la définition proposée de VP demeure assez générale. Son importance réside dans le fait que l'auteur a insisté sur les aspects reliés aux processus en plus de ceux reliés à la forme du stimulus. Pour cette raison, la capacité VP vient affiner la capacité Vz de McGee ci-haut décrite (p. 40). En rapport avec la géométrie, Gorgorió (1998) fait remarquer : « ...when referring to geometry, one could restrict VP ability to the ability to mentally manipulate and transform visual representations and visual imagery » (p. 208).

<u>Recherches sur l'évaluation de la capacité des élèves à visualiser</u> On trouve dans la littérature, une quantité considérable d'épreuves spatiales et de tests visant à évaluer la capacité à visualiser. Wattanawaha (1977 ; cité dans Clements, 1983) a développé un modèle de classification pour tous les types de tâches spatiales. Le modèle DIPT (Dimension, Internalization, Presentation, Thought Process) qu'elle a créé fournit une définition opérationnelle de l'habileté spatiale. Elle s'en est servie pour construire des

tests d'habileté spatiale plus équilibrés que les tests traditionnels des psychologues, mais malgré ses efforts, elle n'a pu échapper aux critiques. Clements (1983) lui a reproché de ne pas avoir tenu compte dans ses expériences du temps de réponse des sujets, dont le rôle important avait été montré par Shepard et Egan, et d'avoir voulu classifier les tâches spatiales plutôt que les réponses des sujets.

En 1978, Bishop a mené une recherche sur les difficultés des étudiants de la première année de l'Université de Technologie, en Papouasie Nouvelle-Guinée, en rapport avec les notions spatiales et géométriques. Les épreuves impliquaient des diagrammes et des représentations planes d'objets tridimensionnels. L'analyse des données a montré que les étudiants étaient très forts du point de vue de la capacité VP (Visual Processing), laquelle suppose de l'imagination et de la mémoire visuelle, mais qu'ils affichaient une faiblesse notable du point de vue de la capacité IFI (Interpreting Figural Information), probablement à cause de leur manque d'expérience en dessin. Bishop en a conclu qu'il faut porter une attention particulière aux activités de représentation dans l'enseignement de la géométrie.

Brumbaugh (1969) a mené une étude dans le but d'isoler les facteurs qui influencent l'habileté des élèves de trois et quatre ans à associer des solides à leurs représentations planes. Il en a identifié quatre en tout. Les plus importants sont l'enseignant et la connaissance par les élèves des leçons qui traitent des formes géométriques. Toutefois, l'auteur reconnaît la difficulté de s'assurer qui de ces deux facteurs a le plus influencé la performance des élèves. Même s'il a eu une influence moins importante, le quotient intellectuel de l'enfant a été considéré comme un troisième facteur. L'auteur souligne la grande corrélation entre la performance et le quotient intellectuel. Malgré qu'il a été retenu pour l'analyse finale, le niveau socioéconomique n'a eu aucune incidence sur la performance des enfants.

Ranucci (1952) s'est proposé de vérifier si l'enseignement de la géométrie des solides améliorait les habiletés de perception spatiale[6] chez les élèves. Pour cette fin, l'auteur a

---

[6] L'expression « habiletés de perception spatiale » désigne les capacités qui impliquent le maniement de problèmes de nature spatiale.

administré une batterie de tests à deux groupes d'élèves d'école secondaire. L'analyse des données révèle des différences statistiques peu significatives entre le groupe expérimental et le groupe témoin. Il attribut ces résultats à l'inadéquation des tests.

Il ne suffit donc pas que les élèves apprennent des notions sur les solides géométriques pour que se développent leurs capacités de perception spatiale.

<u>Expériences en vue de susciter le développement de la capacité à visualiser chez les élèves</u> Dès 1981, Lean a fait une revue de la littérature à ce sujet. Brinkmann (1963) soutient l'idée qu'une amélioration d'aptitude au niveau de la perception visuelle de l'espace est possible au moyen de la programmation. Pour cette fin, un programme de 505 items a été mis au point couvrant des concepts de géométrie élémentaire. Après l'analyse des données, l'auteur a constaté que le groupe d'expérimentation, comparé au groupe témoin, a réalisé des gains significatifs au niveau des concepts géométriques et des relations spatiales. Il conclut que le programme d'auto-instruction s'est révélé efficace pour le traitement des comportements visés.

Wolfe (1970) a voulu vérifier si les capacités spatiales, notamment la visualisation spatiale et l'orientation spatiale, peuvent s'améliorer par le moyen d'une formation directe. Sa recherche lui a permis de conclure que la capacité à visualiser n'a pas subi d'amélioration significative au niveau de la totalité de son échantillon, qui comprenait les niveaux de septième, huitième et neuvième années ; alors qu'il y a eu des gains clairs au niveau de l'orientation spatiale pour les élèves de la huitième année qui ont suivi la formation.

Parzysz (1989) a proposé à ses élèves une ingénierie qui prenait en compte l'utilisation de maquettes tridimensionnelles et l'apprentissage d'un système de représentation graphique de l'espace. Suite à son intervention, l'auteur a remarqué que l'utilisation de types variés de dessin aide les élèves à résoudre des problèmes spatiaux. Il a aussi constaté qu'au début de l'expérimentation, les élèves favorisaient nettement le raisonnement. Mais au fil de l'intervention, la plupart d'entre eux étaient en mesure d'imaginer clairement la situation spatiale sans avoir nécessairement besoin de la présence du matériel utilisé. Le chercheur conclut que les élèves semblent avoir développé des images mentales efficaces de la situation étudiée.

De nos jours, s'est rajouté un outil beaucoup plus sophistiqué pour stimuler la capacité à visualiser des élèves. En effet, des logiciels de géométrie dynamique, comme *Cabri-géomètre*, *Geometer's Sketchpad* et *Geometry Inventor* qui réalisent cette idée de figure variable, ont vu le jour. Dès lors, diverses recherches ont montré que les élèves qui ont eu un cours de géométrie assisté par ordinateur ont souvent de meilleurs résultats que ceux qui ont juste eu un cours traditionnel (Austin, 1984 ; Morris, 1983 ; cité dans Clements & Battista, 1992). Laborde (2003) explique que le déplacement d'un élément du dessin offre à la perception des propriétés spatiales dont l'évolution est régulée par la géométrie. L'observation du comportement des propriétés spatio-graphiques, permet ainsi de spéculer sur les relations géométriques. D'autre part, les connaissances géométriques impliquées dans les situations d'apprentissage servent à produire, reproduire, expliquer et prédire des phénomènes spatio-graphiques constatés visuellement (Laborde, 2003). Cet auteur explique que le procédé d'obtention de la construction géométrique prend plus de sens que le dessin produit avec l'utilisation de logiciel. Elle attire cependant l'attention sur la difficulté des élèves à différencier entre ce qui est spatio-graphique et ce qui est géométrique (par exemple Noss *et al.*, 1994 ; Hölzl, 1996 ; Healy, 2000).

Chapitre 2

La notion de compétence et l'approche par compétences en éducation

Dans ce deuxième chapitre, nous poursuivons la présentation de la problématique de la thèse en traitant la notion de compétence et l'approche par compétences. Nous parlerons de ces dernières d'abord de façon générale (section 2.1) et ensuite dans le cas particulier de l'éducation (section 2.2). Enfin, dans la section 2.3 nous présenterons la définition d'une compétence que nous retiendrons pour la suite de notre travail.

2.1 La notion de compétence et l'approche par compétences en général

La notion de compétence définie en linguistique, en psychologie cognitive et dans le monde du travail diffère sensiblement de celle utilisée en éducation. Dans les lignes qui suivent, nous précisons le cheminement pris par le concept de compétence avant de faire son apparition dans le monde de l'éducation.

2.1.1 Origine de la notion de compétence

Le terme *compétence* est attesté dans la langue française depuis le XV^{e} siècle. D'après nos recherches, sa naissance est évoquée seulement dans le Dictionnaire Historique de la Langue Française (1998), mais le texte qui s'y trouve semble se prêter à plusieurs interprétations. Par ailleurs, son premier emploi appartenait au langage juridique. Il désignait « le pouvoir conféré par la loi à un tribunal d'instruire et de juger un procès » (Dictionnaire de Droit, 1966 ; p. 384). Depuis la fin du XVII^{e} siècle, sa signification s'est étendue à « capacité due au savoir, à l'expérience » (Dictionnaire Historique de la Langue Française, 1998 ; T1 ; p. 823).

2.1.2 La notion de compétence

Le point de vue global

Dans son usage courant, *la compétence* (au singulier) traduit généralement une connaissance ou une expérience qu'une personne a acquise dans un champ particulier et qui lui donne le droit de se prononcer et de juger. Elle suppose une simplicité et une spontanéité dans les actes accomplis. Rey (1996) la caractérise par le « rassemblement organisé et exhaustif de ce qui va de soi et qui paraît dépourvu de mystère » (p. 26). C'est une qualité qu'on reconnaît chez quelqu'un d'autre mais qu'on ne s'attribue pas. La personne compétente est donc celle qui est publiquement reconnue comme telle. Le Boterf (1994) souligne cet aspect lorsqu'il dit : « personne ne peut se déclarer compétent s'il n'est pas reconnu comme tel » (p. 35). Pourtant, cette reconnaissance ne suppose pas a priori un moyen particulier d'acquisition comme l'école, l'apprentissage, ou autre. Elle indique simplement qu'une appropriation a eu lieu. Drouin (1988) fait remarquer à ce sujet que « la compétence reste en ce sens un pouvoir, une habileté un peu mystérieuse » (p. 2).

Si cette notion de compétence (au singulier) demeure quelque peu énigmatique dans son usage ordinaire, en sciences humaines, on a tenté de lui attribuer une signification plus précise. En effet, au début des années soixante, elle est apparue en linguistique dans les travaux de Noam Chomsky. Cet auteur était opposé à l'idée que le langage s'apprend par essais/erreur. Il voyait en la rapidité de l'acquisition par l'enfant des principales unités et structures linguistiques une disposition langagière innée et universelle (Bronckart & Dolz, 1999). Ainsi, selon Chomsky, la compétence représente la capacité d'un individu de produire, de reconnaître et de donner une interprétation sémantique à une infinité de phrases munies de sens dans sa langue. Selon cet auteur, qui voit dans la compétence un potentiel biologique et une caractéristique de l'espèce humaine, cette capacité est implicite et n'est pas observable. La manifestation de cette compétence est la langue émise qui représente la performance langagière conditionnée par toute sorte de facteurs.

Même si cette capacité innée n'a pas fait l'objet de validation scientifique, le terme compétence a connu un grand succès en psychologie cognitive suite aux travaux de

Chomsky (Bronckart & Dolz, 1999). La même source révèle que ce courant privilégie nettement le niveau des structures et des mécanismes mentaux au lieu des comportements observables. D'après ce courant, toutes les fonctions psychologiques comme l'attention, la perception, la mémoire, etc. sont sous-tendues par un dispositif biologique inné. Ainsi, pour toutes ces fonctions, chaque sujet dispose d'une compétence idéale de même ordre que la compétence linguistique. De ce point de vue, la compétence se substitue à l'intelligence, cette dernière étant définie comme la somme des compétences. Même si ce terme a été d'usage chez les psychologues, ceux-ci ne manifestent pas d'accord sur son sens. D'ailleurs, Isambert-Jamati (1994) souligne que, d'un psychologue à l'autre, la compétence peut signifier soit la compétence professionnelle, soit le rôle de l'apprentissage dans l'accélération et le renforcement des schèmes d'assimilation qui caractérise chaque stade de développement (orientation piagétienne), soit simplement ce qui s'oppose aux performances. Vergnaud (2001) va dans le même sens, en affirmant : « on ne peut pas réduire la compétence à une suite d'actes ». Il explique que la compétence représente les connaissances utilisées dans l'action et qu'on est incapable de les décrire en mots.

Le point de vue analytique

Dans l'usage commun, il est aussi fréquent de parler *des compétences* (au pluriel). Dans un premier cas, Isambert-Jamati (1994) explique que l'emploi du pluriel est presque identique au singulier. L'accent est tout simplement mis sur la multiplicité des capacités et des connaissances auxquelles la personne a recours. Chacune de celles-ci est dite une compétence et additionnées elles représentent *la compétence* pour un champ d'activité. Dans un deuxième cas, l'utilisation du pluriel souligne la diversité et la coexistence positive, chez le même individu, de compétences variées. Rey (1996) soutient ce point de vue et fait savoir que « dans ce cas elles [compétences] coexistent en lui [l'individu] sans se mêler : elles sont *a priori* hétérogènes » (p. 23). Pour sa part, Drouin (1988) voit en l'utilisation du pluriel une façon d'atténuer en quelque sorte le côté mystérieux de *la compétence* puisqu'il dévoile l'ensemble de ce qui est sollicité pour pouvoir agir de façon compétente.

Cet usage du pluriel du terme compétence a aussi gagné le monde professionnel dans le cadre d'un mouvement de contestation de la logique des qualifications. Suivant cette dernière, l'attribution d'un poste de travail dans une entreprise était liée à la possession d'un ensemble de savoir-faire et de techniques ayant fait l'objet d'une formation reconnue et officiellement sanctionnée par l'obtention d'un diplôme. Cependant, les situations de travail requièrent de plus en plus une constante adaptation à de nouveaux objectifs et instruments, notamment informatiques. Devant cette situation, les responsables d'entreprises déploraient l'écart entre les formations données en milieu scolaire et la réalité du travail. Face à ce dilemme et particulièrement séduits par la théorie de Chomsky, les psychologues du travail, cherchant à comprendre les processus de raisonnement dans l'activité du travail, se sont appropriés le terme compétence. Leur but était de mieux préparer les ouvriers à leurs tâches, de les rendre plus fiables et plus performants, de les habiliter à exécuter efficacement le travail prescrit, à inventer de nouveaux gestes professionnels, à savoir faire face à l'imprévu et à l'inédit (Le Boterf, 2000a ; Perrenoud, 2000). Mais alors que la notion de compétence chez Chomsky désignait des savoirs et savoir-faire généraux, les entreprises l'ont utilisé pour désigner des savoirs et des savoir-faire liés à des tâches spécifiques. C'est ce qui explique le pluriel (Dadoy, 1999). Toutefois, comme chez Chomsky, ces savoirs et ces savoir-faire ne sont pas pour autant perceptibles, mais sont déduits à partir de l'observation du comportement (Dadoy, 1999). La compétence est alors ces qualités singulières que peut posséder un individu et qui lui permettent de répondre à des situations de travail inédites.

Comme nous venons de le voir, il n'y a pas qu'une seule façon d'envisager la notion de compétence. Pour les uns, il s'agit d'un tout unitaire et indissociable ; tandis que pour d'autres, sa décomposition en éléments constitutifs est la garantie de son fonctionnement. Ce dilemme rappelle celui que l'on rencontre à propos du concept d'intelligence, que certains (par exemple Piaget) considèrent comme un tout défini globalement et d'autres (par exemple Guilford) le décrivent comme un ensemble de nombreuses capacités intellectuelles spécifiques. Rien d'étonnant alors qu'il n'y ait pas de consensus à propos de la notion de compétence !

2.1.3 L'approche par compétences en général

L'approche par compétences (avec le mot compétence au pluriel) a fait son apparition dans le monde de l'industrie, notamment en France. Le Boterf (2000a) explique que la compétitivité des entreprises, le développement des nouvelles technologies de l'information et de la communication, les caractéristiques du marché du travail, l'avancé des recherches sur les processus d'apprentissage et le fonctionnement cognitif, sont tous des facteurs qui ont conduit à la nécessité d'une approche par compétences. Cette dernière consiste à analyser avec rigueur les situations de travail puis déterminer les compétences requises pour accomplir adéquatement les tâches et assumer les responsabilités qui en découlent. L'emploi ici du mot compétences au pluriel, n'implique pas nécessairement que l'on rejette l'idée de considérer la compétence comme un tout unitaire et indissociable, mais cela entraîne d'importants débats quant à la façon de construire les compétences. Le Boterf (2000a) souligne ce dilemme lorsqu'il affirme : « Pour monter et faire fonctionner une gestion par les compétences, il faut disposer d'un concept opératoire sur la compétence » (p. 16).

Différents auteurs font appel à la notion de compétence et/ou l'approche par compétences en fonction de référentiels théoriques variés tels que le cognitivisme, le behaviorisme, le constructivisme et le socioconstructivisme. Ils sont ainsi amenés à parler de compétence et de compétences suivant des définitions diverses, lesquelles ont toutefois généralement un trait en commun : il s'agit non seulement d'être capable d'agir dans un contexte particulier mais aussi de pouvoir transférer sa compétence dans d'autres contextes.

2.2 La notion de compétence et l'approche par compétences en éducation

Un enseignement axé sur le développement des compétences amène des changements notables dans la pratique quotidienne des enseignants. Dans ce qui suit, nous préciserons comment est apparu le concept de compétence en éducation puis nous parlerons des modifications qu'engendre l'approche par compétences au niveau de l'enseignement et de l'évaluation.

2.2.1 La notion de compétence en éducation

Le concept de compétence est apparu en éducation par le biais de la formation professionnelle. Assurément, en dépit de la maîtrise des connaissances et des techniques requises, les diplômés avaient de la difficulté à accomplir les tâches complexes qui leur étaient assignées au sein des entreprises. De ce fait, le rendement quantitatif des systèmes éducatifs était de plus en plus critiqué. Il s'en est suivi des pressions du monde économique auprès des autorités des systèmes éducatifs pour les pousser à transformer les programmes scolaires en termes de compétences (De Ketele, 2000 ; Fourez, 1994 ; Romainville, 1996 ; Ropé & Tanguy, 1994). C'est ainsi que l'idée de développer un curriculum basé sur l'apprentissage d'un ensemble de compétences a fait son chemin afin de permettre à toute personne de vivre dans une société caractérisée par le changement.

Ainsi en éducation l'émergence de la notion de compétence sous-tend l'idée de faire de chaque élève un individu différent et autonome. Sa logique a le mérite de rappeler que les jeunes doivent être formés afin d'affronter la vie. L'objectif ultime donc est que l'élève soit en mesure d'adapter les savoirs acquis à l'école à diverses circonstances. D'ailleurs Perrenoud (2000) défend avec ardeur l'idée que les savoirs scolaires doivent être des outils pour penser et agir au travail et hors travail. Faire de ces savoirs des outils qui serviront à s'adapter aux circonstances, peser des risques, prendre une décision, affronter un dilemme, etc. impliquent leur mise en œuvre dans des situations variées et significatives. Cette mise en œuvre doit être travaillée, non pas plus tard, mais à l'école. Ainsi, l'action compétente se caractérise par la mobilisation de ce qui est vu, vécu, compris, maîtrisé afin de faire face à des situations nouvelles (Allal, 1999 ; Perrenoud, 1997 ; Roegiers, 2000 ; Vergnaud, 2001).

2.2.2 L'approche par compétences en éducation

En éducation, l'approche par compétences consiste non seulement à axer les programmes d'études sur le développement de compétences mais amène aussi plusieurs changements. Elle impose des modifications relatives à l'enseignement et l'apprentissage, à l'évaluation, à l'organisation scolaire et à la différentiation du parcours des élèves.

Inscrire les apprentissages dans un axe de compétence exige de centrer l'enseignement sur l'apprenant plutôt que sur le programme. L'élève est alors perçu comme un élément actif dans le processus d'acquisition des connaissances, celles-ci n'étant plus simplement transmises par l'enseignant. Il revient donc à l'apprenant d'organiser ses connaissances, de les assimiler et de les utiliser de façon pertinente. Ce processus doit être structuré par l'enseignant, à qui incombe la responsabilité d'établir les conditions favorisant l'apprentissage. L'enseignant doit donc proposer des activités variées qui favorisent la curiosité, la participation et la responsabilité de l'élève. L'apprentissage n'étant jamais linéaire et se réalisant au fil du temps, la diversité des activités accroîtra les chances pour chaque élève de trouver une tâche porteuse de sens et à sa mesure. Ces situations doivent nécessiter un travail intellectuel et conduire à une structuration théorique qui éclaire, explicite, organise et généralise les notions.

L'apprentissage va de pair avec l'évaluation. Avec une approche axée sur les compétences, l'évaluation est centrée sur l'apprenant. Elle lui fournit une rétroaction sur ses forces et ses faiblesses et lui permet d'assurer la régulation de ses apprentissages. L'enseignant doit donc concentrer son attention sur l'élève, analyser ses processus d'apprentissage, comprendre où il en est et ce qui l'arrête. Cette forme d'évaluation permet aussi la régulation des pratiques pédagogiques de l'enseignant afin de mieux répondre aux besoins de ses élèves. L'évaluation formative touche donc les contenus disciplinaires autant que le développement des compétences et surtout les stratégies d'apprentissage de l'élève.

L'approche par compétences apporte aussi un changement majeur quant à l'organisation de l'enseignement. La scolarité est structurée autour des cycles d'apprentissage. Il s'agit de se donner davantage de temps pour permettre à l'élève de construire l'ensemble de compétences visé pour la fin du cycle. Cette nouvelle organisation scolaire oblige en retour une réorganisation du travail des enseignants. Ces derniers, devant assurer collectivement le développement des compétences, sont conduits nécessairement à travailler en étroite collaboration, à faire une planification didactique sur plusieurs années et à gérer d'une nouvelle manière le temps et l'espace à l'école. Aussi ces cycles d'apprentissage sont-ils censés favoriser une pédagogie différenciée fondée sur des parcours de formation diversifiés. Il s'agit de prendre appui sur les ressources intellectuelles, affectives et sociales de chaque élève pour l'amener le plus loin possible. Différencier l'enseignement implique aussi travailler sur les erreurs, les obstacles et des interventions didactiques qui accroissent les chances pour chacun de se trouver dans une situation productrice d'apprentissage.

2.2.3 Justification de l'approche par compétences dans le domaine de l'éducation

L'intérêt accordé à l'approche par compétences est sous-tendu par certaines faiblesses de l'approche par objectifs qu'il est sans doute bon de clarifier. L'approche par objectifs visait la décomposition de ce qu'il y avait à apprendre en objectifs aussi élémentaires que possible, au point où les élèves se sont retrouvés devant des tâches tellement partielles qu'elles n'avaient plus de sens à leurs yeux. D'ailleurs plusieurs auteurs (Romainville, 1996 ; Perrenoud, 2000 ; Rey, 1996 ; Roegiers, 2000 ; Rey *et al.*, 2003) se rallient pour dénoncer ce manque de sens des savoirs scolaires théoriques aux yeux des élèves aussi longtemps qu'ils restent déconnectés de leurs sources et de leurs usages sociaux. Face à cette situation est née l'idée de faire travailler les élèves sur des activités globales, des activités qui ont un usage qui leur est perceptible. L'approche par compétences vise donc à donner du sens aux apprentissages. Elle marque une volonté de dépasser cette mécanisation des apprentissages.

L'enseignement des savoirs considéré comme un empilement d'informations sans référence à des situations et à des pratiques sociales a tendance à favoriser l'échec scolaire. Rey *et al.* (2003) expliquent que dans ces conditions, il est toujours possible d'exiger des élèves la connaissance de détails supplémentaires ce qui a un effet fort discriminateur. Perrenoud (2000a), pour sa part, soulève le problème de l'évaluation des savoirs dans des contextes différents du contexte d'apprentissage qui bascule un grand nombre d'élèves dans l'échec scolaire. L'approche par compétences peut réduire ces dérives. D'une part, en faisant travailler les élèves sur des situations variées et significatives, il est possible de réduire l'inflation des connaissances exigées, les ramener à l'essentiel et réclamer qu'il soit acquis par tous. D'autre part, travailler la mobilisation des connaissances scolaires dès le début de la scolarité favorise autant les élèves qui suivront la voie royale des longues études que ceux qui quitteront plus tôt avec une formation de niveau moyen.

Une autre faiblesse de l'approche par objectifs est que le programme est centré sur les savoirs à enseigner, l'élève étant considéré comme un objet (Romainville, 1996). Ainsi en se limitant à imposer une liste de matières à connaître, on a provoqué l'apparition d'un phénomène bien connu : quelques mois après les examens, la plupart des élèves oublient les contenus des cours. Mais si la formation était efficace, il resterait quelque chose aux élèves qui leur permettrait d'apprendre du neuf (Fourez, 1994). L'approche par compétences cherche à assurer ce fondement pour les apprentissages ultérieurs. Il s'agit alors de mettre plus l'accent sur les capacités dont les élèves pourraient désormais disposer et qu'ils seraient capables de mettre en œuvre à l'avenir. Il est donc question de réinvestir les acquis d'une année à l'autre, d'un cycle à l'autre afin d'amener des réponses à des situations significatives.

Une autre faille de l'approche par objectifs en lien direct avec la précédente concerne le réinvestissement des acquis scolaires dans des situations de la vie courante. Malheureusement, force est de constater que la capacité d'agir des élèves est trop fréquemment limitée aux situations stéréotypées d'exercices ou d'examens et que souvent, dans la vie quotidienne, leurs jugements personnels prennent le dessus sur les savoirs appris à l'école (Romainville, 1996). Perrenoud (2000) attribue cette déconnexion à l'absence du transfert des connaissances. En développant des compétences à l'école, il s'agira, pour l'élève, de mettre en interaction tout ce qu'il a appris pour apporter une solution à la fois originale et efficace à une situation.

En conclusion, donner du sens aux apprentissages, réduire l'échec scolaire, assurer un fondement pour les apprentissages ultérieurs et réinvestir les acquis scolaires dans des situations de la vie courante forment essentiellement les arguments qui justifient l'adoption d'une approche par compétences en éducation.

2.2.4 L'apparition de l'approche par compétences en éducation dans divers pays

L'approche par compétences en éducation en Europe francophone tire son origine du monde socio-économique (Romainville, 1996 ; Ropé, 1996 ; Ropé & Tanguy, 1994). Mais les raisons qui ont poussé les systèmes éducatifs d'ailleurs à opter pour une approche par compétences ne se résument pas au poids exercé par le milieu industriel. En effet, de l'autre côté de l'océan, la sphère éducative connaît les mêmes problèmes qui sont sous-jacents aux quatre arguments que nous venons de mentionner.

En France, selon Ropé (1996), l'élaboration d'un ensemble de principes directeurs pour redéfinir les contenus d'enseignement a conduit à l'apparition de la notion de compétence scolaire, mais sa compréhension et sa traduction ont été vues de plusieurs manières différentes. Cela a donné lieu à des usages variés selon les disciplines, voire à l'intérieur d'une même discipline. Ropé révèle que dans l'enseignement du français, la notion de compétence a été introduite suivant quatre courants de pensée qui ne donnent à cette notion ni le même sens, ni la même utilité. Elle croit que l'emploi de cette notion par divers auteurs ayant des conceptions pédagogiques différentes a contribué à son utilisation dans le milieu scolaire.

En Belgique, les problèmes d'échec scolaire, de décrochage, de démotivation, d'extension de la scolarité et d'autres ont conduit à la définition d'une nouvelle approche des objectifs généraux de l'enseignement. Un de ces derniers s'énonce comme suit :

> Amener tous les élèves à s'approprier des savoirs et à acquérir des compétences qui les rendent aptes à apprendre toute leur vie et à prendre une place dans la vie économique, sociale et culturelle (Demoustiers, 2000 ; p. 73).

Une compétence étant définie comme une « aptitude à mettre en œuvre un ensemble organisé de savoirs, de savoir-faire et d'attitudes permettant d'accomplir un certain nombre de tâches » (Demoustier, 2000 ; p. 74). Une réforme des contenus d'enseignement en terme d'acquisition de compétences a alors été initiée pour l'enseignement fondamental belge. L'auteur fait part du dilemme des responsables de la formulation des compétences, qui ont été tiraillés entre le désir de détailler les compétences disciplinaires attendues ou encore d'apporter quelques transformations d'écriture et de présentation aux programmes existants.

À Genève, selon Lessard (1999), une étude en profondeur sur le redoublement et l'échec scolaire a conduit à la mise en place d'un projet de rénovation de l'école primaire genevoise. Le même auteur révèle que ce projet était considéré comme une tentative d'intégrer à la pratique des enseignantes et des établissements scolaires, plusieurs idées fécondes se résumant en trois points : 1) la différenciation de l'enseignement et l'individualisation des parcours de formation ; 2) les projets d'école et le travail en équipe pédagogique ; 3) les didactiques centrées sur l'apprenant et les méthodes actives. L'évaluation de ce projet de rénovation a mené les responsables à définir cinq compétences autour desquelles il fallait concentrer les efforts : gérer la progression des apprentissages ; concevoir et faire évoluer des dispositifs de différentiation ; organiser et animer des situations d'apprentissages ; situer l'école au sein de l'institution scolaire ; informer et impliquer les parents. Lessard (1999) explique que les trois premières compétences cherchent à mettre les enfants au centre du travail pédagogique. Elles concernent donc le troisième point du projet de rénovation. Quant aux deux dernières compétences, elles se rapportent au deuxième point, c'est-à-dire au travail en équipe.

Aux États-Unis d'Amérique, la notion de compétence en éducation a vu le jour dans un contexte différent de celui de l'Europe francophone. Selon Grégoire (1990), la crise économique et sociale que les États-Unis d'Amérique ont connue au début des années soixante-dix a conduit à la dégradation de l'enseignement et devant cette situation préoccupante est née l'idée d'une restructuration en profondeur du système scolaire. Étant donné que « La qualité de l'éducation, (...) relève, en premier lieu et à tous égards, de celle de la performance des enseignants. Cette dernière ne peut qu'être fonction de leur propre formation » (Grégoire, 1990 ; p. 23), ce remue-ménage a conduit à élaborer des programmes de formation des maîtres formulés en termes de compétences que les enseignants devraient acquérir. Dans l'étude qu'il a menée à propos de ces nouveaux programmes, Grégoire (1990) mentionne que les compétences retenues appartiennent aux domaines des connaissances, des capacités et de la sociabilité et qu'on y retrouve définition précise de la matière à apprendre, une organisation systématique de cette matière en fonction des objectifs d'apprentissage visés et une évaluation de la maîtrise des apprentissages à la fin de chaque unité ; il fait part également des nombreuses critiques formulées à l'égard de cette approche et de sa courte durée de vie. Laliberté (1995) souligne toutefois le cas du collège Alverno, qui fait exception, où des modifications d'envergure du curriculum de l'établissement ont conduit à la mise en place d'un ensemble de huit capacités que les étudiantes devraient maîtriser à travers leur programme d'études. Et pour que ces capacités ne restent pas décrites en termes très généraux, on a déterminé, pour chacune d'elles, six niveaux de compétence allant du plus simple au plus complexe afin d'assurer aux étudiantes une formation fonctionnelle. L'auteur explique que : « l'accent doit être mis sur l'utilité de l'éducation reçue pour la vie qu'on sera par la suite appelé à mener » (p. 140). Ainsi, au collège Alverno, une place de choix a été réservée à l'intégration du savoir et de l'agir.

Toujours en parlant des États Unis, il est intéressant de noter qu'en élaborant ses recommandations pour la construction d'un curriculum en mathématiques, le National Council of Teachers of Mathematics n'a adopté une approche par compétences ni dans *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (2000a) ni dans *Principles and Standards for School Mathematics* (2000b). Néanmoins, un certain nombre d'idées sous-jacentes à cette approche transpirent ici et là dans les textes. En effet, concernant le rôle de l'enseignant en classe, il leur est recommandé de partir des connaissances antérieures des élèves pour en construire des nouvelles. À cette fin, ils doivent user de différents styles et stratégies pour engager les élèves dans la construction de leurs apprentissages et soutenir leur intérêt. Leur responsabilité est aussi de créer un environnement intellectuel qui encourage les élèves à réfléchir, à poser des questions, à résoudre des problèmes, à discuter de leurs idées, stratégies et solutions, à construire des arguments mathématiques et à justifier leurs idées. Les enseignants sont aussi sollicités à observer les élèves et à écouter attentivement leurs idées et leurs explications pour évaluer leurs progrès et réajuster l'enseignement en conséquence. Afin d'enrichir leur expérience, les enseignants sont invités à se donner régulièrement des moments de réflexion seuls et entre collègues pour discuter ou analyser certaines idées des élèves, monter une leçon, etc. Derrière ces recommandations, nous devinons la nouvelle responsabilité allouée à l'élève dans la construction de ses apprentissages ainsi que le nouveau rôle de l'enseignant dans sa classe. Ce dernier n'a plus à transmettre les connaissances, il doit plutôt créer les conditions qui favorisent l'apprentissage. À propos de l'apprentissage, l'idée principale qui peut être dégagée est sa réalisation à long terme, tout au long du cursus scolaire. Le texte souligne que : « student's understanding of mathematical ideas can be built throughout their school years if they actively engage in tasks and experiences designed to deepen and connect their knowledge » (p. 21). On souligne aussi que l'apprentissage est mieux réalisé lorsqu'on permet à l'élève d'interagir en classe, de proposer des idées et des conjectures, de porter un jugement sur sa pensée et celle de ses amis et de développer le raisonnement mathématique. Encore une fois, l'accent est mis sur le rôle et la place qu'il faut accorder à l'élève en classe. L'évaluation porte aussi certains traits de l'approche par compétences. Les enseignants sont fortement invités à envisager l'évaluation formative comme une routine dans le déroulement des activités en classe. Ceci dans le but d'informer et de guider l'élève dans ses apprentissages et de permettre à l'enseignant de prendre les décisions qui s'imposent pour réorganiser les tâches ou réajuster son enseignement.

Au Québec, comme en France, c'est d'abord dans le secteur de la formation professionnelle que les principes, les contenus et l'évaluation ont été considérés en termes de compétences (Gohier & Grossmann, 2001). Barbeau (1995) rapporte qu'il a été question de revoir les programmes professionnels en prenant pour cible des compétences qui ont été déterminées à partir d'une analyse de situations de travail. Dans ce cas, les compétences sont entendues comme des capacités de niveau supérieur, nécessaires à l'accomplissement de fonctions de travail, vérifiables dans des situations et des tâches spécifiques. L'approche par compétences a ensuite été adoptée, dès le trimestre d'automne 1993, pour les cours de la formation générale des cégeps (Barbeau, 1995). Ce même auteur indique que les objectifs sont présentés sous forme d'un énoncé de compétence et d'éléments de la compétence. Par ailleurs, Morin (1995) explique que la préoccupation des programmes d'études des cégeps chevauche entre le développement de la compétence et des compétences des étudiants. D'après cet auteur et dans ce cadre bien précis, la compétence est entendue comme étant « l'aptitude générale d'un étudiant qui démontre l'atteinte des objectifs d'un programme et qui le rend apte à s'intégrer au marché du travail ou à entreprendre des études universitaires » (p. 131), alors que les compétences sont « les aptitudes et capacités particulières à répondre aux exigences spécifiques d'une tâche, d'une fonction de travail ou d'un programme universitaire particulier » (p. 131). À titre d'exemple, dans la description d'un cours d'algèbre linéaire et de géométrie vectorielle, on peut lire les deux compétences suivantes : « Appliquer des méthodes de l'algèbre linéaire et de la géométrie vectorielle à l'étude de différents phénomènes de l'activité humaine » et « Appliquer à la compréhension du phénomène humain, dans des situations concrètes, des notions disciplinaires ». En 1994, dans *La formation à l'éducation préscolaire et à l'enseignement primaire, Orientations et compétences attendues,* le Ministère de l'Éducation du Québec (M.É.Q.) recommande que les programmes de formation des enseignants à l'éducation préscolaire et primaire soient axés sur le développement de compétences professionnelles. Gohier et Grossmann (2001) expliquent que les compétences visées étaient de trois types : « les compétences relatives aux disciplines enseignées, les compétences psychopédagogiques et les compétences dites complémentaires, qui concernent divers aspects de la tâche éducative, comme l'animation d'activités parascolaires, les rencontres avec les parents… » (p. 18). Ces auteurs font remarquer que le terme compétence n'a pas été défini en tant que tel mais renvoie à une liste de connaissances et de capacités à acquérir pour les trois catégories de compétences. En 1996, la Commission des États généraux sur l'éducation remet un rapport intitulé *Les États généraux sur l'éducation 1995-1996, Exposé de la situation* où la révision des curriculums du primaire et du secondaire est particulièrement recommandée afin de rehausser le niveau culturel et de soutenir la réussite du système d'éducation. Suite à la révision des programmes, les contenus globaux de formation ont été reformulés sous l'angle de compétences à atteindre. Le sens de la notion de compétence ici est tout autre que celui dans le cadre de la réforme des programmes des cégeps. Le programme nouvellement conçu distingue des compétences transversales et des compétences disciplinaires et précise pour chaque discipline des savoirs essentiels. Tous ces travaux se sont concrétisés dans une réforme curriculaire du préscolaire et du primaire pour la rentrée scolaire 2000-2001. Comme nous venons de le constater, au Québec, la notion de compétence est passée par trois sens différents dépendamment des milieux de formation et des buts visés.

2.3 La définition d'une « compétence » retenue pour la thèse

Malgré son usage répandu, il n'y a pas de définition claire et faisant consensus de la notion de compétence. Gerard et Roegiers (1993) ont tenté de définir la notion de compétence dans un cadre scolaire. Ils précisent qu'elle est : « un ensemble intégré de capacités qui permet – de manière spontanée – d'appréhender une situation et d'y répondre plus ou moins pertinemment » (p. 66). Les auteurs reconnaissent que leur définition regroupe les trois éléments principaux de la compétence telle qu'elle est abordée dans l'univers professionnel à savoir : l'originalité, l'efficacité et l'intégration. Dans le monde de l'éducation, l'originalité se traduit non plus par le fait d'apprendre aux élèves une réponse unique mais plutôt de les inciter à analyser une situation. L'efficacité cache une réponse exacte et utile. L'intégration se caractérise par une réponse qui fait appel à un ensemble de savoirs, de savoir-faire et de savoir-être (Bosman *et al.*, 2000).

D'après De Ketele (1996 ; cité dans Roegiers, 2000), la compétence est « un ensemble ordonné de capacités (activités) qui s'exercent sur des contenus dans une catégorie donnée de situations pour résoudre des problèmes posés par celles-ci » (p. 65). Cette définition, proche de la précédente, amène cependant les notions de capacité, de contenu et de famille de situations qui explicite davantage la notion de compétence. Comme l'explique Roegiers (2000), pour De Ketele, la famille de situations tient une place importante dans l'exercice d'une compétence puisqu'il faut la déterminer en premier lieu. Ce n'est qu'en deuxième lieu qu'il faut préciser les capacités et les contenus à mobiliser.

Le Boterf (1994) définit la compétence comme « un savoir-agir, c'est-à-dire un savoir intégrer, mobiliser et transformer un ensemble de ressources (connaissances, savoirs, aptitudes, raisonnements, etc.) dans un contexte donné pour faire face aux différents problèmes rencontrés ou pour réaliser une tâche » (p. 33). Comparé aux deux autres définitions précédentes, l'intérêt de celle-ci réside dans la notion de ressources. La compétence ne mobilise pas seulement des capacités mais aussi d'autres types de ressources : des savoirs d'expérience, des raisonnements, des automatismes, etc. Soulignons que pour Le Boterf la compétence réside dans la mobilisation même de ces ressources. Cette idée est reprise par Perrenoud (1997) avec beaucoup de réserves. Il affirme plutôt qu'« une compétence présuppose l'existence de *ressources mobilisables,* mais ne se confond pas avec elles » (p. 35). Pour Perrenoud, la compétence ajoute la mise en relation pertinente de ces ressources pour permettre une action efficace en situation complexe. L'auteur qualifie ces ressources de condition nécessaire à l'existence même d'une compétence. Il affirme : « Sans de telles ressources, il n'y a pas de compétences » (Perrenoud, 2000 ; p. 28). Cependant l'existence même de ces ressources ne suffit pas pour parler de compétence. Perrenoud (2000) ajoute : « si le sujet ne parvient pas à les mobiliser à bon escient, en temps utile, c'est comme si elles n'existaient pas » (p. 28). Ainsi, une compétence désigne pour cet auteur « une capacité de mobiliser diverses ressources cognitives pour faire face à un type de situations » (Perrenoud, 1999 ; p. 17).

Tout comme Perrenoud, Allal (1999) reconnaît l'utilité de la notion de compétence. Elle la conçoit comme : « un réseau intégré et fonctionnel constitué de composantes cognitives, affectives, sociales, sensori-motrices, susceptible d'être mobilisé en actions finalisées face à une famille de situations » (p. 81). L'auteur met plus en évidence dans sa définition les composantes affectives, sociales et sensori-motrices puisque dans certains cas elles jouent un rôle déterminant dans l'activation des connaissances (Allal, 1999). Contrairement à Perrenoud qui exige l'efficacité dans la notion de compétence, Allal retient plutôt la notion d'action finalisée. Elle explique qu'« une compétence correspond à un *continuum* constitué de divers niveaux de complexité et d'efficacité plutôt qu'à un palier d'excellence qui est atteint ou pas atteint » (p. 81). Cette explication laisse entendre qu'une compétence se développe à long terme, au fil des années, voire toute la vie.

Soucieux du développement des compétences de l'élève, Roegiers (2000) propose de considérer une compétence dans le sens d'un potentiel mis au service de l'individu qu'il peut mobiliser à tout moment lorsqu'il en a besoin et non seulement lorsqu'il l'exerce dans une situation donnée. Il la définit comme : « la possibilité, pour un individu, de mobiliser de manière intériorisée un ensemble intégré de ressources en vue de résoudre une famille de situations–problèmes » (p. 66). L'intérêt de cette définition est sa référence explicite aux situations-problèmes qui rejoint de plus près les préoccupations d'évaluation auxquelles on ne peut échapper dans le cadre scolaire.

Comme nous venons de le constater, les définitions de la notion de compétence ne manquent pas. Chaque auteur fait valoir à sa façon certains aspects de cette notion auxquels il croit. Cependant, ces définitions se rejoignent en trois idées principales à savoir : l'orientation vers une finalité à long terme, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre et l'intégration d'un ensemble de ressources. En dépit de l'absence de consensus sur une définition de la notion de compétence, il est essentiel que nous en choisissions une sur laquelle nous nous appuierons pour réaliser notre travail de thèse. Étant donné que ce dernier concerne l'école québécoise, il nous semble approprié de choisir la définition de compétence retenue par le Ministère de l'Éducation de Québec d'autant plus que celle-ci regroupe les trois idées principales que nous venons de citer. Pour la suite du présent travail, nous adopterons la définition suivante :

Une compétence est un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources.

Selon le M.É.Q., cette définition reflète bien les trois idées principales ci-haut mentionnées. D'abord, l'intégration d'un ensemble de ressources est sous-entendue dans l'expression « la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources ». En effet, les idées de mobilisation et d'utilisation efficaces suggèrent que l'élève est amené à apporter face à la situation-problème qu'il rencontre tout un ensemble de savoirs, de capacités, de savoir-faire et d'attitudes pour affronter un dilemme, prendre une décision, amener une réponse. Pour résoudre la situation-problème, il s'agit pour l'élève non pas de simplement appliquer ce qu'il a appris récemment à l'école, mais de mettre en interaction diverses ressources pour construire une solution tout à la fois originale et efficace. D'ailleurs, nous retrouvons cette idée dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (2004) lorsqu'il est dit : « il [l'élève] lui faut donc avec patience, par de multiples recommencements, apprendre à agir de façon efficace, ce qui implique qu'il parvient à intégrer de façon harmonieuse connaissances et savoir-faire[7] » (p. 6).

Ensuite, la définition retenue d'une compétence comporte aussi l'idée de l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes puisqu'on ne peut conclure à une compétence à partir d'une seule situation. D'une part, la mobilisation d'un ensemble de ressources se fait à propos d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre, puisqu'une compétence ne peut être comprise qu'en référence aux situations dans lesquelles elle s'exerce (Roegiers, 2000). D'autre part, les compétences se construisent toujours en s'exerçant sur une famille correspondante de situations-problèmes. Cet aspect est bien souligné dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (2004) puisque les enseignants sont incités à « …concevoir des situations d'apprentissage et un contexte pédagogique qui favorisent le développement de compétences » (p. 9).

Enfin le savoir-agir implique d'une part le recours à une combinatoire riche de ressources tant internes qu'externes comme les savoirs scolaires, les capacités, les attitudes, les acquis issus de la vie courante, etc. que l'élève devra mobiliser et mettre en synergie pour faire face à une situation-problème. D'autre part, contrairement au savoir-faire qui se réduit à l'exécution d'une tâche scolaire bien circonscrite et qui fait appel à des ressources restreintes, le savoir-agir est rattaché au développement à long terme d'une compétence. En effet, cette dernière continue de progresser tout au long du cursus scolaire, de s'enrichir au fil des expériences vécues sur le marché du travail et dans la vie personnelle. Cette particularité d'une compétence a bel et bien été soulignée dans la *Programme de formation de l'école québécoise* (2004) dans la phrase « … son degré de maîtrise peut progresser tout au long du parcours scolaire et même au delà de celui-ci » (p. 9).

---

[7] C'est nous qui soulignons.

2.3.1 « Compétences transversales » et « compétences disciplinaires »

De ce qui précède, nous pouvons affirmer qu'une compétence n'est pas isolée de tout contexte. Au contraire, elle se rapporte à des situations précises souvent liées à une discipline. Pourtant, dans la littérature on parle de compétences transversales qui, par définition, ne sont associées à aucun contexte particulier (Rey, 1996). Leur existence est, le moins qu'on puisse dire, controversée. L'idée selon laquelle on pourrait développer des compétences en dehors de tout contenu spécifique est remise en question par plusieurs psychologues cognitivistes et didacticiens. Perkins et Salomon (1989) concluent que rien n'accrédite l'hypothèse que les mécanismes généraux seront ensuite automatiquement transférés aux différentes disciplines. Maingain, Dufour et Fourez (2002), Tardif (1997), Roegiers (2000) et bien d'autres soutiennent que la réalisation d'une tâche très générale, comme résoudre un problème, est d'autant plus difficile que l'élève ne dispose pas de connaissances spécifiques concernant l'objet particulier sur lequel elle porte. Rey (1996) doute fortement de l'existence des compétences transversales. Pour Perrenoud, celles-ci ne sont qu'une utopie. Il soutient que « la transversalité totale est un fantasme, le rêve d'un *no man's land* où l'esprit se construirait hors de tout contenu ou plutôt, en n'utilisant les contenus que comme des terrains d'exercice plus ou moins féconds de compétences transdisciplinaires » (Perrenoud, 1997 ; p. 51). Fourez (1999) explique, pour sa part, que les compétences transversales peuvent être envisagées à condition de les construire dans différentes situations particulières, s'assurer de leur transfert dans des champs divers pour pouvoir les déclarer « transversales ». Maingain, Dufour et Fourez (2002), tout comme Tardif (1999), adhèrent à ce point de vue et expliquent que les différentes situations particulières sont d'abord considérées au sein d'une discipline puis d'une discipline à une autre. Ils concluent que c'est parce qu'elles intéragissent dans une multitude de situations variées qu'elles prennent tout leur sens. De plus, d'après ces auteurs, les compétences transversales sont réparties en catégories, à savoir : les compétences logiques, cognitives, méthodologiques, communicationnelles, métacognitives, épistémologiques, relationnelles et socioaffectives. Quant aux compétences disciplinaires, elles visent l'appropriation du contenu particulier de la discipline en question à travers des familles correspondantes de situations-problèmes à résoudre.

Dans son programme de formation de l'école québécoise, le Ministère de l'Éducation du Québec vise le développement de compétences disciplinaires et de compétences transversales. Privilégiées par le M.É.Q., ces dernières sont perçues comme présentes dans l'ensemble des activités éducatives organisées par l'école. C'est pourquoi elles ne sont associées à aucun contexte particulier ni à aucune tâche spécifique.

2.3.2 Type de « ressources » nécessaires au développement d'une compétence

L'idée de ressource tient une place importante dans le développement d'une compétence. Elle permet de considérer toutes sortes d'acquis qui sont mobilisables lorsque l'élève affronte des situations nouvelles (Perrenoud, 1999). Roegiers (2000) appuie cette assertion et ajoute que les ressources sont intégrées et nombreuses au point qu'il est difficile de les analyser lors de l'exercice de la compétence. C'est pourquoi dans le *Programme de formation de l'école québécoise* (2004), on peut lire : « La notion de ressource réfère non seulement à l'ensemble des acquis scolaires de l'élève, mais aussi à ses expériences, à ses habiletés, etc. À cela, que l'on pourrait qualifier de ressources internes ou personnelles, s'ajoutent une multitude de ressources externes auxquelles l'élève peut faire appel, tels ses pairs, son professeur, les sources documentaires, etc. » (p. 5). Cette distinction entre ressources internes et externes est particulièrement mise de l'avant par Perrenoud (1999) dans la littérature. Pour cet auteur, les ressources internes comprennent les connaissances, capacités cognitives générales, schèmes d'action ou d'opération, savoir-faire, souvenirs, concepts, informations, le rapport au savoir, le rapport au réel, l'image de soi et la culture, alors que les ressources externes réfèrent aux bases de données, documents, outils, matériaux ou autres auteurs. Dans la suite de notre travail, nous qualifierons de « ressources intellectuelles » ce que Perrenoud appelle les ressources internes et « ressources humaines et matérielles » ce qu'il appelle ressources externes.

2.3.3 « Niveaux de développement » d'une compétence

Nous avons mis en évidence précédemment qu'une compétence se développe à long terme, au fil du temps, voire toute la vie. Se prononcer donc sur l'atteinte d'une compétence est presque une utopie. Cependant, il est réaliste de parler d'une progression de la maîtrise d'une compétence. Dans le cadre scolaire, il devient nécessaire de fixer des « niveaux de développement » qui permettront de construire progressivement une compétence donnée avec les élèves. Ces « niveaux de développement » présentent le double avantage d'aider l'enseignant à percevoir plus facilement où sont rendus les élèves dans le développement d'une compétence et de faciliter l'évaluation.

L'idée de rendre compte de la progression des élèves lors de l'évaluation est soutenue par Scallon lorsqu'il affirme : « On peut souhaiter apprécier les accomplissements d'un élève au terme d'un parcours ou d'une période d'enseignement et d'apprentissage » (Scallon, 2004 ; p. 303). Il devient donc important de décider à la fin de quelles périodes du primaire et du secondaire il est plus adéquat de situer ces « niveaux de développement ». À priori, trois choix sont possibles : à la fin de chaque degré, à la fin de chaque cycle ou à la fin de chaque ordre d'enseignement. Comme le M.É.Q. a décidé de structurer l'organisation scolaire en fonction de cycles d'apprentissage, il nous paraît plus logique et plus pratique de situer les « niveaux de développement » d'une compétence à la fin de chacun des cycles du primaire et du secondaire. Compte tenu de ce choix et de l'affirmation de Scallon, toute compétence visée dans le programme du M.É.Q. aura donc cinq « niveaux de développement » — correspondant à ce que le M.É.Q. appelle « attentes de fin de cycle ».

Dans la littérature existante, on retrouve à propos de la notion de « niveau de développement » d'une compétence, quelques expressions équivalentes comme *degré de développement d'une compétence*, *niveau d'exigence d'une compétence* et *palier d'une compétence.* En ce qui concerne les deux premières expressions, on ne fournit aucune définition ou explication claire à leur sujet ; ce n'est que par le contexte qu'on arrive à comprendre qu'il s'agit de « niveau de développement » d'une compétence. Quant à l'expression *palier d'une compétence*, elle est utilisée par Roegiers (2000) qui la définit à la fois par les niveaux intermédiaires de contenus, d'activités à exercer et de situations dans lesquelles la compétence visée doit s'exercer. Il précise : « pour définir ces paliers, on agit souvent sur les situations, pour lesquelles on a un niveau moindre d'exigence : moins de contraintes ; moins d'opérations à effectuer ; moins de données à gérer ; champ des situations plus limité ; volume plus réduit de la production ; etc. » (*ibidem,* p. 141). Qu'on parle de palier, de degré de développement ou de niveau d'exigence d'une compétence, une chose est sûre : le choix de niveaux de développement d'une compétence est capital non seulement pour mieux marquer de grandes étapes de l'apprentissage mais également pour être en mesure d'évaluer le progrès des élèves par rapport à ladite compétence.

Prenons l'exemple de la compétence « Apprécier des œuvres littéraires » (appelée par la suite au secondaire « Lire et apprécier des textes variés ») qu'on trouve dans le domaine français, langue d'enseignement du nouveau programme du M.É.Q. Les « niveaux de développement » de cette compétence sont :

Niveau 1 de développement (Attentes de la fin du premier cycle du primaire)

> À la fin du premier cycle, l'élève connaît quelques œuvres littéraires à sa portée. Il parle volontiers des œuvres qu'il a lues, vues ou entendues et il s'en inspire parfois pour alimenter divers projets. Au cours d'activités culturelles rattachées à ces œuvres et adaptées à son âge, il exprime ses goûts, ses sentiments, ses émotions et ses préférences (*Programme de formation de l'école québécoise, Éducation préscolaire, Enseignement primaire*, 2001 ; p. 85).

Niveau 2 de développement (Attentes de la fin du deuxième cycle du primaire)

> À la fin du deuxième cycle, l'élève connaît un grand nombre d'œuvres littéraires à sa portée et peut se prononcer sur leurs qualités et leurs faiblesses. Il intègre divers éléments associés aux œuvres lues, vues ou entendues dans les projets qu'il réalise en français et dans les autres disciplines. Il participe activement à de nombreuses activités culturelles rattachées à ces œuvres dans son milieu scolaire et il fait souvent la promotion d'œuvres de littérature pour la jeunesse et de littérature générale auprès de ses pairs (*ibidem*, p. 85).

Niveau 3 de développement (Attentes de la fin du troisième cycle du primaire)

> À la fin du troisième cycle, l'élève s'est approprié un répertoire étendu et varié d'œuvres littéraires. Il sait les comparer entre elles et établir des liens avec d'autres formes de représentation. Il justifie son

appréciation à partir de certains critères et à l'aide d'exemples pertinents. Il transpose souvent des éléments issus de ses expériences littéraires dans divers contextes disciplinaires de même que dans les activités culturelles proposées dans son milieu scolaire ou communautaire (*ibidem*, p. 85).

Niveau 4 de développement (Attentes de la fin du premier cycle du secondaire)

À la fin du premier cycle du secondaire, l'élève lit et apprécie différents genres de textes de complexité moyenne et traitant de sujets abordés en français ainsi que dans d'autres disciplines. Il est notamment en mesure de s'informer à partir de textes courants, de fonder une appréciation critique, de découvrir des univers littéraires et de se construire des repères culturels.
• Quand l'élève s'informe sur un sujet donné, il lit des textes courants provenant de sources variées en relation avec le sujet traité. Il sélectionne l'information pertinente en s'assurant de sa crédibilité et il peut la synthétiser. Il organise de façon claire l'information tirée d'une ou de plusieurs sources.
• Quand l'élève apprécie des textes littéraires et courants, il porte un jugement critique ou esthétique à partir de quelques critères choisis avec le soutien de l'enseignant. Il fonde son jugement sur des extraits ou des exemples pertinents. Il compare un texte avec d'autres textes, littéraires ou non.
• Quand l'élève découvre des univers littéraires en lisant des textes narratifs et poétiques, il cerne les principaux éléments des textes (personnages, lieux, époque, etc.). Il reconnaît le point de vue adopté par le narrateur ou par certains personnages.
Dans tous les textes qu'il lit, l'élève comprend et interprète les informations explicites et implicites en dégageant les éléments significatifs et en s'appuyant sur le contexte. Il réagit aux choix culturels, textuels et linguistiques les plus évidents. Avec des textes plus complexes, il adopte des stratégies appropriées pour surmonter les difficultés lexicales et syntaxiques. Il fonde son interprétation des textes et sa réaction sur des extraits ou des exemples. Après avoir lu une diversité d'oeuvres de qualité du Québec, de la francophonie et d'ailleurs, l'élève peut utiliser son répertoire personnalisé (*Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire, premier cycle*, 2004 ; p. 101).

Niveau 5 de développement (Attentes de la fin du deuxième cycle du secondaire)

[Le M.É.L.S. n'a pas encore rendu publique la description de ce niveau.]

2.3.4 « Critères d'évaluation » servant à évaluer l'atteinte des « niveaux de développement »

Pour décrire les cinq « niveaux de développement » (attentes de fin de cycle) d'une compétence donnée, il faut se baser sur un certain nombre de « critères d'évaluation ». Selon Roegiers (2000), des « critères d'évaluation » permettent d'analyser la qualité de ce qui est produit ou de ce qui est exécuté, et ils ont un caractère général et abstrait. Scallon (2004), se référant plus spécifiquement à des « critères d'évaluation » d'une compétence, parle de qualités qu'on peut nuancer ou graduer.

En général, pour juger de l'atteinte des différents « niveaux de développement » d'une compétence on fait appel à plusieurs critères d'évaluations à la fois ; à mesure que l'on passe d'un niveau de développement au suivant, les exigences deviennent plus grandes.

Revenons à l'exemple de la compétence « Apprécier des œuvres littéraires » (appelée par la suite « Lire et apprécier des textes variés » au secondaire). Les critères d'évaluation proposés dans le programme du M.É.Q. pour juger de l'atteinte de ces trois premiers niveaux de développement (correspondants aux trois fins de cycle du primaire) sont les suivants :

- C1 : élargissement et diversification du répertoire d'œuvres explorées ;
- C2 : expression de sa perception d'une œuvre ;
- C3 : établissement de liens entre des œuvres (lues, vues ou entendues) ;
- C4 : pertinence des critères utilisés pour justifier ses appréciations.

Dans le cas du critère C1, les exigences s'accroissent à mesure que l'on passe d'un niveau de développement à l'autre, comme on peut le voir ci-dessus :

Exigence par rapport au critère C1 pour l'atteinte du niveau 1 de développement :

- L'élève s'intéresse déjà à quelques œuvres littéraires à sa portée présentées sous différentes formes.

Exigence par rapport au critère C1 pour l'atteinte du niveau 2 de développement :

- L'élève s'intéresse à un grand nombre d'œuvres littéraires à sa portée appartenant à différents genres et traitant de thèmes diversifiés.

Exigence par rapport au critère C1 pour l'atteinte du niveau 3 de développement :

- L'élève se réfère à un grand nombre d'œuvres littéraires et il peut se prononcer avec une certaine assurance sur ces œuvres.

Exigence par rapport au critère C1 pour l'atteinte du niveau 4 de développement :

- L'élève manifeste une très bonne compréhension de textes de complexité moyenne en s'appuyant sur des éléments explicites et implicites ainsi que sur certaines subtilités présentes dans les textes.

De même, chacun des critères d'évaluations C2, C3 et C4 donne lieu à une suite d'énoncés traduisant des exigences de plus en plus grande selon les niveaux.

REMARQUE : Étant donné les objectifs de la thèse et le discours que tient le M.É.Q. qui ne nous semble ni uniforme ni très cohérent, nous n'aborderons pas dans cette thèse la question de l'évaluation des progrès des élèves par rapport au développement d'une compétence donnée.

2.4 « Compétences » à développer dans l'enseignement de la géométrie

Au Québec, l'adoption de l'approche par compétences en éducation nécessite le choix d'un certain nombre de *« compétences disciplinaires »* (voir section 2.3.1). Cela vaut en particulier pour les mathématiques, c'est-à-dire qu'il faut choisir un certain nombre de compétences spécifiques aux mathématiques à privilégier à l'école, quelques-unes d'ordre très général applicables dans tous les champs des mathématiques à la fois (par exemple la compétence à résoudre des problèmes mathématiques dans divers types de contextes) et quelques autres en rapport avec certains champs mathématiques particuliers universellement reconnus – notamment une compétence générale à travailler avec des notions numériques (on parle alors de «posséder le sens numérique») et *une compétence générale à travailler avec des notions géométriques* (nous parlerons alors de *« posséder le sens géométrique »*). Logiquement, compte tenu de son importance (dont nous avons parlé dans la section 1.2.4), on devrait s'attendre à retrouver aussi dans la liste *une certaine compétence à visualiser dans trois et deux dimensions en géométrie*. Nous reviendrons là-dessus par la suite.

Chapitre 3

Objectifs, questions de recherche et méthode de recherche

Dans ce troisième chapitre, nous formulons d'abord les objectifs retenus pour notre thèse ainsi que les questions de recherche qui leurs sont associées. Puis, nous présenterons la méthode que nous avons choisie pour les atteindre.

3.1 Premier objectif de la thèse

Le premier objectif de la thèse est de décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », de montrer qu'il s'agit d'une « compétence » (telle que définie dans la section 2.3), de préciser les principales catégories de « ressources » nécessaires au développement de cette compétence et de définir des « niveaux de développement » de celle-ci.

3.1.1 Questions de recherche associées au premier objectif

De façon plus spécifique, nous chercherons à répondre aux trois questions suivantes :

<u>Question de recherche A</u>

Comment décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », laquelle constitue un aspect particulier du « sens géométrique » ? Quelles caractéristiques de celle-ci permettent de confirmer qu'il s'agit d'une compétence à développer au sens où ce terme a été défini dans la section 2.3 ?

<u>Question de recherche B</u>

Quelles sont les « ressources » (section 2.3.2) nécessaires au développement de cette compétence ?

Question de recherche C

Quels « niveaux de développement » de cette compétence peut-on définir pour chacun des cycles du primaire et du secondaire ? Quels critères utiliser pour évaluer l'atteinte de chacun de ces niveaux ?

3.2 Deuxième objectif de la thèse

Le deuxième objectif de notre thèse est de vérifier si le curriculum et les manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec tiennent compte de l'importance du développement chez les élèves de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

Dans notre thèse, lorsqu'il sera question de « curriculum » en mathématiques, nous entendrons ce terme dans le sens qu'en donne Legendre (1993) dans son *Dictionnaire Actuel de l'Éducation* : « Ensemble structuré de l'infrastructure pédagogique, des situations pédagogiques et des interrelations entre les diverses composantes de celles-ci, planifiées pour un niveau d'études et, ou pour un sous-groupe de sujets dans une école, un collège ou une université » (p. 288). Selon le cas, on peut donc parler d'un curriculum de mathématiques pour un degré donné, un cycle donné, le primaire, le secondaire, le primaire et le secondaire, l'éducation de base, etc. On distingue souvent plusieurs niveaux de curriculum : *le curriculum souhaité*, c'est-à-dire le curriculum officiel décidé par le Ministère de l'Éducation et qui est explicité à l'aide de divers documents et guides pédagogiques ; *le curriculum enseigné*, c'est-à-dire celui qui est couvert par l'enseignant en classe ; *le curriculum appris*, c'est-à-dire celui qui est appris et assimilé par les élèves ; *le curriculum évalué*, c'est-à-dire celui qui fait effectivement objet de tests et d'examens en classe ou au niveau national. D'autres auteurs ajoutent à cette liste *le curriculum du manuel*, c'est-à-dire celui qui est véhiculé par le manuel et par la documentation qui l'accompagne et qui normalement tient compte du curriculum souhaité — ce curriculum vient donc se situer entre le curriculum souhaité et le curriculum enseigné.

Malgré le fait qu'au primaire on propose aux élèves plusieurs activités de manipulation et d'observation ayant pour but de stimuler le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, nous avons décidé de limiter au niveau secondaire l'étude du curriculum et des manuels scolaires en mathématiques.

3.2.1 Questions de recherche associées au deuxième objectif

De façon plus spécifique, nous chercherons à répondre aux deux questions suivantes :

Question de recherche D

Quelle importance était accordée au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions dans le curriculum en vigueur et les manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise* ?

Question de recherche E

Quelle importance le nouveau curriculum (cf. *Programme de formation de l'école québécoise* – version approuvée, 2004) en vigueur en mathématiques au premier cycle du secondaire et les manuels scolaires correspondants accordent-ils au développement de cette « compétence » ?

3.3 Méthode retenue pour atteindre le premier objectif

Afin d'atteinte notre premier objectif, nous chercherons à répondre aux trois questions qui lui correspondent.

La « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », qui fait l'objet de notre travail, est un aspect particulier du « sens géométrique ». Or dans la littérature que nous avons consultée, nous nous sommes rendu compte que celui-ci est très mal défini. Avant de pouvoir répondre à la question de recherche A, nous devrons donc préciser ce que nous entendons par « sens géométrique », et nous le ferons en procédant par analogie avec le « sens numérique ». Dans une *première étape*, nous proposerons une version améliorée du modèle de McIntosch, Reys & Reys (1992) pour décrire le « sens numérique » ; en nous basant sur le modèle obtenu, nous montrerons ensuite que le « sens numérique » peut être considéré comme une « compétence » à développer (au sens de notre définition de la page 69) et qu'il en est de même de la « capacité à faire des estimations » qui en constitue un aspect particulier. Dans une *deuxième étape*, nous construirons un modèle descriptif du « sens géométrique » analogue au modèle amélioré utilisé précédemment pour décrire le « sens numérique », puis nous nous en servirons pour montrer que le « sens géométrique » peut être considéré comme une « compétence » à développer (au sens de notre définition de la page 69) tout comme la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui en constitue un aspect particulier.

Pour répondre à la question de recherche B, nous élaborerons une liste de « ressources » nécessaires au développement de la « compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ». Pour y parvenir, nous examinerons des programmes de mathématiques de certains pays qui ont été définis suivant une approche par compétences, les manuels scolaires français disponibles à la didacthèque de l'Université Laval, des tests d'habileté spatiale utilisés par des psychologues de même que les recherches sur la visualisation spatiale qui ont été présentées dans la section 1.2.6.

Pour parvenir à répondre à la question de recherche C, nous procéderons aussi en deux temps. Dans une *première étape*, en prenant comme cadre de référence la théorie de van Hiele, nous définirons des « niveaux de développement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. La *deuxième étape* consistera à déterminer des critères d'évaluation de cette compétence en se référant à la littérature existante à ce sujet.

3.4 Méthode retenue pour atteindre le deuxième objectif

Pour atteindre notre deuxième objectif, nous chercherons à répondre successivement aux questions de recherche D et E qui lui sont associées.

Moyens pour répondre à la question de recherche D

Pour répondre à la question de recherche D, nous utiliserons trois moyens. Le premier consiste à analyser le curriculum en vigueur en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*. Ce curriculum, élaboré au cours des années quatre-vingt-dix, a été officiellement en application dans les deux premières années du secondaire jusqu'en septembre 2005 et continuera a être en vigueur dans le reste du secondaire jusqu'en septembre 2009. Pour en faire l'analyse, nous utiliserons une grille que nous construirons ultérieurement en s'appuyant sur le modèle qui sera élaboré plus loin.

Le deuxième moyen est l'analyse des chapitres touchant la géométrie dans chacune des neuf séries de manuels scolaires approuvés par le M.É.Q. qui ont été en usage dans les deux premières années du secondaire jusqu'en septembre 2006 et qui seront utilisés dans le reste du secondaire durant les prochaines années (*Carrousel mathématique*, *Scénarios*, *Croisières mathématiques*, *Univers mathématique*, *Dimensions mathématiques*, *Mathophilie*, *Les maths et la vie*, *Réflexions mathématiques* et *Regards mathématiques*) ainsi que dans les guides d'enseignement qui les accompagnent. L'analyse de ces chapitres sera réalisée à l'aide d'une grille différente de la précédente que nous construirons en nous appuyant sur le modèle du « sens géométrique » qui aura été élaboré en réponse au premier objectif.

Le troisième moyen est la réalisation d'entrevues que nous mènerons avec des auteurs de quelques collections de manuels afin d'avoir une idée plus claire concernant ce qu'ils voulaient véhiculer dans leurs livres et concernant l'importance qu'ils accordent à la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Pour réaliser ces entrevues, nous élaborerons un certain nombre de questions de type semi-ouvertes en se basant sur le modèle qui sera élaboré plus loin. Les entrevues se dérouleront à partir de cette liste de questions préparées à l'avance auxquelles nous ajouterons à l'occasion des sous-questions d'éclaircissement ou d'approfondissement. Toutes ces entrevues seront enregistrées sur bande audio puis nous les transcrirons et les analyserons. Ces données seront traitées grâce à l'analyse de contenu qui vise la formation de catégories d'unités de sens. Celles-ci se feront à partir des propos tenus par les auteurs lors des entrevues.

Moyens pour répondre à la question de recherche E

Pour répondre à la question de recherche E, nous utiliserons ici aussi trois moyens. Le premier consiste à analyser le *Programme de formation de l'école québécoise*. Cette analyse sera réalisée au moyen d'une troisième grille que nous élaborerons en se basant sur le modèle qui sera construit ultérieurement.

Le deuxième moyen sera l'analyse des chapitres touchant la géométrie dans les deux nouvelles collections de manuels scolaires approuvés par le M.É.Q (*Perspective mathématique* et *Panoram@th*) ainsi que les guides d'enseignement qui les accompagnent. L'analyse de ces manuels sera effectuée au moyen de la même grille que celle utilisée pour les manuels accompagnant l'ancien curriculum. Le recours à la même grille permettra de voir jusqu'à quel point et de quelle façon des changements ont été apportés pour favoriser le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

Le troisième moyen est la réalisation d'une entrevue auprès d'une des personnes qui ont travaillé sur le nouveau programme. Cette entrevue aura pour objectif de vérifier si notre analyse du nouveau programme s'accorde avec les visées de celui-ci du point de vue de la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Pour réaliser cette entrevue, nous élaborerons un certain nombre de questions de type semi-ouvertes en nous basant sur le modèle qui sera élaboré. Nous ajouterons au cours de l'entrevue, des sous-questions d'éclaircissement ou d'approfondissement en cas de besoin. Cette entrevue sera enregistrée sur bande audio puis transcrite et analysée. Cette analyse sera de type analyse de contenu. Nous formerons des catégories d'unités de sens à partir de propos tenus par la personne interviewée.

3.5 Pertinence de la recherche

Cette recherche apparaît pertinente d'un double point de vue.

D'abord, du point de vue théorique, elle permettra de clarifier la nature de la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui est assez confuse dans la littérature existante, de mieux la situer dans un cadre plus large (celui du « sens géométrique » qui a besoin d'être précisé et mieux défini) et de jeter sur elle un regard neuf à l'aide de la notion de « compétence » sous-jacente à la réforme qui est en cours en éducation au Québec.

Ensuite, du point de vue pratique, elle permettra de voir jusqu'à quel point la « visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions » (que depuis plus d'une vingtaine d'années on a cherché à revaloriser dans l'enseignement des mathématiques dans le monde) a été prise en compte au Québec dans les curriculums et les manuels scolaires de mathématiques des dernières décennies, et s'il y a lieu de proposer des moyens pour améliorer la situation.

Nous entamons, dans les pages qui suivent, la deuxième partie de cette thèse qui est en rapport avec les résultats du premier objectif. Cette partie comprend deux chapitres. Le premier nous permettra de décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » et de montrer qu'elle peut être considérée comme une compétence. Dans le deuxième, nous proposerons des « ressources », des « niveaux de développement » et des critères d'évaluation associés à cette compétence.

PARTIE II

RÉSULTATS EN RAPPORT AVEC LE PREMIER OBJECTIF

Chapitre 4

La « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » : une compétence à développer

Dans ce chapitre, nous allons apporter une réponse à la question de recherche A associée au premier objectif de la thèse, à savoir : *Comment décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », laquelle constitue un aspect particulier du « sens géométrique » ? Quelles caractéristiques de celle-ci permettent de confirmer qu'il s'agit d'une compétence à développer au sens où ce terme a été défini dans la section 2.3 ?* Pour ce faire, nous procéderons comme nous l'avons déjà expliqué à la section 3.3, c'est-à-dire en deux étapes. Dans la première, nous proposerons une version améliorée du modèle de McIntosh, Reys & Reys (1992) pour décrire le « sens numérique » ; en nous basant sur le modèle obtenu, nous montrerons ensuite que le « sens numérique » peut être considéré comme une « compétence » à développer et qu'il en est de même de la « capacité à faire des estimations » qui en constitue un aspect particulier. Dans la deuxième étape, nous construirons un modèle descriptif du « sens géométrique » analogue au modèle amélioré utilisé précédemment pour décrire le « sens numérique » ; puis nous nous en servirons pour montrer que le « sens géométrique » peut être considéré comme une « compétence » à développer et qu'il en est de même de la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui en constitue un aspect particulier.

4.1 Le « sens numérique »

La notion de « sens numérique » est de plus en plus reconnue comme étant une composante importante de l'enseignement des mathématiques. Cependant, elle ne peut se définir avec précision. Son caractère insaisissable a poussé plusieurs chercheurs à l'examiner de diverses façons. Par exemple, Sowder (1992a) a proposé une liste de comportements montrant la présence d'un certain « sens numérique » chez quelqu'un.

Hope (1989), pour sa part, a parlé des situations faciles à reconnaître quand le sens numérique fait défaut, alors que d'autres auteurs ont énuméré ses principales composantes (Resnick, 1989 ; Sowder & Schappelle, 1989). Même en psychologie cognitive, cette notion n'a pas échappé à une analyse théorique profonde de la part de Greeno dans un article paru en 1991. Howden (1989) a donné du sens numérique la description suivante :

> Number sense can be described as good intuition about numbers and their relationships. It develops gradually as a result of exploring numbers, visualizing them in a variety of contexts, and relating them in ways that are not limited by traditional algorithms. Since textbooks are limited to paper-and-pencil orientation, they can only suggest ideas to be investigated, they cannot replace the "doing of mathematics" that is essential for the development of number sense. No substitute exists for a skillful teacher and an environment that fosters curiosity and exploration at all grade levels (p. 11).

4.1.1 Le modèle de McIntosh, Reys & Reys pour caractériser le « sens numérique »

Conscients du fait qu'il est difficile de définir le sens numérique, McIntosh, Reys et Reys (1992) ont proposé un modèle[8] théorique qui met en relation ses principales composantes pour lesquelles il y a accord entre les chercheurs. Ces auteurs précisent que le modèle qu'ils proposent n'est pas organisé par thème d'enseignement, mais met plutôt l'accent sur un ensemble de notions que l'apprenant doit maîtriser et utiliser de façon flexible. Ce modèle du « sens numérique » *(Number sense)* comprend trois principales composantes que McIntosh, Reys et Reys décrivent en détail et qui sont liées entre elles comme l'indique la figure 1 : la familiarité avec les nombres (*Number*), la familiarité avec les opérations numériques (*Operations*) et l'utilisation des nombres et des opérations numériques dans différents contextes (*Settings*).

Examinons de plus près ce que disent les auteurs de chacune de ces composantes.

---

[8] Le mot « modèle » est utilisé ici au sens large, alors qu'il a souvent un sens beaucoup plus restreint en mathématiques.

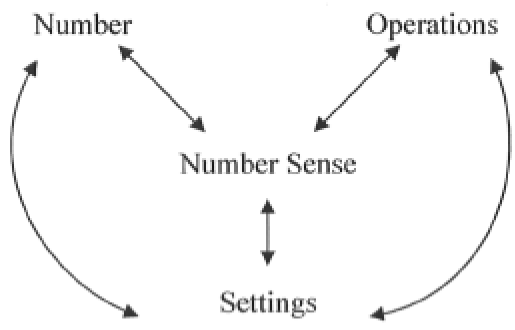

Figure 1
Interconnections of major components of number sense
(McIntosh, Reys & Reys)

Familiarité avec les nombres

Partant de l'idée que la compréhension du système de numération indo-arabe, de sa structure et de sa régularité est importante et en s'appuyant sur plusieurs auteurs, McIntosh, Reys et Reys (1992) proposent trois aspects de la composante *Familiarité avec les nombres* : l'intuition à propos de l'ordre des nombres, la capacité à travailler avec leurs diverses représentations, l'intuition à propos de la grandeur relative et absolue des nombres, la maîtrise de systèmes de points de repère numériques.

Concernant l'intuition à propos de l'ordre des nombres, les auteurs mettent l'accent sur la compréhension du système de numération indo-arabe et du concept de nombre comme mesure de quantité, des divers ordres de grandeur (la dizaine, la centaine, le millier, etc.), de la régularité de sa structure et de la valeur positionnelle pour les entiers et les décimaux. Cette compréhension permet à l'élève d'ordonner mentalement et de comparer les nombres rencontrés dans des situations mathématiques (McIntosh, Reys & Reys, 1992).

Par ailleurs, les auteurs insistent sur l'importance de pouvoir reconnaître différentes représentations des nombres — par exemple, que 1/4 = 3/12 ou 1/4 = 25 % ou 1/4 = 0,25, de savoir que différents signes peuvent représenter le même nombre « sept », « seven », « 7 », « VII », « 13 (base quatre) », de passer d'une représentation à une autre et de juger laquelle est la plus appropriée à la situation proposée. La décomposition et la recomposition d'un nombre sont considérées par ces auteurs comme un autre aspect des représentations, puisqu'elles permettent d'exprimer sous forme équivalente des nombres afin de faciliter le calcul demandé. Par exemple, pour additionner 40 et 68, on décompose 68 en 60 + 8 puis on additionne 40 et 60 pour avoir 100 et on ajoute 8 pour avoir la somme 108. McIntosh, Reys et Reys affirment que le fait d'inventer une telle procédure et de pouvoir s'en servir indique que l'on a une compréhension intuitive du nombre et de l'addition. D'autres représentations des nombres considérées par les auteurs sont celles des nombres rationnels, qu'elles soient graphiques (par exemple sur la droite numérique) ou sous forme de fractions ou sous forme décimale. On peut également représenter un nombre rationnel par rapport à un point de repère. Par exemple, constater que 5/8 est un peu plus grand que 1/2 ou que 5/8 se situe entre 1/2 et 3/4 permet de prendre 1/2 comme point de repère pour représenter 5/8.

La familiarité avec les nombres inclut aussi la capacité à reconnaître intuitivement leurs grandeurs relatives et absolues. Sachant que cette capacité se développe avec l'expérience et la maturation mathématique, les auteurs proposent de varier les contextes afin de permettre aux élèves de se faire une idée de l'ordre de grandeur des nombres. Un système de points de repère numériques consiste en des référents mentaux qui aident pour penser à propos des nombres. Ils peuvent être des multiples ou des puissances de 10, 1/2, 50% ou toute valeur qui a une signification particulière pour l'apprenant. Par exemple, en prenant 1 comme point de repère, on sait que la somme de 6/7 et 8/9 est légèrement inférieure à 2 puisque chaque fraction est légèrement inférieure à 1. Aussi, une personne peut considérer son poids comme point de repère pour estimer le poids d'autres personnes.

Familiarité avec les opérations numériques

Concernant la composante *Familiarité avec les opérations numériques* du modèle, McIntosh, Reys et Reys (1992) en soulignent trois aspects en particulier : comprendre les effets des opérations numériques, comprendre leurs propriétés mathématiques et comprendre les relations qui les relient.

Pour eux, la compréhension des effets des opérations sur divers types de nombres, incluant les entiers et les rationnels, en présuppose une bonne conceptualisation. Ils trouvent donc important que les élèves connaissent les différents sens des opérations numériques. Par exemple, interpréter la multiplication comme une addition répétée conduit à l'idée que le produit est toujours plus grand que les deux facteurs, alors que ceci est faux lorsque l'un des deux facteurs est inférieur à 1. Ils suggèrent aussi de munir les élèves de divers moyens comme la droite numérique et un tableau à double entrée pour les familiariser avec la multiplication dans des contextes variés. D'autre part, ils soulignent un autre aspect qui consiste à examiner le lien entre le changement du résultat d'une opération et la variation des nombres sur lesquels elle opère. Par exemple, si $235 - 127 = 108$, combien vaut $245 - 127$? Et si $438 \div 1 = 438$, combien vaut $438 \div 0{,}62$? (dans ce dernier cas, on voit que si le diviseur est inférieur à 1 le résultat sera supérieur à 438).

La familiarité avec les opérations numériques présuppose aussi un certain confort dans l'application des propriétés mathématiques incluant celles de commutativité, d'associativité et de distributivité. Les auteurs en question déplorent le fait que ces dernières sont souvent considérées comme des règles formelles et évidentes. Pourtant, une bonne compréhension de la commutativité éviterait à plusieurs élèves la mémorisation de 5×7 et de 7×5 par exemple. Ces propriétés arithmétiques, soulignent-ils, peuvent être utilisées intuitivement par les élèves pour mener un calcul. Par exemple, pour effectuer mentalement 36×4, une façon consiste à calculer 4×35 et 4×1, ce qui revient à utiliser la commutativité de la multiplication et la distributivité. Ces auteurs attachent de l'importance au lien qui existe entre les applications pratiques et le développement et la compréhension de ces propriétés. Ils affirment d'ailleurs que les élèves qui maîtrisent le « sens numérique » ont fait ces liens et sont confortables dans l'application de ces propriétés dans des situations variées.

La familiarité avec les opérations numériques inclut aussi la compréhension des relations qui existent entre elles. Ces relations fournissent plus de stratégies pour résoudre des problèmes. Par exemple, si la résolution d'un problème nécessite une multiplication, alors celle-ci peut être remplacée par une addition répétée ou même par différents groupements ; pour effectuer une division, les élèves peuvent penser à compléter une multiplication, etc. Il va sans dire que la compréhension de chaque opération est essentielle pour que de telles manipulations soient possibles. Les mêmes auteurs font aussi remarquer qu'à mesure que les nombres rationnels sont étudiés, les élèves sont amenés à explorer et utiliser de nouvelles relations comme par exemple : multiplier par 0,1 revient à diviser par 10, diviser par 0,01 revient à multiplier par 100, etc. S'ils comprennent bien ces relations, leur répertoire de stratégies de résolution de problèmes s'en trouve enrichi.

Utilisation des nombres et des opérations numériques dans différents contextes

Résoudre des exercices et des problèmes à données numériques dans des contextes variés implique généralement plusieurs décisions : par exemple, faut-il donner une réponse exacte ou approximative ? Serait-il plus approprié d'utiliser une calculatrice, de faire un calcul mental, de mener le calcul sur une feuille de papier, etc. ? Quelle stratégie utiliser ? La réponse a t-elle du bon sens et répond-elle à la question posée ? Selon McIntosh, Reys & Reys (1992), la composante *Utilisation des nombres et des opérations numériques dans différents contextes* comprend quatre aspects : comprendre la relation entre l'énoncé du problème et les calculs demandés, prendre conscience de l'existence de plusieurs stratégies, avoir tendance à utiliser une représentation et/ou une méthode efficace, être porté à revoir les données utilisées et les résultats obtenus.

La compréhension de la relation entre l'énoncé du problème et les calculs demandés permet de se faire une idée sur l'opération à effectuer, les nombres à y considérer, le type de solution nécessaire (exacte ou approximative) et la méthode à utiliser (calcul exact, calcul mental, calculatrice). Les auteurs précédents mentionnent que souvent les questions posées dans les exercices et les problèmes donnent de bonnes indications sur le type de traitement souhaitable.

La prise de conscience de l'existence de plusieurs stratégies est, selon ces auteurs, une manifestation du « sens numérique ». Face à une stratégie qui semble stérile, l'élève doit pouvoir en explorer d'autres. Cette exploration lui permettra de comparer les méthodes utilisées et de décider si l'une d'elles répond aux besoins ou s'il faut continuer la recherche. Les auteurs ajoutent que cela se déroulera souvent rapidement et parfois même inconsciemment.

Avoir tendance à utiliser une représentation et/ou une méthode efficace consiste, d'après les mêmes auteurs, à se rendre compte que certaines d'entre elles peuvent être plus efficaces à un moment plutôt qu'à un autre ; il s'agit là d'un autre indicateur que l'on possède le « sens numérique ». Par exemple, au lieu de calculer 8 + 7 par ajout de 1 à la fois, penser à décomposer les termes soit en 7 + 7 + 1 sachant que 7 + 7 = 14, soit en 8 + 2 + 5 sachant que 8 + 2 = 10. Ils font remarquer que lorsque le « sens numérique » fait défaut, des enfants ou des adultes utilisent alors des méthodes de calcul compliquées. Ces dernières sont généralement dues à la pratique d'une méthode de calcul bien établie, au manque de confiance dans d'autres méthodes de calcul ou tout simplement au fait de les ignorer.

Être porté à revoir les données et les résultats obtenus est également une manifestation que l'on possède le « sens numérique », d'après McIntosh, Reys & Reys (1992). Examiner la solution à la lumière du problème posé a pour but de réfléchir sur les stratégies utilisées, d'évaluer celle qui a été sélectionnée et de déterminer si la réponse produite a un sens. Cette réflexion se fait généralement rapidement et devient partie intégrante de la résolution de problèmes. Cependant, les auteurs font remarquer que cet exercice métacognitif n'est pas important aux yeux des élèves.

4.1.2 Remarques sur le modèle précédent

L'explication apportée par les auteurs à propos de chacune des composantes de ce modèle présente plusieurs lacunes. Par exemple, dans la composante *Familiarité avec les nombres*, les auteurs parlent de leurs multiples représentations, mais en se restreignant aux représentations symboliques et/ou graphiques. Qu'en est-il des représentations langagières écrites ou parlées des nombres ? Évidemment la connaissance de celles-ci fait bel et bien partie de la familiarité avec les nombres. Les nombres entiers relatifs, les nombres premiers, les nombres réels, etc. sont-ils aussi considérés dans cette première composante ? Il nous semble qu'on ne peut parler de familiarité avec les nombres que lorsqu'on peut travailler et manipuler ceux-ci indépendamment de leur nature. Aussi, nous trouvons curieux que les auteurs ne disent rien sur les différentes interprétations des nombres naturels : nombre cardinal, nombre ordinal, mesure, opérateur, etc.

Regardons maintenant d'un peu plus près la composante *Familiarité avec les opérations numériques*. Comprendre les différents sens attribués à chaque opération, les relations qui les relient ainsi que les propriétés mathématiques de commutativité, de distributivité et d'associativité en sont certainement des éléments clés. Mais peut-on parler de familiarité avec les opérations numériques sans supposer par exemple l'utilisation d'algorithmes avec des symboles numériques ? Par ailleurs, en omettant de parler du calcul mental, on peut se demander si les auteurs lui accordent une quelconque importance.

Une autre faiblesse du modèle est qu'il passe sous silence « les relations numériques », c'est-à-dire les relations pouvant exister entre des nombres (par exemple la relation d'égalité) ou entre des ensembles de nombres (par exemple la relation d'inclusion) lesquelles sont d'une importance capitale.

La composante *Utilisation des nombres et des opérations numériques dans différents contextes* traite principalement de la résolution de problèmes. Dans leurs explications, les auteurs se restreignent à des situations-problèmes liés à la vie de tous les jours. Posséder le « sens numérique » n'inclut-il pas aussi la capacité à appliquer les notions numériques dans des situations purement mathématiques ? Il est surprenant également que rien ne soit mentionné à propos de l'utilisation de matériel pour faciliter la résolution de problèmes.

Par ailleurs, la résolution par exemple d'un problème à données numériques provenant d'une situation réelle fait intervenir un processus de « modélisation » impliquant la construction d'un modèle mathématique de la situation, puis une suite de calculs dans le modèle en question, et enfin un retour et une interprétation dans la situation initiale avec le résultat obtenu. Or, dans les explications qu'ils donnent, McIntosh, Reys et Reys ne font aucunement référence à un tel processus permettant de faire un va-et-vient entre le monde réel et le monde mathématique. À notre avis, il s'agit là d'une autre lacune à propos de leur modèle du « sens numérique ».

L'estimation est un autre aspect important du « sens numérique ». En effet, on peut estimer dans des situations de la vie quotidienne (par exemple estimer le nombre de personnes dans une estrade) ou encore dans des situations purement mathématiques (par exemple, estimer une somme, une différence ou le résultat d'une suite d'opérations). De plus, l'estimation peut se faire mentalement (estimer la somme de trois nombres), visuellement (estimer la longueur d'une pièce) ou avec l'utilisation de papier-crayon (estimer les dépenses ménagères du mois). Or, dans les commentaires que font McIntosh, Reys et Reys, il n'en est pas question non plus, ce qui nous apparaît une grave omission.

4.1.3 Un modèle amélioré pour caractériser le « sens numérique »

Plus tard dans notre travail, nous aurons besoin de décrire ce qu'on entend par « sens géométrique ». Pour cela, le modèle de McIntosh, Reys & Reys (1992) nous paraît un point de départ intéressant pourvu cependant que l'on y corrige plusieurs lacunes que nous venons de mettre en évidence. C'est pourquoi nous avons décidé d'élaborer nous-même une version améliorée du modèle en question pour caractériser le « sens numérique ».

Le modèle[9] amélioré que nous proposons (figure 2, p. 97) comprend trois composantes :

1. la familiarité avec des notions numériques (nombres, relations et opérations numériques) et avec leurs représentations au moyen de mots, de symboles ou de graphiques. Aussi, la familiarité avec des propositions et théorèmes concernant des notions numériques, formulés de différentes façons au moyen de mots, de symboles ou de graphiques ;

2. la capacité à appliquer les notions numériques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes ou internes aux mathématiques) de même qu'à

[9] Ici également, le mot modèle est utilisé au sens large alors qu'on lui donne souvent un sens beaucoup plus limité en mathématiques.

utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions numériques ;

3. la familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui fait le lien entre les deux composantes précédentes.

Nous allons maintenant décrire un peu plus en détail chacune de ces trois composantes.

Familiarité avec les nombres et leurs représentations

La familiarité avec les nombres suppose la connaissance et la compréhension de divers systèmes de nombres : les nombres naturels, les définitions et les propriétés qui leur sont associées, par exemple celles qui touchent les nombres premiers, pairs, impairs, etc., les différentes interprétations des nombres naturels (nombres cardinaux, nombres ordinaux, etc.) ; les nombres rationnels avec leurs définitions et leurs propriétés comme la somme de deux rationnels est un rationnel, etc. ; les entiers relatifs et leurs propriétés comme le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif, etc. ; les nombres réels et leurs définitions et propriétés. Cette familiarité comprend aussi la reconnaissance perceptuelle des petits nombres. Au niveau plus avancé, elle suppose la connaissance et la compréhension de notions plus complexes (par exemple les nombres complexes ou les nombres algébriques ainsi que leurs définitions et propriétés). La familiarité avec les nombres implique aussi la connaissance de différentes représentations langagières (écrites ou verbales), symboliques (fractions, nombres décimaux, pourcentages, exposants, radicaux, les systèmes de numération et notamment celui de base 10, etc.) et graphiques (la droite numérique, etc.). Au niveau plus avancé, il sera question de représenter les nombres complexes et les quaternions par exemple.

Familiarité avec les relations numériques et leurs représentations

La familiarité avec les relations numériques suppose la connaissance et la compréhension d'un certains nombre de relations entre les nombres qui peuvent être unaires (est divisible par 2, etc.), binaires (la relation d'égalité, est le double de, est inférieur ou égal à, ...), ternaires, etc. Au niveau plus avancé, il s'agira de connaître et comprendre des relations comme la congruence modulo n, est relativement premier avec, etc.

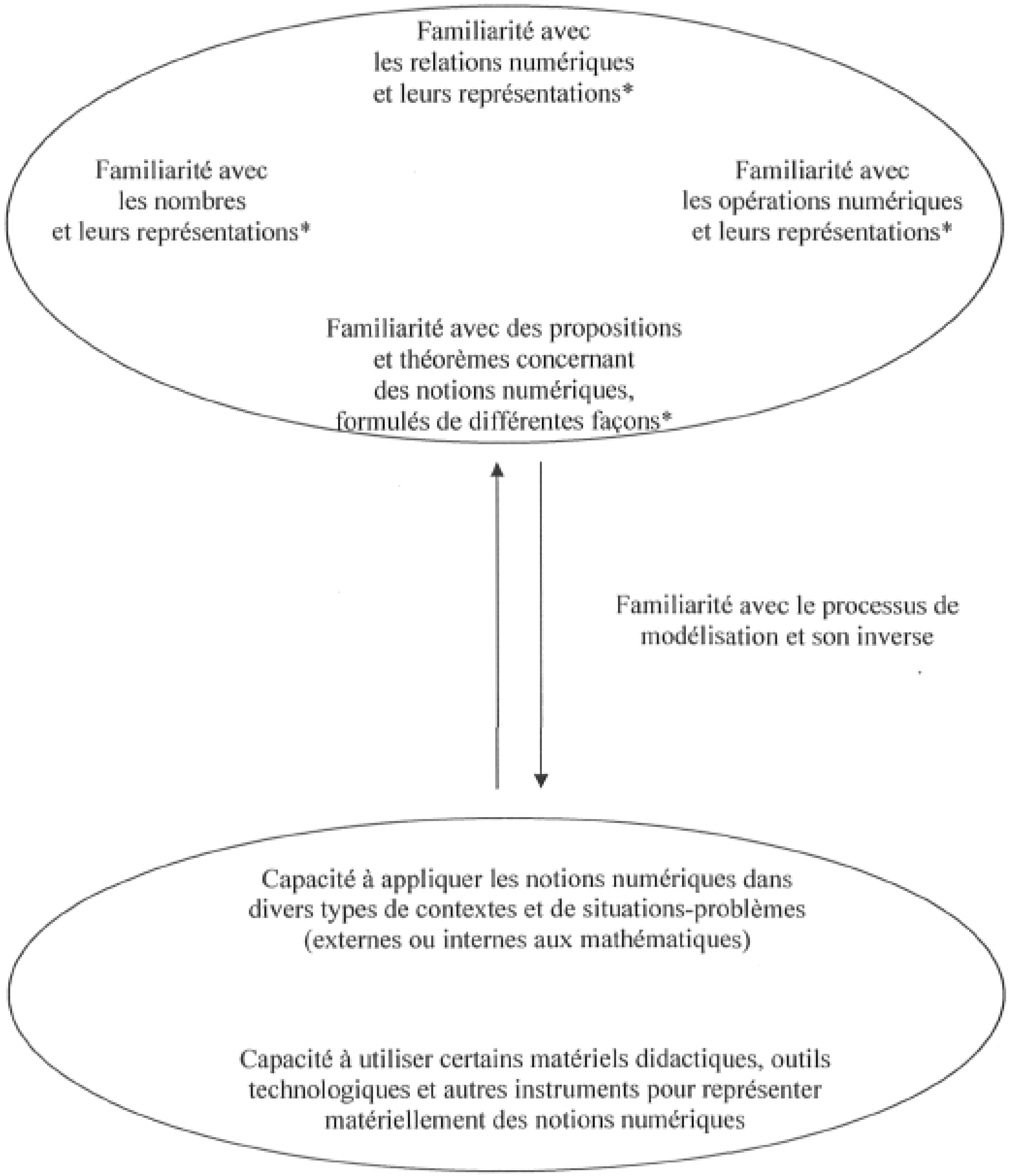

Figure 2
Modèle servant de base pour caractériser le « sens numérique »

---

* Au moyen de mots, symboles ou graphiques.

La familiarité avec les relations numériques comprend aussi la connaissance et la compréhension des relations pouvant exister entre divers ensembles de nombres, notamment la relation d'inclusion. Elle inclut aussi la connaissance des diverses représentations langagières (écrites et verbales), symboliques (=, ≤, ÷, ∩, etc.) et graphiques (diagramme sagittal, etc.).

Familiarité avec les opérations numériques et leurs diverses représentations

La familiarité avec les opérations numériques nécessite la compréhension de leurs différents sens, de leurs définitions, des liens qui existent entre elles et de leurs propriétés (associativité, commutativité, distributivité). Cette familiarité suppose aussi une certaine aisance en calcul mental, en estimation, l'acquisition de certains automatismes (tables d'addition et de multiplication, etc.), de même que les règles qui concernent l'utilisation des parenthèses, la priorité de certaines opérations sur d'autres, etc. Les opérations numériques peuvent être unaires (on parle alors souvent d'*opérateurs*) — comme par exemple élever au carré, -5 et :3, binaires — comme par exemple l'addition et la multiplication, ternaires, etc. Il faut également être familier avec les opérations (par exemple la réunion, l'intersection et la complémentation) que l'on peut faire sur des ensembles de nombres. Au niveau plus avancé, il s'agit de connaître des notions plus complexes (par exemple celles de valeur absolue et de logarithme à base 10 ainsi que leurs diverses propriétés).

La familiarité avec les opérations numériques suppose aussi la connaissance des représentations langagières (écrites et verbales), symboliques (+, ÷, -, x, ∩, etc.) et graphiques (droite numérique, etc.).

Familiarité avec des propositions et des théorèmes concernant des nombres et leurs diverses représentations

En mathématiques, il existe des affirmations qui peuvent être vraies ou fausses souvent appelées propositions et des propositions évidentes en soi appelées axiomes de même que des théorèmes. Ces différents énoncés mathématiques peuvent concerner les nombres comme les ensembles de nombres. La familiarité avec des propositions et des théorèmes suppose la connaissance d'un certain nombre d'entre eux, la compréhension de leur sens et la capacité à les formuler par des mots ou par des symboles ou des graphiques. À titre d'exemples, mentionnons : la somme de deux nombres pairs est un nombre impair ; pour tout entier relatif non nul a, si m et n sont deux entiers naturels, alors $a^m . a^n = a^{m+n}$; pour tout nombre réel a, b, $|a + b| \leq |a| + |b|$; etc. Au niveau plus avancé, il faut savoir par exemple que l'ensemble des réels possède la propriété de la borne inférieure, etc.

Capacité à appliquer les notions numériques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes et internes aux mathématiques) et à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions numériques

Cette deuxième composante concerne la capacité à appliquer les différentes notions numériques dont nous venons de parler dans différents contextes et situations-problèmes qui peuvent être purement mathématiques ou liés à la vie de tous les jours. Elle inclut aussi le recours à différents types d'instruments, par exemple la calculatrice, qui est utile à l'élève comme à l'adulte au cours de la formation ou de la vie quotidienne. Cette composante renferme également l'utilisation des matériels didactiques (abaque, jetons, blocs multibases, réglettes Cuisenaire, etc.) qui servent plutôt à l'école pour des fins d'apprentissage de même que l'utilisation des technologies comme des logiciels, la recherche sur l'Internet, etc. qui sont aujourd'hui des incontournables dans l'enseignement. D'ailleurs, le rôle de ces divers outils est de nos jours reconnu et soutenu. Piaget, par exemple, reconnaît que la connaissance est indissociable de l'interaction du sujet avec son milieu. Il ajoute que toute connaissance d'un objet ou d'un concept n'a de signification pour le sujet qu'en fonction de l'action que celui-ci exerce sur lui. À l'école, cette action est facilitée par l'utilisation de matériels didactiques (jetons, réglettes Cuisenaire, blocs multibases, etc.).

Familiarité avec le processus de modélisation et son inverse

Nous employons ici le terme modélisation dans un sens très large incluant non seulement le processus de modélisation (construction d'un modèle mathématique) que l'on est amené à faire lorsqu'on résout un problème mathématique se posant dans une situation réelle, mais également le processus d'abstraction et le processus de généralisation qui interviennent dans l'apprentissage progressif des concepts mathématiques. Un problème provenant d'une situation réelle a besoin d'être simplifié, idéalisé et structuré pour être résolu. C'est en travaillant avec et dans le modèle que l'on peut ensuite tenter de résoudre le problème au moyen de calculs. Les deux flèches qui apparaissent dans la figure 2 représentent un va-et-vient inévitable (au début, à la fin, et parfois au cours de la résolution) entre la situation réelle dans laquelle se pose le problème et les concepts mathématiques abstraits qui interviennent dans le modèle mathématique correspondant. Ainsi, pour posséder le « sens numérique », il est nécessaire de prendre conscience à un niveau élémentaire du processus de modélisation et de son inverse inhérent lorsqu'on résout numériquement un problème de la vie courante.

4.1.4 Un aspect particulier du « sens numérique » : la capacité à faire des estimations

Nous allons nous arrêter maintenant sur un aspect particulier du « sens numérique », à savoir la capacité à faire des estimations. (Remarque : Comme dans le cas de la capacité à visualiser, nous parlerons par la suite de la *capacité* à faire des estimations plutôt que de l'*habileté* à faire des estimations.)

La capacité à faire des estimations constitue un aspect particulier du « sens numérique ». Au niveau international, on lui donne de plus en plus de place dans les curriculums du primaire et du secondaire notamment parce qu'avec la venue des calculatrices, il est devenu plus important que par le passé de pouvoir faire des estimations pour s'assurer que le résultat fourni par la machine est du bon ordre de grandeur.

Les occasions d'estimation sont abondantes et diverses. Bien que la plupart des situations d'estimation ont en commun la recherche d'une réponse raisonnablement proche de la réponse exacte, elles diffèrent les une des autres de plusieurs façons. Elles peuvent concerner la mesure, le calcul, une enquête ou la prédiction. Elles se distinguent aussi par la complexité du problème, le contexte, la quantité d'information requise, les nombres impliqués, la technique utilisée et le type de réponse attendue (Rubenstein, 1986). Par exemple, estimer le nombre de personnes présentes dans un auditorium se fait mentalement, alors qu'estimer le prix des rénovations d'une maison implique l'utilisation du papier-crayon. Allinger et Payne (1986) soulignent une autre utilité à l'estimation, celle de fournir un sens aux concepts de fraction, des nombres décimaux et du pourcentage. Pour sa part, Trafton (1986) qualifie l'estimation de capacité complexe qui présente les mêmes subtilités et complexités que celles de la résolution de problèmes. Il spécifie que son développement chez les élèves requiert des capacités de raisonnement, de perspicacité et de prise de décision.

On peut aisément reconnaître que l'estimation de mesures et l'estimation numérique constituent deux volets distincts de cette capacité.

<u>Premier volet : estimation de mesures</u>

Adams et Harrell (2003) expliquent qu'estimer une mesure revient à porter un jugement ou se faire une idée à propos d'un mesurage particulier donné comme une longueur, une largeur, une aire, etc. Bright (1976), pour sa part, parle de processus mental qui nécessite la rétention de quatre idées principales : l'unité de mesure à utiliser, la grandeur de cette unité relative aux objets familiers ou à d'autres unités de mesure pour le même objet à mesurer, d'autres mesures dans cette unité et l'engagement à améliorer l'estimation de sorte que le résultat soit le plus proche possible de la mesure réelle. Dans plusieurs situations quotidiennes, l'estimation de mesure se fait sans recours aux instruments, c'est plus utile et plus facile à obtenir qu'une mesure précise, par exemple estimer l'espace libre entre deux voitures pour stationner la sienne, estimer une longueur en la comparant à une autre dont la mesure est connue, etc. Il est donc important que les élèves apprennent à estimer des mesures comme une longueur, une aire, un volume et un angle. L'estimation des mesures fait souvent appel soit au visuel soit à des unités non standards comme les trombones, les pas, un bout de papier, un cube en bois, etc. Par exemple, estimer la longueur d'une pièce en imaginant des copies de l'unité choisie mises l'une à la suite de l'autre tout au long du mur, estimer l'aire d'une forme irrégulière en la réarrangeant mentalement afin d'avoir une forme plus standard, etc. Cette estimation fait intervenir des notions géométriques et des notions numériques, par exemple la résolution de problèmes de mesure de longueurs et d'aires, aide les élèves à prendre conscience de l'insuffisance des nombres naturels et de la nécessité d'introduire les fractions et les nombres décimaux.

Deuxième volet : estimation numérique

Très souvent, on ne peut qu'estimer car des valeurs exactes ne sont pas disponibles, par exemple les prévisions pour l'avenir, les hypothèses au sujet du passé, etc. Aussi l'estimation est parfois plus facile à utiliser et plus claire que les données exactes, comme par exemple annoncer que le budget de l'école est de 150 millions au lieu d'utiliser le montant exact de 148 309 563 $. Reys (1984) souligne quatre caractéristiques de l'estimation numérique : elle s'effectue mentalement — généralement sans l'utilisation de papier-crayon, se fait rapidement, donne des réponses qui ne sont pas exactes mais adéquates pour prendre les décisions nécessaires, reflète souvent les approches individuelles et donne pour réponse plusieurs estimations. L'auteur met en valeur l'utilité de l'estimation numérique en particulier avec l'emploi des calculatrices et des ordinateurs afin de s'assurer que les résultats ont du bon sens. Il la qualifie de capacité de base (Reys, 1986). D'autre part, plusieurs auteurs s'accordent à dire que le calcul mental est une composante importante de l'estimation numérique (Trafton, 1978 ; Reys, 1984 ; Allinger & Payne, 1986 ; Hope, 1986). Il est même qualifié de préalable vital pour l'estimation numérique (Reys, 1984). Ce dernier auteur, tout comme Trafton (1986), insiste sur la nécessité et l'importance du calcul mental dans les différents procédés utilisés pour faire des estimations numériques. Il permet d'obtenir une réponse correcte ou fausse, s'exécute mentalement et permet de développer différentes solutions (Reys, 1984).

Du côté de l'enseignement, amener les élèves à percevoir l'estimation numérique comme une technique utile qui peut s'effectuer aisément et relativement vite, est le but principal (Reys, 1984 ; Trafton 1986). Par ailleurs, le calcul mental tient généralement une place importante dans les programmes scolaires. Le développement des éléments de base pour les opérations numériques insiste fortement sur le calcul mental (Reys, 1984). Cette attention accordée au calcul mental se fait le plus souvent au détriment de l'estimation de mesures. Ce manque d'intérêt pour cette dernière peut s'expliquer par le recours à la visualisation qui reste un thème plus délicat en enseignement. D'autre part, enseigner l'estimation des mesures et l'estimation numérique fait certainement appel à différentes ressources qui peuvent être spécifiques à chacune d'elles ou communes aux deux. Par exemple, les stratégies d'estimation changent d'un volet à l'autre. Pour estimer des mesures, on peut comparer l'objet à mesurer avec un référent, présenter des activités et allouer peu de temps aux élèves pour donner leur solution, ou bien comparer, mesurer puis vérifier (Coburn & Shulte, 1986). Concernant l'estimation numérique, Reys (1986) avance cinq stratégies : *front–end*, *clustering* (*regroupement*), *rounding* (*arrondissement*), *compatible numbers* (*nombres compatibles*) et *special numbers*, (*nombres spéciaux*). Cependant, ces deux volets requièrent l'utilisation des nombres, leurs relations et leurs propriétés de même que le bon usage des opérations, leurs sens et leurs propriétés.

4.1.5 Le « sens numérique » en tant que compétence à développer

Dans la section 2.3, nous avons mis en évidence trois caractéristiques principales d'une compétence à savoir l'orientation vers une finalité à long terme, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre et l'intégration d'un ensemble de ressources. Or, le « sens numérique » tel que décrit à la figure 2 (p. 97) vérifie bien ces trois caractéristiques.

D'abord, en ce qui concerne l'orientation vers une finalité à long terme, plusieurs auteurs comme Hope (1989), Leutzinger & Bertheau (1989), et Sowder (1992b) s'entendent pour dire que le « sens numérique » ne s'enseigne pas en tant que savoir à transmettre auprès des élèves mais se construit et se développe à long terme chez ces derniers. Les propos de Howden (1989) résument bien cette conviction lorsqu'il dit : « It [number sense] develops gradually as a result of exploring numbers, visualizing them in a variety of contexts, and relating them in ways that are not limited by traditional algorithms » (p. 11). Dans le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b), il est mentionné que le développement du « sens numérique » dans le cadre scolaire commence au niveau primaire, ce qui sous-tend l'idée de son développement à long terme. Ensuite, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre apparaît aussi implicitement dans les propos de Howden. En effet, le développement graduel du sens numérique ne peut avoir lieu à partir d'une seule situation. Il faut varier les contextes et les situations-problèmes pour encourager l'exploration et stimuler la curiosité des élèves à tous les niveaux scolaires. Finalement, l'intégration d'un ensemble de ressources fait appel à toutes les connaissances touchant les nombres, les opérations et leurs représentations, les savoir-faire, les capacités et les attitudes qui sont mis de l'avant par l'élève pour affronter une situation particulière. C'est pourquoi nous considérons le « sens numérique » comme une compétence à développer en mathématiques. Cette idée de compétence se retrouve implicitement dans les propos de Reys *et al.* (1991) dans le document *Developing Number Sense in the Middle Grades* où on peut lire :

> Le sens numérique n'est pas quelque chose de discret qu'un élève a ou n'a pas, ni un thème du programme à « enseigner » puis à laisser de côté. Avant tout, le sens numérique se caractérise par le désir de bien comprendre les situations où interviennent des nombres. Le sens numérique est une manière de penser qui doit imprégner tous les aspects de l'enseignement et de l'apprentissage de la mathématique si l'on veut que la mathématique signifie quelque chose pour les élèves. (Traduction libre, p. 3-4).

En conclusion, compte tenu du modèle que nous avons présenté dans la section 4.1.3, avoir la compétence « sens numérique » revient à la fois :

- à posséder une familiarité et une aisance à travailler avec les différentes sortes de notions numériques qu'il s'agisse de nombres, de relations numériques, d'opérations numériques, ou de propositions et de théorèmes qui les concernent ainsi que leurs diverses représentations respectives ;
- à avoir la capacité à appliquer toutes ces connaissances mathématiques dans des contextes divers et des situations-problèmes qu'ils soient liés à la vie de tous les jours ou purement mathématiques ;
- à avoir une certaine familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui intervient entre le monde abstrait des notions numériques et le monde réel.

Par ailleurs, puisqu'il est question d'une « compétence », il devient essentiel, comme nous l'avons déjà souligné au chapitre 3, de spécifier également les « ressources » nécessaires à son développement. Rappelons que ces dernières réfèrent d'une part à l'ensemble des savoirs scolaires, des capacités, des attitudes, des savoir-faire de différents types, des champs d'intérêt, des expériences, des automatismes, etc. ; d'autre part, à une multitude d'autres références auxquelles l'élève peut faire appel comme les enseignants, les pairs, les experts, les sources documentaires, les technologies de l'information et de la communication, etc. Regardons alors d'un peu plus près ce que sont certaines ressources pour la compétence « sens numérique ». Les savoirs scolaires liés aux nombres, aux relations et aux opérations numériques comme la régularité de la structure du système numérique, les nombres rationnels, irrationnels, les relations d'égalité, d'ordre, la commutativité de l'addition, les algorithmes des différentes opérations numériques, etc. deviennent des ressources pour résoudre diverses situations. Par exemple, au moment de faire l'épicerie, les opérations numériques et le calcul mental sont utilisés comme ressources pour avoir une idée du montant à payer, pour calculer le retour de la monnaie, etc. Aussi, devant un exercice de mathématiques, certains de ces savoirs jouent le rôle de ressources pour pouvoir aboutir à une solution. La résolution de problèmes, qu'ils soient purement mathématiques ou liés à la vie de tous les jours, fait aussi appel aux savoirs scolaires comme ressources liées aux nombres, aux opérations numériques, aux relations numériques et à des propositions et des théorèmes les concernant. Ces derniers sont aussi utiles dans plusieurs domaines externes et internes aux mathématiques. Dans le cadre de développement de compétences scolaires, le recours aux contextes et aux situations-problèmes externes aux mathématiques doit rester à la portée de l'élève. Dans l'enseignement, on ne cherchera donc pas à proposer des applications dans des domaines de spécialisation comme le génie mécanique, l'astronomie, la comptabilité, la finance ou autres afin de former des élèves compétents. Même si l'utilité première du matériel didactique à l'école est de faire apprendre les élèves, ceci n'empêche pas de l'utiliser comme ressource dans différents contextes ou situations-problèmes. Il en est de même pour des instruments comme la calculatrice ou le mètre à ruban. Soulignons que la familiarité avec le matériel didactique et les instruments est essentielle pour qu'ils puissent être considérés comme des ressources. Même le processus de modélisation et son inverse peut être considéré comme faisant partie des ressources.

4.1.6 La capacité à faire des estimations en tant que compétence à développer

Nous allons maintenant examiner de près un aspect particulier de la compétence « sens numérique », aspect auquel nous avons fait référence à la section 4.1.4. Il s'agit de la capacité à faire des estimations qui, comme nous allons le voir, peut elle-même être considérée comme une compétence.

Comme plusieurs auteurs dont Sowder (1992b), Howden (1989), Leutzinger *et al.* (1986) en font mention, la capacité à estimer est un aspect important du « sens numérique ». Même dans le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) on souligne clairement que le développement du « sens numérique » inclut entre autres le développement de la capacité à faire des estimations. Par ailleurs, on peut estimer des nombres, par exemple, une certaine quantité de jetons ou deux nombres représentés par deux groupes différents de réglettes Cuisenaire. Aussi, il est possible d'estimer les résultats d'opérations comme le produit de 15,9 et 3,1 ou la somme de 3/8 et 1/2. Également, on utilise l'estimation dans différents contextes liés à la vie quotidienne ou à diverses disciplines internes ou externes aux mathématiques comme la probabilité, la statistique, la météorologie, la physique, etc. Ainsi, le modèle servant de base pour caractériser le « sens numérique » (figure 2, p. 97) reste tout à fait valable lorsqu'il est question de la capacité à faire des estimations.

D'abord, en ce qui concerne l'orientation vers une finalité à long terme, Reys (1986) affirme que l'estimation se développe et s'améliore avec le temps et qu'elle ne peut s'enseigner comme un thème isolé :

> Estimation, much like problem solving, calls on a variety of skills and is developed and improved over a long period of time; moreover, it involves an attitude as well as a set of skills. Like problem solving, estimation is not a topic that can be isolated within a single unit of instruction. It permeates many areas of our existing curriculum, and to be effectively developed, it must be nurtured and encouraged throughout the study of mathematics (p. 31).

Pour sa part, Rubenstein (1986) fait remarquer que les occasions de faire des estimations existent avec plusieurs types de nombres. Pour cette raison, il recommande le développement de la capacité à estimer chez les élèves de la maternelle au secondaire. King (1986), quant à lui, propose des activités d'estimation très variées allant du niveau élémentaire jusqu'à l'âge adulte, tandis que Wheatley et Hersberger (1986) proposent une activité qui peut être utilisée à tous les niveaux scolaires moyennant quelques modifications. Dans le document *New Jersey Mathematics Curriculum Framework* (1996), l'estimation est décrite comme un processus constamment utilisé par les adultes en mathématiques et que les jeunes enfants peuvent facilement maîtriser. Ces différents témoignages prouvent bien que l'estimation se développe et s'améliore tout le long du cursus scolaire et au-delà. Ensuite, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre apparaît implicitement dans les propos des divers auteurs que nous venons de citer. En effet, cet apprentissage à long terme de l'estimation ne peut se faire à partir d'une seule situation. Il est certainement nécessaire de varier les contextes, les activités et les situations-problèmes pour donner la chance aux élèves de reconnaître l'utilité de l'estimation et de développer des méthodes et des stratégies qui leur sont propres. Finalement, l'intégration d'un ensemble de ressources fait appel à toutes sortes de nombres, aux différentes opérations, à leurs propriétés, relations et représentations ainsi qu'à des savoir-faire, des capacités et des attitudes qui serviront à amener une réponse à la question posée. En conclusion, la capacité à faire des estimations peut bel et bien être considérée comme une compétence et elle est un aspect particulier de la compétence « sens numérique ».

4.2 Le « sens géométrique »

Le « sens numérique » dont il a été question à la section 4.1 concerne les connaissances, capacités et attitudes à développer — en partie à l'école — en rapport avec le monde des nombres et ses applications dans le monde réel. De façon analogue, le « sens géométrique » concerne les connaissances, capacités et attitudes à développer — en partie à l'école — en rapport principalement avec la géométrie dans trois et deux dimensions et également avec des applications de la géométrie dans le monde réel.

L'expression « sens géométrique » est peu utilisée dans la littérature. Certains auteurs emploient plutôt une expression composée faisant référence à la fois à la géométrie et à l'espace physique. Par exemple, dans le document *Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics* publié en 1989 par le National Council of Teachers of Mathematics , au lieu de parler de « sens géométrique » on parle de « géométrie et sens spatial » *(Geometry and spatial sense)* en établissant un certain lien entre la géométrie et le « sens spatial » : « To develop spatial sense, children must have many experiences that focus on geometric relationships; the direction, orientation, and perspectives of objects in space; the relative shapes and sizes of figures and objects; and how a change in shape relates to a change in size » (p. 49). Dans le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) — un document où on retrouve les mêmes idées que dans *Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics* (1989) — on continue à parler de géométrie et de sens spatial, mais sous le vocable de « géométrie » *(Geometry)* tout en spécifiant la signification qu'ils donnent à « visualisation spatiale » : « building and manipulating mental representations of two- and three-dimensional objects and perceiving an object from different perspectives » (p. 41).

D'autres auteurs, au lieu de parler de « sens géométrique », utilisent plutôt l'expression « sens spatial » comme un fourre-tout où il est question non seulement de certaines composantes de ce que les psychologues appellent « l'habileté spatiale » (orientation dans l'espace, relations spatiales, etc.) mais également de connaissances, de capacités et d'attitudes à développer en géométrie à l'école. Assurément cela contribue à accroître la confusion régnant à propos de ce que signifie l'expression « sens spatial », laquelle est devenue assez galvaudée.

L'étude des données recueillies dans le cadre du projet MALATI (Mathematics Learning and Teaching Initiative) qui s'est déroulé en Afrique du Sud montre bien la difficulté liée à l'emploi de l'expression « sens spatial » (MALATI, 1999) et confirme qu'il s'agit là d'une notion vaste et complexe impliquant davantage que la création d'images visuelles et de leur manipulation lors de la résolution de problèmes. Après avoir étudié les données en question, Bennie (1999) caractérise le « sens spatial » au moyen de quatre capacités cruciales :

- the ability to form and retain a visual image
- the ability to use mental manipulations for problem solving
- the ability to reflect on the mental thought processes used in problem solving
- the ability to communicate visual images and processes to others in a meaningful way (both verbally and visually).

Wessels et Van Niekerk (1998) vont beaucoup plus loin. Pour eux, le « sens spatial » comprend quatre types de capacités :

- visual skills : this includes all the abilities and competencies to view objects from different points (lines/angles) and understand their characteristics as a whole
- verbal skills : the ability to talk about different views and interpret what is observed, including the mastery of the use of and understanding of the terminology
- tactile skills : the ability to "build, cut and paste, to sew, to construct etc according to a specific plan or manual"
- mental skills : this is described as "the ability to mentally manipulate spatial images and thus to understand the interconnectedness between these four skills…".

En s'inspirant des travaux de Bennie (1999) et de ceux de Wessels et Van Niekerk (1998), les concepteurs de programmes de mathématiques en Afrique du Sud ont reconnu eux aussi la difficulté de définir le « sens spatial », et ont finalement proposé de le décrire comme la capacité d'interagir dans un environnement spatial et de travailler avec des images visuelles. Dans le cadre de l'élaboration du curriculum de mathématiques de 2005, ils ont choisi d'utiliser l'expression « sens spatial » pour décrire l'interaction à la fois concrète et visuelle de l'apprenant avec l'espace ; pour eux cette expression recouvre également l'acquisition de connaissances géométriques.

Comme nous l'avons déjà mentionné dans la note qui se trouve au bas de la page 17, étant donné la confusion qui règne dans la littérature existante à propos du sens à donner aux expressions « sens spatial », « sens géométrique », « sens spatial et géométrique », nous trouvons plus juste et plus pertinent d'employer l'expression « sens géométrique » plutôt que « sens spatial » et c'est ce que nous ferons par la suite.

4.2.1 Proposition d'un modèle analogue au modèle amélioré du « sens numérique » pour caractériser le « sens géométrique »

Rappelons que la thèse porte sur la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ». Pour réussir à la décrire, il faudrait d'abord préciser ce que nous entendons par « sens géométrique » dont la capacité en question constitue un aspect particulier (voir section 3.3). Nous présentons maintenant le modèle original que nous avons créé de façon analogue au modèle amélioré utilisé précédemment pour décrire le « sens numérique ».

Notre modèle du « sens géométrique » comprend trois composantes (voir figure 3, page suivante) :

1. la familiarité avec les notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques) et avec leurs représentations au moyen de mots, de symboles ou de graphiques. Aussi, la familiarité avec des propositions et théorèmes concernant des notions géométriques, formulés de différentes façons au moyen de mots, de symboles ou de graphiques ;

2. la capacité à appliquer les notions géométriques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes ou internes aux mathématiques) et à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions géométriques ;

3. la familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui fait le lien entre les deux composantes précédentes.

Nous allons maintenant décrire un peu plus en détails chacune de ces trois composantes.

<u>Familiarité avec les figures géométriques et leurs représentations</u>

La familiarité avec les figures géométriques suppose la connaissance des différentes figures comme la droite, l'angle, le carré, le triangle, le cercle, le cylindre, le prisme à base triangulaire, le cône, etc. ainsi que leurs définitions et leurs propriétés planes ou spatiales par exemple si deux droites sont parallèles à une troisième alors elles sont

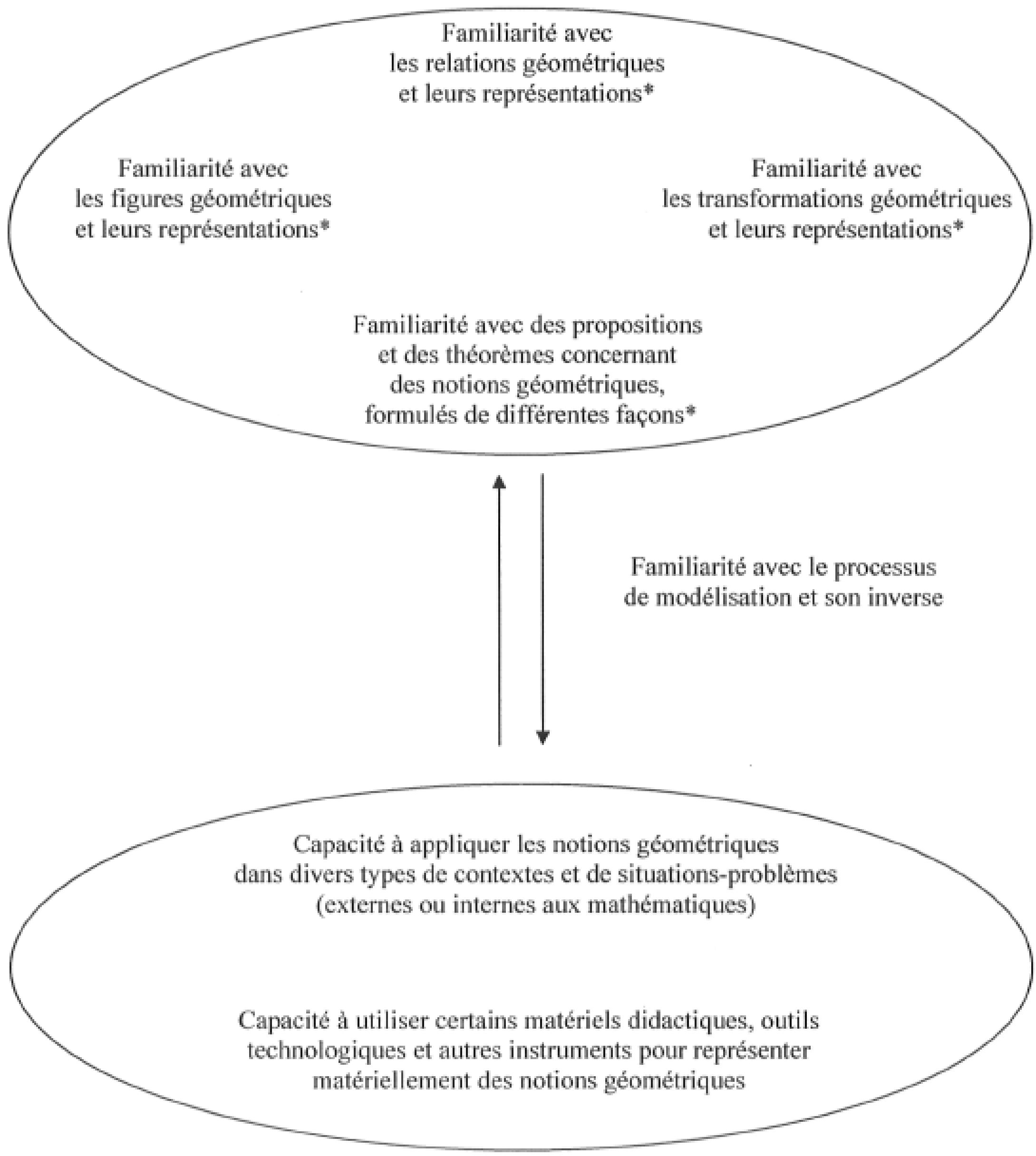

Figure 3

Modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique »

* Au moyens de mots, symboles ou graphiques.

parallèles entre elles ; si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles ; deux droites incluses dans un même plan sont dites coplanaires). La familiarité avec les figures géométriques implique aussi la reconnaissance de certaines figures évoquées par des objets concrets de l'environnement comme un édifice, une table, etc. Elle inclut aussi la création de formes géométriques à partir de différentes figures. Au niveau plus avancé, la familiarité avec les figures géométriques suppose la connaissance de certaines figures géométriques complexes, la compréhension qu'une figure est un objet conceptuel défini par des propriétés ayant un sens dans un système axiomatique donné, etc.

La familiarité avec les figures géométriques suppose également la connaissance de divers ensembles de figures (les polygones, les quadrilatères convexes, les polyèdres, les corps ronds, etc.) et la compréhension des définitions et des propriétés qui leurs sont associées. Au niveau plus avancé, il s'agit de connaître par exemple l'ensemble des fractales ainsi que les définitions et certaines propriétés qui leurs sont associées.

La familiarité avec les figures géométriques suppose également que l'on connaisse les représentations langagières (écrites et verbales), symboliques (la droite (A, B), l'angle $\angle AOB$, $\perp$, //, etc.) et graphiques (tracés à main levée ou avec des instruments, représentations à l'aide de la perspective cavalière, orthogonale ou centrale, etc.), ainsi que le passage sans peine de l'une à l'autre suivant les situations à traiter.

Familiarité avec les relations géométriques et leurs représentations

Dans le cas du « sens numérique », on parle de relations numériques unaires (par exemple est divisible par 2), binaires (par exemple la relation d'égalité), ternaires, etc. De même, dans le cas du « sens géométrique », on parle de relations géométriques unaires (par exemple « être obtue » en parlant d'un angle, « être rectangle » en parlant d'un triangle), binaires (par exemple les relations de perpendicularité, de congruence et de similitude), ternaires, etc.

La familiarité avec les relations géométriques suppose la connaissance et la compréhension de relations de toutes sortes dans deux ou trois dimensions, entre des figures ou des ensembles de figures. Au niveau plus avancé, il s'agit par exemple de connaître et comprendre des notions plus complexes (par exemple la relation d'équipollence entre vecteurs).

La familiarité avec les relations géométriques inclut la connaissance des différentes représentations langagières (écrites et verbales), symboliques (par exemple (d1) // (d2) désigne deux droites parallèles et (AB) ⊥ (CD) deux perpendiculaires, etc.) et graphiques.

Familiarité avec les transformations géométriques et leurs représentations

Dans le cas du « sens numérique », on parle d'opérations unaires (souvent appelées opérateurs) comme par exemple +3 et :5 et d'opérations binaires comme par exemple l'addition et la division. De même, dans le cas du « sens géométrique », on parle d'opérations unaires (généralement appelées transformations) comme par exemple une symétrie axiale ou une homothétie, et d'opérations binaires comme par exemple la composition de deux isométries.

La familiarité avec les transformations suppose la connaissance de différents types de transformations entre des figures ou des ensembles de figures et de leurs définitions et la compréhension de leurs propriétés par exemple : les symétries, les rotations et les translations conservent les milieux, le parallélisme, les angles, les distances et l'alignement ; lorsqu'on effectue une homothétie, son centre est invariant ; toute similitude conserve les angles géométriques ; la réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport 1/k.

La familiarité avec les transformations géométriques inclut la connaissance de différentes représentations langagières (verbales et écrites), symboliques (ainsi on note r (O, 35°) la rotation de centre O et d'angle 35°, h (A, 2) l'homothétie de centre A et de rapport 2 et r o t la composée d'une translation et d'une rotation) et graphiques (dessiner le symétrique d'une figure quelconque, etc.).

<u>Familiarité avec des propositions et théorèmes concernant des notions géométriques, formulés de différentes façons</u>

En mathématiques, il existe des affirmations qui peuvent être vraies ou fausses souvent appelées propositions et des propositions évidentes en soi appelées axiomes de même que des théorèmes. Ces différents énoncés mathématiques peuvent concerner les figures comme les ensembles de figures. La familiarité avec des propositions et des théorèmes suppose leur connaissance, la compréhension de leur sens et la capacité à les formuler par des mots, des symboles ou des graphiques. À titre d'exemple mentionnons : deux points situés sur un même cercle se trouvent à égale distance de son centre, la section d'une sphère par un plan est un cercle, le théorème de Pythagore, etc.

<u>Capacité à appliquer les notions géométriques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes et internes aux mathématiques) et à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des objets géométriques</u>

Cette composante concerne la capacité à appliquer les différentes notions géométriques dont nous venons de parler dans différents contextes et situations-problèmes qui peuvent être purement mathématiques ou liés à la vie de tous les jours. Soulignons aussi que, lors de la résolution de certains problèmes mathématiques, il est parfois nécessaire de faire appel à des objets spatiaux ou à des déplacements dans l'espace ou encore à des relations et propriétés spatiales. De telles situations peuvent aider à développer le sens spatial. Nous retrouvons aussi dans cette composante toutes sortes d'instruments (règle, équerre, compas, rapporteur, etc.), de matériels didactiques (miroir, calque, blocs, géoplan, pailles, papier quadrillé, modèles de figures géométriques, modèles de solides, etc.) qui servent plutôt à l'école pour des fins d'apprentissage de même que l'utilisation des technologies comme des logiciels de géométrie dynamique, la recherche sur l'Internet, etc. qui sont aujourd'hui des incontournables dans l'enseignement. Tout comme Piaget qui a soutenu l'utilisation de situations et de matériels concrets pour initier les élèves au concept de nombre, les éducateurs hollandais Pierre van Hiele (1957) et Dina van Hiele-Geldof (1957/1984) accordent à l'observation et à la manipulation d'objets physiques un rôle important dans l'apprentissage des concepts géométriques.

Familiarité avec le processus de modélisation

Comme dans le cas du « sens numérique », le terme modélisation est employé ici dans un sens très large incluant non seulement le processus de modélisation (construction d'un modèle mathématique) que l'on est amené à utiliser lorsqu'on résout un problème mathématique qui se pose dans une situation réelle, mais également le processus d'abstraction et le processus de généralisation qui interviennent dans l'apprentissage progressif des concepts mathématiques. Un problème provenant d'une situation réelle a besoin d'être simplifié, idéalisé et structuré pour être résolu. C'est en travaillant avec et dans le modèle que l'on peut ensuite tenter de résoudre le problème au moyen de calculs ou de transformations géométriques. Les deux flèches qui apparaissent dans la figure 3 (p. 111) représentent un va-et-vient inévitable (au début, à la fin, et parfois au cours de la résolution) entre la situation réelle dans laquelle se pose le problème et les concepts mathématiques abstraits qui interviennent dans le modèle mathématique correspondant. Tout comme dans le cas du « sens numérique », pour posséder le « sens géométrique » il est nécessaire de prendre conscience à un niveau élémentaire du processus de modélisation inhérent lorsqu'on résout géométriquement une situation concrète.

4.2.2 Un aspect particulier du « sens géométrique » : la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

Dans la section 1.2.6, nous avons discuté en quoi consiste la capacité à visualiser dans l'espace en géométrie suivant les quatre principales perspectives que l'on rencontre dans les recherches à ce sujet. Cette capacité constitue un aspect particulier et très important du « sens géométrique », comme le soulignent notamment Bishop (1980, 1983), De Lange (1984), Gaulin (1985), Presmeg (1986), Cooper (1989), Parzysz (1989), Zimmermann & Cunningham (1991), Saads & Davis (1997). Le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Matematics (2000b) insiste également beaucoup là-dessus.

4.2.3 Le « sens géométrique » en tant que compétence à développer

Rappelons que dans la section 2.3 nous avons mis en évidence trois caractéristiques principales d'une compétence à savoir l'orientation vers une finalité en long terme, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre et l'intégration d'un ensemble de ressources. Or le « sens géométrique » tel que décrit à la figure 3 (p. 111) vérifie bien ces trois caractéristiques.

D'abord en ce qui concerne l'orientation vers une finalité à long terme, le « sens géométrique » ne peut s'enseigner comme un thème isolé en mathématiques pendant une période de l'année scolaire puis laissé de côté mais se développe et s'améliore certainement sur une longue période de temps. D'ailleurs, l'idée de le développer tout au long de la scolarité se trouve dans le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) puisqu'il y est fortement recommandé de porter une attention particulière tout au long du cursus scolaire au développement de la visualisation, du raisonnement spatial et des modèles géométriques pour résoudre des problèmes de mathématiques ou de la vie quotidienne. Bennie et Smit soutiennent ce point de vue lorsqu'ils affirment que : « spatial sense cannot be taught, but must be developed over a period of time » (Bennie & Smit, 1999 ; p. 3). Ensuite, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre est implicite dans l'idée du développement à long terme. En effet, il est nécessaire de varier les contextes et les situations-problèmes car le développement graduel du « sens géométrique » ne peut se réaliser suite à une situation-problème. Finalement, l'intégration d'un ensemble de ressources fait appel à toutes les connaissances touchant les figures, les relations et les transformations géométriques et leurs différentes représentations, les savoir-faire et les attitudes qui sont mis de l'avant par l'élève pour venir à bout d'une situation particulière. Tel que nous venons de le décrire, le « sens géométrique » au fond n'est autre qu'une compétence à développer à l'école.

En conclusion, compte tenu du modèle que nous avons présenté dans la section 4.2.1, avoir la compétence « sens géométrique » revient à la fois :

- à posséder une familiarité à travailler avec toutes sortes d'objets géométriques qu'il s'agisse de figures, de relations géométriques, de transformations géométriques ou de propositions et de théorèmes qui les concernent ainsi que de leurs diverses représentations respectives ;
- à avoir la capacité d'appliquer toutes ces connaissances mathématiques dans divers contextes qu'ils soient liés à la vie de tous les jours ou purement mathématiques ;
- à avoir une certaine familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui intervient entre le monde abstrait des objets géométriques et le monde réel.

Tout comme dans le cas du sens numérique, il est indispensable de mettre en évidence les « ressources » nécessaires au développement de la compétence « sens géométrique ». Les savoirs scolaires liés aux figures, aux transformations et aux relations géométriques comme un rectangle, un triangle, un cercle, un prisme, une translation, une rotation, une homothétie, le parallélisme, la perpendicularité, etc. jouent le rôle de ressources pour trouver des solutions à diverses situations. Par exemple, couper du papier cadeau pour emballer une boîte, expliquer un chemin à quelqu'un sur un bout de papier, dessiner un bonhomme pour un enfant, déplacer un meuble d'une chambre à l'autre sans écorcher les murs, retrouver le pavé de base et les différentes transformations qui permettent le pavage, etc. Il en est de même face à un exercice de mathématiques comme : *ABCDEFGH est un cube. I, J, K, L sont les centres des faces (EHCD), (ADEF), (BCHG) et (ABGF). Démontrer que (IJ) est parallèle à (LK).* La résolution de problèmes géométriques, qu'ils soient purement mathématiques ou liés à la vie de tous les jours, utilise aussi ces savoirs scolaires comme ressources. Il est à noter que ces derniers servent énormément dans plusieurs domaines externes et internes aux mathématiques. Cependant, dans le cadre de développement de compétences scolaires, le recours aux contextes et aux situations externes aux mathématiques doit rester à la portée de l'élève. On ne cherchera pas à proposer des applications dans des domaines de spécialisation comme la cristallographie, la robotique, la mécanique, l'astronomie ou autres pour former des élèves compétents. Le matériel didactique (solides, géoplan en bois, etc.), même s'il est destiné tout d'abord à l'apprentissage, peut servir aussi de ressources dans différentes situations. Il en est de même pour des instruments comme le rapporteur, l'équerre, le compas, etc. Toutefois, la familiarité avec le matériel didactique et les instruments est une condition nécessaire pour qu'ils puissent être considérés comme des ressources. Aussi, le processus de modélisation et son inverse peuvent être considérée comme une ressource lorsque le modèle géométrique utilisé n'exige plus une réflexion majeure telle l'utilisation de l'équation d'une droite, d'une parabole, etc.

4.2.4 La capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions en tant que compétence à développer

Dans la section 1.2.4, nous avons mis en évidence la nécessité de développer la capacité à visualiser dans l'espace dans l'enseignement de la géométrie à l'école. De même que la capacité à estimer est un aspect particulier de la compétence « sens numérique » et peut elle-même être considérée comme une compétence, la capacité à visualiser en géométrie constitue un aspect particulier de la compétence « sens géométrique » et peut elle-même être envisagée comme étant une compétence à développer.

Par ailleurs, le modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111) s'applique de façon particulière dans le cas de la visualisation en géométrie, c'est-à-dire que les trois composantes qu'on y retrouve sont valables dans le cas particulier de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. En y regardant de plus près, on remarque que cette capacité est elle-même une compétence. En effet, elle satisfait les trois caractéristiques d'une compétence à savoir l'orientation vers une finalité à long terme, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre et l'intégration d'un ensemble de ressources (voir p. 69).

Vérifions d'abord qu'elle satisfait bien la première caractéristique (orientation vers une finalité à long terme). Le document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) souligne l'importance de la capacité à visualiser. Et on y recommande notamment de promouvoir le développement de celle-ci tout au long du cursus scolaire. Dans ce document, la capacité à visualiser est nettement mise en évidence comme un des objectifs que doit viser un programme de géométrie. On peut y lire :

> **Use visualization, spatial reasoning, and geometric modeling to solve problem**
> In prekindergarten through grade 2, all students should-
> - create mental images of geometric shapes using spatial memory and spatial visualization;
> - recognize and represent shapes from different perspectives;
> - recognize geometric shapes and structures in the environment and specify their location. (2000b ; p. 96)
>
> In grades 3-5 all students should-
> - build and draw geometric objects;
> - create and describe mental images of objects, patterns, and paths;
> - identify and build a three-dimensional object from two-dimensional representations of that object;
> - identify and draw a two-dimensional representation of a three-dimensional object;
> - use geometric models to solve problems in other areas of mathematics, such as number and measurement. (2000b ; p. 164)
>
> In grades 6-8 all students should-
> - draw geometric objects with specified properties, such as side lengths or angle measures;
> - use two-dimensional representations of three-dimensional objects to visualize and solve problems such as those involving surface area and volume;
> - recognize and apply geometric ideas and relationships in areas outside the mathematics classroom, such as art, science, and everyday life. (2000b ; p. 232)
>
> In grades 9-12 all students should-
> - draw and construct representations of two- and three-dimensional geometric objects using a variety of tools;
> - visualize three-dimensional objects from different perspectives and analyze their cross sections;
> - use vertex-edge graphs to model and solve problems;
> - use geometric ideas to solve problems in, and gain insights into, other disciplines and other areas of interest such as art and architecture. (2000b ; p. 308)

Du point de vue des chercheurs également, il est nécessaire de favoriser le développement de la visualisation spatiale tout au long de la scolarité. Hershkowitz *et al.* (1997), par exemple, défendent cette idée en insistant sur le fait que la capacité à visualiser ne se développe pas suivant une approche linéaire. La considérant comme un facteur important pour l'apprentissage de la géométrie et des mathématiques, Battista *et al.* (1982), tout comme Fennema et Behr (1980), soutiennent à leur tour l'idée de lui accorder plus de place tout au long de l'enseignement primaire. Suite à leur recherche sur la visualisation spatiale auprès d'élèves du secondaire, Saads et Davis (1997) concluent que pour pouvoir juger de son acquisition, il est nécessaire d'encourager son développement à long terme dans l'enseignement. De son côté, Parzysz (1989) conclut sa thèse de doctorat intitulée *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au Lycée. Contribution à l'Étude de la relation voir/savoir*, en soulignant clairement le profit dont pourraient bénéficier les élèves d'un apprentissage plus précoce et continu, notamment tout au long de la scolarité. De Lange (1984) défend aussi l'enseignement, tout au long du primaire et du secondaire, de la géométrie tridimensionnelle où un accent particulier est mis sur le développement de la visualisation spatiale. De plus, les recommandations faites dans *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) de même que les conclusions de différents chercheurs ne laissent aucun doute sur le besoin de promouvoir, tout au long du cursus scolaire, la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Il semble donc se dégager un accord assez général sur son orientation vers une finalité à long terme.

Vérifions maintenant que la capacité en question satisfait la deuxième caractéristique d'une compétence (existence d'une famille correspondante de situations-problèmes). Le développement à long terme de la capacité à visualiser en géométrie ne peut se réaliser à partir d'une seule situation particulière. L'examen du document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Matematics (2000b) le mentionne explicitement. Par exemple, à propos de l'apprentissage des représentations planes et tridimensionnelles des formes, on y recommande de recourir à différents dessins, l'utilisation de blocs de construction, l'emploi de descriptions verbales, de même que la décomposition et la recomposition de diverses formes.

Ce n'est pas d'hier que les chercheurs recommandent de diversifier les situations et les contextes (internes ou externes aux mathématiques) afin que les élèves développent leur capacité à visualiser en géométrie. À ce sujet, Bishop (1987) par exemple écrit : « À tous les niveaux, le professeur de géométrie doit enrichir et structurer l'expérience spatiale des élèves, développer leur vocabulaire de l'espace et leur donner les moyens d'exploiter pleinement leur capacité de visualisation » (p. 152). Dans le même article, l'auteur invite à familiariser les élèves à diverses représentations ainsi qu'à diverses tâches de représentations. Gaulin (1985), pour sa part, voit en la diversité des représentations un moyen pour aider le développement de la capacité à coder et à décoder de l'information spatiale. Saads et Davis (1997), dans une recherche portant sur la formation d'images mentales en géométrie tridimensionnelle, encouragent la diversité des activités portant sur différentes formes géométriques pour développer les images mentales des élèves. Dans son article intitulé *Space and Geometry,* Bishop (1983) défend l'idée de mettre sur pieds des programmes où différentes situations seront créées afin de développer l'éducation spatiale et géométrique des élèves. D'un autre côté, à cause des difficultés de toutes sortes qu'éprouvent les élèves à visualiser par exemple une même figure de différentes façons (Yerushalmy & Chazan, 1990), à reconnaître les transformations impliquées dans une figure (Goldenberg, 1991), ou encore à ne pas confondre une figure géométrique avec ses représentations (Laborde, 1988), il est nécessaire sans l'ombre d'un doute de recourir à des ensembles de situations proches les unes des autres pour aider à surmonter ces difficultés.

Ainsi, que ce soit de l'avis des auteurs du document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) ou des chercheurs, le recours aux familles correspondantes de situations-problèmes à résoudre est certainement nécessaire pour développer la visualisation en géométrie auprès des élèves.

Vérifions finalement que la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions satisfait également la troisième caractéristique d'une compétence (intégration d'un ensemble de ressources). Le recours à des familles de situations-problèmes à résoudre pour développer la capacité à visualiser en géométrie fait certainement appel à plusieurs connaissances ou savoirs comme des concepts, des propriétés, des théorèmes, des termes et des symboles se rapportant aux figures, relations et transformations géométriques, à des capacités intellectuelles comme l'observation, la classification, la formulation de conjecture, le raisonnement déductif, etc., à la capacité à faire des démonstrations en géométrie, à des savoir-faire techniques comme l'utilisation d'instruments, la construction des formes géométriques, etc., à des attitudes d'ordre intellectuel ou affectif comme la curiosité et la rigueur. Ainsi, face à une situation-problème proposée aux élèves faisant appel à la visualisation en géométrie, ceux-ci sont amenés à intégrer un ensemble de connaissances, de capacités, de savoir-faire et d'attitudes qui leur permettront d'affronter la situation, de prendre les décisions nécessaires et de trouver une réponse.

En conclusion, nous venons de montrer que la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions a bel et bien les caractéristiques d'une compétence à développer qui relève de la compétence plus générale « sens géométrique ».

4.3 Deux volets importants de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions : « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement »

De façon analogue au cas de la compétence à faire des estimations, il est important de distinguer clairement deux volets différents mais complémentaires de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions : « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement ». Regardons de plus près chacun d'eux.

Premier volet : « visualiser intérieurement »

L'étude de la géométrie offre l'occasion de découvrir différents concepts et objets géométriques pour lesquels chacun d'entre nous génère assez souvent des images mentales. Le concept d'image mentale est historiquement lié à la psychologie et sa compréhension a remarquablement évolué au cours de l'histoire. Durant les années soixante-dix, les travaux de Paivio ont eu une grande influence. Cet auteur considère que les activités psychologiques de l'individu sont régies par deux systèmes de codage : le système des représentations imagées et le système des représentations verbales. Il confère donc à l'image un rôle décisif dans les activités cognitives (Denis, 1979). Clements (1981a) explique que dans la théorie du double codage de Paivio, l'information peut avoir exclusivement une représentation visuelle fournissant ainsi aux personnes une façon de « penser en images » sans aucun support visuel. Par ailleurs, l'utilité du système des représentations verbales, supposé plus indépendant du concret, est plus grande lorsque l'information est plus abstraite. Cependant, même si ces deux systèmes peuvent fonctionner indépendamment l'un de l'autre, il y a interconnexion puisque l'information non verbale peut se transformer en une information verbale et vice-versa. Ainsi, les instructions verbales pour former des images mentales peuvent s'utiliser comme un moyen pour aider à l'apprentissage (Clements, 1981a). Tout comme Paivio, Piaget et Inhelder (1966) donnent à l'image mentale un statut de représentation mentale à part entière. Ils distinguent les images reproductrices, évoquant des objets ou évènements déjà connus, des images anticipatrices, représentants des évènements non perçus antérieurement et rattachent leur développement aux différents stades du développement cognitif. Contrairement à Piaget et Inhelder qui maintiennent que la nature des images mentales change avec l'âge, Bruner les considère comme des formes de représentation concrètes et statiques sans la possibilité réelle de leur évolution vers des formes plus abstraites et plus dynamiques (Denis, 1979). Pour sa part, Denis (1979) conçoit l'image mentale comme un processus constructif actif. Clements (1981a, 1981b) explique que pour Denis l'image mentale n'est pas considérée comme instrument de compréhension mais plutôt comme quelque chose qui préserve l'information en fournissant un équivalent mental des configurations statiques et de leurs transformations. D'ailleurs, dans son livre *Les images mentales* (1979), Denis distingue trois sortes d'image mentale : celle qui est évoquée par l'information verbale présentée au sujet, celle qui s'appuie sur des informations déjà possédées par l'individu et conservées dans sa mémoire à long terme, et finalement celle qui subit les mêmes transformations physiques susceptibles d'affecter les objets réels. En 1989, dans son ouvrage *Image et cognition*, ce même auteur affirme que l'image se développe dans le temps comme événement psychologique. Suite à l'analyse de différentes recherches, il conclut que l'utilisation intentionnelle d'images mentales favorise généralement la résolution de problèmes et le développement du raisonnement. Il souligne aussi la forte tendance qu'a l'esprit humain à se figurer les situations sur lesquelles il est appelé à raisonner. C'est pourquoi il encourage vivement, dans des contextes éducatifs, l'utilisation d'images mentales lors de résolution de problèmes où le sujet se trouve soumis à des contraintes cognitives limitant l'accès perceptif et manipulatoire aux objets ou à leurs représentations graphiques.

Cette idée est aussi partagée par de nombreux chercheurs en didactique des mathématiques. Lappan et Winter (1982) ont remarqué, suite à quelques expériences menées auprès d'élèves, que certains d'entre eux ont pu développer des images mentales leur permettant de dessiner un objet tridimensionnel à partir de trois points différents. Clements (1983), suite à une revue exhaustive de la littérature en rapport avec l'imagerie visuelle, arrive à la conclusion qu'en dépit de la controverse qui entoure la description de celle-ci, rien ne justifie l'élimination en éducation de la notion d'image mentale. Bishop (1987) invite les enseignants à encourager et exploiter le plus possible l'utilisation des images mentales chez les élèves, surtout en géométrie puisqu'elle est un domaine d'application évident. Del Grande (1987) incite à son tour les concepteurs de programmes de donner une place de choix aux activités qui développent, entre autre, les images mentales des élèves. Hershkowitz *et al.* (1997) expliquent que sans images mentales il est possible de dessiner correctement à condition de connaître les règles de certaines situations. Bartolini Bussi et Mariotti (1996) rapportent que dans le cadre d'une expérimentation scolaire où l'accent a été particulièrement mis sur le raisonnement géométrique, les images mentales ont eu un rôle de contrôle dans des tâches de décodage. Elles ont aussi été introduites pour analyser des démonstrations sans recours à l'écrit quand les thèmes mathématiques étaient explicitement reliés à la géométrie.

Pour terminer, soulignons que le volet « visualiser intérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions est une partie de ce que Bishop (1983) appelle VP (p. 49) et qui s'applique à l'ensemble des mathématiques et non pas seulement à la géométrie.

Deuxième volet : « visualiser extérieurement »

La géométrie est un domaine où on fait appel en permanence à des représentations externes d'objets et de concepts. L'étude des modes de représentation revient d'abord à Bruner (1966). Cet auteur distingue trois modes de représentation : en action, iconique et symbolique. Dans son ouvrage *Toward a Theory of Instruction*, il écrit :

> What does it mean to translate experience into a model of the world ? Let me suggest that there are probably three ways in which human beings accomplish this feat. The first is through action. [...] There is a second system of representation that depends upon visual or other sensory organization and upon the use of summarizing images. [...] We have come to talk about the first form of representation as *enactive*, the second as *iconic*. [...] Finally, there is representation in words or language. Its hallmark is that it is *symbolic* in nature (p. 10-11).

Bruner considère que ces représentations se développent de façon chronologique et qu'il importe de ne pas brûler les étapes. Ayant pris conscience de la nature artificielle d'une telle chronologie, Lesh (1979) a ajouté aux trois modes de représentation introduits par Bruner le langage parlé et les situations du monde réel, tout en soulignant les interactions existantes entre tous ces modes (voir figure 4, page suivante). La non-linéarité du modèle de Lesh se traduit par la connection de chaque mode de représentation à tous les autres ainsi que par la double direction des flèches. Lesh *et al.* (1983) expliquent que généralement les élèves ne travaillent pas avec un seul système de représentations lors de la résolution d'un problème. La figure 4 suggère par exemple que les images et le matériel concret peuvent être utilisés comme intermédiaires entre la situation réelle et les symboles écrits, de même que le langage parlé peut servir de lien entre la situation réelle et les images ou entre les images et les symboles écrits (Lesh *et al.*, 1983). Cette utilisation de plusieurs modes de représentations est assez fréquente particulièrement en géométrie où la manipulation du matériel didactique (maquettes, géoplan, géoblocs, solides, etc.), le recours à diverses représentations graphiques et l'utilisation des symboles écrits par exemple aide à la résolution du problème proposé. Ainsi, dans la suite de notre travaille, nous retenons les représentations externes du modèle de Lesh (1979) données par la figure 4

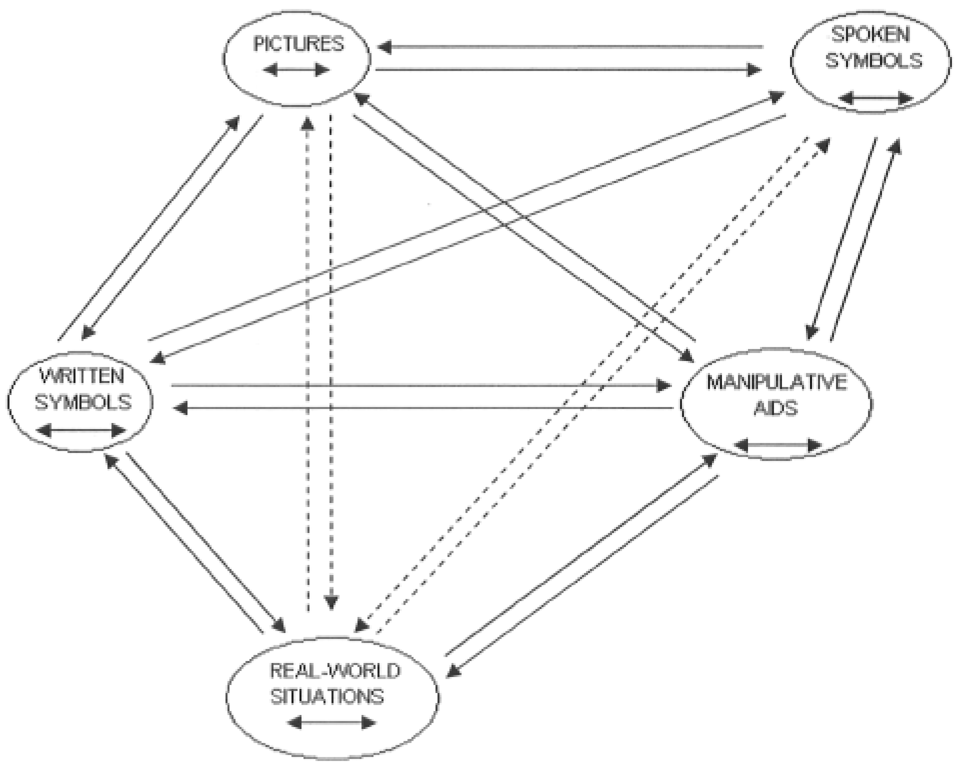

Figure 4
Modèle de Lesh concernant les modes de représentation

Il convient de noter, avant d'aller plus loin, que dans le modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111) les représentations de type en action se trouvent dans la partie du haut alors que les représentations externes se situent plutôt dans la partie du bas.

Le recours à ces différentes représentations externes dans l'enseignement de la géométrie a déjà préoccupé plusieurs auteurs comme Mitchelmore (1980), Lappan & Winter (1982), Bishop (1979, 1983), De Lange (1984), Hershkowitz *et al.* (1997). Bishop (1989) affirme que le matériel de manipulation encourage la visualisation et par conséquent le processus de visualisation même. Parzysz (1991) encourage l'utilisation des maquettes pour améliorer l'imagerie visuelle des élèves et favoriser les changements de points de vue qui sont indispensables dans la résolution des problèmes spatiaux. Il appelle aussi à la valorisation dans l'enseignement de la perspective cavalière, des sections et des vues au lieu de les reléguer au rôle d'illustration. Dans leur article *Geometrical reasoning in the mathematics classroom*, Bartolini Bussi et Mariotti (1996) encouragent l'utilisation des matériels de manipulation pour stimuler la créativité des élèves. Ils soulignent aussi la place accordée aux activités expérimentales tirées de la vie réelle pour venir à bout des difficultés liées à l'espace et à la géométrie dans l'enseignement de cette dernière en Italie. Pour sa part, Gaulin (1985) insiste sur l'importance de proposer aux élèves des activités faisant appel à divers modes de représentations planes d'objets tridimensionnels de façon à les entraîner à communiquer (coder) et à interpréter (décoder) de l'information spatiale et partant de stimuler le développement de leur capacité à visualiser et de leur intuition géométrique. Par ailleurs, remarquons que ce deuxième volet de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions comprend notamment ce que Bishop (1983) appelle la capacité IFI (p. 49). Signalons qu'il tient aussi une place importante dans les recommandations du document *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b) (p. 113).

Pour finir, remarquons que même si ces deux volets sont bien distincts, ils ne sont pas pour autant indépendants. En effet, les représentations externes, notamment les graphiques, sont particulièrement susceptibles d'aider à la construction d'images mentales. Parzysz (1989) soutient cette thèse lorsqu'il écrit : « L'expérience visuelle préalable est une composante efficace de la constitution des images mentales, et priver la géométrie de son côté visuel revient en définitive à l'amputer des références mentales correspondantes » (p. 17). De même, il est reconnu que le langage parlé favorise la formation d'images mentales (Saads & Davis, 1997).

Chapitre 5

La compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions : ressources nécessaires, niveaux de développement et critères d'évaluation

Dans ce chapitre, nous allons chercher à répondre aux questions de recherche B et C associées au premier objectif de la thèse et présentées à la section 3.1.1.

5.1 Ressources nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

La question de recherche B est formulée ainsi : *Quelles sont les « ressources » (section 2.3.2) nécessaires au développement de cette compétence ?*

Pour répondre à cette question, nous suivrons la méthode annoncée à la section 3.3. C'est-à-dire que nous élaborerons une liste de « ressources » nécessaires au développement de la « compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » à partir de l'examen des programmes de mathématiques de certains pays qui ont été définis suivant une approche par compétences, les manuels scolaires français disponibles à la didacthèque de l'Université Laval, des tests d'habileté spatiale utilisés par des psychologues de même que les recherches sur la visualisation spatiale qui ont été présentées à la section 1.2.6.

Nous tenons à souligner que la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions étant une compétence disciplinaire, nous nous attarderons dans cette section sur les ressources intellectuelles spatiales et géométriques (savoirs, capacités et savoir-faire techniques) et les ressources matérielles qui sont spécifiquement en rapport avec la dite compétence. Ainsi, il ne sera pas question ici des autres types de ressources

(ressources intellectuelles d'ordre assez général et ressources humaines) qui sont nécessaires également au développement d'autres compétences mathématiques.

5.1.1 Notions et capacités spatiales et géométriques figurant dans les programmes de mathématiques définis suivant une approche par compétences dans certains pays

Dans ce qui suit, nous chercherons à identifier les principales notions et capacités spatiales et géométriques qui figurent dans les programmes « définis par compétences » en vigueur en France, en Belgique et à Genève. Nous ferons ensuite de même avec le programme qui était en vigueur au Québec dans les années quatre-vingts.

Au primaire

Les connaissances spatiales sont considérées, dans certains pays, comme constituant un socle sur lequel s'appuient et se développent des connaissances géométriques. Par exemple, dans le programme français on peut lire :

> « À l'école primaire, la géométrie renvoie à deux champs de connaissances :
> - les connaissances spatiales qui permettent à chacun de contrôler ses apports à l'espace environnant;
> - les connaissances géométriques qui permettent de résoudre des problèmes portant sur des objets situés dans l'espace physique ou dans l'espace graphique.
>
> Au collège, la géométrie fournira un cadre pour l'initiation au raisonnement déductif. La structuration de l'espace doit être développée tout au long de la scolarité ; elle doit retenir toute l'attention des enseignants du cycle 2 [c.à.d. les trois premières années du primaire] et constituer un objet de préoccupation permanente en liaison avec d'autres disciplines comme l'EPS ou la géographie. Savoir, dans l'espace environnant, observer, situer, repérer, guider, communiquer des informations est indispensable à la maîtrise de certaines activités humaines. Ces apprentissages ne s'effectuent pas spontanément. Ils nécessitent l'organisation d'activités se déroulant dans l'espace réel, mettant en liaison, le cas échéant, cet espace avec certaines de ses représentations (maquettes, photos, plans). Un travail limité à des espaces évoqués ou représentés, sans mise en relation effective avec un espace réel, ne permet pas la construction de connaissances efficaces. » [Voir *Mathématiques, cycle des apprentissages fondamentaux*; p. 24. En ligne.

<http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm>. Consulté le 16 avril 2007].

La familiarisation avec les objets du plan et de l'espace, qui s'appuie fortement sur la perception au cours des trois premières années du primaire, passe progressivement, au cours des trois dernières années, à l'apprentissage d'une géométrie où le recours aux instruments et la connaissance des propriétés tiennent une place de plus en plus importante. Dans cette perspective, les élèves sont invités à mener quelques raisonnements lors de la résolution de problèmes qui se situent dans l'espace ou portent sur des objets « épurés ».

Également, la formation d'images mentales des concepts rencontrés constitue une préoccupation du programme français. Ce travail spatial et géométrique s'organise autour de thèmes comme le repérage et l'orientation, les relations et les propriétés, les figures planes et les solides, l'agrandissement et la réduction, les grandeurs et la mesure.

Le programme de la Communauté française de Belgique retient prioritairement l'idée d'exploration de l'espace au cours de l'enseignement fondamental qui regroupe la maternelle et le primaire. Cette exploration repose essentiellement sur les thèmes des solides et des figures planes. Elle a pour but de permettre à l'enfant d'acquérir une solide expérience tactile, visuelle et manuelle. Ainsi, il lui sera possible de dégager leurs différentes propriétés, de les relier à celles des transformations, de les comparer et ultimement à enchaîner des énoncés et à apprendre à démontrer. La conceptualisation des connaissances se fait ainsi progressivement à partir d'objets, de situations vécues puis imaginées, de projets et de questionnements. L'étude de la géométrie métrique commence par l'utilisation d'étalons familiers et s'achève à la fin du primaire avec l'utilisation des formules usuelles de périmètre, d'aire et de volume. [Voir *Enseignement fondamental : Programme des études 2002*. En ligne. <www.restode.cfwb.be/download/programmes/fond_math.pdf>. Consulté le 16 avril 2007].

Même s'il est très sommaire, le programme de mathématiques de l'école primaire genevoise touche de façon notoire le domaine de l'espace. Les thèmes abordés restent classiques tels l'étude des formes géométriques simples, les transformations géométriques et l'utilisation du vocabulaire spatiale. Des activités comme le dessin du reflet d'un paysage sont recommandées pour initier à l'utilisation intuitive des propriétés des transformations géométriques en deuxième année du primaire. Notons que la construction de maquettes et de dessins de même que l'utilisation de photos, de plans et de cartes est encouragée dans le cadre de l'éducation à l'environnement. Aussi des activités se déroulant dans l'espace réel sont fortement sollicitées [Voir *Objectifs pédagogiques*. En ligne. <ftp://ftp.geneve.ch/dip/prem-prim_05.pdf>. Consulté le 16 avril 2007].

Au Québec, il y a une préoccupation affirmée de la connaissance expérimentale et intuitive de l'espace dans le programme des années quatre-vingts. En effet, dans le guide pédagogique (1980) consacré exclusivement aux activités géométriques, nous pouvons lire : « Nous devons centrer nos efforts sur une vaste exploration de l'espace si l'on veut, à un stade plus avancé, envisager une connaissance plus structurée d'une géométrie organisée et présentée sous forme déductive » (p. 4). Il est clair à partir de cet énoncé que le caractère essentiellement déductif de la géométrie connu au cours des années soixante-dix est relégué à plus tard. Cependant, même si cette géométrie est de caractère inductif et se fait à partir d'expériences concrètes, il est recommandé d'entraîner les élèves à de simples déductions. Les représentations mentales forment aussi une préoccupation de ce programme, d'ailleurs il est suggéré de présenter des manipulations nombreuses et variées afin de les développer. Les thèmes privilégiés à l'étude de cette géométrie d'exploration sont : les formes et les figures de l'espace, les relations entre les formes des objets et les figures géométriques dans l'espace et dans le plan, les transformations géométriques dans l'espace et leurs invariants, les problèmes de repérage : coordonnées et graphiques, régularités et structures géométriques.

Ainsi, il ressort de l'examen de ces programmes que l'aspect visuel de la géométrie est explicitement visé dans l'enseignement au primaire. Quoique parfois il n'y ait un seul objectif qui y fasse référence. Par exemple, pour se situer et situer des objets dans le plan et dans l'espace, le programme français encourage le recours aux maquettes, photos, plans et cartes dans le cours de géométrie alors que le programme genevois penche plutôt vers l'utilisation de papier-crayon. Ce matériel didactique est plutôt suggéré dans le cours de l'éducation à l'environnement dans le programme genevois. Au Québec, les relations géométriques sont étudiées au moyen des graphes alors que le programme belge se contente de les reconnaître sur des solides. En Belgique, les élèves sont initiés à la perspective cavalière au primaire tandis qu'en France, elle relève du collège. La géométrie métrique est abordée modérément au Québec alors qu'elle est largement développée en Belgique. En dépit de la diversité des approches qu'on retrouve dans ces programmes, les thèmes sont toujours abordés selon le principe du simple au plus compliqué. D'autre part, il est intéressant de constater que les deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, font partie des préoccupations des différents programmes. En effet, le recours aux matériels didactiques, aux situations de la vie réelle, aux représentations graphiques, aux symboles écrits et au langage parlé qui correspondent aux modes de représentations externes et sur lesquels s'appuie le volet « visualiser extérieurement », sont vivement encouragés dans chaque programme. Par ailleurs, l'intérêt porté aux images mentales est soit clairement annoncé, soit dissimulé dépendamment des programmes. Cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, les représentations externes sont particulièrement susceptibles d'aider à la construction d'images mentales. Donc, même lorsqu'un programme n'en fait pas cas ouvertement cela n'empêche pas leur développement. Par conséquent, le volet « visualiser intérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions a bien sa place dans les programmes mentionnés. Pour finir, soulignons que ces derniers reconnaissent que l'apprentissage débute par la perception physique des objets et encouragent les activités d'exploration. Celles-ci ont aussi pour but de faire découvrir aux élèves les propriétés des objets géométriques.

Au secondaire

En France, l'enseignement secondaire comprend quatre ans au collège et deux ans au lycée. Tout au long du collège, l'étude du plan et de l'espace se poursuit. Un des objectifs avoué, assigné à cette partie du programme, est le développement de la visualisation et la consolidation des images mentales. Parallèlement, l'appropriation du raisonnement déductif se fait progressivement afin de favoriser l'apprentissage de la démonstration. Au lycée, le développement de la vision dans l'espace est encore un des objectifs principaux à côté de l'apprentissage d'une démarche déductive. C'est pourquoi la manipulation d'objets de l'espace a encore sa place. Les apprentissages se déroulent en continuité avec l'école primaire. Le raisonnement prend de plus en plus de place. La géométrie dans l'espace n'apparaît qu'au lycée et l'étude des transformations de l'espace est totalement absente. Parmi les thèmes abordés au collège, il y a la reproduction de figures simples, l'étude de certains solides comme le parallélépipède rectangle, cylindre de révolution, pyramide et cône de révolution, sphère, sections planes, les relations trigonométriques, les transformations planes, le théorème de Thalès, l'étude du triangle, les mesures. Au lycée, on peut voir les thèmes orthogonalité des vecteurs, géométrie dans l'espace, bases et repères, produit scalaire dans le plan, extension des vecteurs dans l'espace, similitudes, calcul vectoriel dans le plan et l'espace. [Voir *Programmes et accompagnements*. En ligne. <http://www.cndp.fr/secondaire/mathematiques/>. Consulté le 16 avril 2007].

La compréhension spatiale garde une place importante dans le programme de l'enseignement secondaire de la communauté française de Belgique et prend appui sur la connaissance des figures et des solides abordés au primaire. Les tracés à main levée, avec instruments et la réalisation de modèles ont encore leur place au secondaire. Également l'argumentation, le raisonnement et la démonstration sont plus présents. On peut lire qu'au cours de l'activité géométrique, l'extension à l'espace permet l'acquisition de diverses méthodes de raisonnement et de démonstration au côté des représentations planes d'objets de l'espace. Afin de réaliser ces objectifs, des chapitres comme l'étude des coniques, les projections parallèles de figures ou de solides, des problèmes de lieux géométriques et de construction sont au nombre des thèmes abordés en géométrie. [Voir *Compétences terminales et savoirs requis en mathématiques*. En ligne. <http://www.agers.cfwb.be/pedag/textes/compterm/compterm.htm>. Consulté le 18 décembre 2006].

L'enseignement secondaire genevois est composé d'un cycle d'orientation de trois ans de culture générale suivi d'un enseignement secondaire post-obligatoire ouvrant la voie à différentes filières. Nous regarderons seulement ici le programme de mathématiques du cycle d'orientation. Comme le programme du primaire, celui du secondaire est sommaire. Son examen ne donne pas d'idée claire quant à la place de la visualisation spatiale et de l'intérêt qu'on lui accorde. Cependant, il est question d'objets géométriques sans donner quelques exemples. On parle aussi de représenter une situation géométrique ou de la construire. L'initiation au raisonnement déductif et l'étude des transformations géométriques semblent plus importantes. [Voir *Mathématiques*. En ligne. <http://www.geneve.ch/co/doc/maths.pdf>. Consulté le 16 avril 2007].

Au Québec, le programme de géométrie qui repose essentiellement sur le concret au primaire touche des notions de plus en plus abstraites au secondaire. Contrairement à celui du primaire, le programme du secondaire des années quatre-vingts n'annonce rien d'explicite par rapport à la visualisation spatiale (*Programme d'études. Secondaire, 1981, 1984*). Cependant, l'examen des contenus laisse croire à un certain intérêt à cette dernière puisqu'on trouve des activités de représentation et de construction. D'autre part, la résolution de problèmes prend une place importante, ce qui favorise le développement du raisonnement déductif. Les thèmes abordés, au cours de la formation mathématique de base, touchent les transformations géométriques planes, l'étude de certains solides, l'étude des relations géométriques, la géométrie plane, la géométrie métrique. Alors que dans le cadre de cours optionnels, l'étude des lieux géométriques et la théorie des graphes font partie des contenus.

En conclusion, les différents programmes du secondaire examinés gardent une place à l'étude du plan et de l'espace. Parallèlement, un apprentissage progressif du raisonnement déductif est assuré. Comme au primaire, le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions est assuré de plusieurs façons selon les pays et les programmes. Par exemple, le programme belge aborde les projections parallèles de figures et de solides dans le cheminement régulier alors qu'elles sont absentes du programme québécois. L'étude des coniques est laissée aux filières plus scientifiques au Québec comme en Belgique. Des éléments de la théorie des graphes ne figurent que dans le programme québécois. Les activités de représentation plane de solides figurent dans tous les programmes. Ces divers cours abordés au secondaire obéissent à leur tour au principe du simple au plus compliqué. Une fois de plus, les deux volets visualiser intérieurement et visualiser extérieurement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions comptent parmi les préoccupations des programmes mentionnés. D'autre part, soulignons que l'étude des figures et des solides géométriques usuels existent dans tous les programmes consultés. Cette section de la géométrie favorise en particulier le développement de l'abstraction. De plus, l'apprentissage d'une démarche déductive est un objectif incontournable dans les programmes cités ci-dessus tout au long du secondaire.

5.1.2 Ressources intellectuelles spatiales et géométriques nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

Soulignons d'abord que nous cherchons des ressources intellectuelles spatiales et géométriques, tout en restant fidèle au modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111) qui, rappelons-le, est encore valable lorsqu'il est question de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. En se référant donc à ce modèle, ces ressources se retrouvent essentiellement dans la partie du haut. Dans ce qui suit, nous nous préoccupons plus des ressources intellectuelles (savoirs, capacités et savoir-faire techniques) qui sont spécifiquement en rapport avec la compétence en question. Ensuite, nous les énumérons en vrac. Cependant, il est nécessaire dans un curriculum de les répartir selon le primaire et le secondaire et même par rapport aux différents cycles.

En géométrie, les savoirs touchent autant les objets que les transformations, les relations et les propriétés géométriques. Parmi ces savoirs, il y a les concepts de forme, de taille, d'alignement, de perpendicularité, de parallélisme, de longueur, d'angle, de symétrie, de congruence, de figure ouverte ou fermée, d'équidistance, de figure planes, de solides, de similitude, etc., et ce, dans l'espace tant bidimensionnel que tridimensionnel. On retrouve aussi les définitions, les propriétés, les théorèmes, les relations, de même que les représentations langagières, graphiques et symboliques qui leur sont associées.

Les capacités d'ordre intellectuel[10] touchent l'utilisation efficace des savoirs cités précédemment. Elles incluent aussi l'habileté spatiale. Cette habileté spatiale doit contenir tout d'abord une certaine capacité à visualiser dans l'espace physique des objets géométriques, des relations et propriétés, divers mouvements et transformations physiques. Autrement dit, un ensemble de propriétés qui s'acquiert par la manipulation et qui est nécessaire à la construction d'images mentales qui aidera plus tard à visualiser en géométrie. Elle comprend également la capacité à communiquer et à interpréter l'information spatiale par divers moyens (représentations graphiques codées ou non, maquettes, photos prises sous différents angles, croquis bidimensionnels pour assembler différents types d'objets, etc.), la capacité de se donner une représentation mentale d'objets géométriques et de leurs représentations graphiques (imaginer le développement de certains solides, plusieurs arrangements de figures planes permettant la construction d'un solide, les faces d'un objet qu'on peut voir à partir d'une position indiquée, la projection d'un solide ou d'un objet sous différents angles, la surface engendrée par la section proposée, des vues de face, de derrière et de côté, reconstruire mentalement un solide à partir de son développement, déplier mentalement un solide pour retrouver une face particulière, etc.). Ces éléments de l'habileté spatiale correspondent respectivement aux capacités « The ability for interpreting figural information (IFI) » et « The ability for visual processing (VP) » proposées par Bishop (1983) (p. 49). Les capacités d'ordre intellectuel intègrent également la capacité à mathématiser, qui coïncide avec le processus de modélisation dans le modèle de la figure 3 (p. 111). Cette capacité correspond à la mobilisation de l'ensemble des savoirs dont on vient de parler précédemment lors des applications dans des contextes ou situations externes ou internes aux mathématiques. Elle sous-entend aussi la réalisation de construction et d'assemblage d'objets géométriques, de manipulations géométriques pour représenter, modifier, analyser, illustrer, schématiser, symboliser des transformations, des calculs, etc. Ces constructions, assemblages et manipulations géométriques peuvent s'effectuer à l'aide d'instruments, de matériels didactiques ou des technologies. En d'autres termes, cette capacité établit un lien entre les deux parties du modèle de la figure 3 (p. 111).

---

[10] Dans le *Programme de formation de l'école québécoise*, les capacités d'ordre intellectuel renvoient aux habiletés et aux savoir-faire de différents types.

Les savoir-faire techniques sont en rapport avec les savoirs acquis à propos des objets, des transformations, des relations et des propriétés géométriques. Ils renvoient non seulement à l'usage d'instruments appropriés comme la règle, l'équerre, le compas, le papier calque, etc. pour tracer, mesurer, construire des objets géométriques, vérifier des relations ou des propriétés, mais aussi à l'utilisation des procédures de construction d'objets géométriques comme des schémas ou des étapes de construction. Ces savoir-faire concernent aussi l'utilisation des représentations de l'espace tels les plans, les cartes, les maquettes, les photos, etc. pour se déplacer, se repérer, localiser des objets, etc. D'autre part, soulignons qu'il est souhaitable que certains de ces savoir-faire techniques deviennent des automatismes comme tracer la médiatrice d'un segment, mesurer un angle, tracer un rectangle, des droites parallèles, etc.

Remarquons que les ressources intellectuelles dont nous venons de parler, permettent le développement des deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

5.1.3 Ressources matérielles nécessaires au développement de cette compétence

Comme pour les ressources intellectuelles, celles-ci sont dissimulées plutôt dans la partie du bas du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111).

Les ressources matérielles nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions correspondent à ce que nous avons appelé à la figure 3 (p. 111) : utilisation d'instruments et utilisation de matériels didactiques et des technologies. Les instruments réfèrent par exemple à la règle, à l'équerre, au compas, au rapporteur d'angles, au translateur et autres, alors que les matériels didactiques correspondent au miroir, au calque, aux blocs, aux maquettes, aux modèles de figures et de solides géométriques, au géoplan, aux pailles, au papier quadrillé, etc. L'utilisation des technologies concerne notamment les logiciels de géométrie comme Cabri-Géomètre, GeoNext, Geolabo, Géoplan, Geometer's Sketchpad, etc. Remarquons que l'usage de ces divers matériels nécessite une certaine familiarité avec leur utilisation de la part des élèves pour qu'ils aient le statut de ressources. Ces ressources matérielles, même si elles sont nécessaires tout au long de la scolarité, restent particulièrement utiles pour les élèves du primaire qui ont plus besoin de manipulation pour comprendre, appliquer et abstraire. Revenons sur le modèle de Lesh (figure 4, p. 126) à propos des modes de représentations pour mentionner que ces ressources matérielles correspondent à ce que cet auteur appelle les « matériels de manipulation ». De plus, comme le modèle en question est interactif, le recours aux autres modes de représentations externes est assuré.

Ces ressources matérielles permettent principalement le développement de ce que nous avons appelé le volet « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Cependant, ceci n'empêche en rien lors de leur usage de se représenter mentalement des formes, des solides, des objets, des transformations géométriques et autres au moment d'utiliser une quelconque représentation externe. En d'autres termes et comme nous l'avons déjà mentionné, la formation d'images mentales est dépendante de l'expérience visuelle. Ainsi, même si l'accent n'est pas mis directement sur le développement du volet « visualiser intérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions celui-ci reste bien présent.

Le Tableau 1 de la page suivante présente les principales ressources intellectuelles et matérielles dont il s'agit.

Tableau 1
Ressources intellectuelles spatiales et géométriques et ressources matérielles nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

Ressources intellectuelles spatiales et géométriques			Ressources matérielles
Savoirs	**Capacités d'ordre intellectuel**	**Savoir-faire techniques**	
Concepts géométriques (perpendicularité, parallélisme, figure ouverte ou fermée, polyèdres, symétrie, équidistance, égalité, etc.) Représentations langagières (cercle, carré, angle plat, pyramide, droites parallèles, diagonale, médiane, etc.) Définitions Propriétés géométriques Théorèmes Représentations symboliques ([BC], $\angle AOB$, (AB), etc.)	Capacité à visualiser dans l'espace physique des objets, relations et propriétés géométriques, divers mouvements et transformations physiques Capacité à communiquer et interpréter l'information spatiale Capacité à se donner une représentation mentale d'objets géométriques et de leurs représentations graphiques)	Utilisation d'instruments appropriés (règle, équerre, compas, etc.) pour tracer, mesurer, construire, vérifier des relations ou propriétés Utilisation de divers types de représentations graphiques (plans, maquettes, photos, etc.) Utilisation des procédures de construction d'objets géométriques (schémas, étapes de construction)	Règle, équerre, compas, rapporteur d'angles, translateur Miroir, calque, blocs, maquette, modèles de figures et de solides géométriques, géoplan, pailles, papier quadrillé Cabri-Géomètre, GeoNext, Géoplan, Géolabo, Geometer's Sketchpad

5.2 Définition de niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

La présente section aura pour objet de répondre à la première partie de la question de recherche C correspondant au premier objectif : Quels « niveaux de développement » de cette compétence peut-on définir pour chacun des cycles du primaire et du secondaire ?

Pour y parvenir, nous procèderons comme nous l'avons expliqué à la section 3.3, c'est-à-dire qu'en prenant comme cadre de référence la théorie de van Hiele, nous élaborerons des « niveaux de développement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

Lorsqu'on vise le développement des compétences pour réaliser des apprentissages fondamentaux à l'école, il devient nécessaire de leur définir des niveaux de développement. Cette nécessité se justifie dans la planification et l'évaluation. En effet, la rédaction des programmes d'études, la conception des manuels scolaires, des ressources documentaires, la préparation des activités d'enseignement et l'évaluation des apprentissages font tous appel à ces niveaux de développement.

Rappelons qu'au chapitre 2, nous avons abordé la notion de niveaux de développement d'une compétence d'un point de vue théorique (section 2.3.3). Dans la présente section, nous définirons ces niveaux de développement dans le cas particulier de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

Afin de définir de tels niveaux de développement, il est nécessaire de s'appuyer sur un cadre théorique de référence. Dans la littérature de recherche, on trouve différentes théories concernant l'apprentissage des concepts et du raisonnement en géométrie. Parmi celles-là, la *théorie de van Hiele* nous paraît la plus appropriée pour nous permettre de proposer des niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

5.2.1 La théorie de van Hiele comme cadre de référence général pour proposer des niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

La théorie de van Hiele est due aux hollandais Pierre M. van Hiele (1957) et Dina van Hiele-Geldof (1957/1984). Il y est question à la fois de niveaux de développement de la « pensée géométrique » et de phases d'enseignement qui en découlent.

Niveaux de développement de la « pensée géométrique »

Pierre van Hiele a proposé cinq[11] niveaux à travers lesquels se développe la pensée géométrique des élèves (voir p. 43). Voici une description simplifiée des niveaux de van Hiele, semblable à celles que l'on rencontre dans certains articles ou livres.

- Niveau 1 (perception globale) : Les élèves peuvent reconnaître une figure géométrique (par exemple un rectangle) d'après son apparence globale, mais non les propriétés d'une figure géométrique (par exemple le fait que les côtés d'un rectangle sont parallèles deux à deux). Ils distinguent perceptuellement un carré d'un rectangle et ils considèrent qu'il s'agit là de deux entités différentes. Plusieurs verbes sont utilisés pour décrire ce qu'ils peuvent faire à ce niveau 1, par exemple : *reconnaître (globalement)*, *identifier*, *pointer*, *nommer*, etc. (une figure géométrique).

- Niveau 2 (analyse) : Les élèves arrivent à distinguer et à abstraire certaines propriétés d'une figure géométrique, mais sans établir des liens logiques entre elles. Ainsi ils peuvent constater que d'une part les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et d'autre part que les angles opposés d'un parallélogramme sont congrus, mais sans se rendre compte que la première propriété implique logiquement la seconde (et réciproquement). Pour eux, la pas propriété « être un carré » n'entraîne pas nécessairement la propriété « être un

[11] Originalement, van Hiele numérotait ces niveaux de 0 à 4 (p. 43). De nombreux auteurs ont par la suite préféré les numéroter de 1 à 5 comme nous le ferons ici ; plusieurs ont même réduit le nombre de niveaux à 4 en laissant tomber le dernier niveau (rigueur) qu'ils jugeaient non pertinent pour l'enseignement au primaire et au secondaire.

rectangle », c'est-à-dire qu'ils ne saisissent pas que tout carré est un rectangle. Plusieurs verbes sont utilisés pour décrire ce qu'ils peuvent faire à ce niveau 2, par exemple : *décrire*, *analyser*, *copier*, *reproduire*, etc.

Niveau 3 (propriétés ordonnées) : Les élèves arrivent à établir des liens logiques entre plusieurs propriétés d'une même figure géométrique (par exemple d'un carré ou d'un triangle équilatéral) ou encore entre diverses figures géométriques (par exemple en classifiant des quadrilatères suivant certains critères). Ils peuvent comprendre et même faire des déductions logiques simples en se servant par exemple de définitions ou de propriétés de figures géométriques. Cependant ils ont de la difficulté à comprendre une argumentation comportant plusieurs inférences successives (comme dans la démonstration de certains théorèmes). Plusieurs verbes sont utilisés pour décrire ce qu'ils peuvent faire à ce niveau 3, par exemple : *classifier*, *inter-relier*, *déduire*, *justifier*, *définir*, etc.

- Niveau 4 (déductions dans un système) : Les élèves comprennent ce que sont un axiome, un théorème et une définition. Ils peuvent se mouvoir dans un système axiomatique. Ils peuvent comprendre et même élaborer des démonstrations de théorèmes, distinguer un théorème de sa réciproque, saisir la différence entre une condition nécessaire et une condition suffisante.

- Niveau 5 (rigueur) : ce niveau se caractérise par la capacité de travailler dans divers systèmes axiomatiques formels et d'étudier des géométries variées en l'absence de modèles concrets.

REMARQUE TRÈS IMPORTANTE.

Pour simplifier la description et faciliter la compréhension de chacun des cinq niveaux, nous avons dans ce qui précède parlé et donné des exemples seulement en rapport avec des figures géométriques planes. Bien entendu, *les niveaux de van Hiele sont valables à la fois pour des figures géométriques planes et tridimensionnelles.* Plus important encore : *les niveaux de van Hiele concernent non seulement les figures géométriques, mais également les relations géométriques (comme par exemple la congruence ou la* *similitude de figures) et les transformations géométriques (comme par exemple une symétrie axiale dans le plan) aussi bien dans deux que dans trois dimensions.* En bref, *la théorie de van Hiele s'applique de façon générale à toute la classe des notions géométriques (figures, relations et transformations) dont il a été question dans le modèle que nous avons créé précédemment pour décrire le « sens géométrique »* (voir la section 4.2.1 et la figure 3 de la page 111). Il faudra toujours garder cela en tête par la suite.

Soulignons que les niveaux 1 et 2 de van Hiele concernent essentiellement la reconnaissance de notions géométriques et de leurs propriétés, alors que les niveaux 3 et 4 font grandement appel au raisonnement logique. Quant au niveau 5, il concerne surtout l'activité du mathématicien professionnel plutôt que celle d'un étudiant du secondaire, malgré le fait que plusieurs mathématiciens et didacticiens des mathématiques proposent d'initier les élèves du secondaire à la géométrie projective ou hyperbolique, voire même aux géométries finies, et que plusieurs recherches didactiques ont déjà été menées à ce sujet. De plus, les cinq niveaux de van Hiele répondent aux caractéristiques suivantes :

- le processus d'apprentissage est discontinu et les niveaux de développement constituent une suite discrète ;

- les niveaux sont hiérarchiques ; les élèves doivent maîtriser les stratégies d'un niveau donné pour passer au niveau suivant ; le passage d'un niveau à un niveau supérieur dépend davantage de l'enseignement que de l'âge ou de la maturation biologique de l'élève ;

- la compréhension implicite des concepts à un niveau donné devient explicite au niveau suivant ; par exemple, au niveau 3 les figures sont déterminées par leurs propriétés, mais un élève qui se situe au niveau 1 ne se rend pas encore compte de ces propriétés ;

- chaque niveau a ses propres symboles linguistiques et son propre réseau de relations unissant ces symboles. Il en résulte qu'une affirmation peut être correcte à un niveau et fausse à un autre niveau. De ce fait, deux élèves qui raisonnent à des niveaux différents ne peuvent très bien ne pas se comprendre.

Phases d'enseignement

Clements et Battista (1992) rapportent que, selon les van Hiele, la progression d'un niveau de pensée à l'autre dépend de l'influence du processus d'enseignement/apprentissage plutôt que de la maturation ou du développement biologique. Dina van Hiele-Geldof (1957) a proposé cinq phases qui découlent des cinq niveaux de développement précédents et que l'on devrait respecter dans l'enseignement de la géométrie. Elle les décrit comme suit :

- Information : l'élève examine le sujet qui lui est soumis, l'explore à l'aide d'un matériel et découvre une certaine structure. La discussion avec l'enseignant lui permet d'avoir une idée sur les connaissances de l'élève, de l'orienter dans son travail et d'introduire un vocabulaire spécifique.

- Orientation dirigée : l'élève est activement engagé dans des activités d'exploration (par exemple, mesure, recherche de symétrie, pliage) afin de former graduellement le réseau des relations. L'enseignant est tenu de diriger l'activité de l'élève. Il doit choisir des tâches courtes provoquant des réponses spécifiques où l'élève manœuvre des objets afin de rencontrer des concepts et des procédures spécifiques à la géométrie.

- Explicitation : l'élève prend conscience du réseau de relations entre les symboles linguistiques, essaie de s'exprimer en ses propres mots et apprend la terminologie mathématique appropriée, par exemple, exprimer ses idées au sujet des propriétés des figures.

- Orientation libre : l'élève entreprend des tâches plus complexes qui exigent l'utilisation des concepts et des relations élaborés précédemment. Les tâches devraient être conçues de sorte qu'elles puissent s'exécuter de plusieurs façons. Des repères sont donnés pour aider l'élève à réfléchir, à élaborer des solutions, à présenter des concepts et des processus de résolution de problèmes.

- Intégration : l'élève fait une synthèse sur le sujet étudié, réfléchit sur ses actions et acquiert ainsi une vue d'ensemble. À l'issue de cette dernière phase, un nouveau niveau de pensée est atteint avec son propre réseau de relations et sa propre intuition.

Les van Hiele affirment que c'est à travers un choix judicieux d'exercices et non par un enseignement direct que l'on peut amener les élèves à passer d'un niveau de développement au suivant (Clements et Battista, 1992).

Recherches à propos de la théorie de van Hiele

La théorie de van Hiele a été largement étudiée et a suscité plusieurs recherches. Celles-ci ont touché différents aspects et ont été menées dans plusieurs pays notamment aux États-Unis et en Espagne.

Des nombreuses recherches empiriques semblent confirmer que, du primaire au secondaire, les niveaux de pensée existent et décrivent bien le développement de la pensée géométrique des élèves (Burger & Shaughnessy, 1986 ; Fuys *et al.* 1988 ; Gutiérrez *et al.*, 1991 ; Hoffer, 1983). Par exemple, Usiskin (1982) a mené une recherche sous forme de questionnaire auprès de deux mille élèves en première année secondaire et a constaté que pour 65 % à 90 % des élèves il a été facile de leur attribuer un niveau (ce résultat est tributaire de la sévérité du critère utilisé). Burger et Shaughnessy (1986) ont procédé par entrevues cliniques auprès d'élèves dont le niveau scolaire variait de la maternelle au secondaire. Ils ont signalé que les comportements des élèves étaient généralement conformes à la description des niveaux de pensée de van Hiele (Clements & Battista, 1992).

D'autres recherches avaient pour but de vérifier le caractère discret de la suite des niveaux. Burger et Shaughnessy (1986) ont constaté que les niveaux de van Hiele étaient plutôt continus que discrets. Gutiérrez *et a*l. (1991) ont également mis en doute le caractère discret des niveaux ainsi que le fait de chercher à attribuer un niveau et un seul à chaque élève. Ils ont introduit l'idée de « degré d'acquisition » d'un niveau qui rejoint celle des phases d'apprentissage de van Hiele. Ils distinguent cinq degrés : aucune acquisition, acquisition faible, intermédiaire, élevée et complète. D'autres recherches ont souligné la difficulté de classifier les élèves qui semblent en transition d'un niveau à un autre (Fuys *et al.*, 1988 ; Usiskin, 1982).

À propos du caractère hiérarchique de la suite des niveaux, les études (Burger & Shaughnessy, 1986 ; Fuys *et al.*, 1988 ; Usiskin, 1982) le confirment quoiqu'il y ait des exceptions. Gutiérrez *et al.* (1991) soutiennent la hiérarchie des niveaux de van Hiele dans le sens où, pour presque tous les élèves, plus le niveau est élevé, plus le degré d'acquisition est faible. Mayberry (1983) a attribué un niveau non pour l'ensemble du domaine de la géométrie mais sujet par sujet. Cette expérimentation soutient l'existence des niveaux, dans la mesure où, pour chaque sujet, la hiérarchie normale des niveaux est, dans l'ensemble, respectée.

Concernant la question : « est-ce que les élèves se situent au même niveau de van Hiele pour toutes les notions géométriques ? », les résultats trouvés ne font pas consensus. Clements et Battista (1992) résument ainsi la situation :

> A test of consensus revealed that pre-service elementary teachers were on different levels for different concepts (Mayberry, 1983), as were middle school (Mason, 1989) and secondary students (Denis, 1987). Similarly, Burger and Shaughnessy (1986) reported that students exhibited different preferred levels on different tasks. Some even oscillated from one level to another on the same task under probing. The researchers characterized the levels as dynamic rather than static and of a more continuous nature than their discrete descriptions would lead one to believe (p. 429).

De leur côté, Gutiérrez et Jaime (1988) ont comparé le niveau de raisonnement de futurs enseignants à propos de la géométrie plane, de la géométrie spatiale (polyèdre) et de la mesure. Voici comment (Clements & Battista, 1992) résument les conclusions de cette recherche :

> The levels reached across topics were not independent, but the data did not support the theorized global nature of the levels. The researchers hypothesized that as students develop, the degree of the globality of the levels is not constant, butincreases with level. That is, as children develop, they grasp increasingly large "localities" of mathematical content and thus understand large areas of mathematics (p. 429).

Fuys *et al.* (1988), pour leur part, supportent l'idée que le niveau *potentiel* de pensée de l'élève reste stable d'un concept à l'autre (Clements & Battista, 1992).

Pour finir, signalons que Clements et Battista (1992) soutiennent l'existence d'un niveau 0 plus élémentaire que le niveau 1 de van Hiele. Il s'agit du niveau « pré-identification » (pre-recognition). À cette étape, l'élève reconnaît seulement un sous-ensemble des caractéristiques visuelles d'une figure dû à son inaptitude à identifier des formes d'une même classe. Par exemple, il différencie un carré d'un cercle, mais ne distingue pas un carré d'un triangle. En ce basant sur la théorie piagétienne, ces auteurs affirment que l'inhabilité de l'élève d'identifier des figures d'une même classe à ce niveau relève de l'absence de la formation d'images mentales.

5.2.2 Définition de niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

Rappelons qu'à la section 2.3.3, nous avons expliqué que pour rendre compte de la progression des élèves, il est important de définir des niveaux de développement pour toute compétence qu'on veut valoriser à l'école. Ceci reste vrai dans le cas particulier de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Comme le M.É.Q. a décidé de structurer l'organisation scolaire en fonction de cycles d'apprentissage, nous trouvons plus logique et plus pratique de situer les niveaux de développement de la compétence en question à la fin de chacun des cycles du primaire et du secondaire. Ainsi, la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions aura cinq niveaux de développement. Pour définir ces niveaux de développement, il faut tenir compte à la fois de cette décision et des niveaux de développement de la « pensée géométrique » de van Hiele que nous avons présentés précédemment (section 5.2.1) et qui suggèrent une certaine progression pour l'apprentissage de la géométrie tout au long des cycles du primaire et du secondaire.

Dans le tableau 2 de la page suivante, nous présentons pour chaque fin de cycle du primaire et du secondaire, le niveau de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions correspondant.

Comme nous pouvons le constater, le niveau 2 de van Hiele apparaît à deux cycles différents du primaire (tableau 2, page suivante). Cependant, les situations et problèmes visés au deuxième cycle sont plus simples que ceux visés au troisième cycle. Ce choix se justifie par le fait qu'il nous paraît irréaliste de viser le niveau 3 de van Hiele pour la fin du primaire. Rappelons qu'à ce niveau, l'élève est supposé être capable de déduire les propriétés les unes des autres, de donner et d'utiliser des définitions et de donner des justifications informelles basées sur des propriétés et relations mathématiques.

Tableau 2
Niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions pour chacun des cycles du primaire et du secondaire

Fin d'un cycle d'enseignement	Niveau de développement correspondant
Fin du premier cycle du primaire	L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 1 de van Hiele
Fin du deuxième cycle du primaire	L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hiele dans des situations généralement simples
Fin du troisième cycle du primaire	L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hiele dans des situations plus complexes
Fin du premier cycle du secondaire	L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 3 de van Hiele
Fin du deuxième cycle du secondaire	L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 4 de van Hiele

5.3 Proposition de critères d'évaluation servant à évaluer l'atteinte des cinq niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

La présente section aura pour objet de répondre à la deuxième partie de la question de recherche C correspondant au premier objectif : *Quels critères utiliser pour évaluer l'atteinte de chacun de ces niveaux de développement ?* Pour y parvenir, nous procéderons comme nous l'avons annoncé à la section 3.3, c'est-à-dire en prenant comme cadre de référence la théorie de van Hiele, plus spécifiquement les niveaux de développement de la « pensée géométrique » qu'elle propose.

Après avoir approfondi la théorie de van Hiele, nous avons finalement décidé de nous donner quatre critères d'évaluation (que nous appellerons a, b, c, et d) pour cette compétence à visualiser en géométrie.

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE

DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

Critères d'évaluation retenus

Critère d'évaluation a

L'élève est capable, dans des situations diverses, de *reconnaître (globalement)/identifier/pointer/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

Critère d'évaluation b

L'élève est capable, dans des situations diverses, de *construire/reproduire/copier/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

Critère d'évaluation c

L'élève est capable, dans des situations diverses, de *décrire/comparer/analyser/mettre en ordre/définir/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

<u>Critère d'évaluation d</u>

L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'*appliquer/utiliser/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relations avec de telles notions.

Dans les tableaux 3 à 7 qui suivent, nous proposons des critères plus spécifiques pour évaluer l'atteinte de chacun des niveaux de développement de la compétence en question que nous avons définis précédemment pour le primaire et le secondaire.

REMARQUES :

1. Rappelons qu'au début de la thèse (voir p. 4) nous avons fait la distinction entrer *visualiser des formes et des relations spatiales dans l'espace physique environnant à trois dimensions* et *visualiser des figures et des relations géométriques dans trois et deux dimensions.* Dans les tableaux des pages qui suivent, on retrouvera cette distinction. Néanmoins, il reste que les critères proposés ici ont pour but d'évaluer la compétence à visualiser des notions géométriques (abstraites) et non pas la capacité à visualiser dans l'espace physique (« habileté spatiale »).

2. Les situations et contextes auxquels on fera appel pour appliquer un critère donné pourront être simples ou complexes, de nature spatiale ou purement géométrique, tout dépendant du niveau de développement dont il s'agit d'évaluer l'atteinte.

3. Dans la définition de chacun des critères, quelques-uns des verbes utilisés ne s'appliquerons qu'à l'évaluation de l'atteinte de certains niveaux de développement.

Tableau 3
CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DU NIVEAU 1 DE DÉVELOPPEMENT
de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

NIVEAU 1 DE DÉVELOPPEMENT :

L'ÉLÈVE EST CAPABLE DE VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS
AU SENS DU NIVEAU 1 DE VAN HIELE

Critères spécifiques d'évaluation :

1a L'élève est capable, dans des situations diverses, de reconnaître (globalement)/identifier/pointer/etc.
des notions spatiales (formes, relations, et transformations dans l'espace physique)

1b L'élève est capable, dans des situations diverses, de construire/reproduire/copier/etc.
des notions spatiales (formes, relations et transformations dans l'espace physique)

1c L'élève est capable, dans des situations diverses,
de décrire/comparer/analyser/mettre en ordre/définir/etc.
des notions spatiales (formes, relations et transformations dans l'espace physique)

1d L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'appliquer/utiliser/etc.
des notions spatiales (formes, relations et transformations dans l'espace physique) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relation avec de telles notions

Tableau 4
CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DU NIVEAU 2 DE DÉVELOPPEMENT
de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

NIVEAU 2 DE DÉVELOPPEMENT :

L'ÉLÈVE EST CAPABLE DE VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS
AU SENS DU NIVEAU 2 DE VAN HIELE DANS DES SITUATIONS SIMPLES

Critères spécifiques d'évaluation :

2a L'élève est capable, dans des situations simples, de reconnaître/identifier/tester/trier/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations, et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique)

2b L'élève est capable, dans des situations simples, de construire/reproduire/copier/créer/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique)

2c L'élève est capable, dans des situations simples, de décrire/comparer/analyser/mettre en ordre/définir/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique)

2d L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'appliquer/utiliser/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relation avec de telles notions

Tableau 5
CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DU NIVEAU 3 DE DÉVELOPPEMENT
de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

NIVEAU 3 DE DÉVELOPPEMENT :

L'ÉLÈVE EST CAPABLE DE VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS
AU SENS DU NIVEAU 2 DE VAN HIELE DANS DES SITUATIONS PLUS COMPLEXES

Critères spécifiques d'évaluation :

3a L'élève est capable, dans des situations plus complexes, de reconnaître/identifier/pointer/trier/ etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations, et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique)

3b L'élève est capable, dans des situations plus complexes, de construire/reproduire/copier/créer/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations, et transformations dans l'espace physique et figures,relations et transformations dans le monde géométrique)

3c L'élève est capable, dans des situations plus complexes, de décrire/comparer/analyser/rappeler/définir/découvrir/formuler/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations, et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique)

3d L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'appliquer/utiliser/etc. des notions spatiales et géométriques (formes, relations et transformations dans l'espace physique et figures, relations et transformations dans le monde géométrique) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relation avec de telles notions

Tableau 6
CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DU NIVEAU 4 DE DÉVELOPPEMENT
de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

NIVEAU 4 DE DÉVELOPPEMENT :

L'ÉLÈVE EST CAPABLE DE VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS
AU SENS DU NIVEAU 3 DE VAN HIELE

Critères spécifiques d'évaluation :

4a L'élève est capable, dans des situations diverses, de décrire/découvrir/ordonner/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

4b L'élève est capable, dans des situations diverses, de construire/reproduire/imaginer/créer/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

4c L'élève est capable, dans des situations diverses, de décrire/comparer/analyser/définir/inter-relier/justifier/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

4d L'élève est capable, dans des situations et contextes plus complexes et divers, d'appliquer/utiliser/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relation avec de telles notions

Tableau 7
CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DU NIVEAU 5 DE DÉVELOPPEMENT
de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions

NIVEAU 5 DE DÉVELOPPEMENT :

L'ÉLÈVE EST CAPABLE DE VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS
AU SENS DU NIVEAU 4 DE VAN HIELE

Critères spécifiques d'évaluation :

5a L'élève est capable, dans des situations diverses, de décrire/découvrir/ordonner/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

5b L'élève est capable, dans des situations diverses, de construire/imaginer/créer/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

5c L'élève est capable, dans des situations diverses,
de décrire/formuler/compare/analyser/définir/justifier/etc.
des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques)

5d L'élève est capable, dans des situations et contextes plus complexes et divers, d'appliquer/utiliser/etc. des notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relation avec de telles notions

5.4 Conclusions en rapport avec le premier objectif

Dans les chapitres 4 et 5, nous avons cherché à répondre aux trois questions de recherche A, B, et C associées au premier objectif de notre thèse (p. 79-80). Nous allons maintenant résumer les réponses que nous avons trouvées pour ces trois questions.

Réponse à la question A

La question A était : *Comment décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », laquelle constitue un aspect particulier du « sens géométrique » ? Quelles caractéristiques de celle-ci permettent de confirmer qu'il s'agit d'une compétence à développer au sens où ce terme a été défini dans la section 2.3 ?*

En réponse à la première partie de la question, nous avons décrit la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui est un aspect particulier du « sens géométrique » à l'aide du modèle élaboré à la section 4.2.1 qui comprend trois composantes :

1. la familiarité avec les notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques) et avec leurs représentations au moyen de mots, de symboles ou de graphiques. Aussi, la familiarité avec des propositions et des théorèmes concernant des notions géométriques, formulés de différentes façons au moyen de mots, de symboles ou de graphiques ;

2. la capacité à appliquer les notions géométriques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes ou internes aux mathématiques) et à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions géométriques ;

3. la familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui fait le lien entre les deux composantes précédentes.

En réponse à la deuxième partie de la question, nous avons montré que la capacité en question satisfait les trois caractéristiques d'une compétence (au sens où ce terme a été défini dans la section 2.3) à savoir l'orientation vers une finalité à long terme, l'existence d'une famille correspondante de situations-problèmes à résoudre et l'intégration d'un ensemble de ressources. Nous avons donc montré que la capacité en question est effectivement une « compétence ».

Réponse à la question B

La question B était : *Quelles sont les « ressources » (section 2.3.2) nécessaires au développement de cette compétence ?*

Pour répondre à cette question, nous avons distingué deux catégories de ressources nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions : des « ressources intellectuelles spatiales et géométriques » (savoirs, capacités d'ordre intellectuel et savoir-faire techniques) et des « ressources matérielles ».

VOIR LE TABLEAU DE LA PAGE 159.

Réponse à la question C

La question C était : *Quels « niveaux de développement » de cette compétence peut-on définir pour chacun des cycles du primaire et du secondaire ? Quels critères utilisés pour évaluer l'atteinte de chacun de ces niveaux ?*

En réponse à la première partie de la question, nous avons proposé cinq niveaux de développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, en prenant comme cadre de référence la « théorie de van Hiele ».

VOIR LE TABLEAU DE LA PAGE 160.

En réponse à la seconde partie de la question, nous avons élaboré les quatre critères suivants pour évaluer l'atteinte de chacun des « niveaux de développement » précédents, en nous basant sur les « Niveaux de développement de la pensée géométrique » de van Hiele.

VOIR TABLEAU DE LA PAGE 161.

EN RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE B

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

RESSOURCES NÉCESSAIRES À SON DÉVELOPPEMENT

Ressources intellectuelles spatiales et géométriques			**Ressources matérielles**
Savoirs	**Capacités d'ordre intellectuel**	**Savoir-faire techniques**	
Concepts géométriques (perpendicularité, parallélisme, figure ouverte ou fermée, polyèdres, symétrie, équidistance, égalité, etc.) Représentations langagières (cercle, carré, angle plat, pyramide, droites parallèles, diagonale, médiane, etc.) Définitions Propriétés géométriques Théorèmes Représentations symboliques ([BC], $\angle$AOB, (AB), etc.)	Capacité à visualiser dans l'espace physique des objets, relations et propriétés géométriques, divers mouvements et transformations physiques Capacité à communiquer et interpréter l'information spatiale Capacité à se donner une représentation mentale d'objets géométriques et de leurs représentations graphiques)	Utilisation d'instruments appropriés (règle, équerre, compas, etc.) pour tracer, mesurer, construire, vérifier des relations ou propriétés Utilisation de divers types de représentations graphiques (plans, maquettes, photos, etc.) Utilisation des procédures de construction d'objets géométriques (schémas, étapes de construction)	Règle, équerre, compas, rapporteur d'angles, translateur, Miroir, calque, blocs, maquette, modèles de figures et de solides géométriques, géoplan, pailles, papier quadrillé Cabri-Géomètre, GeoNext, Géoplan, Géolabo, Geometer's Sketchpad

EN RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHÉ C

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT PROPOSÉS

NIVEAU 1 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du premier cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 1 de van Hiele

NIVEAU 2 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du deuxième cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hile dans des situations généralement simple

NIVEAU 3 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du troisième cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hiele dans des situations plus complexes

NIVEAU 4 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du premier cycle du secondaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 3 de van Hiele

NIVEAU 5 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du deuxième cycle du secondaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 4 de van Hiele

EN RÉPONSE À LA QUESTION DE RECHERCHE C

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

CRITÈRES D'ÉVALUATION POUR L'ATTEINTE DE CHACUN DES NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT

CRITÈRE D'ÉVALUATION a (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *reconnaître (globalement) / identifier/pointer/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION b (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *construire/reproduire/copier/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION c (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *décrire/comparer/analyser/mettre en ordre/définir/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION d (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'*appliquer/utiliser/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relations avec de telles notions.

Compte tenu de la difficulté des questions A, B et C et de l'ampleur du travail accompli pour y répondre, nous considérons avoir atteint notre premier objectif de façon satisfaisante. Certes plusieurs éléments de réponse demeurent assez généraux, mais ils ouvrent la voie à des recherches plus spécifiques pouvant avoir des retombées très intéressantes. C'est le cas notamment du modèle théorique élaboré pour caractériser le « sens géométrique » et des critères d'évaluation proposés (à chaque critère correspond une « échelle » dont il reste à définir un certain nombre d' « échelons »).

La troisième partie de la thèse (chapitres 6 et 7) apportera des réponses aux questions associées au deuxième objectif de la thèse.

PARTIE III

RÉSULTATS EN RAPPORT AVEC LE DEUXIÈME OBJECTIF

Chapitre 6

Résultats de l'analyse du curriculum en vigueur et des neuf collections de manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*

Dans ce sixième chapitre, nous répondons à la question de recherche D associée au deuxième objectif de la thèse : *Quelle importance était accordée au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions dans le curriculum en vigueur et les manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du* Programme de formation de l'école québécoise *?*

Afin d'y répondre, nous avons procédé comme nous l'avions annoncé à la section 3.4, c'est-à-dire en usant de trois moyens.

Le premier moyen utilisé a été d'analyser l'ancien curriculum de mathématiques du secondaire élaboré au cours des années quatre-vingt-dix. Rappelons qu'il a été en vigueur dans les deux premières années du secondaire jusqu'en septembre 2005 et qu'il restera en application dans le reste du secondaire jusqu'en septembre 2009. Ce curriculum était présenté dans les documents portant les titres *Programme d'études Mathématiques 116*, *Programme d'études Mathématiques 216*, *Programme d'études Mathématiques 314*, *Programme d'études Mathématiques 416*, *Programme d'études Mathématiques 436*, *Programme d'études Mathématiques 514*, *Programme d'études Mathématiques 536*. Il a apporté une nouvelle répartition des contenus d'apprentissage et est constitué d'objectifs globaux, généraux, terminaux et intermédiaires. La présentation de chacun des objectifs globaux et terminaux est suivie d'explications spécifiques permettant leur atteinte. Son analyse a été faite à l'aide d'une première grille qui tient compte du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111). Notons que le *Programme* *d'études Mathématiques 426* et le *Programme d'études Mathématiques 526* n'ont pas été analysés puisqu'ils sont des programmes de transition.

Le deuxième moyen employé a été l'analyse des chapitres touchant la géométrie dans chacune des neuf séries de manuels scolaires approuvées par le M.É.Q. : *Carrousel mathématique* de Guy Breton paru chez Les Éditions CEC, *Scénarios* de Marcel Soulière et Jean-Guy Thibaudeau (auteurs des manuels de la première année) et Sylvio Guay et Steeve Lemay (auteurs des manuels de la deuxième année jusqu'à la cinquième année) paru chez Les Éditions HRW, *Croisières mathématiques* sous la direction de Madeleine Drolet et Hélène Rochette paru chez Guérin, *Univers mathématique* de Jacques Assouline, Chantal Buzaglo et Gérard Buzaglo paru chez LIDEC, *Dimensions mathématiques* de Paul Patenaude et Léo Viau (auteurs des manuels de la première année) et Isabelle Jordi, Paul Patenaude et Chantal Warisse (auteurs des manuels de la deuxième année) paru chez les Éditions du Renouveau Pédagogique, *Mathophilie* de Louise Lafortune paru chez Guérin, *Les maths et la vie* de Serge Maurer *et al.* paru chez les Éditions Brault et Bouthillier, *Réflexions mathématiques* de Guy Breton, André Deschênes et Antoine Ledoux paru chez Les Éditions CEC, *Regards mathématiques* de Guy Breton et collaborateurs paru chez Les Éditions CEC. Cette analyse a été faite à l'aide d'une deuxième grille qui tient compte, tout comme la première grille, du modèle élaboré au chapitre 4 (figure 3, p. 111). Soulignons avant d'aller plus loin que ces séries n'offraient pas nécessairement des manuels pour chacun des degrés du secondaire.

Le troisième moyen a consisté à mener une entrevue avec des auteurs de collections de manuels, dans le but d'avoir une idée plus claire concernant ce qu'ils voulaient véhiculer dans leurs livres et l'importance qu'ils accordent à la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Initialement, nous avions l'intention d'interviewer des auteurs de plusieurs collections différentes mais finalement nous avons dû nous limiter à ceux de la collection *Scénarios*.

Avant de donner les résultats, nous présentons ci-dessous les instruments d'analyse que nous avons utilisés.

6.1 Instruments utilisés

Nous avons annoncé à la section 3.4 que les instruments que nous utiliserons seront élaborés en tenant compte du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » qui, rappelons-le, reste valable pour la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Nous présentons donc dans les pages qui suivent les deux grilles d'analyse ainsi que le questionnaire qui nous ont servi à recueillir des données afin de répondre à cette première question du deuxième objectif.

6.1.1 Grille d'analyse du curriculum

En menant une réflexion personnelle et en se basant sur le modèle élaboré au chapitre 4 (figure 3, p. 111), nous avons construit la grille d'analyse présentée dans le tableau 8. Dans les deux premières rangées, nous noterons tous les objectifs et les commentaires qui apparaissent dans le curriculum et qui font explicitement référence à la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Dans les deux rangées suivantes, nous inscrirons

Tableau 8
Grille d'analyse du curriculum en vigueur en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*

Objectifs à atteindre faisant explicitement référence à la visualisation en géométrie	
Références explicites à la visualisation en géométrie faites dans les commentaires sur les objectifs à atteindre	
Notions relatives à l'espace et à la géométrie faisant l'objet d'étude	
Matériels didactiques recommandés pour l'étude de l'espace et de la géométrie	

les notions étudiées et les matériels didactiques recommandés relativement à l'espace et à la géométrie dans trois et deux dimensions. Le choix de regarder séparément les objectifs et les commentaires nous permettra de voir sous deux angles différents le souci accordé au développement de la « compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ».

6.1.2 Grille d'analyse des manuels

Afin d'analyser les chapitres touchant la géométrie dans les neuf séries de manuels scolaires approuvées par le M.É.Q., nous avons, suite à une réflexion personnelle et en nous basant encore une fois sur le modèle élaboré au chapitre 4 (figure 3, p. 111), construit une deuxième grille présentée dans le Tableau 9 qui suit. Dans les deux premières rangées, nous inscrirons toute référence explicite ou implicite à la visualisation (considérée dans ses

Tableau 9
Grille d'analyse de neuf collections de manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*

Références explicites à la visualisation dans ses deux volets	
Références implicites à la visualisation dans ses deux volets	
Matériels didactiques utilisés pour développer la visualisation dans ses deux volets	
Situations/contextes concrets utilisés pour développer la visualisation dans ses deux volets et le processus de modélisation. Lesquels ? Variétés ?	
Ressources (notions) utiles/ nécessaires par rapport au « sens géométrique » pour développer la visualisation dans ses deux volets. Lesquels ? Variétés ?	
Commentaires dans le guide d'enseignement	

deux volets) faite dans les manuels scolaires. Dans les troisième et quatrième rangées, nous noterons le matériel didactique et les situations concrètes utilisés pour le développement de la visualisation dans ses deux volets ainsi que le processus de modélisation. Dans la cinquième rangée, nous inscrirons les ressources étudiées relativement à l'espace et à la géométrie dans trois et deux dimensions. Ces ressources permettent aussi le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions puisque celle-là constitue un aspect particulier de la compétence « sens géométrique ». Dans la sixième rangée, nous écrirons les commentaires en lien avec la visualisation spatiale énoncés par les auteurs à l'intention des enseignants dans les guides d'enseignement qui accompagnent les manuels scolaires.

6.1.3 Questions posées lors de l'entrevue

Nous présentons ci-dessous les questions (de type semi-ouvert) qui serviront d'amorces pour réaliser l'entrevue avec des auteurs de manuels. Nous avons construit ces questions en nous appuyant sur le modèle que nous avions élaboré précédemment pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p 111). À l'occasion, durant les entrevues, nous y ajouterons spontanément des sous-questions d'éclaircissement ou d'approfondissement.

Questions qui ont servi
d'amorce pour l'entrevue

1. A) Dans le *Programme de formation de l'école québécoise*, accorde-t-on beaucoup d'importance au développement de la capacité des élèves du primaire et du secondaire à visualiser en géométrie ? Pourquoi ?

   B) À ce sujet, trouve-t-on dans le programme des précisions pouvant servir de guides aux auteur(e)s de manuels et aux enseignant(e)s ?

   C) Dans le nouveau programme, y a-t-il des changements notables, comparativement à ce que l'on trouvait dans le précédent, du point de vue du développement de la capacité des élèves à visualiser en géométrie ?

2. Si effectivement il est question du développement de la capacité à « visualiser » en géométrie dans le *Programme de formation de l'école québécois* :

   A) Qu'est-ce qu'on y entend par les mots « visualiser » et « visualisation » (termes qui sont définis de différentes façons dans la littérature) ? S'agit-il surtout de visualisation spatiale (dans l'espace physique) ou de visualisation en géométrie ou des deux à la fois ?

   B) Y est-il question de la capacité à visualiser en géométrie de façon isolée ou plutôt comme étant un aspect particulier d'une capacité plus générale à visualiser en mathématiques ou encore de ce que certains appellent le sens spatial ou le sens géométrique (expressions qui sont mal définies dans la littérature) ?

   C) En tant qu'auteur(e)s de manuels, ce que dit le programme à ce sujet vous suffit-il ?

3. En ce qui concerne la visualisation en géométrie (et éventuellement la visualisation spatiale) dans votre collection de manuels de mathématiques :

   A) Quels objectifs visez-vous au premier et au deuxième cycle du secondaire ? Sur quoi vous êtes-vous basés pour délimiter ces objectifs de façon à accorder assez d'importance à ce thème mais pas trop ? Tenez-vous compte de ce qu'il y a déjà dans le programme du primaire ?

   B) Quels genres d'activités privilégiez-vous ? Pourquoi ?

   C) Les activités sont-elles regroupées dans des chapitres isolés ou de façon intégrée au reste ?

   D) Quels savoirs et savoir-faire en géométrie vous semblent indispensables pour que les élèves puissent développer une capacité convenable à visualiser en géométrie ?

6.2 Résultats de l'analyse du curriculum en vigueur et des neuf collections de manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du *Programme de formation de l'école québécoise*

Nous présentons ci-dessous les résultats de l'analyse du curriculum de mathématiques de l'enseignement secondaire des années quatre-vingt-dix, ainsi que ceux de l'analyse des neuf collections de manuels scolaires correspondantes qui ont été approuvées par le M.É.Q.

6.2.1 Résultats de l'analyse du curriculum

Nous allons présenter successivement ici les résultats obtenus pour les « Programmes d'études » dans l'ancien curriculum qui étaient en vigueur de secondaire 1 à secondaire 5.

Programme d'études Mathématique 116

L'examen du Tableau 12 de la page 268 montre qu'en dépit de l'existence de plusieurs objectifs, aucun ne fait référence explicitement à la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions. Cependant, dans les commentaires accompagnant ces objectifs, il est question des deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions que nous avons définis à la section 4.3. Le premier se lit comme suit : « Au terme du programme de mathématique du primaire, l'élève a généralement atteint le premier échelon : il associe plusieurs formes géométriques à leur nom respectif. Il a d'abord observé les solides à partir d'objets pris dans son milieu. Il a appris à leur donner un nom et à s'en faire une image mentale qu'il associe à ce nom. Il a ensuite considéré les faces de ces solides qu'il a aussi appris à nommer et à distinguer ; il en a par conséquent une perception globale » (p. 268). Dans cette citation, on parle de perception spatiale. Or, si on se place du point de vue des niveaux de développement de la « pensée géométrique » de van Hiele, les trois premières phrases réfèrent au niveau 1 (perception globale), alors que la première partie de la dernière phrase concerne le niveau 2 (analyse) puisque considérer les faces d'un solide, les nommer et les distinguer nécessitent de l'analyse (voir p. 141). Il semble bien que les auteurs du *Programme d'études Mathématique 116* aient oublié qu'il ne suffit pas de percevoir globalement un solide pour pouvoir en distinguer et décrire ses faces !

Le deuxième commentaire fait sur les objectifs à atteindre réfère explicitement au volet « visualiser extérieurement » de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Dans ce programme d'études de la première année, une chose retient toutefois l'attention. L'examen des notions à l'étude montre l'absence des polyèdres. On revient plutôt à l'étude de la géométrie plane. Sachons que tout au long du primaire, l'élève est initié à l'étude de l'espace par différents moyens, on peut alors se demander qu'est-ce qui justifie la disparition de cette partie des curriculums au début du secondaire ? Croit-on que la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions continuera à se développer toute seule ? Au cours de cette première année, l'accent est mis sur l'étude des propriétés des formes et des transformations géométriques. Suppose-t-on qu'il est plutôt nécessaire de commencer par la géométrie plane pour ensuite passer à la géométrie spatiale ? Si tel est le cas, où est la place de la visualisation en géométrie plane ? Il n'y a aucune référence explicite ou implicite à cette dernière dans le programme d'études. Concernant le matériel didactique, le miroir, le papier quadrillé et le papier pointillé sont recommandés dans l'étude des transformations isométriques. Il y a place ici au développement de la visualisation en géométrie plane. Mais comment peut-on espérer que les enseignants profiteront de ces occasions si le programme d'études ne glisse aucun mot à ce sujet ?

Programme d'études Mathématique 216

L'étude du Tableau 13 de la page 269 révèle que la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ne représente pas une fois de plus une préoccupation des objectifs du programme d'études de la deuxième année secondaire. Dans les commentaires qui expliquent ces objectifs, on peut deviner un renvoi au volet « visualiser extérieurement » lorsqu'on parle de développer l'esprit d'observation de l'élève et de sa capacité à repérer des figures sur une surface. Soulignons l'absence dans ce programme d'études de la deuxième année, de la géométrie dans l'espace. L'enseignement porte plutôt sur les transformations géométriques planes et les polygones réguliers. Les matériels didactiques recommandés ne favorisent pas particulièrement le développement de la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique. On peut se demander si les élèves se rappellent encore des acquis de la fin du primaire !

Programme d'études Mathématique 314

L'examen du Tableau 14 des pages 270-271 montre la présence d'objectifs faisant explicitement référence à la visualisation en géométrie. Ces objectifs touchent particulièrement le volet « visualiser extérieurement » de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions que nous avons défini à la page 125. Les représentations externes privilégiées sont la représentation en deux dimensions d'objets à trois dimensions, la description en mots ou en dessin d'objets à trois dimensions, la construction d'objets à trois dimensions à partir d'une description ou d'un dessin et la représentation de solides en deux ou trois dimensions. Ces modes de représentations se retrouvent dans le modèle de Lesh (figure 4, p. 126) que nous avons retenu et leur utilisation est encouragée par plusieurs didacticiens. Signalons qu'aucun objectif ne fait référence explicitement au volet « visualiser intérieurement » de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Cependant, comme nous l'avons déjà expliqué, ces deux volets ne sont pas indépendants. Autrement dit, le recours aux représentations externes favorise le développement des images mentales. La référence aux images mentales se retrouve plutôt dans les commentaires sur les objectifs à atteindre. En effet, on peut lire : « Ainsi, en recherchant la résultante d'une composition de transformations, l'élève doit faire appel à la représentation mentale qu'il ou elle a de la transformation unique recherchée » (p. 270). Un peu plus loin : « Il faut utiliser des activités qui font alterner les manipulations, la lecture et la production de dessins, les expériences mentales, les abstractions et les déductions » (p. 271). Enfin, « Il faut donner aux élèves un outil de travail sur l'espace pour améliorer leur perception et pour assurer le développement d'images mentales qui puissent servir de soutien à un raisonnement » (p. 271). De ces passages, il ressort qu'on admet que les images mentales se développent. Pour assurer ce développement, il est nécessaire de disposer de temps. Pourquoi alors attendre la troisième année pour s'en préoccuper ? Ne serait-il pas mieux de commencer en première année secondaire afin d'assurer la continuité avec le primaire ? Dans ces commentaires, un autre point a retenu notre attention. On parle tantôt de la « perception spatiale », tantôt du « sens spatial ». L'utilisation de ces expressions confirme une fois de plus la difficulté liée à ce qu'elles peuvent représenter. Un autre commentaire s'énonce comme suit : « l'élève vit dans un milieu tridimensionnel qu'il ou elle a apprivoisé au primaire par des activités d'orientation et d'observation. En troisième secondaire, il est essentiel de poursuivre le développement du sens spatial qui est une forme d'activité mentale permettant de créer et de manipuler des images d'objets » (p. 270). À la lecture de cet extrait, d'abord on ne peut éviter de s'interroger sur le bien fondé de retarder le développement du « sens spatial » en troisième secondaire. Ensuite, il est étonnant de restreindre le « sens spatial » à l'activité mentale alors que plusieurs chercheurs parlent d'un phénomène complexe impliquant autre chose que le fait de se créer une image visuelle et de la manipuler lors de la résolution d'un problème (section 4.2). Cette façon de le caractériser confirme une fois de plus l'ambiguïté entourant sa définition.

En dépit du malaise entourant le sens à donner à certaines expressions, il faut reconnaître que le programme d'études de la troisième année secondaire accorde de l'importance au développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Les deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » sont explicitement visés. Les enseignants sont ouvertement invités à : « apprendre aux élèves à voir dans l'espace et à représenter des solides » (p. 270). Également, ils sont encouragés à les initier à différentes techniques de représentation comme la perspective cavalière, l'utilisation du papier pointé en diagonale et l'assemblage de cubes. Pour soutenir le raisonnement, ils sont aussi appelés à donner de l'importance au support visuel et au développement d'images mentales.

Programme d'études Mathématique 416

Vu l'accent mis sur le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions en troisième secondaire, il nous semblerait logique que le programme de la quatrième année, voie régulière, prévoie aussi son développement. Néanmoins, l'examen du Tableau 15 (p. 272) montre qu'aucun objectif ni commentaire ne la vise explicitement. Même si l'étude des solides est au programme, le développement de cette capacité ne semble pas ciblé en particulier. Doit-on comprendre que le cours de troisième année était suffisant pour permettre aux élèves de développer au maximum leur capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ? Si tel est le cas sur quoi se base-t-on pour le confirmer alors que les chercheurs appellent à son développement à long terme ? Que fait-on de ceux et celles qui ont encore de la difficulté avec ce thème ? Les enseignants investiront-ils du temps pour les aider lorsque le programme ne glisse pas un mot sur cette capacité ?

Programme d'études Mathématique 436

L'examen du Tableau 16 de la page 273 montre l'absence d'objectif en rapport avec la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Cependant, on y fait référence dans les commentaires :

> « Dans le programme Mathématique 436, il est essentiel de poursuivre le développement du sens spatial amorcé en troisième secondaire. Cette forme d'activité mentale, permettant de créer et de manipuler des images d'objets, sera mise à profit dans l'étude des solides droits isométriques ou semblables. Dans ce but de façon très informelle, on généralisera à l'espace les transformations géométriques connues » (p. 273).

Dans ce commentaire, on parle de poursuivre le développement du « sens spatial » amorcé en troisième secondaire. Pourtant, il semble dans la suite qu'il est considéré comme déjà acquis par les élèves et qu'il faut l'utiliser pour l'étude des solides droits isométriques ou semblables. D'ailleurs cette intuition est renforcée lorsque nous lisons la phrase : « Par ailleurs, l'élève a développé son sens spatial et approfondi ses connaissances sur les solides ; elle ou il a crée, représenté, classé, sectionné, construit et analysé des solides » (p. 273). Il est étonnant encore une fois que les concepteurs du curriculum considèrent que le « sens spatial » se développe en une année scolaire alors que l'idée de le développer tout au long de la scolarité est soutenue par plusieurs chercheurs. Remarquons que l'idée de poursuivre son développement figure dans le *Programme d'études mathématique 436*. Cette distinction entre les deux programmes d'études de la quatrième année nous laisse perplexe. Pourquoi certains élèves sont avantagés au détriment des autres ? Faut-il croire que la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions n'est nécessaire que pour certaines carrières ?

Programme d'études Mathématique 514

Suite à l'étude du Tableau 17 de la page 274, il paraît qu'en cinquième année secondaire la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions est plus un outil que l'élève mettra à profit pour l'étude des nouvelles notions. En effet, dans les commentaires qui expliquent les objectifs nous pouvons lire : « En cinquième secondaire, par des activités d'exploration et d'observation active, l'élève pourra utiliser son imagination et faire preuve de créativité » (p. 274). Cette phrase réfère aux deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la capacité en question mais pas dans le but de les développer.

Programme d'études Mathématique 536

L'examen du Tableau 18 de la page 275 montre que le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ne fait pas partie des préoccupations de ce programme scolaire. Celle-ci est plutôt utilisée lors de la résolution de problèmes. Ce programme vise à préparer l'élève à d'éventuelles études supérieures. Ainsi, l'accent est plutôt mis sur la déduction.

6.2.2 Résultats de l'analyse des neuf collections de manuels scolaires

Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, les neuf collections analysées n'offraient pas nécessairement des manuels pour chacun des degrés du secondaire, les manuels parus pour la première et la deuxième années ont servi jusqu'en septembre 2006, et que ceux qui ont été produits pour les troisième, quatrième et cinquième années resteront en usage jusqu'à l'entrée en application graduelle du nouveau curriculum.

Dans ce qui suit, il nous semble plus commode de présenter les résultats des analyses année par année.

Avant de présenter les résultats de notre analyse, une mise en garde s'impose concernant l'utilisation quasi généralisée de l'expression « visualisation spatiale » dans les manuels et les guides d'enseignement que nous avons analysé. En effet, comme nous l'avons souligné précédemment, dans notre thèse : « nous ferons toujours une nette distinction entre *visualiser des formes et des relations spatiales dans l'espace physique environnant à trois dimensions* — nous parlerons alors de « visualiser dans l'espace » ou « visualisation spatiale », — et d'autre part, *visualiser des figures et des relations géométriques dans trois dimensions* (en géométrie de l'espace) *ou dans deux dimensions* (en géométrie plane) ». Or, les auteurs des collections de manuels analysés semblent ignorer systématiquement cette distinction lorsqu'ils utilisent l'expression « visualisation spatiale »[12]

MANUELS POUR LA PREMIÈRE ANNÉE DU SECONDAIRE

Commençons par l'analyse des chapitres de géométrie de la première année secondaire des collections *Carrousel mathématique*, *Croisières mathématiques*, *Dimensions mathématiques*, *Les maths et la vie* et *Scénarios*.

Collection *Carrousel mathématique*

Le manuel de première année aborde trois thèmes différents de géométrie : *Les figures géométriques*, *Transformation de figures* et *Triangles et quadrilatères*.

Pour le chapitre *Les figures géométriques*, l'examen du Tableau 19 de la page 277 montre l'absence de référence explicite ou implicite à la visualisation en géométrie dans ses deux volets. Dans ce chapitre, il n'existe que trois situations en rapport avec la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique. De plus, toutes les trois touchent le volet « visualiser extérieurement ». Dans le guide d'enseignement, l'auteur souligne la difficulté liée à la représentation plane d'objets tridimensionnels particulièrement lors de l'utilisation de points de fuite, mais ne suggère pas aux enseignants une façon de surmonter cette difficulté. Il annonce plutôt qu'« il faut se représenter l'objet dans l'espace. Cela n'est pas toujours évident pour les élèves » (p. 277). L'idée de montrer les relations entre les droites

[12] Dans les résultats de l'analyse qui suivent, nous utiliserons quand même l'expression « visualisation spatiale » lorsque nous voulons rapporter ce que les auteurs expriment.

à partir de photos de la vie réelle est une bonne initiative. Il est important que les élèves prennent conscience de la présence de la géométrie autour d'eux. Concernant le matériel didactique, l'auteur invite les enseignants à utiliser des logiciels de géométrie lorsque c'est possible. Dans le *Programme d'études Mathématique 116*, on tient pour acquis que l'élève a développé le volet « visualiser intérieurement ». Pourtant dans ce chapitre nous avons noté l'absence de situations qui font appel à ce volet. L'auteur de ce manuel n'a pas mis plus de situations qui font intervenir la visualisation en géométrie alors qu'il est question de figures géométriques.

Dans le chapitre *Transformation de figures* (Tableau 20, p. 278-279), en annonçant les objectifs, l'auteur réfère implicitement à la visualisation en géométrie dans ses deux volets. En effet, la création de figures en utilisant les transformations isométriques peut nécessiter l'utilisation d'images mentales dans un contexte où la manipulation et l'accès perceptif aux objets ou à leurs représentations graphiques fait défaut. De même qu'il est possible que cette création de figures fasse appel à des représentations externes. La construction d'image à laquelle recourt l'auteur vise les représentations externes puisque dans le *Programme d'études Mathématique 116,* on spécifie clairement que « construire » signifie tracer à l'aide de la règle, de l'équerre ou du rapporteur d'angles. Cependant, le nombre de situations où l'élève peut faire appel à la visualisation en géométrie est assez restreint à nos yeux. Il y en a que cinq. Malgré cela, l'auteur invite vivement les enseignants à encourager les élèves à effectuer mentalement les transformations géométriques. En effet, pour l'exercice de la page 242 (Tableau 20, p. 278) nous pouvons lire dans le guide d'enseignement le commentaire suivant : « l'élève devrait résoudre ces problèmes mentalement, c'est-à-dire en effectuant mentalement des transformations géométriques sur les figures données » (p. 279).

Pour le chapitre *Triangles et quadrilatères* (Tableau 21, p. 280-282), même si on réfère implicitement seulement au volet « visualiser extérieurement », nous pouvons constater la présence de situations qui appellent au volet « visualiser intérieurement ». Notons ici que ces situations sont au nombre de huit. L'auteur a pris la peine de rappeler aux enseignants que la visualisation spatiale se développe dans le temps. Dans le guide d'enseignement, pour l'exercice de la page 275 (Tableau 21, p. 280) nous pouvons lire : « la visualisation spatiale se développe à long terme et non pas à l'occasion d'un chapitre. C'est pour cette raison qu'on doit présenter de telles situations de temps à autre » (p. 282). Pour les exercices de la page 276 (Tableau 21, p. 282), nous lisons : « on doit aussi d'abord essayer de visualiser, d'imaginer, de construire par la pensée » (p. 282). Enfin, pour l'exercice de la page 278 (Tableau 21, p. 282), l'auteur écrit : « insister pour qu'on réponde d'abord à ces questions sans construction, de tête, grâce à son imagination. C'est une question qui vise le développement de la vision spatiale » (p. 282). Ces notes prouvent que le développement de la visualisation en géométrie est une préoccupation de l'auteur de cette collection. Même si dans le *Programme d'études mathématiques 116* aucun objectif ne vise son développement, l'auteur a pris la peine d'inclure des situations qui lui font appel et qui permettent aux élèves de continuer à la développer.

Il ressort aussi de certains commentaires du guide d'enseignement que la manipulation du matériel didactique qui aide au développement de la visualisation en géométrie est une préoccupation de l'auteur. À cet effet, il note : « prendre le temps de laisser les élèves effectuer ces activités de construction. L'utilisation de bâtonnets de plastique pour le café convient très bien » (Tableau 21, p. 282). Un peu plus loin pour l'exercice de la page 275 (Tableau 21, p. 282), il écrit : « pour les élèves qui ont vraiment des difficultés avec les relations spatiales, suggérer d'utiliser de la pâte à modeler ou tout autre matériel que l'on peut couper afin de concrétiser le cube » (p. 282). Soulignons pour finir que les notions abordées dans ces trois chapitres permettent le développement de la visualisation en géométrie et de la visualisation dans l'espace physique.

Collection *Croisières mathématiques*

Le manuel de première année contient trois chapitres de géométrie intitulés : *La translation*, *La rotation* et *La réflexion*.

L'examen du Tableau 30 (p. 304-305) du chapitre *La translation* montre une préoccupation timide de la visualisation en géométrie. En effet, il n'y a que cinq situations qui font appel à cette dernière. Trois de ces cinq visent le volet « visualiser intérieurement » puisqu'il s'agit d'imaginer une translation (exercices p.18 et p. 47, voir Tableau 30 p. 304). Les deux autres concernent le volet « visualiser extérieurement » (exercices p. 61, voir Tableau 30 p. 305). Pour l'exercice de la page 18, l'auteur écrit dans le guide d'enseignement : « cet exercice, présenté sous forme de jeu, vise à développer chez l'élève le sens de l'observation et fait appel à son habileté à visualiser une situation nouvelle à partir d'une donnée graphique » (p. 304). L'auteur tient pour acquis que l'élève a développé sa capacité à visualiser en géométrie et qu'il peut ou doit s'en servir. Ce qui est à développer par cet exercice est le sens de l'observation. L'auteur n'explique pas la différence qu'il voit entre ce qu'il appelle le « sens de l'observation » et l'« habileté à visualiser ».

Dans le chapitre *La rotation* (Tableau 31, p. 306-308), on réfère implicitement à la visualisation en géométrie. En effet, exercer les élèves à imaginer une rotation pour déplacer une figure ou la construire et estimer la position d'une figure obtenue par rotation touchent le volet « visualiser intérieurement » qui est plus difficile à développer. Par ailleurs, la lecture des commentaires du guide d'enseignement en rapport avec ces exercices dévoile que l'auteur se préoccupe plus de développer chez l'élève le sens de l'observation même lorsque le terme visualiser est employé. En fin de compte, c'est le volet « visualiser extérieurement » qui est visé même lorsque la situation fait appel aux images mentales. Par exemple, pour l'exercice de la page 89 (Tableau 31, p. 308) qui nécessite d'imaginer la rotation, nous pouvons lire le commentaire qui suit : « cette activité vise à développer chez l'élève son sens de l'observation de telle sorte qu'il pourra détecter facilement les particularités des différentes figures qu'on lui propose tout au long de l'étude de la géométrie » (p. 308). Soulignons que tout au long de ce chapitre, l'auteur fait un retour sur les notions de géométrie déjà vues. Les matériels didactiques utilisés (règle, compas et rapporteur) ne favorisent pas le développement de la visualisation en géométrie de façon particulière.

En ce qui a trait au chapitre *La réflexion* (Tableau 32, p. 309), si on semble se préoccuper de la visualisation en géométrie (Référence implicite à la visualisation dans ses deux volets), il n'y a qu'une seule situation qui la touche. Celle-ci vise explicitement le volet « visualiser intérieurement ». Il s'agit d'imaginer la médiatrice d'un segment.

Collection *Dimensions mathématiques*

Dans le manuel de première année, il y a trois chapitres en rapport avec la géométrie : *Les constructions géométriques*, *Les transformations géométriques* et *Figures et propriétés.*

L'examen du Tableau 36 (p. 314-316) du chapitre *Les constructions géométriques*, montre un intérêt envers le développement de la visualisation en géométrie. L'auteur indique que : « nous approfondirons nos connaissances sur les figures géométriques planes à travers la construction et la description des figures » (p. 314). Un peu plus loin au sujet de l'origami, nous pouvons lire : « comme cet art s'enseigne principalement à l'aide de figures et de peu de mots, il faut apprendre à « lire » les images » (p. 314). Notons que ces deux commentaires réfèrent au volet « visualiser extérieurement ». Dans ce chapitre, l'auteur a insisté sur la lecture d'un dessin en présentant quelques situations. De plus, il a invité les enseignants à quelques reprises à encourager les élèves à de telles activités.

Dans les commentaires du guide d'enseignement, nous pouvons lire : « il faut encourager les élèves à produire le maximum d'informations pour les habituer à lire un dessin en laissant aller leur esprit à la découverte » (p. 315). De pareils commentaires se retrouvent de temps à autre dans le guide d'enseignement. L'examen de la rangée qui concerne les contextes du même tableau montre une variété de situations qui touchent aux différentes représentations externes. De plus, soulignons la présence sensible dans ce chapitre de photos tirées de la vie réelle pour montrer la présence et l'utilité de la géométrie dans la nature. Il convient de signaler que les ressources présentent dans ce chapitre permettent de développer la visualisation dans ses deux volets.

Dans le chapitre *Les transformations géométriques* (Tableau 37, p. 317), il n'y a aucune référence explicite ni implicite à la visualisation dans ses deux volets. Cependant, il y a quelques situations qui visent son développement quoique de façon timide. L'accent est particulièrement mis sur le volet « visualiser extérieurement ». Ces situations touchent les différentes représentations externes dont parle Lesh (figure 4, p. 126). Cependant, l'auteur n'a fait aucun commentaire dans le guide d'enseignement en rapport avec ces situations.

Dans le chapitre *Figures et propriétés* (Tableau 38, p. 318), il n'y a encore une fois aucune référence explicite ni implicite à la visualisation en géométrie. Pourtant, quatre exercices de types différents la développent en particulier. Comme pour le chapitre précédent, l'auteur s'est contenté de donner les réponses aux exercices dans le guide d'enseignement sans aucun commentaire qui touche la visualisation en géométrie et dans l'espace physique.

Collection *Les maths et la vie*

Dans le manuel de la première année, au lieu de porter sur un sujet mathématique particulier comme c'est le cas traditionnellement, chacun des chapitres est construit autour d'un thème et on y traite en même temps de diverses notions mathématiques en rapport avec l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, la probabilité et la statistique. Les thèmes traités sont : *Mon école et les maths* ; *Les maths, ma famille, mes amis, mon chez moi* ; *L'Amérique du nord ... et les maths* ; *Le monde : ma planète, mes maths*. L'examen des Tableau 42, Tableau 43, Tableau 44 et Tableau 45 des pages 325, 326, 327 et 328 en lien respectivement avec chacun de ces thèmes montre l'absence totale d'une quelconque préoccupation du développement de la visualisation en géométrie et dans l'espace physique.

Collection *Scénarios*

Le manuel de première année secondaire est divisé en trois sections : *les scénarios*, *la méthodologie de travail* et *la boîte à outils*. Chaque scénario se termine par une section *Énigmes*. Dans la boîte à outils, il y a quatre thèmes qui sont : *Transformations* ; *Droites, angles et polygones* ; *Périmètre des polygones et aire d'un polygone* ; *Constructions*. Aussi, il y a deux guides d'enseignement : un pour la boîte à outils et un pour les scénarios.

Le chapitre *Transformations* (Tableau 67, p. 367-368) propose deux activités qui font appel en même temps aux représentations externes et aux images mentales et qui donnent l'occasion aux élèves de développer les deux volets de la visualisation en géométrie. Il est aussi important de souligner que, dans le guide d'enseignement de la boîte à outils, les auteurs ont pris la peine d'attirer l'attention des enseignants sur l'importance d'« habituer l'élève à voir la transformation plus globalement et à s'inspirer des définitions et des propriétés des transformations pour comprendre les constructions » (p. 368).

Dans le chapitre *Droites, angles et polygones* (Tableau 68, p. 369), l'accent semble mis sur le volet « visualiser extérieurement ». Dans les commentaires du guide d'enseignement de la boîte à outils, on peut lire : « il faut habituer l'élève à reconnaître un angle droit, quelle que soit son orientation » (p. 369). Un peu plus loin pour les polygones, ils écrivent : « habituer l'élève à voir les triangles, qu'ils soient rectangles, isocèles ou autres dans différentes positions » (p. 369). Pour le seul exercice qui touche la visualisation en géométrie, les auteurs valorisent le sens de l'observation.

L'examen du Tableau 69 de la page 370, en lien avec le thème *Périmètre des polygones et aire d'un polygone,* montre que le développement de la visualisation en géométrie n'est pas un objectif de ce thème. Cependant, dans le guide d'enseignement de la boîte à outils, les auteurs valorisent la manipulation du matériel didactique et le découpage. Donc le volet « visualiser extérieurement » est mis de l'avant.

Il faut remarquer que le thème *Constructions* (Tableau 70, p. 371) ne réfère d'aucune manière à la visualisation en géométrie. Les situations proposées développent le « sens géométrique » d'une manière générale et non spécifiquement la visualisation en géométrie.

Dans la section *La méthodologie de travail* du manuel de l'élève (p. 372), il faut signaler que les auteurs ont pris la peine de souligner le développement du sens de l'observation. Ils le qualifient de capacité importante et encouragent les élèves à le développer et à s'en servir. Cette capacité n'est autre que le volet « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Il est aussi à relever que la deuxième stratégie : représenter le problème par un dessin ou un schéma sur laquelle les auteurs insistent fait partie du processus de modélisation.

Dans les sections *Énigmes* (p. 372) du manuel de l'élève, nous avons relevé plusieurs situations qui visent le développement de la visualisation en géométrie dans ses deux volets. Cependant, dans le guide d'enseignement des scénarios, les auteurs se sont contentés de donner simplement le corrigé. Les auteurs offrent aux élèves l'occasion de développer leur visualisation en géométrie même si le *Programme d'études Mathématique 116* ne la vise pas en particulier.

MANUELS POUR LA DEUXIÈME ANNÉE DU SECONDAIRE

Nous entamons dans ce qui suit l'analyse des chapitres de géométrie de la deuxième année secondaire des collections *Carrousel mathématique*, *Croisières mathématiques*, *Dimensions mathématiques*, *Les maths et la vie*, *Scénarios* et *Univers mathématiques*.

Collection *Carrousel mathématique*

Le manuel de deuxième année aborde les chapitres : *Les homothéties, Les transformations du plan cartésien, Le cercle* et *Les polygones réguliers.*

Le chapitre *Les homothéties* (Tableau 22, p. 283) ne contient qu'une seule situation qui fait appel à la visualisation en géométrie. De plus, il n'y a aucun commentaire dans le guide d'enseignement qui invite les enseignants à la valoriser.

Dans le chapitre *Les transformations du plan cartésien* (Tableau 23, p. 284) les constructions d'images auxquelles on réfère touchent le volet « visualiser extérieurement ». Malgré le peu de situations qui font appel à la visualisation en géométrie, deux d'entre elles touchent le volet « visualiser intérieurement ». En particulier, l'exercice sur l'engrenage (Tableau 23, p. 284) demande un effort d'imagination. Dans le guide d'enseignement, l'auteur note pour cet exercice : « la meilleure façon de procéder est d'imaginer un « bras de rotation » c'est-à-dire un segment reliant un sommet de la figure initiale à l'origine et de tracer le segment image » (p. 284).

Malgré l'absence de référence explicite ou implicite à la visualisation en géométrie dans le chapitre *Le cercle* (Tableau 24, p. 285-286), l'auteur inclut quelques situations qui font appel à ses deux volets. Les énoncés tirés de la vie quotidienne ont pour but de montrer aux élèves la présence et l'utilité de la géométrie autour d'eux. Il est à noter que pour la question (e) de la page 103 (Tableau 24, p. 285), l'auteur insiste sur lien qui existe entre les représentations externes et les images mentales pour mieux conceptualiser. Il note à ce sujet : « il est important que chaque élève visualise une droite tangente et s'en fasse une représentation mentale pour ensuite mieux la conceptualiser » (Tableau 24, p. 286). Pour l'exercice de la page 107, n°14, il insiste sur le lien entre le dessin et le raisonnement géométrique. Il écrit : « le dessin peut être une façon visuelle de raisonner. En utilisant des images interactives, on établit une correspondance significative entre l'activité de dessiner et le raisonnement géométrique » (p. 286). L'auteur du manuel scolaire semble au courant des recherches didactiques et fait l'effort d'informer les enseignants.

Dans le chapitre *Les Polygones réguliers* (Tableau 25 p. 287), la visualisation en géométrie ne semble pas un sujet de préoccupation majeure. Il y a juste trois situations qui lui font appel et les commentaires dans le guide d'enseignement ne sont pas élaborés. Tout au long de ce chapitre, nous avons noté la présence de situations d'estimations qui n'ont aucun lien avec le thème du chapitre. Ce fait nous a poussée à vérifier si dans les autres chapitres du manuel on retrouve des situations qui visent le développement de la visualisation en géométrie. Nous n'avons rien trouvé. Pourtant l'auteur, de par les commentaires qu'il a fait dans les chapitres précédents sur la visualisation en géométrie, semblait voir son utilité et lui accorder de l'intérêt.

Collection *Croisières mathématiques*

Dans le manuel de deuxième année, il y a trois chapitres de géométrie qui ont pour titre : *Les figures isométriques ou homothétiques*, *Les polygones* et *Le cercle*.

Dans le chapitre *Les figures isométriques ou homothétiques* (Tableau 33, p. 310) il n'y a que deux situations qui ont pour objet la visualisation en géométrie et chacune touche un des deux volets en particulier. Les commentaires destinés aux enseignants du guide d'enseignement n'apportent pas d'éclaircissement particulier.

Le chapitre *Les polygones* (Tableau 34, p. 311) ne se préoccupe pas de la visualisation en géométrie. Les références implicites que nous avons relevées, même si elles font partie des représentations externes, ne permettent pas de la développer en particulier. Ce chapitre porte plus sur le calcul de l'aire et du périmètre des polygones.

Le chapitre *Le cercle* (Tableau 35, p. 312-313) ne montre pas non plus une préoccupation majeure du développement de la visualisation en géométrie. Toutefois, le peu de situations qui existe aide au développement du volet « visualiser intérieurement ». Dans les commentaires du guide d'enseignement, l'auteur invite les enseignants à inciter les élèves à imaginer la situation en fermant les yeux. Il écrit : « demander aux élèves de fermer les yeux et d'imaginer un polygone ayant un très grand nombre de côtés » (p. 313).

Collection *Dimensions mathématiques*

Le manuel de deuxième année compte les trois chapitres suivants : *Les transformations isométriques et les similitudes*, *Les transformations dans le plan cartésien* et *Les polygones et le cercle*.

Dans le chapitre *Les transformations isométriques et les similitudes* (Tableau 39, p. 319-320), il y a une variété de situations pour développer la visualisation en géométrie malgré leur nombre modéré. Dans la rangée *Référence implicite à la visualisation dans ses deux volets* (Tableau 39, p. 319), les deux points que nous avons notés même s'ils font partie des représentations externes, développent de façon générale le « sens géométrique » plus que la visualisation en géométrie. Malgré l'absence de référence explicite à la visualisation, l'auteur a inclus différentes situations pouvant stimuler son développement. Par contre, il n'y a pas de commentaire significatif pour la valoriser dans le guide d'enseignement.

Dans le chapitre *Les transformations dans le plan cartésien* (Tableau 40, p. 321-322), il y a quelques situations qui visent le développement de la visualisation en géométrie et qui font appel à ses deux volets. Dans le guide d'enseignement, il n'y a aucun commentaire qui incite les enseignants à la valoriser ou à lui accorder du temps.

Dans le chapitre *Les polygones et le cercle* (Tableau 41, p. 323-324), on réfère implicitement aux deux volets de la visualisation en géométrie. Même si elles sont très peu nombreuses, les situations proposées sont en lien avec les intentions visées. Ainsi, la décomposition mentale des figures encourage à « visualiser intérieurement » comme le fait d'ailleurs remarquer l'auteur : « les activités proposées invitent l'élève à l'observation de figures plus complexes et l'amènent à réfléchir sur la manière de les décomposer en figures plus simples. L'élève peut observer, faire des hypothèses, s'aider de schémas, déplacer mentalement des portions de figures, s'aider de modèles créés sur papier ou découpés dans une feuille de carton et ensuite vérifier l'efficacité de ces stratégies » (p. 324). Le fait de proposer différentes manières de décomposer les figures montre la difficulté de la question à traiter et fournit aux enseignants des moyens didactiques pour leur venir en aide. Remarquons que ces activités font encouragent également à « visualiser extérieurement » puisque l'élève est invité à observer et à manipuler du matériel.

Collection *Les maths et la vie*

Dans le manuel de deuxième année, au lieu de porter sur un sujet mathématique particulier comme c'est le cas traditionnellement, chacun des chapitres est construit autour d'un thème et on y traite en même temps de diverses notions mathématiques en rapport avec l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, la probabilité et la statistique. Les thèmes traités sont : *Ma vie, l'école ... et les maths* ; *Mes loisirs, mon travail et les maths* ; *Les trois Amériques et les maths* et *Le monde ... et les maths.*

Le premier thème (Tableau 46, p. 329) ne traite d'aucune façon la visualisation en géométrie.

Au deuxième thème (Tableau 47, p. 330), l'auteur annonce au début du guide d'enseignement que : « l'élève va travailler son sens de l'observation et sa capacité à repérer des figures ou des objets sur une surface » (p. 330). Nous n'avons pas trouvé de situations qui touchent vraiment cette déclaration et qui développent en même temps la visualisation en géométrie.

Le troisième thème (Tableau 48, p. 331-332) n'a pas plus de situations portant sur la visualisation en géométrie que les deux précédents. L'exercice de la page 309 (Tableau 48, p. 331), amène l'élève à se concentrer sur la couleur et à lui faire oublier qu'il s'agit d'un octogone. L'élève doit voir le chapeau octogonal dans l'espace pour répondre aux questions posées. Encore une fois, le message écrit au début du guide d'enseignement : « les activités proposées feront découvrir à l'élève des méthodes de construction pour le cercle et pour les polygones réguliers » (p. 332) ne trouve pas d'écho dans le manuel de l'élève pour développer sa visualisation en géométrie.

L'examen du Tableau 49 de la page 333 en rapport avec le quatrième thème montre la présence d'une seule situation qui touche le développement de la visualisation en géométrie. Dans le guide d'enseignement, aucun commentaire n'a été fait à ce sujet.

Collection *Scénarios*

Le manuel de deuxième année secondaire est divisé en trois sections : *les scénarios*, *la méthodologie de travail* et *la boîte à outils*. Chaque scénario se termine par une section *Énigmes*. Dans la boîte à outils, il y a quatre thèmes qui sont : *Les figures semblables et l'homothétie*, *Les transformations géométriques dans le plan cartésiens*, *Les polygones* et *Le cercle*.

Le thème *Les figures semblables et de l'homothétie* (Tableau 71, p. 376) n'offre pas une variété de situations pour développer la visualisation en géométrie. Les exercices où il s'agit de reconnaître des figures semblables, même s'ils font intervenir les représentations externes, développent généralement le « sens géométrique » plus que la visualisation en géométrie. Par contre, la construction d'une harpe est un bon moyen de travailler les deux volets de la visualisation en géométrie.

Le thème *Les transformations géométriques dans le plan* (Tableau 72, p. 377) ne contient pas plus de situations pour développer la visualisation en géométrie que le précédent. La situation de simulation du vol d'avion (Tableau 72, p. 377) ne semble pas destinée à la majorité des élèves. En effet, dans le commentaire du guide d'enseignement des scénarios, on peut lire : « comme la capacité de visualiser les mouvements de l'avion n'est pas la même pour tous les élèves, certains ont plus de mal à visualiser les mouvements que Pascal et Delphine ont voulu simuler à l'écran » (p. 377). Les auteurs ont aussi mis l'accent sur le fait de visualiser l'angle de rotation. Ils insistent ici sur les représentations externes.

Le thème *Les polygones* (Tableau 73, p. 378) n'a pas non plus pour objectif de développer la visualisation en géométrie. Nous n'avons relevé qu'une seule situation, celle du robot domestique. Par contre, les auteurs invitent les enseignants à simuler la situation en classe. Cette pratique, qui n'est pas très répandue, est à notre avis un bon moyen pour faciliter la compréhension et stimuler le développement de la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique.

Le thème *Le cercle* (Tableau 74, p. 379) donne l'occasion aux élèves de travailler le volet « visualiser extérieurement ». En effet, il y a place à la manipulation de matériel didactique pour apprendre à construire un cercle autrement qu'avec un compas. Aussi, le développement d'une canette est une bonne opportunité pour améliorer la visualisation en géométrie. Encore une fois, les auteurs incitent les enseignants à simuler la distance parcourue par la bicyclette (Tableau 74, p. 379) en classe pour venir en aide aux élèves en difficulté.

L'examen de la section *Énigmes* du manuel de l'élève (p. 380) montre la présence d'un nombre moins important de situations qui visent le développement de la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique qu'en première année. Cependant, ces situations sont assez variées et font appel aux deux volets de la visualisation en géométrie. Remarquons que dans le guide d'enseignement des scénarios on ne trouve que les réponses aux questions sans aucun commentaire. Aussi, rappelons que le *Programme d'études Mathématique 216* ne se préoccupe pas en particulier de la visualisation en géométrie. Malgré ce constat, les auteurs se sont souciés de ce thème et ont pris l'initiative d'inclure des situations pour le développer.

Collection *Univers mathématiques*

Dans le manuel de deuxième année, on trouve les chapitres : *Géométrie des transformations* et *Géométrie du polygone et du cercle*.

Il ne semble pas y avoir une place au développement de la visualisation en géométrie dans le chapitre *Géométrie des transformations* (Tableau 82, p. 398). Les commentaires du guide d'enseignement, même s'ils touchent les représentations externes, visent à développer de façon générale le « sens géométrique ».

L'étude du Tableau 83 de la page 399 concernant le chapitre *Géométrie du polygone et du cercle* ne présente pas plus d'intérêt au développement de la visualisation en géométrie. Nous avons noté juste une situation qui invite les élèves à utiliser leur capacité à visualiser dans le but de calculer l'aire. Le commentaire du guide d'enseignement n'insiste pas non plus sur le développement de la visualisation en géométrie.

MANUELS POUR LA TROISIÈME ANNÉE DU SECONDAIRE

Nous passons maintenant à l'analyse des chapitres de géométrie de la troisième année secondaire contenus dans les collections *Carrousel mathématiques*, *Les maths et la vie*, *Scénarios* et *Univers mathématiques*.

Collection *Carrousel mathématique*

Le manuel de troisième est divisé en deux tomes. Le premier comprend les chapitres : *Le sens spatial* et *La relation de Pythagore*. Le deuxième tome inclut les chapitres : *Aire et volume des solides* et *La composition de transformations*.

L'examen du chapitre *Le sens spatial* (Tableau 26, p. 288-295) révèle l'existence de référence explicite à la visualisation en géométrie. L'expression : « visualisation de solides » est clairement énoncée au début du chapitre. Afin d'amener plus d'explication, l'auteur écrit : « de plus, vous apprendrez à générer, à analyser, à voir mentalement, à classer et à transformer des solides » (p. 288). Un peu plus loin, il ajoute : « le sens spatial se manifeste par la capacité à se fabriquer des images mentales, à voir des objets dans notre tête sans les voir avec nos yeux » (p. 288). Les manifestations que l'auteur cite pour expliquer le « sens spatial » n'en représentent en fait qu'une partie qui n'est rien d'autre que le volet « visualiser intérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Le « sens spatial » n'est pas restreint à ces seules manifestations. Il englobe entre autres le sens de l'orientation, le sens de l'observation, la capacité à mémoriser visuellement des objets, la capacité à voir un objet sous deux angles différents, la capacité à décrire les transformations qu'a subi un objet, la capacité à se repérer en se fiant à la position relative des objets et à leurs dimensions, etc. L'auteur reconnaît le rôle de l'enseignement pour développer la visualisation en géométrie. Il annonce : « chose certaine, les habiletés spatiales s'apprennent et s'enseignent » (p. 291). Cet apprentissage qui nécessite du temps pour se réaliser, est aussi souligné par l'auteur : « d'ailleurs, un sujet comme le sens spatial ne peut se développer qu'à long terme. Il faut s'en préoccuper tout au long de l'année dans les divers autres sujets au programme » (p. 291). Nous nous arrêtons ici sur la dernière phrase. Par « les divers autres sujets au programme », nous comprenons entre autres les autres chapitres de mathématiques, chose qui nous semble aller de soi. Tout au long du thème « le sens spatial », des exercices d'estimation qui n'ont aucun lien avec le sujet abordé se retrouvent un peu partout. Cette constatation nous a poussée à aller voir si des exercices de visualisation en géométrie figuraient dans les chapitres autres que ceux de la géométrie. Il n'y avait aucun exercice à cet effet. Cependant, à la fin du chapitre qui nous concerne, existe une série d'exercices que l'auteur a appelé « Visualisation plus » et pour laquelle il explique dans le guide d'enseignement : « ce sujet peut être considéré comme facultatif. Cependant, il contient des activités de nature amusante très efficaces pour le développement du sens spatial. On pourrait les donner à faire individuellement au cours des autres itinéraires dans le simple but de s'amuser ou comme objet de curiosité. On pourrait considérer ces activités comme ajout pour un programme 316 ». Il nous paraît que si ces activités se retrouvaient çà et là dans les autres chapitres, cela inciterait davantage les enseignants à y revenir. La présentation proposée ne garantit en rien ce retour surtout si le sujet lui même est considéré comme difficile par les enseignants. La nécessité de recourir à la manipulation du matériel didactique trouve l'appui de l'auteur. Il déclare : « il n'y a pas de prétexte pour les [activités de manipulation et de construction] éviter ou les ignorer ». De plus, l'interdépendance entre les représentations externes et les images mentales dont nous avons déjà parlé au chapitre 4, est aussi soutenue par l'auteur : « il est important d'utiliser les objets physiques pour amorcer le développement de la compréhension. Ceci permet d'atteindre ensuite le niveau de la représentation qui relève davantage de l' « imagerie mentale » et qui fait appel à des habiletés de la pensée d'ordre supérieur ». Le retour au Tableau 26 (p. 288-295) permet de constater que la référence implicite à la visualisation en géométrie se traduit par la description, la construction, la représentation de solides et l'étude de leurs sections. Ces différents types d'activités se retrouvent en nombre fort appréciable. L'examen des situations relevées dans ce même tableau montre leur variété. Par exemple, on demande de décrire par des mots ou par des croquis différents objets, de représenter des objets en perspective cavalière, axonométrique et linéaire, de construire des solides avec du matériel diversifié, de reconnaître le nombre minimum et maximum de cubes que comptent des solides, de bâtir à l'aide de petits cubes un objet dont on connaît l'ombre, de reconnaître et de dessiner différentes vues de solides, d'identifier des sections, etc. Notons que ces activités font intervenir les deux volets de la visualisation en géométrie. De plus, dans les commentaires du guide d'enseignement, l'auteur rappelle aux enseignants la difficulté liée aux images mentales et la nécessité de manipuler des matériels pour les développer. Ceci dit, il souligne aussi aux enseignants d'encourager les élèves à imaginer différentes situations. En conclusion, conformément au *Programme d'études Mathématique 314*, ce chapitre répond aux exigences demandées. L'accent a été mis sur les représentations externes exigées ainsi que le développement des images mentales.

Le chapitre *La relation de Pythagore* (Tableau 27 p. 296-299) offre aussi des situations qui ont pour objet de poursuivre le développement de la visualisation en géométrie dans ses deux volets. Pour chaque exercice, l'auteur indique dans le guide d'enseignement qu'il s'agit de continuer le développement du « sens spatial » amorcé au chapitre précédent. Pourtant, il n'y a pas de références ni explicites ni implicites à cette initiative, même si l'auteur reconnaît la nécessité d'accorder du temps pour développer la visualisation spatiale.

L'examen du Tableau 28 (p. 300-302) se rapportant au chapitre *Aire et volume des solides* montre aussi le souci de poursuivre le développement de la visualisation en géométrie dans ses deux volets. Ce thème se prête bien à cet objectif puisqu'il fait appel assez souvent aux développements des solides et à la manipulation des petits cubes. Remarquons que les situations retenues par l'auteur nécessitent le recours aux représentations externes comme aux images mentales.

L'analyse du chapitre *La composition des transformations* (Tableau 29 p. 303) n'a pas permis de trouver une quelconque référence à la visualisation en géométrie ni de situations qui permettent son développement. Remarquons que l'auteur appelle, dans le guide d'enseignement, à ce que les élèves puissent imaginer les isométries. Un des commentaires se lit comme suit : « si les axes de la symétrie glissée et de la réflexion étaient parallèles, on imagine facilement qu'on aurait alors une translation » (p. 303). Cette affirmation nous étonne car il n'est certainement pas si facile pour les élèves d'imaginer qu'on obtient ici une translation !

Collection *Les maths et la vie*

Dans le manuel de troisième année, au lieu de porter sur un sujet mathématique particulier comme c'est le cas traditionnellement, chacun des chapitres est construit autour d'un thème et on y traite en même temps de diverses notions mathématiques en rapport avec l'arithmétique, la géométrie, l'algèbre, la probabilité et la statistique. Les thèmes traités sont : *La vie à l'école ... et les maths*, *Étude, sports, loisirs ... et les maths*, *Demain, ailleurs, plus loin encore ... et les maths*, *L'hier, le naguère ... et les maths*.

L'examen du Tableau 50 (p. 334-337) en rapport avec le premier thème indique l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation en géométrie. Malgré cela, son développement est visé par différentes situations. Cependant, tous les exercices tournent autour des formes géométriques déjà étudiées au primaire. D'ailleurs, dans le guide d'enseignement l'auteur indique qu' : « au primaire, il a manipulé, fabriqué et observé les solides. C'est donc un retour sur ces formes géométriques. Il les étudiera plus en profondeur en les développant et en les bâtissant » (p. 335). Il est vrai que l'étude plus poussée des solides est importante et contribue à développer la visualisation en géométrie, mais le développement de cette dernière ne se restreint pas à l'étude des solides. D'ailleurs, dans le *Programme d'études Mathématique 314*, on parle d'objets à trois dimensions et non de solides. Il nous semble que la nuance entre objets à trois dimensions et solides est fort importante. Lorsqu'on parle d'objets à trois dimensions, il s'agit de tout objet matériel dans l'espace y compris les solides ; cette subtilité a l'air d'avoir échappé à l'auteur. Une forte adhérence à ce qui est indiqué au *Programme d'études Mathématique 314* se fait sentir à nouveau dans le commentaire suivant : « le contenu de ces pages ne vise pas à former des dessinateurs mais à montrer certaines techniques permettant de représenter sur papier certaines figures géométriques de l'espace. Il existe d'autres techniques, comme le dessin en perspective à partir d'un point de fuite. … La technique avec papier à points est celle que suggère le M.É.Q » (p. 337). En lisant ces lignes, nous avons l'impression que si l'auteur n'a pas privilégié une autre technique que celle du papier à points, la responsabilité revient aux concepteurs de programme. Or, nous pouvons lire dans le *Programme d'études Mathématique 314* la phrase suivante : « pour aider l'élève à faire de meilleurs représentations d'objets à trois dimensions, on l'initiera à différentes techniques de bases simples comme la perspective cavalière et à l'utilisation du papier pointé en diagonale » (Tableau 14 p. 271). Nous comprenons de cette phrase que l'utilisation du papier pointé en diagonale n'est qu'une proposition et qu'il est possible et même souhaitable de présenter autre chose aux élèves. Nous n'avons trouvé qu'une seule représentation en projection oblique et isométrique.

L'étude du deuxième thème (Tableau 51, p. 338) montre une préoccupation au développement de la visualisation en géométrie. Le nombre de situations est beaucoup moins important qu'au thème précédent, cependant elles touchent les deux volets de la visualisation en géométrie sans être très variées. Dans le guide d'enseignement, nous pouvons lire : « avec cette rubrique, nous amenons l'élève vers la notion de section d'un solide. L'élève a appris à observer un solide sous tous ses angles au premier numéro. Il pourra alors associer les bons morceaux aux bons polyèdres » (p. 338). Pourtant, cette notion en est une des plus délicate.

L'examen du Tableau 52 de la page 339 témoigne d'un fait quelque peu troublant touchant la notion de section. Rappelons qu'au deuxième thème, la notion de section de solides faisait objet d'étude et qu'il n'y avait que deux exercices qui la concernaient. Au troisième thème, on trouve neuf exercices à propos de la section d'un cube alors que cette notion n'est pas l'objet d'étude de ce thème. Si cette notion ne causait pas de problèmes au thème précédent, pourquoi proposer autant d'exercices pour un cube ? Pourquoi ne pas déplacer ces exercices dans le thème 2 ? La variété des situations proposées dans ce thème n'est pas significative et ne touche que les figures géométriques. Dans le guide d'enseignement, le seul commentaire se lit comme suit : « comme l'élève a beaucoup développé son sens spatial, il a plus de facilité à percevoir une figure plane dans l'espace. Ainsi il peut percevoir un triangle rectangle dans un cône, une pyramide, un cube, un prisme droit » (p.

339). Comment l'auteur peut-il affirmer que suite à deux thèmes, l'élève a beaucoup développé son « sens spatial » ?

Le quatrième thème (Tableau 53, p. 340-341) vise principalement le développement du volet « visualiser extérieurement ». La majorité des situations proposées touchent l'étude de différentes projections. Le volet « visualiser intérieurement » est aussi visé dans ce thème, toutefois le nombre des situations est très restreint. Comment peut-on assurer son développement ? Dans le guide d'enseignement, l'auteur affirme que : « l'élève connaît déjà la projection orthogonale et la projection isométrique » (p. 341). Par rapport à ces deux projections, un seul exemple a été proposé aux élèves au premier thème. Est-ce suffisant pour avancer une telle assertion ? Il nous semble que la connaissance d'une notion implique le fait de pouvoir s'en servir assez facilement.

Collection *Scénarios*

Le manuel de troisième année ne propose plus les sections la boîte à outils et méthodologie de travail. De plus, il y a deux tomes.

L'examen du Tableau 75 (p. 382-385) révèle l'existence de références implicites aux représentations externes liées à la visualisation en géométrie. Les situations qui ont pour objectif de développer cette dernière, ne sont pas en nombre élevé. Cependant, les objets choisis par les auteurs poussent à faire l'effort d'imaginer ce qui n'est pas vraiment visible. Depuis la première année secondaire, cette collection offre des situations variées qui visent le développement de la visualisation en géométrie et dans l'espace physique malgré que le curriculum n'en parle qu'en troisième année. Il est aussi intéressant de souligner certains commentaires du guide d'enseignement. Les auteurs reconnaissent le rôle de la manipulation pour développer la visualisation en géométrie. En effet, ils écrivent : « il ne faut pas oublier que la perception de l'espace est une habileté qui se développe et que les ateliers de manipulation visent précisément cet objectif » (p. 383). Plus encore, ils admettent que la perception de l'espace est une capacité qui se développe. D'ailleurs, les auteurs ont pris soin d'inclure tout au long de cette collection des situations qui visent le développement de la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique. Ces auteurs tiennent pour acquis que cette dernière se développe à long terme et ont fait en sorte d'étaler cet apprentissage sur plusieurs années. Remarquons qu'ils emploient l'expression « perception spatiale » pour parler de « visualisation spatiale ». De même, ils mentionnent plusieurs suggestions d'aide que les enseignants peuvent apporter aux élèves. Ils proposent par exemple : « l'élève peut avoir du mal à représenter les projections orthogonales de l'objet. Pour l'aider à y parvenir, invitez-le à faire le tour de l'objet qu'il a bâti et à l'observer sous différentes vues. Il est donc très important que l'élève manipule des objets et assemble des cubes » (p. 383). Un peu plus loin dans le guide d'enseignement, les auteurs soulignent le fait que les élèves ne développent pas leur visualisation en géométrie au même rythme. Il est intéressant de s'arrêter sur cette remarque. Contrairement aux autres collections, où suite à un seul chapitre les auteurs considèrent que la visualisation en géométrie est acquise par les élèves, ceux de cette collection reconnaissent qu'ils ne la développent pas nécessairement à la même vitesse. Même si la majorité des situations proposées ne visent pas le volet « visualiser intérieurement », dans les commentaires les auteurs encouragent son développement. Par exemple, pour des représentations planes d'objets tridimensionnels nous pouvons lire : « demandez aux élèves de se donner une image mentale de l'objet avant de le représenter sur le papier pointé en diagonale » (p. 384).

L'étude du Tableau 76 (p. 386-388) révèle aussi une préoccupation du développement de la visualisation en géométrie. Notons que dans la rangée *Référence implicite à la visualisation dans ses deux volets* du tableau, les auteurs parlent de solides et d'objets à trois dimensions. Ces derniers sont généralement des objets divers composés de cubes juxtaposés. Leur intérêt est de permettre aux élèves de travailler avec autre chose que les solides usuels auxquels ils sont habitués et leur donner plus de défi lorsqu'il s'agit de les imaginer dans leurs têtes. Les situations proposées démontrent une bonne variété. Dans les commentaires du guide d'enseignement, les auteurs continuent de donner des indications aux enseignants pour aider les élèves en difficulté. Ils insistent une fois de plus sur le bienfait de la manipulation pour développer la visualisation en géométrie. La création d'images mentales trouve aussi sa place même si les exercices ne semblent pas la viser en particulier.

Collection *Univers mathématiques*

La collection *Univers mathématique* propose un seul chapitre où il est question de développer la visualisation en géométrie. Dans le Tableau 84 (p. 400-402) on trouve des références implicites à cette dernière et on constate que l'accent est mis exclusivement sur l'étude des solides. De plus, les points abordés concernent les différentes représentations externes dont parle Lesh. Il est à signaler que les situations où il est question de dessiner sont en nombre important. Ceci donne l'occasion aux élèves de se pratiquer. Aussi, l'examen de l'ensemble des situations proposées montre une variété non négligeable. Même le développement des images mentales trouve sa place. Les situations qui leur sont associées sont variées et en nombre appréciable. La présence de papier cartonné et de cubes comme matériels didactiques laisse une place à la manipulation. Celle-ci est fort importante pour développer la visualisation en géométrie. Dans le guide d'enseignement, il y a peu de commentaires visant à la valoriser ou à aider les enseignants à intervenir auprès d'élèves qui éprouvent des difficultés. L'un des commentaires se lit comme suit : « en troisième secondaire, l'enseignement de la géométrie poursuit le développement d'une perception spatiale du monde réel » (p. 402). Les auteurs emploient le terme « poursuivre » alors que leur collection n'offre presque rien à ce sujet pour la deuxième année du secondaire !

MANUELS POUR LA QUATRIÈME ANNÉE DU SECONDAIRE

Nous continuons dans ce qui suit l'analyse des chapitres de géométrie de quatrième année qui se trouvent dans les collections *Mathophilie*, *Réflexions mathématiques*, *Regards mathématiques* et *Scénarios*. Nous commençons par regarder les chapitres qui sont concernés par le *Programme d'études Mathématique 416* puis nous enchaînerons avec le *Programme d'études Mathématique 436*.

Collection *Mathophilie*

Le manuel de quatrième année aborde deux chapitres : *La congruence* et *La similitude*.

Dans le chapitre *La congruence* (Tableau 54, p. 342-343), on trouve des activités où il s'agit de reconnaître des solides isométriques ou semblables ou encore d'identifier une transformation qui associe une figure à son image, mais non des activités favorisant spécifiquement le développement de la visualisation en géométrie. Dans le guide d'enseignement, on ne trouve aucun commentaire sur la visualisation même lorsque le solide est un empilement de cubes. En quatrième année, on ne fait donc rien de particulier à propos de la visualisation même si on n'avait mis l'accent sur ce thème dans le manuel de troisième année.

Dans le chapitre *La similitude* (Tableau 55, p. 344), il n'y a absolument aucune activité reliée à la visualisation en géométrie.

Collection *Regards mathématiques*

Le manuel de quatrième contient deux chapitres : *Les figures isométriques* et *Les figures semblables*.

Dans le chapitre *Les figures isométriques* (Tableau 64, p. 360-361), il y a une place pour développer de la visualisation en géométrie. Même si la référence implicite à cette dernière concerne le volet « visualiser extérieurement », les situations que nous avons relevées poussent les élèves à user de leurs images mentales. D'ailleurs l'auteur l'a souligné dans les commentaires du guide d'enseignement. Par exemple, pour la réalisation d'un casse-tête, il écrit : « l'élève imagine différents mouvements en série » (p. 361). Il faut aussi souligner que l'auteur insiste sur l'avantage à tirer de l'utilisation du matériel concret pour l'appropriation des concepts. À cet effet, il propose dans ce chapitre l'utilisation de carte routière et d'image satellite.

Dans le chapitre *Les figures semblables* (Tableau 65, p. 362-363), la visualisation en géométrie trouve sa place. En effet, dans le guide d'enseignement l'auteur écrit : « il faut entrer dans ce sujet (solides semblables) en ayant en tête de faire vivre aux élèves des activités qui leur feront connaître l'espace à trois dimensions, également avec un souci de développer leur sens spatial » (p. 363). Bien que le nombre de situations qui font appel au développement de la visualisation en géométrie ne soit pas très élevé, l'auteur l'a mis en valeur pour chacun des cas dans les commentaires du guide d'enseignement (Tableau 65). Remarquons que dans ces commentaires, l'auteur parle du développement du « sens spatial ». Il n'est pas étonnant de voir cette expression puisqu'elle est utilisée dans le *Programme d'études Mathématique 314*. Cependant, lorsque nous avons examiné le manuel scolaire, il était clair qu'il s'agissait de la visualisation en géométrie. L'auteur a rappelé dans les commentaires que : « le sens spatial est quelque chose qui se développe » (p. 363). On comprend derrière cette phrase que le développement du « sens spatial » nécessite du temps et qu'une année scolaire n'est probablement pas suffisante pour atteindre ce but. Nous pensons d'ailleurs que c'est ce qui a poussé cet auteur à mettre l'accent sur cette capacité en quatrième année.

Collection *Scénarios*

Le manuel de quatrième année comprend deux tomes.

L'étude du Tableau 77 (p. 389-391) en rapport avec le premier tome montre la préoccupation des auteurs de continuer à développer la visualisation en géométrie des élèves qu'ils ont commencé en troisième année. Cette intention est explicitement annoncée dans le guide d'enseignement pour l'exercice de la page 167 : « ce numéro est lié au sens spatial que les élèves ont commencé à développer en troisième secondaire. Comme ils verront certaines propriétés des solides dans la section G2, il nous apparaît utile d'exercer cette habileté » (p. 390). On remarque également que dans d'autres commentaires, les auteurs parlent de « perception spatiale ». Ceci prouve encore une fois l'ambiguïté autour de cette notion. Ce souci de continuer à développer la visualisation en géométrie se traduit par plusieurs situations qui sont assez variées. De plus, celles-ci abordent les deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement ». Enfin, signalons que les auteurs encouragent, quand l'occasion le permet, l'utilisation de matériel didactique pour aider à la compréhension.

L'examen du Tableau 78 (p. 392) concernant le deuxième tome témoigne d'un fait particulier. D'abord, il n'y a qu'une seule situation qui fait appel au développement du cube. Ensuite, le commentaire qui lui est rattaché : « encourager les élèves à travailler avec le développement du cube pour répondre à la question a). Ils pourront ainsi réinvestir leurs connaissances en perception spatiale (notion de troisième secondaire) » (p. 392), donne l'impression qu'au beau milieu de l'année scolaire la « perception spatiale » est une notion acquise et qu'il faut savoir s'en servir, au lieu de continuer sur la même lancée et de donner plus d'occasions aux élèves pour développer leur visualisation en géométrie.

Regardons à présent les chapitres de géométrie qui concernent le *Programme d'études 436.*

Collection *Mathophilie*

Le manuel de quatrième année inclut deux chapitres en géométrie : *La congruence* et *La similitude*.

Dans le chapitre *La congruence* (Tableau 56 p. 345-346), on a pris la peine de référer implicitement aux deux volets de la visualisation en géométrie. Cependant, il n'y a que deux situations qui la touchent alors que dans le *Programme d'études Mathématique 436*, il est question de continuer à la développer. Aucun commentaire dans le guide d'enseignement ne la concerne.

Dans le chapitre *La similitude* (Tableau 57, p. 347) il n'existe aucune référence explicite ou implicite et aucune situation qui fait appel à la visualisation en géométrie. Qu'est-ce qui peut expliquer cette omission ? Est-ce dû à une interprétation particulière du *Programme d'études Mathématique 436* ? À son incompréhension ? Ou à des recommandations ambigües ?

Collection *Réflexions mathématiques*

Le manuel de quatrième année aborde les chapitres : *Les isométries* et *Les figures semblables*. Remarquons que le second est identique à un chapitre de la collection *Regards mathématiques* dont nous avons parlé précédemment ; de ce fait, nous ne l'analyserons pas une deuxième fois.

Dans le chapitre *Les isométries* (Tableau 61, p. 354-356), il y a place au développement de la visualisation en géométrie. Bien qu'on y réfère implicitement au volet « visualiser extérieurement », il est facile de remarquer que le volet « visualiser intérieurement » a aussi sa place. L'examen des situations concrètes utilisées montre une variété appréciable. L'auteur invite les enseignants à prendre en considération les apprentissages acquis en troisième année par rapport au « sens spatial ». Cette recommandation est particulièrement utile lors de l'étude des solides isométriques. Par contre, il ressort de ces recommandations que le « sens spatial » est considéré comme acquis et que l'élève est sensé s'en servir pour l'étude des solides isométriques. En effet, on peut lire : « l'étude des solides dans l'espace a été faite en troisième secondaire. Avant de procéder au calcul de l'aire et du volume des solides, on a développé le sens spatial. Le développement du sens spatial favorise une meilleure perception des solides et en facilite la représentation. À partir de représentations en perspective, l'élève a établi des relations entre certains éléments d'un solide » (p. 355). Rappelons que dans le *Programme d'études Mathématique 436* le développement du « sens spatial » est considéré comme acquis. Il n'est donc pas surprenant qu'il soit pris comme tel par les auteurs de manuels scolaires. L'étude des transformations dans l'espace est certainement profitable aux élèves et offre une belle occasion pour développer la visualisation en géométrie. Cependant, lorsqu'elles sont étudiées, l'accent est mis sur le raisonnement. Y aurait-il eu possibilité de considérer le développement de la visualisation en géométrie en même temps que le raisonnement formel ?

Collection *Scénarios*

Le manuel de quatrième année en lien avec le *Programme d'études Mathématique 436* est composé de deux tomes. À chaque tome correspond un tableau dans l'annexe A.

L'examen du Tableau 79 de la page 393 se rapportant au premier tome révèle l'absence de situations qui font appel à la visualisation en géométrie bien qu'on y réfère implicitement.

L'étude du Tableau 80 (p. 394-395) correspondant au deuxième tome laisse voir une préoccupation de la visualisation en géométrie. En effet, les auteurs représentent les solides par des empilements de cubes ce qui rejoint l'esprit de ce qui a été fait en troisième secondaire. De plus, ils reconnaissent la difficulté liée à la représentation sur papier pointé et recommandent l'utilisation de d'autres représentations spatiales pour aider les élèves à voir dans l'espace. Pour l'exercice de la page 394, on peut lire : « même s'il est difficile pour les élèves de voir en trois dimensions sur papier pointé, il faut absolument leur montrer, par d'autres représentations spatiales, que l'effet trois dimensions entre en ligne de compte lorsque deux solides sont associés par une transformation géométrique » (p. 394). En dépit de la difficulté associée à la représentation sur papier pointé, les auteurs se sont servis de ce moyen dans d'autres situations. Les auteurs reconnaissent que certains élèves peuvent encore avoir de la difficulté avec la visualisation spatiale malgré l'accent qui a été mis sur ce thème en troisième secondaire. Dans un pareil cas, ils conseillent le recours aux assemblages de cubes.

MANUELS POUR LA CINQUIÈME ANNÉE DU SECONDAIRE

Nous entamons à présent l'analyse des chapitres de géométrie de la cinquième année secondaire. Rappelons qu'en cette dernière année du secondaire, il existe le *Programme d'études Mathématique 514* et le *Programme d'études Mathématique 536.* Nous commençons par regarder le premier texte dans les collections *Mathophilie*, *Regards mathématiques* et *Scénarios*.

Collection *Mathophilie*

La section *Graphes* (Tableau 58, p. 348-349) représente une bonne occasion pour exercer la visualisation en géométrie. Bien que l'examen du tableau correspondant montre l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation, celle-ci est mise à contribution dans certaines situations. D'ailleurs, dans le guide d'enseignement, certains commentaires concernent ces deux volets. Par exemple, pour l'exercice de la page 122, nous pouvons lire : « visualiser la situation dans sa tête pour la rendre plus concrète » (Tableau 58, p. 349).

Collection *Regards mathématiques*

Contrairement à la collection précédente, dans celle-ci (Tableau 66, p. 364-366) les auteurs réfèrent implicitement à la visualisation en géométrie lorsqu'ils parlent de représenter une situation par un graphe. De plus, ils utilisent un matériel didactique — composé notamment de cartes géographiques, de plans de maison et de représentations bidimensionnelles d'objets tridimensionnels — qui favorise le développement de la visualisation en géométrie. Dans le guide d'enseignement, les auteurs parlent de développer le « sens spatial » à travers les situations que nous avons relevées. Étant donné que le *Programme d'études Mathématique 514* parle de mettre à profit les connaissances acquises tout au long du secondaire, l'étude des graphes est une belle opportunité pour revenir sur la visualisation spatiale.

Collection *Scénarios*

L'examen du Tableau 81 (p. 396-397) et du guide d'enseignement révèle l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation en géométrie. Pourtant, c'est dans cette collection que l'on retrouve le plus de situations où sont réinvestis les acquis de la troisième année secondaire et où on assure la poursuite du développement de la visualisation en géométrie à travers le thème des graphes.

Nous regardons maintenant les chapitres de géométrie qui concernent le *Programme d'études Mathématique 536* dans les collections *Mathophilie* et *Réflexions mathématiques*.

Collection *Mathophilie*

On trouve dans la collection *Mathophilie* deux chapitres : *Les coniques* et *La géométrie du cercle et du triangle*.

Le chapitre *Les coniques* (Tableau 59, p. 350-351) offre la possibilité de développer la visualisation en géométrie. Le volet « visualiser intérieurement » est particulièrement visé dans les situations que nous avons relevées. Dans les commentaires du guide d'enseignement, l'auteur valorise le fait de pouvoir imaginer par exemple différentes sections d'un cône. De plus, il prend la peine d'informer les enseignants de l'existence d'un matériel didactique qui peut aider les élèves dans l'étude des coniques.

Dans le chapitre *La géométrie du cercle et du triangle* (Tableau 60, p. 352-353), rien de réfère de façon implicite ou explicite à la visualisation en géométrie. Cependant, dans le guide d'enseignement on peut lire : « il est important de développer la capacité de traduire un énoncé par une figure, on propose donc plusieurs problèmes où la figure n'est pas représentée » (Tableau 60, p. 353). Sans que ce soit dit ouvertement, ce commentaire vise le développement de la visualisation en géométrie. Plusieurs chercheurs, dont Bishop et Gaulin, ont insisté particulièrement sur le développement de cet aspect. Dans le deuxième commentaire, l'auteur écrit : « … elle permet cependant à ceux et celles qui ont de la difficulté à se représenter les rotations appropriées dans leur tête … » (Tableau 60, p. 353). Par l'exercice en question, on vise le volet « visualiser intérieurement ». Aussi, il ressort de cette explication un intérêt à visualiser des concepts. De plus, tout au long de ce chapitre, l'auteur considère que la visualisation en géométrie n'est plus à développer mais est considérée comme un acquis.

Collection *Réflexions mathématiques*

Cette collection offre un seul chapitre en géométrie portant le titre *Lieux géométriques et coniques*. L'examen du Tableau 63 (p. 358) qui lui est associé montre l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation. Cependant, pour les quatre situations que nous avons relevées, l'auteur spécifie qu'elles développent le « sens spatial » ; à l'occasion, il précise s'il faut surtout mettre l'accent sur les représentations externes ou les images mentales. Il invite fortement les enseignants à faire manipuler du matériel concret par les élèves et les faire travailler avec le logiciel Cabri-Géomètre. En dépit du fait que le *Programme d'études Mathématique 536* ne retient pas le développement continu du « sens spatial », cet élément de formation a préoccupé les auteurs de cette collection.

6.3 Résultats de l'analyse de l'entrevue

L'auteur de la collection *Carrousel mathématique* ayant travaillé sur la visualisation spatiale, nous l'avons contacté dans le but de passer une entrevue, ce qu'il a accepté bien aimablement. Cependant, malgré plusieurs rappels, il n'a pas été possible de réaliser l'entrevue en question.

Nous avons cependant réussi à interviewer deux des auteurs de la collection *Scénarios*. Par souci d'anonymat, nous les désignerons par A1 et A2. Comme nous l'avons déjà mentionné (section 6.1.3), nous avons élaboré les questions de l'entrevue en nous appuyant sur le modèle qui a servi à définir le « sens géométrique » en tant que compétence. Cependant, à quelques reprises et quand l'occasion s'y est prêtée, nos deux auteurs sont revenus sur le curriculum des années quatre-vingt-dix et la collection *Scénarios*. Nous allons donc analyser les passages de l'entrevue qui touchent ce curriculum et cette collection. Afin d'accommoder les trois personnes qui se trouvaient à différents endroits, messieurs A1 et A2 ont proposé de réaliser l'entrevue par téléphone. Nous avons donc eu une conférence à trois que nous avons enregistrée sur bande audio puis transcrite (annexe E). Nos interlocuteurs étaient joviaux et particulièrement aimables. Ils nous ont abordée avec beaucoup de convivialité, allant jusqu'à nous faciliter l'acquisition des nouveaux manuels scolaires à la didacthèque de l'Université Laval. L'entrevue a ensuite débuté pour se terminer une heure plus tard environ. Les questions posées et non présentes dans le protocole nous ont semblé nécessaires pour éclaircir certains points de vue particuliers.

Partie de l'entrevue concernant l'ancien curriculum de mathématiques

Nous avons débuté l'entretien par une question qui portait sur l'importance qu'accorde le nouveau curriculum au développement de la capacité des élèves du primaire et du secondaire à visualiser en géométrie. Prenant en premier la parole, l'auteur A1 en a profité pour nous apprendre qu'ils ont travaillé ensemble à l'élaboration d'un manuel scolaire pour le primaire et qu'ils le font présentement pour le secondaire, ce qui leur a permis de revenir sur l'ancien curriculum pour le comparer au nouveau. Il ressort des propos de l'auteur A1 que l'ancien curriculum du primaire mettait plus l'accent sur la classification des figures et des solides au détriment du développement de la visualisation en géométrie. Cependant, il n'a pas indiqué ce qu'apporte de plus le nouveau curriculum. Il déclare : « il y a vraiment une plus grande préoccupation par rapport à l'ancien programme » (Annexe E, p. 418). Par contre, il a des réserves sur ce que peut apporter cette préoccupation par rapport au développement de la visualisation en géométrie. Il annonce : « … maintenant est-ce que ça développe une visualisation, ça c'est une autre paire de manches … » (Annexe E, p. 418). L'auteur A2, quant à lui, souligne que le développement de la visualisation spatiale était concentré seulement en troisième année secondaire dans l'ancien curriculum : « … dans l'ancien programme où on concentrait la perception spatiale en 3^{e} secondaire, il me semble qu'il y avait un appui un peu plus présent mais très concentré, parce qu'on ne parlait pas vraiment de perception spatiale par exemple en 1re secondaire à l'époque » (Annexe E, p. 419). A2 déplore cependant l'absence de ce thème dans le nouveau curriculum. Nous nous arrêtons ici quelques instants pour souligner l'utilisation de l'expression « perception spatiale » par l'auteur A2. En effet, tout au long de l'entrevue, les deux auteurs employaient tantôt l'expression « perception spatiale » tantôt « visualisation spatiale ». Cette confusion était à prévoir. En effet, il n'est pas étonnant que les auteurs ne sachent pas les différencier puisque même dans la littérature elles sont mal définies. D'ailleurs l'auteur A2 s'est exprimé là-dessus lorsqu'il a dit : « … quand j'avais votre questionnaire, je voyais parfois le mot visualisation puis perception spatiale, et puis même moi, je me suis posé la question à savoir bon c'est une terminologie probablement qui est utilisée en recherche, on fait une distinction j'imagine entre les deux ». Remarquons que l'expression « perception spatiale » ne figure pas dans notre questionnaire. Un peu plus loin au cours de l'entrevue, l'auteur A1 a soulevé le problème lié au vocabulaire. Il explique que les termes « carré » ou « pentagone » désignent les lignes brisées et parler de l'aire du carré ou du pentagone cause problème puisqu' : « on les définit comme étant une ligne ». Cet auteur s'inquiète de la compréhension erronée que peuvent avoir les élèves. À ce propos, il souligne la distinction que propose l'ancien curriculum entre sphère et boule, cercle et disque. Il déplore cependant l'absence d'une telle différenciation avec les autres figures.

Partie de l'entrevue concernant la collection Scénarios

Lorsque nous avons abordé la question concernant la rédaction des manuels scolaires, messieurs A1 et A2 n'ont pas hésité de revenir sur leur collection *Scénarios*. Lors de la rédaction de cette dernière, l'auteur A1 avoue avoir consulté des articles pour mieux comprendre comment se développe la « perception spatiale ». Les lectures faites par cet auteur semblent le convaincre que la visualisation en géométrie se développe à l'adolescence. Il est facile de voir en lisant ses propos que les articles consultés touchent la psychologie cognitive. Ceci le pousse à affirmer : « je crois même … physiquement abstraire ou visualiser dans trois dimensions des choses, ça demande une certaine maturité, je dirais, du cerveau … qui est peut être plus avancée qu'au primaire … en fait là parce que même qu'on regarde des dessins d'enfants, ce n'est pas nécessairement évident que les enfants représentent bien les choses en trois dimensions » et à en conclure qu'il ne vaut peut-être pas la peine de s'en préoccuper à ce stade. L'auteur A2 quant à lui a plus souligné le genre d'activités qu'ils ont proposées en troisième secondaire avec la collection *Scénarios*. Ces activités qui font appel à la manipulation des cubes et au dessin des différentes vues principalement, dont l'auteur semble fier, n'avaient pas l'air de retenir l'attention des enseignants. Monsieur A2 révèle avec beaucoup de regret : « malheureusement, on nous a dit qu'il y en a beaucoup qui ne faisaient pas ça, qui passait ça, c'est comme c'est perçu un peu comme une perte de temps ». Son coéquipier lui souffle le mot jeu et A2 continue : « un jeu, c'est inutile, je pense que les enseignants ne voient pas la pertinence d'explorer ça d'abord pour éventuellement arriver à du calcul d'aire et de volume, les enseignants vont directement au calcul d'aire et de volume, et c'est ça les maths, c'est ça qui est important ». Il nous est difficile de faire abstraction de cette dernière phrase car monsieur A2 dénonce une réalité fort ancrée dans la pratique enseignante. En effet, la place qu'a perdue la visualisation en géométrie dans l'enseignement de la géométrie avec l'avènement des mathématiques modernes n'est malheureusement pas facile à retrouver malgré des efforts de toutes parts. En reprenant la parole, l'auteur A1 souligne que le guide de l'enseignant qui accompagne la collection *Scénarios* n'incite pas assez le professeur à sortir du cadre de la classe pour essayer des choses qui vont aider au développement de la visualisation en géométrie ou dans l'espace physique.

En conclusion, d'après les deux auteurs, l'ancien curriculum n'accordait pas suffisamment d'importance au développement de la capacité à visualiser en géométrie tout au long du primaire et du secondaire. Ils ont bien souligné que celui-ci était concentré en troisième année secondaire. Par rapport à cela, le nouveau curriculum semble, d'après nos interlocuteurs, mieux construit. Concernant la collection *Scénarios* qu'ils ont rédigée, il ressort de leurs propos que malgré l'effort déployé pour donner l'occasion aux élèves de réaliser les ateliers visant le développement de la visualisation spatiale, les enseignants ne voient pas tous la pertinence de ces ateliers.

6.4 Synthèse et discussion des résultats des analyses précédentes

Nous présentons ici une synthèse des principaux résultats des trois analyses précédentes (sections 6.2.1, 6.2.2 et 6.3).

À propos de l'ancien curriculum

Il est important de souligner qu'il était effectivement question dans l'ancien curriculum de la capacité[13] à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. En effet, les analyses précédentes montrent qu'on en parlait dans le curriculum en vigueur au secondaire. C'est d'ailleurs ce que les auteurs de la collection *Scénarios* nous ont confirmé lors de l'entrevue. Mais tout n'est pas parfait pour autant, car il ressort de ces analyses un certain nombre de faits assez inquiétants.

Dans le curriculum, c'est uniquement en troisième année du secondaire, dans le *Programme d'études Mathématique 314* que l'on se préoccupe vraiment du développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. On y recommande le recours aux différents types de représentations externes dont parle Lesh (section 4.3) et on y parle de l'importance du développement d'images mentales chez l'élève. Dans les

[13] Nous nous contentons ici de parler de « capacité » à visualiser en géométrie car à l'époque dont il est question, on ne parlait pas encore au Québec de « compétence » au sens où on l'entend maintenant dans le *Programme de formation de l'école québécoise*.

programmes d'études des autres degrés du secondaire, nous n'avons trouvé qu'un seul paragraphe faisant allusion à cette capacité. Dans ce paragraphe, on propose d'une part de poursuivre le développement de cette capacité chez les élèves et d'autre part de l'utiliser comme acquise. N'y a-t-il pas confusion dans ce message ? Comment un enseignant ou un auteur de manuel peut-il l'interpréter ? Il semble que le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions n'est pas considéré dans le curriculum comme étant un objet à développer à long terme.

Par ailleurs, dans les explications apportées aux objectifs du *Programme d'études Mathématique 314*, on n'insiste pas assez sur l'importance d'utiliser dans l'enseignement des types d'activités suffisamment variées et nombreuses pour soutenir le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

À propos des manuels scolaires

À une exception près, les collections de manuels adhèrent fortement au curriculum. Il ne faut donc pas s'étonner de ne retrouver qu'en troisième année des activités ayant pour but de développer la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Encore une fois, le développement à long terme de cette capacité semble être ignoré dans ces collections.

À ce propos, un fait particulier a retenu notre attention dans la collection *Carrousel mathématique*. Dans le guide d'enseignement qui accompagne le manuel de la première année, il est écrit : « la visualisation spatiale se développe à long terme et non pas à l'occasion d'un chapitre. C'est pour cette raison qu'on doit présenter de telles situations de temps à autre » (Tableau 21, p. 280-282). Apparemment, l'auteur accorde de l'importance à la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions et à son développement à long terme. Nous avons donc été surprise qu'il ne propose pas divers activités à cette fin ici et là dans les manuels de la collection ; cela nous a semblé d'autant plus curieux que dans le cas de la capacité à faire des estimations, dont le développement est également visé à long terme, l'auteur a inséré des activités d'estimation ici et là à tous les degrés. N'y a-t-il pas là une inconséquence ? N'aurait-il pas été souhaitable et plus cohérent avec ses propres propos que l'auteur insère tout au long du secondaire quelques situations visant le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ?

Concernant les activités en rapport avec la visualisation qui se trouvent dans les manuels scolaires, généralement elles ne sont ni variées ni en nombre suffisant, ce qui n'est pas étonnant puisque le curriculum n'insiste pas là-dessus. En effet, la majorité des collections proposent des activités seulement dans les manuels de troisième année et dans un seul chapitre et celles-ci portent fréquemment sur des figures géométriques. Le développement de la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions nécessite des activités multiples et variées touchant à la fois les figures, les relations et les transformations géométriques. Aussi, il est indispensable de ne pas se restreindre à des activités purement géométriques et d'inclure d'autres qui font appel à l'environnement physique, par exemple les translations ou les rotations d'objets, des formes à manipuler, des situations où intervient l'ombre, etc. Cette variété de situations est d'une importance capitale pour que l'élève soit capable à long terme d'exercer sa capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions dans des contextes variés et notamment dans des situations de la vie réelle. À ce sujet, les manuels de troisième année des collections *Les maths et la vie* et *Univers mathématiques* nous paraissent particulièrement déficientes. Les collections *Carrousel mathématique* et *Scénarios*, quant à elles, proposent une variété d'activités non négligeable.

À propos de la terminologie

Il ressort des résultats précédents que la terminologie n'est pas bien établie. On constate que les expressions « visualisation spatiale », « habileté spatiale », « sens spatial » et « perception spatiale » sont généralement utilisées comme étant synonymes. Souvent, également on ne semble pas faire la distinction entre ce qui est « spatial » (ce qui concerne le monde physique) et ce qui est « géométrique » (ce qui concerne le monde abstrait de la géométrie) — distinction qui est prise en compte dans le modèle que nous avons proposé pour caractériser le « sens géométrique » (voir section 4.2.1). Sur ces questions, le curriculum n'apporte aucune clarification ; on y mentionne simplement au passage que le sens spatial : « est une forme d'activité mentale permettant de créer et de manipuler des images d'objets » (Tableau 14, p. 270-271). Par ailleurs, en examinant certains manuels, on peut en arriver à se demander si leurs auteurs ont des idées claires au sujet des problèmes de terminologie que nous venons de soulever ; ce fut là notre impression lorsque l'auteur A2 nous a posé la question : « la visualisation se restreint en quoi en fait ? » (Annexe E, p. 421).

Autres remarques

Nous aimerions également ajouter un certain nombre de remarques plus spécifiques concernant les résultats obtenus dans les sections précédentes.

La première remarque concerne la collection *Scénarios*. Ses auteurs nous ont confié lors de l'entrevue avoir fait des lectures pour mieux comprendre comment se développe la visualisation spatiale. Ces lectures ont certainement influencé leur choix d'activités et leurs commentaires. En effet, pour le chapitre *Droites, angles et polygones*, ils soulignent aux enseignants qu'il est important d'habituer l'élève à : « reconnaître un angle droit, quelle que soit son orientation » et à : « voir les triangles, qu'ils soient rectangles, isocèles ou autres dans différentes positions » (Tableau 68, p. 369). Ces aspects sont effectivement très importants pour le développement de la capacité à visualiser en géométrie. Aussi, ils ont insisté à plusieurs reprises sur la nécessité de manipuler des objets afin de développer cette capacité. De plus, soulignons que ce sont les seuls auteurs qui ont tenu compte du fait que la capacité à visualiser se développe à long terme et ont proposé en conséquence des situations à tous les niveaux du secondaire. L'effort de ces auteurs est à saluer !

La deuxième remarque concerne la collection *Les maths et la vie*. Ses auteurs avancent des affirmations qui nous laissent perplexe. Ils écrivent : « ... comme l'élève a beaucoup développé son sens spatial, il a plus de facilité à percevoir une figure plane dans l'espace. Ainsi, il peut percevoir un triangle rectangle dans un cône, une pyramide, un cube, un prisme droit » (Tableau 52, p.339). Rappelons que dans les manuels de première et deuxième années de cette collection n'existe aucune situation qui vise le développement de la capacité à visualiser en géométrie. Comment peuvent-ils affirmer que l'élève a beaucoup développé son sens spatial ? Faut-il croire que les activités proposées en rapport avec les deux thèmes précédents ont été suffisantes ? Il nous semble que percevoir un triangle rectangle dans un cône, une pyramide, un cube ou un prisme droit n'est certainement pas une chose évidente pour tous les élèves et fort probablement pour un bon nombre d'enseignants. On peut se demander si ces auteurs savent de quoi ils parlent !

La troisième remarque concerne l'influence du curriculum sur la rédaction des manuels. En effet, il ressort de l'analyse des manuels scolaires que ce ne sont pas tous les auteurs des collections qui ont pris l'initiative d'introduire des activités susceptibles de développer la capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Il est donc clair que l'orientation du curriculum influence incontestablement la rédaction des manuels scolaires. Cependant, dans ce cas précis, il est regrettable de faire un tel constat surtout que le Ministère de l'Éducation du Québec donne aux auteurs de manuels une marge de liberté. D'ailleurs, cette flexibilité dont disposent les auteurs nous a été confirmée par la suite lors de l'entrevue que nous avons réalisée avec responsable du M.É.Q. (cf. section 7.3). Pourquoi alors cette réticence ?

Chapitre 7

Résultats de l'analyse du nouveau curriculum *Programme de formation de l'école québécoise* en vigueur en mathématiques au premier cycle du secondaire et de deux collections de manuels scolaires correspondants

Le septième chapitre répondra à la question de recherche E du deuxième objectif : Quelle importance le nouveau curriculum en vigueur au premier cycle du secondaire (*Programme de formation de l'école québécoise* – version approuvée) et les nouveaux manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec accordent-ils au développement de cette « compétence » ?

Pour y répondre, nous utiliserons ici aussi trois moyens, comme cela a été annoncé au paragraphe 3.4. Le premier moyen est l'analyse du *Programme de formation de l'école québécoise*. Rappelons que celui-ci est entré en vigueur en septembre 2005 pour le premier cycle (secondaires 1 et 2). Pour le deuxième cycle (secondaires 3, 4 et 5), l'ancien curriculum est encore en vigueur jusqu'en 2007, 2008 et 2009 respectivement pour ces trois niveaux [voir *Programme de formation de l'école québécoise Calendrier d'implantation* sur le site : http://www.meq.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/programme_de_formation/calendrier/calendrier.pdf, consulté le 14-12-06]. Ce curriculum, conçu différemment de celui des années quatre-vingt-dix, est défini selon une approche par compétences. Il s'articule autour de trois éléments intégrants : les domaines généraux de formation (Santé et bien-être, Orientation et entrepreneuriat, Environnement et consommation, Médias, Vivre ensemble et citoyenneté) ; les compétences transversales (d'ordre intellectuel, d'ordre méthodologique, d'ordre personnel et social, de l'ordre de la communication) et les domaines d'apprentissage (les langues ; la mathématique, la science et la technologie ; l'univers social ; les arts ; le développement personnel). Chaque programme disciplinaire s'articule à son tour autour d'un nombre limité de compétences. En mathématiques, on vise le développement des trois compétences : *Résoudre une situation problème*, *Déployer un raisonnement mathématique* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Chacune d'elles est suivie d'explications exposant les raisons de son développement, sa fonction dans l'appropriation de la matière et sa complémentarité par rapport aux deux autres compétences. Le curriculum présente aussi les relations existantes entre les mathématiques et les autres disciplines. L'analyse de ce dernier se fera à l'aide d'une troisième grille qui tiendra compte du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111).

Le deuxième moyen est l'analyse des parties touchant la géométrie dans les deux nouvelles collections de manuels scolaires approuvés par le M.É.Q. : *Perspective mathématique* de Sylvio Guay, Jean-Claude Hamel et Steeve Lemay paru chez les Éditions Grand Duc – HRW, et *Panoram@th* de Richard Cadieux, Isabelle Gendron et Antoine Ledoux paru chez les Éditions CEC inc. Notre analyse ne portera que sur les deux volumes de la première année du premier cycle étant donné que seuls ceux-ci avaient déjà été approuvés par le M.É.Q. et étaient disponibles à la didacthèque de l'Université Laval. Elle se fera à l'aide de la même grille que nous avons utilisée précédemment pour analyser les neuf collections de manuels scolaires rédigés en lien avec le curriculum des années quatre-vingt-dix. Rappelons que cette grille tient compte du modèle élaboré au chapitre 4 (figure 3, p. 111).

Le troisième moyen est la réalisation d'une entrevue auprès d'une des personnes qui ont travaillé à l'élaboration du nouveau curriculum. Cette entrevue nous permettra de vérifier si notre analyse du nouveau curriculum s'accorde avec les visées de celui-ci du point de vue de la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions.

Nous présentons dans ce qui suit les instruments d'analyse que nous avons utilisés.

7.1 Instruments utilisés

Comme nous l'avons annoncé à la section 3.4, les instruments que nous avons utilisés ont été élaborés en tenant compte du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111) qui reste valable pour la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Voici donc ces instruments.

7.1.1 Grille d'analyse du nouveau curriculum

En s'appuyant sur le modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » (figure 3, p. 111) et en ayant le souci de préserver le même style, nous avons élaboré une grille présentée par le Tableau 10 ci-dessous. Nous chercherons dans la première section toute compétence qui réfère explicitement à la visualisation dans ses deux volets en géométrie. Dans la deuxième section, nous regarderons les commentaires qui accompagnent ces compétences en vue de trouver tout renvoi à la visualisation. Comme pour l'analyse de l'ancien curriculum, dans les deux dernières sections nous inscrirons les notions et les matériels didactiques recommandés relativement à l'espace et à la géométrie dans trois et deux dimensions.

Tableau 10
Grille d'analyse du nouveau curriculum
(cf. *Programme de formation de l'école québécoise*)
en vigueur en mathématiques au premier cycle du secondaire

Compétences à développer faisant explicitement référence à la visualisation dans ses deux volets en géométrie	
Références explicites à la visualisation dans ses deux volets en géométrie faites dans les commentaires à propos des compétences à développer	
Notions relatives à l'espace et à la géométrie faisant l'objet d'étude	
Matériels didactiques recommandés pour l'étude de l'espace et de la géométrie	
Remarques méthodologiques relatives à l'espace et à la géométrie	

7.1.2 Grille d'analyse des manuels

Pour l'analyse des nouveaux manuels scolaires rédigés suite à la publication du *Programme de formation de l'école québécoise*, nous avons retenu la même grille construite pour les anciens manuels scolaires et présentée par le Tableau 11 ci-dessous. Rappelons que ces manuels seront les seuls en usage en classe à partir de l'année scolaire 2006 – 2007.

Tableau 11
Grille d'analyse des manuels scolaires utilisés en mathématiques au premier cycle du secondaire au Québec

Référence explicite à la visualisation dans ses deux volets	
Référence implicite à la visualisation dans ses deux volets	
Matériels didactiques utilisés pour développer la visualisation dans ses deux volets	
Situations/contextes concrets utilisés pour développer la visualisation dans ses deux volets et le processus de modélisation. Lesquels ? Variétés ?	
Ressources (notions) utiles/nécessaires par rapport au sens géométrique pour développer la visualisation dans ses deux volets. Lesquels ? Variétés ?	
Commentaires dans le guide d'enseignement	

7.1.3 Questions posées lors de l'entrevue

Pour réaliser l'entrevue auprès d'une des personnes qui a travaillé à l'élaboration du nouveau curriculum, nous avons construit un certains nombres de questions semi-ouvertes en nous appuyant encore une fois sur le modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique ». Nous avons aussi ajouté à l'occasion des sous-questions d'éclaircissement ou d'approfondissement. Voici ces questions :

Questions qui ont servi d'amorce pour l'entrevue

1. A) Dans le *Programme de formation de l'école québécoise*, accorde-t-on beaucoup d'importance au développement de la capacité des élèves du primaire et du secondaire à visualiser en géométrie ?

   B) Pourquoi ?

   C) Y trouve-t-on des précisions à ce sujet pouvant servir de guides aux auteur(e)s de manuels et aux enseignant(e)s ? [Références ?]

2. S'il est question dans le nouveau programme de capacité à « visualiser » en géométrie :

   A) Dans quel sens y emploie-t-on le terme « visualiser » (qui fait l'objet de diverses définitions dans la littérature) ? [Références ?]

   B) S'agit-il surtout de visualisation dans l'espace ? Ou de visualisation en géométrie ? Ou des deux à la fois ? [Références ?]

   C) Y fait-on explicitement des liens avec la capacité à « visualiser » plus généralement en mathématiques, ou encore avec ce que certains appellent « le sens spatial » ou « le sens géométrique » (expressions mal définies dans la littérature) ? [Références ?]

3. En ce qui concerne le développement à l'école de la capacité des élèves à visualiser en géométrie, y a-t-il des changements notables dans le nouveau programme comparativement à ce que l'on trouvait dans les programmes et les manuels de mathématiques précédents ? [Exemples ?]

7.2 Résultats de l'analyse du *Programme de formation de l'école québécoise* et de deux collections de manuels scolaires correspondants

Dans cette section, nous présentons les résultats des analyses d'abord du *Programme de formation de l'école québécoise* et ensuite des manuels scolaires de mathématiques en usage au secondaire au Québec depuis septembre 2005.

7.2.1 Résultats de l'analyse du nouveau curriculum

Les compétences visées en mathématiques dans le nouveau curriculum *(Programme de formation de l'école québécoise)* sont au nombre de trois : « résoudre une situation-problème», « déployer un raisonnement mathématique » et « communiquer à l'aide du langage mathématique ». Elles sont d'ordre très général et applicables dans tous les champs mathématiques à la fois (l'arithmétique, l'algèbre, la géométrie, la probabilité, etc.), alors que pour toutes les autres disciplines enseignées à l'école les compétences choisies sont beaucoup plus spécifiques. Donc, aucune des compétences visées en mathématiques ne se rapporte particulièrement à la géométrie, ni même d'ailleurs à la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions.

L'étude du Tableau 85 (p. 404-405) montre également que parmi les commentaires faits dans le nouveau programme à propos des trois compétences retenues en mathématiques, il y a peu de références explicites, voire même implicites, à la visualisation en géométrie ou dans l'espace et que celles qu'on trouve sont toujours en rapport avec le volet « visualiser extérieurement » c'est-à-dire avec la visualisation faisant appel à des représentations externes. Par exemple, on peut lire : « En géométrie, il passe de l'observation au raisonnement. … Il construit des figures au besoin, à l'aide d'instruments ou de logiciels de géométrie dynamique » (p. 404). Un peu plus loin, on encourage le recours aux différentes représentations externes dont parle Lesh (figure 4, p. 126) dans les différents champs mathématiques, notamment en géométrie : « En outre, l'élève doit se familiariser avec les éléments du langage que sont les termes, les symboles et les notations et apprendre à choisir des modes de représentation adaptés aux situations numériques, symboliques, graphiques ou linguistiques. Il doit pouvoir recourir à ces divers modes de représentation et passer avec aisance de l'un à l'autre » (p. 404). Dans aucun des commentaires à propos des trois compétences nous n'avons trouvé une quelconque recommandation encourageant le développement d'images mentales en géométrie ou dans d'autres champs mathématiques. Est-ce un oubli ? Leur développement est-il considéré comme allant de soi ? Pourtant, parmi les exemples de stratégies associées à la résolution de problèmes, on trouve « se représenter la situation mentalement ou par écrit » (p. 262, *Programme de formation de l'école québécoise*). On précise que cette stratégie, comme d'autres d'ailleurs, peut être développée par l'élève au moment de l'exercice de ses compétences. Mais avant d'associer cette stratégie à la résolution de problèmes, il est important de donner à l'élève l'opportunité de l'exercer. L'étude de la géométrie offre diverses situations qui permettent de développer les images mentales. Malheureusement, aucune explication n'est donnée à ce sujet.

L'expression « sens spatial » apparaît pour la première fois dans le texte du *Programme de formation de l'école québécoise* lorsqu'il est question des relations entre les mathématiques et les autres disciplines. L'examen du tableau de la page 236 du nouveau curriculum semble montrer que le sens spatial joue un rôle important en arts, en univers social, en science et technologie et aussi pour le développement personnel. Nous avons donc cherché une définition ou tout au moins une explication de cette expression. Le texte qui explique le tableau n'en donne aucune. Cependant, dans la section *Univers social* du tableau, apparaît l'indication suivante : « sens spatial : représentations 2D et 3D, repérage de points sur un axe et dans un plan, transformations géométriques et unités de mesure » (p. 229). Même s'il n'existe pas dans la littérature de consensus sur ce que peut être le sens spatial (section 4.2), il n'est certainement pas restreint à ce qui est indiqué ci haut. En effet, les capacités mentales représentent certainement une composante majeure du sens spatial. Elles apparaissent d'ailleurs dans toutes les définitions que nous avons rapportées à la section 4.2. Malheureusement, tout porte à croire que pour les concepteurs du nouveau curriculum il s'agit là d'une définition du sens spatial. Cette expression apparaît à nouveau lorsqu'on présente le contenu de formation de la géométrie. Le sens spatial devient alors un concept à construire et à s'approprier au même titre que les figures géométriques. Cette confusion nous semble montrer encore une fois toute l'ambiguïté qui entoure sa définition. On reconnaît, tout de même, que son développement nécessite du temps et on met l'accent, une fois de plus, sur les représentations externes pour y parvenir. Dans la section « Repères culturels » (p. 405, annexe C), on parle de la pensée géométrique et du sens spatial comme d'un tout dont l'élève doit pouvoir se servir dans différents contextes à l'école et hors l'école. En effet, nous pouvons lire : « L'élève est incité à utiliser sa pensée géométrique et son sens spatial dans ses activités quotidiennes et différents contextes disciplinaires ou interdisciplinaires, tels que celui des arts ou de la science et de la technologie, ou encore dans différentes situations sociales, en réponse à certains besoins : se repérer dans l'espace, lire une carte géographique, évaluer une distance ou utiliser des jeux électroniques » (p. 405). Suite à cette citation, il est difficile de concevoir la pensée géométrique et le sens spatial au même titre que des concepts comme les figures géométriques par exemple.

Concernant les notions relatives à l'espace et à la géométrie faisant l'objet d'étude au cours du premier cycle du secondaire, elles restent sensiblement les mêmes que ceux de l'ancien curriculum. Il n'y a pas de changements majeurs. Cependant, l'étude des transformations géométriques qui débutait en deuxième année du secondaire avec l'ancien curriculum, est retardée au deuxième cycle du *Programme de formation de l'école québécoise*. Par rapport aux matériels didactiques, en plus du matériel concret, l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique est fortement encouragée.

Avant de terminer, soulignons le changement important amené par le nouveau curriculum. Alors qu'avec l'ancien, il y avait une certaine rupture dans le développement du sens géométrique, puisqu'on ne revenait à l'étude des solides faite au primaire qu'en troisième secondaire, le nouveau curriculum tente de maintenir une continuité.

7.2.2 Résultats de l'analyse de deux collections de manuels scolaires

Dans cette section, nous présentons l'analyse des manuels scolaires des deux séries *Panoram@th* et *Perspective mathématique* rédigés suite à la publication du *Programme de formation de l'école québécoise*. Soulignons que lors de notre collecte de données, n'étaient approuvées par le M.É.Q et disponibles à la didacthèque de l'Université Laval que ces deux séries, les manuels qui correspondent à la première année du cycle ainsi que les guides d'enseignement qui les accompagnent. Au cours de l'année scolaire 2005-2006, ces nouveaux manuels étaient en usage dans les écoles secondaires mais les enseignants pouvaient encore utiliser les anciens. Depuis la rentrée 2006-2007, seuls les nouveaux manuels sont utilisés. Passons donc à l'analyse des deux volumes de la série *Panoram@th*.

Collection *Panoram@th*

La rédaction de cette collection diffère notablement des anciennes. En effet, il n'y a plus de chapitre pour chaque notion mathématique. Les sections qui touchent la géométrie englobent différents concepts. Les situations d'apprentissage sont proposées sous forme de projets et d'activités qui intègrent ces diverses notions et d'autres. Cette collection offre deux panoramas qui touchent la géométrie : *Des droites aux transformations géométriques* et *Des triangles aux polygones réguliers*.

À propos du panorama *Des droites aux transformations géométriques*, l'examen du Tableau 86 (p. 407-408) révèle l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation en géométrie dans ses deux volets. Les situations ou contextes utilisés pour la développer spécifiquement sont aussi manquants. Cependant, suite à la lecture des commentaires du guide d'enseignement, il est facile de voir qu'on réfère à ses deux volets dont il a été question à la section 4.3. En effet, chaque fois que la situation le permettait, les auteurs se sont préoccupés de la représentation plane d'objets tridimensionnels et des images mentales associées. Il est important d'indiquer qu'il n'en est question que sommairement dans le *Programme de formation de l'école québécoise*. Concernant le matériel didactique utilisé, des logiciels de géométrie dynamique viennent s'ajouter aux moyens utilisés habituellement (solides, géoplan, etc.). À propos des ressources mises de l'avant pour développer la visualisation en géométrie, nous retrouvons les mêmes que dans les anciens manuels scolaires.

Le panorama *Des triangles aux polygones réguliers* (Tableau 87, p. 409-410) propose des situations concrètes pour développer la visualisation en géométrie même en l'absence de référence explicite ou implicite à celle-ci. En dépit de leur nombre peu élevé, ces situations sont assez variées et font appel aux deux volets de la visualisation en géométrie. La fabrication d'un objet utilitaire proposé dans le cadre du projet favorise les changements de points de vue qui sont nécessaires à la résolution de problèmes spatiaux dont parle Parzysz (1991). Il est aussi intéressant de souligner dans le cadre de ce projet l'appui des auteurs à l'observation de l'environnement dans le but de découvrir des formes particulières. Cette préoccupation aide à dissiper les difficultés liées à l'espace et à la géométrie. Encore une fois, les notions abordées sont les mêmes que dans les anciens manuels.

Collection *Perspective mathématique*

Tout comme la collection précédente, celle-ci regroupe différents thèmes mathématiques sous forme de dossiers. Il existe quatre dossiers (deux dans chaque volume) qui touchent la géométrie : *Vestiges du passé*, *Mathématiques et arts*, *Dans le gymnase* et *Comment ont-ils fait ?*

L'étude du Tableau 88 de la page 411, en rapport avec le dossier *Vestiges du passé*, montre l'absence de références explicites ou implicites à la visualisation en géométrie. Malgré le nombre très restreint des situations concrètes utilisées pour la développer, les auteurs ont abordé ses deux volets. Selon l'activité proposée, ils indiquent aux enseignants si le recours aux images mentales est bénéfique. Ils incitent même les enseignants à encourager leurs élèves à les utiliser. L'usage, dans ce dossier, d'images tirées de la vie réelle pour montrer des figures géométriques est d'une grande importance. En effet, ceci permet aux élèves de prendre conscience de la présence de la géométrie dans notre vie et de percevoir l'intérêt à l'étudier.

Dans le dossier *Mathématiques et arts* (Tableau 89, p. 412-413), on ne retrouve pas non plus de référence explicite ou implicite à la visualisation en géométrie. Cependant, il existe des situations qui visent le développement de ses deux volets. Le recours aux images mentales est recommandé avec différentes activités. Les auteurs s'appuient ici aussi sur des photos de la vie réelle pour montrer la présence des frises. Il est à remarquer que ces auteurs semblent bien marqués par l'ancien curriculum puisqu'ils continuent d'utiliser l'expression « perception spatiale » dans leurs recommandations aux enseignants et ceci malgré sa disparition du *Programme de formation de l'école québécoise*. Parmi les matériels utilisés, on conseille l'emploi de logiciels de dessin qui diffèrent de ceux de la géométrie dynamique.

L'examen du dossier *Dans le gymnase* (Tableau 90, p. 414) montre l'absence totale de situations qui réfèrent à la visualisation en géométrie. Dans le guide d'enseignement, les auteurs ne s'y rapportent d'aucune façon.

Même si dans le dossier *Comment ont-ils fait ?* (Tableau 91, p. 415), il n'y a aucun renvoi explicite à la visualisation en géométrie, le but de l'activité est de mesurer la hauteur d'une pyramide. Les auteurs encouragent vivement les enseignants de simuler l'activité. L'utilisation du matériel proposé permet aux élèves de se familiariser avec divers angles d'observation et de prendre en considération tous les aspects du solide. Cette activité les aide à prendre conscience des difficultés dues au conflit voir/savoir dont parle Parzysz (1989).

7.3 Résultats de l'analyse des entrevues

Nous analysons dans cette section d'abord l'entrevue que nous avons réalisée auprès d'une des personnes qui ont travaillé sur le nouveau curriculum. Par souci d'anonymat, nous la désignerons par RM pour « responsable des mathématiques ». On trouvera une transcription de cette entrevue à l'annexe F. Ensuite, nous reviendrons sur l'entrevue réalisée auprès des deux auteurs de la collection *Scénarios*. Rappelons que nos questions avaient été élaborées en tenant compte du modèle servant de base pour caractériser le « sens géométrique » ; cette entrevue concernait donc le nouveau curriculum et les manuels correspondants rédigés par ces auteurs.

Analyse de l'entrevue réalisée avec une personne qui a travaillé sur le nouveau curriculum

La personne rencontrée est jovial et particulièrement accueillant. Il nous a reçue avec beaucoup d'hospitalité. Après lui avoir expliqué les raisons qui nous ont amené à l'interviewer et en quoi cela pourra nous servir, nous avons débuté l'entrevue, laquelle a duré environ une heure.

Notre interlocuteur a commencé par souligner la provenance des expressions « sens spatial » et « visualisation ». Il a expliqué que la première est plus nord américaine alors que la deuxième est utilisée en Europe. Il a aussi parlé d'un écart entre les deux mais n'a pas donné de précisions. Nous avons alors essayé d'en savoir davantage. Devant notre insistance, Monsieur RM a répliqué : « pour nous, il n'y a pas une grande différence, le terme chez nous c'est sens spatial qui correspond à la visualisation au niveau international » (p. 446, annexe F).

Il semble que la préoccupation majeure lors de la rédaction du nouveau curriculum est d'amener les élèves à aimer les mathématiques : « ce sera un excellent jour quand les élèves vont aimer la discipline qu'ils sont en train d'étudier » (p. 452, annexe F). Pour cette fin, l'accent a été mis d'abord sur la compréhension des concepts puis sur leurs applications. Monsieur RM explique : « quelqu'un qui comprend quelque chose la saisit, donc il conceptualise et quand il conceptualise, il est capable de s'en servir, donc la conceptualisation, c'est le début » (p. 441, 442 annexe F). Mais comme une compréhension n'est achevée que si le transfert est possible, il rajoute : « il faut ajouter la dimension transfert sinon il n'a pas compris … parce que répéter une définition comme telle d'un concept, pour nous, ce n'est pas avoir compris » (p. 442, annexe F).

Pour le primaire, le nouveau curriculum de géométrie encourage les professeurs à utiliser des objets concrets. Monsieur RM précise que parce que les enseignants sont considérés comme des professionnels, on ne peut pas les obliger.

Concernant la définition des compétences, monsieur RM a précisé que l'absence dans le programme de compétences purement mathématiques se justifie par le fait que celles-ci n'y sont pas considérées comme une finalité en soi. Les mathématiques sont présentes dans le programme pour répondre à un besoin : « on n'a pas désigné le sens spatial comme une compétence pas plus que le sens des nombres … nos compétences sont à un niveau plus élevé que ça, on n'a pas de compétence mathématique et c'était un choix qui a été fait » (p. 444, annexe F). Le choix de la compétence *Résoudre une situation-problème* se justifie, d'après notre interlocuteur, par la faiblesse des élèves au niveau de la résolution de problèmes.

Pour les enseignants, monsieur RM explique que c'est dans les sections *Éléments de méthode* et *Repère culturel* que l'enseignant peut trouver certaines notes pédagogiques. Il précise que la section *Repère culturel* vise à inciter les enseignants à parler de l'histoire des mathématiques dans le but d'encourager les élèves à aimer cette discipline. Ces sections se retrouvent pour les quatre champs retenus en mathématiques. Concernant la formation des enseignants, notre interlocuteur soulève la difficulté des professeurs à monter des situations d'apprentissage lors des sessions de formation offertes par le ministère. Il en renvoie la responsabilité au milieu universitaire qui d'après lui ne suit pas de près l'évolution amenée par la réforme.

Monsieur RM ajoute que les auteurs de manuels ont été invités à une ou deux rencontres où on leur a fourni toutes les explications nécessaires concernant le programme. Quant à la délimitation par cycle des objectifs visés, cette décision a été laissée aux auteurs. Les manuels sont soumis au bureau d'approbation à qui il appartient de les approuver ou non. Notre interlocuteur est revenu ensuite sur l'ancien curriculum pour expliquer que l'accent mis en troisième secondaire sur le développement de la visualisation spatiale ne signifiait en aucun cas qu'il ne fallait pas en faire au cours des autres années scolaires.

Il ressort des propos de monsieur RM que la géométrie a encore sa place dans les programmes scolaires parce qu'elle permet le développement du raisonnement. Cependant, la philosophie de la nouvelle réforme veut qu'il n'y ait plus différents cours de mathématiques touchant l'algèbre, l'arithmétique, la géométrie, etc. mais plutôt un cours où tout est intégré. À ce propos, il déclare : « il y avait des cours d'algèbre, des cours de géométrie seuls mais ce n'est plus le cas maintenant, c'est la mathématique et non pas les mathématiques … c'est que le tout a été intégré à l'intérieur d'un même cours » (p. 452, annexe F).

En terminant, nous voulons mentionner que lors de l'entretien avec monsieur RM, il nous a été difficile de l'amener à répondre explicitement aux questions qui nous préoccupaient. Visiblement, notre interlocuteur était mal à l'aise face à nos interrogations puisqu'il revenait à chaque fois aux grandes orientations sous-jacentes à la réforme.

Analyse de l'entrevue réalisée auprès des deux auteurs de la collection Scénarios

Concernant le *Programme de formation de l'école québécoise,* nos deux interlocuteurs s'entendent pour dire que, comparé à l'ancien curriculum, celui du primaire accorde plus de place au développement de la visualisation spatiale en géométrie. L'auteur A2 perçoit ce développement dans les activités de manipulation qui sont clairement favorisées. Cependant, il déplore le peu de précisions dans ce curriculum, autant au primaire qu'au secondaire, qui pourrait guider les auteurs de manuels et les enseignants à ce sujet. Il déclare : « je crois qu'au niveau de la visualisation, on retrouve des éléments de méthode qui vont nous décrire un peu plus les concepts et les processus qui sont visés mais c'est quand même assez mince. … je crois qu'un enseignant qui n'a aucune idée de ce qu'est la visualisation et la perception spatiale va avoir de la difficulté à retrouver les éléments d'information dans le programme … je ne suis pas certain qu'il y a un appui assez fort » (p. 418, annexe E). Un peu plus loin, il ajoute que sur les trois pages qui touchent la géométrie dans le programme il y a très peu d'éléments sur le sens spatial. Ce manque d'information représente une source d'ambiguïté pour l'auteur A1 qui affirme : « c'est peut-être nos interprétations » (p. 418, annexe E).

L'auteur A2 porte une attention spéciale au plan et à l'espace. Il précise que la visualisation spatiale inclut la dimension deux et qu'il faut s'en préoccuper au même titre que dans le cas de la dimension trois. Il soulève la difficulté des élèves à décoder une représentation plane d'un solide. Il explique : « lorsque nous, on représente un cube avec du papier pointé isométrique, l'élève peut voir trois losanges collés plutôt que de voir la dimension trois » (p. 422, annexe E). Pour y remédier, il encourage vivement le recours au : « 3D dans lequel on vit » (p. 422, annexe E) autant qu'aux représentations planes d'objets tridimensionnels.

À propos de la rédaction des manuels scolaires, l'auteur A2 avoue que les indications présentes dans le nouveau curriculum n'aident pas la rédaction à moins que la personne se documente seule. D'ailleurs, il s'estime chanceux d'avoir produit la collection *Scénarios* qui lui a permis de faire des recherches et d'en savoir plus sur la visualisation spatiale. Il soulève un autre point tout aussi intéressant. Dans le nouveau curriculum, lorsqu'on parle de développer le sens spatial, on fait référence aux représentations planes de solides : « pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée » (p. 228). Notre interlocuteur voit en cette explication un handicap lors du choix des activités pour les manuels scolaires. En effet, il précise que les activités qui amènent les élèves à sortir de la classe ou à bouger dans la classe sont perçues comme informelles par les enseignants. Leur réalisation ne tient qu'à la bonne volonté de ces derniers. Il poursuit en disant : « pour plusieurs enseignants, développer le sens spatial, c'est être capable de représenter à l'aide d'un dessin un objet à trois dimensions » (p. 424, annexe E). D'après l'auteur A2, cet attachement à l'utilisation de papier-crayon est lié à la méconnaissance du sujet. Son collègue y va d'un autre point de vue. Il associe ce comportement d'une part à l'évaluation rapide et traditionnelle utilisée par des enseignants, et d'autre part, à leur manque d'information. L'auteur A1 explique que pour s'assurer de la bonne compréhension des élèves, les enseignants recourent à l'évaluation traditionnelle favorisant l'utilisation de papier-crayon qui est bien ancrée dans leur pratique. Évaluer autrement n'est pas encore une coutume. De plus, sans mauvaise volonté mais par manque d'information, l'enseignant ne se rend même pas compte de l'existence d'autres moyens : « l'enseignant ne peut que se rattacher à ce qu'il fait d'habitude » (p. 425, annexe E). En dépit de ce problème, nos deux auteurs sont allés de l'avant lors de la rédaction des nouveaux manuels scolaires du primaire et du secondaire et ont proposé des activités qui sortent du cadre scolaire habituel. Ils encouragent les enseignants à réaliser des situations comme : « l'élève est dans la cour d'école, doit former des angles par rapport à deux points fixés et doit bouger pour voir l'effet de son déplacement sur l'angle formé » (p. 424, annexe E). Afin de favoriser de telle initiative de la part des enseignants, messieurs A1 et A2 leur ont proposé l'atelier « création d'une médiatrice humaine » (p. 427, annexe E) lors de la rencontre du GRMS. De plus, lors de la rédaction des nouveaux manuels scolaires, ils ont élaboré le manuel de l'enseignant où ils tentent de le convaincre de sortir de son cadre scolaire et d'essayer d'autres types d'activités, chose qu'ils n'avaient pas faite avec l'ancienne collection.

Cherchant à savoir si l'intention dans le nouveau curriculum est de développer la capacité à visualiser en géométrie ou la capacité à visualiser en mathématiques, l'auteur A2 spécifie que c'est l'expression « sens spatial » qui se retrouve dans le *Programme de formation de l'école québécoise* et qu'à ce sujet, il n'y est question que d'activités de représentation d'objets tridimensionnels sur une feuille de papier. Il ajoute que la différence se verra dans l'interprétation que feront les auteurs des prochains manuels. En ce qui les concerne, ils ne se sont pas tenus juste au programme. Après discussion, consultation d'articles et un examen de ce qui se fait dans d'autres pays, ils ont pris l'initiative en équipe d'introduire des activités telles que décrite plus haut.

Concernant les rencontres organisées par le M.É.Q. pour permettre aux auteurs de manuels d'avoir une idée sur les visées du curriculum, nos deux interlocuteurs ont affirmé que celles-ci n'existent plus. La dernière rencontre avait lieu lors de la rédaction du manuel du primaire. Monsieur A2 confie : « maintenant ça n'existe plus, on a même essayé d'écrire et on a jamais eu de réponse. .... Je ne pourrais même pas mettre un visage sur les gens qui ont écrit » (p. 433, annexe E). Ce témoignage vient contredire celui de monsieur RM qui, rappelons-le, a affirmé que les auteurs de manuels avaient été invités à une ou deux rencontres où on leur avait fournit toutes les explications concernant le programme d'étude.

Quant à la répartition des objectifs par cycle, l'auteur A2 explique que les concepts et les processus sont donnés mais qu'il leur appartient de décider ce qu'ils mettent en première année du cycle et ce qu'ils gardent pour la deuxième année. Pour cette fin, ils se laissent guider par les acquis des élèves au primaire et par les prérequis aux concepts à considérer. L'auteur A1 ajoute qu'ils prenaient aussi en considération ce que faisaient les enseignants du secondaire pour ne pas amener trop de changements. Ce même auteur confie que le programme écrit par cycle leur a permis d'introduire certains concepts plus tôt sachant que l'élève dispose de deux ans pour les saisir. Il souligne aussi l'avantage d'avoir rédigé les manuels du primaire : « ça nous donne un grand atout parce qu'on sait comment les choses ont été installées au primaire » (p. 434, annexe E). Il confirme donc la continuité logique des activités qui concerne la visualisation spatiale en géométrie.

Concernant la façon d'organiser les activités, nos deux auteurs déclarent qu'ils décident d'un sujet à traiter puis vont chercher les notions mathématiques qui s'y trouvent. Il n'y a plus de chapitre pour chaque champ comme l'algèbre, la probabilité ou la géométrie. Il s'agit plutôt d'activités intégrées à des enjeux et à des problématiques où plusieurs champs mathématiques sont abordés. L'auteur A2 note que cette façon de faire permet de développer les compétences.

Interrogés sur les savoirs et savoir-faire indispensables en géométrie pour que l'élève puisse développer une capacité convenable à visualiser en géométrie, les deux auteurs ont priorisé les « attributs » - terme qu'ils semblent utiliser dans le sens de « propriétés ». Sachant qu'ils considèrent que le but ultime est l'utilisation adéquate des concepts géométriques pour résoudre des problèmes et justifier des énoncés, la connaissance des attributs des figures et des objets tridimensionnels devient primordiale. Au primaire l'élève doit connaître les attributs, au secondaire c'est leur utilisation qui prend de l'importance pour développer une capacité convenable à visualiser en géométrie.

7.4 Synthèse et discussion des résultats des analyses précédentes

Nous présentons ici une synthèse des principaux résultats des trois analyses précédentes (sections 7.2.1, 7.2.2 et 7.3).

À propos du nouveau curriculum

Les trois compétences mathématiques que l'on retrouve dans le *Programme de formation de l'école québécoise* sont d'ordre assez général. La visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions n'y figure pas en tant que compétence — ce que les auteurs de la collection *Scénarios* et le responsable du ministère nous ont confirmé lors des entrevues. Nulle part dans ce nouveau curriculum, on ne semble porter une quelconque attention à cela. Dans la section *Contenu de formation*, lorsqu'il est question de la géométrie, l'expression « Figures géométriques et sens spatial » est le titre sous lequel on énumère les différents concepts géométriques qui sont à l'étude durant le premier cycle du secondaire. Peut-être faut-il comprendre que les concepts énoncés aident au développement du sens spatial ! À supposer que c'est ce qu'on voulait communiquer, la place de cette expression nous paraît inappropriée. La seule fois où on fait allusion à son développement on écrit : « pour développer son sens spatial en trois dimensions, un apprentissage qui nécessite du temps, l'élève représente des solides à l'aide d'un dessin à main levée. Il identifie des solides soit par leurs développements ou par leurs représentations dans le plan. Il reconnaît des figures planes obtenues en sectionnant un solide à l'aide d'un plan » (*Programme de formation de l'école québécoise,* p. 260). Il est d'une part encourageant de reconnaître que le développement se réalise dans le temps, et d'autre part désolant de remarquer qu'on l'associe seulement aux représentations planes de solides. Cette restriction a aussi été soulevée lors de l'entrevue par l'auteur A2 lorsqu'il a annoncé : « par sens spatial ce qui est associé… c'est souvent des activités réduites à la représentation de l'objet à 3D sur une feuille de papier… c'est principalement ça qu'on entend par sens spatial » (Annexe E, p. 429). Même le responsable du ministère ne semblait pas savoir ce que vise au juste cette expression. Il a affirmé : « pour nous, il n'y a pas une grande différence, le terme chez nous c'est sens spatial qui correspond à la visualisation au niveau international » (Annexe F, p. 446).

Un fait particulier concernant l'expression « sens spatial » a retenu notre attention. La première fois que celle-ci apparaît dans le *Programme de formation de l'école québécoise* est au moment où il est question des liens interdisciplinaires. En effet, cette locution se retrouve dans les domaines des Arts, du Développement personnel, de la Science et technologie et de l'Univers social, mais n'apparaît pas en mathématiques. Dans le domaine de l'Univers social, on trouve ce qui semble être une définition du sens spatial. On peut lire : « sens spatial : représentations 2D et 3D, repérage de points sur un axe et dans un plan, transformations géométriques et unités de mesure » (*Programme de formation de l'école québécoise*, p. 236). Cette description est vraiment surprenante. Qu'est-ce qui justifie d'inclure ici les unités de mesure ? Que doivent comprendre les enseignants et les auteurs de manuels ? Comment peuvent-ils proposer aux élèves des activités qui développent vraiment le sens spatial en se basant sur une telle description ? Car il ne faut pas oublier que c'est la seule fois où on donne un aperçu du sens spatial. C'est à se demander s'il n'aurait pas mieux de ne rien dire et par le fait même de pousser ceux qui s'y intéressent à se documenter. D'ailleurs, l'auteur A2 a précisé lors de l'entrevue que les indications présentes dans le nouveau curriculum n'aident pas la rédaction à moins que la personne se documente seule. Existe-t-il un côté positif à la présence de l'expression « sens spatial » dans ces différents domaines de formation ?

À propos des manuels scolaires

Dans les manuels scolaires, nous avons trouvé des activités qui visent le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. À première vue, ceci semble étrange puisque dans la partie du programme concernant la géométrie, rien n'incite les auteurs à inclure de telles situations. Est-ce alors dû à la présence de l'expression « sens spatial » dans les divers domaines de formation en lien avec les mathématiques ? Cette hypothèse nous paraît bien plausible. En effet, avec l'idée de l'interdisciplinarité amenée par le nouveau curriculum, les auteurs de manuels sont appelés à proposer des projets qui intègrent les mathématiques et les autres disciplines. Ceci a probablement été un point déclencheur. Dans tous les cas, cette initiative vient compenser les lacunes présentes dans le nouveau curriculum ! Elle est à saluer ! Bien sûr nous n'avons pu observer cela que dans deux collections de manuels scolaires produits pour le premier cycle du secondaire, mais il reste à espérer que cette tendance se maintienne pour les prochains cycles et dans les autres collections à venir. Il est aussi intéressant de préciser que les auteurs ont touché aux deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, et ceci en dépit du nombre peu élevé des situations d'apprentissage proposées. Un autre point intéressant à relever dans ces manuels touche la présence de notions théoriques à la suite des projets. Bien sûr, il reste important et incontournable d'enseigner explicitement certaines notions mathématiques et ceci même en prônant un enseignement par projets. Cependant, nous n'avons trouvé aucun projet visant l'intégration de toutes les notions et capacités développées précédemment. Autre aspect important à soulever concerne la présence d'une progression dans les projets. Effectivement, les notions plus compliquées ou plus difficiles arrivent graduellement de sorte que les élèves, en affrontant de nouveaux défis, restent continuellement motivés.

Un autre aspect nouveau et particulièrement important à souligner, dans la collection *Perspective mathématique,* concerne des activités qui se réalisent dans l'environnement physique. Cette nouvelle initiative nous a été confirmée lors de l'entrevue par l'auteur A1 qui a spécifié : « …on tente de le [l'enseignant] convaincre, de le pousser de sortir de son cadre scolaire et ça c'est un outil qui est nouveau… vas-y, sors, essaie des choses, essaie de voir les choses d'une autre façon » (Annexe E, p. 426). Il est réconfortant de voir que certains auteurs se documentent à propos de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions et font l'effort de mettre en pratique ces types d'activités qui sont d'une importance capitale pour le développement de celle-ci.

À propos de la terminologie

Dans le *Programme de formation de l'école québécoise*, les expressions « visualisation spatiale », « habileté spatiale » et « perception spatiale » ne sont pas utilisées. Il semble qu'elles ont cédé leur place à l'expression « sens spatial » qui, rappelons-le, reste très mal caractérisée dans le nouveau curriculum. C'est à se demander si les concepteurs de ce dernier ont eux-mêmes les idées plus claires ! Du même coup, ces termes n'existent plus dans les deux collections des manuels scolaires que nous avons analysées. Soulignons que les auteurs de la collection *Perspective mathématique,* qui, rappelons-le, sont aussi les auteurs de la collection *Scénarios*, ont pris soin d'utiliser les expressions « habileté » lorsqu'il est question de savoir-faire technique et « visualiser mentalement » lorsque l'activité permet de développer des images mentales. Encore une fois, ces auteurs semblent tirer profit de leurs lectures. Cependant, il ressort de l'entrevue qu'une certaine incompréhension persiste à propos de la terminologie utilisée. Tout porte à croire qu'il y a encore un bon bout de chemin à faire avant que les choses se clarifient.

7.5 Conclusions en rapport avec le deuxième objectif

Dans les chapitres 6 et 7, nous avons cherché à répondre aux deux questions de recherche D et E associées au deuxième objectif de notre thèse (p. 81). Nous allons maintenant résumer les principales conclusions des résultats obtenus pour chacune des deux questions de recherche.

Réponse à la question D

La question D était : *Quelle importance était accordée au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions dans le curriculum en vigueur et les manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec avant l'implantation du* Programme de formation de l'école québécoise ?

À propos du curriculum en question, nous avons pu voir que la préoccupation du développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions se limitait à la troisième année du secondaire. Cependant, ni la variété des types d'activités ni leur nombre n'ont été mis de l'avant pour soutenir ce développement.

À propos des collections de manuels scolaires, nous avons constaté à une exception près, qu'elles adhéraient fortement au curriculum. Les activités qui ont pour but de développer cette capacité se retrouvent généralement en troisième année. De plus, elles ne sont ni variées ni en nombre suffisant et portent fréquemment sur des figures géométriques.

À propos de la terminologie, nous avons noter que des expressions comme « visualisation spatiale », « habileté spatiale », « sens spatial » et « perception spatiale » sont utilisées comme synonymes dans ce curriculum sans qu'il y ait une vraie clarification de ce qu'ils signifient.

<u>Réponse à la question E</u>

La question E était : *Quelle importance le nouveau curriculum (*cf. Programme de formation de l'école québécoise – version approuvée, 2004*) en vigueur en mathématiques au premier cycle du secondaire et les manuels scolaires correspondants accordent-ils au développement de cette « compétence » ?*

À propos du *Programme de formation de l'école québécoise* pour le premier cycle du secondaire, nous avons noté qu'aucune attention n'est portée au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions.

À propos des deux collections de manuels scolaires, nous avons constaté qu'il existe quelques activités qui visent le développement de cette compétence. Il y a même des activités qui se réalisent dans l'environnement physique. Malgré cela, leur nombre est assez limité et sont peu variées.

Compte tenu de la pertinence des moyens utilisés et de l'ampleur du travail accompli pour répondre aux deux questions D et E, nous considérons avoir atteint notre deuxième objectif de façon satisfaisante.

PARTIE IV

SYNTHÈSE ET CONCLUSIONS

Chapitre 8
Synthèse et conclusions

8.1 Synthèse

Nous avons débuté en présentant la problématique de la thèse portant sur la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », dont le développement constitue un objectif important dans l'enseignement de la géométrie à l'école. Dans un premier temps (chapitre 1), nous avons regardé la place qui lui a été accordée à différentes époques en faisant un bref survol de l'histoire de la géométrie et de son enseignement, puis nous avons apporté des précisions sur la nature de cette capacité intellectuelle selon plusieurs perspectives de même que sur divers types de recherches didactiques qui ont été réalisées à son sujet. Dans un deuxième temps (chapitre 2), nous avons parlé de la notion de compétence et de l'approche par compétences, d'abord dans un cadre général puis dans le cadre particulier de l'éducation, et nous avons conclu en présentant la définition du terme « compétence » que nous avons retenue pour la suite de notre travail.

Dans le chapitre 3, à la lumière de la problématique précédente, nous avons formulé les deux objectifs de la thèse : (1) décrire la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », laquelle constitue un aspect particulier du « sens géométrique », montrer qu'elle peut être considérée comme une compétence (sections 2.3) et préciser les grandes catégories de « ressources » de même que les « niveaux de développement » associés à cette compétence ; (2) vérifier si le curriculum et les manuels scolaires utilisés en mathématiques au secondaire au Québec tiennent compte de l'importance du développement chez les élèves de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Ensuite, pour chacun de ces objectifs nous avons présenté des questions de recherche associées et la méthode choisie pour y répondre.

Au chapitre 4, à partir d'une amélioration du modèle que McIntosh, Reys et Reys (1992) ont proposé pour décrire le « sens numérique », nous avons élaboré un modèle descriptif du

« sens géométrique » (un ensemble de capacités qui est très mal défini dans la littérature !), et dont la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » constitue un aspect particulier. Nous avons ensuite montré que, tout comme le « sens géométrique », la capacité en question peut être considérée comme une compétence à développer (au sens où nous avons défini ce terme) à l'école.

Au chapitre 5, d'abord nous avons décrit les grandes catégories de « ressources » nécessaires au développement de la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions », puis nous avons défini des niveaux de développement et proposé des critères d'évaluation de cette compétence pour chacun des cycles du primaire et du secondaire.

Au chapitre 6, nous avons présenté les résultats de plusieurs analyses que nous avons faites en rapport avec l'enseignement de la géométrie au secondaire au Québec au cours des années quatre-vingt-dix :

- l'analyse du curriculum de mathématiques qui était en vigueur jusqu'à l'année scolaire 2004–2005 pour les deux premières années du secondaire et qui est encore en application pour les trois dernières années (annexe A) ;
- l'analyse des chapitres touchant la géométrie dans chacune des neuf séries de manuels scolaires approuvées par le M.É.Q. en lien avec le curriculum en question (annexe B) ;
- l'entrevue réalisée avec les auteurs de la collection *Scénarios* (annexe E).

De même, au chapitre 7, nous avons présenté les résultats de diverses analyses que nous avons faites en rapport avec l'enseignement de la géométrie au secondaire d'aujourd'hui :

- l'analyse du nouveau curriculum en vigueur au premier cycle du secondaire (annexe C) ;
- l'analyse de deux nouvelles collections de manuels scolaires en lien avec le curriculum en question (annexe D) ;
- l'entrevue réalisée avec le responsable des mathématiques au M.É.L.S. qui a travaillé à l'élaboration du nouveau curriculum (annexe F).

8.2 Conclusions finales

Nous présentons maintenant en bref les principales conclusions de la thèse.

Conclusions en rapport avec le premier objectif visé

L'atteinte de ce premier objectif constitue une modeste contribution à la recherche scientifique en didactique des mathématiques pour les raisons suivantes.

Nous avons apporté une amélioration au modèle de McIntosh, Reys & Reys (1992) pour caractériser le « sens numérique ». Ce modèle amélioré (voir section 4.1.3) comprend trois composantes :

1. la familiarité avec des notions numériques (nombres, relations et opérations numériques) et avec leurs représentations au moyen de mots, de symboles ou de graphiques. Aussi, la familiarité avec des propositions et théorèmes concernant des notions numériques, formulés de différentes façons au moyen de mots, de symboles ou de graphiques ;

2. la capacité à appliquer les notions numériques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes ou internes aux mathématiques) de même qu'à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions numériques ;

3. la familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui fait le lien entre les deux composantes précédentes.

De plus, nous avons montré que le « sens numérique » est une compétence (au sens que lui donne le M.É.Q. dans le cadre de la réforme en éducation en cours au Québec) disciplinaire à développer à l'école tout comme d'ailleurs la « capacité à faire des estimations » qui est un aspect particulier du « sens numérique ».

Aussi, nous avons créé d'un modèle original pour caractériser le « sens géométrique » de façon analogue au modèle amélioré du « sens numérique ». Notre modèle (voir section 4.2.1) comprend trois composantes :

1. la familiarité avec les notions géométriques (figures, relations et transformations géométriques) et avec leurs représentations au moyen de mots, de symboles ou de graphiques. Aussi, la familiarité avec des propositions et des théorèmes concernant des notions géométriques, formulés de différentes façons au moyen de mots, de symboles ou de graphiques ;

2. la capacité à appliquer les notions géométriques dans divers types de contextes et de situations-problèmes (externes ou internes aux mathématiques) et à utiliser certains matériels didactiques, outils technologiques et autres instruments pour représenter matériellement des notions géométriques ;

3. la familiarité avec le processus de modélisation et son inverse qui fait le lien entre les deux composantes précédentes.

Également, nous avons montré que le « sens géométrique », tout comme la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » qui en constitue un aspect particulier, est une compétence disciplinaire à développer à l'école.

De plus, nous avons amené la distinction importante entre les deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions qui représentent un prolongement des deux capacités IFI et VP proposées par Bishop (1983).

Par ailleurs, la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions étant une compétence disciplinaire, nous avons déterminé les principales « ressources intellectuelles spatiales et géométriques » (c'est-à-dire des savoirs, capacités d'ordre intellectuel et savoir-faire techniques) et les « ressources matérielles » nécessaires à son développement. **Voir tableau page 240**

Nous avons aussi défini des niveaux de développement de la compétence en question pour chaque fin de cycle du primaire et du secondaire en prenant comme cadre de référence la théorie de van Hiele. **Voir tableau page 241.**

Finalement, nous avons proposé quatre critères pour évaluer l'atteinte de chacun des « niveaux de développement » précédents, en nous basant sur les « Niveaux de développement de la pensée géométrique » de van Hiele (voir section 5.2.1). **Voir tableau page 242.**

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS RESSOURCES NÉCESSAIRES À SON DÉVELOPPEMENT			
Ressources intellectuelles spatiales et géométriques			**Ressources matérielles**
Savoirs	**Capacités d'ordre intellectuel**	**Savoir-faire techniques**	
Concepts géométriques (perpendicularité, parallélisme, figure ouverte ou fermée, polyèdres, symétrie, équidistance, égalité, etc.) Représentations langagières (cercle, carré, angle plat, pyramide, droites parallèles, diagonale, médiane, etc.) Définitions Propriétés géométriques Théorèmes Représentations symboliques ([BC], $\angle$AOB, (AB), etc.)	Capacité à visualiser dans l'espace physique des objets, relations et propriétés géométriques, divers mouvements et transformations physiques Capacité à communiquer et interpréter l'information spatiale Capacité à se donner une représentation mentale d'objets géométriques et de leurs représentations graphiques)	Utilisation d'instruments appropriés (règle, équerre, compas, etc.) pour tracer, mesurer, construire, vérifier des relations ou propriétés Utilisation de divers types de représentations graphiques (plans, maquettes, photos, etc.) Utilisation des procédures de construction d'objets géométriques (schémas, étapes de construction)	Règle, équerre, compas, rapporteur d'angles, translateur, Miroir, calque, blocs, maquette, modèles de figures et de solides géométriques, géoplan, pailles, papier quadrillé, Cabri-Géomètre, GeoNext, Géoplan, Géolabo, Geometer's Sketchpad

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT

NIVEAU 1 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du premier cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 1 de van Hiele

NIVEAU 2 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du deuxième cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hile dans des situations généralement simple

NIVEAU 3 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du troisième cycle du primaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 2 de van Hiele dans des situations plus complexes

NIVEAU 4 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du premier cycle du secondaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 3 de van Hiele

NIVEAU 5 DE DÉVELOPPEMENT (pour la fin du deuxième cycle du secondaire)
L'élève est capable de visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions au sens du niveau 4 de van Hiele

COMPÉTENCE À VISUALISER EN GÉOMÉTRIE DANS TROIS ET DEUX DIMENSIONS

CRITÈRES D'ÉVALUATION DE L'ATTEINTE DES NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT

CRITÈRE D'ÉVALUATION a (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *reconnaître (globalement)/identifier/pointer/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION b (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *construire/reproduire/copier/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION c (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations diverses, de *décrire/comparer/analyser/mettre en ordre/définir/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations).

CRITÈRE D'ÉVALUATION d (pour chacun des niveaux de développement)
L'élève est capable, dans des situations et contextes divers, d'*appliquer/utiliser/etc.* des notions géométriques (figures, relations ou transformations) et de résoudre des problèmes simples ou complexes en relations avec de telles notions.

Conclusions en rapport avec le deuxième objectif visé

À propos des curriculums, il ressort des analyses faites précédemment que le *Programme de formation de l'école québécoise* pour le premier cycle du secondaire ne porte pas une quelconque attention au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Comparé à l'ancien curriculum, on peut noter un certain recul concernant l'attention portée au développement de cette compétence. Il serait sans doute pertinent que le M.É.Q., sans refaire le nouveau curriculum ni redéfinir toutes les compétences, trouve un moyen pour amener des ajouts de façon à mettre plus en évidence les grandes compétences de type disciplinaire comme le « sens numérique », la compétence à faire des estimations, le « sens algébrique », le « sens géométrique », le « sens probabiliste et statistique » et cela s'impose tout particulièrement dans le cas de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. De tels amendements, outre le fait d'éclaircir et de faciliter la tâche des enseignants, permettront de rejoindre les tendances internationales qu'on retrouve dans *Principles and Standards for School Mathematics* du National Council of Teachers of Mathematics (2000b).

L'aspect général des trois compétences mathématiques qu'on retrouve dans le nouveau curriculum, laisse croire que leur transfert d'une branche mathématique à l'autre, voire d'une discipline à l'autre se fait de façon aisée. Autrement dit, être en mesure de résoudre des problèmes arithmétiques entraînerait, par exemple, la possibilité de résoudre des problèmes géométriques avec une certaine aisance. Quelle est alors la place accordée aux divers types de savoirs scolaires ? Il est illusoire de croire que ces différents types de problèmes font appel à un même raisonnement mathématique. D'ailleurs, comment expliquer que des élèves éprouvent des difficultés d'apprentissage dans certaines branches des mathématiques plutôt que dans autres ? Plus encore, une maîtrise convenable du raisonnement mathématique n'assure pas le recours à un raisonnement adéquat par exemple dans des situations de la vie réelle. Et dire qu'un des défis du nouveau curriculum est d'aider les jeunes à réussir leur vie !

D'autres répercussions concernant la tâche des enseignants découlent directement de l'aspect général des trois compétences mathématiques. Il serait naïf de croire que, parce qu'ils sont considérés comme des experts, les enseignants pourront aisément décider de ce qui est à traiter. Les risques que tous les thèmes mathématiques ne soient pas traités équitablement sont très élevés. C'est à se demander si la décision de ne considérer que trois compétences mathématiques n'a pas été un piège …

À propos des manuels scolaires, il est réconfortant de voir qu'il existe, dans les deux collections correspondantes au nouveau curriculum du premier cycle du secondaire, quelques situations susceptibles de développer chez les élèves la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions. Cette initiative vient compenser les lacunes présentes dans le curriculum en question. Cependant, tout comme dans les collections correspondantes à l'ancien curriculum, les activités proposées ne sont ni en nombre suffisant ni assez variées. Ce qui n'est pas étonnant puisque les deux curriculums n'insistent pas là-dessus. En dépit de cela, des améliorations sont notables. Espérons que cela continue !

Malgré les bonnes initiatives que nous avons relevées au niveau des nouvelles collections de manuels scolaires, il apparaît clairement que des mises au point sont encore nécessaires. Celles-ci ne pourront avoir lieu que si les auteurs prennent conscience de l'importance de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, de son développement à long terme, et de la nécessité de varier et de multiplier les activités qui faciliteront son développement chez les élèves.

À propos de la terminologie, il ressort des résultats des analyses précédentes qu'elle n'est pas bien établie. En effet, des expressions comme « visualisation spatiale », « habileté spatiale », « sens spatial » et « perception spatiale » sont utilisées dans l'un ou l'autre des deux curriculums tout en étant très mal caractérisées. Il s'ensuit qu'elles sont utilisées par les auteurs de manuels scolaires sans faire de distinction entre ce qu'on peut qualifier de « spatial » et ce qu'on peut qualifier de « géométrique ». Soulignons à ce propos que le modèle élaboré pour caractériser le « sens géométrique » traduit bien le fait que l'aspect « spatial » et l'aspect « géométrique » sont distincts mais complémentaires. Il est donc évident et nécessaire que les didacticiens de mathématiques et les psychologues réussissent à préciser davantage ce langage.

8.3 Originalité de la thèse

Sans doute la partie de la thèse qui apporte le plus une contribution originale est celle en rapport avec le premier objectif où nous avons mené une réflexion théorique à propos de la nature de la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions ». On y trouve notamment une amélioration significative du modèle de McIntosh, Reys et Reys (1992) pour caractériser le « sens numérique ». Voici certains éléments novateurs :

- à partir de ce modèle amélioré, nous avons élaboré un modèle analogue pour caractériser le « sens géométrique » dont la signification est si confuse dans la littérature ;

- nous avons amené une nette distinction entre la visualisation dans l'espace physique à trois dimensions et la visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions ;

- nous avons mis en évidence deux composantes bien distinctes mais complémentaires de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » ;

- nous avons proposé une description de la « capacité à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions » en y intégrant ce que nous apporte la littérature de recherche à ce sujet — notamment les travaux de Bishop, le modèle pour caractériser le « sens géométrique » et les deux volets « visualiser intérieurement » et « visualiser extérieurement » — et en y tenant compte de la notion de compétence telle qu'entendue par le M. É. Q. dans le cadre de la réforme en éducation en cours au Québec.

8.4 Limites de la recherche

Comme tout travail de recherche, le nôtre n'échappe pas à certaines limites. Malgré les précautions et la variété des résultats, à notre avis les trois principales limites sont les suivantes.

En ce qui concerne la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, ni la liste des ressources spatiales et géométriques nécessaires à son développement, ni ses niveaux de développement, ni les critères d'évaluation servant à évaluer l'atteinte de ces niveaux n'ont été validés. Nous avions initialement prévu le faire en consultant quelques mathématiciens et didacticiens des mathématiques mais finalement cela n'a pas été possible.

En ce qui concerne les collections de manuels scolaires pour le premier cycle du secondaire correspondant au nouveau curriculum, à l'époque où nous avons analysé ces collections, il n'en existait que deux qui étaient approuvées par le M.É.Q. Par conséquent, le matériel sujet à cette analyse a été assez limité et les conclusions qui en découlent ne peuvent pas être généralisées. De même, nous n'avons pu réaliser qu'une entrevue avec deux auteurs d'une collection de manuels scolaires alors qu'initialement nous avons prévu en faire plusieurs. C'est pourquoi les données recueillies ont été assez limitées et les conclusions que nous avons tirées reposent sur un nombre limité d'entrevues.

Compte tenu de la nécessité de limiter les objectifs de la thèse, nous n'avons pas étudié dans ce travail deux autres aspects importants et très intéressants à savoir l'évaluation de la maîtrise d'une compétence et l'évaluation des progrès des élèves par rapport au développement d'une compétence donnée.

8.5 Pistes de recherches et de développements futurs

Notre recherche ouvre la porte à plusieurs travaux qui pourraient avoir des retombées théoriques ou pratiques très intéressantes. En voici trois exemples.

Le premier et le plus intéressant serait sans doute, à partir du cadre théorique que nous avons mis en place, de poursuivre et d'approfondir la réflexion à propos de la nature de la « visualisation en géométrie dans trois et deux dimensions ».

Le deuxième serait de valider, en faisant appel à quelques enseignants, didacticiens des mathématiques et mathématiciens, la liste des ressources spatiales et géométriques nécessaires au développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions, ses niveaux de développement et les critères d'évaluation servant à évaluer l'atteinte de ces niveaux.

Le troisième serait de mettre au point des outils et des instruments (préparations de leçons, exemples de problèmes et d'exercices à résoudre et de projets à réaliser, fiches d'activités, matériels de manipulation et didacticiels, etc.) pouvant être utilisés par les enseignants pour mieux encadrer le développement de la compétence à visualiser en géométrie dans trois et deux dimensions chez les élèves.

Références bibliographiques

Adams, T. L. & Harrell, G. (2003). Estimation at work. In D. H. Clements &G. Bright (eds), *Learning and Teaching Measurement—2003 Yearbook* (p. 229-244). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Allal, L. (1999). Acquisition et évaluation des compétences en situation scolaire. In J. Dolz & E. Ollagnier (dir.), *L'énigme de la compétence en éducation*, (p. 77-94). Bruxelles : De Boeck.

Allinger, G. D. & Payne, J. N. (1986). Estimation and mental arithmetic. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 141-155). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition.* Cambridge, MA : Harvard University Press.

Audibert, G. (1994). Contribution de l'apprentissage de la géométrie à la formation scientifique. In D. F. Robitaille, D. H. Wheeler & C. Kieran (eds), *Choix de conférences du 7^e^ congrès international sur l'enseignement des mathématiques*, (p. 1-17). Québec : Les Presses de l'Université Laval.

Barbeau, D. (1995). L'évolution du réseau collégial. In J.-P. Goulet (dir.), *Enseigner au collégial* (p. 27-42). Québec : Association Québécoise de Pédagogie Collégiale.

Battista, M. T. *et al*. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13* (5), 332-340.

Becker et Hofmann (1956). *Histoire des Mathématiques.* Paris : Lamarre.

Bednarz, N. (2000). *Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes au Québec au XX^e^ siècle.* En ligne. <http://www-leibniz.imag.fr/EM2000/Actes/Conferences/BEDNARZ.pdf>. Consulté le 16 avril 2007.

Bélanger, N. *et al*. (1993). *Évolution des programmes de mathématiques de 1861 à nos jours*. Québec : Université Laval, Laboratoire de recherche en administration et politique scolaires.

Bennie, C. J. (1999). *Building a model of spatial ability : An analysis of Grade 5 and 6 learners' strategies for solving 'spatial' activities.* Unpublished master's dissertation, Cap Town, South Africa : University of Cape Town.

Bennie, K. & Smit, S. (1999). "Spatial Sense": translating curriculum innovation into classroom practice. Paper presented at the 5th Annual Congress of the Association for

Mathematics Education of South Africa (AMESA), Port Elisabeth 5 – 9 July. En ligne. <http://academic.sun.ac.za/mathed/MALATI/Files/Geometry992.pdf>. Consulté le 16 avril 2007]

Birkhoff, G. D. & Beatley, R. (1959). *Basic Geometry*. New York : Chelsea.

Bishop, A. J. (1978). *Spatial abilities in a Papua New Guinea context* (Mathematics Education Center Report N° 2). Lae, Papua New Guinea : Mathematics Education Center, University of Technology.

Bishop, A. J. (1979). Visualising and mathematics in a pre-technological culture. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 135 – 146.

Bishop, A. J. (1980). Spatial Abilities and Mathematics Education - A Review. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 257-269.

Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (p. 175-203). New York : Academic Press.

Bishop, A. J. (1987). Quelques obstacles à l'apprentissage de la géométrie. In R. Morris (dir.), *L'enseignement de la géométrie* (p.149-169). Études sur l'enseignement des mathématiques, vol. 5. Paris : UNESCO.

Bishop, A. J. (1989). Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, (1), 7-16.

Bkouche, R. (1997). Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie. *Repères-IREM,* (26), 49-71.

Bosman, C., Gerard, F. M. & Roegiers, X. (2000). *Quel avenir pour les compétences ?* Bruxelles : De Boeck.

Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. In D. Nelson & R. E. Reys (eds.), *Measurement in School Mathematics—1976 Yearbook* (pp. 87 – 104). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Brinkmann, E. (1963). *Educability in visualization of objects in space : a programmed instruction approch*. Ph. D. dissertation, University of Michigan.

Bronckart, J.-P. & Dolz, J. (1999). La notion de compétence : quelle pertinence pour l'étude de l'apprentissage des actions langagières ? In J. Dolz & E. Ollagnier (dir.), *L'énigme de la compétence en éducation,* (p. 27-44). Raisons éducatives (2), 1-2. Bruxelles : De Boeck.

Brumbaugh, D. K. (1969). *Isolation of factors which influence the ability of young children to associate solids with representations of those solids*. Ph. D. dissertation, University of Georgia, Athens, Georgia.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a Theory of Instruction.* Cambridge, Massachusetts : Belknap Press of Harvard University.

Burger, W. & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31-48.

Bartolini Bussi, M. G. &Mariotti, M. A (1996). *Geometrical reasoning in the mathematics classroom*. En ligne. <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/libros/italian/geomintui.html>. Consulté le 16 avril 2007.

Caveing, M. (1985). *Le matin des mathématiciens. Entretiens sur l'histoire des mathématiques*. Paris : Belin.

Chernysheva, L. Yu. *et al*. (1987). L'enseignement de la géométrie en Union Soviétique. In R. Morris (dir.), *L'enseignement de la géométrie*, (p. 101-111). Études sur l'enseignement des mathématiques, vol. 5. Paris : UNESCO.

Clements, K. (1981a). Visual Imagery and School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *2* (2), 2 - 9.

Clements, K. (1981b). Visual Imagery and School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *2* (3), 33 - 39.

Clements, K. (1983). The question of how spatial ability is defined, and its relevance to mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15* (1), 8-20.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasonning. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (p. 420-464). New York : Macmillan.

Coburn, T. G. & Shulte, A. P. (1986). Estimation in measurement. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation–1986 Yearbook* (p. 195 – 203). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Collection *Carrousel mathématique*. Montréal : Les Éditions CEC inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 1, Tome 2, (1993), rédigés par G. Breton, C. Bourdeau, et J. G. Smith.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, Tome 1, Tome 2, (1994), rédigés par G. Breton, C. Bourdeau, et J. G. Smith.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 3, Tome 1, Tome 2, (1995), rédigés par G. Breton, C. Bourdeau, et J. G. Smith.

Collection *Croisières mathématiques.* Montréal : Guérin.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 1, Tome 2, (1993), rédigés par L. Chagnon *et al.* Sous la direction de M. Drolet et H. Rochette.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, Tome 2, (1994), rédigés par R. Brunet *et al.* Sous la direction de M. Drolet et H. Rochette.

Collection *Dimensions mathématique 116, 216.* Montréal : Les Éditions du Renouveau Pédagogique inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 1, Tome 2, (1993), rédigés par P. Patenaude et L. Viau.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, Tome 2, (1994 - 1995), rédigés par I. Jordi, P. Patenaude et C. Warise.

Collection *Les maths et la vie.* Montréal : Les Éditions Brault et Bouthillier inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 1, (1993), rédigés par S. Maurer, A. Lopez, et C. De La Grange.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, (1994) rédigés par S. Maurer *et al.*

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 3, (1995) rédigés par S. Maurer *et al.*

Collection *Mathophilie.* Montréal : Guérin.

Manuel et guide d'enseignement Mathématique 416, Tome 2, (1997), rédigés par L. Lafortune et collaborateurs.

Manuel et guide d'enseignement Mathématique 436, Tome 2, (1998), rédigés par L. Lafortune.

Manuel et guide d'enseignement Mathématique 514, Tome 1, (1998), rédigés par L. Lafortune.

Manuel et guide d'enseignement Mathématique 536, Tome 2, (1998), rédigés par L. Lafortune et collaborateurs.

Collection *Panoram@th mathématique.* Montréal : Les Éditions CEC.

Manuel A et Guide en un coup d'œil A, volume 1, volume 2, premier cycle du secondaire (2005), rédigés par R. Cadieux, I. Gendron et A. Ledoux.

Collection *Perspective mathématique.* Montréal : Les Éditions Grand Duc – HRW.

Manuel de l'élève A, Manuel de l'enseignant A volume 1, volume 2, (2005), premier cycle du secondaire, rédigés par S. Guay, J. C. Hamel et S. Lemay.

Collection *Réflexions mathématiques.* Montréal : Les Éditions CEC inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 4, 436, Tome 2, (1997), rédigés par G. Breton, A. Deschênes et A. Ledoux.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 5, 536, Tome 2, (1999), rédigés par G. Breton et collaborateurs.

Collection *Regards mathématiques.* Montréal : Les Éditions CEC inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 4, 416, Tome 1, Tome 2, (1997), rédigés par G. Breton et collaborateurs.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 5, 514, Tome 2, (1997), rédigés par G. Breton, É. Breton et M. Dufour, sous la direction de S. Légaré.

Collection *Scénarios.* Montréal : chez Les Éditions HRW.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 1, (1993 - 1994), rédigés par M. Soulière et J. G. Thibaudeau.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, (1994), rédigés par S. Guay et S. Lemay.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 3, Tome 1, Tome 2, (1995 - 1996), rédigés par S. Guay et S. Lemay.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 4, 416, Tome 1, Tome 2, (1997 - 1998), rédigés par S. Guay et S. Lemay.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 4, 436, Tome 1, Tome 2, (1997 - 1998), rédigés par S. Guay et S. Lemay.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 5, 514, Tome 1, (1998 - 1999), rédigés par S. Guay, J. C. Hamel et S. Lemay.

Collection *Univers mathématique.* Montréal : Les Éditions LIDEC inc.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 2, 2e édition, Module B, (1994 – 1995), rédigés par J. Assouline, C. Buzaglo et G. Buzaglo.

Manuel et guide d'enseignement pour le secondaire 3, (1995), rédigés par J. Assouline, C. Buzaglo et G. Buzaglo.

Commission scolaire régionale Louis-Frechette, comité de recherche en mathématiques (1974). *Programme d'études des écoles secondaires.* Lévis : Direction des services de l'enseignement.

Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (2000). Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement. *APMEP,* (430), 571 – 599.

Coolidge, J. L. (1963). *A History of Geometrical Methods.* New York : Dover Publication.

Cooper, M. S. (1989). Secondary school student's representations of solids. *Journal for Research in Mathematic Education*, *20*, 202 – 212.

Dadoy, M. (1999). Compétence. In A. Akoun & P. Ansart (dir.), *Dictionnaire de sociologie*. Collection Dictionnaires Le Robert / Seuil.

De Ketele, J.M. (2000). Approche socio-historique des compétences dans l'enseignement. In C. Bosman, F.M. Gerard & X. Roegiers (dir.), *Quel avenir pour les compétences*, (p. 83-92). Bruxelles : De Boeck.

De Lange, J. (1984). Geometry for all or: no geometry at all? *Zentrablatt für Didaktik der Mathematik*, *3*, 90-98.

De Lange, J. (1993). Between end and beginning. Mathematics Education for 12 – 16 year olds : 1987-2002. *Educational Studies in Mathematics,* (25), 137-160.

Del Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geometry. In M. Montgomery Lindquist & A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry : K-12*, (p. 126-135). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Demoustier, J.M. (2000). Les compétences dans l'enseignement en communauté française de Belgique. In C. Bosman, F.M. Gerard & X. Roegiers (dir.), *Quel avenir pour les compétences*, (p. 73-82). Bruxelles : De Boeck.

Denis, L. P. (1987). Relationships between stage of cognitive development and van Hiele level of geometric thought amoung Puerto Rican adolescents. Dissertation Abstracts International, 48, 859A. (University Microfilms N° DA8715795).

Denis, M. (1979). *Les images mentales*. Paris : Presses Universitaire de France.

Denis, M. (1989). *Image et cognition*. Paris : Presses Universitaires de France.

Dictionnaire de Droit (1966). Deuxième édition, Tome 1, Paris.

Dictionnaire Historique de la langue Française (1998). A. Rey (dir.). Paris - Dictionnaire Le Robert.

Donoghue. E. F. (2003). Algebra and geometry textbooks in twentieth-century America. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (eds.), *A History of School Mathematics*, vol. 1, (p.329-398). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Doorman, L. M. & Kooij H v.d. (1992). *Using the computer in space geometry.* En ligne. <http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/528.pdf>. Consulté le 16 avril 2007.

Drouin, A. M. (1988). Compétences méthodologiques. *Recherches en didactique des sciences expérimentales,* (6), 1-14.

Eves, H. (1963). *A Survey of Geometry.* 1, 1st ed. Boston : Allyn and Bacon.

Eves, H. (1965). *A Survey of Geometry.* 2, 1st ed. Boston : Allyn and Bacon.

Fennema, E. (1979). Women and girls in mathematics – equity in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 389-401.

Fennema, E. & Behr, M. (1980). Individual differences and the learning of mathematics. In R. J. Shumway (ed.), *Research in mathematics education.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Fey, J. T. & Graeber, A. O. (2003). From the New Math to the Agenda for Action. In G. M. A.Stanic & J. Kilpatrick (eds.), *A History of School Mathematics,* vol. 1, (p. 521-558). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Fielker, D.S. (1987). Analyse de l'enseignement de la géométrie au Royaume-Uni. In R. Morris (dir.), *Études sur l'enseignement des mathématiques* (p.129-148). Paris : UNESCO.

Fourez, G. (1994). Les « socles de compétences ». *La Revue Nouvelle,* (3), 12-16.

Fourez, G. (1999). Compétences, contenus, capacités et autres casse-têtes. *Forum. Pédagogies,* mai, 26-31.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. Journal for Research in Mathematics Education Monograph. 3.

Gagatsis, A. (1994). Histoire de l'enseignement de la géométrie en Grèce. *Repère-IREM,* (17), 47 – 69.

Galuzzi, M. (1998). On the evolution and underlying ideas of geometry textbooks in Italy. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 204-208). Boston : Kluwer Academic Publishers.

Gaulin, C. (1985). The need for emphasizing various graphical representations of 3-Dimensional shapes and relations. In L. Streefland (ed.) *Proceedings of PME 9,* vol. 2, (p. 53-71). Utrecht, The Netherlands : State University of Utrecht.

Gerard, F.M. & Roegiers, X. (1993). *Concevoir et évaluer des manuels scolaires.* Bruxelles : De Boeck.

Gerard, F. M. (2002). *L'indispensable subjectivité de l'évaluation*. En ligne. <http://www.bief.be/enseignement/publication/SubjEval.html>. Consulté le 16 avril 2007.

Gispert, H. (2002). Pourquoi et pour qui enseigner les mathématiques ? Une mise en perspective historique de l'évolution des programmes de mathématiques dans la société française au XX^{e} siècle. *APMEP de la maternelle à l'université*, (438), 36-46.

Glaeser, G. (1987). La crise de l'éducation géométrique. In R. Morris (dir.), *L'enseignement de la géométrie* (p. 113-128). Études sur l'enseignement des mathématiques, vol. 5. Paris : UNESCO.

Glaeser, G. (2002). Axiomatique. In *Encyclopædia Universalis*. Paris

Godeaux, L. (1952). *Les Géométries.* Paris : Armand Colin.

Gohier, C. & Grossmann, S. (2001). La formation fondamentale, un concept périmé ? La mondialisation de la compétence. In C. Gohier & S. Laurin (dir.), *Entre culture, compétence et contenu. La formation fondamentale un espace à redéfinir*, (p. 21-54). Québec : Les Éditions Logiques.

Goldenberg, E. P. (1991). Seeing beauty in mathematics : Using fractal geometry to build a spirit of mathematical inquiry. In W. Zimmerman & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and learning Mathematics*, Mathematical Association of America, Notes Series, 39-66.

Golos, E. B. (1968). *Foundations of euclidean and non-euclidean geometry.* New york : Holt, Rinehart and Winston.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*. *35*, (3), 207-231.

Greeno, J. G. (1980). Some examples of cognitive task analysis with instructional implications. In R. E. Snow, P. Federico, & W. E. Montague (eds.), *Aptitude, learning, and instruction : cognitive process analyses of learning and problem solving*, vol. 2, (p. 1-21). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Greeno, J. G. (1991). Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain. *Journal for Research in Mathematics Education*. *22*, 170-218.

Greenwood, T. (1943). *Essais sur la pensée géométrique.* Ottawa : Éditions de l'Université.

Grégoire, R. (1990). *Les compétences à acquérir par les enseignants et les enseignantes durant leur formation. Une vue d'ensemble du débat en cours aux États-Unis.* Québec : Collection Études et Analyses.

Griffiths, B. (1998). The British Experience. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 194-204). Boston : Kluwer Academic Publishers.

Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1988). *Globality versus locality of the van Hiele levels of geometric reasoning*. Unpublished manuscript. Spain : Universitat de Valencia.

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education. 22*, 237-251.

Hansen, L. V. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p. 235-242). Boston : Kluwer Academic Publishers.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship : Interactions with robust and soft Cabri constructions. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, (p. 103-117). Hiroshima.

Hershkowitz, R. *et al*. (1997). Space and Shape. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education (p. 161-204)*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele-based research. In R.Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (p. 205-227). New York, NY : Academic Press.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1*, 169-187.

Hope, J. A. (1986). Mental calculation : anachronism or basic skill ? In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 45-54). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Hope, J. (1989). Promoting Number Sense in School. *Arithmetic Teacher, 36*, (6), 12 – 16.

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, *36*, (6), 6-11.

Isambert-Jamati, V. (1994). L'appel à la notion de compétence dans la revue l'Orientation Scolaire et Professionnelle à sa naissance et aujourd'hui. In F. Ropé & L. Tanguy (dir.), *Savoirs et compétences. De l'usage de ces notions dans l'école et l'entreprise.* (p.119-145). Paris : L'Harmattan.

Kelly, J. P. & Ladd, E. N. (1965). *Geometry.* Chicago : Foresman and Compagny.

King, J. A. (1986). A do-it-yourself estimation workshop. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 162-170). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Kline, M. (1989). *Mathématiques : La fin de la certitude.* Paris : Bourgois.

Kopelman, E. & Vinner, S. (1994). Visualization and reasonning about lines in space : school and beyond, *Proceding of PME 18,* vol. 3, 97-103. Lisbon.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago : University of Chicago Press.

Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 9,* (3), 337-364.

Laborde, C. (1998). Geometry Behind the French National Curricula in the Last Decades. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (p .214-222). Boston : Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (2003). Géométrie – Période 2000 et Après. In D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (eds), *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique. Proceedings of the EM – ICMI Symposium,* (p. 135-154). Genève.

Laliberté, J. (1995). Alverno : une réforme pédagogique riche d'enseignements. In J.-P.Goulet (dir.) *Enseigner au collégial,* (p. 137-145). Québec : Association québécoise de pédagogie collégiale.

Lancy, D. F. (1978). The Indigenous Mathematics Project, special issue of the *Papua New Guinea Journal of Education* 14.

Lappan, G. & Winter M. J. (1982). Spatial visualization. In L. Silvey & J. R. Smart (eds.), *Mathematics for the Middle Grades (5 – 9),* (p. 118-129). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Lavoie, P. (2003). Enseigner les mathématiques au Québec : l'émergence d'une spécialité. In G.M.A.Stanic & J. Kilpatrick (eds.), *A History of School Mathematics,* (p. 239-278). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Lean, G. A. (1981). *Spatial training and mathematics education - A review.* Unpublished paper. Cambridge : Department of Education, University of Cambridge.

Lean, G. & Clements, M. A. K. (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. Educational Studies in Mathematics, *12*, 267-299.

Le Boterf, G. (1994). *De la compétence : essai sur un attracteur étrange.* Paris : Les Éditions d'Organisation.

Le Boterf, G. (2000a). De quel concept de compétence les entreprises et les administrations ont-elles besoin ? In C. Bosman, F. M. Gerard & X. Roegiers (dir.), *Quel avenir pour les compétences ?* (p. 15-19). Bruxelles : De Boeck.

Legendre, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l'éducation.* 2^{e} éd. Montréal : Guérin.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities : Conderations for identification, diagnosis, and remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. G. Kantowski (eds.), *Applied mathematical problem solving*. Columbus, Ohio : ERIC/SMEAC.

Lesh, R. *et al.* (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (p. 91-126). New York : Academic Press.

Lessard, C. (1999). La rénovation de l'école primaire genevoise : une étude de cas, (p. 35-76). Études réalisées dans le cadre des avis du Conseil Supérieur de l'Éducation sur le curriculum. Québec : Ministère de l'Éducation du Québec.

Leutzinger, L. P., Rathmell, E. C. & Urbatsch, T. D. (1986). Developing estimation skills in the primary grades. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 82-92). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Leutzinger, L. P. & Bertheau, M. (1989). Making Sense of Numbers. In P. R. Trafton & A. P. Shulte (eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics—1989 Yearbook* (111-122). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Lismont, L. et Rouche, N. (2001). *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie.* Belgique : CREM.

MacPherson, E. D. (1985). The Themes of Geometry : Design of the Nonformal Geometry Curriculum. In C. R. Hirsch & M. J. Zweng (eds.), *The Secondary School Mathematics Curriculum—1985 yearbook* (pp. 65-80). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Magne, O. (1978). The psychology of remedial mathematics. *Didakometry*, *59*, 1-27.

Maingain, A., Dufour B. & Fourez, G. (2002). *Approches didactiques de l'interdisciplinarité*. Bruxelles : De Boeck.

Malara, N. A. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. *Proceedings of PME 22*, vol. 3, 239-246. (Eric Document Reproduction Service N° 427 971).

Marchal, P. E. (1948). *Histoire de la géométrie.* Paris : Presses Universitaires de France.

Mariotti, M. A. (1989). Mental images : some problems related in the development of solids, *Proceedings of PME 13*, vol. 2, (p. 256-265). Paris.

Martineau, A. (2002). Bourbaki (Nicolas). In *Encyclopaedia Universalis,* vol. 4, (411-412). Paris.

Mason, M. M. (1989). *Geometric understanding and misconceptions among gifted fourth-eighth grades.* Paper presented at the meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Mayberry, J. (1983). The van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 58-69.

Mialaret, G. & Vial, J. (1981a). *Histoire mondiale de l'éducation. Des origines à 1515.* Vol. 1. Paris : Presses Universitaires de France.

Mialaret, G. & Vial, J. (1981b). *Histoire mondiale de l'éducation. De 1515 à 1815,* Vol. 2. Paris : Presses Universitaires de France.

Ministère de l'Éducation du Québec (1994). *La formation à l'éducation préscolaire et à l'enseignement primaire, Orientations et compétences attendues.* Gouvernement du Québec. Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (1996). *Les États généraux sur l'éducation 1995-1996, Exposé de la situation.* Gouvernement du Québec. Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec (2002). *Échelles des niveaux de compétence. Enseignement primaire*. Gouvernement du Québec. Québec.

Ministère de l'Éducation du Québec, (2005). Échelles des niveaux de compétence. Enseignement secondaire, premier cycle. Édition préliminaire. Gouvernement du Québec. Québec. En ligne. <http://www.meq.gouv.qc.ca/dfgj/de/pdf/13-4608.pdf>. Consulté le 18 novembre 2006.

Mitchelmore, M. C. (1980). Prediction of developmental stages in the representation of regular space figures. *Journal for Research in Mathematics Education, 11*, 83-93.

McIntosh, A., Reys, B. J. & Reys, R, E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics, 12*, (3), 2-8.

Mongeau, P. (1993). Apprentissage de la représentation spatiale en géométrie. Colloque CIRADE, (p. 79-91). Montréal.

Morin, B. (1995). Programme d'études et compétence des étudiants. In J.-P. Goulet (dir.), *Enseigner au collégial* (p. 125-136). Québec : Association Québécoise de Pédagogie Collégiale.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000a). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000b). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Neubrand, M. (1998). Tendencies in the Changes on a German Texbook Page. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the* 21^{st} *Century* (p. 208-213). Boston : Kluwer Academic Publishers.

New Jersey Mathematics Curriculum Framework – Standard 10 – Estimation (1996). En ligne. <http://www.state.nj.us/njded/frameworks/math/math8.pdf>. Consulté le 16 avril 2007.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hölzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing : an exploratory study for Cabri-Géomètre. In *Proceedings of PME 18*, (p. 360-367). Lisbon : University of Lisbon.

Parzysz, B. (1989). *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation Voir/Savoir*. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris VII.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students conceptions at High School level. *Education Studies in Mathematics*, *22*, 575-593.

Perkins, D. & Salomon, G. (1989). Cognitive Skills Context-Bound ? *Educational Researcher*, *17*, 16-25.

Perrenoud, Ph. (1997). *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF.

Perrenoud, Ph. (1999). *Dix nouvelles compétences pour enseigner*. Paris : ESF.

Perrenoud, Ph. (2000). L'école saisie par les compétences. In C. Bosman, F.M.Gerard & X. Roegiers (dir.), *Quel avenir pour les compétences ?* (p. 21-41). Bruxelles : De Boeck.

Perrenoud, Ph. (2000a). *L'approche par compétences, une réponse à l'échec scolaire ?* En ligne. <http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_2000/2000_22.html>. consulté le 16 avril 2007.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1947). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.

Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1966). *L'image mentale chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.

Portelance, L. & Legendre, M. F. (2005). L'évaluation des compétences professionnelles. *Formation et Profession, 11* (1), 13-22.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematics giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 297-311.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1994). The role of visually mediated processes in classroom mathematics. *Zentralblatt fürDidaktik der Mathematik, 26*, (4), 114-117.

Programme d'études Mathématique 116 – enseignement secondaire (1993). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 216 – enseignement secondaire (1994). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 314 – enseignement secondaire (1995). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 416 – enseignement secondaire (1996). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 436 – enseignement secondaire (1996). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 514 – enseignement secondaire (1997). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme d'études Mathématique 536 – enseignement secondaire (1997). Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Programme de formation de l'école québécoise (2004). Enseignement secondaire, premier cycle. Version approuvée. Québec : Ministère de l'Éducation du Québec. Gouvernement du Québec.

Quadling, D. A. (1986). Algèbre, analyse et géométrie. In R. Morris (dir.), *Études sur l'enseignement des mathématiques,* vol. 5, (p. 103-121). Paris : UNESCO.

Ranucci, E. R. (1952). *Effect of the study of Solid Geometry on Certain Aspects of space perception abilities*. Ph. D. dissertation. New York : Columbia University.

Resnick, L. B. (1989). Defining, assessing and teaching number sense. In J. T. Sowder & B. P. Schappelle (eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics : Report of a conference,* (p. 35-39). San Diego : San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Rey, B. (1996). *Les compétences transversales en question*. Paris : ESF.

Rey, B. *et al.* (2003). *Les compétences à l'école.* Bruxelles : De Boeck.

Reys, B. J. (1986). Teaching computational estimation : Concepts and strategies. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 31-44). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, B. J. *et al.* (1991). Developing number sense in the middle grades. In *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Addenda Series, Grades 5 – 8*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. E. (1984). Mental computation and estimation : past, present, and future. *The elementary school Journal*, vol. 84, 5, (p. 547-557). Chicago : University of Chicago Press.

Robinson, G. B. (1959). *The Foundations of Geometry.* 4th ed. Toronto : University of Toronto Press.

Roegiers, X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration des compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*, 1re éd. Bruxelles : De Boeck.

Romainville, M. (1996). L'irrésistible ascension du terme « compétences » en éducation. *Enjeux*, 37-38, mars-juin, 132-142.

Ropé, F. (1996). « Pédagogie des compétences » à l'école, « logique des compétences » dans l'entreprise. In N. Marouf (dir.), *Le travail en question*, (p. 73-116). Paris : Éditions L'Harmattan.

Ropé, F. et Tanguy, L. (1994). *Savoirs et compétences. De l'usage de ces notions dans l'école et l'entreprise*. Paris : Éditions L'Harmattan.

Rossier, P. (1971). *Les Fondements de la Géométrie de David Hilbert.* Paris : Dunod.

Rubenstein, R. N. (1986). Varieties of estimation. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 157-161). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Russell, B. A. W. (1956). *An Essay on the Foundations of Geometry.* New York : Dover Publications.

Russo, F. (2002). Géométrie. In *Encyclopaedia Universalis,* vol. 10, (p. 237-242). Paris.

Saads, S. & Davis, G. (1997). *Visual perception and image formation in three dimensional geometry*. En ligne. <http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpubs/Saads&Davis.html>. consulté le 16 avril 2007.

Scallon, G. (2004). *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences.* Québec : Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Sherard, W. H. (1981). Why is geometry a basic skill ? *Mathematics Teacher*, 74, (1), 19-21.

Smith, D. E. (1958). *History of Geometry Methods.* New York : Dover Publications.

Smith, M. (1964). *Spatial Ability. Its educational and social significance*. London : University of London Press.

Sowder, J. T. & Schappelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics : Report of a conference*. San Diego, CA : San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.

Sowder, J. (1992a). *Comportements démontrant le sens numérique*. Traduction et adaptation du texte *Behaviors that demonstrate Number Sense* distribué lors d'un atelier présenté par J. Sowder et J. Kelin au congrès annuel du National Council of Teachers of Mathematics à Nashville en avril 1992.

Sowder, J. T. (1992b). Making Sense of Numbers in School Mathematics. In G. Leinhardt, R. Putman & R. A. Hattrup (eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics teaching* (p. 1-51). Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates.

Stanley, J. C., Keating, D. P. & Fox, L. H. (1974). *Mathematical Talent : Discovery, Description and Development*. University Press. Baltimore : John's Hopkins.

Tardif, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique. L'apport de la psychologie cognitive.* Montréal : Les Éditions Logiques.

Tardif, J. (1999). *Le transfert des apprentissages*. Montréal : Les Éditions Logiques.

Taton, R. (1966). *Histoire générale des sciences*. Tome I. 2^{e} éd. Paris : Presses Universitaires de France.

Taton, R. (1969). *La Science Moderne (de 1450 à 1800)*. Tome II. 2^{e} éd. Paris : Presses Universitaires de France.

Toretti, R. (1978). *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Boston : D. Reidel Publishing Company.

Tournès, D. (2001). *Figures idéales et figures sensibles. Place des instruments de dessin dans l'histoire et l'enseignement de la géométrie*. [Voir le site http://www.reunion.iufm.fr/Recherche/Expressions/18/Tournes.pdf ; consulté le 16-04-07].

Trafton, P. R. (1978). Estimation and mental arithmetic : important components of computation. In M. N. Suydam & R. E. Reys (eds.), *Developing Computational Skills—1978 Yearbook* (p. 196-213). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Trafton, P. R. (1986). Teaching computational estimation : Establishing an estimation mind-set. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 16-31). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1982). van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. *Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project*. Chicago : University of Chicago, Department of Education (Eric Document Reproduction Service, N^{o} ED 220 288).

Usiskin, Z. (1985). We Need Another Revolution in Secondary School Mathematics. In C. R. Hirsch & M. J. Zweng (eds), *The Secondary School Mathematics Curriculum—1985 yearbook* (p.1-21). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (eds), *Learning and teaching geometry, K-12—1987 Yearbook* (p. 17-31). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Usiskin, Z. (1997). *The Implications of "Geometry for All"*. [Voir le site http://www.ncsmonline.org/NCSMPublications/1997journals.html ; consulté le 24-12-06].

van Hiele, P. M. (1957). *De problematick van het inzicht gedmonstreed van het inzicht van schodkindren in meetkundeleerstof*. [The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry.] (Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht).

Van Hiele, P. M. (1959/1985). The child's thought and geometry. In D. Fuys, D.Geddes & R. Tischler (eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and*

Pierre M. van Hiele (p. 243-252). Brooklyn : Brooklyn College, School of Education. (ERIC Document Reproduction Service N° 289 697).

van Hiele-Geldof, D. (1957/1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school. In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (eds.), *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and P.M. van Hiele* (p. 1-214). Brooklyn : Brooklyn College. [Original document in Dutch. *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V. H. M. O.*] (Unpublished doctoral dissertation, University of Utrecht, 1957).

Vergnaud, G. (2001). Sur la compétence. Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In *Actes du colloque du Groupe des didacticiens en mathématiques du Québec.* Montréal : Université de Montréal.

Verriest, G. (1951). *Les nombres et les espaces.* Paris : Collection Armand Colin.

Vial, J. (2003). *Histoire de l'éducation.* Collection Que sais-je ? Paris : Presses Universitaires de France.

Vitrac, B. (1990). *Euclide. Les Éléments.* vol. 1. Paris : Presses Universitaires de France.

Wessels, D. & Van Niekerk, R. (1998). *Semiotic models and the development of secondary spatial knowledge*. Short oral communication presented during PME 22 at Stellenbosch, South Africa.

Wheatley, G. H. & Hersberger, J. (1986). A calculator estimation activity. In H. L. Schoen & M. J. Zweng (eds.), *Estimation and Mental Computation—1986 Yearbook* (p. 182-185). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Wirszup, I (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In J. L. Martin & D. A. Bradbard (eds.), *Space and geometry Papers from a research workshop* (p. 75-97). Athens, GA : University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 132 033).

Wolfe, L.R., (1970). *The effects of space visualization training on spatial ability and arithmetic achievement of junior high school students*. Ed. D. dissertation, University of New York at Albany.

Yerushalmy, M. & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in mathematics*, *21*, 199-219.

Zeitler, H. (1990). Axiomatics of geometry in school and in science. *For the Learning of Mathematics*, *10*, (2), 17-24.

Zimmermann, W. & Cunningham S. (1991). What is Mathematical Visualization ? In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (p. 1-7). Washington : Mathematical Association of America.