Motivation scolaire : Élaboration d'un dispositif d'intervention sur les difficultés des élèves en apprentissage des nombres rationnels

Mémoire

Emmanuelle Couture

Maîtrise en psychopédagogie
Maître ès arts (M.A.)

Québec, Canada

Motivation scolaire : Élaboration d'un dispositif d'intervention sur les difficultés des élèves en apprentissage des nombres rationnels

Mémoire

Emmanuelle Couture

Sous la direction de :

Helena Boublil-Ekimova, directrice de recherche

RÉSUMÉ

De nombreuses recherches démontrent que la période de la transition primaire-secondaire est marquée par une baisse importante de la motivation chez beaucoup d'élèves, baisse qui se poursuivra tout au long du secondaire et qui mènera souvent à l'abandon des études (Nimier, 1977; Wigfield et Eccles, 1994; Viau et Bouffard, 2000; Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001; Chouinard, 2001; Bouffard, Chouinard, Marcotte et al. 2006; Galand, 2006). Les difficultés engendrées par une matière scolaire peuvent certainement influencer négativement la motivation des élèves, c'est pourquoi leur porter une attention particulière prend une importance pour lutter contre le décrochage scolaire.

Ce projet s'intéresse aux moyens mis en œuvre par les enseignants permettant aux élèves de s'engager dans les tâches scolaires et de recevoir le soutien essentiel à leur réussite en mathématique. Nous avons choisi pour cette étude le concept des nombres rationnels, l'un des concepts les plus complexes dont la maîtrise des procédures élémentaires avec ces nombres représente une difficulté importante pour de nombreux élèves (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Stegen et Sacré, 2004a, 2004b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010).

En nous référant au cadre théorique portant sur la motivation et sur l'apprentissage des nombres rationnels, nous avons élaboré un dispositif de formation permettant aux enseignants d'évaluer la motivation scolaire et les connaissances des élèves portant sur cette matière, ainsi que d'intervenir tant sur les difficultés des élèves que sur l'organisation des apprentissages. Les outils élaborés dans ce projet sont destinés aux enseignants qui cherchent à favoriser la réussite des élèves ayant des difficultés d'apprentissage ou un manque de motivation.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

J'utilise les prochaines lignes pour remercier les personnes qui m'ont grandement aidé à réaliser ce mémoire.

Tout d'abord, j'offre mes plus sincères remerciements à ma directrice de recherche, Mme Helena Boublil-Ekimova, professeure en didactique des mathématiques à l'Université Laval. Elle a été, pour moi, une grande source de motivation. Elle m'a soutenue tout au long de ma rédaction, donnant le temps, l'énergie et le support dont j'avais besoin pour continuer.

Un énorme merci à tous les professeurs de l'Université Laval qui ont croisé ma route durant les dernières années et qui ont su me donner le gout de continuer mes études. Vous avez fait développer en moi une passion pour l'enseignement et je vous en remercie.

Je veux aussi remercier ma famille qui m'a grandement soutenue durant mes études. Tout d'abord, je veux remercier mes parents, Fernande et Laurier, de m'avoir poussé à m'instruire et persévérer devant les difficultés. C'est principalement à cause de vous que j'ai pu réussir ce projet et que je suis devenue la personne que je suis aujourd'hui. Je veux aussi remercier mes sœurs et mes frères qui m'ont motivée, par leurs encouragements, à poursuivre mes études. Vous êtes des modèles pour moi, merci encore. Finalement, je veux offrir mes plus sincères remerciements à mon conjoint, Antoine, qui m'a épaulé tout au long de cette rédaction. Tu as été l'oreille attentive dont j'avais besoin.

INTRODUCTION

Tous les intervenants du domaine de l'éducation ont à cœur d'intéresser les élèves, de leur faire aimer la matière, de susciter et de maintenir leur engagement envers les tâches scolaires. En somme, ils désirent entretenir la motivation de leurs élèves à l'égard des apprentissages scolaires et, plus largement, à l'égard de l'école. Les dimensions rattachées à la motivation scolaire sont multiples et se rapportent autant à la pratique, à l'organisation et à l'offre de services qu'aux différentes composantes du climat scolaire (sentiment d'appartenance, climat éducatif, etc.), ce qui en fait un domaine vaste et complexe (Nimier, 1977; Tardif, 1992; Wigfield et Eccles, 1994; Viau et Bouffard, 2000; Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001; Chouinard, 2001; Bouffard, Chouinard, Marcotte et al. 2006; Galand, 2006; Chouinard, 2012).

S'il revient à l'enseignant de mettre en place, dans sa classe, les pratiques pédagogiques et les conditions permettant aux élèves de s'engager dans les tâches scolaires et de recevoir le soutien essentiel à leur réussite, le maintien de la motivation du jeune repose aussi sur les services éducatifs offerts dans l'établissement scolaire. Leur succès implique donc tous les acteurs de l'école et du milieu.

Un tel défi se pose tout particulièrement au moment du passage du primaire au secondaire. En effet, concomitante avec le début de la puberté, l'entrée au secondaire pose un défi important aux élèves. De nombreuses recherches démontrent que cette période est marquée par une baisse importante de la motivation chez beaucoup d'élèves, baisse qui se poursuivra tout au long du secondaire et qui mènera à l'abandon des études pour plusieurs d'entre eux (Nimier, 1977; Eccles et Wigfield, 1994; Viau et Bouffard, 2000; Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001; Chouinard, 2001; Bouffard, Chouinard, Marcotte et al. 2006; Galand, 2006). Selon le rapport portant sur la diplomation et la qualification (MELS, 2014), près de 16,2 % des étudiants ont abandonné leur formation scolaire en 2012-2013 et le taux de diplomation global des moins de 20 ans est de seulement 74.6 %. Bien que la baisse de motivation qui se manifeste lors de la transition vers le secondaire ne constitue pas le seul et unique facteur du décrochage scolaire, il en demeure tout de même l'un des importants prédicateurs. Le décrochage est une problématique à laquelle il faut s'attarder en plus de tenter d'agir positivement sur les causes qui lui sont rattachées.

Ce n'est pas seulement la transition d'un milieu scolaire à un autre qui pose un défi motivationnel chez les élèves. Une bonne motivation dans l'apprentissage de différentes matières scolaires est aussi un facteur important à prendre en considération dans l'analyse du décrochage scolaire. Parmi plusieurs disciplines, le domaine des mathématiques est souvent répertorié comme la bête noire des matières scolaires. Plusieurs élèves se heurtent aux difficultés dans leur apprentissage, abaissant ainsi leur niveau de motivation. Cependant, la réussite en mathématiques demeure indispensable à l'obtention du diplôme d'études secondaire (DES).

Selon plusieurs études réalisées jusqu'à ce jour dans le domaine des apprentissages en mathématiques (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Stegen et Sacré, 2004a, 2004b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010; Mercier et Deblois, 2004; Adihou et Arsenault, 2011; Saboya et Rhéaume, 2013), le concept de nombres rationnels est considéré comme l'un des concepts les plus complexes et la maîtrise des procédures élémentaires à propos des fractions représente une difficulté importante pour de nombreux élèves. À cet effet, les résultats du sondage que nous avons effectué en juin 2016 auprès de onze professionnels de l'enseignement inscrits au diplôme d'études supérieures spécialisées (D.E.S.S) en adaptation scolaire concordent avec ceux des recherches étudiées. Le concept de nombres rationnels est ressorti comme étant le plus difficile à enseigner et celui avec lequel les élèves éprouvent le plus de difficultés (voir l'annexe I). Les résultats de ce sondage montrent ainsi que les enseignants sont conscients du niveau de difficulté accru de ce concept et remarquent que leurs élèves ont de la difficulté à bien le traiter. Les difficultés engendrées par une matière scolaire peuvent certainement influencer négativement la motivation des élèves, c'est pourquoi leur porter une attention particulière prend toute son importance dans la lutte au décrochage scolaire.

Élaboré à la vue de ces constats, le présent projet a pour but de préparer un dispositif de formation des enseignants permettant d'évaluer la motivation scolaire et les connaissances des élèves sur l'emploi des nombres rationnels, en plus d'intervenir tant sur les difficultés des élèves que sur l'organisation des apprentissages des nombres rationnels.

Pour répondre à cet objectif, nous avons élaboré ce travail de recherche qui est composé de 5 chapitres.

Dans le premier chapitre, en référant aux recherches menées dans le domaine de la motivation, nous décrivons les différents facteurs qui entrent en jeu lors du passage entre l'école primaire et l'école secondaire. Ensuite, parmi les facteurs exposés, nous étudions ceux qui peuvent être à la source des difficultés d'apprentissage que vivent les jeunes pendant cette période. Enfin, nous étudions les difficultés éprouvées par les élèves dans le domaine mathématique et plus particulièrement dans l'apprentissage des nombres rationnels. Nous terminons le chapitre avec la présentation de l'importance de l'apprentissage des nombres rationnels dans le cursus mathématique. Cette démarche nous permet de décrire les problèmes qui ont été soulevés dans les recherches menées dans ces deux domaines et de préciser les orientations principales de notre recherche.

Le deuxième chapitre présente le cadre théorique, dans lequel nous décrivons le concept de motivation scolaire. Pour ce faire, nous mettons de l'avant une définition, puis nous exposons une recension d'écrits traitant de la motivation. Cette recension nous permet de faire ressortir les facteurs externes et internes qui ont une influence sur la motivation. Cette analyse nous permet aussi de mettre en évidence les différentes démarches méthodologiques employées par des chercheurs pour répondre à leurs objectifs de recherche. Le chapitre prend fin avec l'exposition des différents éléments théoriques retenus de la recension d'écrits et qui seront utiles pour préparer notre dispositif d'évaluation de la motivation en contexte scolaire.

Dans le troisième chapitre, nous présentons notre cadre conceptuel traitant de la notion de nombres rationnels. Tout d'abord, nous décrivons la pluralité de sens de la fraction. Nous poursuivons, en nous appuyant sur des recherches en didactique des mathématiques, avec la présentation de la typologie des difficultés d'apprentissage des nombres rationnels. Nous terminons le chapitre avec une description des obstacles d'apprentissage des nombres rationnels.

Le quatrième chapitre porte sur notre méthodologie. En référence à notre cadre théorique, nous exposons les étapes de réalisation de notre grille d'évaluation de la motivation. Ce questionnaire permettra aux enseignants de se renseigner sur l'intensité de chacune des perceptions (compétence, contrôle, valeur) qu'ont les élèves vis-à-vis une tâche portant sur les nombres rationnels. Puis, en nous appuyant sur notre cadre conceptuel portant sur les nombres rationnels, nous décrivons l'élaboration du document synthèse qui inclut une description des difficultés des élèves dans l'apprentissage des nombres rationnels ainsi que des raisons et des obstacles qui les provoquent. Ce document inclut aussi une description des différentes interventions réalisables pour chacune des difficultés. Cette section comprend diverses pistes de solution qui pourront inspirer les enseignants pour planifier des interventions concrètes auprès de l'élève en difficulté. Par la suite, nous présentons la description de la démarche employée pour élaborer le test diagnostique permettant l'évaluation des connaissances et des compétences en lien avec les nombres rationnels. Finalement, nous décrivons la démarche employée pour l'élaboration de la progression d'apprentissage en lien avec les nombres rationnels.

Le cinquième chapitre se consacre à la présentation des résultats de recherche. Dans le but de répondre à l'objectif de recherche en lien avec la motivation, nous présentons d'abord la grille d'évaluation de la motivation, puis la grille de compilation des résultats et, finalement, le document permettant l'interprétation des résultats obtenus. Pour répondre aux objectifs en lien avec les nombres rationnels, nous poursuivons avec la présentation d'un document « aide-mémoire » sur la notion de nombres rationnels. Nous y situons les nombres rationnels par rapport aux ensembles de nombres et nous présentons une description détaillée de ce concept (les différentes notations, les opérations, la pluralité d'interprétations des fractions, etc.). Nous exposons, ensuite, un document synthèse exposant les difficultés, un exemple de chacun, les raisons, le type d'erreur et les interventions réalisables pour tenter de contrer ces difficultés. Cette section est suivie par la présentation du test diagnostique et de la progression d'apprentissage sur les nombres rationnels. En somme, tous les outils élaborés dans ce projet sont destinés aux enseignants qui cherchent à favoriser la réussite des élèves ayant des difficultés d'apprentissage ou vivant un manque de motivation.

Finalement, dans une conclusion générale, nous synthétisons la démarche effectuée pour répondre à nos objectifs, puis nous exposons les limites et les apports de cette recherche. Nous terminons avec la proposition de différentes avenues permettant de poursuivre notre réflexion.

1. PROBLÉMATIQUE

Pour favoriser la réussite scolaire des élèves lors du passage à l'école secondaire, il faut d'abord comprendre les causes qui peuvent engendrer des difficultés chez les élèves lors de cette période. Dans ce chapitre, nous décrivons d'abord les facteurs internes et externes pouvant influencer le passage du primaire vers le secondaire et modifier, positivement ou négativement, la motivation des élèves. Nous regardons l'effet que peut avoir une baisse de motivation sur la réussite scolaire pour finalement cerner le domaine mathématique causant des difficultés d'apprentissage chez l'élève. Ensuite, nous nous intéressons aux principales difficultés des élèves en mathématiques et plus précisément dans l'apprentissage des nombres rationnels étudiés à la fin du primaire et au début du secondaire. Nous terminons ce chapitre en présentant l'importance de l'apprentissage de ces nombres dans le cursus mathématique. La description de facteurs influençant la motivation et des difficultés rencontrées nous permettra de préciser nos objectifs de recherche.

1.1 TRANSITION DU PRIMAIRE VERS LE SECONDAIRE

Au Québec, la fréquentation d'un établissement scolaire est obligatoire pour un élève dès l'âge de 6 ans et jusqu'à son seizième anniversaire. Lors de ces années d'étude, l'élève est amené à vivre des changements cruciaux. L'un d'eux est le passage de l'école primaire vers l'école secondaire. Ce changement d'établissement est critique dans la vie du jeune, car il se produit habituellement dans une période où le jeune est plus susceptible de vivre des remises en question autant sur le plan personnel que scolaire.

Sur le plan personnel, le jeune est confronté à des changements d'ordre biologique. En effet, cette période transitionnelle concorde avec l'arrivée de la puberté chez l'adolescent. Certains jeunes se développent hâtivement ou tardivement, ce qui peut influencer positivement ou négativement l'image qu'ils ont de leur apparence physique. Le développement d'une image corporelle négative peut être problématique chez les jeunes adolescents, car elle est l'une des causes du développement de symptômes dépressifs (Bélanger, 2010. Bélanger et Marcotte, 2011) pouvant perdurer tout au long du secondaire même si les variables scolaires externes, comme le soutien de l'enseignant et le climat de classe, sont contrôlées (Bélanger, 2010).

La transition du primaire vers le secondaire amène aussi un changement brusque dans le rôle social joué par les élèves de sixième année. En effet, ils passent d'un statut d'ainés à un statut de cadets (Duclos, 1992). Ce changement de rôle peut susciter des craintes comme celle d'être contraint à un isolement social, qui est majoritairement vécue par les jeunes adolescentes. En effet, le passage vers le secondaire peut amener les jeunes à rompre certaines amitiés et les obliger à s'en créer de nouvelles (Laveault, 2006; Lanson, 2014), ce qui peut leur occasionner un certain stress. Ce sentiment peut prendre de l'ampleur surtout si le jeune entretient déjà la peur d'avoir de la difficulté à se faire de nouveaux amis et de ne pas faire partie d'un groupe social.

Toujours du côté des changements d'ordre social, lors de la transition du primaire vers le secondaire, les jeunes sont amenés à vivre certaines modifications dans la relation entretenue avec leurs enseignants. En effet, lors de leurs années passées au primaire, les jeunes ont la chance de faire face à un seul enseignant et à quelques spécialistes qui les suivent durant toute l'année scolaire. Dans la majorité des cas, les liens entre les enseignants et les élèves se forment rapidement, ce qui fait en sorte que les besoins de sécurité comme la stabilité et la protection psychologique se développent plus aisément, tout comme les sentiments d'appartenance et de reconnaissance qui font partie intégrante du besoin affectif (Maslow, 1968). En arrivant au secondaire, le jeune adolescent désire se sentir en sécurité et reconnu par le cadre enseignant. Par contre, le nouvel environnement scolaire l'oblige à rencontrer sporadiquement plusieurs enseignants, ce qui rend le contact et la création de liens de confiance plus difficiles (Laveault, 2006). Selon l'étude réalisée par Barber et Olsen (2004), les élèves, lors de leur entrée au secondaire, ont la perception qu'ils reçoivent moins de soutien de la part de leurs enseignants. Cette perception peut venir influencer négativement leur engagement et augmenter les risques de décrochage scolaire (Poirier, Lessard, Fortin, Yergeau, 2013). Inversement, les élèves qui se sentent soutenus réussissent mieux et s'impliquent davantage dans le milieu scolaire (Poirier, Lessard, Fortin et Yergeau, 2013). La relation entre l'enseignant et l'élève est donc cruciale pour le cheminement social et intellectuel de l'élève.

Outre les changements sociaux, l'entrée au secondaire confronte les élèves à des modifications sur le plan organisationnel. En effet, en plus de devoir fréquenter une école plus grande, ils doivent jongler avec une plus grande diversité de matières réparties selon un horaire variable, une plus grande la liberté associée à l'augmentation des exigences scolaires, un plus fort degré de compétition lié aux évaluations plus exigeantes, etc. (Poncelet et Lafontaine, 2011; Lanson, 2014) Ces changements environnementaux amènent les élèves à être plus craintifs envers leur nouvel établissement scolaire. À cet effet, les craintes les plus souvent rapportées par les élèves face à leur passage vers le secondaire sont la peur de devenir une victime, la peur de se perdre, la peur de ne pas avoir assez de temps pour changer de local, la peur d'une charge de travail trop élevée et la peur de la nouvelle routine. Certains craignent même de ne pas être assez autonomes pour entreprendre leurs études secondaires (Duclos, 1992; Bouffard, Denoncourt, Dublois et Mc Intyre, 2004). L'amalgame de ces appréhensions peut angoisser les jeunes et diminuer leur sentiment de contrôle sur ce qui les entoure, ce qui aura un impact négatif sur leur sentiment de sécurité et leur perception de contrôlabilité (Maslow, 1968; Viau, 1994). Tous ces éléments peuvent affecter la motivation des élèves lors de la transition du primaire vers le secondaire.

Une bonne transition du primaire vers le secondaire semble donc importante pour contrer le développement de symptômes dépressifs, pour diminuer le sentiment de stress, pour diminuer les craintes envers le nouvel environnement et, finalement, pour augmenter l'engagement scolaire et les sentiments de maîtrise et de sécurité (Maslow, 1968; Duclos, 1992; Viau, 1994; Bouffard, Denoncourt, Dublois et Mc Intyre 2004; Bélanger, 2010; Lanson, 2014; Poirier, Lessard, Fortin et Yergeau, 2013). Lorsque bien vécue, la transition du primaire vers le secondaire permet de lutter contre la baisse d'intérêt envers les matières scolaires, la diminution du rendement scolaire, les attitudes négatives envers l'école et les enseignants, la diminution de l'amour-propre et l'affaiblissement du sentiment de compétence (Chouinard, 2009; Bouffard, Denoncourt, Dublois et Mc Intyre. 2004). En somme, pour diminuer un éventuel effet négatif de ces facteurs sur la motivation scolaire de l'élève, il faut lui offrir un environnement éducatif permettant d'atténuer le manque de concordance entre ses besoins et les ressources offertes dans le milieu.

1.2 MOTIVATION SCOLAIRE

La motivation fait partie des déterminants les plus importants de la réussite scolaire des élèves. Cependant, celle-ci semble se détériorer lors de leur parcours scolaire. Comme le souligne Chouinard (2012), au début du primaire, les élèves sont motivés, optimistes et croient en leurs capacités d'apprendre. Les craintes qu'ils peuvent avoir sont davantage axées sur le plan social que sur le plan scolaire. Cependant, après quelque temps, la représentation qu'ils ont de l'école se complexifie. Les élèves sont confrontés à des échecs scolaires, des difficultés, des évaluations qui sanctionnent la maîtrise de connaissances plutôt que leur acquisition, etc. Ils prennent tranquillement conscience que l'école est un milieu évaluatif et qu'il est axé davantage sur la validation de la compétence que sur le développement de stratégies cognitives efficaces à leur développement (Tardif, 1997). C'est pourquoi certains d'entre eux optent pour des comportements d'évitement dans le but de préserver leur estime de soi. Ces comportements peuvent se manifester de plusieurs façons : opposition, refus de faire la tâche, absentéisme, etc. (Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001; Chouinard, 2001).

Outre ces comportements d'évitement, les élèves développent très rapidement un niveau de conscience approfondi des conséquences positives et négatives possibles de leur engagement. Cette prise de conscience peut influencer la motivation des jeunes face à l'école, car elle les amène à peser les pour et les contre de leur investissement dans une activité scolaire. Cependant, comme le souligne Tardif (1997), ce ne sont pas les capacités réelles des jeunes qui ont le plus de poids dans la décision de s'engager ou non dans la réalisation d'une tâche, mais bien la perception que les élèves ont de leurs capacités. Dans un cadre sociocognitiviste, ces différentes perceptions que les jeunes ont d'eux-mêmes et de la tâche qui leur est proposée seraient des déterminants importants de leur motivation. Elles ont d'ailleurs été l'objet de plusieurs études. Par exemple, Bandura (1993) a étudié la perception qu'un élève a de sa compétence à réussir une activité. Wigfield et Eccles (1992) ont pour leur part étudié la perception de la valeur que l'élève accorde à une activité. Finalement, Skinner (1995) s'est penché sur la perception du degré de contrôle que l'élève exerce sur le déroulement d'une activité et sur ses conséquences. Tous ces auteurs ont étudié, de façon indépendante, chacune des perceptions et les ont mis en relation avec un ou des comportements d'apprentissage. Dans leurs recherches, Viau et ses collaborateurs (Viau, 1994; Viau, 1999; Viau et Bouchard, 2000) mettent en relation ces trois perceptions et leur impact sur les comportements d'apprentissage des élèves. Ces perceptions influenceraient directement les indicateurs de la motivation, soit l'engagement cognitif de l'élève et sa persévérance, deux éléments qui à leur tour influenceraient la performance. En d'autres termes, la motivation influencerait indirectement la réussite scolaire.

La réussite scolaire, pour sa part, est synonyme d'achèvement avec succès d'un parcours scolaire. En d'autres mots, il s'agit de l'atteinte des objectifs d'apprentissage et d'une maîtrise des savoirs prescrits par le programme de formation. Cependant, comme le soutient Viau (1994), le rendement antérieur obtenu dans une matière scolaire explique une grande partie de la perception de compétence ressentie par l'élève. Cette représentation influence ensuite le rendement ultérieur. Ce phénomène, qui se base sur le déterminisme réciproque, explique donc que les résultats obtenus antérieurement pourraient venir modifier les perceptions du jeune, sa dynamique motivationnelle et, par le fait même, ses résultats futurs. Ce constat est inquiétant, car, selon la recherche de Roderick et Camburn (1999) réalisée aux États-Unis, près de 25 % des élèves qui obtenaient de bons résultats au primaire n'atteignent pas le seuil de réussite dans au moins une matière scolaire en première secondaire et 10 % d'entre eux ne réussissent pas à reprendre leur retard au cours de l'année suivant leur entrée au secondaire. La perception de compétence en mathématiques et la motivation scolaire sont aussi en baisse lors du passage du primaire vers le secondaire et celles-ci ne cessent de diminuer lors de la première année du secondaire (Wigfield et Eccles, 1994; Barber et Olsen, 2004). Ces éléments, mis ensemble, peuvent affecter négativement les perceptions entretenues par les élèves et leur rendement académique tout au long de leur cheminement.

1.3 MOTIVATION EN MATHÉMATIQUES

La mathématique n'est certainement pas le domaine le plus apprécié des élèves et il est loin de limiter les inquiétudes. En effet, selon Nimier (1977), autant les garçons que les filles nourrissent un sentiment d'angoisse envers les mathématiques. Ce dernier peut provenir de mécanismes de déplacement, de la complexité du langage mathématique ou de la rigueur constante demandée dans ce domaine (Nimier, 1977). Outre ces éléments, les nombreuses difficultés rattachées à l'apprentissage de cette matière peuvent aussi être la cause du déclin de la motivation des élèves envers celle-ci.

En effet, les mathématiques du primaire sont différentes des mathématiques du secondaire. Le passage au secondaire demande de laisser de côté les apprentissages basés sur la manipulation et sur l'exécution d'exercices numériques pour migrer vers une mathématique plus abstraite (FUNDP, 2002). Ce changement amène certaines difficultés comme la non-maîtrise du vocabulaire mathématique ainsi que la difficulté à traduire un énoncé par un dessin, à passer du langage symbolique au langage discursif (et vice versa), à maitriser les priorités d'opérations, à se repérer dans l'espace, à concevoir le signe d'égalité comme un signe équilibre, à maitriser les produits remarquables, à maitriser la règle des signes, à être précis et à intégrer plusieurs apprentissages mathématiques dans une même tâche (FUNDP, 2002).

Nous pouvons retrouver les mêmes difficultés dans les différents domaines mathématiques soit la géométrie, les probabilités et statistiques, l'arithmétique et l'algèbre. Cependant, chacun des domaines comporte aussi ses propres difficultés qui peuvent compliquer la relation des élèves avec les mathématiques.

1.3.1 Difficultés dans l'apprentissage des nombres rationnels

Plusieurs recherches montrent que le concept de nombres rationnels engendre plusieurs difficultés chez les jeunes (Blouin, 2002; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). En effet, l'extension du domaine numérique des entiers aux nombres rationnels amène les élèves à rompre avec des conceptions établies pour faire place à de nouvelles conceptions. En d'autres mots, en travaillant avec les nombres rationnels, l'élève utilise des symboles, des techniques et des règles déjà employés pour désigner, comparer et calculer avec les entiers, mais il doit les utiliser dans un nouveau cadre où certaines de ces règles restent valables et certaines ne le sont plus.

Certaines difficultés sont liées à l'écriture et à la lecture des nombres décimaux. Comparativement aux nombres entiers, avec lesquels les élèves sont habitués d'utiliser une seule graphie pour représenter un nombre, les nombres rationnels peuvent être représentés de différentes façons (écritures fractionnaires et décimales, pourcentages, fractions équivalentes, etc.) (Blouin, 2002; Lessard, 2010). De plus, plusieurs élèves traitent de manière distincte les parties situées de part et d'autre de la virgule des nombres décimaux. Par exemple, ils écrivent le nombre 24 centièmes (0.24) de la manière suivante : 0.024, car, avec les entiers, trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines (Stegen, Géron et Daro, 2007). L'apprentissage et l'utilisation des nombres rationnels engendrent aussi la production d'erreurs lorsque les élèves doivent les lire. Par exemple, lorsqu'ils traitent les deux parties des nombres décimaux comme deux parties entières. Ainsi, certains apprenants oralisent ces nombres comme deux couples d'entiers (24.25 est oralisé vingt-quatre virgule vingt-cinq). La majorité des difficultés à lire les nombres rationnels proviennent de la complexité du vocabulaire utilisé (distinction entre les termes dizaine/dixième, centaine/centième, etc.).

D'autres difficultés liées à l'apprentissage des rationnels sont dues à leur comparaison. Par exemple, les élèves traitent la partie décimale comme des entiers et appliquent dès lors des règles qui leur sont propres (2.623>2.65, car 623>25) (concept de densité, successeur, prédécesseur). L'emploi des algorithmes d'addition, de soustraction, de multiplication ou de division avec les nombres rationnels apporte aussi son lot de difficultés pour les apprenants en raison des nouvelles règles par lesquelles ces algorithmes sont régis (2.3 x 2.4 = 4.12, car 2x2= 4 et 3x4=12) (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Stegen et Sacré, 2004a; Lessard, 2010; Stegen, Géron et Daro, 2007).

L’écriture des nombres rationnels sous la forme fractionnaire est aussi difficile pour les élèves. Certains d’entre eux traitent le numérateur et le dénominateur comme deux nombres n’ayant pas de lien entre eux et appliquent dès lors des procédures propres aux entiers (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Carette, Content, Rey et Gabriel, 2009).

Certains vont même jusqu’à confondre la « / » incluse dans la notation fractionnaire avec la virgule incluse dans la notation décimale (¼ = 1,4). Cette confusion dans la compréhension du lien qui unit le numérateur et le dénominateur amène principalement des erreurs lors de la comparaison de nombres fractionnaires (¾ et 4/5 sont pareils, car il leur manque une partie pour obtenir le tout), dans l’exécution d’opérations d’addition, de soustraction, de multiplication et de division (¼ + ½ = 8, car 1 + 1 + 2 + 4 = 8) et lors de la simplification de fractions (difficulté à simplifier les fractions dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas des multiples de 2) (Blouin, 2002; Deshaies, 2006; Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010).

Le passage d’une écriture fractionnaire à une écriture décimale est aussi difficile pour les élèves. En effet, pour passer d’une représentation à une autre lors du positionnement de nombres sur une droite numérique, plusieurs élèves traitent le numérateur de la fraction comme étant l’entier de référence pour le positionnement (5/2 va être positionné à droite de l’entier 5) (Lessard, 2010). Le passage de l’écriture fractionnaire à l’écriture décimale demande aussi à l’élève de concevoir la fraction comme une division non réalisée, concept difficile à s’approprier, car les jeunes doivent être capables de faire référence à plusieurs interprétations de la fraction. Le passage d’une écriture décimale à une écriture fractionnaire est aussi complexe, car il demande une bonne compréhension du système de numération décimale (0.25 équivaut en fraction décimale à 25/100). Les apprenants, n’étant pas habitués à travailler avec plusieurs représentations écrites d’un seul nombre, peuvent donc éprouver des difficultés à effectuer le passage de l’une à l’autre (Lessard, 2010).

La complexité du domaine des nombres rationnels réside aussi dans le fait que les fractions comprennent une construction à multiples facettes (Brousseau, Brousseau et Warfield, 2004; Kieren, 1995; Lamon, 2001). En effet, la fraction possède de multiples interprétations comme celles référant au partage d'un tout (continu ou discret), au rapport (relation existante entre deux quantités), au quotient (résultat de l'opération de division), au sens opérateur (la fraction est considérée comme une opération multiplicative) et au concept de mesure (la fraction représente le résultat d'une mesure) (Blouin, 2002).

Les obstacles que rencontrent les élèves dans le développement de la compréhension des nombres rationnels sont inhérents à la nature de ces nombres ou sont dus aux approches pédagogiques employées pour enseigner les fractions et les nombres décimaux (Behr et al, 1993; Lamon, 1999). En effet, le choix ou les projets du système éducatif dans lequel l'enfant évolue peuvent aussi être la cause des erreurs commises par les élèves. Certaines difficultés proviennent donc du fait que les progressions didactiques instaurées par les enseignants ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles didactiques et épistémologiques rattachés à la notion de nombres rationnels. Ainsi, les moyens utilisés par les enseignants influencent la compréhension de ce concept mathématique. Ils doivent donc limiter les erreurs engendrées par le passage vers ce nouvel ensemble de nombres. Par exemple, ils doivent s'abstenir de doter leurs élèves de « trucs » sans intervenir sur la compréhension de la procédure (pour comparer 3.14 et 3.9, les enseignants suggèrent à leurs élèves d'ajouter un zéro à la droite de 9 dixièmes sans expliquer pourquoi l'ajout du zéro peut être nécessaire). Ces « trucs » sont peu généralisables et limitent l'accès à une compréhension conceptuelle adéquate (Stegen et Sacré, 2004b). Les erreurs commises par les élèves peuvent aussi provenir du fait que la progression didactique instaurée par les enseignants pour apprendre les fractions est majoritairement liée à l'utilisation de l'interprétation « partie/tout » de la fraction. Même si cette interprétation est intuitive chez l'enfant, le sens « partie/tout » peut limiter la compréhension de la fraction comme représentation d'une quantité (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). En somme, il faut que les approches utilisées par les enseignants soient diversifiées et prennent en compte les obstacles didactiques et épistémologiques des nombres rationnels.

Selon le programme de formation de l'école québécoise (MELS, 2006a, 2006b), l'apprentissage formel des nombres rationnels débute lors de la première année du deuxième cycle du primaire et s'échelonne jusqu'au premier cycle du secondaire. Les connaissances acquises sont ensuite réinvesties dans d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre et la probabilité. L'acquisition et la consolidation des apprentissages en lien avec les nombres rationnels correspondent à la période de transition entre le primaire et le secondaire où, comme nous l'avons vu, l'enfant vit plusieurs changements pouvant affecter positivement et négativement sa motivation scolaire. Nous croyons alors qu'une prise de conscience par les enseignants des différentes difficultés personnelles et scolaires que vivent les élèves lors de la transition et des différentes interventions réalisables pour tenter de les contrer peut faciliter l'arrimage entre le primaire et le secondaire. Nous supposons que la connaissance de ces phénomènes pourra avoir un effet bénéfique sur les perceptions que les élèves ont d'eux-mêmes, sur leur réussite en mathématiques et, au final, sur leur motivation.

1.3.2 Importance de l'apprentissage des rationnels

Les nombres rationnels constituent le plus grand sous-ensemble des nombres réels et leur importance ne se limite pas qu'aux cours de mathématiques. En effet, les connaissances en lien avec les nombres rationnels peuvent être utiles dans le domaine de la biologie, de la physique, de l'ingénierie, de l'économie, de la sociologie, de la psychologie, etc. De plus, nous utilisons des connaissances en lien avec les nombres rationnels dans notre quotidien. Par exemple, les connaissances liées aux opérations avec les nombres rationnels peuvent être utiles en cuisine (ex. : s'il nous faut ¾ de farine pour une recette faite pour 4 personnes, combien en faut-il pour 6 personnes?). Ces mêmes opérations peuvent aussi faciliter la compréhension des statistiques et des probabilités de base souvent divulguées par nos médias. Elles peuvent aussi nous offrir une meilleure compréhension de nos finances personnelles. De même, l'apprentissage des pourcentages peut aussi être pratique pour être en mesure de comprendre et calculer des intérêts sur un montant donné. L'apprentissage des nombres rationnels nous permet aussi de mieux comprendre une majorité des opérations reliées à l'argent.

Cependant, nous sommes portés à réinvestir davantage nos connaissances liées aux nombres rationnels en utilisant la notation décimale qu'en utilisant la notation fractionnaire, et ce, en raison du fait qu'elles sont moins complexes et qu'elles ressemblent davantage à celles apprises avec les entiers. Par exemple, nous utilisons les décimaux pour calculer le coût total d'achats ou pour mesurer certains objets. En effet, lors de la comparaison de prix ou de mesures, la notation fractionnaire est beaucoup moins utilisée que la notation décimale. Il peut donc sembler normal de se questionner sur la pertinence de l'apprentissage de la représentation fractionnaire au primaire et au secondaire en supposant que ces connaissances sont moins sollicitées au quotidien. En d'autres mots, serait-il pertinent de limiter l'apprentissage des nombres rationnels à leur représentation décimale pour tenter de contrer les difficultés que peuvent engendrer leurs multiples représentations? Nous devons répondre négativement à cette question, car la représentation fractionnaire et ses opérationnalisations sont réinvesties à maintes reprises dans le cheminement mathématique obligatoire de l'élève au secondaire. Ainsi, tôt ou tard, l'élève sera confronté à l'utilisation de la représentation fractionnaire dans son cheminement scolaire, rendant l'apprentissage des concepts et des stratégies de raisonnement cruciaux au développement du raisonnement mathématique.

La section qui suit est consacrée à la description de différents domaines de réinvestissement de la notation fractionnaire au secondaire, montrant ainsi l'importance de l'apprentissage de cette représentation des nombres rationnels. Nous présentons seulement les réinvestissements des notions liées aux notations fractionnaires, car, comme il a été expliqué précédemment, l'utilisation de la notation décimale semble moins complexe que celle de la notation fractionnaire, en raison de sa ressemblance avec les nombres entiers et du fait que ses réinvestissements sont nombreux et courants dans le quotidien. De plus, à la suite d'expériences professionnelles dans le domaine de l'enseignement des mathématiques au secondaire, nous avons remarqué que les élèves sont plus enclins à utiliser uniquement la notation décimale pour effectuer leurs calculs, affirmant qu'ils ne sont pas capables de travailler avec la notation fractionnaire et que cette dernière peut très bien être remplacée par la notation décimale sans engendrer d'erreurs par rapport aux résultats obtenus. De plus, selon les écrits de Rouche (1998), ce serait la représentation fractionnaire et ses opérationnalisations qui causeraient le plus de difficultés chez l'apprenant.

> *Les fractions sont l'un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité « réservée aux plus intelligents ». « Oh moi et les mathématiques » dit-on dans l'âge adulte, en repensant entre autres aux fractions. Celles-ci sont comme des insectes nuisibles qui s'attaquent aux écoliers et dont les piqûres entraînent d'interminables séquelles intellectuelles et morales. » (Rouche, 1998, p.1)*

Nous voulons alors démontrer l'importance de parfaire les apprentissages relatifs à la notation fractionnaire en exposant ses nombreux réinvestissements dans d'autres domaines mathématiques. Les domaines cités sont ceux de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, de la mesure, des statistiques et des probabilités (Rouche, 1998; Blouin, 2002; Deshaies, 2006).

1.3.2.1 Arithmétique

Les fractions sont d'une grande utilité dans le champ de l'arithmétique. En effet, certaines mesures simples sont exprimées sous une forme fractionnaire. Par exemple, les fractions $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$ sont utilisées dans le contexte de recettes ou de mesures.

Les opérations avec les fractions simples peuvent aussi être des modèles de fonctionnement très utiles pour faciliter la compréhension des fractions décimales ainsi que leurs opérationnalisations. En effet, les fractions décimales se représentent très difficilement graphiquement, car des dixièmes, des centièmes et des millièmes diminuent extrêmement vite, ce qui échappe au regard de l'utilisateur. Pour leur part, les fractions simples se prêtent bien aux représentations imagées, ce qui facilite la compréhension des procédures utilisées.

Les représentations fractionnaires peuvent aussi être utiles lors de la résolution de problèmes qui demandent de comparer des rapports. Par exemple :

> *Dans une recette de potage de brocoli, on demande d'ajouter 250 ml de crème pour 1000 ml de soupe. Pour le potage de carottes, on suggère d'ajouter 700 ml de crème pour 2500 ml. Quel potage est le plus riche en crème?*

L'utilisation de l'interprétation « rapport » de la fraction est ici l'élément clé pour résoudre le problème. De plus, ce problème exige l'utilisation de fractions équivalentes pour arriver à comparer la quantité de crème dans les deux soupes.

La notation fractionnaire est aussi utilisée lors de la résolution de problèmes portant sur la transformation d'une mesure. Comme il a été dit précédemment, l'utilisation de la fraction peut s'avérer profitable lorsque nous sommes confrontés à un problème qui exige de faire une transformation à partir d'une collection numérique, comme c'est le cas dans l'exemple suivant :

> *Depuis la dernière année, le prix du carton de lait à l'épicerie a augmenté de 10 sous. Sachant qu'il se vendait 3.54 $ l'an dernier, calculez le pourcentage d'augmentation de la valeur du carton de lait.*

La notation fractionnaire peut même être d'une grande utilité lorsque l'élève est amené à effectuer un changement de base d'un logarithme. Par exemple, pour calculer la valeur approximative du logarithme $log_2 5$, l'élève, afin d'arriver à un résultat, doit effectuer un changement de base en utilisant la notation fractionnaire et l'interprétation « quotient » de la fraction. Il obtient alors que $log_2 5 = \frac{log_{10} 5}{log_{10} 2} \approx 2.321981$.

1.3.2.2 Algèbre

La notation fractionnaire est aussi mainte fois utilisée dans le domaine de l'algèbre au secondaire. Les apprenants sont amenés à utiliser des notations fractionnaires lorsqu'ils doivent travailler avec certaines relations fonctionnelles. Par exemple, lorsqu'ils abordent la fonction rationnelle. En effet, la règle générale de cette dernière est représentée sous la forme suivante : $f(x) = \frac{k}{x}$ où x ≠ 0. Ainsi, pour résoudre un problème faisant intervenir cette fonction, les apprenants doivent manipuler une représentation fractionnaire qui met en relation une constante (numérateur), une variable indépendante (dénominateur; x) et une variable dépendante (y).

Dans la continuité du travail avec les fonctions, les élèves sont aussi amenés à travailler avec une notation fractionnaire lorsqu'ils traitent les fonctions réelles représentées sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Ils doivent ainsi être habiles à manipuler et opérationnaliser ces représentations pour résoudre ce genre de problèmes.

Nous retrouvons aussi le réinvestissement des nombres fractionnaires au secondaire lors de calculs avec des exposants. Il est donc plus facile d'effectuer et de comprendre le calcul $\sqrt{y^3} \text{ x } \sqrt[3]{y^2} = y^{\frac{3}{2}} \text{ x } y^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}$ lorsque l'écriture des exposants est représentée sous la forme fractionnaire que lorsqu'elle est représentée sous la forme décimale. L'apprentissage des opérations d'addition et de multiplication des fractions est de plus justifié, car c'est avec elles que les élèves pourront résoudre ce type de problème. Ainsi, cette représentation fractionnaire des exposants permet d'unifier et de clarifier le calcul des racines (Rouche, 1998).

La notation fractionnaire est aussi pratique pour traiter les fractions algébriques. En effet, les fractions arithmétiques (fractions que l'on peut définir comme une division non réalisée) aident considérablement les élèves à envisager les fractions algébriques. Ces dernières ont un numérateur et un dénominateur qui ne sont pas des nombres naturels, mais des expressions algébriques (ex : $\frac{a-b}{a+b}$). Ainsi, le travail déjà réalisé avec les fractions arithmétiques permet de mieux conceptualiser la fraction algébrique et aussi de la concevoir comme une division non réalisée avec laquelle il est possible d'obtenir une expression plus commode en la simplifiant ou en l'amplifiant.

L'utilisation de la barre de fraction est aussi un concept universel d'algèbre. Son utilisation permet une commodité importante. En effet, si son utilisation était évitée, le déchiffrement de la suite de la hiérarchie des opérations en algèbre serait beaucoup plus ardu ($\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; $(a^2-b^2):[(a+b)^2] = [(a-b)(a+b)]:[(a+b)^2]$). Cherchant naturellement des notations lisibles, les élèves peuvent alors utiliser des formules à plusieurs étages en recourant aux fractions (Rouche, 1998).

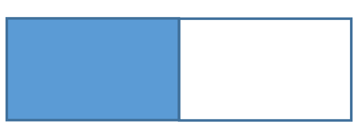
L'apprentissage des fractions arithmétiques permet aussi de donner un modèle aux apprenants pour comprendre le fonctionnement des fractions algébriques. En effet, en algèbre comme en arithmétique, il est possible de factoriser le numérateur et le dénominateur pour simplifier une fraction ($\frac{6}{14} = \frac{2x3}{2x7} = \frac{3}{7}$; $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2} = \frac{(a-b)}{(a+b)}$), d'additionner ou de soustraire les fractions en les réduisant au même dénominateur ($\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{2x3} + \frac{2x2}{3x2} = \frac{7}{6}$; $\frac{1}{x} + \frac{x}{1+x} = \frac{1-x}{x\cdot(1-x)} + \frac{x^2}{x\cdot(1-x)} = \frac{1-x+x^2}{x(1-x)}$), de multiplier les fractions en multipliant les numérateurs et les dénominateurs entre eux ($\frac{1}{2} x \frac{2}{3} = \frac{1x2}{2x3} = \frac{2}{6}$; $\frac{1}{x} x \frac{2x}{x+1} = \frac{1\cdot 2x}{x\cdot(x+1)} = \frac{2x}{x^2+x}$) et d'élever des fractions à des puissances entières ($(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; $(\frac{1}{x})^2 = \frac{1^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$). Il est donc utile d'avoir compris et assimilé les opérations sur les fractions arithmétiques avant de travailler avec les fractions algébriques, car ces dernières sont beaucoup plus abstraites et complexes.

L'utilisation de la notation fractionnaire et l'apprentissage de ses interprétations et de ses opérationnalisations ne sont donc pas à négliger dans le domaine algébrique, car elles permettent la simplification du traitement des données.

1.3.2.3 Géométrie et mesure

La notation fractionnaire est aussi utilisée dans le domaine de la géométrie. Dans le cadre de problèmes traitant du partage d'une quantité continue (ou d'une quantité discrète), il est possible de représenter l'aire d'une partie d'une figure géométrique à partir de la notation fractionnaire.

Quelle fraction de la surface du rectangle représente la partie coloriée?



À l'aide de la notation fractionnaire, nous pouvons écrire que la partie coloriée équivaut à ½ du tout (le rectangle).

Nous retrouvons aussi une utilisation de la notation fractionnaire en géométrie lorsqu'il est demandé de calculer l'aire de figures planes (triangles, losanges, trapèzes) ou le volume de certains solides (pyramides, cônes, boules). Par exemple, lorsqu'il est demandé de trouver le volume d'un cône, il faut se servir de la formule présentée sous la forme fractionnaire $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Ainsi, pour utiliser adéquatement cette formule, les élèves doivent avoir préalablement travaillé avec les notations fractionnaires et pouvoir sous-entendre l'interprétation « quotient » de la fraction permettant de résoudre le problème.

La notation fractionnaire peut aussi être utilisée en géométrie lors de problèmes traitant des figures semblables ou d'homothétie. En effet, l'utilisation de la notation fractionnaire permet la représentation du rapport de similitude entre les figures ainsi que l'agrandissement ou la réduction d'une figure géométrique.

> *La longueur de la façade d'une maison rectangulaire mesure 9 mètres. Cette dernière a été obtenue par agrandissement d'un plan de longueur de 18 cm et de largeur de 14 cm. Calculer le coefficient de l'agrandissement et en déduire la largeur de la maison.*

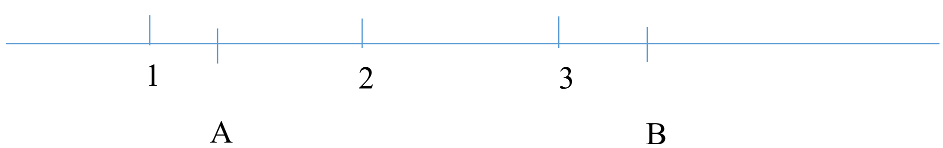
Pour résoudre ce problème, il faut utiliser une notation fractionnaire pour trouver le rapport de similitude (k) entre la maison et son plan ($k = \frac{longueur\ de\ la\ maison\ (mètres)}{longueur\ du\ plan\ (mètres)} = \frac{9}{0.18} = 50$). Cette procédure peut aussi être réinvestie lors du travail effectué avec les triangles semblables dans le domaine de la trigonométrie.

Toujours par rapport aux notions de géométrie, la notation fractionnaire est utilisée pour illustrer certaines règles importantes dans les domaines des relations métriques et des rapports géométriques. Par exemple, la notation fractionnaire de la loi des sinus permet, à l'aide de proportions, de trouver la mesure d'angles ou de côtés manquants dans des triangles quelconques ($\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$). Nous retrouvons aussi la notation fractionnaire dans les rapports trigonométriques du triangle rectangle. Par exemple, le rapport sinusoïdal s'illustre de la façon suivante : $Sin\ A = \frac{la\ mesure\ de\ la\ cathète\ opposée\ à\ l'angle\ A}{mesure\ de\ l'hypothénuse} = \frac{a}{c}$.

Nous employons aussi la notation fractionnaire dans le domaine de la géométrie analytique. Nous n'avons qu'à penser à la formule du point de partage $(x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1), y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1))$ où la fraction $\frac{a}{b}$ représente un rapport entre deux distances. Avec des connaissances limitées par rapport à la manipulation de notations fractionnaires, les élèves, à un stade plus avancé de leur cheminement mathématique, pourraient avoir des difficultés à bien utiliser certaines formules, ce qui pourrait entraîner d'éventuelles erreurs.

L'utilisation de la notation fractionnaire peut aussi être utile dans un contexte de mesure. Ainsi, l'élève peut utiliser la notation fractionnaire dans des problèmes faisant intervenir la droite numérique. Cependant, pour ce faire, il est important qu'il ait au préalable acquis des connaissances sur les grandeurs continues et sur l'interprétation « mesure ».

Estimez le plus précisément possible les fractions qui permettent de repérer les points A et B.



A est situé approximativement à $1\frac{1}{3}$ *et B à* $3\frac{1}{3}$.

1.3.2.4 Statistique et probabilité

La notation fractionnaire est aussi réinvestie dans le domaine des probabilités. En effet, l'utilisation de l'écriture fractionnaire permet clairement le rappel des cas possibles (dénominateurs) et le nombre des cas favorables (numérateurs) dans des problèmes comme celui-ci :

Quelle est la chance d'obtenir 5 lorsqu'on jette un dé à six faces?

Réponse : 1/6

L'emploi de la fraction est à privilégier pour répondre à ce problème, car il serait moins évocateur pour les apprenants de représenter leurs résultats selon une forme décimale (il y a 0.333333… chance d'avoir un 5 en jetant un dé à six faces).

L'apprentissage des opérations qui régissent les fractions est très important dans le champ des probabilités, car il permet de connaitre les procédures pour calculer la probabilité que se produise un événement ou un autre lorsque ces deux événements s'excluent mutuellement. Par exemple, dans le calcul de probabilités d'obtenir une carte de cœur ou une carte noire lors d'une pige dans un jeu de 52 cartes, l'apprenant doit pouvoir effectuer une addition de fractions ($\frac{1}{4}+\frac{1}{2}= \frac{3}{4}$).

Connaitre l'opération de multiplication de fractions peut aussi s'avérer très utile en probabilités lorsqu'il est demandé de calculer une probabilité composée pour 2 événements (Rouche, 1998). Par exemple, une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. Nous tirons une boule sans remise, puis une deuxième. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux boules blanches? La réponse : $\frac{3}{5} \text{x} \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$.

Comme il vient d'être présenté, la notation fractionnaire occupe une grande place dans l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. Ses réinvestissements sont nombreux et les connaissances qui lui sont rattachées sont primordiales pour le cheminement de l'élève. C'est pour ces raisons que cette recherche porte autant attention aux nombres décimaux, souvent utilisés dans la vie courante, qu'aux fractions, dont l'écriture est moins sollicitée quotidiennement, mais qui est réinvestie à maintes reprises au cours des apprentissages des élèves.

1.4 OBJECTIFS DE RECHERCHE

La recension des écrits effectuée précédemment démontre que la transition du primaire vers le secondaire occasionne plusieurs changements socioaffectifs et environnementaux. En effet, cette période transitionnelle amène la rupture de certaines amitiés, poussant les élèves à en créer de nouvelles ainsi qu'à modifier leurs relations avec le personnel enseignant et à changer d'environnement, ce qui peut causer des craintes, des appréhensions, etc. Tous ces facteurs peuvent avoir une influence sur la motivation scolaire de l'élève et, du fait même, influencer sa réussite.

Les mathématiques sont répertoriées comme une matière obligatoire présente tout au long du cheminement scolaire de l'enfant. Dans l'apprentissage des mathématiques, les nombres rationnels (intitulés dans le programme de l'école primaire « fractions et décimaux ») sont considérés comme un concept avec lequel les élèves éprouvent beaucoup de difficulté. Ces nombres interviennent dans plusieurs contextes : argent, pourcentages, probabilités, mesures, etc., ce qui rend les savoirs qui leur sont rattachés essentiels et leur apprentissage incontournable dans les cheminements scolaire et personnel des élèves.

Cependant, aucune recherche répertoriée lors de la recension des écrits n'étudie la période de transition du primaire vers le secondaire en mettant en relation les difficultés des élèves par rapport au domaine des nombres rationnels et leur motivation scolaire.

C'est pour cette raison que nous nous intéressons à l'élaboration d'un dispositif de formation des enseignants permettant d'évaluer la motivation des élèves en apprentissage des nombres rationnels et d'intervenir sur leurs difficultés.

Pour répondre à notre objectif de recherche, nous avons fixé les sous-objectifs suivants :

a) Élaboration d'une grille d'évaluation de la motivation;
b) Élaboration d'un cadre conceptuel portant sur le concept de nombres rationnels;
c) Description d'une progression de l'apprentissage des nombres rationnels (école primaire et 1er cycle du secondaire);
d) Élaboration d'une typologie des difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels et d'une description de leurs causes, des obstacles et des raisons de leur provenance;
e) Description des interventions didactiques sur les difficultés décrites;
f) Élaboration de questions types et de problèmes complexes associés à chacune des difficultés répertoriées dans la section *Typologie des difficultés*.

Ces objectifs ont influencé le choix des théories à étudier. Dans le chapitre suivant, nous développerons le cadre théorique qui nous aidera à atteindre les objectifs de la présente recherche.

2. CADRE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons notre cadre théorique sur lequel prend appui l'élaboration de différentes ressources pédagogiques et didactiques visées par l'un des objectifs de la recherche.

La section 2.1 est consacrée au concept de motivation. Afin de mieux comprendre le concept de motivation scolaire, nous allons faire ressortir certaines définitions attribuées à ce concept dans des recherches en éducation.

Dans la section 2.2, nous allons faire une recension des écrits portant sur la motivation scolaire et ses variations lorsque ce concept est en relation avec la transition du primaire vers le secondaire et avec les mathématiques.

Dans la section 2.3, nous présentons les facteurs externes et internes influençant la motivation scolaire, de même que le modèle de la dynamique motivationnelle en décrivant chacune de ses composantes.

Finalement, dans la section 2.4, nous présentons les éléments théoriques retenus qui nous ont permis d'élaborer une grille d'évaluation de la motivation scolaire.

2.1 CONCEPT DE MOTIVATION SCOLAIRE

La motivation est un concept important dans cette recherche. Afin de mieux le comprendre, nous exposons dans cette section certaines définitions tirées de travaux de chercheurs en éducation (Tardif, 1997; Viau, 1994; Chouinard, 2012).

Chouinard (2012) décrit la motivation comme un ensemble de forces internes et externes qui président à la fois la direction et l'intensité de l'engagement de l'ensemble des comportements du jeune. Il définit plus précisément le terme direction par le sens que prend l'engagement et l'intensité par le niveau d'énergie ou la force que le jeune met dans son engagement. Selon sa définition, l'engagement est la résultante de la motivation. Il lie directement cet engagement aux apprentissages réalisables, car si un jeune s'engage activement dans une tâche liée à la construction de connaissances, il a plus de chance de réaliser des apprentissages.

Pour sa part, Tardif (1997) décrit la motivation comme étant l'engagement, la participation et la persistance d'une personne dans la réalisation d'une tâche. La motivation influencerait donc le choix des activités, l'intensité avec laquelle une personne réalise une tâche et le maintien de cette intensité. L'élève, en contexte scolaire, construirait sa motivation à partir de ses expériences, de ses réussites et de ses échecs desquels il tirerait des conclusions et extrairait des règles et des lois.

Viau (1994) ne s'éloigne pas trop des définitions données par Chouinard (2012) et Tardif (1997). Il décrit la motivation en contexte scolaire comme « un état dynamique [qui prend] origine dans les perceptions qu'un élève a de lui-même et de son environnement et qui l'incite à choisir une activité, à s'y engager et à persévérer dans son accomplissement afin d'atteindre un but » (Viau, 1994, p.7). Le terme perception est utilisé en rapport avec les connaissances qu'a une personne d'elle-même et de son environnement et qui peuvent se modifier selon les événements vécus et l'interprétation, subjective, de la réalité. Les principaux indicateurs de la motivation sont le choix de s'engager, la persévérance, l'intensité avec laquelle la tâche est réalisée et l'engagement de la personne.

Croyant que la motivation est principalement influencée par les perceptions qu'ont les individus des événements et des situations dans lesquelles ils évoluent et que le concept de motivation est aussi influencé par des forces internes propres à chacun, nous nous tournons vers la définition qu'offre Viau (1994) pour définir le concept de motivation dans notre recherche. Cette définition est tirée du modèle de la dynamique motivationnelle qui sera exposé à la section 2.3.2.1.

2.2 RECENSION DES ÉCRITS

Plusieurs chercheurs ont étudié le concept de motivation en contexte scolaire en le mettant en relation avec la transition du primaire vers le secondaire et les mathématiques (Nimier, 1977; Wigfield et Eccles, 1994; Viau, Bouffard, 2000; Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001; Chouinard, 2001; Bouffard, Vezeau, Chouinard et Marcotte. 2006; Galand, 2006). Dans les prochaines sections, nous allons faire une recension des résultats tirés de ces recherches en décrivant aussi les différentes démarches et outils méthodologiques employés par les auteurs. Cette description permettra de faire ressortir les différentes variables dont il faut tenir compte pour élaborer un outil d'évaluation de la motivation.

2.2.1 Méta-synthèse sur la motivation (Galand, 2006)

Dans sa recherche sur la motivation en situation d'apprentissage, Galand (2006) fait une méta-synthèse des écrits portant sur les processus motivationnels. Il a regroupé des études traitant de la motivation pour ensuite en faire une comparaison et une analyse critique. L'auteur a d'abord identifié les thèmes traités dans son dossier thématique pour ensuite faire une analyse de leur importance selon le contexte social du temps. Puis, dans sa synthèse, il a résumé et analysé chacune des recherches pour faire ressortir leurs points de convergence et de divergence.

D'après son analyse, les élèves interagissent avec leur milieu en sélectionnant et interprétant les signaux qu'ils reçoivent de leur environnement. Leurs réactions dépendent donc de l'évaluation qu'ils font de la situation. Cette évaluation personnelle est influencée par les croyances et les ressources dont l'élève dispose. Galand fait ressortir que les apprentissages réalisés par les élèves passent d'abord par leur volonté d'apprendre et par leur engagement, deux facteurs qui exigent de l'enseignant un usage du dialogue et de la négociation pour tenter d'augmenter cette volonté. Les recherches analysées par Galand s'accordent sur le fait que la motivation n'est pas un concept unique et que plusieurs éléments comme l'état affectif, le sentiment de compétence, les buts, l'utilité de la tâche, le sentiment d'autonomie et les liens sociaux peuvent influencer l'engagement de l'élève. La motivation n'est pas du ressort exhaustif de l'élève, de l'enseignant ou de la famille. Il s'agit plutôt d'un concept complexe sur lequel chacun de ces facteurs intervient à sa façon. L'amélioration du système éducatif est donc une responsabilité conjointe de tous les acteurs ayant un impact sur la dynamique motivationnelle.

2.2.2 Motivation lors du passage du primaire au secondaire (Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001)

Boileau, Bouffard et Vezeau (2001) ont réalisé une recherche concernant la motivation et les résultats scolaires lors du passage du primaire vers le secondaire. Un questionnaire utilisant l'échelle de type Likert a été distribué à deux reprises à 336 élèves dans le cadre de cours de français : une première fois en sixième année et une deuxième fois, à la même période, en première secondaire.

Les résultats sortant de cette recherche montrent qu'il y a une diminution du sentiment d'auto-efficacité et des stratégies d'apprentissage lors du passage de la sixième année du primaire à la première année du secondaire. Étant donné que ceux qui sont considérés comme étant motivés entretiennent un sentiment d'auto-efficacité fort et poursuivent des buts de maîtrise ou de performance, les résultats tendent à soutenir que le passage du primaire vers le secondaire amène une baisse au niveau motivationnel. Ce résultat provient du fait que les jeunes réévaluent leurs compétences face aux défis plus importants qu'apporte la transition vers le secondaire et cette réévaluation affecte négativement leur motivation. Par contre, ceux qui étaient plus forts académiquement au primaire ont gardé de hauts résultats scolaires après la transition. Cette constance s'explique par le fait que ces élèves poursuivent davantage des buts de maîtrise (pour augmenter leurs compétences) et de performance (afin de bien paraitre et d'obtenir un jugement positif des autres) que ceux ayant de moins bons résultats. Selon les résultats de cette recherche, il y aurait donc une augmentation du taux de buts d'évitement, une diminution des buts de maîtrise et une stabilité dans les buts de performance à la suite de la transition du primaire vers le secondaire.

2.2.3 Dynamique motivationnelle (Viau et Bouffard, 2000)

Le modèle de dynamique motivationnelle a été élaboré dans le cadre de travaux antérieurs (Viau, 1994; Viau et Louis, 1997) et prend appui sur une recension de différentes recherches portant sur la motivation scolaire. Ce modèle est constitué de trois déterminants de la motivation (perceptions de compétence, de valeur et de contrôle) qui influencent les trois indicateurs suivants : engagement, persévérance et performance. Dans la recherche de 2000, Viau et Bouffard tentent de valider le modèle théorique de la dynamique motivationnelle auprès d'un échantillon de 1599 élèves du secondaire de la région de Montréal dans le cadre d'activités d'apprentissage du français. Les auteurs ont tenté de vérifier si les relations entre les composantes du modèle théorique de la dynamique motivationnelle sont significatives et de savoir quel est le pouvoir prédictif de ces trois déterminants motivationnels sur les comportements d'apprentissage de l'élève. Étant donné l'ampleur de l'échantillon, les auteurs ont opté pour l'utilisation d'un questionnaire pour réaliser la collecte de données. Le questionnaire était séparé en deux parties. La première partie concernait les liens qui unissent les déterminants de la motivation et la deuxième partie portait sur l'influence des perceptions des élèves sur leurs comportements d'apprentissage. Les élèves ont pu répondre aux questions en utilisant une échelle de type Likert. Ils indiquaient leur degré d'approbation à la question selon une échelle de 1 à 5 où 1 signifie « très en désaccord » et 5 signifie « très en accord ».

Les résultats tirés de la validation du modèle de la dynamique motivationnelle auprès d'élèves du secondaire dans le cadre d'un cours de français montrent que la perception de compétence, la perception de valeur et la perception de contrôle sont unies par des liens significatifs. Parmi ces trois déterminants, les auteurs ont déterminé que c'est la perception de valeur qui entretiendrait des liens significativement plus forts avec les deux autres composantes du modèle. Les chercheurs concluent que la perception de valeur est aussi fortement corrélée avec la perception de compétence. En d'autres mots, plus un élève valorise une activité scolaire, plus il se sent compétent, et vice versa. La perception de contrôle serait le déterminant qui aurait le moins de liens significatifs avec les autres déterminants.

Les résultats de la recherche de Viau et de Bouffard montrent que la perception de valeur est le plus important prédicateur de l'utilisation par les élèves de stratégies d'apprentissage, d'autorégulation et de persévérance. De plus, selon les données recueillies, il semblerait que, plus un élève utilise des stratégies d'apprentissage efficaces, plus il consacre de temps à ceux-ci.

2.2.4 Illusion d'incompétence (Bouffard, Vezeau, Chouinard et Marcotte. 2006)

Dans leur recherche, Bouffard, Vezeau, Chouinard et Marcotte (2006) font passer deux tests à un échantillon de 958 élèves du primaire pour évaluer le jugement qu'ils portent sur leurs compétences. Ils utilisent l'Épreuve d'Habileté Mentale Otis-Lennon pour évaluer le rendement scolaire des élèves. Pour analyser les perceptions de compétences scolaires et spécifiques, les perceptions réfléchies par les parents, la motivation intrinsèque, l'estime de soi, le perfectionnisme et l'attribution des réussites et des échecs, ils utilisent un questionnaire bâti selon le mode de passation d'Harter. Ce dernier propose à l'élève d'indiquer pour chaque énoncé la description liée à un groupe (celui des cercles ou celui des carrés) qui le représente le plus. Par la suite, selon le groupe identifié, l'enfant doit faire une marque dans la grande figure afin d'indiquer si la description s'applique très bien à lui ou dans la petite figure si la description s'applique peu à lui. Ce type d'instrument est facilement adaptable selon les concepts évalués. De plus, ce mode de passation est utile lorsque les chercheurs sont confrontés à une population en bas âge.

Les résultats tirés de leurs recherches font ressortir que les garçons se perçoivent plus compétents que les filles en mathématiques et qu'ils ont une motivation intrinsèque plus développée que ces dernières. De plus, les garçons perçoivent que leurs parents leur attribuent plus de compétences que les filles et ils rapportent aussi un perfectionnisme plus élevé. Cependant, celles-ci entretiennent une meilleure estime d'elles-mêmes.

Tous sexes confondus, les élèves qui ont une vision pessimiste de leurs compétences projettent l'opinion qu'ils ont d'eux-mêmes sur leurs parents et croient ainsi que leurs parents les considèrent comme étant incompétents à l'école. Il est très important de prendre ce résultat en considération dans l'analyse motivationnelle, car le reflet de la compétence que l'enfant lit dans les yeux de ses parents a un effet déterminant sur sa propre perception de compétence et sur son rendement ultérieur.

Les enfants ayant une illusion d'incompétence plus développée ont une estime d'eux-mêmes plus faible que les autres enfants. Ils dévalorisent plus facilement les activités qui leur sont proposées pour tenter de préserver leur estime personnelle. En d'autres mots, si l'élève se sent incompétent à l'école, il va accorder moins d'importance aux activités qui lui sont reliées. Ainsi, la motivation intrinsèque de ce dernier est plus faible. La diminution de l'intérêt porté à une activité, selon Bouffard, Vezeau, Chouinard et Marcotte (2006), est un mécanisme de protection de l'estime personnelle qui s'accompagne habituellement d'une diminution de l'engagement de l'élève et, au final, d'une diminution du rendement.

Ceux ayant une illusion d'incompétence se mettraient aussi des standards de performance plus élevés, les amenant à développer le sentiment qu'ils ne sont pas à la hauteur de leurs attentes. Vivre ce sentiment négatif à répétition peut les amener à se sentir de moins en moins compétents face aux tâches qu'ils entreprennent.

De plus, les résultats de cette recherche font état que ceux qui entretiennent un sentiment d'incompétence expliquent leurs réussites et leurs échecs par des raisons qu'ils ne contrôlent pas. Ils diminuent alors l'importance qu'ils accordent à l'effort, croyant que c'est la chance qui joue un rôle décisif dans leurs réussites et leurs échecs. Cette croyance peut aussi avoir une influence sur leur sentiment de compétence.

En somme, les illusions entretenues par les élèves du primaire ont une influence sur leurs perceptions de compétence et de valeur accordée à une tâche, ainsi que sur leur perception relative au niveau de contrôle qu'ils ont sur leurs réussites et leurs échecs. Même si peu de données sont publiées sur les sources de l'illusion de compétence, il n'en reste pas moins qu'il s'agit d'un facteur de risque important pour le décrochage scolaire prématuré.

2.2.5 Baisse motivationnelle en mathématiques (Chouinard, 2001)

Dans sa recherche, Chouinard (2001) a décidé de se pencher sur les changements annuels de la motivation en mathématiques selon l'âge et le sexe au secondaire. Dans sa recherche menée auprès de 610 sujets de la région de Montréal, il a utilisé une échelle d'attitudes administrée deux fois, soit au début et à la fin de l'année scolaire. Les échelles utilisées étaient composées de divers énoncés sur lesquels l'élève devait se prononcer à l'aide d'une échelle de type Likert (échelle allant de fortement en désaccord à fortement en accord). Plusieurs variables en lien avec la motivation ont été étudiées dans cette recherche. En effet, les auteurs ont étudié les perceptions qu'ont les jeunes des attitudes des agents sociaux, des attentes de succès et de la valeur accordée à la réussite. De plus, ils ont étudié leurs buts, leur engagement et leur utilisation de stratégies d'apprentissage.

Les résultats obtenus poussent à conclure que la motivation des élèves du secondaire en mathématiques connait des changements significatifs entre le début et la fin de l'année scolaire. Nous pouvons observer que les élèves vivent une baisse de la perception d'encouragement de la part des enseignements et une baisse de plusieurs autres facteurs comme les buts de maîtrise, les buts de performance, l'engagement et l'utilisation de stratégies cognitives et métacognitives. Les résultats démontrent aussi une hausse des buts d'évitement.

Si nous nous attardons à chacun des groupes formés (groupe 1 : première et deuxième secondaire, groupe 2 : troisième secondaire, groupe 3 : quatrième et cinquième secondaire), les résultats de cette recherche montrent que la perception d'utilité des mathématiques diminue durant l'année scolaire chez les deux groupes plus âgés (groupes 2 et 3). C'est le groupe d'élèves les plus âgés qui vit la plus grande diminution concernant la perception qu'ils ont du nombre d'encouragements reçus de la part des parents, du niveau de confiance en soi et de l'utilité accordée aux mathématiques. C'est aussi ce groupe qui vit la plus grande augmentation du niveau de stress au cours d'une même année scolaire.

Pour ce qui est des différences par rapport aux genres des participants, les garçons des trois groupes vivent une diminution du nombre d'efforts déployés au cours d'une année scolaire. Pour ce qui est des filles, elles vivent une plus importante hausse du niveau d'anxiété au cours de l'année et une baisse plus marquée du niveau de confiance en soi. Cependant, elles adoptent moins des buts d'évitement que les garçons et elles utilisent davantage des stratégies cognitives que ces derniers.

L'analyse de ces résultats nous permet de conclure que le groupe d'étudiants le plus âgé qui serait davantage affecté par les changements de motivation au cours d'une année. De plus, pour les élèves de tous les groupes, il semblerait que les apprenants finissent l'année scolaire avec moins de bonnes dispositions motivationnelles qu'ils en avaient au début de l'année.

2.2.6 Sentiment d'angoisse en mathématiques (Nimier, 1977)

Dans son étude *Les mathématiques et l'affectivité*, Nimier (1977) analyse la motivation en mathématiques à partir des réponses obtenues lors de petits entretiens auprès d'élèves âgés de 15 à 18 ans. Les questions portaient sur l'historique des jeunes en mathématiques sur les sentiments qu'ils ressentent envers cette discipline et sur le fait qu'ils discutent ou non des mathématiques avec leurs parents. Pour dégager les termes importants, l'auteur a analysé toutes les entrevues une à une, puis a élaboré un questionnaire papier dont les questions étaient en lien avec les constats ressortis lors des entrevues. La première partie de ce questionnaire était constituée de questions portant sur les différents types d'angoisse que les élèves entretenaient envers les mathématiques (ex. : angoisse de dépossession de la personnalité, angoisse de destruction, etc.) Les deux dernières parties du questionnaire permettaient la vérification des résultats obtenus dans la première partie en utilisant des questions sémantiquement différentes. Cette pratique, en plus d'ajouter de l'information complémentaire à la première partie du questionnaire, vérifiait la fidélité des réponses obtenues.

Nimier (1977) arrive à la conclusion que les étudiants ont tendance à ressentir de l'angoisse envers les mathématiques. Il attribue cette angoisse à différentes sources. La première est que ce sentiment provient d'un mécanisme de déplacement. En d'autres mots, des sentiments négatifs ressentis antérieurement lors de l'exécution de tâches mathématiques pourraient se transposer lors de l'exécution de nouvelles tâches. Dans cette optique, l'association d'un sentiment négatif au domaine mathématique entraînerait le refus ou la peur d'exécuter une tâche liée à ce domaine. La deuxième source possible du développement de l'angoisse proviendrait de la complexité du langage mathématique utilisé. En effet, le domaine des mathématiques est composé d'un lexique propre utilisant des termes univoques, des règles syntaxiques précises et qui laisse peu de place à l'interprétation personnelle, brimant ainsi le niveau de contrôlabilité des élèves. De plus, la rigueur extrême en mathématiques qui dicte que tout est bien ou que tout est faux alimenterait aussi l'angoisse ressentie face à cette matière. Finalement, la dernière source indique que les jeunes perçoivent les mathématiques comme une expression de lois, où tout est classé et ordonné. Cette matière serait gérée par des règles à suivre, un chemin à appliquer qui tuerait la fantaisie personnelle du jeune. Pour certaines personnes, le fait de ne pas pouvoir utiliser une démarche personnelle apporte un lot de stress supplémentaire. Selon Nimier, les mathématiques, de par leur contexte rigide, sont donc une source d'angoisse chez plusieurs jeunes et cette angoisse pourrait se refléter dans leurs résultats scolaires et dans leur attitude face aux mathématiques.

2.2.7 Sentiments de compétence, de valeur des résultats et d'estime de soi (Wigfield et Eccles, 1994)

Dans leur recherche sur les sentiments de compétence, de valeur et d'estime de soi, Wigfield et Eccles (1994) ont fait remplir un questionnaire à 615 enfants, et ce, lors de 3 années scolaires consécutives entourant la transition du primaire vers le secondaire.

Les résultats obtenus par Wigfield et Eccles (1994) concernent le changement de perception de compétence, de valeur des résultats et d'amour-propre des élèves lors de la transition du primaire vers le secondaire. Lors des quelques mois qui suivent la transition, les résultats confirment que les jeunes vivent une diminution de leur amour-propre. Cependant, cette diminution n'est pas durable et elle tend à augmenter suivant les premiers mois de la transition. Outre ce changement, dans les domaines des mathématiques, de l'anglais et du sport, les jeunes vivent une baisse de leur perception de compétence. Les domaines des mathématiques et de l'anglais sont les seuls domaines parmi quatre domaines étudiés dans lesquels il n'y avait pas de remontée des perceptions de compétence à la suite de la transition du primaire vers le secondaire.

Pour ce qui est de la valeur accordée aux activités, nous pouvons observer que le domaine des mathématiques est en chute constante lors de la première année du secondaire. Les résultats démontrent que les jeunes semblent avoir plus d'intérêt pour le domaine des sports et le domaine social. Les chercheurs indiquent aussi qu'à la suite de cette période de transition, les jeunes s'intéressent davantage à des activités non académiques.

Les résultats obtenus dans cette recherche diffèrent aussi selon les genres des élèves : les garçons entretiennent un amour-propre plus élevé que les filles. Wigfield et Eccles expliquent ce résultat par le fait que les filles semblent être plus affectées par les changements causés par la puberté lors de cette période. De plus, les garçons croient davantage en leurs compétences en mathématiques et dans les sports que les filles. Cependant, les filles ont de meilleures perceptions de compétence en anglais. Quant à l'importance accordée aux différentes disciplines, les jeunes hommes privilégient les sports tandis que les filles choisissent les compétences sociales et l'anglais. En ce qui concerne les mathématiques, les chercheurs déclarent qu'il n'y a pas de différences entre les genres.

Les écarts entre les perceptions de compétence lors de la transition du primaire vers le secondaire s'expliquent, selon Wigfield et Eccles, par le fait que les « jeunes » élèves sont plus optimistes par rapport à leur perception de compétence. Dans le cas des plus « vieux », ils sont plus réalistes face à leurs réelles compétences pour réaliser une tâche scolaire. L'environnement dans lequel le jeune évolue peut aussi avoir un effet néfaste sur la perception de compétence. Par exemple, la relation entretenue entre les enseignants et les élèves devient moins positive à la suite de la transition, ce qui affecte négativement leur perception de compétence. Pour ce qui est de la diminution de l'importance et de l'intérêt accordés aux matières scolaires, les changements peuvent s'expliquer par une mauvaise évaluation, de la part des élèves, des commentaires reçus de leurs enseignants. Le passage à un environnement plus compétitif, évaluatif et contrôlé pourrait aussi intervenir dans la baisse de l'importance et de l'intérêt accordés aux matières scolaires.

Il ressort de l'analyse de ces recherches portant sur la motivation scolaire que la perception de compétence, la perception de valeur, l'état et les liens affectifs, les buts poursuivis ainsi que les sentiments de contrôle et d'autonomie ont un effet sur la motivation des élèves (Viau et Bouffard, 2000; Galand, 2006; Bouffard, Vezeau, Chouinard et Marcotte. 2006). De plus, on peut observer que le sentiment motivationnel tend à diminuer lors du passage du primaire vers le secondaire. Il ressort de l'analyse des recherches que ce phénomène est dû à la baisse de l'amour-propre des élèves, aux perceptions de compétence et à la valeur accordée à la tâche (Wigfield et Eccles, 1994; Boileau, Bouffard et Vezeau, 2001). Tous ces facteurs sont en baisse plus spécifiquement dans le domaine des mathématiques. Concernant ce domaine, la recherche de Chouinard (2001) nous a aussi démontré que les élèves vivent une baisse de leur niveau d'engagement, de l'utilisation de stratégies cognitives et métacognitives et une hausse des buts d'évitement lors d'une même année scolaire. Cet amalgame de facteurs peut ainsi affecter leur rendement et influencer négativement leur passage du primaire vers le secondaire.

2.3 FACTEURS INFLUENÇANT LA MOTIVATION

Les recherches citées à la section 2.2 nous montrent que la motivation peut être influencée par plusieurs facteurs. Certains de ces facteurs sont propres à l'individu (les facteurs internes) et d'autres proviennent du contexte dans lequel l'individu évolue (les facteurs externes). Pour bien les distinguer, nous allons, dans la prochaine section, expliquer ces différents facteurs en spécifiant ceux qui peuvent avoir une influence sur la motivation de l'élève.

2.3.1 Facteurs externes

L’être humain évolue dans un monde où il est confronté à différents individus et contextes qui peuvent modifier et influencer ses perceptions et ses décisions. La motivation à apprendre est donc un phénomène complexe qui ne se limite pas totalement au contexte de classe. La prochaine partie est donc consacrée à l’énumération des différents facteurs externes qui peuvent modifier, de quelque façon que ce soit, la dynamique motivationnelle. Les facteurs énumérés ci-dessous sont notamment tirés des recherches de Viau (1994; 1999; 2009).

2.3.1.1 Facteurs liés à la vie personnelle de l’élève

Au début de l’adolescence, plusieurs facteurs peuvent influencer positivement et négativement la motivation scolaire du jeune. Selon les résultats obtenus par Viau (2009), l’élève consacre seulement 20 % de son temps à des activités d’apprentissage scolaire. Ce qui lui laisse donc une multitude de temps pour vaquer à d’autres occupations pouvant modifier ses centres d’intérêt (Viau, 2009). Que ce soit la vie familiale, les amis, le travail ou les passe-temps, tous ces facteurs ont une influence sur la dynamique motivationnelle.

Environnement familial

Depuis les dernières décennies, les contextes familiaux ont beaucoup changé. Il n’est plus rare de rencontrer des familles recomposées, monoparentales ou ayant des parents de même sexe. Souvent, les deux parents travaillent de longues heures, ont des horaires très chargés qui leur laissent moins de temps à consacrer aux enfants et aux activités d’apprentissage. Les valeurs matérialistes et individualistes de notre société se reflètent aussi dans les valeurs familiales. Cet environnement peut donc avoir un effet négatif sur l’enfant et sur sa motivation à l’école (Viau, 2009). Cependant, si les parents prennent le temps d’offrir des chances à leurs enfants en leur proposant un environnement riche et stimulant qui valorise l’éducation et les valeurs véhiculées par l’école, les effets sur la dynamique motivationnelle peuvent alors être positifs. En constatant l’importance que les parents accordent à l’éducation, les enfants peuvent développer le goût et le plaisir d’apprendre, et ce, même lors d’une tâche aussi anodine que faire la cuisine. Les parents ont une forte influence sur ce que les jeunes interprètent de la réalité (Eccles et Frome, 1998). Selon Eccles et Frome (1998), les parents jouent un grand rôle dans le développement de la motivation, car les perceptions que les parents entretiennent envers leurs enfants influencent grandement la conceptualisation que les jeunes se font de leurs habiletés à réaliser une tâche. De même, selon les études de Wigfield et al. (2006, cité par Viau, 2009, p.73),

> *Les parents favorisent de façon positive la motivation de leur enfant : 1) s'ils ont des attentes et des exigences scolaires élevées, mais réalistes (c'est-à-dire adaptées au niveau de capacité de l'enfant); 2) s'ils ont une grande confiance en ses capacités de réussir; 3) s'ils créent un climat de soutien et chaleureux; 4) s'ils ont des modèles d'apprentissage (en étant en situation d'apprentissage devant l'enfant).*

L'influence des parents est donc un pilier important dans le développement de la motivation chez les enfants. Les parents peuvent aussi avoir une influence sur l'un des déterminants de la motivation, soit la perception de compétence, et ce, en offrant un environnement qui stimule leur curiosité en les incitant à explorer et à expérimenter de nouvelles choses (Schunk et Pajares, 2002, cités dans Viau, 2009, p. 73). L'environnement familial n'est donc pas à négliger pour comprendre et analyser la motivation chez les élèves.

Amis

Les amis occupent une place importante dans la vie des jeunes et peuvent influencer positivement ou négativement leur motivation. Par exemple, dans le cas où un jeune fréquente un groupe d'amis démotivés qui n'ont aucun intérêt envers l'école, il peut développer des perceptions plus négatives de soi tout en diminuant ses aspirations futures. Les amis donc sont des confidents, des modèles et même des sources d'inspiration qui peuvent venir teinter le jugement du jeune sur les activités scolaires.

Emploi rémunéré

Certains élèves, en plus d'aller à l'école, ont souvent un emploi rémunéré le soir ou les jours de fin de semaine. En fait, à la fin du vingtième siècle, 28 % des élèves de première secondaire disaient avoir un travail rémunéré. Ce pourcentage grimpe à 50 % pour les élèves de cinquième secondaire (Roberge, 1997). Selon plusieurs recherches (Ayotte, 1993; Dumont, 2007; Richard, 2006), les élèves qui occupent un travail régulier ont moins d'intérêt envers l'école, s'engagent moins dans leurs études et obtiennent par conséquent des résultats scolaires moins élevés. Les résultats de la recherche de Richard (2006) montrent aussi que toutes ces obligations peuvent susciter une baisse motivationnelle liée à la fatigue, qui provoque l'incapacité à se concentrer en classe (Dumont, 2007; Viau, 2009).

Par contre, les effets du travail à temps partiel durant les études secondaires ne sont pas seulement négatifs. En effet, aucune répercussion notable du travail à temps partiel ne se ferait ressentir sur l'adaptation psychosociale de l'étudiant à la fin du secondaire (estime de soi, autonomie, optimisme) (Dumont, 2007). De plus, « il y aurait une association entre le fait de travailler à temps partiel au milieu de l'adolescence et une plus grande utilisation de stratégies adaptatives dites aidantes à la fin du secondaire » (Dumont, 2007 p.176). Cependant, la recherche de Dumont (2007) montre aussi que, si le nombre d'heures travaillées augmente entre la troisième et la cinquième secondaire, les conduites délictueuses de l'élève augmentent aussi et ses résultats en mathématiques baissent. Pour limiter les effets négatifs sur l'apprentissage, selon Dumont, les jeunes ne devraient pas dépasser le seuil critique de onze heures par semaine consacrées au travail. Les conséquences négatives reliées au travail à temps partiel lors de l'adolescence peuvent être diminuées si le jeune a de bons facteurs de protection comme de bonnes ressources familiales (des parents qui encouragent et valorisent l'enfant et qui valorisent l'éducation), de bonnes ressources personnelles (gestion efficace du stress, niveau peu élevé d'anxiété) et de bonnes ressources environnementales (avoir un bon cercle d'amis studieux, aimer l'école, être dans un environnement scolaire stimulant) (Dumont, 2007). Les effets du travail durant les études sont donc mitigés. Il n'en reste pas moins que le travail à temps partiel peut avoir des répercussions sur la dynamique motivationnelle.

2.3.1.2 Facteurs liés à la société

Comme le souligne Viau (2009), la société, ses valeurs et les médias font partie des facteurs sociaux qui influencent le plus la dynamique motivationnelle et, du fait, la réussite scolaire.

Aspirations futures

Nous ne pouvons ignorer le fait que l'école est un outil indispensable pour l'initiation à la culture et pour la formation de futurs citoyens. Cependant, selon les inspirations et les valeurs auxquelles les jeunes aspirent, l'école peut avoir le rôle de les former à la « grande culture » ou bien occuper un rôle utilitaire et pratique (Viau, 2009). Il est vrai que, pour un élève qui désire travailler dans un domaine manuel, l'apprentissage de l'art d'argumenter lors de compositions de français peut devenir démotivant. Cependant, si l'école se limite seulement à l'apprentissage de domaines spécifiques, l'élève n'a alors pas de chance de découvrir de nouveaux domaines qui pourraient élargir ses horizons et lui faire découvrir de nouvelles passions. L'école doit donc faire un pont entre la distanciation culturelle et le rapport aux savoirs (rapport au monde, à soi et à autrui) (Viau, 2009).

Il n'est pas rare d'entendre de la bouche des adultes que le travail est difficile, fatigant et que ce qui compte le plus, ce sont les vacances (Viau, 2009). Un jeune qui est confronté à ce discours de manière répétée peut facilement adhérer à ces valeurs, qui favorisent le repos au détriment des efforts. Le jeune peut ainsi transposer cette manière de penser dans son contexte de classe en fournissant le moins d'effort possible et en ne rêvant qu'à ses temps libres. Dans ce contexte, une situation d'apprentissage qui demande à l'élève un travail intense d'une longue durée peut lui paraitre démotivante.

Médias sociaux

Les valeurs véhiculées par les médias influencent aussi la motivation des élèves. Les jeunes d'aujourd'hui, avec la montée des réseaux sociaux, sont confrontés à des vedettes instantanées qui connaissent la gloire et la richesse sans pour autant avoir terminé leurs études. Certaines personnalités publiques gagnent des millions de dollars en étant seulement actives sur les plates-formes Web. Il est donc plus difficile pour les jeunes de concevoir que, pour réussir, il faut travailler fort. La situation pourrait par contre être différente si les jeunes avaient comme idole un ingénieur, un physicien ou un médecin qui a fourni des efforts considérables pour se rendre où il est.

De plus, la montée d'Internet fait en sorte que l'accès à l'information est beaucoup plus facile qu'auparavant. Le travail effectué pour réaliser une recherche ou pour se procurer des sources d'information est très rapide. L'élève a moins besoin de consulter des encyclopédies, des livres ou d'autres sources pour trouver de l'information, car il peut les obtenir en un clic. L'engagement cognitif est donc diminué. De plus, les loisirs pratiqués par les jeunes les incitent à profiter du moment présent. Nous pensons ici aux jeux vidéo, aux vidéoclips sur Internet, etc. « Perdant peu à peu l'habitude d'un travail intellectuel qui nécessite réflexion, silence et constance, bon nombre de jeunes en viennent à percevoir les activités pédagogiques en classe comme très exigeantes sur le plan de l'engagement cognitif » (Viau, 2009, p.76).

Ces derniers facteurs montrent que la société et les valeurs qu'elle véhicule peuvent diminuer la motivation des jeunes. Cependant, les facteurs liés à la société n'ont pas juste de mauvais côtés. L'accès à Internet, à la télévision et aux revues offre aux jeunes une ouverture sur le monde, tout comme les voyages et les bourses d'études à l'étranger. Ils ont plus d'accès à plusieurs lieux qui leur permettent de nourrir leur curiosité intellectuelle. Avec toutes ces opportunités, les jeunes ont la chance de pouvoir enrichir leurs connaissances et même d'augmenter leur motivation. Il ne reste plus qu'à espérer qu'ils en tirent profit.

2.3.1.3 Facteurs liés à l'école

L'environnement socioéducatif affecte grandement l'expérience sociale et éducative des élèves (Janosz, Gorges et Parent, 1998). Cet environnement est constitué du climat (valeurs, attitudes, etc.) et des pratiques éducatives (encadrement, accent sur la réussite, etc.).

Environnement scolaire

L'environnement scolaire, surtout au secondaire, est très important pour la motivation. Cependant, selon Anderman et Maehr (1994, cités dans Viau 2009, p. 77), les écoles secondaires offrent aux jeunes adolescents un environnement scolaire qui ne concorde pas avec leurs besoins psychologiques. Sur le plan développemental, le début de l'adolescence se caractérise par une recherche d'autonomie, d'indépendance et d'interactions sociales. Cependant, l'environnement qu'offre le secondaire se caractérise davantage par un plus grand nombre de règles à suivre, une réduction de la possibilité de prendre des décisions, une diminution des relations entre l'enseignant et l'élève, etc. Cette distanciation amène une source supplémentaire de démotivation chez les jeunes élèves.

Activités parascolaires

L'école offre à ses élèves une panoplie d'activités parascolaires qui peuvent augmenter de façon considérable leur motivation. Que ce soit des activités sportives, culturelles ou sociales, elles donnent la chance aux jeunes de développer un sentiment d'appartenance envers l'école. De plus, elles aident les élèves à découvrir leurs enseignants sous un autre angle et les aident à développer des liens avec ces derniers. Les activités qu'offre l'école peuvent amener les jeunes à découvrir des domaines d'expertise encore méconnus et leur faire développer de nouvelles passions. L'école peut donc être un endroit où les jeunes prennent plaisir à explorer de nouveaux horizons et où il est possible de prendre plaisir à apprendre.

2.3.1.4 Facteurs liés à la classe

C'est par l'entremise de la classe que les enseignants peuvent agir sur la motivation intrinsèque des élèves. Comme il est souligné dans les ouvrages de Viau (1994, 1999, 2009), les facteurs qui ont le plus d'influence sur la dynamique motivationnelle sont les activités pédagogiques, l'enseignant, les pratiques évaluatives et le climat de classe. Dans la prochaine partie, ces différents facteurs seront exposés dans le but de mieux les comprendre et les distinguer.

Activités pédagogiques

Les activités pédagogiques peuvent être analysées sous deux aspects : enseignement et apprentissage. Ces activités sont des situations planifiées par l'enseignant afin que les élèves aient l'occasion d'apprendre (Viau, 1994).

- **Activités d'enseignement**

Dans les activités d'enseignement, l'enseignant est l'acteur principal. Il a le rôle de communiquer aux élèves la matière à apprendre. Dans le cadre d'activités d'enseignement au primaire, les enseignants font des prestations relativement courtes. Contrairement à eux, les enseignants du secondaire ont souvent recours à des exposés magistraux qui prennent une bonne partie du temps de classe. Lors de ces exposés, c'est l'enseignant qui dicte les activités. Les élèves font alors preuve de peu d'engagement cognitif. Il n'est donc pas surprenant que ce type d'enseignement puisse être démotivant, car l'élève ne peut exercer aucun contrôle sur le déroulement de ces activités et il n'a pas la chance d'exposer ses compétences.

L'enseignant doit donc être capable de rendre ses exposés attrayants en utilisant son charme, son humour et sa bonne humeur. Cependant, être un bon orateur n'est pas donné à tout le monde. C'est pourquoi il est important que l'enseignant se demande si ses exposés donnent la chance aux élèves de « 1) percevoir l'importance et l'intérêt de la matière transmise (perception de valeur) et 2) d'avoir le sentiment qu'ils comprennent ce qui est présenté et de percevoir qu'ils ont un certain contrôle sur leur déroulement (développement de la perception de contrôlabilité) » (Viau, 1994. p. 80).

- **Activités d'apprentissage**

C'est dans le cadre des activités d'apprentissage que les élèves mettent à profit ce qu'ils ont appris. Ils appliquent leurs connaissances procédurales et conceptuelles lors d'activités proposées. Cependant, pour être stimulantes et susciter la motivation des jeunes, les activités doivent suivre quelques règles. Elles doivent être signifiantes, représenter un défi, être productives, être exigeantes sur le plan cognitif, comporter des consignes claires, permettre la responsabilisation de l'élève, être diversifiées et être intégrées aux autres activités (Brophy, 1987; Ames,1992).

Enseignant

L'un des facteurs primordiaux dans le développement de la motivation ou de la démotivation est sans aucun doute l'enseignant. Dans un premier temps, l'enseignant se doit d'être motivé et compétent (Viau, 2009) pour susciter l'intérêt des élèves. Les jeunes sont facilement capables de percevoir si un enseignant ne connait pas sa matière ou s'il n'est pas passionné par les éléments qu'il enseigne.

La relation entre l'enseignant et l'élève est aussi un élément primordial pour le développement de la motivation. Si le cadre relationnel que l'enseignant instaure avec ses élèves est sain et agréable, cela aura pour effet de favoriser leur engagement. Le soutien que les enseignants offrent aux élèves aide aussi à développer leur perception de compétence, leur perception de valeur et leur rendement (Vezeau, et al., 2010).

> *Pour ce faire, les enseignants doivent proposer des activités d'apprentissage qui offrent la possibilité de faire des choix, qui présentent des défis considérables et qui transforment les erreurs en occasions d'apprendre. En traitant davantage les élèves comme des partenaires, les enseignants peuvent probablement favoriser le développement d'une identité scolaire positive et soutenir leur motivation à apprendre et avoir ainsi un effet préventif sur l'absentéisme (Galand, 2004, p. 137).*

L'enseignant joue donc un rôle primordial dans la dynamique motivationnelle des jeunes. Un enseignant qui ne maitrise pas sa matière, qui n'aime pas enseigner, qui n'est pas capable de se faire respecter par ses élèves ne peut qu'être démotivant pour ces derniers.

Pour susciter la motivation, Viau (2009) énumère quelques caractéristiques primordiales à adopter par l'enseignant. L'enseignant doit être vrai, simple, avoir le sens de l'humour, être capable de faire confiance aux élèves, pouvoir encourager les élèves, ne pas avoir de préjugés, être capable de reconnaître ses erreurs, savoir stimuler les élèves, se préoccuper de la réussite de tous, avoir recours à des stratégies pédagogiques variées et connaitre sa matière à fond. Il faut cependant prendre en considération que ces caractéristiques peuvent dépendre des perceptions des élèves et qu'elles sont subjectives.

Pratiques évaluatives

Il est certain que les évaluations ont une place importante dans un contexte scolaire. Elles sont essentielles, car elles permettent de vérifier les acquis des jeunes (Viau, 1999, 2009). De plus, elles sont en étroite relation avec la dynamique motivationnelle, car elles peuvent influencer les déterminants de la motivation à plusieurs niveaux. Selon les recherches de Viau, les chercheurs et les enseignants ne s'entendent cependant pas à savoir si elles sont une bonne ou une mauvaise influence. Certains disent qu'elles nuisent au développement de la motivation et d’autres affirment qu’elles sont importantes. Il est donc important de distinguer les évaluations axées sur la performance et celles axées sur les apprentissages pour comprendre leur influence.

Les évaluations axées sur la performance sont des évaluations qui prennent la forme d’examens, de jeux-questionnaires ou de tests. Ce sont des évaluations qui sont notées. Les élèves sont alors classés selon leurs résultats. Un jeune qui a une bonne note peut être perçu comme un bon élève qui travaille bien et qui investit beaucoup d’effort. Contrairement à lui, un élève qui obtient une mauvaise note peut être perçu comme un élève démotivé qui ne met pas d’effort dans ses travaux scolaires. L’erreur dans les évaluations centrées sur la performance est vue comme une plaie qu’il faut absolument éviter. Dans le cas des évaluations axées sur la performance, les élèves sont donc amenés à performer et à démontrer leurs habiletés qui seront ensuite notées. Ces éléments peuvent engendrer du stress, de l’angoisse et de l’appréhension envers les apprentissages qui nuiront à la dynamique motivationnelle.

Il faut donc amener l’élève, dans un contexte évaluatif, à travailler sur le plaisir d’apprendre et non pas sur les conséquences de ses évaluations. Les enseignants doivent arrêter de noter au détriment des apprentissages. Ils doivent cerner les acquis et les difficultés des élèves pour pouvoir adapter leurs interventions. Ils doivent aussi tenter de changer la manière de penser des élèves qui sont, depuis la première année, confrontés à des évaluations qui les sanctionnent et les certifient (Viau, 2009). Les jeunes doivent être amenés à comprendre que l’erreur n’est pas un élément à éviter, mais bien un pilier dans leurs apprentissages qui les aide à comprendre leurs forces et leurs faiblesses. Le côté utilitaire et pratique de l’école doit faire place à un lieu d’apprentissage et de dépassement de soi.

> *Les pratiques évaluatives centrées sur la performance, la notation et la comparaison entre les élèves ont pour effet de diminuer la perception qu’ils ont de leur compétence, et elles peuvent provoquer, chez certains d’entre eux, une anxiété qui nuit à leur motivation à apprendre (Covington, 1992, cité dans Viau, 2009 p. 84).*

Climat de classe

Le climat de classe est un élément très important dans la motivation des élèves. Pour avoir un effet positif, le climat doit offrir un environnement sécuritaire, affectif et de confiance. Il doit laisser place à de bonnes communications autant de la part des élèves que de l'enseignant. De plus, il doit être régi par une discipline qui n'est ni trop sévère, ni trop permissive. Les élèves, dans la classe, ne doivent pas se sentir trop oppressés par les règles instaurées. Ces dernières doivent être implantées dans le but que les jeunes se sentent en sécurité, dans un lieu où les apprentissages sont structurés et où ils ont la chance de socialiser et de se qualifier (Garcia-Martinez, 2004). De plus, pour susciter l'apprentissage et la motivation à apprendre, il est important de faire régner le respect et l'acceptation de tous (Viau, 2009).

Finalement, la classe doit offrir un climat de collaboration au détriment d'un climat de compétition. La collaboration entre les élèves favoriserait un meilleur climat de travail que celui instauré par la compétition et encouragerait donc une dynamique motivationnelle plus positive (Viau, 2009). En effet, les activités qui demandent aux élèves de travailler en collaboration dans la classe les amènent à s'intégrer, à se faire de nouveaux amis et donc à socialiser. Le climat de classe peut ainsi avoir une grande influence sur la dynamique motivationnelle du jeune.

Récompenses et sanctions

Le dernier facteur lié à la classe qui peut influencer la dynamique motivationnelle des élèves est le système de récompenses et de sanctions que les enseignants instaurent dans leur classe. Au primaire comme au secondaire, plusieurs enseignants utilisent des récompenses pour valoriser les bons comportements et des punitions pour sanctionner les mauvais. Les récompenses peuvent prendre la forme d'objets (cadeaux) ou de renforcements verbaux. Les punitions, elles, sont souvent liées au retrait d'un privilège. Sous l'influence de la psychologie béhavioriste, plusieurs recherches ont démontré que le fait de donner une récompense à une personne, lorsqu'elle adopte une certaine attitude ou fait une certaine tâche, l'encourage à la répéter. À la vue de ce constat, les enseignants ont donc été invités à utiliser cette technique en contexte de classe dans le but de motiver les élèves à apprendre. Cependant, pour optimiser les effets bénéfiques, le retrait de ce système doit être prévu dès son départ. Or, dans le système scolaire, son retrait est rarement prévu d'avance. Les enseignants n'utilisent donc pas tout à fait tous les principes et concepts liés à cette théorie pour en tirer tous les effets bénéfiques.

Dans les classes du primaire, les enseignants utilisent aussi souvent des récompenses comme des jetons ou des autocollants en forme d'étoiles pour récompenser les bons élèves. Cependant,

> *… des commentaires favorables émis sur des travaux, des évaluations qui soulignent les apprentissages réalisés, des encouragements dans les moments difficiles, des remerciements pour avoir écouté avec attention un exposé sont des gestes qui motivent certainement plus les élèves que des jetons, car ils agissent directement sur les perceptions [qu'ils] ont d'eux-mêmes (Viau, 1994, p.123).*

Donc, en agissant sur la perception que les jeunes ont d'eux-mêmes, leur motivation peut être modifiée, tout comme leur réussite scolaire. Cela dit, « un système de récompenses peut contribuer à détourner l'attention de l'élève en l'amenant à consacrer toute son énergie à (…) tirer profit le plus possible [de ces récompenses] » (Viau, 1994, p.124). Ce système de récompenses est donc controversé. Il semble que le fait de récompenser le plaisir d'apprendre de l'élève peut transformer sa motivation intrinsèque en motivation extrinsèque (Viau, 2009).

Même si la technique de récompenses et de sanctions fonctionne dans la plupart des cas et qu'elle entraîne les résultats escomptés, il est important de se demander si elle fonctionne à long terme et quelles sont ses répercussions sur la motivation à apprendre durant une longue période de temps (Viau, 2009). Il semble que des encouragements verbaux par rapport aux bons comportements et des retours positifs sur les comportements des élèves peuvent davantage avoir un effet positif sur la motivation des élèves.

En somme, les facteurs liés à la vie personnelle, à la société, à l'école et à la classe peuvent avoir une influence sur la dynamique motivationnelle de l'enfant. L'important est d'optimiser chacun de ces facteurs pour tenter de contrer les effets négatifs qu'ils pourraient avoir sur la dynamique motivationnelle et sur les performances académiques des élèves.

2.3.2 Facteurs internes

En plus d'être influencée par des facteurs externes, la motivation qui anime un élève en classe est un phénomène qui est aussi intrinsèque. La motivation trouve son origine dans trois perceptions, soit la perception de valeur qu'un élève accorde à une activité pédagogique, la perception qu'a l'élève de sa compétence à la réussir et la perception de contrôlabilité qu'il a sur son déroulement. Ces trois perceptions sont les composantes clés du modèle de la dynamique motivationnelle expliqué par Viau (1994).

La section qui suit va donc décrire plus en profondeur le modèle de la dynamique motivationnelle dans lequel nous retrouvons les facteurs internes influençant la motivation de l'élève. La section débutera avec la provenance du modèle, puis suivront la présentation du modèle et la description de ses composantes.

2.3.2.1 Modèle de la dynamique motivationnelle

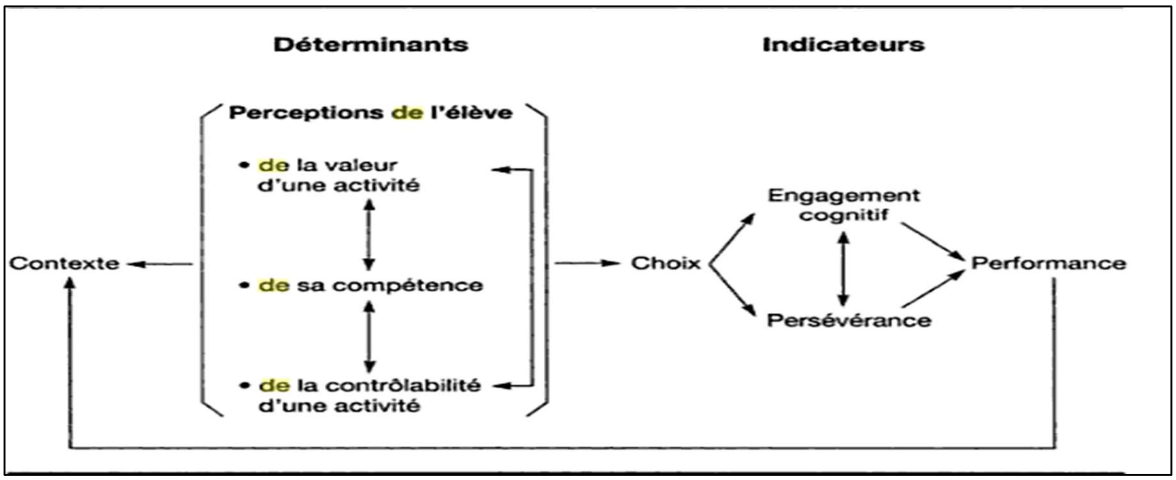
Le modèle de la dynamique motivationnelle a été élaboré selon trois constats. Le premier est que l'auteur a voulu expliquer la motivation qui amine les étudiants plutôt que la définir. Pour lui, « il est plus important de savoir comment elle se manifeste, change et s'inscrit dans le processus d'apprentissage que d'étudier ses origines neurobiologiques ou psychologiques » (Viau, 1994, p.31).

Deuxièmement, la dynamique motivationnelle a été construite autour du fait que l'auteur ne voulait pas baser ses recherches sur le débat qui consiste à savoir si la motivation intrinsèque est plus importante que la motivation extrinsèque. Ayant comme base le socioconstructivisme, l'auteur aborde la motivation de l'élève comme étant inscrite dans les interactions constantes entre les caractéristiques personnelles de chaque individu, ses comportements et son environnement. Ce qui en fait un concept dynamique n'étant pas défini exclusivement par des causes internes ou par des causes externes à l'individu.

Finalement, le modèle de la dynamique motivationnelle a été élaboré pour être un modèle applicable spécialement dans le cadre d'activités d'enseignement et d'apprentissage.

Le modèle de la dynamique motivationnelle peut être représenté par le schéma ci-dessous. Nous y retrouvons ses composantes et les liens qui les unissent.

Figure 1. Modèle de la dynamique motivationnelle - Viau, 1994



Pour bien comprendre ce modèle et tous les éléments qui font partie de la dynamique motivationnelle, nous allons décrire chacune de ses composantes et expliquer leurs interactions.

2.3.2.2 Contexte

Nous retrouvons, au premier plan, le contexte. Cette composante est à l'origine de la dynamique motivationnelle et elle est la seule qui n'est pas relative à l'élève. Le contexte représente toute activité d'enseignement et d'apprentissage qui demande aux jeunes un engagement cognitif afin d'acquérir des connaissances disciplinaires. C'est donc un ensemble de stimuli qui influencent directement les perceptions que les jeunes ont d'eux-mêmes et finalement leur motivation. Il est important de spécifier que le contexte peut être formé d’événements ou de stimuli qui ne sont pas toujours en lien avec des activités d’enseignement ou d’apprentissage. Par exemple, des conflits avec d’autres élèves ou avec l’enseignant peuvent interférer avec une situation d’apprentissage et modifier la dynamique du contexte de classe ou de l’activité sans être pour autant la faute de l’élève.

Les sept autres composantes se rapportent directement à l’élève. Elles sont séparées en deux sous-sections, soit les déterminants et les indicateurs.

2.3.2.3 Déterminants

Les déterminants sont directement influencés par le contexte. Ils correspondent à la manière dont l’élève perçoit les activités d’enseignement et d’apprentissage. Selon les recherches sociocognitives (Wigfield et Eccles, 1992; Bandura, 1993; Skinner 1995), la motivation scolaire est surtout influencée par trois types de perceptions, soit la perception de valeur d’une activité, la perception de compétence à accomplir une tâche et la perception de contrôlabilité du déroulement de l’activité et de ses conséquences.

Pour bien comprendre la dynamique motivationnelle, il faut prendre en compte le fait que ces trois types de perception sont des perceptions de soi. La perception de soi, par définition, correspond aux connaissances qu’une personne a d’elle-même et au processus par lequel elle les acquiert (Viau, 1994; 1999). Ces perceptions sont subjectives et interprétatives. Il n’existe donc pas de fausses perceptions de soi, seulement des irréalistes. Il existe deux types de perception de soi : les générales (estime de soi, concept de soi, etc.) et les spécifiques. Dans son modèle, Viau (1994) a décidé de privilégier les perceptions de soi spécifiques. Pour bien comprendre chacune d’entre elles, la section suivante sera consacrée à la définition de perceptions spécifiques faisant partie du modèle motivationnel.

Perception de valeur d’une activité

La perception de la valeur d’une activité est le jugement que le jeune pose sur l’utilité de l’activité en vue d’atteindre un but qu’il poursuit. C’est la réponse à la question : qu’est-ce que cela m’apporte de faire cette activité? La perception dépend des représentations cognitives que l’élève fait de ce qu’il veut accomplir.

Dans un contexte scolaire, les buts poursuivis sont davantage des buts sociaux et scolaires. Les buts sociaux se définissent par la relation que l'élève établit avec les autres élèves et les enseignants. Ils influencent les comportements du jeune, car ils sont un moyen d'adhérer à un groupe, de s'identifier en tant que personne, de s'affirmer, etc.

Pour ce qui est des buts scolaires, la meilleure manière de les définir, selon Viau (1994), est de se baser sur les perspectives futures. Une personne ne fait pas que réagir à son environnement, elle « proagit » en fonction de ses buts qui s'étalent à court, moyen ou long terme (Lens, Nuttin, Bouffard, Lapierre, Leblanc et Lemaire, cités dans Viau 1994). C'est cet étalement des buts dans l'avenir qui définit la perspective future. Par exemple, un élève qui a des buts clairs et bien détaillés dans le temps est plus en mesure de percevoir l'utilité d'une activité. Contrairement à lui, le jeune qui est confus par rapport à ses buts a moins de références pour juger la valeur de l'activité. Ce dernier vit davantage dans le présent et il est à la recherche de satisfaction immédiate. Sa perception de valeur de la tâche peut donc être négativement affectée. Ainsi, pour qu'un élève augmente la perception de valeur d'une tâche, il faut qu'il poursuive des buts scolaires clairs et bien définis et qu'il valorise l'apprentissage pour pouvoir s'engager et acquérir de nouvelles connaissances (Viau, 1994).

La perception de valeur est primordiale dans la dynamique motivationnelle, car si un élève perçoit la valeur d'une activité, il va être plus enclin à s'engager activement dans sa réalisation en utilisant des stratégies d'apprentissage efficaces qui vont l'amener à en maitriser les notions au détriment d'un apprentissage par mémorisation.

Perception de compétence à accomplir une activité

La perception de compétence est une perception de soi dans laquelle la personne évalue ses capacités à accomplir une tâche de manière adéquate. Le processus d'autoévaluation est à la base de la perception de compétence, et ce, surtout pour des activités de haut niveau, car une personne n'a habituellement pas besoin d'évaluer sa capacité à réussir une activité qu'elle a l'habitude de faire.

Selon Bandura (1986), la perception de compétence prendrait appui sur quatre sources.

Les performances antérieures constituent la première source. Le parcours scolaire des jeunes est parsemé d'évaluations, d'échecs, de succès. Lorsqu'un jeune est confronté à une activité de niveau élevé, il va utiliser ses réussites et ses échecs antérieurs pour évaluer positivement ou négativement ses chances de réussite.

La deuxième source est l'observation de l'exécution d'une activité par d'autres. C'est lors de démonstrations que l'élève apprend comment faire la tâche et qu'il évalue ses chances de la réussir.

La troisième source est la persuasion. La persuasion se décrit comme toutes les interventions du milieu scolaire dont le but est de convaincre l'élève de ses capacités à accomplir une activité. Comme il est souligné dans l'ouvrage de Viau (1994), on peut augmenter la perception de compétence d'un élève en donnant des rétroactions axées sur les aptitudes et sur les efforts durant la tâche.

Finalement, la dernière source de la perception de compétence est composée des réactions physiologiques et émotives de l'élève. Par exemple, si un élève réagit mal face à une situation d'apprentissage ou à un examen, il risque d'interpréter ses réactions comme une incapacité de sa part à réussir ce qu'on lui demande de faire, ce qui va altérer sa perception de compétence.

À toutes ces sources viennent aussi s'ajouter les facteurs reliés à l'enseignant. Ce dernier est un pilier important dans la perception de compétence du jeune pouvant l'influencer positivement ou négativement. Ainsi, pour que l'élève choisisse de s'engager et de persévérer, il doit avoir une bonne opinion de sa compétence à accomplir une tâche. Les perceptions de compétence sont aussi en lien avec les perceptions de valeur accordée à l'activité d'apprentissage. Par exemple, si un jeune poursuit des buts à court terme, cela va avoir une influence sur sa perception de compétence, car il voit plus rapidement ses progrès et il va pouvoir évaluer sa compétence plus rapidement qu'un élève qui poursuit des buts à long terme. Cette évaluation, si elle est négative, pourrait brimer la perception de compétence de l'élève et l'amener à se désengager de la tâche. Un jeune qui poursuit des buts à long terme est habituellement plus autonome qu'un élève qui poursuit des buts à court terme. Il tente donc de se préparer à faire face aux différents apprentissages qui se présenteront à lui. Cela peut avoir un effet favorable sur sa perception de compétence, car s'il croit être capable de réaliser une tâche sur une longue période de temps, il pourra se sentir capable de réaliser des tâches à plus court terme.

La perception de compétence est donc un déterminant important de la motivation scolaire, car elle peut influencer la décision de l'élève de s'impliquer ou non dans une activité et d'investir les efforts nécessaires pour y arriver.

Perception de la contrôlabilité

La perception de contrôlabilité est le degré de contrôle que l'élève possède sur le déroulement et les conséquences d'une activité qu'on lui propose de faire. La perception est personnelle à l'élève et peut être de degré faible ou élevé. Lorsque l'élève perçoit un faible niveau de contrôlabilité, il juge que tout lui est imposé. Contrairement à lui, un élève qui a une perception de contrôlabilité élevée s'estime entièrement responsable de ce qui lui arrive et il se croit capable de maitriser le déroulement de l'activité.

Il y a deux éléments importants qui influencent cette perception. Le premier est la perception de compétence. Si un élève se sent compétent dans l'accomplissement d'une tâche, il percevra son degré de contrôle sur la tâche comme plus élevé que celui qui ne se sent pas compétent. Le deuxième élément ayant de l'influence sur la perception de contrôle est la perception attributionnelle. Cette perception, qui provient de la théorie de Weiner (1984; 1992), implique que le comportement d'une personne est influencé par sa façon d'identifier les causes de ses réussites et de ses échecs. La perception attributionnelle dépend du lieu (interne ou externe), de la stabilité (stable ou modifiable) et du degré de contrôle (contrôlable ou non contrôlable) qu'un jeune alloue à ses actions. Si un jeune attribue ses échecs à des causes externes, stables et incontrôlables, cela risque de provoquer chez lui de l'impuissance apprise qui se caractérise par un abandon. Il croit alors qu'il ne peut exercer un contrôle sur le déroulement de l'activité et que tout lui est imposé. Contrairement à lui, l'élève qui réussit le mieux est celui qui attribue son succès à l'effort, une cause interne, modifiable et contrôlable. Ainsi, plus un élève se sent en contrôle de son apprentissage, meilleure est sa performance, car il a conscience qu'il peut intervenir dans le déroulement des activités.

La perception de contrôle est encore plus importante au secondaire, car c'est durant cette période que les jeunes ont un besoin grandissant d'exercer plus de contrôle sur leur vie. S'ils sentent que tout leur est imposé, ils pourraient se désinvestir de la tâche et ainsi limiter leur motivation. Cette perception est donc un déterminant important de la dynamique motivationnelle.

2.3.2.4 Indicateurs

Les indicateurs sont les composantes qui permettent de mesurer le degré de motivation des élèves. Dans le modèle de la dynamique motivationnelle, le choix d'entreprendre une activité, la persévérance et l'engagement cognitif sont les principaux indicateurs de la motivation.

Les indicateurs sont les conséquences de la motivation. Ils sont représentés par le choix, la persévérance, l'engagement et la performance de l'élève. Cependant, comme le modèle motivationnel de Viau (1994) est basé sur le principe du déterminisme réciproque et que ce dernier veut que les perceptions d'une personne, ses comportements et son environnement soient à la fois la source et la conséquence de la motivation, il est donc possible que les indicateurs deviennent des sources de motivation et que les déterminants en deviennent les conséquences. Dans le texte qui suit, nous décrivons chacun des indicateurs présents dans le modèle : choix, persévérance, engagement cognitif et performance.

Choix

Le premier indicateur de la motivation est le choix de s'engager dans une activité ou non. L'élève qui choisit de s'engager dans une activité use de stratégies d'apprentissage. Contrairement à ce dernier, l'élève qui ne désire pas s'engager va utiliser des stratégies d'évitement. Les stratégies d'évitement se décrivent comme l'utilisation de comportements pour éviter de participer à la tâche (ex : demander des explications inutiles, se lever pour aiguiser son crayon, regarder les images d'un manuel, etc.).

Le choix de s'engager ou non dans la réalisation d'une tâche peut être mis en péril par une faible motivation ou, au contraire, par une surmotivation qui amène l'élève à concentrer toute son énergie sur une seule tâche, ce qui met en péril la réalisation complète de l'activité en cours.

Persévérance

Selon le modèle de Viau (1994), la persévérance prend le sens de ténacité. La persévérance est donc calculée par le temps que consacre un élève à ses activités d'apprentissage et à ses travaux. Plus un élève persévère, plus il a de chances de réussir. Cependant, pour que cela se réalise, il faut que la persévérance soit jumelée à l'effort. C'est donc ce jumelage qui amène la présentation du troisième indicateur de la motivation, soit l'engagement cognitif.

Engagement cognitif

Viau définit l'engagement cognitif comme « [l'] utilisation par l'élève de stratégies d'apprentissage et de stratégies d'autorégulation lorsqu'il accomplit une activité » (Viau, 1994. p. 77). Une stratégie d'apprentissage est un moyen utilisé par le jeune pour acquérir, intégrer et se rappeler des connaissances qui lui sont enseignées. Par exemple, le jeune peut utiliser des stratégies de mémorisation, d'organisation ou d'élaboration pour apprendre. Les stratégies d'autorégulation, elles, sont des stratégies cognitives que le jeune utilise consciemment, systématiquement et constamment lorsqu'il assume la responsabilité de ses apprentissages (Zimmerman, 1990 b, 1986, cité par Viau, 1994, p. 77). Ces dernières peuvent prendre la forme de stratégies métacognitives (planification, *monitoring*, autoévaluation), de stratégies de gestion (organisation du travail dans le temps, choix du lieu d'apprentissage, etc.) et de stratégies motivationnelles. Toutes ces stratégies permettent à l'élève d'être responsable face à ses apprentissages.

Performance

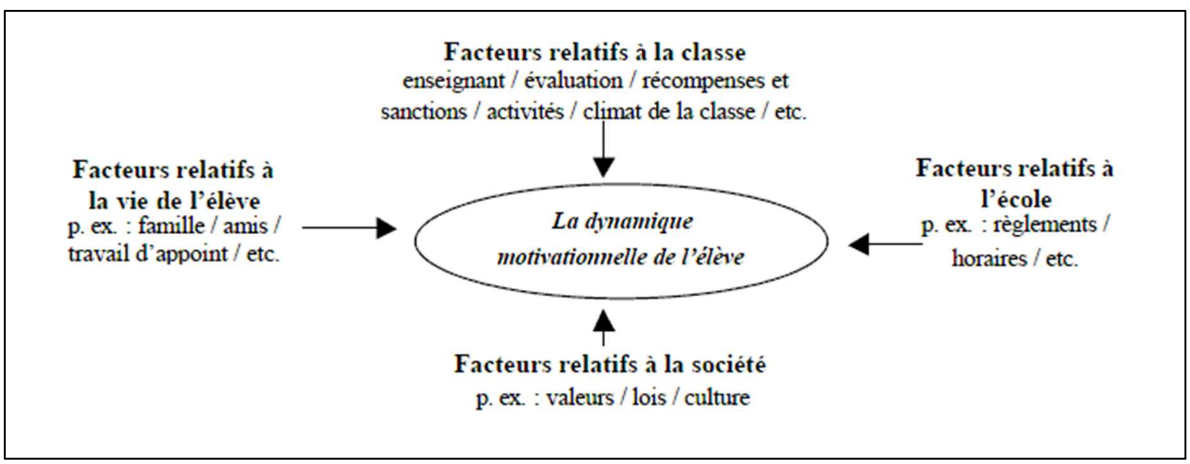
La performance se traduit par l'utilisation de connaissances déclaratives, conceptuelles et procédurales ou encore par l'utilisation de stratégies d'apprentissage ou d'autorégulation. Elle se définit parfois comme une acquisition de connaissances et parfois comme une démonstration de connaissances. La performance est un bon indicateur de la motivation, car un élève motivé persévèrera plus qu'un élève non motivé et utilisera plus de stratégies d'apprentissage, ce qui influencera ultérieurement sa performance (Viau, 1999). La performance permet aussi à l'élève de se juger en tant que personne et en tant qu'apprenant. En somme, la performance est à la fois une cause indirecte de la motivation et une source de motivation.

En résumé, le modèle motivationnel de Viau (1994) est un modèle dynamique qui est constitué d'un contexte, ou de situations d'apprentissage, qui a une influence sur les déterminants. Ces déterminants influencent à leur tour les indicateurs qui, eux, ont un certain pouvoir sur la performance. C'est un modèle où tous les éléments sont en interrelation et s'influencent mutuellement.

2.4 ÉLÉMENTS THÉORIQUES RETENUS

Plusieurs facteurs influencent la motivation scolaire. Ils sont synthétisés dans le schéma suivant.

Figure 2. Facteurs influençant la dynamique motivationnelle de l'élève - Viau 2009



Compte tenu du temps alloué à la maîtrise, nous avons décidé d'utiliser le modèle de la dynamique motivationnelle qui va nous permettre de concevoir un outil d'évaluation de la motivation en contexte scolaire. Nous avons arrêté notre choix sur ce modèle, car chacune des composantes de la dynamique motivationnelle est en constante interrelation avec les autres éléments qui le constituent. Ce modèle prend autant en compte l'influence des facteurs externes que l'influence des facteurs internes pour expliquer les sources de la motivation scolaire. En somme, ce modèle n'élucide pas seulement la nature de la motivation, il explique aussi comment la motivation se manifeste, change et s'inscrit dans les processus d'apprentissage. Il offre un côté pratique et dynamique qui adhère bien à notre manière de percevoir les apprentissages et la motivation en milieu scolaire.

Étant donné qu'il nous est complexe d'évaluer tous les facteurs intervenant au niveau motivationnel (facteurs externes et internes), nous avons choisi d'évaluer plus précisément les facteurs internes influençant la motivation scolaire. Ces facteurs sont la perception de compétence, la perception de valeur et la perception de contrôle (Wigfield et Eccles, 1992; Bandura, 1993; Viau, 1994; Skinner, 1995). De plus, comme le modèle de la dynamique motivationnelle a été validé dans le système d'éducation québécois, nous pourrons s'inspirer des travaux effectués par Viau pour élaborer un outil d'évaluation de la motivation nous donnant un portrait personnalisé de chaque individu lors de l'apprentissage des nombres rationnels.

3. NOMBRES RATIONNELS

Comme nous l'avons mentionné auparavant, nous désirons élaborer un outil nous permettant d'évaluer la motivation des élèves lors de la transition primaire-secondaire. Suite aux informations retenues de la section 2.4, nous désirons évaluer les perceptions de compétence, de contrôle et de valeur accordées à une tâche, mais plus spécifiquement, une tâche en lien avec les nombres rationnels. Dans la prochaine section, nous nous consacrons donc à la présentation de ce concept qui nous permet de répondre à nos objectifs de recherche visant la construction d'outils didactiques portant sur les nombres rationnels.

Pour ce faire, nous avons étudié plusieurs recherches menées dans le domaine des nombres rationnels (Rouche, 1998; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Mercier et Deblois, 2004; Stegen et Sacré, 2004a, 2004 b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010; Adihou et Arsenault, 2011; Saboya et Rhéaume, 2013). Dans les prochaines sections, nous présentons les différentes interprétations de la représentation fractionnaire des nombres rationnels. Cela nous permet de mieux comprendre ce concept et les différents sens qui lui sont attachés ainsi que décrire, à la section 3.2, les difficultés, les raisons, les interventions et les obstacles reliés à l'apprentissage des nombres rationnels.

3.1 PLURALITÉ DE SENS DE LA FRACTION

Les nombres rationnels peuvent être représentés sous deux formes distinctes : fractionnaire (3/4) et décimale (0.75). Comme le souligne Rouche, les apprenants « (…) comprennent assez vite comment s'écrivent et se combinent les nombres décimaux, beaucoup par contre, lorsqu'il s'agit des fractions, ne saisissant pas le *pourquoi*, se bornent au *comment*, ils exécutent les opérations selon les règles imposées (...)» (Rouche, 1998, p.1). Cette manière de faire peut provenir du fait que le champ conceptuel de la notion de fraction en mathématiques est très vaste et qu'il fait référence à plusieurs sens distincts selon la situation

(Brissiaud, 1998; Rouche, 1998; Grégoire, 2008; Nunes et Bryant, 1995, cités dans Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Cependant, les types et le nombre de catégories d'interprétations utilisées diffèrent d'un auteur à l'autre. Dans certaines recherches, les catégories sont exclusives, alors que dans d'autres elles se recouvrent partiellement. Parfois, elles sont ordonnées selon une progression d'acquisition. Il n'en reste pas moins qu'il est important de connaitre et de comprendre les différentes interprétations de la fraction pour pouvoir les utiliser correctement.

Dans la prochaine section, nous présentons donc les différentes interprétations de la fraction. Pour ce faire, nous nous référerons principalement à une recherche de Blouin (2002) basée sur les travaux de Kieren (1976, 1980, 1989) et de Behr, Lesh Post et Silver (1983). Ce choix découle du fait que cette auteure regroupe les différentes interprétations de la notion de fraction en cinq catégories exhaustives qui facilitent la compréhension de chacune d'entre elles. Ces cinq interprétations de la fraction sont les suivantes : partie-tout, rapport, quotient, opérateur et mesure.

3.1.1 Partie-tout

Selon l'interprétation « partie-tout » d'une fraction, il est possible de quantifier une relation entre un nombre de parties et un tout. Par exemple, la fraction $\frac{a}{b}$ représente un tout qui a été partagé en « b » parties équivalentes et avec lesquels nous avons réuni un nombre « a » de parties. Numériquement, nous pouvons exprimer cette interprétation de la manière suivante : 3/8, où 3 représente le nombre de parties réunies sur un total de 8 parties congrues, et ce, d'une quantité continue ou discrète. Ce qu'il faut retenir de cette définition, c'est que les deux nombres « a » et « b » sont en constante relation. C'est à partir de cette interprétation qu'il est possible d'aborder le concept de fractions équivalentes. Deux fractions sont dites équivalentes si elles peuvent représenter la même partie d'un tout. Ce modèle est appelé inclusif, car les parties sont contenues dans le tout (Vergnaud, 1983, cité dans Blouin 2002).

Ce sens est celui qui domine dans les manuels scolaires au primaire (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). De plus, comme le soulignent aussi les chercheurs Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009), le sens « partie-tout » est présent de manière intuitive dans le développement des enfants. En effet, un enfant peut de manière naturelle partager un gâteau en deux ou quatre parts relativement égales. Cependant, selon plusieurs recherches (voir notamment Lamon, 2001; Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009), il semblerait que ce partage naturel peut empêcher de voir la fraction comme un nombre représentant une quantité (autre interprétation possible de la fraction) ou limiter l'accès à toute autre interprétation de la fraction, ce qui diminue par le fait même l'accès à la compréhension de certains problèmes.

3.1.2 Rapport

Une fraction utilisée dans le sens « rapport » représente une relation existante entre deux quantités. Cette interprétation permet donc de noter le rapport entre les nombres à l'aide du symbole « : » ou de la barre horizontale. À la différence du modèle inclusif, la fraction rapport est un modèle dit exclusif, en raison de l'indépendance des quantités mises en relation. Par exemple, cette interprétation intervient lors de la comparaison de quantités d'éléments ou de grandeurs de même unité (le nombre d'heures de cours de mathématiques par rapport au nombre total d'heures allouées aux autres cours mis à l'horaire) ou lors de la comparaison de quantités d'éléments ou de grandeurs différentes (manger deux baguettes en quatre jours représente ½ baguette par jour).

La notion de proportion découle de l'interprétation « rapport ». Une proportion est une relation non pas entre un couple de nombres, mais bien entre deux couples de nombres qui possèdent le même rapport (exemple : 1/3 et 3/9). En effet, comme il est décrit dans Blouin (2002, p.13), « lorsque l'on compare deux rapports égaux, on dira habituellement qu'ils sont égaux en proportion ». S'il y a 3 bonbons bleus et 9 bonbons rouges dans le sac de Claudia et 5 bonbons bleus et 15 bonbons rouges dans le sac de Maude, les rapports entre les bonbons de différentes couleurs dans le cas des deux filles sont équivalents (3 sur 9, ou 5 sur 15, soit 1/3).

Il est donc possible de remarquer que la relation d'équivalence qui existe dans l'interprétation « rapport » la lie à l'interprétation « partie-tout ». Cependant, ces deux dernières se distinguent par la relation qui unit leur numérateur et leur dénominateur. Par exemple, lorsque nous interprétons 3/8 selon le sens partie-tout, le 3 signifie que nous avons 3 parties équivalentes provenant d'un tout séparé en 8 parties équivalentes. Si nous interprétons 3/8 comme un rapport, la signification est différente. Par exemple, 3/8 signifie que nous avons 3 parties bleues pour 8 parties rouges selon un total de 11 parties. « Avec l'interprétation « partie-tout », nous considérons une relation avec l'ensemble (le tout), tandis qu'avec l'interprétation « rapport », la relation est créée en fonction d'une seconde quantité, une relation partie à partie (Blouin, 2002, p. 14).

3.1.3 Quotient

Le sens « quotient » de la fraction correspond au résultat d'une division. Cette interprétation fort utile en mathématiques permet de dire que 8/4 est égal à 2, ce qui facilite l'écriture et la compréhension de certains nombres. Dans ce contexte, l'écriture fractionnaire a/b est utilisée pour représenter la division de deux entiers « a » et « b » (b étant non nul). Dans cette interprétation, la notation fractionnaire représente aussi le résultat d'une équation linéaire de type $bx = a \rightarrow x = a/b$. Un exemple de problème découlant de ce sens peut s'exprimer ainsi : nous disposons de 3 biscuits que nous voulons partager pour les offrir à 4 amis. Chacun d'entre eux obtiendra donc ¾ de biscuit. Ainsi, 3 divisé par 4 égale ¾.

3.1.4 Opérateur

L'interprétation « opérateur » de la fraction permet de considérer la fraction comme une fonction ou comme une opération multiplicative. C'est à l'aide de cette interprétation qu'il est possible de trouver une partie représentée par la fraction d'un tout (1/3 de…) ou de construire de nouvelles collections en modifiant (réduire ou augmenter) la taille d'un objet ou d'une collection originale. Par exemple, nous pouvons modifier des images par homothétie en modifiant seulement la mesure de leurs côtés. Nous obtenons un agrandissement en appliquant l'opérateur a/b à chacune des mesures dans le cas où « a » étant plus grand que « b », alors que nous obtenons une réduction si « a » est plus petit que « b ».

Cette interprétation nous amène aussi à envisager la fraction de manière algébrique. Le sens du nombre en est ainsi affecté. En effet, le nombre n'est plus considéré comme une quantité, mais comme une transformation multiplicative. Si nous demandons à un élève de trouver le ¾ de 12, la fraction ¾ n'est plus interprétée comme étant 3 parties sur 4 ou comme un rapport de 3 : 4 (pour ne nommer que ces deux interprétations), mais comme une suite d'opérations (x 3 et ensuite ÷ 4) (Blouin, 2002).

La notion d'inverse multiplicatif découle de cette interprétation. Pour faciliter la compréhension, un exemple suit :

> *Marie possède 16 billes et Marc en possède 20. Quel est le rapport entre le nombre de billes de Marie et celui de Marc?*

Dans ce problème, le nombre de billes de Marie peut être envisagé comme le résultat d'une transformation multiplicative du nombre de billes de la collection de Marc. Cette transformation est « 4/5 » ou « 4/5 du nombre de billes de Marc » ($\frac{16}{20} = \frac{16 \div 4}{20 \div 4} = \frac{4}{5}$). Il est aussi possible de trouver le nombre de billes de Marc à partir de la collection de Marie en appliquant la transformation inverse « 5/4 ». Nous obtenons alors que 5/4 est l'inverse de la fraction 4/5.

3.1.5 Mesure

L'interprétation « mesure » de la fraction représente le résultat d'une mesure. Ce sens suppose donc l'existence d'une unité de mesure. Par exemple, la fraction 4/5 sera obtenue par une itération de la fraction 1/5 : 1/5 + 1/5 + 1/5 + 1/5 = 4/5, où 1/5 représente une unité de mesure. Ce sens a donc une référence explicite à une unité de mesure et à un traitement dynamique de cette dernière. Ce qui distingue ce sens de l'interprétation « partie-tout » est que l'unité de référence n'est pas la même. En effet, l'unité de référence n'est plus un tout, mais bien une unité fixée selon les relations en cause et qui peut varier selon les besoins. Cette interprétation s'avère très utile lorsque l'on doit donner du sens aux fractions qui sont supérieures à 1. Outre cette utilité, l'interprétation « mesure » de la fraction est utile lors de l'addition de fractions, car pour additionner 5/9 à 3/9, il est possible d'envisager l'ajout de 5 unités de 1/9 à 3/9 (3/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 8/9).

Il ressort de ces descriptions que les fractions sont des solutions à une grande variété de problèmes mathématiques. Il est important de spécifier que différents sens de la fraction peuvent être utilisés conjointement dans un même problème mathématique. En voici un exemple tiré du texte de Deshaies (2006, p. 19) :

> *Dans l'expression « 2/3 de gâteau », une coordination de plusieurs interprétations de la fraction est nécessaire; nous énonçons ces interprétations dans un ordre quelconque. L'interprétation « partie-tout » nous permet de concevoir qu'un gâteau constitue le tout (3/3), qu'il est composé de 3 parties égales et que chacune des parties constitue 1/3 du tout. L'interprétation « mesure » permet de se représenter la fraction 1/3 du gâteau comme étant une unité de mesure trois fois plus petite que le tout et que la fraction 2/3 représente le résultat de l'itération de cette fraction unité; processus qui permet de mesurer la quantité de gâteau (soit moins d'un gâteau). L'interprétation « quotient » de la fraction peut également être utile dans ce contexte. L'interprétation de l'expression « 2/3 de gâteau » peut être envisagée comme étant la part que chacune des 3 personnes obtient lorsque deux gâteaux sont partagés entre elles. Enfin, l'interprétation « opérateur » de la fraction permettrait de concevoir la quantité fractionnaire 2/3 de gâteau comme le résultat de l'application de la fraction opérateur 2/3 sur la quantité 1 (ex : prendre 2/3 de fois un gâteau).*

Avec cet exemple, nous percevons que, pour développer une réelle compréhension de la notion de fraction, il est primordial pour l'élève d'être familiarisé avec ses différentes interprétations, et ce, dans des contextes variés. Il revient donc à l'enseignant, lors de la planification de ses situations d'enseignement et d'apprentissage, d'utiliser des problèmes riches en sens qui vont permettre à l'élève de mobiliser toutes ses connaissances sur les fractions et de travailler en profondeur sa compréhension des différentes interprétations, pour ainsi permettre une extension de ses compétences (Lamon, 2001). Cependant, pour ce faire, l'élève doit acquérir certains bagages conceptuels et procéduraux concernant les nombres rationnels. Si ce dernier est limité à des procédures sans compréhension, il pourrait développer certaines difficultés (Lamon, 2001).

3.2 ERREURS LIÉES À L'APPRENTISSAGE DES NOMBRES RATIONNELS

Étant donné la complexité des nombres rationnels, les élèves peuvent éprouver des difficultés lors de l'apprentissage de cette notion. En effet, les difficultés observées et les erreurs commises sont nombreuses et leurs origines sont différentes.

C'est pour ces raisons que la prochaine section de ce chapitre est consacrée à la présentation du concept d'erreur et qu'elle offre une typologie des difficultés et des erreurs liées à l'apprentissage des nombres rationnels, en plus de mettre en lumière leurs causes et les interventions réalisables pour les contrer. Nous retrouvons finalement une description des différents obstacles liés à cette notion.

3.2.1 Erreur (définition)

Avant d'énumérer les différentes erreurs liées aux nombres rationnels, il semble important de définir le concept d'erreur et de décrire la nature de différents obstacles qui les provoquent.

La conception d'apprentissage a évolué au cours des derniers temps et a fait évoluer le statut de l'erreur. Les recherches en didactique des mathématiques s'intéressent beaucoup au rôle des erreurs, à leurs effets et à leur importance dans le processus d'apprentissage. Selon Brousseau, *L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié qu'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement le reflet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiristes et béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas imprévisibles, elles sont constituées en obstacles (...) Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens même de la connaissance acquise (Brousseau, 1998, p.199).*

En d'autres mots, l'erreur est issue d'une connaissance qui était véridique, mais qui, dans le cadre d'une nouvelle situation, se relève inadéquate ou insuffisante. Les erreurs peuvent être reproductibles et elles ne sont pas isolées. Ce qui veut dire qu'elles peuvent être mises en relation avec des erreurs issues d'autres notions (Brousseau, 1998).

3.2.2 Erreurs conceptuelles et procédurales

Les erreurs commises par les élèves peuvent être de type conceptuel ou procédural. Il est important de bien distinguer ces deux types d'erreurs pour pouvoir comprendre d'où elles proviennent et bien intervenir auprès des élèves.

Les erreurs liées à des connaissances conceptuelles se définissent par la compréhension explicite ou implicite des principes qui gouvernent un domaine mathématique et des interrelations entre les différentes parties des connaissances d'un domaine (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Autrement dit, c'est la compréhension du sens de la notion en jeu. Dans le domaine des nombres rationnels, par exemple, les connaissances liées au sens de la fraction (partie-tout, rapport, mesure, etc.) sont des connaissances de type conceptuel.

Les erreurs d'élèves pourraient aussi provenir de connaissances procédurales. Ces connaissances se définissent comme étant des séquences d'actions permettant de résoudre des problèmes de manière automatisée. Ces connaissances correspondent donc au savoir-faire et aux techniques de résolution. Par rapport aux nombres rationnels, les connaissances procédurales peuvent se présenter sous la forme d'opérations (addition, soustraction, multiplication, division), de comparaisons ou d'équivalences (Carrette, Content, Rey, Coché, Gabriel et 2009).

Même si elles peuvent entraîner des erreurs chez l'apprenant, il est important pour l'élève de développer conjointement les connaissances procédurales et conceptuelles, car quelle est l'utilité de connaitre, par exemple, l'algorithme de l'addition de fractions sans en comprendre le sens? Les connaissances conceptuelles et procédurales sont donc étroitement liées et s'influencent mutuellement. Cependant, les connaissances conceptuelles sont considérées nécessaires pour savoir utiliser les procédures. À vrai dire, elles jouent un rôle majeur dans la génération de l'adoption de procédures. C'est pourquoi, en contexte scolaire, les connaissances conceptuelles devraient être enseignées avant les connaissances procédurales (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Un apprenant doit donc construire le sens des procédures avant de les maitriser. C'est à la suite de la compréhension du sens d'une notion que l'apprentissage et l'utilisation des connaissances procédurales pourront venir enrichir les connaissances conceptuelles. Les jeunes pourront alors extraire des principes selon leurs expériences ou même réfléchir aux résultats obtenus après l'utilisation d'algorithmes pour ainsi optimiser leurs connaissances conceptuelles (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Une bonne maîtrise des connaissances procédurales et conceptuelles d'une notion pourra ainsi faciliter la résolution de tâches complexes et le réinvestissement des connaissances dans d'autres apprentissages.

L'étude de recherches portant sur l'apprentissage des nombres rationnels montrent la majorité des difficultés des élèves proviennent d'une mauvaise compréhension conceptuelle de la notion. Ainsi, les élèves auraient de la difficulté à coordonner plusieurs connaissances, à les utiliser dans des contextes différents ou encore à les appliquer dans d'autres domaines (Cauzinille-Marmèche, Weil-Barais, 1989, cité dans Deshaies, 2006). Certains élèves en difficulté vont même jusqu'à chercher un algorithme facile et « magique » à utiliser dans le but de fournir le moins d'effort possible pour ainsi camoufler leur ignorance (Perrin-Glorian, 1993, cité dans Deshaies, 2006; Blouin et Lemoyne, 2002). Ils mémorisent alors des règles d'action pour la plupart des connaissances acquises sans en comprendre le sens (valorisation des connaissances procédurales au détriment des connaissances conceptuelles). Cependant, une surmémorisation d'algorithmes peut amener les jeunes à ne plus savoir dans quel contexte les utiliser et ainsi provoquer des erreurs. De plus, ces règles apprises et mémorisées ne prennent en considération qu'une petite partie de la notion et sont valides dans un nombre restreint de cas (Blouin et Lemoyne, 2002). Comme le soulignent Stegen et Sacré (2004b), les élèves ont de la difficulté à faire des liens avec les tâches inhabituelles qui leur sont proposées et les « trucs » ou les règles fournis par l'enseignant. Il ne faut donc pas que les enseignants tentent de pallier les obstacles de la tâche en fournissant des trucs rapides dépourvus de sens (Stegen, Sacré, 2004a). Il faut que les élèves travaillent leurs connaissances conceptuelles pour donner du sens à leurs connaissances procédurales.

3.2.3 Typologie des erreurs liées à l'apprentissage des Q

L'apprentissage des nombres rationnels est complexe et demande à l'élève de changer ses conceptions établies par rapport aux nombres entiers. En effet, l'élève doit utiliser des symboles, des techniques et des règles déjà employés pour désigner les entiers, les comparer et calculer avec eux, mais dans un nouveau cadre où certaines de ces règles restent valables et d'autres ne le sont plus. Ce changement n'est pas toujours facile et certains apprenants éprouvent des difficultés avec les fractions et les décimaux.

L'extension du domaine numérique des entiers aux rationnels nécessite la prise en compte de ruptures épistémologiques importantes. L'étude de recherches menées dans le domaine d'apprentissage des nombres rationnels (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Mercier et Deblois, 2004; Sacré et Stegen, 2004a, 2004b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel,2009; Lessard, 2010; Adihou et Arsenault, 2011; Saboya et Rhéaume, 2013) nous a permis d'élaborer une description des difficultés des élèves qui sera présentée dans la section suivante.

3.2.3.1 Erreurs liées à l'écriture et à la lecture des rationnels

Certaines difficultés des élèves peuvent provenir de la complexité du concept des nombres rationnels. En effet, un nombre rationnel peut être représenté de différentes façons, soit par une écriture fractionnaire ou une écriture décimale. Cela peut causer des confusions chez l'élève étant donné qu'il est habitué de désigner par un seul code les nombres entiers (Lessard, 2010). En effet, un même nombre rationnel peut être désigné par un pourcentage, un nombre décimal, un couple, etc. (0.8, 4/5, 80 %…) (Blouin, 2002; Lessard, 2010) De plus, plusieurs fractions peuvent désigner un même rationnel (4/5, 8/10, 12/15…) Cette caractéristique est un changement conceptuel très important à prendre en considération lors du passage des entiers aux rationnels, car cela peut augmenter la confusion en ce qui concerne la valeur du nombre.

Les élèves pourraient éprouver une certaine confusion dans l'interprétation de différentes représentations des nombres rationnels, et ce, en raison des conceptions qu'ils ont préalablement établies lors de l'étude des nombres naturels et entiers. La méprise entre ces ensembles de nombres est la source de plusieurs erreurs chez les jeunes.

3.2.3.2 Erreurs liées à l'écriture des nombres rationnels

Comme nous venons de le souligner, les erreurs des élèves peuvent découler de la complexité de la notation de nombres rationnels. En ce qui concerne les nombres décimaux, on utilise, comme pour les entiers, un système de numération de dix symboles (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Cependant, l'écriture des nombres décimaux se distingue de l'écriture des entiers par la présence de deux parties distinctes qui sont séparées par une virgule. Selon Stegen, Géron et Daro (2007), ce passage crée des difficultés lors de l'écriture des nombres décimaux. En effet, selon leur étude, environ 20 % des apprenants se fient encore aux principes de numération de la partie entière, comme si les deux parties étaient symétriques. Ils écrivent le nombre 24 centièmes (0,24) 0.024, car, avec les entiers, trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines. Ils transposent donc leurs connaissances des termes liés aux entiers aux nombres décimaux. Comme le soulignent Stegen, Géron et Daro :

> *D'un point de vue mathématique, l'écriture des nombres décimaux a l'avantage d'être « calquée » sur celle des entiers; du point de vue de l'enseignement, cette caractéristique mérite que l'on s'y attarde, car elle est source de difficultés non résolues pour 30 % des élèves sortants de l'école primaire (Stegen, Géron et Daro, 2007. p.31).*

De plus, toujours en lien avec l'écriture des nombres décimaux, certains élèves ont de la difficulté à positionner correctement la virgule (Stegen, Géron et Daro, 2007). Par exemple, un élève peut écrire le nombre 32 centièmes comme 3.2 ou 30.02 plaçant ainsi la virgule aléatoirement. D'autres vont supprimer la virgule lors de l'écriture du nombre décimal. Ainsi, quatre et vingt-et-un centièmes (4.21) s'écrit, pour ces élèves, comme 421. Ces erreurs proviennent du passage du système de désignation orale à l'écriture. Il faut privilégier la désignation orale des nombres en renforçant le sens de celui-ci. Par exemple, dans le cas du nombre 0.32, nous préfèrerons l'expression zéro unité et trente-deux centièmes.

La présence du nombre zéro dans l'écriture des « nombres à virgule » peut aussi occasionner certaines erreurs chez l'apprenant. En effet, l'idée du zéro « inutile » placé à gauche du nombre dans l'ensemble des nombres entiers (0,002 kilomètre qui, après conversion, équivaut à 0002 mètres, donc 2 mètres) ne s'utilise pas dans l'ensemble des nombres rationnels. En effet, dans l'ensemble des nombres rationnels, les zéros considérés comme « inutiles » se placent à la droite du nombre et non à sa gauche (2.25 + 3.3 = 2.25 + 3.3**0** = 5.55). Certains élèves qui ne connaissant pas suffisamment les valeurs positionnelles des nombres décimaux pourraient appliquer la technique apprise avec les entiers et affirmer, de manière erronée, que 0.002 = 0.2 ou que 0.0002 = 2 puisqu'ils n'utiliseraient pas la conversion d'unités de mesure (Blouin, 2002; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). L'élève qui utilise cette technique calquée sur celle des entiers changerait alors la valeur positionnelle du chiffre 2 dans la partie décimale. Nous sommes en présence d'une procédure apprise et mémorisée par les élèves sans qu'ils en comprennent le sens et la provenance[1].

En ce qui concerne l'écriture sous la forme fractionnaire, elle se distingue de celle des entiers par la présence de deux nombres entiers séparés par la barre horizontale ou oblique (a/b). En travaillant avec cette représentation, certains élèves traitent le numérateur et le dénominateur

[1] Les zéros dits «inutiles» et placés à droite des nombres rationnels ne sont pas des nombres ajoutés inutilement ou sans importance sur la valeur du nombre, mais qu'ils ont une valeur positionnelle : 0.20 signifie 20 centièmes et 0.200 signifie 200 millièmes.

comme deux nombres entiers qui n'ont pas de lien entre eux et appliquent dès lors des procédures propres aux nombres entiers (comparaison, addition, soustraction, multiplication, division…) (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Cette erreur peut provenir de la manière dont les fractions sont oralisées lors de leur apprentissage (ex : 3 sur 4) qui masquerait le lien qui unit le numérateur et le dénominateur.

De plus, certains élèves distinguent mal la signification de la barre « / » qui est employée dans l'écriture de la fraction. Ils croient que le symbole « / » et la virgule, qui est incluse dans l'écriture décimale, signifient la même chose. Ainsi, certaines jeunes considèrent 3/5 comme équivalent à 3,5 (Stegen, Géron et Daro, 2007; Lessard, 2010). De même, selon leur étude, près de 50 % des élèves de première secondaire ne sont pas capables de représenter correctement 5/4 en nombre à virgule (Stegen, Géron et Daro, 2007). Cette erreur commise pourrait provenir du fait que les jeunes n'ont pas pris en considération que la barre incluse dans la notation fractionnaire signifie d'emblée une opération de division. En d'autres mots, ils ne comprennent pas que la fraction 5/4 signifie aussi 5 divisé par 4. Cette difficulté peut aussi être amplifiée sachant que la fraction 5/4 est une fraction impropre (nombre fractionnaire dont la valeur du numérateur est supérieure à celle du dénominateur) et que ce genre de fraction est une source de difficultés chez plusieurs apprenants. En effet, lors de leurs apprentissages, les élèves ont été plus souvent confrontés à des fractions dont le numérateur est inférieur au dénominateur. Ainsi, concevoir que la valeur de la fraction peut être supérieure à l'unité peut être difficilement accepté par les apprenants surtout lors de l'utilisation de l'interprétation partie-tout de la fraction (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009).

Pour conclure, nous remarquons que l'écriture des nombres fractionnaires et décimaux n'est pas une notion simple. La majorité des erreurs commises proviennent du passage ardu des entiers aux rationnels. Il faut donc que les élèves apprennent à distinguer ce qui s'applique à l'écriture des entiers et ce qui s'applique à celle des rationnels non entiers. C'est alors qu'ils pourront utiliser des techniques efficaces et alimenter correctement leurs connaissances conceptuelles et, par le fait même, leurs connaissances procédurales.

3.2.3.3 Erreurs liées à la lecture des nombres rationnels

Certaines erreurs peuvent aussi provenir de la manière dont les nombres décimaux sont oralisés en classe et dans la vie courante (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Stegen, Sacré, 2004a; Stegen, Géron et Daro, 2007; Lessard, 2010;). Par exemple, le nombre 12.345 est souvent oralisé de la manière suivante : douze virgule trois cent quarante-cinq (Stegen, Géron et Daro, 2007). Cette manière de dicter les nombres décimaux se retrouve aussi dans nos habitudes de vie. Il est rare d'entendre, lors d'un achat dans un commerce, que le prix de l'article est de vingt et 40 centièmes de dollars (20.40 $).

Certaines erreurs liées à la lecture peuvent provenir du vocabulaire parfois complexe des nombres rationnels. Ces erreurs pourraient notamment provenir du fait que les termes utilisés se ressemblent phonétiquement, comme c'est le cas pour dixième/dizaine, centième/centaine et mille/millième. La distinction entre ces termes est importante, car la valeur positionnelle des chiffres de la partie à gauche de la virgule diffère de la valeur positionnelle des chiffres de la partie de droite. Une deuxième raison pourrait être le fait que la lecture orale des nombres décimaux est négligée et que la plupart des gens disent 12 virgule 534 au lieu de 12 et 534 millièmes. Ainsi, certains apprenants en viennent à affirmer qu'il y a 5 centaines dans le nombre 12,534, car ce dernier est oralisé par douze virgule cinq **cent** trente-quatre.

La lecture des fractions peut aussi provoquer certaines difficultés. En effet, plusieurs élèves n'utilisent qu'une partie de l'écriture chiffrée de la fraction lors de la lecture. Par exemple, 4 carreaux pour 1/4. Ces élèves ne prennent donc pas en compte la sous-unité dans laquelle on compte le quart. Cette difficulté peut provenir, une fois de plus, de la ressemblance phonétique des mots quatre et quart.

Même l'utilisation des termes numérateur et dénominateur lors d'exercices avec les représentations fractionnaires peut occasionner certaines difficultés, car il s'agit de termes nouveaux dans le vocabulaire des apprenants qui ont une certaine ressemblance phonétique.

La représentation graphique des nombres fractionnaires engendre aussi des erreurs. En effet, la conception simpliste des écritures fractionnaires (deux parties entières séparées par une barre de fraction) ou la confusion entre le symbole « / » et la virgule peuvent venir complexifier la lecture des fractions. Ainsi, certains élèves oralisent la fraction $\frac{1}{4}$ (un quart) par 1,4 (un virgule quart) et vice et versa. Cette difficulté pourrait s'expliquer par le passage parfois trop rapide de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale, ce qui nuit à la compréhension du sens même de la notion (erreur conceptuelle).

L'homographe « dixième » peut aussi occasionner des erreurs chez l'apprenant. Par exemple, lorsqu'il lui est demandé de représenter un dixième, l'élève peut confondre le premier chiffre à droite de la virgule (« dixième ») et ce que l'on obtient en partageant l'unité en dix (dixième).

Comme nous pouvons le remarquer, la majorité des erreurs proviennent d'une mauvaise compréhension conceptuelle des rationnels qui rend ardu leur réinvestissement et qui pourrait notamment engendrer des erreurs lors des opérations sur les nombres rationnels (comparaison, addition, soustraction, etc.) Dans la prochaine partie, nous nous attardons à la description des erreurs en lien avec ces opérations.

3.2.3.4 Comparaison

L'ignorance des valeurs positionnelles de la partie décimale peut engendrer des erreurs dans la comparaison des nombres décimaux. Notre étude des écrits sur ce sujet (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Stegen et Sacré, 2004a; Stegen, Géron et Daro, 2007; Lessard, 2010) nous a permis de reporter deux types de procédures réalisées par les apprenants pour comparer les décimaux.

La première procédure est liée à la généralisation erronée d'observations faites par rapport aux entiers. Par exemple, si les élèves ont intériorisé le fait qu'un nombre entier est d'autant plus grand qu'il contient un grand nombre de chiffres, ils pourraient faussement étendre ce constat à la partie décimale en affirmant que le nombre dont la partie décimale possède le plus de chiffres est le plus grand (ex : 2.623 > 2.65, car 623 > 65). Cette erreur est due à la conception erronée du nombre décimal en tant que juxtaposition de deux entiers (ou un couple de deux entiers séparés par une virgule). Elle peut aussi provenir de la manière dont les nombres décimaux sont oralisés (erreur présentée précédemment).

Le nombre de chiffres de la partie décimale peut aussi représenter, pour l'élève, un indicateur de sa grandeur dans un autre sens que celui qui vient d'être mentionné; plus il y a de chiffres dans la partie décimale, plus le nombre est petit (0.23 > 0.234). Il se fie à la valeur du dernier chiffre de la partie décimale pour comparer les nombres (3- position des millièmes, 4- position des centièmes (millième < centième)). Ici, la compréhension du concept de la valeur positionnelle à la droite de la virgule est encore erronée.

Pour faciliter la comparaison des décimaux, l'emploi de la table de valeur de position est à privilégier (voir section 5.4.2.5).

Certaines erreurs peuvent aussi se produire lorsque les élèves sont amenés à comparer des nombres rationnels sous une notation fractionnaire. Ils utilisent seulement les numérateurs ou les dénominateurs pour ordonner les fractions. Cette erreur peut découler de la surexploitation de l'interprétation « partie-tout » dans les ressources pédagogiques qui amène les élèves à se questionner à savoir s'il faut comparer la taille des pièces ou le nombre de pièces (pour certains élèves ¾ et 4/5 sont pareils, car il leur manque une partie pour obtenir le tout) (Lessard, 2010).

De plus, lorsqu'il est le temps d'ordonner des nombres décimaux et des fractions simultanément, plusieurs élèves vont les traiter séparément. Ainsi, toutes les fractions vont apparaitre avant les nombres décimaux ou inversement (Lessard, 2010).

Les représentations multiples des nombres rationnels viennent donc complexifier leur comparaison. Cela exige de permettre aux apprenants de développer des connaissances variées sur cet ensemble de nombres et de les confronter au passage difficile des nombres entiers aux nombres rationnels. Ils doivent comprendre que certaines opérations peuvent fonctionner avec les entiers, mais qu'elles ne fonctionnent pas toujours avec les nombres rationnels. Ainsi, pour comparer des nombres rationnels, l'élève doit pouvoir être capable d'utiliser correctement plusieurs registres de représentation.

3.2.3.5 Densité

L'application des règles sur les nombres naturels entraîne des difficultés lorsque les jeunes sont amenés à comparer des nombres rationnels, à les ordonner ou à les placer sur une droite numérique, car c'est à ce moment que le principe d'intercalation des rationnels fait son apparition (la densité). Effectivement, entre deux entiers non-consécutifs, il existe un nombre fini d'entiers. Par exemple, entre 7 et 10, il existe un nombre fini (2) d'entiers (8 et 9). Cependant, entre deux nombres rationnels, il existe une infinité des nombres rationnels, principe nouveau pour les élèves.

La densité n'est pas une notion simple à comprendre considérant la rupture qui doit s'opérer entre les entiers et les rationnels. Cependant, l'utilisation adéquate de la droite numérique et des phénomènes de *zooms* peut aider la matérialisation de cette propriété.

Prédécesseur et successeur

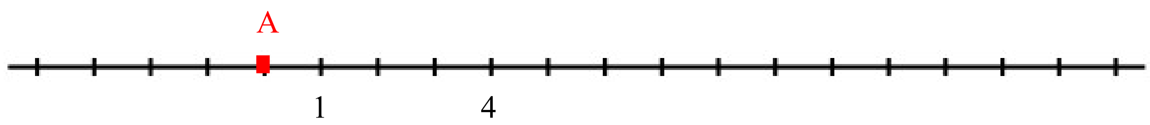
Les apprenants peuvent éprouver des difficultés lorsqu'ils traitent la notion de successeur dans les nombres rationnels (notion en lien avec celle de la densité). Comme le soulignent Stegen, Géron et Daro (2007) et Lessard (2010), les élèves sont confus lorsque nous leur demandons de trouver le nombre venant juste avant ou après un autre nombre décimal (par exemple, à la question « Quel est le successeur de 2.74? », les élèves répondent 2.75). Cette erreur est due au fait que, dans l'ensemble des naturels, le nombre a toujours un successeur (par exemple, le successeur de 7 est 8). Toutefois, ce constat n'est plus vrai avec les décimaux.

Il est aussi complexe pour les élèves d'identifier le nombre entier qui vient juste avant un nombre décimal (par exemple, savoir quel est le nombre entier qui vient juste avant le nombre 631.2) Dans la recherche de Stegen, Géron et Daro (2007), 30 % des élèves interrogés n'ont pas été capables de nommer l'entier qui vient juste avant le nombre à virgule donné et 20 % des élèves ont éprouvé des difficultés à nommer l'entier qui vient juste après. Nous remarquons qu'il semble plus difficile d'identifier l'entier qui précède immédiatement le nombre rationnel que d'identifier celui qui le succède. L'erreur la plus fréquemment commise par les élèves lors de l'identification de l'entier inférieur est qu'ils retranchent systématiquement une unité au nombre (l'entier qui précède le nombre 631.2 est 630). D'autres vont trouver l'entier inférieur en supprimant purement et simplement la virgule dans le nombre pour ensuite lui retrancher une unité, ce qui les amène à traiter le nombre comme un entier (par exemple, le nombre qui vient juste 631.2 est 6312 ou 631) (Stegen, Géron et Daro, 2007).

Pour contrer ces difficultés, il faut faire comprendre aux élèves que les concepts de successeur et de prédécesseur n'ont plus de sens dans les rationnels, car cet ensemble de nombres possède la propriété de densité (il existe une infinité de nombres rationnels entre deux rationnels).

Le principe d'intercalation est difficile à saisir pour les élèves. Ce concept demande à l'élève de faire le passage des grandeurs discrètes aux grandeurs continues. Couramment, la droite numérique est un outil qui est privilégié pour faciliter la comparaison des nombres décimaux et établir le principe d'intercalation. Cependant, ce référent universel semble causer davantage de problèmes qu'il n'en résout. Certains élèves ne perçoivent pas suffisamment de liens entre le système de codage des points sur la droite et le principe d'intercalation infinie, notion fondamentale des nombres rationnels (Stegen, Géron et Daro, 2007; Lessard, 2010).

Dans le placement des nombres sur la droite numérique, les élèves commettent des erreurs qui sont provoquées par l'absence du nombre zéro sur la droite. (Lessard, 2010). Certains croient même que, sur une droite numérique, les nombres entiers sont toujours situés à droite du zéro et que les nombres décimaux sont situés à gauche du zéro ou du nombre un (Stegen, Géron et Daro, 2007, p.50). Par exemple, selon la recherche de Stegen, Géron et Daro (2007), 22 % des élèves de 6e année considèrent que la lettre A désigne un nombre décimal compris entre 0 et 1. Ils ne se réfèrent donc pas à la graduation de la droite.



La droite numérique est une représentation abstraite qui nécessite, de la part des élèves, un long processus d'élaboration et d'appropriation. Les élèves doivent prendre conscience de la valeur des nombres décimaux et du concept de densité qui régit ces nombres avant de pouvoir l'utiliser correctement lors de la comparaison de rationnels.

3.2.3.6 Opérations sur les rationnels

On retrouve aussi, chez certains apprenants, des erreurs liées aux quatre opérations arithmétiques sur les nombres rationnels (addition, soustraction, multiplication et division). D'après la recherche de Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009) menée en sixième année du primaire, les élèves ont répondu correctement à seulement 53.10 % des questions concernant les quatre opérations sur les nombres rationnels et très peu d'élèves (7.10 %) répondent correctement à plus de 90 % des questions concernant ce domaine.

Ces méprises sont aussi dues aux difficultés qu'entraîne le passage des nombres entiers aux nombres rationnels et aux difficultés décrites dans les sections précédentes.

Addition et soustraction

Ce qui rend complexes les opérations d'addition et de soustraction, c'est que celles-ci ne font plus référence aux procédures de comptage ou au rappel des successeurs comme c'était le cas avec les nombres entiers. Elles doivent être considérées dans leur forme algébrique. En effet, quand il est question de nombres rationnels, les opérations d'addition doivent être vues comme une combinaison de quantités ou encore comme une réunion de quantités (Kieren, 1976, cité dans Blouin, 2002; Deshaies, 2006). Ce changement conceptuel peut engendrer certaines confusions dans les procédures pour les jeunes apprenants. Par exemple, l'addition de 2/5 à 6/8 peut être considérée comme la combinaison de deux équations algébriques de la forme bx = a. En reprenant l'exemple cité dans Blouin (2002, p. 10), ce raisonnement peut être représenté algébriquement de la façon suivante :

Si

X = 2/5 et que Y = 6/8

Nous avons :

5x = 2 et que 8y = 6;

40x = 16 et que 40y = 30

Alors,

40x + 40y = 46

40 (x + y) = 46

$x + y = \frac{46}{40}$

$\frac{2}{5} + \frac{6}{8} = \frac{46}{40}$

Il va sans dire que les apprenants obtiennent de très bons résultats s'ils doivent additionner et soustraire des fractions qui ont le même dénominateur (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). Cependant, selon la recherche de Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009), seulement 35 % des élèves de 6e année réussissent l'addition ou la soustraction de fractions ayant des dénominateurs différents. Ils additionnent ou soustraient alors seulement les dénominateurs et les numérateurs entre eux comme s'il s'agissait d'entiers, sans se préoccuper de la relation qui unit les deux termes de la fraction.

D'autres erreurs se produisent lorsque les élèves additionnent tous les nombres inclus dans l'équation pour trouver la somme (par exemple, ¼ + ½ = 8, car 1 + 1 + 2 + 4 = 8).

L'addition ou la soustraction des dénominateurs est aussi une autre erreur répertoriée chez les apprenants lorsque ceux-ci sont différents (¼ + ½ = 1/6, une opération effectuée avec des fractions unitaires).

Finalement, certains vont simplement additionner ou soustraire les numérateurs entre eux, pour ensuite multiplier les dénominateurs entre eux (¼ + ½ = 2/8) (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010).

Ces difficultés pourraient provenir du fait que

> *dans l'enseignement primaire, les élèves ne rencontrent que des additions et des soustractions de fractions, dont le dénominateur de l'une des fractions est un multiple de l'autre. Et, bien que dès l'entrée au secondaire, ils soient initiés aux « techniques usuelles » d'addition et de soustraction de fractions, techniques exigeant la recherche d'un dénominateur commun, il est possible qu'ils ne développent qu'un rapport « techniciste » aux opérations, rapport qui ne s'appuie pas nécessairement sur le sens des opérations et des représentations des nombres. (Utilisation d'un l'algorithme sans se soucier de son sens) (Lessard, 2010. p. 86).*

La prise en compte de ces erreurs est cruciale, car comme le soulignent Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009), ceux qui obtiennent de bas résultats en opération sur les fractions obtiennent toujours des résultats inférieurs dans les autres champs reliés aux nombres rationnels.

En ce qui concerne l'addition et la soustraction des nombres décimaux, la conception erronée du décimal comme entier (**un seul nombre**) provoque des erreurs lors de calcul, surtout lorsque les parties décimales sont de longueurs distinctes. Les erreurs observées portent sur l'alignement des nombres (selon le dernier chiffre du premier nombre) et sur le placement de la virgule dans le résultat et présentent diverses variantes (pas de virgule ou bien virgule placée comme dans le nombre d'en haut ou comme dans le nombre d'en bas).

Il est important de constater, selon la recherche effectuée par Lessard (2010), que les élèves sont plus habiles à réaliser les opérations d'addition et de soustraction sur des décimaux que sur les fractions. Cette habileté pourrait peut-être venir du fait que l'écriture décimale est plus facilement manipulable que l'écriture fractionnaire ou qu'elle est plus semblable à celle des entiers.

Multiplication

Pour bien comprendre l'algorithme qui régit l'opération de multiplication des rationnels, les élèves doivent rencontrer plusieurs exemples afin de préciser les cas dans lesquels les règles établies avec les entiers restent valables et les cas où ces règles ne fonctionnent plus. En ce qui concerne la conception de la multiplication comme une addition répétée, elle reste valable pour la multiplication du nombre décimal (ou de la fraction) par un nombre entier (par exemple, 5 x 0.2 = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.2 = 1). Cependant, dans le cas de la multiplication de deux nombres à virgule (2.5 x 1.2) ou de deux fractions (1/2 x 2/3), l'élève ne peut pas voir cette opération comme une addition répétée, il doit donc appliquer la procédure posée. De plus, il y a un changement conceptuel important en ce qui concerne la valeur du produit. En effet, la multiplication de deux nombres décimaux plus grands que 1 (4.2 x 2.4 = 10.08) donne comme résultat un produit supérieur aux deux multiplicateurs. Cependant, la multiplication de deux nombres décimaux inférieurs à 1 (0.2 x 0.3) donne comme résultat un produit inférieur aux multiplicateurs (0.06 < 0.2 et 0.06 < 0.3). Les mêmes règles s'appliquent à la multiplication des fractions. Les élèves doivent donc prendre conscience que la multiplication de deux nombres rationnels ne donne pas nécessairement toujours un nombre plus grand (ce qui est le cas avec les nombres naturels) (Blouin, 2002; Deshaies, 2006; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010).

La généralisation des techniques de multiplication par 10, 100, etc. établies avec les entiers peut aussi occasionner des erreurs chez les apprenants. Par exemple, lorsqu'un nombre décimal est multiplié par 10, les élèves peuvent ajouter un 0 à la droite du nombre (3.2*10 = 3.20) comme lors de l'application de la procédure avec les nombres naturels (2 x 10 = 20). Les apprenants, en effectuant cette technique, ne prennent pas en considération que, lorsqu'un nombre est multiplié par 10, chaque chiffre prend une valeur 10 fois plus grande. Cette procédure se limite à l'application d'une technique apprise sans considération du changement de l'ensemble de nombres et sans la prise en compte du sens derrière la procédure. Ce n'est donc pas seulement la virgule qui se déplace, mais aussi le chiffre qui « change » de valeur positionnelle (Charnay, 2005 cité dans Lessard, 2010).

Lorsque les multiplicateurs sont des nombres décimaux ayant un ou deux chiffres dans la partie décimale, certains élèves vont traiter la partie entière et la partie décimale comme deux parties distinctes. Dès lors, ils appliquent des algorithmes de multiplication qui sont vrais dans les entiers. Par exemple, la multiplication de 2.3 par 2.4 aurait comme résultat 4.12, car 2 x 2 = 4 et 3 x 4 = 12 (Lessard, 2010; Stegen, Géron et Daro, 2007).

Quant à la multiplication des nombres fractionnaires, celle-ci prend appui sur les procédés déjà utilisés lors de la multiplication des nombres entiers : le numérateur du produit correspond au produit des numérateurs des fractions et le dénominateur à celui des dénominateurs des fractions. Il n'est donc pas surprenant de constater que les opérations de multiplication sont mieux réussies que celles liées à l'addition ou à la soustraction (taux de réussite chez des élèves du premier cycle du secondaire : 77.9 % contre 65.4 %) (Lessard, 2010). Par contre, certains élèves vont commettre des erreurs lors de la multiplication de fractions en tentant de réduire les multiplicateurs au même dénominateur (¼ x ½ = $\frac{1x2}{4x2} x \frac{1x4}{2x4} = \frac{2}{8} x \frac{4}{8} = \frac{2x4}{8}$). D'autres vont confondre l'opération de multiplication avec le produit en croix (le produit des extrêmes est égale au produit des moyens, aussi appelée règle de trois) ou la division ($\frac{3}{4} x \frac{5}{12} = \frac{3x12}{4x5}$) (Lessard, 2010).

Cependant, ce qui complexifie principalement l'opération de multiplication des fractions est la représentation et l'interprétation des calculs effectués par l'élève. Comme le souligne Hasemann (1988, cité dans Lessard, 2010), il ne suffit pas de savoir effectuer correctement la multiplication (connaissance procédurale) pour être en mesure de produire une représentation de cette opération (connaissance conceptuelle). En effet, selon une recherche de Boulet (1993, citée dans Lessard, 2010) le taux de réussite des étudiants universitaires est en baisse lorsqu'ils doivent représenter les opérations de multiplication de fraction, même si ces dernières sont des multiplications simples (2 x 2/3 : calcul : 29 % d'échec; représentation : 57 % ou ¼ x 1/3 : calcul : 24 %; représentation : 94 %). Ce rapport techniciste peut se retrouver autant chez les étudiants universitaires que chez les élèves. Ces échecs peuvent s'expliquer par le fait que la procédure de la multiplication de fractions donne rapidement des réussites, ainsi, certains enseignants délaissent l'apprentissage du sens de cette opération dû à la difficulté du changement de l'unité de référence (Lessard, 2010).

Division

La division peut aussi provoquer certaines erreurs chez les apprenants étant donné que cette opération fait intervenir plus d'un sens de la fraction : inverse de la multiplication, rapport, etc. Le concept d'inverse du nombre (ou d'inverse multiplicatif) est un concept clé que les élèves doivent comprendre pour effectuer les opérations de division. Il se définit par rapport à un nombre **« a »** différent de zéro. Nous disons alors qu'un un nombre **« b »** est l'inverse de **« a »,** s'il existe un nombre **b** tel que **a x b** est égal à **1** (leur produit (a x b) est égal, pour les nombres rationnels, à $\frac{a}{b} x \frac{b}{a} = 1$). Ce nouveau concept peut être plus difficile à assimiler sachant qu'il ne fait plus référence aux structures additives et aux entiers relatifs comme c'était le cas avec les nombres entiers (4 + x = 0; x = -4). L'inverse multiplicatif se réfère alors aux structures multiplicatives qui s'interprètent en considérant l'ensemble des nombres rationnels comme un ensemble de quotients ou de rapports (bx = a) (Blouin, 2002).

L'introduction du concept d'inverse multiplicatif essentiel à l'algorithme de division de fractions (a/b ÷ c/d = a/b x d/c) peut provoquer certaines ruptures chez l'apprenant et l'amener à faire des erreurs dans l'exécution de cet algorithme. Ces erreurs se traduisent généralement par l'inversion du dividende au lieu du diviseur ou l'inversion du diviseur et du dividende (Lessard, 2010). Par exemple, dans l'expression $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} =$, certains élèves vont inverser la première fraction (2/5) au lieu du diviseur pour ensuite résoudre l'opération de manière erronée ($\frac{5}{2} x \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$). Cette erreur peut provenir du fait que les jeunes mémorisent une technique sans comprendre pourquoi celle-ci est appliquée et font ainsi abstraction du sens et du concept d'inverse multiplicatif et de la relation entre le numérateur et le dénominateur.

L'opération de division de deux fractions peut aussi amener les élèves à généraliser des propriétés de la division des nombres naturels, à les appliquer aux nombres rationnels et croire que le diviseur doit être un nombre entier ou qu'il doit être moins grand que le dividende (ou que le quotient doit être moins élevé que le dividende) (Lessard, 2010). Cependant, comme avec la multiplication, quand le diviseur est situé entre -1 et 1, le quotient est plus grand que le nombre divisé (4.2 ÷ 0.2 = 21).

Selon Lessard (2010), les élèves commettent plus d'erreurs dans les cas de figure « n ÷ a/b » et « a/b ÷ n » que dans le cas de la division de deux fractions. Cette difficulté provient de l'application d'une seule technique de résolution dont la signification demande la compréhension de la notion d'inverse multiplicatif. L'accès au sens « partition » dans les cas « n ÷ a/b » et « a/b ÷ n » est complexe. Il est dur de donner un sens au partage de « quelque chose » en un nombre fractionnaire « de personnes » ou au partage de « quelque chose » de fractionnaire (Lessard, 2010). Le recours à l'interprétation « quotient » de la fraction pourrait cependant aider à donner du sens à ces algorithmes (combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende).

Simplification des fractions

La simplification des fractions fait principalement appel aux opérations de multiplication et de division. La simplification fait intervenir la notion de fractions équivalentes (un ensemble de fractions représentant le même nombre, le même rapport, mais dont l'écriture est différente). Il s'agit d'un concept nouveau qu'il faut construire, car dans les nombres entiers, une seule représentation est habituellement utilisée pour illustrer la valeur d'un nombre. Les erreurs en lien avec cette opération montrent que les élèves ont des difficultés à simplifier les fractions dont le numérateur et le dénominateur ne sont pas des multiples de 2. Les élèves sont alors amenés à trouver soit le plus grand diviseur commun (PGDC) du numérateur et du dénominateur ou à décomposer les nombres en facteurs premiers, ce qui rend la tâche plus complexe, car cela demande à l'élève d'exécuter des calculs mentaux tout en employant correctement sa table des multiplications.

La recherche de Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009) démontre que, lors de la simplification de nombres fractionnaires, la simplification de fractions impropres a de moins bons taux de réussite. Cette difficulté peut provenir du fait que certains élèves sont moins habitués à travailler avec une fraction dans laquelle la valeur du numérateur est supérieure à la valeur du dénominateur.

Conversion des écritures

Dans les différents contextes d'application des nombres rationnels (probabilité, statistique, prix, etc.), les élèves ont de la difficulté à faire le passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire (et l'inverse), ou à représenter le résultat sous la forme d'un pourcentage. Par exemple, lors du positionnement des fractions sur la droite numérique graduée en nombres décimaux, plusieurs élèves traitent le numérateur de la fraction comme étant l'entier de référence pour le positionnement. Ainsi, 5/2 va être positionné à droite de l'entier 5 (Lessard, 2010). Les élèves confondent donc la signification de la barre de division de la fraction avec la virgule incluse dans les nombres décimaux (14/10 est représenté par 14,10) (Lessard, 2010; Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001). Cette confusion pourrait s'expliquer par la conception simpliste des écritures fractionnaires (deux entiers séparés par une barre de fraction) ou simplement par la confusion entre les symboles « / » et « , » (voir section 3.2.3.2).

Le passage d'une représentation fractionnaire à une représentation décimale demande ainsi à l'élève de concevoir la fraction comme une division non réalisée. Ainsi, l'élève doit être capable d'interpréter que 5/4 équivaut à 5 divisé par 4 (interprétation « quotient » de la fraction).

Les travaux de Lessard (2010) font aussi ressortir la difficulté de positionner des nombres décimaux sur la droite numérique lorsque la graduation de celle-ci ne correspond pas à la précision des nombres à positionner. Les élèves doivent donc effectuer des opérations sur les nombres décimaux dans le but de trouver un nombre équivalent. Pour ce faire, l'élève peut passer de l'écriture décimale à une fraction décimale avant de pouvoir trouver une fraction équivalente représentant la graduation demandée. Ce passage demande une bonne compréhension du système de numération décimale (0.25 équivaut en fraction décimale à 25/100). Les apprenants, n'étant pas habitués à travailler avec plusieurs représentations écrites d'un seul nombre, peuvent donc éprouver des difficultés à faire le passage de l'une à l'autre.

Ce qui ressort de la description des difficultés des élèves en apprentissage des nombres rationnels est que les apprenants transposent automatiquement des règles apprises avec les entiers. Les raisons sont nombreuses; si certaines sont en lien avec le développement de l'élève, d'autres réfèrent à l'épistémologie du concept. Il y en a aussi celles qui nous font reconnaître leur enseignement inapproprié.

3.2.3.7 Erreurs liées au sens de la fraction

Plusieurs erreurs sont liées aux multiples interprétations des fractions. Certaines erreurs peuvent provenir des difficultés d'exécution de certaines procédures ou d'une mauvaise compréhension du concept de la fraction. Une énumération rapide des erreurs commises en lien avec l'interprétation rapport et partie-tout de la fraction sera présentée dans les prochaines pages.

Partage d'un tout

L'interprétation « partie-tout » de la fraction, même si elle est présente de manière majoritaire dans les manuels scolaires, peut poser problème à certains apprenants. En effet, 22.56 % des élèves de 6e année ont de la difficulté à associer une fraction à une représentation figurale (représentation d'une fraction au moyen d'une figure, choisir une figure correspondant à une fraction et donner la fraction correspondant à une figure) (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Ces erreurs affectent le travail avec les touts continus ou discrets. C'est pourquoi les sections suivantes traiteront des erreurs liées à l'exploitation des touts continus et discrets.

Tout continu

Le partage d'un tout représenté par une unité (rectangle, disque, etc.) en parties équivalentes est l'un des premiers concepts à être exploité lors de l'enseignement des nombres rationnels qui débute dès le premier cycle du primaire. Cependant, il s'avère que le partage d'objets ronds est une opération plus difficile à maitriser que le partage d'objets rectangulaires. Toutefois, les élèves seraient plus rapidement habiles à partager des figures en un nombre pair de parties qu'en un nombre impair. De même, certaines opérations de partage en un nombre pair de parties sont plus rapidement maitrisées que d'autres (ex : $\div$ 2, $\div$ 4, $\div$ 8 s'effectuent plus facilement que $\div$ 6, $\div$ 12) (Deshaies, 2006).

Cependant, lors de la partition, certains élèves séparent les parties de manière inégale. La technique qui est souvent utilisée est la procédure du *halving* qui consiste à séparer la figure en deux, puis à terminer la partition de manière aléatoire (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Cette procédure amène, dans certains cas, l'obtention de parties non congrues, et ce, surtout lorsque la figure ne correspond pas à une forme conventionnelle, souvent utilisée dans les ressources pédagogiques (cercle, rectangle, carré). Cette difficulté n'est pas à négliger, car le fait d'avoir des parties équivalentes lors de la représentation « partie-tout » est un élément essentiel et fondamental au sens « partie-tout » de la fraction.

Certains élèves commettent aussi des erreurs lorsqu'il leur est demandé de représenter des fractions impropres (fractions dont le numérateur est plus grand que le dénominateur). Cette erreur provient du fait que les élèves éprouvent de la difficulté à considérer qu'une fraction peut être supérieure à l'unité. Ainsi, ils omettent une représentation supplémentaire du tout référant à l'unité pour illustrer correctement la fraction.

Pour pallier la difficulté qu'amène la représentation d'une fraction impropre, certains élèves inversent le numérateur et le dénominateur de la fraction pour obtenir une fraction propre (fraction dont le numérateur est plus petit que le dénominateur). Par exemple, la fraction 3/2 va être représentée par un dessin exprimant 2/3 (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Nous remarquons que les élèves qui éprouvent cette difficulté semblent avoir des lacunes en ce qui concerne le sens de la fraction.

Les représentations dessinées des fractions causent aussi d'autres erreurs chez les apprenants. En effet, certains élèves ont de la difficulté à identifier une fraction dans une représentation dessinée dont les parties de l'objet ne sont pas congrues, mais équivalentes (occupent la même surface) (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). Ce niveau de difficulté plus élevé des représentations dessinées contraint les jeunes à comparer deux surfaces, en recourant à une unité de mesure équivalente qui permet de partager chacune des surfaces. Ils sont ensuite amenés à se prononcer sur l'identité des aires, notion pouvant ne pas être maitrisée dans son entièreté. De plus, ce type de représentations demande l'emploi d'opérations mentales de comparaison, de découpage et de déplacement des parties pour former une partie reconnaissable (Boublil, 2015). Il s'agit d'opérations qui représentent une grande difficulté chez plusieurs élèves.

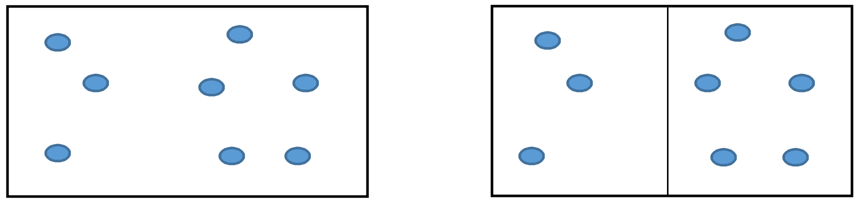
La présence abondante de l'interprétation « partie-tout » dans les ressources pédagogiques peut causer des difficultés lors de la comparaison de deux fractions. Par exemple, si on demande à un élève de comparer les deux fractions 2/3 et 1/3, l'élève, en priorisant l'interprétation « partie-tout », peut d'emblée comparer les fractions en se référant à la taille des pièces d'un tout fictif et en négligeant, par exemple, la possibilité de comparer les fractions selon l'interprétation « rapport » (Lessard, 2010).

Tout discret

Les ressources pédagogiques sollicitent moins les tâches en lien avec la représentation et l'identification de touts discrets (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Cependant, même si ces activités sont sous-représentées, le partage de quantités discrètes est mieux réussi que le partage de quantités continues. Cela s'explique par le fait que les élèves ne sont pas obligés de voir la quantité comme un tout, mais peuvent effectuer le partage par une simple distribution d'éléments (Deshaies, 2006).

Cependant, l'une des difficultés qu'occasionne l'utilisation des touts discrets dans les apprentissages est que les élèves ont de la difficulté à identifier une fraction dont le dénominateur ne représente pas le tout de la collection (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010). Par exemple, certains élèves ont du mal à affirmer que 6 jetons bleus sur un total de 18 jetons équivalent à 1/3 de la collection (étant donné que le tout de la collection n'est pas 3, mais 18). Cette erreur peut être due aux difficultés qu'entraînent les fractions équivalentes et leurs multiples représentations.

De plus, en raison de la surexploitation des touts continus dans les ressources pédagogiques, certains apprenants voient les groupes collectifs (touts discrets) comme des touts continus, et ce, majoritairement lors de la construction de la notion de moitié (Deshaies, 2006). Ils travaillent ainsi sur l'espace que ces groupes occupent au lieu de travailler sur la cardinalité du groupe. Par exemple, si l'on demande à un élève de représenter la moitié d'une collection d'objets (des jetons), il peut séparer le tout selon l'espace que les jetons occupent dans le rectangle :



La surexploitation des touts continus se transpose aussi lors d’activités où les élèves doivent créer une histoire en se basant sur le sens « partie-tout ». En effet, près de 83 % des élèves se réfèrent à un tout continu pour illustrer leur histoire (Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009).

Il est donc important de porter une attention à la partition des touts discrets, car la surexploitation des touts continus et la concrétisation de ce concept, sous des représentations stéréotypées, pourraient limiter la partition des touts discrets en plus du développement et de la compréhension des autres sens des nombres rationnels.

Repérage de l’unité dans les fractions impropres

Une conception simpliste des écritures fractionnaires (nombre de parts prises sur le nombre de parts total) sans lien avec le contexte du problème peut provoquer des difficultés quant au repérage de l’unité dans les fractions (que représente l’unité dans les fractions suivantes : 5/4 et 5/8?).

Les élèves éprouvent aussi des difficultés à associer la fraction à une part et à représenter graphiquement le partage équitable quand le tout n’est pas une unité (exemple : 2 tartes ÷ 4, que représente ¼ ?), quand le nombre de parts n’est pas un nombre pair (exemple : 2 tartes ÷ 5) et/ou que le nombre de parts n’est pas un multiple du nombre représentant le tout (exemple 3 baguettes ÷ 2) (Boublil, 2015).

Rapports

L’interprétation « rapport » de la fraction peut aussi engendrer certaines erreurs. En effet, cette interprétation est souvent mal comprise par les jeunes apprenants. Dans l’exemple suivant,

> *Dans un panier, il y a 7 pommes dont 5 sont rouges et les autres sont vertes. Combien y a-t-il de pommes vertes par rapport aux pommes rouges?*

près du tiers des jeunes donnent comme réponse 2/7, se référant ainsi à une partie du tout au lieu de se référer à la relation entre des valeurs requises dans le problème (2/5; 2 pommes vertes pour 5 pommes rouges) (Mercier et Deblois, 2004). Les apprenants ne saisissent pas que le lien qui unit les deux nombres est de 2 pour 5 et que le tout référant est 7 (2 + 5 = 7).

Selon Blouin (2002, p.14),

> *l'interprétation « rapport » est plus puissante que l'interprétation « partie-tout ». Puisqu'un rapport exprime une relation entre deux quantités, il peut exprimer une relation entre une partie et un tout; dans ce cas spécifique, la partie est une quantité en relation avec une autre quantité « référence », le tout.*

Ce phénomène a aussi été observé dans la recherche de Carette, Content, Rey, Coché et Gabriel (2009). En effet, les résultats obtenus montrent que seulement 46 % des élèves de sixième année du primaire répondent correctement à plus de 90 % des questions concernant les proportions. Les erreurs les plus souvent commises sont en lien avec le passage à une valeur intermédiaire pour trouver une proportion (règle de trois). Les proportions les mieux réussies sont celles pouvant être résolues directement au moyen d'une simple multiplication (dont l'un des dénominateurs est un multiple de l'autre). Les élèves omettent de mettre en relation les deux parties des couples de nombres lorsque présentés sous forme de tableaux ou de colonnes. Ainsi, ils effectuent des calculs comme s'il s'agissait d'une seule suite de nombre ou de deux suites indépendantes. Par exemple :

Le nombre de filles et de garçons dans les classes mathématiques au secondaire est en proportion égale. En vous référant au tableau ci-dessous, identifiez le nombre de filles dans une classe si cette dernière contient 36 garçons.

Nombres de filles dans la classe	Nombres de garçons dans la classe
3	9
5	15
7	21
…	…

Certains élèves se fient seulement à la suite *nombres de garçons dans la classe* et constatent qu'elle progresse en bonds de 6. Ainsi, pour arriver à 36 garçons, ils doivent effectuer 2 bonds (36 - 21 = 12; 12 = 6 + 6) et alors ajouter 12 au nombre de filles pour obtenir 19 filles.

À la lecture des différentes erreurs en lien avec les nombres rationnels, il en ressort que les élèves appliquent souvent des procédures établies pour l'ensemble des nombres entiers sur les nombres rationnels. D'autres erreurs proviennent aussi du fait que les élèves ont une conception limitée des nombres rationnels, ce qui empêche l'accès à une compréhension conceptuelle complète et qui affecte les réinvestissements des notions en jeu. Il est important, dès le début de l'apprentissage des nombres rationnels, de ne pas négliger le sens des nombres rationnels au détriment des procédures et de faire comprendre aux apprenants que les rationnels sont régis par leurs propres règles qui peuvent différer de celles des entiers.

3.3 Obstacles d'apprentissage

Trois types d'obstacle peuvent expliquer la provenance des erreurs précédemment énumérées (obstacle ontogénique, didactique et épistémologique). Pour bien distinguer et comprendre l'origine de ces erreurs, la section qui suit est consacrée à la description de ces obstacles.

3.3.1 Définition

Il y a plusieurs origines qui expliquent les erreurs des élèves. Brousseau (1998) en distingue principalement trois :

La première est une origine **ontogénique**. Les erreurs d'origine ontogénique sont dues au développement psychogénétique des élèves (à leur développement psychique).

La deuxième est l'origine **didactique**. Ces erreurs semblent dépendre du choix ou d'un projet du système éducatif. Par exemple, le choix de présenter les nombres décimaux au début du deuxième cycle du primaire provient d'une longue évolution dans le cadre d'un choix didactique. Étant donné leur utilité, il était primordial de les enseigner le plus tôt possible aux élèves, et ce, en se basant sur le système de mesure et sur les techniques d'opération sur les entiers. Cependant, aujourd'hui, les décimaux sont vus par les élèves comme des entiers naturels avec un changement d'unités de mesures (nombres naturels avec une virgule), ce qui provoque certains obstacles à l'apprentissage (Brousseau, 1998).

Finalement, il y a l'origine **épistémologique**. Ces erreurs se retrouvent dans l'histoire des concepts eux-mêmes, dans leur évolution. Ce sont des erreurs auxquelles nous ne pouvons échapper. Elles ont un rôle constructif dans la connaissance visée (Brousseau, 1998).

Les trois obstacles qui viennent d'être présentés représentent les sources d'erreurs plus générales. Cependant, à plus petite échelle, les élèves peuvent commettre des erreurs liées à une notion précise. Dans la section suivante, les obstacles liés à la compréhension des nombres rationnels seront présentés.

3.3.2 Obstacles d'apprentissage des nombres rationnels

Pour la description des différents obstacles d'apprentissage qui sera présentée dans les prochaines lignes, nous nous référons à la recherche effectuée par Stegen et Sacré (2004b).

Les difficultés éprouvées par les apprenants peuvent être liées au fait que les progressions didactiques instaurées par les enseignants ne prennent pas suffisamment en compte les obstacles didactiques et épistémologiques rattachés à la notion. Nous présentons tout d'abord les obstacles didactiques pour ensuite présenter les obstacles épistémologiques.

Souvent, les nombres rationnels sont enseignés à partir des nombres décimaux. Cependant, cette démarche doit être faite de manière à limiter tous les obstacles, et ce, en prenant en compte les difficultés possibles liées aux outils et aux notions utilisés. Par exemple, Stegen et Sacré (2004b) soulignent que l'un des obstacles didactiques possibles survient lorsque nous enseignons des décimaux en nous basant sur les mesures de grandeur. Ce système unifié de mesures de grandeur serait utilisé pour en finir avec le système d'unités non décimales. Cette nouvelle notion permet à l'élève d'affirmer que 234 centimètres équivalent à 2,34 mètres, ce qui facilite les opérations de conversion. Cependant, lier les décimaux au système de mesure amène les enfants à considérer les nombres décimaux comme des triplets (n, p, u), où n est l'entier, p est une division par 10^p (un changement d'unités) et u est l'unité de mesure. Cette approche peut amener l'élève à interpréter la partie décimale (p) comme un nombre entier et à lui appliquer des opérations qui ne sont pas adéquates pour les décimaux. Par exemple, lors de la multiplication de deux décimaux, l'élève peut interpréter l'opération comme le produit de deux longueurs et exporterait implicitement ces opérations aux dimensions (Brousseau, 1998).

Un autre obstacle didactique important est que l'enseignement des nombres décimaux arrive après un long travail avec les nombres entiers. Certaines règles s'ajoutent à celles déjà apprises, ce qui complexifie parfois le travail avec les nombres décimaux. Cependant, certains enseignants, au lieu d'aborder les obstacles liés à l'introduction des décimaux, préfèrent doter leurs élèves de trucs (Stegen et Sacré, 2004b). Par exemple, pour comparer 3.14 et 3.9, les enseignants suggèrent à leurs élèves d'inscrire un zéro à la droite de 9 dixièmes (Stegen et Sacré, 2004b, p. 2). Ainsi, leurs élèves apprennent des procédures sans toutefois en comprendre le sens, ce qui peut les amener à les oublier rapidement ou à les appliquer dans des contextes non appropriés.

Un autre obstacle didactique est quand l'enseignant introduit les nombres décimaux en s'appuyant sur la droite numérique. Cet outil est utilisé pour que les jeunes prennent conscience du principe d'intercalation et de celui de la densité des décimaux. Cependant, cet appui rend les apprenants vulnérables aux erreurs, car cet outil, auparavant utilisé pour le repérage de grandeurs discrètes, est souvent transposé précocement dans l'univers des grandeurs continues. L'adaptation de la droite numérique dans un nouvel univers, qui est régi par de nouvelles règles, peut rendre les apprenants moins habiles à l'utiliser. Pour une introduction adéquate, l'enseignement doit faire prendre conscience aux élèves, dès le départ, que la droite numérique est constituée d'une infinité de points et qu'un même nombre peut être interpréter comme un point sur la droite ou comme la mesure d'un segment constitué d'une infinité de points (Stegen, Géron et Daro, 2007).

Concernant les obstacles épistémologiques auxquels l'apprenant doit faire face, l'un des premiers est lié à l'écriture des nombres rationnels. En effet, l'élève doit assimiler que l'écriture décimale ne doit pas être associée à l'écriture de deux naturels séparés par une virgule. Il doit alors concevoir que la numération positionnelle n'est pas parallèle des deux côtés de la virgule (4 chiffres sont nécessaires pour écrire les milliers à gauche de la virgule, mais seulement 3 pour écrire les millièmes à droite de la virgule). De plus, l'élève doit comprendre que les règles de comparaison entre les naturels et les rationnels ne sont pas les mêmes (15,8 > 15.79, même si 8 < 79).

Ainsi, les règles qui ont été établies et maitrisées avec les naturels ne peuvent pas être étendues en tout temps aux décimaux, sans pour autant être totalement éliminées. Cela peut donc créer de l'instabilité chez l'élève, en plus de le rendre plus nerveux face aux nombres décimaux. «En effet, [cette erreur] intervient après un travail de plusieurs années scolaires sur la construction des nombres entier. Pour les enseignants, il est dès lors difficile d'empêcher les élèves de traiter les décimaux sur le modèle des nombres entiers» (Stegen et Sacré, 2004a, p.6).

La prise de conscience des propriétés spécifiques des nombres rationnels est aussi un obstacle épistémologique important à franchir. En effet, pour bien comprendre les nombres rationnels, les élèves doivent être capables d'assimiler le concept de densité et de prendre en compte les phénomènes d'intercalation (entre deux nombres décimaux, il existe une infinité de nombres décimaux) (Stegen, Géron et Daro, 2007).

Finalement, pour bien maitriser les nombres rationnels, les élèves doivent donner du sens au passage d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire. Ils doivent pouvoir établir un lien entre 0.7 et 7/10.

Les derniers obstacles qui viennent d'être cités font réfléchir sur la manière dont les nombres décimaux doivent être introduits auprès des élèves pour ne pas créer des difficultés subséquentes. Comme le soulignent Stegen et Sacré (2004b), les nombres décimaux ne doivent absolument pas être introduits au départ par la mesure de grandeur. En effet, il ne faut pas que les élèves assimilent la notion de nombres décimaux comme une forme de recodage des mesures entières. Par exemple, les élèves ne doivent pas associer tous les nombres décimaux à des équivalents entiers si l'unité de mesure à laquelle ils font référence change. Si 1.23 m = 123 cm) quel serait l'équivalent de $1.\overline{33333}$ cm en nombre entier? C'est donc à la lumière de ces constatations que nous avons mis sur pied des pistes didactiques pour introduire les nombres rationnels (voir section 5.7).

Dans le présent chapitre, nous avons fait ressortir que la notion de nombres rationnels peut être complexe et que son apprentissage peut engendrer plusieurs difficultés chez les apprenants. De plus, suite à la lecture des facteurs influençant la motivation, nous avons retenu, à la section 2.4, que la performance et la réussite des apprenants peuvent être influencées par trois perceptions (perception de compétence, de contrôle et de valeur). Nous croyons aussi que les activités d'enseignement et d'apprentissage reliées aux nombres rationnels demandent aux apprenants un engagement cognitif afin qu'ils acquièrent les connaissances disciplinaires reliées à ces nombres. En nous basant sur le modèle de la dynamique motivationnelle, nous croyons donc que les notions sur les nombres rationnels peuvent influencer les perceptions que les apprenants ont d'eux-mêmes et, du fait même, leur motivation. Pour tenter de contrer tous effets négatifs sur la performance et sur la réussite des apprenants, il est donc important d'élaborer des outils didactiques qui viendront tenter de pallier aux difficultés engendrées par l'apprentissage des nombres rationnels.

4. MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, nous décrivons la démarche entreprise pour répondre à notre objectif de recherche, qui est l'élaboration d'un dispositif de formation des enseignants permettant d'évaluer la motivation des élèves en apprentissage des nombres rationnels et d'intervenir sur leurs difficultés. Le présent chapitre est séparé en deux sections. La section 4.1 décrit la démarche effectuée afin de répondre à l'objectif a) de notre recherche, qui consiste à élaborer une grille d'évaluation de la motivation scolaire. Cette section prend pour appui les recherches de Viau et de ses collaborateurs (Viau, 1994; 1999; Viau et Louis, 1997; Viau et Bouffard, 2000; Viau, 2009) étudiées dans le chapitre 2.

La deuxième section, la section 4.2, présente la démarche entreprise pour répondre aux 5 sous-objectifs suivants :

b) Élaboration d'un cadre conceptuel portant sur la notion de nombres rationnels;
c) Description d'une progression des apprentissages des nombres rationnels (école primaire et premier cycle du secondaire);
d) Élaboration d'une typologie des difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels et d'une description de leurs causes, des obstacles et des raisons de leur provenance;
e) Description des interventions didactiques par rapport aux difficultés décrites;
f) Élaboration de questions types et de problèmes complexes vérifiant chacune des difficultés répertoriées dans la section *typologie des difficultés*.

Afin de répondre à ces objectifs, nous nous référons au cadre conceptuel portant sur les nombres rationnels présenté au chapitre 3.

4.1 Grille d'évaluation de la motivation

En regard des éléments théoriques liés à la motivation qui ont été retenus et présentés à la section 2.4, nous avons élaboré une grille d'évaluation de la motivation scolaire (voir chapitre 5, section 5.1). Cette grille évalue les facteurs internes qui influencent la motivation scolaire, soit les perceptions de compétence, de contrôle et de valeur.

Le fait de questionner le participant sur sa motivation et ses perceptions découle du modèle de la dynamique motivationnelle de Viau (1994) présenté à la section 2.3.2.1. Selon ce modèle, les perceptions de contrôle, de compétence et de valeur par rapport à une tâche sont les déterminants de la motivation. Ainsi, si le participant entretient des perceptions élevées selon les trois déterminants, c'est qu'il est prédisposé à s'engager cognitivement, à persévérer devant la tâche et à performer (les trois indicateurs de la motivation).

Pour élaborer nos questions portant sur les déterminants de la motivation, nous nous sommes référés au questionnaire maison retrouvé dans l'ouvrage de Viau *La motivation en contexte scolaire* (2009).

Les questions se retrouvant dans l'ouvrage de Viau portent sur les activités d'écriture dans le cadre de cours de français. Nous avons donc modifié les questions pour les adapter à notre sujet d'étude qui porte sur les nombres rationnels.

Par exemple, pour l'évaluation de la motivation générale, nous avons modifié la question suivante : « *De façon générale, le cours de français que tu suis présentement te motive-t-il?* » (Viau, 2009, p.112) par la remplacer par celle-ci : « *De façon générale, les exercices sur les nombres rationnels me motivent-ils?* ».

Notre questionnaire (section 5.1) contient treize questions que nous avons partagées en quatre catégories :

- Une question concernant la **motivation** en général (numéro 1);
- Quatre questions sur la perception de **contrôle** (numéros 2-3-4-5);
- Quatre questions sur la perception de **compétence** (numéros 6-7-8-9);
- Quatre questions sur la perception de **valeur** (numéros 10-11-12-13).

Le questionnaire créé se remplit en utilisant une échelle de type Likert qui permet au participant de sélectionner le degré d'approbation lié à la question (1 = fortement en désaccord; 2 = moyennement en désaccord; 3 = moyennement en accord; 4 = tout à fait d'accord). Le choix d'utiliser une échelle de type Likert pour récolter l'information concernant la motivation générale et les déterminants de la motivation vient du fait que son utilisation est facile pour le participant. De plus, l'utilisation d'une échelle allant de 1 jusqu'à

5 permet aux participants de sélectionner son degré d'approbation de la question parmi un grand éventail de choix. De même, les réponses provenant de questionnaires utilisant l'échelle de Likert peuvent être quantifiées, ce qui simplifie la cueillette et l'interprétation des données.

Pour aider les utilisateurs à compiler les résultats, une grille de compilation des points est jointe à la suite du questionnaire (voir chapitre 5, section 5.2). La compilation des résultats s'effectue en additionnant les degrés d'approbation de chacune des sections. La valeur octroyée au degré d'approbation équivaut au nombre de points obtenus. Par exemple, si le participant répond 3 comme degré d'approbation à la question 2, il obtient alors 3 points.

À la suite de cette compilation, il est possible d'interpréter les résultats selon le pointage obtenu (voir chapitre 5, section 5.3). La section portant sur l'interprétation des résultats a été élaborée en s'appuyant sur les informations retrouvées dans l'ouvrage de Viau *La motivation en contexte scolaire* (2009, p.112). C'est en nous référant au descriptif du pointage que nous pouvons connaitre le degré auquel se situent les déterminants de la motivation et la motivation générale. Pour la section sur la motivation en général, les résultats sont interprétés selon les degrés suivants :

- Degré **faible** : pointage allant de 1 à 2 points;
- Degré **élevé** : pointage allant de 3 à 4 points.

Les trois degrés présents pour évaluer les déterminants de la motivation sont :

- Degré **faible** : pointage allant de 1 à 4 points;
- Degré **moyen** : pointage allant de 5 à 10 points;
- Degré **élevé** : pointage allant de 11 à 16 points.

Si les résultats obtenus correspondent majoritairement à des niveaux faibles, ce test peut jouer un rôle d'indicateur pour diriger les interventions à mettre en place afin de soutenir les apprenants dans leur réussite. L'intervenant, le chercheur ou le pédagogue qui fait passer ce questionnaire peut alors mieux connaitre les perceptions qui font défaut chez le répondant et mettre en place des outils pour mieux pallier cette rupture.

Ce questionnaire peut être utilisé dans le cadre de cours de mathématique à la suite de séries d'exercices, de situations d'apprentissage, etc. traitant des nombres rationnels.

Le choix d'utiliser un questionnaire maison vient du fait qu'il peut être préparé et effectué très rapidement. De plus, il peut être adapté à d'autres domaines mathématiques en modifiant certaines questions, permettant alors aux utilisateurs de recueillir de l'information sur la motivation des participants dans d'autres domaines mathématiques (géométrie, algèbre, etc.). Finalement, dans la mesure où son utilisation est limitée à un groupe particulier d'élèves, il nous est possible d'omettre les étapes de validation.

4.2 DÉMARCHE EN LIEN AVEC LE CADRE CONCEPTUEL « NOMBRES RATIONNELS »

Dans cette section, nous expliquons les étapes effectuées pour répondre aux objectifs de recherche suivants en lien avec les nombres rationnels.

b) Élaboration d'un cadre conceptuel portant sur la notion de nombres rationnels;
c) Description d'une progression des apprentissages des nombres rationnels (école primaire et premier cycle du secondaire);
d) Élaboration d'une typologie des difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels et d'une description de leurs causes, des obstacles et des raisons de leur provenance;
e) Description des interventions didactiques par rapport aux difficultés décrites;
f) Élaboration de questions types et de problèmes complexes vérifiant chacune des difficultés répertoriées dans la section *typologie des difficultés*.

Dans la section 4.2.1, nous présentons la démarche effectuée pour déterminer le domaine mathématique à l'étude dans le cadre de cette recherche.

Par la suite, la section 4.2.2 présente la démarche effectuée pour élaborer l'aide-mémoire sur les nombres rationnels répondant au sous-objectif b).

Nous retrouvons à la section 4.2.3 la démarche effectuée pour élaborer le document synthèse exposant la typologie des difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels, ainsi qu'une description de leurs causes et des obstacles qui y sont liés. Ce document synthèse inclut aussi la description des interventions didactiques relatives à ces erreurs. Ainsi, cela nous permet de répondre aux objectifs d) et e) de notre recherche.

À la section 4.2.4, nous retrouvons la démarche effectuée pour l'élaboration d'un test diagnostique traitant des nombres rationnels et permettant de vérifier chacune des difficultés répertoriées dans la section *typologie des difficultés*. Cette démarche nous permet de répondre au sous-objectif f).

Quant à la section 4.2.5, elle présente la démarche qui nous a permis d'élaborer une progression d'apprentissages pour introduire les nombres rationnels, et ainsi de répondre au sous-objectif c) de cette recherche.

4.2.1 Confirmation du choix du domaine mathématique

La mathématique est un champ vaste qui englobe plusieurs domaines. Le choix de celui des nombres rationnels vient, d'une part, d'une recension d'écrits sur les difficultés qui s'y rapportent (Blouin, 2002; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010) et, d'une autre part, de la passation d'un sondage maison. Ce sondage maison, qui inclut une liste des difficultés les plus courantes dans l'apprentissage des mathématiques, a été élaboré à partir de l'étude de recherches, citées ci-haut, portant sur le sujet. Nous avons par la suite sélectionné des savoirs mathématiques qui constituent les savoirs essentiels des programmes de formation de l'école québécoise durant l'école primaire et le premier cycle du secondaire (MELS, 2006a, 2006b). Ainsi, pour choisir le domaine mathématique et les savoirs mathématiques, nous avons questionné les étudiants inscrits au diplôme d'études supérieures spécialisées (D.E.S.S.) en adaptation scolaire à l'Université Laval sur les savoirs mathématiques avec lesquels leurs élèves rencontrent plus des difficultés (annexe I). Dans un premier temps, les étudiants avaient à sélectionner avec un « X » ou un crochet les savoirs de la liste dont l'apprentissage pouvait causer des difficultés aux élèves. Par la suite, le sondage les invitait à faire un choix des 5 savoirs les plus difficiles en encerclant le numéro du concept.

4.2.1.1 Résultats obtenus

Dans le tableau suivant, nous présentons les résultats obtenus durant ce sondage qui mettent en évidence quatre premiers domaines considérés difficiles.

Tableau 1. Domaines mathématiques « difficiles »

Domaines	Nombres entiers	Nombres rationnels	Géométrie	Probabilités
Taux (%)	47.27 %	65.15 %	47.72 %	23.64 %

Quant aux savoirs « difficiles », les 5 savoirs les plus sélectionnés sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 2. Choix des savoirs mathématiques « difficiles »

Savoirs mathématiques	**Taux de réponses**
Effectuer des opérations (+, -, x, :) avec des factions	81,8 %
Ordonner les fractions (ordre croissant ou décroissant)	45,5 %
Déterminer le terme manquant dans une équation (relation entre les opérations +, -, x, :)	45,5 %
Décrire des figures planes, des prismes et des pyramides (évoquer des propriétés que la figure possède)	54 %
Convertir les unités de mesure	54 %

Ce qui ressort de ce sondage est que les enseignants perçoivent majoritairement (65.15 %) le domaine des nombres rationnels comme un domaine mathématique dont l'apprentissage cause des difficultés aux élèves. De même, deux des cinq savoirs considérés comme les plus difficiles pour les élèves font aussi référence au domaine des nombres rationnels.

4.2.2 Élaboration de l'aide-mémoire

Pour répondre à l'objectif «b» de notre recherche (élaboration d'un cadre conceptuel portant sur la notion de nombres rationnels), nous avons construit un aide-mémoire sur la notion de nombres rationnels.

Cet aide-mémoire a été construit à partir d'un document inédit offert dans le cadre du cours DID-2014, didactique des nombres rationnels et de la mesure (Boublil, 2015). Nous avons aussi consulté d'autres ressources scientifiques incluses dans le chapitre 3 et mises dans le chapitre *Références* (voir la section « Ressources pédagogiques ») dans le but de confirmer et d'enrichir les informations retenues dans le document inédit.

Nous retrouvons, à la section 5.4, les éléments suivants :

- Descriptions des ensembles de nombres (naturels, entiers, rationnels, irrationnels, réels);
- Définition des nombres rationnels;
- Lecture et écriture des nombres rationnels (notation fractionnaire et décimale);
- Fractions;
- Décimaux;
- Opérations sur les nombres rationnels :
    - Amplification et simplification (les fractions);
    - Comparaison;
    - Addition;
    - Soustraction;
    - Multiplication;
    - Division;
    - Conversion.

Le contenu de ce document constitue un aide-mémoire permettant aux enseignants l'appropriation de la notion de nombres rationnels ou la révision de certaines notions en lien avec ce concept.

4.2.3 Élaboration du document synthèse

En nous référant à la section 3.2.3 qui traite de la typologie des erreurs liées aux nombres rationnels (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Mercier et Deblois, 2004; Sacré et Stegen, 2004a, 2004b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel,2009; Lessard, 2010; Adihou et Arsenault, 2011; Saboya et Rhéaume, 2013; Boublil, 2015), nous avons élaboré un document synthèse (chapitre 5, section 5.5) qui permet aux enseignants de réviser rapidement le contenu de la section 3.2.3 ou de repérer des éléments qui les intéressent (difficultés, causes, obstacles, interventions).

Pour ce faire, nous avons fait ressortir les difficultés répertoriées à la section 3.2.3 que nous avons ensuite synthétisées, classées et numérotées (de 1 à 20) dans la première colonne de notre tableau. Nous avons séparé les difficultés en trois catégories, soit celles qui sont en lien avec les représentations décimales des nombres rationnels, celles qui sont en lien avec les représentations fractionnaires et finalement celles qui sont en lien aux deux représentations des nombres rationnels. Cette décision a été prise dans le but de faciliter l'accès au tableau et de permettre aux utilisateurs de mieux s'y retrouver.

Par la suite, pour aider à la compréhension de l'erreur, nous avons inséré une colonne «*exemple concret de cette difficulté*». Les exemples sont soit inspirés de numéros inclus dans les recherches qui nous ont permis de bâtir la section 3.2.3 ou ils ont été créés par nous à l'aide des connaissances que nous avons dans le domaine des nombres rationnels.

En ce qui concerne la troisième colonne «*type de difficultés*», nous nous sommes basés sur la description présentée à la section 3.2.2 pour établir le lien entre la difficulté et le type d'erreur (conceptuelle ou procédurale).

Pour ce qui est de la colonne «*raisons*», nous avons reformulé et synthétisé les informations incluses dans le chapitre 3, section 3.2.3, *typologie des erreurs liée à l'apprentissage des nombres rationnels*.

Finalement, nous retrouvons, dans la dernière colonne, les numéros faisant référence aux interventions que nous jugeons appropriées pour contrer la difficulté. La liste d'intervention précède le document synthèse (section 5.5.1). Ces interventions proviennent principalement des recherches utilisées pour élaborer la section 3.2.3 et des informations tirées des Notes du cours Did-2014*, Didactique des nombres rationnels et de la mesure* (Boublil, 2015).

4.2.4 Élaboration du test diagnostique

Pour répondre à l'objectif (f), soit l'élaboration de questions types et de problèmes complexes vérifiant les difficultés répertoriées dans la section *typologie des difficultés,* nous avons construit le test diagnostique inclus à l'annexe II.

Le test contient onze questions qui s'appuient sur nos connaissances didactiques et pédagogiques dans le domaine des nombres rationnels. Pour la création des questions, nous avons d'abord sélectionné différentes difficultés présentées dans le document synthèse de la section 5.5.2 et de la section 3.2.3 de ce document. Par la suite, nous avons élaboré les questions en s'appuyant sur les difficultés ressorties. Par exemple, pour évaluer les difficultés liées à la lecture et à l'écriture des nombres décimaux (section 3.2.3.2 et section 3.2.3.3), nous avons créé la question numéro deux (voir section 5.6.1.2) demandant au participant de compléter un tableau en transcrivant en mots les nombres décimaux écrits à l'aide de symboles mathématiques et vice versa. À titre indicatif, nous avons inclus un exemple de ce numéro :

Complétez le tableau ci-dessous :

Écriture des nombres décimaux à l'aide de symboles	Écriture des nombres décimaux en mots
0.12	*Douze centièmes*

Lors de l'élaboration de nos questions, nous avons inclus des numéros ayant une mise en situation (question: 1, 4, 5, 6, 7, 11) et d'autres qui n'en ont pas (question: 2, 3, 8, 9, 10). Cela permet de vérifier si les mises en situation peuvent causer des difficultés chez les participants.

Suite à l'élaboration du test diagnostique, nous avons fait l'analyse didactique de tous les numéros (voir section 5.6.1). L'analyse comprend les objectifs, les réponses attendues et les connaissances visés par la question. Il est aussi inséré, lorsque nécessaire, une description du choix des variables didactiques.

En sommes, le test diagnostique a été élaboré pour permettre d'évaluer les habiletés des participants à travailler avec les nombres rationnels, et ce, dans différents problèmes mathématiques.

4.2.5 Élaboration de l'organisation des apprentissages

Dans le but de répondre à l'objectif «*description d'une progression de l'apprentissage des nombres rationnels (école primaire et 1er cycle du secondaire)*» nous avons, à la section 5.7, créé une progression d'apprentissage des nombres rationnels en sept étapes.

Cette progression d'apprentissage stipule qu'il faut commencer l'apprentissage des nombres rationnels par l'apprentissage des fractions pour ensuite poursuivre avec l'apprentissage des nombres décimaux.

Pour arriver à ce constat, nous nous sommes référés à la progression incluse dans les travaux de Stegen, Sacré (2004b) et de Rouche (1998) pour élaborer et décrire les 4 premières étapes (partager en parts égales des objets quelconques; partager en parts égales des objets standards; partager en parts égales des représentations dessinées; partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres). Nous nous sommes ensuite inspirés des travaux de Boublil (2015) pour développer les éléments importants des travaux de Rouche (1998) et pour y ajouter des exemples.

Les trois dernières étapes de notre progression d'apprentissage en lien avec l'introduction des nombres décimaux (étude des fractions décimales; introduction de l'écriture « à virgule »; travail avec l'écriture décimale) sont tirées d'un document de Boublil (2015).

5. RÉSULTATS

Pour faire suite à la présentation des démarches effectuées pour répondre à nos objectifs de recherche, nous présentons, dans ce chapitre, les résultats de notre recherche.

Les sections 5.1, 5.2 et 5.3 se consacrent à la présentation des outils élaborés pour l'évaluation des déterminants de la motivation, soit la perception de compétence, la perception de contrôle et la perception de valeur. La section 5.1 présente la grille d'évaluation de la motivation, la section 5.2 présente la grille de compilation des résultats et la section 5.3 présente l'interprétation des résultats.

Dans les sections 5.4 à 5.7, nous proposons la description des outils didactiques élaborés pour répondre aux objectifs de recherche en lien avec l'apprentissage des nombres rationnels. Nous retrouvons, à la section 5.4, l'aide-mémoire sur les nombres rationnels. La section 5.5 présente le document synthèse, ainsi que les interventions réalisables pour contrer les difficultés des élèves. Le test diagnostique ainsi que l'analyse de ses questions se retrouvent à la section 5.5. Finalement, la section 5.6 présente la progression des apprentissages sur les nombres rationnels.

5.1 GRILLE D'ÉVALUATION DE LA MOTIVATION

Cochez votre degré d'accord aux différentes affirmations en vous basant sur vos propres perceptions

L'analyse des résultats se fait à l'aide d'un tableau de compilation qui se trouve à la fin du questionnaire. Ce tableau est suivi par l'interprétation des résultats.

Indiquez votre degré d'accord en cochant la case appropriée :

1 = fortement en désaccord 2 = moyennement en désaccord 3= moyennement en accord 4 = tout à fait d'accord

Tableau 3. Grille d'évaluation de la motivation

À la suite de la résolution des exercices	1	2	3	4
1. De façon générale, les exercices sur les nombres rationnels me motivent	○	○	○	○
2. J'exerce un contrôle sur le déroulement des problèmes en lien avec les nombres rationnels	○	○	○	○
3. Je peux choisir entre plusieurs stratégies pour résoudre des problèmes liés aux rationnels	○	○	○	○
4. Je peux toujours prendre des décisions en ce qui concerne le déroulement de l'activité sur des nombres rationnels.	○	○	○	○
5. Je suis responsable du déroulement de mes apprentissages concernant les nombres rationnels.	○	○	○	○
6. Je me sens toujours capable de résoudre des problèmes faisant intervenir les nombres rationnels	○	○	○	○
7. Je me perçois comme une personne compétente lorsque je dois résoudre des problèmes avec les nombres rationnels	○	○	○	○
8. Je n'entretiens pas de craintes face aux nombres rationnels	○	○	○	○
9. J'ai toutes les connaissances nécessaires pour répondre aux questions qui m'ont été présentées	○	○	○	○
10. Mes apprentissages concernant les nombres rationnels me sont utiles en dehors du contexte scolaire	○	○	○	○
11. L'apprentissage des nombres rationnels est primordial dans le cursus mathématique	○	○	○	○
12. Je sais qu'il est possible de réinvestir les apprentissages liés aux nombres rationnels	○	○	○	○
13. Je valorise l'apprentissage des nombres rationnels	○	○	○	○

5.2 COMPILATION DES RÉSULTATS

Tableau 4. Compilation des résultats

	Énoncés	**Résultats**
	1 = fortement en désaccord 2 = moyennement en désaccord 3= moyennement en accord 4 = tout à fait d'accord	
Motivation générale	1.	/4
	Total	**/4**
Perception de **contrôlabilité** que le participant a sur le déroulement des activités sur les nombres rationnels	2.	/4
	3.	/4
	4.	/4
	5.	/4
	Total	**/16**
Perception que le participant a de sa **compétence** à réussir les activités sur les nombres rationnels	6.	/4
	7.	/4
	8.	/4
	9.	/4
	Total	**/16**
Perception que le participant a de la **valeur** des activités sur les nombres rationnels	10.	/4
	11.	/4
	12.	/4
	13.	/4
	Total	**/16**

5.3 INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

Selon le cumulatif des points obtenus précédemment, la section suivante vous permet de faire une analyse sommaire des résultats. Cependant, il est important de prendre en considération que les réponses obtenues peuvent être modifiables selon les activités présentées, le niveau de difficulté, des événements antérieurs, etc.

Motivation générale

- **Résultat de 1-2**

Si le résultat à la question 1 se situe entre 1 et 2 points, cela signifie que le participant entretient une motivation faible en ce qui concerne les nombres rationnels. Ainsi, il est possible que son état dynamique (ses perceptions, son environnement…) ne l'incite pas à choisir des activités en lien avec les nombres rationnels et qu'ainsi son engagement et sa persévérance en soient affectés négativement
.

- **Résultat de 3-4**

Si le pointage se situe entre 3 et 4 points, le répondant entretient une motivation élevée en ce qui a trait aux nombres rationnels. Il a de l'intérêt pour ce domaine mathématique ce qui peut l'amener à choisir des activités en lien avec les nombres rationnels et à persévérer davantage lors de leurs résolutions.

Perception de contrôlabilité

- **Résultat se situant entre 1-4**

Si le résultat se situe entre 1 et 4 points, c'est que le degré de contrôlabilité du participant est faible. Cela signifie qu'il croit qu'il a peu, ou pas, de contrôle sur le déroulement des activités en lien avec les nombres rationnels. Il juge que tout lui est imposé et qu'il n'a aucune responsabilité lors du déroulement de l'activité. Il croit aussi qu'il n'a aucun droit de parole concernant le déroulement des tâches mathématiques liées aux rationnels et que ses propres choix sont prescrits.

- **Résultat se situant entre 5-10**

Si le résultat se situe entre 5 et 10 points, c'est que le répondant possède une perception de contrôle moyenne. Cela signifie qu'il croit que certains éléments du déroulement de la tâche lui sont imposés et que d'autres découlent de sa responsabilité.

- **Résultat se situant entre 11-16**

Si son résultat se situe entre 11 et 16 points, c'est qu'il entretient une perception de contrôlabilité élevée. Ainsi, le répondant s'estime entièrement responsable de ses apprentissages. Il se sent capable de maitriser le déroulement des activités en lien avec les nombres rationnels. Il croit avoir un contrôle sur les conséquences positives ou négatives d'une activité pédagogique.

Perception de compétence

- **Résultat se situant entre 1-4**

Si le résultat du répondant se situe entre 1 et 4 points, c'est que sa perception de compétence est faible. Cela signifie qu'il évalue faiblement ses capacités à accomplir une tâche liée aux nombres rationnels. Il ne croit pas avoir les compétences et les acquis nécessaires pour résoudre les problèmes en lien avec ce domaine. Ce résultat peut aussi signifier que le répondant interprète parfois ses agissements et ses attitudes comme une incapacité de sa part à réussir ce qu'on lui demande de faire. Cette perception faible de ses compétences peut même l'amener à se dévaloriser comme apprenant.

- **Résultat se situant entre 5-10**

Si le résultat se situe en 5 et 10 points, c'est que le répondant a une perception de compétence moyenne. Cela peut signifier qu'il croit que son bagage de connaissances et de compétences n'est pas suffisant pour répondre aux exigences des tâches demandées. Ainsi il croit qu'il lui manque certaines notions pour pouvoir répondre aisément aux questions demandées qui sont liées aux rationnels.

- **Résultat se situant entre 11-16**

Si son pointage se situe entre 11 et 16, c'est que le participant se perçoit comme une personne ayant toutes les compétences nécessaires pour résoudre les problèmes liés aux nombres rationnels. Dans la plupart des cas, le répondant évalue positivement ses capacités à accomplir une tâche de manière adéquate.

Perception de valeur

- **Résultat se situant entre 1-4**

Si le répondant obtient un pointage se situant entre 1 et 4 points cela peut signifier que le jugement qu'il porte sur l'utilité des activités en lien avec les nombres rationnels est faible. Cette perception peut provenir du fait que les buts sociaux ou les buts scolaires qu'il poursuit ne coordonnent pas avec les activités sur les nombres rationnels. Ainsi, les notions ou les activités sur les nombres rationnels ont peu d'importance dans l'atteinte de ses objectifs personnels.

- **Résultat se situant entre 5-10**

S'il obtient un score se situant entre 5 et 10 points c'est que sa perception de valeur des tâches sur les nombres rationnels est de niveau moyen. Ainsi le participant croit que certaines tâches ou notions sont utiles et qu'elles ont de la valeur à court ou long terme, mais que d'autres ne le sont pas. Le participant tire alors des avantages de certaines tâches et il semble avoir une certaine conscience de leurs utilités pour atteindre ses buts sociaux ou scolaires.

- **Résultat se situant entre 11-16**

Si le répondant récolte un pointage se situant entre 11 et 16 points, c'est qu'il croit plus fermement que les tâches avec les nombres rationnels sont utiles et importantes pour réaliser ses buts (buts scolaires ou sociaux). Il pose un jugement favorable sur les nombres rationnels ce qui l'amène à répondre positivement à la question : « qu'est-ce que cela m'apporte de faire cette activité? ». Il reconnaît dès lors que les activités sur les nombres rationnels sont bénéfiques pour lui.

5.4 AIDE-MÉMOIRE SUR LES NOMBRES RATIONNELS

Pour bien nous situer par rapport aux nombres rationnels, il est primordial de distinguer chaque ensemble de nombres. Dans les prochaines lignes, nous allons décrire l'ensemble des naturels, des entiers, des rationnels, des irrationnels, des nombres réels et les relations d'inclusion ou d'exclusion qui existent entre ces ensembles. Dans cette description, nous allons largement nous référer aux notes du cours DID-2014 (Boublil, 2015), document inédit offert dans le cadre du cours de didactique des nombres rationnels et autres sources pédagogiques (voir la section à part dans le chapitre *Références bibliographiques*).

Pour mieux comprendre le concept de nombres rationnels, nous allons exposer, dans la prochaine partie de ce chapitre, la définition des nombres rationnels, les deux principales formes d'écriture des nombres rationnels et la définition de chacun des termes qui sont en lien avec ces différentes formes d'écriture. Cette partie de chapitre prendra fin avec l'exposition des différentes opérations applicables sur ces nombres ainsi qu'avec l'explication de la procédure pour y parvenir.

5.4.1 Ensemble des nombres

Le premier ensemble, celui des **naturels**, est composé de nombres entiers exclusivement positifs ou nuls (ex. : 0, 1, 2, 3, etc.).

L'ensemble des nombres **entiers relatifs** est composé des nombres naturels (entiers positifs et le zéro) auxquels on ajoute des entiers négatifs, indiquant ainsi leur position par rapport au nombre zéro (ex. : -2, -1, 0, 1, 2, etc.).

C'est par leur prolongement que nous obtenons les nombres **rationnels**. Ce sont des nombres qui peuvent être exprimés comme le quotient de deux entiers relatifs (a/b où b ≠ 0) (ex : la division de 5 par 8, soit 5/8).

Les nombres **irrationnels** sont des nombres qui ne peuvent pas être représentés sous la forme fractionnaire. Ils ont une écriture décimale infinie et non périodique. Par exemple, le nombre

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, car il est impossible de le représenter sous la forme d'un quotient de deux entiers.

Les nombres rationnels et irrationnels font partie de la famille des **réels.**

Dans la section suivante, nous nous arrêterons sur la description des nombres rationnels, sujet mathématique de notre recherche, et sur leurs propriétés.

5.4.2 Nombres rationnels

5.4.2.1 Définition

Par définition, un nombre rationnel correspond au quotient de deux nombres entiers relatifs et peut s'exprimer sous la forme d'un rapport (a/b où a et b sont des entiers et où b est différent de zéro).

5.4.2.2 Écriture et lecture des nombres

Les nombres rationnels peuvent être représentés sous deux formes distinctes : fractionnaire (3/4) et décimale (0.75).

Nous exposons, dans la prochaine partie, la distinction entre ces deux notations et les différences que cela amène dans l'écriture et la lecture de ces nombres.

Écriture fractionnaire

Une représentation **fractionnaire** du nombre rationnel est constituée de deux entiers placés l'un au-dessous de l'autre et séparés par un trait (ou une barre) horizontal ou oblique ($\frac{2}{3}, 2/3$). Le premier nombre (celui qu'on divise) s'appelle le **numérateur.** Le second nombre (par lequel nous divisons) s'appelle le **dénominateur**. Le numérateur et le dénominateur sont les deux **termes** de la fraction.

On peut lire une fraction de différentes façons :

- « numérateur divisé par dénominateur » (par exemple, « 2 divisé par 5 »);
- « numérateur sur dénominateur » (par exemple, « 2 sur 5 »);
- « numérateur, puis dénominateur auquel on ajoute le suffixe – *ième* » (par exemple, « 2 cinquièmes ») à l'exception pour les dénominateurs 2, 3 ou 4 qui sont exprimés respectivement par demi, tiers ou quart.

Il est important de retenir la distinction entre la fraction $\frac{a}{b}$ et le nombre rationnel. L'écriture fractionnelle (la fraction) est l'une des représentations du nombre rationnel.

Écriture décimale

L'écriture décimale des nombres rationnels se compose de deux parties qui sont séparées par une virgule. La partie entière est à gauche de la virgule et la partie décimale est à droite de la virgule. Par exemple, dans le nombre « 2.125 », ″2″ est une partie entière et ″125″ est une partie décimale.

Les nombres représentés par une écriture décimale **finie** sont rationnels**.** Par exemple, le nombre 2.125 a un développement décimal fini. Il est un nombre rationnel.

Les nombres représentés par une écriture décimale **infinie périodique** sont rationnels. Dans la partie décimale, chaque groupe de chiffres qui se reproduit est appelé **période**. Par exemple, ″23″ est la période dans le nombre 0.2323232323…

5.4.2.3 Fractions

Nous allons appeler « fractions » les nombres rationnels exprimés sous la forme fractionnaire. Nous pouvons distinguer les différents types de fractions : unitaire, propre, impropre, réductible, irréductible et décimale.

Fraction unitaire

Une **fraction unitaire** se décrit comme une fraction dont le numérateur vaut 1. Toutes les fractions de la forme 1/n, où n est un entier relatif non nul, sont des fractions dites unitaires ($\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc.).

Fraction propre/impropre

Une **fraction propre** est caractérisée par le fait que le numérateur est plus petit que le dénominateur. Toutes les fractions propres sont inférieures à 1 et supérieures à -1 ($-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}$, etc.).

Au contraire de la fraction propre, une **fraction impropre** est une fraction dont le numérateur est plus grand que le dénominateur (ex. : $\frac{5}{3}$). Ainsi, toute fraction impropre est supérieure à 1 ou inférieure à -1 (ex : $-\frac{5}{3}$).

Les **nombres fractionnaires,** qui sont constitués d'un nombre entier suivi d'une fraction, sont équivalents à une expression fractionnaire impropre. Par exemple, la fraction impropre $\frac{30}{7}$ peut être représentée par le nombre fractionnaire $4\,\frac{2}{7}$.

Fraction réductible/irréductible

Une **fraction réductible** est une fraction dont le numérateur et le dénominateur ont au moins un diviseur entier commun. Par exemple, la fraction $\frac{18}{24}$ a comme facteurs communs 2 et 6. Elle peut donc être réduite à $\frac{9}{12}$ ou à ¾.

Une **fraction irréductible**, pour sa part, est une fraction dont le numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur entier commun ou alors c'est une fraction qui est réduite à sa plus simple expression. Nous dirons alors que le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux (ex. : $\frac{7}{9}$).

Fractions équivalentes

Les **fractions équivalentes** sont un ensemble de fractions qui représentent le même nombre, le même rapport, mais dont l'écriture est différente. Les fractions $\frac{9}{12}$ et $\frac{3}{4}$ sont des **fractions équivalentes**.

De manière générale, les fractions équivalentes sont des fractions égales à une même fraction irréductible.

Fraction décimale

Une **fraction décimale** se définit comme une fraction dont le dénominateur est un produit de puissance 10 (2/10, 23/100, etc.).

5.4.2.4 Nombres décimaux

Un nombre rationnel est considéré décimal s'il peut être représenté par une écriture décimale finie (0.08; 0.15; 0.2; 0.25; 0.375; etc.) ou par une fraction décimale ($\frac{2}{10}, \frac{25}{100}$, etc.) ou alors s'il a la forme d'une fraction dont le dénominateur se décompose en facteurs premiers de 2 et/ou de 5 ($\frac{3}{20}$ car $20 = 2 \times 2 \times 5$; $\frac{3}{8}$ car 8 = 2 x 2 x 2; $\frac{2}{25}$ car 25 = 5 x 5).

5.4.2.5 Représentation des nombres rationnels

Comme nous venons de le voir, les nombres rationnels peuvent être écrits en notation fractionnaire ou en notation décimale. Pour ce qui est de la notation décimale, elle peut se représenter sous deux types de compositions que nous allons expliquer dans la prochaine partie de ce chapitre.

Composition des nombres décimaux

La première composition de la notation décimale est la composition **additive**, qui consiste à décomposer la partie décimale en une somme de fractions décimales. Cette décomposition de la partie décimale met alors en jeu la valeur de position de chaque chiffre qui la compose ($12{,}375 = 12 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{12375}{1000}$).

Nous retrouvons aussi la composition **canonique** de la notation décimale qui consiste à décomposer le nombre en sommes des puissances de 10 (utilisation de la notation scientifique). Cette décomposition, qui met encore en jeu la valeur de position de chaque chiffre qui compose le nombre, utilise à la fois l'addition et la multiplication. Selon cette composition, le nombre 12.375 peut s'écrire de la manière suivante : $12{,}375 = 1\text{x}10 + 2\text{x}10^0 + 3\text{x}10^{-1} + 7\text{x}10^{-2} + 5\text{x}10^{-3}$.

5.4.2.6 Outils de représentation

Certains outils peuvent aussi servir à la représentation des nombres rationnels. Le tableau des valeurs de position et la droite numérique sont les outils de représentation des nombres rationnels les plus utilisés.

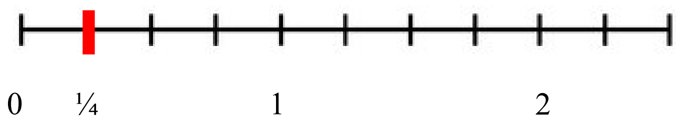
La table des valeurs de position permet de représenter des nombres en observant leur composition et la valeur de position de chaque chiffre. Dans cette table, nous retrouvons la partie entière et la partie décimale du nombre séparées par une virgule. Chaque chiffre qui compose le nombre possède une place bien précise qui est reliée à une valeur. Cette valeur se nomme la valeur de position. Comme nous utilisons la base 10 pour représenter les nombres, chaque valeur associée aux positions est une puissance de 10. Par exemple, une dizaine est 10 fois plus grande qu'une unité, elle contient donc 10 unités. De même, une unité est 10 fois plus grande qu'un dixième, elle contient donc 10 dixièmes. Le nombre 125,35 peut être illustré dans une table des valeurs de position de la manière suivante :

Tableau 5. Table des valeurs de position

Classe des milles			**Classe des unités**						
centaines	dizaines	unités	centaines	dizaines	unités		dixièmes	centièmes	Millièmes
			1	2	5	,	3	5	
← Partie entière →						Virgule	← Partie décimale →		

Nous pouvons aussi utiliser comme outil de représentation **la droite numérique**. Cet outil est une droite de nombres ayant une graduation constante. Pour trouver le pas de graduation, il faut identifier l'unité de graduation correspondant à l'espace entre deux nombres donnés (ce qui consiste à trouver la différence entre deux nombres sur la droite) et compter le nombre d’espaces compris entre les deux nombres (les espaces de graduation se situent entre deux barres de graduation). L’utilisation de cet outil de représentation des nombres permet notamment de comparer, d’ordonner et d’arrondir les nombres à une position donnée. La droite numérique est fort utile pour permettre l’intercalation à l’infini.

Dans l’exemple ci-dessous, l’unité de graduation entre 0 et 1 est de 1, car 1 – 0 = 1. Cette unité est séparée en 4, car nous retrouvons 4 espaces compris entre ces deux nombres. Chacune des subdivisions correspond donc à un quart de l’unité. La graduation **rouge** se situe à une subdivision d’un quart. Elle correspond donc à la fraction ¼.



5.4.2.7 Opérations sur les nombres rationnels

Toutes les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication et division) sont applicables aux nombres rationnels. Cependant, il existe des opérations qui sont propres aux fractions. Dans cette section, nous allons donc décrire les différentes opérations avec les nombres rationnels en les divisant en deux sous-sections : **fractions** et **décimaux**.

Opérations sur les fractions

Il existe plusieurs opérations qu’on effectue avec les fractions. En effet, il est possible de les amplifier et de les simplifier, de les comparer, de les additionner, de les soustraire, de les multiplier, de les diviser et de les exprimer sous la forme d’un développement décimal. Toutes ces opérations seront davantage décrites dans la section suivante.

Amplification et simplification

L’amplification et la simplification découlent du concept de la fraction équivalente. Ces deux opérations ont pour but de trouver une nouvelle fraction qui a la même proportion que la première.

- **Amplification**

Amplifier une fraction consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par le même entier non nul ($\frac{2}{7} x \frac{2x5}{7x5} = \frac{10}{35}$).

- **Simplification**

À l'opposé, simplifier une fraction consiste à la réduire en divisant le numérateur et le dénominateur par leur plus grand diviseur commun (PGDC) ($\frac{15}{20} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$).

Lorsque le PGDC est difficile à trouver, il est possible de simplifier une fraction en effectuant des divisions successives du numérateur et du dénominateur par un même nombre jusqu'à l'obtention d'une fraction irréductible. Pour le faire, il est possible de décomposer les numérateurs et les dénominateurs en facteurs premiers pour trouver les diviseurs communs (990 = **2 x 3** x 3 x **5** x 11; 420 = **2** x 2 x **3 x 5** x 7 : $\frac{990}{420} = \frac{\cancel{2}x495}{\cancel{2}x210} = \frac{495}{210}$; $\frac{495}{210} = \frac{\cancel{3}x165}{\cancel{3}x70} = \frac{165}{70}$; $\frac{165}{70} = \frac{\cancel{5}x33}{\cancel{5}x14} = \frac{33}{14}$).

Comparaison

La comparaison des fractions consiste à déterminer un ordre entre ces dernières. Cette opération revient alors à trouver la fraction la plus grande ou la plus petite ou à déterminer qu'elles sont équivalentes (qu'elles équivalent au même rapport). Les relations « inférieur à… (<) » et « supérieur à… (>) » sont des relations d'ordre. Il existe plusieurs méthodes pour comparer les fractions entre elles :

- Si les dénominateurs sont égaux (et positifs), la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur ($\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$, car $5 > 3$);
- Si les numérateurs sont égaux (et positifs), la fraction la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur ($\frac{5}{8} < \frac{5}{7}$, car $7 < 8$);
- Si les dénominateurs ne sont pas égaux, on doit mettre les fractions sur le même dénominateur. Pour ce faire, il faut amplifier ou simplifier les fractions pour obtenir des dénominateurs égaux. Par exemple, si nous voulons comparer les

fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{4}{7}$, nous devons les mettre sur le même dénominateur en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par le même nombre non nul : $\frac{3}{5} = \frac{3x7}{5x7} = \frac{21}{35}$; $\frac{4}{7} = \frac{4x5}{7x5} = \frac{20}{35}$. Étant donné que 21>20, nous obtenons que $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$;

- La comparaison de deux fractions peut aussi se faire en calculant leur quotient. Par exemple, pour les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{4}$, nous pouvons diviser leur numérateur par leur dénominateur et obtenir un nombre rationnel avec une écriture décimale finie ou infinie périodique : 3 ÷ 5 = 0.6 et 3 ÷ 4 = 0.75). Étant donné que 0.6 < 0.75, nous obtenons que $\frac{3}{5} < \frac{3}{4}$.

Lorsque nous voulons comparer plusieurs fractions entre elles, nous parlons d'ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou d'ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

Addition

Il est aussi possible de réaliser des opérations d'addition avec les fractions.

Dans un premier temps, si les fractions ont le même dénominateur, nous devons additionner seulement les numérateurs entre eux en n'appliquant aucune opération sur le dénominateur. ($\frac{1}{8} + \frac{5}{8} = \frac{1+5}{8} = \frac{6}{8}$).

Si les fractions n'ont pas de dénominateur commun, il faut mettre les fractions sur un dénominateur commun (normalement le plus petit). Cela revient donc à trouver deux fractions équivalentes ayant le même dénominateur en utilisant l'opération d'amplification ou de simplification de fractions.

Par exemple : $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$: $\frac{3}{5} = \frac{3x7}{5x7} = \frac{21}{35}$; $\frac{4}{7} = \frac{4x5}{7x5} = \frac{20}{35}$; $\frac{21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{21+20}{35} = \frac{41}{35}$

Au besoin, nous pouvons simplifier la fraction résultante pour la mettre sous sa forme irréductible.

Soustraction

En ce qui concerne l'opération de soustraction, la démarche est la même que celle de l'addition (mettre les fractions sur le même dénominateur en appliquant une amplification ou une simplification de fractions, puis soustraire les deux numérateurs).

Par exemple : $\frac{3}{5} - \frac{4}{7}$: $\frac{3}{5} = \frac{3x7}{5x7} = \frac{21}{35}$; $\frac{4}{7} = \frac{4x5}{7x5} = \frac{20}{35}$; $\frac{21}{35} - \frac{20}{35} = \frac{21}{35} = \frac{1}{35}$

Multiplication

L'opération de multiplication avec deux fractions ou plus s'effectue en multipliant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Par exemple : $\frac{2}{5} \text{x} \frac{3}{4} = \frac{2\text{x}3}{5\text{x}4} = \frac{6}{20}$.

Au besoin, la fraction peut être simplifiée $\frac{6}{20} = \frac{\cancel{2}\text{x}3}{\cancel{2}\text{x}10} = \frac{3}{10}$

L'opération de multiplication entre un nombre entier et une fraction (2 x $\frac{2}{3}$) s'effectue en suivant les étapes suivantes :

1. Mettre le nombre entier sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est égal à 1 (ce qui ne change pas la valeur du nombre) ($2 = \frac{2}{1}$);
2. Appliquer la procédure de la multiplication (multiplier les numérateurs avec les numérateurs et les dénominateurs avec les dénominateurs) ($\frac{2}{3} \text{x} \frac{2}{1} = \frac{2\text{x}2}{3\text{x}1} = \frac{4}{3}$);
3. Au besoin, simplifier la fraction obtenue.

Division

Pour la division d'une fraction par un nombre entier ($\frac{2}{3} \div 2$), il faut suivre les étapes suivantes[2] :

1. Mettre le nombre entier sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est égal à 1 (ce qui ne change pas la valeur du nombre) ($2 = \frac{2}{1}$);
2. Transformer l'opération de la division en la remplaçant par l'opération de multiplication qui s'effectuera entre la première fraction et l'inverse de la seconde (x$\frac{1}{2}$).
3. Appliquer la procédure de la multiplication ($\frac{2}{3} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{2\text{x}1}{3\text{x}2} = \frac{2}{6}$);

[2] Il s'agit de l'algorithme traditionnel. Il est possible d'utiliser d'autres algorithmes.

4. Au besoin, simplifier la fraction obtenue ($\frac{2}{6} = \frac{\cancel{2}x1}{\cancel{2}x3} = \frac{1}{3}$).

En ce qui concerne la division d'une fraction par une autre fraction, nous devons multiplier la première fraction par l'inverse de la deuxième et simplifier au besoin (répétition des étapes 2 à 4 précédemment présentées).

Conversion

L'opération de conversion consiste à passer d'une écriture fractionnaire à une écriture décimale et vice versa.

Pour trouver **l'écriture décimale** d'une fraction, nous devons diviser le numérateur par le dénominateur de la fraction ($\frac{4}{5} = 4 \div 5 = 0.8$).

Pour trouver **l'écriture fractionnaire** d'un nombre décimal, nous devons observer la position du dernier chiffre de la partie décimale (dixième, centième, millième, etc.) afin de trouver la valeur du dénominateur de la fraction.

Par exemple, dans le nombre 0.62, le chiffre 2, qui termine la partie décimale, est à la position des centièmes. Ainsi, le dénominateur de la fraction recherchée va être 100. La fraction équivalente à 0.62 va donc s'écrire $\frac{62}{100}$. La procédure de simplification de fractions peut ensuite être appliquée pour inscrire la fraction obtenue sous sa forme irréductible ($\frac{31}{50}$) (diviser le numérateur et le dénominateur par le plus grand commun diviseur (PGDC)).

Nous pouvons aussi écrire une fraction sous la forme d'un pourcentage (%). Pour ce faire, il faut effectuer une amplification ou une simplification de la fraction dans le but d'obtenir une fraction équivalente dont le dénominateur est égal à 100. Par exemple, pour convertir la fraction $\frac{5}{20}$ en pourcentage, nous devons trouver une fraction équivalente à cette dernière dont le dénominateur est 100. Nous appliquons donc une amplification de la fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul ($\frac{5}{20} = \frac{5x5}{20x5} = \frac{25}{100} = 25\%$).

Opérations sur les décimaux

Dans cette section, nous décrivons les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et de comparaison avec des nombres décimaux.

Addition et soustraction

Les opérations d'addition et de soustraction de nombres décimaux s'effectuent de la même manière qu'avec les nombres entiers. De la sorte, nous devons aligner les nombres sous forme de colonnes, en positionnant les chiffres occupant le même rang (centaine, dizaine, unité, dixième, centième) les uns au-dessus des autres. Les virgules incluses dans les nombres décimaux sont ainsi alignées. Lorsque tous les nombres sont alignés, nous pouvons alors les additionner ou les soustraire, une position à la fois, en commençant par la droite.

Par exemple : $\frac{+\begin{array}{r}265.40\\ \underline{045.18}\end{array}}{310.58}$

Dans certains cas, pour faciliter les opérations sur les nombres décimaux, il peut être utile d'ajouter des zéros à droite de la partie décimale ou à gauche de la partie entière pour faciliter l'alignement des nombres :

Par exemple, pour additionner les nombres décimaux 265,4 et 45,18 :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ 265{,}40 \\ \underline{+045{,}18} \\ 310{,}58 \end{array}$$

Multiplication

La multiplication de nombres décimaux s'effectue aussi de la même manière qu'avec les nombres entiers. Pour le calcul en colonnes, nous effectuons la multiplication des deux nombres sans tenir compte de la virgule. Nous considérons alors que les facteurs sont 10^x fois plus grands (où x représente le nombre de décimaux inclus dans chacun des facteurs). C'est dans le résultat final que nous plaçons la virgule de façon à ce que le résultat ait le même nombre de décimales que les termes du produit (48.25 x 49.85; les deux termes ont chacun 2 décimales, donc 2 + 2 = 4. Le produit doit avoir 4 chiffres dans sa partie décimale).

En d'autres mots, cela revient à diviser le produit pour le rendre 10^yfois plus petit (où y représente le nombre total de décimales dans les facteurs)

$$\begin{array}{r} 85.\mathbf{64} \\ \times \quad 7 \\ \hline 599.\mathbf{48} \end{array}$$

(2 décimales dans le premier terme et aucune décimale dans le deuxième terme, donc 2 + 0 = 2. Le produit doit avoir 2 chiffres dans sa partie décimale)

$$\begin{array}{r} 0.\mathbf{255} \\ \times \quad 8.\mathbf{6} \\ \hline 2.\mathbf{1930} \end{array}$$

(3 décimales dans le premier terme et 1 décimale dans le deuxième terme, donc 3 + 1 = 4. Le produit doit avoir 4 termes dans sa partie décimale).

Division

La division de deux nombres décimaux s'effectue comme celle de deux nombres entiers. En effet, le quotient de deux nombres décimaux est égal au quotient de deux nombres entiers que nous obtenons après avoir déplacé la virgule dans les 2 nombres donnés d'autant de rangs vers la droite. Prenons l'opération suivante : 0.24 ÷ 1.6. Pour obtenir un entier à partir du nombre 0.24, nous devons déplacer la virgule de deux rangs vers la droite. Nous obtenons alors 024 ou 24. Pour 1.6, nous obtenons un entier en déplaçant la virgule d'un seul rang. Cependant, étant donné que nous avons dû déplacer la virgule de deux rangs pour 0.24, il faut faire de même pour 1.6. Nous obtenons donc 160. L'équation finale est donc 24 ÷ 160 = 0.15.

Comparaison

La comparaison de deux nombres décimaux se fait comme avec les entiers et consiste à déterminer un ordre entre deux nombres. Cela revient donc à déterminer quel nombre est le plus grand.

Ainsi, pour comparer deux nombres décimaux, il faut d'abord comparer leurs parties entières. Si ces dernières sont identiques, il faut alors comparer les parties décimales de même rang

(245.**2**68 est plus petit que 245.**6**9, car 2 dixièmes est plus petit que 6 dixièmes). Lorsque nous voulons comparer plusieurs nombres ensemble, nous parlons alors d'ordre croisant (du plus petit au plus grand) ou d'ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

5.5 DOCUMENT SYNTHÈSE : DESCRIPTION DES DIFFICULTÉS SUR LES NOMBRES RATIONNELS

Le document synthèse est séparé en deux sections. La première section présente une énumération des interventions que les enseignants peuvent réaliser pour pallier les difficultés rencontrées par leurs élèves (chapitre 5, section 5.5.1). Elles sont numérotées de A à Q. Certaines interventions sont reliées exclusivement au domaine des nombres décimaux, alors que d'autres se rapportent aux fractions. Cependant, certaines peuvent être applicables conjointement, selon les besoins.

Nous donnons, à titre d'exemple, la description des quatre premières interventions de la liste présentée à la section 5.5.1.

A. Prendre garde à l'oral : 45 unités et 36 centièmes et pas « 45 virgule 36 »;
B. Donner du sens aux chiffres après la virgule (travailler la valeur de position, l'ordre de grandeur, les tables de numération);
C. Faire le lien entre l'écriture décimale du nombre rationnel et les fractions décimales;
D. S'entraîner à lire les nombres décimaux en énonçant les mots dixièmes, centièmes, etc.

L'élaboration de cette liste d'interventions correspond à notre objectif e).

La deuxième partie du document synthèse se compose d'un tableau récapitulatif (voir chapitre 5, section 5.5.2) qui est constitué de cinq colonnes. La première correspond à la difficulté éprouvée par rapport aux nombres rationnels. La deuxième colonne présente un exemple concret de cette difficulté. Nous retrouvons, dans la troisième colonne, le type d'erreur (conceptuelle ou procédurale) auquel les difficultés font référence. La quatrième colonne, pour sa part, fait référence aux raisons pour lesquelles les élèves éprouvent chacune des difficultés. Finalement, à la dernière colonne, nous retrouvons les lettres faisant référence aux interventions listées dans la première partie du document synthèse.

En plus d'être séparé en cinq colonnes, le tableau récapitulatif est séparé selon le type d'écriture des nombres rationnels. Ainsi, la première partie du tableau présente les difficultés reliées aux nombres rationnels lorsqu'ils sont représentés sous une notation décimale. Afin de mieux visualiser le format, nous donnons, à titre d'exemple, la description d'une des difficultés (voir le tableau ci-dessous).

Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
2. Difficultés de vocabulaire : une confusion entre des mots comme *dixième/dizaine*, *centième/centaine*	Certains élèves disent que dans 12,534 il y a **5 centaines,** car «on dit douze virgule cinq **cent** trente-quatre»	Erreur conceptuelle (connaissance erronée des termes associés aux valeurs positionnelles de la partie décimale)	- Ressemblance phonétique des mots - Lecture orale « négligée » (12 virgule 534)	A-B-C-D *(désignent des rangs, des positions)*

La deuxième partie du tableau présente les difficultés reliées à l'utilisation des représentations fractionnaires des nombres rationnels. Nous utilisons le même format de tableau (voir l'exemple ci-dessous).

Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Numéro de l'intervention**
10. Lecture de la fraction : utilisation d'une partie de l'écriture chiffrée	4 carreaux pour ¼	Erreur conceptuelle (non prise en compte de la sous-unité dans laquelle on compte, le « quart »)	Ressemblance phonétique des mots : quatre/quart	L

Finalement, le troisième tableau présente les difficultés reliées autant à la représentation décimale qu'à la représentation fractionnaire des nombres rationnels (voir l'exemple ci-dessous).

Passage Fractions/Décimaux et vice versa				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
19. Conception simpliste des écritures fractionnaires (deux entiers séparés par une barre de fraction) ou **confusion entre « / » et « , »** (Traitement du numérateur comme l'entier de référence)	3/5 = 3,5 1,4=1/4	Erreur conceptuelle (erreur de la signification des symboles de la barre de division «/» et de la virgule «,» utilisée pour représenter les nombres rationnels; bon choix de notation, mais une mauvaise application de procédures pour effectuer le passage d'une notation à l'autre)	Passage rapide de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale. Non prise en compte du lien qui unit le numérateur et le dénominateur Interprétation quotient de fraction délaissée (a/b peut signifier une division non réalisée (a÷b))	F, O. a, O. c, Q

L'élaboration de ce document synthèse nous permet de répondre à l'un des objectifs (d) que nous nous sommes fixés, soit l'élaboration d'une typologie des difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels et d'une description de leurs causes et des obstacles qui y sont liés. De plus, ce document permet à l'enseignant de choisir l'intervention appropriée liée à une difficulté particulière (objectif e) de la recherche.

5.5.1 Liste des interventions

A. Prendre garde à l'oral : 45 unités et 36 centièmes et pas « 45 virgule 36 »;
B. Donner du sens aux chiffres après la virgule (travailler la valeur de position, ordre de grandeur, tables de numération);
C. Faire le lien entre l'écriture décimale du nombre rationnel et les fractions décimales;
D. S'entraîner à lire les nombres décimaux en faisant entendre les mots « dixièmes », « centièmes », « etc. »;
E. Éviter d'introduire les élèves à l'écriture conventionnelle de mesure (1,4 m) avant que le travail approprié soit proposé sur les comparaisons, le mesurage à l'aide des unités non conventionnelles, l'écriture symbolique (2 grandes unités, 3 moyennes unités, 5 petites unités), le changement d'unité, conversion des unités, etc.;
F. S'appuyer sur la droite numérique et les phénomènes de « zoom » pour matérialiser certaines propriétés (Il y a une infinité de nombres décimaux entre 1,16 et 1,17/L'idée du nombre « précédent » ou « suivant » n'a pas de sens pour les rationnels (les décimaux) (densité).);
G. Examiner successivement la valeur de chaque chiffre situé à droite de la virgule;
H. Revenir aux écritures fractionnaires (fractions décimales);
I. Compléter par des zéros la partie décimale la plus courte afin que les deux parties décimales aient une même longueur (méthode appelée « calibrage des parties décimales »);
J. Demander aux élèves une valeur approchée d'un résultat avant le calcul (estimation) pour inciter à une rétroaction sur la vraisemblance du résultat une fois le calcul effectué (vérification);
K. Dire que les nombres rationnels sont de nouveaux nombres et que certaines propriétés, certaines techniques de calcul qui étaient valables avec les entiers restent valables, d'autres ne le sont plus. Pour les décimaux, cela est parfois **vrai**, parfois faux (pour exemple, voir section 3.2.3.6) :
    a. multiplication (**4,2 x 2,4 = 10,08**; 4 x 0,2 = 0,8; 0,4 x 0,2 = 0,08);
    b. division (**4,2 ÷ 2,4 = 1,75**; 4,2 ÷ 0,2 = 21);
L. Associer la représentation graphique à une fraction (et vice versa);
M. Associer le vocabulaire à apprendre aux mots connus : le numérateur est celui qui numérote le nombre de parts choisies et le dénominateur est celui qui dénomme, qui donne le nom des parts;
N. Travailler sur des fractions supérieures à 1;
O. Utilisation de matériels concrets (des jetons, des cylindres gradués; réglettes, disques, bandes de papier, ficèles, tangram, blocs multibases, etc.)
    a. Présenter une grandeur unitaire (longueur, surface, segment) – déterminer une partie (plus petite et plus grande que la grandeur unitaire);

b. Proposer de contextes différents : partage, division, rapport dans les contextes différents (partage d'une unité et de plusieurs unités en parties égales, recherche d'une partie de la collection, taux, mesure, chance, réflexion, etc.);
c. donner un statut au nombre rationnel (en tant que fraction) : leur apparition doit être motivée par leur utilisation en tant que réponse aux insuffisances des entiers (choix des activités, choix de nombres). Par exemple, choix des longueurs à mesurer/choix des unités, etc.

P. Faire le passage du concret à l'abstrait (couper (en 2-3-4-5…) des objets quelconques, couper des objets standards, couper des représentations dessinées, couper en « n » parts égales);
Q. Utiliser des carrés quadrillés pour représenter des fractions décimales et aussi des nombres écrits avec une virgule.

5.5.2 Description des difficultés

Tableau 6. Description des difficultés (Nombres rationnels)

<table>
<tr><th colspan="5">Décimaux</th></tr>
<tr><th>Difficultés, conceptions erronées, erreurs</th><th>Exemple concret de cette difficulté</th><th>Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)</th><th>Raisons</th><th>Interventions</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Conception erronée du décimal (juxtaposition de deux entiers, couple de deux entiers séparés par une virgule).

Chez l’élève, la partie entière et la partie décimale du nombre fonctionnent selon le même principe de numération de position : ex. « trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines, il en faut par conséquent trois pour écrire les centièmes ».</td><td rowspan="2">24 centièmes (0.24) est écrit 0.024</td><td rowspan="2">Erreur conceptuelle (Mauvaise compréhension des principes qui régissent l’écriture des nombres décimaux (valeurs positionnelles, non-symétrie entre les valeurs à gauche de la virgule et celles de droite))</td><td>Lecture orale « négligée » : 45,36 lu comme « quarante-cinq virgule trente-six » (ce qui accrédite l’idée que les chiffres situés après la virgule désignent un entier)

Application des règles sur les entiers</td><td>A – B – C – D</td></tr>
<tr><td>Le travail précoce sur l’écriture conventionnelle des mesures sans expériences appropriées renforce cette conception (4 et ¼ m est associé à 4,4 m et non à 4,25 m; 3 h 30 min est associé à 3,30 h et non à 3,5 h).

Les enfants utilisent des algorithmes qui sont performants pour les décimaux de la vie quotidienne (mètres et centimètres, dollars et cents, heures et minutes) : ce sont leurs pratiques sociales habituelles. Ils traitent par exemple les mètres d’un côté et les centimètres de l’autre, etc.</td><td>E</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Décimaux</th></tr>
<tr><th>Difficultés, conceptions erronées, erreurs</th><th>Exemple concret de cette difficulté</th><th>Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)</th><th>Raisons</th><th>Interventions</th></tr>
<tr><td>2. Difficultés de vocabulaire :
une confusion entre des mots comme dixième/dizaine, centième/centaine</td><td>Certains élèves disent que dans 12,534 il y a 5 centaines, car «on dit douze virgule cinq cent trente-quatre»</td><td>Erreur conceptuelle (connaissance erronée des termes associés aux valeurs positionnelles de la partie décimale)</td><td>- Ressemblance phonétique des mots
- Lecture orale « négligée » (12 virgule 534)</td><td>A-B-C-D
(désignent des rangs, des positions)</td></tr>
<tr><td>3. Difficulté dans l'écriture des nombres décimaux.

3.1 Suppression de la virgule</td><td>Vingt-quatre centièmes (0.24) s'écrit 24;
Cinq millième (0.005) s'écrit 5 ou 5000</td><td rowspan="2">Erreur conceptuelle (non prise en compte de la valeur positionnelle accordée au nombre de la partie décimale)

Erreur procédurale (exécution d'une procédure apprise avec les entiers qui stipule qu'il faut trois chiffres pour écrire les centaines, et donc que c'est de même pour les centièmes).</td><td rowspan="2">Complexité de la notation des nombres rationnels et transposition des observations réalisées sur les entiers aux nombres décimaux :

- Présence de deux parties distinctes séparées par une virgule

- Valeur positionnelle à droite de la virgule diffère de celle à gauche

- Lecture orale « négligée » (2.25 est oralisé deux et vingt-cinq)</td><td rowspan="2">A-B-C-D</td></tr>
<tr><td>3.2 Écriture de la partie décimale selon les principes de numérations de position de la partie entière</td><td>Le nombre 24 centièmes (0,24) s'écrit de la manière suivante : 0.024, car, avec les entiers, trois chiffres sont nécessaires pour écrire les centaines</td></tr>
</table>

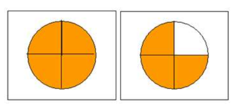
Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
4. Conception erronée de nombres décimaux liée à la **densité** de l'ensemble des décimaux (Intercalation)	L'élève affirme que 1.165 n'est pas un nombre compris entre 1,16 et 1,17 Ou L'élève affirme « qu'il n'y a pas de nombre entre 1,16 et 1,17 »	Erreur conceptuelle (la densité est un concept fondamental qui régit les nombres rationnels)	Application des règles sur les entiers (car il n'y a pas d'entier entre 16 et 17) (**Rupture**)	F *(Il y a une infinité de nombres décimaux entre 1,16 et 1,17)*
5. Difficulté à trouver **l'entier supérieur ou inférieur** à un nombre décimal (succession d'entiers) 5.1 L'élève retranche une unité	630 est l'entier qui précède 631.2	Erreur conceptuelle (signification de symbole de la virgule; concept d'un nombre entier)	Application des règles sur les entiers (tout nombre a un prédécesseur ou un successeur entier)	F *(L'idée du nombre « précédent » ou « suivant » n'a pas de sens pour les rationnels (les décimaux) (densité).*
5.2 L'élève produit des réponses exclusivement en «nombre à virgule»	Le nombre 631.19 ou 631.1 est l'entier qui précède le nombre 631.2 (réponse produite exclusivement en nombre à virgule)	Erreur procédurale (Exécution de procédures apprises et mémorisées avec les entiers)	Non-maîtrise du concept d'entier	

Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
6. Difficulté à comparer deux nombres décimaux lorsque les parties décimales sont de longueurs distinctes : 6.1 L'élève traite la **partie décimale** comme un nombre **entier** (2 < 19 alors 5,2 < 5,19) où le nombre de chiffres d'un **nombre** décimal représente pour l'élève un indicateur de sa grandeur (le nombre qui a l'écriture la plus longue est le **plus grand.**	L'élève place en ordre croissant les nombres suivants *3.25; 3.125; 3.2* de cette manière : *3.2 < 3.35 < 3.125* (car 2 < 35 < 125)	Erreur conceptuelle (Conception erronée des valeurs positionnelles à droite de la virgule) Erreur procédurale (Exécution de procédures apprises et mémorisées avec les entiers)	- Lecture orale « négligée » - Passage rapide aux écritures décimales. - Conception erronée du nombre décimal (un couple d'entiers séparé par une virgule) - Application des règles sur les entiers (**Rupture**) - Association à la valeur du dernier chiffre de la partie décimale : 3 – position de millième, 4 – position de centième (millième <centième)	A – B – C – D - F - G- H – I
6.2 Le nombre de chiffres de la **partie décimale** représente pour l'élève un indicateur de sa grandeur (le nombre dont la partie décimale possède plus de chiffres est le **plus petit)**	*3.125 < 3.25 < 3.2* (car 125 est la partie décimale contenant le plus de chiffres, donc le plus petit nombre)			

Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
7. Conception erronée du décimal comme entier (**un seul nombre**) dont la virgule est négligée dans les opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) lorsque les parties décimales sont de longueurs distinctes. 7.1 **Addition** (calcul posé) l'élève aligne ce nombre selon le dernier chiffre du premier nombre (sans tenir compte de la position de la virgule). Le positionnement de la virgule dans le résultat peut ensuite donner lieu à diverses variantes : pas de virgule, ou bien virgule placée comme dans le nombre d'en haut ou comme dans le nombre d'en bas).	3, 4 2 + 2, 5 3 6 7 - Réponse sans virgule : 367 - Réponse avec virgule placée comme le premier chiffre : 3,67 - Réponse avec virgule placée comme le deuxième chiffre : 36,7	Erreur conceptuelle (conception erronée du nombre décimal qui est vu comme un entier (non prise en compte des deux parties (celle de droite et celle de gauche) qui forment le nombre)). Erreur procédurale (erreur dans l'exécution de l'algorithme d'addition, de soustraction et de multiplication démontrant ainsi que le concept n'est pas compris par l'élève)	Influence de l'approche de l'enseignement des opérations sur les décimaux : « d'abord on fait comme avec les entiers, ensuite on place la virgule. **(Continuité)**	B – C – I – J

Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
7.2 **Soustraction** (la partie décimale du nombre que l'on soustrait est plus longue) : l'élève aligne ce nombre selon le dernier chiffre du premier nombre (sans tenir compte de la position de la virgule)	$\begin{array}{r} 3,\ 4\ 7 \\ -\ 2,\ 5 \\ \hline 3\ \ 2\ \ 2 \end{array}$ - Réponse sans virgule : 322; - Réponse avec virgule placée comme le premier chiffre : 3, 22; - Réponse avec virgule placée comme le deuxième chiffre : 32.2	Erreur conceptuelle (conception erronée du nombre décimal qui est vu comme un entier (non prise en compte des deux parties (celle de droite et celle de gauche) qui forment le nombre) Erreur procédurale (erreur dans l'exécution de l'algorithme d'addition, de soustraction et de multiplication démontrant ainsi que le concept n'est pas compris par l'élève)	Influence de l'approche de l'enseignement des opérations sur les décimaux : « d'abord on fait comme avec les entiers, ensuite on place la virgule. **(Continuité)**	B – C – I –J
7.3 **Multiplication** (traitement de la partie entière et de la partie décimale comme 2 parties distinctes et application d'algorithmes de multiplication vrais avec les entiers	2.3 x 2.4 = ((2x2) , (3x4) = (4,12))			

Décimaux				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
8. Conception erronée de la grandeur du produit	Multiplication : Croire que le **produit** est toujours plus grand que les nombres multipliés Division : Croire que le **quotient** est toujours plus petit que le dividende	Erreur conceptuelle (incompréhension du sens des algorithmes de multiplication et de division des nombres décimaux)	Application des règles sur les entiers **(Continuité** et **rupture)**	K
9. « **Zéros inutiles** » Application d'une procédure (avec perte de sens)	Élève réalise dans multiplication à un décimal et un nombre en base dix de cette façon : 35,2 x 100 = 3500,2; Ou 5,2 x 100 = 35,200; Ou 35,2 x 100 = 3500,200	Erreur procédurale (Exécution de procédures apprises et mémorisées avec les entiers (lorsque l'on multiplie par 100, on ajoute 2 zéros à la droite du nombre)).	Application de la règle des zéros sur les entiers calquée sur les nombres décimaux (25×10=250) (**Continuité**)	B - C

Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Numéro de l'intervention**
10. Lecture de la fraction : utilisation d'une partie de l'écriture chiffrée	4 carreaux pour ¼	Erreur conceptuelle (non prise en compte de la sous-unité dans laquelle on compte, le « quart »)	Ressemblance phonétique des mots : quatre/quart	L
11. Difficultés de **vocabulaire :** où est le dénominateur? Le numérateur?	Dans la fraction : $\frac{3}{5}$, l'élève associe le numérateur au nombre 5 et le dénominateur au nombre 3.	Erreur conceptuelle (Confusion dans l'utilisation de termes fondamentaux liés à la représentation fractionnaire)	Nouveau vocabulaire, mots difficiles	M
12. Conception simpliste des écritures fractionnaires (nb. de parts prises sur le nb. de parts au total) sans lien au contexte du problème), ou **Difficultés liées au repérage de l'unité** (ex. que représente l'unité dans les fractions suivantes : 5/4 et 5/8?), d'associer la **fraction** à une part et de **représenter graphiquement** le partage équitable quand le tout n'est pas une unité 2 tartes : 4, que représente ¼? - Quand le nombre de parts n'est pas un nombre pair (ex. 2 tartes : 5) - Quand le tout n'est pas un nombre pair et le nombre de parts n'est pas un multiple du nombre représentant le tout (ex. 3 baguettes : 2)	L'élève associe ¼ à la partie en blanc 	Erreur conceptuelle (non prise en compte des différentes interprétations de la fraction; limitation du sens de la fraction au fractionnement de l'unité)	Contexte exclusif d'apprentissage (fractionnement d'une unité)	N – O. b

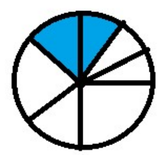
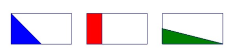
Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
13. Difficulté à **comparer** deux fractions lorsque les dénominateurs ne sont pas les mêmes (utilisation de seulement les numérateurs ou des dénominateurs pour ordonner les fractions)	Les élèves sont invités à comparer les fractions suivantes et à les mettre en ordre croissant : 7/8, 5/3, 4/9 et ils le font en comparant seulement les numérateurs entre eux : 4/9, 5/3, 7/8, car 4 < 5 < 7.	Erreur procédurale (utilisation de procédures vraies avec les entiers, mais qui se relèvent fausses avec les fractions)	Développement d'un rapport techniciste aux opérations (ne s'appuie pas sur le sens des opérations ni sur les représentations du nombre) Application des règles sur les entiers **(Continuité** et **rupture)** C'est la surexploitation de l'interprétation « partie-tout » dans les ressources pédagogiques qui amène les élèves à se questionner s'il faut comparer la taille des pièces ou le nombre de pièces. Conception erronée du lien qui unit le numérateur et le dénominateur Représentations variées et complexes des nombres rationnels.	F – O b. – L

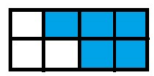
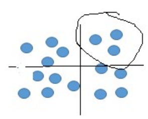
<table>
<tr><th colspan="5">Fractions</th></tr>
<tr><th>Difficultés, conceptions erronées, erreurs</th><th>Exemple concret de cette difficulté</th><th>Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)</th><th>Raisons</th><th>Interventions</th></tr>
<tr><td>14. Conception erronée de la fraction (deux entiers séparés par une barre de fraction qui n’ont aucun lien entre eux)

14.1 Addition et soustraction de fractions (Additionner les numérateurs et les dénominateurs entre eux; additionner tous les nombres ensemble; additionner ou soustraire seulement les dénominateurs entre eux (avec des fractions unitaires); additionner ou soustraire les numérateurs entre eux, puis multiplier les dénominateurs).</td><td>1)
$\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{3+1}{5+8}=\frac{4}{13}$
2)
$\frac{3}{5}+\frac{1}{8}$ = 3+5+1+8 = 17
3)
$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}=\frac{1}{5+8}=\frac{1}{13}$
4)
$\frac{3}{5}+\frac{1}{8}=\frac{3+1}{5x8}=\frac{4}{40}$</td><td rowspan="2">Erreur procédurale (erreur dans l’exécution de l’algorithme qui semble démontrer que le concept d’addition, de soustraction, de simplification et de fractions équivalentes n’est pas bien compris; mémorisation de techniques (trucs) avec perte de sens)</td><td rowspan="2">Développement d’un rapport techniciste aux opérations (ne s’appuie pas sur le sens des opérations ni sur les représentations du nombre)
Application des règles sur les entiers (Continuité et rupture)</td><td rowspan="2">L – O – O. b</td></tr>
<tr><td>14.2 Multiplication de fractions (Réduire les multiplicateurs au même dénominateur; confondre l’opération de multiplication avec le produit en croix ou la division)</td><td>Réduire les multiplicateurs au même dénominateur
(¼ x ½ = $\frac{1x2}{4x2}x\frac{1x4}{2x4}=\frac{2}{8}x\frac{4}{8}=\frac{2x4}{8}$ = 1).

Produit en croix
$\frac{3}{4}x\frac{5}{12}=\frac{3x12}{4x5}=\frac{36}{20}$</td></tr>
</table>

Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
14.3 **Simplification** de fractions (difficulté à simplifier des fractions lorsque le numérateur et le dénominateur ne sont pas des multiples de 2)	$\frac{15}{21} = \frac{15 \div 5}{21 \div 5} = \frac{3}{4.2} \cdots$	Erreur procédurale (erreur dans l'exécution de l'algorithme qui semble démontrer que le concept d'addition, de soustraction, de simplification et de fractions équivalentes n'est pas bien compris; mémorisation de techniques (trucs) avec perte de sens)	Développement d'un rapport techniciste aux opérations (ne s'appuie pas sur le sens des opérations ni sur les représentations du nombre) Application des règles sur les entiers **(Continuité** et **rupture)**	L – O – O. b
14.4 Fractions **équivalentes** (difficulté à trouver une valeur intermédiaire lorsque les dénominateurs des fractions ne sont pas multiples entre eux)	Trouver une fraction équivalente à $\frac{3}{6}$ dont le dénominateur est 92 : $\frac{3}{5} = \frac{?}{92}$; 5 x? = 92 5 x 18.4 = 92 Alors, $\frac{3x18.4}{5x18.4} = \frac{55.2}{92}$			
15. Division de fractions : conception erronée de l'inverse multiplicatif (inversion du dividende au lieu du diviseur ou inversion du diviseur et du dividende)	Inversion du dividende au lieu du diviseur : $\frac{3}{5} \div \frac{5}{8} = \frac{5}{3} x \frac{5}{8} = \frac{5x5}{3x8} = \frac{25}{24}$ Inversion du dividende et du diviseur : $\frac{3}{5} \div \frac{5}{8} = \frac{5}{3} x \frac{8}{5} = \frac{5x8}{3x5} = \frac{40}{15}$	Erreur procédurale (erreur dans l'exécution de l'algorithme qui semble démontrer que le concept de division de fractions n'est pas bien compris)	Développement d'un rapport techniciste aux opérations (ne s'appuie pas sur le sens des opérations ni sur les représentations du nombre)	J - O

Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
16. Conception erronée de la grandeur du **produit ou du quotient**	Multiplication : Croire que le **produit** est toujours plus grand que les nombres multipliés Division Croire que le **quotient** est toujours plus petit que le dividende	Erreur conceptuelle (l'élève ne comprend pas le sens du produit ou du quotient obtenu à la suite de l'application des algorithmes de multiplication et de division des nombres rationnels)	Application des règles sur les entiers **(Continuité** et **rupture)**	**K**
17. Conception erronée de **l'interprétation «partie-tout»** de la fraction 17.1 **Tout continu** (partition du tout en parties non congrues, mauvaise représentation des fractions impropres) *(utilisation de la méthode du Halving qui consiste à séparer la figure en deux, puis de continuer le partage en traçant des traits aléatoirement)*	 2/7	Erreur procédurale (erreur dans l'application des techniques de fractionnement apprises par l'élève qui démontrent que le concept qui stipule que les parties doivent être congrues n'est pas assimilé par l'élève) Erreur conceptuelle : l'idée que la notion de parties égales n'est pas ancrée chez tous les élèves.	Conception erronée du lien qui unit le numérateur et le dénominateur Passage rapide aux représentations abstraites Surexploitation des touts continus dans les ressources pédagogiques Réinvestissement de notions liées à d'autres domaines mathématiques (ex. géométrie (aires, volumes))	O - O. b – P - L
17.2 Déterminer la fraction représentée par des figures partagées en parties équivalentes, mais non congrues. (Cela demande l'emploi d'opérations mentales de comparaisons, de découpage et de déplacements)	 L'élève n'est pas capable de déterminer l'équivalence des régions coloriées (elles représentent ¼ du rectangle)			

Fractions				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
17.3 **Identification** de fraction (fraction dont le dénominateur ne correspond pas au tout de la collection ou de la figure)	Parmi les fractions données (10/16; 3/8; 3/5), l'élève choisit «3/8» pour la représentation de la partie bleue  *(le dénominateur de la fraction choisie correspond au tout de la figure)*	Erreur procédurale (erreur dans l'application des techniques de fractionnement apprises par l'élève qui démontrent que le concept qui stipule que les parties doivent être congrues n'est pas assimilé par l'élève)	Conception erronée du lien qui unit le numérateur et le dénominateur Passage rapide aux représentations abstraites Surexploitation des touts continus dans les ressources pédagogiques Réinvestissement de notions liées à d'autres domaines mathématiques (ex. géométrie (aires, volumes))	O - O. b – P - L
17.4 **Touts discrets** (voir les groupes collectifs comme des touts continus (travailler sur l'espace occupé par tout et non sur sa cardinalité)),	Exemple : Sépare en quarts la représentation ci-dessous :  L'élève sépare l'espace occupé par les jetons-et non le nombre de jetons			
18. Conception limitée des interprétations de la fraction (**dominance de l'interprétation «partie-tout»** sur les autres interprétations).	Les élèves affirment que les fractions ¾ et 4/5 sont pareils, car il leur manque une partie pour obtenir le tout.	Erreur conceptuelle (limitation à une interprétation de la fraction)	Surexploitation de l'interprétation «partie-tout» dans les ressources pédagogiques Conception erronée du lien qui unit le numérateur et le dénominateur	O. b

Passage Fractions/Décimaux et vice versa				
Difficultés, conceptions erronées, erreurs	**Exemple concret de cette difficulté**	**Type de difficulté (conceptuelle ou procédurale)**	**Raisons**	**Interventions**
19. Conception simpliste des écritures fractionnaires (deux entiers séparés par une barre de fraction) ou **confusion entre « / » et « , »** (Traitement du numérateur comme l'entier de référence)	3/5 = 3,5 1,4=1/4	Erreur conceptuelle (erreur de la signification des symboles de la barre de division «/» et de la virgule «,» utilisée pour représenter les nombres rationnels; bon choix de notation, mais une mauvaise application de procédures pour effectuer le passage d'une notation à l'autre)	Passage rapide de l'écriture fractionnaire à l'écriture décimale. Non prise en compte du lien qui unit le numérateur et le dénominateur Interprétation quotient de fraction délaissée (a/b peut signifier une division non réalisée (a÷b))	F – O. a – O. c – Q
20. Difficulté de vocabulaire/sens : une confusion entre le rang du premier chiffre à droite de la virgule (« dixième ») et ce que l'on obtient en partageant l'unité en dix	L'élève associe 1/10 du rectangle à la position des «dixièmes»	Erreur conceptuelle (erreur au niveau de la compréhension de la différence entre un fractionnement en 10 et la valeur positionnelle à droite de la virgule)	Ressemblance phonétique des mots (incompréhension de concepts)	B-C-L

5.6 TEST DIAGNOSTIQUE

À partir du document synthèse que nous avons élaboré et présenté dans la section précédente, nous avons préparé un test composé de questions types permettant de vérifier des difficultés répertoriées à la section 3.2.3 (voir Annexe II). À l'aide de ce test, nous répondons au dernier objectif (f), soit l'élaboration de questions types et de problèmes complexes vérifiant chacune des difficultés répertoriées dans la section *typologie des difficultés*.

Dans la prochaine section, nous présentons une analyse de chacune des questions présentes dans le test diagnostique. Pour chaque question, nous décrivons ses objectifs, les réponses attendues et les connaissances visées. Il est aussi inséré, lorsque nécessaire, une description du choix des variables didactiques.

5.6.1 Analyse des questions

5.6.1.1 Question 1

Lors de son dernier test de mathématiques, Julie a obtenu 14 bonnes réponses contre 6 mauvaises. Sa mère lui demande si sa note est meilleure qu'aux tests précédents. Aide Julie à répondre à sa mère.

Voici les résultats des tests précédents :

Test 1 : 13/20;

Test 2 : 70 %;

Test 3 : 18.5/25;

Test 4 : 0.68;

Test 5 : 45/60.

Réponses attendues :

Pour effectuer la comparaison, les participants peuvent utiliser la technique de leur choix : convertir en pourcentages, en fractions ou en écriture décimale. Nous présentons ces différentes possibilités sous la forme du tableau suivant dans lequel les résultats aux tests 1 à

5 sont en gras et le résultat du test 6 est en gras rouge. De cette façon, nous les distinguons des transformations que l'élève peut effectuer.

	Différentes écritures		
	Fractionnaire	**Décimale**	**Pourcentage (%)**
Test 1	**13/20**	13:20 = 0,65	$\frac{13}{20} = \frac{13x5}{20x5} = \frac{65}{100}$= 65 %
Test 2	70/100 = 7/10	70:100 = 0.7	**70 %**
Test 3	**18.5/25**	18.5:25 = 0.74	$\frac{18.5}{25} = \frac{18.5x4}{25x4} = \frac{74}{100}$= 74 %
Test 4	68/100= 17/25	**0.68**	$\frac{68}{100}$ = 68 %
Test 5	**45/60** = 3/4	45:60 = 0.45	$\frac{45}{60} = \frac{y}{100}$: $\frac{45x100}{60}$ = y = 75 : $\frac{75}{100}$ = 75 %
Test 6	**14/20** = 7/10	14:20=**0,7**	$\frac{14}{20} = \frac{14x5}{20x5} = \frac{70}{100}$ = **70%**

Peu importe la démarche que l'élève utilisera, la comparaison doit permettre d'arriver à la réponse suivante :

Julie a obtenu 14 bonnes réponses contre 6 mauvaises : 14 bonnes réponses sur un total de 20 questions (14 + 6).

Le résultat obtenu au test 6 est donc :

- supérieur à ceux des tests 1 (**70** > 65) et 3 (**70** > 68)
- égal à celui du test 2 (70 = **70**)
- inférieur à ceux des tests 3 (70 < 74) et 4 (**70** < 75)

Connaissances visées :

Cette question a pour objectif d'amener les participants à comparer les nombres rationnels sous notations différentes (notation décimale, notation fractionnaire et pourcentages). Cette question nécessite aussi de passer de l'interprétation « rapport » des nombres rationnels à l'interprétation « mesure » pour que le participant soit amené à travailler avec deux interprétations à la fois et qu'il puisse faire le passage de l'une à l'autre. Pour effectuer cette comparaison, les connaissances suivantes pourront être mises en jeu :

- Comparer des fractions (si le dénominateur est le même, nous comparons les numérateurs);
- Amplifier (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul) ou simplifier (diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul) des fractions : utilisation de fractions équivalentes (ensemble de fractions représentant le même nombre ou la même proportion, mais dont l'écriture est différente);
- Convertir la notation fractionnaire en notation décimale (diviser le numérateur par le dénominateur ($\frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0.75$));
- Convertir la notation décimale en notation factionnaire (observer la position du dernier chiffre de la partie décimale (dixièmes, centièmes, millièmes, etc.) afin de déterminer le dénominateur de la fraction. (Par exemple, dans 0.125, le dernier chiffre à droite de la virgule (5) est à la position des millièmes. Ainsi, la fraction décimale s'écrit comme suit : $\frac{125}{1000}$.) Simplifier ou amplifier la faction pour trouver un dénominateur commun facilitant la comparaison : $\frac{1}{8}$);
- Convertir des nombres en pourcentages (%) : amplifier ou simplifier une fraction vers une autre fraction dont le dénominateur est égal à 100. Nous écrivons en abrégé % (un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100, mais qui utilise le symbole % sous sa forme abrégée);
- Convertir en notation fractionnaire (fraction décimale) le nombre exprimé en pourcentage (nous enlevons le symbole « % » pour ajouter le dénominateur 100. Par exemple, nous écrivons 75 % en fraction comme suit : $\frac{75}{100}$. Nous pouvons ensuite simplifier par $\frac{3}{4}$);
- Convertir en notation décimale le nombre exprimé en pourcentage (convertir la notation décimale en fraction décimale pour ensuite amplifier ou simplifier la fraction obtenue vers une autre fraction dont le dénominateur équivaut à 100).

Choix des nombres :

Nous avons choisi les dénominateurs 20 et 25 car ils sont tous deux des facteurs du nombre 100. Ainsi, à l'aide d'un multiplicateur, le participant peut trouver des fractions équivalentes ayant toutes le même dénominateur (100).

Le dénominateur 60 a été sélectionné pour que les participants soient amenés à utiliser une stratégie différente pour comparer ce nombre avec les autres (ils peuvent comparer les fractions dont les dénominateurs sont des diviseurs de soixante (5, 20) en utilisant, par exemple, l'amplification ou la proportionnalité pour trouver des fractions équivalentes (produit croisé)).

Le nombre 70 % a été introduit pour vérifier la compréhension de concept de pourcentage (70/100 ou 0.70).

Le nombre 18.5/25 a été sélectionnée pour tenter de créer une rupture dans les connaissances des nombres fractionnaires étant donné que le numérateur n'est pas un nombre entier. Par contre, le quotient du numérateur par le dénominateur est un nombre dont l'écriture se termine à la position des centièmes. Par conséquent, la conversion du nombre décimal en fraction décimale est facilitée.

5.6.1.2 Question 2

Complétez le tableau ci-dessous :

Écriture des nombres décimaux à l'aide de symboles	**Écriture des nombres décimaux en mots**
0.12	
	Trente-quatre et vingt et un millièmes
	Cent cinquante et trois centièmes
22,7	
	Cent trois millièmes
	Dix et un dixième

Réponses attendues :

Écriture des nombres décimaux à l'aide de symboles	**Écriture des nombres décimaux en mots**
0.12	*Douze centièmes*
34.021	Trente-quatre et vingt-et-un millièmes
150.03	Cent cinquante et trois centièmes
22,7	*Vingt-deux et sept dixièmes*
0.103	Cent trois millièmes
10.1	Dix et un dixième

Connaissances visées :

Cette activité demande de transcrire les nombres décimaux représentés par une écriture symbolique en mots et vice versa. L'objectif est d'évaluer la connaissance des valeurs positionnelles des nombres rationnels en notation décimale.

Pour lire et écrire un nombre décimal, il faut bien repérer la valeur de chaque chiffre (… centaines, dizaines, unités, dixièmes, centièmes…).

Ainsi, pour transcrire en mots un nombre décimal représenté en chiffres, l'utilisation de la technique suivante est conseillée :

1. Écrire la partie entière en mots. Certaines règles doivent cependant être respectées :
    a. Les nombres formés par plus d'un mot sont automatiquement reliés par un trait d'union (cinquante-deux);
    b. Les nombres 20 et 100 prennent la marque du pluriel quand ils sont multipliés et qu'ils terminent un nombre (trois cents);
    c. Le nombre 1000 (mille) est toujours invariable (deux mille);
2. Écrire « et » au lieu de la virgule;
3. Écrire la partie décimale en mentionnant à la fin le nom de la position occupée par le dernier chiffre (dixièmes, centièmes et millièmes).

Pour transcrire en chiffres un nombre décimal représenté en mots, l'utilisation de la technique suivante est conseillée :

1) Repérer l'endroit où il faut positionner la virgule (la virgule est représentée par le mot « et »);
2) Transcrire la partie entière en chiffres (partie à gauche du terme « et »);
3) Indiquer la virgule;
4) Transcrire la partie décimale (partie à droite du mot « et ») en tenant compte du dernier mot écrit qui représente la valeur positionnelle finale du nombre.

En ce qui concerne les nombres qui n'ont pas de partie entière (douze centièmes), il faut écrire un zéro à la position des unités, ensuite la virgule suivie de la partie décimale (0.12).

Choix des nombres :

La présence ou non d'une partie entière est l'un des premiers critères de sélection des nombres. Quatre des six nombres ont une partie entière (34.012; 150.03; 22.7; 10.1). Les deux autres sont compris entre le nombre zéro et le nombre un et ne contiennent donc pas de partie entière (0.12; 0.103). Ce choix provient du fait que nous voulons évaluer si la présence de la partie entière peut occasionner certaines difficultés dans la mise en mots ou lors de l'écriture symbolique des nombres.

Le rôle de la virgule est aussi évalué dans cette activité. En effet, nous voulons analyser si le participant est capable de faire la distinction entre la partie entière et la partie décimale et s'il est capable de repérer le point de rupture entre ces deux parties.

Le rôle du « et » dans l'écriture en mots est aussi évalué. Nous voulons vérifier si le participant sait que l'utilisation de cette conjonction de coordination est introduite dans l'écriture en mots pour représenter la virgule.

La valeur de la position des nombres à la droite de la virgule (partie décimale) varie entre la position des dixièmes et la position des millièmes (de 1 à 3 chiffres à la droite de la virgule). Cette variable est introduite pour analyser la connaissance des valeurs positionnelles qu'ont les participants. Nous désirons ainsi évaluer si les participants font la distinction entre les valeurs positionnelles à gauche de la virgule et celles à droite de la virgule (valeurs non symétriques). Par exemple, nous voulons observer si le participant différencie 1 dizaine (10) et 1 dixième (0.1).

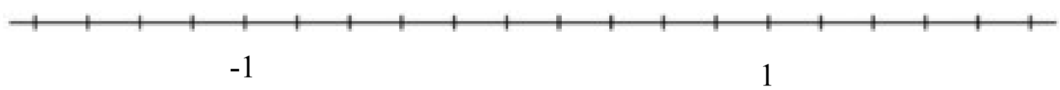
De plus, en instaurant cette variable, nous voulons vérifier si les participants distinguent le vocabulaire dédié aux éléments à gauche de la virgule et celui dédié aux éléments à droite de la virgule (dizaines/dixièmes, centaines/centièmes, etc.).

En référence à la description des erreurs provoquées par la présence du zéro dans l'écriture décimale répertoriées à la section 3.2.3.2, celui-ci a été introduit à la position des dixièmes et des centièmes pour vérifier son positionnement et l'effet de sa présence.

5.6.1.3 Question 3

Positionne le plus précisément possible les nombres suivants sur la droite numérique :

A 0.2 B $1\frac{1}{2}$ C $-\frac{12}{15}$ D -1.400 E $\frac{120}{100}$ F $\frac{3}{5}$



Démarche et réponses attendues :

Démarche possible pour trouver la graduation de la droite :

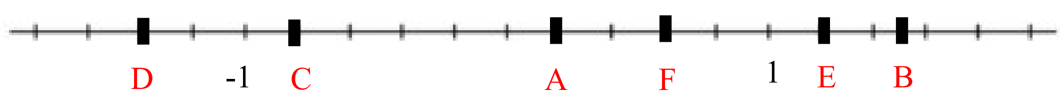
1) Trouver la différence entre deux nombres donnés (1- (-1) = 2);
2) Compter le nombre d'espaces compris entre les deux nombres (10 dans notre cas);
3) Trouver le quotient (division) entre ces deux nombres (2 est la différence entre les deux nombres -1 et 1) et 10 (le nombre d'espaces entre ces deux nombres) (2 ÷ 1 0 = 0.2).

Pour effectuer la comparaison, les participants peuvent utiliser la technique de leur choix : convertir en fractions ou en écriture décimale. Nous présentons ces différentes possibilités sous la forme d'un tableau dans lequel les nombres de départ sont en gras. De cette façon, nous les distinguons des transformations que l'élève peut effectuer.

	Différentes écritures	
	Fractionnaire	**Décimale**
A	$\frac{2}{10} = \frac{2 \div 2}{10 \div 2} = \frac{1}{5}$	**0.2**
B	$\mathbf{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	3 : 2 = 1.5
C	$-\mathbf{\frac{12}{15}} = \frac{-12 \div 3}{15 \div 3} = -\frac{4}{5}$	-4 : 5 = 0.8
D	$-\frac{14}{10} = \frac{-14 \div 2}{10 \div 2} = -\frac{7}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{2}{5} = -1\frac{2}{5}$	**-1.400 =** -1.4
E	$\mathbf{\frac{120}{100}} = \frac{120 \div 20}{100 \div 20} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$	6 : 5 = 1.2
F	$\mathbf{\frac{3}{5}}$	3 : 5 = 0.6

Positionnement sur la droite :

A 0.2 ; B $1\frac{1}{2}$; C $-\frac{12}{15}$; D -1.400 ; E $\frac{120}{100}$; F $\frac{3}{5}$



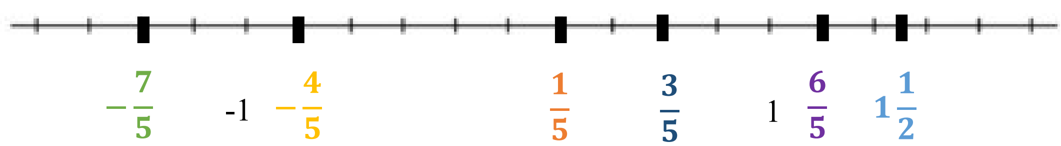
Connaissances visées :

L'objectif principal de cette activité est de vérifier la connaissance de la comparaison des nombres rationnels (ordonner des nombres) représentés selon deux types d'écriture (fractionnaire et décimale). Pour pouvoir comparer des nombres, le participant peut opter pour trois possibilités : ordre croissant (ou décroissant), l'emploi de symboles (plus ou moins) et l'utilisation de la droite numérique. L'activité présentée ici demande au participant d'utiliser la droite numérique comme outil de comparaison.

Ainsi, nous évaluons la capacité de l'élève à trouver la valeur de la graduation d'une droite numérique (droite ayant une graduation constante) lorsque le zéro n'est pas inclus et qu'il y a présence d'un nombre positif et d'un nombre négatif. Les participants ont la possibilité de choisir entre deux choix de graduation : employer l'écriture décimale ou fractionnaire du nombre rationnel.

Exemple d'une droite graduée à l'aide de la notation fractionnaire :

A 0.2 B $1\frac{1}{2}$ C $-\frac{12}{15}$ D -1.400 E $\frac{120}{100}$ F $\frac{3}{5}$



Exemple d'une droite graduée à l'aide de la notation décimale :

A 0.2 B $1\frac{1}{2}$ C $-\frac{12}{15}$ D -1.400 E $\frac{120}{100}$ F $\frac{3}{5}$

Après avoir choisi la graduation avec laquelle il veut travailler, le participant doit transformer les nombres afin d'avoir le même type d'écriture (décimale ou fractionnaire). Les connaissances mathématiques visées par cette question sont les suivantes :

1. Transformation des nombres :

   a. Les fractions en nombres décimaux (diviser le numérateur de la fraction par son dénominateur. Par exemple, ¾ = 3 ÷ 4 = 0.75);
   b. Les nombres décimaux en fractions (observer la position du dernier chiffre de la partie décimale (dixièmes, centièmes, millièmes, etc.) afin de déterminer le dénominateur de la fraction. Par exemple, pour le nombre 0.2,

le dernier chiffre à droite de la virgule (2) est à la position des dixièmes. Ainsi, la fraction décimale s'écrit comme suit : $\frac{2}{10}$.) Simplifier ou amplifier la faction pour trouver un dénominateur commun facilitant la comparaison : $\frac{1}{5}$.

2. Comparaison des nombres représentés sous forme :
   a. Fractionnaire : si les fractions ont le même dénominateur, la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut amplifier (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre, différent de zéro) ou simplifier (diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre, différent de zéro) les fractions pour obtenir un dénominateur correspondant à celui de la graduation (dans ce cas, un dénominateur équivalent à 10 sous la forme réductible ou équivalent à 5 sous la forme simplifiée);
   b. Décimale : pour comparer des nombres décimaux, nous comparons leur partie entière. Si les parties entières sont les mêmes, nous comparons les parties décimales de même rang (20.3 < 20.65, car 3 dixièmes est plus petit que 6 dixièmes).

Le zéro est volontairement absent de la droite numérique, et ce, pour vérifier la compréhension de ce nombre et vérifier son positionnement sur la droite étant donné les erreurs répertoriées à la section 3.2.3.5.

Choix des nombres :

Les nombres ont été sélectionnés pour faire intervenir les deux types d'écriture des nombres rationnels : l'écriture décimale (2 nombres) et l'écriture fractionnaire (4 nombres). Parmi les nombres représentés sous une forme fractionnaire, nous retrouvons différents types de fractions :

1. Une fraction impropre (120/100);
2. Un nombre fractionnaire$\left(1\,\frac{1}{2}\right)$;
3. Deux fractions réductibles (-12/15 et 120/100);
4. Une fraction irréductible (3/5);
5. Des fractions dont les dénominateurs sont différents.

Cet amalgame de représentations des nombres rationnels contraint le participant à passer d'une représentation à une autre pour résoudre le problème. Ces variables didactiques nous permettent aussi d'évaluer les connaissances procédurales des élèves concernant les opérations facilitant le passage d'une représentation à l'autre.

Nous proposons aussi comme variables didactiques des nombres négatifs et des nombres positifs dans le but d'évaluer leur positionnement sur la droite. Nous pouvons ainsi vérifier la compréhension du concept qui dicte que le nombre (négatif) qui est le plus petit est celui qui est le plus éloigné du nombre zéro (-2.6 < -0.8). La compréhension de ce concept par l'apprenant n'est pas si simple sachant que c'est le principe est inversé avec les nombres positifs (0.8 < 2.6).

Outre les derniers éléments, nous avons inséré volontairement des zéros « inutiles » à la droite de certains nombres décimaux (-1.400). Ce paramètre est introduit pour vérifier la connaissance de l'équivalence des écritures sous la forme décimale (0.2 équivaut à 0.20) (voir la section 3.2.3.2).

Finalement, nous avons choisi d'introduire des nombres rationnels supérieurs à l'unité (nombre ayant une partie entière) dans le but de vérifier si le participant a conscience qu'un nombre rationnel n'est pas seulement compris en 0 et 1 (ou entre 0 et -1) et que son emplacement ne se limite pas à la gauche du zéro (voir section 3.2.3).

5.6.1.4 Question 4

Pour déterminer le gagnant de la course de 100 mètres aux Jeux olympiques de Londres en 2012, les analystes ont dû comparer les résultats des 3 premiers coureurs à avoir franchi la ligne d'arrivée. Voici leurs résultats :

Coureur 1 : 10,39 secondes

Coureur 2 : 10,3 secondes

Coureurs 3 : 10,289 secondes

Selon le temps de chacun, déterminez celui qui remportera la médaille d'or, d'argent et de bronze.

Démarche et réponses attendues :

1. Transformation des nombres décimaux (ajout de zéros à la droite du nombre pour avoir la même valeur positionnelle dans les décimales)

   10.39 = 10.390

   10.3 = 10.300

   10.289 = 10,289

2. Ordonner les nombres en ordre décroissant

   10.289 < 10.300 < 10.390

3. Déterminer les positions de chaque coureur

   Médaille de bronze : coureur 3 avec 10.39 secondes

   Médaille d'argent : coureur 1 avec 10.3 secondes

   Médaille d'or : coureur 2 avec 10.289 secondes

Connaissances visées :

Cette question a pour objectif d'évaluer la comparaison de nombres décimaux et l'ordre qui leur est attribué (décroissant). Pour comparer les nombres décimaux, le participant doit d'abord comparer leur partie entière. Si les parties entières sont les mêmes, il doit alors comparer les parties décimales de même rang 10.390 > 10.300, car 0.39 > 0.30 (de même 10.390 > 10.289, car 0.390 > 0.289; 0.300 > 0.289).

Ce problème permet aussi l'évaluation des connaissances concernant l'ajout de zéros à la droite du nombre pour obtenir le même nombre de chiffres dans la partie décimale. Par exemple, les nombres 10.3 et 10.31 ont le même chiffre à la position des dixièmes. Cependant, pour faciliter la comparaison position par position, le participant doit ajouter un zéro à la droite de 10.3 pour obtenir 10.30 (comparaison de la partie décimale : 0.31 > 0.30).

Choix des nombres :

Les nombres choisis ont volontairement la même partie entière pour exiger seulement la comparaison de parties décimales.

Le nombre de chiffres de la partie décimale diffère aussi pour chaque nombre (1, 2 ou 3 chiffres). Cela demande donc au participant de transformer l'écriture (en ajoutant des zéros à la droite du nombre) afin d'avoir le même nombre de chiffres dans la partie décimale. Pour les deux nombres (10.39 et 10.3), il faut ajouter des zéros à droite de la partie décimale afin d'atteindre la position des millièmes, position présente dans le nombre 10.289.

Lorsque l'on veut comparer plusieurs nombres ensemble, nous parlons d'ordre croissant (du plus petit au plus grand) ou décroissant (du plus grand au plus petit). Dans ce problème, le participant doit interpréter les résultats selon la nature du problème et classer les nombres en ordre décroissant pour déterminer le gagnant de la course (le coureur ayant obtenu le temps le plus long arrivera le dernier et celui ayant obtenu le temps le plus court remportera la course).

5.6.1.5 Question 5

Un pot de 350 g de confiture de fraises de la marque Les bons fruits contient 200 g de fruits et 150 g de sucre. Un pot de 450 g de confiture de fraises de la marque Mamie fruits contient 250 g de fruits et 200 g de sucre. Quelle est la confiture la plus sucrée?

Possibilité de faire un tableau résumé des éléments présents dans le texte :

	Les bons fruits	**Mamie fruits**
Quantité de sucres	150 g	200 g
Quantité de fruits	200 g	250 g

Démarche :

1. Simplifier les rapports

Rapports de sucre :

Les bons fruits : $\frac{150}{200} = \frac{150 \div 50}{200 \div 50} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

Mamie fruits : $\frac{200}{250} = \frac{200 \div 50}{250 \div 50} = \mathbf{\frac{4}{5}}$

2) Comparer les rapports simplifiés

$\frac{3}{4} = \frac{3x5}{4x5} = \frac{15}{20}\ et\ \frac{4}{5} = \frac{4x4}{5x4} = \frac{16}{20}\ alors\ \frac{15}{20} < \frac{16}{20}\ car\ 15 < 16$

Comme $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$, la confiture Mamie fruits est plus sucrée.

Autre démarche possible :

Mettre les rapports sur le même dénominateur :

Rapports de sucre : $\frac{150}{200} = \frac{750}{1000}\ et\ \frac{200}{250} = \frac{800}{1000}$

Comme $\frac{800}{1000} > \frac{750}{1000}$, la confiture Mamie fruits est plus sucrée.

Autre démarche possible :

Comparer les quotients des rapports :

Rapport de sucre Les bons fruits : $\frac{150}{200}$ = 150 ÷ 200 = 0.75

Rapport de sucre Mamie fruits : $\frac{200}{250}$ = 200 ÷ 250 = 0.80

0.80 > 0.75, alors la confiture Mamie fruits est plus sucrée.

Autre démarche possible :

Comparaison des pourcentages de concentration de sucre :

Rapport de sucre Les bons fruits : $\frac{150}{200} = \frac{150 \div 2}{200 \div 2} = \frac{75}{100} = 75\%$

Rapport de sucre Mamie fruits : $\frac{200}{250} = \frac{200 \div 2.5}{250 \div 2.5} = \frac{80}{100} = 80\%$

75 % < 80 %, alors la confiture Mamie fruits est plus sucrée.

Connaissances visées :

Cette question a pour objectif d'établir et de comparer les rapports entre les quantités de sucre et de fruits. Cet objectif permet d'évaluer les rapports obtenus et le moyen utilisé par le participant pour les comparer. Selon la stratégie employée, différentes interprétations de la fraction peuvent être sollicitées (interprétations « mesure », « rapport » ou « quotient »). Ainsi, pour résoudre ce problème, le participant peut opter pour l'une des stratégies suivantes :

- Utilisation de la fraction qui représente la relation entre la quantité de sucre et la quantité de fruits (150g/200g) (sens « rapport » de la fraction);
- Utilisation de la fraction dont le numérateur représente la quantité de sucre et le dénominateur la quantité totale de confiture (150g/350g) (sens « mesure » de la fraction);
- Amplification (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre, différent de zéro) ou simplification des fractions (diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre, différent de zéro) dans le but de trouver des fractions équivalentes (ensemble de fractions représentant le même nombre, mais dont l'écriture est différente);
- Comparaison des fractions (si le dénominateur est le même, comparer les numérateurs);
- Calcul du quotient de concentration de sucre (division du numérateur de la fraction par son dénominateur), puis comparaison des résultats (sens « quotient » de la fraction);
- Conversion des rapports en pourcentages (%) (pour ce faire, il faut amplifier ou simplifier une fraction vers une autre fraction dont le dénominateur est égal à 100).

Choix des nombres :

Les nombres ont été sélectionnés pour que leurs rapports de concentration de sucre soient très similaires et que le participant puisse plus aisément travailler avec les fractions (nombres ayant des diviseurs communs : 2-5-10…).

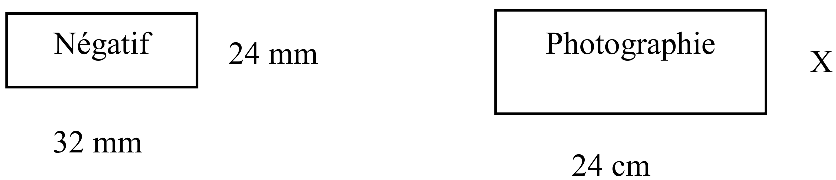
5.6.1.6 Question 6

Une photographie rectangulaire a une longueur de 24 cm. Elle a été obtenue par l'agrandissement d'un négatif de 32 mm de longueur et de 24mm de largeur. Trouver la largeur de la photographie en centimètres,

Démarche et réponse attendues :

1. Représenter le problème

   Dessin de deux rectangles (grand et petit), indication des mesures, identification de la donnée manquante.



2. Convertir les unités de mesure

   Passage des millimètres aux centimètres (÷10)

   32 mm correspond à 3.2 cm

   24 mm correspond à 2.4 cm

3. Trouver le coefficient d'agrandissement (k)

$$\frac{mesure\ de\ la\ longueur\ de\ la\ photographie}{mesure\ de\ la\ longueur\ du\ négatif} = \frac{24\ cm}{3.2\ cm} = 24 \div 3.2 = 7.5$$

La réponse exprimée en notation fractionnaire : $7.5 = 7\ \frac{5}{10} = 7\frac{5 \div 5}{10 \div 5} = 7\frac{1}{2}$

La réponse exprimée en fraction impropre : $7.5 = 7\ \frac{5}{10} = 7\frac{5 \div 5}{10 \div 5} = 7\frac{1}{2}$

$= \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2+2+2+2+2+2+2+1}{2} = \frac{15}{2}$

Le coefficient d'agrandissement est de 7.5 et/ou 7 ½ et/ou $\frac{15}{2}$

4. Trouver la largeur de la photographie

   2.4 x 7.5 = 18

   La largeur de la photographie = 18 cm

Autre démarche possible (utilisation des proportions) :

Coefficient d'agrandissement = $\frac{mesure\ de\ la\ largeur\ de\ la\ photographie\ (x)}{mesure\ de\ la\ largeur\ du\ négatif}$

$= \frac{15}{2} = \frac{x}{2.4};$

= 15 × 2.4 = 2x (le produit des extrêmes est égal au produit des moyens);

= 36 = 2x;

$= \frac{36}{2} = \frac{2x}{2};$

$= 18 = x$

Connaissances visées :

L'objectif principal de cette activité est d'évaluer les connaissances sur l'établissement du rapport, sur l'emploi des opérations (division et multiplication) avec les nombres décimaux ou des fractions et sur la conversion d'unités de mesure (passage des millimètres aux centimètres ou le contraire). Pour résoudre ce problème, le participant peut choisir parmi les stratégies suivantes :

- Transformer les unités de mesure (passer des centimètres (cm) aux millimètres (mm) en utilisant l'opération x10 (de centimètres à millimètres) ou l'inverse en utilisant l'opération ÷ 10 (de millimètres à centimètres);
- Division d'un nombre entier par un nombre décimal (opération qui s'effectue comme de la même manière qu'avec deux nombres naturels. Ainsi, le quotient d'un nombre naturel et d'un nombre décimal est égal au quotient de deux naturels obtenu après avoir déplacé la virgule dans les deux nombres en autant de rangs vers la droite);
- Multiplication de deux décimaux (utilisation de la même règle qu'avec les entiers. Pour le calcul en colonne, nous effectuons le produit des deux nombres sans tenir compte de la virgule. Nous plaçons ensuite la virgule de façon à ce que le résultat ait le même nombre de décimales que les termes du produit);
- Démarche possible : transformer le rapport de similitude et la largeur de la photographie (nombres décimaux) en fractions. Pour ce faire, nous observons la position du dernier chiffre de la partie décimale (dixièmes, centièmes, millièmes, etc.) afin de déterminer le dénominateur de la fraction;
- Multiplication de fractions (multiplication des numérateurs entre eux et des dénominateurs entre eux);
- Simplification de fractions (division du numérateur et du dénominateur par le plus grand diviseur commun (PGDC));

- Démarche possible : utiliser le produit croisé pour déterminer la mesure manquante dans les rapports (l'interprétation « proportion » qui se définit comme des couples de rapports équivalents).

Choix des nombres :

L'utilisation de deux unités de mesure différentes (millimètres et centimètres) a été introduite pour inciter le participant à effectuer un changement d'unités de mesure, passant ainsi des millimètres aux centimètres en effectuant une division du nombre par 10 ou passant des centimètres aux millimètres en effectuant une multiplication par 10.

Les nombres 24 cm et 3.2 cm ont été sélectionnés afin que le rapport de similitude entre la photographie et le négatif soit un nombre qui peut se représenter sur une écriture décimale finie. Ainsi, le participant peut par la suite utiliser l'écriture de son choix (écriture décimale, nombre fractionnaire ou fraction impropre) pour représenter le quotient obtenu.

Le nombre 2.4 cm (largueur du négatif) et le nombre 7.5 (7 ½) ont été introduits car leur produit peut être représenté sous la forme d'un nombre entier (18), ce qui nous donne les dimensions réelles d'une photographie.

5.6.1.7 Question 7

Lors d'une fête, 3 enfants se partagent un gâteau circulaire. Laurent, le fêté, mange le 1/4 du gâteau et Cloé, le 1/2. Max, qui est servi le troisième, prend le 2/3 du reste. Quelle partie du gâteau reste-t-il?

Démarche et réponse attendues :

1. Représenter le problème
   a. Dessiner le cercle partagé en 4. Identifier la partie de Laurent (1/4) et la partie de Cloé (1/2 ou 2/4);
   b. Identifier la part mangée par Laurent et Cloé :

      $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1x2}{2x2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$;

   c. Trouver la partie restante : Le tout moins les parties mangées par Laurent et Cloé

      Le tout est représenté par la fraction $\frac{4}{4}$ (ou par l'entier 1)

      $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{1}-\frac{3}{4}=\frac{1x4}{1x4}-\frac{3}{4}=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{4-3}{4}=\frac{1}{4}$;

   d. Trouver la part mangée par Max :

      $\frac{2}{3}$ du reste. Donc $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$

      $\frac{2}{3}\text{x}\frac{1}{4}=\frac{2x1}{3x4}=\frac{2}{12}$;

   e. Trouver le nombre de parties mangées par Max, Cloé et Laurent

      $\frac{2}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{1x6}{2x6}+\frac{1x3}{4x3}=\frac{2}{12}+\frac{6}{12}+\frac{3}{12}=\frac{2+6+3}{12}=\frac{11}{12}$;

   f. Trouver la partie restante du gâteau
      Le tout est représenté par la fraction $\frac{12}{12}$ (ou par l'entier 1)

      $\frac{12}{12}-\frac{11}{12}=\frac{12-11}{12}=\frac{1}{12}$.

Ou au lieu des étapes d, e et f , on peut anticiper la démarche suivante :

   d. Trouver la part mangée par Max : Partager $\frac{1}{4}$ en trois parties congrues. Hachurer deux parties mangées par Max;
   e. Trouver la partie restante du gâteau : Partager chaque quart en trois parties congrues afin de trouver la valeur d'une partie ($\frac{1}{12}$).

Connaissances visées :

L'objectif de ce numéro est de travailler la représentation du partage en parts égales du disque, l'addition et la multiplication des fractions (sens «opérateur» de la fraction). La représentation du problème à l'aide du dessin permet de mieux comprendre le problème et donner du sens aux calculs.

Ce problème fait intervenir :

- Interprétation « partie-tout » de la fraction. Dans une fraction a/b, nous reconnaissons qu'un tout a été partagé en « b » parties égales et que nous avons réuni « a » parties;
- L'addition (soustraction) de fractions (si les fractions ont le même dénominateur, on additionne (soustrait) les numérateurs, sinon, il faut les mettre au même dénominateur (normalement le plus petit)). Ensuite, nous transformons (s'il y a lieu) le numérateur par rapport au nouveau dénominateur, puis nous additionnons (soustrayons) les numérateurs. Au besoin, nous simplifions la fraction trouvée (1/4 + 1/2 = 3/4) (4/4 - ¾ = 1/4);
- Démarche possible : soustraction entre un nombre entier et une fraction (1 - ¾) (transformer l'entier en représentation fractionnaire (1/1), soustraire les deux fractions : si les fractions ont le même dénominateur, nous soustrayons les numérateurs, sinon, il faut les mettre au même dénominateur (normalement le plus petit));
- L'amplification (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul) ou la simplification (diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul) de fractions dans le but de trouver des fractions équivalentes ($\frac{1}{2} = \frac{1x2}{2x2} = \frac{2}{4}$) ayant le même dénominateur;
- Multiplication de fractions (multiplication des numérateurs entre eux et des dénominateurs entre eux);
- Le changement du tout de référence qui fait intervenir une multiplication de fractions;
- Représentation graphique d'un tout partagé et des parties prises;
- Une suite d'opérations multiplicatives (p/q : × p et ÷ q) (construire une collection diverse en transformant un tout original);

Choix des nombres :

Les dénominateurs 2 et 4 ont été choisis, car le nombre 4 est un multiple du nombre 2. De plus, des procédures de partage d'un tout continu en un nombre pair de parties (2, 4, 8) sont plus rapidement maitrisées. Ainsi le participant peut plus facilement représenter la combinaison des parts mangées par les deux invités en amplifiant ou simplifiant les fractions.

Les dénominateurs 2, 4 et 3 ont été sélectionnés, car ils sont tous premiers et sont des multiples de 12. Le participant doit donc trouver un dénominateur commun (fractions équivalentes dont le dénominateur est 12) pour trouver le nombre de parts mangées.

De plus, les nombres 3 et 12 ont été sélectionnés, pour vérifier s'il est plus difficile de partager le tout en 12 qu'en 2 ou en 4 (voir la description des difficultés dans la section 3.2.3.7).

5.6.1.8 Question 8

Effectue les calculs suivants. Ta réponse doit être dans sa forme simplifiée :

1) $\frac{3}{7} - \frac{4}{9} =$	**2)** $\frac{2}{3} x \ \frac{1}{6} =$
3) $\frac{3}{4} + \frac{5}{5} =$	**4)** $2\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$
5) $1\frac{4}{5} + 3\frac{1}{7} =$	**6)** $5\frac{2}{9} \ x \ 6\frac{1}{4} =$
7) $\frac{12}{100} - \ \frac{3}{9} =$	**8)** $\frac{1}{8} \div \frac{2}{3} =$

Réponses attendues

1) $\frac{3}{7} - \frac{4}{9} = \frac{3x9}{7x9} - \frac{4x7}{9x7} = \frac{27-28}{63} = -\mathbf{\frac{1}{63}}$	**2)** $\frac{2}{3} x \ \frac{1}{6} = \frac{2x1}{3x6} = \mathbf{\frac{2}{18}} = \frac{2 \div 2}{18 \div 2} = \mathbf{\frac{1}{9}}$
3) $\frac{3}{4} + \frac{5}{5} = \frac{3x5}{4x5} + \frac{5x4}{4x5} = \frac{15+20}{20} = \mathbf{\frac{35}{20}} = \frac{35 \div 5}{20 \div 5} = \mathbf{\frac{7}{4}} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \mathbf{1\frac{3}{4}}$	**4)** $2\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \div \frac{1}{4} = \frac{11}{4} x \frac{4}{1} = \frac{11x4}{4x1} = \mathbf{\frac{44}{4}} = \frac{44 \div 4}{4 \div 4} = \frac{11}{1} = \mathbf{11}$
5) $1\frac{4}{5} + 3\frac{1}{7} = \left(\frac{5}{5} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{1}{7}\right) = \frac{9}{5} + \frac{22}{7} = \frac{9x7}{5x7} + \frac{22x5}{7x5} = \frac{63}{35} + \frac{110}{35} = \mathbf{\frac{173}{35}} = 173 \ \div 35 = \mathbf{4\frac{33}{35}}$	**6)** $5\frac{2}{9} \ x \ 6\frac{1}{4} = \left(\frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{9}{9} + \frac{2}{9}\right) x \ \left(\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{47}{9} x \frac{25}{4} = \mathbf{\frac{1175}{36}} = \mathbf{32\frac{23}{36}}$
7) $\frac{12}{100} - \frac{3}{9} = \frac{12x9}{100x9} - \frac{3x100}{9x100} = \frac{108}{900} - \frac{300}{900} = -\mathbf{\frac{192}{900}} = \frac{-192 \div 12}{900 \div 12} = -\mathbf{\frac{16}{75}}$	**8)** $\frac{1}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{8} x \frac{3}{2} = \frac{1x3}{8x2} = \mathbf{\frac{3}{16}}$

Connaissances visées :

Ce problème a pour objectif d'évaluer l'exécution des quatre opérations sur les fractions propres et impropres (addition, soustraction, multiplication et division) étant donné les erreurs fréquentes liées à ces opérations (addition et soustraction des numérateurs et dénominateurs entre eux sans se soucier du lien qui les unit, etc.) et les difficultés qui leur sont associées (interprétation du produit lorsqu'il est inférieur aux multiplicateurs, etc.) (voir la section 3.2.3.6). Pour répondre à ces questions, le participant doit posséder les connaissances suivantes :

- Addition et soustraction de fractions (si les fractions ont le même dénominateur, nous additionnons ou soustrayons les numérateurs ensemble. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, il faut les mettre au même dénominateur (normalement le plus petit). Ensuite, nous transformons le numérateur par rapport au nouveau dénominateur, puis nous additionnons ou soustrayons les numérateurs);
- Multiplication de fractions (pour ce faire, nous multiplions les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux);
- Division de fractions (nous transformons le signe de la division en le remplaçant par celui de la multiplication. Nous effectuons la multiplication de la première fraction par l'inverse de la seconde);
- Inverse multiplicatif (deux nombres qui, lorsque multipliés, donnent 1 comme produit sont considérés comme des inverses). Il s'agit d'une connaissance importante pour la division de fractions;
- Simplification de fractions (diviser le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun (PGDC));
- Amplification de fractions (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul);
- Passage d'un nombre fractionnaire à une fraction impropre (exprimer l'entier du nombre fractionnaire sous la forme d'une fraction entière (dont le dénominateur est 1) et additionner cette fraction et la fraction du nombre fractionnaire (en utilisant la technique citée précédemment)).

Choix des nombres :

Les fractions choisies ont été introduites pour que le participant puisse opérationnaliser tous les types de fractions :

1. Nombres fractionnaires $(2\frac{3}{4})$
2. Fractions propres $(\frac{3}{4})$
3. Fractions irréductibles $(\frac{4}{9})$
4. Fractions réductibles $(\frac{12}{100})$
5. Fractions unitaires $(\frac{1}{8})$
6. Fractions entières (dont le dénominateur vaut 1)

De plus, les fractions incluses dans les numéros demandant l'addition ou la soustraction de fractions n'ont pas le même dénominateur et leurs dénominateurs ne sont pas des multiples.

Nous avons mis en jeu cette variable pour amener les participants à trouver un dénominateur commun afin d'effectuer les calculs et ainsi nous permettre de vérifier la stratégie employée pour le trouver (trouver une valeur intermédiaire, utilisation du produit croisé, etc.).

Les résultats obtenus après les opérationnalisations prennent aussi différentes formes :

1. Les résultats obtenus sont négatifs (pour vérifier la compréhension de la possibilité de valeur négative des nombres fractionnaires);
2. Les résultats sont représentés par un entier ($2\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} = 11$) (pour vérifier si le participant comprend la notion de fraction entière et ses représentations);
3. Les résultats sont parfois réductibles (il faut les simplifier) et parfois irréductibles (le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux). Cette variable est mise en jeux pour vérifier si le participant reconnaît les fractions qui peuvent être simplifiées et celles qui ont un numérateur et un dénominateur qui sont premiers entre eux;
4. Les diviseurs communs du numérateur et du dénominateur des fractions réductibles sont parfois pairs (2, 4, 6…) et parfois impairs (3, 5, 7…). Nous avons utilisé cette variable car, selon les erreurs décrites à la section 3.2.3.6, les apprenants ont plus de difficulté à simplifier une fraction qui n'est pas un multiple de 2;
5. Les fractions impropres sont réductibles. Nous avons choisi d'introduire cette autre variable car leur simplification a un moins bon taux de réussite (erreur répertoriée à la section 3.2.3.6);
6. Les résultats peuvent se présenter sous la forme d'un nombre fractionnaire ou d'une fraction impropre ($\boldsymbol{\frac{173}{35} = 4\frac{33}{35}}$). Ainsi, nous pouvons vérifier si le participant perçoit que le numérateur est supérieur au dénominateur et s'il connait la technique pour passer d'une représentation à l'autre.

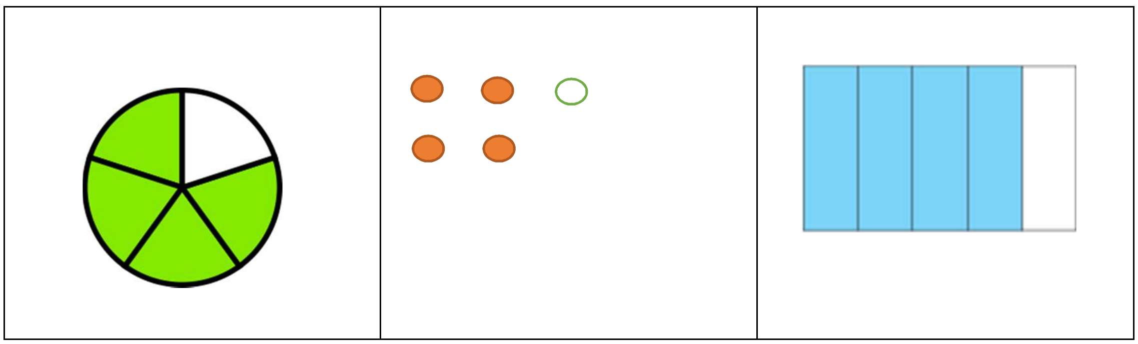
Les opérations de multiplication, pour leur part, mettent en contraste un produit plus petit que les multiplicateurs et un autre plus grand. Nous voulons ainsi vérifier si le participant a conscience que la multiplication de deux nombres rationnels (ici sous une représentation fractionnaire) ne donne pas toujours un nombre plus grand, comme c'est le cas avec les nombres entiers (voir de la section 3.2.3.6).

De plus, l'une des divisions fait intervenir un diviseur plus élevé que le dividende ($\frac{1}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{16}$). Nous avons inséré cette variable pour vérifier la compréhension du concept de division entre les nombres rationnels. Nous voulons ainsi évaluer si le participant ne généralise pas des propriétés des nombres naturels pour les appliquer aux fractions lors de divisions (voir de la section 3.2.3.6).

5.6.1.9 Question 9

Représentez, à l'aide d'un dessin, la fraction 4/5 de trois manières différentes.

Réponses attendues :



**Plusieurs autres réponses sont possibles. Celles-ci ne sont que des exemples parmi tant d'autres.*

Connaissances visées :

Ce problème a pour objectif d'évaluer la représentation d'une fraction au moyen d'une représentation imagée. Il fait intervenir l'interprétation « partie-tout », «rapport» et «quotient» de la fraction. Pour résoudre ce problème, le participant peut utiliser deux types de représentation :

- Représentation d'un tout continu (partage d'un tout représenté par une unité en parties équivalentes);
- Représentation d'un tout discret (partage d'une collection en parties équivalentes).

De plus, à l'aide de ce numéro, nous voulons évaluer les connaissances du participant concernant le principe fondamental de l'interprétation « partie-tout » de la fraction qui implique que les parties d'un tout continu doivent être congrues (voir la section 3.2.3.7).

Ce numéro sert aussi à vérifier et analyser les formes employées par les participants pour représenter les fractions. En effet, selon l'analyse effectuée dans la section 3.2.3.7, les ressources pédagogiques ont tendance à utiliser des formes stéréotypées (rectangle, carré, cercle) pour représenter les fractions. Il sera ainsi possible de vérifier si le matériel utilisé en classe a une quelconque répercussion sur les représentations des touts continus produites par les élèves.

Choix des nombres :

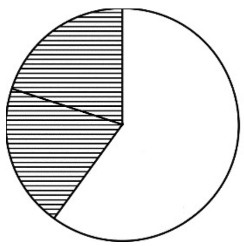
Nous demandons de représenter la fraction de trois manières différentes car nous voulons que les participants se questionnent sur les différentes représentations possibles d'une fraction (représentations par des touts continus (formes stéréotypées ou non) et par des touts discrets). De plus, nous savons que, chez les apprenants, les représentations des touts continus dominent par rapport aux représentations des touts discrets (élément répertorié à la section 3.2.3.7). Nous voulons évaluer si cette erreur est commise par nos participants et par le fait même analyser la représentation dominante chez nos apprenants.

La fraction 4/5 a été sélectionnée car le dénominateur (5) demande un partage de la forme en un nombre impair de parties (ex : il faut tracer 4 traits verticaux (ou horizontaux) dans un rectangle pour former 5 petits rectangles congrus à l'intérieur de la forme initiale). Selon la section 3.2.3.7, ce type de partage est moins rapidement maitrisé que les opérations de partage en un nombre pair de parties.

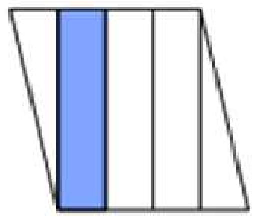
5.6.1.10 Question 10

Pour chaque figure, indique la fraction simplifiée de la surface totale qui est coloriée.

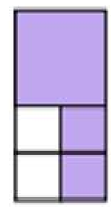
A.



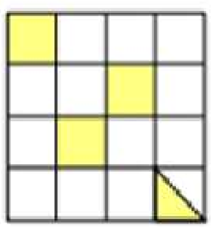
B.



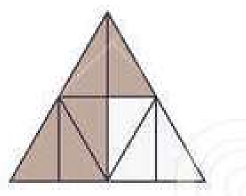
C.



D.



E.



F.

A : ___________

B : ___________

C : ___________

D : ___________

E : ___________

F : ___________

Réponses attendues :

A : $\frac{2}{5}$

B : ¼

C : $\frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$

D : $\frac{7}{32}$ $(\frac{3.5}{16} = \frac{3.5\ x\ 2}{16\ x\ 2} = \frac{7}{32})$

E : $\frac{5}{8}$

F : $\frac{7}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 2\ \frac{1}{3}$

Connaissances visées :

L'objectif de ce numéro est de déterminer la fraction simplifiée qui est illustrée par la représentation dessinée. Pour résoudre ce problème, les connaissances suivantes sont nécessaires :

- Reconnaître le tout et le nombre de parties dans la représentation imagée (sens « partie-tout » de la fraction);
- Connaitre les fractions impropres (fractions dont le numérateur est supérieur au dénominateur (dans le cas de plusieurs touts));
- Comparer les surfaces (aires) en recourant à une unité de mesure équivalente;
- Opérations mentales de comparaison, de découpage et de déplacement des parties formant la figure pour former des parties reconnaissables et congrues;
- Simplifier des fractions (diviser le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun (PGDC));
- Amplifier des fractions (multiplier le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul).

Choix des figures :

La figure A a été sélectionnée, car elle présente une forme circulaire, forme dont le partage est plus difficile que pour les formes rectangulaires (erreur répertoriée à la section 3.2.3.7). De plus, le choix de cette forme oblige le participant à concrétiser le découpage du tout en un nombre impair de parties. Cette opération est répertoriée comme problématique chez les apprenants (voir la section 3.2.3.7).

La forme B est caractérisée par le fait que le participant doit assembler deux parties de la figure pour obtenir une partie congrue et trouver le dénominateur de la fraction.

Nous avons inséré la forme C car le participant doit évoquer le partage d'une partie colorée en unités proposées. De plus, la fraction représentée demande de simplifier la réponse pour obtenir une fraction irréductible.

La forme D est caractérisée par le fait que le participant doit évoquer la division en deux des carrés pour obtenir des parties congrues (triangles rectangles isocèles) permettant de trouver des nombres entiers représentant le numérateur et le dénominateur de la fraction. Le choix de cette forme permet alors d'évaluer le principe qui stipule que les fractions sont représentées par deux nombres entiers «a» et «b», où «b» est différent de 0, séparés par une barre horizontale ou oblique a/b.

La forme E a été sélectionnée car elle présente une forme non conventionnelle (triangle). Trouver la fraction représentée par cette forme peut s'avérer plus ardu que lors de l'utilisation de formes conventionnelles comme le carré, le rectangle ou le cercle.

Pour sa part, la forme F a été sélectionnée dans le but de vérifier la compréhension de la notion de fraction impropre (fraction dont le numérateur est supérieur au dénominateur) et de sa représentation dessinée. De plus, cette figure est séparée en un nombre impair de parties, ce qui peut provoquer une difficulté supplémentaire.

5.6.1.11 Question 11

Marianna invite 8 amis à venir souper à la maison. Elle achète une poitrine de poulet par personne. Cependant, à la dernière minute, 3 nouvelles personnes s'ajoutent au repas et, malheureusement, Marianna n'a pas le temps d'aller acheter d'autres poitrines de poulet.

Aide Marianna à trouver la quantité de poitrine de poulet qu'elle devrait offrir aux convives pour que chacun en aient une portion équivalente.

Ta réponse doit être dans sa forme simplifiée.

Démarche et réponse attendues :

1. Trouver le nombre de poitrines de poulet

   8 + 1 = 9

2. Trouver le nombre de personnes

   9 + 3 = 12

3. Trouver la portion de poulet obtenue par chacun

   9 poitrines de poulet partagées entre 12 personnes, donc $\frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$

   Chaque invité reçoit le $\frac{3}{4}$ d'une poitrine de poulet.

Autre démarche possible :

Représentation du problème

Dessin figuré de 9 poitrines de poulet partagées en 12

Encercler la partie mangée par une personne dans chaque représentation dessinée des poitrines (1/12)

Trouver le nombre de pointes mangées au total par une personne et simplifier le résultat (9 x $\frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$)

Connaissances visées :

L'objectif principal de cette question est de travailler l'interprétation « quotient » de la fraction. Le participant est donc amené à trouver le nombre de parties (12) par lequel le nombre de poitrines (9) doit être partagé. Pour exprimer sa réponse, le participant peut choisir entre 2 options :

- Exprimer sa réponse sous forme d'une fraction simplifiée. Il doit alors diviser le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun (PGDC);

- Exprimer sa réponse sous la forme d'un quotient en divisant le numérateur de la fraction par son dénominateur (9÷12=0.75).

Nous anticipons une erreur due au nombre total de personne (8 au lieu de 9) au cas où l'élève oublie de compter Marianna.

Choix des nombres

Le nombre de poitrines (9) et le nombre d'invités (12) ont été sélectionnés pour obtenir le quotient exprimé par une fraction qui, une fois réduite, représente une fraction simple et reconnaissable par l'élève (0.75).

5.7 ORGANISATION DES APPRENTISSAGES

Les enseignants ont une lourde tâche en ce qui concerne l'organisation des apprentissages des nombres rationnels. En effet, « les définitions choisies pour les enseigner peuvent être nombreuses et les occasions de construction de ces nombres sont variées » (Blouin, 2002, p.12). C'est pourquoi il est important que la progression d'apprentissages des nombres rationnels soit établie selon des principes rigoureux qui vont faciliter l'accès à tous les sens de ce concept, en privilégiant la construction des connaissances conceptuelles et procédurales et en limitant tous les obstacles. Basée sur les travaux de Stegen, Sacré (2004b), de Rouche (1998) et de Boublil (2015), la section suivante fait état d'une progression didactique pour introduire des nombres rationnels dans les apprentissages. Cette section a pour but de répondre à l'objectif c) qui consiste à décrire une progression des apprentissages liés aux nombres rationnels (école primaire et premier cycle du secondaire),

5.7.1 Deux principes

Selon Stegen et Sacré (2004b) et Rouche (1998), l'introduction aux nombres rationnels au primaire doit se faire en se basant sur deux principes. Le premier stipule que l'on doit commencer l'apprentissage des nombres rationnels par l'apprentissage des fractions et le deuxième dit que l'on doit favoriser une dialectique outil-objet (Stegen et Sacré, 2004b).

5.7.1.1 Enseigner les décimaux à partir des fractions

Pour l'enseignement des rationnels, il est profitable d'introduire les fractions avant les nombres décimaux. La justification de ce principe provient du fait que les nombres décimaux ont été inventés dans le but de pouvoir s'approcher le plus près possible d'une grandeur continue grâce à un fractionnement par dix (Stegen et Sacré, 2004b). Ainsi, enseigner les décimaux à partir des fractions, c'est respecter le cheminement de l'histoire, car les décimaux sont apparus près de 20 siècles après les fractions.

Rouche (1998) propose de commencer l'apprentissage de l'écriture des nombres rationnels par l'écriture fractionnaire incluant le symbole de la barre (/). C'est par la suite que le travail sur les fractions décimales peut s'enclencher (mesure des longueurs, des surfaces, etc.). Cette progression serait l'une des meilleures façons pour les élèves de conceptualiser le sens et la provenance des nombres décimaux.

5.7.1.2 Favoriser la mise en place d'une dialectique outil-objet

Comme il vient d'être exposé, il serait pertinent de commencer l'apprentissage des nombres décimaux par l'introduction des fractions simples et ensuite de fractions décimales. Cependant, cette technique n'est pas suffisante pour conceptualiser les nombres rationnels. Plusieurs erreurs proviennent du fait que les apprenants ont mémorisé des procédures au détriment du sens. Les connaissances procédurales résistent mal au temps et aux changements de contextes. Les connaissances conceptuelles sont donc primordiales pour une compréhension approfondie.

Stegen et Sacrée (2004b) proposent donc d'introduire les fractions en offrant des activités qui permettent de travailler tout d'abord le concept en tant qu'outil et, ensuite, en tant qu'objet. Les auteurs réfèrent à Douady (2005) pour caractériser le terme outil comme l'usage que les élèves font du concept pour répondre à un problème (les procédures). Ils définissent l'objet comme le concept mathématique à l'étude qui a sa place dans les savoirs mathématiques. Par ces définitions, l'objet prend, au départ, son sens par son caractère d'outil. Par conséquent, une progression didactique qui favorise une compréhension profonde des nombres rationnels devrait, en premier lieu, miser sur des situations-problèmes, des jeux, etc. pour que les apprenants puissent reconnaître les nombres rationnels pour leur statut d'outil, et ce, dans des contextes variés. Cette variété de contextes permettra aussi aux jeunes de comprendre l'utilité du concept et de lui donner un sens. C'est par la suite que le symbolisme des nombres devrait être introduit afin de formaliser les résultats, de travailler les nombres sans contexte et d'effectuer un travail sur l'objet.

5.7.2 Exemple de progression des apprentissages des nombres rationnels

En référant aux différentes recherches menées dans le domaine de l'apprentissage des nombres rationnels (Stegen et Sacré, 2004b; Rouche, 1998; Boublil, 2015), nous élaborons, dans la section suivante, une progression didactique selon sept étapes en nous basant sur les principes précédemment cités.

5.7.2.1 Introduction des fractions

Avant même de décrire chacune de ces étapes liées à l'introduction de fractions, il est important de spécifier que l'introduction aux fractions doit se faire en proposant aux élèves de nombreux contextes. Cette variété de contextes peut s'inspirer de contextes liés à la réalité (magasin, restaurant, fête, classe…) Ils peuvent aussi faire référence à plusieurs types d'objets comme des objets unitaires (une pizza, une barre de chocolat, une baguette), des collections (boîte de biscuits, œufs, sac de bonbons, etc.) et même des objets volumineux (boîte, seau, verre, etc.). Cette variété de contextes doit être introduite à l'aide de questions diversifiées qui proposent des contextes mathématiques différents et qui exigent des activités intellectuelles variées de la part des élèves.

L'utilisation des contextes qui s'inspirent de la réalité peut influencer la motivation de l'élève. En effet, en travaillant les mêmes savoirs, mais dans un contexte différent et plus significatif pour le jeune, celui-ci peut davantage s'engager et déployer les efforts nécessaires à la réussite du problème. De plus, en variant les contextes, les élèves peuvent percevoir l'utilité concrète et les réinvestissements possibles de la notion.

Cette diversité de questions et d'objets utilisés est une variable didactique sur laquelle les enseignants ont un contrôle. Ils peuvent modifier certains aspects (comme le type d'objets ou la formulation de la question) pour pouvoir intervenir sur les différents sens de la fraction.

L'écriture fractionnaire « a/b » signifie aussi plusieurs choses différentes qui permettent de distinguer les sens mathématiques et les sens de la fraction. En effet, l'utilisation « a b-ièmes » de la fraction fait référence à l'interprétation **« partie-tout** » et même à celle de **mesure** (a fois le 1/b). Le « a divisé par b », dans son cas, fait référence à l'interprétation

« **quotient** » de la fraction, tout comme « a sur b » fait référence au sens **« rapport** ». Pour sa part, « a/b de… », renvoie au sens **« opérateur** ». C'est donc pourquoi il faut proposer des contextes différents pour que l'élève puisse manipuler ces différentes écritures fractionnaires et, éventuellement, les distinguer.

Basée sur ce constat, la section suivante présente les quatre premières étapes de la progression didactique liée à l'introduction des fractions. Les quatre étapes sont les suivantes :

1. Partager en parts égales des objets quelconques
2. Partager en parts égales des objets standards
3. Partager en parts égales des représentations dessinées
4. Partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres

Nous nous référons, dans la description qui suit, aux travaux de Rouche (1998), de Stegen et Sacré (2004b) et aux travaux de Boublil (2015) qui a repris les éléments importants de Rouche et les a développés en donnant des exemples et en ajoutant les étapes d'apprentissage des nombres rationnels sous forme d'écriture décimale.

Partager en parts égales des objets quelconques

La **première étape** de la progression consiste à amener les élèves à partager en parts égales des objets quelconques. Cette manipulation doit se faire avec des objets concrets et manipulables par l'élève. Il est important, lors de cette étape, de varier les objets afin que les élèves développent des stratégies différentes de partage en parts égales. La diversité des objets utilisés permet aux jeunes de percevoir que certaines stratégies peuvent parfois fonctionner, mais que parfois elles ne fonctionnent pas selon les caractéristiques de l'objet. Il s'agit de proposer des objets de la vie courante ayant un tout continu (barre de chocolat, liquide, etc.) ou discret (collection de jouets, des pièces de monnaie, etc.). Les différents objets utilisés peuvent être considérés du point de vue de leur longueur, de leur volume, de leur poids ou de leur nombre, permettent ainsi de faire des liens avec d'autres champs mathématiques (Stegen et Sacré, 2004b). Ce choix permet aussi de faire des liens entre différents domaines mathématiques comme l'arithmétique, la mesure et la géométrie. Les stratégies de partage qu'il est possible de développer avec l'élève dépendront donc de la nature des objets choisis.

Par exemple, pour partager une ficelle en deux parts égales, l'élève peut la plier en deux et la couper avec des ciseaux. Cependant, cette technique de pliage n'est pas opérationnelle pour le partage en deux d'une baguette. La recherche d'une stratégie adéquate peut alors amener l'élève à utiliser la ficelle comme un objet intermédiaire permettant le partage de la baguette. L'élève va superposer une ficelle sur la baguette, plier la ficelle en deux et utiliser cet étalon pour partager la baguette en deux parties. L'emploi d'une ficelle pour partager des « longueurs » sera donc considéré comme une stratégie commune pour partager les « longueurs » non pliables.

Pour partager en deux le contenu d'une bouteille (ou d'un sac de riz), il est possible d'utiliser deux verres identiques afin de repartir le contenu de façon équitable. L'équivalence des hauteurs permettra de juger de l'équivalence des capacités.

Le dénombrement sera une bonne stratégie pour partager des bonbons, des biscuits, etc. (touts discrets).

La balance de Roberval peut être utilisée pour partager en parts égales des objets pour lesquels les stratégies mentionnées précédemment ne sont pas appropriées. Si les deux plateaux sont équilibrés et que l'aiguille au centre est à la verticale, les parties obtenues par partage ont la même masse.

Il est possible de remarquer, par ces exemples, que dès le premier cycle du primaire, l'enseignant peut proposer une diversité d'objets à partager : objets unitaires, liquides, collections, etc., et ainsi participer au développement de différentes représentations de la « moitié », du « tiers » et du « quart ».

Cette étape est donc un premier pas vers la compréhension de l'interprétation « partie-tout » de la fraction qui demande le partage d'un tout en un nombre de parties « b » (a/b) et la prise de «a» parties. Dans cette première étape, l'élève conceptualise aussi le fait que les parties du tout doivent être égales. L'interprétation « mesure » de la fraction est aussi développée tranquillement lorsque l'élève prélève une partie d'une longueur ou d'un volume.

Partager en parts égales d'objets "standards"

Le but ultime de cette **deuxième étape** est d'amener l'élève à se détacher des caractéristiques particulières des objets pour se préoccuper davantage des techniques de fractionnement (par 2, par 3, avec ou sans axe de symétrie). Nous voulons qu'il se questionne sur les manipulations standards. C'est un tout premier pas vers l'abstraction.

Les élèves sont donc amenés à partager des objets standards. Par standards, nous sous-entendons des objets prototypiques qui représentent des objets de la réalité. Par exemple, il est possible de donner des réglettes durant les activités de partage de longueurs et des jetons pour des activités de partage de collections. Les différents outils physiques représentant des figures planes (disques, tangrams, etc.) sont utilisés pour partager les surfaces et la boule de pâte à modeler représentera des objets pesants ou solides.

Quant à la démarche, nous proposons diverses activités de division, de partage et de mesure où les différents sens de la fraction sont mis en jeu :

- partager en parts égales d'objets unitaires (les « longueurs » (segments) et les « surfaces » (rectangle, disque)) (sens : **partie-tout**);
- distribuer (ou partager) une « collection d'objets » (jetons) entre 2, 3, 4, etc. personnes de façon équitable (sens : **quotient**);
- comparer à l'aide de jetons des quantités d'éléments ou des grandeurs de même unité (sens : **rapport**) ou d'unités différentes (sens : **proportion**, **taux**);
- comparer la longueur avec une unité étalon (bande, ficelle, plus petites réglettes, bâtonnets), la surface avec des unités non conventionnelles telles que des triangles, des carrés, etc., la masse avec des unités traditionnelles employées avec la balance (« poids »), la capacité des contenants avec des contenants plus petits (100 ml, 250 ml, etc.) (sens : **mesure**).

Le choix des objets que nous voulons partager ou la grandeur de la collection (variables didactiques) peuvent varier selon l'objectif d'enseignement :

- nous proposons le partage en 2, 3, 4 pour bien visualiser le partage (parties représentatives pour l'élève);
- nous proposons d'utiliser le nombre d'objets qui correspond au nombre de parties; la surface (capacité, masse, etc.) se partage bien; les figures possèdent des axes de symétrie qui facilitent les activités de fractionnement;
- nous proposons des partages, des comparaisons et des mesurages pour faire apparaitre la partie fractionnaire. Le résultat obtenu dans ces activités peut

s'exprimer par un nombre entier et par un nombre fractionnaire, dans lequel la partie fractionnaire désigne la partie représentative pour l'élève : la moitié, le tiers, le quart.

Partager en parts égales des représentations dessinées

La **troisième étape** constitue un pas de plus vers l'abstraction. En effet, lors de cette étape, l'élève est amené à opérer sur des représentations dessinées d'objets concrets (naturels et prototypes). Cependant, pour faire un cheminement adéquat vers l'abstrait, les représentations utilisées seront fortement inspirées des manipulations précédemment effectuées. En effet, toutes les manipulations effectuées précédemment et les stratégies développées peuvent être désignées sur les représentations des objets à l'aide de procédés de partage : lignes (ou cercles) qui découpent (regroupent) un objet (une collection) en parties égales.

Les objets seront donc représentés par des segments de droite (pour fractionner des longueurs ou des durées) ou par des figures géométriques qui permettent de fractionner des aires. Des ensembles d'objets peuvent également être représentés par des dessins d'objets identiques comme des personnages, des points, des bâtons, etc.

Le fractionnement par pliage permet de donner du sens aux écritures fractionnaires. Dans un premier temps, les élèves réactivent des expressions verbales connues (demi, quart, tiers). À cette étape, il est possible d'associer l'écriture symbolique (fraction) à une part de l'objet (ou d'une collection). Il s'agit des fractions simples. Le fractionnement par pliage permet la compréhension des équivalences et des relations entre différentes écritures fractionnaires (1/4 = 2/8, ½, c'est deux fois 1/4).

Il s'agit d'une étape d'apprentissage importante qui permet d'appliquer dans des contextes différents les connaissances du partage développées lors des étapes précédentes. Ces différents contextes permettent de construire les différents sens de la fraction :

- représenter par la fraction un nombre de parts d'une unité partagée en parts équivalentes (partie-tout, **fractionnement de l'unité**);
- représenter par la fraction la valeur d'une part d'un ensemble d'unités partagées en parties équivalentes (partie-tout, **partition de la pluralité**);

- comparer des quantités d'éléments ou des grandeurs de même unité (le nombre d'heures de cours de mathématiques au nombre total d'heures allouées aux cours) (**rapport**);
- comparer des quantités d'éléments ou des grandeurs d'unités différentes (manger deux baguettes en quatre jours représente ½ baguette par jour; vitesse, rendement) (**proportion**, **taux**);
- exprimer une **probabilité** (avoir trois chances sur quatre de gagner un prix représente ¾);
- trouver une part exprimée par la fraction d'une collection d'objets (pour trouver 2/3 de 12 pommes, on effectue l'opération suivante : 12 : 3 x 2); (**opérateur**). Une bonne maîtrise de cet aspect des fractions facilite la résolution de problèmes de proportionnalité.

La diversification de l'apprentissage des fractions se réalise en croissant le nombre de parts prélevées et avec le nombre d'objets à partager (deux disques, deux baguettes, etc.). Le partage en deux ou en quatre se distingue du partage en trois ou cinq parts équivalentes ainsi que du partage de trois baguettes en deux ou quatre parts égales.

Partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres

Lors de la **4e étape**, l'élève est amené non plus à partager des objets ou des représentations, mais à partager en « n » parts égales des mesures qui sont cette fois-ci représentées par des nombres. Ainsi l'élève « coupe » un nombre sans aucune ressemblance avec l'objet auquel il renvoie. Cette nouvelle étape conduit l'élève à travailler avec une signification entièrement conventionnelle.

Cette étape est une étape plus qu'importante dans l'apprentissage de l'élève. C'est l'abstraction complète de la notion de fraction. L'utilisation de différents contextes va permettre à l'élève de maitriser les sens multiples de la fraction :

- Partager en parts égales un nombre qui fait référence à un tout continu ou discret (sens : **partie-tout**);
- Comparer des quantités d'éléments ou des grandeurs de même unité en se référant seulement à leurs notations symboliques (sens : **rapport)**;
- Comparer des quantités d'éléments ou de grandeurs d'unités différentes dans un contexte symbolique (sens : **proportion, taux**);
- Calculer des probabilités composées, conditionnelles et une probabilité lorsque deux événements s'excluent mutuellement (sens : **probabilité**);

- Trouver une part exprimée par la fraction d'un nombre (relation multiplicative (*n* fois +; les *n* de…)) (composé commutatif d'un opérateur de multiplication et d'un opérateur de division) (sens : **opérateur**);
- Multiplier, diviser, additionner et soustraire des notations fractionnaires entre elles (agir sur le nombre) (sens : **opérateur**);
- Comparer des grandeurs représentées sous une forme fractionnaire par leur positionnement sur la droite numérique (exemple d'activité : reconstruire une droite graduée) (sens : **mesure**);
- Calculer la division de nombre de diverses grandeurs (*a/b* comme le **quotient** de l'entier *a* par l'entier *b).*

Il est important de concevoir que le passage du concret à l'abstrait ne peut se faire aussi facilement. Ce passage ne se fait pas de manière linéaire, mais à l'aide d'allers-retours entre les différentes étapes citées précédemment. De plus, les contextes de fractionnement doivent être diversifiés et varier le nombre de parts à faire (nombre de parts paires/impaires, supérieures à l'unité, etc.). Ainsi, en augmentant le nombre de parts prélevées, la compréhension et l'application concrète des nombres fractionnaires et des techniques qui les entourent sont facilitées.

5.7.2.2 Introduction aux décimaux

Les étapes précédemment citées concernaient principalement l'introduction des fractions. Comme Rouche (1998) l'a souligné, c'est à la suite du travail sur les fractions que nous pouvons plus facilement introduire les nombres décimaux. Les trois prochaines étapes présentées en lien avec l'introduction des nombres décimaux sont tirées d'un document de Boublil (2015).

La démarche la plus répandue d'introduction des nombres décimaux se fait en trois étapes :

5. Étude des fractions décimales;
6. Introduction de l'écriture « à virgule »;
7. Travail avec l'écriture décimale.

Cette progression est semblable à celle de la démarche historique de l'apparition de l'écriture décimale des nombres.

Fractions décimales

À la **5e étape**, les élèves sont amenés à produire, lire, utiliser des écritures du type 1/10, 4/100, 55/1000, etc. Nous introduisons, dès lors, des activités de mesure de longueurs, d'aires, de masses, de capacités et de volumes qui proposent des contextes exigeant de partager une unité en dix, en cent, etc. Les outils tels que la règle, les blocs multibases et le papier quadrillé et millimétré sont les outils principaux permettant aux élèves de passer des unités non conventionnelles (carré, cube) aux unités conventionnelles de longueur (m, dm, cm, mm), d'aire (m^2, cm^2), de capacité (l, ml) et de volume (cm^3, m^3). Ainsi, lors de ces exercices, les élèves sont amenés à exprimer leurs résultats à l'aide des fractions avec un dénominateur égal à 10, 100 ou 1000 appelées **fractions décimales** (ou à l'aide de nombres fractionnaires dont la partie fractionnée est exprimée par une fraction décimale). Il est ainsi possible d'introduire les dixièmes, les centièmes et les millièmes (dans le cas de la mesure de capacités et de volumes) sans toutefois les représenter sous une écriture décimale.

L'écriture à « virgule »

À la **6e étape**, les élèves sont amenés à travailler sur la conversion des unités de mesure et à établir des équivalences : 1 m = 10 dm = 100 cm, 10/100 = 1/10, etc. Ils apprennent à représenter la mesure par la composition additive des fractions décimales (la mesure égale à 5 m + 2dm + 5 cm se transforme en 5 + 2/10 + 5/100 = 5 + 25/100 = 525/100). C'est à cette étape que l'écriture à virgule est introduite comme un simple changement de notation en disant que les écritures décomposées peuvent s'écrire avec une virgule. Pour expliquer la composition du nombre à virgule, nous utilisons le tableau de numération en distinguant ses parties entière et décimale, ainsi qu'en précisant la valeur de position des chiffres de la partie décimale : dixièmes, centièmes, etc. Les élèves font ainsi un lien avec la fraction décimale.

Le travail sur les nombres décimaux devrait aussi être basé sur l'utilisation de la droite numérique pour assurer la jonction et l'équivalence entre les deux types de notation (notation fractionnaire et notation décimale) (Stegen et Sacrée, 2004b). Lorsque ces derniers seraient incorporés dans les apprentissages, des activités de positionnement des nombres décimaux sur la droite numérique et des activités de comparaison pourraient être données aux apprenants pour qu'ils appliquent concrètement leurs connaissances et qu'ils prennent en compte les nombres décimaux comme étant un objet d'étude.

Écriture décimale

À la **dernière étape**, les élèves apprennent à opérer avec l'écriture décimale. Il s'agit de différentes opérations sur des nombres : comparer, arrondir, additionner, soustraire, multiplier et diviser. Différents contextes favorables à l'emploi des nombres décimaux ($) et au passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire et inversement (%) sont proposés aux élèves.

En résumé, les sept étapes de la progression didactique inspirée des écrits de Stegen et Sacré (2004b), Rouche (1998) et Boublil (2015) sont les suivantes :

A) Introduction des fractions :
   1. Partager en parts égales des objets quelconques;
   2. Partager en parts égales des objets standards;
   3. Partager en parts égales des représentations dessinées;
   4. Partager en parts égales des mesures d'objets en opérant sur des nombres;

B) Introductions aux décimaux :
   5. Fractions décimales;
   6. Écriture à « virgule »;
   7. Écriture décimale.

Plus précisément, dans le cas des nombres rationnels, ce qui ressort de cette progression est que l'apprentissage des nombres fractionnaires devrait précéder celui des nombres décimaux. Il est aussi important que les élèves appliquent concrètement et correctement les multiples interprétations de la fraction avant de passer aux nombres décimaux, car comme Stegen et Sacré (2004b) le soulignent, si les élèves ne conceptualisent pas correctement les fractions, ils pourraient avoir de la difficulté à conceptualiser les nombres décimaux. Il ne faut donc pas aller trop vite dans la formulation et dans la présentation de l'aspect formel de la notion de fraction, et ce, au détriment de son sens. Il faut que le cheminement puisse se faire progressivement entre l'outil mathématique et l'objet mathématique des nombres rationnels (Stegen, Géron et Daro, 2007). Les types d'activités et les problèmes choisis sont cependant à la discrétion des enseignants et peuvent ainsi varier d'une classe à l'autre. L'important est qu'ils soient choisis en fonction d'un objectif pédagogique précis.

5.7.3 Tâches complexes

La progression des apprentissages qui vient d'être décrite peut permettre de mieux conceptualiser les nombres rationnels. Cependant, les problèmes présentés aux élèves ne doivent pas être décontextualisés ni présentés de manière isolée, car le sens de la notion peut être difficile à saisir. C'est pourquoi la progression didactique utilisée doit inclure des tâches complexes.

L'utilisation de tâches complexes lors de l'enseignement peut venir contrer les erreurs possibles liées à l'enseignement décontextualisé, isolé et linéaire des nombres rationnels qui est présent dans les ressources pédagogiques (Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009). Selon ces chercheurs, un contexte trop symbolique et décontextualisé pourrait engendrer des problèmes de compréhension et des erreurs dans les réinvestissements de la notion. C'est donc à l'aide de tâches complexes que l'élève peut être amené à faire des liens entre les notions enseignées, à réinvestir ses acquis, à mobiliser ses savoirs, à réfléchir sur ses choix tout en prenant une distance par rapport à la tâche (Saboya et Rhéaume, 2013). En effet, c'est lors de la résolution de tâches complexes que les jeunes sont amenés à combiner et à choisir parmi plusieurs procédures celles qui sont les mieux adaptées pour répondre aux exigences du problème. En faisant ces choix, l'élève peut donner un sens aux opérations qu'il emploie.

L'utilisation de tâches complexes est donc un moyen à privilégier, et ce, pour plusieurs raisons. En effet, en plus de globaliser les apprentissages et de les mettre en relation, elles favorisent le recours à différents engagements de la part des élèves et permettent de développer le contrôle, la rationalité et la compétence de chacun (Saboya et Rhéaume, 2013).

6. CONCLUSION

Dans le prochain chapitre, nous allons reprendre nos objectifs de recherche pour souligner les étapes de notre démarche. Nous allons, par la suite, préciser les apports et les limites de la recherche, pour finalement terminer avec une ouverture sur des perspectives qui pourraient être explorées à partir de ce travail.

6.1 OBJECTIFS ET RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

La période de transition du primaire au secondaire confronte les élèves à plusieurs changements d'ordres biologique, social et organisationnel. Ces changements influencent leurs intérêts envers les matières scolaires, leur rendement, leurs attitudes envers l'école et les enseignants et leur sentiment de compétence (Chouinard, 2009; Bouffard Denoncourt, Dublois et Mc Intyre. 2004). En d'autres mots, cette période influence les facteurs de la motivation scolaire.

La motivation joue un rôle important dans la réussite scolaire des jeunes. C'est notamment les perceptions de compétence, de valeur et de contrôle, déterminants de la motivation, qui influencent l'engagement cognitif et la persévérance des élèves (Wigfield et Eccles, 1992; Bandura, 1993; Viau, 1994; Skinner, 1995). Lors de la transition entre le primaire et le secondaire, nous avons retenu que la perception de compétence et la motivation des élèves dans le domaine des mathématiques ne cessent de diminuer (Wigfield, Eccles, 1994; Barber, Olsen, 2004). Cette baisse motivationnelle dans ce domaine s'explique par le fait que les apprentissages, auparavant basés sur la manipulation et sur l'exécution d'exercices numériques, deviennent beaucoup plus abstraits lors du passage au secondaire. Cette abstraction amène des difficultés supplémentaires dans les différents domaines mathématiques comme la géométrie, les probabilités et les statistiques, l'arithmétique et l'algèbre (FUNDP, 2002). Selon plusieurs recherches, le concept des nombres rationnels, à l'étude lors de la transition entre le primaire et le secondaire, est un concept qui cause plusieurs difficultés chez les jeunes (Blouin, 2002; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel, 2009; Lessard, 2010).

À la vue de ces constats, nous nous sommes intéressés à l'élaboration d'un dispositif de formation des enseignants qui permet d'évaluer la motivation des élèves en apprentissage des nombres rationnels et d'intervenir sur les difficultés des élèves. Notre travail sera une contribution à ce domaine de recherche, car il n'existe aucune étude qui met en relation la période de transition entre le primaire et le secondaire, la motivation et les difficultés des élèves en mathématiques dans le domaine des nombres rationnels.

Pour nous permettre de développement un outil d'évaluation de la motivation scolaire des élèves, nous nous sommes servis du cadre théorique de Viau (1994) portant sur la dynamique motivationnelle. Ce modèle nous a permis d'élaborer un questionnaire maison évaluant les trois déterminants de la motivation, soit les perceptions de compétence, de valeur et de contrôle.

Pour permettre aux professionnels de l'éducation l'appropriation de la notion de nombres rationnels ou la révision de certaines notions en lien avec ce concept, nous avons élaboré un aide-mémoire sur la notion de nombres rationnels. L'élaboration de cet outil fut rendu possible grâce à la consultation d'un document inédit offert dans le cadre du cours DID-2014, didactique des nombres rationnels et de la mesure (Boublil, 2015) et de différentes autres ressources scientifiques.

L'analyse de plusieurs recherches menées dans le domaine des nombres rationnels (Rosar, Van Nieuwenhoven et Jonnaert, 2001; Blouin et Lemoyne, 2002; Boule, 2004; Mercier et Deblois, 2004; Stegen, Sacré, 2004a, 2004 b; Deshaies, 2006; Stegen, Géron et Daro, 2007; Carrette, Content, Rey, Coché et Gabriel,2009; Lessard, 2010; Adihou, Arsenault, 2011; Saboya et Rhéaume, 2013) nous a permis de décrire les difficultés, les obstacles et leurs causes ainsi que les interventions reliées à l'apprentissage des nombres rationnels. Pour faciliter l'appropriation et la consultation de ces données, nous avons créé un document synthèse qui comprend une liste des interventions réalisables en lien avec les nombres rationnels ainsi qu'un tableau synthèse. Dans ce tableau, nous présentons les différentes difficultés accompagnées d’un exemple, le type d’erreur, son origine et, finalement, le numéro d’intervention qui lui est associé.

Pour permettre une évaluation des connaissances et des compétences relatives aux nombres rationnels, nous avons construit, avec pour référence la description des différentes difficultés, un test diagnostic. Ce test est composé de onze questions portant sur les nombres rationnels et est destiné aux élèves du premier cycle du secondaire

Finalement, pour outiller davantage les enseignants par rapport au concept des nombres rationnels, nous avons mis sur pied une progression d’apprentissage prenant appui sur des recherches en didactiques des mathématiques (Rouche, 1998; Stegen, Sacré, 2004b; Boublil, 2015). Cette progression est établie selon des principes rigoureux qui vont faciliter l’accès à tous les sens du concept de nombres rationnels en privilégiant des connaissances conceptuelles et procédurales.

6.2 Limites, apports et perspectives

Dans la prochaine section, nous allons exposer les limites de notre recherche, ses apports et ses perspectives futures dans le domaine de la didactique des mathématiques.

6.2.1 Limites de la recherche

Dû à l’ampleur de ce travail, nous n’avons pas validé notre questionnaire maison pour l’évaluation des déterminants de la motivation auprès d’un échantillon d’individus. Ainsi, divers facteurs peuvent venir influencer les résultats obtenus à la suite de la passation de ce questionnaire. Premièrement, la formulation (syntaxe, termes employés, etc.) des phrases peut amener les utilisateurs à ne pas savoir comment répondre ou les inciter à donner une réponse. De plus, l’échelle de type Likert utilisée pour recueillir les données peut également contraindre les utilisateurs à sélectionner un degré d’approbation ne correspondant pas exactement à leur réponse. Parmi les degrés présentés (1 = fortement en désaccord; 2 = moyennement en désaccord; 3 = moyennement en accord; 4 = tout à fait d’accord), l'utilisateur pourrait ne pas savoir lequel choisir si son choix se situe, par exemple, entre fortement en désaccord et moyennement en désaccord.

Tout comme le questionnaire, le test diagnostique n'a pas été validé auprès d'un échantillon. Pour minimiser les risques de déformation des résultats et obtenir des représentations précises des connaissances et des compétences des utilisateurs, nous aurions dû distribuer le test à quelques élèves afin de vérifier si les questions étaient claires et dépourvues d'ambiguïtés. Cette limite s'explique, encore une fois, par l'ampleur de ce travail et le temps restreint pour le réaliser dans le cadre d'une maîtrise. Cependant, les questions ont été élaborées conjointement avec notre directrice de recherche, nous permettant ainsi de profiter de son expertise en mathématiques et en rédaction.

En décrivant la progression dans le développement du concept de nombres rationnels, il aurait été intéressant d'associer les étapes décrites aux cycles d'apprentissage visés par le programme de formation de l'école québécoise, ainsi qu'à la description des savoirs essentiels. Il aurait été aussi intéressant de se pencher sur l'analyse des programmes et sur l'établissement des liens entre les savoirs essentiels décrits par les deux programmes d'étude (primaire et 1 cycle du secondaire) pour vérifier la cohérence des savoirs et de leur progression.

6.2.2 Apports et perspectives de la recherche

Même si notre recherche contient certaines limites, nous pouvons en dégager certains apports et perspectives futures qui permettraient de poursuivre notre travail.

6.2.2.1 Apports

En nous intéressant à l'évaluation des déterminants de la motivation scolaire et à la description des difficultés, nous avons voulu contribuer à la qualité de l'enseignement des nombres rationnels et des apprentissages des élèves. Ce travail offre donc aux corps enseignants et à tout professionnel travaillant dans le domaine de l'apprentissage des nombres rationnels un dispositif de formation leur permettant d'approfondir ce domaine mathématique, de mieux intervenir sur les difficultés qu'il entraîne, d'évaluer les connaissances et les compétences qui lui sont liées, tout en pouvant jauger du degré motivationnel relié à la tâche. Ce travail fournit aussi un meilleur soutien aux enseignants quant à la progression des apprentissages des nombres rationnels. Finalement, ce travail offre à la communauté scientifique une recension détaillée d'écrits portant sur les difficultés liées à l'apprentissage des nombres rationnels tirée de plusieurs recherches effectuées dans ce domaine.

6.2.2.2 Perspectives futures

Les travaux effectués dans le cadre de cette recherche pourraient être poursuivis en mettant à l'épreuve les outils et documents élaborés et en analysant les résultats de cette expérimentation.

Nous pouvons aussi reprendre les limites décrites précédemment et les considérer en tant que perspectives de cette recherche. L'analyse de deux programmes et des activités proposées par les manuels portant sur l'emploi des nombres rationnels permettra d'établir les correspondances entre deux niveaux d'enseignement (primaire vs. secondaire) et de trouver des éléments indiquant leur absence.

L'analyse des connaissances des enseignants du primaire et du secondaire concernant le concept de nombres rationnels est aussi une perspective envisageable. Cette analyse permettrait de faire ressortir les connaissances des enseignants et de vérifier s'il y a des liens avec les difficultés répertoriées dans l'apprentissage des nombres rationnels vécues par les élèves.

Finalement, il serait intéressant de poursuivre les travaux en vue d'élaborer des dispositifs de formation dans les autres domaines mathématiques enseignés lors de la transition primaire-secondaire (géométrie, mesure, statistique et probabilité, arithmétique). Cela permettrait alors d'avoir une description complète des difficultés et une liste d'inventions permettant de mieux intervenir auprès des élèves en difficulté. Une description de la progression des apprentissages dans les différents domaines offrirait aussi une meilleure harmonisation des connaissances conceptuelles et procédurales.

RÉFÉRENCES

Adihou, A., Arsenault, C. (2011). *Des vidéoclips qui parlent des fractions.* Repéré à : http://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/oct11/Atelier_fractions.pdf

Ames, C. (1992). Classrooms : goals, structures, and student motivation. *Journal of Educational Psychology*, *84*(3), 261-271.

Ayotte, R. (1993). Le travail rémunéré des étudiants et des étudiantes durant l'année scolaire : un phénomène révélateur d'un nouveau mode de vie. *Éducation Canada*, *33*(2) 24-30.

Bandura, A. (1993). Perceived self-efficacy in cognitive development and functioning. *Educational Psychologist*, *28*(2), 117-148.

Barber, B., Olson, H. (2004). Assessing the transitions to middle and high school. *Journal of Adolescent Research, 19*(1), 3-30.

Bélanger, M. (2010). Étude longitudinale du rôle de la puberté, de l'image corporelle, des distorsions cognitives et de la transition primaire-secondaire dans le développement de la dépression chez les adolescents. (Thèse, Université du Québec à Montréal, Montréal). Repéré à http://www.archipel.uqam.ca/3813/

Bélanger, M., Marcotte, D. (2011). Puberté, image corporelle et attitudes dysfonctionnelles : différences entre les filles et les garçons dans les symptômes dépressifs durant le passage primaire-secondaire. *Santé mentale au Québec*, *36*(1), 131-148. Doi : 10.7202/1005818ar

Behr, M., Harel, G., Post, T. Lesh, R. (1993). Rational Numbers: Toward a Semantic Analysis-Emphasis on the Operator Construct. Dans T. P. Carpenter, E. Fennema, & T.A. Romberg, (Eds.), *Rational Numbers : An Integration of Research* (pp. 13-47). NJ : Lawrence Erlbaum.

Brissiaud, R. (1998). *Les fractions et les décimaux au CM1, Une nouvelle approche*. Communication présentée aux Actes du XXVème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres (p. 147-171). IREM de Brest, France.

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bateau : la multiplication par un et demi.* Montréal : Editions Bande Didactique.

Blouin, P., Lemoyne, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage. *Petit x*. (58). 7-23.

Bouffard, T., Denoncourt, I., Dubois, V, Mc Intyre, M. (2004). Relation entre les facteurs du profil motivationnel d'élèves de sixième année du primaire et leurs anticipations envers la secondaire. *Revue des sciences de l'éducation. 30* (1). 71-89.

Bouffard, T., Vezeau, C., Chouinard, R., Marcotte, G. (2006). L'illusion d'incompétence et les facteurs associés chez l'élève du primaire. *Revue française de pédagogie*, 155, 9-20. Doi : 10.4000/rfp.61

Boule, F. (2004). Fractions et décimaux. Approches pédagogiques. *Math-école,* 212, 34-37.

Boileau, L., Bouffard, T., Vezeau, C. (2001). Students transition from elementary to high school and changes of the relationship between motivation and academic performance. *European Journal of Psychology of Education*, *16* (4), 589-604.

Boublil, H. (2013). Notes de cours DID-2015 (didactique de la géométrie au primaire), document inédit, Université Laval.

Boublil, H. (2015). Notes de cours DID-2014 (didactique des nombres rationnels), document inédit, Université Laval.

Bouffard, T., Vezeau, C., Chouinard, R., Marcotte, G. (2006) L'illusion d'incompétence et les facteurs associés chez l'élève du primaire**,** *Revue française de pédagogie,* 155, 9-20. Repéré à : http://rfp.revues.org/61 DOI : 10.4000/rfp.61

Brophy, J. (1987). Synthesis of research on strategies for motivating students to learn. *Educational leadership*, *45*(2), 40-48.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques, Grenoble : La Pensée Sauvage

Brousseau, G., Brousseau, N., Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1 : Rationals as measurements. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 1-20.

Carrette, V. Content, A. Rey, B. Coché, F.. Gabriel, F. (2009). *Étude de l'apprentissage des nombres rationnels et des fractions dans une approche par compétences à l'école primaire*. Repéré à : http://www.ulb.ac.be/facs/sse/img/fractions.pdf

Chouinard, R. (2001). Les changements annuels de la motivation envers les mathématiques au secondaire selon l'âge et le sexe. *Canadian Journal of Behavioural Science/Revue canadienne des Sciences du comportement, 33*(1). 25-37

Chouinard, R. (2009). Les transitions scolaires : un nouveau commencement ou le commencement de la fin? (Conférence sur invitation, Rencontre nationale des gestionnaires de l'éducation), Université de Montréal.

Chouinard, R. (2012). L'évolution de la motivation et des comportements liés. *Appui-motivation***.** [vidéo en ligne]. Repéré à http://zoom.animare.org/appui-motivation/medias/5259

Desbiens, N., Lanaris, C., Massé, L**.** (2014). *Les troubles de comportement à l'école : Prévention, évaluation et intervention***.** Édition Gaëtan Morin.

Deshaies, I. (2006). *Une première formalisation de la notion de fraction chez Les élèves forts, moyens et faibles au 2ième cycle du primaire.* (Mémoire, Université du Québec à Trois-Rivièves). Repéré à http://depot-e.uqtr.ca/2000/1/000131275.pdf

Douady, R (2005). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7/2*, 5-31.

Duclos, G. (1992). Le passage de l'école primaire à l'école secondaire. *Québec français*, (87), 40-43.

Dumont, M. (2007). Le travail à temps partiel durant les études chez les élèves du secondaire : impacts sur leur adaptation scolaire et psychosociale. *Éducation et francophonie*. 35 (1), 161-181

Eccles. J. Frome, M, P. (1998) Parent' s influence on children's achivement-related perception. *Journal of personality and social psychology*, 74(2), 435-452.

FUNDP. (2002). Difficultés en mathématique. Commentaires sur les difficultés et les moyens d'action0 proposés, *Rapport de recherche* Pour une pédagogie de la réussite au premier degré de l'enseignement secondaire, Repéré à http://www.enseignement.be/index.php?page=25589

Galand, B. (2004). Le rôle du contexte scolaire et de la démotivation dans l'absentéisme des élèves. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(1), 125-142.

Galand, B. (2006). La motivation en situation d'apprentissage : les apports de la psychologie de l'éducation. *Revue française de pédagogie, 155*, 5-8. Doi : 10.4000/rfp.59

Garcia-Martinez, S. (2004). *Comment créer un climat favorable à l'apprentissage et à la pratique des différentes activités en cours d'éducation musicale?* (Mémoire professionnel, UFM de l'Académie de Rouen). Repéré à http://musique.memoires.free.fr/mem/018.PDF

Grégoire, J. (2008). Aux sources des difficultés de l'apprentissage des fractions. Séminaire présenté au LAPSE, ULB, 14 février 2008

Janosz, M., Gorges, P., Parent, S. (1998). L'environnement socioéducatif à l'école secondaire : un modèle théorique pour guider l'évaluation du milieu. *Revue Canadienne de Psychoéducatio, 27*(2), 285-306.

Kieren, T. (1995). Creating spaces for learning fractions. Dans J. T. Sowder et B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 31-65). New York : State University of New York Press.

Lamon, S.J. (1999). Teaching Fractions and Ratios for Understanding. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.L. (2001). Presenting and Representing: From Fractions to Rational Numbers. Dans A. Cuoco, F. Curcio (Eds.), *The Roles Of Representations in School Mathematics-2001 Yearbook* (pp. 146-165). Reston : NCTM.

Lanson, A. (2014). *Étude longitudinale du fonctionnement social et cognitif en relation avec les symptômes dépressifs des adolescents dans le contexte de la transition primaire-secondaire* (Thèse, Université du Québec à Montréal). Repéré à http://www.archipel.uqam.ca/6413/

Laveault, D. (2006). *État de la question sur la transition élémentaire-secondaire.* Repéré à http://www2.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/TransitionLiteraturef.pdf

Lessard, G. (2010). Acculturation institutionnelle du chercheur, de l'enseignant et des élèves de 1re secondaire présentant des difficultés d'apprentissage dans la conception et la gestion de situations-problèmes impliquant des nombres rationnels. (Thèse, Université de Montréal). Repéré à : https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/5013/Lessard_Genevieve_2011_%20these.pdf

Maslow, A. H. (1968). Toward a psychology of being. New York : Van Nostrand Reinhold.

Mercier, P. Deblois, L. (2004). Passage primaire-secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions. *Envol*, (127), 17-24.

Ministère de l'Éducation du Loisirs et du Sports (MELS), (2006a) Programme de formation de l'école québécois : enseignement primaire, préscolaire. Repéré à : http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/pdf/prform2001nb.pdf

Ministère de l'Éducation, du Loisirs et du Sports (MELS), (2006b). Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle. Repéré à : http://www1.education.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/index.asp?page=prformsec1ercycle

Ministère de l'Éducation du Loisirs et du Sports. (2013). Progression des apprentissages au primaire. Repéré à http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/

Ministère de l'Éducation du Loisirs et du Sports. (2013). Progression des apprentissages au secondaire. http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionSecondaire/

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport (MELS). (2014). Diplomation et qualification : par commission scolaire au secondaire. Repéré à : http://www.mels.gouv.qc.ca/fileadmin/site_web/documents/PSG/statistiques_info_decisionnelle/SC_63159__stat_diplomation_qualification_cs_2014.pdf

Nimier, J. (1977). Mathématique et affectivité. *Educational Studies in Mathematics, 8* (3), 241-250.

Poncelet, D. Lafontaine, D. (2011). Un modèle en pistes causales pour appréhender la complexité du phénomène d'accrochage scolaire lors de la transition primaire-secondaire. *Mesure et évaluation en éducation, 34*(1), 55-9

Poirier, M. Lessard, A. Fortin, L. Yergeau, É. (2013). La perception différenciée de la relation élève-enseignant par les élèves à risque et non à risque de décrochage scolaire. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 16*(1), 1-23. Repéré à http://www.erudit.org/revue/ncre/2013/v16/n1/1025761ar.pdf

Richard, M-C. (2006). *Le travail rémunéré chez les adolescents et les adolescentes du Saguenay (*Mémoire, Université du Québec à Chicoutimi). Repéré à : http://constellation.uqac.ca/518/1/24611574.pdf

Roberge, A. (1997). Le travail salarié pendant les études. Dans Gauthier & Bernier (Éds). *les 15-19 ans : quel présent? Vers quel avenir?* (89-113) Sainte-Foy : Les Presses de L'Université Laval.

Roderick, M., Camburn, E. (1999). Risk and recovery from course failure in the early years of high school. *American Educational Research Journal,* 36(2), 303–343.

Rosar, D., Van Nieuwenhoven, C. Jonnaert, P. (2001). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves? *Instantanées mathématique*s, 4-16.

Rouche, N. (1998). *L'esprit des sciences. Pourquoi ont-ils inventé les fractions*? Paris : Ellipses.

Saboya, M., Rhéaume, S. (2013). Compétence exercée dans la comparaison de fractions : quelle mobilisation les élèves font de leurs savoirs. *Quaderni di Ricerca in didattica*, (23), 174-183.

Skinner, E. A. (1995). *Perceived control, motivation and coping*. Thousand Oaks, CA : Sage Publications.

Stegen, P. Géron, C. Daro, S. (2007). *L'enseignement des rationnels : publication destinée aux instituteurs du dernier cycle de l'école primaire et aux professeurs de mathématiques de premier degré de l'enseignement secondaire*. Repéré à : http://www.hypothese.be/Documents/LPS/LenseigmainementdesRationnels.pdf

Stegen, P., Sacré, A. (2004a). *La construction des nombres décimaux : partir des erreurs des élèves pour concevoir des séquences d'enseignement-apprentissage*. Repéré à : http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/2105_La_20construction_20des_20nombres_20d_C3_A9cimaux.pdf

Stegen, P., Sacré, A. (2004b). *Pistes didactiques pour la construction des rationnels au cycle 10/12*. Repéré à : http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/211-9_Pistes_20didactiques.pdf.

Tardif, J. (1997). *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive.* Montréal : Éditions Logiques.

Vezeau, C., Chouinard, R., Bouffard, T., Janosz, M., Bergeron, J., Bouthiller, C. (2010) Estimation de l'effet-école et de l'effet-classe sur la motivation des élèves du secondaire. *Revue des sciences de l'Éducation*, *36* (2), 445-468.

Viau, R. (1994). *La motivation en contexte scolaire*. Québec : Les Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Viau, R. et Louis, R. (1997). Vers une meilleure compréhension de la dynamique motivationnelle des étudiants en contexte scolaire. *Revue canadienne de l'éducation, 22*(2), 144-157.

Viau, R. (1999). *La motivation dans l'apprentissage du français*. Québec : Les Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Viau, R. (2009). *La motivation en contexte scolaire*. Bruxelles : Éditions De Boeck.

Viau, R. Bouchard, J. (2000). Validation d'un modèle de dynamique motivationnelle auprès d'élèves du secondaire. *Revue Canadienne de l'Éducation, 25*(1), 16-26.

Weiner, B. (1984), «Principles for a Theory of Student Motivation and their Application within an Attributional Framework». Dans R. Ames et C. Ames (Ed.), *Research on Motivation in Education : Student Motivation* (vol. 1, p. 15-38). New York, Academic Press.

Weiner, B. (1992). *Human Motivation*, California, Sage.

Wigfield, A. Eccles, J. S. (1992). The development of achievement task values: a theoretical analysis. *Developmental Review, 12*, 265-310.

Wigfiel, A. Eccles J. (1994). Chidren's competence beliefs, achievement values and general self-esteem change across elementary and middle school. *Journal of early adolescence, 14*(2), 107-138.

RESSOURCES PÉDAGOGIQUES (GUIDES, DICTIONNAIRES, LEXIQUES)

Baruk, S. (1992). Dictionnaire des mathématiques élémentaires, Paris : Seuil.

Beauregard, M., (1990). *Lexique mathématique pour l'élève*, Éditions FM, Laval, Québec.

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. et X. Roegiers. (2002). *Leximath* : lexique mathématique de base, Laval (Québec) : Beauchemin.

De Champlan, D., Mathieu, P., Patenaud, P., Tessier, H. (1996). Lexique mathématique: enseignement secondaire, Beauport : Les Éditions du Triangle d'Or.

Vincent, J.-F. (1994). Lexique mathématique à l'usage des étudiants et des étudiantes, Éditions : Guérin, Montréal/Toronto.

RESSOURCES EN LIGNE

Alloprof. Bibliothèque virtuelle, en ligne, http://alloprof.qc.ca/BV/Pages/accueil-bv.aspx

ANNEXE I – CONCEPTS MATHÉMATIQUES DIFFICILES

Selon votre expérience professionnelle de l'enseignement, pouvez-vous cocher les concepts dans l'apprentissage desquels les élèves rencontrent des difficultés? Ensuite, faites un choix des 5 concepts les plus difficiles et encerclez leurs numéros.

Tableau 7. Liste des concepts mathématiques difficiles

	N	**Concepts mathématiques**	**Difficile?**
Nombres entiers	1	Reconnaître des expressions équivalentes (par associativité, commutativité, distributivité);	
	2	Effectuer un calcul en respectant les priorités des opérations	
	3	Décomposer un nombre en facteurs premiers;	
	4	Compléter une régularité donnée	
	5	Déterminer le terme manquant dans une équation (relations entre les opérations : +, -, x, :);	
Nombres rationnels	6	Vérifier l'équivalence de deux fractions en construisant un ensemble de fractions équivalentes (amplification et simplification de fractions)	
	7	Ordonner des fractions (ordre croissant ou décroissant);	
	8	Effectuer des opérations (+, -, x, :) avec des fractions	
	9	Ordonner des décimaux (ordre croissant ou décroissant);	
	10	Effectuer des opérations (+, -, x, :) avec des décimaux	
	11	Exprimer en notation fractionnaire un nombre exprimé en notation décimale ou en pourcentage et vice versa	
Géométrie	12	Classifier des quadrilatères, des triangles, des solides (relations d'inclusion);	
	13	Décrire des figures planes, des prismes et des pyramides (évoquer des propriétés que la figure possède)	
	14	Déterminer la figure à partir de la description (vérifier la suffisance des propriétés)	
	15	Reconnaître le développement d'un solide possible parmi plusieurs	
	16	Construire une figure obtenue par transformation (rotation, réflexion, translation (emploi des propriétés, de procédés et d'outils));	
	17	Évoquer la décomposition de figures planes en figures connues pour trouver l'aire	

	18	Estimer et mesurer des dimensions, des surfaces, des volumes, des angles à l'aide d'unités conventionnelles;	
	19	Convertir les unités de mesure;	
Probabilité	20	Représenter et interpréter des données (tableau, diagrammes à bandes, pictogrammes, diagrammes à lignes brisées);	
	21	Dénombrer les résultats d'une expérience aléatoire (diagrammes en arbre, tableau);	
	22	Comparer qualitativement la probabilité théorique ou fréquentielle que des événements se produisent;	
	23	Utiliser la notation fractionnaire, la notation décimale ou le pourcentage pour quantifier une probabilité;	
	24	Comprendre et calculer la moyenne arithmétique;	

S'il y a d'autres concepts, que vous trouvez difficiles, pouvez-vous les préciser?

ANNEXE II - TEST DIAGNOSTIQUE

Question 1

Lors de son dernier test de mathématique, Julie a obtenu 14 bonnes réponses contre 6 mauvaises. Sa mère lui demande si sa note est meilleure qu'aux tests précédents. Aide Julie à répondre à sa mère.

Voici les résultats des tests précédents :

Test 1 : 13/20;

Test 2 : 70 %;

Test 2 : 18.5/25;

Test 3 : 0.68

Test 4 : 45 / 60;

Question 2

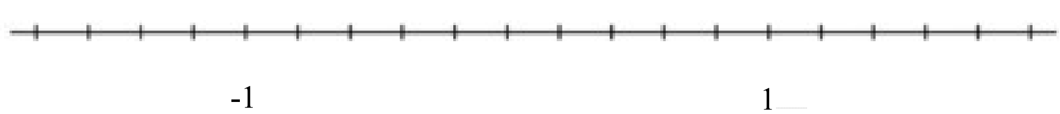
Complétez le tableau ci-dessous :

Écriture des nombres décimaux à l'aide de symboles	**Écriture des nombres décimaux en mots**
0.12	
	Tente quatre et vingt et un millièmes
	Cent cinquante et trois centièmes
22,7	
	Cent trois millièmes
	Dix et un dixième

Question 3

Positionnez le plus précisément possible les nombres suivants sur la droite numérique :

A 0.20 ; B $1\frac{1}{2}$; C $-\frac{12}{15}$; D -1.400 ; E $\frac{120}{100}$; F $\frac{3}{5}$



Question 4

Pour déterminer le gagnant de la course de 100 mètres aux Jeux olympiques de Londres en 2012, les analystes ont dû comparer les résultats des 3 premiers coureurs à avoir franchi la ligne d'arrivée. Voici leurs résultats :

Coureur 1 : 10,39 secondes

Coureur 2 : 10,3 secondes

Coureurs 3 : 10,289 secondes

Selon le temps de chacun, déterminez celui qui remportera la médaille d'or, d'argent et de bronze.

Question 5

Un pot de 350 g de confiture de fraises de la marque « les bons fruits » contient 200 g de fruit et 150 g de sucre. Un pot de 450 g de confiture de fraises de la marque « Mamie fruits » contient 250 g de fruit et 200 g de sucre. Quelle est la confiture la plus sucrée?

Question 6

Une photographie rectangulaire a pour longueur 24 cm. Elle a été obtenue par l'agrandissement d'un négatif de longueur de 32 mm et de largeur de 24mm. Trouver la largeur de la photographie en centimètre?

Question 7

Lors d'une fête, 3 enfants se partagent un gâteau circulaire. Laurent, le fêté, mange le 1/4 du gâteau et Cloé, le 1/2. Max, qui est servi le troisième, prend le 2/3 du reste. Quelle partie du gâteau reste-t-il?

Question 8

Effectuez les calculs suivants. La réponse doit être dans sa forme simplifiée :

1) $\frac{3}{7} - \frac{4}{9} =$	2) $\frac{2}{3} x \frac{1}{6} =$
3) $\frac{3}{4} + \frac{5}{5} =$	4) $2\frac{3}{4} \div \frac{1}{4} =$
5) $1\frac{4}{5} + 3\frac{1}{7} =$	6) $5\frac{2}{9}\ x\ 6\frac{1}{4} =$
7) $\frac{12}{100} - \frac{3}{9} =$	8) $\frac{1}{8} \div \frac{2}{3} =$

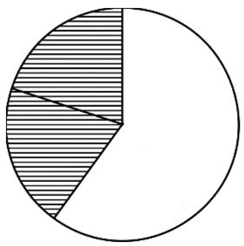
Question 9

Représentez, à l'aide d'un dessin, la fraction « 4/5 » de trois manières différentes :

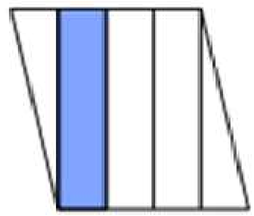
Question 10

Pour chaque figure, indique la fraction simplifiée de la surface totale qui est coloriée.

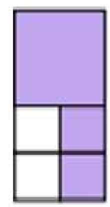
A.



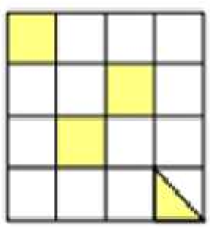
B.



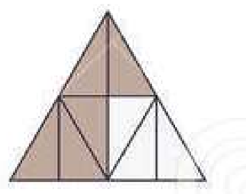
C.



D.



E.



F.

A : __________

B : __________

C : __________

D : __________

E : __________

F : __________

Question 11

Marianna invite 8 amis à venir souper à la maison. Elle achète une poitrine de poulet par personne. Cependant, à la dernière minute, 3 nouvelles personnes s'ajoutent au repas et, malheureusement, Marianna n'a pas le temps d'aller acheter d'autres poitrines de poulet.

Aide Marianna à trouver la quantité de poitrine de poulet qu'elle devrait offrir aux convives pour que chacun en aient une portion équivalente.

Ta réponse doit être dans sa forme simplifiée.