

THOMAS GUENET

**UN MODÈLE NUMÉRIQUE POUR
STRUCTURES EN BÉTON FIBRÉ À
ULTRA-HAUTES PERFORMANCES : PRISE EN
COMPTE DE L'ORIENTATION DES FIBRES
PAR UNE APPROCHE D'ENDOMMAGEMENT
MICROMÉCANIQUE**

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie civil
pour l'obtention du grade de Maître ès Sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2012

Résumé

Le comportement des bétons fibrés à ultra-hautes performances (BFUP) dépend fortement de l'orientation des fibres vis-à-vis de la direction des sollicitations. L'orientation des fibres étant principalement due à la mise en œuvre de la structure, la ductilité d'un ouvrage s'en retrouve fortement dépendant. Dans ce mémoire de maîtrise, un modèle numérique est développé pour capturer l'effet de l'orientation des fibres via leurs mécanismes d'extraction. Il s'agit d'un modèle d'endommagement micromécanique, utilisé dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire élastique permettant de modéliser la propagation des fissures, la dissipation d'énergie et donc la ductilité de la structure. Cette approche permet également de rendre le modèle indépendant de la finesse du maillage et de modéliser l'effet d'échelle. Dans ce travail, les BFUP sont composés de fibres courtes en acier dont le pourcentage volumique est inférieur à 3%. La résistance en compression du BFUP est si grande que le matériau est admis être purement linéaire élastique en compression. Le modèle est implanté dans le logiciel Code_Aster pour calibration, validation et application sur des essais de traction et sur des essais de flexion quatre points : le modèle développé reproduit très bien ces résultats expérimentaux.

Abstract

The behavior of ultra-high performance fiber reinforced concrete (UHPFRC) strongly depends on fibers' orientations relatively to the direction of stresses. Fibers' orientations are mostly due to concrete casting of the structure and therefore the ductility of a structure is highly dependent of those orientations. In this MSc thesis, a numerical model is developed to capture the effect of fiber orientation considering the fiber pull-out mechanism. A micromechanical damage model based on linear elastic fracture mechanics to model crack propagation, energy dissipation and thus structure's ductility. This approach also corrects spurious mesh sensitivity and captures size effect. In this work, UHPFRC are made of short steel fibers with fiber content inferior to 3%. The compressive strength of UHPFRC is so important that the material is assumed to be purely linear elastic in compression. The model is implemented in Code_Aster software for calibration, validation and application on tensile tests and four-point bending tests : the developed model can reproduce these experimental results.

Remerciements

En premier lieu, je veux remercier M. Luca Sorelli et M^{me} Josée Bastien, directeur et codirectrice, pour m'avoir donné leur soutien, leurs conseils et leur confiance sur un sujet de recherche passionnant. Je leur suis également reconnaissant d'avoir mis à disposition des outils de travail nécessaire, un financement adéquat et un groupe de recherche dynamique.

Mes remerciements s'adressent également à Alireza Sheikh pour les nombreuses discussions que nous avons eues sur la résolution de divers systèmes numériques. À Daniel Vallée et Nicolas Venkovic qui m'ont permis de gagner un temps considérable en partageant leurs connaissances sur des logiciels tels que Python ou L^AT_EX, ainsi que pour la bonne ambiance au bureau.

Je suis reconnaissant envers mes grands-parents qui ont facilité mes déplacements ; mes amis Didier, Mathieu, Guillaume, Baptiste, Jérémie, Fabrice, Sylvain et leur compagnie, qui m'ont diverti pendant mes vacances.

Enfin, je remercie chaleureusement mes parents pour leur support financier et moral tout au long de mes années d'études.

À mes amis, à ma famille.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xiii
Notations	xiv
1 Introduction	1
1.1 Problématique industrielle	1
1.2 Problématique de recherche	4
1.3 Objectifs et structure du document	5
2 Revue de la documentation scientifique sur les BFUP	7
2.1 Compositions	7
2.2 Propriétés mécaniques	9
2.2.1 Propriétés de bases	9
2.2.2 Comportement d'une fibre droite	10
2.2.3 Durcissement et localisation des déformations	11
2.2.4 Caractérisation du matériau	13
2.2.4.1 Essais de compression	13
2.2.4.2 Essais de traction	13
2.2.4.3 Essais de flexion	14
2.3 Orientation des fibres	14
2.3.1 Mesure de la direction des fibres	15
2.3.2 Tenseur d'orientation des fibres	17
2.3.3 Prévoir cette orientation	19
2.3.4 Influence sur le comportement du matériau	22

2.4	Recommandations de l'AFGC	26
2.4.1	Calcul du coefficient γ	28
2.4.2	Calcul du coefficient K	28
2.5	Conclusion du chapitre	31
3	Vue d'ensemble des modèles non linéaires	32
3.1	Hypothèses de modélisation	32
3.1.1	Mécanique du milieu continu	32
3.1.2	Déplacements infinitésimaux	33
3.1.3	Invariables et coordonnées de Haigh-Westergaard	34
3.2	Généralités sur les modèles non linéaires macroscopiques	35
3.2.1	Modèles basés sur la théorie de la plasticité	35
3.2.1.1	Tresca	36
3.2.1.2	Von-Mises	36
3.2.1.3	Rankine	37
3.2.1.4	Mohr-Coulomb	37
3.2.1.5	Drucker-Prager	37
3.2.1.6	De Borst	39
3.2.1.7	Willam-Warnke	40
3.2.1.8	Lubliner	41
3.2.2	Modèles d'endommagement	41
3.2.2.1	Endommagement et comportement fragile	42
3.2.2.2	Formulation thermodynamique	42
3.2.2.3	Modèle d'endommagement uniaxial	46
3.2.2.4	Modèle d'endommagement isotrope	47
3.2.2.5	Modèle de Mazars	48
3.3	Modèles spécifiques pour les bétons renforcés de fibres courtes	51
3.3.1	Modèle micromécanique pour fibres uniformément orientées	51
3.3.2	Modèle de création de fissures discrètes	52
3.3.3	Modèle à deux phases couplées par la micromécanique	53
3.3.4	Modèle plastique avec dégradation de la rigidité	54
3.4	Comparaison des modèles	55
3.5	Conclusion du chapitre	57
4	Modèle d'endommagement micromécanique	58
4.1	Approche de la micromécanique de la rupture	58
4.1.1	Thermodynamique de la fissuration	60
4.1.2	Homogénéisation du tenseur de rigidité par la micromécanique	62
4.1.2.1	Application de l'homogénéisation aux matériaux fissurés	64
4.1.2.2	Schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka	65

4.1.3	Rigidité homogénéisée corrigée : prise en compte de l'endommagement initial	66
4.2	Modèle de dissipation d'énergie des fibres	67
4.2.1	Mécanisme d'extraction d'une fibre droite	67
4.2.2	Distribution normale de l'orientation des fibres	71
4.2.3	Travail nécessaire pour former une fissure elliptique	74
4.2.4	Comportement des fibres avec les fissures	77
4.3	Changement de variables	78
4.4	Dépendance au maillage	80
4.4.1	Mise en évidence du problème	80
4.4.2	Correction énergétique	81
4.5	Prédiction de la localisation des déformations	82
4.6	Matrice tangente du comportement écouvissant	83
4.7	Comportement adoucissant : bande de fissures parallèles	85
4.7.1	Hypothèses de bases et notations	85
4.7.2	Évaluation des contraintes	87
4.7.3	Matrice tangente du comportement adoucissant	87
4.8	Conclusion du chapitre	88
5	Calibration, Validation et Application	90
5.1	Comportement du modèle en traction uniaxial	90
5.1.1	Effets des paramètres matériaux	90
5.1.2	Résultats intermédiaires	97
5.1.2.1	Variable d'endommagement	97
5.1.2.2	Taux de dissipation d'énergie	98
5.1.2.3	Degré d'anisotropie du modèle	99
5.1.3	Ordre de calibration	99
5.1.4	Résultat d'un conteneur de déchets nucléaires	102
5.1.5	Modélisation de l'orientation des fibres	104
5.2	Logiciel de simulation numérique Code_Aster	107
5.2.1	Utilisation de Code_Aster	107
5.2.2	Architecture des lois de comportement	108
5.3	Application du modèle : essai de flexion 4 points	110
5.3.1	Mise en évidence de la dépendance du maillage	110
5.3.2	Effets des paramètres sur la structure	111
5.3.3	Ordre de calibration	114
5.3.4	Application du modèle sur les résultats expérimentaux	114
5.3.5	Localisation des déformations	116
5.4	Conclusion du chapitre	118
6	Conclusions et perspectives	119

6.1	Conclusions générales	119
6.2	Perspectives de recherches	120
	Bibliographie	125
A	Loi d'extraction des fibres	126
A.1	Calcul de la force de décollement (figure 4.6a)	126
A.2	Calcul de la force d'extraction (figure 4.6b)	129
A.3	Calcul de la contrainte à travers une fissure	132
B	Origine du paramètre d'endommagement	135
B.1	Création d'une fissure	135
B.2	Bilan énergétique	136
	Index des citations	137

Table des figures

1.1	Ponts routiers et passerelles en BFUP.	2
1.2	Exemples d'ouvrage de génie civil en BFUP	3
1.3	Lois de comportement en traction d'un béton ordinaire et d'un BFUP .	3
1.4	Loi de comportement typique d'un modèle (a) elasto-plastique, (b) elasto-endommageable, (c) elasto-plastique avec dégradation de la rigidité	4
2.1	Coulée d'un élément SIFCON	9
2.2	Abris en BFUP, aire de repos, Pays-Bas	10
2.3	Les trois phases de l'extraction d'une fibre	11
2.4	Schéma du comportement en traction du BFUP	12
2.5	Relation géométrique de l'orientation d'une fibre, (Tue et Henze, 2008)	16
2.6	Illustration de l'ambiguïté sur l'orientation de la fibre	16
2.7	Orientation d'une fibre dans le repère sphérique, (Advani, 1994)	18
2.8	Exemples de différentes orientations : (a) isotrope, (b) uniformément orienté dans un plan, (c) aligné dans une direction ; (Advani, 1994) . .	18
2.9	Schéma d'une orientation des fibres dans une section	20
2.10	Orientation d'une fibre en deux dimensions	20
2.11	Coordonnées sphériques dans une intégrale triple	21
2.12	Orientation d'une fibre en trois dimensions	21
2.13	Découpes des éprouvettes dans les plaques, (Bayard, 2003)	23
2.14	Déformations élastiques limites pour différentes orientations (Bayard, 2003)	24
2.15	Contraintes élastiques limites pour différentes orientations (Bayard, 2003)	24
2.16	Déformations maximales pour différentes orientations (Bayard, 2003) .	25
2.17	Contraintes maximales pour différentes orientations (Bayard, 2003) . .	25
2.18	Énergies dissipées pour différentes orientations des fibres (Bayard, 2003)	27
2.19	Courbes flèche-module-de-rupture d'essais de flexion quatre points, (Bernier et Behloul, 1996)	27
2.20	Exemple de prélèvement d'éprouvettes pour déterminer K , (Behloul, 2006)	29
2.21	Loi de comportement représentative du BFUP selon (AFGC, 2002) . .	30
3.1	Approche multiéchelle des BFUP	33
3.2	Surface limite de Tresca (rouge) et Von-Mises (bleu)	38

3.3	Surface limite de Rankine	38
3.4	Surface limite de Mohr-Coulomb (rouge) et de Drucker-Prager (bleu)	39
3.5	Surface limite de Willam-Warnke : (a) dans le plan déviateur ; (b) dans le plan des contraintes biaxiales	41
3.6	Schéma de comportement d'un lien atomique, (Ulm'slecture notes, MIT, spring 2011)	43
3.7	Schématisation du modèle d'endommagement, (Ulm'slecture notes, MIT, spring 2011)	43
3.8	Surfaces limites élastiques de différentes fonctions de déformation équivalente	49
3.9	Surface limite de rupture du modèle de Mazars	51
3.10	Contraintes maximales pour différentes orientations, (Naaman et Shah, 1976; Maage, 1977)	52
3.11	Contraintes maximales pour différentes orientations, (Wuest, 2007)	53
3.12	Modèle à deux phases : (a) schéma représentatif 1D, (b) comparaison avec résultats expérimentaux (Chuang et Ulm, 2002)	54
3.13	Poutre I AASHTO précontrainte, essai de flexion quatre points et comparaison avec Abaqus-Lubliner, (Chen et Graybeal, 2010)	55
3.14	Surface limite de Drucker-Prager (bleu), de Mohr-Coulomb (vert) et de Mazars corrigé (orange)	56
3.15	Surface limite de De Borst (bleu), de Willam-Warnke (violet) et de Lubliner (vert)	56
4.1	Illustration des trois mode de propagation d'une fissure	59
4.2	Représentation du principe de superposition	59
4.3	Schéma représentatif du problème d'Eshelby (1957)	65
4.4	Comportement d'un essai d'arrachement de fibre : (a) en contrainte déformation, et (b) en contrainte ouverture de fissure	68
4.5	Une fibre à travers un plan de fissuration	69
4.6	Schéma de l'extraction d'une fibre	70
4.7	Loi d'extraction des fibres, équations (4.38) et (4.39).	70
4.8	Loi normale gaussienne en repère sphérique	73
4.9	Valeurs du coefficient d'orientation des fibres à partir de la loi de probabilité	74
4.10	Modèle de fissure en forme d'ellipsoïde de révolution aplati avec chargement à l'infini (Tada et al., 2000)	75
4.11	Zones de la fissure participant à la dissipation d'énergie	76
4.12	Taux de dissipation d'énergie des fibres en fonction des paramètres de la loi de probabilité, $\mathcal{G}_B = f(k_g, \varphi_0)$	77
4.13	Variation de la bande de microfissures fonction du maillage	80
4.14	Correction de loi de comportement élasto-adoucissant pour différentes valeurs de $\gamma_f^{(e)}$	82

4.15	Dissipation d'énergie (a) sans localisation et (b) avec localisation	83
4.16	Schéma de l'implantation numérique de la loi de comportement dans le domaine (a) linéaire et (b) non linéaire	84
4.17	Technique de Newton-Raphson complète	88
5.1	Effet de la longueur des fibres	91
5.2	Effet du diamètre des fibres	92
5.3	Effet du module d'Young des fibres	92
5.4	Effet du pourcentage volumique de fibres	93
5.5	Effet du module d'Young de la matrice	93
5.6	Effet de la contrainte d'interface fibre–matrice	94
5.7	Effet de la limite élastique de la matrice	94
5.8	Effet de l'endommagement initial de la matrice	95
5.9	Effet du coefficient d'amplitude de la loi de probabilité	95
5.10	Effet de l'orientation des fibres vis-à-vis de la charge	96
5.11	Effet de la longueur caractéristique du matériau	96
5.12	Équivalence entre l'endommagement défini par Budiansky et O'Connell (1976) et l'endommagement traditionnel Ω	98
5.13	Équivalence entre la position du points sur (a) la loi de comportement en traction et (b) le graphique des taux de dissipation d'énergies	100
5.14	Degré d'anisotropie, endommagement Ω et stabilité de la loi de chargement	101
5.15	Coulée et prélèvement d'un conteneur de déchet nucléaire, (Sorelli et al., 2007)	102
5.16	Comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux pour une orien- tation des fibres de 0°	103
5.17	Comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux pour une orien- tation des fibres de 90°	103
5.18	Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 0°	104
5.19	Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 30°	105
5.20	Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 45°	105
5.21	Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 60°	106
5.22	Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 90°	106
5.23	Architecture générale de l'utilisation de Code_Aster	108
5.24	Organigramme du modèle implanté dans Code_Aster	109
5.25	Effet de la dimension du maillage sur le comportement en flexion	110

5.26	Effet de la contrainte d'interface fibre–matrice sur le comportement en flexion	111
5.27	Effet du coefficient d'amplitude de la loi de probabilité sur le comportement en flexion	112
5.28	Effet de la limite élastique de la matrice sur le comportement en flexion	112
5.29	Effet de l'endommagement initial sur le comportement en flexion	113
5.30	Effet de la longueur caractéristique du matériau sur le comportement en flexion	113
5.31	Effet de l'orientation des fibres vis-à-vis de la charge sur le comportement en flexion	115
5.32	Identification des points de chargement	116
5.33	Répartition de l'endommagement ϵ sur la poutre en flexion	117
A.1	Mécanisme de décollement de différentes fibres	130
A.2	Mise en évidence de l'hypothèse de non-rétractation des fibres	131

Liste des tableaux

2.1	Composition classique du béton ordinaire, du BHP et du BFUP	8
2.2	Propriétés générales du béton ordinaire, du BHP, du BTHP et du BFUP	10

Notations

Paramètres

a	Demi-grand axe d'une fissure ellipsoïdale	[mm]
a_0	Demi-grand axe initiale d'une fissure ellipsoïdale	[mm]
A	Tenseur de localisation	[-]
α	Coefficient d'orientation des fibres ; orientation des fibres par rapport à la direction du chargement	[- ;rad]
\mathcal{C}	Tenseur de rigidité	[MPa]
\mathcal{D}	Énergie dissipée	[J]
\underline{e}	Tenseur de déformation dans le repère principale	[-]
E_f	Module d'Young des fibres	[MPa]
E_m	Module d'Young de la matrice	[MPa]
\underline{E}	Tenseur de déformation macroscopique	[-]
$\underline{\underline{\varepsilon}}$	Tenseur de déformation microscopique	[-]
$\tilde{\varepsilon}$	Déformation équivalente	[-]
ϵ	Paramètre d'endommagement	[-]
ϵ_0	Endommagement initial	[-]
F_d	Force de dés-adhésion d'une fibre	[N]
F_e	Force d'extraction d'une fibre	[N]
f	Fonction de chargement/déchargement	[MPa]
f_c	Fraction volumique des fissures	[-]
f_t	Contrainte ultime de traction	[MPa]
g_B	Énergie dissipée lors de l'extraction des fibres par unité de surface	[mJ/mm ²]
\mathcal{G}	Taux de dissipation d'énergie du système étudié	[mJ/mm ²]
\mathcal{G}_A	Taux de dissipation d'énergie de la matrice	[mJ/mm ²]
\mathcal{G}_B	Taux de dissipation d'énergie des fibres	[mJ/mm ²]
G_c	Énergie de rupture relatif aux fissures	[mJ/mm ²]
G_{c0}	Énergie de rupture relatif initiale	[mJ/mm ²]
G_f	Énergie spécifique de rupture	[mJ/mm ²]
γ_f	Densité d'énergie dissipée	[mJ/mm ³]
h_c	Hauteur de la bande de microfissures parallèles	[mm]

I	Tenseur identité de 4 ^e ordre	[-]
k_g	Coefficient d'amplitude de la loi de probabilité	[-]
K_{local}	Coefficient relatif à la dispersion sur l'orientation des fibres au niveau matériau	[-]
K_{global}	Coefficient relatif à la dispersion sur l'orientation des fibres au niveau de la structure	[-]
K_I	Coefficient de concentration de contrainte (Mode I)	$[\sqrt{\text{MPa}}.\text{mm}]$
L	Longueur d'ancrage d'une fibre	[mm]
L_f	Longueur des fibres	[mm]
λ	Coefficient de Lamé; élancement des fibres	[MPa]
ℓ	Surface fissurée	[mm ²]
μ	Coefficient de Lamé	[-]
n_f	Nombre de fibres par unité de surface	[/mm ²]
\mathcal{N}_c	Nombre de fissures	[/mm ³]
\mathcal{N}_f	Nombre de fibres	[-]
ν	Coefficient de Poisson de la matrice	[-]
ϕ_f	Diamètre des fibres	[mm]
φ	Orientation de la fibre par rapport au plan de fissuration	[rad]
φ_0	Angle entre l'orientation principale des fibres et la direction de la charge	[rad]
Ψ	Énergie de Helmholtz	[J]
\mathcal{R}	Résistance à la propagation de la fissure	[MPa.mm]
\mathcal{R}^ϵ	Résistance à la propagation de la fissure en fonction de l'endommagement	[MPa]
$\underline{\underline{s}}$	Tenseur de contrainte dans le repère principale	[MPa]
$\underline{\underline{S}}$	Tenseur de Eshelby	[-]
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tenseur de contrainte microscopique	[MPa]
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tenseur de contrainte macroscopique	[MPa]
τ	Contrainte d'interface entre une fibre et la matrice	[MPa]
τ_0	Contrainte d'interface initiale entre les fibres et la matrice	[MPa]
v_f	Pourcentage volumique de fibre dans la matrice	[-]
W_e	Travail extérieur	[J]
$[[\xi]]$	Ouverture de fissure	[mm]
$[[\xi]]_0$	Ouverture de fissure après désolidarisation de la matrice, avant l'extraction de la fibre	[mm]
$[[\xi]]^*$	Ouverture de fissure avant l'extraction de toutes les fibres	[mm]
$[[\xi]]^{cr}$	Ouverture de fissure critique	[mm]
z	Distance entre le centre de la fibre et la surface de la fissure	[mm]
z_0	Valeur de z après désolidarisation de la matrice, avant l'extraction de la fibre	[mm]

Ω	Volume du système étudié	[-]
$\partial\Omega$	Surface du système étudié	[-]

Liste des abréviations

AFGC	Agence Française de Génie Civil
BFUP	Bétons Fibrés à Ultra-hautes Performances
BHP	Béton Hautes Performances
BTHP	Béton Très Hautes Performances
BUHP	Bétons à Ultra-Hautes Performances
FRC	Fiber Reinforced Concrete
RILEM	Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, Systèmes de Construction et Ouvrages
UHPRFC	Ultra High Performance Fiber Reinforced Concretes

Opérations

- : Produit contracté de deux tenseurs
- Produit matricielle
- ^t Opérateur transposé

Notations ingénieurs

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sqrt{2}\sigma_{12}, \sqrt{2}\sigma_{13}, \sqrt{2}\sigma_{23}]$$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Problématique industrielle

Les Bétons Fibrés à Ultra-hautes Performances (BFUP), ou Ultra High Performance Fiber Reinforced Concretes (UHPFRC) en anglais, sont des bétons alliant esthétique, durabilité, résistance et grande déformation pour la construction d'ouvrage de génie civil. Leurs propriétés mécaniques les rendent également très intéressants pour la réfection des structures, ou même pour le confinement de déchets nucléaires, car l'optimisation de la matrice cimentaire a permis d'atteindre, entre autres, une très faible porosité et une ultra haute résistance en compression (150 à 250 MPa). Le contrôle de la fissuration est effectué par les fibres métalliques qui assurent alors un comportement écrouissant au matériau : il est alors possible de s'affranchir de l'armature passive. L'armature en moins permet de mouler des structures à géométrie complexe telles que la « Maison de Quartier » à Sedan ou le cinéma « Les enfants du paradis » à Chartres, France ; d'autres exemples sont présentés sur le site internet www.bsieiffage.com. La figure 1.1 donne une liste non exhaustive de passerelles et ponts réalisés en BFUP. Les photographies de la figure 1.2 présentent quatre de ces réalisations.

Alors que les bétons ordinaires possèdent une résistance en compression de l'ordre de 30 MPa et dix fois moins en traction, les Bétons à Ultra-Hautes Performances (BUHP) atteignent plus de 150 MPa de résistance en compression et de l'ordre de 12 MPa en traction. Cependant, les BUHP demeurent très fragiles en traction : leur énergie de rupture est de l'ordre d'une dizaine de J/m². Avec l'ajout de fibres, cette énergie de rupture augmente à plus de 40 000 J/m², c'est pourquoi le BFUP est si ductile. Le schéma de la figure 1.3 met en évidence la différence entre la loi de comportement en traction d'un béton ordinaire et celle d'un BFUP.

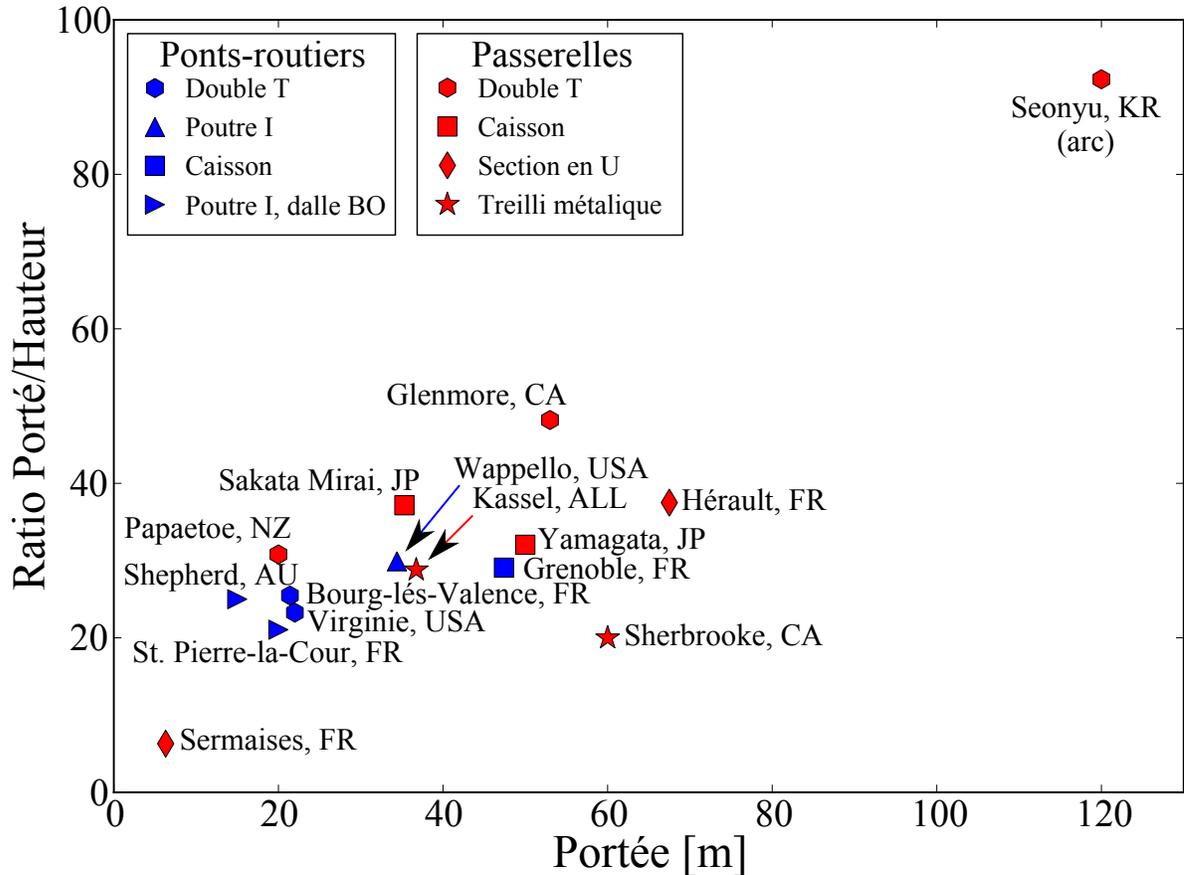


FIGURE 1.1 – Ponts routiers et passerelles en BFUP.

C'est donc sur l'interaction fibre-matrice que repose la propriété la plus innovante de ce matériau : la ductilité. Et c'est en même temps, l'orientation des fibres, pour reprendre les sollicitations, qui pose le plus de difficultés aux industriels. En effet, les expériences de Bayard (2003) et Bernier et Behloul (1996), détaillées dans la section 2.3.4, mettent en évidence l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement du matériau et de la structure. En conséquence, dans les recommandations de conception de structure en BFUP (AFGC, 2002), l'utilisation d'un coefficient (noté K), relatif à la dispersion sur l'orientation des fibres, est préconisée, tel un coefficient de sécurité. Selon ces recommandations, le coefficient est de 1.75 si le concepteur considère un effet mécanique local de la structure et de 1.25 le cas contraire (effet global) ; le cas d'une orientation favorable, dans une structure mince par exemple, n'est pas considéré. Ce coefficient de sécurité est très pénalisant, car dans les recommandations, elle est le diviseur de la contrainte maximale de la loi de comportement et ne permet pas de prendre en compte une orientation avantageuse des fibres. Des précisions sur la méthode de calcul du coefficient sont données à la section 2.4. À ce problème, s'ajoute celui des singularités géométriques du moule qui produisent des orientations de fibres où le coefficient à consi-



(a) Seonyu, Corée du Sud



(b) Pont du diable, Hérault, France



(c) Sherbrooke, Canada



(d) Saint-Pierre la cours, Mayenne, France

FIGURE 1.2 – Exemples d'ouvrage de génie civil en BFUP

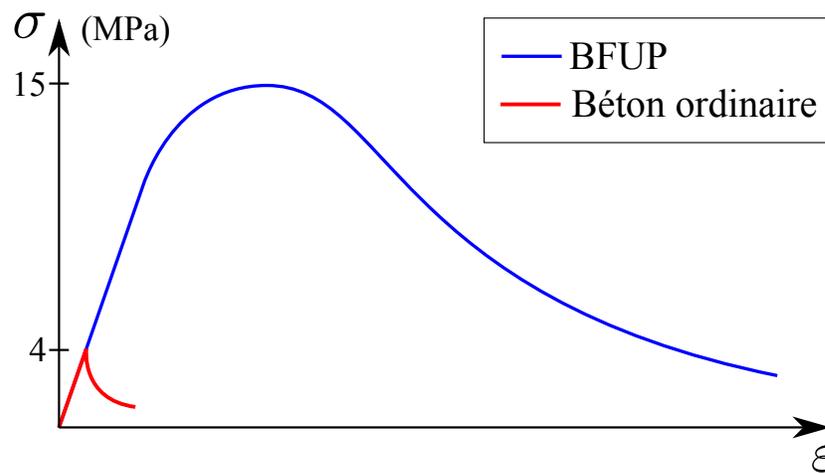


FIGURE 1.3 – Lois de comportement en traction d'un béton ordinaire et d'un BFUP

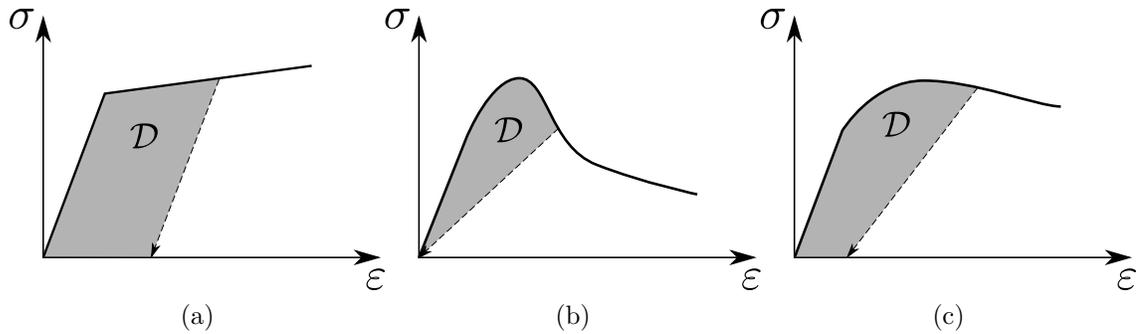


FIGURE 1.4 – Loi de comportement typique d’un modèle (a) elasto-plastique, (b) elasto-endommageable, (c) elasto-plastique avec dégradation de la rigidité

dérer est inconnu. Comment les ingénieurs conçoivent-ils des structures optimisées avec ce coefficient d’orientation ? Deux méthodes existent : prendre modèle sur la réalisation d’ouvrages similaires réalisés de façon semblable, ou sacrifier un élément de structure en prélevant des prismes pour les tester en flexion et vérifier le dimensionnement de la structure *a posteriori*. L’obtention de ce coefficient est donc onéreuse, peu précise et très pénalisante.

1.2 Problématique de recherche

La ductilité d’une structure, une propriété des plus importantes en génie civil, est fortement influencée par l’orientation des fibres. Pour modéliser cette ductilité, des modèles implantés dans des logiciels de calcul par éléments finis existent. Mais au niveau matériau, l’écrouissage et l’adoucissement sont modélisés par la théorie de la plasticité. Ils ne simulent donc pas correctement le comportement du BFUP qui est un matériau qui s’endommage — propagation irréversible des dislocations — et qui ne se plastifie pas — déplacement irréversible des dislocations, où les dislocations sont des défauts dans la structure du réseau cristallin. En effet, pour les bétons, la rigidité élastique décroît avec les déformations ; ce mécanisme est principalement dû à la fissuration, qui est un mécanisme différent de celui de la plastification ou du glissement des plans atomiques. Un modèle de plasticité ne peut donc pas interpréter de manière satisfaisante la dégradation de la rigidité élastique. La figure 1.4 met en évidence la différence entre ces deux comportements : en plus d’avoir un déchargement différent — retour à l’origine pour l’un et déformation permanente pour l’autre —, le type de modèle a une influence sur l’énergie dissipée par le matériau.

Parallèlement à cette difficulté, s’ajoute l’effet d’échelle : plus une structure est

épaisse, plus elle dispose d'énergie pour propager une fissure, plus son comportement est fragile; annulant ainsi l'effet écrouissant tant recherché par l'ajout de fibres. Les modèles basés sur des limites élastiques, limites plastiques, ou de surface de rupture, qu'elle soit en contrainte ou déformation, ont une contrainte ultime (nominal ultimate stress) constante; c'est-à-dire indépendant de la dimension de la structure. Ces modèles ne permettent donc pas de prendre en compte l'effet d'échelle. De plus, pour se former, les fissures requièrent une certaine quantité d'énergie, appelée énergie de rupture; un modèle de comportement fragile et valable se doit donc d'utiliser un critère énergétique pour modéliser la propagation d'une fissure. Une autre difficulté, mathématique cette fois, intervient pour toutes lois de comportement adoucissantes : le résultat d'un calcul par éléments finis, dépend de la taille du maillage, voir section 5.3.1. Il devient donc nécessaire d'établir un modèle basé sur la mécanique linéaire élastique de la rupture (rupture fragile) pour les quatre avantages suivants (Bažant et Planas, 1998) :

- prise en compte de l'énergie spécifique de rupture G_f ;
- analyse de structure indépendante du maillage, par compensation énergétique;
- calcul de l'énergie dissipée par la structure, sa ductilité;
- prise en compte de l'effet d'échelle.

Pour les concepteurs de structure en BFUP, l'alternative au coefficient K , évoqué précédemment, serait d'utiliser une loi de comportement propre au BFUP, fonction de l'orientation des fibres. Pour établir cette loi, il faut comprendre le mécanisme d'extraction des fibres au sein de la matrice et le reproduire numériquement avec l'orientation souhaitée. L'objectif est donc d'obtenir le comportement mécanique macroscopique du matériau à partir de sa microstructure : c'est l'approche de la micromécanique, approche qui est utilisée dans ce travail. La micromécanique donne également l'avantage d'utiliser des paramètres matériaux facilement identifiables comme la longueur des fibres, leurs diamètres, ou encore la rigidité de la matrice, etc. De plus, la micromécanique est parfaitement compatible avec la théorie de la rupture fragile et le concept d'endommagement des matériaux.

1.3 Objectifs et structure du document

Les fibres s'orientent en fonction de la mise en œuvre et de la géométrie de la structure. La fissuration de cette dernière, qui fait partie intégrante du fonctionnement du matériau, active les fibres qui dissipent de l'énergie lors de leur extraction, conférant à la structure sa ductilité. Quelle est alors, la relation entre la ductilité de l'ouvrage, sa mise en œuvre et sa géométrie?

Afin de répondre à la problématique industrielle, l'objectif de la maîtrise est d'établir un modèle d'endommagement micromécanique, basé sur les principes de la mécanique linéaire élastique de la rupture et capable de prendre en compte l'orientation des fibres. Cet objectif est décomposé en six étapes :

- mettre en équation le mécanisme d'extraction d'une fibre en fonction de son orientation ;
- appliquer les principes d'homogénéisation pour établir le modèle d'endommagement micromécanique en respectant les lois de la thermodynamique ;
- régulariser le modèle pour assurer une indépendance du maillage et une convergence des résultats ;
- implanter le modèle dans un logiciel de calcul par éléments finis ;
- calibrer le modèle sur des résultats expérimentaux en traction, le valider et l'appliquer sur un élément de structure en flexion ;
- juger de la pertinence du modèle quant à la prise en compte de l'orientation des fibres sur la ductilité de la structure.

La loi de comportement développée s'inscrit dans la continuité d'un modèle capable de prévoir l'orientation des fibres dans une structure via la mécanique des fluides et du transport de particules par exemple. L'orientation des fibres est donc une variable d'entrée du modèle micromécanique. Valable pour de petites déformations, le modèle s'applique pour des pourcentages volumiques de fibres inférieurs à 3% et dont la longueur n'excède pas 20 mm. Il sera alors possible, pour le concepteur, de prévoir le comportement structural de l'ouvrage en BFUP et notamment sa ductilité.

Dans ce mémoire, une revue de la documentation scientifique concernant les BFUP est exposée pour comprendre l'importance de l'orientation des fibres (chapitre 2). Les principaux modèles non linéaires sont ensuite passés en revue pour identifier ceux qui s'appliquent le mieux aux BFUP (chapitre 3). Par la suite, c'est un modèle d'endommagement micromécanique qui est développé (chapitre 4). Puis, la pertinence du modèle est critiquée via une calibration du modèle puis une application structurale (chapitre 5). Finalement, une conclusion est présentée afin de résumer les points importants de ce travail suivie de futures perspectives de recherche (chapitre 6).

Chapitre 2

Revue de la documentation scientifique sur les Bétons Fibrés à Ultra-haute Performance

Le présent chapitre passe en revue les informations nécessaires pour se familiariser avec le béton fibré à ultra-hautes performances. Pour apprécier davantage la spécificité des BFUP, une comparaison est présentée entre le BFUP et les autres types de bétons. Enfin, l'influence de l'orientation des fibres est examinée et pour conclure, les premières recommandations proposées par l'Agence Française de Génie Civil (AFGC) sont présentées.

2.1 Compositions

Le tableau 2.1 est un récapitulatif de la composition de différents types de bétons : béton ordinaire, béton à hautes performances et béton fibré à ultra-hautes performances. Les BFUP possèdent un rapport eau/liant plus faible que les autres bétons, généralement obtenu en augmentant la quantité de liant. La taille du plus gros grain est de l'ordre de quelques millimètres. Le granulats du BFUP est le sable de quartz qui possède une nature minéralogique très dure, une élasticité proche de celui de la pâte de ciment ainsi qu'une adhérence pâte-granat élevée (Wuest, 2007). La fumée de silice comble les vides entre les fibres et le sable, améliore la rhéologie du mélange et forme des produits d'hydratation supplémentaires avec la Portlandite (Resplendino, 2009b). Les super fluidifiants sont des adjuvants hauts réducteurs d'eau qui donnent au matériau

TABLE 2.1 – Composition classique du béton ordinaire, du BHP et du BFUP

Compositions	Béton ordinaire	BHP	BFUP
Rapport eau/liant	0.4 à 0.6	0.3 à 0.35	0.16 à 0.2
Liant (kg/m ³)	300 à 375	350 à 500	700 à 1 500
Eau (kg/m ³)	150 à 200	140 à 160	160 à 230
Super plastifiant (kg/m ³)	-	3.5 à 10	10 à 45
Fumée de silice (kg/m ³)	-	150 à 250	175 à 375
Masse volumique (kg/m ³)	2 300	2 300	2 400 à 2 600

une bonne rhéologie. Ils permettent également de diminuer le rapport eau/liant tout en conservant et en améliorant la maniabilité du mélange.

Les BFUP possèdent une teneur de 160 à 260 kg/m³ d’acier sous forme de fibres, soit de 1 à 11% du volume total. Les fibres sont généralement de forme droite, mais il existe aussi des fibres de formes ondulées, avec des crochets aux extrémités, aplaties et même torsadées. La longueur des fibres (notée L_f) est de 10 à 20 mm pour un diamètre de 0.1 à 0.3 mm (noté ϕ_f). On définit une longueur critique de en fonction de l’adhérence fibre–matrice dont l’objectif est celui que la fibre dissipe un maximum d’énergie par frottement et éviter qu’elle se casse [Bentur et Mindess \(1990\)](#). Le choix de ces paramètres est important, car l’élancement (noté $\lambda = L_f/\phi_f$) influence significativement la maniabilité et l’homogénéité du mélange ([Swamy et Mangat, 1974](#)). [Wuest \(2007\)](#) atteint même 785 kg/m³ d’acier, soit 10% du volume avec une longueur de 5 mm et un diamètre de 0.15 mm ; mais dans ce cas les fibres sont trop courtes pour obtenir un comportement écrouissant étendu. Pour améliorer l’ancrage des macrofibres et la cure des microfissures, des microfibres peuvent également faire partie de la composition des BFUP.

Ci-dessous, différentes compositions de BFUP existant sur le marché international :

- Ductal et BPR, commercialisé par Lafarge, utilisé en Asie et Amérique du Nord,
- BSI/CERACEM développé par Eiffage avec la société Sika,
- CEMTEC développé par LCPC et appliqué en Suisse et au Canada,
- CRC développé par Aalborg Portland Cement (Densit) au Danemark,
- SIFCON et SIMCON — voir figure [2.1](#).

Les cinq premiers BFUP possèdent un volume de fibres de 0.73 à 3%. L’utilisation de superfluidifiants et d’une courte longueur de fibre (< 20 mm) permet une bonne maniabilité. Le béton est généralement directement coulé dans un moule avant de subir un traitement thermique d’environ 90°C, pour limiter les effets différés ultérieurs : retrait de dessiccation quasi-nul, réduction très importante du fluage ([Resplendino, 2009b](#)).



FIGURE 2.1 – Coulée d'un élément SIFCON

Le SIFCON (Slurry Infiltrated Fiber CONcrete) et SIMCON (Slurry Infiltrated Mat CONcrete) se différencient des autres BFUP par leur important volume de fibres. La méthode de mise en œuvre consiste à introduire un gâchis de ciment à travers un réseau de fibres métalliques prédisposées dans le coffrage. Cette méthode permet d'introduire plus de fibres (5 à 20% en volume), sans être limité par la rhéologie du mélange. Dans le cas des SIFCON, les fibres sont introduites en vrac alors que dans le cas de SIMCON les fibres forment un tissu continu. La ténacité est fortement améliorée, mais la quantité importante de fibres rend le coût du matériau souvent prohibitif.

2.2 Propriétés mécaniques

2.2.1 Propriétés de bases

Le tableau 2.2 liste les propriétés des BFUP, tout en les comparant avec d'autres types de bétons. Le tableau montre que les fibres d'acier du BFUP augmentent considérablement l'énergie de rupture qui peut atteindre $40\,000\text{ J/m}^2$ au lieu de quelques dizaines de J/m^2 pour le Béton à Ultra-Hautes Performances (BUHP) : le BFUP est alors un matériau ductile. Ce sont des matériaux extrêmement compacts, ce qui leur donne des performances mécaniques accrues et une durabilité très forte grâce à une porosité très faible. Cette compacité permet également d'avoir des surfaces moins rugueuses que les bétons ordinaires et d'obtenir un aspect esthétique plus lisse. La porosité est tellement faible que ce matériau est utilisé dans la conception de centrales nucléaires et pour les conteneurs de déchets nucléaires (Toutlemonde et al., 1999). De plus avec la disparition des cages d'armature, le BFUP donne la possibilité de réaliser des pièces

TABLE 2.2 – Propriétés générales du béton ordinaire, du BHP, du BTHP et du BFUP

Propriétés	Béton ordinaire	BHP	BTHP	BFUP
Résistance en compression (MPa)	20 à 40	50 à 80	60 à 120	150 à 250
Résistance en traction (MPa)	1 à 3	-	-	7 à 15
Énergie de rupture (kJ/m ²)	0.003	-	-	10 à 40
Module d'Young (MPa)	25 à 35	35 à 40	-	50 à 60
Porosité à l'eau (%)	14 à 20	10 à 13	6 à 9	1.5 à 5
Perméabilité à l'eau (%)	10 ⁻¹⁶	10 ⁻¹⁶	10 ⁻¹⁸	<10 ⁻¹⁹
Facteur de diffusion de Cl ⁻ (m ² /s)	2.10 ⁻¹¹	2.10 ⁻¹²	2.10 ⁻¹³	2.10 ⁻¹⁴
Portlandite (kg/m ³)	76	86	66	0



FIGURE 2.2 – Abris en BFUP, aire de repos, Pays-Bas

avec des géométries complexes ([Resplendino, 2009b](#)), voir figure 2.2.

La grande quantité de ciment donne au béton une capacité d'autocicatrisation expliquée par le fait que durant le processus de fabrication du BFUP, seulement environ 30% du ciment est hydraté : les microfissures peuvent être comblées par les produits créés lors d'une nouvelle hydratation si de l'eau entre en contact avec le ciment non hydraté ([Habel, 2004](#)).

2.2.2 Comportement d'une fibre droite

Selon [Bentur et Mindess \(1990\)](#), trois étapes distinguent le comportement d'une fibre droite à l'arrachement (voir figure 2.3). La première phase est le décollement (ou perte d'adhérence) de la fibre et de la matrice. La deuxième phase est identifiée par

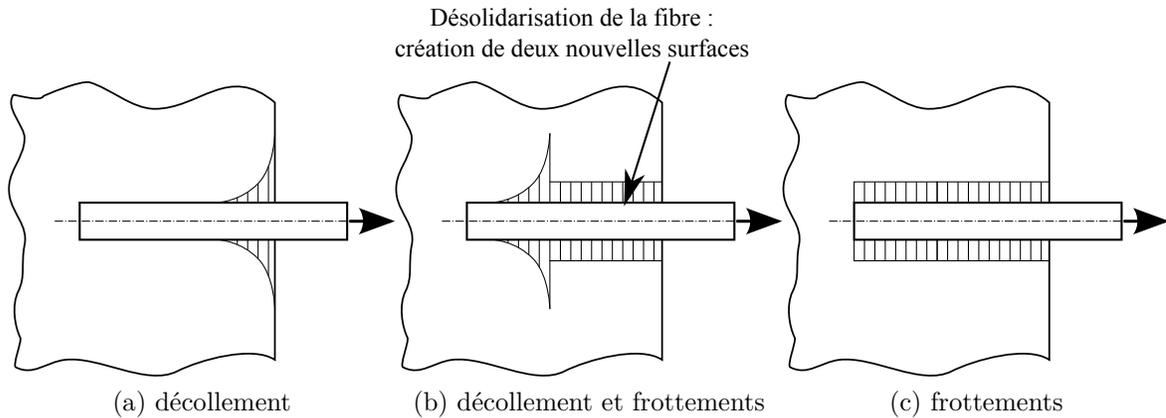


FIGURE 2.3 – Les trois phases de l'extraction d'une fibre

le fait qu'une partie de la fibre est en décollement et l'autre partie (décollée) est en glissement avec frottement de la fibre dans la matrice. La troisième phase correspond au frottement seul de la matrice sur la fibre, extraction de la fibre. Le comportement du matériau est en réalité très lié au comportement de l'association fibre-matrice et non de la matrice ou de la fibre seule. Il existe alors un couple fibre-matrice optimal :

- la fibre doit être active le plus tôt possible afin de ralentir la propagation des fissures,
- l'ancrage doit être suffisant pour atteindre la plastification de la fibre,
- l'ancrage doit être suffisamment faible pour éviter la rupture de la fibre,
- la fibre doit dissiper un maximum d'énergie par frottement.

La matrice à ultra haute performance permet un bon ancrage des fibres, c'est pourquoi il n'est pas nécessaire que les fibres aient une géométrie complexe (tréfilée ou ondulée).

2.2.3 Durcissement et localisation des déformations

Le comportement en traction unidirectionnel des BFUP se décompose en trois domaines distincts : le domaine élastique (I), le domaine écrouissant (II) et le domaine adoucissant (III). La figure 2.4 met en évidence ces trois domaines. La partie élastique prend fin lorsque la première microfissure est formée. Cette microfissure est formée grâce à la coalescence (l'union) des microfissures, elles-mêmes générées à partir des défauts initiaux et de l'hétérogénéité des caractéristiques locales du matériaux. Cette coalescence peut être retardée par l'utilisation de microfibres qui couturent les microfissures. Le domaine écrouissant, comportement désormais non linéaire, est caractérisé par une phase de multifissuration ; il y a formation de nouvelles micro et macrofissures. Et le troisième domaine est caractérisé par le comportement adoucissant du matériau :

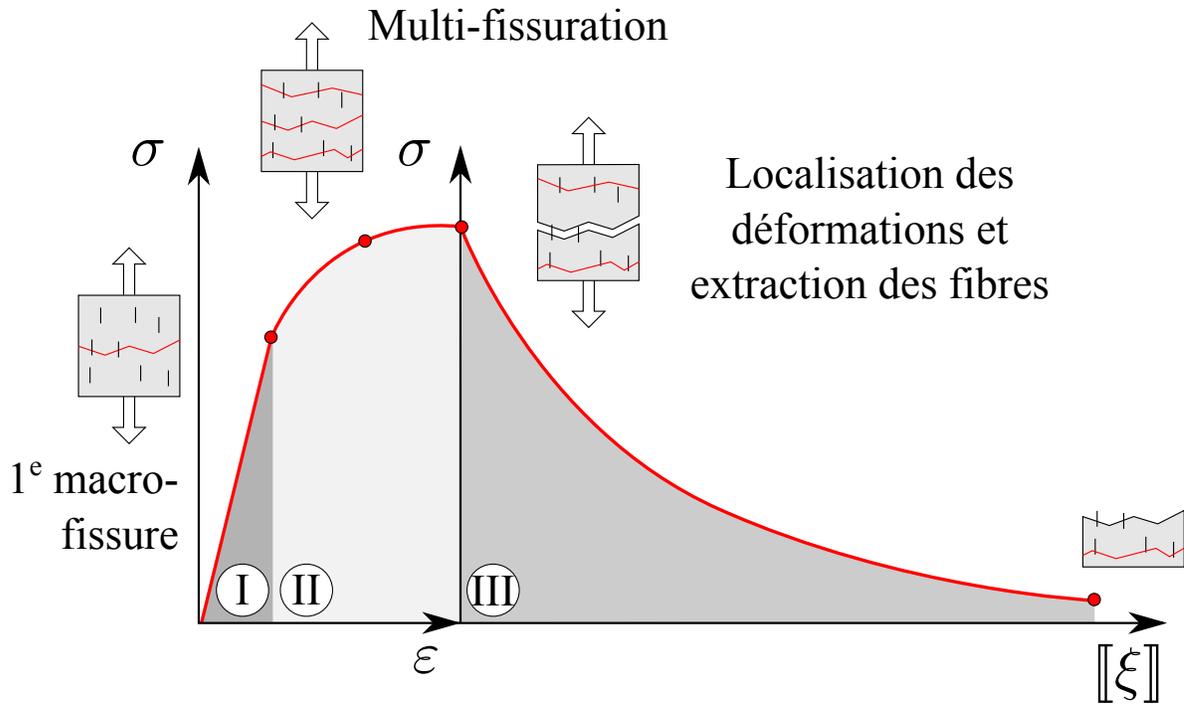


FIGURE 2.4 – Schéma du comportement en traction du BFUP

c'est la localisation des déformations ou l'ouverture progressive d'une des macrofissures. Il s'agit d'un mécanisme de structure qui sépare un volume en deux ; le comportement est alors décrit en terme d'ouverture de fissure et non plus en déformation. Parmi ces phases, dans un élément de volume représentatif du matériau, on distingue quatre types de fissure :

- microfissures préexistantes : elles sont causées par le retrait endogène de la pâte de ciment ;
- microfissures : elles apparaissent avec l'application de la sollicitation mécanique dans le domaine écrouissant ;
- macrofissures : union des microfissures et microfissures préexistantes pour former une macrofissure visible à l'œil nu (> 0.1 mm). Le nombre de macrofissures augmente jusqu'à la fin du domaine écrouissant ;
- macrofissure localisée : après le pic de contrainte, les déformations se concentrent dans une macrofissure, tandis que les autres fissures (micro et macro) se referment.

2.2.4 Caractérisation du matériau

2.2.4.1 Essais de compression

La résistance à la compression unidirectionnel est obtenue selon la même méthode que celle des bétons ordinaires. La dimension des éprouvettes est cependant réduite à un diamètre de 7 ou 11 cm respectivement pour une longueur de 14 ou 22 cm ([AFGC, 2002](#)).

2.2.4.2 Essais de traction

Les BFUP possèdent des caractéristiques intéressantes en traction. Il est donc naturel d'effectuer des essais de traction. Mais actuellement, aucune procédure précise n'existe pour effectuer cet essai sur les BFUP.

Le comité RILEM 2002 propose d'utiliser des cylindres entaillés pour des bétons de fibres conventionnels (FRC). Cette entaille permet de prévoir l'emplacement de la fissure; il devient alors possible de mesurer son ouverture efficacement. Mais, pour le cas des BFUP, l'AFGC explique qu' « il est apparu que le processus de traction directe sur éprouvette entaillée était très pénalisant et pas forcément représentatif du comportement du matériau dans la structure ». En effet, l'entaille limite grandement le processus de multifissuration ainsi que le comportement durcissant du BFUP ([Wuest, 2007](#)). De plus, à proximité de la surface de l'éprouvette, les fibres ont une orientation préférentielle (phénomène d'effet des parois) et la création d'une entaille va localement éliminer l'influence de ces fibres spécialement orientées par la surface; ce qui aurait pour résultat de diminuer la résistance de l'éprouvette ([Markovic, 2006](#)).

Et pourtant, d'autres chercheurs comme [Habel \(2004\)](#) ou [Wuest \(2007\)](#), mettent en évidence que les éléments entaillés permettent d'obtenir des résistances maximales et des déformations plus élevées. Ils expliquent que les éprouvettes non entaillées développent une fissure dans la section la plus faible. Effectivement, la zone de rupture est prédéfinie pour les éprouvettes entaillées ce qui réduit la probabilité que la fissure se développe dans la section la plus faible ([Wuest, 2007](#)). Enfin, d'après [Markovic \(2006\)](#), les BFUP avec des fibres courtes ne devraient pas être influencés par l'entaille, car l'effet des parois agit moins sur ces fibres, contrairement aux bétons avec de longues fibres qui devraient être plus sensibles à l'entaille.

Il faut adapter le type d'éprouvette utilisée, entaillé ou non, selon le paramètre

étudié : non entaillé pour caractériser le domaine élastique et durcissant, entaillé pour le domaine adoucissant. Une alternative peut-être de déterminer le comportement en traction par l'essai de flexion, en appliquant une méthode inverse décrite dans les recommandations de AFGC (2002).

2.2.4.3 Essais de flexion

Pour l'essai de flexion, l'AFGC (2002) propose des essais selon le type de structure à concevoir en tenant compte de l'utilisation finale. La mise « en œuvre du matériau [se fait] dans les conditions réelles du chantier sur une maquette représentative de la structure réelle. » Selon que la structure conçue soit une dalle mince ou une dalle épaisse, l'orientation des fibres sera grandement affectée par l'effet des parois, effet décrit rigoureusement dans la section 2.3.3. Ainsi pour les dalles épaisses et les poutres, le protocole requière une orientation la plus homogène possible et donc avec une éprouvette vibrée et pivotée d'un quart de tour.

- pour les plaques épaisses : flexion 3 points, ou traction directe avec éprouvette entaillée ou non, l'éprouvette est vibrée si nécessaire pour avoir une orientation la plus uniforme possible ;
- pour les poutres : flexion 3 points ou traction directe avec éprouvette entaillée, vibrée ;
- pour les plaques minces : flexion 4 points.

La méthode inverse permet d'obtenir la loi de comportement en traction du matériau à partir un essai de flexion ; cet essai est relativement simple, mais la mesure du comportement du matériau est indirecte. Le détail de cette méthode est donnée à l'annexe 2 des recommandations de l'AFGC.

2.3 Orientation des fibres

L'un des principaux intérêts d'ajouter des fibres dans du BUHP est d'avoir un comportement tenace en traction, pour contrôler l'ouverture des fissures et supprimer les barres d'armatures. Les fibres vont cependant apporter une anisotropie dans le comportement du matériau, anisotropie qu'il faut maîtriser. Dans cette section, les mécanismes d'orientation des fibres et la mesure de cette orientation sont approfondis.

2.3.1 Mesure de la direction des fibres

Pour observer le comportement du matériau en fonction de l'orientation des fibres, [Pansuk et al. \(2008\)](#) mesure le coefficient d'orientation par une analyse photonumérique. Il faut couper le spécimen dans la section étudiée et analyser la surface par image numérique. Le coefficient d'orientation des fibres est alors défini par l'équation (2.1) :

$$\eta_f = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} \frac{L_{f,proj,i}}{L_f} \text{ avec } 0 \leq \eta_f \leq 1, \quad (2.1)$$

ou

$$\eta_f = \frac{1}{\mathcal{N}_f} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_f} \frac{\phi_f}{\phi_{f2,i}} \text{ avec } 0 \leq \eta_f \leq 1, \quad (2.2)$$

où L_f et ϕ_f sont respectivement la longueur et le diamètre des fibres, \mathcal{N}_f est le nombre de fibres dans la section étudiée, ϕ_{f2} est le grand axe de l'ellipse formée par l'intersection de la section droite avec la fibre inclinée et $L_{f,proj}$ est la longueur projetée de la fibre dans la direction de la charge indiquée par la figure 2.5. Cette définition également utilisée dans de nombreux autres travaux, notamment par [Tue et Henze \(2008\)](#); [Wuest \(2007\)](#); [Markovic \(2006\)](#). Le coefficient d'orientation d'une section droite de l'éprouvette est obtenu grâce aux sections elliptiques des fibres dans cette section; voir figure 2.5. Cependant, cette méthode présente un problème : une seule et même ellipse peut donner deux directions différentes, voir figure 2.6. Cette méthode est actuellement la plus simple et la moins onéreuse en laboratoire.

L'analyse par radiographie — rayon X —, peut donner des informations intéressantes quant à l'orientation des fibres et leur densité. En revanche, la dimension de la profondeur est perdue et cette méthode est peu efficace dans le cas d'un pourcentage de fibres trop important. Alors, la tomographie axiale calculée par ordinateur serait une excellente solution, mais extrêmement coûteuse et non applicable à l'échelle industrielle.

La méthode qui semble la plus efficace, de par son coût, ses résultats, sa répétabilité et sa transportabilité, est la méthode par induction magnétique. La méthode consiste à générer localement un champ magnétique et de mesurer l'influence des fibres sur ce champ magnétique via la mesure de son inductance. Quand l'axe du champ magnétique et la direction principale des fibres sont alignés, l'inductance mesurée est à son maximum : il suffit donc de faire pivoter la cellule; la position angulaire où l'inductance est la plus grande est l'orientation moyenne des fibres. [Ferrara et al. \(2011a\)](#) relie l'orientation mesurée par l'induction magnétique au coefficient d'orientation des fibres défini

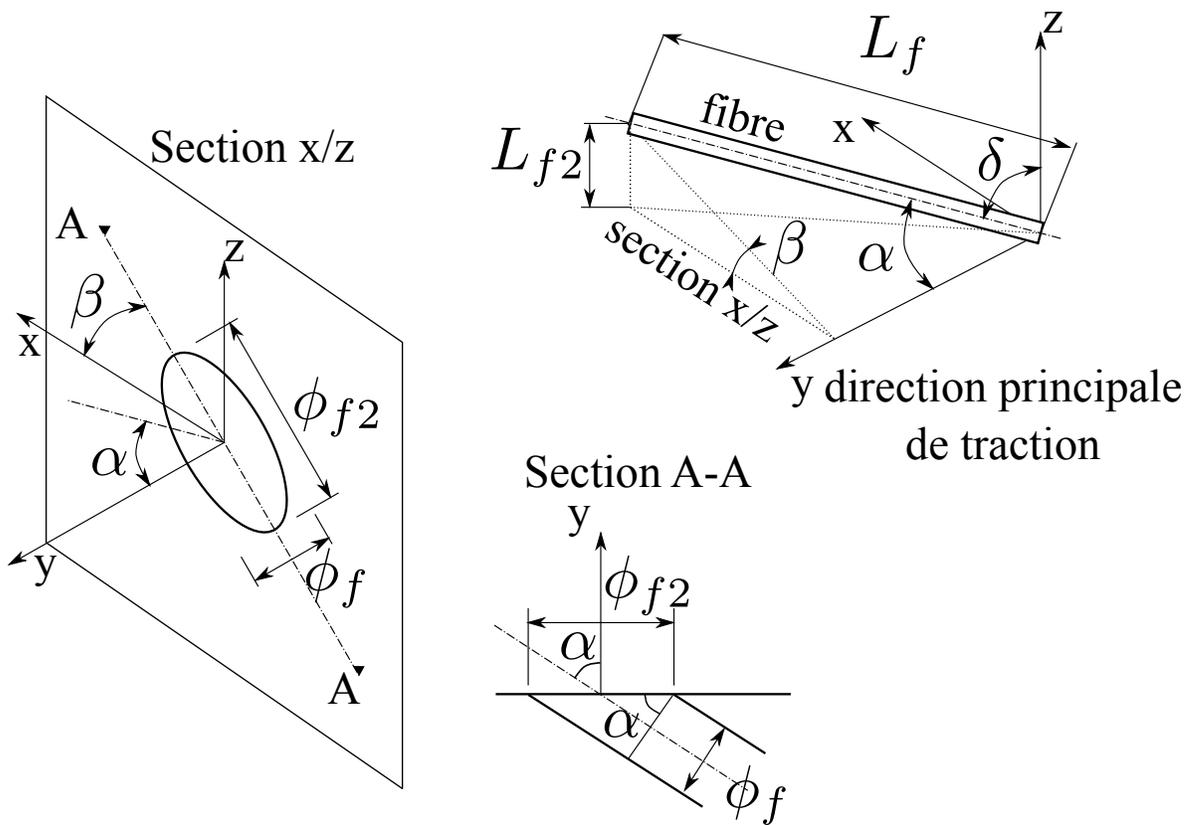


FIGURE 2.5 – Relation géométrique de l'orientation d'une fibre, (Tue et Henze, 2008)

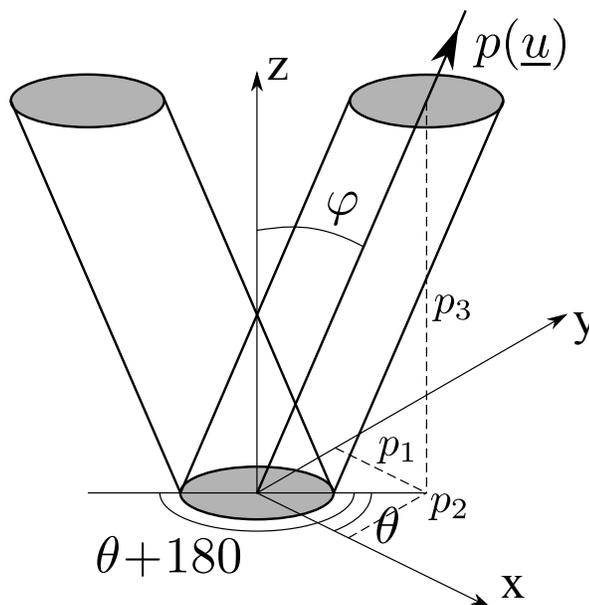


FIGURE 2.6 – Illustration de l'ambiguïté sur l'orientation de la fibre

par Krenchel (1975) :

$$\alpha = \frac{n_f \pi \phi_f^2}{4v_f}, \quad (2.3)$$

où n_f est le nombre de fibre par unité de surface, v_f le pourcentage volumique de fibre dans la matrice et ϕ_f le diamètre des fibres. Cette méthode ne marche, bien sûr, que pour des fibres dont le matériau possède des propriétés ferromagnétiques. Enfin, elle fonctionne également pour des épaisseurs de dalle de plus de 25 mm, ce qui rend son utilisation sur chantier très pertinente. Des valeurs caractéristiques du coefficient d'orientation sont données dans la section 2.3.3.

2.3.2 Tenseur d'orientation des fibres

L'orientation des fibres peut également être définie mathématiquement par un tenseur plutôt qu'un scalaire. En considérant qu'une fibre est représentée par un élément axisymétrique comme un cylindre; ainsi dans le repère sphérique, l'orientation d'une fibre est décrite par deux angles θ et φ , ou par un vecteur unitaire \underline{u} représenté à la figure 2.7 :

$$u_1 = \sin \varphi \cos \theta; \quad u_2 = \sin \varphi \sin \theta; \quad u_3 = \cos \varphi \quad (2.4)$$

où (u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées cartésiennes de \underline{u} .

Advani (1994) définit le tenseur d'orientation des fibres sur un volume représentatif du matériau dont les composants sont :

$$a_{i,j} = \int p(\theta, \varphi) u_i u_j d\underline{u} \Rightarrow a_{i,j} = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\theta, \varphi) u_i u_j \sin \varphi d\varphi d\theta. \quad (2.5)$$

Avec cette définition, il est possible de donner une interprétation physique assez proche de celle du tenseur des contraintes. Ainsi, la figure 2.8 donne des exemples spécifiques pour une orientation uniforme des fibres en trois, deux et une dimensions. Il faut noter que le centre de la fibre est un point de symétrie, en conséquence la loi de probabilité doit être symétrique; mathématiquement p doit être invariable aux transformations suivantes :

$$\begin{cases} \varphi \rightarrow \pi - \varphi \\ \theta \rightarrow \theta + \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

ou bien

$$p(-\underline{u}) = p(\underline{u}). \quad (2.7)$$

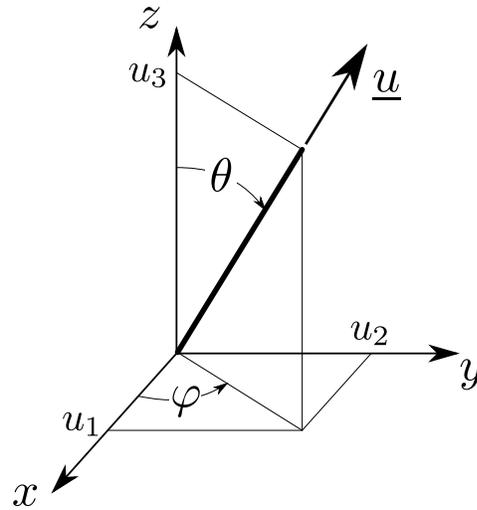
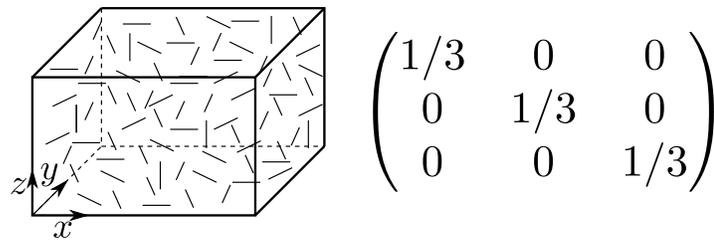
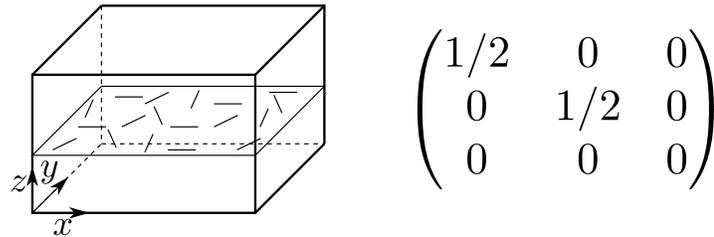


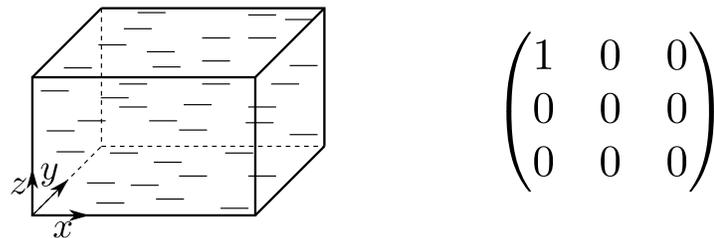
FIGURE 2.7 – Orientation d’une fibre dans le repère sphérique, (Advani, 1994)



(a) 3D



(b) 2D



(c) 1D

FIGURE 2.8 – Exemples de différentes orientations : (a) isotrope, (b) uniformément orienté dans un plan, (c) aligné dans une direction; (Advani, 1994)

2.3.3 Prévoir cette orientation

Dans les bétons renforcés de fibres, ces dernières tendent à s'orienter :

- dans le sens de l'écoulement, ce phénomène est accentué lorsque les fibres sont plus longues ;
- parallèlement au coffrage lorsqu'elles sont proches des parois ;
- horizontalement, lorsque le mélange est vibré.

[Martinie et Roussel \(2011\)](#) donne davantage d'explication concernant ces deux premiers points. Géométriquement, il est impossible qu'une fibre soit orientée perpendiculaire à la paroi, dont le centre est à une distance moindre de la moitié de sa longueur : c'est l'effet des parois. À ce phénomène, s'ajoute celui du cisaillement du fluide sur les fibres. Les équations qui régissent ce deuxième effet sont données par [Jeffery \(1922\)](#) :

$$\begin{cases} \tan \varphi = r \tan \left(\frac{\dot{\gamma} t}{r + r^{-1}} + k \right) \\ \tan \theta = \frac{C r}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}}, \end{cases} \quad (2.8)$$

où (φ, θ) sont les coordonnées sphériques de l'orientation d'une fibre (voir figure 2.7), C et k des constantes qui dépendent des conditions initiales de la fibre, $r = L_f/\phi_f$ est l'élanement de la fibre, $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement du fluide et t le temps. Dans la théorie de Jeffery, la longueur des fibres doit être grande devant celle des agrégats, ce qui est le cas pour les BFUP ; une autre hypothèse, plus forte, concerne l'interaction entre les fibres, qui doit être négligée. L'équation (2.8) du mouvement de la fibre indique que, avec une vitesse constante du fluide, la fibre pivote dans les deux directions perpendiculaires à la vitesse du fluide. La vitesse de rotation est lente lorsque l'axe de la fibre coïncide avec la direction de la vitesse du fluide et plus rapide à mesure qu'elle s'oriente perpendiculairement. Cette variation de la rotation de la fibre est fonction du taux de cisaillement, c'est pourquoi, à proximité des parois, les fibres tendent à s'orienter dans le sens d'écoulement du fluide ; la figure 2.9 montre le front d'écoulement du béton avec ces différentes zones. Dans la zone sans cisaillement, [Martinie et Roussel \(2011\)](#) montre que le coefficient d'orientation est proche de 0.5 — orientation uniformément orientée —, de 0.6 à 0.7 dans la zone où le cisaillement influe sur l'orientation et de 0.7 à 0.8 dans la zone où l'effet des parois agit. Martinie montre que le temps pour atteindre le régime permanent de ce phénomène est de l'ordre de quelques secondes ce qui est beaucoup plus petit que le temps mis pour couler un élément. Ainsi, dans une structure, les fibres s'orientent globalement dans la même direction que celle des lignes de courant du fluide, ce phénomène est observé par [Ferrara et al. \(2011b\)](#). En d'autres termes, le lieu de versement du béton à peu d'impact sur la valeur de taux de cisaillement. De ces expériences, la prédiction du coefficient d'orientation (notée α) est obtenue, pour

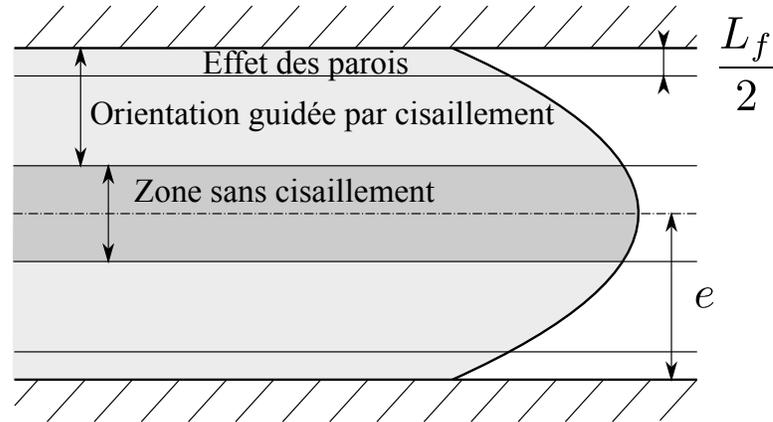


FIGURE 2.9 – Schéma d'une orientation des fibres dans une section

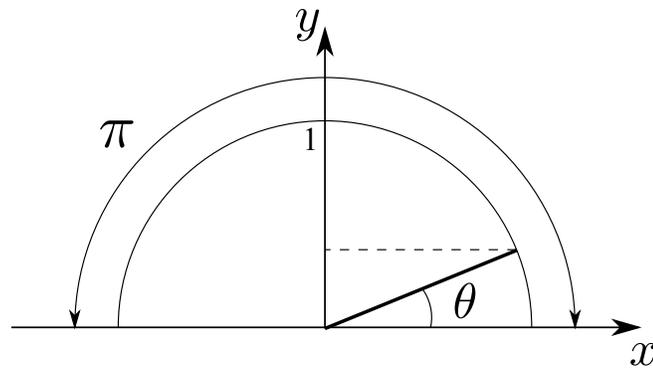


FIGURE 2.10 – Orientation d'une fibre en deux dimensions

un béton autocompactant, grâce à l'équation semi-empirique (2.9) :

$$\alpha = 0.7 - \frac{\tau_0}{\rho g e} + 0.05 \frac{L_f}{e}, \quad (2.9)$$

où ρ est la densité du béton, g la constante gravitationnelle, L_f la longueur des fibres, e la dimension caractéristique du fluide et τ_0 le cisaillement d'interface fluide-fibre ; voir figure 2.9. Le deuxième terme de cette équation symbolise la diminution de l'influence du cisaillement sur l'orientation de la fibre et le troisième terme symbolise l'effet des parois.

Les valeurs obtenues expérimentalement par Martinie sont démontrées théoriquement (Kooiman, 2000; Grünwald, 2004). Soit $\alpha \in [0,1]$, le coefficient d'orientation des fibres, ou l'efficacité lorsque cette orientation est comparée à la direction de la charge. Sa valeur est de 1 quand l'orientation coïncide avec la direction de la charge. Dans un environnement en deux dimensions, si les fibres sont uniformément orientées dans toutes les directions, la valeur de ce coefficient est théoriquement de 0.637, démontrée par l'équation (2.10) issue de la figure 2.10 :

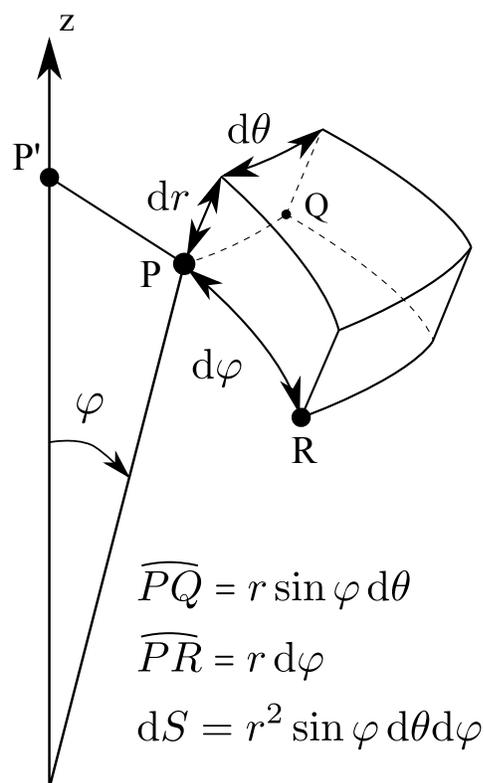


FIGURE 2.11 – Coordonnées sphériques dans une intégrale triple

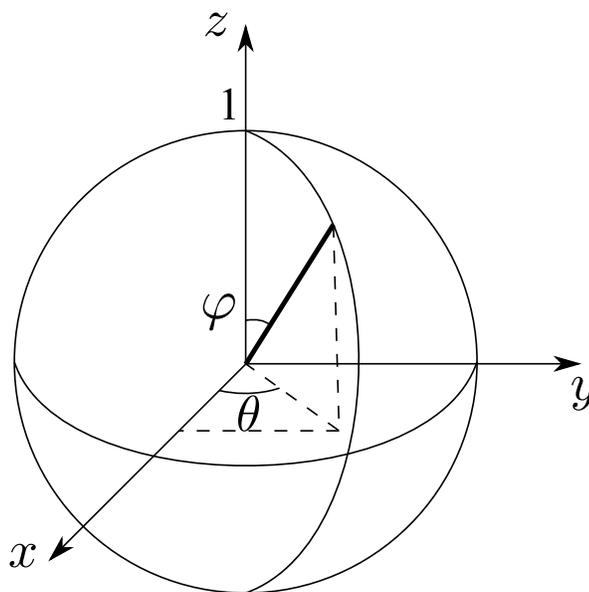


FIGURE 2.12 – Orientation d'une fibre en trois dimensions

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \\ \alpha_y &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \approx 0.637,\end{aligned}\tag{2.10}$$

où α_i est le coefficient d'orientation dans la direction i ; dans le cas où les fibres sont orientées uniformément, la valeur du coefficient α ne dépend pas de i . Pour une orientation des fibres en trois dimensions, le calcul du coefficient dans la direction z est semblable au calcul précédent; en revanche, le calcul du coefficient dans les directions x et y se fait après projection du vecteur unitaire sur le plan $x - y$, sans oublier le multiplicateur lié à l'intégration dans les coordonnées sphériques, voir figure 2.11, ce qui donne (Kooiman, 2000) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}.\tag{2.11}$$

Les équations (2.12) sont issues de la figure 2.12.

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \sin \theta \, d\theta = 0.5 \\ \alpha_y &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi}{4} \cos \theta \, d\theta = 0.5 \\ \alpha_z &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 0.5.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Dans les équations de (2.12), la surface générée pour $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [0, \pi]$ correspond à un quart de la surface d'une sphère, c'est pourquoi les intégrales sont divisées par : $\frac{1}{4} \times 4\pi = \pi$.

Pour résumer, il existe trois valeurs théoriques du coefficient d'orientation, identifiées par les cas :

- unidimensionnel (1D) : les fibres sont orientées dans la direction de la charge, le coefficient vaut alors 1;
- bidimensionnel (2D) : les fibres sont uniformément orientées dans un plan, le coefficient est de 0.637;
- tridimensionnel (3D) : les fibres sont uniformément orientées dans l'espace, le coefficient vaut 0.5.

2.3.4 Influence sur le comportement du matériau

Pour quantifier l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement du matériau, Bayard (2003) effectue des essais de traction directe. Pour élaborer ses éprouvettes,

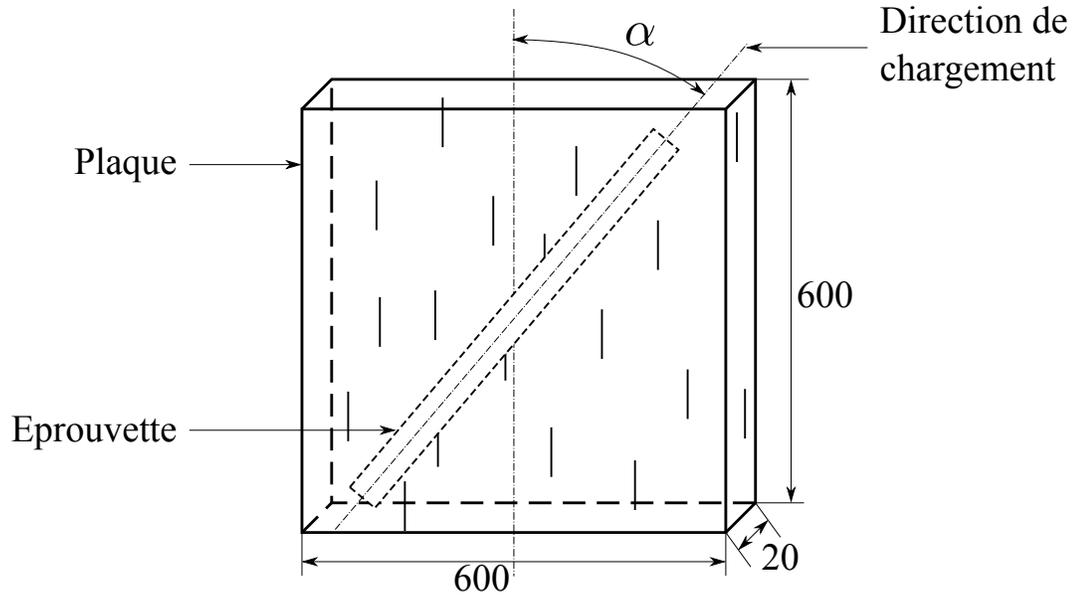


FIGURE 2.13 – Découpes des éprouvettes dans les plaques, (Bayard, 2003)

il espace de 15 mm des lames de tôle dans un bac métallique pour orienter les fibres dans une même direction via l'effet des parois. Après coulage et séchage, il obtient huit plaques dont les fibres sont globalement toutes orientées dans la même direction, il suffit alors de découper les éprouvettes suivant les directions souhaitées, voir figure 2.13.

Soit α l'orientation des fibres par rapport à la direction de la charge. Sur des éprouvettes non entaillées, une variabilité importante des résultats est observée pour un même angle α . Cependant, une tendance se dégage de cette expérience : les déformations et contraintes à la limite élastique diminuent pour α allant de 0° à 60° , avant de remonter jusqu'à la valeur de 60° à 90° , voir figure 2.14 et 2.15. Sur la figure 2.16, on remarque que la déformation à contrainte maximale évolue exponentiellement en fonction de α tandis que sur la figure 2.17, la contrainte maximale est une fonction linéaire de la déformation : maximale pour $\alpha = 0^\circ$ et minimale pour $\alpha = 90^\circ$.

Étant donné que les éprouvettes ne sont pas entaillées, la fissure se développe dans la section la plus faible de l'éprouvette, ainsi l'orientation de la fissure (notée β) est libre. Bayard (2003) remarque, qu'avec $\alpha = 0^\circ$ ou 90° , la variabilité de l'angle de la fissure (β) est quasi nulle contrairement aux autres cas $\beta = 30^\circ$, 45° et 60° où cette variabilité est de l'ordre d'une vingtaine de degrés.

Sur des éprouvettes entaillées, Bayard (2003) observe que la ténacité recherchée à travers l'ajout des fibres, varie selon l'angle d'inclinaison des fibres par rapport à la direction de la charge (α). Il choisit d'entailler ces éprouvettes pour imposer la direction de la fissure (β). De cette manière, il mesure l'énergie de rupture en fonction de

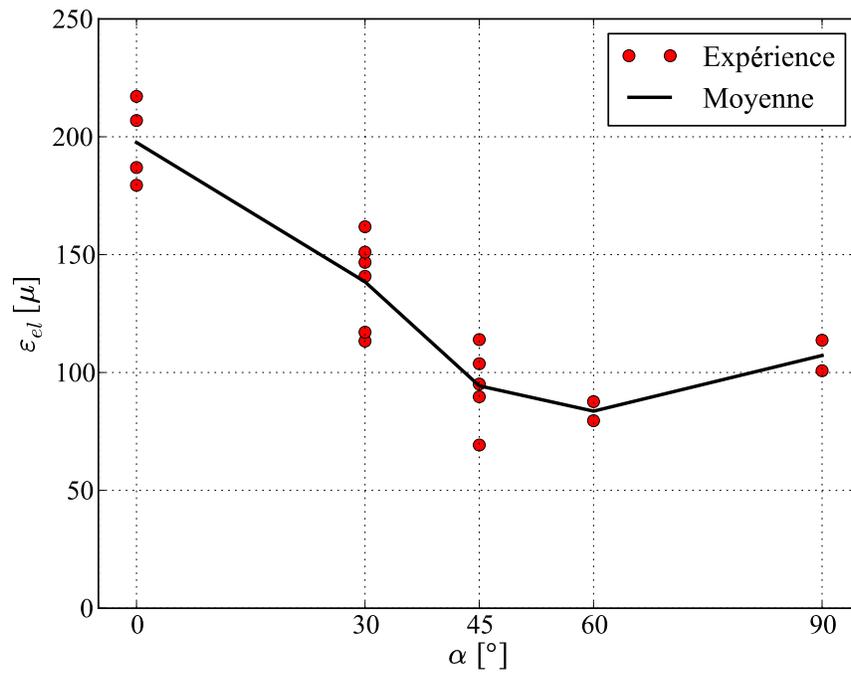


FIGURE 2.14 – Déformations élastiques limites pour différentes orientations (Bayard, 2003)

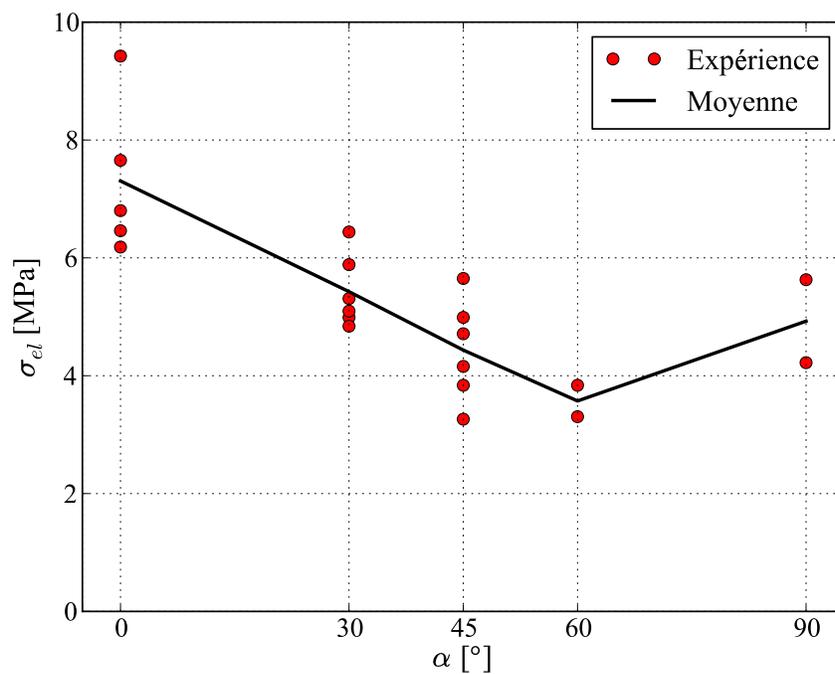


FIGURE 2.15 – Contraintes élastiques limites pour différentes orientations (Bayard, 2003)

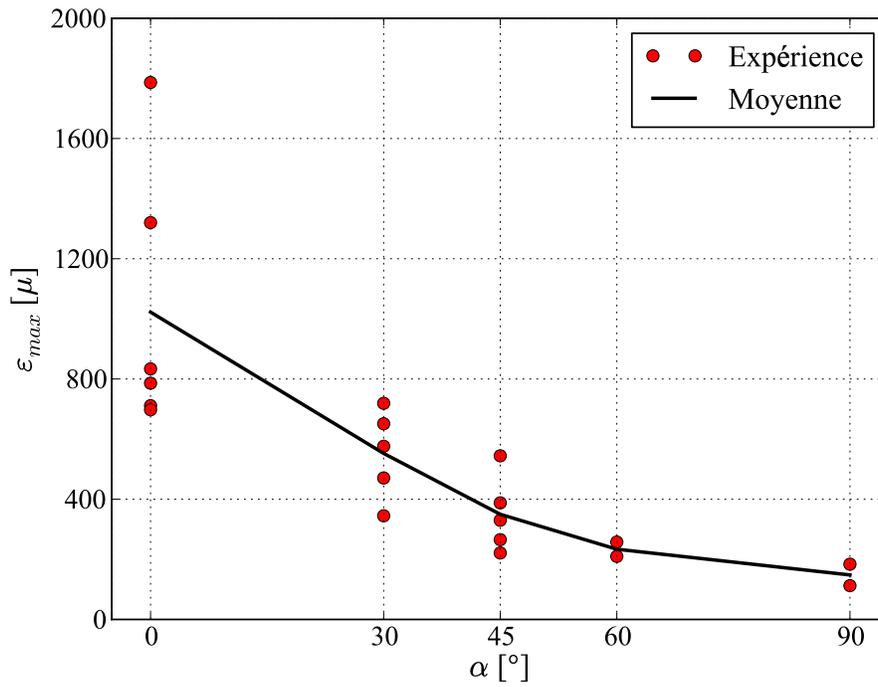


FIGURE 2.16 – Déformations maximales pour différentes orientations (Bayard, 2003)

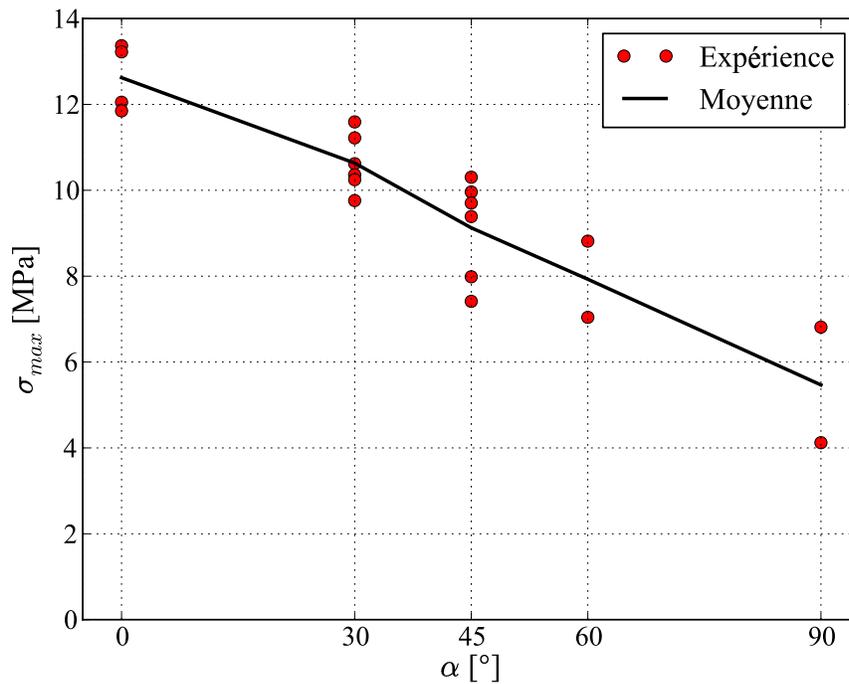


FIGURE 2.17 – Contraintes maximales pour différentes orientations (Bayard, 2003)

α uniquement. La ténacité est le produit d’une fissuration multi-échelle de la matrice. Pour des inclinaisons supérieures à 45° , il n’y a pas de multiples fissurations, mais une localisation précoce, conduisant à une fissuration unique. Enfin, les fibres perpendiculaires à la direction de l’effort constituent des défauts conduisant à une résistance plus faible que celle de la matrice seule et donc à un comportement fragile, voir figure 2.18.

La figure 2.19 représente des essais de flexion quatre points issue des travaux de Bernier et Behloul (1996). Elle met en évidence l’influence des fibres sur la ductilité du composite et qu’une « orientation supérieure à 45° est nécessaire pour obtenir un module de rupture plus important que celui fourni par la matrice seule. » α mesure toujours l’orientation des fibres par rapport à la direction des charges ; il faut noter que la définition de Bayard est inversée par rapport à celle de Bernier : il n’y a donc pas de contradiction entre ces deux auteurs. À titre indicatif, le module de rupture est, pour un essai de flexion quatre points :

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{fz}y}{I_{zz}} = \frac{6Pa}{bh^2}. \quad (2.13)$$

2.4 Recommandations de l’AFGC

Pour prendre en compte l’orientation des fibres, l’AFGC propose une méthode dissociée en deux approches empiriques. La première sert à obtenir « la loi de comportement en traction intrinsèque, à savoir qui ne dépend pas de la taille des éprouvettes [— effets de bord et effets d’échelle annulés —] et du type d’essai réalisé » via l’utilisation d’un coefficient correcteur γ . La seconde permet « d’intégrer l’influence des méthodes de mise en œuvre » via l’utilisation du coefficient K . Il s’agit d’un coefficient de sécurité relatif à la dispersion sur l’orientation des fibres, faisant abstraction des effets liés à la géométrie et au mode de confection. Ce coefficient représente « l’écart entre la loi issue d’essais sur prismes coulés (en laboratoire), et celle qu’on obtient en prélevant des prismes dans l’élément de structure fabriqué » art.1.4.5 de (AFGC, 2002). Son calcul s’effectue en plusieurs étapes distinctes décrites ci-après. Les recommandations de l’AFGC sont établies à partir d’expériences de chantiers situés en France, il est également précisé qu’il s’agit de recommandations provisoires.

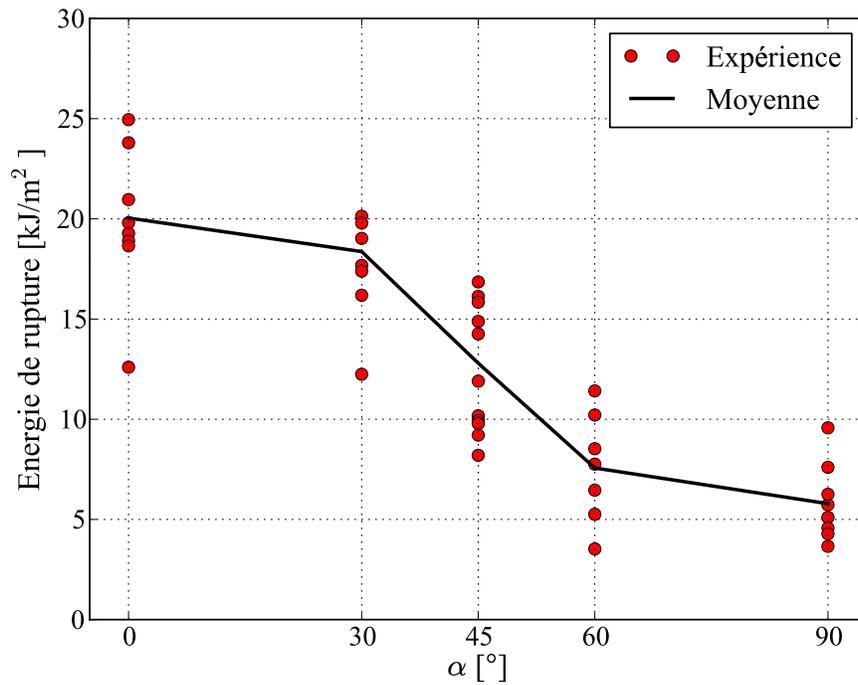


FIGURE 2.18 – Énergies dissipées pour différentes orientations des fibres (Bayard, 2003)

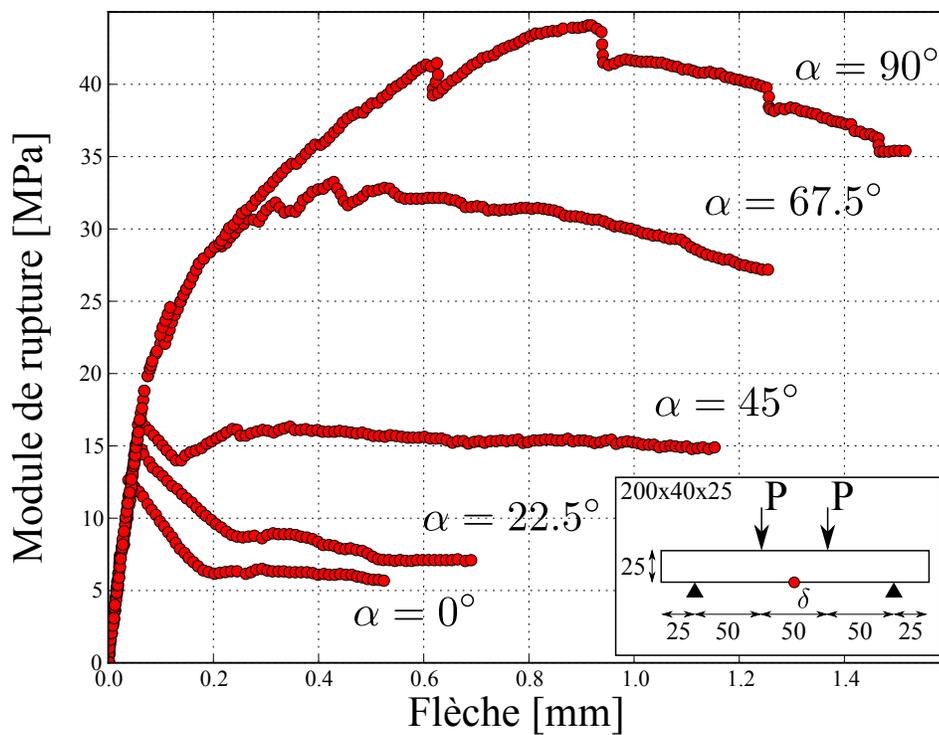


FIGURE 2.19 – Courbes flèche–module-de-rupture d’essais de flexion quatre points, (Bernier et Behloul, 1996)

2.4.1 Calcul du coefficient γ

Le coefficient de sécurité γ est lié à la géométrie et au mode de confection de l'éprouvette ou de la structure. D'après l'AFGC, dans les sections droites de la structure, l'effet des parois agit jusqu'à une distance de $L_f/2$ desdites parois, voir figure 2.9. Théoriquement, le coefficient d'orientation des fibres α est de 0.637 contre la paroi, car dans le pire des cas l'orientation est uniformément répartie dans le plan de la paroi et de 0.405 à une distance de $L_f/2$, car les fibres sont uniformément orientées dans l'espace (Romualdi et Mandel, 1964). Pour ce qui est des fibres qui ne sont ni contre les parois, ni dans la zone centrale du prisme, il faut prendre une valeur moyenne de α sur la bande de largeur $L_f/2$ soit $\alpha = 0.587$, d'après les recommandations. Il suffit alors de calculer la valeur moyenne de α sur l'ensemble de la section du prisme, notée $\bar{\alpha}$.

Mais d'après Wuest (2007), la méthode de Romualdi et Mandel (1964) ne permet pas d'avoir la même valeur selon les trois plans orthogonaux : 0.405 dans deux des plans et 0.64 dans le troisième. Cette définition ne respecte pas l'hypothèse d'une orientation uniforme, c'est pourquoi elle ne sera pas retenue dans ce mémoire. En revanche, la méthode utilisée par Kooiman (2000), respecte cette hypothèse : 0.5 dans les trois directions ; c'est également la valeur obtenue par Martinie et Roussel (2011) dont les expériences s'en rapprochent très fortement — voir section 2.3.3.

Le calcul du facteur correctif γ est exprimé par :

$$\gamma = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha(3D)}. \quad (2.14)$$

L'effet des parois est « supprimé » en divisant les contraintes brutes en traction par γ ,

$$\sigma^{max} = \frac{(\sigma^{max})_{br}}{\gamma}, \quad (2.15)$$

où l'indice *br* signifie « valeurs brutes », ce qui permet d'obtenir la contrainte maximale de traction corrigée selon les calculs de l'annexe 8 des recommandations de l'AFGC.

2.4.2 Calcul du coefficient K

Pour déterminer K , deux possibilités existent. La première : si les méthodes de mise en œuvre ont déjà été faites et validées sur un ouvrage similaire, alors K est connu de cette précédente expérience. La deuxième : K est déterminé selon la méthode décrite dans l'annexe 8 de l'AFGC (2002) et c'est cette seconde méthode qui est décrite ci-après.

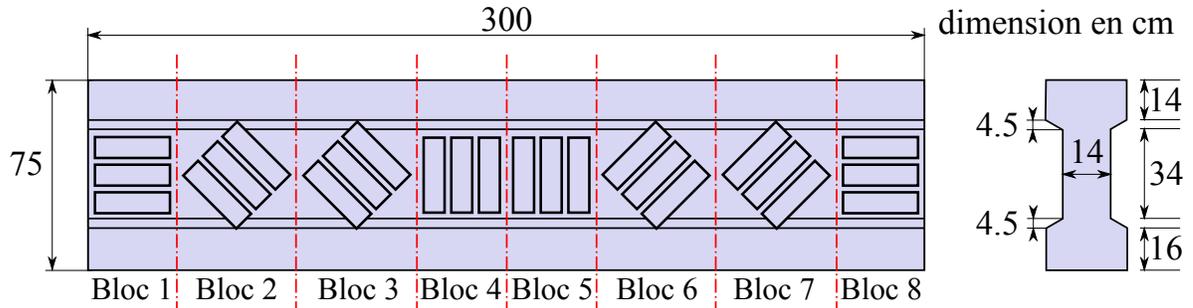


FIGURE 2.20 – Exemple de prélèvement d'éprouvettes pour déterminer K , (Behloul, 2006)

Les recommandations prévoient deux valeurs pour ce coefficient de sécurité : K_{local} pour les effets locaux et K_{global} pour l'ensemble des sollicitations en dehors des effets locaux.

Dans le cas d'une structure où aucune expérience n'est connue, K est calculé en sacrifiant un élément de structure, par exemple une poutre dont le dimensionnement est validé à *a posteriori*. Cette poutre s'appelle l'élément témoin. Pour calculer le coefficient, il faut suivre les étapes (1) à (5).

(1) L'élément témoin ainsi que de nombreuses éprouvettes sont coulés avec la même formulation du béton. La mise en œuvre et les dimensions de ces éprouvettes dépendent du type de structure qu'est l'élément témoin — plaque mince, épaisse, poutre ou coque. Par exemple, pour une poutre ou une plaque épaisse, ces éprouvettes « sont coulés de manière à limiter au maximum une orientation préférentielle des fibres. Après remplissage, ils sont vibrés si nécessaire. »

(2) Des prélèvements sont effectués sur l'élément témoin de la même dimension que les éprouvettes. « [Ces] prélèvements sont réalisés dans l'élément témoin suivant un plan de découpage défini en fonction de l'orientation des sollicitations principales. » Un exemple de prélèvement est donné dans le cas d'une structure de type poutre, voir figure 2.20.

(3) Le type d'essai effectué sur les éprouvettes et les prélèvements dépend également du type de structure de l'élément témoin — traction directe, flexion 3 ou flexion 4 points, voir section 2.2.4.3 —, ces protocoles sont précisés dans les recommandations. À l'issue des essais de flexion, « une analyse inverse conduit à une loi de traction contrainte – ouverture de fissure. La loi issue de cet essai est corrigée par le coefficient γ pour intégrer les effets d'échelles et de parois, liés à la géométrie et au mode de confection

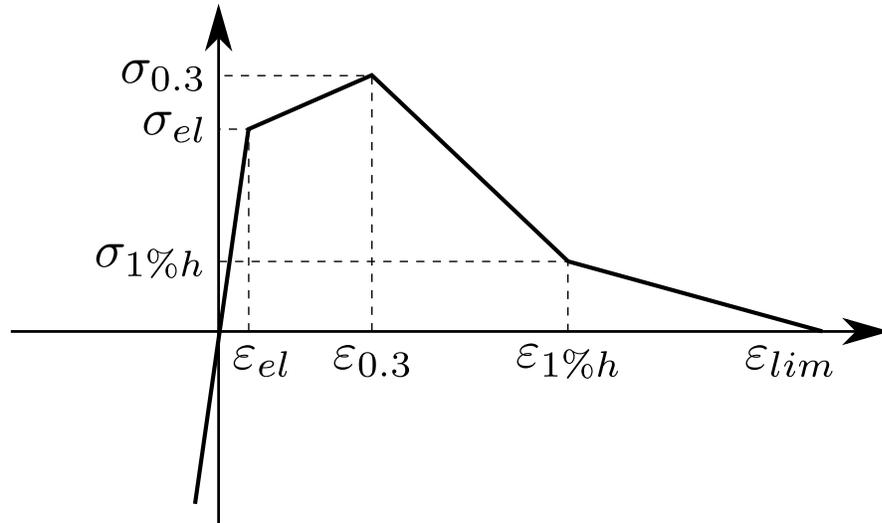


FIGURE 2.21 – Loi de comportement représentative du BFUP selon (AFGC, 2002)

des [prélèvements]. » Si l'essai est mesuré en contrainte et ouverture de fissure, l'AFGC donne également les équations pour convertir la loi en contrainte et déformation.

(4) À l'issue des essais sur les éprouvettes, une loi moyenne du comportement du BFUP est obtenue, il s'agit de la loi dite « intrinsèque ». Pour simplifier les calculs de conception, l'AFGC propose d'établir une nouvelle loi intrinsèque à partir des valeurs spécifiques tel qu'indiqué sur la figure 2.21. $\varepsilon_{1\%}$ est la déformation pour une ouverture de fissure correspondant à 1% de la hauteur de l'éprouvette et $\varepsilon_{0.3}$ est la déformation correspondant à une ouverture de fissure de 0.3 mm. À partir de cette loi, un calcul théorique est effectué pour obtenir la contrainte théorique (notée σ_{th}) qui n'est autre que le module de rupture de l'essai de flexion. À l'issue des essais sur tous les prélèvements, deux valeurs sont extraites : le module de rupture moyen (noté σ_{moy} et le module de rupture le plus faible (noté σ_{min}).

(5) Pour prendre en compte l'orientation des fibres, l'AFGC propose d'appliquer le coefficient correcteur $K \geq 1$. K matérialise la dispersion de l'orientation des fibres à travers le rapport suivant :

$$\begin{aligned} K_{local} &= \frac{\sigma_{th}}{\sigma_{min}} \\ K_{global} &= \frac{\sigma_{th}}{\sigma_{moy}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Pour résumer, le concepteur doit diviser les valeurs caractéristiques suivantes : $\sigma_{1\%}$ et σ_{bt} , par γK . $\sigma_{1\%}$ est la valeur de la contrainte dans l'éprouvette pour $\varepsilon_{1\%}$ et σ_{bt} est

la valeur de la contrainte pour une ouverture de fissure de 0.3 mm, c'est en général, la contrainte maximale. $K = 1$ si l'orientation des fibres est isotrope. $K > 1$ signifie que les fibres ne sont pas orientées dans la direction de la charge : il faut donc pénaliser la loi intrinsèque. Il est possible de choisir $K < 1$, alors l'effet bénéfique de l'orientation des fibres est pris en considération. Cependant, le concepteur doit prendre soin de justifier la résistance de la structure dans les autres directions dans lesquelles les valeurs de K sont obligatoirement supérieures à 1. Considérer l'orientation des fibres comme ayant un effet bénéfique est une notion assez récente ([Resplendino, 2009a](#)).

2.5 Conclusion du chapitre

Le comportement des BFUP et leurs caractéristiques mécaniques sont fortement dépendants de l'orientation des fibres vis-à-vis de la direction des sollicitations. Il devient donc primordial de prévoir ou connaître, l'orientation des fibres dans l'élément coulé, pour connaître la résistance réelle de la structure : si les fibres peuvent améliorer la ténacité, elles peuvent également être un défaut et nuire aux performances du matériau. Cette orientation peut être connue empiriquement via le coefficient d'orientation, théoriquement via la mécanique du fluide et la théorie de Jeffery, ou expérimentalement via l'électromagnétisme par exemple.

Concernant la conception, l'AFGC propose des solutions intéressantes, mais deux critiques majeures sont retenues. [Bayard \(2003\)](#) observe que la déformation et la contrainte de limite élastique, la déformation et la contrainte maximale et l'énergie de dissipation sont fonction de l'orientation des fibres. Cependant, dans les recommandations de l'AFGC, le coefficient K , n'agit que sur les contraintes $\sigma_{1\%}$ et σ_{bt} , ce qui ne modifie ni les déformations élastiques, ni les déformations maximales, ni la contrainte limite élastique. La deuxième remarque concerne la détermination de sa valeur : il faut se référer aux précédentes réalisations ou bien « sacrifier » une poutre fabriquée. De plus pour connaître K , les recommandations demandent d'effectuer six essais, dans chacune des directions principales des sollicitations de la structure. Si la méthode est facile à mettre en œuvre, son coût est élevé et elle ne permet pas de prendre en compte l'orientation des fibres de manière pertinente pour la conception de structure en BFUP.

D'après la revue de littérature, connaître l'orientation des fibres n'est pas difficile, mais indispensable. Et l'étape suivante est donc de repérer une loi de comportement, fonction de cette orientation, capable de reproduire les expériences de Bayard, Bernier ou d'autres chercheurs ; tel est l'objectif de ce mémoire.

Chapitre 3

Vue d'ensemble des modèles non linéaires

Dans ce chapitre, les hypothèses de modélisation sont tout d'abord exposées, suivies des principaux modèles de comportement des matériaux, dans le but d'identifier ceux qui modélisent le mieux le comportement du BFUP. Les modèles plastiques sont évoqués en premier, suivis des modèles d'endommagement pour finir sur les modèles les plus adaptés à décrire le comportement des BFUP.

3.1 Hypothèses de modélisation

3.1.1 Mécanique du milieu continu

Dans le cadre de cette maîtrise, le BFUP est décrit comme un matériau composé de trois phases : les fibres métalliques, la matrice cimentaire et les fissures en forme d'ellipsoïde de révolution aplati. Soit Ω le volume élémentaire représentatif de diamètre D (ou en anglais, representative element volume dit « rev »), il est choisi tel que :

- $d/D \ll 1$ où d représente l'ordre de grandeur des fibres et des fissures,
- $D/L \ll 1$ où L est l'ordre de grandeur de la structure analysée.

Dans ces conditions les hypothèses de la mécanique du milieu continu s'appliquent dans Ω (voir figure 3.1).

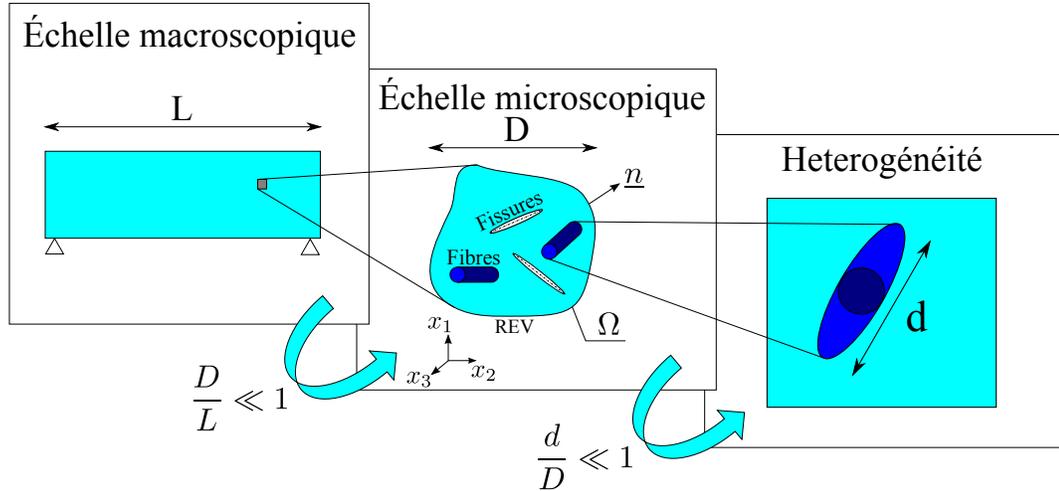


FIGURE 3.1 – Approche multiéchelle des BFUP

En conséquence, Ω est un solide infiniment petit, de surface $\partial\Omega$ et l'équation mathématique qui représente l'équilibre de ce solide en translation est donnée par :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{t} ds + \int_{\Omega} (\underline{f} - \rho\underline{\gamma}) dv = 0, \quad (3.1)$$

où $\underline{\gamma}$ représente l'accélération, \underline{t} les forces surfaciques et \underline{f} les forces volumétriques. Avec l'application du théorème de la divergence qui stipule que :

$$\int_{\Omega} \text{div} \underline{a} dv = \int_{\partial\Omega} \underline{a} \cdot \underline{n} ds \quad (3.2)$$

et la définition du tenseur de Cauchy : $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$, l'équation devient :

$$\int_{\Omega} (\text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} - \rho\underline{\gamma}) dv = 0. \quad (3.3)$$

Étant donné que l'équation (3.3) est valable pour tout point matériel de Ω , les équations d'équilibre locales sont définies par :

$$\forall M \in \Omega \begin{cases} \text{div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho\underline{\gamma} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{t}. \end{cases} \quad (3.4)$$

3.1.2 Déplacements infinitésimaux

Dans ce document, les modèles présentés sont développés dans le cadre des petites déformations. Soient X les coordonnées d'un point matériel et x les coordonnées du même point après déformation, alors le vecteur déplacement fonction des coordonnées

initiales s'écrit :

$$\xi = X - x \quad (3.5)$$

et respecte la relation suivante :

$$\forall X \quad \|\text{Grad } \xi\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \|\underline{\underline{E}}\| \ll 1, \quad (3.6)$$

où $\underline{\underline{E}}$ est ici le tenseur de déformation de Green-Lagrange.

3.1.3 Invariants et coordonnées de Haigh-Westergaard

En général, les modèles de plastification sont écrits en fonction des invariants du tenseur des contraintes :

$$\begin{cases} I_1 = \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 3\sigma_{oct} \\ I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}))^2 - \text{trace}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \right] = \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_{III}\sigma_I \\ I_3 = \det(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Mais tout tenseur de 2^e ordre peut être décomposé en un tenseur sphérique plus un tenseur déviateur :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{s}} + \frac{I_1}{3}\underline{\underline{1}}, \quad (3.8)$$

où les invariants du tenseur déviateur sont :

$$\begin{cases} J_1 = 0 \\ J_2 = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 \right] = \frac{3}{2}\tau_{oct}^2 \\ J_3 = (\sigma_I - \frac{1}{3}I_1)(\sigma_{II} - \frac{1}{3}I_1)(\sigma_{III} - \frac{1}{3}I_1). \end{cases} \quad (3.9)$$

Dans la théorie de la plasticité, les coordonnées de Haigh-Westergaard sont également souvent utilisées :

$$\begin{cases} \xi = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \\ \rho = \sqrt{2J_2} \\ \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}. \end{cases} \quad (3.10)$$

où θ est l'angle de Lode ([Chen et al., 2007](#)).

3.2 Généralités sur les modèles non linéaires macroscopiques

Le comportement des matériaux de construction est mathématiquement décrit par une loi contrainte-déformation ($\sigma - \varepsilon$). La littérature regorge de différentes lois pour modéliser ces comportements. La plupart d'entre elles reproduisent le comportement macroscopique du matériau via la relation entre les déformations et les contraintes, pour différentes combinaisons de chargement, tout en négligeant les mécanismes microscopiques. La mise en équation de la loi est, en général, réalisée à partir d'une fonction de chargement/déchargement (notée f), fonction de constantes de matériau et de l'état des contraintes ou des déformations. En règle générale, cette loi est définie de telle sorte que :

- si $f < 0$, le comportement est élastique,
- si $f = 0$, le comportement est non-élastique.

Dans la section 2.2.3, trois comportements distincts sont identifiés pour le BFUP : élastique linéaire, durcissant et adoucissant. Il s'agit maintenant de déterminer quelle loi mathématique est la plus apte à décrire ces trois comportements.

3.2.1 Modèles basés sur la théorie de la plasticité

La plastification est un déplacement irréversible des dislocations — défauts dans la structure du réseau cristallin —, qui crée donc une déformation permanente (notée ε^p), observable après déchargement des efforts (voir figure 1.4a). Dans la théorie de la plasticité, cette propagation est prise en compte une fois que le matériau atteint la limite de son domaine élastique, autrement dit quand le critère de plasticité est atteint ($f = 0$). Dès lors, une loi supplémentaire gouverne la direction de l'écoulement plastique : c'est la loi de normalité ; et une loi complémentaire, la loi d'écrouissage, gouverne l'évolution de la surface de chargement — surface intermédiaire qui délimite le domaine élastique.

Le critère de plasticité est donc le point de départ : c'est son expression mathématique qui forme la surface de limite élastique qui évolue en fonction des lois de normalité et d'écrouissage. Il existe plusieurs critères de plasticité dont les principaux sont cités ci-dessous. Étant donné que le BFUP possède un comportement ductile, c'est par le critère de Tresca que la revue des modèles commence. Sauf indication contraire, les expressions mathématiques des critères exposés dans ce mémoire sont issues de [Chen et al. \(2007\)](#) et de [Jirásek et Bažant \(2002\)](#).

3.2.1.1 Tresca

La plastification est un phénomène de glissement des plans atomiques, elle se fait par cisaillement. Tresca propose donc que la fin du domaine élastique se produise dès que le cisaillement atteint la valeur critique (notée k). L'équation (3.11) traduit ce critère :

$$\begin{aligned} f &= \max \left(\frac{1}{2} |\sigma_I - \sigma_{II}|, \frac{1}{2} |\sigma_{II} - \sigma_{III}|, \frac{1}{2} |\sigma_{III} - \sigma_I| \right) - k \\ &= \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) - k \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

où la constante de matériau k peut être identifiée par un essai en traction simple, pour lequel :

$$k = \frac{\sigma_0}{2}, \quad (3.12)$$

où σ_0 est la limite élastique en traction du matériau. La surface enveloppe générée par le critère de Tresca est représenté sur la figure 3.2 : il s'agit d'un prisme hexagonal régulier d'axe principal l'axe hydrostatique — la trisectrice d'équations $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$.

3.2.1.2 Von-Mises

Le critère de Von-Mises s'appuie sur le cisaillement octaédrale (noté τ_{oct}), ou l'énergie de déformation en distorsion. Ce critère permet de prendre en compte, non seulement les valeurs limites des contraintes principales (Tresca), mais aussi toutes les contraintes intermédiaires. C'est pourquoi la surface limite de Tresca est inscrite dans celui de Von-Mises dont une représentation est donnée, figure 3.2. L'équation correspondant au critère de Von-Mises est donnée par l'équation (3.13).

$$\begin{aligned} f &= (\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 6\tau_{oct}^2 \\ &= J_2 - k^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}.$$

Les critères de Tresca et Von-Mises sont indépendants de la pression hydrostatique, à ce titre, dans de nombreux travaux, les auteurs montrent qu'ils sont capables de modéliser le comportement des métaux ductiles. Cependant, le comportement des matériaux non métalliques montre une dépendance de la pression hydrostatique, c'est pourquoi les critères ci-dessous sont plus adaptés à la modélisation du béton.

3.2.1.3 Rankine

Le critère de Rankine est basé sur la limite de résistance en traction (notée : σ_0), donc sans glissement des plans atomiques par cisaillement. Ce critère est donc adapté pour rendre compte d'une rupture en traction d'un matériau fragile. L'équation (3.14) est l'expression du critère de Rankine et la figure 3.3, sa représentation graphique.

$$\begin{aligned} f &= \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|) - \sigma_0 \\ &= 2\sqrt{3J_2} \cos \theta + I_1 - 3\sigma_0, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.1.4 Mohr-Coulomb

Le critère de Mohr-Coulomb est une généralisation du critère de Tresca, qui dépend de la pression hydrostatique. Les deux critères sont basés sur l'hypothèse que la contrainte de cisaillement maximale est la seule mesure décisive d'une rupture (Chen et al., 2007). La figure 3.4 est la représentation graphique de ce critère et l'expression mathématique de ce critère est donnée par l'équation (3.15) :

$$\begin{aligned} f &= (1 + \sin \phi)\sigma_i - (1 - \sin \phi)\sigma_j - 2c \cos \phi \\ &= \frac{1}{3}I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \sin \phi - c \cos \phi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

où c est la résistance au cisaillement du matériau à contrainte normale nulle, il représente la cohésion du matériau ; et ϕ est l'angle de frottement interne. La surface limite de rupture est l'ensemble des six équations générées par les couples (i, j) , $i \neq j$ où i et $j \in [I, II, III]$, et $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$. Si $\phi = 0^\circ$, alors le critère est celui de Tresca ; et quand $\phi \rightarrow 90^\circ$, le critère tend vers celui de Rankine.

3.2.1.5 Drucker-Prager

Le critère de Drucker-Prager est une généralisation de celui de Von-Mises. Son expression est donnée à l'équation (3.16). Sa représentation est une surface continue — il s'agit d'un cône qui peut être circonscrit ou inscrit dans la surface de rupture de Mohr-Coulomb. Cette possibilité permet d'éliminer des complications numériques liées aux singularités de la surface de Mohr-Coulomb. Si $\alpha = 0$, alors le critère devient celui de Von-Mises ; où α est un paramètre matériau. En modifiant la valeur de α , Mohr-

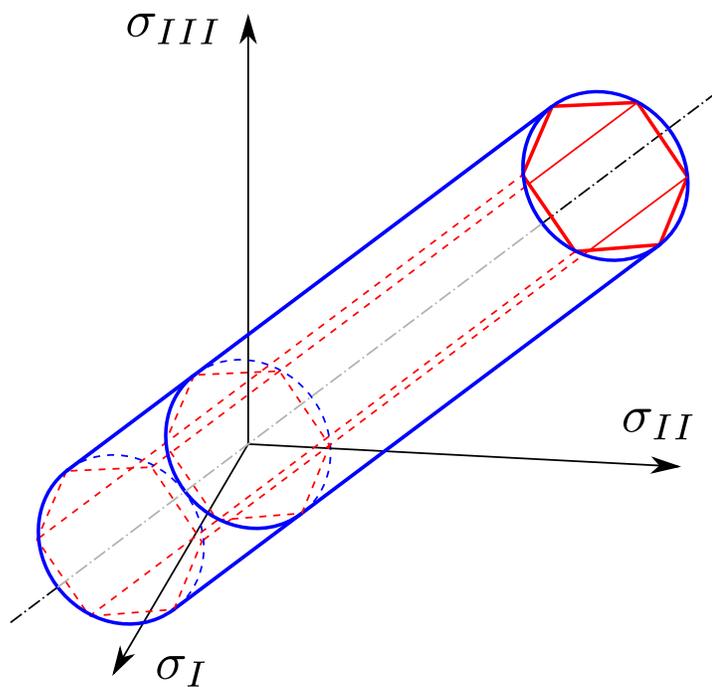


FIGURE 3.2 – Surface limite de Tresca (rouge) et Von-Mises (bleu)

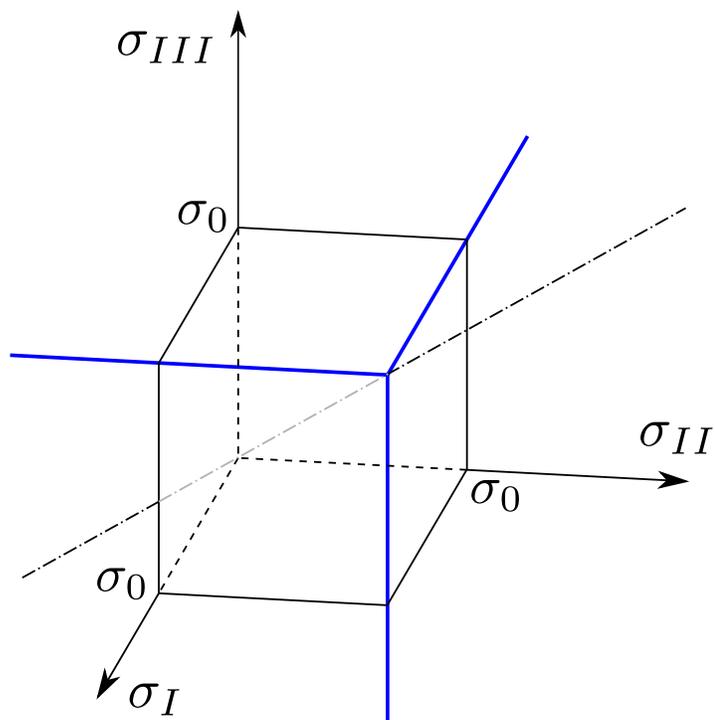


FIGURE 3.3 – Surface limite de Rankine

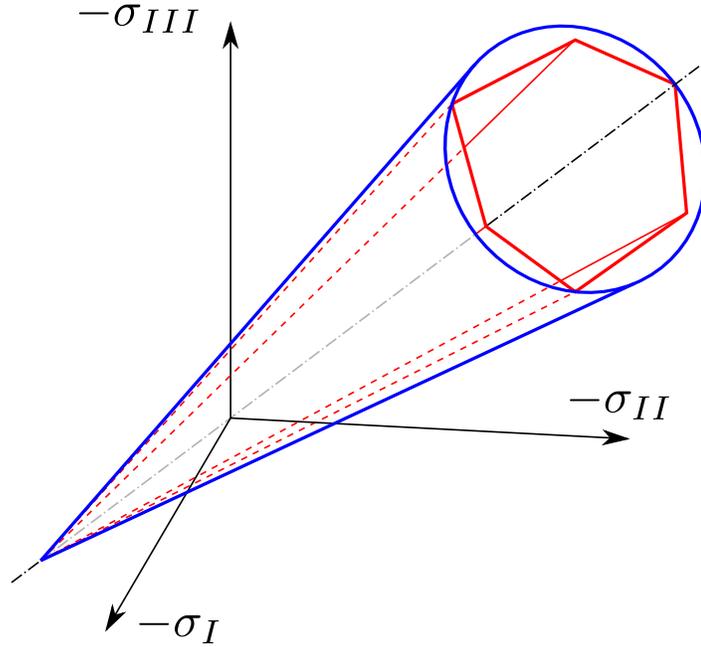


FIGURE 3.4 – Surface limite de Mohr-Coulomb (rouge) et de Drucker-Prager (bleu)

Coulomb peut être approximé par Drucker-Prager.

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k. \quad (3.16)$$

Pour modéliser le comportement du béton, le critère de Drucker-Prager ne suffit pas. S'il capture assez bien les valeurs expérimentales d'un essai de compression biaxiale, le critère n'est pas valable pour la traction (voir figure 3.14). Il est possible de contourner cette difficulté en utilisant deux surfaces de Drucker-Prager, une pour la traction et une pour la compression : il s'agit alors d'un critère à plusieurs surfaces.

3.2.1.6 De Borst

Le critère de De Borst, est un modèle qui regroupe plusieurs surfaces limites : Rankine pour la rupture en traction et Drucker-Prager pour la rupture en compression. Le modèle est donc gouverné par les équations :

$$\begin{cases} f_1 &= \sigma_I - q_1 \\ f_2 &= \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \beta q_2, \end{cases} \quad (3.17)$$

où α est le coefficient de friction interne, q_1 et q_2 sont respectivement les limites élastiques en traction et compression du matériau et β une constante introduite pour donner une dimension physique à la variable q_2 .

Si l'utilisation de plusieurs surfaces de rupture est pertinente pour le béton (figure 3.15), elles présentent des singularités géométriques et donc numériques aux jonctions — singularités qu'il est préférable d'éviter.

3.2.1.7 Willam-Warnke

Dans le critère de Willam-Warnke à cinq paramètres, la contrainte et le cisaillement octaédrale ($\tau_{oct} - \sigma_{oct}$) sont reliés par une fonction parabolique et dépendent de l'angle de Lode : caractéristique souvent observée expérimentalement. Ce critère reproduit donc les surfaces de rupture triaxiale du béton et donne une bonne estimation des valeurs expérimentales.

$$f = c_1 I_1 + c_2 r(\theta) \sqrt{J_2} + c_3 J_2 - 1 \quad (3.18)$$

où c_1 , c_2 et c_3 sont des paramètres matériaux et θ est l'angle de Lode défini à l'équation (3.10). Le critère de Willam-Warnke s'écrit avec :

$$r(\theta) = \frac{4(1 - e^2) \cos^2 \theta (2e - 1)^2}{2(1 - e^2) \cos \theta + (2e - 1) \sqrt{4(1 - e^2) \cos^2 \theta + 5e^2 - 4e}} \quad (3.19)$$

où $e \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $e = \rho_t / \rho_c$. Les cinq paramètres sont identifiés par des expériences de traction uniaxiale, de compression uni et biaxiale, etc. Ces paramètres apparaissent dans l'expression des contraintes de traction et de compression (notées respectivement ρ_t et ρ_c), isolés à partir de l'équation (3.20) :

$$\begin{cases} \frac{1}{3} I_1 = a_0 + a_1 \rho_c + a_2 \rho_c^2 \\ \frac{1}{3} I_1 = b_0 + b_1 \rho_t + b_2 \rho_t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_c = -\frac{1}{2b_2} \left[b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2(b_0 - \frac{I_1}{3})} \right] \\ \rho_t = -\frac{1}{2a_2} \left[a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2(a_0 - \frac{I_1}{3})} \right] \end{cases} \quad (3.20)$$

où $a_0 = b_0$ pour assurer la continuité de la surface de rupture. Ce critère de rupture est convexe et lisse en tout point, ce qui le rend pertinent et son implantation facile dans un code de calcul (voir figure 3.5).

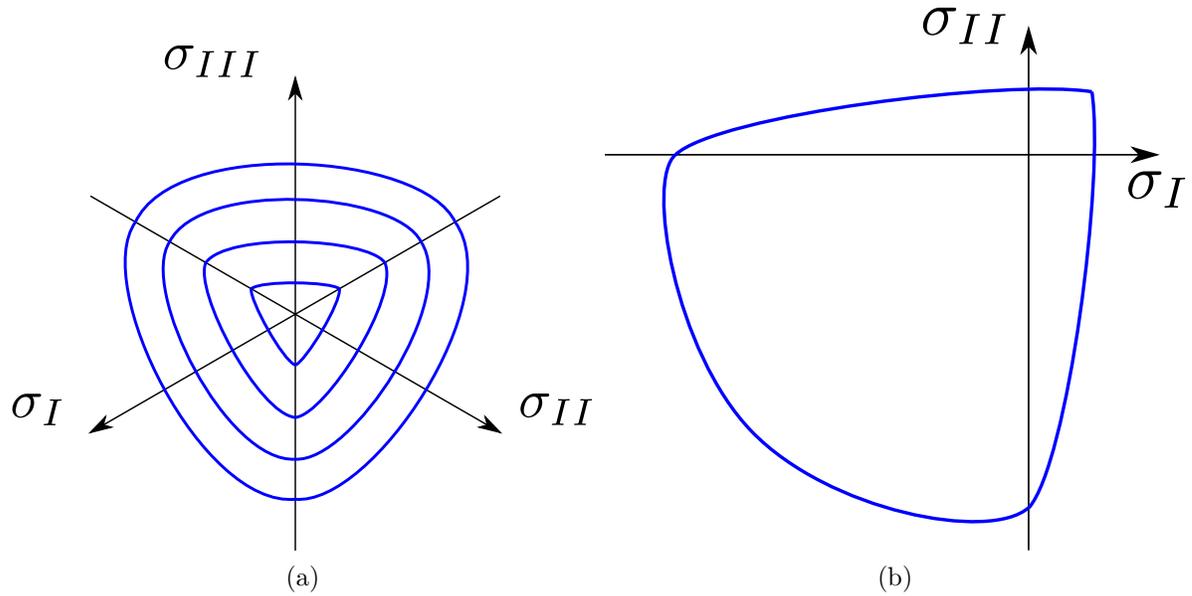


FIGURE 3.5 – Surface limite de Willam-Warnke : (a) dans le plan déviateur ; (b) dans le plan des contraintes biaxiales

3.2.1.8 Lubliner

Le modèle de [Lubliner et al. \(1989\)](#) est un modèle purement plastique bien qu'il admette une dégradation de la rigidité. C'est ce modèle qui est actuellement implanté dans le logiciel Abaqus sous le nom de « Concrete Damaged Plasticity » dont l'équation est donnée par (3.21) :

$$f = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\alpha I_1 + \sqrt{3J_2} + \beta \langle \sigma_{\max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{\max} \rangle \right) - \sigma_{c0} \quad (3.21)$$

où les crochets de McAuley signifient que $\langle x \rangle = \max(0, x)$, α , β , γ sont des constantes adimensionnelles, σ_{\max} la contrainte maximale effective et σ_{c0} la limite élastique de compression uniaxiale. D'après [Lubliner et al. \(1989\)](#), le modèle peut capturer presque tous les comportements de matériau.

3.2.2 Modèles d'endommagement

Si l'orientation des fibres est convenable, alors les BFUP atteindront de grandes déformations. Il est donc *a priori* pertinent de retenir un modèle de comportement plastique, mais les BFUP sont des matériaux à matrice cimentaire et cette matrice est fragile. Il n'y a pas de glissement des plans atomiques, mais plutôt une rupture

des liens entre les atomes, c'est la propagation irréversible des dislocations. Lors d'un déchargement, les fissures se referment et alors, à l'échelle macroscopique, il n'y a pas de déformation permanente. Cette différence fondamentale entre les modèles de plasticité et les modèles d'endommagement est représentée figure 1.4. Il devient donc pertinent de s'intéresser aux modèles d'endommagement.

3.2.2.1 Endommagement et comportement fragile

Le comportement des liens entre les atomes d'une matrice cimentaire est schématisé à la figure 3.6. Il s'agit d'un comportement élasto-fragile : le lien entre les atomes existe ou n'existe pas. En dessous d'une résistance f_t , la réponse du modèle est élastique ; mais dès que cette résistance est atteinte, le lien est rompu et la contrainte chute brutalement à zéro, dissipant une énergie $-\llbracket\psi\rrbracket$. Dans le volume élémentaire représentatif du matériau, la résistance des liens atomiques est variable et le champ de contrainte généralement différent en tout point. Ainsi, à l'échelle macroscopique, le mécanisme de rupture est une série de comportements élasto-fragile, tel que représenté figure à la 3.7. En cas de déchargement, le modèle ne présente pas de déformation permanente, mais le module d'élasticité diminue au fur et à mesure que les liens se rompent et que la fissure se propage. Cette perte de rigidité est exprimée par l'intermédiaire d'une variable d'état, appelée paramètre d'endommagement, notée ω , dont la valeur est comprise entre 0 et 1. Elle est définie par rapport à la rigidité initiale du matériau :

$$\omega = 1 - \frac{E_i}{E_0}, \quad (3.22)$$

où E_i est un module d'élasticité intermédiaire et E_0 le module d'élasticité initiale. Lorsque le matériau n'est pas endommagé $\omega = 0$; et $\omega = 1$ s'il l'est entièrement.

3.2.2.2 Formulation thermodynamique

La thermodynamique est la science qui étudie et décrit le comportement de la matière ou des systèmes, lors d'échanges d'énergies entre le système étudié et son milieu extérieur. Elle repose sur deux notions de base, l'énergie interne (notée U) et l'entropie (notée S) qui satisfont les deux principes suivants. Ce petit rappel permet de se familiariser avec les notations utilisées dans ce mémoire.

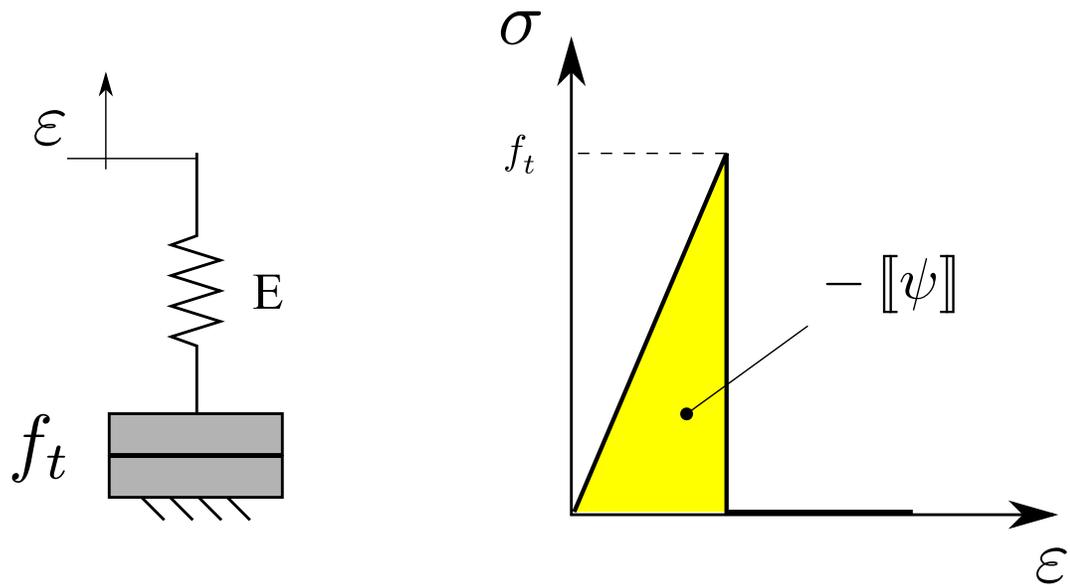


FIGURE 3.6 – Schéma de comportement d'un lien atomique, (Ulm'slecture notes, MIT, spring 2011)

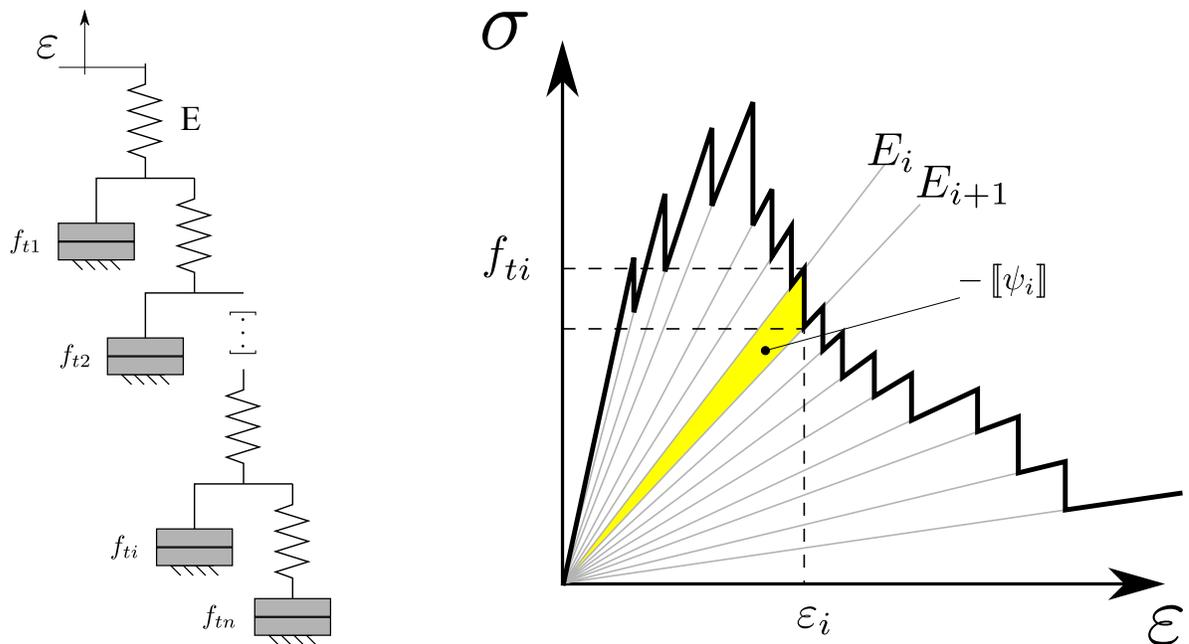


FIGURE 3.7 – Schématisation du modèle d'endommagement, (Ulm'slecture notes, MIT, spring 2011)

Premier principe C'est la conservation de l'énergie, mathématiquement définie par :

$$dU + dE_c = \delta W + \delta Q, \quad (3.23)$$

avec

$$\begin{cases} \delta W = \delta W_e + \delta W_f + \delta W_i \\ \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_f, \end{cases} \quad (3.24)$$

où δW et δQ représentent respectivement les travaux et les transferts thermiques ; δW_e est le travail externe, δW_f le travail des forces de frottements et δW_i le travail indiqué. Le travail indiqué correspond au travail des forces de pression intérieures au système, sur des parties mobiles, comme par exemples : les aubages dans les turbines ou dans les compresseurs rotatifs, alors qu'en chimie, il s'agit du travail électrique. δQ_e est la chaleur échangée avec l'extérieur et δQ_f la chaleur dissipée par frottement — elle représente également toutes les pertes énergétiques et est parfois notée $d\mathcal{D}$. Il faut noter que $Q_f + W_f = 0$.

Deuxième principe C'est l'évolution du système, mesurée par une variable d'état appelé entropie. Si le système tend vers son équilibre alors l'entropie ne peut qu'augmenter alors que si le système est en équilibre, l'entropie atteint son maximum.

$$dS = \underbrace{\frac{\delta Q_e}{T}}_{dS_e} + \underbrace{\frac{\delta Q_f}{T}}_{dS_c \geq 0}, \quad (3.25)$$

où dS_e et dS_c sont respectivement l'entropie échangée et l'entropie créée.

Énergie libre L'énergie libre, ou énergie de Helmholtz (notée ψ), est une fonction d'état extensive dont la variation permet d'obtenir le travail utile susceptible d'être fourni par un système fermé à température constante ; il est donné par :

$$\psi = U - TS \Rightarrow d\psi = dU - T dS - S dT. \quad (3.26)$$

L'objectif est de déterminer l'équation thermodynamique qui régit le mécanisme d'endommagement. Le système étudié est un élément de volume représentatif du matériau. Le premier principe de la thermodynamique donne, avec la définition de l'énergie libre :

$$d\psi + T dS + S dT + dE_c = \delta Q_e + \delta W_e + \delta W_i. \quad (3.27)$$

En réécrivant le deuxième principe, équation (3.25), sous la forme suivante :

$$T dS = \delta Q_e + \delta Q_f, \text{ avec } \delta Q_f \geq 0, \quad (3.28)$$

il est possible d'identifier le terme dissipatif, à savoir :

$$d\mathcal{D} = \delta Q_f = \varphi dt = \delta W_e + \delta W_i - d\psi - S dT - dE_c \geq 0. \quad (3.29)$$

L'équation (3.29) est également appelée : inégalité de Clausius-Duhem (Dareau et Rousselet, 1998).

En supposant que l'énergie libre soit fonction des déformations, de la température et de la surface de fissuration (notée ℓ),

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\varepsilon, T, \ell). \quad (3.30)$$

L'équation de Clausius-Duhem (3.29) devient :

$$d\mathcal{D} = \left(\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \right) d\varepsilon - \left(S - \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) dT - \frac{\partial \psi}{\partial \ell} d\ell - dE_c \quad (3.31)$$

Deux équations d'état sont extraites :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} \\ S = \frac{\partial \psi}{\partial T}. \end{cases} \quad (3.32)$$

Le taux de restitution d'énergie est identifié par :

$$\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \psi}{\partial \ell}. \quad (3.33)$$

Dans la théorie de la mécanique de la rupture, la dissipation d'énergie se fait par création de deux nouvelles surfaces, c'est la propagation de la fissure. L'énergie dissipée est donc

$$d\mathcal{D} = 2\gamma d\ell \stackrel{\text{def}}{=} G_f d\ell, \quad (3.34)$$

où γ est l'énergie de surface du matériau et G_f l'énergie spécifique de rupture. À partir de l'équation (3.31), le théorème de Griffith (1921) est alors démontré :

$$(\mathcal{G} - 2\gamma) d\ell = dE_c. \quad (3.35)$$

3.2.2.3 Modèle d'endommagement uniaxial

Lors de la création, ou la propagation d'une fissure, les hypothèses suivantes sont retenues :

- pas de chaleur échangée ($\delta Q_e = 0$),
- pas de travail interne ($\delta W_i = 0$),
- énergie cinétique négligeable ($dE_c = 0$),
- température constante ($dT = 0$).

L'équation de Clausius-Duhem est alors :

$$d\mathcal{D} = \varphi dt = \delta W_e - d\psi \geq 0, \quad (3.36)$$

où encore, si le système étudié est un système d'endommagement uniaxial :

$$d\mathcal{D} = \sigma d\varepsilon - d\psi \geq 0. \quad (3.37)$$

Avec la définition du paramètre d'endommagement à l'équation (3.22), l'énergie libre s'écrit :

$$\psi = (1 - \omega)\psi_0 = \frac{1}{2} E(1 - \omega)\varepsilon^2. \quad (3.38)$$

En insérant l'équation (3.38) dans (3.37), elle devient

$$d\mathcal{D} = \left(\sigma - \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} \right) d\varepsilon - \frac{\partial\psi}{\partial\omega} d\omega \geq 0. \quad (3.39)$$

L'équation (3.39) est vraie quelque soit l'état du matériau, elle est donc vraie lorsqu'il n'y a pas d'endommagement ($d\omega = 0$). Dans ce cas, il n'y a pas de dissipation d'énergie ($d\mathcal{D} = 0$) et l'équation d'état est décrite par :

$$\sigma = \frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon} = (1 - \omega)E\varepsilon. \quad (3.40)$$

Soit Γ la force thermodynamique, alors

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 (\geq 0). \quad (3.41)$$

En considérant l'équation d'état (3.40), l'énergie dissipée vaut :

$$d\mathcal{D} = \Gamma d\omega \geq 0. \quad (3.42)$$

Étant donné que $\Gamma \geq 0$, alors $d\omega \geq 0$, ce qui signifie que le paramètre d'endommagement est une variable d'état strictement croissante.

Dans la littérature, de nombreux modèles proposent de rendre le paramètre d'endommagement dépendant des déformations. Mais alors, en cas de déchargement, l'endommagement diminuera, ce qui est contraire à l'équation (3.42). Alors, l'évolution du paramètre est établie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \omega & = f(\kappa) \\ \kappa(t) & = \max_{\tau \leq t} [\varepsilon(\tau)]. \end{cases} \quad (3.43)$$

Physiquement, κ est un scalaire qui mesure le niveau de déformation le plus important jamais atteint par le matériau.

Quant au théorème de Griffith (1921), ce dernier devient :

$$(\mathcal{G} - G_f) d\ell = 0. \quad (3.44)$$

Deux cas sont alors identifiés : soit il y a propagation de la fissure, alors $d\ell > 0$ et $\mathcal{G} = G_f$, soit $\mathcal{G} - G_f < 0$ et $d\ell = 0$, il n'y a pas de propagation de la fissure.

3.2.2.4 Modèle d'endommagement isotrope

Tel que présenté dans la section 3.2, l'endommagement ne s'accroît que lorsque l'état du matériau atteint la limite du domaine élastique, ce qui est décrit par une fonction de chargement/déchargement. Pour un modèle d'endommagement isotrope, la fonction est généralement de la forme :

$$f(\varepsilon, \kappa) = \tilde{\varepsilon}(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \kappa, \quad (3.45)$$

où κ est une variable caractérisant le niveau de déformation maximale atteinte dans l'histoire du matériau et où $\tilde{\varepsilon}$ est la déformation équivalente : fonction scalaire qui mesure le niveau de déformation. La fonction f a le même rôle que le critère de plasticité : elle change la surface limite d'endommagement. Sur la figure 3.8, les surfaces limites de six déformations équivalentes, définies ci-dessous, sont représentées dans le repère des déformations principales et dans le repère des contraintes principales. Le choix le plus évident pour la définition de cette fonction, c'est de prendre la norme du tenseur des déformations :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad (3.46)$$

ou dans sa forme énergétique :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}{E}}, \quad (3.47)$$

où E est le module d'Young et \mathcal{C} le tenseur de rigidité du matériau, tenseur du 4^e ordre. Étant donné que les fissures apparaissent principalement quand le béton est en traction, il est pertinent de ne considérer que les déformations positives :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle}, \quad (3.48)$$

ou

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle : \mathcal{C} : \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle}{E}}, \quad (3.49)$$

où les crochets de McAuley signifient que $\langle x \rangle = \max(0, x)$. Les deux définitions suivantes s'apparentent au critère de Rankine d'une contrainte maximale :

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \max_{i=I,II,III} \langle \mathcal{C} : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle_i = \frac{1}{E} \max_{i=I,II,III} \langle \bar{\sigma}_i \rangle, \quad (3.50)$$

ou bien

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{E} \sqrt{\sum_{i=I}^{III} \langle \bar{\sigma}_i \rangle^2}, \quad (3.51)$$

où $\bar{\sigma}_i$ est la contrainte effective. L'avantage de tels modèles provient du fait que l'évaluation des contraintes est explicite. Dans ce contexte, la variable κ prend la valeur maximale de la déformation équivalente atteinte dans l'historique du chargement du matériau, voir équation (3.43).

3.2.2.5 Modèle de Mazars

Le comportement de bétons ordinaires est assez bien approximé par la loi ci-dessous :

$$\sigma = f_t \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) \quad (3.52)$$

où ε est la déformation dans l'axe de chargement, ε_0 la déformation lorsque la limite élastique f_t est atteinte et ε_f est un paramètre qui contrôle la pente de la courbe après que la limite élastique soit atteinte — cette limite peut être reliée à l'énergie de rupture du matériau. La fonction d'endommagement correspondante est obtenue à partir des équations (3.22) et (3.43) :

$$\omega = g(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{\kappa} \exp\left(-\frac{\kappa - \varepsilon_0}{\varepsilon_f}\right) & \text{si } \kappa \geq \varepsilon_0 \end{cases}. \quad (3.53)$$

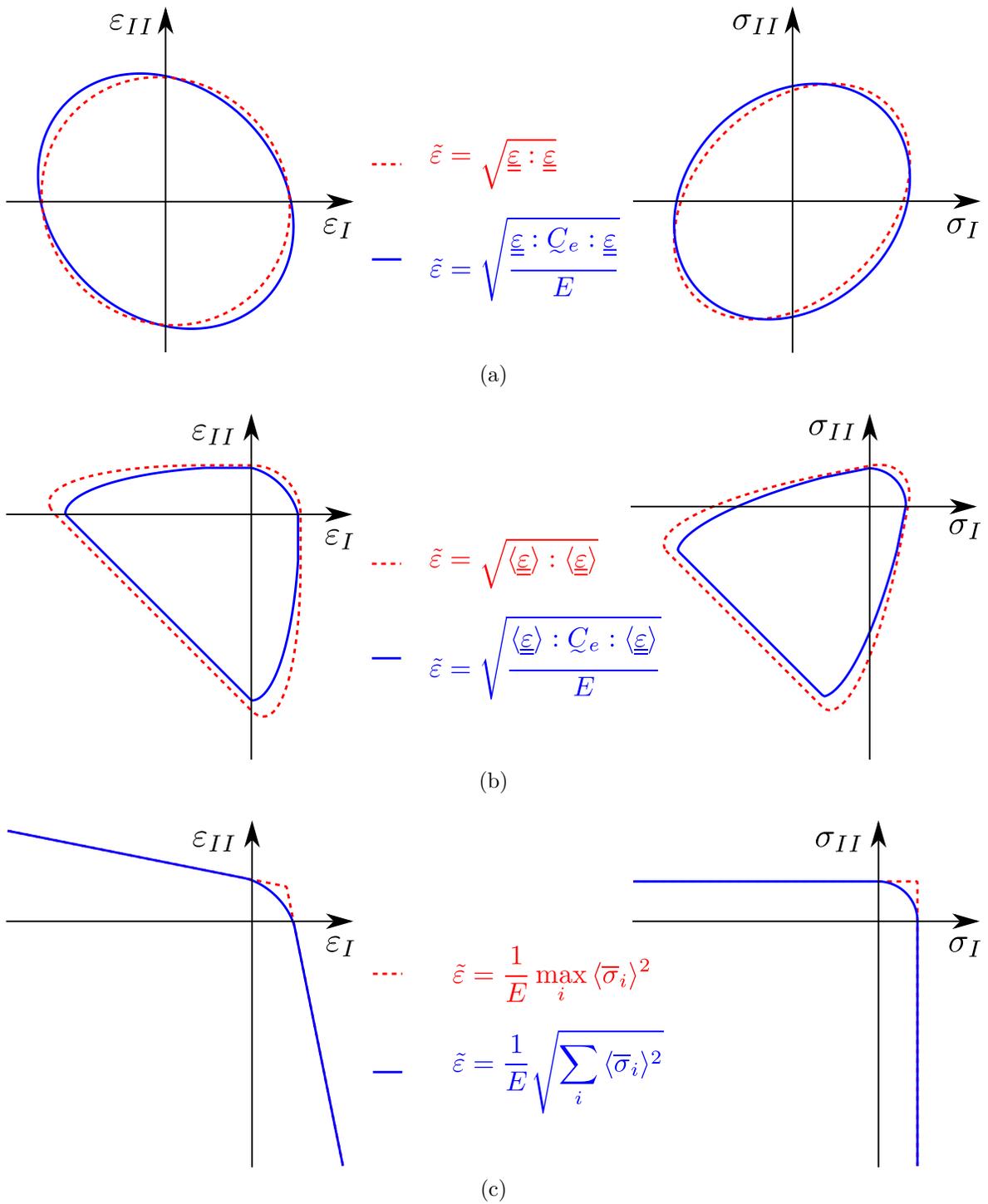


FIGURE 3.8 – Surfaces limites élastiques de différentes fonctions de déformation équivalente

Pour modéliser le comportement du béton ordinaire, Mazars (1986) propose de distinguer l'endommagement de traction de celui de compression avec les deux paramètres d'endommagement ω_t et ω_c respectivement, calculés à partir de la même déformation équivalente définie par l'équation (3.48) ou (3.49). De manière générale, l'endommagement du matériau est défini par :

$$\omega = \alpha_t \omega_t + \alpha_c \omega_c, \quad (3.54)$$

où les coefficients α_t et α_c sont définis par :

$$\alpha_t = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_{ti} \langle \varepsilon_i \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^\beta, \quad \alpha_c = \left(1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\varepsilon_{ti} \langle \varepsilon_i \rangle}{\tilde{\varepsilon}^2} \right)^\beta; \quad (3.55)$$

où ε_{ti} sont les déformations principales dues aux efforts de traction — $\varepsilon_t = \mathcal{S}_e : \langle \mathcal{C}_e : \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$, où \mathcal{C}_e est le tenseur de rigidité et $\mathcal{S}_e = \mathcal{C}_e^{-1}$ la souplesse. Le coefficient $\beta = 1.06$ permet de réduire la vitesse de progression de l'endommagement en cas de cisaillement. Enfin, l'évolution de l'endommagement est donnée par :

$$g_t(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ 1 - (1 - A_t) \frac{\varepsilon_0}{\kappa} - A_t \exp[-B_t(\kappa - \varepsilon_0)] & \text{si } \kappa > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3.56)$$

$$g_c(\kappa) = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa \leq \varepsilon_0 \\ 1 - (1 - A_c) \frac{\varepsilon_0}{\kappa} - A_c \exp[-B_c(\kappa - \varepsilon_0)] & \text{si } \kappa > \varepsilon_0 \end{cases} \quad (3.57)$$

où A_t , B_t , A_c et B_c sont des paramètres matériaux. Mazars ajoute une correction sur la déformation équivalente, via un multiplicateur donné par l'équation (3.58). Le modèle et sa correction sont tracés sur la figure 3.9,

$$\gamma = \sqrt{\sum_{i=I}^{III} (\sigma_i^-)^2} \left(\sum_{i=I}^{III} |\sigma_i^-| \right)^{-1}. \quad (3.58)$$

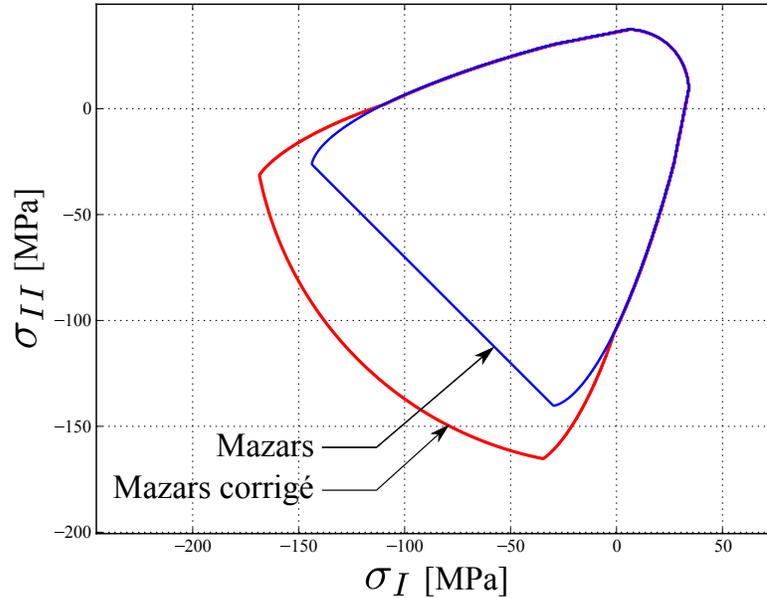


FIGURE 3.9 – Surface limite de rupture du modèle de Mazars

3.3 Modèles spécifiques pour les bétons renforcés de fibres courtes

3.3.1 Modèle micromécanique pour fibres uniformément orientées

Ce modèle est celui d'un regroupement des travaux de [Li et al. \(1991\)](#) et [Lin et Li \(1997\)](#). Il s'agit d'un modèle micromécanique pour modéliser le comportement postfissuration d'une matrice cimentaire renforcée de fibres courtes réparties de façon aléatoire. Ce modèle intègre le mécanisme d'arrachement des fibres inclinées d'un certain angle par rapport au plan de fissuration de la matrice. Il estime le nombre de fibres traversant la fissure et prend en compte l'effet de poulie, ou de levier, créée par la fibre en s'appuyant sur la matrice — et qui provoque souvent très localement, l'éclatement du béton. L'emplacement et l'orientation des fibres, par rapport aux fissures, sont uniformes. Le modèle reproduit de manière convaincante les courbes d'arrachement des fibres de béton à matrice cimentaire ordinaire. Le modèle est plus précisément décrit à la section [4.2.1](#) et à l'annexe [A](#).

Le modèle ne permet donc pas de prendre en compte une orientation préférentielle des fibres dans le matériau, car les fibres sont considérées orientées uniformément. Dans ce modèle, l'orientation des fibres vis-à-vis des directions des sollicitations est donc

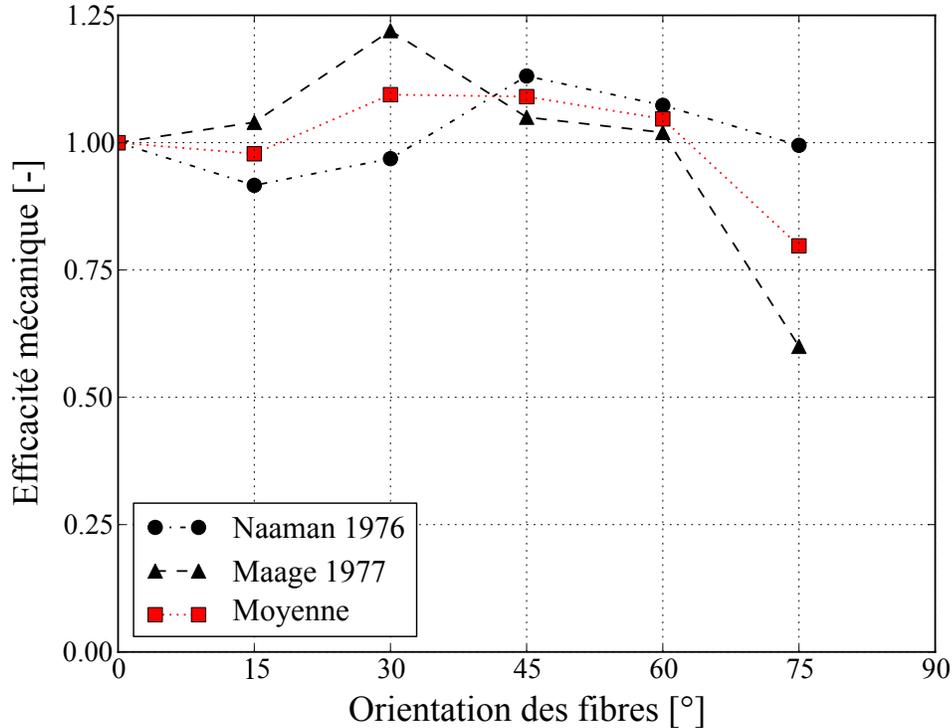


FIGURE 3.10 – Contraintes maximales pour différentes orientations, (Naaman et Shah, 1976; Maage, 1977)

ignorée.

3.3.2 Modèle de création de fissures discrètes

Wuest (2007) a développé un modèle capable de décrire le comportement du BFUP en traction dans le domaine élastique et durcissant. Le modèle est basé sur deux mécanismes distincts : l'extraction des fibres et la fissuration de la matrice. Concernant l'extraction des fibres, Wuest reprend les travaux effectués par Li et Lin ; alors que la fissuration est pris en compte par la présence de « fissures discrètes potentielles espacées de 0.02 mm sur toute la longueur de l'[éprouvette] ». Ces fissures potentielles ne sont activées que si la section du matériau contenant cette fissure atteint la résistance limite du matériau. C'est alors que la fissure potentielle devient une vraie fissure et s'ouvre selon la loi de comportement de l'extraction des fibres. L'influence de l'orientation est prise en compte en pondérant la résistance par un facteur fonction de l'orientation, noté $f(\alpha)$, qui représente l'efficacité d'une fibre. La loi $f(\alpha)$ est donnée par Naaman et Shah (1976) et Maage (1977) à partir de résultats d'essais d'arrachement de fibres lisses sous différents angles — voir figure 3.10. Une fois que la première fissure est créée, les fibres reprennent les efforts, alors le matériau se durcit et la contrainte de traction continue

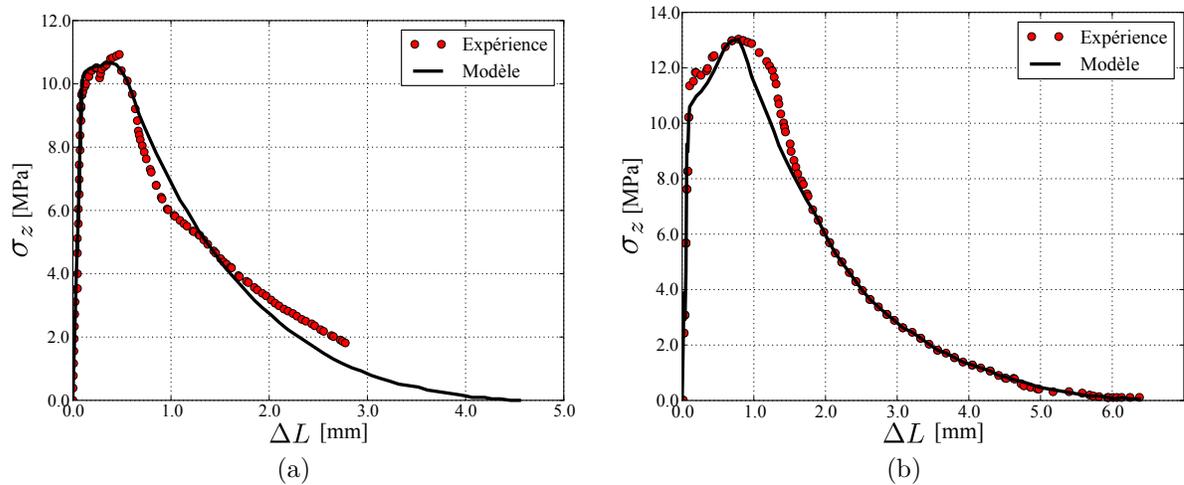


FIGURE 3.11 – Contraintes maximales pour différentes orientations, (Wuest, 2007)

d'augmenter. « Pour qu'une [nouvelle] fissure potentielle soit activée, il est nécessaire que la contrainte dans [une des sections de l'élément, contenant une fissure potentielle,] dépasse sa résistance à la fissuration et qu'elle soit située à une distance minimale de la plus proche fissure active », la loi d'espacement des fissures en question est définie par Wuest. Le processus de multifissuration se termine — *i.e.* il y a localisation des déformations — quand la résistance maximale du matériau est atteinte, alors seule une des sections fissurées présente un comportement adoucissant, les autres fissures ne se referment pas et les zones non fissurées se décharge élastiquement.

Wuest (2007) obtient les résultats présentés à la figure 3.11. D'après ses expériences, il conclut que le modèle permet de « prédire de manière précise la réponse globale des éléments et donc de prévoir leur comportement écrouissant » mais que le modèle « ne permet pas de prédire parfaitement le comportement adoucissant juste après le pic de contrainte ». Il explique ce dernier point par le fait que la géométrie de l'éprouvette n'est pas adaptée au domaine adoucissant. Étant donné que le modèle de Wuest est basé sur celui de Lin & Li, il ne prend pas non plus en compte l'orientation des fibres vis-à-vis des sollicitations. De plus, pour modéliser la fissuration, l'énergie spécifique de rupture n'est pas considérée : le modèle ne peut donc pas modéliser correctement le mécanisme de multifissuration.

3.3.3 Modèle à deux phases couplées par la micromécanique

Chuang et Ulm (2002) établissent un modèle constitué de deux phases distinctes : la matrice et les fibres. Le comportement de la matrice est élasto-fragile, il est identifié

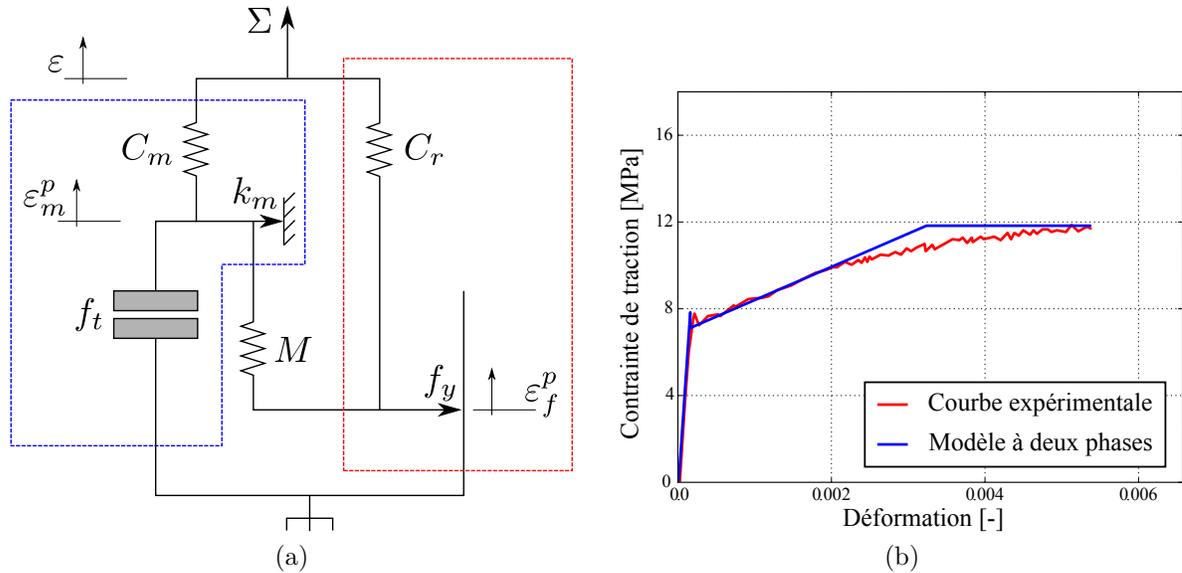


FIGURE 3.12 – Modèle à deux phases : (a) schéma représentatif 1D, (b) comparaison avec résultats expérimentaux (Chuang et Ulm, 2002)

dans le schéma de la figure 3.12a par un ressort, équivalent à la rigidité C_m en série avec un dispositif de frottement k_m représentant le palier de plastification et un dispositif fragile équivalent à une perte totale de rigidité quand la limite élastique f_t est atteinte. Le comportement des fibres est élasto-plastique, il est identifié dans le schéma par le dispositif de frottement, activé quand la limite élastique f_y est atteinte, en série avec le ressort équivalent à la rigidité C_f . Ces deux phénomènes qui agissent parallèlement sont couplés par un ressort de rigidité M , qui relie les déformations irréversibles de la matrice et des fibres. Six paramètres doivent donc être identifiés lors d'essais expérimentaux pour modéliser le comportement macroscopique du matériau. Le modèle est simple et pertinent, il capture le comportement élastique et adoucissant du matériau (voir figure 3.12b), mais comme il s'agit d'un modèle purement plastique, le modèle ne montre pas de comportement adoucissant et ne peut donc pas modéliser correctement le comportement d'une structure ductile. L'orientation des fibres n'est pas évoquée dans l'article : il s'agit d'un modèle isotrope.

3.3.4 Modèle plastique avec dégradation de la rigidité

Il s'agit en réalité du modèle de Lubliner intégré dans Abaqus sous le nom de « Concrete Damage Plasticity ». Il est utilisé par Chen et Graybeal (2010) sur une poutre en BFUP précontrainte soumise aux efforts de flexion quatre points. Un des résultats obtenus est présenté en figure 3.13. Le modèle coïncide parfaitement avec les valeurs expérimentales, mais le modèle est lui aussi isotrope et donc l'orientation

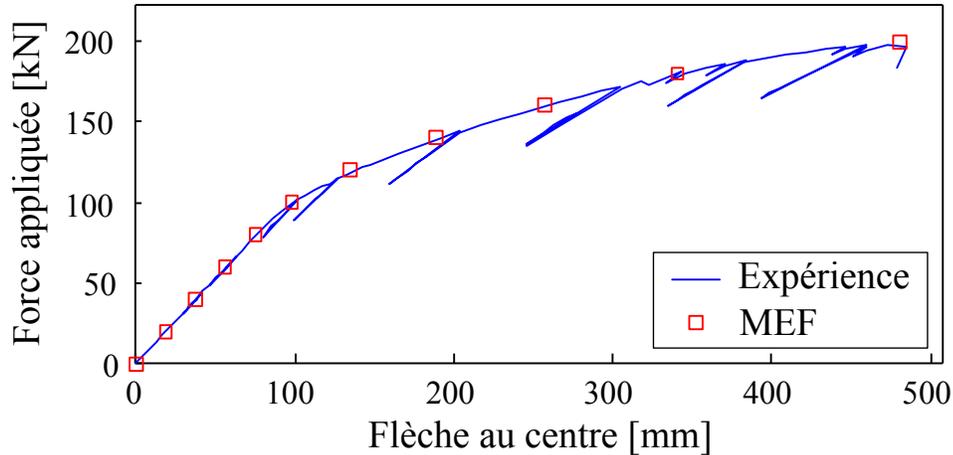


FIGURE 3.13 – Poutre I AASHTO précontrainte, essai de flexion quatre points et comparaison avec Abaqus-Lubliner, (Chen et Graybeal, 2010)

préférentielle des fibres n'est pas prise en compte.

3.4 Comparaison des modèles

Deux représentations graphiques des modèles de Drucker-Prager, Mohr-Coulomb, Mazars corrigé, De Borst, Willam-Warnke et Lubliner sont données figures 3.14 et 3.15 en comparaison avec des valeurs de compressions biaxiales (Curbach et Speck, 2008). Les modèles de Drucker-Prager, Willam-Warnke et Lubliner sont très pertinents pour modéliser la compression biaxiale. Mais la résistance à la compression dépend également de l'orientation des fibres (Zimmermann et Grohmann, 2008). En ce qui concerne la traction et la flexion, Chen et Graybeal (2010) montre que le modèle de Lubliner est également très performant. Mais, aucun de ces modèles n'est capable de prendre en compte l'orientation des fibres dans une structure puisqu'il s'agit de modèles isotropes. De plus, ces modèles sont issus de la théorie de la plasticité, ils ne modélisent donc pas correctement le béton qui est un matériau qui s'endommage plus qu'il ne se plastifie — à l'exception de Lubliner. Le modèle d'endommagement de Mazars, ne reproduit pas de manière très convaincante la compression biaxiale, sachant de plus qu'il fut nécessaire de donner un coefficient de Poisson de $\nu = 0.045$ au lieu de 0.18 pour s'approcher au mieux des valeurs expérimentales. Étant un modèle macroscopique il ne permet pas non plus de prendre en compte l'orientation des fibres.

Étant donnée les limites des modèles macroscopique, il est intéressant de se tourner vers les modèles micromécaniques et leur description mathématique du mécanisme d'extraction des fibres. Cependant, jusqu'à ce jour, les auteurs ont considéré que les fibres

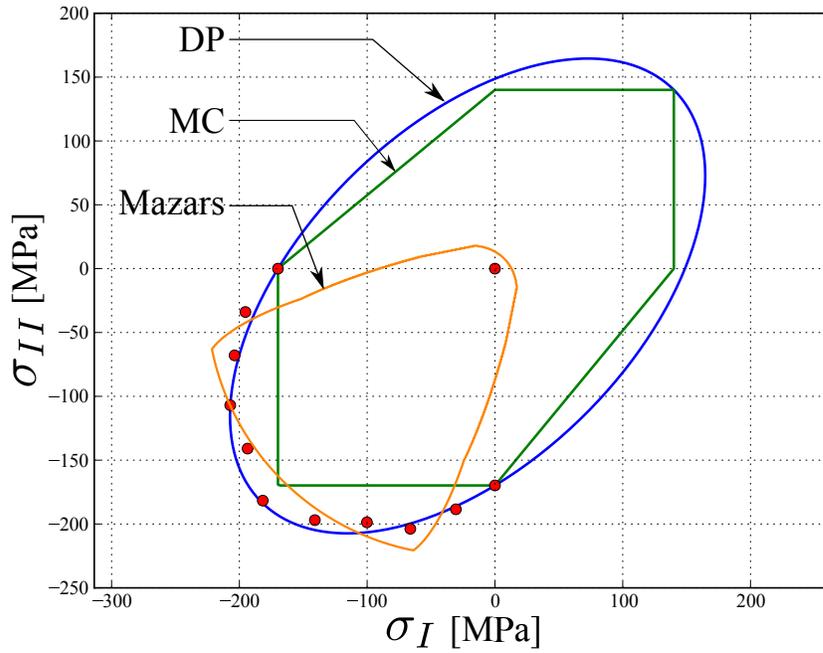


FIGURE 3.14 – Surface limite de Drucker-Prager (bleu), de Mohr-Coulomb (vert) et de Mazars corrigé (orange)

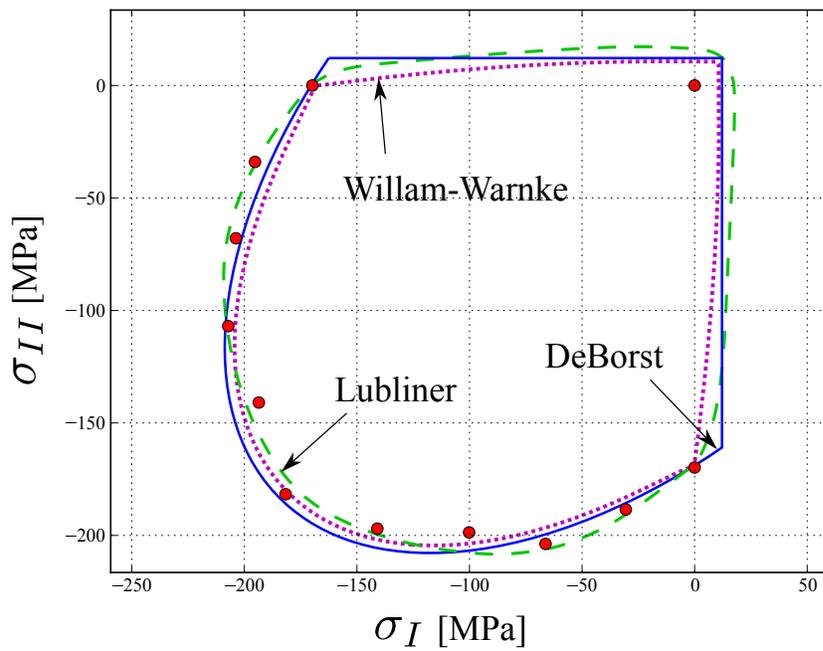


FIGURE 3.15 – Surface limite de De Borst (bleu), de Willam-Warnke (violet) et de Lubliner (vert)

étaient uniformément orientées dans toutes les directions, ce qui revient à considérer que le modèle est isotrope et que l'orientation des fibres est finalement ignorée.

Un défaut majeur est observé dans tous les modèles présentés : ces modèles sont basés sur des limites élastiques, limites plastiques, ou de surfaces de rupture. Ces modèles ont donc une contrainte ultime indépendante de la dimension de la structure, ce qui ne permet pas de modéliser l'effet d'échelle. De plus, l'énergie spécifique de rupture est totalement absente de ces modèles, alors qu'il s'agit d'une propriété indispensable à considérer lorsqu'un matériau fragile est modélisé, comme celui de la matrice cimentaire des BFUP. L'utilisation de la mécanique de la rupture fragile est donc pertinente et les autres avantages de cette théorie sont décrits à la section 1.2

3.5 Conclusion du chapitre

Le nombre de modèles sur le comportement des BFUP, fonction de l'orientation des fibres, est assez faible. Comme l'orientation des fibres dans le matériau donne à ce dernier un comportement anisotrope, c'est un modèle anisotrope qu'il faut développer. Étant donné que l'orientation des fibres et les directions principales de tractions sont différentes en tout point du matériau, une loi phénoménologie est totalement proscrite ; c'est pourquoi l'approche de la micromécanique semble le plus adaptée pour résoudre la problématique industrielle. Enfin pour modéliser le processus de fissuration, le modèle doit utiliser la théorie de la mécanique de la rupture fragile pour les raisons évoquées dans la section 1.2. Le modèle développé au chapitre 4 répond à ces impératifs.

Chapitre 4

Modèle d'endommagement micromécanique

Dans ce chapitre, un modèle d'endommagement micromécanique est établi en respectant les principes fondamentaux de la thermodynamique. Une homogénéisation de la matrice et de ses fissures est réalisée pour modéliser l'endommagement du matériau. L'effet des fibres est pris en compte en estimant le nombre de fibres qui interceptent la fissure et qui dissipent de l'énergie par frottement lors de leur extraction. Enfin, le comportement adoucissant du matériau est décrit ainsi que la correction énergétique nécessaire pour rendre le modèle indépendant du maillage.

4.1 Approche de la micromécanique de la rupture

Il faut tout d'abord rappeler que les hypothèses de modélisation retenues sont celles exprimées à la section 3.1 : c'est-à-dire celles qui découlent de la mécanique du milieu continu considérant les déplacements infinitésimaux. Le béton fibré à ultra hautes performances est composé d'une matrice cimentaire fragile ainsi que de fibres métalliques droites très résistantes, choisies de telle sorte qu'elles ne se rompent pas et qu'elles dissipent un maximum d'énergie par frottement. Leurs comportement restent donc dans le domaine linéaire élastique. La « fracture process zone » (FPZ) est donc négligeable pour ces deux matériaux, ce qui rend l'utilisation de la mécanique de rupture linéaire élastique pertinente. Dans le cadre d'un tel comportement, le théorème de superposition

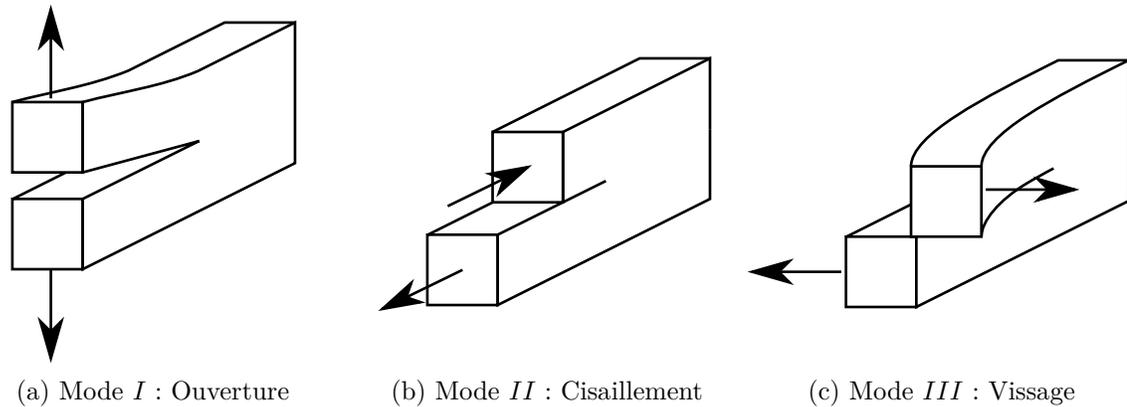


FIGURE 4.1 – Illustration des trois mode de propagation d'une fissure

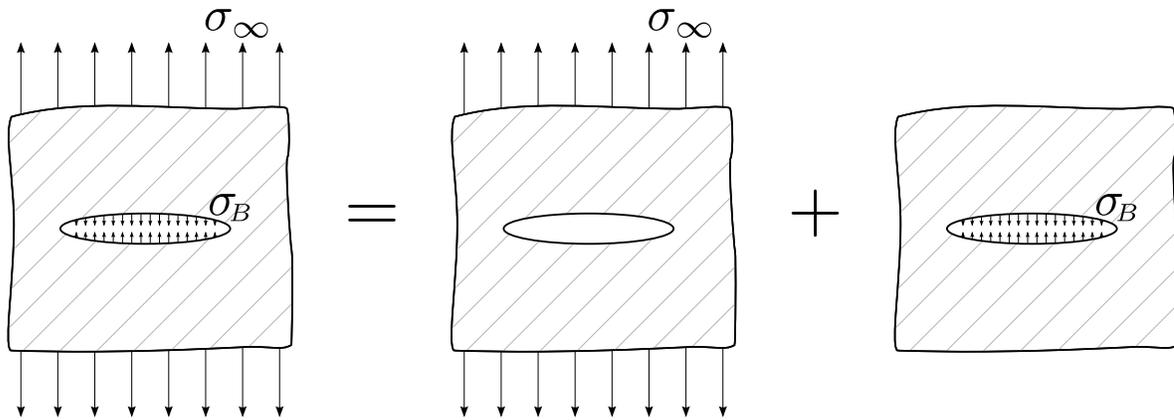


FIGURE 4.2 – Représentation du principe de superposition

s'applique aux contraintes ainsi qu'aux coefficients de concentration de contrainte :

$$K_I = \sigma_{infty} \sqrt{a\pi} \quad (4.1)$$

La rupture du matériau en mode *II* et *III* représenté sur la figure 4.1 n'est pas considérée dans ce travail. Pour la mise en équation du problème, il est important, dans un premier temps, de considérer les fibres comme étant une force qui s'oppose à l'ouverture des fissures tel que représenté sur la figure 4.2 et non comme un matériau dissociable de la matrice. L'équation (4.2) traduit ce concept : le système étudié est la somme de ces deux systèmes de chargement appliqués simultanément sur la matrice.

$$K_{BFUP} = K_{matrice} - K_{fibres}. \quad (4.2)$$

La relation d'Irwin (1957) donne le lien entre le coefficient de concentration et le

taux de restitution d'énergie :

$$K^2 = \mathcal{G} \times E', \quad (4.3)$$

où E' est le module d'élasticité de la matrice cimentaire du BFUP (donc sans les fibres), défini pour les deux cas particuliers suivant :

- $E' = E$ en contrainte plane, ou encore
- $E' = E/(1 - \nu^2)$ en déformation plane où E est le module d'Young de la matrice.

Grâce à la relation d'Irwin, l'équation (4.2) s'écrit en termes de taux de dissipation d'énergie :

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_A + \mathcal{G}_B - 2\sqrt{\mathcal{G}_A \mathcal{G}_B}, \quad (4.4)$$

où \mathcal{G}_A est le taux de restitution d'énergie de la matrice liée au chargement extérieur et \mathcal{G}_B le taux prenant en compte l'effet des fibres sur les fissures.

Par similitude à la théorie de la plasticité, la fonction de chargement est définie par :

$$f = \mathcal{G} - G_c, \quad (4.5)$$

où $G_c = \mathcal{N}_c G_f$ est le taux de dissipation d'énergie critique, qui est le produit de la densité de fissuration (notée \mathcal{N}_c) par l'énergie de surface (notée G_f), qui est l'énergie nécessaire pour créer deux nouvelles surfaces ou propager la fissure. Si $f \leq 0$ alors le comportement du matériau est linéaire élastique, sinon il est non linéaire avec progression de l'endommagement, c'est-à-dire dégradation de la rigidité élastique. Ceci est exprimé par les conditions de chargement/déchargement qui misent sous la forme de Kuhn-Tucker, s'écrivent :

$$f(\ell) \leq 0; \quad f(\ell) d\ell = 0; \quad d\ell \geq 0, \quad (4.6)$$

où ℓ est la surface de fissuration. Le phénomène d'autocicatrisation du BFUP n'est pas développé dans ce modèle, donc ℓ est une variable strictement croissante (voir section 3.2.2.3).

4.1.1 Thermodynamique de la fissuration

L'expression de \mathcal{G}_A est obtenue à partir de la deuxième loi de la thermodynamique, issue de l'inégalité de Clausius-Duhem qui stipule que l'énergie dissipée dans le système est la différence entre le travail des efforts extérieurs (noté δW_{ext}) et l'énergie libre (où énergie d'Helmholtz) stockée dans le système (notée $d\Psi$) :

$$d\mathcal{D} = \delta W_{ext} - d\Psi. \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) est issue de l'équation (3.36) à la section 3.2.2.3 avec ici encore $\delta W_i = 0$, car il n'y a pas de pression interne; c'est-à-dire que les fibres ne sont pas prise en compte dans la formulation mathématique du taux de dissipation d'énergie de la matrice. Le travail extérieur correspond à la somme des produits des forces appliquées (notées T) sur la surface extérieure (notée $\partial\Omega$) par leur déplacement infinitésimal (noté $d\xi$), tel que :

$$\delta W_{ext} = \int_{\partial\Omega} T d\xi dS. \quad (4.8)$$

Dans ce modèle, l'énergie de Helmholtz est fonction de deux variables : $\underline{\underline{E}}$ et ℓ qui correspondent respectivement au tenseur de déformation élastique macroscopique et à la surface fissurée. Ainsi, sachant que $\Psi \equiv \Psi(\underline{\underline{E}}, \ell)$, l'équation (4.7) peut s'écrire :

$$d\mathcal{D} = \left(\int_{\partial\Omega} T d\xi dS - \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{E}}} : d\underline{\underline{E}} \right) - \frac{\partial\Psi}{\partial\ell} d\ell. \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) qui est l'expression de la deuxième loi de la thermodynamique, doit être valable dans le cas d'un chargement élastique donc sans propagation de fissures ($d\ell = 0$) ni dissipation ($d\mathcal{D} = 0$). Dans un tel cas :

$$\int_{\partial\Omega} T d\xi dS - \frac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{E}}} : d\underline{\underline{E}} = 0 \Rightarrow d\mathcal{D} = -\frac{\partial\Psi(\underline{\underline{E}}, \ell)}{\partial\ell} d\ell \leq 0. \quad (4.10)$$

Sous les hypothèses de la mécanique de la rupture élastique linéaire, l'énergie libre est définie par :

$$\Psi = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \mathcal{C} : \underline{\underline{E}}, \quad (4.11)$$

où \mathcal{C} est le tenseur de rigidité élastique de la matrice (tenseur du 4^e ordre). Le modèle développé ici est un modèle d'endommagement avec dégradation de la rigidité; ainsi \mathcal{C} est fonction de la surface fissurée qui est l'actuel paramètre d'endommagement. Le taux de dissipation d'énergie de la matrice cimentaire s'écrit donc (voir équation (3.34)) :

$$\mathcal{G}_A = \frac{d\mathcal{D}}{d\ell} = -\frac{\partial\Psi(\underline{\underline{E}}, \ell)}{\partial\ell} \geq 0 \quad (4.12)$$

où encore :

$$\mathcal{G}_A = -\frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \frac{\partial\mathcal{C}(\ell)}{\partial\ell} : \underline{\underline{E}} \geq 0. \quad (4.13)$$

Dans cette section, le taux de restitution d'énergie de la matrice cimentaire est défini en fonction de la surface de fissuration ℓ . Mais à cette étape, le tenseur de rigidité est inconnu : il est déterminé grâce aux outils de la micromécanique présentés dans la section suivante.

4.1.2 Homogénéisation du tenseur de rigidité par la micromécanique

La matrice cimentaire est composée de plusieurs phases : particules, ciment, vides (fissures), etc. C'est à partir des concepts de la micromécanique linéaire élastique que le tenseur de rigidité est obtenu en homogénéisant les différentes phases évoquées. Ce tenseur est noté $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}$ dans la suite de ce mémoire. L'objectif de cette section et ses sous-sections est de déterminer l'expression mathématique de $\underline{\underline{C}}^{\text{hom}}(\ell)$.

De façon classique, l'opérateur moyenne est défini par :

$$\bar{x} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} x \, dv, \quad (4.14)$$

où Ω est le volume élémentaire représentatif du matériau. Les contraintes et déformations macroscopiques (moyennées) sont issues des contraintes et déformations microscopiques :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\bar{\sigma}}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \, dv; \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} \, dv. \quad (4.15)$$

Une des phases est prédominante, c'est la matrice. Les autres phases qui finalement rendent la matrice hétérogène sont appelées inclusions. Le comportement de chacune de ces phases est linéaire élastique, donc :

$$\forall \underline{z} \in \Omega, \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{z}) = \underline{\underline{C}}(\underline{z}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{z}), \quad (4.16)$$

où \underline{z} est la coordonnée d'un point matériel de Ω sous la forme d'un vecteur. Le champ de déformation microscopique est lié à la déformation macroscopique du matériau par l'intermédiaire d'un tenseur de localisation du 4^e ordre, noté $\underline{\underline{A}}(\underline{z})$ tel que :

$$\forall \underline{z} \in \Omega, \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{z}) = \underline{\underline{A}}(\underline{z}) : \underline{\underline{E}}. \quad (4.17)$$

Dans la littérature, le terme de tenseur de concentration est également utilisé pour désigner $\underline{\underline{A}}(\underline{z})$. $\underline{\underline{E}}$ est indépendant de \underline{z} puisqu'il s'agit de la déformation macroscopique de Ω , donc :

$$\begin{aligned} \overline{\underline{\underline{A}}(\underline{z}) : \underline{\underline{E}}} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{A}}(\underline{z}) : \underline{\underline{E}} \, dv \\ &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{\underline{A}}(\underline{z}) \, dv : \underline{\underline{E}} \\ &= \overline{\underline{\underline{A}}(\underline{z})} : \underline{\underline{E}}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon}}} = \overline{\underline{\underline{A}}(\underline{z}) : \underline{\underline{E}}} = \overline{\underline{\underline{A}}(\underline{z})} : \underline{\underline{E}} \Rightarrow \overline{\underline{\underline{A}}(\underline{z})} = \underline{\underline{I}}, \quad (4.18)$$

où \underline{I} est le tenseur identité du 4^e ordre. En combinant les équations (4.16) et (4.17), le lien entre la contrainte microscopique et la déformation macroscopique est obtenu :

$$\underline{\sigma}(\underline{z}) = \underline{C}(\underline{z}) : \underline{A}(\underline{z}) : \underline{E}. \quad (4.19)$$

Enfin, la contrainte macroscopique est évaluée avec :

$$\underline{\Sigma} = \overline{\underline{C}(\underline{z}) : \underline{A}(\underline{z}) : \underline{E}} = \underline{C}^{\text{hom}} : \underline{E}, \quad (4.20)$$

où $\underline{C}^{\text{hom}}$ est le tenseur de rigidité homogénéisé, identifié dans l'équation (4.20) par :

$$\underline{C}^{\text{hom}} = \overline{\underline{C}(\underline{z}) : \underline{A}(\underline{z})}. \quad (4.21)$$

Dans le cas d'un matériau à n -phase(s), identifiée(s) par l'indice $i \in [1, n]$ et tel que $\sum_i \Omega_i = \Omega$, alors $\forall \underline{z} \in \Omega_i$, $\underline{C}_i(\underline{z}) = \underline{C}_i$, autrement dit la rigidité d'une phase est la même pour tous points de cette phase. En appliquant la relation de Chasles pour les intégrales, l'équation (4.21) est alors simplifiée :

$$\begin{aligned} \underline{C}^{\text{hom}} &= \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \underline{C}(\underline{z}) : \underline{A}(\underline{z}) \, dv \\ &= \frac{1}{\Omega} \sum_i \frac{\Omega_i}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \underline{C}_i : \underline{A}(\underline{z}) \, dv \\ &= \sum_i \frac{\Omega_i}{\Omega} \underline{C}_i : \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \underline{A}(\underline{z}) \, dv. \end{aligned}$$

Sachant que $f_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$ est la fraction volumique de la phase i et en assumant que $\forall \underline{z} \in \Omega_i$, $\overline{\underline{A}(\underline{z})}^i = \overline{\underline{A}}^i$, alors

$$\underline{C}^{\text{hom}} = \sum_i f_i \underline{C}_i : \overline{\underline{A}}^i. \quad (4.22)$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \underline{C}^{\text{hom}} &= \underline{C}_0 - \underline{C}_0 : \underline{I} + \sum_i f_i \underline{C}_i : \overline{\underline{A}}^i \\ &= \underline{C}_0 - \underline{C}_0 : \overline{\underline{A}} + \sum_i f_i \underline{C}_i : \overline{\underline{A}}^i \\ &= \underline{C}_0 - \sum_i f_i \underline{C}_0 : \overline{\underline{A}}^i + \sum_i f_i \underline{C}_i : \overline{\underline{A}}^i \end{aligned}$$

car $\overline{\underline{A}} = \sum_i f_i \overline{\underline{A}}^i$. \underline{C}_0 est généralement affecté à la rigidité de la matrice. Finalement, l'équation (4.22) devient :

$$\underline{C}^{\text{hom}} = \underline{C}_0 + \sum_i f_i (\underline{C}_i - \underline{C}_0) : \overline{\underline{A}}^i. \quad (4.23)$$

4.1.2.1 Application de l'homogénéisation aux matériaux fissurés

On fait l'hypothèse que la fissure est de la forme d'une ellipsoïde de révolution aplati (penny-shaped crack), voir section 4.2.3. C'est-à-dire d'une ellipsoïde dont les trois demi-axes (a , b et c) vérifient les deux relations suivantes : $a = b$ et $a \gg c$.

La fraction volumique des fissures (notée f_c), définie à l'équation (4.22), est :

$$f_c = \mathcal{N}_c \frac{4}{3} \pi abc. \quad (4.24)$$

où \mathcal{N}_c est le nombre de fissure par unité de volume. Avec une forme d'ellipsoïde de révolution aplati (i.e. $a = b \gg c$) l'équation (4.24) devient :

$$f_c = \mathcal{N}_c \frac{4}{3} \pi a^2 c = \frac{4}{3} \pi \epsilon X, \quad (4.25)$$

où $X = c/a$ est le rapport des demi-axes. Une conséquence directe de la forme d'ellipsoïde de révolution aplati, est que $a \gg c \Rightarrow X \rightarrow 0$. Le paramètre d'endommagement ϵ défini par Budiansky et O'Connell (1976) comme étant le paramètre de densité de fissuration (voir annexe B) s'écrit :

$$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_c a^3. \quad (4.26)$$

Par l'intermédiaire de a , ϵ est directement lié à la surface de fissuration, $\ell = \pi a^2$. Étant donné que $d\ell \geq 0$, alors $d\epsilon \geq 0$.

Pour un matériau à deux phases, matrice et fissures, l'équation (4.23) devient :

$$\underline{\mathcal{C}}^{\text{hom}} = \underline{\mathcal{C}}_0 + f_c (\underline{\mathcal{C}}_c - \underline{\mathcal{C}}_0) : \overline{\underline{\mathcal{A}}}_c. \quad (4.27)$$

Le tenseur $\underline{\mathcal{C}}_c$ correspond à la rigidité des fissures donc $\underline{\mathcal{C}}_c = \underline{\mathcal{Q}}$. Ainsi, l'expression de la rigidité homogène devient, en combinant les équations (4.26) et (4.27) :

$$\underline{\mathcal{C}}^{\text{hom}} = \underline{\mathcal{C}}_0 : \left(\underline{I} - \frac{4}{3} \pi \epsilon X \overline{\underline{\mathcal{A}}}_c \right). \quad (4.28)$$

L'étape suivante consiste à choisir le tenseur de localisation correspondant au modèle d'homogénéisation souhaitée qui s'applique le mieux au système étudié.

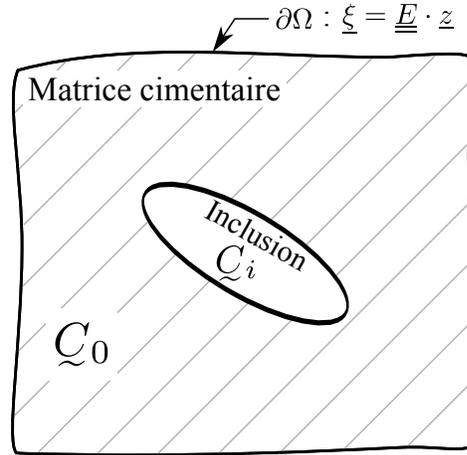


FIGURE 4.3 – Schéma représentatif du problème d'Eshelby (1957)

4.1.2.2 Schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka

Différents modèles d'homogénéisation existent dont les principaux sont cités ci-après. Le schéma d'homogénéisation diluée considère que l'interaction entre les phases du matériau est négligeable. Ce modèle est toutefois limité aux matériaux dont une des phases est fortement plus importante que l'autre. Dans le cas contraire, l'interaction des inclusions peut être considérée via le schéma de Mori et Tanaka (1973). Ce dernier est également pertinent pour modéliser une microstructure dont les inclusions sont des vides de même forme et orientation, dans une matrice continue. L'approche du modèle autocohérent consiste à supposer que les inclusions sont noyées dans un milieu dit homogène équivalent, ayant les propriétés effectives que l'on cherche à déterminer. Pour obtenir un résultat convergé, des itérations sont nécessaires. (Dormieux et al., 2006).

C'est le schéma de Mori et Tanaka (1973) qui est retenu pour la modélisation, car il est suffisamment simple à implanter et suffisamment complexe pour être représentatif de la microstructure. Le tenseur de localisation de Mori et Tanaka (1973) est donné dans sa forme générale à deux phases par :

$$\bar{\mathcal{A}}_{MT}^i = \left[\mathcal{I} + \mathcal{S}_i : \mathcal{C}_0^{-1} : (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_0) \right]^{-1} : \left[\mathcal{I} + \mathcal{S}_i : \mathcal{C}_0^{-1} : (\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_0)^{-1} \right]^{-1}, \quad (4.29)$$

où \mathcal{S} est le tenseur de 4^e ordre de Eshelby (1957); tenseur solution du problème d'Eshelby dont l'objectif est la détermination du champ de déformation d'une inclusion elliptique, noyé dans un milieu infini élastique homogène, à partir des déformations macroscopiques, voir figure 4.3 (Eshelby, 1957). En insérant ce tenseur de localisation dans (4.27), Dormieux et al. (2006) montrent que le tenseur de rigidité homogénéisé

devient :

$$\underline{C}^{MT} = (1 - f_i) \underline{C}_0 : \left[(1 - f_i) \underline{I} + f_i (\underline{I} - \underline{S}_i)^{-1} \right]^{-1}, \quad (4.30)$$

et dans le cas où le tenseur $\overline{\underline{A}}_{MT}^i$ est inséré dans l'équation (4.28), il vient :

$$\underline{C}^{MT} = \underline{C}_0 : \left(\underline{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \underline{T}(\underline{n}) \right)^{-1}. \quad (4.31)$$

Le tenseur de souplesse homogénéisé correspondant est :

$$\underline{S}^{MT} = \left(\underline{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon \underline{T}(\underline{n}) \right) : \underline{S}_0, \quad (4.32)$$

où \underline{n} est le vecteur orientation de la fissure et

$$\underline{T}(\underline{n}) = \lim_{X \rightarrow 0} X \overline{\underline{A}}_c = \lim_{X \rightarrow 0} X (\underline{I} - \underline{S}(X, \underline{n}))^{-1}. \quad (4.33)$$

En notation ingénieur, le tenseur \underline{T} est de la forme suivante :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)\pi} & \frac{4\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)\pi} & \frac{4(1-\nu)^2}{(1-2\nu)\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1-\nu)}{(2-\nu)\pi} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

4.1.3 Rigidité homogénéisée corrigée : prise en compte de l'endommagement initial

Tout matériau possède un endommagement initial, causé par des phénomènes chimiques et/ou thermiques, avant même d'être mis sous sollicitations extérieures. Il est admis que l'endommagement initial du matériau est homogène et isotrope, alors que l'endommagement causé par un effort extérieur est anisotrope : il s'agit d'une conséquence de l'orientation des fissures. Pour résumer, le matériau est isotrope dans son domaine élastique et anisotrope dès que la limite élastique est franchie pour la première fois.

Tel que la rigidité du matériau est définie équation (4.31), les fissures doivent être toutes orientées dans une même direction ; ce qui est en contradiction avec un endommagement initial homogène et isotrope. Donc dans ce travail, \underline{C}_0 est définie comme « la rigidité de la matrice cimentaire avec un endommagement initiale » fixé à ϵ_0 . Ensuite,

pour assurer la continuité du modèle lors du premier passage au comportement non linéaire, la variable d'endommagement de l'équation (4.31) doit être modifiée puisqu'un endommagement initial a été admis. Soit ϵ' cette nouvelle variable telle que :

$$\epsilon' = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon = \epsilon_0 \\ \epsilon - \epsilon_0 & \text{si } \epsilon > \epsilon_0 \end{cases}, \quad (4.35)$$

l'équation (4.31) devient :

$$\mathcal{C}^{MT} = \mathcal{C}_0 : \left(\underline{I} + \frac{4}{3} \pi \epsilon' \underline{T}(\underline{n}) \right)^{-1}. \quad (4.36)$$

Ce changement de variable ne concerne que la matrice de rigidité et ses dérivées.

4.2 Modèle de dissipation d'énergie des fibres

Dans la section précédente, l'endommagement défini par l'équation (4.26) est directement lié à la géométrie des fissures par l'intermédiaire du demi-grand axe de l'ellipse représentant les fissures. La première sous-section suivante permet de relier la connaissance de ce paramètre, à l'ouverture des fissures et donc à la quantité d'énergie dissipée par les fibres lors de cette ouverture.

4.2.1 Mécanisme d'extraction d'une fibre droite

Le phénomène d'extraction d'une fibre droite, se décompose en trois étapes, dans l'ordre : décollement seule, décollement et frottement, et frottement seul, au fur et à mesure que la fibre est extraite (voir figure 2.3). L'intérêt d'ajouter des fibres dans le béton est de dissiper davantage d'énergie. Lors de l'extraction d'une fibre, la dissipation d'énergie n'a lieu que lorsqu'il y a décollement des deux matériaux et frottements de la fibre contre la matrice cimentaire. Il est admis ici que les fibres du BFUP ont été parfaitement dimensionnées pour permettre une dissipation maximum par frottement lors de l'extraction de la fibre ; ce qui implique que les fibres ne se cassent pas.

L'énergie de restitution d'une fibre est l'aire sous la courbe d'un essai d'arrachement de fibre d'un graphique en contrainte-ouverture-de-fissure (notée : $[[\xi]] = h_c \epsilon$) telle

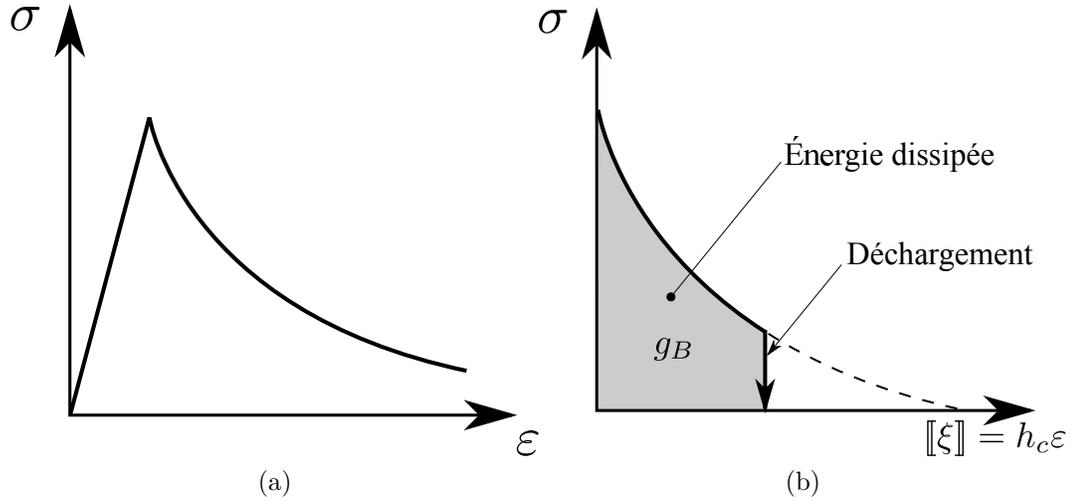


FIGURE 4.4 – Comportement d'un essai d'arrachement de fibre : (a) en contrainte déformation, et (b) en contrainte ouverture de fissure

qu'illustrée sur la figure 4.4. Cette énergie est définie par (Lin et Li, 1997) :

$$\int_{[[\xi]=0]}^{\frac{L_f}{2}} \sigma ([[\xi]]) d [[\xi]], \quad (4.37)$$

où $[[\xi]]$ est l'ouverture de fissure et $\sigma ([[\xi]])$ la contrainte exercée sur la fibre. L'ouverture est proportionnelle à la déformation de la fissure par l'intermédiaire du coefficient h_c , qui est une longueur caractéristique du matériau définie plus loin à la section 4.4.

Les calculs présentés aux paragraphes suivants sont en partie issus de (Li et al., 1991; Lin et Li, 1997; Bao et Song, 1993) ; ils décrivent les deux phénomènes explicités précédemment. Les paramètres utilisés sur les deux figures 4.5 et 4.6 sont définis ci-après : L_f est la longueur de la fibre, ϕ_f est le diamètre de la fibre, L est la longueur d'ancrage de la fibre dans la matrice, φ est l'angle de la fibre par rapport à la normale du plan de fissuration, z est la distance normal au plan de fissuration entre le centre de la fibre et la lèvre de la fissure. λ est la distance sur laquelle la fibre n'adhère plus à la matrice, τ représente la contrainte d'interface entre la fibre et la matrice, F_d est la force de décollement et F_e la force d'extraction, x est un repère dont l'origine coïncide avec le front de décollement (il reste fixe dans le cas de l'extraction), enfin $[[\xi]]$ et $[[\xi]]_0$ représentent respectivement l'ouverture de fissure et l'ouverture de fissure quand la fibre a achevé sa phase de décollement avec la matrice.

L'expression de $\sigma_B ([[\xi]])$ est donnée par les équations ci-dessous (Lin et Li, 1997). Elles relient la contrainte à travers la fissure avec l'ouverture de la fissure, par l'inter-

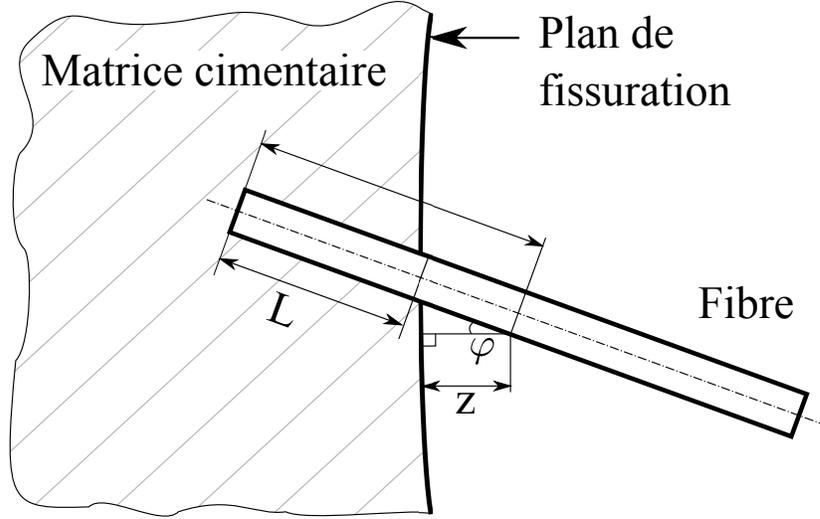


FIGURE 4.5 – Une fibre à travers un plan de fissuration

médiaire de la force d'extraction d'une fibre, pondérée par des probabilités. La démonstration de ces équations est présentée à l'annexe A et leurs représentations graphiques sur la figure 4.7.

– Si $[\xi] \leq [\xi]^*$ alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{B_1}([\xi]) &= \frac{4v_f}{\pi\phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{z_0 \cos \varphi} F_d([\xi]) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi dz d\varphi d\theta \\ &+ \frac{4v_f}{\pi\phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=z_0 \cos \varphi}^{\left(\frac{L_f}{2} - [\xi]\right) \cos \varphi} F_e([\xi]) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi dz d\varphi d\theta, \end{aligned} \quad (4.38)$$

– si $[\xi] > [\xi]^*$ alors :

$$\sigma_{B_2}([\xi]) = \frac{4v_f}{\pi\phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{\left(\frac{L_f}{2} - [\xi]\right) \cos \varphi} F_e([\xi]) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi dz d\varphi d\theta, \quad (4.39)$$

où

$$\begin{cases} F_d = k\sqrt{[\xi]} & \text{si } 0 \leq [\xi] \leq [\xi]_0 \\ F_e = k\sqrt{[\xi]_0} \left[1 - \frac{[\xi] - [\xi]_0}{[\xi]^{cr} - \frac{z}{\cos \varphi}} \right] & \text{si } [\xi]_0 \leq [\xi] \leq [\xi]^{cr}, \end{cases} \quad (4.40)$$

avec

$$k = \frac{1}{2}\pi\phi_f\sqrt{(1+\eta)\tau_0 E_f \phi_f}, \quad \eta = \frac{E_f V_f}{E_m V_m}, \quad (4.41)$$

$$[\xi]_0 = \frac{4(1+\eta)\tau_0 L^2}{\phi_f E_f}, \quad [\xi]^* = \frac{(1+\eta)\tau_0 L_f^2}{\phi_f E_f}, \quad [\xi]^{cr} = \frac{L_f}{2}, \quad (4.42)$$

où E_f et E_m sont respectivement les modules élastiques des fibres et de la matrice et v_f est le pourcentage volumique de fibre dans la matrice. $[\xi]^*$ et $[\xi]^{cr}$ sont respectivement les ouvertures de fissure à partir desquelles, toutes les fibres sont dans leur phase

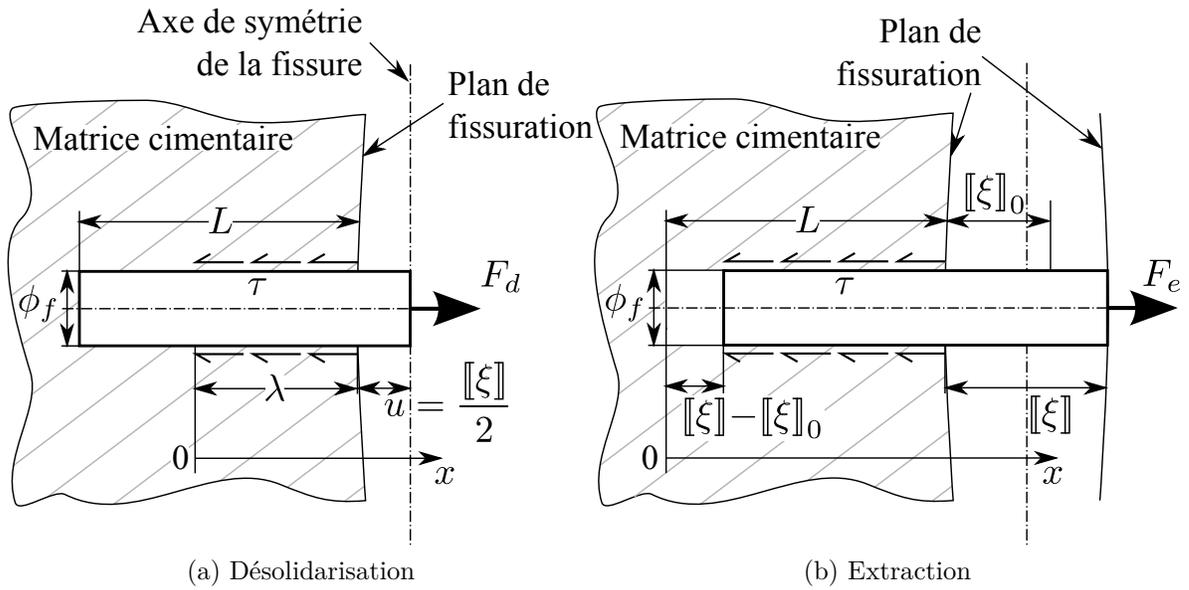


FIGURE 4.6 – Schéma de l'extraction d'une fibre

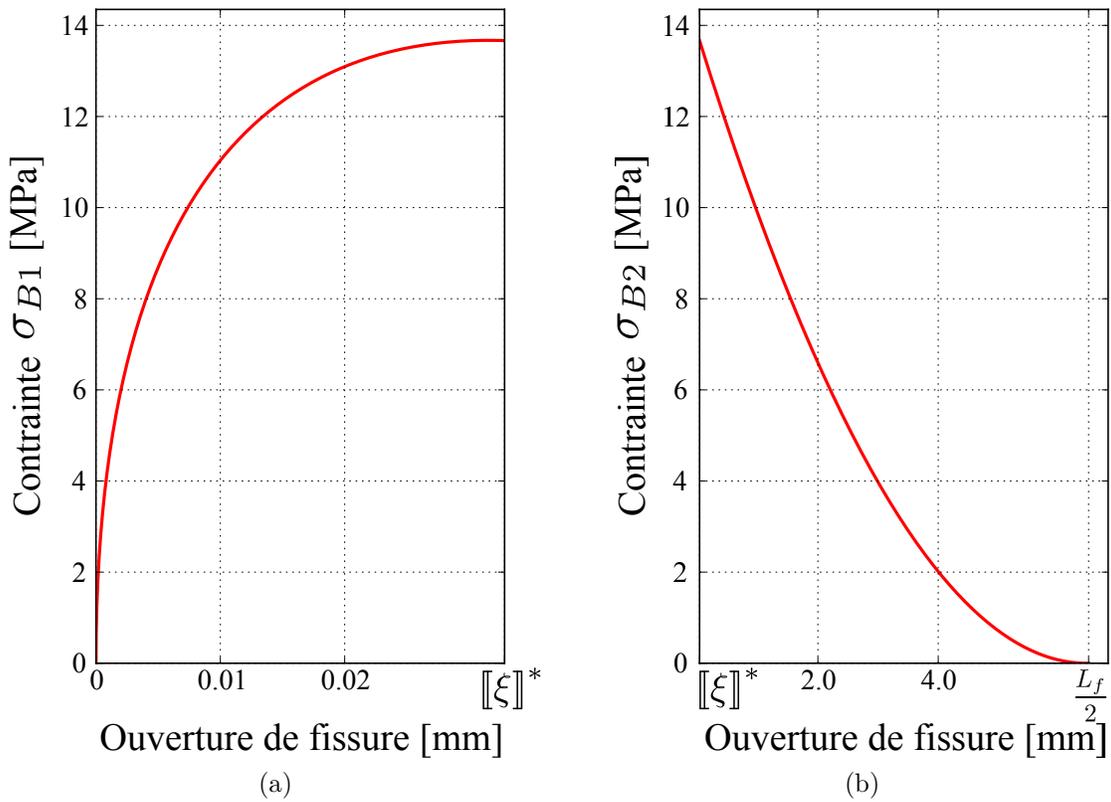


FIGURE 4.7 – Loi d'extraction des fibres, équations (4.38) et (4.39).

d'extraction et plus aucune fibre n'est sollicitée par la fissure. $p(\theta, \varphi)$ est la loi de distribution de l'orientation de la fibre dans l'espace 3D et $p(z)$ est la loi de distribution de la distance entre le centre de masse de la fibre et le plan de fissuration.

Les équations (4.38) et (4.39), mettent en évidence que l'expression de $\sigma_B(\llbracket \xi \rrbracket)$ change selon la plage de $\llbracket \xi \rrbracket$. Ainsi, le taux de dissipation maximal d'énergie des fibres qui relient deux plans parallèles de la fissure est donnée par l'équation (4.43) :

$$g_B = \int_{\llbracket \xi \rrbracket=0}^{\llbracket \xi \rrbracket^*} \sigma_{B_1}(\llbracket \xi \rrbracket) d\llbracket \xi \rrbracket + \int_{\llbracket \xi \rrbracket^*}^{\frac{L_f}{2}} \sigma_{B_2}(\llbracket \xi \rrbracket) d\llbracket \xi \rrbracket. \quad (4.43)$$

4.2.2 Distribution normale de l'orientation des fibres

N'étant pas capable de connaître avec précision ni la position, ni l'orientation exacte d'une fibre, une loi de probabilité est utilisée : $p(z, \theta, \varphi) = p(z)p(\theta, \varphi)$, il s'agit de la probabilité que la fibre intercepte la fissure. La loi est décomposée en deux : une loi de probabilité concernant la position de la fibre par rapport au plan de fissuration et une seconde concernant l'orientation de la fibre.

À l'origine, les probabilités $p(z)$ et $p(\theta, \varphi)$ ont été choisis par Li et al. (1991), pour avoir une distribution uniformément aléatoire : $p(z) = 2/L_f$ et $p(\theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi}$. Dans le modèle décrit ci-après, $p(z)$ n'est pas modifiée, mais $p(\theta, \varphi)$ est redéfinie par une loi normale π -périodique pour prendre en compte l'effet de l'orientation des fibres lors de la mise en œuvre d'un élément. Cette loi est π -périodique, car la fibre possède un point de symétrie : son centre. La loi normale en coordonnée sphérique est de la forme de :

$$p(\theta, \varphi) = \cosh(k_g \cos \varphi) \quad (4.44)$$

où (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques traditionnelles et k_g le coefficient jouant sur l'amplitude et la forme de la loi de probabilité. Tel que l'équation (4.44) est exprimée, l'orientation principale des fibres est celle de la direction de la charge. La loi de probabilité, les fibres et la géométrie de la fissure sont axisymétriques ; donc pour donner une orientation aux fibres par rapport à la direction de la charge, un seul angle (noté φ_0) est suffisant. En règle générale, la géométrie des éprouvettes et des chargements sont données dans un repère cartésien, c'est donc à partir de ce repère que l'angle d'orientation φ_0 est défini.

Soit l'équivalence entre le repère cartésien et le repère sphérique :

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \\ \varphi = \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \end{array} \right. . \quad (4.45)$$

La loi normale (4.44) est exprimée dans le repère cartésien par :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \cosh \left(\frac{k_g z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (4.46)$$

L'orientation des fibres par rapport à la direction de la charge est « donnée » en effectuant une rotation autour d'un axe cartésien choisi, ici l'axe x :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \cosh \left(\frac{k_g (-y \sin \varphi_0 + z \cos \varphi_0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right). \quad (4.47)$$

Enfin, en revenant dans le repère sphérique :

$$p(\theta, \varphi) = \cosh [k_g (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \theta \sin \varphi_0)]. \quad (4.48)$$

Telle que définie précédemment, la probabilité n'est pas comprise entre 0 et 1. La loi est donc normalisée en la divisant par sa surface totale :

$$\begin{aligned} p(\theta, \varphi) &= \frac{\cosh [k_g (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \theta \sin \varphi_0)]}{\int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cosh (k_g \cos \varphi) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta} \\ &= \frac{k_g}{2\pi \sinh k_g} \cosh [k_g (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \theta \sin \varphi_0)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le terme $\sin \varphi$, est le multiplicateur résultant de l'intégration dans un repère sphérique ; voir figure 2.11. Cette distribution normale gaussienne est représentée sur les figures 4.8. La symétrie est bien prise en compte par la probabilité, car elle est invariante pour les transformations suivantes : $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$ et $\theta \rightarrow \theta - \pi$ car \cosh est une fonction paire.

Le paramètre k_g influe sur la forme de la probabilité. Si $k_g \rightarrow 0$ alors la surface de la loi tend vers celle d'une sphère, alors les fibres sont considérées uniformément orientées — ce qui correspond au modèle de Li et al. (1991). En revanche, si $k_g > 30$ alors la surface est très affinée. Ceci correspond à un matériau dont les fibres sont toutes orientées dans une même direction. La figure 4.9 montre une autre représentation graphique de la loi de probabilité. Il s'agit du coefficient d'orientation des fibres en fonction des paramètres de la loi de probabilité décrite ci-dessus. Les valeurs caractéristiques de ce

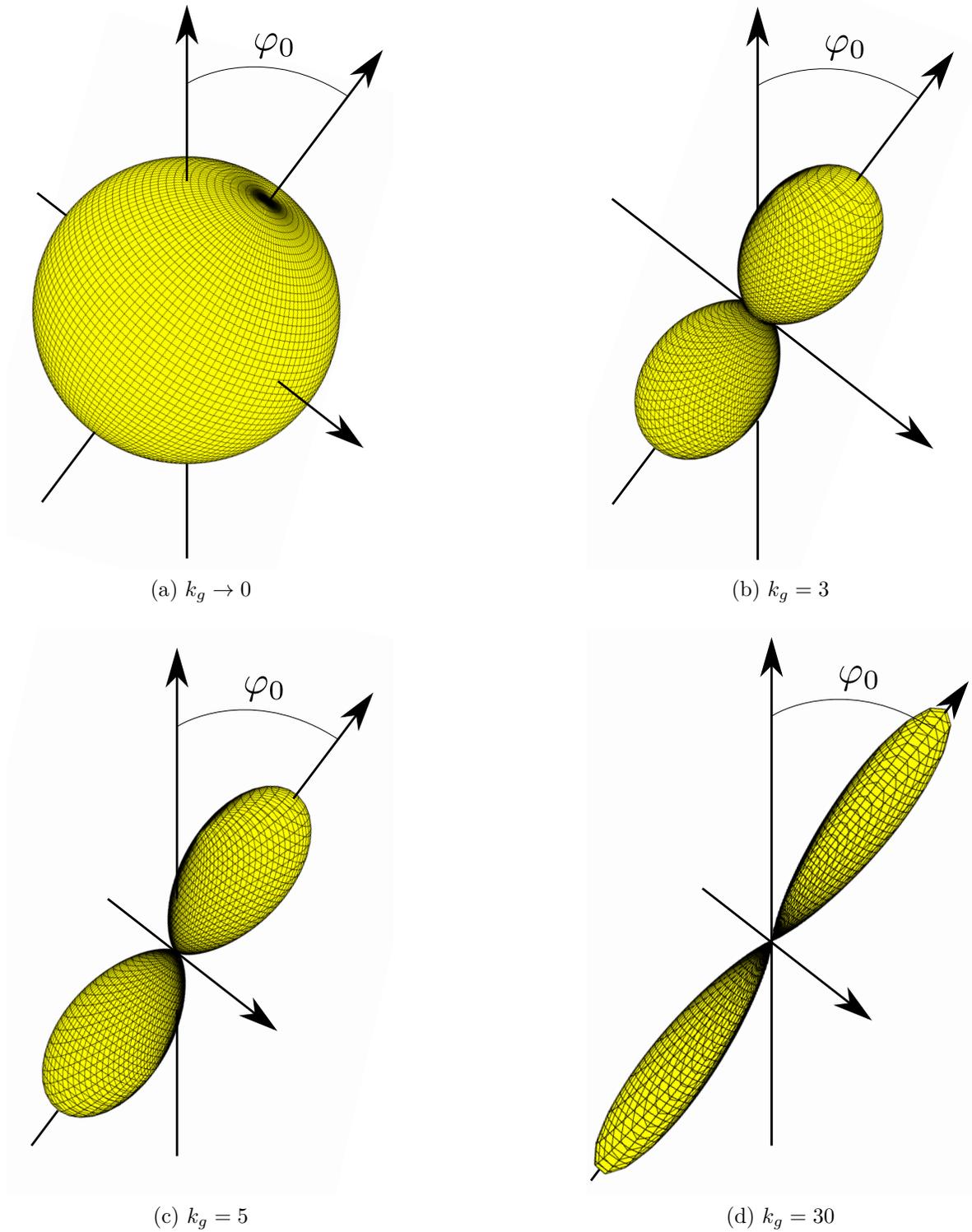


FIGURE 4.8 – Loi normale gaussienne en repère sphérique

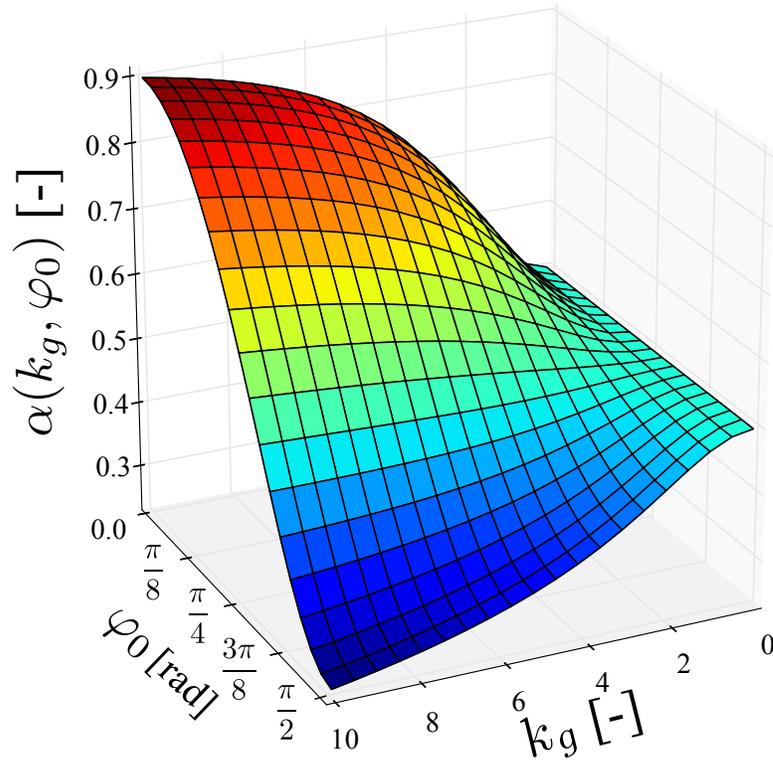


FIGURE 4.9 – Valeurs du coefficient d'orientation des fibres à partir de la loi de probabilité

coefficient sont décrites à la fin de la section 2.3.3. La surface respecte ces valeurs :

- 0.5 quand l'orientation est uniforme sur les trois dimensions ($k_g \rightarrow 0$),
- 0 quand toutes les fibres sont dans une direction perpendiculaire à celle de charge ($k_g \gg 10$ et $\varphi_0 = 0^\circ$) et
- 1 quand toutes les fibres sont dans la direction de la charge ($k_g \gg 10$ et $\varphi_0 = 90^\circ$).

La loi de probabilité définie à l'équation (4.49) respecte donc la définition original du coefficient d'orientation, ce qui rend le modèle applicable à de très nombreuses expériences.

4.2.3 Travail nécessaire pour former une fissure elliptique

L'énergie de restitution partielle des fibres (g_B), calculée à la section 4.2.1, a été définie sur une petite partie de la fissure, sur une surface $dA = r dr d\theta$. Alors, le travail pour former une fissure de demi-axe a est exprimé par :

$$W_B(a) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a g_B([\xi]) r dr d\theta. \quad (4.50)$$

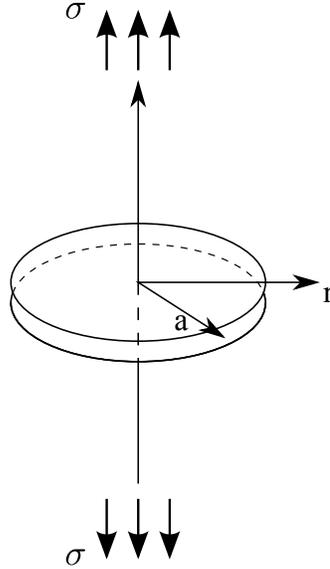


FIGURE 4.10 – Modèle de fissure en forme d'ellipsoïde de révolution aplati avec chargement à l'infini (Tada et al., 2000)

Pour calculer l'équation (4.50), il faut renseigner le profil de la fissure ($[[\xi]]_{(r)}$). Dans la section 4.1.2.1, l'hypothèse d'une forme d'ellipsoïde de révolution aplati a été proposée. Pour cette géométrie, Tada et al. (2000) donne la relation entre la dimension de la fissure (a) et son ouverture ($[[\xi]]$) en fonction de la contrainte externe (σ_{zz}) appliquée sur la fissure (voir figure 4.10) :

$$[[\xi]]_{(r)} = \frac{8(1 - \nu^2)}{\pi E_m} \sigma_{zz} \sqrt{a^2 - r^2}. \quad (4.51)$$

Mais l'équation (4.50) n'est pas valable pour toutes les valeurs de a . Pour une fissure de petite dimension, toutes les fibres sont dans la phase de décollement et frottement (σ_{B1}). Pour une fissure de plus grande dimension — ou quand la fissure progresse —, certaines fibres sont dans la phase de frottement seul (σ_{B2}) et les autres dans la phase de décollement et frottement (σ_{B1}). Un troisième cas existe, celui présenté à la figure 4.11, où r_1 et r_2 sont respectivement les positions radiales où la fissure a une ouverture de $[[\xi]]^*$ et une ouverture de $L_f/2$. Dans ce cas, une partie des fibres sont complètement extraites ($\sigma_B = 0$), une partie sont en frottement seul de r_2 à r_1 et les autres fibres sont en phase de décollement et frottement de r_1 à a . Ces trois cas sont distingués mathématiquement par ;

- $[[\xi]]_{(r=0)} < [[\xi]]^*$,
- $[[\xi]]^* < [[\xi]]_{(r=0)} < L_f/2$,
- $L_f/2 < [[\xi]]_{(r=0)}$.

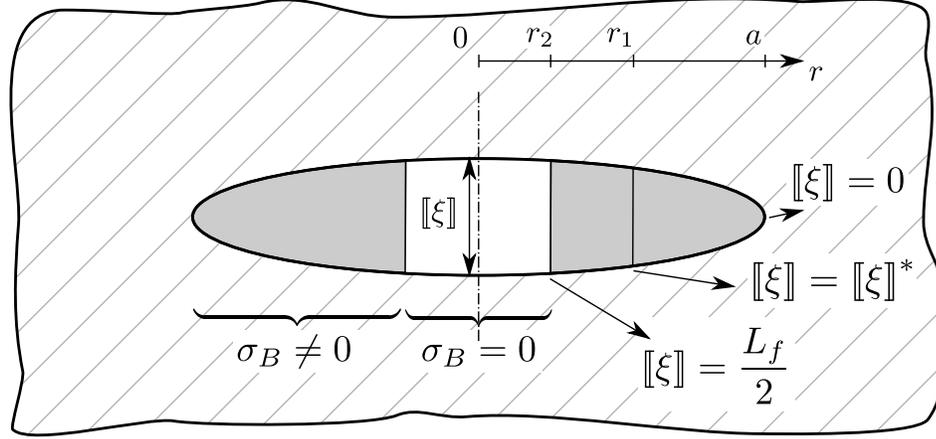


FIGURE 4.11 – Zones de la fissure participant à la dissipation d'énergie

Par exemple pour le 3^e cas, l'énergie nécessaire pour former une telle fissure est de :

$$\begin{aligned}
 W_B(a) &= 2\pi \int_{r=0}^{r_2} \left[\int_0^{[[\xi]^*} \sigma_{B1} d[[\xi]] + \int_{[[\xi]^*}^{\frac{L_f}{2}} \sigma_{B2} d[[\xi]] \right] r dr \\
 &+ 2\pi \int_{r_2}^{r_1} \left[\int_0^{[[\xi]^*} \sigma_{B1} d[[\xi]] + \int_{[[\xi]^*}^{[[\xi]]} \sigma_{B2} d[[\xi]] \right] r dr \\
 &+ 2\pi \int_{r_1}^a \left[\int_0^{[[\xi]]} \sigma_{B1} d[[\xi]] \right] r dr.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Dans le cadre de ce travail, seul le premier cas (décollement et frottement sur toute la surface de la fissure) intervient dans les calculs suivant. Le deuxième et le troisième cas ne s'applique pas car la fissure n'est pas assez grande. Ainsi, le travail fourni pour former une fissure elliptique de demi-axe a est :

$$W_B(a) = 2\pi \int_0^a \int_0^{[[\xi]]} \sigma_{B1} r d[[\xi]] dr \tag{4.53}$$

et le taux d'énergie dissipée par les fibres lors de la progression d'une fissure de demi-axe a à $a + da$ est de :

$$\mathcal{G}_B^a da = W_B(a + da) - W_B(a) \Rightarrow \mathcal{G}_B^a = \frac{\partial W_B(a)}{\partial a}. \tag{4.54}$$

L'énergie dissipée par les fibres dans tout le matériau est donnée par l'équation (4.55) et la figure 4.12.

$$\mathcal{G}_B^a = \mathcal{N}_c \frac{\partial W_B^a}{\partial a}. \tag{4.55}$$

Sur cette figure, le taux de dissipation d'énergie des fibres est tracé en fonction de

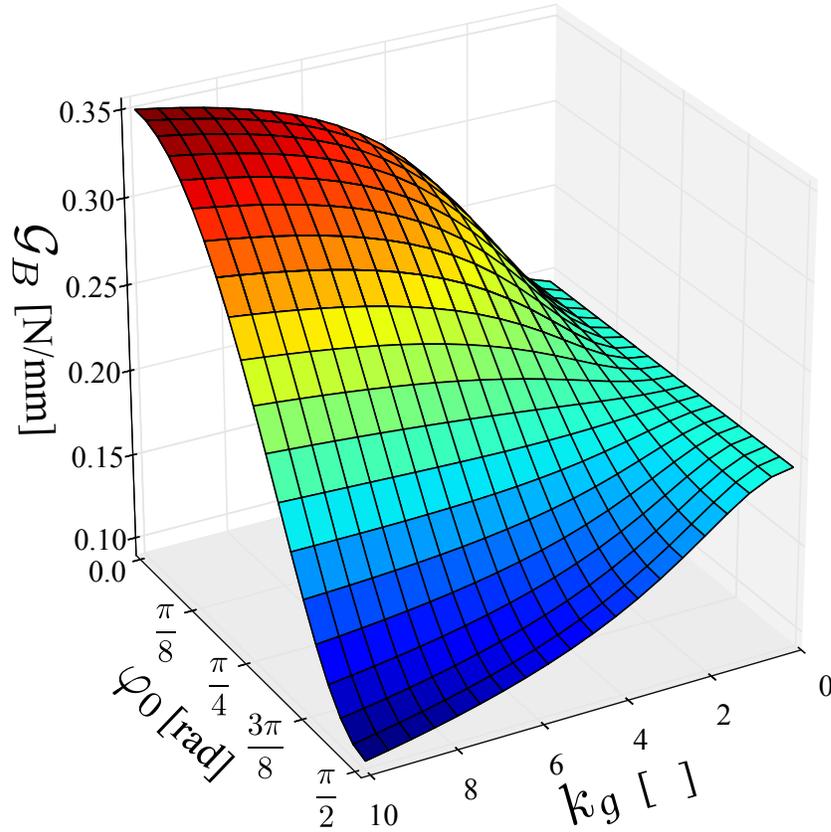


FIGURE 4.12 – Taux de dissipation d'énergie des fibres en fonction des paramètres de la loi de probabilité, $\mathcal{G}_B = f(k_g, \varphi_0)$

k_g et φ_0 . La première observation concerne k_g , si $k_g \rightarrow 0$ alors \mathcal{G}_B devient invariant vis-à-vis de φ_0 : les fibres étant uniformément orientées, il n'y a plus d'orientation préférentielle des fibres, donc φ_0 n'a plus d'influence. En revanche, au fur et à mesure que k_g augmente, l'influence de φ_0 croît. $\varphi_0 = 0$ correspond à une orientation des fibres dans la direction des contraintes principales. La probabilité que de telles fibres interceptent les fissures générées par les contraintes est alors très grande et c'est pourquoi $\mathcal{G}_B(k_g, 0) = \mathcal{G}_{B, \max}(k_g)$, contrairement au cas où les fibres sont perpendiculaires à la direction des contraintes, $\mathcal{G}_B(k_g, \frac{\pi}{2}) = \mathcal{G}_{B, \min}(k_g)$.

4.2.4 Comportement des fibres avec les fissures

Cette section permet de se familiariser avec les hypothèses retenues concernant l'interaction fibres-fissures. À partir du moment où les fissures activent la dissipation des fibres — c'est-à-dire la fin du domaine élastique —, l'orientation des fibres vis-à-vis des fissures est invariant. En d'autres termes, les fibres suivent ou pivotent avec la fissure

de telle sorte que l'ensemble fibres-fissure soit inchangé. Dans le modèle, les fissures pivotent pour prendre en compte toute réorganisation des contraintes dans l'élément de structure, au fur et à mesure que le matériau s'endommage.

Dans le cas d'un déchargement dans le domaine non linéaire, puis d'un recharge-ment, les fibres dissipent à nouveau de l'énergie si la valeur de la contrainte dépasse celle du précédent chargement. Ainsi dans le domaine élastique les fibres ne dissipent pas d'énergie; dans le modèle elles possèdent une déformation permanente telle que présentée sur la figure 4.4b. Il est également considéré que les fibres ne sont pas en précontrainte conséquence du retrait du béton pendant l'hydratation.

Aussi, pour simplifier la mise en équation du problème, il est également admis que le matériau possède des fissures initiales et que les fibres qui les interceptent ont dissipé toute l'énergie correspondant à une ouverture maximale de ces fissures. En d'autres termes, à l'état initial, le matériau est considéré avoir déjà été chargé jusqu'à sa limite élastique ($f(\epsilon, \underline{E}) = 0$), avec un endommagement initial. Il s'agit ici, plus d'une consé-quence sur la mise en équation du modèle micromécanique qu'une hypothèse finement réfléchie.

4.3 Changement de variables

Le paramètre d'endommagement $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_c a^3$, est la variable la plus appro- priée pour décrire la propagation des fissures. Cette définition est introduite par Budiansky et O'Connell (1976), voir annexe B. Pour que le changement de variable de ℓ à ϵ soit adéquat, il doit s'effectuer à énergie constante. Le changement de variables est effectué sur tous les éléments de l'équation de chargement (4.5), à savoir : \mathcal{G}_A , \mathcal{G}_B et G_c .

$$\begin{cases} \mathcal{G}_A d\ell & \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_A^\epsilon d\epsilon & \Rightarrow & \mathcal{G}_A^\epsilon = \mathcal{G}_A \frac{d\ell}{d\epsilon} = -\frac{\partial\psi(\epsilon)}{\partial\epsilon} \\ \mathcal{N}_c \frac{\partial W_B^a}{\partial\ell} d\ell & \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_B^\epsilon d\epsilon & \Rightarrow & \mathcal{G}_B^\epsilon = \mathcal{N}_c \frac{\partial W_B^a}{\partial\ell} \frac{d\ell}{d\epsilon} \\ G_c d\ell & \stackrel{\text{def}}{=} G_c^\epsilon d\epsilon & \Rightarrow & G_c^\epsilon = \mathcal{N}_c G_f \frac{d\ell}{d\epsilon} \end{cases} \quad (4.56)$$

Comme

$$\ell = \pi a^2 \quad \text{et} \quad \epsilon \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{N}_c a^3, \quad (4.57)$$

alors

$$\ell = \pi \left(\frac{\epsilon}{\mathcal{N}_c} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow d\ell = \frac{2\pi}{3\mathcal{N}_c^{2/3}} \epsilon^{-1/3} d\epsilon, \quad (4.58)$$

et donc :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_A^\epsilon = \mathcal{G}_A \frac{2\pi}{3\mathcal{N}_c^{2/3}} \epsilon^{-1/3} \\ \mathcal{G}_B^\epsilon = \frac{1}{3} \left(\frac{\mathcal{N}_c}{\epsilon} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\partial W_B^a}{\partial a} \\ G_c^\epsilon = \frac{2\pi}{3} G_f \left(\frac{\mathcal{N}_c}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2\pi}{3} \frac{G_f}{a}. \end{cases} \quad (4.59)$$

Pour interpréter facilement G_c^ϵ , il est possible de le relier à la limite de traction élastique f_t . Soit G_{c0}^ϵ le taux de dissipation d'énergie nécessaire pour générer la première propagation de fissure, alors :

$$G_{c0}^\epsilon = \frac{2\pi}{3} \frac{G_f}{a_0}, \quad (4.60)$$

où G_{c0}^ϵ est défini tel que :

$$G_c^\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} G_{c0}^\epsilon \frac{a_0}{a}. \quad (4.61)$$

Pour une fissure de la forme d'une pièce de monnaie, telle que définie sur la figure 4.10, le coefficient de concentration de contrainte est :

$$K_{c0} = \frac{2}{\pi} f_t \sqrt{\pi a_0}. \quad (4.62)$$

De plus d'après la relation d'Irwin (1957) — équation (4.3) :

$$K_{c0}^2 = G_f E_m \Rightarrow a_0 = \frac{\pi G_f E_m}{4 f_t^2}. \quad (4.63)$$

En insérant a_0 dans l'équation (4.60), cette équation devient :

$$G_{c0}^\epsilon = \frac{8}{3} \frac{f_t^2}{E_m}, \quad (4.64)$$

puis en combinant les équations (4.64) et (4.61) :

$$G_c^\epsilon = G_{c0}^\epsilon \frac{a_0}{a} = G_{c0}^\epsilon \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.65)$$

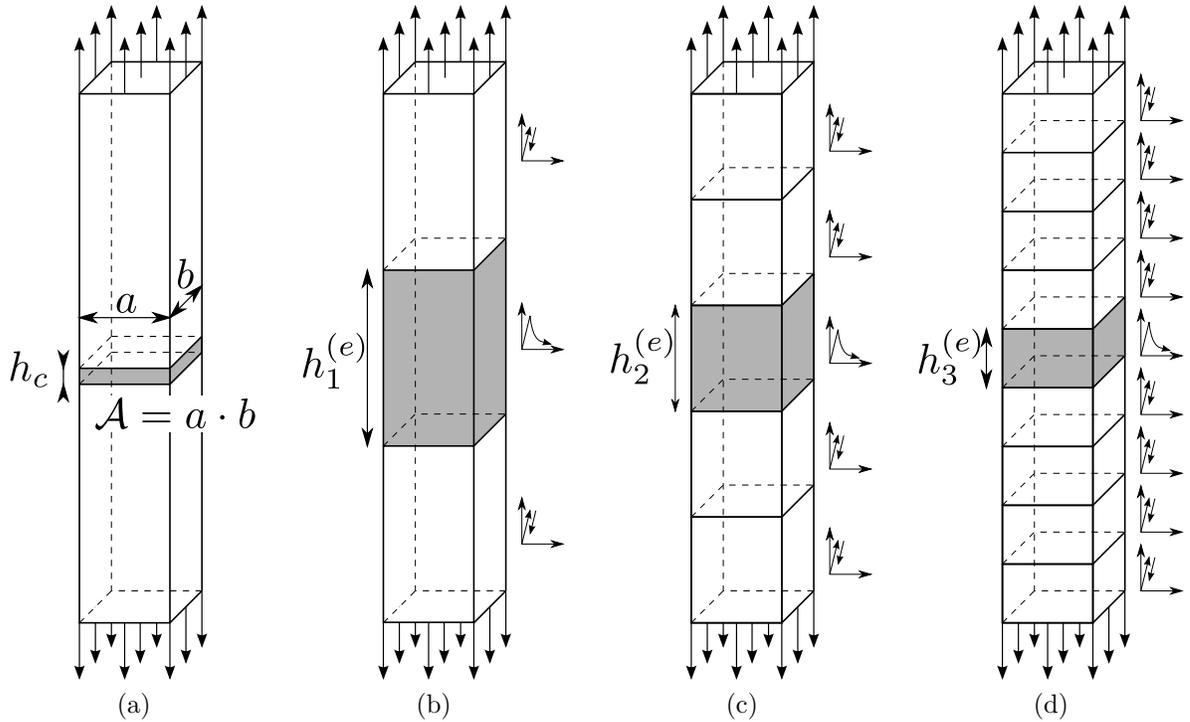


FIGURE 4.13 – Variation de la bande de microfissures fonction du maillage

4.4 Dépendance au maillage

4.4.1 Mise en évidence du problème

La solution d'un problème utilisant la méthode des éléments finis, avec un matériau adoucissant, est sensible à la finesse du maillage. D'après la théorie des bandes de microfissures parallèles — smeared crack model (Bažant et Planas, 1998) —, le comportement adoucissant, d'une structure ou d'une éprouvette, se caractérise par une localisation des déformations sur une bande h_c de l'éprouvette, voir figure 4.13a. Cette bande h_c est au même titre que l'énergie de rupture G_f , une propriété de matériau. Le lien entre ces deux paramètres est donné par l'équation (4.66),

$$G_f = \gamma_f h_c \quad (4.66)$$

où γ_f est l'aire sous la courbe de la loi de comportement en contrainte-déformation, ou la densité d'énergie dissipée définie par :

$$\gamma_f = \int_0^\infty \sigma(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^\infty \sigma(\varepsilon^f) d\varepsilon^f, \quad (4.67)$$

avec

$$\varepsilon^f = \varepsilon - \varepsilon^e, \quad (4.68)$$

où ε^f est la déformation inélastique de rupture, $\varepsilon^e = \sigma/E$ est la déformation élastique et ε est la déformation totale. Au sein d'une éprouvette, le matériau ne s'adoucit que dans la bande h_c ; ailleurs, il se décharge élastiquement et ne dissipe pas d'énergie.

Le problème avec l'utilisation des éléments finis avec un comportement adoucissant, c'est que la bande de microfissures h_c est dictée par la taille du maillage. Effectivement, la loi de comportement s'applique à tout un élément et non une partie de celui-ci. En conséquence, si le maillage varie alors la bande varie et la constante de matériau h_c avec : il ne s'agit alors plus de la même loi de comportement.

4.4.2 Correction énergétique

Le problème est résolu avec l'équation (4.66). Puisque l'énergie de rupture G_f est la constante de référence et puisque h_c dépend du maillage alors le paramètre γ_f doit également être fonction du maillage ; ce qui revient à modifier la loi de comportement. La correction porte uniquement sur la partie adoucissante de la loi contrainte-déformation, car cet effet de dépendance n'apparaît que dans ce domaine, voir section 4.4.1. La correction consiste à affecter la variable de déformation ε d'un coefficient correspondant à une longueur caractéristique L_{ch} , elle-même fonction de la taille du maillage $h^{(e)}$.

Dans le cadre d'un essai de traction direct sur un béton ordinaire avec un comportement élasto-adoucissant, la loi de comportement est modifiée telle qu'indiquée sur la figure 4.14. Pour former la fissure de section \mathcal{A} et de hauteur h_c , la courbe contrainte-déformation doit dépendre de la taille des éléments $h^{(e)}$ de telle sorte que :

$$h^{(e)}\gamma_f^{(e)} = h_c\gamma_f = G_f \Rightarrow \gamma_f^{(e)} = \frac{G_f}{h^{(e)}} \quad (4.69)$$

où $\gamma_f^{(e)}$ est la densité d'énergie dissipée de l'élément considéré définie par les équations (4.67) et (4.68). La section fissurée \mathcal{A} n'intervient pas dans le calcul de la correction énergétique.

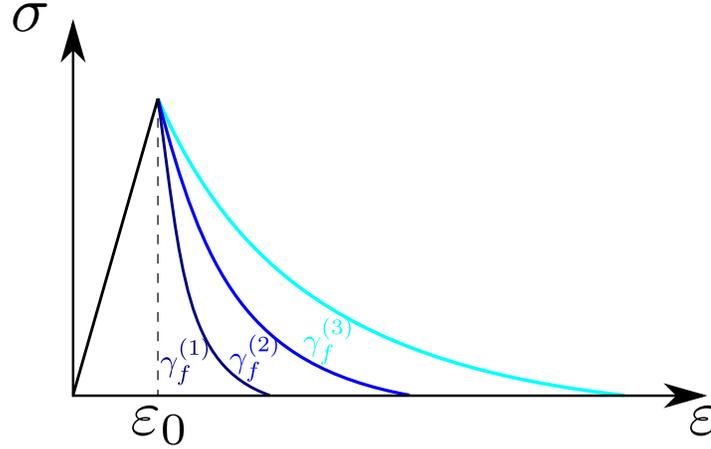


FIGURE 4.14 – Correction de loi de comportement élasto-adoucissant pour différentes valeurs de $\gamma_f^{(e)}$

4.5 Prédiction de la localisation des déformations

La localisation des déformations intervient quand l'énergie dissipée pour former une macrofissure — à travers tout l'élément Ω — est moindre que celui d'accroître toutes les microfissures de Ω . Ce qui revient à dire qu'il y a localisation quand :

$$h_c d\mathcal{D}^{Li} \leq L_{ch} d\mathcal{D}^{MT}, \quad (4.70)$$

où $h_c = G_f/\gamma_f$ est la bande de fissuration du matériau, définie au paragraphe 4.4 et L_{ch} une longueur caractéristique liée au matériau. $d\mathcal{D}^{Li}$ et $d\mathcal{D}^{MT}$ sont respectivement les dissipations d'énergie avec localisation des déformations et sans localisation. Ces dissipations sont déterminées à partir de la figure 4.15 :

$$\begin{cases} d\mathcal{D}^{MT} &= \frac{1}{2} (\Sigma_{33} dE_{33} - E_{33} d\Sigma_{33}) = G^\epsilon d\epsilon \\ d\mathcal{D}^{Li} &= \frac{1}{2} \left(\sigma_B \frac{d[\xi]}{L_{ch}} - \frac{[\xi]}{L_{ch}} d\sigma_B \right). \end{cases} \quad (4.71)$$

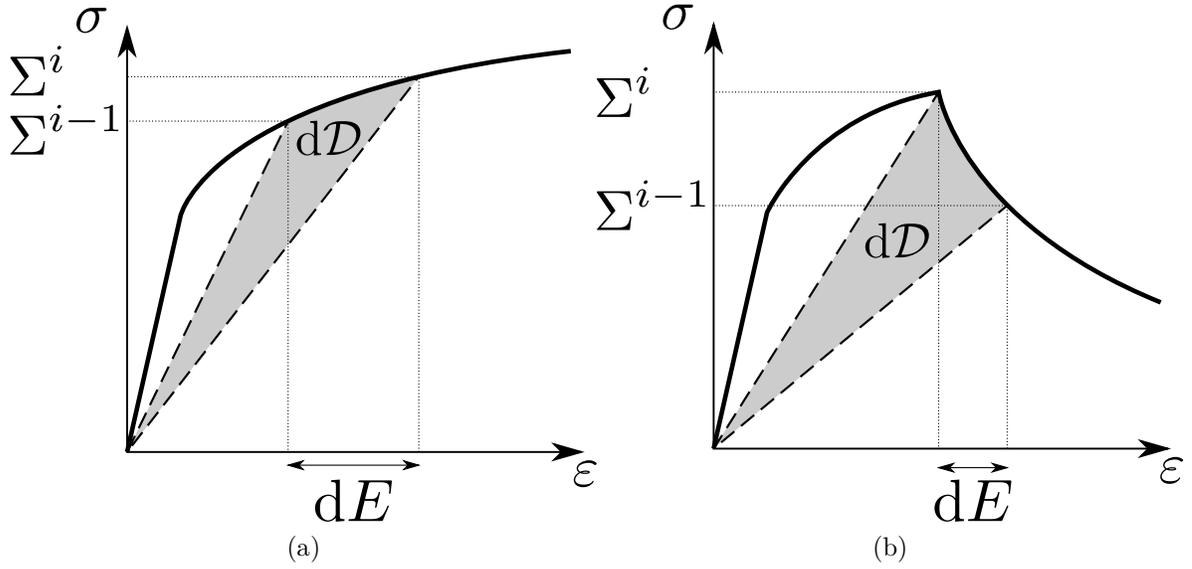


FIGURE 4.15 – Dissipation d'énergie (a) sans localisation et (b) avec localisation

4.6 Matrice tangente du comportement écouissant

Pour implanter le modèle dans un logiciel d'éléments finis, il faut renseigner la matrice tangente de la loi de comportement :

$$\frac{d\underline{\underline{\Sigma}}}{d\underline{\underline{E}}} = \mathcal{C}(\epsilon) + \frac{\partial \mathcal{C}(\epsilon)}{\partial \underline{\underline{E}}} : \underline{\underline{E}}. \quad (4.72)$$

D'après les conditions de chargement/déchargement issues de l'équation (4.6), la fissure progresse si $df(\epsilon, \underline{\underline{E}}) = 0$, alors $d\epsilon \neq 0$, donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{E}}} : d\underline{\underline{E}} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon} d\epsilon \Rightarrow \frac{d\epsilon}{d\underline{\underline{E}}} = -\frac{\partial f / \partial \underline{\underline{E}}}{\partial f / \partial \epsilon}. \quad (4.73)$$

En combinant les équations (4.72) et (4.73), la matrice tangente de matériau s'écrit :

$$\frac{d\underline{\underline{\Sigma}}}{d\underline{\underline{E}}} = \mathcal{C}(\epsilon) - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{C}(\epsilon)}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial f / \partial \underline{\underline{E}}}{\partial f / \partial \epsilon} : \underline{\underline{E}} \right)}_{d\mathcal{C}} \quad (4.74)$$

La figure 4.16, met en évidence qu'il ne faut pas faire la mise à jour de ϵ avant le calcul

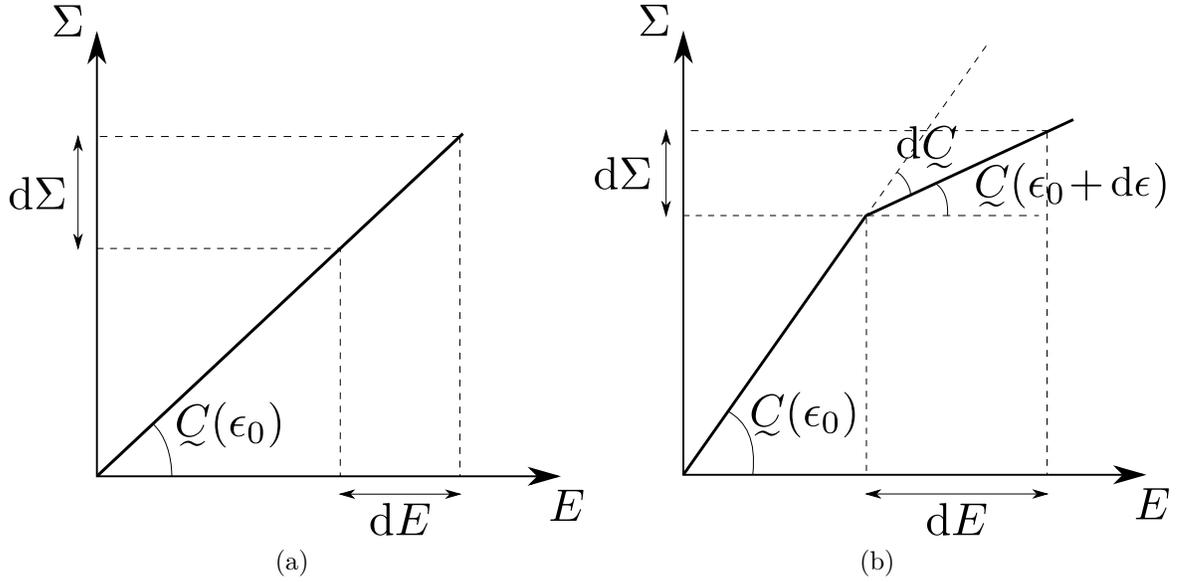


FIGURE 4.16 – Schéma de l'implantation numérique de la loi de comportement dans le domaine (a) linéaire et (b) non linéaire

de la matrice tangente, autrement dit :

$$\begin{cases} \underline{E}^{i+1} = \underline{E}^i + d\underline{E}^i \\ \underline{\Sigma}^{i+1} = \underline{\Sigma}^i + d\underline{\Sigma}^i \end{cases}, \quad (4.75)$$

avec

$$d\underline{\Sigma}^i = \left[\mathcal{C}(\epsilon^i) - \frac{\partial \mathcal{C}(\epsilon^i)}{\partial \epsilon} \left(\frac{\partial f / \partial \underline{E}}{\partial f / \partial \epsilon} : \underline{E}^i \right) \right] : d\underline{E}^i. \quad (4.76)$$

Mais le matériau est anisotrope, il faut donc s'assurer que la matrice tangente soit donnée dans le repère global. Dans le cas d'un matériau isotrope, la question ne se pose pas puisque le comportement est le même dans toutes les directions donc indifférent du repère.

Soit $\underline{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_{P \rightarrow G}$, la matrice de passage du repère propre (noté P) au repère global (noté G) de telle sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\mathcal{P}}_{P \rightarrow G} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\mathcal{P}}_{P \rightarrow G}^t, \quad (4.77)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ est la matrice (diagonale) des valeurs propres de $\underline{\underline{\sigma}}'$. Le tenseur d'ordre 4 est ramené dans le repère global, par l'équation suivante,

$$\underline{\underline{A}}' = \underline{\mathcal{T}} : \underline{\underline{A}} : \underline{\mathcal{T}}^{-1} \quad (4.78)$$

où $\mathcal{T}_{ijkl} = \mathcal{P}_{ik}\mathcal{P}_{jl}$ avec la notation d'Einstein, ou encore :

$$A'_{ijkl} = \mathcal{P}_{i\alpha}\mathcal{P}_{j\beta}A_{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{P}_{k\gamma}\mathcal{P}_{l\delta} \quad (4.79)$$

où A' est le tenseur d'ordre 4 de la matrice tangente dans le repère global, A le tenseur dans le repère propre et \mathcal{P} la matrice de passage. Pour rendre les calculs plus efficaces, l'équation (4.79) est réécrite en notation d'ingénieur, utilisée au sein de Code_Aster :

$$A' = \mathcal{T} \cdot A \cdot \mathcal{T}^t \quad (4.80)$$

où

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11}^2 & \mathcal{P}_{12}^2 & \mathcal{P}_{13}^2 & \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{12}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{11}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{13}\sqrt{2} \\ \mathcal{P}_{21}^2 & \mathcal{P}_{22}^2 & \mathcal{P}_{23}^2 & \mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{22}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{21}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{22}\mathcal{P}_{23}\sqrt{2} \\ \mathcal{P}_{31}^2 & \mathcal{P}_{32}^2 & \mathcal{P}_{33}^2 & \mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{32}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{33}\mathcal{P}_{31}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{32}\mathcal{P}_{33}\sqrt{2} \\ \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{21}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{23}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{21} + \mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{23} + \mathcal{P}_{22}\mathcal{P}_{13} \\ \mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{11}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{32}\mathcal{P}_{12}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{33}\mathcal{P}_{13}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{12} + \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{32} & \mathcal{P}_{33}\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{13}\mathcal{P}_{31} & \mathcal{P}_{32}\mathcal{P}_{13} + \mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{33} \\ \mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{31}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{22}\mathcal{P}_{32}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{33}\sqrt{2} & \mathcal{P}_{21}\mathcal{P}_{32} + \mathcal{P}_{31}\mathcal{P}_{22} & \mathcal{P}_{23}\mathcal{P}_{31} + \mathcal{P}_{33}\mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22}\mathcal{P}_{33} + \mathcal{P}_{32}\mathcal{P}_{23} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Dans Code_Aster, les tenseurs sont définis dans l'ordre d'indice suivant :

$$\langle xx,yy,zz,xy,xz,yz \rangle.$$

4.7 Comportement adoucissant : bande de fissures parallèles

4.7.1 Hypothèses de bases et notations

Le modèle de bande de fissures parallèles, issu des travaux de [Jirásek et Zimmermann \(1997\)](#), est utilisé après localisation des déformations. Le modèle admet donc les hypothèses suivantes :

- les déformations sont décomposées en une partie élastique et une partie inélastique,
- les contraintes et déformations élastiques sont reliées par les équations de l'élasticité linéaire,
- la déformation inélastique est colinéaire avec la direction principale dont la valeur propre est la plus grande, il n'y a pas de fissure dans les deux autres directions orthogonales,

– la déformation inélastique existe après localisation des déformations.

Ce qui différencie le travail fait par Jirásek avec celui présenté dans ce mémoire, est le tenseur de rigidité du matériau qui est transverse isotrope et non isotrope. Ainsi, les déformations inélastiques et contraintes principales ne sont pas colinéaires. Mathématiquement, le système d'équations à résoudre est :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \underline{\underline{\varepsilon}}_c \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_e = \underline{\underline{C}}_e^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{S}}_e : \underline{\underline{\sigma}} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}_c = \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon \cdot \underline{\underline{e}}_c \cdot \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon^{-1} \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\sigma \cdot \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\sigma^{-1} \\ e_c = \frac{1}{L_0} g \left(\max_i (s_i) \right), \end{cases} \quad (4.82)$$

où g est la fonction réciproque de la loi d'extraction des fibres de [Li et al.](#), $\underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon$ (resp. $\underline{\underline{\mathcal{P}}}_\sigma$) la matrice de passage des déformations (resp. contraintes) du repère global au repère propre, $\underline{\underline{s}}$ le tenseur des contraintes principales et $\underline{\underline{e}}_c$ le tenseur des déformations inélastiques. Le matériau étant anisotrope, le problème est résolu dans le repère global. Pour s'assurer que le matériau dissipe une quantité d'énergie appropriée, par rapport à l'approche du modèle de bande de microfissures parallèles, la fonction g_i doit être divisée par une longueur caractéristique L_0 — généralement la longueur équivalente de l'élément \sqrt{A} où A est l'aire de l'élément, voir section [4.4.2](#).

À partir du système d'équations (4.82), l'équation non-linéaire à résoudre est la suivante :

$$\underline{\underline{S}}_e : \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (4.83)$$

avec

$$\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon \cdot \underline{\underline{g}}(\underline{\underline{\mathcal{P}}}_\sigma \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\sigma^{-1}) \cdot \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon^{-1} \quad (4.84)$$

et

$$\underline{\underline{g}}(\underline{\underline{s}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g \left(\max_i (s_i) \right) \end{pmatrix}. \quad (4.85)$$

4.7.2 Évaluation des contraintes

L'équation (4.83) est discrétisée : l'objectif est de calculer les contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)}$ à partir des déformations $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n)}$ et des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ de l'étape précédente ;

$$\mathcal{S}_e : \underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} + \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)}) = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(n+1)} \quad (4.86)$$

puis linéarisée

$$\mathcal{S}_e : \left({}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} + \delta\underline{\underline{\sigma}} \right) + \underline{\underline{G}} \left({}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} \right) + \mathcal{Q}_c : \delta\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(n+1)}, \quad (4.87)$$

avec

$$\mathcal{Q}_c = \frac{\partial \underline{\underline{G}}}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \left({}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} \right) = \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g' \left(\max_i (s_i) \right) \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{\mathcal{P}}}_\varepsilon^{-1}, \quad (4.88)$$

où ${}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(n)}$ correspond à la contrainte convergée de l'étape n . À partir de la forme linéarisée (4.87), l'incrément de contrainte est isolé :

$${}^0\delta\underline{\underline{\sigma}} = (\mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c)^{-1} : \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n+1)} - \mathcal{S}_e : {}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} - \underline{\underline{G}} \left({}^0\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} \right) \right], \quad (4.89)$$

En général, il est nécessaire d'effectuer plusieurs itérations, alors :

$${}^1\delta\underline{\underline{\sigma}} = (\mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c)^{-1} : \left[\underline{\underline{\varepsilon}}^{(n+1)} - \mathcal{S}_e : {}^1\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} - \underline{\underline{G}} \left({}^1\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} \right) \right], \quad (4.90)$$

où ${}^{i+1}\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} = {}^i\underline{\underline{\sigma}}^{(n+1)} + {}^i\delta\underline{\underline{\sigma}}$ et \mathcal{S}_c est réévalué (technique de Newton-Raphson complète, voir figure 4.17), ou égale à l'itération précédente (technique de Newton-Raphson modifiée). Il est préférable d'utiliser la version complète de Newton-Raphson au cas où une fissure changerait de statut — d'ouverture à fermeture par exemple.

4.7.3 Matrice tangente du comportement adoucissant

La matrice tangente est issue de l'équation (4.89) :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \mathcal{Q}_T : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}, \quad (4.91)$$

où

$$\mathcal{Q}_T = (\mathcal{S}_e + \mathcal{S}_c)^{-1}. \quad (4.92)$$

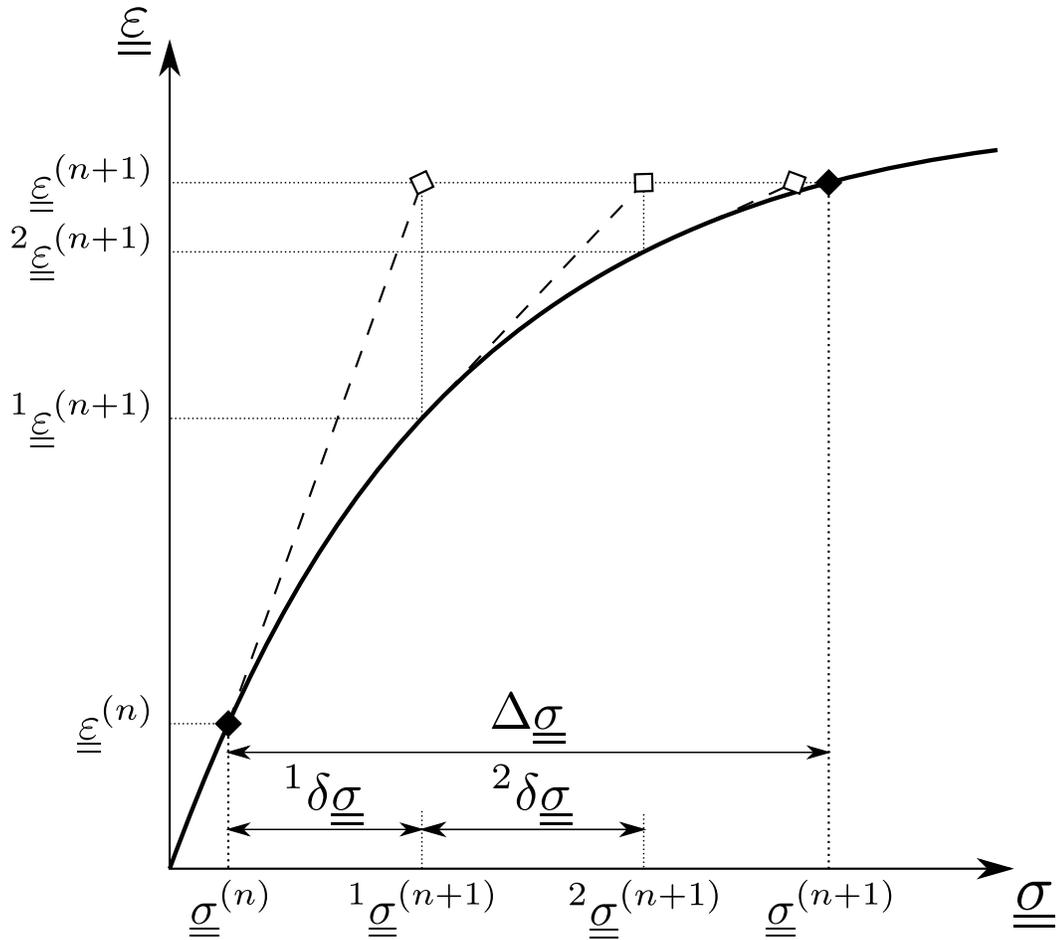


FIGURE 4.17 – Technique de Newton-Raphson complète

4.8 Conclusion du chapitre

Le modèle présenté dans ce chapitre est un modèle d'endommagement micromécanique, transverse isotrope, basé sur les principes de la thermodynamique et associé à la mécanique de la rupture fragile. Seul l'endommagement en traction est considéré — par dégradation de la rigidité —, en compression la loi de comportement est purement élastique sans dégradation de la rigidité initiale. Le modèle prend en compte l'orientation des fibres par l'intermédiaire d'une loi de probabilité normale. Cette loi est un paramètre d'entrée du modèle et doit être renseignée par des méthodes de détection de l'orientation des fibres, voir section 2.3.1. Lorsque la quantité d'énergie accumulée dans le matériau le permet, il y a localisation des déformations puis c'est la loi d'extraction des fibres qui décrit le comportement adoucissant, ce qui génère une discontinuité faible de la loi de comportement. À tout moment, le modèle peut se décharger linéairement avec un retour à l'origine des déformations : le modèle ne présente pas de déformation permanente. La loi adoucissante est régularisée énergétiquement via une longueur

caractéristique ; cette dernière n'est cependant pas liée à la dimension du maillage, amélioration qui sera portée dans de futurs travaux. Enfin l'approche de la micromécanique permet de relier le comportement du matériau à ses constituants : il est donc possible d'apprécier l'effet de la géométrie et du matériau des fibres, de la matrice, et de leur interaction.

Chapitre 5

Calibration, Validation et Application

Dans ce chapitre, le modèle numérique est passé en revue pour comprendre l'influence des différents paramètres matériaux sur la loi de comportement. Alors, le modèle est calibré sur des résultats expérimentaux et la prise en compte de l'orientation des fibres lors d'un essai de traction directe est discutée. Ensuite, le modèle numérique est implanté dans le logiciel Code_Aster pour une application structurale : un essai de flexion. À nouveau, l'effet des paramètres est passé en revue pour faciliter la calibration du modèle sur les résultats expérimentaux. La prise en compte de l'orientation des fibres par le modèle, dans le cadre d'un essai de flexion, est alors discutée.

5.1 Comportement du modèle en traction uniaxial

Le modèle établi au chapitre 4 est d'abord implanté dans le logiciel Python avant de l'être dans Code_Aster. Dans Python, il ne s'agit pas d'une analyse par éléments finis, mais d'un calcul à un nœud.

5.1.1 Effets des paramètres matériaux

Les figures ci-dessous ont été produites pour comprendre l'impact des paramètres matériaux sur la loi de comportement. Les figures ci-dessous sont toutefois présentées

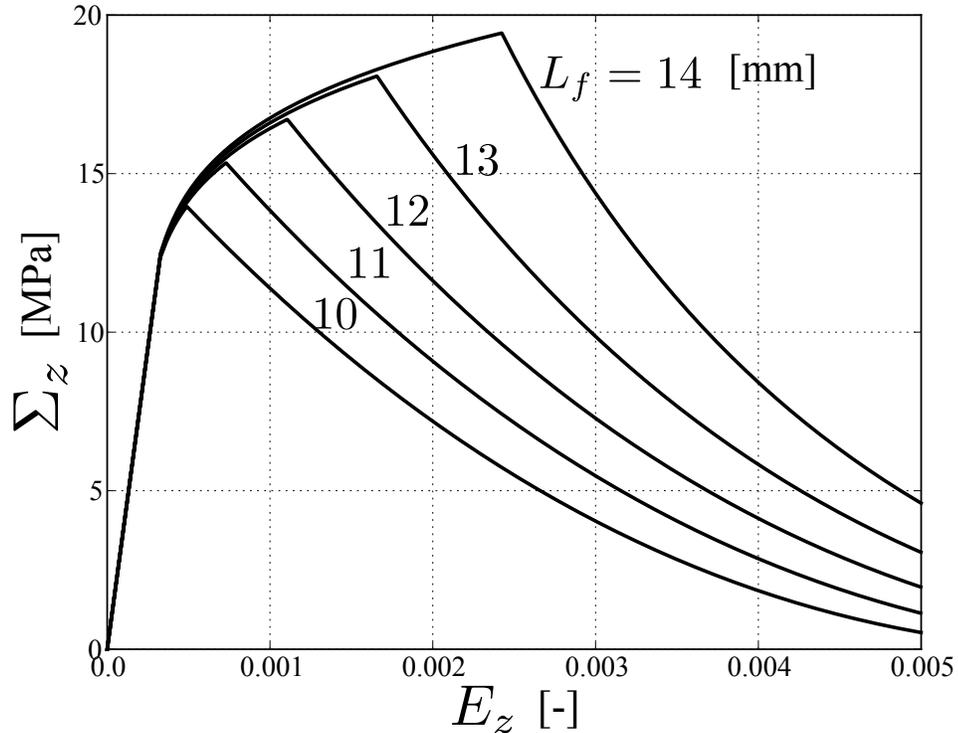


FIGURE 5.1 – Effet de la longueur des fibres

pour des valeurs permettant d'avoir le domaine écouissant. En d'autres termes, si la limite élastique de la matrice (f_t) est très élevée et que le volume de fibres (v_f) est bas, alors le paramètre d'endommagement initial (ϵ_0) n'aurait aucune influence sur la loi de comportement, car cette dernière ne présenterait pas de domaine écouissant.

Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 montrent l'impact de la variation des paramètres liés à la géométrie et au matériau des fibres. Ces trois figures sont à prendre avec précaution, car selon la valeur des paramètres, il se peut que le mécanisme d'extraction des fibres ne corresponde plus à celui retenu dans les hypothèses : c'est-à-dire qu'au lieu de l'extraction, il y a une plastification ou une rupture des fibres. En revanche, ces figures nous montrent que les fibres avec un élancement ($\lambda = L_f/\phi_f$) plus grand permettent globalement d'augmenter la ductilité et la résistance du matériau, malgré que la mise en œuvre sera plus difficile. Cette première observation est rassurante, car conforme à la littérature (Wuest, 2007). L'effet du pourcentage volumique de fibres, voir figure 5.4, est significatif sur la résistance maximale ; mais seule la tendance doit être observée, car la rhéologie du mélange n'est pas considérée et la mise en œuvre en pourrait être fortement affectée. La figure 5.5 montre que plus le module d'Young de la matrice est grand, plus le domaine écouissant est grand, sans toutefois dégrader de manière significative la résistance à la traction.

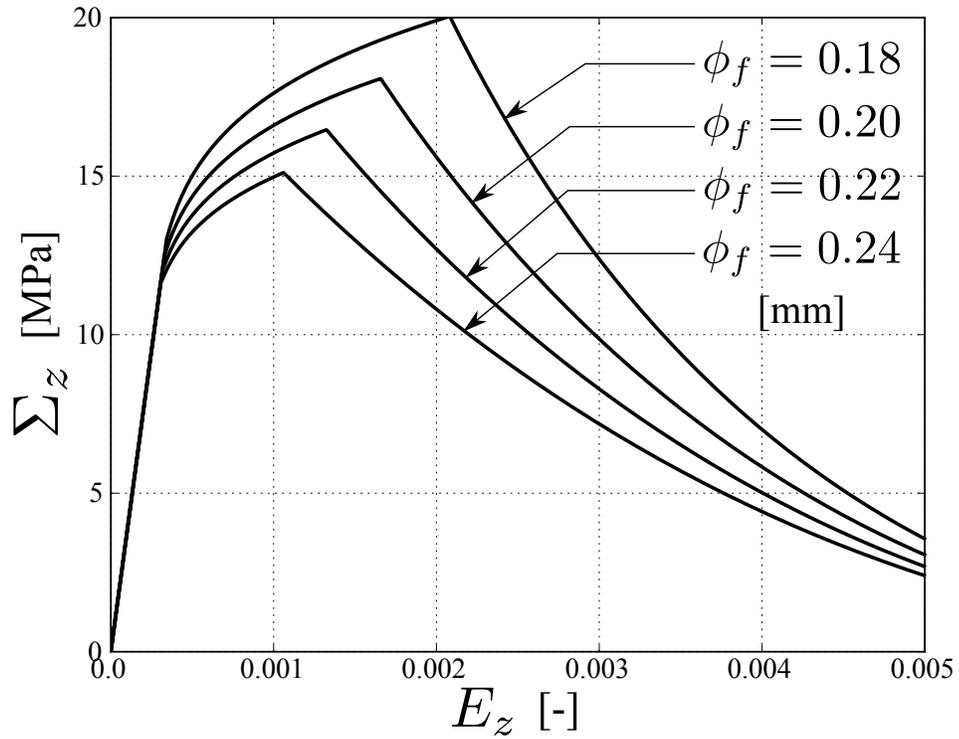


FIGURE 5.2 – Effet du diamètre des fibres

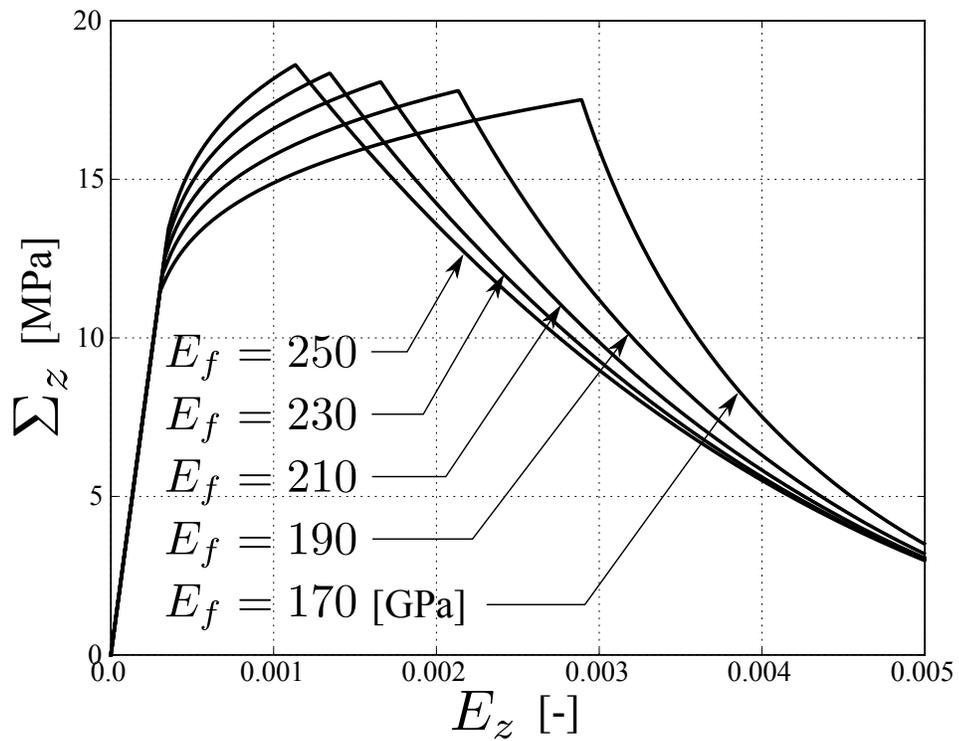


FIGURE 5.3 – Effet du module d'Young des fibres

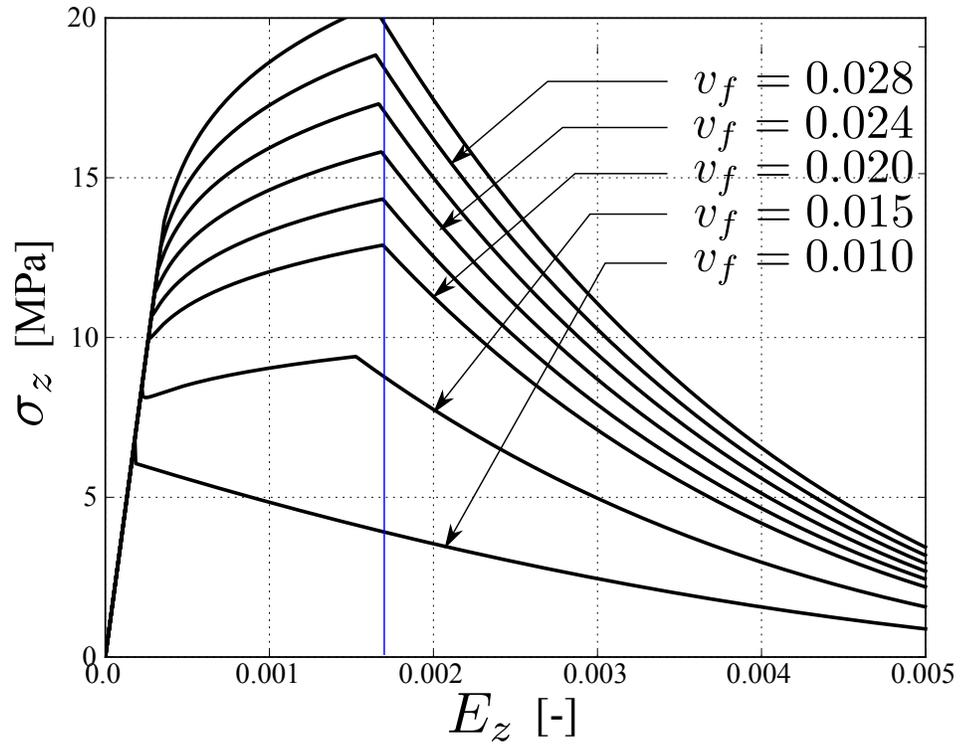


FIGURE 5.4 – Effet du pourcentage volumique de fibres

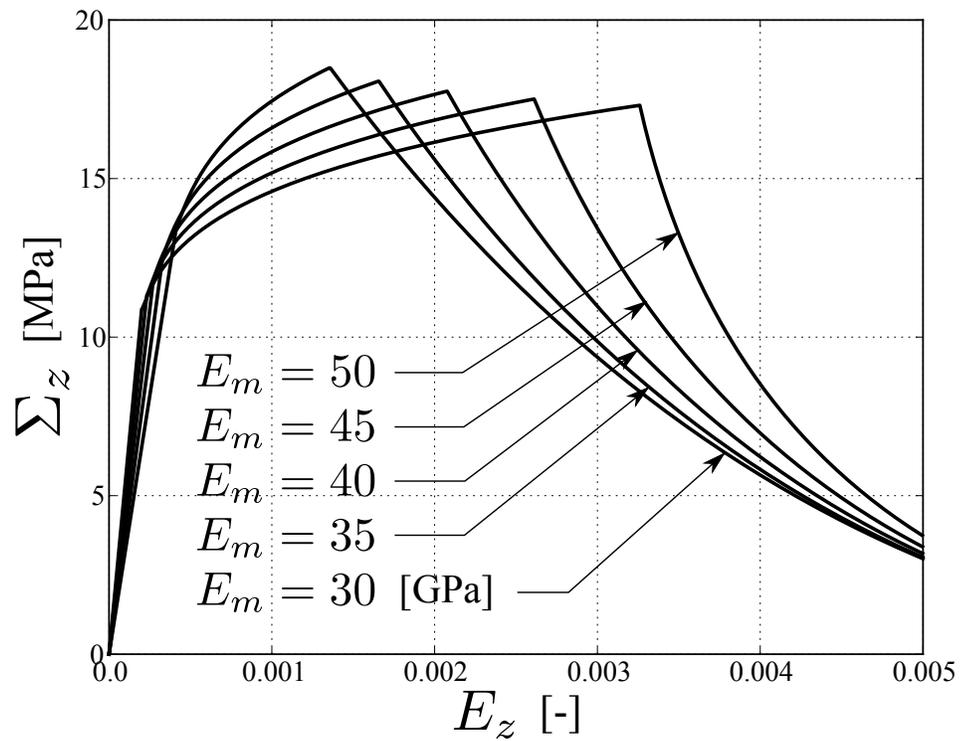


FIGURE 5.5 – Effet du module d'Young de la matrice

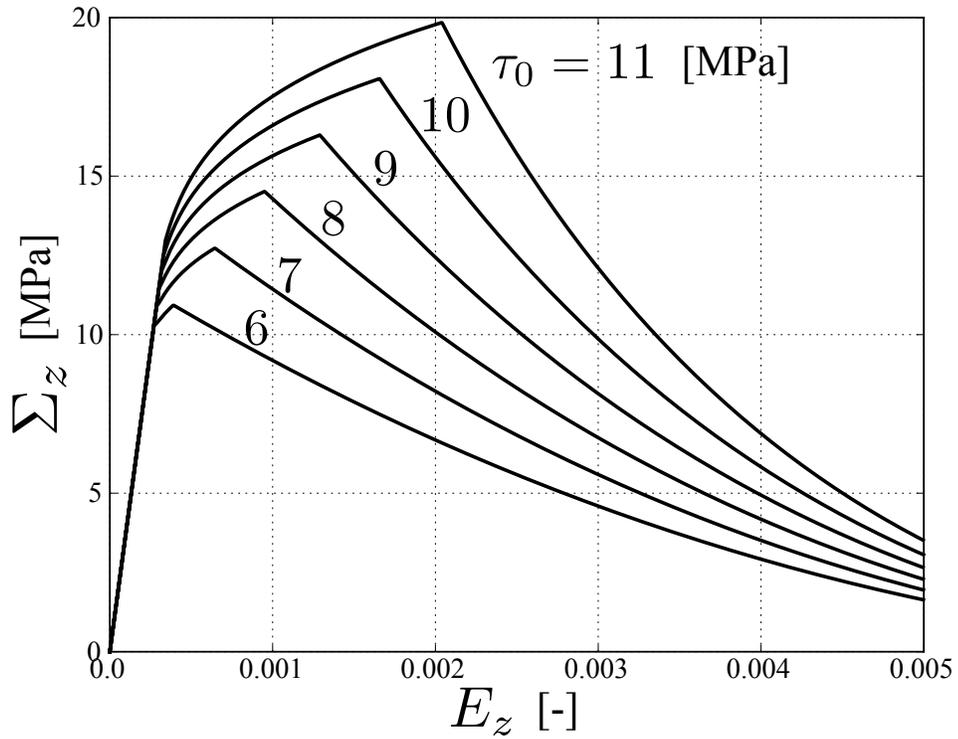


FIGURE 5.6 – Effet de la contrainte d'interface fibre-matrice

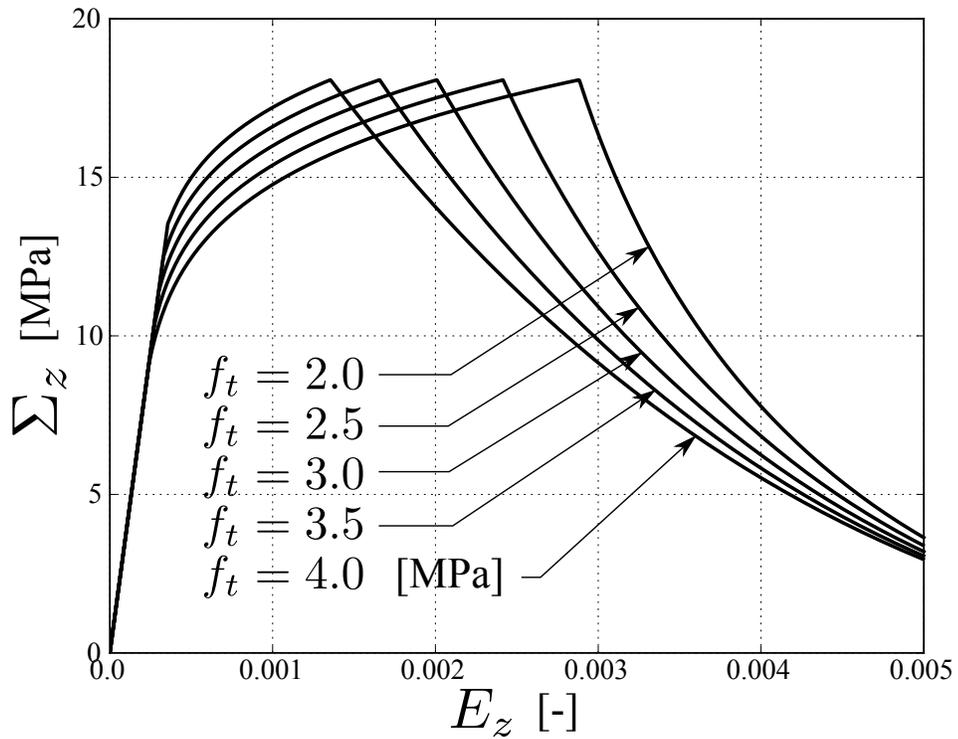


FIGURE 5.7 – Effet de la limite élastique de la matrice

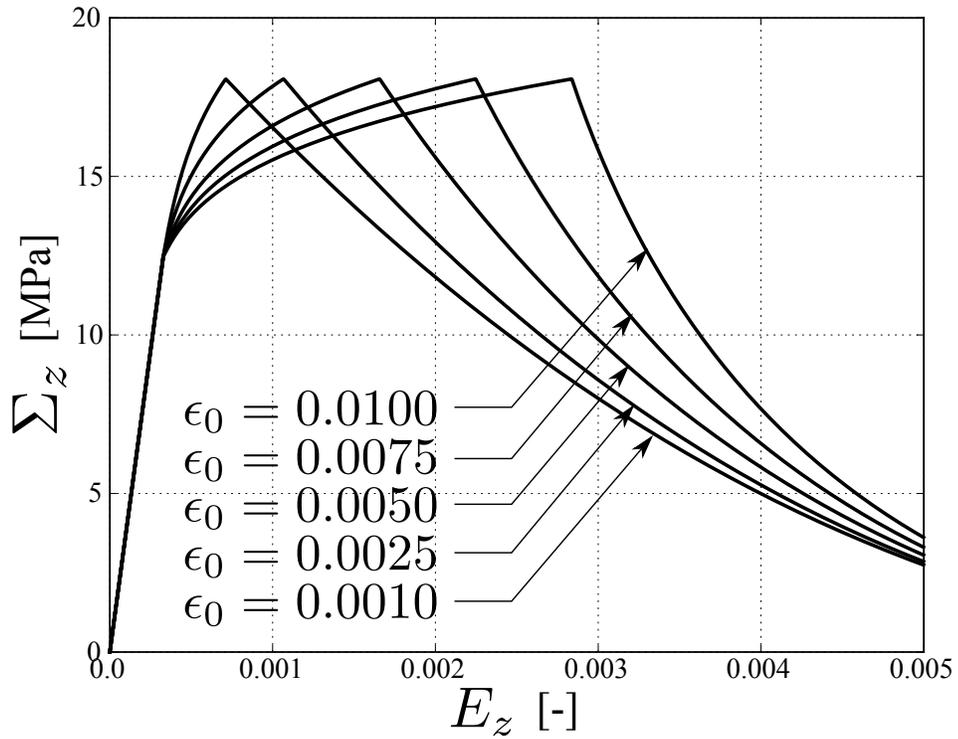


FIGURE 5.8 – Effet de l'endommagement initial de la matrice

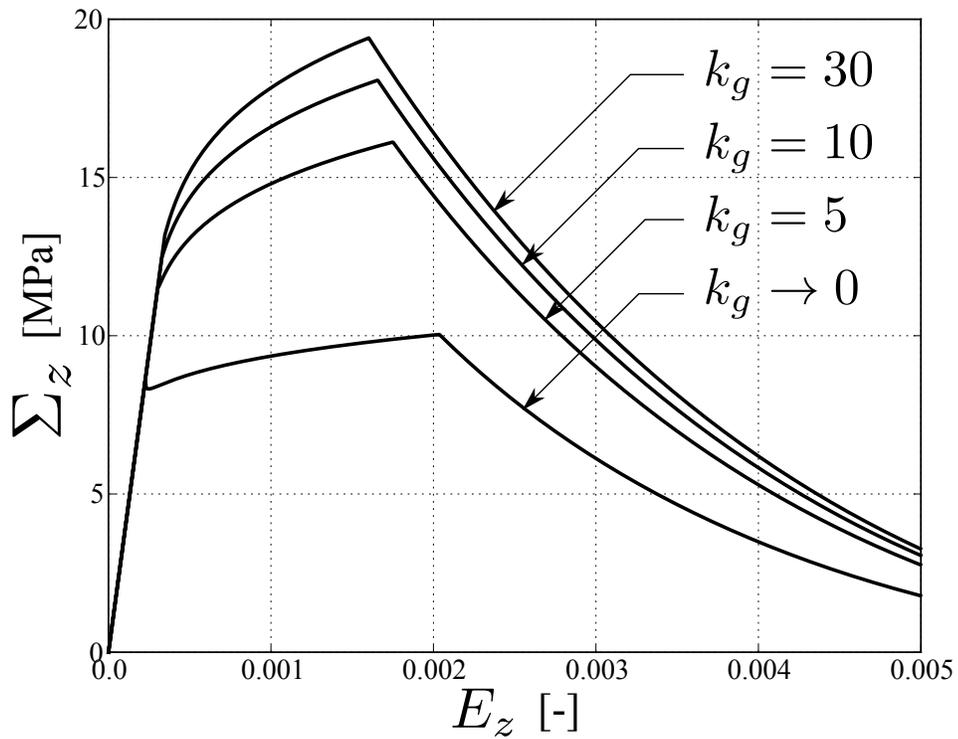


FIGURE 5.9 – Effet du coefficient d'amplitude de la loi de probabilité

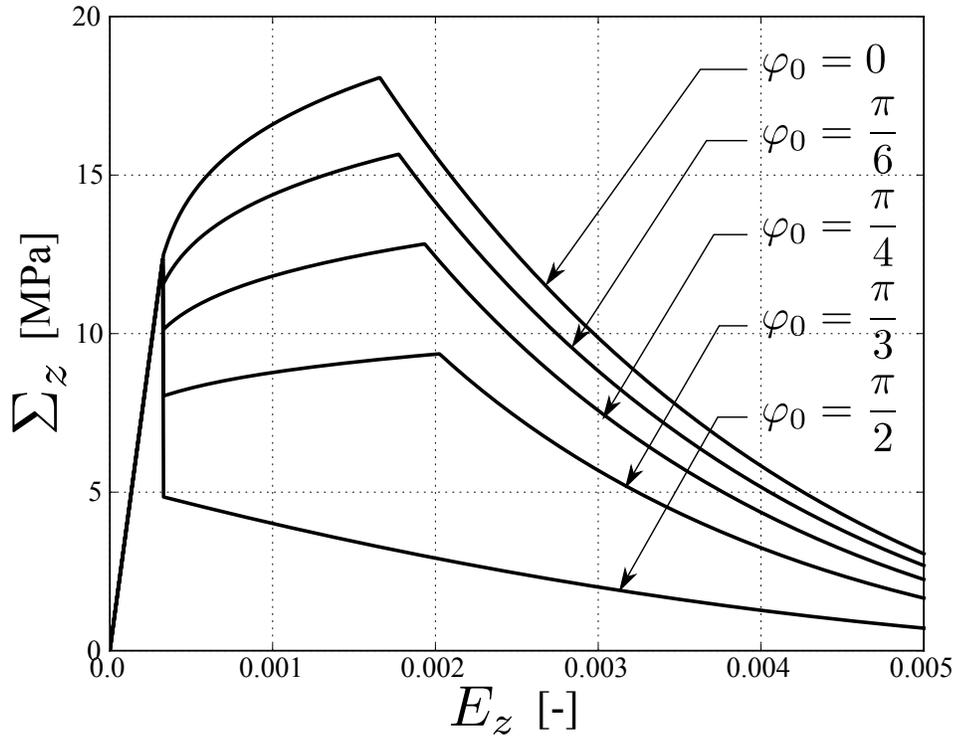


FIGURE 5.10 – Effet de l'orientation des fibres vis-à-vis de la charge

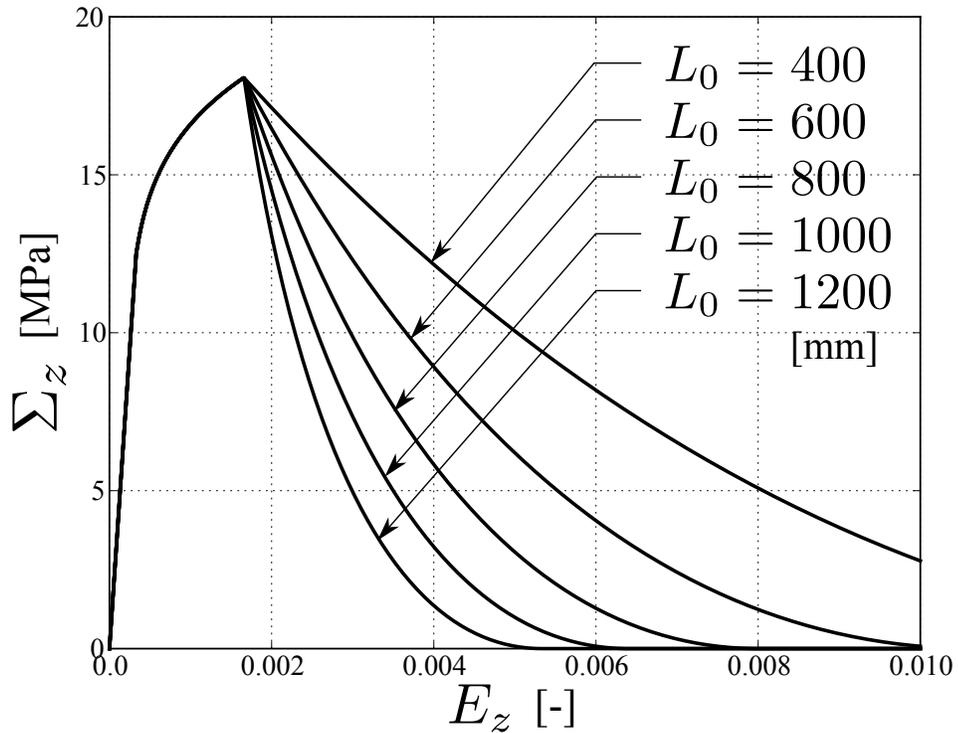


FIGURE 5.11 – Effet de la longueur caractéristique du matériau

Une autre tendance, même faible, est toutefois notée : un volume important de fibres n'est pas forcément lié à une augmentation du domaine écrouissant, la ligne verticale permet d'apprécier cette affirmation. Concernant la limite élastique de la matrice (f_t), cette dernière influence grandement le début et la fin du domaine non linéaire. Ceci est cohérent puisque si la résistance de la matrice est plus faible alors les fissures se propagent plus tôt ; la localisation des déformations est retardée, car les fibres peuvent alors dissiper davantage d'énergie. À propos de l'endommagement initial ($\epsilon_0 = \mathcal{N}_c a_0$), ce paramètre est inconnu et n'a d'influence que sur la fin du domaine écrouissant (voir figure 5.8).

Dans le cas où les fibres sont globalement orientées dans la direction de la charge ($\varphi_0 = 0$), plus le coefficient d'amplitude de la loi de probabilité (k_g) est grand, plus les fibres interceptent les fissures et plus elles dissipent d'énergies — ce qui est cohérent avec la figure 5.9. En revanche, l'effet de k_g sur la localisation des déformations n'est pas aussi évident.

Comme attendue, la figure 5.10 montre l'influence de l'orientation des fibres sur le comportement en traction. La contrainte est maximale pour une orientation des fibres dans la direction de la charge. Cependant, cette courbe met en évidence une imperfection : la déformation et la contrainte de limite élastique du matériau ne sont pas fonction de l'orientation des fibres, tel que Bayard (2003) le mesure sur les figures 2.14 et 2.15. Ce défaut provient du fait que la limite élastique du matériau ne dépend pas de l'orientation des fibres. Il pourrait alors être envisagé de lier la limite élastique à l'orientation des fibres pour intégrer le principe qu'« une mauvaise orientation des fibres peut amorcer la fissuration. » En revanche, la chute brutale de la contrainte est un phénomène observé dans la section 5.1.5.

5.1.2 Résultats intermédiaires

5.1.2.1 Variable d'endommagement

La variable d'endommagement utilisée dans le modèle est un scalaire $\epsilon \in [\epsilon_0, \infty]$. Il est cependant plus courant d'utiliser une variable d'endommagement telle que $\Omega \in [0, 1]$. Alors, pour comprendre l'évolution du paramètre ϵ , le paramètre Ω défini tel que :

$$E = (1 - \Omega)E_i \Rightarrow \Omega = 1 - \frac{E_i}{E_0} \quad (5.1)$$

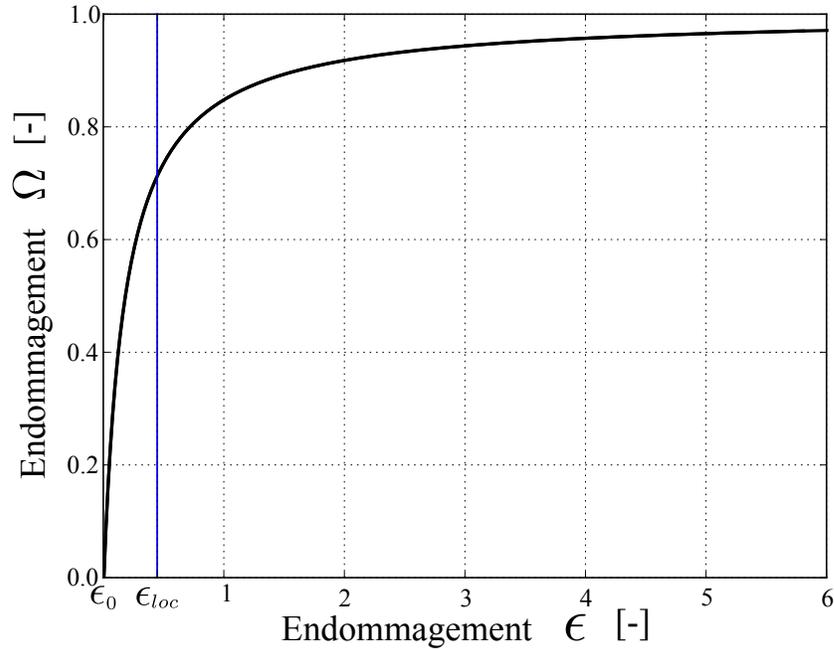


FIGURE 5.12 – Équivalence entre l’endommagement défini par [Budiansky et O’Connell \(1976\)](#) et l’endommagement traditionnel Ω

où E_i et E_0 sont respectivement les modules d’Young intermédiaire et initial, est tracé en fonction de ϵ — voir figure 5.12. Le matériau est anisotrope : plus précisément, c’est Ω_{zz} qui est tracé où z est la direction de la charge. Le lien entre ces deux paramètres d’endommagement est fortement non linéaire après localisation des déformations. Le paramètre ϵ a l’avantage de permettre une meilleure visualisation de l’endommagement et de la localisation des déformations, tandis que Ω est plus adapté pour visualiser l’endommagement avant localisation.

5.1.2.2 Taux de dissipation d’énergie

Le modèle micromécanique étant basé sur le concept du taux de dissipation d’énergie, il est intéressant d’observer graphiquement son évolution. Sur la figure 5.13, trois points sont identifiés : un dans le domaine élastique, un dans le domaine écouissant et le troisième à la transition entre les deux domaines. Les points d’équilibre du système correspondent aux intersections de la courbe du taux de dissipation d’énergie (\mathcal{G}^ϵ) en [bleu](#), avec la courbe représentant l’énergie de rupture relative aux fissures (G_c^ϵ), en [rouge](#). Au fur et à mesure que les déformations augmentent, la courbe de \mathcal{G}^ϵ évolue du point A à B puis de B à C. Soit X le point représentant l’état d’énergie du système après accroissement des déformations ; le matériau n’est pas à l’équilibre, il possède trop d’énergie. Cette énergie est dissipée — le paramètre d’endommagement augmente —

jusqu'à atteindre l'équilibre au point X'. Ce phénomène s'arrête lorsque la localisation des déformations est atteinte.

5.1.2.3 Degré d'anisotropie du modèle

Le modèle est isotrope tant que la limite élastique du matériau n'est pas atteinte. Une fois cette limite atteinte, les fissures se propagent perpendiculairement à la direction principale des sollicitations, alors le matériau devient anisotrope. Le degré d'anisotropie est défini par l'équation (5.2) :

$$\alpha = \frac{\underline{C}_{zz}^{\text{hom}}(\epsilon)}{\underline{C}_{xx}^{\text{hom}}(\epsilon)} \quad (5.2)$$

et le paramètre d'endommagement équivalent à l'équation (5.1) :

$$\Omega_{zz} = 1 - \frac{\underline{C}_{zz}^{\text{hom}}(\epsilon)}{\underline{C}_{zz}^{\text{hom}}(\epsilon_0)}. \quad (5.3)$$

Ces deux courbes sont tracées en fonction des déformations sur la figure 5.14. Les deux courbes sont symétriques par rapport à l'axe 0.5, car il s'agit d'un système de chargement particulier de traction uniaxial. La troisième courbe du graphique représente la stabilité du système. Le système est stable si $f_{,\epsilon} < 0$, ou si f est une fonction décroissante de l'endommagement. L'objectif étant que si la fonction de chargement est positive — suite à un accroissement du chargement —, f doit décroître jusqu'à 0 pour atteindre l'équilibre et respecter les conditions de chargement/déchargement données à l'équation (4.6).

$$f_{,\epsilon} = \frac{\partial f}{\partial \epsilon}. \quad (5.4)$$

À partir de la localisation, il n'y a plus de fonction de chargement, car c'est la loi d'extraction des fibres qui s'applique.

5.1.3 Ordre de calibration

Suite à l'observation des effets des paramètres sur la réponse du modèle, un ordre de calibration du modèle est préconisé. En règle générale, la longueur des fibres (L_f), leurs diamètres (ϕ_f), pourcentage volumique (v_f), orientations (φ_0) et module d'Young (E_f) sont données dans la documentation scientifique. Concernant la matrice, la rigidité initiale de celle-ci (E_m) ainsi que le coefficient de Poisson (ν) sont également donnés.

La contrainte d'interface (τ_0) et l'amplitude de la loi de probabilité (k_g) sont les

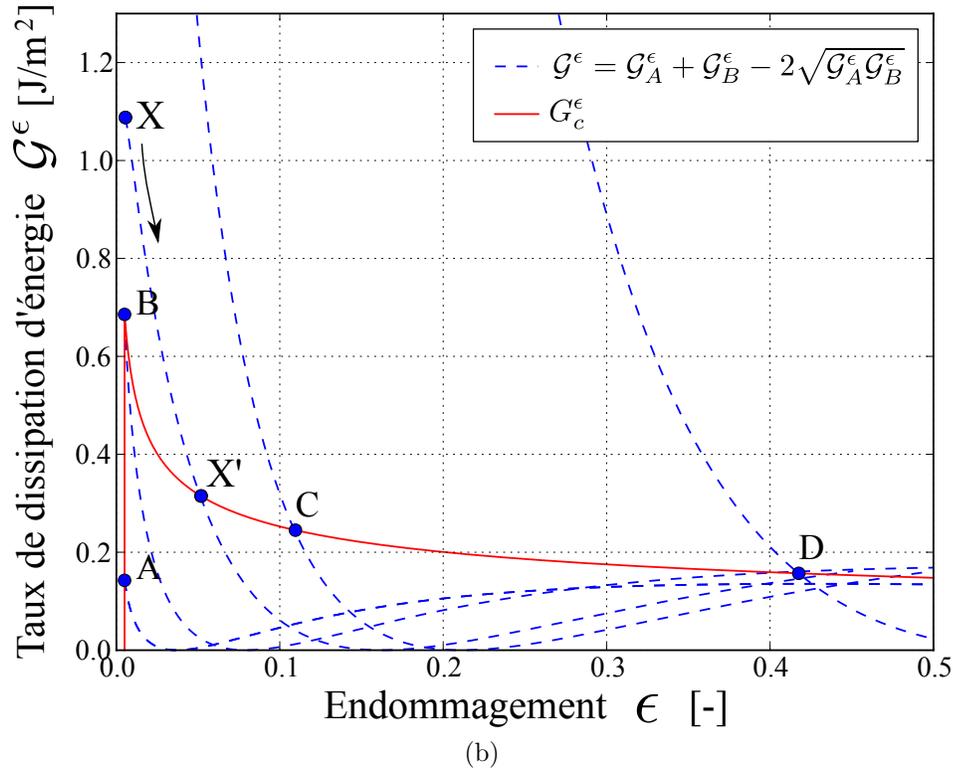
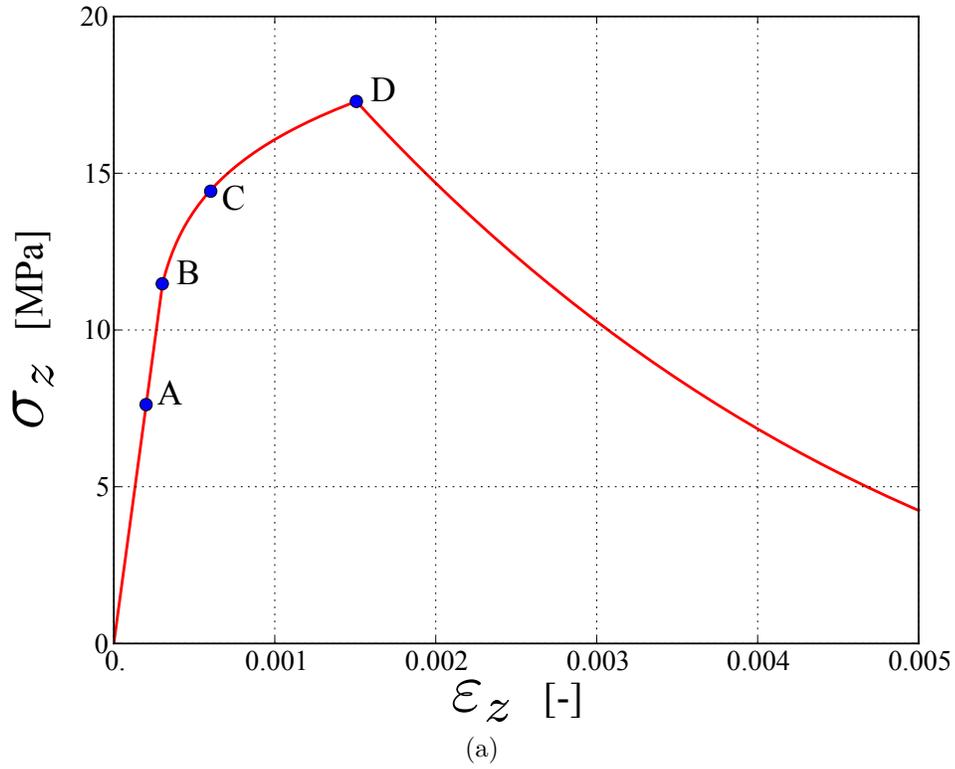


FIGURE 5.13 – Équivalence entre la position des points sur (a) la loi de comportement en traction et (b) le graphique des taux de dissipation d'énergies

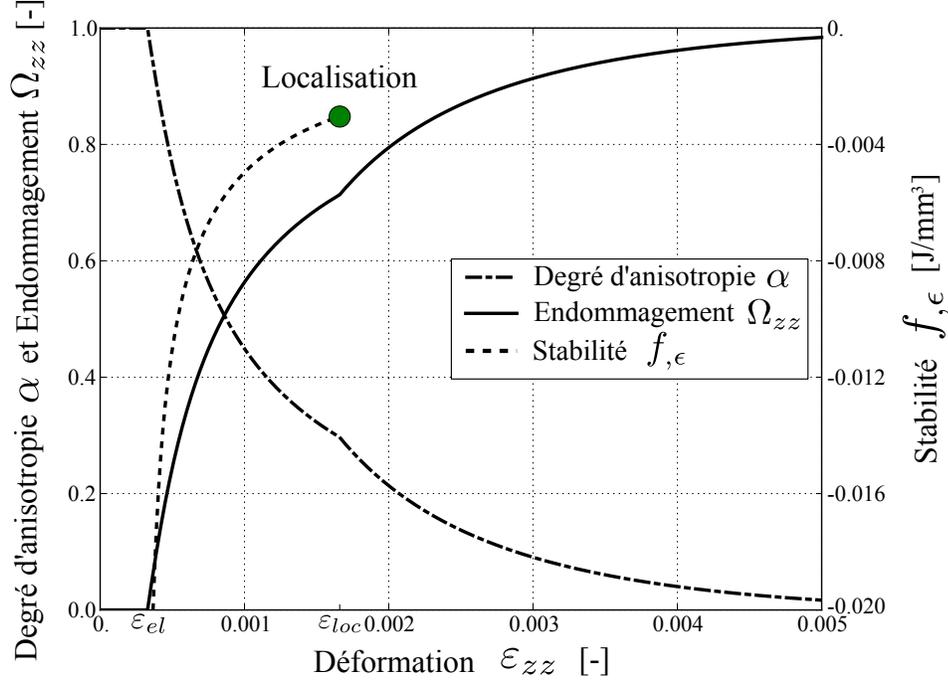


FIGURE 5.14 – Degré d’anisotropie, endommagement Ω et stabilité de la loi de chargement

deux premiers paramètres à calibrer en cherchant à atteindre la contrainte maximale du matériau. Ensuite, la limite élastique de la matrice (f_t) peut être calibrée pour capturer la fin du domaine élastique. L’endommagement initial (ϵ_0) est le paramètre suivant : il permet d’ajuster le début du phénomène de localisation. Enfin, la longueur caractéristique (L_0) permet de capter la section adoucissante de la courbe.

Concernant la limite élastique de la matrice (f_t), il faut rappeler qu’elle a été introduite à l’équation (4.64) :

$$G_{c0}^e = \frac{8}{3} \frac{f_t^2}{E_m}, \text{ avec } K_{c0} = \frac{2}{\pi} f_t \sqrt{\pi a_0}.$$

Après observation de la figure 5.7, f_t ne semble pas être très pertinent. Théoriquement, il s’agit de la limite élastique de la matrice cimentaire sans les fibres, mais dans la pratique cette valeur est inconnue. Les essais de traction pur sur un BFUP sans fibre, ne seraient pas non plus représentatifs, car alors la rhéologie du matériau change complètement : f_t n’est donc pas un paramètre qu’il faut relier aux valeurs de la littérature. Il est aussi possible de remplacer f_t par l’énergie spécifique de rupture G_f , cela n’a pas été le cas dans ce mémoire, puisque G_f est un paramètre moins évocateur que f_t .

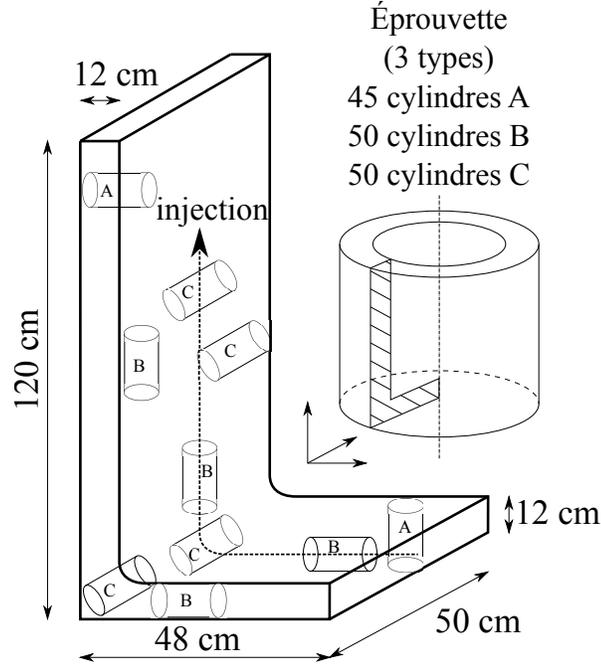


FIGURE 5.15 – Coulée et prélèvement d’un conteneur de déchets nucléaires, (Sorelli et al., 2007)

5.1.4 Résultat d’un conteneur de déchets nucléaires

Le modèle est calibré par un essai de traction direct, sur une éprouvette sans entaille prélevée à partir d’un conteneur de déchets nucléaires (voir figure 5.15). Le sens de remplissage du conteneur et donc la direction principale des fibres sont indiqués sur cette figure, les prélèvements sont effectués en conséquence : l’objectif étant de réaliser des essais de traction pour une orientation des fibres vis-à-vis de la charge qui soit de 0° et 90° . Les résultats expérimentaux ainsi que la réponse du modèle sont donnés aux figures 5.16 et 5.17 avec les paramètres donnés par les équations (5.5).

$$\left\{ \begin{array}{l} L_f = 13 \text{ mm} \\ \phi_f = 0.20 \text{ mm} \\ v_f = 2.7 \% \\ E_f = 210\,000 \text{ MPa} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = 10.0 \text{ MPa} \\ f_t = 4.0 \text{ MPa} \\ E_m = 37\,000 \text{ MPa} \\ \nu = 0.18 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_c = 0.03 \text{ nb/mm}^3 \\ a_0 = 1.0 \text{ mm} \\ L_0 = 60.0 \text{ mm} \\ k_g = 10 \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Seule l’orientation des fibres est changée pour passer d’un graphique à l’autre. Le modèle micromécanique capture donc le comportement d’un essai de traction uniaxial. Il capture aussi l’effet de l’orientation des fibres vis-à-vis des directions principales de sollicitation. Concernant l’orientation à 90° , le modèle ne présente aucune partie non linéaire écrouissante contrairement aux valeurs expérimentales. De plus, comme indiqué

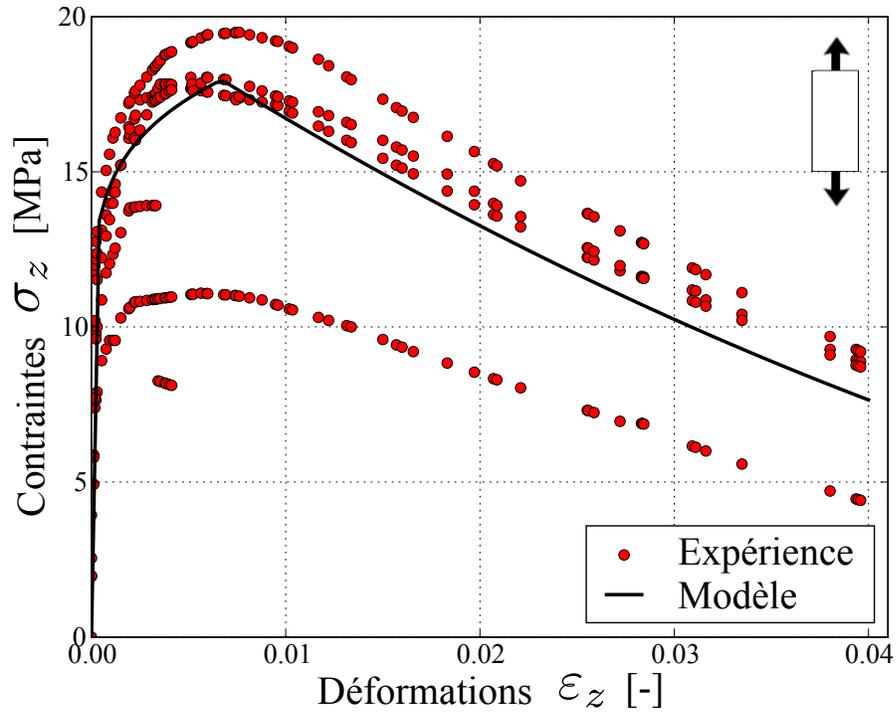


FIGURE 5.16 – Comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux pour une orientation des fibres de 0°

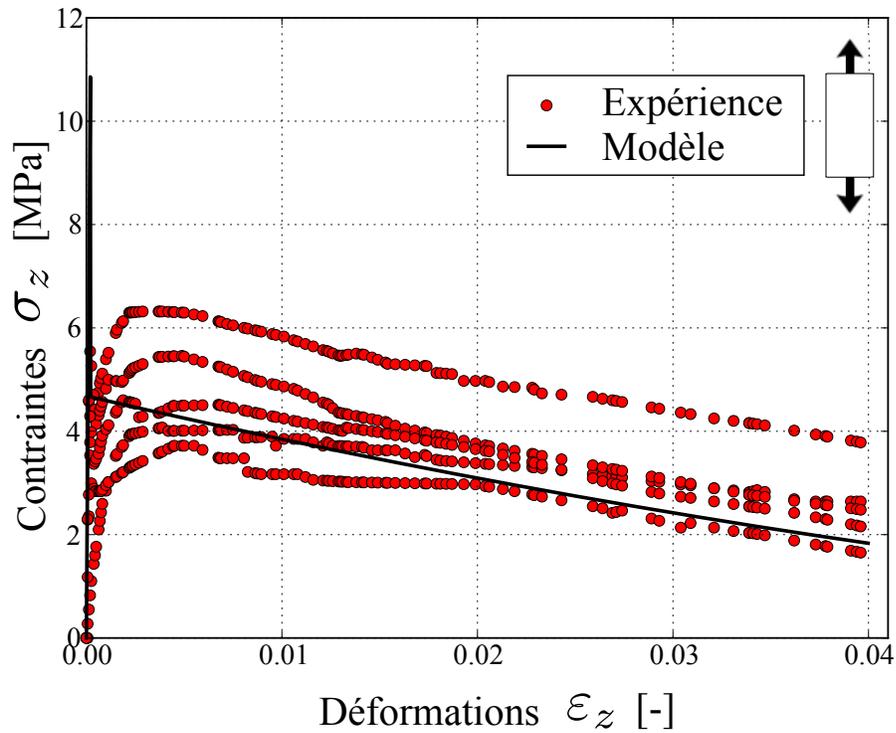


FIGURE 5.17 – Comparaison du modèle avec les résultats expérimentaux pour une orientation des fibres de 90°

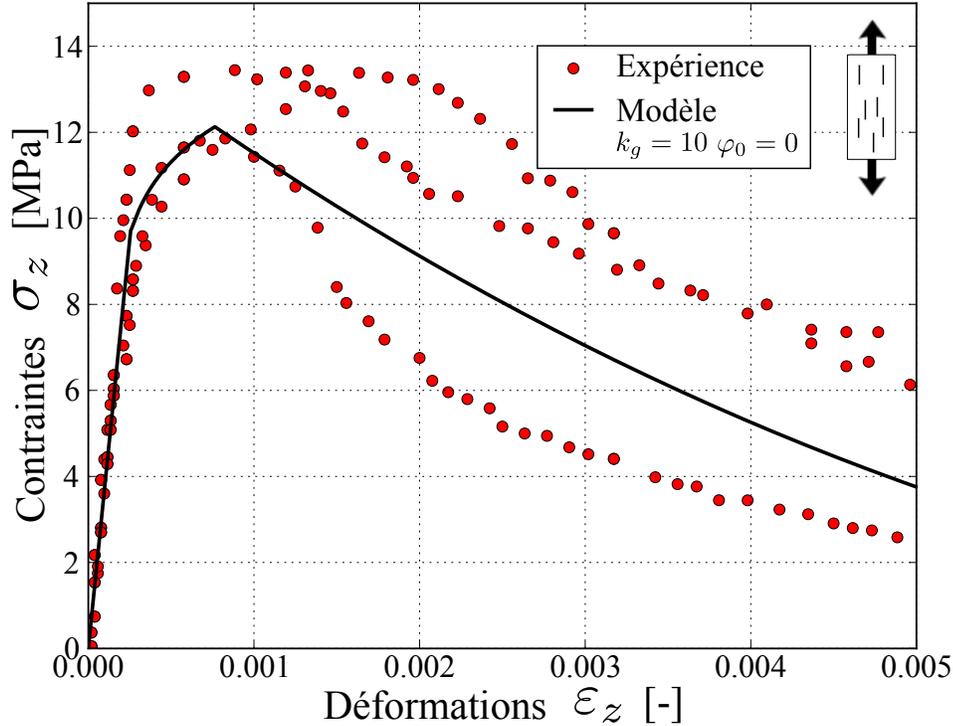


FIGURE 5.18 – Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 0°

plus tôt, la limite élastique est surévalué pour cette même orientation. Le modèle doit maintenant être validé sur d'autres résultats expérimentaux pour le conforter.

5.1.5 Modélisation de l'orientation des fibres

C'est à partir des expériences de Bayard (2003) que le modèle est confronté. À la section 2.3.4, la mise en œuvre des éprouvettes et les premiers résultats y sont exposés. Le modèle est préalablement calibré sur les courbes de la figure 5.18, puis l'orientation des fibres est modifiée et comparée aux autres courbes permettant de vérifier que le modèle capture l'effet de cette orientation.

$$\left\{ \begin{array}{l} L_f = 13 \text{ mm} \\ \phi_f = 0.18 \text{ mm} \\ v_f = 2.7 \% \\ E_f = 210\,000 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_0 = 6.0 \text{ MPa} \\ f_t = 3.0 \text{ MPa} \\ E_m = 35\,000 \text{ MPa} \\ \nu = 0.18 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_c = 0.005 \text{ nb/mm}^3 \\ a_0 = 1.0 \text{ mm} \\ L_0 = 600.0 \text{ mm} \\ k_g = 10 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Les figures 5.18, 5.19, 5.20, 5.21 et 5.22 montrent que le modèle capture assez bien l'effet de l'orientation des fibres. Quelleque soit l'orientation des fibres, le domaine

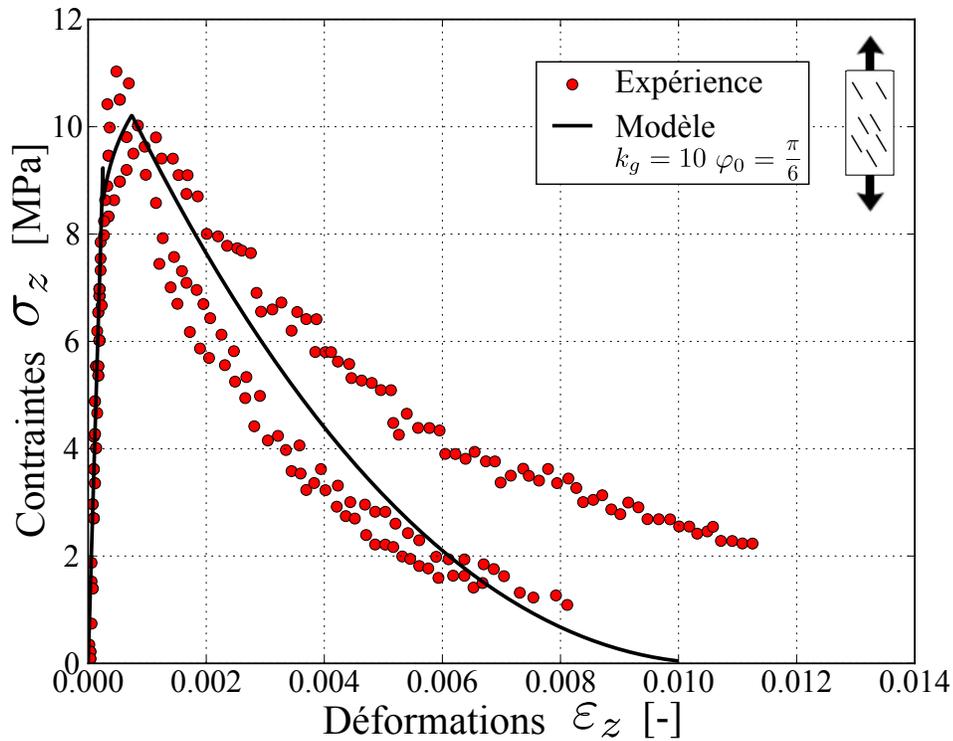


FIGURE 5.19 – Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 30°

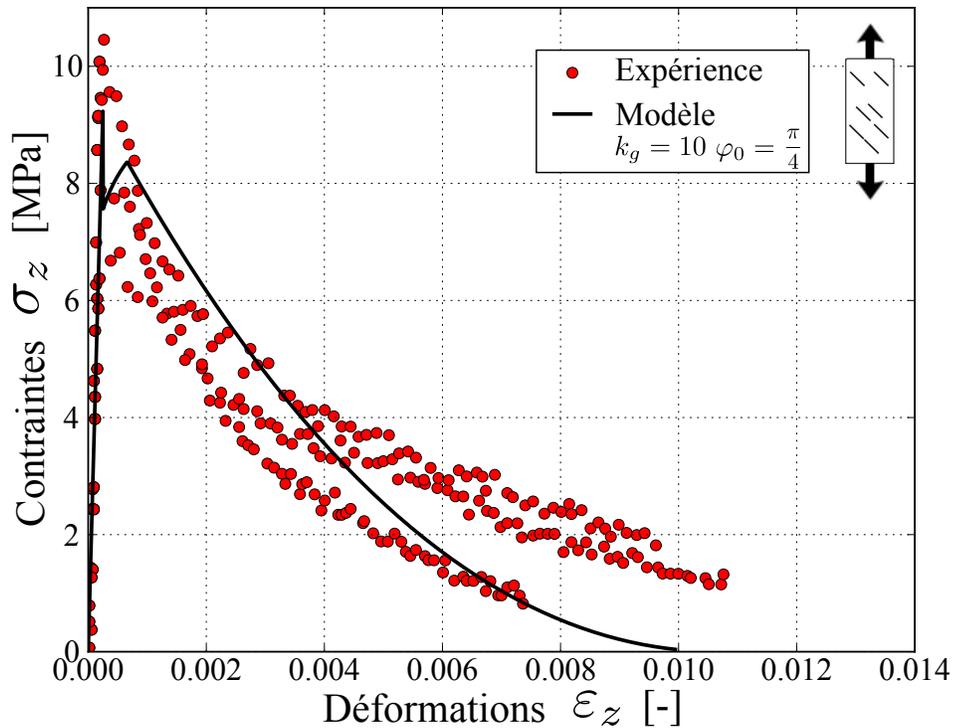


FIGURE 5.20 – Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 45°

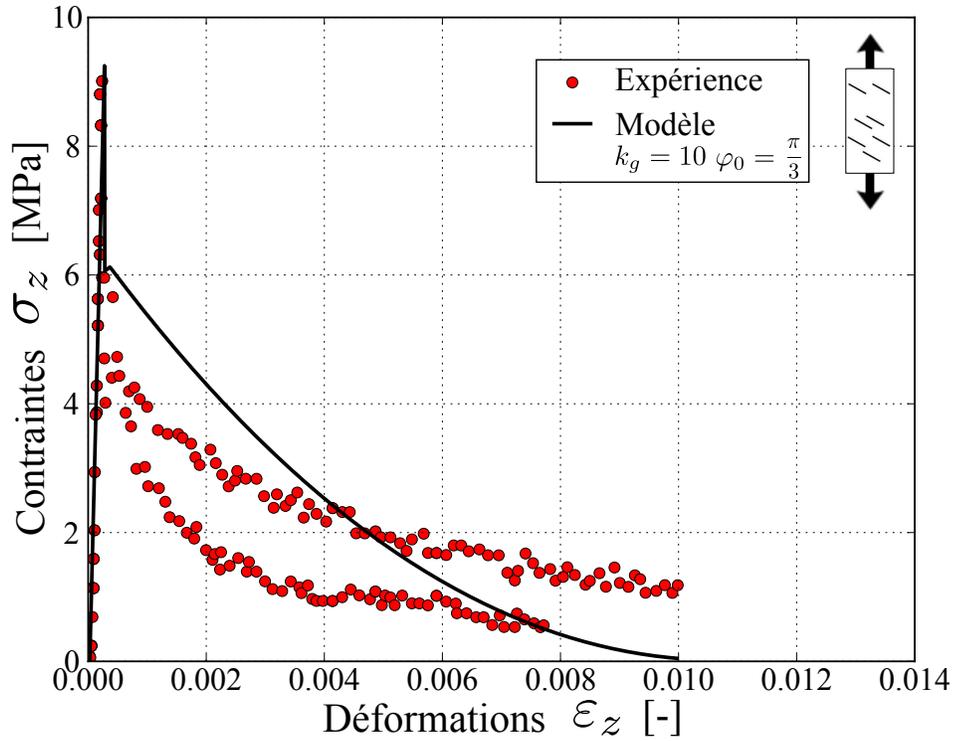


FIGURE 5.21 – Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 60°

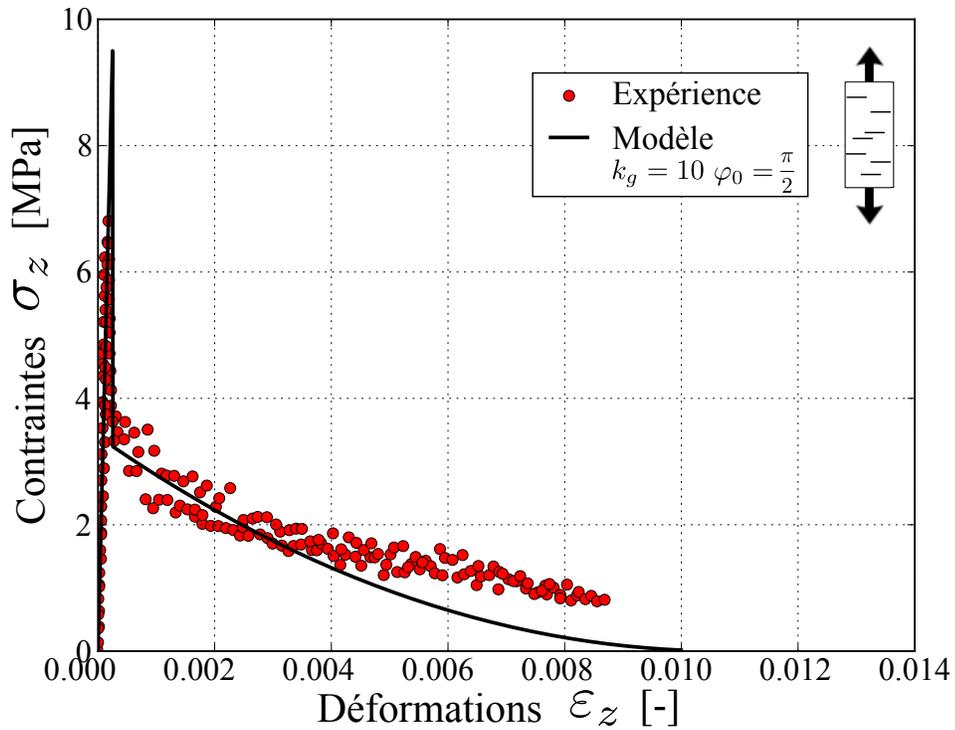


FIGURE 5.22 – Comparaison entre les essais de Bayard et le modèle numérique pour une orientation des fibres de 90°

linéaire élastique est bien modélisé, à l'exception de la limite élastique qui devrait être plus grande pour $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ et plus petite pour $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Le domaine non linéaire écrouissant, n'est présent que pour des orientations de 0° , 30° et 45° . Une fois que la contrainte est suffisante pour extraire les fibres, le critère de localisation est atteint et c'est la courbe d'extraction des fibres qui suit le domaine écrouissant ou élastique selon le cas. Si la tendance des résultats est globalement bonne, la comparaison est à relativiser, car pour une orientation donnée, le modèle n'est comparé qu'à deux voire trois essais. Il faut désormais soumettre le modèle à une application plus complexe : les essais de flexion de [Bernier et Behloul \(1996\)](#) ; mais préalablement le modèle est implanté dans le logiciel de calcul numérique Code_Aster.

5.2 Logiciel de simulation numérique Code_Aster

Code_Aster est un logiciel de calcul utilisant la méthode des éléments finis pour « analyser des structures et faire des calculs thermomécaniques pour l'étude et la recherche ». Il permet également de faire des calculs sur « toute une panoplie de méthodes d'analyse et de modélisation multiphysique non linéaire ». Le site internet de Code_Aster : <http://www.code-aster.org>, fournit davantage de renseignements.

5.2.1 Utilisation de Code_Aster

Diffusé sous la licence GNU-GPL, le logiciel est gratuit et l'accès au code source permet de modifier aisément les lois de comportement en renseignant le tenseur des contraintes, les variables internes et la matrice tangente. Le forum sur l'installation et l'utilisation de Code_Aster est très actif et permet de résoudre de nombreux problèmes. Il existe également une panoplie de cas-tests : il suffit de trouver celui qui correspond au travail souhaité et de le changer en conséquence pour résoudre le problème spécifique à traiter.

L'utilisation du logiciel peut être résumée par la figure 5.23. Dans cette figure, chaque boîte correspond à un logiciel et une interface graphique associée. Ci-dessous, la liste des programmes :

- Efficas : éditeur de fichier commande Aster,
- Salome : environnement de pré et post-traitement (CAO et maillage),
- Astk : gestion des calculs et des entrées/sorties et interface d'exécution des calculs,
- Grace : outil de tracé de courbe graphique 2D,

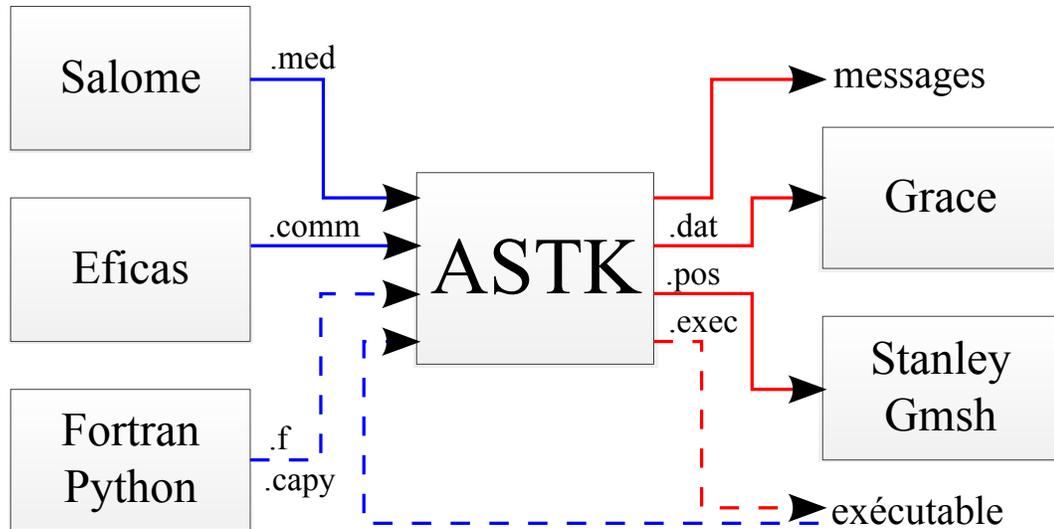


FIGURE 5.23 – Architecture générale de l'utilisation de Code_Aster

- Stanley : outil de post-traitement interactif.

Les flèches indiquent des transmissions de fichiers indispensables pour le bon déroulement du calcul tandis que les pointillés indiquent les entrées/sorties nécessaires pour utiliser la fonction de surcharge.

5.2.2 Architecture des lois de comportement

Les fichiers Fortran contenant les lois de comportement sont situés dans le dossier `aster/STAx/bibfor/algorithm/`. Les lois de comportement ont un nom du type `lc****.f`. La structure de ces fichiers est en général de la forme suivante :

- déclaration des variables,
- lecture des options, condition de référence, caractéristiques matériau,
- calcul des déformations mécaniques et thermiques,
- passage dans le repère propre,
- calculs des contraintes et variables internes (option RESI activée),
- retour dans le repère global,
- calcul de la matrice tangente (option RIGI activée).

L'organigramme du modèle développé dans le cadre de cette maîtrise est présenté figure 5.24.

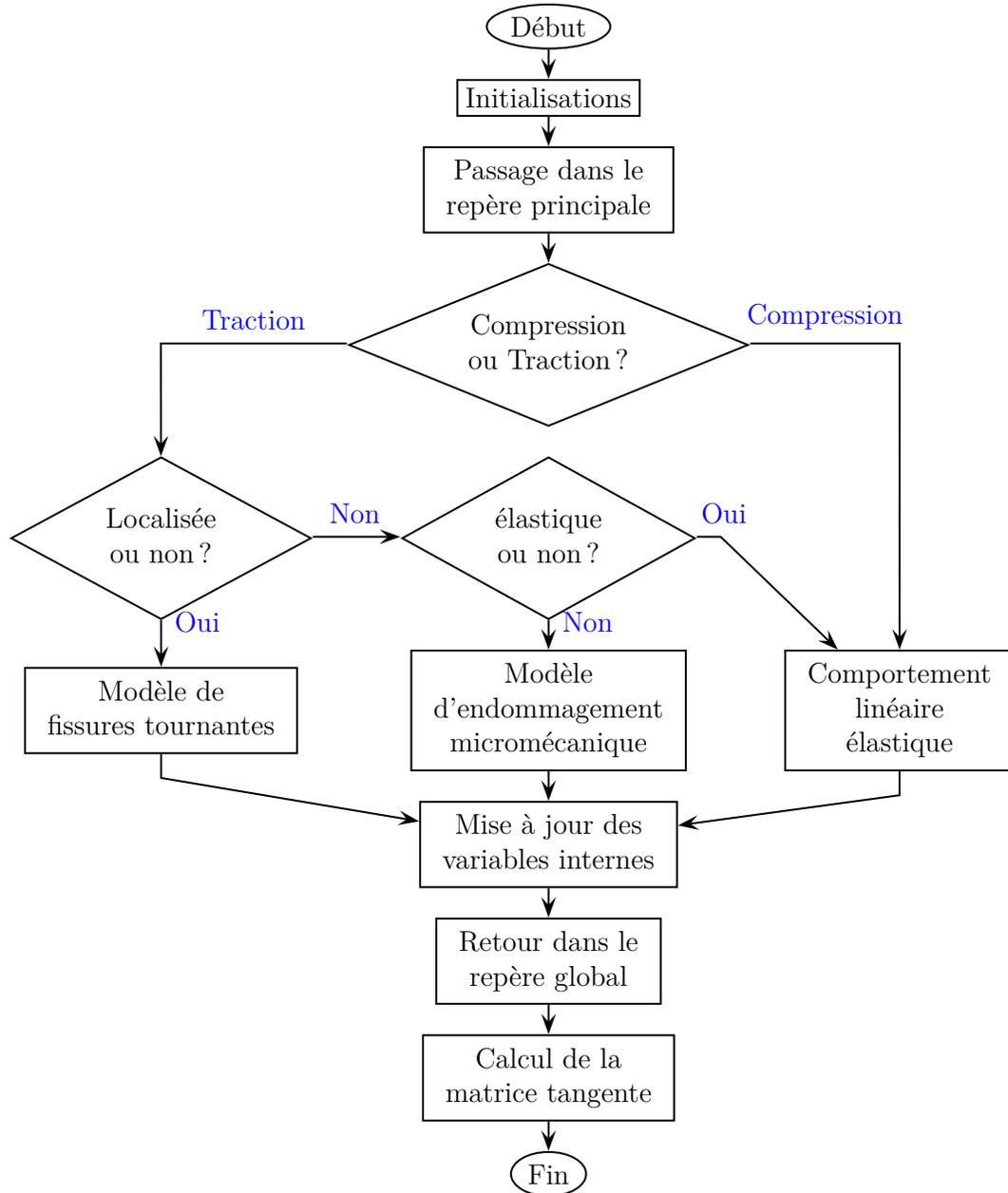


FIGURE 5.24 – Organigramme du modèle implanté dans Code_Aster

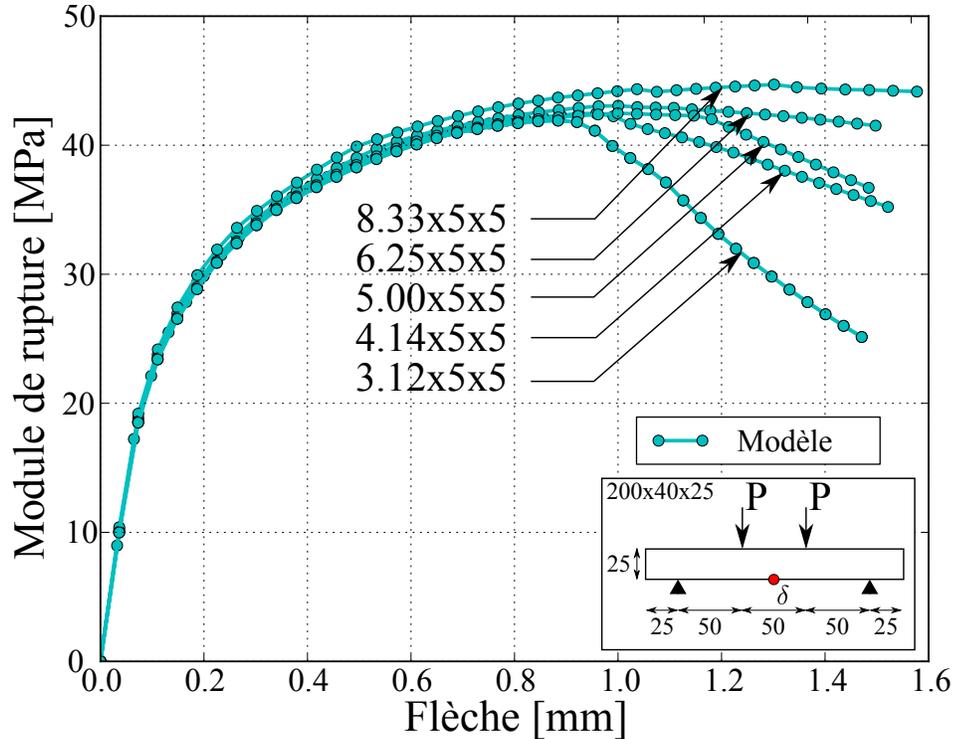


FIGURE 5.25 – Effet de la dimension du maillage sur le comportement en flexion

5.3 Application du modèle : essai de flexion 4 points

L'objectif de cette section est de reproduire les essais de flexion 4 points de l'article de [Bernier et Behloul \(1996\)](#). La mise en œuvre des éprouvettes est semblable à la méthode employée par Bayard. Les éprouvettes prismatiques, 4x2.5x20 cm, sont découpées suivant cinq directions : 0°, 22.5°, 45°, 67.5° et 90°. Seuls les paramètres matériaux suivants sont donnés :

$$\begin{cases} L_f = 13 \text{ mm} \\ \phi_f = 0.16 \text{ mm} \\ v_f = 2 \% \end{cases} \quad (5.7)$$

5.3.1 Mise en évidence de la dépendance du maillage

Le premier des objectifs lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis est de s'assurer que les résultats convergent lorsque le maillage est affiné. La figure 5.25 montre cette « convergence ». Avant la localisation des déformations, la courbe en flèche–module-de-rupture converge bien avec l'affinement du maillage. En revanche, le point de localisation et la courbe adoucissante sont fortement dépendants du maillage,

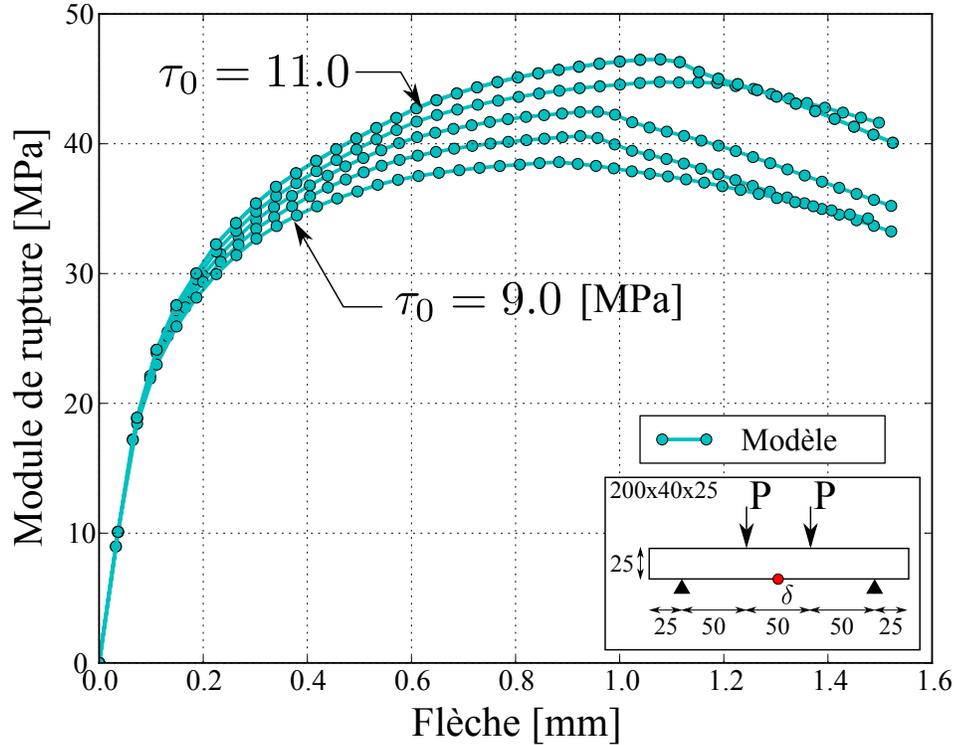


FIGURE 5.26 – Effet de la contrainte d’interface fibre–matrice sur le comportement en flexion

conséquence directe du phénomène expliqué à la section 4.4. La pente finale des courbes étant fonction de la taille du maillage, la longueur caractéristique (L_0) sera ajustée pour compenser ce défaut mathématique. Mais avant cela, il faut observer l’effet des différents paramètres matériaux pour ensuite calibrer le modèle.

5.3.2 Effets des paramètres sur la structure

Les figures ci-dessous permettent avant tout d’apprécier l’influence des différents paramètres en vue d’en faciliter la calibration du matériau. Les fibres sont orientées perpendiculairement aux charges pour reprendre un maximum d’effort. Si l’effet de la contrainte d’interface (τ_0) et celui de l’amplitude de la loi de probabilité (k_g) étaient prévisibles — voir figures 5.26 et 5.27 —, celui de la limite élastique de la matrice (f_t) et de l’endommagement initial (ϵ_0), le sont beaucoup moins — voir figures 5.28 et 5.29. En effet, plus τ_0 est grand plus la contrainte doit être importante pour amorcer l’extraction des fibres et plus la quantité d’énergie dissipée est grande. Pour une orientation à 90° , plus k_g est grand, plus les fibres reprennent les efforts de flexion, c’est pourquoi le module de rupture est plus grand. En revanche, pour une orientation à 0° , plus k_g est grand, plus

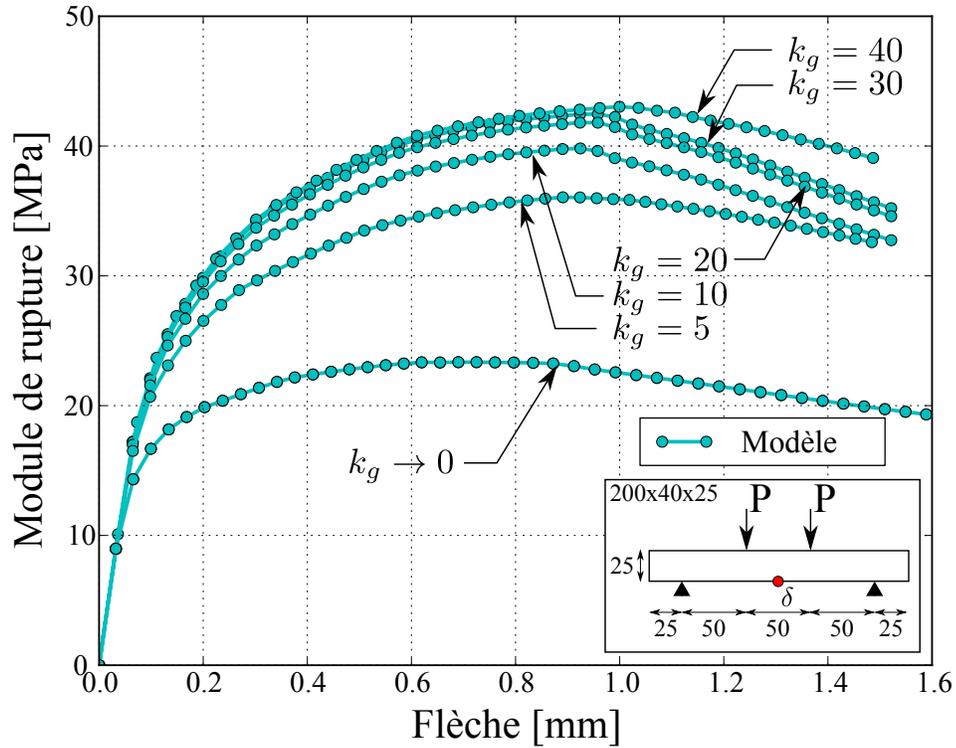


FIGURE 5.27 – Effet du coefficient d’amplitude de la loi de probabilité sur le comportement en flexion

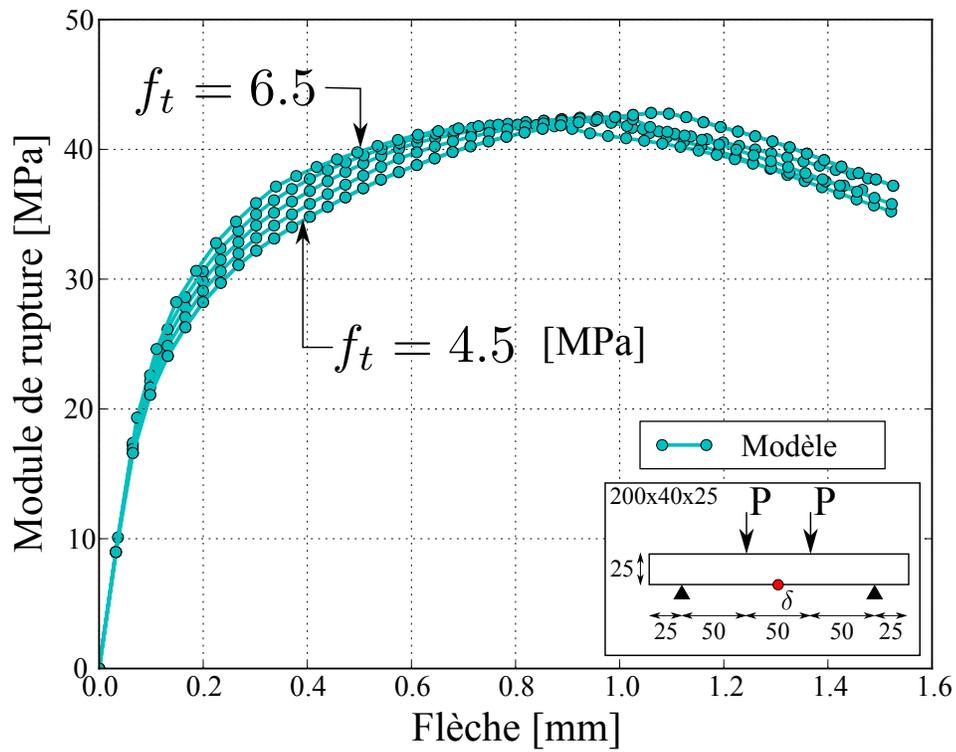


FIGURE 5.28 – Effet de la limite élastique de la matrice sur le comportement en flexion

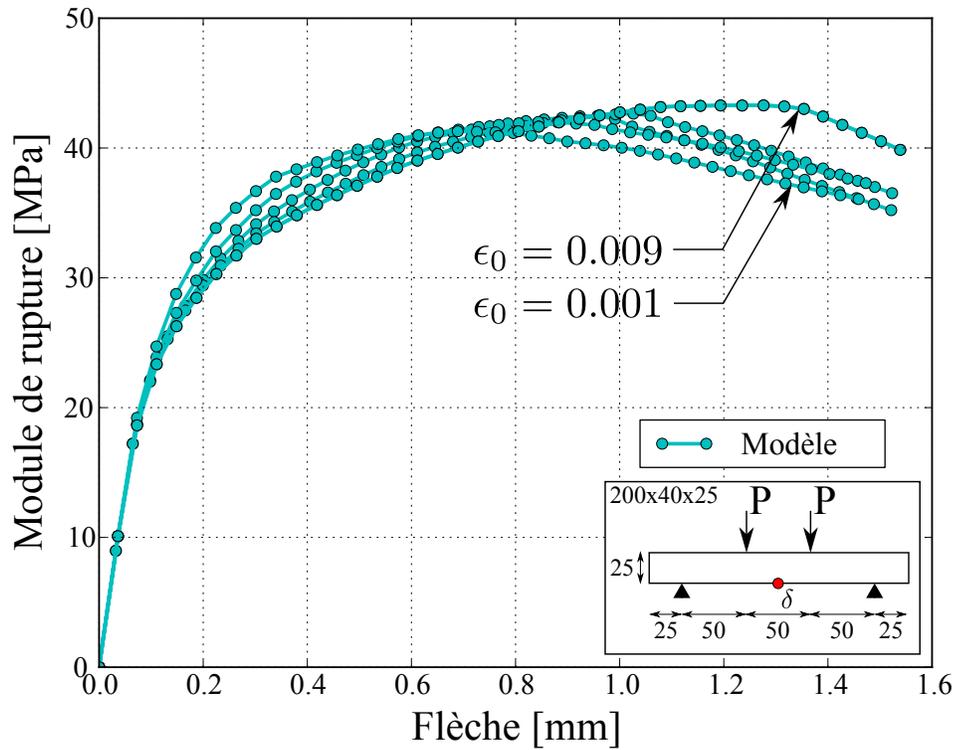


FIGURE 5.29 – Effet de l’endommagement initial sur le comportement en flexion

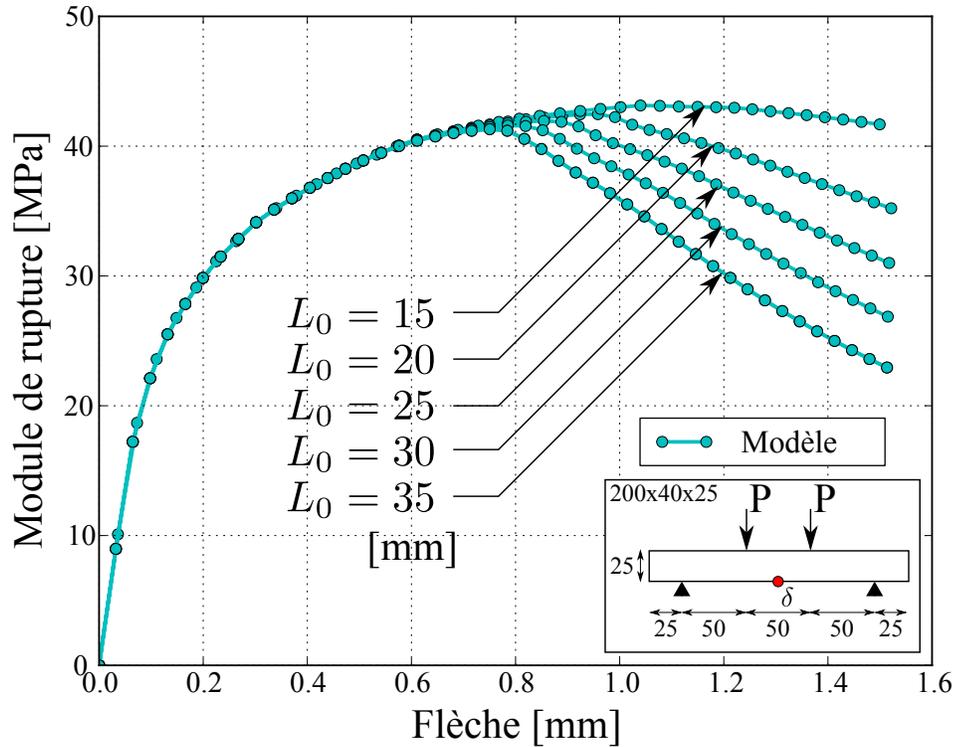


FIGURE 5.30 – Effet de la longueur caractéristique du matériau sur le comportement en flexion

les fibres sont uniformément orientées, en conséquence le nombre de fibres qui peuvent reprendre les efforts de flexion est moindre. Toujours pour une orientation de 0° , plus k_g est petit et plus le module de rupture grandit, car alors le nombre de fibres orientées dans une orientation désavantageuse diminue. Concernant l'effet de la limite élastique (f_t), il faut comprendre que plus ce paramètre est grand, plus le domaine élastique est important et proche de la contrainte maximale, c'est pourquoi la localisation intervient plus tôt que pour une valeur de f_t plus faible. La valeur de l'endommagement initial ϵ_0 agit de manière semblable : plus ϵ_0 est élevé, plus le nombre (ou la dimension) de fissure est important, plus la quantité d'énergie dissipée est importante. Enfin, comme attendu dans la section précédente, la longueur caractéristique (L_0) agit de façon semblable à celui du maillage (voir figure 5.30). L'ouverture des fissures et la flèche au centre de la poutre sont si faibles qu'il est justifié de considérer le matériau purement élastique en compression.

5.3.3 Ordre de calibration

Suite à l'observation des effets des paramètres sur la réponse de la structure, un ordre de calibration du modèle est préconisé. Le premier paramètre à calibrer est la rigidité de la matrice cimentaire (E_m), car cette valeur n'est pas renseignée dans l'article ; il suffit d'aligner la réponse élastique du modèle avec celui des résultats expérimentaux. Ensuite, c'est sur les paramètres de k_g et τ_0 qu'il faut agir en cherchant à atteindre la contrainte maximale. Puis, il faut agir sur ϵ_0 pour régler la position de la localisation des déformations. Le paramètre f_t est le suivant : il permet d'ajuster la courbe de la première partie du domaine non linéaire. À ce stade, il peut être judicieux de remodifier les précédents paramètres pour améliorer le calibrage. En dernier, c'est L_0 qui faut modifier pour capturer la partie adoucissant de la courbe. La calibration donne les résultats suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_f = 210\,000 \text{ MPa} \\ \tau_0 = 10.2 \text{ MPa} \\ f_t = 5.5 \text{ MPa} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_m = 35\,000 \text{ MPa} \\ \nu = 0.18 \\ \mathcal{N}_c = 0.005 \text{ nb/mm}^3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 1.0 \text{ mm} \\ L_0 = 20.0 \text{ mm} \\ k_g = 30 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

5.3.4 Application du modèle sur les résultats expérimentaux

Après calibration sur la courbe correspondant à une orientation de 90° des efforts extérieurs par rapport à l'orientation des fibres, seule l'orientation des fibres dans le modèle est modifiée, le résultat est présenté figure 5.31. L'effet de l'orientation des fibres

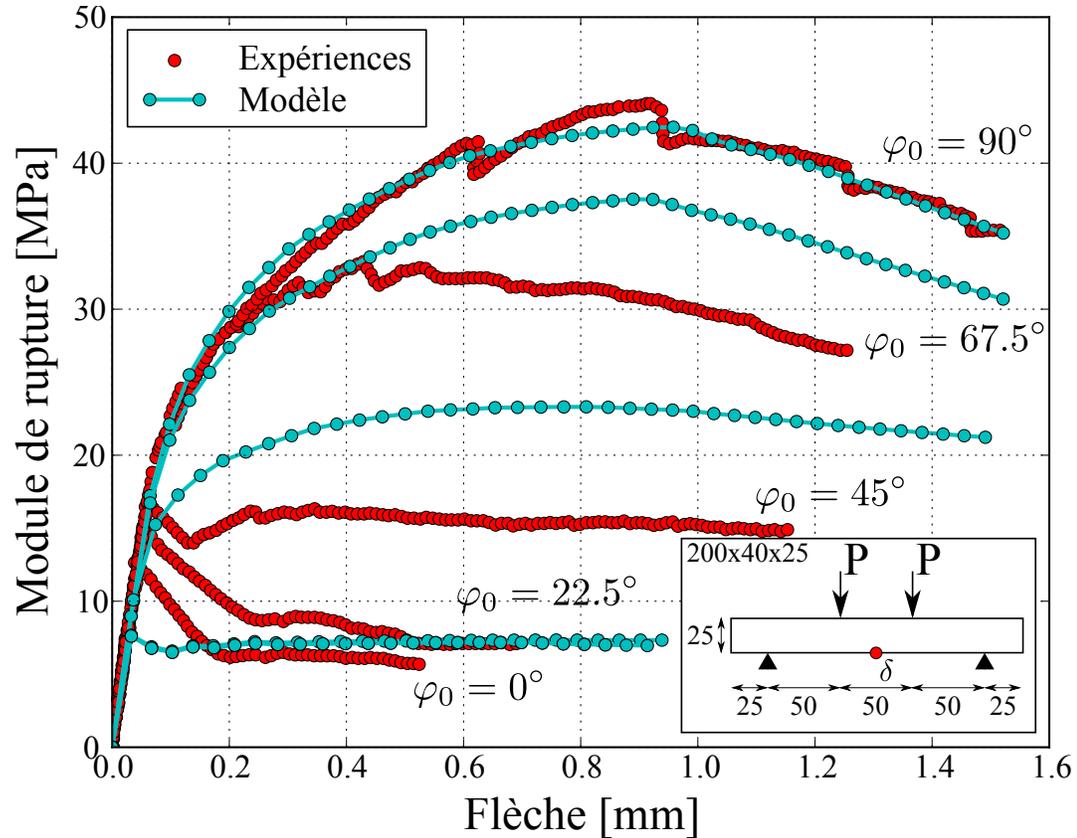


FIGURE 5.31 – Effet de l’orientation des fibres vis-à-vis de la charge sur le comportement en flexion

n’est visible que pour des angles inférieurs à 90° , puisque le modèle est justement calibré sur cette orientation. La première remarque concerne l’effet de l’orientation des fibres et la dispersion de cette orientation (k_g) qui sont des paramètres qui modifient de manière significative la réponse de la structure, comparativement aux autres paramètres. La fin du domaine élastique n’est pas très bien capturée par le modèle pour les deux orientations les plus faibles, cette remarque vient confirmer celle faite à propos de la figure 5.10 : l’orientation des fibres n’a pas d’influence sur la limite élastique, ce qui est également contraire aux observations de Bayard. Concernant la première partie du domaine non linéaire, elle est assez bien alignée avec la courbe où l’orientation est de 67.5° malgré que la localisation des déformations intervienne assez tard et pour une contrainte surévaluée. Enfin, le modèle capture très bien la pente adoucissante des courbes expérimentales.

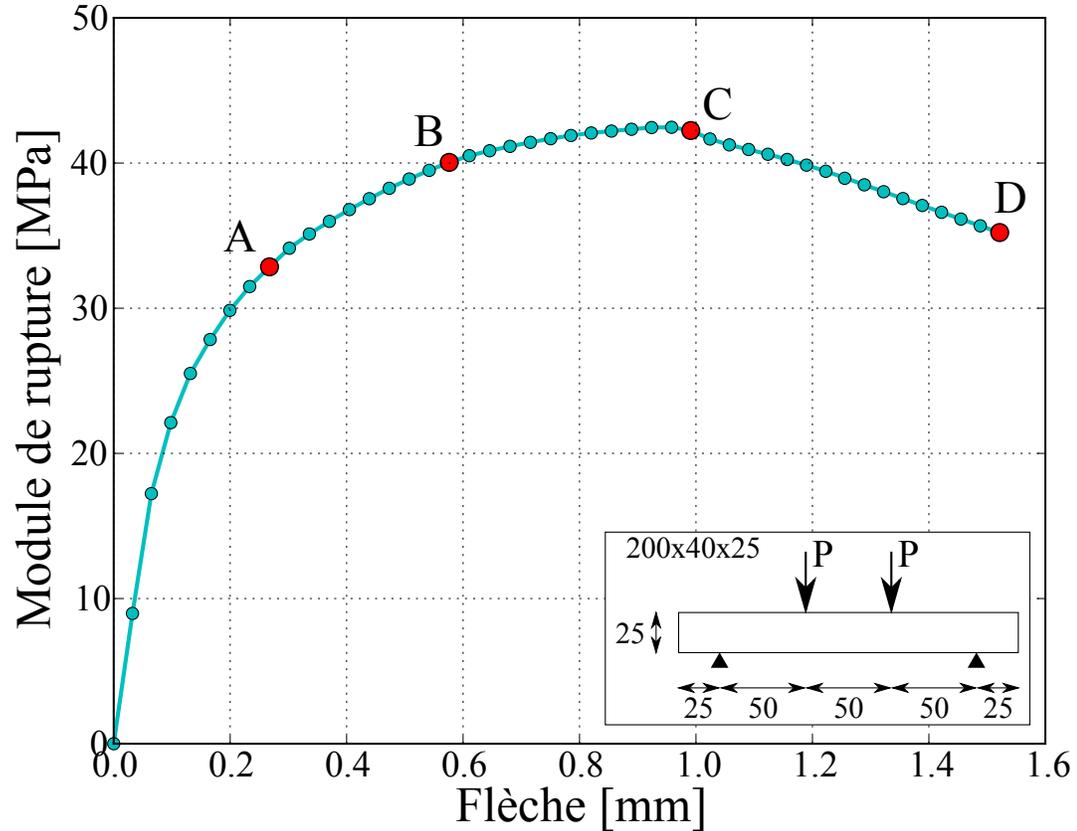


FIGURE 5.32 – Identification des points de chargement

5.3.5 Localisation des déformations

La figure 5.33 montre l'état de l'endommagement de la poutre pour quatre étapes de chargement repérées par la figure 5.32, ici les fibres sont orientées à 90° par rapport à la direction du chargement. Jusqu'à la localisation des déformations repérée par le point C, l'endommagement défini par Budiansky est réparti sur la surface inférieure de la poutre. Sous les charges, l'endommagement est plus important, car le matériau doit résister aux cisaillements — inexistant entre les points d'appui. De plus, le champ des contraintes n'est pas identique à celui de l'orientation des fibres. Par exemple, sous les charges, les fibres ne reprennent plus aussi bien les sollicitations, cette zone devient alors la plus faible du matériau : c'est là que l'endommagement se localise. L'endommagement traditionnel (Ω) n'est pas représenté, car comme mentionner à la section 5.1.2.1, le paramètre ne permet pas de visualiser la localisation de l'endommagement aussi bien qu'avec le paramètre ϵ .

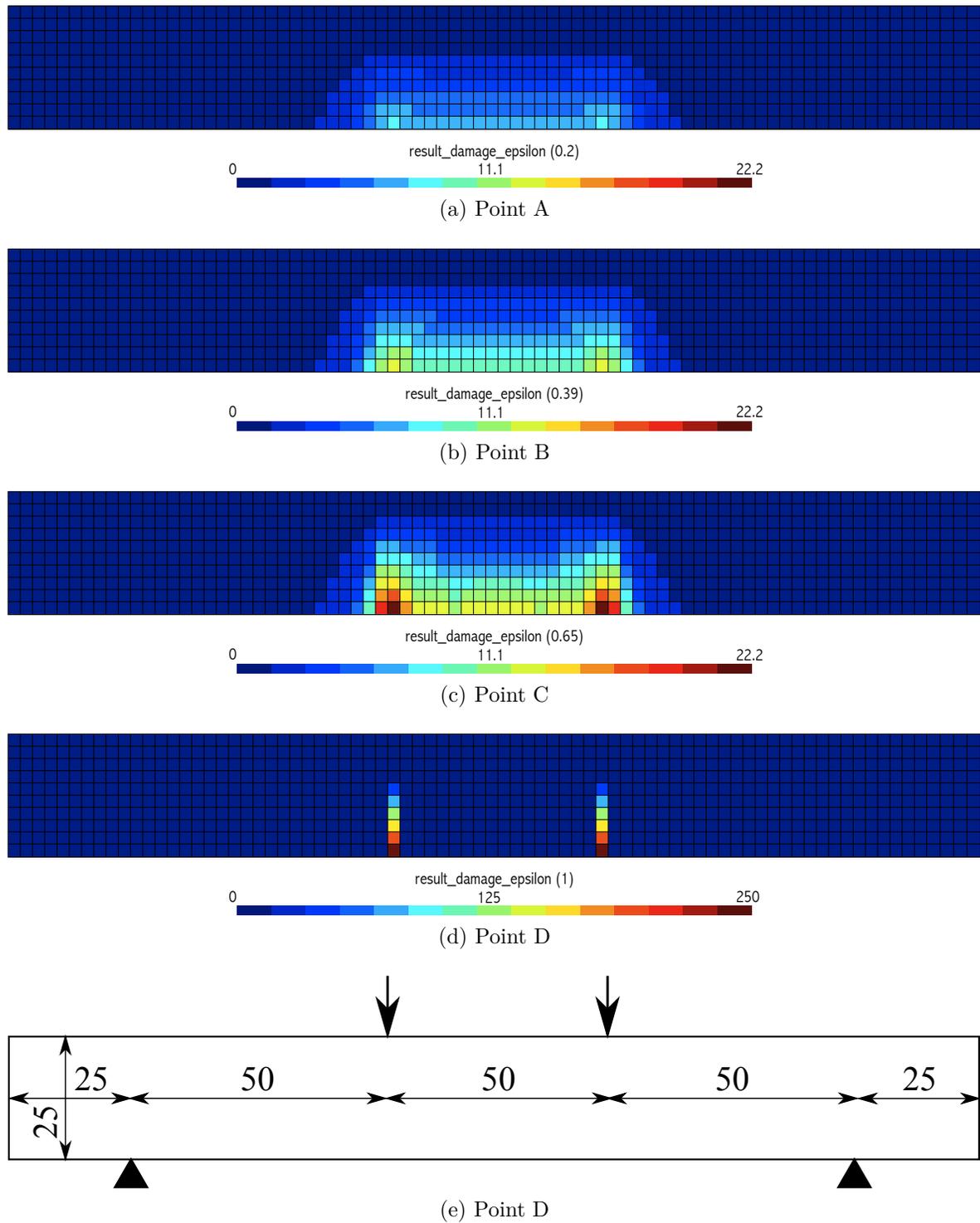


FIGURE 5.33 – Répartition de l'endommagement ϵ sur la poutre en flexion

5.4 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, le modèle d'endommagement micromécanique est comparé aux résultats expérimentaux de trois différentes références (Bayard, 2003; Bernier et Behloul, 1996; Toutlemonde et al., 1999). L'objectif est de le confronter à la réalité et de vérifier qu'il capture l'influence de l'orientation des fibres. Cet objectif est atteint pour les essais de traction direct uniaxial malgré que l'orientation des fibres n'ait aucun impact sur la limite élastique du modèle. À propos de l'essai de flexion, le modèle est assez représentatif du comportement réel, à l'exception de la localisation des déformations qui est surévaluée en contrainte et en déformation.

Dans ce chapitre, le modèle d'endommagement micromécanique est comparé aux résultats expérimentaux de trois différentes références (Bayard, 2003; Bernier et Behloul, 1996; Toutlemonde et al., 1999). L'objectif était de le confronter à de véritables expériences et de vérifier qu'il capture l'influence de l'orientation des fibres. L'observation de l'influence des paramètres sur le comportement du matériau permet de se familiariser avec le modèle. Elle met en évidence que l'orientation des fibres n'a aucun impact sur la limite élastique du matériau, ce qui devra être corrigé. Aussi l'influence de l'élanement des fibres est à relativiser, car elle a un grand effet sur le comportement des fibres à l'arrachement qui remettrait directement en cause l'utilisation du modèle pour un tel matériau. À propos de l'essai de flexion, le modèle est assez représentatif du comportement réel, à l'exception de la localisation des déformations qui est surévaluée en contrainte et en déformation. Malgré certaines corrections à apporter au modèle, les résultats présentés dans ce chapitre sont très encourageants.

Chapitre 6

Conclusions et perspectives

6.1 Conclusions générales

Les fibres s'orientent en fonction de la mise en œuvre et de la géométrie de la structure. Ce sont ces mêmes fibres qui donnent sa ductilité à la structure. La revue de littérature — qui dans un premier temps a montré l'importance de l'effet de cette orientation sur le comportement structural — montre que les modèles numériques ne prennent pas adéquatement en compte l'orientation des fibres. De plus, sur la considération de cette orientation, les recommandations actuelles proposent d'utiliser un coefficient de sécurité n'intégrant pas les différents effets de l'orientation sur la loi de comportement du matériau. L'objectif de la maîtrise était donc d'établir un modèle d'endommagement micromécanique, basée sur les principes de la mécanique linéaire élastique de la rupture et capable de prendre en compte l'orientation des fibres.

L'utilisation de la mécanique de la rupture a permis de résoudre les problèmes mathématiques liés à la méthode des éléments finis et de faire en sorte que l'énergie spécifique de rupture soit considérée. Quant à l'approche de la micromécanique, elle a permis de modéliser le mécanisme d'extraction des fibres et celui de la progression de l'endommagement par homogénéisation de la matrice et des fissures. Le modèle est également fonction de paramètres matériaux liés aux fibres, à la matrice et à l'interaction fibres–matrice, ce qui rend le modèle très intéressant et ludique pour comprendre l'effet de chacun de ces paramètres.

Enfin après calibration du modèle, ce dernier a été confronté aux résultats expérimentaux de différents auteurs. Ces résultats sont encourageants et permettent d'affirmer que l'objectif de relier la ductilité d'un ouvrage avec sa mise en œuvre et sa géométrie

est atteint. Le modèle met également en évidence que l'orientation des fibres et la dispersion sur cette orientation sont les paramètres les plus influents. Le modèle développé peut cependant être amélioré, c'est pourquoi des perspectives de recherches sont émises dans la section suivante.

6.2 Perspectives de recherches

Les hypothèses retenues lors de l'élaboration du modèle ainsi que les résultats de ce dernier ont conduit à de nouvelles perspectives de recherches pour perfectionner le modèle. La première amélioration concerne l'indépendance des résultats au maillage; pour compenser cet effet, une longueur caractéristique a été introduite, mais cette dernière n'est pas reliée aux dimensions du maillage. [Jirásek et Zimmermann \(1997\)](#) fait référence à quelques articles qui proposent des solutions efficaces pour corriger l'effet. Le passage aux méthodes de calcul non local peut également être une alternative intéressante : dans cette méthode, les variables internes sont dépendantes des variables voisines, ce qui est réalisé soit par formulation intégrale ([Jirásek et Patzak, 2002](#)), soit par gradient explicite ou implicite. Les variables voisines sont définies par leurs présences où non dans une zone géométrique reliée au point de calcul actuel. Cette zone géométrique pourrait être reliée aux paramètres micromécaniques ce qui permettrait alors de capturer la transition ductile-fragile. La deuxième amélioration concerne le type de modèle sélectionné, à savoir un modèle d'endommagement pur. Le modèle d'endommagement ne présente pas de déformation plastique contrairement aux résultats de [Chen et Graybeal \(2010\)](#) qui montrent que la structure possède une déformation permanente. Un couplage d'endommagement avec de la plasticité pourrait alors être introduit ([Grassl et Jirásek, 2006](#)). La troisième forte amélioration vise l'hypothèse de la forme d'ellipsoïde de révolution aplati des fissures. L'effet des fibres à travers la fissure implique que la fissure ne devrait pas avoir une forme elliptique aux extrémités, mais plutôt une forme plate. Dans la littérature, c'est le terme de fissure cohésive qui est évoqué ([Bažant et Planas, 1998](#)). Il est également rappelé ici que seuls les modes de rupture II et III ont été considérés : il serait donc justifié de considérer l'effet du cisaillement.

D'autres améliorations, mais d'ordre secondaire, peuvent être menées comme l'ajout d'une loi de comportement non linéaire en compression. Concernant le mécanisme d'extraction des fibres, l'effet de poulie — évoqué à la section [3.3.1](#) — ou effet mécanique selon les auteurs peut être ajouté par l'intermédiaire d'un coefficient, donné par la figure [3.10](#); l'effet de poulie serait alors pris en compte lors du calcul de la contrainte à travers la fissure (σ_B). Une hypothèse négligée est celle de la précontrainte des fibres causée

par l'endommagement initial, étant donné que [Wuest \(2007\)](#) la considère, il pourrait être judicieux d'étudier son effet. Toujours dans le modèle micromécanique, il est envisageable de considérer d'autres schémas d'homogénéisation que celui de Mori-Tanaka, notamment Ponte Castañada qui permettrait de gérer la distribution spatiale des fissures ainsi que leurs orientations. Enfin, tel qu'évoqué dans le chapitre précédent, relier la limite élastique de la matrice avec l'orientation des fibres pour corriger le modèle et respecter les observations de [Bayard \(2003\)](#).

Bibliographie

- ADVANI, S. (1994). *Flow and rheology in polymer composites manufacturing*. Composite materials series. Elsevier.
- AFGC (2002). *Ultra high performance fibre-reinforced concretes - Interim Recommendations*. Setra.
- BAO, G. et SONG, Y. (1993). Crack bridging models for fiber composites with slip-dependent interfaces. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 41(9):1425 – 1444.
- BAYARD, O. (2003). *Approche multi-echelles du comportement mécanique des bétons à ultra hautes performances renforcés par des fibres courtes*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, France.
- BAŽANT, Z. et PLANAS, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. New directions in civil engineering. CRC Press.
- BEHLOUL, M. (2006). Ductal-fm behaviour law – exemple of calculation inf bending. Lafarge.
- BENTUR, A. et MINDESS, S. (1990). *Fibre Reinforced cementitious Composites*. Elsevier Applied Science. London and New York.
- BERNIER, G. et BEHLOUL, M. (1996). Effet de l'orientation des fibres sur le comportement des bpr. *Revue française de génie civil*, pages 233–240.
- BUDIANSKY, B. et O'CONNELL, R. J. (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, 12(2):81 – 97.
- CHEN, L. et GRAYBEAL, B. A. (2010). Finite element analysis of ultra-high performance concrete : Modeling structural performance of an aashto type ii girder and a 2nd generation pi-girder. Rapport technique FHWA-HRT-10-020, Federal Highway Administration.
- CHEN, W., HAN, D. et HAN, D. (2007). *Plasticity for structural engineers*. J. Ross Publishing Classics Series. J. Ross Pub.

BIBLIOGRAPHIE

- CHUANG, E. Y. et ULM, F.-J. (2002). Two-phase composite model for high performance cementitious composites. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(12):1314–1323.
- CURBACH, M. et SPECK, K. (2008). Ultra high performance concrete under biaxial compression. *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*, pages 477–484.
- DAREAU, G. et ROUSSELET, G. (1998). *Thermodynamique*. Ellipses. Classes préparatoires scientifiques.
- DORMIEUX, L., KONDO, D. et ULM, F.-J. (2006). *Microporomechanics*. Wiley.
- ESHELBY, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396.
- FERRARA, L., FAIFER, M. et TOSCANI, S. (2011a). A magnetic method for non destructive monitoring of fiber dispersion and orientation in steel fiber reinforced cementitious composites—part 1 : method calibration. *Materials and Structures*, pages 1–15.
- FERRARA, L., OZYURT, N. et di PRISCO, M. (2011b). High mechanical performance of fibre reinforced cementitious composites : the role of “casting-flow induced” fibre orientation. *Materials and Structures*, 44:109–128.
- GRASSL, P. et JIRÁSEK, M. (2006). Damage-plastic model for concrete failure. *Int. J. Solids Struct. (UK)*, 43(22-23):7166 – 96.
- GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 221(582-593):163–198.
- GRÜNEWALD, S. (2004). *Performance-based design of self-compacting fibre reinforced concrete*. Thèse de doctorat, Delft University, The Netherlands.
- HABEL, K. (2004). *Structural behaviour of elements combining ultra-high performance fibre reinforced concretes (UHPRFC) and reinforced concrete*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- IRWIN, G. (1957). Analysis of stresses and strains near end of crack traversing plate. *Journal of Applied Mechanics ASME*, 24(3):361 – 364.
- JEFFERY, G. B. (1922). The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 102(715):pp. 161–179.
- JIRÁSEK, M. et BAŽANT, Z. (2002). *Inelastic analysis of structures*. Wiley.

BIBLIOGRAPHIE

- JIRÁSEK, M. et PATZAK, B. (2002). Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. *Computers and Structures*, 80(14-15):1279 – 1293.
- JIRÁSEK, M. et ZIMMERMANN, T. (1997). Rotating crack model with transition to scalar damage. *LSC Internal Report 97/01*.
- KOOIMAN, A. G. (2000). *Modelling Steel Fibre Reinforced Concrete for Structural Design*. Thèse de doctorat, Delft University, The Netherlands.
- KRENCHER, H. (1975). Fibre spacing and specific fibre surface. *SAE Preprints*, pages 69 – 79.
- LI, V. C., WANG, Y. et BACKER, S. (1991). A micromechanical model of tension-softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39(5):607 – 625.
- LIN, Z. et LI, V. C. (1997). Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces. *J. Mech. Phys. Solids (UK)*, 45(5):763 – 87.
- LUBLINER, J., OLIVER, J., OLLER, S. et OÑATE, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299 – 326.
- MAAGE, M. (1977). Interaction between steel fibers and cement based matrixes. *Matériaux et Constructions*, 10(59):297 – 301.
- MARKOVIC, I. (2006). *High-Performance Hybrid-Fibre Concrete*. Thèse de doctorat, Delft University, The Netherlands.
- MARTINIE, L. et ROUSSEL, N. (2011). Simple tools for fiber orientation prediction in industrial practice. *Cement and Concrete Research*, 41(10):993 – 1000.
- MAZARS, J. (1986). A description of micro and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5-6):729 – 737.
- MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall. (USA)*, 21(5):571 – 4.
- NAAMAN, A. E. et SHAH, S. P. (1976). Pull-out mechanism in steel fiber-reinforced concrete. *Journal of the Structural Division*, 102(8):1537 – 1548.
- PANSUK, W., SATO, H., SATO, Y. et SHIONAGA, R. (2008). Tensile behaviors and fiber orientation of uhpc. *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*, pages 161–168.
- RESPLENDINO, J. (2009a). Bétons fibrés ultra performant (bfup) - les nouvelles recommandations afgc. In *UHPRC 2009 - Marseille*.

BIBLIOGRAPHIE

- RESPLENDINO, J. (2009b). Introduction : Qu'est-ce qu'un bfup ? In *UHPFRC 2009 - Marseille*.
- ROMUALDI, J. et MANDEL, J. (1964). Tensile strength of concrete affected by uniformly distributed and closely spaced short lengths of wire reinforcement. *American Concrete Institute - Journal*, 61(6, Part 1):657 – 671.
- SORELLI, L., ULM, F.-J. et TOUTLEMONDE, F. (2007). Fracture stability and micro-mechanics of strain hardening cementitious composites. volume 3, pages 1403 – 1411, Catania, Italy.
- SWAMY, R. et MANGAT, P. (1974). Influence of fiber geometry on the properties of steel fiber reinforced concrete. *Cement and Concrete Research*, 4(3):451 – 465.
- TADA, H., PARIS, P. C. et IRWIN, G. R. (2000). *The stress analysis of cracks handbook*. New York : ASME Press.
- TOUTLEMONDE, F., SERCOMBE, J., TORRENTI, J.-M. et ADELIN, R. (1999). Développement d'un conteneur pour l'entreposage de déchets nucléaires : résistance au choc. *Revue française de génie civil*, 3(7-8):729–756.
- TUE, N. V. et HENZE, S. (2008). Determination of the distribution and orientation of fibres in steel fibre reinforced uhpc by photographic method. *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*, pages 505–512.
- WUEST, J. (2007). *Comportement structural des bétons de fibres ultra performants en traction dans des éléments composés*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- ZIMMERMANN, G. et GROHMANN, M. (2008). Uhpc free form design with pneumatic formwork. *Ultra High Performance Concrete (UHPC)*, pages 871–878.

Annexe A

Loi d'extraction des fibres

Les équations (4.38) et (4.39) sont démontrées dans cette annexe en trois étapes : calculs de F_d , F_e et σ_B .

Les principaux paramètres géométriques des fibres sont définis à la figure 4.5. La longueur d'ancrage de la fibre dans la matrice est définie par :

$$L = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \varphi}, \quad (\text{A.1})$$

où L_f est la longueur de la fibre, z la distance normale au plan de fissuration entre le centre de la fissure et la lèvre de cette dernière et φ l'angle de la fibre par rapport à la normale du plan de fissuration.

A.1 Calcul de la force de décollement (figure 4.6a)

Soient σ_f et σ_m les contraintes axiales, ε_f et ε_m les déformations axiales, E_f et E_m les modules d'Young respectivement de la fibre et de la matrice. À partir de la figure 4.6, à $x = 0$, $\varepsilon_f = \varepsilon_m$, donc :

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{\sigma_m}{E_m}. \quad (\text{A.2})$$

Et l'équilibre des forces donne :

$$\sigma_m = \frac{\pi \phi_f \lambda \bar{\tau}}{A_m} \text{ et } \sigma_f = \frac{F_d - \pi \phi_f \lambda \bar{\tau}}{A_f}, \quad (\text{A.3})$$

où A_f et A_m sont respectivement les aires de la fibre et de la fissure, $\bar{\tau}$ est le cisaillement moyen de l'interface entre la fibre et la matrice telle que :

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \tau(z) dz. \quad (\text{A.4})$$

À partir des équations (A.2), (A.3) et (A.4), il vient :

$$F_d = \pi \phi_f \lambda (1 + \eta) \text{ avec } \eta = \frac{E_f V_f}{E_m V_m}. \quad (\text{A.5})$$

Si $x > 0$:

$$\sigma_f(x) = \sigma_f(0) + \frac{\pi \phi_f \tau}{A_f} x = \sigma_f(0) + \frac{4\tau}{\phi_f} x \quad (\text{A.6})$$

et :

$$\sigma_m(x) = \sigma(0) - \frac{\pi \phi_f \tau}{A_m} x. \quad (\text{A.7})$$

Le cisaillement d'interface n'est pas constant lors de l'extraction de la fibre, car la fibre est abrasée (Lin et Li, 1997). Les frottements augmentent donc au fur et à mesure que la fibre est extraite et alors le cisaillement d'interface devient fonction du déplacement relatif de la fibre par rapport à la matrice. Ce déplacement est défini par :

$$S(x) = u_f(x) - u_m(x). \quad (\text{A.8})$$

Le cisaillement d'interface est approximé par une fonction affine :

$$\tau(S) = \tau_0 \left(1 + \beta \frac{S}{\phi_f} \right), \quad (\text{A.9})$$

où β est un paramètre de durcissement adimensionnel. En dérivant l'équation (A.8), il vient :

$$\frac{dS}{dx} = \frac{du_f}{dx} - \frac{du_m}{dx} = \varepsilon_f - \varepsilon_m, \quad (\text{A.10})$$

et en combinant les équations (A.6), (A.7) et (A.10), en notant que $V_m = A_m L_f$ et avec l'hypothèse où les fibres ont un comportement linéaire élastique, il vient :

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{4(1 + \eta)}{E_f \phi_f} \tau(S), \quad (\text{A.11})$$

ou encore,

$$\frac{d^2 S}{dx^2} - \frac{\omega^2}{\phi_f^2} S = \frac{\omega^2}{\beta \phi_f} \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{4(1 + \eta) \beta \tau_0}{E_f}}. \quad (\text{A.12})$$

L'équation (A.12) est une équation différentielle du 2^e ordre, linéaire, à coefficient constant réel. La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution

Annexe A. Loi d'extraction des fibres

générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète. L'équation caractéristique de l'équation homogène est :

$$r^2 - \frac{\omega^2}{\phi_f^2} = 0 \Leftrightarrow r_{1,2} = \pm \frac{\omega}{\phi_f}, \quad (\text{A.13})$$

car ω et ϕ_f sont strictement positifs. L'équation caractéristique a deux racines distinctes, donc la solution générale de l'équation homogène est :

$$S_{hom}(x) = Ae^{\frac{\omega}{\phi_f}x} + Be^{-\frac{\omega}{\phi_f}x}. \quad (\text{A.14})$$

Une solution particulière de l'équation complète est :

$$-\frac{\omega^2}{\phi_f^2}S_{par}(x) = \frac{\omega^2}{\beta\phi_f} \Leftrightarrow S_{par}(x) = -\frac{\phi_f}{\beta}. \quad (\text{A.15})$$

La solution complète est donc :

$$S(x) = Ae^{\frac{\omega}{\phi_f}x} + Be^{-\frac{\omega}{\phi_f}x} - \frac{\phi_f}{\beta}. \quad (\text{A.16})$$

Pour déterminer A et B , deux conditions limites sont nécessaires : $S(x=0) = 0$ car à $x=0$, $u_f = u_m$; et $S'(x=0) = 0$ car à $x=0$, $\varepsilon_f = \varepsilon_m$. Avec ces conditions limites la solution générale de l'équation différentielle (A.12) est :

$$S(x) = \frac{\phi_f}{2\beta} \left(e^{\frac{\omega}{\phi_f}x} + e^{-\frac{\omega}{\phi_f}x} \right) \Rightarrow S(x) = \frac{\phi_f}{\beta} \left[\cos\left(\frac{\omega}{\phi_f}x\right) - 1 \right]. \quad (\text{A.17})$$

Puis en remplaçant l'équation (A.17) dans (A.11), il vient :

$$\tau(x) = \tau_0 \cosh\left(\frac{\omega}{\phi_f}x\right). \quad (\text{A.18})$$

À partir des équations (A.4), (A.5) et (A.16), une relation entre F_d et λ est obtenue :

$$F_d = \frac{\pi\phi_f^2\tau_0(1+\eta)}{\omega} \sinh\left(\frac{\omega\lambda}{\phi_f}\right), \quad (\text{A.19})$$

où le glissement de l'extrémité de la fibre est :

$$u = S(x=\lambda) = \frac{\phi_f}{\beta} \left[\cos\left(\frac{\omega\lambda}{\phi_f}\right) - 1 \right],$$

qui équivaut à :

$$\lambda = \frac{\phi_f}{\omega} \operatorname{acosh}\left(1 + \frac{u\beta}{\phi_f}\right) \quad (\text{A.20})$$

car $1 + \frac{u\beta}{\phi_f} \geq 1$ et $\frac{\omega\lambda}{\phi_f} \geq 0$, où acosh est la fonction réciproque de cosinus hyperbolique. Pendant la phase de décollement, l'ouverture de fissure (notée $[[\xi]]$) est donnée par $[[\xi]] = 2u$. Cependant, $\sinh(\text{acosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, ainsi, à partir de l'équation (A.19) il vient :

$$\forall [[\xi]] \in [0, [[\xi]]_0], F_d = \frac{\pi\phi_f^2\tau_0(1+\eta)}{\omega} \sqrt{\left(1 + \frac{\beta [[\xi]]}{2\phi_f}\right)^2 - 1}, \quad (\text{A.21})$$

avec

$$[[\xi]]_0 = \frac{2\phi_f}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega L}{\phi_f}\right) - 1 \right], \quad (\text{A.22})$$

où $[[\xi]]_0$ est l'ouverture de fissure quand $\lambda = L$. La valeur de β étant petite devant 1, un développement limité en série de Taylor au 1^{er} ordre en $\beta = 0$ donne :

$$F_d = \frac{\pi\phi_f^2\tau_0(1+\eta)}{\omega} \sqrt{\frac{\beta [[\xi]]}{2\phi_f} \left(2 + \frac{\beta [[\xi]]}{2\phi_f}\right)},$$

qui se simplifie par :

$$F_d = \frac{\pi\phi_f^2\tau_0(1+\eta)}{\omega} \sqrt{\frac{\beta [[\xi]]}{\phi_f}} = \frac{\pi\phi_f}{2} \sqrt{(1+\eta)\tau_0 E_f \phi_f} \sqrt{[[\xi]]},$$

et avec

$$k = \frac{\pi\phi_f}{2} \sqrt{(1+\eta)\tau_0 E_f \phi_f}, \quad (\text{A.23})$$

la force de décollement, appliquée sur une fibre, est donnée en fonction de l'ouverture de fissure par :

$$\forall [[\xi]] \in [0, [[\xi]]_0], F_d = k\sqrt{[[\xi]]}. \quad (\text{A.24})$$

A.2 Calcul de la force d'extraction (figure 4.6b)

À la fin de la phase de décollement ($\lambda = L$), $[[\xi]] = [[\xi]]_0$. Désormais, la fibre est extraite comme indiquée sur la figure 4.6b. Pendant l'extraction, c'est la même équation différentielle (A.12) qui régit le problème :

$$S(x) = \frac{\phi_f}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega}{\phi_f}x\right) - 1 \right] + ([[\xi] - [[\xi]_0]). \quad (\text{A.25})$$

Avec cette équation, la continuité avec la phase de décollement est assurée. Cette équation est basée sur le fait qu'une seule des extrémités de la fibre est extraite de la matrice, voir figure A.1.

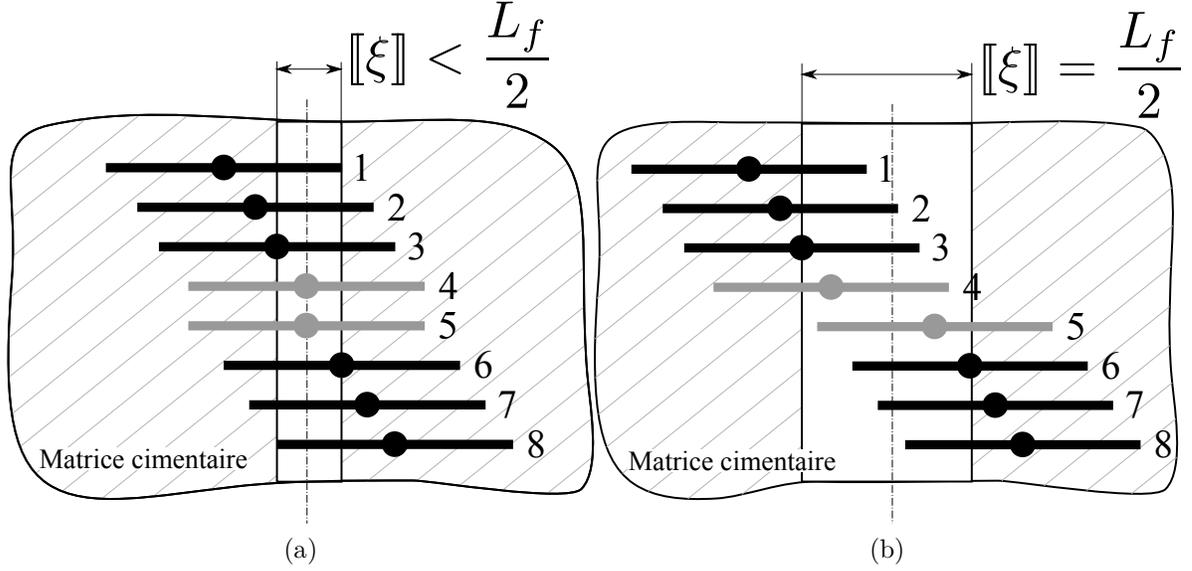


FIGURE A.1 – Mécanisme de décollement de différentes fibres

Par souci de compréhension, seules les fibres participant au mécanisme d'extraction à travers un petit élément de fissure ($dA = r dr d\theta$), ont été représentées dans la figure A.1. Il existe une infinité de positions possibles entre les fibres numérotées 1 et 4, et entre 5 et 8 qui n'ont pas été représentées dans la figure. Les fibres 4 et 5 représentent la même fibre dont le centre est confondu avec celui de la fissure. Ce cas limite est représenté par deux fibres : l'une est extraite de la partie droite, tandis que l'autre est extraite par la partie gauche de la matrice. Au fur et à mesure que la fissure grandit, les fibres, les unes après les autres, ne participent plus à la dissipation d'énergie. Dans les cas intermédiaires représentés à la figure A.1a, seules les fibres entre les positions 3 et 4 et entre 5 et 6 participent encore.

Physiquement, la fibre est étirée jusqu'à $\lambda = L$, à ce moment, la fibre n'a plus aucune adhérence avec la matrice donc elle devrait retrouver sa longueur initiale moins l'allongement causé par le frottement. Dans ce modèle, il est admis que la fibre étirée par la phase de décollement ne se rétracte pas : il s'agit d'une hypothèse supplémentaire pour simplifier le phénomène. La figure A.2 met en évidence cette hypothèse, où l'indice i fait référence à la longueur de la fibre avant fissuration. Avec les hypothèses citées ci-dessus, la relation entre F_e et $[[\xi]]$ est obtenue par une méthode semblable à la précédente :

$$F_e = \frac{\pi\phi_f\tau_0(1+\eta)}{\omega} \left[\sinh\left(\frac{\omega L}{\phi_f}\right) - \sinh\left(\frac{\omega([[\xi]] - [[\xi]]_0)}{\phi_f}\right) \right] + \pi\tau_0\beta(1+\eta)([[\xi]] - [[\xi]]_0)(L - ([[\xi]] - [[\xi]]_0)). \quad (\text{A.26})$$

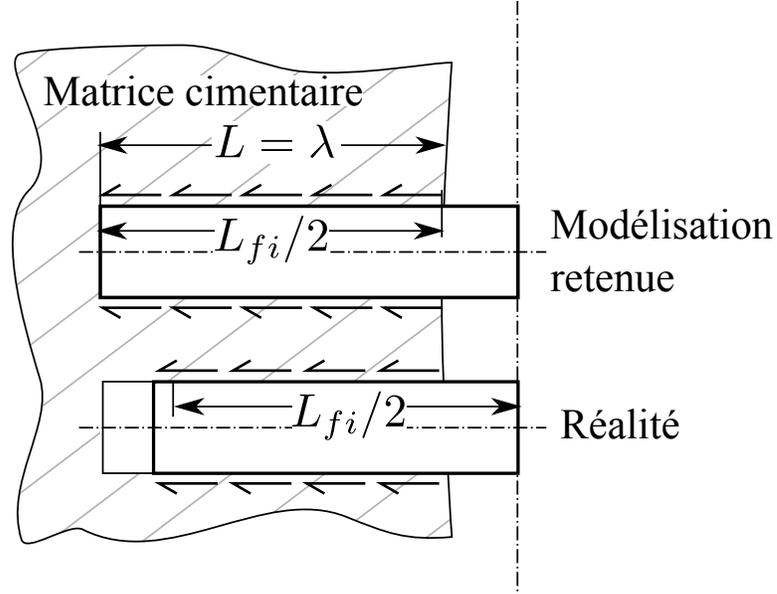


FIGURE A.2 – Mise en évidence de l'hypothèse de non-rétraction des fibres

Puis par un développement en série de Taylor au 1^{er} ordre à $\beta = 0$:

$$F_e = \pi \phi_f \tau_0 (1 + \eta) [L - ([\xi] - [\xi]_0)] \quad (\text{A.27})$$

qui est simplifié par :

$$\forall [\xi] \in [[\xi]_0, [\xi]^{cr}], F_e = k \sqrt{[\xi]_0} \left[1 - \frac{[\xi] - [\xi]_0}{[\xi]^{cr} - \frac{z}{\cos \varphi}} \right], \quad (\text{A.28})$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \frac{1}{2} \pi \phi_f \sqrt{(1 + \eta) \tau_0 E_f \phi_f} \\ L = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \varphi} \end{array} \right., \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} [\xi]_0 = \frac{4(1 + \eta) \tau_0 L^2}{\phi_f E_f} \\ [\xi]^{cr} = \frac{L_f}{2} \end{array} \right. . \quad (\text{A.29})$$

$[\xi]_0$ est l'ouverture de fissure quand la fibre n'adhère plus à la matrice cimentaire, $[\xi]^{cr}$ plus aucune fibre n'est sollicitée par la fissure et $[\xi]^*$ quand toutes les fibres sont désormais dans leurs phases d'extraction. Cette dernière ouverture correspond à :

$$[\xi]^* = [\xi]_{0(z=0, \varphi=0)} = \frac{(1 + \eta) \tau_0 L_f^2}{\phi_f E_f}. \quad (\text{A.30})$$

A.3 Calcul de la contrainte à travers une fissure

Si F_d ou F_e existent, alors la fibre intercepte la fissure, la longueur d'ancrage de la fibre (notée L) existe et est positive. À partir de l'équation (A.1), la fibre intercepte la fissure si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad z \leq \frac{L_f}{2} \cos \varphi \quad (\text{A.31})$$

Soit un petit élément de surface de la fissure (noté : dA), le nombre de fibres avec une orientation de φ à $\varphi + d\varphi$, de θ à $\theta + d\theta$ et situé de z à $z + dz$ traversant dA est de :

$$d^3\mathcal{N} = \mathcal{N}_f p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi d\varphi d\theta dz, \quad (\text{A.32})$$

où $\sin \varphi$ est le multiplicateur lié au repère sphérique et \mathcal{N}_f est le nombre de fibres comprises dans la matrice de volume $L_f dA$, donc :

$$\mathcal{N}_f = \frac{\text{volume total de fibres}}{\text{volume d'une fibre}} = \frac{L_f dA}{L_f A_f} v_f = \frac{4 dA}{\pi \phi_f^2} v_f \quad (\text{A.33})$$

où v_f est le pourcentage volumique de fibre dans la matrice sans fissures. La contrainte à travers la fissure dA est donnée par :

$$\sigma_B = \frac{\sum_{i=0}^{\mathcal{N}_f} F_i}{dA} = \frac{v_f}{A_f \mathcal{N}_f} \iiint_{\Xi} F_{d,e} d^3\mathcal{N}, \quad (\text{A.34})$$

où Ξ représente l'ensemble des fibres qui interceptent la fissure — ou qui respectent l'équation (A.31). Les plages des variables de position de la fibre (z, φ, θ) sont, en considérant la symétrie de la fibre : $z \in [0, \frac{L_f}{2}]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. L'équation (A.34) s'écrit donc plus rigoureusement par :

$$\sigma_B = \frac{4v_f}{\pi \phi_f^2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{\frac{L_f}{2} \cos \varphi} F_{d,e} (\llbracket \xi \rrbracket, \varphi) p(z) p(\theta, \varphi) \sin \varphi dz d\varphi d\theta \quad (\text{A.35})$$

où $p(\theta, \varphi)$ et $p(z)$ sont respectivement les lois de distribution de l'orientation de la fibre et de la distance entre le centre de masse de la fibre et le plan de fissuration. À l'origine, ces probabilités ont été choisies pour avoir une distribution uniformément aléatoire avec $p(z) = 2/L_f$ et $p(\theta, \varphi) = p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, car la surface générée par le couple (φ, θ) est de 2π (Lin et Li, 1997). Dans cet article l'auteur écrit que $p(\varphi) = \sin \varphi$, mais il a préalablement déjà intégré la probabilité pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et considéré que $\sin \varphi$ faisait partie de la probabilité alors qu'il s'agit du multiplicateur lié à l'intégration dans un repère sphérique. Telle que définie dans ce travail à la section 4.2.2, la probabilité $p(\theta, \varphi)$

présente un axe de symétrie ; l'intégration se fait donc pour $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $F_{d,e}$ est fonction de la position de la fibre (car fonction de L).

Concernant F_d , ce dernier n'est valable que pour $[\xi] < [\xi]_0$, ou bien pour :

$$[\xi] < \frac{2\phi_f}{\beta} \left[\cosh \left(\frac{\omega}{\phi_f} L \right) - 1 \right] \quad (\text{A.36})$$

avec l'équation (A.1), puis en isolant z , on obtient :

$$1 + \frac{\beta [\xi]}{2\phi_f} < \cosh \left(\frac{\omega L_f}{2\phi_f} - \frac{\omega z}{\cos \varphi \phi_f} \right) \text{ car } \frac{\beta}{2\phi_f} > 0,$$

$$\text{acosh} \left(1 + \frac{\beta [\xi]}{2\phi_f} \right) < \frac{\omega L_f}{2\phi_f} - \frac{\omega z}{\cos \varphi \phi_f}$$

car acosh est croissant sur $[1, +\infty]$ et comme $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos \varphi > 0$, alors :

$$z < z_0 \cos \varphi \text{ avec } z_0 = \frac{L_f}{2} - \frac{\phi_f}{\omega} \text{acosh} \left(1 + \frac{\beta [\xi]}{2\phi_f} \right). \quad (\text{A.37})$$

Avec le développement limité en série de Taylor au 2^e ordre en $\beta = 0$ et avec l'équation (A.12) :

$$z_0 = \frac{L_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[\xi] \phi_f E_f}{(1+\eta) \tau_0}}; \quad (\text{A.38})$$

F_e n'est valable que pour $[\xi]_0 < [\xi] \leq L$, ou bien pour :

$$z_0 = \cos \varphi < z \leq \left(\frac{L_f}{2} - [\xi] \right) \cos \varphi. \quad (\text{A.39})$$

Donc pour résumer :

$$\forall \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \forall z \in \left[0, \left(\frac{L_f}{2} - [\xi]\right) \cos \varphi\right], \quad \begin{cases} F_d \neq 0 \text{ et } F_e = 0 \text{ si } z < z_0 \cos \varphi \\ F_d = 0 \text{ et } F_e \neq 0 \text{ si } z \geq z_0 \cos \varphi \end{cases}$$

L'équation (A.35) devient :

$$\sigma_B = \frac{v_f}{A_f} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{z=0}^{z_0 \cos \varphi} F_d([\xi]) + \int_{z=z_0 \cos \varphi}^{\left(\frac{L_f}{2} - [\xi]\right) \cos \varphi} F_e([\xi]) \right] p(z) p(\theta, \varphi) dz d\varphi d\theta. \quad (\text{A.40})$$

Cependant, l'équation (A.38), n'a aucun sens physique dans le cas où $z_0 < 0$, ce qui

correspond à :

$$[[\xi]] \geq \frac{(1 + \eta) \tau_0 M_f^2}{\phi_f E_f} = [[\xi]]^*. \quad (\text{A.41})$$

Donc si $[[\xi]]^* \leq [[\xi]]$, il faut modifier l'équation (A.40), en imposant $z_0 = 0$:

$$\sigma_B = \frac{v_f}{A_f} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{\left(\frac{L_f}{2} - [[\xi]]\right) \cos \varphi} F_e ([[\xi]]) p(z) p(\varphi) dz d\varphi d\theta. \quad (\text{A.42})$$

Annexe B

Origine du paramètre d'endommagement

Cette annexe présente le paramètre d'endommagement ϵ utilisé dans ce mémoire. Les calculs suivants sont inspirés de [Budiansky et O'Connell \(1976\)](#).

B.1 Création d'une fissure

La relation entre la dimension caractéristique de la fissure (notée a) — ou demi-grand axe — et son ouverture (notée $[[\xi]]$) en fonction de la contrainte externe (notée σ) appliquée sur la fissure, est ([Tada et al., 2000](#)) :

$$[[\xi]] = \frac{8(1 - \tilde{\nu}^2)}{\pi \tilde{E}} \sigma \sqrt{a^2 - r^2}, \quad (\text{B.1})$$

où \tilde{E} et $\tilde{\nu}$ sont le module d'Young et coefficient de Poisson effectifs du matériau. L'énergie dissipée pour former cette fissure est de

$$\Delta\Psi = \frac{1}{2} \sigma \iint [[\xi]] \, dS = \frac{1}{2} \sigma 2\pi \int_0^a [[\xi]] r \, dr. \quad (\text{B.2})$$

Après simplification :

$$\Delta\Psi = \frac{8(1 - \tilde{\nu}^2)}{3\tilde{E}} \sigma^2 a^3. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Bilan énergétique

Soit Ω un volume élémentaire représentatif du matériau. L'énergie dissipée pour former \mathcal{N} fissures dans Ω est :

$$-\mathcal{N}\Delta\Psi = \frac{\sigma^2}{2E} V - \frac{\sigma^2}{2\tilde{E}} V \quad (\text{B.4})$$

où V est le volume de Ω et E le module d'Young du matériau à l'état initial. En insérant (B.3) dans (B.4) et après simplification :

$$\frac{\tilde{E}}{E} = 1 - \frac{16}{3}(1 - \tilde{\nu}^2) \underbrace{\mathcal{N}_c a^3}_{\epsilon}, \quad (\text{B.5})$$

où $\mathcal{N}_c = \frac{\mathcal{N}}{V}$ est le nombre de fissures par unité de volume. Le paramètre d'endommagement de Budiansky et O'Connell (1976) est alors identifié dans l'équation (B.5) par $\epsilon = \mathcal{N}_c a^3$.

Index des citations

- Advani (1994), 17, 18
AFGC (2002), 2, 13, 14, 26, 28, 30
- Bao et Song (1993), 68
Bayard (2003), 2, 22–25, 27, 31, 97, 104, 118, 121
Bažant et Planas (1998), 5, 80, 120
Behloul (2006), 29
Bentur et Mindess (1990), 8, 10
Bernier et Behloul (1996), 2, 26, 27, 107, 110, 118
Budiansky et O’Connell (1976), 64, 78, 98, 135, 136
- Chen et Graybeal (2010), 54, 55, 120
Chen et al. (2007), 34, 35, 37
Chuang et Ulm (2002), 53, 54
Curbach et Speck (2008), 55
- Dareau et Rousselet (1998), 45
Dormieux et al. (2006), 65
- Eshelby (1957), 65
- Ferrara et al. (2011a), 15
Ferrara et al. (2011b), 19
- Grassl et Jirásek (2006), 120
Griffith (1921), 45, 47
Grünewald (2004), 20
- Habel (2004), 10, 13
- Irwin (1957), 59, 79
- Jeffery (1922), 19
Jirásek et Bažant (2002), 35
- Jirásek et Patzak (2002), 120
Jirásek et Zimmermann (1997), 85, 120
- Kooiman (2000), 20, 22, 28
Krenchel (1975), 17
- Li et al. (1991), 51, 68, 71, 72, 86
Lin et Li (1997), 51, 68, 127, 132
Lubliner et al. (1989), 41
- Maage (1977), 52
Markovic (2006), 13, 15
Martinie et Roussel (2011), 19, 28
Mazars (1986), 50
Mori et Tanaka (1973), 65
- Naaman et Shah (1976), 52
- Pansuk et al. (2008), 15
- Resplendino (2009a), 31
Resplendino (2009b), 7, 8, 10
Romualdi et Mandel (1964), 28
- Sorelli et al. (2007), 102
Swamy et Mangat (1974), 8
- Tada et al. (2000), 75, 135
Toutlemonde et al. (1999), 9, 118
Tue et Henze (2008), 15, 16
- Ulm’s lecture notes (2011), 43
- Wuest (2007), 7, 8, 13, 15, 28, 52, 53, 91, 121
- Zimmermann et Grohmann (2008), 55