



L'impact du glissement en fréquence lors de l'accélération directe d'électrons par faisceau laser

Mémoire

Pascal Hogan-Lamarre

Maîtrise en physique
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© Pascal Hogan-Lamarre, 2016

Résumé

L'accélération directe d'électrons par des impulsions ultrabrèves de polarisation radiale fortement focalisées démontre un grand potentiel, notamment, pour la production de paquets d'électrons ultrabrefs. Plusieurs aspects de ce schéma d'accélération restent toutefois à être explorés pour en permettre une maîtrise approfondie. Dans le cadre du présent mémoire, on s'intéresse à l'ajout d'une dérive de fréquence au champ de l'impulsion TM_{01} utilisée. Les expressions exactes des composantes du champ électromagnétique de l'impulsion TM_{01} sont établies à partir d'une généralisation du spectre de Poisson. Il s'agit, à notre connaissance, du premier modèle analytique exact pour la description d'une impulsion avec une dérive de fréquence. Ce modèle est utilisé pour étudier l'impact du glissement en fréquence sur le schéma d'accélération, grâce à des simulations "particule test" unidimensionnelles, considérant en premier lieu une énergie constante par impulsion, puis un champ maximum constant. Les résultats révèlent que le glissement en fréquence diminue le gain en énergie maximum atteignable dans le cadre du schéma d'accélération à l'étude ; une baisse d'efficacité de plusieurs dizaines de pourcents peut survenir. De plus, les simulations mettent en évidence certaines différences liées à l'utilisation d'impulsions avec une dérive vers les basses fréquences ou avec une dérive vers les hautes fréquences : il se trouve que, pour un glissement en fréquence de même grandeur, l'impulsion avec une dérive vers les basses fréquences conduit à un gain en énergie cinétique maximum plus élevé pour l'électron que l'impulsion avec une dérive vers les hautes fréquences.

Abstract

Direct electron acceleration using ultrashort radially polarized laser pulses in strong focusing conditions exhibits unique properties for the production of ultrashort electron bunches. However, several aspects of this acceleration scheme are still left to investigate in order to ensure our complete understanding of the processes taking place. The present master's thesis studies the use of TM_{01} chirped pulses in this acceleration scheme. Exact closed-form expressions for the description of all the components of the electromagnetic field of the TM_{01} chirped pulse are established by the generalization of the Poisson-like spectrum. It is, to the best of our knowledge, the first exact analytical model of an ultrashort non paraxial chirped pulse. These expressions are then used for on-axis "test particle" simulations, considering, at first, a constant pulse energy and, as a second case, a constant field maximum. Results reveal that chirp pulses seem to cause a decrease of the maximum energy gain achievable using this acceleration scheme; a decrease of the efficiency of tens of percents was observed. Additionally, numerical simulations show that down-chirp and up-chirp do not lead to the same results: we find that down-chirped pulses produce a slightly larger energy gain than up-chirped pulses, while still being less efficient than Fourier-transform-limited laser pulses

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Remerciements	xv
1 Introduction	1
1.1 L'accélération de particules à l'aide de faisceaux laser	1
1.2 L'accélération d'électrons en champ direct	4
1.3 Le glissement en fréquence et l'accélération par faisceaux laser	6
2 Théorie de l'impulsion TM_{01} et modélisation	11
2.1 L'impulsion TM_{01}	11
2.2 Introduction du glissement en fréquence	16
2.3 Le champ électromagnétique glissé en fréquence de l'impulsion TM_{01}	25
2.4 Comparaison des solutions avec et sans dérive en fréquence	31
3 Dynamique d'électrons accélérés en présence de glissement en fréquence	35
3.1 Considérations expérimentales	35
3.2 Méthode de simulation	37
3.3 Accélération à l'aide d'impulsions à énergie constante	41
3.4 Accélération à l'aide d'impulsions à amplitude constante	44
3.5 Inconvénients liés à l'usage d'impulsion avec une dérive de fréquence	46
Conclusion	53
A Transformées de Fourier	57
A.1 L'onde d'amplitude constante avec dérive en fréquence	57
A.2 Le spectre de Poisson	59
A.3 Le spectre de Poisson avec un paramètre s complexe	60
A.4 Le spectre de Poisson combiné à une phase quadratique	60
B Limite du spectre étroit avec glissement en fréquence	63

Liste des tableaux

1.1	Classification des articles sur l'emploi d'un champ avec une dérive de fréquence selon le type de dérive en fréquence et la description du champ employée . . .	10
A.1	Paires de Fourier impliquées dans la transformée de Fourier du spectre de Poisson	59

Liste des figures

1.1	La focalisation à grand angle (ou à grande ouverture numérique) d'une impulsion de polarisation radiale fait apparaître une forte composante longitudinale du champ électrique	6
1.2	La différence entre une impulsion limitée par la transformée de Fourier (à gauche) et une impulsion avec un glissement en fréquence (à droite) est lié à la fréquence instantanée des cycles optiques de l'impulsion.	7
2.1	Représentation géométrique du paramètre confocal, de la distance de Rayleigh et de la taille de faisceau à l'étranglement.	15
2.2	(a) Spectre de Poisson $F(\omega)$ et (b) sa transformée de Fourier $f(t)$ tous deux normalisés pour différentes valeurs du paramètre de largeur spectrale s , tel que prédit par la paire d'équations (2.16a) et (2.16b)	18
2.3	Forme temporelle du champ de l'impulsion associée au spectre de Poisson modifié (2.22) pour un paramètre de largeur spectrale $s = 10$ et pour (a) $C = \pm 10^{-2}$, (b) $C = 100$	20
2.4	(a) Norme (noir) et phase du spectre de Poisson normalisé pour $s_r = 10$ et $s_i = \pm 10$. (b) Transformée de Fourier inverse $f_s(t)$ normalisée pour différentes valeurs de s_i à $s_r = 10$ et fréquence instantanée associée.	23
2.5	Comparaison entre le spectre gaussien glissé en fréquence et la forme temporelle du spectre de Poisson (2.30) dans le régime du spectre étroit faiblement glissé en fréquence visé par la limite (2.35). Les paramètres pertinents prennent ici les valeurs $s_r = 277$ et $s_i = 15$	25
2.6	Comparaison entre (a) le champ exact et (b) le champ gaussien pour $s_r = 20$, $k_0 a = 10$ et $s_i = -40$ à $z = 0$. Champ exact avec $s_r = 10$ et différentes valeurs du paramètre de glissement en fréquence, soit (c) $s_i/s_r = 0$, (d) $s_i/s_r = -2.5$ et (e) $s_i/s_r = -5$	32
2.7	Déplacement du maximum de l'enveloppe du champ électrique longitudinal en présence de dérive de fréquence, considérant $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$ dans le plan $Z = 0$	33
2.8	(a) Mouvement du maximum de l'enveloppe du champ électrique longitudinal dans l'espace $Z_{max} = z_{max}/a$ pour $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$ et (b) translation du maximum de l'enveloppe dans le temps $\tau_{max} = \omega_0 t_{max}$ pour différentes largeur spectrales.	34
2.9	Fréquence instantanée de l'impulsion pour différentes valeurs du glissement en fréquence lorsque $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$	34

3.1	Représentation schématique de l'expérience de Payeur et al. conduite en 2012 qui représente une preuve de principe de la réalisation expérimentale du schéma d'accélération à l'étude	36
3.2	Gain en énergie d'un électron suivant les conditions initiales sur la phase du champ laser ϕ_0 et la position initiale de l'électron $Z_0 = z_0/a$ pour une énergie de (a) $\sim 0.09J$ (b) $\sim 9J$. À titre indicatif, on a utilisé une discrétisation de 0.15 pour l'axe de position et de 0.015 pour l'axe de phase. Ces figures montrent le cas d'une impulsion avec $s_r = 10$, $s_i = -1.25$ et $k_0a = 10$	40
3.3	(a)Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d'une énergie constante par impulsion pour une impulsion avec $s_r = 1$, soit une impulsion d'un seul cycle optique, $k_0a = 10$ et $U = 1.2J$. (b)Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d'une énergie constante par impulsion pour une impulsion avec $s_r = 50$, $k_0a = 10$ et $U = 10.6J$. Dans les deux cas présentés, l'impulsion laser sans glissement en fréquence centrée à 800 nm aurait une puissance crête de 2 PW.	42
3.4	(a) Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d'une énergie constante par impulsion. Chaque courbe est normalisée à son propre maximum. Le profil temporel du champ longitudinal E_z est tracé pour $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et pour 3 valeurs différentes du paramètre de glissement relatif, soit (b) $s_i/s_r = -5$, (c) $s_i/s_r = -0.125$, (d) $s_i/s_r = +5$. Les énergies indiquées correspondent à des impulsions sans glissement en fréquence centrées à 800 nm de puissance s'élevant respectivement à 200 GW, 2 TW, 20 TW et 2 PW.	43
3.5	Évolution de la vitesse de l'électron (rouge) et de la fréquence instantanée du champ électrique longitudinal (noir) sur l'axe à la position de l'électron dans une trajectoire optimisée pour $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et différentes valeurs de s_i , soit (a) $s_i = -50$ et (b) $s_i = +50$. Il va de soit que la vitesse maximale est bornée par la vitesse de la lumière ($v_z/c < 1$ pour t).	44
3.6	(a) Variation du gain en énergie maximum normalisé bien à l'intérieur des limites du régime d'accélération relativiste (sous-cycle) et (b) gain en énergie maximum à la limite entre les différent régimes d'accélération dans le cas où le champ électrique maximal de l'impulsion est choisi comme constant. Les valeurs de champ sont associées à une impulsion TM_{01} caractérisée par les paramètres $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et $\lambda_0 = 800$ nm. Les valeurs choisies correspondent respectivement à des puissances de (a) 2 TW, 20 TW, 2 PW (b) 80 GW, 100 GW, 150 GW, 200 GW et 250 GW dans le cas sans glissement en fréquence.	45
3.7	Élargissement de la densité d'énergie électrique suite à l'introduction d'une dérive de fréquence. On compare ici des impulsions au temps $t = 0$ pour $s_r = 10$ et $k_0a = 10$ lorsque l'on passe de (a) l'impulsion limitée par la transformée de Fourier ($s_i = 0$) à (b) une impulsion fortement glissée en fréquence ($s_i/s_r = -5$). On remarque que l'échelle d'intensité doit être différente de près d'un ordre de grandeur dans ce cas pour conserver l'énergie de l'impulsion.	47

3.8	(a) Énergie cinétique (ligne pleine) d'un électron aux conditions initiales optimales et champ électrique (ligne pointillée) ressenti par celui-ci pour $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et $U = 4.7J$. Sachant le moment et la position auxquels l'électron amorce sa dernière phase d'accélération, on peut tracer le profil du champ électrique au début du cycle final d'accélération. (b) Vitesse de l'électron et fréquence instantanée du champ à la position de l'électron pour les mêmes paramètres décrits en (a), en présence de "down-chirp".	49
3.9	Positions spatiale Z_f et temporelle τ_f auxquelles l'électron débute son cycle final d'accélération pour $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et $U = 8,9J$ ($P_{crete} \approx 2 \times 10^{15}W$).	50
3.10	Profil du champ longitudinal lorsque l'électron amorce son cycle final d'accélération pour différentes valeurs du rapport s_i/s_r , soit (a) $s_i/s_r = -5$, (b) $s_i/s_r = +5$, (c) $s_i/s_r = -3$, (d) $s_i/s_r = +3$, (e) $s_i/s_r = -1$, (f) $s_i/s_r = +1$. Les lignes pointillées indiquent la position de l'électron dans le champ électromagnétique lors du début de son cycle d'accélération, le bleu correspondant au cas "down-chirp" et le rouge au cas "up-chirp" pour une même valeur absolue du paramètre de glissement en fréquence. Un point représente la position de l'électron dans l'impulsion. Les impulsions ont les caractéristiques communes suivantes : $s_r = 10$, $k_0a = 10$ et $U = 4.7 J$ pour des impulsions centrées à 800 nm.	51

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont permis la réalisation de ce beau projet qu'est une maîtrise en physique. Tout d'abord, j'aimerais adresser mes remerciements à mon directeur de recherche, le Prof. Michel Piché. Merci de m'avoir permis d'explorer le monde de l'accélération par faisceau laser, un sujet que vous m'avez vous-même fait découvrir, et de m'avoir encouragé dans mon apprentissage en me permettant d'assister à la première école internationale sur les lasers en mémoire du Prof. Siegman, une expérience sans égale. Si j'ai trouvé un domaine qui me motive autant, c'est entièrement grâce à vous.

Dans le même ordre d'idées, je dois dire que ce travail ne serait pas ce qu'il est sans l'aide de mon collègue Vincent Marceau, qui m'a guidé lors de mes premiers pas aux études graduées et avec qui j'ai adoré collaborer. Je remercie également mes autres collègues travaillant sur l'accélération d'électrons à l'aide d'impulsions TM_{01} , Charles Varin et Simon Robitaille, pour les discussions sur le sujet.

Je remercie également toutes les personnes avec qui j'ai partagé l'aventure des études graduées, soit mes collègues de bureau, les membres du comité exécutif du REPOL, ainsi que mes amis Jean-Luc Déziel et Marianne Girard. Bien que votre implication se soit manifestée dans un cadre surtout extra-académique, elle n'en a pas moins été très importante pour moi.

Finalement, je me dois d'exprimer ma gratitude envers mes parents qui m'ont soutenu de différentes façons tout au long de mes études et qui m'ont inculqué l'importance de l'éducation.

Chapitre 1

Introduction

1.1 L'accélération de particules à l'aide de faisceaux laser

L'accélération de particules à l'aide de lasers suscita l'intérêt de la communauté scientifique dès l'invention des sources laser au début des années 60. Les travaux théoriques de Shimoda constituent la première mention directe de ce domaine dans la littérature [56]. Plusieurs chercheurs ont depuis exploré le problème donnant vite lieu à une grande variété de schémas d'accélération. Inspirés des travaux de Veksler sur les phénomènes d'accélération collective dès 1956 [67, 79], les travaux de Tajima et Dawson publiés en 1979 eurent un impact majeur sur le domaine, posant les bases de l'accélération de particules grâce à l'interaction laser-plasma [68]. Bien que la complexité des méthodes employées varie grandement d'un schéma d'accélération à l'autre, le but premier reste le même, c'est-à-dire exploiter le champ électromagnétique puissant généré par les lasers de manière à obtenir un gain en énergie net non nul. Il est alors nécessaire de contourner le théorème de Lawson-Woodward qui établit l'impossibilité pour une particule isolée d'être accélérée à l'aide d'une onde électromagnétique sous certaines conditions bien définies [12, 30, 45]. Il existe plusieurs versions de ce théorème qui sont apparues avec les années. Voici donc le contenu du théorème, tel qu'énoncé par England et al. [12] :

Théorème de Lawson-Woodward. *Considérons une particule se déplaçant à une vitesse hautement relativiste qui*

- (a) *est loin de toute source telle qu'un diélectrique, un conducteur ou un plasma ;*
- (b) *est dans une région libre de champs électromagnétiques statiques externes ;*
- (c) *est dans le vide ($n=1$) ;*
- (d) *interagit avec le champ électromagnétique sur une région infinie (débutant et se terminant à l'extérieur du champ), ce qui empêche la présence de mur ou frontière, et*
- (e) *n'est pas en présence de forces non linéaires relatives au champ électromagnétique, telles que la force pondéromotrice, la force " $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ " et la force de réaction radiative,*
alors l'accélération nette de cette particule est nulle.

Un autre théorème complémentaire à celui de Lawson-Woodward est décrit par R. B. Palmer [45] : il traduit l'impossibilité d'obtenir une accélération nette lorsque le champ électromagnétique prend la forme d'une onde plane, une onde uniforme dans au moins l'une des trois dimensions de l'espace. Même si briser l'une des conditions du théorème de Lawson-Woodward est nécessaire pour obtenir un gain en énergie net, cela ne garantit en aucun cas une accélération. Il faut donc user d'ingéniosité.

L'accroissement constant des performances des lasers modernes motive aujourd'hui des efforts grandissants dans la recherche sur l'utilisation de faisceaux laser pour l'accélération de particules. On présente ici quelques-uns des schémas les plus étudiés et qui semblent des plus prometteurs, notamment l'accélération par ondes de sillage dans les plasmas, les accélérateurs linéaires diélectriques et l'accélération directe dans le vide. L'accélération d'électrons en champ direct, qui fait l'objet du présent mémoire, sera présentée dans la prochaine section.

L'accélération de particules par ondes de sillage dans les plasmas ("Laser plasma wakefield acceleration") représente sans aucun doute l'avenue la plus largement étudiée dans la communauté scientifique. Cette méthode repose sur l'excitation d'ondes de densité résonantes dans un plasma dont la longueur d'onde est bien supérieure à celle du rayonnement d'une impulsion laser, permettant ainsi une accélération sur une plus longue distance : l'accélération "wakefield" convertit le champ transverse de l'impulsion laser, peu adapté à l'accélération de particules, en un champ longitudinal généré par le plasma correspondant davantage au besoin d'une expérience d'accélération [67]. Ces ondes de densité sont des structures robustes et peuvent se déplacer avec une vitesse de phase très élevée. Plusieurs variations autour de la méthode de base existent, de même que différents régimes d'accélération. L'idée originale est d'envoyer une impulsion laser d'une durée bien précise accordée à la fréquence plasma dans un plasma d'une densité donnée, ce qui génère les ondes de densité susmentionnées [13]. Les premières expérimentations furent plutôt réalisées en utilisant le battement entre deux impulsions pour contourner les exigences techniques en terme de durée d'impulsion, bien au delà des performances des lasers de l'époque [17]. De nos jours, on s'intéresse davantage à l'emploi d'impulsions courtes avec une forte puissance crête, ce qui permet d'atteindre le régime bulle ("bubble regime"). Grossièrement, il s'agit d'un régime dans lequel une impulsion laser unique repousse tous les électrons sur son passage grâce à la force pondéromotrice, formant une zone (la bulle) où il y a un manque de charges négatives juste derrière l'impulsion, ce qui attire les électrons environnants. L'impulsion laser étant en mouvement, cette bulle se déplace avec elle et certains électrons avec les bonnes conditions initiales se retrouvent piégés à l'arrière pour être accélérés jusqu'à une vitesse relativiste. Le record en terme d'énergie pour un électron accéléré avec ce schéma est aujourd'hui détenu par Leemans et al. qui ont réussi à obtenir une énergie de 4.2 GeV sur une distance de seulement 9 cm avec des impulsions dont la puissance crête s'élève à 0.3 PW [31]. L'utilisation de plasmas permet de s'affranchir presque en totalité des limites sur l'intensité laser posées par l'utilisation de guides d'onde métalliques (le champ

de claquage des métaux est de l'ordre de 100 MV/m), puisqu'ils peuvent supporter des champs électriques d'une amplitude d'environ $96\sqrt{n_0}[cm^{-3}][V/m]$, où n_0 est la densité du plasma [13]. Cette nouvelle limite marque l'effondrement des ondes de densité dans le plasma ("wave breaking"). Bien qu'ils puissent être utilisés à bon escient, les nombreux phénomènes non linéaires et instabilités apparaissant dans les plasmas peuvent cependant nuire aux performances de ce schéma d'accélération en diminuant, par exemple, la qualité des faisceaux d'électrons produits.

Les accélérateurs linéaires diélectriques ("Dielectric Linear Accelerateur"), communément appelés "DLA", constituent une autre avenue très prometteuse pour l'accélération de particules à l'aide de faisceaux laser. L'utilisation de structures diélectriques permet aux DLAs de supporter des champs électriques d'un à deux ordres de grandeur au-dessus de ceux opérant dans les accélérateurs radio-fréquences traditionnels [12]. Les démonstrations expérimentales en régime relativiste et en régime non relativiste ont récemment été dévoilées la même année par deux groupes de recherches distincts [8, 47]. Le principe est de rapprocher très étroitement deux réseaux identiques de manière à former un canal où les électrons peuvent circuler. La structure, transparente, est irradiée par un faisceau perpendiculaire, de sorte que le champ électrique transverse à la propagation du faisceau est orienté selon la direction de propagation des électrons. La structure diélectrique agit alors à la manière d'un masque de phase périodique qui permet aux électrons parfaitement synchronisés avec l'oscillation du champ et la période du réseau d'être accélérés; l'exposition au champ décélérateur est minimisée pour obtenir une accélération nette à chaque période. Les premières expériences ont permis d'atteindre des gradients de plus de 25 MeV/m et 250 MeV/m dans les cas non relativiste et relativiste, respectivement, alors que les accélérateurs conventionnels modernes utilisant des radio-fréquences opèrent avec des gradients de 10 à 30 MeV/m. La possibilité, encore à prouver, de juxtaposer les structures diélectriques pour créer un accélérateur en plusieurs stades pourrait révolutionner plusieurs domaines de la physique. Il faut dire que les structures utilisées sont microscopiques et créées à partir de méthodes lithographiques peu coûteuses. Ce schéma d'accélération laisse imaginer la création d'accélérateurs de hautes performances et de lasers à électrons libres tenant sur une table de travail en laboratoire.

Finalement, l'accélération de particules dans le vide permet de s'affranchir presque totalement des limites sur l'intensité du champ électrique imposées par le seuil de dommage des matériaux ou l'effondrement des ondes de sillage dans un plasma. Elle fait cependant face à ses propres défis, soit le champ transversal dominant des lasers, la petitesse de la longueur d'onde d'un rayonnement optique, la vitesse de phase supraluminique dans la région focale d'une impulsion, etc. Le déphasage entre l'impulsion et l'électron qui ne peut atteindre la vitesse de la lumière reste un problème majeur, à la base du théorème de Lawson-Woodward. L'accélération dans le vide repose souvent sur l'utilisation des forces non linéaires apparaissant à haute intensité. La présence de la force de réaction radiative peut, par exemple, conférer aux électrons une vitesse positive [32]. Il est plus souvent question d'utiliser la force pondéromotrice pour

conférer une énergie cinétique significative à l'électron, un schéma appelé "ponderomotive scattering" [22]. Il s'agit d'une force "moyenne", qui apparaît lorsqu'on s'intéresse au mouvement moyen d'une particule oscillant dans un champ électrique non uniforme. Dictée par la relation $\mathbf{F}_{pond} = -e^2/(4m_e\omega^2)\nabla|\mathbf{E}|^2$, elle dévoile la tendance d'une particule à évacuer les zones de fortes intensités. Ainsi, lorsqu'on focalise une impulsion laser, le champ électrique confère une quantité de mouvement transversale grandissante à la particule accélérée, qui acquiert aussi une quantité de mouvement longitudinale par le biais de la force " $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ". Éventuellement, l'amplitude du mouvement oscillatoire de la particule est telle qu'elle dépasse la taille du faisceau à l'étranglement. Comme la diminution de la force de rappel sur la particule est alors exponentielle, l'interaction peut donc se terminer alors que l'électron est expulsé avec un certain angle. Ce schéma d'accélération fut démontré expérimentalement par Malka et al. avec des impulsions de polarisation linéaire [37]. La superposition de faisceaux laser fut également l'objet de travaux théoriques et expérimentaux. Le but peut être de piéger la particule dans un puit de potentiel pondéromoteur se déplaçant à une vitesse relativiste [27] ou encore de générer un champ longitudinal par l'interférence des différentes composantes des impulsions incidentes [23, 65, 81]. Dans ce second cas, on utilise une région d'interaction finie, limitée par la zone de croisement entre les faisceaux, pour obtenir une accélération nette. De même, il a déjà été envisagé de simplement introduire un obstacle au foyer d'une faisceau focalisé de manière à ce que l'électron sorte du champ électromagnétique brusquement, et ce près du maximum d'intensité [48].

1.2 L'accélération d'électrons en champ direct

L'accélération d'électrons en champ direct tire son nom d'un régime d'accélération pour lequel le champ électrique est si intense qu'il permet à la particule d'atteindre une vitesse ultra-relativiste à l'intérieur d'un demi-cycle optique, d'où l'appellation équivalente d'accélération sous-cycle. Lorsqu'il atteint une vitesse relativiste, l'électron peut suivre de très près l'impulsion, de sorte que le champ électrique qu'il subit apparaît posséder une composante statique. C'est un phénomène de rectification optique qui se manifeste à travers le régime ultra-relativiste. Dans ce régime, la trajectoire des électrons accélérés est sensible à la forme exacte du champ électromagnétique, ce qui implique une attention particulière à la phase absolue du champ. Plus particulièrement, ce schéma d'accélération se réalise lors de la focalisation d'impulsions de polarisation radiale, comme les impulsions dites transverses magnétiques (TM_{01}). La particule est d'abord portée tout près de la vitesse de la lumière lors de son passage dans un demi-cycle optique négatif pour être décélérée jusqu'à une vitesse nulle et même accélérée en sens inverse par le demi-cycle optique positif suivant. Elle tombe alors directement dans le demi-cycle négatif qui suit et ainsi de suite. Cette alternance entre accélération et décélération se poursuit jusqu'à ce que l'amplitude du champ soit insuffisante pour affecter significativement l'énergie cinétique de l'électron sur une distance appréciable. Tout ne tient

qu'à la synchronisation des particules avec l'impulsion laser grâce à des conditions initiales adéquates : si les conditions propices à la synchronisation avec le champ électromagnétique sont présentes, alors l'électron en sort avec une énergie cinétique importante. À cause du déphasage de Gouy, l'électron accéléré ne peut rester très longtemps en phase avec l'impulsion laser dans la zone focale. Cependant, il est possible par la suite pour celui-ci de se synchroniser de nouveau à un demi-cycle optique du champ tant que l'amplitude du champ est assez grande. L'accélération se produit alors de cette position jusqu'à l'infini.

La focalisation d'impulsions TM_{01} est un élément clef du schéma d'accélération puisqu'elle donne naissance à un champ électrique longitudinal, tel qu'illustré à la figure 1.1. Ceci permet une accélération linéaire le long de l'axe optique. C'est une différence majeure avec plusieurs des méthodes d'accélération par des forces nonlinéaires dans le vide dont on a discuté. L'accélération linéaire permet de limiter les pertes liées à la radiation des particules chargées et elle est pour ainsi dire essentielle à tout schéma visant l'atteinte de hauts gradients d'accélération. C'est l'absence de composante radiale du champ électrique et de composante azimutale du champ magnétique (seulement sur l'axe à $r = 0$) qui permet à un électron de demeurer sur l'axe optique. De plus, la distribution du champ est telle que l'amplitude de ces deux composantes croît lentement autour de l'axe optique, assurant une certaine stabilité de la méthode.

Souffrant des mêmes problèmes que la plupart des autres schémas d'accélération directe dans le vide, l'accélération en champ direct est peu compatible avec la réalisation expérimentale d'un montage présentant plusieurs étapes d'accélération, à cause de la nature du mécanisme en jeu (cycles d'accélération et de décélération complète) et de la très petite région d'interaction. Du point de vue de efficacité, ce schéma nécessite de grandes puissances laser pour atteindre des énergies cinétiques de l'ordre du GeV, le gain augmentant comme la racine de la puissance à puissance élevée : à titre d'exemple, une énergie de 1 à 10 GeV pourrait être atteinte avec des impulsions dont la puissance crête avoisine 10^{16} à 10^{17} W. Il reste plus facile, cependant, de prédire et contrôler le résultat d'une expérience d'accélération en champ direct que lors de l'utilisation d'onde de sillage dans un plasma, la qualité du faisceau d'électrons prédite étant meilleure dans le premier cas.

L'accélération d'électrons par l'utilisation d'impulsions de polarisation radiales ultrabrèves et fortement focalisées fut introduite par un article de C. Varin et M. Piché en 2002 [73]. Ce premier article fut suivi par plusieurs publications adressant différentes facettes du problème [15, 69, 70, 74–78]. Parallèlement, d'autres groupes se sont également intéressés à la problématique [7, 50, 59]. Les recherches sur le sujet prirent une nouvelle tournure avec les travaux de A. April qui présentèrent des solutions exactes sous forme fermée aux équations de Maxwell [6]. Il devint alors possible de pousser les limites théoriques en matière de durée d'impulsion et de condition de focalisation pour étudier des situations en dehors des limites de validité de l'impulsion gaussienne utilisée auparavant. De plus, c'est en 2012, peu après la conclusion des

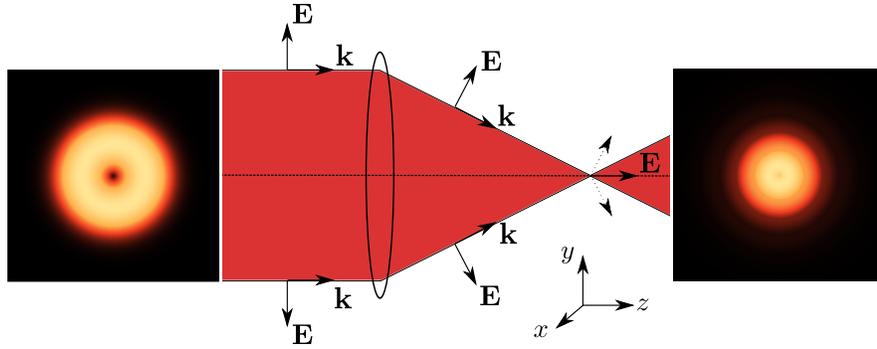


FIGURE 1.1 – La focalisation à grand angle (ou à grande ouverture numérique) d’une impulsion de polarisation radiale fait apparaître une forte composante longitudinale du champ électrique

travaux de A. April, que la première démonstration expérimentale de ce schéma d’accélération fut produite par une équipe de l’INRS-EMT [46]. À partir du nouveau cadre théorique et des comparaisons avec l’expérimentation, des travaux ont été réalisés sur les implications d’une représentation exacte du champ électromagnétique et sur l’accélération de nuage d’électrons via un code “particle-in-cell” (PIC) [39, 42, 72].

Les dernières publications sur le sujet traitent d’une conséquence surprenante du schéma d’accélération à l’étude : la production de paquets d’électrons ultrabrefs, dont la durée atteint des valeurs inégalées ; on exclut ici les paquets ne contenant qu’un électron unique utilisés lors d’expérience de diffraction (“single electron diffraction”). Les propriétés de tels électrons peuvent même être ajustées de manière à ce qu’elles se retrouvent dans une fenêtre utile aux expériences de diffraction électronique ultrarapide [40, 41] : de nouvelles sources ultrarapides permettraient d’augmenter significativement la résolution temporelle des expériences de ce type [55]. De plus, dans un tout autre régime d’opération considérant des énergies bien plus élevées par impulsion laser, il serait possible de créer des paquets d’électrons de durée attoseconde alors qu’un mécanisme de compression relativiste maintiendrait les électrons à proximité les uns des autres [71]. La production de paquets d’électrons ultrabrefs constitue actuellement l’axe principal de recherche du groupe du Prof. M. Piché sur le sujet. Des travaux expérimentaux sont d’ailleurs considérés. Il est à noter que seules une poignée publications ont discuté de la réalisation expérimentale du schéma d’accélération à l’étude depuis l’article de 2012 par Payeur et al. [10, 29, 72].

1.3 Le glissement en fréquence et l’accélération par faisceaux laser

Le glissement en fréquence, aussi appelé “dérive en fréquence” ou “chirp” en anglais, est le phénomène par lequel la fréquence instantanée ω_{inst} d’une impulsion change dans le temps. Comme la fréquence instantanée ω_{inst} est définie par “le taux de variation de la phase totale

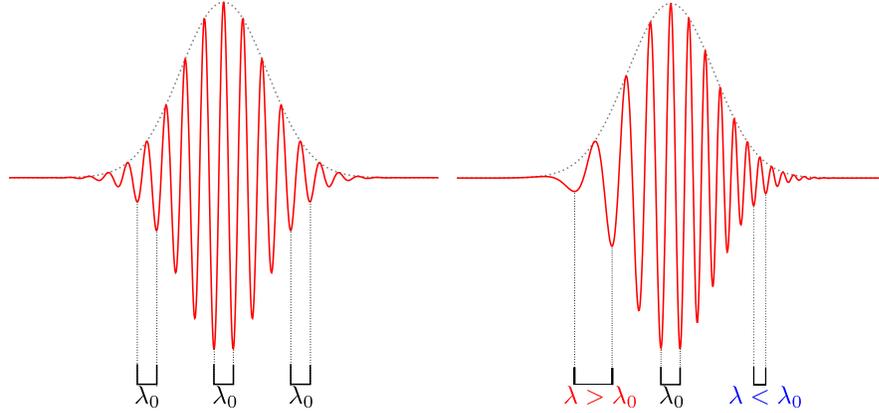


FIGURE 1.2 – La différence entre une impulsion limitée par la transformée de Fourier (à gauche) et une impulsion avec un glissement en fréquence (à droite) est lié à la fréquence instantanée des cycles optiques de l’impulsion.

d’un signal sinusoïdal”, soit la dérivée de la phase Φ_{tot} d’un champ donné, le glissement en fréquence apparaît donc pour une phase ayant une dépendance en temps d’ordre 2 ou plus [57], avec :

$$\omega_{inst} = \frac{d\Phi_{tot}}{dt} \quad (1.1)$$

Concrètement, lorsque la fréquence instantanée varie, la durée des cycles du champ est modifiée en conséquence, tel qu’illustré à la figure 1.2. Par exemple, pour un champ pulsé dont l’expression est donnée par $E(t) = A(t) \cos(C_2 t^2 + C_1 t + C_0)$, où $A(t)$ définit une enveloppe variant lentement, la longueur d’onde du champ augmente (pour $C_2 < 0$) ou diminue (pour $C_2 > 0$) linéairement du début à la fin de l’impulsion proportionnellement à C_2 , tout en étant centrée à $\lambda_0 = 2\pi c/C_1$ qui est la longueur d’onde au centre de l’impulsion à $t = 0$. On parle de glissement en fréquence linéaire avec une fréquence instantanée $\omega_{inst}(t)$ qui est une fonction linéaire du temps.

Le glissement en fréquence est la conséquence d’une panoplie de phénomènes physiques dont la propagation dans un milieu autre que le vide, notamment à cause de la dispersion de groupe (GVD) et d’effets non linéaires comme l’auto-modulation de phase (SPM) [2]. La dispersion de la vitesse de groupe est liée à la variation de l’indice de réfraction n selon la fréquence d’une onde. Chaque composante spectrale formant une impulsion se propage donc à une vitesse différente dans un milieu, puisque la vitesse d’un signal électromagnétique de fréquence ω est la vitesse de groupe $v_g(\omega)$. Dans un milieu de dispersion dite “normale”, le rouge voyage plus rapidement que le bleu, ce qui produit une séparation des composantes fréquentielles le long de l’impulsion : on retrouve les fréquences plus élevées à la queue et les fréquences plus basses dans la montée. L’inverse se produit dans une situation de dispersion dite “anormale”. On assiste à une modification de la forme de la impulsion qui s’élargit à tout le moins. Ce phénomène affecte la forme temporelle d’une impulsion sans en changer la norme

du spectre (l'amplitude du spectre ne change pas, alors que la phase du spectre change). C'est pourquoi un spectre large n'implique pas nécessairement une impulsion courte : un spectre large est plutôt la garantie que l'impulsion limitée par la transformée de Fourier, qui correspond au cas d'une phase spectrale constante, est d'autant plus courte. Ceci est dû aux relations d'incertitude selon lesquelles le produit de la largeur spectrale avec la durée temporelle d'une impulsion doit respecter l'inégalité $\Delta f_{rms} \Delta t_{rms} \geq 1/2$, liant les paires de Fourier [57]. On utilise régulièrement la dispersion de la vitesse de groupe pour étirer ou compresser temporellement des impulsions. Ce phénomène est aussi au coeur de l'amplification d'impulsions avec l'ajout de dérive en fréquence, une technique utilisée dans tous les systèmes laser opérant à haute puissance [66]. Également source de glissement en fréquence, l'auto-modulation de phase est un phénomène non linéaire découlant de l'indice de réfraction non linéaire n_2 . En effet, la plupart des matériaux possèdent un indice de réfraction non linéaire qui transforme l'indice de réfraction standard n_0 comme suit : $n_{tot} = n_0 + n_2|\mathbf{E}|^2$. Comme le changement de phase induit par un parcours optique d'une distance L s'écrit " $n_{tot}L$ ", la phase du champ électromagnétique acquiert un terme proportionnel à " $n_2|\mathbf{E}|^2L$ " qui induit un glissement en fréquence pour les champs électromagnétiques physiquement réalisables. En pratique, on distingue deux longueurs caractéristiques dépendantes des propriétés d'un milieu, soit la longueur dispersive L_D et la longueur non linéaire L_{NL} , qui permettent d'approximer la force relative des effets non linéaires par rapport aux effets linéaires : lorsque $L_{NL} > L > L_D$, on peut considérer la propagation comme linéaire et vice versa.

Dans le contexte de l'accélération de particules à l'aide d'un faisceau laser, le glissement en fréquence constitue une avenue intéressante dans beaucoup de cas. L'idée est de briser la symétrie du champ électromagnétique et potentiellement d'exploiter les cycles optiques plus longs qui sont générés. En effet, en utilisant un champ libre de dérive en fréquence, la symétrie du champ fait que le gain en énergie acquis dans un demi-cycle optique négatif sera neutralisé par une perte d'énergie égale dans un demi-cycle optique positif similaire et d'amplitude égale. L'existence d'une dérive de fréquence brise la symétrie du champ et par la même occasion la symétrie du gain et des pertes.

La dérive en fréquence est employée de différentes manières dans le domaines de l'accélération d'électrons. Dans le vide, on l'utilise, par exemple, pour modéliser les impulsions laser de manière à obtenir un champ longitudinal par interférence [20] ou encore pour créer un réseau d'intensité mobile qui accélère les électrons piégés [28]. Il a même été proposé d'utiliser la dérive de fréquence pour étendre l'interaction avec l'électron dans un accélérateur utilisant une cavité laser à électrons libres inverse ("inverse free-electron laser") [21]. Cependant, on trouve assez peu d'articles dans la littérature abordant l'introduction de glissement en fréquence dans une impulsion laser pour accélérer directement des électrons dans le vide. Le tableau 1.1 présente, au meilleur de notre connaissance, les articles ayant été publiés sur le sujet. La première publication, par A. G. Khachatryan, date de l'année 2004 [25]. Comme on peut le voir dans

le tableau, la majorité des travaux considèrent un glissement en fréquence linéaire ajouté à un champ impulsionnel gaussien avec une polarisation linéaire selon l'axe x , perpendiculaire à la propagation. Il s'agit donc d'accélération pondéromotrice. On souligne qu'un article par F. Sohbatzadeh et al. présente une version modifiée de l'impulsion gaussienne, dont l'enveloppe devient asymétrique après une propagation sur une longue distance [62] : l'idée d'une enveloppe asymétrique sera discutée plus loin dans ce mémoire. Quelques articles considèrent le développement du champ électromagnétique en séries de Lax, qui permettent une description plus précise et valide du champ lors de la focalisation d'une impulsion : ceci permet de voir, par exemple, l'apparition d'une composante longitudinale plus forte du champ électrique. L'ensemble des publications concluent à une amélioration des performances du schéma d'accélération à l'étude en présence de glissement en fréquence en terme d'énergie cinétique maximale atteinte par la particule chargée. La majorité d'entre elles utilisent l'équation de Newton-Lorentz pour modéliser la trajectoire des particules et quelques-unes ont recours à des simulations PIC plus sophistiquées. La puissance crête et/ou l'amplitude de l'impulsion sont gardées constantes chaque fois et la particule étudiée possède le plus souvent une vitesse initiale lui donnant une énergie de l'ordre du MeV.

Aucune des publications mentionnées précédemment au tableau 1.1 ne discute d'accélération de particules chargées dans le cadre de l'accélération sous-cycle. Elles considèrent plutôt une particule poussée par le potentiel pondéromoteur de l'impulsion ou une particule se propageant dans le plan y - z avant d'être expulsée du faisceau avec une énergie terminale. Ainsi, très peu d'efforts ont été investis pour étudier l'effet du glissement en fréquence pour une impulsion de polarisation radiale : un seul article aborde le sujet [33]. C'est dans ce contexte que s'inscrit le présent mémoire ; le travail qui suit vise à élucider les effets reliés au glissement en fréquence pouvant affecter l'accélération d'électrons à l'aide d'impulsions de polarisation radiale fortement focalisées. Pour ce faire, il sera nécessaire de construire un formalisme plus rigoureux pour la description du champ laser avec une dérive en fréquence, puisque les modèles existants ne sont pas parfaitement adaptés à la représentation d'impulsions à la fois ultrabrèves et fortement focalisées. Il s'agit de la suite d'un travail visant à explorer théoriquement l'accélération d'électrons en champ direct avec des simulations des plus fidèles à la réalité physique pour guider et faciliter la réalisation expérimentale de ce schéma.

TABLE 1.1 – Classification des articles sur l’emploi d’un champ avec une dérive de fréquence selon le type de dérive en fréquence et la description du champ employée

		Linéaire	Quadratique	“Périodique”	Autre
Impulsion gaussienne	PL	[3, 16, 25, 26, 53, 54, 58] [60–64, 82, 83]	[1]	[1, 26]	[26]
	PC	[60–62]	-	-	-
	PE	[19, 34, 53, 54]	-	-	-
Séries de Lax	PL	[16, 51, 52]	-	-	-
	PR	[33]	-	-	-
Enveloppe $\cos^2 t$		[26, 52]	[52]	-	-
Par morceaux		[52]	[52]	-	[25, 26]
Onde plane		[51, 63]	-	-	-

*La signification des acronymes est la suivante : “PL” pour polarisation linéaire, “PC” pour polarisation circulaire, “PE” pour polarisation elliptique, “PR” pour polarisation radiale.

*Par l’appellation “par morceaux”, on entend que l’auteur a utilisé un champ personnalisé défini par morceaux.

*Certains articles utilisent une définition différente du glissement en fréquence, notamment lorsqu’il est question de dérive en fréquence “périodique”.

Chapitre 2

Théorie de l'impulsion TM_{01} et modélisation

Ce chapitre aborde l'impulsion TM_{01} d'un point de vue théorique. À la section 2.1, on présente, en premier lieu, deux méthodes d'intérêt pour obtenir l'expression analytique représentant l'impulsion transverse magnétique. Ensuite, à la section 2.2, on discute de l'introduction d'une dérive de fréquence dans le champ électromagnétique à partir de la généralisation du spectre de Poisson, ce qui constitue un résultat nouveau. On utilise aussitôt ces notions à la section 2.3 pour établir le champ électromagnétique de l'impulsion TM_{01} en présence de glissement en fréquence qu'on compare finalement à la solution gaussienne à la section 2.4.

2.1 L'impulsion TM_{01}

Pour décrire adéquatement l'évolution d'un champ électromagnétique dans le vide, il est nécessaire de trouver une solution pour les champs électrique et magnétique satisfaisant les équations de Maxwell. Ces dernières se combinent sous la forme d'une équation d'onde, ou encore son équivalent dans le domaine spectral, l'équation d'Helmholtz, pour chaque champ.

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + k^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

Bien qu'une grande variété de faisceaux puissent être obtenus via les équations (2.1) et (2.2), dans le contexte de ce mémoire on s'intéressera particulièrement aux impulsions transverses magnétiques TM_{01} , donc sans composante du champ magnétique dans la direction de propagation, qui correspond à l'axe z . Il s'agit d'impulsions avec une symétrie cylindrique qu'on dit de polarisation radiale, c'est-à-dire qu'on y retrouve une composante radiale E_r non nulle du champ électrique et un champ magnétique azimutal H_ϕ . Même si cela est parfois passé sous silence, la composante longitudinale du champ électrique de telles impulsions est aussi

non nulle. En effet, à partir de la loi de Maxwell sur la divergence du champ $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, il est nécessaire que $(1/r)\partial_r(rE_r) + \partial_z(E_z) = 0$, la composante E_ϕ étant nulle par construction. Une approche qualitative montre alors rapidement qu'une étendue limitée du faisceau dans la dimension transverse, ce qui signifie que E_r est une fonction de la coordonnée radiale r , induit une composante longitudinale non nulle; l'équation de Maxwell tout juste mentionnée nous indique que $E_z = -(1/r) \int \partial_r(rE_r) dz$. Cette composante longitudinale E_z est au centre des phénomènes abordés dans ce mémoire.

Plusieurs méthodes permettent de résoudre les équations différentielles (2.1) et (2.2) en faisant parfois appel à diverses approximations. Dans les prochaines sous-sections, on s'intéressera à deux types de solutions donnant lieu à des expressions analytiques pour décrire les impulsions laser transverses magnétiques TM_{01} . On examinera d'abord l'approximation paraxiale et l'approximation de l'enveloppe lente, suivies par la résolution exacte des équations de Maxwell pour une impulsion isodiffractante.

2.1.1 Approximations paraxiale et de l'enveloppe lente

Les approximations paraxiale et de l'enveloppe lente sont très largement utilisées pour résoudre les équations (2.1) et (2.2), puisqu'elles permettent de trouver des solutions analytiques simples et pratiques. En effet, en supposant que le champ électrique consiste en une onde se propageant le long de l'axe optique, oscillant à la fréquence porteuse ω_0 et modulée par une enveloppe complexe $\tilde{A}(\mathbf{r}, t)$, tel que $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \right\} = \Re \left\{ \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \exp [j(\omega_0 t - k_0 z)] \right\}$, on impose les approximations

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right| \ll \left(\left| 2k_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \nabla_T^2 \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \right| \right) \quad (2.3a)$$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right| \ll \left(\left| 2\omega_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right| \right) \quad (2.3b)$$

où $\nabla_T^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, simplifiant ainsi considérablement l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 à résoudre. On retrouve alors l'équation d'onde paraxiale bien connue :

$$\nabla_T^2 \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) - 2jk_0 \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Dans le cadre de l'approximation paraxiale, on considère des faisceaux dont toutes les composantes se propagent dans une direction prédominante avec un angle de divergence faible, c'est-à-dire inférieur à environ 30° [57]. L'approximation de l'enveloppe lente, quant à elle, signifie que l'on considère une enveloppe complexe $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$ dont les variations sont faibles, voire négligeables en l'espace d'un cycle de l'oscillation porteuse de longueur d'onde λ_0 . On se concentre maintenant sur une composante en particulier, soit la composante radiale du champ. Lorsque l'on sépare l'enveloppe complexe $\tilde{A}_r(\mathbf{r}, t)$ en une enveloppe spatiale $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$ et une fonction déterminant le profil temporel $\tilde{F}(\omega_0 t - k_0 z)$, tel que $\tilde{A}_r(\mathbf{r}, t) = \tilde{\Psi}(\mathbf{r}) \tilde{F}(\omega_0 t - k_0 z)$,

on retrouve les modes Laguerre-Gauss comme solutions générale pour la fonction $\tilde{\Psi}(\mathbf{r})$ dans un système de coordonnées cylindriques. On a alors

$$\Psi_{pm}(\mathbf{r}) = \frac{C_{pm}}{w(z)} \left(\frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^p L_p^m \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ -jk \frac{r^2}{2\tilde{q}(z)} + jm\theta \right\} \exp \{ j(2p + m + 1)\psi_G \} \quad (2.5)$$

où C_{mn} est une constante d'amplitude, $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}$ est la dimension transversale du faisceau, $r^2 = x^2 + y^2$ est la coordonnée radiale, $L_p^m(x)$ est le polynôme de Laguerre généralisé, $\tilde{q}(z) = z + jz_R$ est le rayon complexe, θ est la coordonnée angulaire, $\psi_G = \arctan(z/z_R)$ est la phase de Gouy du mode fondamental gaussien Ψ_{00} , w_0 est la taille de faisceau à l'étranglement et z_R est la distance de Rayleigh. On retrouve l'expression paraxiale du champ pour des faisceaux TM_{pn} (où $n = m + 1$) en supposant une enveloppe $\tilde{F}(\omega_0 t - k_0 z)$. L'enveloppe gaussienne, par exemple, permet une solution impulsionnelle. Le mode transverse magnétique d'ordre le plus faible, soit le mode TM_{01} , s'écrit, en présence d'une enveloppe gaussienne, selon :

$$\tilde{E}_r(r, t) = \frac{Cr}{(\tilde{q}(z))^2} \exp \left\{ -jk \frac{r^2}{2\tilde{q}(z)} \right\} \exp \left\{ -\frac{(\omega_0 t - k_0 z)^2}{\omega_0^2 T_0^2} \right\} e^{j(\omega_0 t - k_0 z - \phi_0)} \quad (2.6)$$

L'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ permet alors d'obtenir finalement l'expression approximative du champ électrique longitudinal $E_z(\mathbf{r}, t)$ pour l'impulsion TM_{01} . En effet, en inversant l'équation de la divergence et en ne conservant que le terme dominant d'ordre 0, tel que décrit dans [69, 78], on retrouve

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z(\mathbf{r}, t) &= \frac{2jk_0\Psi_0}{(z + jz_R)^2} \left[1 - \frac{jk_0r^2}{2(z + jz_R)} \right] \exp \left\{ -\frac{jk_0r^2}{2(z + jz_R)} \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{(\omega_0 t - k_0 z)^2}{\omega_0^2 T_0^2} \right\} e^{j(\omega_0 t - k_0 z - \phi_0)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Même si les approximations paraxiale et de l'enveloppe lente se révèlent très utiles dans une grande variété de situations, elles s'avèrent problématiques pour la description du schéma d'accélération considéré dans ce mémoire. En effet, on s'intéresse aux impulsions fortement focalisées, ce qui implique un champ hautement non paraxial ; si la durée de l'impulsion correspond à quelques cycles optiques, ceci se traduit par une forte variation de l'enveloppe sur une longueur comparable à la longueur d'onde porteuse λ_0 . En utilisant les présentes approximations, l'espace des valeurs acceptables pour les différents paramètres est restreint. Ainsi, on se limite aux situations pour lesquelles $k_0 z_R \gg 1$: dans la littérature, on accepte généralement que la taille du faisceau à l'étranglement doit être $w_0 \geq 2.5\lambda_0$, ce qui correspond à $k_0 z_R \geq 120$ [15, 76, 80]. On peut également réfléchir tout de suite aux implications des approximations en question dans le cadre d'une impulsion avec une dérive de fréquence. En effet, l'approximation de l'enveloppe lente ne peut pas décrire un champ soumis à une forte dérive en fréquence à moins d'en modifier l'enveloppe, puisque la longueur d'onde instantanée du champ pourrait être beaucoup plus longue que la longueur d'onde centrale dans la région

de l'impulsion où seront localisées les basses fréquences. Ainsi, si on pense à une dérive en fréquence linéaire, une enveloppe donnée, dont la variation est lente relativement à la longueur d'onde au centre de l'impulsion, peut avoir comportement inadéquat à la queue de l'impulsion où la longueur d'onde instantanée inférieure nécessite une variation plus lente. Somme toute, pour respecter l'approximation de l'enveloppe lente, l'enveloppe d'une impulsion doit changer selon la force du glissement en fréquence (surtout dans le cas d'un glissement en fréquence fort).

2.1.2 Solution exacte aux équations de Maxwell pour l'impulsion isodiffractante

La sous-section précédente fait appel à l'inversion de l'équation de Maxwell de la divergence du champ électrique pour obtenir une solution approximative décrivant un faisceau pulsé TM_{01} . Il existe toutefois d'autres techniques qu'on retrouve dans la littérature, dont celle des vecteurs de Hertz, aussi dites des potentiels de polarisation [24]. Il s'agit de résoudre l'équation d'onde pour un vecteur de Hertz électrique $\mathbf{\Pi}_e$ et un vecteur de Hertz magnétique $\mathbf{\Pi}_m$, définis par

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_e - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{\Pi}_m \quad (2.8)$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi}_m + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{\Pi}_e. \quad (2.9)$$

En considérant que les vecteurs de Hertz sont polarisés linéairement, on simplifie grandement le problème, puisqu'on obtient une seule équation d'onde scalaire (on pose, par exemple, $\mathbf{\Pi}_m = 0$ et $\mathbf{\Pi}_e = \Psi(\mathbf{r}, t)\mathbf{a}_z$ pour un faisceau TM) au lieu de deux équations différentielles vectorielles [6]. Les amplitudes attribuées aux vecteurs de Hertz en polarisation linéaire mèneront à différents états de polarisation pour les champs physiques. Le problème reste entier cependant, puisque les vecteurs de Hertz en eux-mêmes ne permettent pas d'obtenir aisément une solution sous forme fermée sans utiliser l'approximation paraxiale.

Lors de ses études doctorales, A. April a développé une méthode pour la résolution des équations de Maxwell faisant intervenir les vecteurs de Hertz et le modèle de source/puits complexe [5, 6]. Cette méthode permet d'obtenir le champ électromagnétique d'une impulsion transverse magnétique TM_{01} (polarisation radiale), transverse électrique TE_{01} (polarisation azimutale) ou encore de polarisation linéaire LP_{01} pour une distribution spectrale $F(\omega)$ quelconque. Pour ce faire, il suffit de déterminer la transformée de Fourier inverse de la composante non nulle du vecteur de Hertz $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \omega)$ en question, c'est-à-dire

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = TF^{-1} \left\{ \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, \omega) \right\} = \frac{\Psi_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{e^{-\omega a/c}}{\tilde{R}} \left[e^{j\omega \tilde{R}/c} - e^{-j\omega \tilde{R}/c} \right] d\omega \quad (2.10)$$

où $\tilde{R}^2 = r^2 + (z + ja)^2$, Ψ_0 est un facteur d'amplitude constant et a est le paramètre confocal. Le paramètre confocal est relié à la distance de Rayleigh z_R d'un faisceau par la relation $k_0 z_R = \sqrt{1 + (k_0 a)^2} - 1$. Il s'agit, en quelque sorte, d'une mesure du degré de non-paraxialité

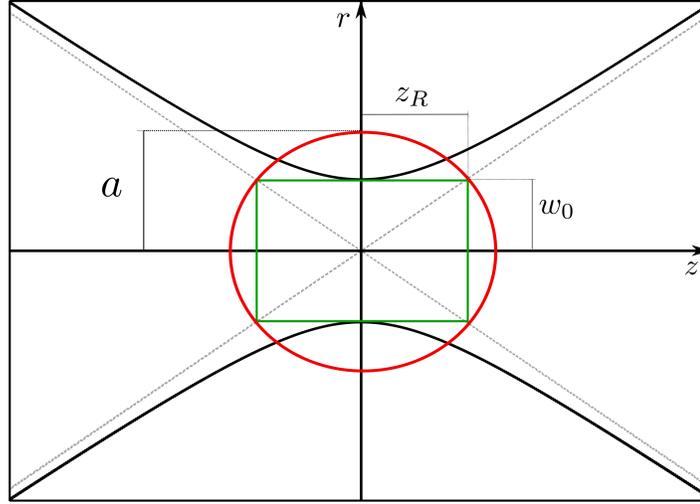


FIGURE 2.1 – Représentation géométrique du paramètre confocal, de la distance de Rayleigh et de la taille de faisceau à l'étranglement.

d'un faisceau : pour un faisceau paraxial, on a $k_0 a \gg 1$ et donc $z_R \approx a$. Géométriquement, pour un faisceau gaussien, le paramètre confocal correspond au rayon d'un cercle centré à l'origine de rayon intersectant le rectangle délimité par la distance de Rayleigh et l'étranglement du faisceau.

L'intégrale (2.10) n'est, en général, pas triviale étant donné la dépendance potentielle du paramètre confocal envers la fréquence, tel que $a = a(\omega)$. Il est cependant possible de trouver une solution analytique en s'intéressant au cas pour lequel le paramètre confocal (ou la distance de Rayleigh en optique paraxiale) est constant pour toutes les fréquences : on parle alors d'impulsion isodiffractante. Dans ce cas particulier, le front de phase de chacune des composantes spectrales possède un rayon de courbure identique : c'est plutôt la taille de faisceau à l'étranglement qui varie selon la fréquence. Bien que cela puisse sembler restrictif, les impulsions isodiffractantes sont bien présentes dans la littérature et peuvent être réalisées en laboratoire simplement à partir d'une cavité laser aux miroirs courbes. En effet, d'après la théorie des résonateurs laser stables, la longueur de Rayleigh z_R , et donc le paramètre confocal a dans sa limite paraxiale, pour un faisceau gaussien est déterminée par les paramètres géométriques de la cavité elle-même, puisque le rayon de courbure des fronts de phase est déterminé par la forme des miroirs en question. On a donc la même distance de Rayleigh pour toutes les fréquences. En supposant une impulsion isodiffractante, l'équation (2.10) devient $\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\Psi_0}{R} [f(\tilde{t}_+) - f(\tilde{t}_-)]$, où $\tilde{t}_\pm = t \pm \tilde{R}/c + ja/c$ est la variable de temps complexe et $f(t) = TF^{-1}\{F(\omega)\}$ est la forme temporelle associée au spectre $F(\omega)$ choisi. On peut alors obtenir les expressions correspondant aux composantes du champ électromagnétique de l'impulsion TM_{01} en dérivant cette expression, comme dicté par les équations (2.8) et (2.9). Ainsi, les trois composantes non nulles décrivant une impulsion laser de polarisation radiale

s'écrivent :

$$E_r(\mathbf{r},t) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial r} = \Re \left\{ \frac{3E_0 \sin 2\tilde{\theta}}{2\tilde{R}} \left(\frac{G_-^{(0)}}{\tilde{R}^2} - \frac{G_+^{(1)}}{c\tilde{R}} + \frac{G_-^{(2)}}{3c^2} \right) \right\}, \quad (2.11a)$$

$$E_z(\mathbf{r},t) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Re \left\{ \frac{E_0}{\tilde{R}} \left[\frac{(3 \cos^2 \tilde{\theta} - 1)}{\tilde{R}} \left(\frac{G_-^{(0)}}{\tilde{R}} - \frac{G_+^{(1)}}{c} \right) - \frac{\sin^2 \tilde{\theta}}{c^2} G_-^{(2)} \right] \right\}, \quad (2.11b)$$

$$H_\phi(\mathbf{r},t) = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial r} = \Re \left\{ \frac{E_0 \sin \tilde{\theta}}{\eta_0 \tilde{R}} \left(\frac{G_-^{(1)}}{c\tilde{R}} - \frac{G_+^{(2)}}{c^2} \right) \right\}, \quad (2.11c)$$

où $\Re\{\dots\}$ dénote la partie réelle, $\cos \tilde{\theta} = (z + ja)/\tilde{R}$, $\sin \tilde{\theta} = r/\tilde{R}$, $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance caractéristique du vide et $G_\pm^{(n)} = \partial_t^n [f(\tilde{t}_+) \pm f(\tilde{t}_-)]$.

2.2 Introduction du glissement en fréquence

Pour étudier l'effet d'un glissement en fréquence sur l'accélération d'électrons lors de la focalisation d'un faisceau TM_{01} , on doit introduire une variation de la fréquence instantanée dans le modèle théorique choisi pour décrire l'impulsion $f(t)$. On souhaite généralement un glissement en fréquence linéaire créant une asymétrie dans l'impulsion. Les prochaines sections abordent l'ajout de glissement à un spectre donné pouvant être combiné aux solutions décrites précédemment

2.2.1 Le spectre gaussien glissé en fréquence

En régime paraxial, comme le faisceau gaussien émerge naturellement en tant que mode se propageant sans déformation, il devient pertinent de s'intéresser à l'introduction de glissement en fréquence dans un spectre gaussien. Ce type de spectre est de surcroît déjà utilisé dans la littérature pour simuler l'accélération d'électrons, tel que mentionné dans l'introduction. Puisque la fonction gaussienne munie d'un argument complexe est autotransformante du point de vue de la transformée de Fourier, on peut aisément faire l'implémentation du glissement en fréquence en conservant la forme gaussienne. Ainsi, en multipliant la forme temporelle $f(t)$ par un terme e^{jCt^2/T^2} , on obtient directement un glissement en fréquence linéaire, dont la force est caractérisée par le rapport C/T^2 :

$$f(t) = \sqrt{2}\Psi_0 \frac{\sqrt{1+jC}}{T} \exp \left\{ -\frac{t^2}{T^2} + j(\omega_0 t - \phi_0) \right\} \exp \left\{ j \frac{Ct^2}{T^2} \right\}, \quad (2.12)$$

$$F(\omega) = \Psi_0 e^{-j\phi_0} \exp \left\{ -\frac{(\omega - \omega_0)^2 T^2}{4(1-jC)} \right\}. \quad (2.13)$$

C'est généralement de cette manière que le glissement en fréquence est considéré dans la littérature lorsqu'il est question d'accélération d'électrons. Il est intéressant de noter que le glissement en fréquence causé par la dispersion dans un milieu diélectrique prend plutôt la

forme suivante dans les domaines temporel et fréquentiel [2] :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\Psi_0\sqrt{2}}{T\sqrt{1+jC}} \exp \left\{ \frac{-1}{(1+jC)} \frac{t^2}{T^2} + j(\omega_0 t - \phi_0) \right\} \\ &= \frac{\Psi_0\sqrt{2}}{T\sqrt{1+jC}} \exp \left\{ \frac{-1}{1+C^2} \frac{t^2}{T^2} + j(\omega_0 t - \phi_0) \right\} \exp \left\{ j \frac{(-C)}{1+C^2} \frac{t^2}{T^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$F(\omega) = \Psi_0 e^{-j\phi_0} \exp \left\{ -(1+jC) \frac{(\omega - \omega_0)^2 T^2}{4} \right\}. \quad (2.15)$$

Effectivement, lorsqu'une impulsion traverse un milieu dispersif, un terme $e^{-j\beta(\omega)z}$ fait son apparition : on ajoute une phase $\beta(\omega)z \approx \beta_0 z + \beta_1(\omega - \omega_0)z + \beta_2(\omega - \omega_0)^2 z/2 + \mathcal{O}(\omega^3)$. Dans l'exemple ci-dessus, on retrouve donc un glissement en fréquence linéaire variant plutôt comme $(-C)/((1+C^2)T^2)$. De plus, dans cette forme, une augmentation du glissement se traduit par une diminution d'amplitude et un élargissement temporel de l'impulsion en temps de même qu'un spectre d'amplitude inchangé par l'ajout de cette nouvelle phase. Contrairement à ce qui se produit avec l'équation (2.12), la largeur spectrale est la même peu importe le paramètre C dans ce second cas. Bien que les équations (2.12) et (2.14) restent toutes deux valides, il est important de choisir le cas correspondant le mieux à la situation étudiée.

2.2.2 Le spectre de Poisson sans glissement en fréquence

Le spectre gaussien présente plusieurs inconvénients pour la simulation de l'accélération d'électrons. On note d'abord la présence d'une composante continue ($F(\omega = 0) \neq 0$) et de fréquences négatives. Ces deux caractéristiques peuvent mener l'impulsion gaussienne définie à (2.6) à présenter des divergences non physiques loin de l'axe optique (lorsque $r \rightarrow \infty$) ou à la queue de l'impulsion (lorsque $t \rightarrow \infty$) [6, 38, 49]. De plus, une composante continue pourrait mener à des résultats trompeurs provoqués par l'accélération lente, mais constante, d'un électron durant la simulation.

Pour ces raisons, on choisit plutôt d'utiliser un spectre de Poisson pour simuler l'accélération directe d'électrons par impulsions laser de polarisation radiale, ultracourtes et fortement focalisées. Cette distribution spectrale fut proposée par Caron et Potvliege pour la modélisation d'impulsions isodiffractantes couvrant une très large bande spectrale [49]. Dans leur forme originale, le spectre de Poisson et sa transformée de Fourier s'écrivent comme suit :

$$F(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{s+1} \omega^s \exp \{-s\omega/\omega_0\} \theta(\omega) \quad (2.16a)$$

$$f(t) = e^{j\phi_0} \left(1 - j \frac{\tau}{s} \right)^{-(s+1)} \quad (2.16b)$$

où s est un paramètre réel et positif contrôlant la largeur spectrale, ω_0 est la fréquence correspondant à la plus grande amplitude spectrale, $\theta(\omega)$ est la fonction de Heaviside (aussi appelée "fonction échelon"), ϕ_0 est une phase constante et $\tau = \omega_0 t$ est une variable de temps sans dimension. Ces deux fonctions sont montrées à la figure 2.2. On note que la phase spectrale

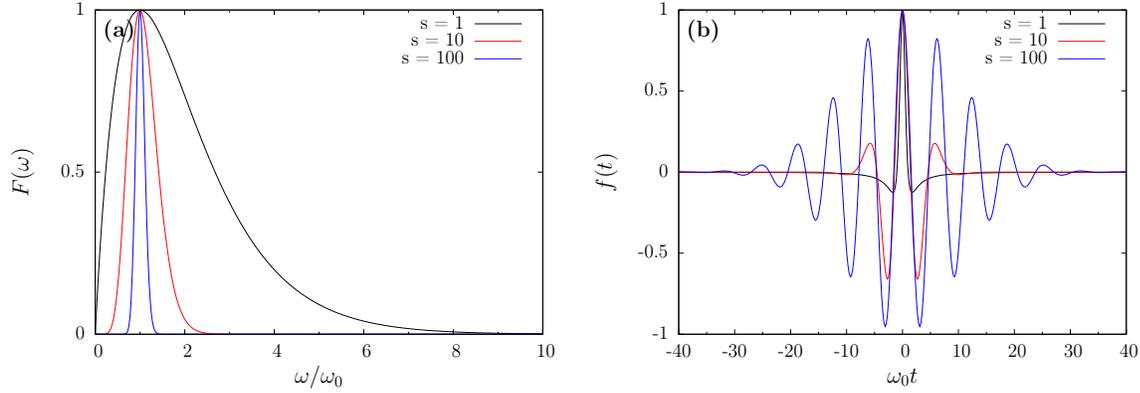


FIGURE 2.2 – (a) Spectre de Poisson $F(\omega)$ et (b) sa transformée de Fourier $f(t)$ tous deux normalisés pour différentes valeurs du paramètre de largeur spectrale s , tel que prédit par la paire d'équations (2.16a) et (2.16b).

est constante sur tout le domaine spectral et prend la valeur ϕ_0 . Il s'agit donc du cas limité par la transformée de Fourier : la durée de l'impulsion est liée directement à la largeur spectrale, c'est-à-dire que plus la largeur spectrale est grande, plus la durée est courte. Cependant, il est intéressant de constater que la fréquence instantanée n'est pas constante, ce qui implique un glissement en fréquence. En effet, on trouve :

$$\frac{\omega_{inst}}{\omega_0} = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left[1 - \frac{\tau^2}{s^2} + \frac{\tau^4}{s^4} - \frac{\tau^6}{s^6} + \mathcal{O}(\tau^8)\right]. \quad (2.17)$$

Ceci est dû au décalage vers le bleu auto-induit qui est un peu l'analogue temporel de la phase de Gouy [14] : à cause de sa durée finie, l'impulsion est glissée en fréquence de manière inhérente, phénomène qui est d'autant plus fort que l'impulsion est courte [6, 35, 36]. Ce glissement en fréquence est toutefois symétrique, puisque la fréquence instantanée de l'impulsion varie selon des puissances paires du temps. Ce phénomène ne permet donc pas de produire l'asymétrisation recherchée.

2.2.3 Le spectre de Poisson avec une fréquence porteuse complexe

Pour s'assurer de la véracité du modèle théorique décrivant le champ électromagnétique de l'impulsion TM_{01} , on souhaite conserver un spectre de Poisson tout en trouvant un moyen d'y introduire du glissement en fréquence, ce qui facilitera la comparaison avec les travaux antérieurs du groupe Piché. En fait, cette éventualité est mentionnée dans l'article original de Caron et Potvliege dans lequel on peut lire qu'un glissement en fréquence peut être ajouté en prenant simplement une valeur complexe de ω_0 . Suivant cette proposition, on applique donc la substitution $\omega_0 \rightarrow \tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 + jC)$, où C est un paramètre réel de glissement en fréquence. Ce faisant, le spectre de Poisson de l'équation (2.16a) devient

$$F_C(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} (1 + C^2)^{-(s+1)/2} \left(\frac{s}{\omega_0(1 + jC)}\right)^{s+1} \omega^s \exp\left\{-\frac{s\omega}{\omega_0(1 + jC)}\right\} \theta(\omega). \quad (2.18)$$

Ce changement ne modifie pas la forme fonctionnelle de la transformée de Fourier inverse. On obtient donc tout simplement la forme temporelle $f_C(\tau)$:

$$\begin{aligned} f_C(\tau) &= e^{j\phi_0} (1 + C^2)^{-(s+1)/2} \left(1 - j \frac{(1 + jC)\tau}{s} \right)^{-(s+1)} \\ &= e^{j\phi_0} \left(\frac{1 - jC}{\sqrt{1 + C^2}} \right)^{s+1} \left(1 - j \frac{(1 + C^2)}{s} \left[\tau + \frac{Cs}{1 + C^2} \right] \right)^{-(s+1)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

où l'on a normalisé l'amplitude de la fonction de manière appropriée. On remarque que l'impulsion subit une transformation suivant la valeur du paramètre C . On assiste à une translation temporelle du centre de l'impulsion combinée à un changement d'échelle. Du côté de la fréquence instantanée, en dérivant la phase de l'équation (2.19), on obtient :

$$\frac{\omega_{inst}}{\omega_0} = \frac{s(s+1)}{\tau^2(1+C^2) + 2sC\tau + s^2} \quad (2.20)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{s} \right) (1 + C^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1 + C^2}{s} \right)^{2n} \tau_p^{2n}. \quad (2.21)$$

On note qu'il s'agit d'un glissement en fréquence non linéaire. En s'intéressant au référentiel de l'impulsion, on pose $\tau_p = \tau + Cs/(1 + C^2)$, le temps propre de l'impulsion. À partir de l'équation (2.21), qui correspond à la série de Taylor de la fréquence instantanée au centre de l'impulsion ($\tau_p = 0$), on voit qu'il n'y a pas de glissement en fréquence linéaire ou cubique apparaissant. En fait, on retrouve seulement une forme similaire à ce qui est produit par le décalage vers le bleu auto-induit, mais pouvant jouer un rôle pour des impulsions plus longues si une valeur adéquate de C est choisie. De plus, l'équation (2.19) révèle un problème majeur de modélisation du fait que l'axe du temps subit une contraction d'un facteur $(1 + C^2)$, réduisant la durée temporelle de l'impulsion pour de grandes valeurs du paramètre de glissement C . L'inverse devrait se produire dans un modèle réaliste d'impulsion glissée en fréquence. Un spectre de Poisson modifié pour produire l'équivalent d'une fréquence ω_0 complexe ne semble donc pas être une option viable pour décrire le phénomène à l'étude.

2.2.4 Le spectre de Poisson avec une phase quadratique

Une autre voie potentiellement intéressante pour l'introduction de glissement en fréquence consiste à adjoindre directement une variation quadratique de la phase au spectre de Poisson, tel que montré à l'équation (2.22).

$$F_{Quad}(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{s+1} \omega^s \exp\{-s\omega/\omega_0\} \exp\left\{-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4C\omega_0^2}\right\} \theta(\omega) \quad (2.22)$$

L'idée de cette démarche est fondée sur l'analogie avec le spectre gaussien, comme décrit à la sous-section 2.2.1 : puisque le spectre de Poisson tend vers un spectre gaussien pour de grandes valeurs de s , ajouter une phase quadratique conduirait hypothétiquement à un

glissement en fréquence purement linéaire. De plus, cet ajout laisse la norme du spectre inchangée, le glissement étant de semblable à celui produit par la dispersion dans un milieu diélectrique. Malheureusement, si le spectre gaussien accompagné d'une phase quadratique est auto-transformant, on ne peut pas en dire autant du spectre de Poisson. En fait, pour la plupart des fonctions, l'ajout d'un terme non linéaire à la phase peut modifier drastiquement la forme temporelle de l'impulsion. La transformée de Fourier inverse de l'équation (2.22) existe heureusement toujours sous une forme analytique :

$$f_{Quad}(\tau) = K_0 \exp \left\{ j \frac{C}{2} \bar{\tau}^2 \right\} \exp \{-Cs\bar{\tau}\} U \left(s + \frac{1}{2}, -\sqrt{2jC} [\bar{\tau} + js] \right) \quad (2.23)$$

où $\bar{\tau} = \tau + 1/4C$, $s \geq 1$, $U(a + 1/2, z) = D_{-a-1}(z)$ est la fonction parabolique cylindrique, telle que décrite au chapitre 12 de [44], et K_0 est une constante donnée par

$$K_0 = -e^{j \left[\phi_0 - \frac{1}{4C} - \frac{Cs^2}{2} \right]} \left(-js\sqrt{2jC} \right)^{s+1} \quad (2.24)$$

La démarche menant à l'équation (2.23) est détaillée à la section A.4 de l'annexe A. La fonction parabolique cylindrique est une fonction spéciale pouvant s'exprimer comme la somme de deux fonctions hypergéométriques confluentes de première espèce, qui sont elles-mêmes définies par des séries infinies. Le premier facteur de l'équation (2.23) est un terme de phase quadratique proportionnel à C , ce qui implique que l'impulsion représentée possède probablement un glissement en fréquence linéaire. La présence d'une fonction parabolique cylindrique avec un argument complexe rend cependant toute analyse plus ardue.

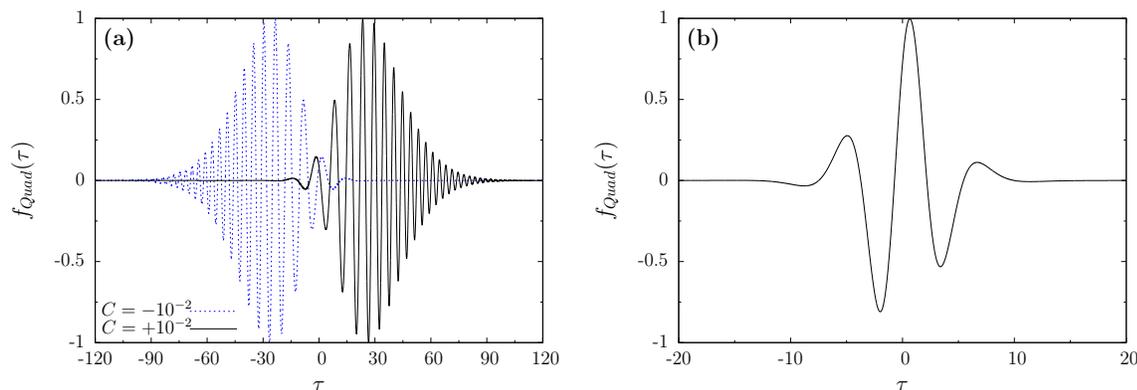


FIGURE 2.3 – Forme temporelle du champ de l'impulsion associée au spectre de Poisson modifié (2.22) pour un paramètre de largeur spectrale $s = 10$ et pour (a) $C = \pm 10^{-2}$, (b) $C = 100$.

La figure 2.3 montre la fonction $f_{Quad}(\tau)$. On voit qu'il y a bien formation d'une impulsion près de l'origine. On constate aussi qu'il est possible de créer un glissement vers les hautes fréquences ("up-chirp") ou vers les basses fréquences ("down-chirp") en choisissant adéquatement le signe du paramètre C .

La fonction $f_{Quad}(\tau)$ est le produit de deux fonctions divergentes. Il est nécessaire de s'assurer que l'expression (2.23) représente un champ physique d'énergie finie. On sait que, selon les propriétés de la transformée de Fourier, plus précisément d'après le théorème de Parseval, l'énergie est conservée par la transformée de Fourier. Ainsi, on peut déduire l'intégrale du carré de la norme de l'impulsion comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| K_0 \exp \{-Cs\bar{\tau}\} U \left(s + \frac{1}{2}, -\sqrt{2jC} [\bar{\tau} + js] \right) \right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_{Quad}(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{Quad}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{s\pi}{2^{2s}\omega_0} \frac{\Gamma(2s+1)}{(\Gamma(s+1))^2} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

Le spectre $F_{Quad}(\omega)$ étant de carré intégrable, on peut être assuré qu'il possède une transformée de Fourier et que celle-ci possède une énergie finie. Malgré tout, il est possible de vérifier la convergence de la solution à un temps $|t| \gg 1$ en utilisant un développement asymptotique de la fonction parabolique cylindrique. Lorsque z tend vers l'infini, la fonction parabolique cylindrique $U(a, z)$ peut s'approximer sous la forme d'une série infinie plus simple [44, éq. (12.9.1)], telle que

$$U(a, z) \sim e^{-\frac{1}{4}z^2} z^{-a-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{1}{2} + a)_{2n}}{n!(2z^2)^n} \quad (2.26)$$

pour $|\arg z| < \frac{3\pi}{4}$, où $(a)_n$ correspond au symbole de Pochhammer. On vérifie donc que l'équation (2.23), qui prend la forme $e^{z^2/4} U(a, z)$ où $z = -\sqrt{2jC}(\bar{\tau} + js)$, ne diverge pas après un temps t long, c'est-à-dire lorsque $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
\exp \left\{ \frac{z^2}{4} \right\} U \left(s + \frac{1}{2}, z \right) &\sim \exp \left\{ \frac{z^2}{4} \right\} \left[\exp \left\{ -\frac{z^2}{4} \right\} z^{-s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s+1)_{2n}}{n!(2z^2)^n} \right] \\
&\sim z^{-s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s+1)_{2n}}{n!2^n z^{2n}} \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Puisque la condition $s \geq 1$ s'applique, l'équation (2.27) décroît au moins aussi rapidement que $1/z^2$ (lorsque $s = 1$), ce qui est suffisant pour s'assurer de la convergence de la fonction et l'intégrale du carré de sa norme. On remarque aussi que, dans la présente limite, la fonction $f_{Quad}(\tau)$ est composée d'une série multipliant le terme $z^{-s-1} \propto (\bar{\tau} + js)^{-s-1} \propto (1 - j\bar{\tau}/s)^{-s-1}$, qui n'est pas sans rappeler la transformée inverse du spectre de Poisson limitée par la transformée de Fourier de l'équation (2.16). En fait, pour un glissement en fréquence faible, ce qui correspond à $C \gg 1$, le développement asymptotique de l'équation (2.27) est toujours valable, z étant proportionnel à la racine de C . On peut donc tronquer la série infinie pour

faire l'approximation :

$$\begin{aligned}
K_0 e^{jCs^2/2} e^{z^2/4} U\left(s + \frac{1}{2}, z\right) &\sim K_0 e^{jCs^2/2} z^{-s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(s+1)_{2n}}{n! 2^n z^{2n}} \\
&\sim K_0 e^{jCs^2/2} z^{-s-1} \left[1 - \frac{(s+1)_2}{2z^2} + \frac{(s+1)_4}{8z^4} + \mathcal{O}(z^{-6}) \right] \\
&\sim -e^{j[\phi_0 - \frac{1}{4C}]} \left(-js\sqrt{2jC} \right)^{s+1} \left[\left(-js\sqrt{2jC} \right) \left(1 - \frac{j\bar{\tau}}{s} \right) \right]^{-s-1} \\
&\sim -e^{j\phi_0} \left(1 - \frac{j\tau}{s} \right)^{-s-1}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

où on a négligé les termes d'ordre supérieur et on a considéré que $\bar{\tau} = \tau + 1/4C \approx \tau$. Pour un glissement en fréquence très faible, presque nul, on donc retrouve une forme semblable au cas limité par la transformée de Fourier. On ne peut toutefois pas obtenir un glissement en fréquence véritablement nul dans la présente situation, à moins de poser $C = \infty$.

Même si l'équation (2.23) semble adéquate pour la description d'impulsions laser glissées en fréquence, elle s'avère bien peu pratique. En effet, on constate rapidement qu'il y a peu de ressources numériques déjà en place pour le calcul des fonctions paraboliques cylindriques dont l'argument est complexe. Ceci implique que toute simulation nécessiterait l'utilisation de développements en série, de formules de récurrence et de développements asymptotiques pour extraire les valeurs reliées au champ électromagnétique. Cela est d'autant plus préoccupant que le fait de ne pas avoir recours à des séries tronquées ou à des solutions approximatives est l'un des grands avantages de la méthode utilisée dans le présent mémoire par rapport aux méthodes concurrentes pour la modélisation d'une impulsion laser. De plus, la présence de séries infinies rend le travail analytique plus complexe. On peut donc conclure qu'un spectre de Poisson avec une phase quadratique est une solution que l'on préférerait éviter pour des raisons pratiques, mais qui n'en reste pas moins intéressante sur le plan théorique.

2.2.5 Le spectre de Poisson avec un paramètre de largeur spectrale complexe

La troisième avenue à considérer pour l'introduction de glissement dans la forme temporelle $f(t)$ du spectre de Poisson est l'utilisation d'un paramètre de largeur spectrale complexe, de sorte que $s = s_r + js_i$, où l'on conserve la restriction $s_r \geq 0$. Cette proposition est faite par April dans sa thèse de doctorat [6], mais elle n'a pas été présentée ailleurs dans la littérature.

$$\begin{aligned}
F_s(\omega) &= \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s_r + js_i}{\omega_0} \right)^{s_r + js_i + 1} \omega^{(s_r + js_i)} \exp\{-s_r\omega/\omega_0\} \exp\{-js_i\omega/\omega_0\} \theta(\omega) \\
&= \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s_r + js_i}{\omega_0} \right)^{s_r + js_i + 1} \left[\omega^{s_r} e^{-s_r\omega/\omega_0} \theta(\omega) \right] e^{js_i(\ln\omega - \omega/\omega_0)} \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Comme le montre l'équation (2.29), le spectre d'amplitude normalisé ne dépend que de la partie réelle s_r du paramètre de largeur, dans cette version du spectre de Poisson. La partie

réelle de s dans le cas $s \in \mathbb{C}$ joue donc le même rôle que le paramètre s dans le cas $s \in \mathbb{R}$. De même, le spectre de phase n'est influencé que par la partie imaginaire s_i du paramètre de largeur. En effet, on introduit un terme de phase linéaire et un terme de phase logarithmique, tous deux proportionnels à s_i . Les changements apportés au spectre ne modifient pas la forme fonctionnelle de sa transformée de Fourier inverse. On retrouve donc

$$\begin{aligned} f_s(\tau) &= e^{j\phi_0} \left(1 - j \frac{\tau}{s_r + js_i}\right)^{-(s_r+1+js_i)} \\ &= e^{j\phi_0} \left(1 + j \frac{s_i}{s_r}\right)^{s_r+1+js_i} \left(1 - \frac{j[\tau - s_i]}{s_r}\right)^{-(s_r+1+js_i)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Il est intéressant de constater comment non seulement la phase, mais également l'enveloppe de l'impulsion est affectée. En effet, en écrivant la norme et la phase de $f_s(\tau)$ séparément, on remarque que l'impulsion devient asymétrique pour une valeur de s_i non-nulle et que son maximum bouge à $\tau_{max} = s_i/(s_r + 1)$.

$$|f_s(\tau)| = \left(\frac{1 + \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\tau - s_i}{s_r}\right)^2}\right)^{(s_r+1)/2} \exp\left\{s_i \left[\arctan\left(\frac{s_i}{s_r}\right) - \arctan\left(\frac{\tau - s_i}{s_r}\right)\right]\right\} \quad (2.31)$$

$$\arg(f_s(\tau)) = \frac{s_i}{2} \ln\left(\frac{1 + \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{\tau - s_i}{s_r}\right)^2}\right) - (s_r + 1) \left[\arctan\left(\frac{s_i}{s_r}\right) - \arctan\left(\frac{\tau - s_i}{s_r}\right)\right] \quad (2.32)$$

Une valeur de s_i positive mène à un glissement vers les hautes fréquences (“up-chirp”), alors que l'inverse mène à un glissement vers les basses fréquences (“down-chirp”). Comme montré à la figure 2.4, on vérifie rapidement à partir de (2.31) et de (2.32) que les impulsions correspondant à $\pm s_i$ sont la réflexion l'une de l'autre par rapport au plan situé à $t = 0$: $|f_s(\tau)| = |f_{s^*}(-\tau)|$ et $[\omega_{inst}(\tau)]|_s = [\omega_{inst}(-\tau)]|_{s^*}$.

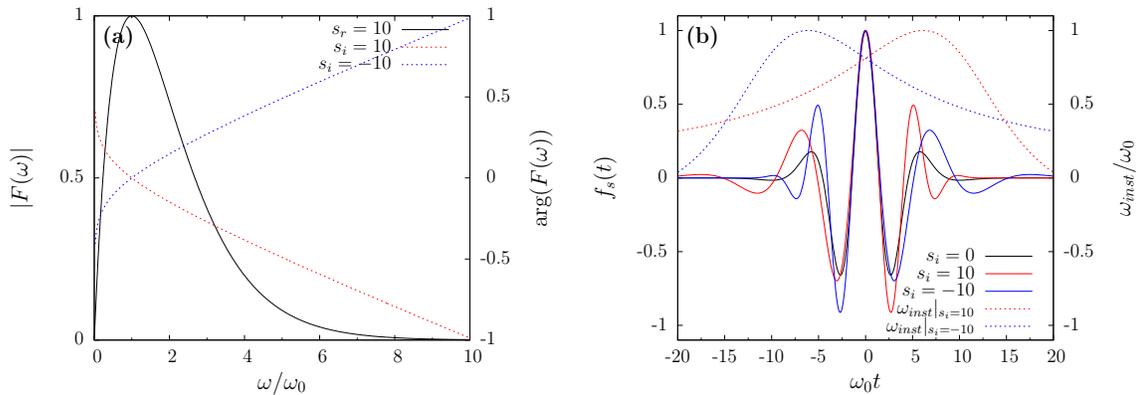


FIGURE 2.4 – (a) Norme (noir) et phase du spectre de Poisson normalisé pour $s_r = 10$ et $s_i = \pm 10$. (b) Transformée de Fourier inverse $f_s(t)$ normalisée pour différentes valeurs de s_i à $s_r = 10$ et fréquence instantanée associée.

La relative simplicité de l'expression (2.30) lui confère une certaine élégance; il est facile de conserver une largeur spectrale fixe en variant à volonté l'importance du glissement en fréquence. À moins d'avis contraire, on utilisera le spectre de Poisson complexe décrit par l'équation (2.29) pour les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire.

La fréquence instantanée de l'impulsion ne suit pas une fonction linéaire du temps pour une valeur quelconque de s . C'est tout à fait normal, considérant l'existence du décalage auto-induit vers le bleu. En écrivant la fréquence instantanée à partir de l'équation (2.32), on obtient :

$$\frac{\omega_{inst}}{\omega_0} = \frac{\frac{(s_r+1)}{s_r}}{1 + \left(\frac{\tau-s_i}{s_r}\right)^2} - \frac{\left(\frac{s_i}{s_r}\right) \left(\frac{\tau-s_i}{s_r}\right)}{1 + \left(\frac{\tau-s_i}{s_r}\right)^2}. \quad (2.33)$$

Le premier terme de cette expression correspond au décalage auto-induit toujours présent, mais le second terme est dû à la partie imaginaire du paramètre s . La série de Taylor de ce nouveau terme révèle que le glissement en fréquence peut être approximativement linéaire ou du moins d'un ordre relativement faible selon le temps adimensionné τ en ce qui à trait au temps si les paramètre s_r et s_i sont bien choisis.

$$\frac{\left(\frac{s_i}{s_r}\right) \left(\frac{\tau-s_i}{s_r}\right)}{1 + \left(\frac{\tau-s_i}{s_r}\right)^2} = \frac{-\left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2}{1 + \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2} + \left[\frac{\frac{s_i}{s_r} \left(1 - \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2\right)^2} \right] \left(\frac{\tau}{s_r}\right) - \left[\frac{\left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2 \left(\left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2 - 3\right)}{\left(1 + \left(\frac{s_i}{s_r}\right)^2\right)^3} \right] \left(\frac{\tau}{s_r}\right)^2 + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (2.34)$$

2.2.6 Limite du spectre étroit

Le spectre de Poisson réel a la propriété de prendre une forme gaussienne lorsque le paramètre de largeur spectrale prend une grande valeur ($s \gg 1$). Lorsque le paramètre en question devient complexe, on retrouve un spectre gaussien pour $s_r \gg 1$. L'impulsion s'écrit aussi comme une gaussienne dans le domaine temporel, à condition que le rapport de s_i/s_r soit petit par rapport à l'unité.

$$\lim_{\substack{s_r \gg s_i \\ s_r \gg 1}} f_s(t) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^2 \left(1 + j \frac{s_i}{s_r}\right) + j(\omega_0 t + \phi_0) \right\}. \quad (2.35)$$

Cela permet d'omettre les termes d'ordres supérieurs lorsqu'on approxime le terme de phase logarithmique par sa série de Taylor tronquée. La figure 2.5 offre une comparaison de l'impulsion exacte et de la limite (2.35) dans ce régime; on note l'excellente correspondance. Dans le cas contraire, le glissement en fréquence devient trop grand et la forme gaussienne est de plus en plus déformée par l'apparition de termes exponentiels de puissance plus élevée. Cela soulève un point intéressant, puisque le glissement en fréquence est souvent considéré comme un phénomène affectant purement l'onde porteuse de fréquence centrale ω_0 . Or, on constate qu'il y a non seulement un glissement de la porteuse, mais aussi un glissement de l'enveloppe.

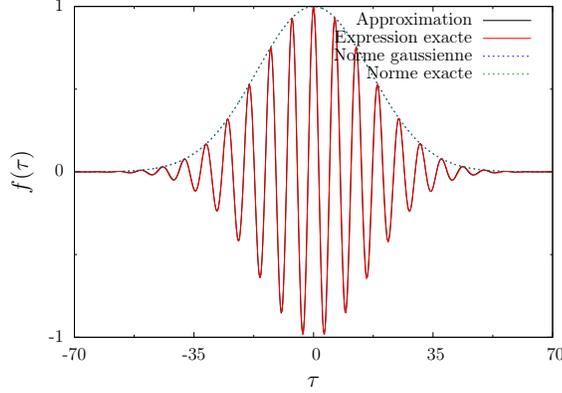


FIGURE 2.5 – Comparaison entre le spectre gaussien glissé en fréquence et la forme temporelle du spectre de Poisson (2.30) dans le régime du spectre étroit faiblement glissé en fréquence visé par la limite (2.35). Les paramètres pertinents prennent ici les valeurs $s_r = 277$ et $s_i = 15$.

L'équation (2.35) montre que le glissement en fréquence est déterminé par le rapport $(\omega_0^2 s_i / s_r^2)$ dans la limite paraxiale. Pour une largeur spectrale fixe et une fréquence porteuse donnée, c'est donc le ratio sans dimension (s_i / s_r) qui établit réellement la force relative du glissement en fréquence. Cela semble être le cas aussi bien dans la limite paraxiale que dans le cas plus général, si l'on se réfère à l'équation (2.34).

Bien que les paramètres s_r et s_i prendront diverses valeurs dans le cadre de ce mémoire, on s'attardera souvent aux cas $s_r = 10$ et $|s_i| \in [1.25, 50]$. Selon la limite paraxiale, cela revient à un paramètre de glissement en fréquence linéaire allant de $\pm 6.94 \cdot 10^{-2} \text{ fs}^{-2}$ à $\pm 2.78 \text{ fs}^{-2}$.

2.3 Le champ électromagnétique glissé en fréquence de l'impulsion TM_{01}

À partir des équations (2.11a) à (2.11c), on peut utiliser la distribution spectrale appropriée pour décrire le champ électromagnétique complet d'une impulsion transverse magnétique TM_{01} . Dans les prochaines sous-sections, on considère le cas spécial d'une onde monochromatique subissant un glissement en fréquence pour ensuite aborder le régime impulsionnel avec le spectre de Poisson.

2.3.1 Faisceau TM_{01} d'amplitude constante subissant un glissement en fréquence

Avant de se lancer dans l'analyse du champ électromagnétique de l'impulsion TM_{01} suivant un profil spectral de Poisson, soit une distribution polychromatique, on s'intéresse au cas plus simple de l'onde monochromatique (OM) qui correspond sans doute à la situation la plus simple possible. Le spectre est alors seulement une fonction delta de Dirac centrée à la

fréquence ω_0 , ce qui conduit à une exponentielle complexe dans le domaine temporel :

$$f_{OM}(t) = e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} \quad (2.36a)$$

$$F_{OM}(\omega) = 2\pi e^{-j\phi_0} \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.36b)$$

Les équations (2.11a) à (2.11c) mènent directement aux expressions des champs électriques radial et longitudinal et du champ magnétique azimutal, tel que décrit dans [4] :

$$\tilde{E}_r(\mathbf{r}, t) = -2j\Psi_0 e^{-k_0 a} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} k_0^3 \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} j_2(k_0 \tilde{R}) \quad (2.37a)$$

$$\tilde{E}_z(\mathbf{r}, t) = \frac{4j}{3} \Psi_0 e^{-k_0 a} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} k_0^3 \left\{ j_0(k \tilde{R}) + P_2^0(\cos \tilde{\theta}) j_2(k \tilde{R}) \right\} \quad (2.37b)$$

$$\tilde{B}_\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{c} \Psi_0 e^{-k_0 a} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} k_0^3 \sin \tilde{\theta} j_1(k_0 \tilde{R}) \quad (2.37c)$$

où Ψ_0 est un paramètre d'amplitude, $P_2^0(x) = (1/2)(3x^2 - 1)$ est un polynôme associé de Legendre et les fonctions $j_n(x)$ correspondent aux fonctions de Bessel sphériques de première espèce :

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \quad j_2(x) = \frac{3 \sin x}{x^3} - \frac{3 \cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}. \quad (2.38)$$

L'idée est maintenant d'étudier ce qui se produit en présence de glissement en fréquence. Pour ce faire, on ajoute une phase quadratique à l'expression de $f_{OM}(t)$ donnée à (2.36), ce qui conduit à la paire de transformée de Fourier suivante :

$$f_{OG}(t) = e^{j(C\omega_0^2 t^2 + \omega_0 t - \phi_0)} \quad (2.39a)$$

$$F_{OG}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0^2 |C|}} e^{-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4C\omega_0^2}} e^{j[\text{sign}(C)\pi/4 - \phi_0]}. \quad (2.39b)$$

La première constatation est qu'une onde à l'origine monochromatique à laquelle on ajoute un glissement en fréquence linéaire devient nécessairement polychromatique. En fait, lorsqu'on parle de glissement en fréquence, il n'existe pas de cas monochromatique par définition, puisque l'onde passe d'une fréquence à une autre en évoluant dans le temps. Ensuite, l'onde décrite à l'équation (2.39) pose problème physiquement. En effet, la composante continue du spectre située à $\omega = 0$ est non nulle : $|F_{OG}(\omega = 0)| = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0^2 |C|}}$. Ceci implique donc qu'une composante continue subsiste (cette composante correspondrait à un champ électrostatique, lequel est incohérent avec toute propagation ondulatoire), ce qui fausserait de potentielles simulations d'accélération d'électrons. Aussi, le spectre n'est pas de carré intégrable, signifiant qu'il s'agit d'un signal non physique d'énergie infinie. Pour régler ces quelques problèmes, il suffirait de limiter le spectre par une enveloppe, de sorte qu'il n'y ait pas de composante continue et que l'intégration de $-\infty$ à ∞ aboutisse à une valeur finie. À titre d'exemple, en optant pour une enveloppe rectangulaire, la transformée inverse du spectre, maintenant dénoté $\bar{F}_{OG}(\omega)$, est le

produit de la fonction $f_{OG}(t)$ et d'une fonction d'erreur.

$$\begin{aligned}\bar{F}_{OG}(\omega) &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0^2|C|}} e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4C\omega_0^2}} e^{j[\text{sign}(C)\pi/4-\phi_0]} \text{rect}\left(\frac{\omega-\omega_0}{2\omega_0}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0^2|C|}} e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4C\omega_0^2}} e^{j[\text{sign}(C)\pi/4-\phi_0]} [\theta(\omega) + \theta(-\omega + 2\omega_0)]\end{aligned}\quad (2.40a)$$

$$\bar{f}_{OG}(t) = \omega_0 \sqrt{-j\pi C} \left(e^{j/4C} - 1 \right) e^{j(C\omega_0^2 t^2 + \omega_0 t - \phi_0)} \left\{ \Psi_0 - \text{erf}\left(\sqrt{jC} \left[\omega_0 t + \frac{1}{2C} \right] \right) \right\} \quad (2.40b)$$

L'impulsion a alors des propriétés convenables pour être utilisée dans une simulation d'accélération d'électrons. Cependant, l'enveloppe rectangulaire rend tout traitement analytique peu pratique. C'est le cas de la plupart des enveloppes ; par exemple, une enveloppe gaussienne compliquerait de beaucoup les dérivées intervenant dans l'expression du champ électrique. Ainsi, à des fins d'analyse qualitative et pour faciliter la comparaison avec les champs décrits aux équations (2.37a) à (2.37c), on choisit quand même de poursuivre avec le spectre décrit à l'équation (2.39). Après tout, le signal monochromatique (2.36) est lui aussi une approximation, son énergie étant également infinie.

Pour la suite des choses, on s'intéressera principalement au champ longitudinal, car c'est la composante d'intérêt dans le mécanisme d'accélération à l'étude. À partir de l'équation (2.11b) et du profil temporel de l'onde glissée en fréquence, on obtient directement l'expression spatiotemporelle du champ électrique longitudinal complexe \tilde{E}_z^G de l'impulsion TM_{01} associée :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z^G(\mathbf{r}, t) &= 2j \frac{\Psi_0}{\tilde{R}^3} e^{-k_0 a(1+C\omega_0 t)} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} \exp \left\{ j \frac{C}{2} \left[(\tau)^2 + (k_0 \tilde{R})^2 - (k_0 a)^2 \right] \right\} \left\{ \left[2P_2^0(\cos \tilde{\theta}) \right. \right. \\ &- \left. \left. 2P_2^0(\cos \tilde{\theta}) j C k_0 \tilde{R} \tau' + (k_0 \tilde{R} \sin \tilde{\theta})^2 \left(1 - C(2\tau' - j) + C^2(\tau'^2 + (k_0 \tilde{R})^2) \right) \right] \right. \\ &\times \left. \sin \left[k_0 \tilde{R}(1 + C\tau') \right] - 2k_0 \tilde{R} \left[P_2^0(\cos \tilde{\theta})(1 + Ck_0 \tilde{R}) + jC(k_0 \tilde{R} \sin \tilde{\theta})^2(1 + C\tau') \right] \right. \\ &\times \left. \cos \left[k_0 \tilde{R}(1 + C\tau') \right] \right\}\end{aligned}\quad (2.41)$$

où $\tau = \omega_0 t$, $\tau' = (\tau + jk_0 a)$ et Ψ_0 est une constante d'amplitude. L'équation (2.41) est beaucoup plus complexe que son équivalent sans glissement en fréquence décrit par (2.37b). En réorganisant les termes de la dernière équation, on retrouve une forme beaucoup plus

semblable au champ monochromatique :

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_z^G(\mathbf{r}, t) &= \frac{4j}{3} \Psi_0 e^{-k_0 a(1+C\omega_0 t)} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} e^{j\frac{C}{2}[(\tau)^2 + (k_0 \tilde{R})^2 - (k_0 a)^2]} k_0^3 \left[\frac{\sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{k_0 \tilde{R}} \right. \\
&+ P_2^0(\cos \tilde{\theta}) \left(\frac{3 \sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{(k_0 \tilde{R})^3} - \frac{3 \cos(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{(k_0 \tilde{R})^2} - \frac{\sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{k_0 \tilde{R}} \right) \left. \right] \\
&+ \frac{4j}{3} \Psi_0 e^{-k_0 a(1+C\omega_0 t)} e^{j(\omega_0 t - \phi_0)} e^{j\frac{C}{2}[(\tau)^2 + (k_0 \tilde{R})^2 - (k_0 a)^2]} k_0^3 \\
&\times \left\{ C \left[P_2^0(\cos \tilde{\theta}) \left(-\frac{3j\tau' \sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{(k_0 \tilde{R})^2} - \frac{3 \cos(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{k_0 \tilde{R}} \right) \right. \right. \\
&- \frac{3 \sin^2 \tilde{\theta}}{2} \left(\frac{(2\tau' - j) \sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{k_0 \tilde{R}} + 2j \cos(k_0 \tilde{R}(1+C\tau')) \right) \left. \right] \\
&+ C^2 3 \sin^2 \tilde{\theta} \left[\frac{(\tau'^2 + (k_0 \tilde{R})^2) \sin(k_0 \tilde{R}(1+C\tau'))}{2k_0 \tilde{R}} - j\tau' \cos(k_0 \tilde{R}(1+C\tau')) \right] \left. \right\}. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

On note plusieurs termes proportionnels au paramètre de glissement en fréquence C qui font leur apparition. En posant $C = 0$, on retrouve sans surprise l'équation (2.37b). Pour $C \neq 0$, des termes en C et en C^2 , présenté en bleu ci-dessus, s'ajoutent aux termes déjà présents qui eux-mêmes subissent une transformation. Sans tenir compte des nouveaux termes (en bleu), on constate que le glissement en fréquence modifie l'onde porteuse, mais également l'enveloppe du champ électrique. Le point important ici est que, même en utilisant une distribution spectrale très simplifiée, on obtient une expression relativement complexe qu'il n'est pas possible d'écrire sous la forme d'un produit du signal limité par la transformée de Fourier avec une fonction représentant le glissement en fréquence. Ceci n'est possible qu'au coût de quelques approximations, comme l'approximation paraxiale, qu'on souhaite éviter ici.

Ayant développé l'expression du champ longitudinal glissé en fréquence \tilde{E}_z^G , il est possible d'en extraire la phase temporelle totale Φ_T le long de l'axe optique, soit à $r = 0$ et donc $\tilde{R} = z + ja$. Ainsi, on écrit :

$$\Phi_T = \omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{C}{2} \left[\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]^2 + \Phi_G + \phi'_0, \quad (2.43)$$

où Φ_G est la phase de Gouy et où on retrouve bien un glissement en fréquence linéaire centré sur la fréquence porteuse du faisceau. On se permet maintenant un bref détour pour inspecter la phase de Gouy du faisceau "monochromatique" glissé en fréquence, donnée par

$$\Phi_G = 3 \arctan \left(\frac{z}{a} \right) - \arctan \left(\frac{P_{\text{imaginaire}}}{P_{\text{réelle}}} \right). \quad (2.44)$$

Les termes $P_{\text{imaginaire}}$ et $P_{\text{réelle}}$ sont donnés par les expressions suivantes, où l'on a utilisé la variable spatiotemporelle adimensionnée $\theta_1 = k_0 z(1 + C\omega_0 t) - C(k_0 a)^2$:

$$\begin{aligned}
P_{\text{imaginaire}} &= k_0 z [1 - C(\omega_0 t - k_0 z)] \\
&+ e^{-2k_0 a(1+C(\omega_0 t + k_0 z))} [(k_0 z + Ck_0 z(\omega_0 t + k_0 z) - 2C(k_0 a)^2) \cos(2\theta_1) \\
&- (1 + k_0 a + Ck_0 a(3k_0 z + \omega_0 t)) \sin(2\theta_1)], \quad (2.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{\text{réelle}} &= k_0 a [1 - 1/k_0 a - C(\omega_0 t - k_0 z)] \\
&+ e^{-2k_0 a(1+C(\omega_0 t+k_0 z))} [(k_0 z + Ck_0 a(\omega_0 t + k_0 z) - 2C(k_0 a)^2) \sin(2\theta_1)] \\
&+ (1 + k_0 a + Ck_0 a(3k_0 z + \omega_0 t)) \cos(2\theta_1)]. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Dans sa thèse, V. Marceau écrit l'expression du déphasage de Gouy du faisceau TM_{01} monochromatique [38], information qui n'avait pas été publiée dans la littérature auparavant. On peut donc comparer ce résultat à la phase de Gouy (2.44). Beaucoup de termes s'ajoutent bien sûr, mais une grande partie de ceux-ci sont dus à la composante contre-propageante du champ électrique dont l'amplitude peut être négligée lorsque $k_0 a \gtrsim 3$. Ainsi, en négligeant les termes multipliés par l'exponentielle $e^{-k_0 a}$ dans les équations (2.45) et (2.46), on obtient la phase de Gouy dans cette limite bien particulière qu'est le régime paraxial :

$$\Phi_G \approx 3 \arctan\left(\frac{z}{a}\right) - \arctan\left\{\frac{z}{a} \left[\frac{1}{1 - 1/[k_0 a - Ck_0 a(\omega_0 t - k_0 z)]} \right] \right\}. \tag{2.47}$$

Cette équation conduit au résultat révélé par V. Marceau, lorsqu'on pose $C = 0$. On voit que la présence de glissement en fréquence peut modifier le comportement de l'onde dans la région focale. Ceci implique que la vitesse de phase de l'onde varie selon la position z . Justement, lorsqu'il est possible de négliger l'onde contre-propageante, la vitesse de phase du faisceau s'écrit :

$$v_{ph} = c \left\{ \frac{1 + C\omega_0(t - z/c)}{1 + C\omega_0(t - z/c) - \frac{1}{k_0 a} \frac{3}{(z/a)^2 + 1} + \frac{1}{k_0 a} \frac{(1-1/k_0 a)}{(z/a)^2 + (1-1/k_0 a)^2}} \right\}. \tag{2.48}$$

Comme attendu, la vitesse de phase tend vers la vitesse de la lumière dans le vide c lorsque $\{t, z\} \rightarrow \pm\infty$, soit loin de la région focale et/ou loin du centre de l'impulsion. Lorsque $C = 0$, la dépendance temporelle disparaît.

2.3.2 Impulsion TM_{01} avec un spectre de Poisson glissé en fréquence

Pour modéliser les impulsions ultrabrèves et fortement non paraxiales, on utilise plutôt un spectre de Poisson, comme expliqué à la sous-section 2.2.2. Dans le cadre de cette sous-section, on ne s'intéressera qu'à la composante longitudinale du champ électrique qu'on obtient similairement à partir de l'équation (2.11b). Dans ce cas, on calcule rapidement la fonction $G_{\pm}^{(n)} = \partial_t^n f(\tilde{t}_+) \pm \partial_t^n f(\tilde{t}_-)$ en notant que

$$f^{(n)}(t) = e^{j\phi_0} \frac{\Gamma(s+n+1)}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{j\omega_0}{s}\right)^n \left(1 - \frac{j\omega_0 t}{s}\right)^{-n-s-1}.$$

Pour faciliter le travail numérique, on choisit un système de coordonnées adimensionnées. Ainsi, on utilisera les variables $\tau = \omega_0 t$, $Z = z/a$, $\rho = r/a$, $\Delta = \tilde{R}/a = \sqrt{\rho^2 + (Z+j)^2}$. Le champ électrique longitudinal complexe sans dimension $\tilde{\mathcal{E}}_z(\rho, Z, \tau) = \tilde{E}_z k_0^2 a^3 e/(m_e c^2)$ s'écrit comme suit ;

$$\tilde{\mathcal{E}}_z = \varphi_0 \frac{e^{j\phi_0}}{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} (3 \cos^2 \tilde{\theta} - 1) \left[\frac{g_-^{(0)}}{\Delta} - j \frac{k_0 a}{s} \frac{\Gamma(s+2)}{\Gamma(s+1)} g_+^{(1)} \right] + \left(\frac{k_0 a}{s}\right)^2 \sin^2 \tilde{\theta} \frac{\Gamma(s+3)}{\Gamma(s+1)} g_-^{(2)} \right) \tag{2.49a}$$

$$g_{\pm}^{(n)} = \left(1 - j \frac{\tilde{\tau}_{\pm}}{s}\right)^{-(s+n+1)} \pm \left(1 - j \frac{\tilde{\tau}_{\mp}}{s}\right)^{-(s+n+1)}. \quad (2.49b)$$

où φ_0 est une constante réelle (sans dimension) définissant l'amplitude du champ, le temps complexe (sans dimension) est $\tilde{\tau}_{\pm} = \tau \pm k_0 a \Delta + j k_0 a$, $\cos \tilde{\theta} = \frac{Z+j}{\Delta}$, $\sin \tilde{\theta} = \frac{\rho}{\Delta}$. De même, on obtient la composante radiale du champ électrique sans dimension et la composante azimutale du champ magnétique sans dimension avec $\tilde{\mathcal{E}}_r(\rho, Z, \tau) = \tilde{E}_r k_0^2 a^3 e / (m_e c^2)$ et $\tilde{\mathcal{H}}_\phi(\rho, Z, \tau) = \tilde{H}_\phi k_0^2 a^3 e / (\eta_0 m_e c^2)$, où \tilde{E}_r et \tilde{H}_ϕ sont les composantes des champs avec dimensions. Pour introduire le glissement en fréquence dans le champ électromagnétique, on utilise un paramètre de largeur spectrale complexe $s = s_r + j s_i$, contrairement au cas sans glissement où celui-ci est réel et positif. Dans une situation idéalisée, un électron sur l'axe optique, ici choisi comme l'axe z , est accéléré linéairement par le champ longitudinal. Pour étudier la configuration axiale, plus simple par nature, on pose $\rho = 0$, ce qui conduit les différentes variables à des formes réduites : $\Delta = (Z + j)$, $\cos \tilde{\theta} = 1$ et $\sin \tilde{\theta} = 0$. Le champ $\tilde{\mathcal{E}}_z(\rho, Z, t)$ se simplifie alors de beaucoup :

$$\tilde{\mathcal{E}}_z(\rho = 0, Z, \tau) = \tilde{\mathcal{E}}_z(Z, \tau) = \varphi_0 e^{j\phi_0} \left[\frac{2}{(Z+j)^3} g_-^{(0)} - j \frac{2k_0 a}{s} \frac{(s+1)}{(Z+j)^2} g_+^{(1)} \right] \quad (2.50)$$

En développant les variables $g_{\pm}^{(n)}$, on se retrouve donc avec quatre termes différents : deux termes décrivant l'impulsion propageante et deux autres termes décrivant l'impulsion contre-propageante. En écrivant chacun de ces termes sous forme cartésienne, on peut alors isoler les parties réelle et imaginaire du champ pour ensuite écrire les expressions de la norme et de la phase séparément.

$$|\mathcal{E}_z| = 2\varphi_0 \left[\left(\sum_{i=1}^2 [A_i]_{cp} \cos([\Phi_i]_{cp}) + [A_i]_p \cos([\Phi_i]_p) \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 [A_i]_{cp} \sin([\Phi_i]_{cp}) + [A_i]_p \sin([\Phi_i]_p) \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.51)$$

$$\arg(\mathcal{E}_z) = \phi_0 - \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^2 [A_i]_{cp} \cos([\Phi_i]_{cp}) + [A_i]_p \cos([\Phi_i]_p)}{\sum_{i=1}^2 [A_i]_{cp} \sin([\Phi_i]_{cp}) + [A_i]_p \sin([\Phi_i]_p)} \right) \quad (2.52)$$

où chacun des termes avec un indice "cp" correspond à l'impulsion contre-propageante (direction "-z"), alors que chacun des indices "p" correspond à l'impulsion propageante (direction "+z"). Tous les termes qu'on retrouve dans le champ (2.50) s'écrivent comme suit :

$$[A_1]_x = \frac{|s|^{2s_r+2}}{(Z^2+1)^{3/2}} \frac{1}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]^{(s_r+1)/2}} \exp \left\{ s_i \arctan \left(\frac{\text{Im}_x}{\text{Re}_x} \right) \right\} \quad (2.53)$$

$$[A_2]_x = \frac{k_0 a \sqrt{Z^2+1} \sqrt{(|s|^2 + s_r)^2 + s_i^2}}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]^{1/2}} [A_1]_x, \quad (2.54)$$

$$[\Phi_1]_{cp} = \frac{\pi}{2} + 3 \arctan(Z) + 2s_i \ln |s| - (s_r+1) \arctan \left(\frac{\text{Im}_{cp}}{\text{Re}_{cp}} \right) - \frac{s_i}{2} \ln [(\text{Re}_{cp})^2 + (\text{Im}_{cp})^2], \quad (2.55)$$

$$[\Phi_1]_p = \frac{3\pi}{2} + 3 \arctan(Z) + 2s_i \ln |s| - (s_r + 1) \arctan\left(\frac{\text{Im}_p}{\text{Re}_p}\right) - \frac{s_i}{2} \ln [(\text{Re}_p)^2 + (\text{Im}_p)^2], \quad (2.56)$$

$$[\Phi_2]_{cp} = [\Phi_1]_{cp} - \arctan(Z) - \arctan\left(\frac{\text{Im}_{cp}}{\text{Re}_{cp}}\right) - \arctan\left(\frac{s_i}{|s|^2 + s_r}\right), \quad (2.57)$$

$$[\Phi_2]_p = [\Phi_1]_p - \pi - \arctan(Z) - \arctan\left(\frac{\text{Im}_p}{\text{Re}_p}\right) - \arctan\left(\frac{s_i}{|s|^2 + s_r}\right), \quad (2.58)$$

$$\text{Re}_{cp} = |s|^2 + 2k_0 a s_r - s_i(\tau + k_0 a Z) \quad \text{Im}_{cp} = -s_r(\tau + k_0 a Z) - 2s_i k_0 a$$

$$\text{Re}_p = |s|^2 - s_i(\tau - k_0 a Z) \quad \text{Im}_p = -s_r(\tau - k_0 a Z)$$

où l'indice "x" dans les équations (2.53), (2.54) doit être remplacé par "cp" pour l'impulsion contre-propageante ou "p" pour l'impulsion propageante.

La phase totale Φ_{tot} du champ électromagnétique longitudinal sans dimension $\xi_z(\mathbf{r}, t)$ est donnée par l'équation (2.52). Encore une fois, on trouve directement la fréquence instantanée du champ électrique longitudinal sur l'axe :

$$\frac{\omega_{inst}}{\omega_0} = \frac{\partial \Phi_{tot}}{\partial \tau} = - \frac{\sum_{ij} \left\{ A_i \left(\frac{\partial A_j}{\partial \tau} \right) \sin(\Phi_i - \Phi_j) - A_i A_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau} \cos(\Phi_i - \Phi_j) \right\}}{(\sum_i A_i \cos(\Phi_i))^2 + (\sum_i A_i \sin(\Phi_i))^2} \quad (2.59)$$

où on somme sur chacune des combinaisons d'indices. De la même manière que précédemment et en utilisant la même notation $x = \{cp, p\}$, on précise chacun des termes présents dans l'équation (2.59) :

$$\frac{\partial [A_1]_x}{\partial \tau} = \frac{[A_1]_x}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]} [(|s|^2 + s_r)\text{Im}_x + s_i \text{Re}_x] \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial [A_2]_x}{\partial \tau} = \frac{[A_2]_x}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]} [(|s|^2 + 2s_r)\text{Im}_x + 2s_i \text{Re}_x] \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial [\Phi_1]_x}{\partial \tau} = \frac{1}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]} [|s|^2 \text{Re}_x + s_r \text{Re}_x - s_i \text{Im}_x] \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial [\Phi_2]_x}{\partial \tau} = \frac{1}{[(\text{Re}_x)^2 + (\text{Im}_x)^2]} [|s|^2 \text{Re}_x + 2s_r \text{Re}_x - 2s_i \text{Im}_x] \quad (2.63)$$

2.4 Comparaison des solutions avec et sans dérive en fréquence

À partir des expressions montrées tout au long du présent chapitre, on est maintenant en mesure de comparer le champ électrique formulé dans le cadre de l'approximation paraxiale avec celui obtenu d'une résolution exacte des équations de Maxwell.

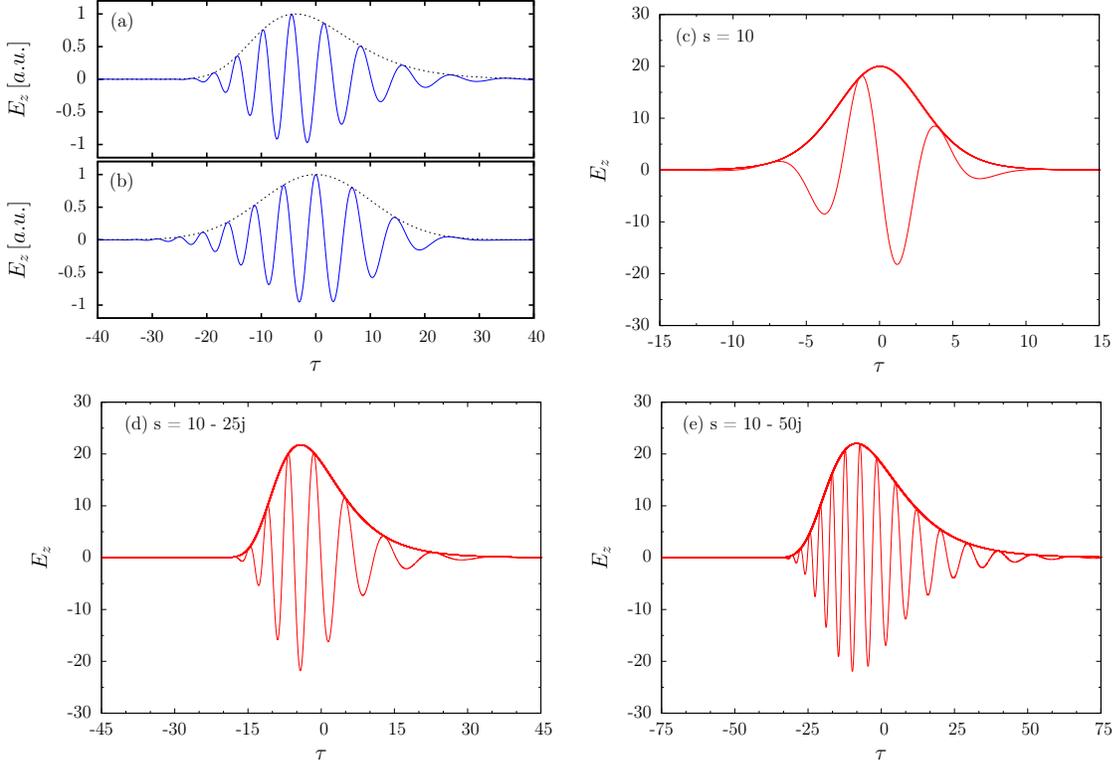


FIGURE 2.6 – Comparaison entre (a) le champ exact et (b) le champ gaussien pour $s_r = 20$, $k_0 a = 10$ et $s_i = -40$ à $z = 0$. Champ exact avec $s_r = 10$ et différentes valeurs du paramètre de glissement en fréquence, soit (c) $s_i/s_r = 0$, (d) $s_i/s_r = -2.5$ et (e) $s_i/s_r = -5$.

Les figures 2.6(a)-(b) permettent la comparaison entre l'impulsion gaussienne paraxiale subissant un glissement en fréquence linéaire et le champ donné par la résolution exacte des équations de Maxwell pour des paramètres semblables. On considère une dérive en fréquence significative, ce qui diffère de la situation décrite à la figure 2.5. Dans le cas présent, on remarque une asymétrie du champ exact qu'on ne retrouve pas dans la solution paraxiale. Ceci est dû au fait qu'on retrouve non seulement une dérive en fréquence de l'onde porteuse, mais aussi de l'enveloppe. En effet, du côté de l'impulsion où l'on retrouve les fréquences plus élevées, l'enveloppe change plus abruptement, tel qu'attendu d'un signal avec un fort contenu en hautes fréquences. À l'inverse, du côté de l'impulsion contenant les basses fréquences, l'enveloppe varie beaucoup plus lentement. L'asymétrie découlant de la dérive de l'enveloppe mène à un déplacement du maximum d'intensité. La figure 2.7 montre explicitement que le maximum du champ électrique glissé en fréquence ne se trouve pas au temps $t = 0$. En fait, le maximum se déplace aussi légèrement dans l'espace, tout en demeurant sur l'axe optique, c'est-à-dire le long de l'axe z . Ce changement ne peut pas être décrit trivialement par une relation mathématique simple. Cependant, en considérant une largeur spectrale fixe et en variant la dérive en fréquence, on constate que le mouvement dans l'espace est faible et principalement autour

de la région focale, tel que montré à la figure 2.8(a). Ceci est donc probablement dû à une déformation importante de l’enveloppe lors du passage de l’impulsion au point d’étranglement. Du côté temporel, la translation du maximum d’intensité peut toutefois être significative et semble suivre un comportement approximativement linéaire, comme montré à la figure 2.8(b).

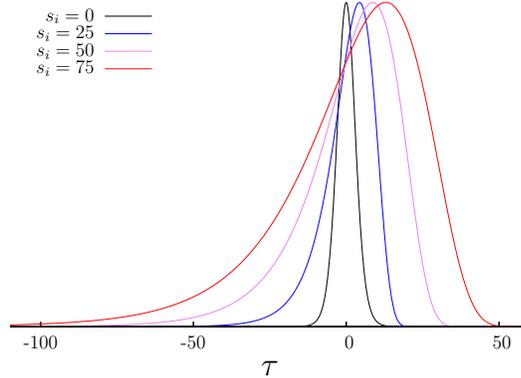


FIGURE 2.7 – Déplacement du maximum de l’enveloppe du champ électrique longitudinal en présence de dérive de fréquence, considérant $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$ dans le plan $Z = 0$.

Puisqu’on ne considère qu’un contenu spectral unique pour toutes les composantes du champ électromagnétique de l’impulsion laser, on ne peut pas introduire de dérive en fréquence dans une seule composante du champ. Ainsi, le champ électrique radial E_r et le champ magnétique azimutal H_ϕ subissent aussi un glissement en fréquence. On vérifie tout de même que le modèle employé ne modifie pas significativement le ratio ($|E_z|_{max}/|E_r|_{max}$), qui ne doit être influencé que par la focalisation.

Finalement, en ce qui a trait à la fréquence instantanée de l’impulsion, on remarque un changement notable. Considérons la fréquence instantanée au sommet de l’impulsion, correspondant approximativement au cycle de fréquence ω_0 . Dans le cas sans dérive de fréquence, on retrouve une variation de la fréquence instantanée au sommet de l’impulsion uniquement près de la région focale à cause du déphasage de Gouy. On sait alors que la fréquence instantanée $\omega_{inst} \approx \omega_0(1 + 1/s_r)$ est toujours plus élevée que la fréquence moyenne de l’impulsion $\bar{\omega} = \omega_0(1 + 1/2s_r)$, qui est elle-même plus élevée que la fréquence centrale ω_0 . Cela est causé par le phénomène de décalage auto-induit vers le bleu. Lorsqu’on ajoute une dérive de fréquence, la fréquence instantanée au sommet de l’impulsion varie davantage, comme illustré à la figure 2.9. En fait, la variation est d’autant plus grande que le glissement en fréquence est grand : pour un glissement en fréquence suffisamment grand, la fréquence instantanée peut descendre brièvement sous la fréquence moyenne, qui prend alors la valeur $\bar{\omega} = \omega_0(1 + 1/2s_r)$, et la fréquence centrale ω_0 (notez qu’il ne s’agit pas de la situation montrée à la figure 2.9).

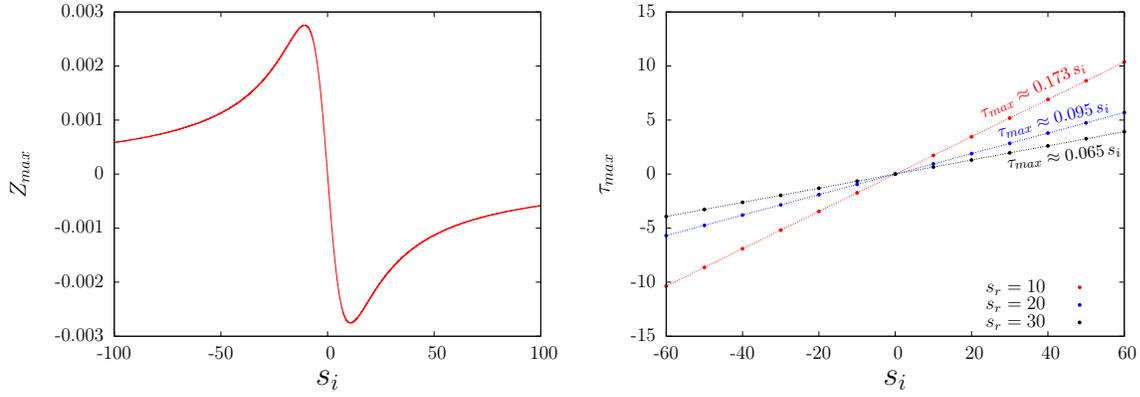


FIGURE 2.8 – (a) Mouvement du maximum de l’enveloppe du champ électrique longitudinal dans l’espace $Z_{max} = z_{max}/a$ pour $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$ et (b) translation du maximum de l’enveloppe dans le temps $\tau_{max} = \omega_0 t_{max}$ pour différentes largeurs spectrales.

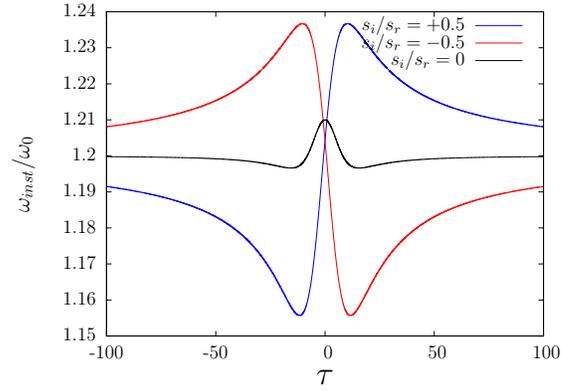


FIGURE 2.9 – Fréquence instantanée de l’impulsion pour différentes valeurs du glissement en fréquence lorsque $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$.

Chapitre 3

Dynamique d'électrons accélérés en présence de glissement en fréquence

Ce chapitre présente les résultats de simulations conduites sur la base des modèles développés dans le chapitre précédent. On débute avec une présentation de la réalité expérimentale associée aux simulations à la section 3.1. On enchaîne à la section 3.2 avec une description de la méthode utilisée lors du travail numérique. On s'intéresse finalement aux résultats des dites simulations dans deux situations physiques bien différentes : on analyse l'accélération à énergie laser constante à la section 3.3 et on examine l'accélération à amplitude constante du champ électrique longitudinal à la section 3.4. On termine à la section 3.5 en analysant les causes desquelles peuvent découler les observations faites.

3.1 Considérations expérimentales

En utilisant le champ électromagnétique décrit par les équations (2.11a) à (2.11c) et le spectre de Poisson modifié pour y inclure du glissement en fréquence (2.29), on cherche à connaître l'impact du glissement en fréquence lors de l'accélération directe d'électrons par une impulsion TM_{01} ultrabrève et fortement focalisée. Même si l'on a plutôt opté pour une approche numérique, les simulations sont bien ancrées dans la réalité expérimentale entourant le schéma d'accélération à l'étude.

La situation physique simulée est semblable à l'expérience conduite en 2012 par Payeur et al. [46]. D'autres propositions de montages expérimentaux se retrouvent dans [9, 10]. Une impulsion TM_{01} de quelques cycles optiques est d'abord propagée dans le vide jusqu'à un miroir parabolique de grande ouverture numérique se trouvant dans une chambre à vide. L'entièreté du montage est immergée dans un gaz de faible densité à basse pression (≈ 800 mTorr dans le cas présent). Cela limite les effets non linéaires pouvant interférer avec l'expérience, tout en fournissant une source de particules chargées. En effet, l'intensité du champ électroma-

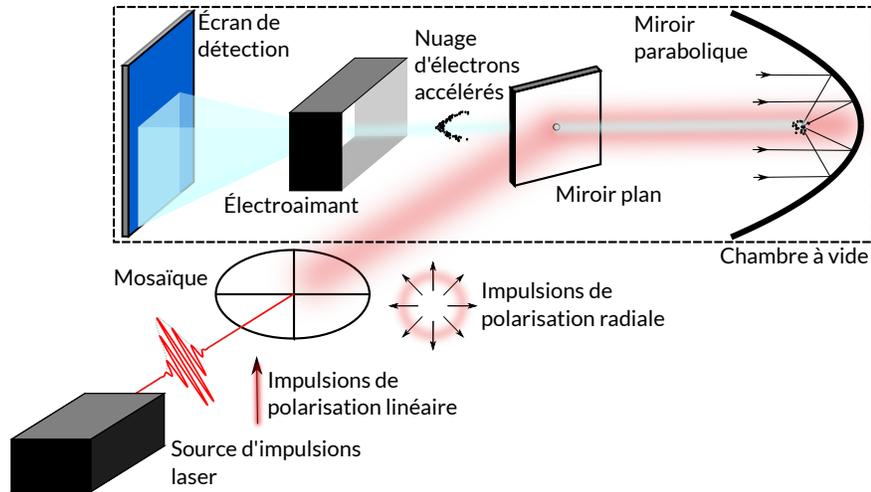


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de l'expérience de Payeur et al. conduite en 2012 qui représente une preuve de principe de la réalisation expérimentale du schéma d'accélération à l'étude

gnétique dans la région focale et autour de celle-ci est telle que les atomes sont rapidement ionisés par effet tunnel, relâchant les électrons dans le champ ambiant avec une vitesse faible ou négligeable. Ces électrons sont ensuite accélérés dans différentes directions par le champ électrique ; près de l'axe optique, ceux-ci ressentiront principalement les effets de la forte composante longitudinale E_z qui propulsent les électrons vers l'avant ou l'arrière suivant leurs conditions initiales propres. L'impulsion accompagne alors les électrons projetés vers l'avant, influant sur leur énergie cinétique. Avec la défocalisation, l'énergie du faisceau laser se répartit davantage dans les composantes transversales du champ électromagnétique, causant l'affaiblissement de la composante électrique longitudinale et diminuant l'emprise de celle-ci sur les électrons accélérés par la même occasion. Pour découpler les électrons et l'impulsion laser, un miroir troué réfléchit l'impulsion et laisse passer les électrons intéressants. Ces derniers sont donc libres de continuer leur chemin en conservant leur énergie cinétique notable, puisque la faible densité du gaz environnant limite leur chance de rencontrer tout obstacle.

Le faisceau TM_{01} permettant de réaliser l'expérience peut être généré de diverses manières. Dans l'expérience mentionnée précédemment, par exemple, on a utilisé une mosaïque de lames à retard [72] : quatre lames $\lambda/2$ permettent d'obtenir une forme approximative de l'impulsion TM_{01} en convertissant un faisceau originalement de polarisation linéaire et déjà bien amplifié. Bien entendu, plus le nombre de lames est grand, plus le faisceau laser se rapproche d'un faisceau TM_{01} idéal, tel montré par Carbajo et al. [9, 11], qui ont utilisé une mosaïque de huit lames. Il est également possible de produire un faisceau pulsé de polarisation radiale directement en cavité en introduisant des éléments de symétrie cylindrique dans la cavité laser. De même, l'utilisation de milieu modifiant la polarisation de manière continu, comme des cristaux liquides, est possible. Cependant, en procédant ainsi, on complique l'amplification

subséquente du signal. Il est donc probable qu'une expérience réelle ne bénéficierait pas d'une polarisation radiale idéale, tel que décrite par les solutions exactes aux équations de Maxwell.

On s'intéresse à un certain régime d'intensité où la radiation émise par les électrons accélérés est négligeable par rapport au champ laser incident et ne change pas significativement la trajectoire des électrons. En effet, la force de réaction radiative sur un électron soumis au champ électrique d'une onde plane est négligeable pour

$$\left(\frac{eE_0}{m_e c \omega}\right)^2 \ll \frac{1}{\omega \tau_e} \quad (3.1)$$

où E_0 est l'amplitude du champ électrique, e est la charge de l'électron, m_e est la masse de l'électron, ω est la fréquence du signal et $\tau_e = e^2/(6\pi\epsilon_0 m_e c^3) \approx 6.26 \times 10^{-24} \text{ s}$ [38]. En supposant une longueur d'onde $\lambda = 800 \text{ nm}$, l'inégalité (3.1) conduit à $E_0 \ll 3.3 \times 10^{16} \text{ V/m}$. Dans le présent mémoire, on se limitera tout au plus à $E_0 \approx 800 \text{ TV/m}$. Qui plus est, tel que discuté par Varin et al. [77], la variation en énergie découlant du rayonnement irradié par l'électron dans ce régime est tout à fait négligeable : pour une intensité de l'ordre de 10^{22} W/cm^2 , on retrouve des pertes de quelques keV à 800 nm pour une dimension transverse du faisceau de $10 \mu\text{m}$, alors que l'énergie cinétique de l'électron peut atteindre plusieurs MeV.

L'expérience exécutée en 2012 par Payeur et al. étant surtout une preuve de concept du schéma d'accélération, aucune attention particulière n'a été portée au glissement en fréquence de l'impulsion. Dans le cas du présent mémoire, on fera varier le glissement en fréquence pour une largeur spectrale donnée : on simule en quelque sorte ce qui se produit lorsque la dispersion du système laser n'est pas entièrement compensée, volontairement ou non. Il ne s'agit cependant que d'une analogie, puisqu'on ne se restreint pas à n'utiliser que le spectre décrit par l'équation (2.22). De toute manière, rappelons que, dans le contexte d'une expérience réelle, le spectre de l'impulsion laser peut prendre bien des formes autres que celle d'un spectre de Poisson et des distorsions de phase d'ordres supérieurs peuvent être présentes. La question est de savoir si le glissement en fréquence augmente l'énergie cinétique des électrons et s'il permettrait d'amener des électrons initialement sous le seuil d'accélération à une vitesse relativiste. À l'inverse, tous les éléments néfastes à l'accélération d'électrons doivent être répertoriés pour exploiter un système laser à son plein potentiel ou simplement prévenir l'obtention de résultats se situant en deçà des attentes. Le glissement en fréquence est une dimension de plus s'ajoutant au problème physique à l'étude, un degré de liberté supplémentaire à explorer.

3.2 Méthode de simulation

Il existe de nombreuses méthodes pour simuler numériquement l'accélération d'électrons par une onde électromagnétique. Chacune d'entre elles permet d'approfondir plus ou moins en détail les phénomènes physiques à l'oeuvre. Le choix d'une stratégie de simulation dépend donc des paramètres d'intérêt et du régime d'accélération visé. On retrouve souvent des simulations

“particule test”, par exemple. Celles-ci suivent l’évolution d’électrons directement insérés dans le domaine de simulation. Elles peuvent tenir compte ou non de la répulsion électrostatique entre les électrons via un calcul de force corps à corps ou encore de la force de réaction radiative, grâce à l’équation de Landau et Lifshitz [?]. Par opposition, on retrouve aussi des simulations “particle-in-cell” (PIC) qui permettent d’introduire des électrons par l’ionisation d’un gaz neutre, en plus de considérer naturellement une myriade de phénomènes via la résolution directe des équations de Maxwell : la répulsion des charges, le champ électromagnétique diffusé, etc. Les simulations PIC constituent sans doute l’outil numérique le plus complet dont nous disposons à l’heure actuelle pour étudier les plasmas, quoiqu’elles présentent aussi leurs limites en terme de propriétés physiques du plasma pour assurer leur validité.

Lors des travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire, on a opté pour l’utilisation de simulations “particule test” unidimensionnelles à un électron. Bien qu’il s’agisse d’un outil beaucoup plus rudimentaire, il n’en demeure pas moins très efficace lorsqu’on s’intéresse seulement à l’énergie cinétique des électrons accélérés. Étant moins coûteuses du point de vue des ressources de calcul, elles permettent d’explorer plus aisément l’espace des paramètres en jeu. De plus, comme mentionné par Marceau et al. [40], les résultats émanant de simulation “particule test” pour des nuages d’électrons se rapprochent raisonnablement de ce qui est produit par des simulations PIC considérant un gaz d’hydrogène de faible densité en tant que cible et milieu de propagation.

Pour chaque électron considéré, il est nécessaire de résoudre numériquement les équations du mouvement qui se présentent sous la forme de la force de Lorentz. Cependant, puisque la particule peut atteindre une énergie relativiste, on doit tenir compte du fait que son énergie est donnée par $W = \gamma m_e c^2$, où $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Ainsi, les trois équations différentielles pertinentes s’écrivent :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{F}_L = -e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}). \quad (3.4)$$

En utilisant le système de coordonnées adimensionnées présenté à l’équation (2.49a) et en combinant les équations (3.3) et (3.4), quelques manipulations algébriques permettent d’obtenir les équations du mouvement sans dimension pour un seul électron initialement sur l’axe optique :

$$\frac{dZ}{d\tau} = \left(\frac{1}{k_0 a}\right) \beta_z \quad (3.5)$$

$$\frac{d\beta_z}{d\tau} = -\left(\frac{1}{k_0 a}\right)^3 (1 - \beta_z^2)^{3/2} \Re \left\{ \tilde{\mathcal{E}}_z(\rho = 0, Z, \tau) \right\} \quad (3.6)$$

où $\beta_z = |v_z|/c$ est la vitesse normalisée de la particule dans la direction de l'axe z et $\tilde{\mathcal{E}}_z$ est le champ électrique longitudinal sans dimension décrit par l'équation (2.49a). De prime abord, il est clair qu'une résolution numérique est nécessaire étant donné l'expression hautement non linéaire du champ électrique dans l'équation différentielle (3.6). Cette dernière équation ne contient pas de terme provenant de la force " $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ", car le champ magnétique est nul au centre d'une impulsion TM_{01} , ce qui garantit qu'un électron initialement au repos sur l'axe optique y demeurera. La résolution des équations (3.5) et (3.6) pour des conditions initiales optimisées fournit un portrait idéalisé du processus d'accélération : le résultat obtenu reflète l'énergie maximale qu'un ensemble de paramètres donné permet de conférer à un électron.

Pour déterminer la trajectoire d'un électron, une fois les caractéristiques spectrales (s_r et s_i) et la focalisation du faisceau ($k_0 a$) fixées, il ne reste que trois paramètres libres ayant un grand impact sur les résultats, puisqu'on considère une vitesse initiale nulle, soit l'amplitude du champ électrique φ_0 , la phase constante du champ électrique ϕ_0 et la position initiale de l'électron sur l'axe Z_0 . Afin de trouver les conditions initiales optimales en terme de phase laser et de position initiale de l'électron, on adopte une stratégie de "force brute" en quelque sorte : on simule simplement la trajectoire d'un électron pour une grande quantité de positions initiales sur l'axe z , et ce, pour toute les phases de 0 à 2π . Il se trouve que seuls les électrons initialement proches de la région focale ont la possibilité d'acquérir une énergie cinétique significative dans le schéma d'accélération à l'étude. Ainsi, on peut aisément se restreindre à des positions initiales $Z_0 \in [-30, 30]$. Ceci est l'équivalent de simuler l'effet de l'impulsion sur un nuage d'électrons répartie sur une ligne coïncidant avec l'axe optique. On supposerait alors que chaque électron est indépendant de ses voisins, ce qui revient à négliger la répulsion électrostatique. Il est à noter que, peu importe les conditions initiales, il est important que l'électron soit bien en dehors de l'impulsion laser, c'est-à-dire que le temps initial de la simulation τ_0 soit choisi de manière à ce que le champ électrique longitudinal soit négligeable à la position initiale de l'électron Z_0 . De même, l'intégration doit se poursuivre jusqu'à ce que l'amplitude du champ électrique n'ait plus qu'une influence lente et limitée sur la vitesse de l'électron. En procédant ainsi, on obtient une carte l'espace des paramètres indiquant l'énergie des électrons, tel que montré à la figure 3.2. De manière générale, plus l'énergie du champ laser augmente et la durée de l'impulsion raccourcit (donc plus la puissance crête augmente), plus le patron montré par une telle figure s'étend, ce qui traduit le fait qu'un plus large échantillon de conditions initiales permet d'atteindre une énergie appréciable.

Pour étudier l'évolution de l'énergie maximale selon le glissement en fréquence, il reste à convenir de la manière avec laquelle la variable d'amplitude φ_0 du champ évolue avec le glissement en fréquence. En effet, plusieurs cas de figure sont possibles. Les publications qu'on retrouve dans la littérature semblent généralement considérer une puissance crête constante. Ainsi, en ayant recours au vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, on peut obtenir la puissance d'une impulsion en intégrant la composante longitudinale du vecteur dans le plan transverse à la

direction de propagation pour un temps et une position longitudinale donnée. La puissance crête est la valeur maximale de la puissance instantanée de l'impulsion, s'écrivant :

$$\begin{aligned} P_{crete} &= \iint_S \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}_z dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty S_z(r, z=0, t=0)|_{\phi_0=0} r dr d\phi \\ &= 2\pi\varphi_0^2 \int_0^\infty [\mathbf{E}_r(r,0,0)\mathbf{H}_\phi(r,0,0)]|_{\phi_0=0, \varphi_0=1} r dr. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Il suffit d'inverser la relation pour assigner une valeur à l'amplitude φ_0 produisant la puissance crête voulue. Cependant, l'équation (3.7) n'est valide, à première vue, que pour le champ électromagnétique libre de glissement en fréquence et dans certaines conditions de focalisation. En effet, tel que discuté à la section 2.4, le maximum d'amplitude de l'enveloppe de l'impulsion se déplace de manière non triviale selon la valeur de s_i . L'enveloppe spatiale de l'impulsion se retrouve également quelque peu déformée. Ainsi, il est plus difficile de calculer la valeur précise de la puissance crête en cernant le plan d'intensité maximale. Par ailleurs, il est techniquement nécessaire d'intégrer le vecteur de Poynting sur une surface englobant la région focale, et non juste un plan, puisque certaines parties de l'énergie vont dans toutes les directions, y compris en sens contraire de l'impulsion principale.

Un étalon de mesure plus intéressant que la puissance crête existe toutefois : l'énergie électromagnétique de l'impulsion. On retrouve celle-ci en intégrant la densité d'énergie électromagnétique w_{em} à un temps donné sur tout l'espace. En fait, il s'agit précisément de la quantité physique mesurée par les puissances mètres [43, chapitre 3]. La densité d'énergie d'un champ électromagnétique dans le vide s'écrit :

$$w_{em} = w_e + w_m = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{m_e c^2}{ea} \frac{1}{(k_0 a)^2} \right)^2 \left[|\tilde{\mathcal{E}}_z|^2 + |\tilde{\mathcal{E}}_r|^2 + |\tilde{\mathcal{H}}_\phi|^2 \right] \quad (3.8)$$

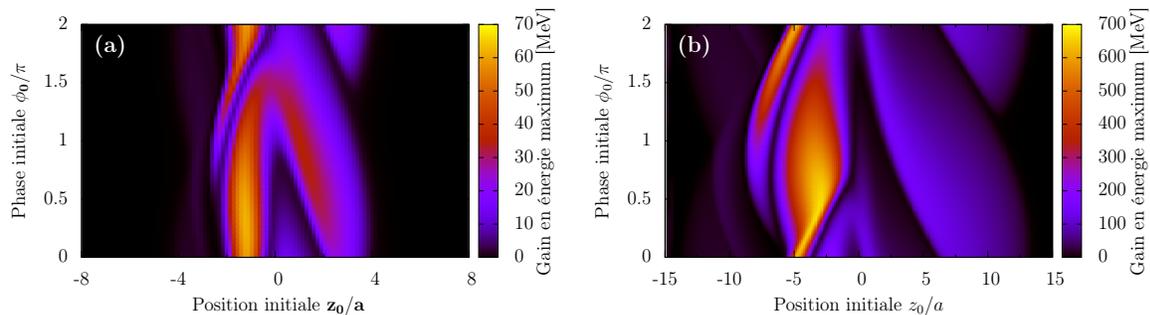


FIGURE 3.2 – Gain en énergie d'un électron suivant les conditions initiales sur la phase du champ laser ϕ_0 et la position initiale de l'électron $Z_0 = z_0/a$ pour une énergie de (a) $\sim 0.09J$ (b) $\sim 9J$. À titre indicatif, on a utilisé une discrétisation de 0.15 pour l'axe de position et de 0.015 pour l'axe de phase. Ces figures montrent le cas d'une impulsion avec $s_r = 10$, $s_i = -1.25$ et $k_0 a = 10$.

où $\tilde{\mathcal{E}}_r$ est la composante radiale du champ électrique complexe sans dimension et $\tilde{\mathcal{H}}_\phi$ est la composante azimutale du champ magnétique complexe sans dimension, toutes deux adimensionnées de la même manière que la composante longitudinale du champ $\tilde{\mathcal{E}}_z$ à l'équation (2.49a); μ_0 est la perméabilité magnétique du vide, ϵ_0 est la permittivité du vide et $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ est l'impédance caractéristique du vide. Contrairement à la puissance crête, il est donc très facile d'obtenir l'énergie U :

$$U = 2\pi a^3 \varphi_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} w_{em}(\rho, Z, \tau = cte)|_{\varphi_0=1} \rho d\rho dZ \quad (3.9)$$

où il est encore une fois possible d'obtenir la valeur de l'amplitude φ_0 correspondant à une énergie donnée en inversant l'équation (3.9). Même expérimentalement, il demeure plus difficile de caractériser précisément la puissance crête d'une impulsion que son énergie : cela pourrait se faire, par exemple, en déduisant l'intensité maximale du laser à partir du taux d'ionisation d'un gaz connu, ce qui fait appel à des modèles d'ionisation qui sont loin d'être exacts. De plus, toujours en contraste avec la puissance crête, l'énergie électromagnétique est une quantité conservée durant une expérience pour une impulsion donnée (en l'absence de perte). Il semble aussi raisonnable que, du point de vue pratique, un système laser en particulier ne puisse fournir qu'une certaine énergie totale bien précise : que les impulsions soit glissées en fréquence ou limitées par la transformée de Fourier, l'énergie provenant du système laser ne devrait pas changer en situation courante.

En somme, deux techniques d'étalonnage de l'amplitude ont été utilisées pour des simulations. D'abord, des simulations à énergie U constante ont été considérées. Puis, pour faciliter la comparaison avec certaines publications existantes et pour approfondir des aspects particuliers du problème, des simulations gardant constante l'amplitude maximale de l'enveloppe du champ électrique longitudinal ont été réalisées.

3.3 Accélération à l'aide d'impulsions à énergie constante

En considérant une énergie constante par impulsion, peu importe le glissement en fréquence en présence, on s'intéresse à l'accélération d'un électron au repos sur l'axe. En explorant l'espace des paramètres pour chaque énergie électromagnétique d'intérêt, tel que montré à la figure 3.2, et en retenant l'énergie cinétique maximale obtenue, on obtient une série de courbes présentées aux figures 3.3 et 3.4. Puisqu'on s'intéresse davantage à la variation d'énergie cinétique provoquée par le glissement en fréquence qu'à la valeur absolue de l'énergie, chacune des courbes est normalisée indépendamment. On peut ainsi comparer qualitativement la forme des courbes plus aisément.

Tout d'abord, à la figure 3.3, en considérant différentes valeurs de s_r , soit $s_r = 1$ (impulsion d'un cycle optique) et $s_r = 50$ (impulsion de cinq cycles optiques), représentant des contenus spectraux donc bien différents, on remarque un comportement similaire. Effectivement, dans les

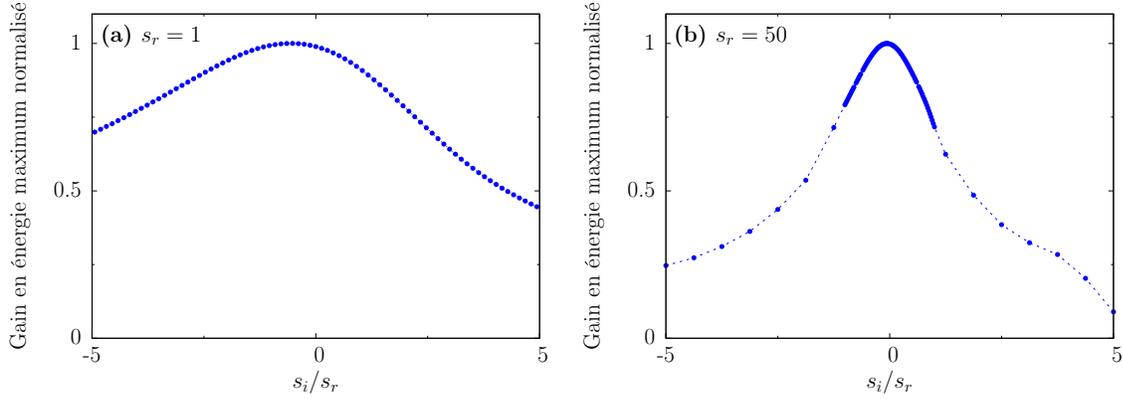


FIGURE 3.3 – (a) Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d’une énergie constante par impulsion pour une impulsion avec $s_r = 1$, soit une impulsion d’un seul cycle optique, $k_0a = 10$ et $U = 1.2$ J. (b) Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d’une énergie constante par impulsion pour une impulsion avec $s_r = 50$, $k_0a = 10$ et $U = 10.6$ J. Dans les deux cas présentés, l’impulsion laser sans glissement en fréquence centrée à 800 nm aurait une puissance crête de 2 PW.

deux cas présentés, on assiste à une diminution de “l’efficacité du mécanisme d’accélération”, ce par quoi on entend la capacité à extraire de l’énergie du champ laser pour la convertir en énergie cinétique de l’électron. On peut aussi le voir comme la fraction atteinte du gain en énergie théorique ΔW_{lim} , qui considère le gain d’un électron hypothétique se déplaçant à la vitesse de la lumière sur la crête de l’impulsion. Certes, la variation de l’efficacité du mécanisme varie change selon la largeur spectrale, étant plus brusque pour un spectre plus étroit, mais le résultat est le même : l’augmentation de la dérive en fréquence mène à une diminution de l’efficacité de l’accélération. De manière absolue, il est vrai que l’examen des courbes en question montre qu’une augmentation du gain en énergie cinétique, par rapport au cas libre de glissement en fréquence, peut être obtenue. Cependant, même pour l’énergie énorme considérée, ce gain n’excède pas 1%, ce qui n’est d’aucune utilité pratique. Dans le même ordre d’idée, l’effet d’une variation du paramètre k_0a , contrôlant la focalisation ou l’ouverture numérique du système, n’a pas d’effet significativement différent d’une augmentation de l’énergie par impulsion. Une fois bien à l’intérieur du régime d’accélération sous-cycle, la variation de k_0a ne changera que l’amplitude du champ électrique, tant qu’on s’écarte des valeurs $k_0a \lesssim 3$ pour lesquelles l’impulsion contre-propageante devient comparable à l’impulsion propageante et peut changer la dynamique du système.

Ainsi, pour analyser le sujet plus en profondeur, on choisit le cas particulier d’une largeur spectrale caractérisée par $s_r = 10$, soit des impulsions d’environ trois cycles optiques en l’absence de dérive de fréquence, et un paramètre $k_0a = 10$, ce qui résulte grossièrement en un ratio unitaire du champ longitudinal et du champ radial : $|E_z|_{\text{max}}/|E_r|_{\text{max}} \approx 1$. La figure 3.4 présente les résultats obtenus considérant ces paramètres, de même que quelques profils

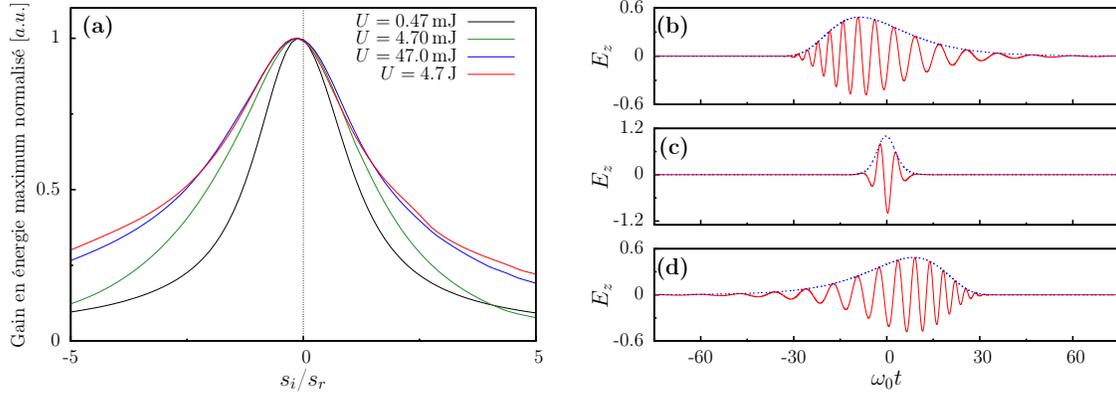


FIGURE 3.4 – (a) Variation du gain en énergie maximum normalisé selon le paramètre de glissement en fréquence relatif s_i/s_r dans le cas d’une énergie constante par impulsion. Chaque courbe est normalisée à son propre maximum. Le profil temporel du champ longitudinal E_z est tracé pour $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et pour 3 valeurs différentes du paramètre de glissement relatif, soit (b) $s_i/s_r = -5$, (c) $s_i/s_r = -0.125$, (d) $s_i/s_r = +5$. Les énergies indiquées correspondent à des impulsions sans glissement en fréquence centrées à 800 nm de puissance s’élevant respectivement à 200 GW, 2 TW, 20 TW et 2 PW.

du champ électrique longitudinal utilisé. On a considéré différentes valeurs de l’énergie par impulsion, chacune associée à une courbe différente. On constate toujours une diminution de l’efficacité du schéma d’accélération qui peut être aussi drastique que 80% sur la plage de paramètres considérée. Bien que la forme exacte de la courbe varie sensiblement d’une énergie d’impulsion à l’autre, il est tout de même possible de dégager des caractéristiques générales. Comme mentionné précédemment, les courbes sont légèrement décentrées à cause de la minime augmentation de l’efficacité pour une certaine plage de “down-chirp”. Il se trouve que plus l’énergie par impulsion est faible, moins ce décalage en abscisse est grand, de sorte que l’utilisation de dérive en fréquence dans une impulsion de plus faible énergie semble laisser moins de place à une possible augmentation de l’efficacité. Lorsque l’énergie par impulsion diminue, on peut aussi voir que la largeur à mi-hauteur des courbes diminue, conduisant à une diminution plus abrupte de l’efficacité.

Un autre point intéressant et quelque peu inattendu est la différence observable entre le glissement vers les hautes fréquences et le glissement vers les basses fréquences. Effectivement, il se trouve que dans tous les cas à l’étude, que ce soit à $s_r = 1$, $s_r = 10$ ou $s_r = 50$ et pour n’importe quelle énergie par impulsion, on trouve que le “down-chirp” conduit à une énergie cinétique légèrement plus grande qu’un “up-chirp” de même grandeur.

La figure 3.5 illustre, à titre d’exemple, la vitesse d’un électron pour des glissements en fréquence opposés, mais de même grandeur. La fréquence instantanée du champ électrique longitudinal à la position de l’électron au moment de son passage est aussi représentée. Puisqu’il s’agit d’accélération sous-cycle, chaque changement de cycle d’accélération implique un chan-

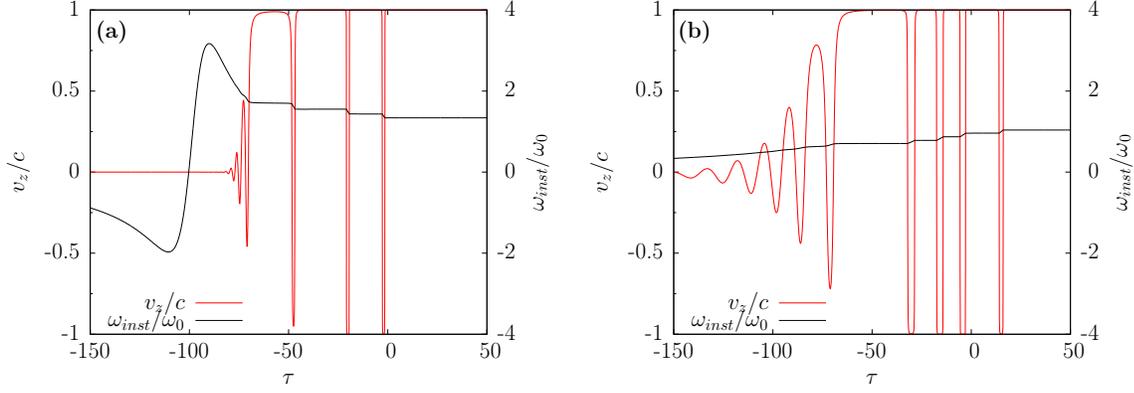


FIGURE 3.5 – Évolution de la vitesse de l'électron (rouge) et de la fréquence instantanée du champ électrique longitudinal (noir) sur l'axe à la position de l'électron dans une trajectoire optimisée pour $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et différentes valeurs de s_i , soit (a) $s_i = -50$ et (b) $s_i = +50$. Il va de soit que la vitesse maximale est bornée par la vitesse de la lumière ($v_z/c < 1$ pour t).

gement du demi-cycle optique accélérateur à l'intérieur de l'impulsion laser. Comme attendu, la fréquence instantanée subit une augmentation ou diminution rapide lorsque l'électron transitionne par un demi-cycle positif du champ, lesquels correspondent à la transition d'une vitesse positive à une vitesse négative de l'électron. On remarque que, dans le cas présenté du moins, la fréquence instantanée à la fin du laps de temps présenté reste plus élevée dans le cas d'une impulsion glissée vers les basses fréquences que dans le cas inverse : la longueur d'onde du cycle optique menant à l'accélération finale est plus petite pour l'impulsion avec une dérive vers les basses fréquences, ce qui est intuitivement contraire au fait que cette impulsion mène à un gain en énergie légèrement supérieur. On remarque également que l'accélération commence plus tôt pour une impulsion avec un glissement vers les hautes fréquences, étant donné le temps de montée supérieur. Pour une forte dérive en fréquence, on constate que l'électron oscille d'abord rapidement lorsque soumis à une impulsion glissée vers les basses fréquences, puisque l'oscillation rapide du champ électrique et sa courte longueur d'onde ne permettent pas à la particule de se synchroniser ; au contraire, l'oscillation est plus lente et régulière pour l'impulsion glissée vers les hautes fréquences, étant donné l'oscillation quasi-sinusoïdale au début de l'impulsion.

3.4 Accélération à l'aide d'impulsions à amplitude constante

L'exploration d'une situation où l'amplitude maximale du champ $|E_z|_{max}$ est gardée constante constitue une comparaison intéressante avec les travaux trouvés dans la littérature. Ceux-ci considèrent majoritairement une puissance crête constante. Or, dans la limite paraxiale avec une dérive de fréquence faible, ceci équivaut grossièrement à garder le maximum d'amplitude constant. On s'attendrait donc à voir une augmentation de l'efficacité suite à l'introduction de glissement en fréquence.

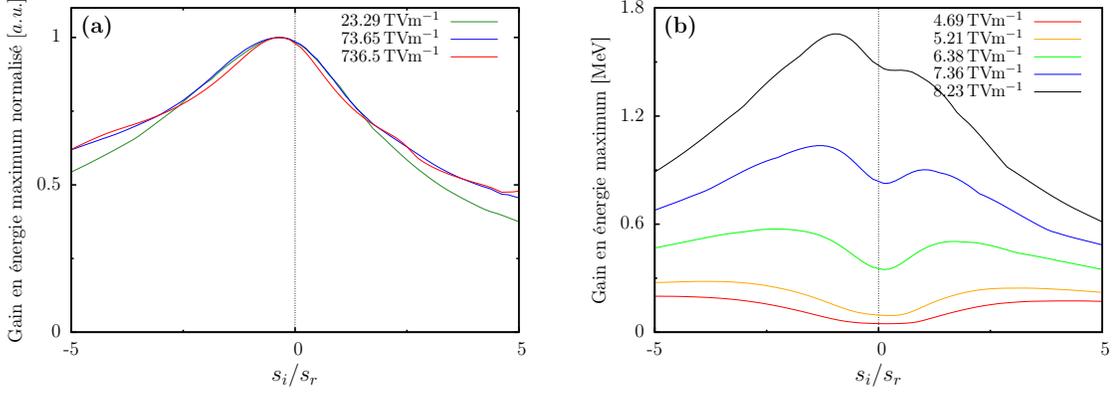


FIGURE 3.6 – (a) Variation du gain en énergie maximum normalisé bien à l’intérieur des limites du régime d’accélération relativiste (sous-cycle) et (b) gain en énergie maximum à la limite entre les différents régimes d’accélération dans le cas où le champ électrique maximal de l’impulsion est choisi comme constant. Les valeurs de champ sont associées à une impulsion TM_{01} caractérisée par les paramètres $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et $\lambda_0 = 800$ nm. Les valeurs choisies correspondent respectivement à des puissances de (a) 2 TW, 20 TW, 2 PW (b) 80 GW, 100 GW, 150 GW, 200 GW et 250 GW dans le cas sans glissement en fréquence.

Or, tel que montré à la figure 3.6(a), on observe une situation similaire à ce qui se produit dans le cas à énergie d’impulsion constante ; les seules différences sont des courbes légèrement plus décentrées et un gain maximum possible est plus élevé de quelques pourcents que le gain en énergie associé au cas limité par la transformée de Fourier. Ceci est cohérent avec les résultats précédents, puisqu’on doit se rappeler que chaque point de cette figure correspond à une impulsion laser d’énergie électromagnétique différente : le point correspondant au maximum d’efficacité implique une énergie par impulsion plus grande que dans le cas sans glissement en fréquence. Tracer la courbe à énergie constante par impulsion associée révélerait que le gain en énergie maximum possible n’est éloigné du gain associé au cas limité par la transformée de Fourier de moins que 1%.

À la figure 3.6(b), on observe une situation plus intéressante. Effectivement, on retrouve un gain en efficacité à utiliser la dérive de fréquence dans une certaine mesure. Pour un champ relativement faible, la nature du glissement ne semble pas avoir d’influence. Au contraire, pour un champ plus fort, on voit naître l’avantage du “down-chirp” sur le “up-chirp”. Éventuellement, peu importe la nature du glissement, on observe une inévitable baisse de l’efficacité.

Les figures 3.6(a)-(b) illustrent un point important concernant la mécanique d’accélération des électrons dans le vide qui est relié au paramètre de champ normalisé a_z , bien connu dans la littérature :

$$a_z = \frac{e}{m_e c \omega_0} |E_z|_{max}. \quad (3.10)$$

Ce paramètre définit les limites à l’intérieur desquelles la dynamique des électrons est dite classique. Considérant une longueur d’onde $\lambda_0 = 800$ nm, on obtient $|E_z|_{max} = 4,02$ TV/m

pour $a_z = 1$. Lorsque $a_z^2 \ll 1$, on se retrouve dans le régime d'accélération dit non-relativiste : l'électron oscille presque exclusivement sur place au passage de l'impulsion laser en ne gagnant finalement que très peu d'énergie cinétique. Ce régime n'est pas illustré dans les figures présentées, puisqu'il ne présente pas d'intérêt particulier. Ensuite, lorsque $a_z^2 \sim 1$, on entre dans le régime relativiste : dans ce régime l'intensité du champ est telle que l'électron subit une poussée suffisamment forte pour atteindre une vitesse représentant une fraction significative de la vitesse de la lumière. Comme dans le cas non-relativiste, la force pondéromotrice est au coeur du phénomène d'accélération. Cela signifie que la dynamique est liée uniquement à l'enveloppe de l'impulsion. L'énergie cinétique acquise par l'électron étant trop faible pour que la particule reste synchronisée avec l'impulsion laser, l'électron interagit avec l'entièreté de l'impulsion ou presque. C'est pourquoi les courbes rouge et orange de la figure 3.6(b) sont relativement symétriques : pour un même paramètre de dérive en fréquence, les impulsions avec dérive vers les hautes fréquences et celles avec dérive vers les basses fréquences étant identiques sous une inversion du temps, l'électron qui traverse toute l'impulsion acquerra essentiellement la même énergie. De plus, il a été démontré qu'en l'absence de glissement en fréquence, des impulsions plus longues conduisent à de plus grands gains en énergie dans ce régime, ce qui est cohérent avec le fait que les impulsions avec dérive de fréquence, donc plus longues, augmentent le gain en énergie potentiel. Éventuellement, lorsque le champ atteint $a_z^2 \gg 1$, on franchit la limite du régime ultra-relativiste, dont la dynamique diffère grandement des deux régimes précédents : la trajectoire de l'électron est déterminée directement par la forme du champ E_z au lieu de sa norme $|E_z|$. L'électron peut alors être accéléré jusqu'à une vitesse très proche de celle de la lumière en l'espace d'un demi-cycle optique. C'est la situation décrite par la figure 3.6(a). Ici, l'électron n'interagit efficacement qu'avec une partie limitée de l'impulsion, d'où la différence apparaissant lentement entre les deux types de dérive en fréquence. Ce régime est caractérisé par une sensibilité à la phase absolue du champ, comme on peut le voir à la figure 3.2. C'est d'ailleurs le régime principalement étudié dans le cadre de ce mémoire. On peut donc classer les différents régimes d'accélération directe de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Régime pondéromoteur (non-relativiste)} : & \quad a_z^2 \ll 1; \\
 \text{Régime pondéromoteur (relativiste)} : & \quad a_z^2 \sim 1; \\
 \text{Régime non-pondéromoteur (ultra-relativiste)} : & \quad a_z^2 \gg 1.
 \end{aligned}$$

En somme, la figure 3.6 montre une transition du régime pondéromoteur relativiste au régime non-pondéromoteur ultra-relativiste, lorsque l'amplitude du champ augmente.

3.5 Inconvénients liés à l'usage d'impulsion avec une dérive de fréquence

Les résultats présentés aux deux sections précédentes traduisent l'effet néfaste du glissement en fréquence sur l'efficacité du schéma d'accélération à l'étude dans le régime d'accélération

sous-cycle (ultra-relativiste). Il reste néanmoins à clarifier les raisons physiques derrière le phénomène, ce qui fait l'objet de cette section.

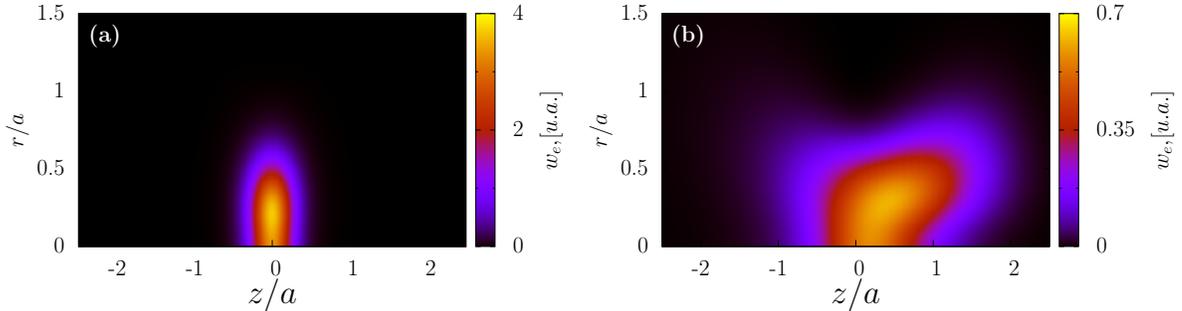


FIGURE 3.7 – Élargissement de la densité d'énergie électrique suite à l'introduction d'une dérive de fréquence. On compare ici des impulsions au temps $t = 0$ pour $s_r = 10$ et $k_0 a = 10$ lorsque l'on passe de (a) l'impulsion limitée par la transformée de Fourier ($s_i = 0$) à (b) une impulsion fortement glissée en fréquence ($s_i/s_r = -5$). On remarque que l'échelle d'intensité doit être différente de près d'un ordre de grandeur dans ce cas pour conserver l'énergie de l'impulsion.

En premier lieu, si l'on considère les résultats obtenus en situation d'énergie constante par impulsion laser, on doit considérer la modification de la durée des impulsions en présence d'une dérive de fréquence. En effet, tel mentionné auparavant, le phénomène en jeu donnera naissance à des impulsions laser plus longues que l'impulsion limitée par la transformée de Fourier. De plus, il a déjà été précisé à la section 2.4 que toutes les composantes du champ électromagnétique subissent les effets de l'introduction d'une dérive de fréquence. Ceci a des répercussions directes sur la densité d'énergie électromagnétique w_{em} décrite par l'équation (3.8), et donc sur l'amplitude du champ électrique longitudinal. Effectivement, le glissement en fréquence induit un élargissement rapide en z et en r de la fonction de densité d'énergie, ce qui implique que l'amplitude du champ doit être réduite pour que l'intégration conduise à la même valeur d'énergie. Une partie de l'énergie est donc évacuée vers les autres composantes du champ électromagnétique, comme illustré à la figure 3.7. Les différences entre les résultats à amplitude maximale constante et ceux à énergie constante par impulsion s'expliquent principalement par cet argument. C'est également pourquoi le gain en énergie cinétique maximum tend vers zéro à mesure qu'on augmente le glissement en fréquence : éventuellement l'impulsion est tellement longue que l'énergie s'y trouve trop diluée et l'amplitude du champ n'est plus suffisante pour obtenir de l'accélération.

En second lieu, les simulations à amplitude maximale constante révèle qu'un autre phénomène est en jeu, puisque celles-ci conduisent à une diminution de l'efficacité d'accélération, malgré l'augmentation de l'énergie par impulsion découlant de l'ajout d'un glissement en fréquence.

On s'intéresse encore une fois à l'augmentation de la durée des impulsions, ou plutôt à une conséquence directe de celle-ci, soit l'augmentation du nombre cycles optiques par impulsion. Du point de vue du mécanisme d'accélération sous-cycle, l'augmentation du nombre de cycles optiques a un impact direct sur la dynamique des électrons. En effet, en régime ultra-relativiste, l'électron est accéléré jusqu'à une vitesse significative dans chacun des demi-cycles optiques qu'il rencontre. Ainsi, la particule est amenée à passer un certain temps dans chacun des demi-cycles négatifs qu'il rejoint et qui lui permettent de suivre l'impulsion laser de près. Chacun des cycles optiques intermédiaires peut donc être vu comme un obstacle entre l'électron et le cycle optique où il débutera son accélération finale. Si on imagine le cas idéal d'une impulsion d'un seul cycle optique, l'électron entre directement dans cette accélération finale et se trouvera dans le cycle optique avec la plus grande amplitude au moment de se propager près du centre de la région focale. Au contraire, si on considère une impulsion de plusieurs cycles optiques, dont l'amplitude est de plus en plus grande, l'électron passera un certain temps dans chacun des cycles optiques "secondaires", par opposition au cycle optique "principal" avec la plus forte amplitude. Il se trouvera donc possiblement dans un de ces cycles secondaires lors du passage au coeur de la région focale et sera peut-être même accéléré par l'un d'eux. Ainsi, conserver l'amplitude maximale de l'impulsion constante, ou même sa puissance comme dans certaines publications, ne peut garantir que le cycle final d'accélération sera de même amplitude. Tel que mentionné à la section 3.4, l'électron ne voit qu'une partie de l'impulsion en régime ultra-relativiste. En comparant les figures 3.5 et 3.8(b), on constate en effet que l'électron est soumis à moins de cycles d'accélération successifs lorsqu'il est accéléré par une impulsion contenant moins de cycles optiques. L'utilisation d'impulsions courtes, non seulement en terme de durée, mais également en terme du nombre de cycles optiques, permet d'exploiter l'énergie du champ électrique plus efficacement.

Les articles sur le sujet trouvés dans la littérature ne relèvent pas la baisse d'efficacité reliée à l'emploi de la dérive en fréquence, tel que présenté dans ce mémoire. Cependant, de nombreux éléments des travaux effectués dans le cadre de ce mémoire diffèrent des travaux antérieurs. D'abord, le mécanisme d'accélération est fondamentalement différent : il ne s'agit pas d'accélération pondéromotrice, mais bien d'accélération sous-cycle, très peu considérée dans la littérature, puisque les énergies en jeu étaient jusqu'à tout récemment bien en dehors des capacités des technologies laser. L'accélération se fait ici en régime ultra-relativiste en considérant une très forte focalisation d'une impulsion de polarisation radiale, qui permet d'atteindre des conditions de focalisation plus intense qu'avec une polarisation linéaire par exemple. Finalement, le nouveau modèle théorique utilisé ne repose pas sur l'approximation paraxiale ou le spectre gaussien, ce qui permet de considérer de très fortes dérives de fréquence. Il est également possible que la nature du glissement en fréquence, la forme plus complexe choisie, change la situation.

Dans un autre ordre d'idée, les raisons pour lesquelles le glissement vers les hautes fréquences

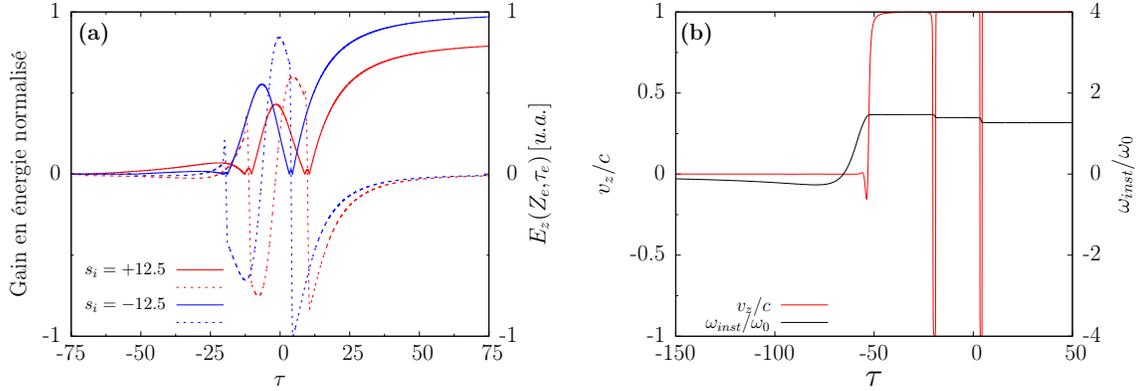


FIGURE 3.8 – (a) Énergie cinétique (ligne pleine) d’un électron aux conditions initiales optimales et champ électrique (ligne pointillée) ressenti par celui-ci pour $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et $U = 4.7\text{J}$. Sachant le moment et la position auxquels l’électron amorce sa dernière phase d’accélération, on peut tracer le profil du champ électrique au début du cycle final d’accélération. (b) Vitesse de l’électron et fréquence instantanée du champ à la position de l’électron pour les mêmes paramètres décrits en (a), en présence de “down-chirp”.

conduit à une accélération d’électrons moins efficace que le glissement vers les basses fréquences sont moins claires. Les impulsions étant des réflexions l’une de l’autre pour des dérives de signes opposés, on pourrait argumenter que les simulations présentées poussent aussi une comparaison entre l’utilisation d’impulsions avec un temps de montée rapide et d’impulsions avec un temps de montée lent, conséquence directe de la modification de l’enveloppe. Une piste de solution est donnée par la position spatio-temporelle à laquelle le cycle finale d’accélération de l’électron débute. En traçant, l’énergie cinétique correspondant à la trajectoire optimisée de l’électron, il devient possible de distinguer chacune des phases d’accélération, de même que la phase finale débutant lorsque l’énergie cinétique atteint son dernier zéro avant de rejoindre sa valeur finale. On peut alors comparer la position de l’électron lorsqu’il amorce sa phase finale d’accélération pour une impulsion avec dérive vers les hautes fréquences et une autre avec dérive vers les basses fréquences. Combiner cette information avec le profil du champ électrique longitudinal nous renseigne sur les conditions précédant l’accélération finale. La figure 3.10 montre le profil du champ longitudinal pour trois valeurs absolues différentes du paramètre de glissement en fréquences sans dimension. On remarque que pour tous les cas montrés, on observe une accélération débutant plus près de la crête de l’impulsion dans le cas soumis au “down-chirp”. En fait, si l’on répète l’exercice d’identifier la position du cycle d’accélération final pour d’autres valeurs de la dérive de fréquence, on retrouve la figure 3.9. On observe que le temps τ_f auquel débute le cycle final d’accélération et sa position Z_f sont étroitement liés, variant de manière similaire. Plus intéressant encore, on note que la dérive vers les basses fréquences permet toujours une accélération plus proche du centre de la région focale que la dérive vers les hautes fréquences. Bien que la forme de l’impulsion soit complexe, il est raisonnable de supposer qu’une accélération débutant plus près du coeur de

la région focale se fera dans un champ électrique plus intense, ce qui semble être confirmé aux figures 3.8 et 3.10. L'énergie cinétique résultant ne peut donc être que plus élevée. Ainsi, l'avantage du “down-chirp” résiderait peut-être dans son enveloppe avec un temps de montée rapide et un maximum plus près du début de l'impulsion, permettant d'accéder à la phase finale d'accélération plus près du centre de la région focale. Les seules occasions menant à une faible amélioration de l'efficacité d'accélération grâce au glissement en fréquence correspondent d'ailleurs à une accélération plus près du centre de la région focale à cause du “down-chirp”.

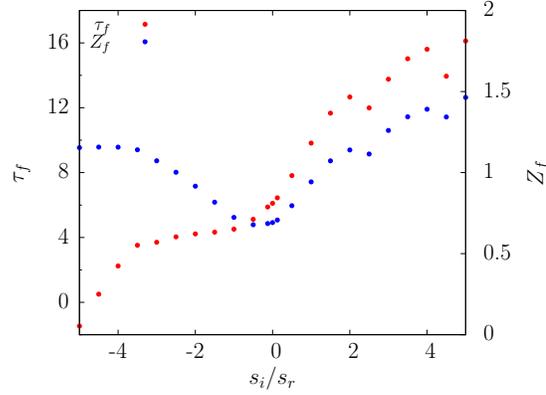


FIGURE 3.9 – Positions spatiale Z_f et temporelle τ_f auxquelles l'électron débute son cycle final d'accélération pour $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et $U = 8,9J$ ($P_{crete} \approx 2 \times 10^{15}W$).

De plus, il est intéressant de noter à la figure 3.5 que l'électron semble passer davantage de temps avec une vitesse négative pour une impulsion avec “up-chirp”. Les cycles optiques sont plus longs au début de l'impulsion, ce qui implique des demi-cycles optiques positifs également plus larges. Ceci a une influence apparemment sur le temps de décélération.

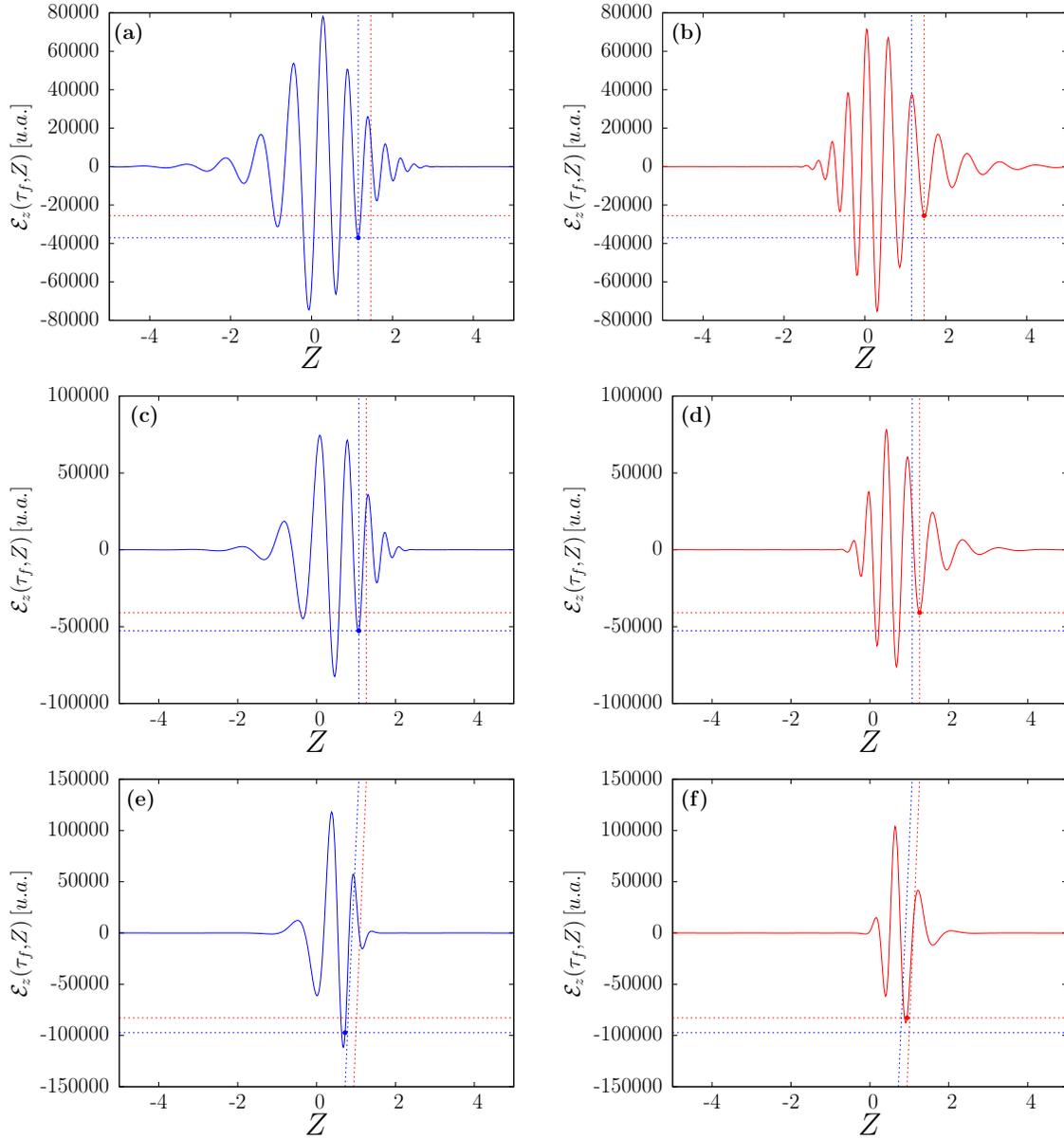


FIGURE 3.10 – Profil du champ longitudinal lorsque l’électron amorce son cycle final d’accélération pour différentes valeurs du rapport s_i/s_r , soit (a) $s_i/s_r = -5$, (b) $s_i/s_r = +5$, (c) $s_i/s_r = -3$, (d) $s_i/s_r = +3$, (e) $s_i/s_r = -1$, (f) $s_i/s_r = +1$. Les lignes pointillées indiquent la position de l’électron dans le champ électromagnétique lors du début de son cycle d’accélération, le bleu correspondant au cas “down-chirp” et le rouge au cas “up-chirp” pour une même valeur absolue du paramètre de glissement en fréquence. Un point représente la position de l’électron dans l’impulsion. Les impulsions ont les caractéristiques communes suivantes : $s_r = 10$, $k_0 a = 10$ et $U = 4.7$ J pour des impulsions centrées à 800 nm.

Conclusion

On s'est intéressé à l'accélération d'électrons par des impulsions laser ultrabrèves de polarisation radiale fortement focalisées en présence de dérive en fréquence. Une recherche dans la littérature permet rapidement de constater qu'il n'existe qu'un nombre très limité de publications sur l'accélération de particules par une impulsion glissée en fréquence : une vingtaine d'articles sur le sujet ont paru depuis le tout premier en 2004. De ce nombre, un seul considère l'emploi d'une polarisation radiale, alors que la majorité observe les effets d'une impulsion de polarisation linéaire, focalisée ou non. Ceci traduit aussi le fait que les effets du glissement en fréquence n'ont pas été étudiés dans le cadre du schéma d'accélération en champ direct. Puisque cette méthode diffère grandement des autres schémas présentés à plusieurs égards, on ne peut simplement appliquer les conclusions des publications existantes sans analyse plus poussée. L'étude de l'effet d'un glissement en fréquence est tout à fait pertinente, puisque ce phénomène fait partie inhérente de la réalité expérimentale : une simple lentille peut introduire un glissement en fréquence dans les impulsions laser à cause de la dispersion de la vitesse de groupe du matériaux constituant la lentille.

Dans l'optique de produire un portrait plus fidèle à la réalité physique, on a développé une approche rigoureuse pour la modélisation d'impulsions avec une dérive en fréquence. Effectivement, il se trouve que l'impulsion gaussienne, ou du moins le portrait d'une impulsion dont l'enveloppe et l'onde porteuse sont complètement indépendantes, est omniprésente dans quasiment toutes les publications sur le sujet. Or, d'un point de vue théorique, cette approche comporte certaines lacunes, d'autant plus qu'on s'intéresse à des impulsions aussi brèves que quelques cycles optiques dans le cadre du présent mémoire. Par exemple, le spectre gaussien comporte des composantes spectrales pour les fréquences $\omega \leq 0$, ce qui implique la présence d'un champ statique incompatible avec la propagation. Considérer l'enveloppe et l'onde porteuse séparément mène aussi à des problèmes pour les impulsions ultrabrèves, lesquelles sont affectées par le décalage auto-induit vers le bleu qui traduit le lien existant entre l'enveloppe et l'onde porteuse. Pour respecter la condition de force nette nulle, on a donc tenté d'implémenter la dérive de fréquence dans un spectre de Poisson, lequel est adéquat pour la représentation d'impulsions ultrabrèves. Un travail analytique a permis d'arriver à deux expressions différentes et tout aussi satisfaisantes l'une que l'autre pour la description d'une dérive en fréquence, soit par l'emploi d'un terme de phase quadratique ajouté à la phase spec-

trale existante, soit par la définition d'un paramètre de largeur complexe pour le spectre de Poisson menant à une phase spectrale logarithmique. La seconde expression, plus simple et élégante, fut retenue pour être implémentée dans les solutions exactes aux équations de Maxwell développées par A. April [6] pour l'impulsion TM_{01} isodiffractante. À notre connaissance, il s'agit de la première expression analytique décrivant le champ électromagnétique exact d'une impulsion avec une dérive en fréquence. Ceci contraste avec les études existantes qui font appel à différentes approximations ou à des développements en séries tronquées pour obtenir un champ approximatif analytiquement.

L'utilisation du modèle théorique développé pour les impulsions glissées en fréquence a permis de réaliser des simulations "particule test" unidimensionnelles à partir de l'équation de Newton-Lorentz dans le but d'étudier la variation d'énergie cinétique finale pouvant être causée par l'introduction d'une dérive de fréquence. Les conditions initiales optimales propres à chaque impulsion utilisée ont été considérées de manière à pouvoir déceler un changement dans l'efficacité du schéma d'accélération par rapport aux résultats observés avec une impulsion dont le profil temporel est limité par la transformée de Fourier. Aussi, pour fixer la variation de l'amplitude du champ électrique longitudinal, deux avenues ont été envisagées. On s'est d'abord tourné vers une amplitude variant de manière à conserver l'énergie électromagnétique totale du champ, puisqu'un système laser, aussi perfectionné soit-il, ne peut fournir qu'une énergie totale précise par impulsion. Les résultats des simulations numériques semblent démontrer une baisse de l'efficacité du schéma d'accélération, se traduisant par une baisse du gain en énergie maximum atteignable, en présence de glissement en fréquence. Comme seule une augmentation de l'efficacité de moins de 1% par rapport au cas libre de dérive en fréquence est observée, et ce, sur un très court domaine, on peut dire sans trop d'exagération que le glissement en fréquence est nuisible à l'accélération. Un comportement semblable est observé pour différentes largeurs spectrales et différentes énergies par impulsion : la dérive de fréquence semble inévitablement diminuer le gain maximum en énergie. Ceci entre en contradiction avec les conclusions tirées de la littérature disponible sur le sujet. Par la suite, étant donné que la majorité des articles sur le sujet opte pour une puissance crête constante, on a posé une amplitude maximale constante pour le champ longitudinal de manière à faciliter la comparaison au cas où cela permettrait de reproduire les comportements observés dans d'autres études. On obtient sensiblement les mêmes résultats avec un différence seulement à basse puissance. Ces observations sont la répercussion de l'augmentation de la durée des impulsions, ainsi que de l'augmentation du nombre de cycles optiques, une conséquence directe. On conclut que la nature du mécanisme d'accélération à l'étude rend l'utilisation de glissement en fréquence peu souhaitable pour optimiser le gain en énergie. Dans un contexte où on imposerait une dérive de fréquence, on observe qu'il semble y avoir un avantage léger à utiliser une dérive vers les basses fréquences ("down-chirp") plutôt qu'une dérive vers les hautes fréquences ("up-chirp"). Ceci semble être dû à la déformation de l'enveloppe de l'impulsion et à la translation du maximum d'intensité.

La poursuite du travail réalisé dans ce mémoire peut se faire de multiples façons. Tout d’abord, il serait intéressant de tenter de simuler l’accélération de nuages d’électrons en employant un code PIC. D’une part pour confirmer les résultats obtenus avec une méthode plus simple dans ce mémoire et d’autre part pour analyser l’effet du glissement en fréquence sur d’autres paramètres que le gain maximal en énergie atteignable. En effet, il est possible que des impulsions avec une dérive en fréquence, même si elles ne permettent pas une énergie cinétique plus grande, permettent une énergie moyenne supérieure ou encore une plus faible divergence des électrons. Grâce aux travaux réalisés par C. Varin et V. Marceau, le code PIC “EPOCH” est déjà bien adapté pour simuler l’accélération d’électrons dans un gaz de faible densité via le schéma d’accélération à l’étude. L’utilisation d’impulsions avec une autre forme de glissement en fréquence, telle que celle décrite par le spectre de Poisson avec un terme de phase quadratique, permettrait de voir si certains phénomènes observés sont plutôt dus à la forme non linéaire du glissement en fréquence. En effet, pour une variation différente de la phase spectrale, la déformation de l’enveloppe de l’impulsion pourrait être moins flagrante dans le domaine temporel et ainsi conduire à des résultats potentiellement différents.

Annexe A

Transformées de Fourier

La présente annexe a pour but d'expliciter la démarche menant à la transformée de Fourier de certaines fonctions non triviales. Les fonctions montrées sont toutes étudiées au chapitre 1 de ce mémoire.

A.1 L'onde d'amplitude constante avec dérive en fréquence

On s'intéresse d'abord à la transformée de Fourier d'une onde d'amplitude constante glissée en fréquence, telle que présentée à l'équation (2.36). On débute donc avec le cas le plus simple possible, soit l'onde d'amplitude constante sans borne :

$$f(t) = \exp \{jC\omega_0^2 t^2\}. \quad (\text{A.1})$$

La transformée de Fourier de cette fonction se fait directement par intégration. Par la définition de la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} F(\omega) = TF\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{jC\omega_0^2 t^2\} e^{-j\omega t} dt \\ &= \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ jC \left[\omega_0 t - \frac{\omega}{2C\omega_0} \right]^2 \right\} dt \end{aligned}$$

où on a utilisé une complétion de carré. On pose alors le changement de variable suivant : $u = \omega_0 t - \omega/(2C\omega_0)$. Cela permet de séparer l'intégrale en deux nouvelles intégrales que l'on

retrouve dans les tables d'intégrations standards :

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \frac{2}{\omega_0} \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} \int_0^\infty \exp \{ jCu^2 \} dt \\
&= \frac{2}{\omega_0} \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} \left[\int_0^\infty \cos(Cu^2) dt + j \int_0^\infty \sin(Cu^2) dt \right] \\
&= \frac{2}{\omega_0} \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} \left[\int_0^\infty \cos(|C|u^2) dt + j \operatorname{sign}(C) \int_0^\infty \sin(|C|u^2) dt \right] \\
&= \frac{1}{\omega_0} \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2|C|}} + j \operatorname{sign}(C) \sqrt{\frac{\pi}{2|C|}} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{|C|}} \frac{1}{\omega_0} \exp \left\{ \frac{-j\omega^2}{4C\omega_0^2} \right\} e^{j\frac{\pi}{4} \operatorname{sign}(C)} \tag{A.2}
\end{aligned}$$

où on a séparé l'exponentielle en ses parties réelle et imaginaire et on a considéré l'impact d'un changement de signe du paramètre C par la parité des fonctions trigonométriques. Le résultat (A.2) s'obtient rapidement grâce aux intégrales suivantes [18, éq. (3.691.1)] :

$$\int_0^\infty \sin ax^2 dx = \int_0^\infty \cos ax^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \tag{A.3}$$

où $a > 0$, d'où la nécessité de séparer les cas $C < 0$ et $C > 0$. L'équation (A.1) pose problème d'un point de vue physique, puisqu'elle ne décrit pas une fonction de carrée intégrable. En effet, on trouve que

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |F(\omega)|^2 d\omega = \infty, \tag{A.4}$$

ce qui indique un signal d'énergie infinie. Cela pose aussi problème mathématiquement, puisque pour de telles fonctions, on ne peut pas garantir que $f(t)$ et $TF^{-1}\{F(\omega)\}$ correspondent exactement à la même fonction. Pour résoudre ce problème, on peut tenter de limiter le contenu fréquentiel par l'ajout d'une enveloppe limitant l'énergie du spectre. On choisit donc une enveloppe rectangulaire très simple centrée sur la fréquence centrale ω_0 et de largeur $2\omega_0$:

$$\bar{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\omega_0^2|C|}} e^{-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4C\omega_0^2}} e^{j[\operatorname{sign}(C)\pi/4-\phi_0]} \operatorname{rect} \left(\frac{\omega - \omega_0}{2\omega_0} \right). \tag{A.5}$$

En prenant dérivant cette fonction, on obtient une équation différentielle correspondante, soit

$$\frac{d}{d\omega} \bar{F}(\omega) + j \left(\frac{\omega - \omega_0}{2C\omega_0^2} \right) \bar{F}(\omega) = \exp \left\{ -j\frac{(\omega - \omega_0)^2}{4C\omega_0^2} \right\} (\delta(\omega) - \delta(-\omega + 2\omega_0)) \tag{A.6}$$

dont il est possible de prendre la transformée de Fourier à partir de la propriété qu'une dérivée par rapport à ω dans le domaine fréquentiel équivaut à une multiplication par un facteur $(-jt)$ dans le domaine temporel :

$$\frac{d}{dt} \bar{f}(t) - j\omega_0 (2C\omega_0 t + 1) \bar{f}(t) = 2C\omega_0^2 (1 - e^{-j/4C}) \tag{A.7}$$

La résolution de cette équation permet d'identifier la transformée de Fourier inverse de l'équation (A.5). En constatant qu'il s'agit d'une équation différentielle se ramenant à une équation

différentielle linéaire de premier ordre, on résout directement l'équation différentielle à partir de l'ansatz bien connu pour obtenir :

$$\bar{f}(t) = \omega_0 \sqrt{-jC\pi} \left(1 - e^{-j/4C}\right) e^{jC\omega_0^2 t^2 + j\omega_0 t} \left[K_0 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{jC} (\omega_0 t + 1/2C) \right) \right]. \quad (\text{A.8})$$

Ce résultat est semblable à celui obtenu sans l'enveloppe rectangulaire à l'exception d'un facteur $(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{jC}(\omega_0 t + 1/2C)))$ qui complique l'analyse analytique.

A.2 Le spectre de Poisson

Le spectre de Poisson et sa forme temporelle limitée par la transformée de Fourier s'écrivent :

$$F(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} \omega^s \exp\{-s\omega/\omega_0\} \theta(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = e^{j\phi_0} \left(1 - j\frac{\omega_0 t}{s}\right)^{-(s+1)}. \quad (\text{A.9})$$

Une façon de démontrer l'exactitude de cette paire de transformées de Fourier est par le biais des propriétés générales de la transformée de Fourier, telles que décrites au tableau A.2.

TABLE A.1 – Paires de Fourier impliquées dans la transformée de Fourier du spectre de Poisson

$f(t)$	$F(\omega)$	
$\frac{d^s}{dt^s} f(t)$	$(j\omega)^s F(\omega)$	(A.10)
$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$	(A.11)
$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	(A.12)
$\frac{1}{\beta - jt}$	$2\pi e^{\beta\omega} \theta(-\omega)$	(A.13)

En combinant (A.12) et (A.13) avec $\beta = s/\omega_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta - jt} &\Leftrightarrow 2\pi e^{-\beta\omega} \theta(\omega) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s/\omega_0 - jt} &\Leftrightarrow \exp\{-s\omega/\omega_0\} \theta(\omega). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

On obtient, en multipliant par les constantes de l'équation (A.9) et en utilisant la propriété (A.10),

$$TF^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) = \frac{e^{j\phi_0} s^{s+1}}{(j\omega_0)^s \Gamma(s+1)} \frac{d^s}{dt^s} \left(\frac{1}{s - j\omega_0 t} \right). \quad (\text{A.15})$$

Après quelques essais, on trouve rapidement que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{j\phi_0} s^{s+1}}{(j\omega_0)^s \Gamma(s+1)} \frac{(j\omega_0)^s s!}{(s - j\omega_0 t)^{(s+1)}} \\ &= e^{j\phi_0} \left(1 - j \frac{\omega_0 t}{s} \right)^{-(s+1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

A.3 Le spectre de Poisson avec un paramètre s complexe

La démarche de la section précédente montre la transformée de Fourier du spectre de Poisson en l'absence de glissement en fréquence et pour une valeur entière de s .

Dans le cas du spectre de Poisson associé à une valeur de s complexe, il est nécessaire de procéder par intégration directe, puisque la propriété (A.10) ne convient plus.

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{s+1} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^s \exp\{-s\omega/\omega_0\} \theta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{s+1} \int_0^{\infty} \omega^s \exp\{-(s/\omega_0 - jt)\omega\} d\omega. \\ &= \frac{e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{\omega_0}{s} \right)^{-(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} - jt \right)^{-(s+1)} \Gamma(s+1) \\ &= e^{j\phi_0} \left(1 - j \frac{\omega_0 t}{s} \right)^{-(s+1)} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

où on a utilisé directement le résultat de Gradshteyn et Ryzhik [18, éq. (3.478.1)]. Ce résultat confirme que la transformée de Fourier inverse du spectre de Poisson conserve sa forme fonctionnelle pour les valeur de s non entières ou complexes (pour autant que $\Re(s) > 0$).

A.4 Le spectre de Poisson combiné à une phase quadratique

À la sous-section 2.2.4, on s'intéresse à un spectre de Poisson auquel on a ajouté une phase quadratique, soit

$$F(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0} \right)^{s+1} \omega^s \exp\left\{-s \frac{\omega}{\omega_0}\right\} \exp\left\{-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{4C\omega_0^2}\right\} \theta(\omega), \quad (\text{A.18})$$

en affirmant que la transformée de Fourier d'un tel spectre est liée à une fonction parabolique cylindrique. La preuve se trouve dans les prochaines lignes. À partir de la définition de la

transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{e^{j(\phi_0-1/4C)}}{\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} \int_0^\infty \omega^s \exp\left\{-s\frac{\omega}{\omega_0}\right\} \exp\left\{-j\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4C\omega_0^2}\right\} e^{j\omega t} d\omega \\
&= \frac{e^{j(\phi_0-1/4C)}}{j^s\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} \int_0^\infty (j\omega)^s \exp\left\{-\frac{j}{4C}\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{4C}\frac{\omega}{\omega_0} - s\frac{\omega}{\omega_0} + j\omega t\right\} d\omega \\
&= \frac{e^{j(\phi_0-1/4C)}}{j^s\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} \frac{ds}{dt^s} \left[\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{j\omega^2}{4C\omega_0^2} + \frac{j\omega}{4C\omega_0} - \frac{s\omega}{\omega_0} + j\omega t\right\} d\omega \right] \quad (\text{A.19})
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété (A.10). On pose alors le changement de variable

$$\begin{aligned}
\nu^2 &= \frac{j}{4C} \left[u - 2jC \left(s - j\omega_0 t - \frac{j}{4C} \right) \right]^2 \\
\nu &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{j}{C}} \left[u - 2C \left(\omega_0 t + \frac{1}{4C} + js \right) \right], \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

avec $u = \omega/\omega_0$, ce qui rend les bornes d'intégration complexes. Effectivement, on a que

$$\int_0^\infty [\dots] du \Rightarrow \int_{-\sqrt{jC}(\omega_0 t + \frac{1}{4C} + js)}^{\sqrt{j}\infty} [\dots] d\nu \Rightarrow \int_{-\sqrt{jC}(\omega_0 t + \frac{1}{4C} + js)}^\infty [\dots] d\nu. \quad (\text{A.21})$$

Or, on a que $\sqrt{j}\infty = \pm(\infty + j\infty)$ (on présentera seulement le cas $\sqrt{j}\infty = \infty + j\infty$, mais le résultat est le même dans les deux cas). En posant $z_0 = -\sqrt{jC}(\omega_0 t + \frac{1}{4C} + js)$, on peut définir une intégrale sur un parcours fermé dans le plan complexe conduisant à une résultat nul par le théorème intégral de Cauchy, en l'absence de pôle, et qui mène à l'égalité

$$\int_{z_0}^{\infty+j\infty} \exp\{z^2\} dz = \int_{z_0}^\infty \exp\{z^2\} dz + \int_\infty^{\infty+j\infty} \exp\{z^2\} dz$$

Le second terme sur la droite doit être analysé à partir d'une limite. Il se trouve que cette intégrale tend vers un résultat nul, alors que les deux fonctions d'erreur convergent vers une valeur réelle de 1 :

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{R+jR} \exp\{z^2\} dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_R^0 \exp\{z^2\} dz + \int_0^{R+jR} \exp\{z^2\} dz \right] \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf}(R+jR) - \operatorname{erf}(R)) \right] \\
&= 0 \quad (\text{A.22})
\end{aligned}$$

On peut donc changer les bornes d'intégration décrites par (A.21), à partir de l'égalité :

$$\int_{z_0}^{\sqrt{j}\infty} \exp\{z^2\} dz = \int_{z_0}^\infty \exp\{z^2\} dz \quad (\text{A.23})$$

Sachant cela, on peut continuer la démarche en écrivant l'équation (A.19) sous la forme

$$f(t) = \frac{\omega_0 e^{j(\phi_0-1/4C)}}{j^s\Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} 2\sqrt{-jC} \frac{ds}{dt^s} \left[\exp\{z_0^2\} \int_{z_0}^\infty \exp\{-\nu^2\} d\nu \right], \quad (\text{A.24})$$

où on a utilisé le changement de variable $z = \sqrt{2}z_0$. Avec la définition de la fonction d'erreur complémentaire, soit $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(z)$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\omega_0 e^{j(\phi_0 - 1/4C)}}{j^s \Gamma(s+1)} \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{s+1} 2j\sqrt{jC} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (-\omega_0 \sqrt{2jC})^s \frac{d^s}{dz^s} \left[\exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ &= \frac{2^{(s-1)/2} \sqrt{2\pi} e^{j(\phi_0 - 1/4C)}}{\Gamma(s+1)} (js\sqrt{jC})^{s+1} \frac{d^s}{dz^s} \left[\exp\left\{\frac{z^2}{2}\right\} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

L'équation précédente contient la définition de la fonction parabolique cylindrique en terme de la fonction d'erreur complémentaire, telle que donnée par [44, éq. (12.7.6)],

$$U(n+1/2, z) = D_{-n-1}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^n}{n!} e^{-z^2/4} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{z^2/2} \operatorname{erfc}(z/\sqrt{2}) \right) \quad (\text{A.26})$$

où $n = \{0, 1, 2, \dots\}$, z est une variable complexe quelconque et $U(\alpha, z)$ et $D_{-\beta}(z)$ sont les fonctions paraboliques cylindriques. On peut donc écrire directement la forme finale de la transformée de Fourier inverse d'un spectre de Poisson avec une phase quadratique comme

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{e^{j(\phi_0 - 1/4C)} s! \sqrt{2}}{\Gamma(s+1)} (-js\sqrt{jC})^{s+1} \exp\left\{\frac{z^2}{4}\right\} U(s+1/2, z) \\ &= K_0 \exp\left\{j\frac{C}{2} \left(\tau + \frac{1}{4C}\right)^2\right\} \exp\left\{-Cs \left(\tau + \frac{1}{4C}\right)\right\} \\ &\quad \times U\left(s + \frac{1}{2}, -\sqrt{2jC} \left[\left(\tau + \frac{1}{4C}\right) + js\right]\right) \\ &= K_0 \exp\left\{j\frac{C}{2} \bar{\tau}^2\right\} \exp\{-Cs\bar{\tau}\} U\left(s + \frac{1}{2}, -\sqrt{2jC} [\bar{\tau} + js]\right) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

où $\bar{\tau} = \left(\tau + \frac{1}{4C}\right)$ et K_0 est une constante donnée par

$$K_0 = -e^{j\left[\phi_0 - \frac{1}{4C} - \frac{Cs^2}{2}\right]} \left(-js\sqrt{2jC}\right)^{s+1}. \quad (\text{A.28})$$

Annexe B

Limite du spectre étroit avec glissement en fréquence

On s'intéresse au cas limite des longues impulsions avec un glissement en fréquence faible, éventualité discutée à la sous-section 2.2.6. On souhaite vérifier comment le spectre en fréquence et la forme temporelle se comportent dans cette limite. La démarche est très semblable à celle qu'on retrouve dans le cas régulier, libre de dérive en fréquence. On commence avec le spectre de Poisson qui s'écrit comme suit

$$F_s(\omega) = \frac{2\pi e^{j\phi_0} s^{s+1}}{\Gamma(s+1)\omega_0} \exp\left\{-s\frac{\omega}{\omega_0} + s \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right\} \theta(\omega) \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{2\pi e^{j\phi_0} s^{s+1}}{\Gamma(s+1)\omega_0} e^{-s} \exp\left\{-s\left[\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \ln\left(1 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right)\right]\right\} \theta(\omega). \quad (\text{B.2})$$

où ϕ_0 est une phase constante, ω_0 est la fréquence porteuse et s le paramètre de largeur spectrale. Pour des impulsions sans glissement en fréquence, le paramètre s est un nombre réel positif non nul. L'introduction du glissement en fréquence dans le modèle peut se faire en ajoutant une partie imaginaire à ce paramètre. La partie réelle, positive et non nulle, affecte la largeur spectrale, alors que la partie imaginaire introduit des termes de phase supplémentaires. La partie imaginaire de s peut être positive, négative ou nulle, tout dépendamment du comportement souhaité. On désigne les parties réelle et imaginaire du paramètre s par les variables s_r et s_i , respectivement, avec $s = s_r + js_i$.

À partir du spectre tel qu'exprimé à l'équation (B.2), on développe le logarithme dans l'exponentielle en utilisant la série de Taylor suivante

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \quad -1 < x \leq 1. \quad (\text{B.3})$$

Ainsi, en choisissant $x = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right) &= \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^3 + \dots \\ &\approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Dans l'expression (B.4), on néglige les termes d'ordres supérieurs pour ne conserver qu'un terme quadratique et un terme linéaire. Pour ce faire, on impose alors la condition suivante

$$x \ll 1 \quad \Rightarrow \quad |\omega - \omega_0| \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \quad s_r \gg 1. \quad (\text{B.5})$$

On se retrouve dans le cas $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ pour des impulsions au spectre étroit. Dans notre modèle, ceci se traduit par une très grande valeur de s_r , donc des impulsions limitées par la transformée de Fourier de longue durée même si $s_i = 0$. En introduisant l'expression du développement en série (B.4) dans celle du spectre, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} F_s(\omega) &= \frac{2\pi e^{j\phi_0} s^{s+1}}{\Gamma(s+1)\omega_0} e^{-s} \exp \left\{ -s \left[\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 \right] \right\} \theta(\omega) \\ &= \frac{2\pi e^{j\phi_0} s^{s+1}}{\Gamma(s+1)\omega_0} e^{-s} \exp \left\{ -s \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right\} \\ &= C_1 \exp \left\{ -s_r \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right\} \exp \left\{ -j s_i \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

La fonction Heaviside de l'expression est retirée, puisque la condition définissant le spectre étroit $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ implique une très faible contribution des fréquences négatives. Dans la limite des impulsions longues ($s_r \gg 1$), on retrouve donc un spectre gaussien avec un phase quadratique. On rejoint donc le cas paraxial ou de l'enveloppe lente ("slowly-varying envelope approximation")

On porte maintenant notre attention sur la forme temporelle pour vérifier que celle-ci adopte également le bon comportement dans la limite des impulsions longues avec une faible dérive en fréquence. La forme temporelle associée au spectre de Poisson s'écrit

$$\begin{aligned} f_s(t) &= e^{j\phi_0} \left(1 - j \frac{\omega_0 t}{s} \right)^{-(s+1)} \\ &= e^{j\phi_0} \exp \left\{ -(s+1) \ln \left(1 - j \frac{\omega_0 t}{s} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Tout comme précédemment, on s'affaire à développer le terme logarithmique en une série de

puissance.

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - j\frac{\omega_0 t}{s}\right) &= -j\frac{\omega_0 t}{s} - \frac{1}{2}\left(-j\frac{\omega_0 t}{s}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-j\frac{\omega_0 t}{s}\right)^3 + \dots \\
&= -j\frac{s^*\omega_0 t}{|s|^2} - \frac{1}{2}\left(-j\frac{s^*\omega_0 t}{|s|^2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-j\frac{s^*\omega_0 t}{|s|^2}\right)^3 + \dots
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Pour des impulsions longues avec un faible glissement en fréquence, on peut faire l'approximation que la norme du paramètre s est approximativement égale au carré de sa partie réelle.

$$s_r \gg s_i \quad \Rightarrow \quad |s|^2 = s_r^2 + s_i^2 \approx s_r^2 \tag{B.9}$$

À partir de cette approximation, on peut mieux estimer le terme qu'on retrouve sous différentes puissances dans l'expression (B.8).

$$\begin{aligned}
-j\frac{s^*\omega_0 t}{|s|^2} &= -j\frac{s_r\omega_0 t}{|s|^2} - \frac{s_i\omega_0 t}{|s|^2} \\
&\approx -j\frac{s_r\omega_0 t}{s_r^2} - \frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2} \\
&\approx -j\frac{\omega_0 t}{s_r} - \frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2}
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Comme le montre l'approximation (B.10), chacun des termes du binôme de la série de puissances (B.8) est beaucoup plus petit que l'unité dans le cas d'intérêt, c'est-à-dire $s_r \gg 1$ et $s_r \gg s_i$. On peut alors négliger les termes d'ordre supérieur pour ne conserver que les deux premiers termes de la série comme précédemment. On retrouve donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(1 - j\frac{\omega_0 t}{s}\right) &\approx -j\frac{\omega_0 t}{s} - \frac{1}{2}\left(-j\frac{\omega_0 t}{s}\right)^2 \\
&\approx -j\frac{\omega_0 t}{s_r} - \frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 t}{s_r} - j\frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2}\right)^2.
\end{aligned} \tag{B.11}$$

En substituant la dernière expression dans la forme temporelle (B.7), quelques manipulations algébriques permettent d'arriver à un résultat plutôt intéressant.

$$\begin{aligned}
f_s(t) &\approx e^{j\phi_0} \exp\left\{-(s+1)\left[-j\frac{\omega_0 t}{s_r} - \frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 t}{s_r} - j\frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2}\right)^2\right]\right\} \\
&\approx e^{j\phi_0} \exp\left\{-(s_r + js_i)\left[-j\frac{\omega_0 t}{s_r} - \frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0 t}{s_r} - j\frac{s_i\omega_0 t}{s_r^2}\right)^2\right]\right\} \\
&\approx \exp\left\{-\frac{\omega_0^2 t^2}{2s_r}\left(1 + \frac{s_i^2}{s_r^2}\right) + j\left[\frac{\omega_0^2 t^2}{2s_r}\left(\frac{s_i}{s_r}\right)\left(1 + \frac{s_i^2}{s_r^2}\right) + \omega_0 t\left(1 + \frac{s_i^2}{s_r^2}\right) + \phi_0\right]\right\} \\
&\approx \exp\left\{-\frac{\omega_0^2 t^2}{2s_r}\right\} \exp\left\{j\left[-\frac{\omega_0^2 t^2}{2s_r}\left(\frac{s_i}{s_r}\right) + \omega_0 t + \phi_0\right]\right\}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

L'équation (B.12) est celle d'une gaussienne avec un terme de phase quadratique. L'expression est la même que dans le cas régulier sans glissement en fréquence, à l'exception du terme en question. On rejoint donc ici aussi la limite paraxiale. Ceci semble montrer que le fait d'introduire une partie imaginaire au paramètre s induit les comportements visés dans la limite des impulsions longues, lorsqu'on considère un faible glissement en fréquence. De plus, en posant $s_i = 0$, on retrouve la même limite que dans le cas régulier. L'équation (B.12) fournit également une précieuse information quant à la nature du glissement en fréquence. En effet, la dérivée première de la phase correspond à la fréquence instantanée de l'impulsion et sa dérivée seconde décrit le glissement en fréquence, autrement dit la variation de la fréquence instantanée.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{tot} = \omega_0 - \frac{\omega_0^2 t}{s_r} \left(\frac{s_i}{s_r} \right) = \omega_0 \left[1 - \frac{\omega_0 t}{s_r} \left(\frac{s_i}{s_r} \right) \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_{tot} = -\omega_0^2 \left(\frac{s_i}{s_r^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

Si on se place dans un système de variables sans dimension, tel que $\tau = \omega_0 t$ décrit le temps sans dimension, on retrouve donc un paramètre de glissement en fréquence correspondant au rapport s_i/s_r^2 . On remarque que le signe de la partie imaginaire requiert une importance particulière, puisque celui-ci conduit à un glissement en fréquence positif ("up-chirp") ou négatif ("down-chirp"). La figure 2.5 permet de comparer graphiquement la solution exacte (B.7) et la solution dans la limite du spectre étroit (B.12) pour le cas $s = 277 + j15$. On constate que les deux solutions s'équivalent assez bien, même si elles montrent de légères différences sur les ailes de la gaussienne. Le glissement en fréquence n'est pas très visible sur cette figure, mais il faut se rappeler qu'en exigeant $s_r \gg s_i$, on impose également un très petit rapport s_i/s_r^2 . Pour que le phénomène soit facilement visible, il faut s'éloigner du cas à l'étude (avec un paramètre de glissement de l'ordre d'un demi par exemple). Dans le cas des impulsions courtes, à titre d'exemple, le champ longitudinal E_z se modifie comme montré à la figure 2.7.

On note que le signe du glissement en fréquence s'inverse à un moment donné lorsqu'on passe de la limite du spectre large au spectre étroit. Effectivement, pour une impulsion longue avec un glissement en fréquence faible, le signe du glissement en fréquence est celui de $-s_i$. Cependant, pour une impulsion courte avec un glissement en fréquence plus élevé, le signe du glissement est de toute évidence celui de s_i , comme on peut le constater sur la figure 3.4(b). Ceci est simplement un rappel de la nature non linéaire du glissement en fréquence à l'étude. Même si l'on peut tirer des conclusions dans certaines limites, il ne s'agit pas nécessairement de conclusions générales. De plus, les termes "up-chirp" et "down-chirp" n'ont de sens que dans un contexte où l'on a une dérive en fréquence linéaire ou affichant un comportement moyen linéaire.

Bibliographie

- [1] S. Afhami and E. Eslami. Effect of nonlinear chirped gaussian laser pulse parameters on the electron acceleration. *Optical Review*, 21(5) :475–478, 2014.
- [2] G. P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2005.
- [3] M. Akhyani, F. Jahangiri, A. R. Niknam, and R. Massudi. Optimizing chirped laser pulse parameters for electron acceleration in vacuum. *Journal of Applied Physics*, 118(18) :183106, 2015.
- [4] A. April. Nonparaxial TM and TE beams in free space. *Optics letters*, 33(14) :1563–1565, 2008.
- [5] A. April. Ultrashort , strongly focused laser pulses in free space. In F. J. Duarte, editor, *Coherence and Ultrashort Pulse Laser Emission*, pages 355–382. InTech, 2010.
- [6] A. April. *Impulsions laser ultrabrèves et fortement focalisées dans le vide*. PhD thesis, Université Laval, 2012.
- [7] S. G. Bochkarev, K. I. Popov, and V. Y. Bychenkov. Vacuum electron acceleration by a tightly focused, radially polarized, relativistically strong laser pulse. *Plasma Physics Reports*, 37(7) :603–614, Jul. 2011.
- [8] J. Breuer and P. Hommelhoff. Laser-Based Acceleration of Nonrelativistic Electrons at a Dielectric Structure. *Physical Review Letters*, 111(13) :134803, Sept. 2013.
- [9] S. Carbajo, E. Granados, D. Schimpf, A. Sell, K.-H. Hong, J. Moses, and F. X. Kärtner. Efficient generation of ultra-intense few-cycle radially polarized laser pulses. *Optics Letters*, 39(8) :2487–90, Apr. 2014.
- [10] S. Carbajo, E. A. Nanni, L. J. Wong, G. Moriena, P. D. Keathley, G. Laurent, R. J. D. Miller, and F. X. Kärtner. Direct longitudinal laser acceleration of electrons in free space. *Physical Review Accelerators and Beams*, 19(2) :021303, 2016.
- [11] S. Carbajo, L. J. Wong, E. Nanni, D. N. Schimpf, and F. X. Kärtner. Ultra-intense few-cycle radial polarization source for vacuum laser acceleration. *Research in Optical Sciences*, page HTu2C.6, 2014.

- [12] R. J. England, R. J. Noble, K. Bane, D. Dowell, C.-k. Ng, J. E. Spencer, S. Tantawi, R. L. Byer, E. Peralta, K. Soong, B. Cowan, J. Dawson, and C. Sears. Dielectric laser accelerators. *Reviews of Modern Physics*, 86(102) :1337–1389, 2014.
- [13] E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. *Reviews of Modern Physics*, 81(3) :1229–1285, 2009.
- [14] S. Feng and H. G. Winful. Physical origin of the Gouy phase shift. *Optics Letters*, 26(8) :485–7, Apr. 2001.
- [15] P.-L. Fortin, M. Piché, and C. Varin. Direct-field electron acceleration with ultrafast radially polarized laser beams : scaling laws and optimization. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 43(2) :025401, Jan. 2010.
- [16] B. J. Galow, Y. I. Salamin, T. V. Liseykina, Z. Harman, and C. H. Keitel. Dense mono-energetic proton beams from chirped laser-plasma interaction. *Physical Review Letters*, 107(18) :185002, Oct 2011.
- [17] P. Gibbon. *Short Pulse Laser Interactions with Matter : An Introduction*. Imperial College Press, 1986.
- [18] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey, Y. V. Geronimus, M. Y. Tseytlin, and Y. C. Fung. *Table of Integrals, Series, and Products*. 1981.
- [19] D. N. Gupta, H. J. Jang, and H. Suk. Combined effect of tight-focusing and frequency-chirping on laser acceleration of an electron in vacuum. *Journal of Applied Physics*, 105(10) :106110, 2009.
- [20] D. N. Gupta and H. Suk. Electron acceleration to high energy by using two chirped lasers. *Laser and Particle Beams*, 25(01) :31–36, Feb 2007.
- [21] F. Hartemann, E. Landahl, A. Troha Jr, J. Van Meter, H. Baldis, R. Freeman, N. Luhmann Jr, L. Song, A. Kerman, and D. Yu. The chirped-pulse inverse free-electron laser : A high-gradient vacuum laser accelerator. *Physics of Plasmas*, 6(10) :4104, 1999.
- [22] F. V. Hartemann, S. N. Fochs, G. P. Le Sage, N. C. Luhmann, J. G. Woodworth, M. D. Perry, Y. J. Chen, and A. K. Kerman. Nonlinear ponderomotive scattering of relativistic electrons by an intense laser field at focus. *Physical Review E*, 51(5) :4833–4843, 1995.
- [23] Y. C. Huang, T. Plettner, R. L. Byer, R. H. Pantell, R. L. Swent, T. I. Smith, J. E. Spencer, R. H. Siemann, and H. Wiedemann. The physics experiment for a laser-driven electron accelerator. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A : Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 407(1-3) :316–321, 1998.
- [24] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, 3rd éd. edition, 1999.

- [25] A. Khachatryan, F. van Goor, and K.-J. Boller. Interaction of free charged particles with a chirped electromagnetic pulse. *Physical Review E*, 70(6) :067601, Dec. 2004.
- [26] A. G. Khachatryan, F. A. van Goor, J. W. J. Verschuur, and K.-J. Boller. Effect of frequency variation on electromagnetic pulse interaction with charges and plasma. *Physics of Plasmas*, 12(6) :062116, 2005.
- [27] Q. Kong, S. Miyazaki, S. Kawata, K. Miyauchi, K. Sakai, Y. Ho, K. Nakajima, N. Miyanaga, J. Limpouch, and a. Andreev. Electron bunch trapping and compression by an intense focused pulse laser. *Physical Review E*, 69(5) :056502, May 2004.
- [28] M. Kozák. Electron acceleration in moving laser-induced gratings produced by chirped femtosecond pulses. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 48(19) :195601, 2015.
- [29] A. Lachapelle, K. Otani, S. Fourmaux, S. Payeur, M. Glessner, S. MacLean, and J. C. Kieffer. High field physics at ALLS. In *Research Using Extreme Light : Entering New Frontiers with Petawatt-Class Lasers II*, volume 9515, page 95150B, 2015.
- [30] J. Lawson. Laser and accelerators. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-26 :4217–4219, 1979.
- [31] W. P. Leemans, a. J. Gonsalves, H.-S. Mao, K. Nakamura, C. Benedetti, C. B. Schroeder, C. Tth, J. Daniels, D. E. Mittelberger, S. S. Bulanov, and Et Al. Multi-GeV electron beams from capillary-discharge-guided subpetawatt laser pulses in the self-trapping regime. *Phys. Rev. Lett.*, 245002(December) :1–5, 2014.
- [32] G. Lehmann and K. H. Spatschek. Energy gain of an electron by a laser pulse in the presence of radiation reaction. *Physical Review E*, 84(4) :046409, Oct. 2011.
- [33] J.-X. Li, Y. I. Salamin, B. J. Galow, and C. H. Keitel. Acceleration of proton bunches by petawatt chirped radially polarized laser pulses. *Physical Review A*, 85(6) :063832, 2012.
- [34] J.-X. Li, W.-P. Zang, and J.-G. Tian. Electron acceleration in vacuum induced by a tightly focused chirped laser pulse. *Applied Physics Letters*, 96(3) :031103, 2010.
- [35] Q. Lin, J. Zheng, and W. Becker. Subcycle pulsed focused vector beams. *Physical Review Letters*, 97(25) :253902, Dec. 2006.
- [36] Q. Lin, J. Zheng, J. Dai, I.-C. Ho, and X.-C. Zhang. Intrinsic chirp of single-cycle pulses. *Physical Review A*, 81(4) :043821, Apr. 2010.
- [37] G. Malka, E. Lefebvre, and J. Miquel. Experimental observation of electrons accelerated in vacuum to relativistic energies by a high-intensity laser. *Physical Review Letters*, 78(17), 1998.

- [38] V. Marceau. *Accélération d'électrons à l'aide d'impulsions laser ultrabrèves et fortement focalisées*. PhD thesis, Université Laval, 2015.
- [39] V. Marceau, A. April, and M. Piché. Electron acceleration driven by ultrashort and nonparaxial radially polarized laser pulses. *Optics Letters*, 37(13) :2442–4, Jul. 2012.
- [40] V. Marceau, P. Hogan-Lamarre, T. Brabec, M. Piché, and C. Varin. Tunable high-repetition-rate femtosecond few-hundred keV electron source. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 48(4) :045601, Feb. 2015.
- [41] V. Marceau, C. Varin, T. Brabec, and M. Piché. Femtosecond 240-keV Electron Pulses from Direct Laser Acceleration in a Low-Density Gas. *Physical Review Letters*, 111(22) :224801, Nov. 2013.
- [42] V. Marceau, C. Varin, and M. Piché. Validity of the paraxial approximation for electron acceleration with radially polarized laser beams. *Optics Letters*, 38(6) :821, Mar. 2013.
- [43] L. Novotny and B. Hecht. *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2006.
- [44] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, editors. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY, 2010.
- [45] R. Palmer. An introduction to acceleration mechanisms. *Frontiers of Particle Beams*, 00515, 1988.
- [46] S. Payeur, S. Fourmaux, B. E. Schmidt, J. P. MacLean, C. Tchervenkov, F. Légaré, M. Piché, and J. C. Kieffer. Generation of a beam of fast electrons by tightly focusing a radially polarized ultrashort laser pulse. *Applied Physics Letters*, 101(4) :041105, 2012.
- [47] E. A. Peralta, K. Soong, R. J. England, E. R. Colby, Z. Wu, B. Montazeri, C. McGuinness, J. McNeur, K. J. Leedle, D. Walz, E. B. Sozer, B. Cowan, B. Schwartz, G. Travish, and R. L. Byer. Demonstration of electron acceleration in a laser-driven dielectric microstructure. *Nature*, 503(7474) :91–4, Nov. 2013.
- [48] T. Plettner, R. Byer, E. Colby, B. Cowan, C. Sears, J. Spencer, and R. Siemann. Visible-Laser acceleration of relativistic electrons in a semi-infinite vacuum. *Physical Review Letters*, 95(September) :1–4, 2005.
- [49] R. Potvliege and C. F. R. Caron. Free-space propagation of ultrashort pulses : Space-time couplings in Gaussian pulse beams. *Journal of Modern Optics*, (June 2013) :37–41, 1999.
- [50] Y. I. Salamin. Mono-energetic GeV electrons from ionization in a radially polarized laser beam. *Optics letters*, 32(1) :90–2, Jan. 2007.
- [51] Y. I. Salamin. Net electron energy gain from interaction with a chirped “plane-wave” laser pulse. *Physics Letters A*, 376(35) :2442–2445, 2012.

- [52] Y. I. Salamin and N. M. Jisrawi. Electron laser acceleration in vacuum by a quadratically chirped laser pulse. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 47(2) :025601, 2014.
- [53] Y. I. Salamin, J.-X. Li, B. J. Galow, Z. Harman, and C. H. Keitel. Laser acceleration of proton bunches by petawatt chirped linearly polarized laser pulses. *Physical Review A*, 85(6) :063831, Jun. 2012.
- [54] Y. I. Salamin, J.-X. Li, K. Hatsagortsyan, M. Tamburini, A. Di Piazza, and C. H. Keitel. Particle beams in ultrastrong laser fields : direct laser acceleration and radiation reaction effects. *Journal of Physics : Conference Series*, 012018(594), 2015.
- [55] G. Sciaini and R. J. D. Miller. Femtosecond electron diffraction : heralding the era of atomically resolved dynamics. *Reports on Progress in Physics*, 74(9) :096101, 2011.
- [56] K. Shimoda. Proposal for an electron accelerator using an optical maser. *Applied Optics*, 1(1) :33, 1962.
- [57] A. E. Siegman. *Lasers*. Univerity Science Books, 1986.
- [58] K. P. Singh. Electron acceleration by a chirped short intense laser pulse in vacuum. *Applied Physics Letters*, 87(25) :254102, 2005.
- [59] K. P. Singh and M. Kumar. Electron acceleration by a radially polarized laser pulse during ionization of low density gases. *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*, 14(3) :030401, Mar. 2011.
- [60] F. Sohbatzadeh and H. Aku. Polarization effect of a chirped Gaussian laser pulse on the electron bunch acceleration. *Journal of Plasma Physics*, 77(01) :39–50, Dec. 2009.
- [61] F. Sohbatzadeh, S. Mirzanejhad, and H. Aku. Synchronization scheme in electron vacuum acceleration by a chirped Gaussian laser pulse. *Physics of Plasmas*, 16(2) :023106, 2009.
- [62] F. Sohbatzadeh, S. Mirzanejhad, H. Aku, and S. Ashouri. Chirped Gaussian laser beam parameters in paraxial approximation. *Physics of Plasmas*, 17(8) :083108, 2010.
- [63] F. Sohbatzadeh, S. Mirzanejhad, and M. Ghasemi. Electron acceleration by a chirped Gaussian laser pulse in vacuum. *Physics of Plasmas*, 13(12) :123108, 2006.
- [64] Q. Song, X. Y. Wu, J. X. Wang, S. Kawata, and P. X. Wang. Peculiarities of laser phase behavior associated with the accelerated electron in a chirped laser pulse. *Physics of Plasmas*, 21(5) :054503, may 2014.
- [65] P. Sprangle, E. Esarey, and J. Krall. Laser driven electron acceleration in vacuum, gases, and plasmas. *Physics of Plasmas*, 3(5 pt 2) :2183–2190, 1996.

- [66] D. Strickland and G. Mourou. Compression of amplified chirped optical pulses. *Optics Communications*, 55(6) :447–449, 1985.
- [67] T. Tajima. Laser acceleration and its future. *Proceedings of the Japan Academy. Series B, Physical and Biological Sciences*, 86(3) :147–157, 2010.
- [68] T. Tajima and J. M. Dawson. Laser electron accelerator. *Physical Review Letters*, 43(4) :267–270, 1979.
- [69] C. Varin. *Impulsion d'électrons relativistes ultrarapides à l'aide d'un schéma d'accélération par laser dans le vide*. PhD thesis, Université Laval, 2006.
- [70] C. Varin, P.-L. Fortin, and M. Piché. Toward attosecond electron pulses using ultra-intense lasers. *Proceedings of SPIE*, 7099 :70992M–70992M–4, 2008.
- [71] C. Varin, V. Marceau, P. Hogan-Lamarre, and M. Piché. MeV femtosecond electron pulses from direct-field acceleration in low density atomic gases. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(2) :24001, 2015.
- [72] C. Varin, S. Payeur, V. Marceau, S. Fourmaux, A. April, B. Schmidt, P.-L. Fortin, N. Thiré, T. Brabec, F. Légaré, J.-C. Kieffer, and M. Piché. Direct electron acceleration with radially polarized laser beams. *Applied Sciences*, 3(1) :70–93, Jan. 2013.
- [73] C. Varin and M. Piché. Acceleration of ultra-relativistic electrons using high-intensity TM₀₁ laser beams. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 74(9) :s83–s88, Jun. 2002.
- [74] C. Varin and M. Piché. IR linac driven by a high-intensity TM₀₁ diffraction-limited laser beam. *Ultrafast Phenomena XIII*, 74(1) :164–166, 2003.
- [75] C. Varin and M. Piché. Propagation of ultrashort electromagnetic wave packets in free space beyond the paraxial and slowly-varying-envelope approximations : a time-domain approach. *arXiv*, (4) :3, 2004.
- [76] C. Varin and M. Piché. Relativistic attosecond electron pulses from a free-space laser-acceleration scheme. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 74(4) :2–5, 2006.
- [77] C. Varin, M. Piché, and M. Porras. Acceleration of electrons from rest to GeV energies by ultrashort transverse magnetic laser pulses in free space. *Physical Review E*, 71(2) :1–10, Feb. 2005.
- [78] C. Varin, M. Piché, and M. Porras. Analytical calculation of the longitudinal electric field resulting from the tight focusing of an ultrafast transverse-magnetic laser beam. *JOSA A*, 23(8) :2027–2038, 2006.

- [79] V. Veksler. The principle of coherent acceleration of charged particles. *The Soviet Journal of Atomic Energy*, pages 525–528, 1957.
- [80] L. J. Wong and F. X. Kärtner. Direct acceleration of an electron in infinite vacuum by a pulsed radially-polarized laser beam. *Optics Express*, 18(24) :25035–51, Nov. 2010.
- [81] L. J. Wong and F. X. Kärtner. Two-color-laser-driven direct electron acceleration in infinite vacuum. *Optics letters*, 36(6) :957–9, Mar. 2011.
- [82] X. Y. Wu, P. X. Wang, and S. Kawata. Mechanism of electron acceleration by chirped laser pulse. *Applied Physics Letters*, 100(22) :221109, 2012.
- [83] C. J. Yuan, X. Y. Wu, J. X. Wang, and P. X. Wang. Analysis in the instantaneous frequency forms of a chirped laser pulse. *Physics of Plasmas*, 18(10) :104509, 2011.