

PATRICE RIVARD

## Un lemme de Schwarz–Pick à points multiples

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques  
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

Octobre 2007

# Résumé

Le but de cet ouvrage est de montrer, grâce à l'introduction d'éléments de théorie géométrique, comment il est possible d'apporter de nouvelles idées à la résolution d'un problème d'interpolation connu sous le nom de *problème classique de Nevanlinna–Pick* et qui s'énonce comme suit : étant donné  $n$  points distincts  $z_1, \dots, z_n$  et  $n$  points  $w_1, \dots, w_n$  tous appartenant au disque unité  $\mathbb{D}$ , déterminer des conditions suffisantes et nécessaires assurant l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Une solution complète fut apportée d'abord par Pick en 1916 et indépendamment par Nevanlinna en 1919. Une toute nouvelle approche sera donc présentée dans ce travail utilisant la géométrie hyperbolique, de même qu'une version à points multiples du lemme de Schwarz–Pick.

# Avant-propos

Je voudrais remercier particulièrement ma directrice de recherche, Mme Line Baribeau, pour son aide précieuse à la réalisation de ce mémoire. Je tiens également à remercier le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) pour son soutien financier. Aussi, un grand merci à mes amis dévoués et à ma famille pour leur support tout au long des mes études de maîtrise.

*À tous ceux et celles qui m'ont inspiré.*

*Si j'ai pu voir un peu plus loin que  
d'autres, c'est que je me suis hissé sur  
les épaules de géants. Isaac Newton*

# Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	vi
Table des figures	vii
Introduction	1
<b>1 Les transformations de Möbius</b>	<b>3</b>
1.1 Quelques rappels . . . . .	3
1.2 Les transformations de Möbius . . . . .	5
<b>2 La géométrie hyperbolique dans le modèle du disque de Poincaré</b>	<b>7</b>
2.1 Définitions et notions fondamentales . . . . .	8
2.2 Le modèle du disque de Poincaré . . . . .	10
2.3 Les automorphismes de $\mathbb{D}$ . . . . .	10
2.4 Les géodésiques du disque de Poincaré . . . . .	14
2.5 Quelques formules pour la métrique hyperbolique dans $\mathbb{D}$ . . . . .	16
2.6 Lemme de Schwarz–Pick . . . . .	17
2.7 Propriété de complétude du modèle du disque de Poincaré . . . . .	18
2.8 Le modèle du demi-plan supérieur . . . . .	18
<b>3 Un lemme de Schwarz–Pick à trois points</b>	<b>22</b>
3.1 Le quotient de la différence hyperbolique . . . . .	22
3.2 Propriétés du quotient de la différence hyperbolique . . . . .	26
3.3 Un lemme de Schwarz–Pick à trois points . . . . .	32
3.4 Applications . . . . .	37
3.4.1 Lemme de Julia . . . . .	37
3.4.2 Lemme de Rogosinski . . . . .	44
3.5 Le problème de Nevanlinna–Pick à trois points . . . . .	46
<b>4 Un lemme de Schwarz–Pick à quatre points</b>	<b>51</b>

4.1	Un lemme de Schwarz–Pick à quatre points . . . . .	51
4.2	Le problème de Nevanlinna–Pick à quatre points . . . . .	54
4.3	Un problème de nature géométrique . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Un lemme de Schwarz–Pick à points multiples</b>	<b>59</b>
5.1	Un lemme Schwarz–Pick à $n$ points . . . . .	59
5.2	Une nouvelle solution au problème classique de Nevanlinna–Pick . . . . .	63
	<b>Conclusion</b>	<b>71</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>72</b>

# Table des figures

1.1	La projection stéréographique . . . . .	4
2.1	Les géodésiques de $\mathbb{D}$ . . . . .	15
2.2	Les géodésiques de $\mathbb{H}$ . . . . .	20
3.1	Le cas d'égalité du corollaire 3.3.3 . . . . .	35
3.2	Une région d'approche non-tangentielle . . . . .	39
3.3	Un angle de Stolz en $z = 1$ . . . . .	40
3.4	Lemme de Julia à trois points . . . . .	41
3.5	La région $\Delta_{z_0}$ . . . . .	44

# Introduction

L'intérêt principal de cet ouvrage porte essentiellement sur un problème d'interpolation connu sous le nom de *problème classique de Nevanlinna–Pick*. Ce dernier s'énonce de la manière suivante : étant donné  $n$  points distincts  $z_1, \dots, z_n$  et  $n$  points  $w_1, \dots, w_n$ , tous appartenant au disque unité  $\mathbb{D}$ , déterminer des conditions suffisantes et nécessaires assurant l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Une solution complète fut apportée par Georg Alexander Pick en 1916 et indépendamment par Rolf Nevanlinna en 1919. En effet, ils démontrèrent qu'une telle fonction analytique existe si et seulement si la matrice  $M$  définie par

$$M = \left[ \frac{1 - \overline{w_j} w_i}{1 - \overline{z_j} z_i} \right] \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

est semi-définie positive.

Il est possible d'aborder le problème d'une nouvelle façon en adoptant un point de vue géométrique. Pour cela, nous aurons besoin de quelques notions fondamentales. Dans le chapitre premier nous introduirons les transformations de Möbius dans le plan complexe qui sont essentielles pour la compréhension de certains concepts.

Le deuxième chapitre est primordial et expose les outils de base de la géométrie hyperbolique. Le modèle que nous utiliserons dans ce travail est celui du disque de Poincaré. Dans cet espace, il est donc possible de transposer certaines notions de géométrie euclidienne. Par exemple, les notions de longueur, d'isométrie et de géodésiques ont un sens et peuvent être définies avec précision, ainsi que leurs propriétés.

Le troisième chapitre présente les travaux initiateurs de Alan F. Beardon et David Minda pour l'obtention d'une nouvelle solution au problème classique de Nevanlinna–Pick pour le cas de trois points ( $n = 3$ ). Ce sont eux qui, les premiers, ont eu l'idée d'exploiter la géométrie hyperbolique ainsi que la théorie des fonctions d'une variable complexe afin d'apporter une approche originale au problème classique de Nevanlinna–Pick. Ceci a été rendu possible grâce à l'obtention d'une version du lemme de Schwarz–Pick non plus à deux points, mais à trois points. Cette version à points triples du lemme



dépend en fait de l'utilisation judicieuse d'une fonction analytique notée  $f^*(z, z_1)$ , où  $z_1$  est un paramètre fixe appartenant au disque unité.

Dans le quatrième chapitre, de nouveaux résultats de recherche sont présentés afin d'étendre les résultats de Beardon et Minda pour le cas de quatre points. Encore une fois, c'est à la suite de l'obtention d'une version du lemme de Schwarz–Pick à quatre points que de nouvelles conditions géométriques sont à même de garantir l'existence d'une fonction analytique satisfaisant aux conditions du problème classique de Nevanlinna–Pick pour le cas  $n = 4$ .

Finalement, le cinquième chapitre conclut le travail amorcé en présentant une nouvelle solution au problème classique de Nevanlinna–Pick pour le cas général. Comme précédemment, l'obtention d'une version du lemme de Schwarz–Pick à points multiples a été primordiale afin d'atteindre cet objectif. De plus, on y présente aussi une caractérisation de la solution en discutant, par exemple, de l'unicité ou de l'existence d'une fonction particulière.

# Chapitre 1

## Les transformations de Möbius

Dans ce premier chapitre, nous ferons la présentation d'une classe d'applications fort importante pour l'étude de la géométrie hyperbolique. Il s'agit des *transformations de Möbius*. Dans un premier temps, nous commencerons par définir un nouvel espace dans lequel l'étude de ces transformations est plus adéquate et dans un deuxième temps, nous énoncerons les propriétés les plus significatives des transformations de Möbius dont nous aurons besoin pour ce travail.

### 1.1 Quelques rappels

Le plan complexe  $\mathbb{C}$  possède comme propriété topologique le fait d'être un espace localement compact. Il est d'ailleurs possible d'ajouter à  $\mathbb{C}$  un point, appelé *point à l'infini* et que l'on note  $\infty$ , afin de rendre cet espace compact. Ainsi, le *plan complexe étendu*, que l'on note  $\mathbb{C}_\infty$ , est défini par  $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Ce procédé de *compactification* est possible grâce à la *projection stéréographique*. Dans ce qui suit, on notera par  $S^2$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^3$  et par  $N$  le point  $(0, 0, 1)$  que l'on nomme *pôle nord*. On appelle projection stéréographique l'application  $\pi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$  définie de la manière suivante :

$$\pi(z) := \begin{cases} \left( \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) & \text{si } z \neq \infty, \\ N & \text{si } z = \infty, \end{cases}$$

où  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ .

D'un point de vue géométrique, on peut voir la projection stéréographique comme étant une application qui agit comme suit (voir figure 1.1) : on considère un point

$z = x + iy$  appartenant à  $\mathbb{C}$  et on construit une droite partant du pôle nord et passant par  $z$ . Cette dernière intercepte un point  $P = (X, Y, Z)$  sur  $S^2$  qui est l'image  $z$  par  $\pi$ . Chaque point de  $\mathbb{C}$  est envoyé vers un et un seul point de  $S^2$ , sauf  $N = (0, 0, 1)$ . Il est donc naturel d'ajouter à  $\mathbb{C}$  le point  $\infty$  afin que la projection stéréographique soit une bijection de  $\mathbb{C}$  dans la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ . De cette manière, l'image du pôle nord sera  $\infty$ .

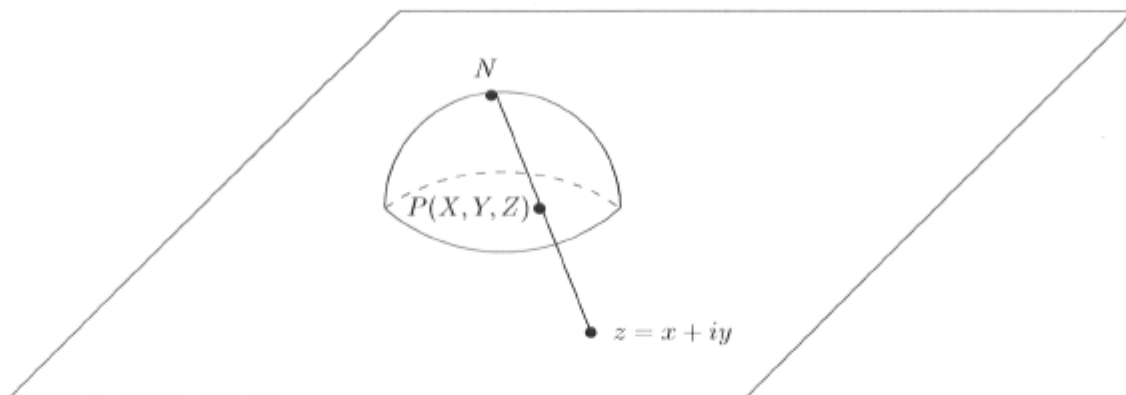


FIG. 1.1 – La projection stéréographique

Remarquons que la projection stéréographique permet de représenter le plan complexe étendu comme une sphère, c'est pourquoi on appelle  $\mathbb{C}_\infty$  la *sphère de Riemann*. Cette dernière induit aussi une topologie dans  $\mathbb{C}_\infty$  à partir de la métrique euclidienne appliquée à  $S^2$ . On nommera cette métrique la *métrique cordale* et on la notera par  $\sigma$ . Explicitement,

$$\sigma(z, w) = |\pi(z) - \pi(w)|, \text{ pour tout } z, w \in \mathbb{C}_\infty.$$

À partir de la définition de la projection stéréographique, on trouve que :

$$\sigma(z, w) = \begin{cases} \frac{2|z - w|}{(1 + |z|^2)^{\frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{\frac{1}{2}}} & \text{si } z, w \neq \infty, \\ \frac{2}{(1 + |z|^2)} & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Cette formule met en évidence le fait que la métrique  $\sigma$  restreinte à  $\mathbb{C}$  induit une topologie équivalente à celle induite par la métrique euclidienne. En effet, une fonction d'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  est continue à la fois pour les deux métriques ou pour aucune des métriques. De façon plus précise, la topologie sur  $\mathbb{C}_\infty$  est complètement caractérisée par une base de voisinages définis comme suit : si on note par  $D(a, r)$  un disque ouvert centré en  $a$  et de rayon  $r > 0$ , un ensemble est ouvert dans  $\mathbb{C}_\infty$  si et seulement s'il est la réunion de disques  $D(a, r)$  où  $a \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ . Dans le cas particulier du point à l'infini, un voisinage de ce point sera  $D(\infty, r) = D'(\infty, r) \cup \{\infty\}$ , où  $D'(\infty, r)$  est l'ensemble des  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > r$ . Il s'agit donc du complémentaire

d'un disque centré en 0 dans  $\mathbb{C}$ . Il devient maintenant clair que le principal intérêt d'utiliser la sphère de Riemann et la métrique qui y est rattachée réside dans le fait que  $\infty$  devient un point comme les autres, puisque les notions d'analyse, telle que la continuité par exemple, s'appliquent à ce point.

Avant d'identifier les fonctions analytiques dans  $\mathbb{C}_\infty$ , nous allons établir la terminologie suivante. Une fonction  $f : D \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , où  $D \subset \mathbb{C}$  est un domaine, est dite *méromorphe* dans  $D$  si chaque point de  $D$  possède un voisinage dans lequel  $f$  ou  $1/f$  est holomorphe. Les pôles de  $f$  sont les points  $w$  tels que  $f(w) = \infty$ . Il est clair que dans un voisinage de tels points, la fonction  $z \mapsto 1/f(z)$  est holomorphe et vaut 0 en  $w$ . Observons également qu'en utilisant la métrique cordale on peut montrer que la fonction  $f$  est continue en chacun de ses pôles. Finalement, dans le cas particulier du point  $\infty$ , une fonction  $f$  est dite *holomorphe (méromorphe)* au point  $\infty$  si la fonction  $z \mapsto f(1/z)$  est holomorphe (méromorphe) au point  $z = 0$ .

La théorie des surfaces de Riemann, que nous n'aborderons pas ici, permet de caractériser complètement les fonctions analytiques  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ . En effet, on peut montrer que la sphère de Riemann est en fait une surface de Riemann. Nous aurons donc la définition suivante : une fonction  $f : D_1 \rightarrow D_2$ , où  $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}_\infty$  sont deux domaines, est dite analytique dans  $D_1$  si elle est holomorphe ou méromorphe en chacun des points de  $D_1$ .

## 1.2 Les transformations de Möbius

Nous rappelons dans cette section quelques résultats classiques concernant les transformations de Möbius. On peut trouver de plus amples détails dans [2],[3] et [8].

Une transformation de Möbius  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  est une fonction de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1.1)$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  et  $ad - bc \neq 0$ .

Puisque

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

la condition  $ad - bc \neq 0$  nous assure que la fonction  $f$  n'est pas une constante.

Les transformations de Möbius sont bien définies dans la sphère de Riemann. En effet, si  $f(z) = az + b$ , alors  $f(\infty) = \infty$ . Dans le cas où  $f$  est de la forme (1.1) avec  $c \neq 0$  on aura que  $f(-d/c) = \infty$  et

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + b/z}{c + d/z} = \frac{a}{c}.$$

Soulignons également qu'il existe trois types de transformations de Möbius particulières. On appelle *translation* une transformation de la forme  $f(z) = z + b$ , *dilatation* une transformation de la forme  $f(z) = az$  et *inversion* une transformation de la forme  $f(z) = 1/z$ .

Les transformations de Möbius possèdent des propriétés particulières qui illustrent bien leur importance dans l'étude du plan complexe étendu. Tout d'abord, les transformations de Möbius forment un groupe sous la composition des fonctions de  $\mathbb{C}_\infty$  dans lui-même. D'ailleurs, on notera par  $\mathcal{GM}(\mathbb{C}_\infty)$  ce groupe. De plus, une transformation de Möbius est un homéomorphisme de  $\mathbb{C}_\infty$ , c'est-à-dire, une fonction bijective et continue dont la réciproque est également continue. En utilisant le fait que les transformations de Möbius sont analytiques dans  $\mathbb{C}_\infty$  au sens général que nous avons défini précédemment, on peut voir ces fonctions comme des *transformations conformes* de la sphère de Riemann dans elle-même. Rappelons que la notion de *conformité* est directement reliée à celle de la préservation des angles.

Les trois transformations élémentaires qui sont la translation, la dilatation et l'inversion peuvent caractériser complètement les transformations de Möbius dans le sens où toute transformation de Möbius est le résultat d'une composition de translations, dilatations et inversions. On peut donc voir ces transformations comme des fonctions qui engendrent le groupe  $\mathcal{GM}(\mathbb{C}_\infty)$ .

Lorsqu'on aborde le plan complexe étendu, il est naturel de considérer des objets géométriques particuliers tels que les droites et les cercles. On appelle *cercle généralisé* toute droite ou tout cercle dans  $\mathbb{C}$ . Cette définition permet de considérer les droites et les cercles comme étant la même entité, puisqu'une droite peut être vue comme un cercle passant à l'infini. L'importance qu'on accorde à ces objets provient du fait que les transformations de Möbius préservent les cercles généralisés. En effet, l'image d'une droite ou d'un cercle par une telle application est toujours soit une droite soit un cercle.

## Chapitre 2

# La géométrie hyperbolique dans le modèle du disque de Poincaré

Historiquement, la découverte de la géométrie hyperbolique est intimement liée avec la réfutation du cinquième postulat d'Euclide. Celui-ci affirme qu'étant donné une droite et un point extérieur à cette droite, il existe une et une seule droite passant par ce point et parallèle à la droite. Rappelons que les cinq postulats constituaient la fondation axiomatique de la géométrie dite *euclidienne*. Une géométrie est dite *non euclidienne* si au moins un des cinq axiomes est modifié. Celui que nous venons d'énoncer a longtemps été critiqué, puisqu'il n'était pas assez évident qu'on puisse l'admettre sans preuve. En effet, on croyait qu'il était possible de le démontrer à partir des autres postulats. Sa validité en tant qu'axiome était ainsi fortement mise en doute puisque les géomètres ont passé près de 2000 ans à tenter de le démontrer. C'est au dix-neuvième siècle que le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss fut le premier à s'apercevoir que la réfutation du cinquième postulat d'Euclide permettait d'obtenir une nouvelle géométrie tout-à-fait cohérente. La géométrie qu'il construit sera nommée plus tard la *géométrie hyperbolique*. Dans cette géométrie, la somme des angles intérieurs d'un triangle est inférieure à 180 degrés. Il existe bien sûr d'autres types de géométries non euclidiennes, par exemple, la géométrie sphérique dans laquelle la somme des angles intérieurs d'un triangle est maintenant supérieure à 180 degrés.

Dans ce chapitre, nous allons introduire un modèle particulier du plan hyperbolique. On entend par *modèle* un espace particulier dans lequel on retrouve des objets géométriques de base qui servent à l'édification de la géométrie dans cet espace. Par exemple, dans le modèle du plan euclidien, les droites et les points font partie de ce type d'objets. Il existe de nombreux modèles pour le plan hyperbolique : le modèle du disque de Poincaré  $\mathbb{D}$ , le modèle du demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$ , le modèle de Klein, etc. Ce sont le premier et le deuxième modèle qui nous intéresseront ici.

## 2.1 Définitions et notions fondamentales

Pour construire une métrique, nous avons besoin d'une définition précise de ce qu'on entend par la distance entre deux points. Mais avant, voici un rappel de quelques notions fondamentales.

Si  $\gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est une courbe de classe  $\mathcal{C}^1$  et est telle que  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ , alors la longueur euclidienne de  $\gamma$  est

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Ainsi, si  $dz = dx + idy$ , l'élément de longueur  $ds$  peut s'écrire  $|dz|$ , où  $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . Avec cette notation la longueur de  $\gamma$  sera  $\int_{\gamma} ds = \int_{\gamma} |dz|$ .

**Définition 2.1.1.** On appelle fonction de densité une fonction  $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui est continue et strictement positive.

Nous allons maintenant généraliser la définition de la longueur d'une courbe pour une fonction de densité quelconque.

**Définition 2.1.2.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . La longueur de  $\gamma$ , notée  $\mathcal{L}(\gamma)$ , en fonction de la densité  $\lambda$  est définie comme étant :

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda(z) |dz| = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Il est clair que pour définir la longueur d'une courbe dans la métrique euclidienne nous avons pris comme fonction de densité  $\lambda(z) \equiv 1$ .

Il est possible d'élargir notre famille de courbes  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  en incluant les courbes qui sont *continûment différentiables par morceaux*.

**Définition 2.1.3.** Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est dite continûment différentiable par morceaux si  $\gamma$  est continue sur  $[a, b]$  et s'il existe une partition de  $[a, b]$  en sous-intervalles  $[a = a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{n-1}, a_n = b]$  telle que  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  lorsqu'on la restreint sur un sous-intervalle  $[a_{k-1}, a_k]$ .

Il est clair qu'il est tout-à-fait possible de mesurer la longueur d'une courbe continûment différentiable par morceaux, puisqu'il s'agit d'une courbe formée par un nombre fini de courbes de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition 2.1.4.** Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une courbe continûment différentiable par morceaux et  $\lambda(z)$  une fonction de densité. Alors, la longueur de  $\gamma$  est :

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_{\gamma} \lambda(z) |dz|.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la longueur d'une courbe ne dépend pas de la paramétrisation de la courbe.

Nous sommes maintenant en mesure de définir la distance entre deux points.

**Définition 2.1.5.** Soit  $z, w \in \Omega \subset \mathbb{C}$  où  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{C}$ . Alors la distance entre  $z$  et  $w$ , notée  $d(z, w)$ , selon la fonction de densité  $\lambda(z)$  est :

$$d(z, w) := \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \lambda(z) |dz|,$$

où l'infimum est pris en considérant toutes les courbes continûment différentiables par morceaux joignant  $z$  et  $w$ .

**Proposition 2.1.1.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine et  $\lambda(z)$  une fonction de densité sur  $\Omega$ . Alors,  $d$  définie précédemment est une métrique sur  $\Omega$ .

*Démonstration.* Soient  $z, w \in \Omega$ . Clairement, on a que  $d(z, w) = d(w, z)$ . Considérons maintenant  $v \in \Omega$ . Pour voir que  $d$  vérifie l'inégalité triangulaire, supposons que  $d(z, v) \geq \int_{\gamma_1} \lambda(z) |dz| - \varepsilon$  et que  $d(v, w) \geq \int_{\gamma_2} \lambda(z) |dz| - \varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$  et  $\gamma_1, \gamma_2$  représentent des courbes continûment différentiables par morceaux reliant respectivement  $z, v$  et  $v, w$ . Alors, il est clair que

$$\begin{aligned} 2\varepsilon + d(z, v) + d(v, w) &\geq \int_{\gamma_1} \lambda(z) |dz| + \int_{\gamma_2} \lambda(z) |dz| \\ &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \lambda(z) |dz| \\ &\geq \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \lambda(z) |dz| \\ &= d(z, w), \end{aligned}$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma$  continûment différentiables par morceaux reliant  $z$  et  $w$ . Il nous reste à montrer que  $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$ . Si  $z = w$ , alors il est évident que  $d(z, w) = 0$ . Réciproquement, nous allons montrer que si  $z \neq w$ , alors  $d(z, w) > 0$ . Considérons un disque ouvert centré en  $z$  et de rayon  $r > 0$  que l'on note par  $D(z, r) \subset \Omega$ . Par continuité, on peut supposer que  $\lambda(z) \geq \lambda_0 > 0$  pour tous les points appartenant à  $D(z, r)$ . Supposons aussi que  $w \notin D(z, r)$ . Pour toute courbe  $\gamma$ , on a que  $\lambda(z) \geq \lambda_0$  sur une section  $\bar{\gamma}$  de  $\gamma$  dont la longueur est au moins  $r$ . Ainsi,  $d(z, w) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \lambda(z) |dz| > \int_{\bar{\gamma}} \lambda(z) |dz| \geq \lambda_0 r > 0$ .  $\square$



## 2.2 Le modèle du disque de Poincaré

Nous allons noter par  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  le modèle du disque de Poincaré. Il s'agit donc du disque unité ouvert dans  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.2.1.** Soient  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors, la métrique hyperbolique  $\rho$  dans  $\mathbb{D}$  est définie par :

$$\rho(z, w) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma$  continûment différentiables par morceaux joignant le point  $z$  au point  $w$ .

La métrique hyperbolique est donc définie en utilisant la fonction de densité  $\lambda(z) = 2/(1 - |z|^2)$ . Nous noterons le modèle du disque de Poincaré et sa métrique hyperbolique correspondante par  $(\mathbb{D}, \rho)$ . Observons qu'il s'agit bien d'une métrique, d'après la proposition 2.1.1.

## 2.3 Les automorphismes de $\mathbb{D}$

**Définition 2.3.1.** Une application  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  qui est bijective d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dans lui-même et qui est analytique dans  $\Omega$  est appelée un automorphisme de  $\Omega$ .

Par exemple, les transformations de Möbius sont des automorphismes de la sphère de Riemann  $\mathbb{C}_{\infty}$ .

**Remarque 2.3.1.** Il est aisé de voir que les automorphismes forment un groupe avec la composition comme opération. En effet, la composition de deux automorphismes est un automorphisme. De même, l'inverse d'un automorphisme est aussi un automorphisme.

Nous allons procéder plus spécifiquement à l'étude des automorphismes du disque unité  $\mathbb{D}$ . Il s'agit d'une classe importante de fonctions, car, comme on le verra plus loin, ce sont des isométries dans  $(\mathbb{D}, \rho)$ .

Tout d'abord voici un résultat classique de l'analyse complexe qui nous sera utile.

**Lemme de Schwarz.** Soit  $f$  une fonction analytique pour  $|z| < 1$ . Supposons que  $|f(z)| < 1$  pour tout  $|z| < 1$  et que  $f(0) = 0$ . Alors,

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall |z| < 1 \tag{2.1}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2.2}$$

Il y a égalité dans (2.1) et (2.2) si et seulement si  $f(z) = e^{i\varphi}z$ , où  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

**Proposition 2.3.1.** Soit  $g$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$  tel que  $g(0) = 0$ . Alors,

$$g(z) = e^{i\varphi}z,$$

pour un  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

*Démonstration.* Nous allons utiliser le lemme de Schwarz pour montrer la proposition. En effet, on peut appliquer le lemme à  $g$  et on obtient ainsi que  $|g(z)| \leq |z|$  pour  $z \in \mathbb{D}$ . De même, en appliquant le lemme à  $g^{-1}$  on obtient que  $|g^{-1}(w)| \leq |w|$ . En prenant  $w = g(z)$ , on a que  $|z| \leq |g(z)|$ . Ainsi,  $|g(z)| = |z|$ . Toujours selon le lemme de Schwarz, comme on a égalité, cela implique que  $g(z) = e^{i\varphi}z$ , pour un  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .  $\square$

**Théorème 2.3.1.** Les automorphismes de  $\mathbb{D}$  sont les fonctions  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de la forme :

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \tag{2.3}$$

où  $|a| < 1$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

*Démonstration.* Posons  $g(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ . Comme  $g$  est une transformation de Möbius, alors elle est en particulier un automorphisme de  $\mathbb{C}$  et elle préserve les cercles généralisés. Comme

$$|e^{i\theta} - a| = |e^{-i\theta} - \bar{a}| = |1 - \bar{a}e^{i\theta}|$$

pour  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , on voit que  $|g(z)| = 1$  pour  $z = e^{i\theta}$ . Ainsi,  $g$  envoie le cercle unité dans lui-même. Aussi, puisque  $g(a) = 0$ , alors  $g$  envoie  $\mathbb{D}$  dans lui-même. Ainsi  $g$  est bien un automorphisme du disque unité et par le fait même  $f$  également.

Réciproquement, supposons que  $h$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Posons  $a = h^{-1}(0)$ . Alors,  $h \circ g^{-1}$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et  $(h \circ g^{-1})(0) = 0$ . Par la proposition précédente,  $(h \circ g^{-1})(z) = e^{i\varphi}z$  pour un  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Ainsi, on obtient que  $h(z) = e^{i\varphi}g(z)$  et  $h$  est bien de la forme (2.3).  $\square$

Maintenant que les automorphismes de  $\mathbb{D}$  sont connus, nous pouvons montrer une version plus forte du lemme de Schwarz. Il s'agit du *lemme de Pick*.

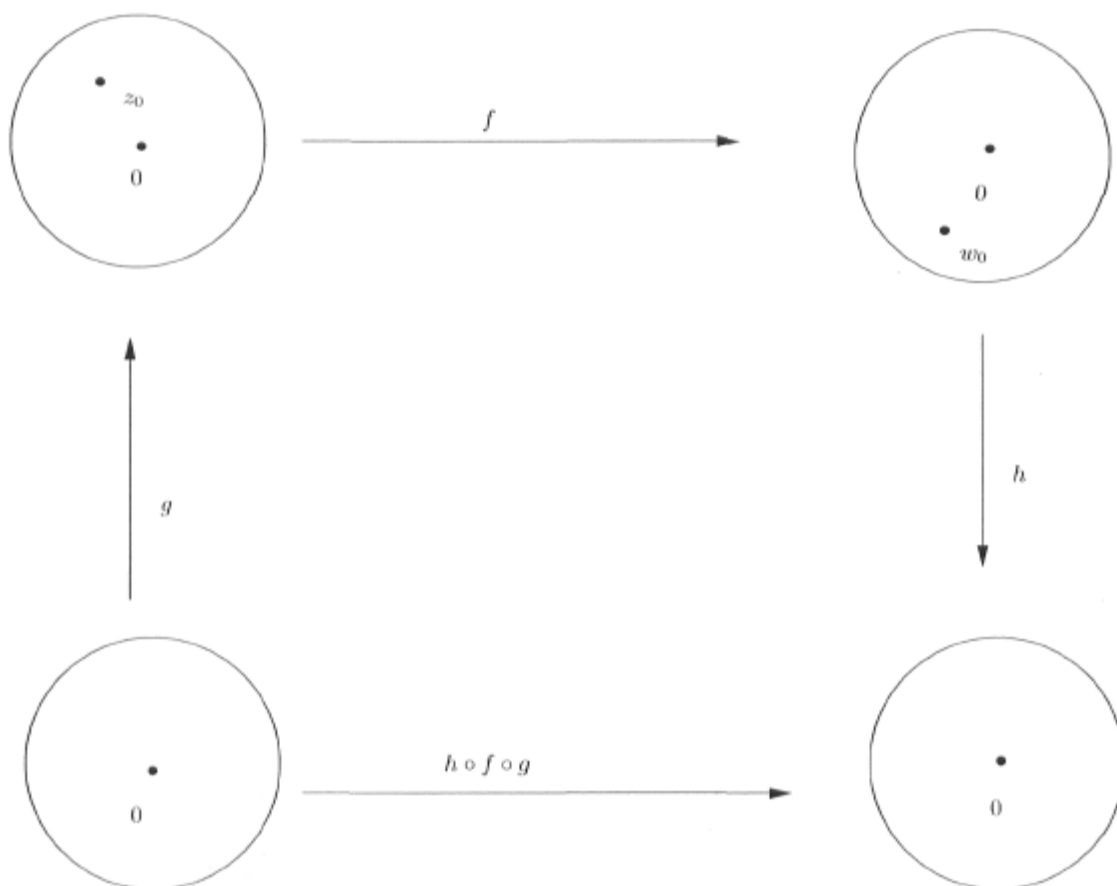
**Lemme de Pick.** Soit  $f(z)$  une fonction analytique qui satisfait  $|f(z)| < 1$  pour  $|z| < 1$ . Alors on a :

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1. \quad (2.4)$$

Il y a égalité dans (2.4) si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.* Pour montrer le lemme, nous allons tout d'abord déterminer des automorphismes de  $\mathbb{D}$  qui permettront d'utiliser le lemme de Schwarz. Voici comment nous allons procéder.

Fixons  $z_0 \in \mathbb{D}$  et posons  $w_0 = f(z_0)$ . Soit  $g$  et  $h$  des automorphismes du disque unité qui envoient respectivement 0 vers  $z_0$  et  $w_0$  vers 0 (voir le diagramme qui suit).



Explicitement,  $g$  et  $h$  seront définis de la façon suivante :

$$g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \quad h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}.$$

Ainsi,  $h \circ f \circ g$  envoie 0 vers 0.

En utilisant la règle de dérivation en chaîne et (2.2), on a :

$$|(h \circ f \circ g)'(0)| = |h'(w_0)f'(z_0)g'(0)| \leq 1. \quad (2.5)$$

Ainsi,  $|f'(z_0)| \leq 1/|g'(0)h'(w_0)|$ . Comme  $g'(z) = (1 - |z_0|^2)/(1 - \bar{z}_0z)^2$  et que  $h'(w) = (1 - |w_0|^2)/(1 - \bar{w}_0w)^2$ , en substituant  $g'(0) = 1 - |z_0|^2$  et  $h'(w_0) = 1/(1 - |w_0|^2)$ , nous obtenons :

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.$$

Comme  $z_0$  est arbitraire, alors (2.4) est vrai pour tout  $|z| < 1$ . Si  $f$  est un automorphisme du disque unité, alors  $h \circ f \circ g$  est aussi un automorphisme. D'après la proposition 2.3.1,  $h \circ f \circ g$  est une rotation. Il y aura ainsi égalité dans (2.5) et conséquemment dans (2.4).

Réciproquement, s'il y a égalité dans (2.4) on aura que  $|(h \circ f \circ g)'(0)| = 1$ . D'après la proposition 2.3.1,  $h \circ f \circ g(z) = e^{i\theta}z$  pour  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  et ainsi il s'agit d'un automorphisme. En composant par  $h^{-1}$  à gauche et par  $g^{-1}$  à droite, on a que  $f$  est un automorphisme du disque unité.  $\square$

Lorsqu'on s'intéresse à la géométrie d'un espace, une classe de fonctions particulières joue un rôle d'une grande importance : les isométries. Il s'agit bien sûr de fonctions qui préservent les distances au sens de la métrique définie dans l'espace. Dans le cas du modèle du disque de Poincaré, nous allons montrer que les automorphismes de  $\mathbb{D}$  sont en fait des isométries dans  $(\mathbb{D}, \rho)$ .

**Théorème 2.3.2.** *Soient  $f$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et  $\gamma$  une courbe continûment différentiable par morceaux. Alors,*

$$\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(f(\gamma)).$$

*Démonstration.* Posons  $w = f(z)$ . D'après le lemme de Pick, il y a égalité dans (2.4). Cette dernière peut s'écrire comme suit :

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2}.$$

Sous forme différentielle on obtient :

$$\frac{|dw|}{1 - |w|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (2.6)$$

Finalement,

$$\mathcal{L}(f(\gamma)) = \int_{f \circ \gamma} \frac{2|dw|}{1 - |w|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1 - |z|^2} = \mathcal{L}(\gamma).$$

$\square$

Remarquons que dans la preuve on a établi le fait que  $|dz|/(1 - |z|^2)$  est invariant sous les automorphismes de  $\mathbb{D}$ .

## 2.4 Les géodésiques du disque de Poincaré

Nous avons établi dans les précédentes sections que pour évaluer la distance entre deux points,  $z$  et  $w$  disons, il faut considérer toutes les courbes continûment différentiables par morceaux reliant  $z$  et  $w$  et prendre l'infimum de la longueur de ces courbes. Il est donc naturel de se demander s'il existe une catégorie de courbes spécifiques qui possède la propriété qu'une unique courbe appartenant à celle-ci reliant les points  $z$  et  $w$  est telle que sa longueur mesurée entre ces points correspond exactement à la distance entre  $z$  et  $w$ . Il serait remarquable d'avoir cette classe de courbes puisqu'il serait aisé de mesurer la distance entre n'importe quels points. En effet, il suffirait d'évaluer la longueur de l'unique courbe appartenant à cette classe passant par ces points.

En faisant l'étude de la géométrie euclidienne, il appert très rapidement que les courbes dont la longueur correspond à la distance entre deux points sont les segments de droite reliant ces points. Formulé autrement, on peut dire que le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite. On peut appliquer ces concepts au cas du modèle du disque de Poincaré et s'intéresser aux courbes dont la longueur correspond à la distance entre deux points. On appellera ce type particulier de courbes les *géodésiques hyperboliques* de  $(\mathbb{D}, \rho)$ . Plus généralement, nous avons la définition suivante.

**Définition 2.4.1.** *Une géodésique est une courbe  $\gamma$  continûment différentiable par morceaux dont la longueur mesurée entre deux points correspond à la distance entre ces points. Les géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré sont appelées les géodésiques hyperboliques ou les lignes hyperboliques.*

**Théorème 2.4.1.** *Les géodésiques hyperboliques de  $(\mathbb{D}, \rho)$  sont les cercles orthogonaux au cercle unité  $\partial\mathbb{D}$  et les diamètres de  $\mathbb{D}$ .*

*Démonstration.* Soient  $z, w \in \mathbb{D}$ . Nous allons montrer qu'il existe une unique courbe reliant  $z$  et  $w$  telle que la longueur mesurée entre les points correspond à la distance hyperbolique entre ces deux points. Considérons  $g$ , un automorphisme de  $\mathbb{D}$  tel que  $g(w) = 0$  et  $g(z) = |z|$ . Comme  $g$  préserve la distance hyperbolique et envoie les cercles orthogonaux au cercle unité vers des cercles orthogonaux au cercle unité, il est suffisant de montrer que le segment de droite qui relie 0 et  $|z|$  est l'unique courbe de longueur minimale entre 0 et  $|z|$ . Comme le segment de droite est situé sur un diamètre, on

aura ainsi montré que ces derniers sont des géodésiques et plus généralement les cercles orthogonaux au cercle unité. En effet, les diamètres peuvent être vus comme étant des cercles orthogonaux au cercle unité et passant par l'infini.

Soit  $\gamma(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 1$  une courbe continûment différentiable par morceaux dans  $\mathbb{D}$  telle que  $\gamma(0) = 0$  et  $\gamma(1) = |z|$ . Alors,  $\alpha(t) = \Re(\gamma(t)) = x(t)$ , où  $\Re(\gamma(t))$  est la partie réelle de  $\gamma(t)$ , définit une courbe dans  $\mathbb{D}$  reliant 0 à  $|z|$  le long de l'axe réel. Ainsi,

$$\int_{\alpha} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_0^1 \frac{2|x'(t)|dt}{1-|x(t)|^2} \leq \int_0^1 \frac{2|x'(t)|dt}{1-|\gamma(t)|^2} \leq \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|dt}{1-|\gamma(t)|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

Si  $y(t) \neq 0$  pour un  $t$  quelconque, alors  $|\gamma(t)| > |x(t)|$  et l'inégalité précédente est stricte. Dans ce cas, la longueur de la courbe  $\alpha$  est strictement plus petite que celle de  $\gamma$ . De plus, si  $\alpha$  est décroissante sur un intervalle quelconque, alors on peut réduire l'intégrale en enlevant les intervalles où  $\alpha$  commence et se termine au même point. On peut donc conclure que la courbe qui va minimiser l'intégrale est la courbe  $\gamma$  qui est réelle et non-décroissante. Dans ce cas, l'unique courbe obtenue est le segment de droite reliant 0 à  $|z|$ . □

La figure 2.1 illustre un exemple de quelques géodésiques dans le modèle du disque de Poincaré.

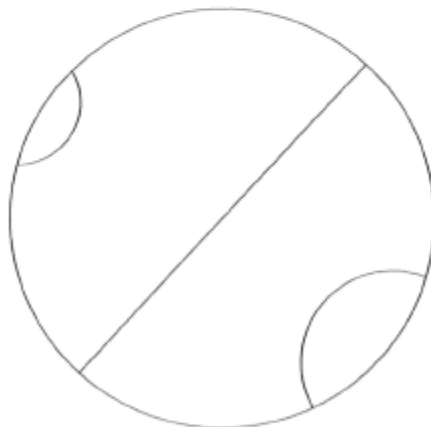


FIG. 2.1 – Les géodésiques de  $\mathbb{D}$

**Remarque 2.4.1.** Si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et si  $\gamma$  est la géodésique hyperbolique reliant les points  $z_0$  et  $z_1$ , alors  $f \circ \gamma$  est la géodésique hyperbolique reliant les points  $f(z_0)$  et  $f(z_1)$ . Ainsi, les automorphismes préservent les géodésiques hyperboliques.

Les géodésiques de  $(\mathbb{D}, \rho)$  possèdent une propriété importante qui concerne l'inégalité triangulaire.

**Proposition 2.4.1.** Soient  $z, w \in \mathbb{D}$  et  $\gamma$  la géodésique hyperbolique passant par  $z$  et  $w$ . Alors on a :

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w),$$

pour tout  $v$  appartenant à  $\gamma$  et situé entre  $z$  et  $w$ .

*Démonstration.* Si on note par  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  les segments géodésiques hyperboliques situés respectivement entre  $z$  et  $v$ ,  $v$  et  $w$  ainsi que  $z$  et  $w$ . Il est clair que

$$\rho(z, v) = \int_{\gamma_1} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} \text{ et que } \rho(v, w) = \int_{\gamma_2} \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

Ainsi, comme

$$\int_{\gamma_1} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} + \int_{\gamma_2} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int_{\gamma_3} \frac{2|dz|}{1-|z|^2},$$

il est clair que  $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$ . □

## 2.5 Quelques formules pour la métrique hyperbolique dans $\mathbb{D}$

**Théorème 2.5.1.** Soit  $\rho$  la métrique hyperbolique définie précédemment et  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors on a :

1.  $\rho(z, w) = \log \left( \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right);$
2.  $\tanh \frac{1}{2}\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|;$
3.  $\cosh^2 \frac{1}{2}\rho(z, w) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)};$
4.  $\sinh^2 \frac{1}{2}\rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$

*Démonstration.* Nous allons démontrer la première formule. Fixons  $z, w \in \mathbb{D}$ . Supposons que  $w = 0$ . Considérons une rotation  $g$  telle que  $g(z) \in \mathbb{R}$ . En fait,  $g(z) = |z|$ . Comme  $g$  est un automorphisme, alors il préserve la distance hyperbolique :  $\rho(z, w) = \rho(g(z), g(w)) = \rho(|z|, 0) = \rho(0, |z|)$ . D'après la section précédente, comme 0 et  $|z|$  sont

situés sur un diamètre de  $\mathbb{D}$ , alors la géodésique reliant le point 0 et  $|z|$  est définie par la courbe  $\gamma(t) = |z|t$ , où  $0 \leq t \leq 1$ . Ainsi, on a que

$$\begin{aligned} \rho(0, |z|) = \mathcal{L}(\gamma) &= \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|dt}{1 - |\gamma(t)|^2} \\ &= \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right). \end{aligned}$$

De façon générale, si on prend deux points quelconques  $z, w \in \mathbb{D}$  et si on considère l'automorphisme  $g(z) = e^{i\theta}(z - w)/(1 - \bar{w}z)$ , où  $\theta \in [0, 2\pi]$  et telle que  $g(z) = |g(z)|$ , alors on a

$$\begin{aligned} \rho(z, w) = \rho(g(0), g(z)) = \rho(0, |g(z)|) &= \log \left( \frac{1 + |g(z)|}{1 - |g(z)|} \right) \\ &= \log \left( \frac{|1 - \bar{w}z| + |z - w|}{|1 - \bar{w}z| - |z - w|} \right), \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule (1). Les autres formules se démontrent à partir de (1), car elles sont toutes équivalentes à cette dernière.  $\square$

**Remarque 2.5.1.** La formule (1) permet de voir que  $\rho(0, z) \rightarrow \infty$  lorsque  $|z| \rightarrow 1$ . Ainsi, les points appartenant à la frontière de  $\mathbb{D}$  sont situés à l'infini dans le modèle du disque de Poincaré.

## 2.6 Lemme de Schwarz–Pick

Le lemme qui suit permet de donner une condition nécessaire pour l'existence d'une fonction analytique du disque unité dans lui-même. En effet, il faut que la fonction soit une contraction au sens de la métrique hyperbolique.

**Lemme de Schwarz–Pick.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique et  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Alors on a :

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2). \quad (2.7)$$

Il y a égalité dans (2.7) si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  la géodésique hyperbolique reliant  $z_1$  et  $z_2$ . On a que  $f \circ \gamma$  est une courbe reliant les points  $f(z_1)$  et  $f(z_2)$ . Posons  $w = f(z)$ . Le lemme de Pick et la



définition de la métrique hyperbolique entraînent que

$$\begin{aligned} \rho(f(z_1), f(z_2)) &\leq \int_{f \circ \gamma} \frac{2|dw|}{1-|w|^2} = \int_{\gamma} \frac{2|f'(z)||dz|}{1-|f(z)|^2} \\ &\leq \int_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \rho(z_1, z_2). \end{aligned}$$

L'égalité tient dans (2.7) si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . En effet, ceci découle directement du lemme de Pick et de la préservation des géodésiques par les automorphismes.  $\square$

## 2.7 Propriété de complétude du modèle du disque de Poincaré

Dans cette section nous présentons une propriété importante du modèle du disque de Poincaré  $(\mathbb{D}, \rho)$  : sa complétude. Rappelons qu'un espace métrique où toute suite de Cauchy converge est appelé un *espace complet*.

**Théorème 2.7.1.** *Le modèle du disque de Poincaré  $(\mathbb{D}, \rho)$  est un espace complet.*

*Démonstration.* Nous avons clairement que  $(\mathbb{D}, \rho)$  est un espace métrique d'après la proposition 2.1.1. Il nous reste à montrer la complétude. Soit  $(z_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$  une suite de Cauchy. En particulier  $(z_n)_{n \geq 1}$  est une suite de points dans le disque unité fermé. Cela implique qu'il existe une sous-suite  $(z_{n_k})$  qui converge selon la métrique euclidienne dans  $\overline{\mathbb{D}}$  vers un point  $\alpha$ . Si  $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ , alors par la formule (1) du théorème 2.4.1 on a que  $\rho(0, z_{n_k}) \rightarrow \infty$ . Fixons  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\rho(z_n, z_m) \leq 1$  pour  $n, m \geq N$ . Par l'inégalité triangulaire on obtient  $\rho(0, z_{n_k}) \leq \rho(0, z_N) + \rho(z_N, z_{n_k}) \leq \rho(0, z_N) + 1$ . Il suit que la suite  $(\rho(0, z_{n_k}))$  est bornée et que  $\alpha \in \mathbb{D}$ . La formule

$$\rho(z_{n_k}, \alpha) = \log \left( \frac{|1 - \bar{\alpha}z_{n_k}| + |z_{n_k} - \alpha|}{|1 - \bar{\alpha}z_{n_k}| - |z_{n_k} - \alpha|} \right)$$

implique que  $\rho(\alpha, z_{n_k}) \rightarrow 0$ . Ainsi, la suite de Cauchy  $(z_n)_{n \geq 1}$  possède une sous-suite convergente, donc la suite entière converge selon la métrique hyperbolique vers le même point.  $\square$

## 2.8 Le modèle du demi-plan supérieur

Nous allons terminer le chapitre 2 avec un deuxième modèle du plan hyperbolique.

**Définition 2.8.1.** Le modèle du demi-plan supérieur, noté  $\mathbb{H}$ , est l'espace défini de la manière suivante :

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\},$$

où  $\Im(z)$  représente la partie imaginaire de  $z$ .

Il est possible d'obtenir une métrique sur  $\mathbb{H}$  à partir de celle du modèle du disque de Poincaré  $(\mathbb{D}, \rho)$ . En effet, l'application

$$\varphi(z) = i \frac{z+1}{1-z}$$

est une bijection holomorphe entre  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{H}$ . Grâce à cette transformation conforme, il est aisé d'obtenir une métrique sur le demi-plan supérieur. Mais avant, voici un résultat général qui s'applique à des domaines quelconques.

Soient  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , une transformation conforme entre deux domaines  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$  et  $\lambda(x)$  une densité sur  $\Omega_1$ . On a :

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} = |f'(x)|.$$

Comme  $f$  est holomorphe et est une bijection entre les domaines  $\Omega_1, \Omega_2$ , cette dernière limite existe et  $|f'(x)| \neq 0$  pour tous les  $x \in \Omega_1$ . De cette façon  $\Omega_2$  hérite d'une densité  $\sigma$  où

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{|f'(x)|}.$$

En utilisant la densité  $\sigma$ , il devient possible d'obtenir une métrique  $\rho$  sur  $\Omega_2$ .

En considérant le cas particulier où  $\Omega_1 = \mathbb{D}$  et  $\Omega_2 = \mathbb{H}$  et en utilisant  $\varphi(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$  définie précédemment avec  $\lambda(z) = 2/(1 - |z|^2)$ , on obtient, en posant  $\varphi(z) = w$ , que

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= \frac{\lambda(z)}{|\varphi'(z)|} = \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \\ &= \frac{1}{\Im(w)}. \end{aligned}$$

Ceci nous permet donc de définir une métrique  $\rho_{\mathbb{H}}$  dans  $\mathbb{H}$  en utilisant la densité  $\lambda(z) = 1/\Im(z)$ .

**Définition 2.8.2.** Soient  $z, w \in \mathbb{H}$ . Alors la métrique hyperbolique  $\rho_{\mathbb{H}}$  est définie par :

$$\rho_{\mathbb{H}} = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{|dz|}{\Im(z)},$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma$  continûment différentiables par morceaux joignant le point  $z$  au point  $w$ .

À partir de maintenant nous noterons par  $\rho$  la métrique hyperbolique dans  $\mathbb{D}$  ou  $\mathbb{H}$  en spécifiant lorsque le contexte n'est pas clair. Nous noterons également par  $(\mathbb{H}, \rho)$  le modèle du demi-plan supérieur avec la métrique hyperbolique.

En vertu de la formule du changement de variable, la définition précédente entraîne que la transformation conforme  $\varphi(z) = i(z + 1)/(1 - z)$  est une isométrie de  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{H}$ . Comme pour le cas du modèle du disque de Poincaré, on peut s'intéresser aux géodésiques de  $\mathbb{H}$ . Celles-ci seront obtenues à partir de celles de  $\mathbb{D}$  en utilisant  $\varphi$ . De cette façon on voit que, en fait, les géodésiques de  $\mathbb{H}$  sont les demi-droites orthogonales à l'axe réel et les demi-cercles orthogonaux à l'axe réel, puisque par  $\varphi$  les angles de même que la distance sont préservés (voir figure 2.2).



FIG. 2.2 – Les géodésiques de  $\mathbb{H}$

Finalement, nous terminerons cette section avec un vade-mecum de quelques formules utiles qui permettent d'évaluer explicitement la distance hyperbolique dans  $\mathbb{H}$ .

**Théorème 2.8.1.** Soient  $\rho$  la métrique hyperbolique dans  $\mathbb{H}$  et  $z, w \in \mathbb{H}$ . Alors, on a :

1.  $\rho(z, w) = \log \left( \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right)$  ;
2.  $\tanh \frac{1}{2} \rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|$  ;
3.  $\cosh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - \bar{w}|^2}{4\Im(z)\Im(w)}$  ;
4.  $\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\Im(z)\Im(w)}$ .

Il est certain que le fait d'avoir maintenant deux modèles de géométrie hyperbolique à notre disposition offre la possibilité de démontrer plus aisément certains résultats

dans l'un des modèles et de retrouver son équivalent dans l'autre par la transformation conforme  $\varphi$ . Il est donc avantageux de bien connaître les modèles du disque de Poincaré et du demi-plan supérieur afin de passer de l'un à l'autre lorsqu'on souhaite démontrer certaines propriétés.

# Chapitre 3

## Un lemme de Schwarz–Pick à trois points

Dans ce troisième chapitre, nous allons voir comment il est possible d'utiliser conjointement la théorie des fonctions d'une variable complexe et la géométrie hyperbolique en exploitant leurs puissantes ressources afin d'obtenir une version du lemme de Schwarz–Pick non plus à deux, mais à trois points. Ce travail fut amorcé d'abord par Alan F. Beardon et David Minda dans [5] où ils développèrent ces idées les premiers. D'ailleurs, tous les résultats présents dans ce chapitre sont dus à Beardon et Minda. Nous verrons aussi de quelle façon on peut appliquer ces nouveaux outils à des résultats de l'analyse complexe. Il s'agit des lemmes de Julia et de Rogosinski. Finalement, nous étudierons le *problème classique de Nevanlinna–Pick*. En effet, les lemmes de Schwarz–Pick à deux et trois points fournissent des solutions simples et géométriques à ce problème pour les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

### 3.1 Le quotient de la différence hyperbolique

Nous avons vu grâce au théorème 2.5.1 quelques formules permettant d'évaluer la distance hyperbolique dans  $\mathbb{D}$ . Par exemple, pour  $z, w \in \mathbb{D}$ , on a que

$$\rho(z, w) = \log \left( \frac{|1 - \bar{w}z| + |z - w|}{|1 - \bar{w}z| - |z - w|} \right) = \log \left( \frac{1 + \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|}{1 - \left| \frac{z-w}{1-\bar{w}z} \right|} \right).$$

**Définition 3.1.1.** Soient  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors, on définit la distance pseudo-hyperbolique,

que l'on note  $p(z, w)$ , par

$$p(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|.$$

**Définition 3.1.2.** Soient  $z, w \in \mathbb{D}$ . La distance pseudo-hyperbolique complexe  $[z, w]$  est définie par

$$[z, w] := \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}.$$

Remarquons que si on fixe  $w$  et que l'on considère l'application  $z \mapsto [z, w]$ , alors on a un automorphisme du disque unité. Ainsi la quantité  $[z, w]$  peut être vue à la fois comme un nombre complexe et un automorphisme. De plus, comme  $[z, w]$  est une fonction holomorphe pour  $w$  fixé, si on fait le quotient de telles quantités, alors on obtiendra une fonction méromorphe en  $z$ . Ainsi, la distance pseudo-hyperbolique complexe peut être utilisée pour établir un lien entre la métrique hyperbolique et les quotients de fonctions holomorphes. Ceci est fondamental et permettra à cette distance de jouer un rôle primordial pour l'obtention d'une version du lemme de Schwarz–Pick à trois points.

Il existe une relation très étroite entre les quantités que nous avons définies précédemment car, d'après le théorème 2.5.1, il suit que

$$|[z, w]| = p(z, w) = \tanh \frac{1}{2} \rho(z, w). \quad (3.1)$$

Nous allons maintenant présenter quelques propriétés de la distance pseudo-hyperbolique complexe. Tout d'abord, il est aisé de voir que puisque  $p(0, z) = |z|$ , alors

$$p(z, w) = p(0, [z, w]) \text{ et } \rho(z, w) = \rho(0, [z, w]). \quad (3.2)$$

De plus, pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$  tels que  $|\alpha| < |\beta|$ , on a :

$$p\left(0, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{p(0, \alpha)}{p(0, \beta)}, \quad (3.3)$$

puisque les deux côtés de l'égalité sont égaux à  $|\alpha|/|\beta|$ .

Nous avons également que

$$[z, w] = e^{i\theta} [w, z] \text{ où } e^{i\theta} = -\frac{1 - \bar{z}w}{1 - \bar{w}z}.$$

Cette dernière égalité nous permet de tirer la conclusion suivante :

$$|[z, w]| = |[w, z]|. \quad (3.4)$$

En utilisant ce qui précède et (3.1), on peut affirmer que

$$\rho(0, [z, w]) = \rho(0, [w, z]),$$

même si en général  $[z, w] \neq [w, z]$ .

Il est désormais possible de faire un grand pas vers la théorie des fonctions d'une variable complexe en utilisant la distance pseudo-hyperbolique complexe pour définir le *quotient de la différence hyperbolique*.

**Définition 3.1.3.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors on définit le quotient de la différence hyperbolique, noté  $f^*(z, w)$ , de la manière suivante :

$$f^*(z, w) := \begin{cases} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} & \text{si } z \neq w, \\ f'(w) \frac{1 - |w|^2}{1 - |f(w)|^2} & \text{si } z = w. \end{cases} \quad (3.5)$$

La proposition qui suit illustre une propriété importante du quotient de la différence hyperbolique.

**Proposition 3.1.1.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$|f^*(z, w)| \leq 1. \quad (3.6)$$

De plus il y a égalité dans (3.6) si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.* Pour le cas  $z = w$ , il suit, d'après le lemme de Pick, que

$$|f^*(w, w)| = \left| f'(w) \frac{1 - |w|^2}{1 - |f(w)|^2} \right| \leq 1$$

et il y a égalité si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ .

Pour  $z \neq w$ , en utilisant les définitions précédentes on obtient :

$$|f^*(z, w)| = \frac{p(f(z), f(w))}{p(z, w)}.$$

On a également que

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w),$$

d'après le lemme de Schwarz–Pick. Puisque  $p(z, w) = \tanh \frac{1}{2}\rho(z, w)$  et comme la fonction  $x \mapsto \tanh(x)$  est croissante, alors

$$p(f(z), f(w)) \leq p(z, w).$$

Donc,  $|f^*(z, w)| \leq 1$  et il y a égalité si et seulement si  $f$  est un automorphisme, selon le lemme de Schwarz–Pick.  $\square$

La conclusion de la proposition 3.1.1 peut s'écrire de la façon suivante :

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|.$$

Il s'agit d'une inégalité que l'on retrouve fréquemment dans la littérature, par exemple dans [9], p. 2. De plus, d'après (3.4) et (3.5) il est clair que  $|f^*(z, w)| = |f^*(w, z)|$ , à la suite duquel nous avons le résultat qui suit :

$$\rho(0, f^*(z, w)) = \rho(0, f^*(w, z)). \quad (3.7)$$

La définition 3.1.3 est d'une grande importance dans le sens où l'application  $f^*(z, w)$  permet de définir la notion de dérivée hyperbolique d'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ . En effet,  $f^*(z, w)$  est l'équivalent hyperbolique du quotient de la différence euclidienne  $(f(z) - f(w))/(z - w)$ .

**Définition 3.1.4.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $w \in \mathbb{D}$ . La dérivée hyperbolique de  $f$  en  $w$ , que l'on note  $f^h(w)$ , est définie par

$$f^h(w) := f^*(w, w) = \lim_{z \rightarrow w} \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{f'(w)(1 - |w|^2)}{1 - |f(w)|^2}.$$

À première vue, il peut être étonnant de définir la dérivée hyperbolique d'une fonction sans que la métrique hyperbolique intervienne dans la définition. La proposition suivante nous montre, qu'en fait, la deuxième définition hypothétique est, en module, équivalente à celle que nous avons donnée.

**Proposition 3.1.2.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe et  $z, w \in \mathbb{D}$ . Alors,

$$\lim_{\rho(z, w) \rightarrow 0} \frac{\rho(f(z), f(w))}{\rho(z, w)} = |f^h(w)|.$$

*Démonstration.* Tout d'abord, il est facile de voir que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Comme  $\rho(f(z), f(w)) \rightarrow 0$  quand  $\rho(z, w) \rightarrow 0$ , il suit que

$$\begin{aligned} \lim_{\rho(z, w) \rightarrow 0} \frac{\rho(f(z), f(w))}{\rho(z, w)} &= \lim_{\rho(z, w) \rightarrow 0} \frac{\tanh\frac{1}{2}\rho(f(z), f(w))}{\tanh\frac{1}{2}\rho(z, w)} \frac{\rho(f(z), f(w))}{\rho(f(z), f(w))} \frac{\tanh\frac{1}{2}\rho(z, w)}{\rho(z, w)} \\ &= \lim_{\rho(z, w) \rightarrow 0} \frac{p(f(w), f(w)) \tanh\frac{1}{2}\rho(z, w)}{p(z, w)} \frac{\rho(f(z), f(w))}{\tanh\frac{1}{2}\rho(f(z), f(w))} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{\rho(z,w) \rightarrow 0} \frac{|[f(z), f(w)]| \tanh \frac{1}{2} \rho(z, w)}{|[z, w]| \rho(z, w)} \frac{\rho(f(z), f(w))}{\tanh \frac{1}{2} \rho(f(z), f(w))} \\
&= \frac{|f'(w)| |1 - |w|^2|}{|1 - |f(w)|^2|} \\
&= |f^h(w)|.
\end{aligned}$$

□

## 3.2 Propriétés du quotient de la différence hyperbolique

Nous allons à présent nous attarder à certaines propriétés du quotient de la différence hyperbolique. En fixant  $w$ , celui-ci devient un paramètre de la fonction  $z \mapsto f^*(z, w)$ . Afin d'étudier de telles fonctions, nous avons besoin de bien connaître l'application  $f \mapsto f^*$ , que nous nommerons également *opérateur\**.

Le résultat suivant découle facilement de la définition du quotient de la différence hyperbolique.

**Dérivation en chaîne.** Soient  $f, g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  des fonctions analytiques. Alors pour  $z, w \in \mathbb{D}$ , on a :

$$(f \circ g)^*(z, w) = f^*(g(z), g(w))g^*(z, w).$$

**Lemme 3.2.1.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe mais qui n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et  $z, w \in \mathbb{D}$ . Considérons également des automorphismes  $T$  et  $S$  du disque unité. Alors,

$$|(S \circ f \circ T)^*(z, w)| = |f^*(T(z), T(w))|.$$

En particulier, la dérivée hyperbolique est invariante dans le sens où

$$|(S \circ f \circ T)^h(z)| = |f^h(T(z))|.$$

*Démonstration.* La preuve est évidente en utilisant la règle de dérivation en chaîne et le fait que si  $T$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , alors  $|T^*(z, w)| = 1$ , d'après la proposition 3.1.1. □

Pour ce qui va suivre, nous aurons besoin de la définition d'un *produit de Blaschke*.

**Définition 3.2.1.** Un produit de Blaschke fini est une fonction  $B(z) : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  de la forme

$$B(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \overline{z_j}z},$$

où  $|z_j| < 1$  et  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Un produit de Blaschke  $B$  possède les propriétés suivantes :

1.  $B(z)$  est analytique pour  $|z| < 1$  et continue pour  $|z| \leq 1$ ;
2.  $|B(z)| = 1$  pour  $|z| = 1$ ;
3.  $B$  possède un nombre fini de zéros dans  $\mathbb{D}$ .

Si une fonction analytique  $f$  possède ces trois propriétés, alors  $f$  est un produit de Blaschke. En effet, si on définit  $B(z)$  comme étant le produit de Blaschke ayant les mêmes zéros que  $f$ , alors par le principe du maximum,  $|f/B| \leq 1$  et  $|B/f| \leq 1$  sur  $\mathbb{D}$ . Ainsi,  $f/B$  est une constante de module un. Donc,  $f(z) = e^{i\theta}B(z)$ , pour un  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Le degré de  $B$  correspond au nombre de zéros de  $B$ . Un produit de Blaschke  $B$  de degré 0 est une fonction de la forme  $B(z) \equiv \lambda$ , où  $|\lambda| = 1$ .

Voici quelques-unes des classes de fonctions particulières définies dans  $\mathbb{D}$ .

**Définition 3.2.2.** 1.  $\mathcal{H}(\mathbb{D}) := \{f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} : f \text{ analytique dans } \mathbb{D}\}$ .

2.  $\mathcal{B}_n := \{f : f \text{ est un produit de Blaschke de degré } n\}$ , où  $n \geq 0$ .

**Remarque 3.2.1.** La classe de fonctions  $\mathcal{B}_1$  est la classe des automorphismes du disque unité, qui rappelons-le, sont des isométries par rapport à la métrique hyperbolique.

À l'aide des définitions précédentes il est possible d'analyser de quelles façons l'opérateur  $f \mapsto f^*$  agit sur les différentes classes de fonctions citées dans la définition 3.2.2 et ainsi caractériser complètement la fonction  $f^*$ . Mais avant nous aurons besoin du lemme qui suit.

**Lemme 3.2.2.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique,  $n \in \mathbb{N}$  et  $S$  un automorphisme. Alors  $S \circ f$  est un produit de Blaschke de degré  $n$  si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n$ .

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n$ . Soit  $S(z) = (z - a)/(1 - \overline{a}z)$ , où  $a \in \mathbb{D}$ . Définissons  $g(z) = S \circ f(z)$ . Alors,  $g$  possède clairement les propriétés (1), (2) énoncés précédemment. Par définition,  $g(z) = (f(z) - a)/(1 - \overline{a}f(z))$

et comme le numérateur et le dénominateur n'ont clairement pas de zéros communs, il suit que les zéros de  $g$  sont les points qui vont satisfaire  $f(z) = a$ . Cette dernière équation possède exactement  $n$  solutions dans  $\mathbb{D}$ . En effet, cela découle du principe de l'argument : on sait que quand  $z$  parcourt  $\partial\mathbb{D}$ ,  $f(z)$  tourne  $n$  fois autour de 0, mais comme  $|f(z)| = 1$  pour  $z \in \partial\mathbb{D}$ , il suit que  $f(z)$  tourne aussi  $n$  fois autour de  $a$ . Ainsi,  $g$  possède  $n$  zéros, comptés selon leur multiplicité. Donc,  $g$  satisfait la propriété (3) et on peut conclure que  $g(z)$  est un produit de Blaschke de degré  $n$ . Réciproquement supposons que  $S \circ f$  est un produit de Blaschke de degré  $n$ , où  $S(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ ,  $a \in \mathbb{D}$ . Posons  $P(z) = S \circ f(z)$ , alors on a :

$$f(z) = \frac{P(z) + a}{1 + \bar{a}P(z)} = S^{-1} \circ P(z).$$

Il suit aisément, d'après la première partie de la démonstration, que  $f$  est aussi un produit de Blaschke de degré  $n$ .  $\square$

Le prochain théorème montre comment l'opérateur- $*$  agit sur différentes classes de fonctions. Rappelons que  $f^* : z \mapsto f^*(z, w)$  est considérée comme une fonction de  $z$  ayant  $w$  comme paramètre.

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $w \in \mathbb{D}$ . Alors, nous avons les différentes situations suivantes :*

1. Si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ , alors  $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cup \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
2. Si  $f \in \mathcal{B}_1$ , alors  $f^* \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
3.  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus \mathcal{B}_1$  si et seulement si  $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  ;
4.  $f \in \mathcal{B}_{k+1}$  si et seulement si  $f^* \in \mathcal{B}_k$ , pour  $k \geq 0$ .

*Démonstration.* Soit  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . Alors,

$$f^*(z, w) = \frac{[f(z), f(w)]}{[z, w]} = \frac{(f(z) - f(w))(1 - \bar{w}z)}{(z - w)(1 - \overline{f(w)}f(z))}.$$

Il est clair que  $f^*$  est holomorphe sur  $\mathbb{D} \setminus \{w\}$ . De la même formule, il suit que

$$\lim_{z \rightarrow w} \left( \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \right) \left( \frac{1 - \bar{w}z}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right) = f'(w) \frac{1 - |w|^2}{1 - |f(w)|^2}.$$

Puisque la limite existe lorsque  $z \rightarrow w$ , il est clair que  $f^*$  est bornée dans un voisinage de ce point. D'après le *théorème de Riemann sur les singularités enlevables*  $w$  est une singularité enlevable de l'application  $z \mapsto f^*(z, w)$  et  $f^*$  est holomorphe dans  $\mathbb{D}$ .

La proposition 3.1.1 implique que  $|f^*(z, w)| \leq 1$  avec inégalité stricte si et seulement si  $f \notin \mathcal{B}_1$ . Supposons que  $f \in \mathcal{B}_1$  et posons  $S(z) = [z, f(w)]$ . Ainsi,  $S(f(z)) = [f(z), f(w)]$

et  $z \mapsto [f(z), f(w)]$  est un automorphisme, d'après le lemme 3.2.2. Comme cette application s'annule en  $z = w$ , on a que

$$[f(z), f(w)] = \lambda[z, w],$$

où  $|\lambda|$  est une constante de module 1 qui ne dépend pas de  $z$ , mais de  $f$  et  $w$ . Ainsi, on a que  $f^*(z, w) \equiv \lambda$ . Ceci prouve les affirmations (1), (2) et (3).

Il nous reste maintenant à montrer la quatrième affirmation. Pour  $a \in \mathbb{D}$ , notons  $T_a(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ . Alors, pour  $f$  donnée et  $w \in \mathbb{D}$  on a :

$$T_{f(w)}(f(z)) = f^*(z, w)T_w(z).$$

Il est clair que si  $f^*$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ , alors  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 1$ , par le lemme 3.2.2. Réciproquement, si  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 1$ , alors  $T_{f(w)}(f(z))$  est un produit de Blaschke de même degré avec un facteur  $T_w(z)$  (puisque  $T_{f(w)}(f(z)) = 0$  lorsque  $z = w$ ). Ainsi,  $f^*$  sera un produit de Blaschke de degré  $k$ .  $\square$

Le lemme suivant permet d'examiner en détail le cas particulier où  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2.

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique. Alors, les énoncés suivants sont équivalents.*

1.  $z \mapsto f^*(z, w)$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ ;
2.  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2;
3. il existe des automorphismes  $S$  et  $T$  de  $\mathbb{D}$  tels que  $S \circ f \circ T(z) = z^2$ .

*Esquisse de démonstration.* L'équivalence de (1) et (2) découle directement du théorème 3.2.1. On a aussi que (3) implique (2) par le lemme 3.2.2. Supposons que (2) est vrai. Comme  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2, alors  $f$  est en particulier une fonction rationnelle de la forme  $P/Q$ , où  $P$  et  $Q$  sont soit respectivement des polynômes de degré 2 ou bien  $P$  est de degré 2 et  $Q$  de degré 0, dans le cas où  $f(z) = \lambda z^2$ ,  $|\lambda| = 1$ . De cette façon, il apparaît clairement que  $f$  possède exactement deux points critiques dans  $\mathbb{C}_\infty$ , en tenant compte de la multiplicité. À l'aide d'un calcul direct, on constate que  $z_0$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $1/\bar{z}_0$  est aussi un point critique de  $f$ . Aussi, le calcul montre que  $f$  possède un point critique dans  $\mathbb{D}$ . Soit  $c$ , le point critique de  $f$  appartenant à  $\mathbb{D}$  et considérons deux automorphismes  $S$  et  $T$ , tels que  $T(0) = c$  et  $S(f(c)) = 0$ . Alors,  $S \circ f \circ T$  est un produit de Blaschke de degré 2, d'après le lemme 3.2.2. De plus, ce produit de Blaschke possède un zéro double à l'origine et

cela implique qu'il est de la forme  $e^{i\theta}z^2$ , où  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . En attribuant le facteur  $e^{i\theta}$  à l'automorphisme  $S$ , on obtient que  $S \circ f \circ T(z) = z^2$ .  $\square$

Le lemme 3.2.3 montre que si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2, alors pour  $z, w, v \in \mathbb{D}$  :

$$\rho(f^*(z, v), f^*(w, v)) = \rho(z, w).$$

Le précédent lemme implique également que tout produit de Blaschke  $f$  de degré 2 possède un unique point critique  $c \in \mathbb{D}$ . Grâce à ce point, on peut définir une unique rotation hyperbolique d'ordre deux (d'angle  $\pi$ ) par rapport à  $c$ . Nous allons noter cette rotation par  $R_f$ . Nous verrons plus loin le rôle important de cette application dans l'étude de certaines variations du lemme de Schwarz–Pick à trois points.

De façon générale, pour un point quelconque  $a \in \mathbb{D}$ , on note la rotation hyperbolique d'ordre deux par rapport au point  $a$  par  $z \mapsto r_a(z)$ . Il s'agit d'une isométrie hyperbolique, donc d'un automorphisme. En utilisant (3.1), on trouve que

$$|[r_a(z), a]| = |[z, a]|.$$

D'après le théorème 3.2.1 (2), il s'ensuit que

$$[r_a(z), a] = e^{i\theta}[z, a],$$

où  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Comme  $r_a(r_a(z)) = z$ , on a :

$$\begin{aligned} [r_a(r_a(z)), r_a(a)] &= [z, a] = e^{i\theta}[r_a(z), a] \\ &= e^{2i\theta}[z, a]. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que  $e^{i\theta} = -1$ . Ainsi, on a l'égalité suivante :

$$[r_a(z), a] = -[z, a].$$

En faisant les calculs, on obtient :

$$r_a(z) = \frac{z(1 + |a|^2) - 2a}{2\bar{a}z - (1 + |a|^2)}.$$

Dans le modèle du disque de Poincaré, le lieu des points  $C = \{z \in \mathbb{D} : \rho(z, a) = r\}$  où  $a \in \mathbb{D}$  et  $r$  est un nombre réel positif est appelé un *cercle hyperbolique*. Il n'est pas très difficile de montrer qu'un cercle hyperbolique est en fait un cercle euclidien.

Supposons d'abord que  $C$  est un cercle hyperbolique de centre 0 et de rayon  $r > 0$ . Alors, les points satisfont  $\rho(z, 0) = r$  pour tout  $z \in C$ . En utilisant le théorème 2.5.1, il suit que les points de  $C$  satisfont également l'égalité suivante :

$$|z| = \frac{e^r - 1}{e^r + 1}.$$

Ainsi,  $C$  est bien un cercle euclidien. Pour un cercle hyperbolique de centre  $a \in \mathbb{D}$  quelconque et de rayon  $r > 0$ , on peut se ramener au cas précédent en utilisant un automorphisme  $T$  tel que  $T(a) = 0$ . Ainsi, l'image du cercle hyperbolique par  $T$  est un cercle euclidien. Comme les automorphismes du disque unité préservent les cercles (euclidiens), alors on peut conclure qu'un cercle hyperbolique est en fait un cercle euclidien.

Si on considère une rotation  $r_a$  d'ordre deux, cette application fait en sorte qu'un cercle hyperbolique  $C$  centré en  $a$  subit une rotation d'angle  $\pi$ .

Le lemme qui suit illustre bien l'importance de la rotation hyperbolique  $R_f$ .

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $f$  un produit de Blaschke de degré 2. Alors,  $f(z_1) = f(z_2)$  si et seulement si  $z_1 = z_2$  ou  $z_1 = R_f(z_2)$ . En particulier,  $f^*(R_f(w), w) = 0$  pour tout  $w \in \mathbb{D}$ .*

*Démonstration.* Comme  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2, alors d'après le lemme 3.2.3, il existe des automorphismes  $S$  et  $T$  du disque unité, tels que  $S \circ f \circ T = F$ , où  $F(z) = z^2$ . En utilisant la règle de dérivation en chaîne et le fait que les automorphismes  $S$  et  $T$  n'ont pas de points critiques dans  $\mathbb{D}$ , on a que  $f'(T(0)) = 0$ . Donc  $T(0)$  est un point critique de  $f$ . Cela implique que  $R_f = T \circ R_F \circ T^{-1}$ , puis que le membre de droite est une rotation d'ordre deux qui fixe  $T(0)$ . Il est clair que  $F(z'_1) = F(z'_2)$  si et seulement si  $z'_1 = z'_2$  ou  $z'_1 = -z'_2 = R_F(z'_2)$ , car  $R_F$  est une rotation de centre 0 et d'angle  $\pi$ . Cela montre le premier résultat. Pour le second, d'après le théorème 3.2.1,  $z \mapsto f^*(z, w)$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . D'après la première partie, on a que  $f(w) = f(R_f(w))$ . Ainsi,  $f^*(R_f(w), w) = 0$ , ce qui montre le deuxième résultat.  $\square$

Nous allons terminer cette section avec un dernier lemme qui concerne l'opérateur- $*$  ainsi que les automorphismes du disque unité. Il s'agit du premier résultat que nous rencontrons qui fait intervenir trois points.

**Lemme 3.2.5.** *Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe qui n'est pas un automorphisme,  $S$  et  $T$  des automorphismes du disque unité. Alors, pour  $z, w, v \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\rho((S \circ f \circ T)^*(z, v), (S \circ f \circ T)^*(w, v)) = \rho(f^*(T(z), T(v)), f^*(T(w), T(v))).$$

*Démonstration.* En utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$(S \circ f \circ T)^*(z, v) = S^*(f(T(z)), f(T(v)))(f \circ T)^*(z, v).$$

D'après le théorème 3.2.1,  $S^*(f(T(z)), f(T(v))) \equiv \lambda$ , où  $\lambda$  est une constante de module 1 qui ne dépend pas de  $z$ . Aussi, de la même manière, on a que  $(S \circ f \circ T)^*(w, v) = S^*(f(T(w)), f(T(v)))(f \circ T)^*(w, v)$  et  $S^*(f(T(w)), f(T(v))) \equiv \lambda$ .

On déduit que

$$\begin{aligned} \rho((S \circ f \circ T)^*(z, v), (S \circ f \circ T)^*(w, v)) &= \rho(\lambda(f \circ T)^*(z, v), \lambda(f \circ T)^*(w, v)) \\ &= \rho((f \circ T)^*(z, v), (f \circ T)^*(w, v)), \end{aligned}$$

car l'application  $z \mapsto \lambda z$  est un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , donc une isométrie hyperbolique. Aussi,

$$(f \circ T)^*(z, v) = f^*(T(z), T(v))T^*(z, v),$$

où  $T^*(z, v)$  est une constante de module 1 qui ne dépend pas de  $z$ . En procédant de la même façon pour  $(f \circ T)^*(w, v)$ , on obtient :

$$\rho((f \circ T)^*(z, v), (f \circ T)^*(w, v)) = \rho(f^*(T(z), T(v)), f^*(T(w), T(v))),$$

ce qui termine la preuve. □

### 3.3 Un lemme de Schwarz–Pick à trois points

Il est maintenant possible, grâce au quotient de la différence hyperbolique et des résultats qui précèdent, de donner une nouvelle version du lemme de Schwarz–Pick classique.

**Théorème 3.3.1 (Lemme de Schwarz–Pick à trois points).** *Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme et  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$ . Alors,*

$$\rho(f^*(z_1, z_3), f^*(z_2, z_3)) \leq \rho(z_1, z_2). \quad (3.8)$$

*Il y a égalité dans (3.8) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2.*

*Démonstration.* Considérons  $f^* : z \mapsto f^*(z, z_3)$  une fonction analytique en  $z$  ayant comme paramètre  $z_3$ . Comme  $f$  n'est pas un automorphisme, alors  $f^* \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . Ainsi on peut appliquer le lemme de Schwarz–Pick avec  $z_1, z_2$ . Finalement, il y aura égalité dans (3.8) si et seulement si  $f^*$  est un automorphisme, c'est-à-dire, un produit de Blaschke de degré 1. Ce sera le cas si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2, d'après le théorème 3.2.1. □

La preuve de ce résultat est tout-à-fait étonnante puisqu'elle utilise seulement la version classique du lemme de Schwarz–Pick. Ceci est d'autant plus possible vu que la fonction  $f^*(z, w)$  est une fonction analytique sous certaines conditions. Ainsi, l'obtention d'une version à trois points du lemme est possible grâce à la version à deux points.

Voici quelques corollaires du théorème 3.3.1 qui sont des variantes du lemme de Schwarz–Pick à trois points.

**Corollaire 3.3.1.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Alors, pour  $z, v, w \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\rho(0, f^*(z, v)) \leq \rho(0, f^*(w, v)) + \rho(z, w). \quad (3.9)$$

*L'égalité a lieu dans (3.9) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2 et  $z, w, R_f(v)$  sont situés, dans cet ordre, sur une géodésique hyperbolique.*

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(0, f^*(z, v)) &\leq \rho(0, f^*(w, v)) + \rho(f^*(w, v), f^*(z, v)) \\ &\leq \rho(0, f^*(w, v)) + \rho(z, w), \text{ par le théorème 3.3.1.} \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'on a égalité dans (3.9). Notons par  $T_v(z)$  l'application  $z \mapsto f^*(z, v)$ . En examinant les inégalités précédentes, on voit que  $T_v$  est un automorphisme. Ainsi,  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2. Comme  $T_v$  est une isométrie par rapport à la métrique hyperbolique, en réécrivant (3.9), on a :

$$\rho(0, T_v(z)) = \rho(0, T_v(w)) + \rho(T_v(z), T_v(w)). \quad (3.10)$$

Ainsi, par la proposition 2.4.1, il est clair que les points  $T_v^{-1}(0), z, w$  appartiennent dans cet ordre à une géodésique hyperbolique. D'après le lemme 3.2.4,  $T_v(R_f(v)) = f^*(R_f(v), v) = 0$ . Mais on a aussi que si  $v$  est un point critique de  $f$ , alors  $T_v(v) = 0$ . Mais dans ce cas,  $v = R_f(v)$ . Ainsi, on a que  $T_v^{-1}(0) = R_f(v)$ , d'où le résultat.

Réciproquement, supposons que les trois points appartiennent dans cet ordre à une géodésique hyperbolique et que  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2. Alors,  $T_v$  est un automorphisme, donc une isométrie hyperbolique. Cela implique que (3.10) est vraie. Ainsi, on peut déduire qu'il y a égalité dans (3.9).  $\square$

**Corollaire 3.3.2.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme. Alors, pour  $z, w, u, v \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\rho(0, f^*(z, w)) \leq \rho(0, f^*(u, v)) + \rho(z, v) + \rho(w, u). \quad (3.11)$$

*Il y a égalité dans (3.11) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2 et  $R_f(w), R_f(u), v, z$  appartiennent, dans cet ordre, à une géodésique hyperbolique.*



*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \rho(0, f^*(z, w)) &\leq \rho(0, f^*(v, w)) + \rho(z, v), \text{ par le corollaire 3.3.1} \\ &= \rho(0, f^*(w, v)) + \rho(z, v), \text{ par (3.7)} \\ &\leq \rho(0, f^*(u, v)) + \rho(z, v) + \rho(w, u), \text{ par le corollaire 3.3.1.} \end{aligned}$$

Ainsi, on déduit, en interchangeant  $u$  et  $v$  et en utilisant (3.9), que

$$\rho(0, f^*(z, w)) \leq \rho(0, f^*(u, v)) + \rho(z, u) + \rho(w, v).$$

Par le corollaire 3.3.1, on a égalité dans (3.11) si et seulement si (i)  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2, (ii)  $R_f(w), v, z$  appartiennent dans cet ordre à une géodésique hyperbolique, (iii)  $R_f(v), u, w$  appartiennent dans cet ordre à une géodésique hyperbolique. Comme  $R_f$  est une rotation d'ordre deux, alors (iii) est équivalent à ce que  $v, R_f(u)$  et  $R_f(w)$  appartiennent dans cet ordre à une géodésique hyperbolique. Finalement, en considérant (i), (ii) et (iii) on a le résultat.  $\square$

Le corollaire suivant fait intervenir la dérivée hyperbolique que nous avons définie à la section 1. Remarquons que dans ce qui suit nous utiliserons le terme *rayon de géodésique hyperbolique* d'un point  $z_0$  pour désigner la partie d'une géodésique hyperbolique émanant du point  $z_0$ .

**Corollaire 3.3.3.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$ . Alors, pour  $z, v, w \in \mathbb{D}$  on a :*

$$\rho(0, f^*(z, w)) \leq \rho(0, f^h(v)) + \rho(v, w) + \rho(v, z). \quad (3.12)$$

*Il y a égalité dans (3.12) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2 et  $v, z$  et  $w$  appartiennent à un même rayon de géodésique hyperbolique émanant du point critique  $c$  de  $f$  et où  $v$  sépare les points  $z, w$  de  $c$  (voir figure 3.1).*

*Démonstration.* L'inégalité (3.12) découle directement du corollaire 3.3.2 en posant  $u = v$  dans (3.11). En ce qui concerne l'égalité, le corollaire précédent implique que c'est effectivement le cas dans (3.12) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2 et si les points  $R_f(w), R_f(v), v, z$  appartiennent à une même géodésique. En considérant le cas particulier où  $c = 0$ , il est clair que  $R_f(v)$  et  $v$  ne peuvent appartenir à la même géodésique que celle-ci émane du point critique  $c$  de  $f$ . En effet, dans ce cas  $R_f$  est une rotation euclidienne d'angle de  $\pi$  par rapport à l'origine. Ainsi, les seules géodésiques qui sont leur propre image sont celles passant par l'origine. Le même argument fonctionne pour un point critique quelconque. Il suffit de se ramener au cas précédent par des automorphismes.  $\square$

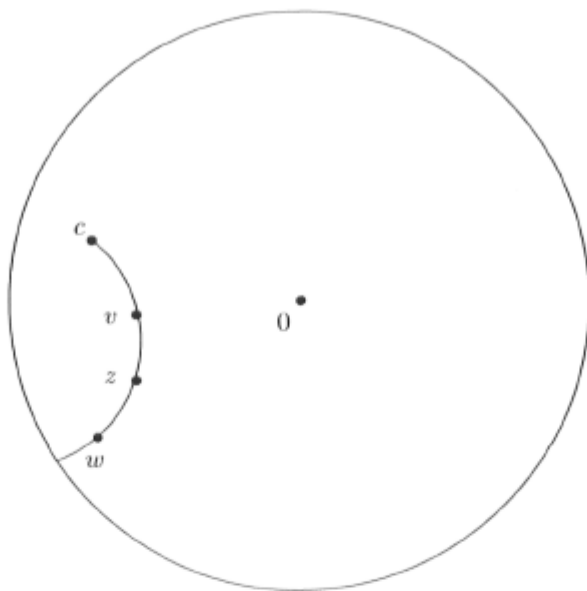


FIG. 3.1 – Le cas d'égalité du corollaire 3.3.3

Dans [4], Beardon a montré qu'une version du lemme de Schwarz–Pick pouvait s'appliquer pour la dérivée hyperbolique d'une fonction holomorphe et pour des points particuliers. On peut montrer ce résultat en utilisant simplement le lemme de Schwarz–Pick à trois points.

**Corollaire 3.3.4.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et telle que  $f(0) = 0$ . Alors,*

$$\rho(f^h(0), f^h(z)) \leq 2\rho(0, z). \quad (3.13)$$

*Démonstration.* Comme  $f(0) = 0$ , alors  $f^*(0, z) = f^*(z, 0)$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \rho(f^h(0), f^h(z)) &= \rho(f^*(0, 0), f^*(z, z)) \\ &\leq \rho(f^*(0, 0), f^*(z, 0)) + \rho(f^*(0, z), f^*(z, z)) \\ &\leq 2\rho(0, z), \text{ par le corollaire 3.3.1} \end{aligned}$$

Remarquons que la constante 2 est la meilleure possible, puisqu'avec  $f(z) = z^2$ , on a égalité dans (3.13).  $\square$

Nous avons vu au lemme 3.2.1 que  $f^h$  n'est pas invariant sous les automorphismes de  $\mathbb{D}$ . Si tel avait été le cas, le corollaire 3.3.4 aurait pu être utilisé afin d'obtenir un résultat impliquant des points quelconques. En utilisant le corollaire 3.3.3, on peut obtenir une version qui s'applique aux points  $|f^h(z)|$  et  $|f^h(w)|$ , où  $z, w$  appartiennent au disque unité.

**Corollaire 3.3.5.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme du disque unité. Alors, pour  $z, w \in \mathbb{D}$ , on a :*

$$\rho(|f^h(z)|, |f^h(w)|) \leq 2\rho(z, w). \quad (3.14)$$

*Il y a égalité dans (3.14) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 2 et  $z, w$  appartiennent à un rayon géodésique hyperbolique émanant du point critique  $c$  de  $f$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité nous allons supposer que  $|f^h(z)| \geq |f^h(w)|$ . En utilisant le fait que  $(-1, 1)$  est une géodésique hyperbolique, par la proposition 2.4.1, on obtient :

$$\rho(|f^h(z)|, |f^h(w)|) = \rho(0, |f^h(z)|) - \rho(0, |f^h(w)|).$$

Comme les rotations de la forme  $S(z) = e^{i\theta}z$  où  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  sont des automorphismes et par ce que nous avons dit précédemment alors,

$$\begin{aligned} \rho(|f^h(z)|, |f^h(w)|) &= \rho(0, f^h(z)) - \rho(0, f^h(w)) \\ &\leq 2\rho(z, w). \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du corollaire 3.3.3 en laissant tendre  $w$  vers  $z$  dans (3.12) et en remplaçant  $v$  par  $w$ . En ce qui concerne le cas d'égalité, cela suit directement du corollaire 3.3.3.  $\square$

## 3.4 Applications

La géométrie hyperbolique, de même que la théorie présentée en début de chapitre, sont d’habiles instruments permettant à la fois une nouvelle interprétation et une meilleure compréhension de certains résultats de l’analyse complexe. En particulier, nous verrons comment on peut en faire bénéficier respectivement le *lemme de Julia* et le *lemme de Rogosinski*.

### 3.4.1 Lemme de Julia

Avant d’introduire le lemme de Julia, nous avons besoin de quelques notions de base.

**Définition 3.4.1.** *Un horocycle au point 1 est un cercle tangent au cercle unité  $\partial\mathbb{D}$  en  $z = 1$ .*

On peut faire une étude plus approfondie des horocycles en utilisant les *fonctions de Busemann*. Considérons trois points  $w, z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . Soient

$$a = 1 - \bar{w}z_1, \quad b = z_1 - w, \quad c = 1 - \bar{w}z_2 \text{ et } d = z_2 - w.$$

Alors, en utilisant le théorème 2.5.1, on a :

$$\begin{aligned} \exp[\rho(z_1, w) - \rho(z_2, w)] &= \left( \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|} \right) \left( \frac{|c| - |d|}{|c| + |d|} \right) \\ &= \left( \frac{|a| + |b|}{|c| + |d|} \right)^2 \left( \frac{|c|^2 - |d|^2}{|a|^2 - |b|^2} \right) \\ &= \left( \frac{|a| + |b|}{|c| + |d|} \right)^2 \frac{1 - |z_2|^2}{1 - |z_1|^2} \\ &\longrightarrow \left( \frac{|1 - z_1|^2}{1 - |z_1|^2} \right) / \left( \frac{|1 - z_2|^2}{1 - |z_2|^2} \right) \end{aligned}$$

lorsque  $w \rightarrow 1$ .

Si on fixe un point  $z_0 \in \mathbb{D}$ , alors pour tout point  $z \in \mathbb{D}$ , on définit  $B(z, z_0)$  par :

$$\begin{aligned} B(z, z_0) &:= \lim_{w \rightarrow 1} [\rho(z, w) - \rho(z_0, w)] \\ &= \log \left( \left( \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \right) / \left( \frac{|1 - z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right) \right). \end{aligned}$$

La fonction  $B(z, z_0)$  est appelée une *fonction de Busemann*. On vérifie facilement que les courbes de niveau de la fonction  $B(z, z_0)$  correspondent exactement à des horocycles en  $z = 1$ . En particulier, pour  $z_0 = 0$ , on a :

$$B(z, 0) = \log \left( \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \right).$$

Nous noterons par  $\partial H(R)$  l'horocycle suivant :

$$\partial H(R) = \{z \in \mathbb{D} : B(z, 0) = \log(R)\}.$$

La notion d'horocycle permet d'introduire celle des *horodisques*.

**Définition 3.4.2.** On définit un horodisque  $H(R)$  de la manière qui suit :

$$H(R) := \{z \in \mathbb{D} : B(z, 0) < \log(R)\},$$

où  $R$  est un nombre réel strictement positif.

Remarquons que  $H(R)$  peut aussi s'exprimer sous forme euclidienne par

$$H(R) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} < R \right\}.$$

Il s'agit de la définition d'un horodisque que l'on retrouve le plus souvent dans la littérature.

Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la version habituelle du lemme de Julia.

**Lemme de Julia.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique et  $(z_n)_{n \geq 1}$  une suite de points du disque unité telle que  $z_n \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Supposons également que  $f(z_n) \rightarrow 1$  et que

$$\frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} \rightarrow \alpha \tag{3.15}$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ , où  $\alpha \neq \infty$ . Alors, pour  $|z| < 1$  on a :

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2}. \tag{3.16}$$

La conclusion du lemme de Julia peut être interprétée en termes d'horodisques. En effet, sous les mêmes hypothèses, on a que  $f(H(R)) \subset H(\alpha R)$ , pour  $R > 0$ .

On peut trouver plus de détails concernant le lemme de Julia et le théorème de la dérivée angulaire dans [6] et dans [1].

Soit  $M > 1$ , un nombre réel et considérons la région  $\Gamma$  suivante :

$$\Gamma := \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{|1-z|}{1-|z|} < M \right\}.$$

Cet ensemble est appelé une *région d'approche non-tangentielle* au point  $z = 1$ . Le terme « non-tangentielle » fait référence au fait que la région  $\Gamma$  est contenue dans un angle inférieur à  $\pi$  et de sommet  $z = 1$ . En effet, on remarque que la frontière de  $\Gamma$  est délimitée par des courbes se rencontrant en  $z = 1$  et formant un angle d'intersection inférieur à  $\pi$  (voir figure 3.2).

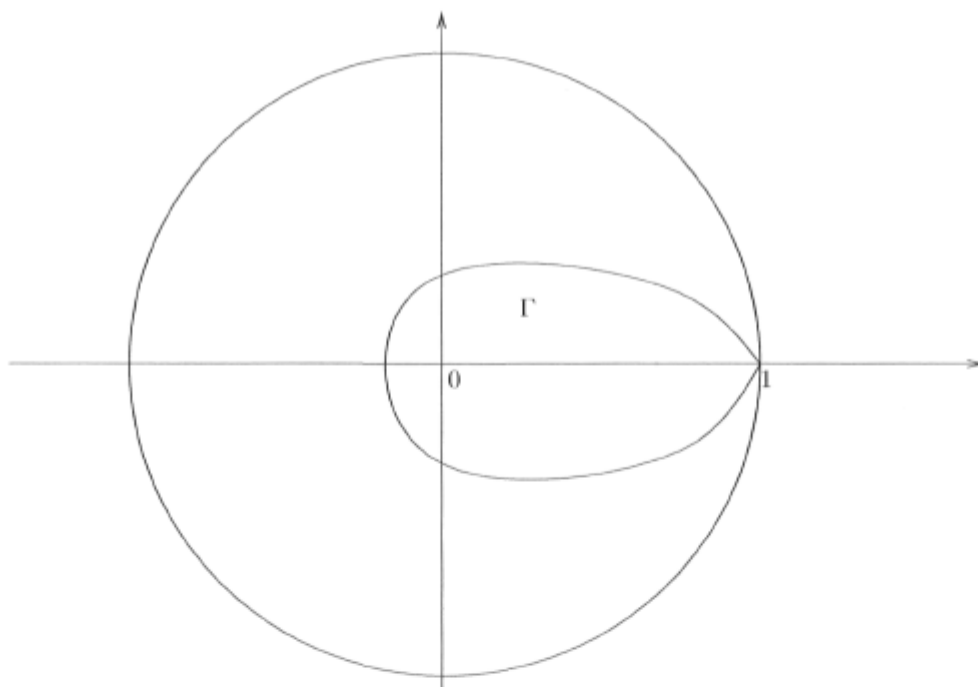


FIG. 3.2 – Une région d'approche non-tangentielle

On dit qu'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  possède une *limite angulaire* (ou *non-tangentielle*)  $L$  au point  $z = 1$  si  $f(z) \rightarrow L$  lorsque  $z \rightarrow 1$ ,  $z \in \Gamma$  et ce pour tout  $M > 1$ .

Une autre région particulière peut également intervenir dans la notion de limite angulaire, il s'agit des *angles de Stolz*. On définit un angle de Stolz en  $z = 1$ , que l'on

note  $\widehat{S}$ , de la manière suivante :

$$\widehat{S} := \left\{ z \in \mathbb{D} : |\arg(1 - z)| < \beta, |z - 1| < r, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), r \in (0, 2 \cos \beta) \right\}.$$

La figure 3.3 donne un exemple d'un tel angle.

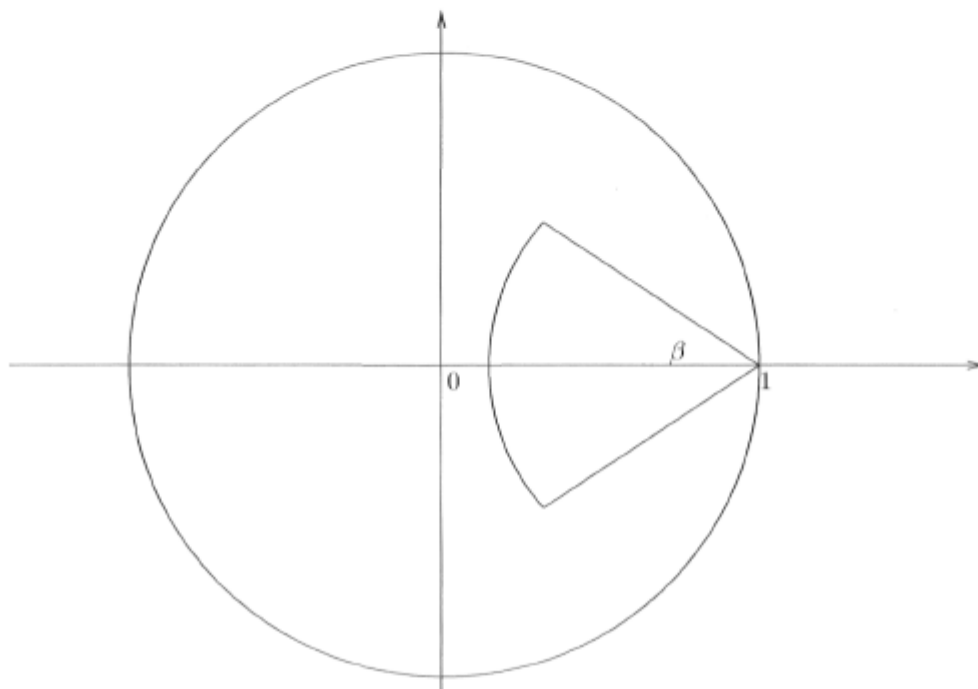


FIG. 3.3 – Un angle de Stolz en  $z = 1$

Le lien étroit qui existe entre cette région et la limite angulaire est qu'une fonction holomorphe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  possède une limite angulaire  $L$  en  $z = 1$  si et seulement si  $f(z) \rightarrow L$  lorsque  $z \rightarrow 1$ ,  $z \in \widehat{S}$  et ce pour tout angle de Stolz  $\widehat{S}$  en  $z = 1$ .

Maintenant, nous allons voir comment on peut utiliser les outils de la géométrie hyperbolique que nous avons développés dans les sections antérieures afin d'obtenir une version à trois points du lemme de Julia. Comme pour le cas du lemme de Schwarz-Pick, la géométrie hyperbolique peut s'avérer un instrument d'une grande efficacité lorsqu'il s'agit de généraliser ou d'obtenir des variantes de certains résultats.

**Théorème 3.4.1 (Lemme de Julia à trois points).** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme de  $\mathbb{D}$  et telle que  $f(z)$  possède une limite angulaire en  $z = 1$  qui vaut 1. Supposons de plus que pour tout  $z$  appartenant à une région d'approche non-tangentielle,  $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - |f(z)| / (1 - |z|)) = \beta < \infty$ . Alors, pour*

$R > 0$  et pour  $z \in \partial H(R)$ ,  $u \in \overline{H(R)}$ ,  $v \in \mathbb{D}$ , on a que  $f(z) \in \overline{H(\mu R\beta)}$ , où

$$2\mu = 1 + \frac{p(z, v) + |f^*(u, v)|}{1 + p(z, v)|f^*(u, v)|} \leq 2.$$

**Remarque 3.4.1.** Si  $u = v$ , alors  $|f^*(u, v)| = |f^h(v)|$  et comme  $|f^h(v)| \leq 1$ , dans ce cas on obtient que  $f(z) \in \overline{H(R\beta)}$ , ce qui est essentiellement le lemme de Julia.

*Démonstration.* Soient  $\gamma$  un rayon de géodésique hyperbolique émanant de  $u$  et se terminant en 1 et  $w$  un point quelconque appartenant à  $\gamma$ . Soit  $u'$  le point de rencontre entre la géodésique  $\gamma$  et l'horocycle  $\partial H(R)$ . (voir figure 3.4).

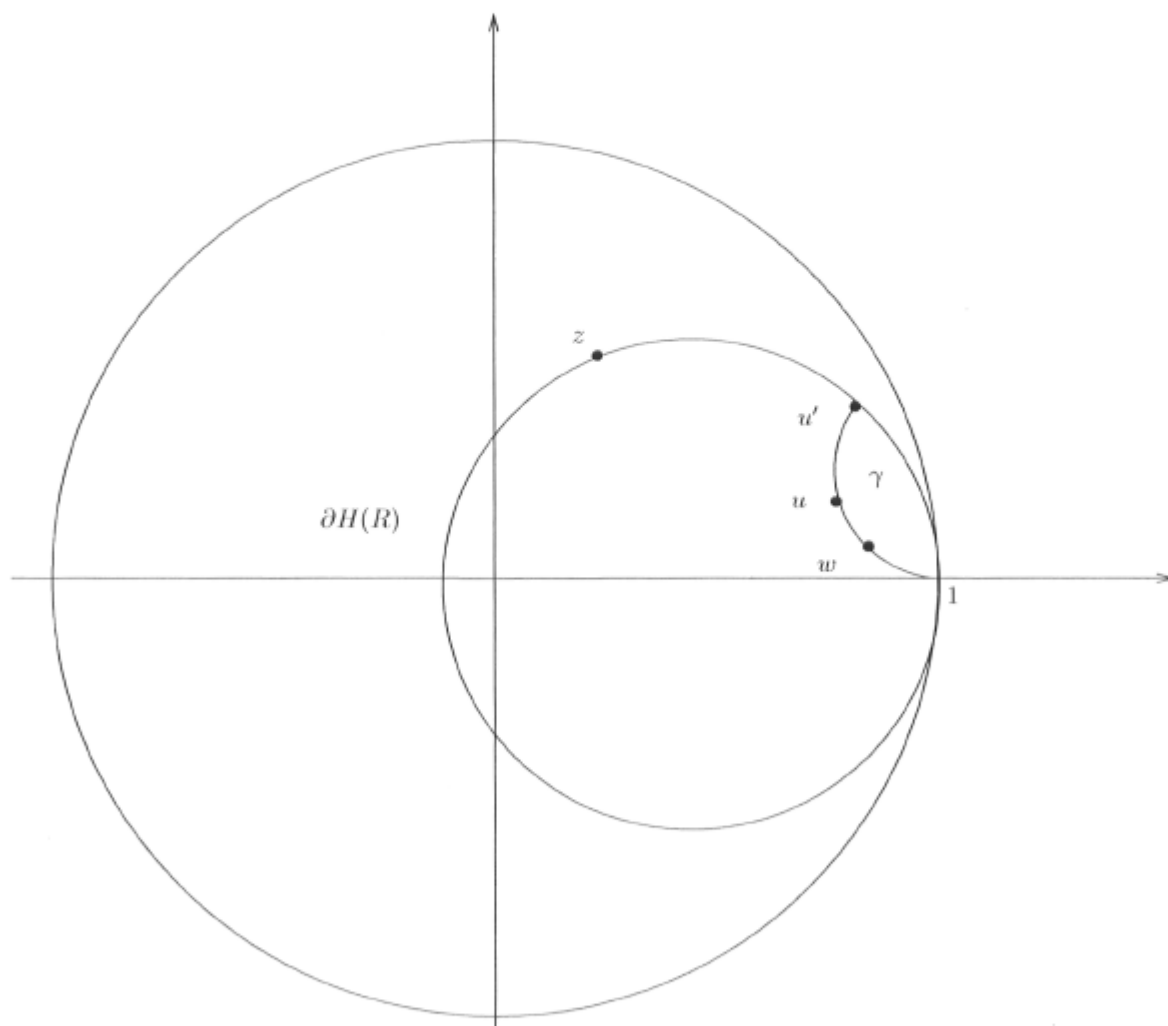


FIG. 3.4 – Lemme de Julia à trois points

Comme  $u$  et  $\gamma$  appartiennent à  $\overline{H(R)}$  (par convexité) et que  $z \in \partial H(R)$ , alors on a :

$$\rho(u, w) \leq \rho(u', w) \leq \rho(w, z).$$



La dernière inégalité provient du fait que lorsqu'on veut minimiser la distance entre  $w$  et un point  $z \in \partial H(R)$ , on peut montrer que le point qui réalise le minimum est celui situé sur la géodésique passant par 1 et  $w$  et rencontrant  $\partial H(R)$ .

En utilisant le corollaire 3.3.2 et l'inégalité qui précède, on obtient

$$\rho(0, f^*(z, w)) \leq \rho(0, f^*(u, v)) + \rho(z, w) + \rho(z, v).$$

On peut réécrire cette dernière en utilisant le théorème 2.4.1, le fait que  $x \mapsto \tanh x$  est une fonction croissante, et les définitions de la section 3.1. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(f(z), f(w)) &\leq p(z, w) \tanh \frac{1}{2} [\rho(z, w) + \rho(z, v) + \rho(0, f^*(u, v))] \\ &= p(z, w) E(f, z, w, u, v), \end{aligned}$$

où  $E(f, z, w, u, v) = \tanh \frac{1}{2} [\rho(z, w) + \rho(z, v) + \rho(0, f^*(u, v))]$ .

Pour plus de brièveté, nous allons noter  $E(f, z, w, u, v)$  par  $E$ .

$$\begin{aligned} \rho(f(z), f(w)) &= \log \left( \frac{1 + p(f(z), f(w))}{1 - p(f(z), f(w))} \right) \\ &\leq \log \left( \frac{1 + p(z, w)E}{1 - p(z, w)E} \right) \\ &= \rho(z, w) + \log \left( \frac{(1 - p(z, w))(1 + p(z, w)E)}{(1 + p(z, w))(1 - p(z, w)E)} \right) \\ &= \rho(z, w) + E', \end{aligned}$$

où  $E' = \log \left( \frac{(1 - p(z, w))(1 + p(z, w)E)}{(1 + p(z, w))(1 - p(z, w)E)} \right)$ .

Il s'ensuit que

$$\rho(f(z), f(w)) - \rho(0, f(w)) \leq [\rho(z, w) - \rho(0, w)] + [\rho(0, w) - \rho(0, f(w))] + E'.$$

Comme  $w$  est situé sur un rayon de géodésique hyperbolique émanant de  $u$  et se terminant en  $z = 1$ , alors  $w$  appartient à une région d'approche non-tangentielle. Ainsi, lorsque  $w \rightarrow 1$ , on obtient par la définition de la fonction de Busemann et par nos hypothèses :

$$\begin{aligned} B(f(z), 0) &\leq B(z, 0) + \lim_{w \rightarrow 1} \log \left( \frac{(1 - |f(w)|)(1 + |w|)}{(1 - |w|)(1 + |f(w)|)} \right) + \lim_{w \rightarrow 1} E' \\ &\leq B(z, 0) + \log \beta + \lim_{w \rightarrow 1} E'. \end{aligned}$$

Il nous reste à examiner  $\lim_{w \rightarrow 1} E'$ . Afin d'être plus concis, nous allons noter  $p(z, w)$  tout simplement par  $p$ . Notons que lorsque  $w \rightarrow 1$  alors  $p(z, w) = p \rightarrow 1$  aussi. Nous

allons également utiliser la formule d'addition de  $\tanh x$  :

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned} E &= \tanh \frac{1}{2} [\rho(z, w) + \rho(z, v) + \rho(0, f^*(u, v))] \\ &= \frac{p + \tanh \frac{1}{2} [\rho(z, v) + \rho(0, f^*(u, v))]}{1 + p \tanh \frac{1}{2} [\rho(z, v) + \rho(0, f^*(u, v))]} \\ &= \frac{p + (2\mu - 1)}{1 + p(2\mu - 1)}. \end{aligned}$$

Il est clair que si  $w \rightarrow 1$ , alors  $E \rightarrow 1$ . De cette façon, on obtient :

$$\begin{aligned} E' &= \log \left( \frac{(1-p)(1+pE)}{(1+p)(1-pE)} \right) \\ &= \log \left( \frac{1-p}{1-pE} \right) + o(1) \\ &= \log \left( \frac{1+p(2\mu-1)}{1+p} \right) + o(1) \\ &\rightarrow \log \mu \text{ lorsque } w \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} B(f(z), 0) &\leq B(z, 0) + \log \beta + \lim_{w \rightarrow 1} E' \\ &\leq \log R + \log \beta + \log \mu \\ &= \log(\mu R \beta). \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien que  $f(z) \in \overline{H(\mu R \beta)}$ , d'où le résultat.  $\square$

### 3.4.2 Lemme de Rogosinski

Le prochain résultat que nous allons présenter est dû à Rogosinski. Il fit sa première apparition dans un article en 1934 (voir [12]). Tout d’abord, considérons  $z_0 \in \mathbb{D}$ . Nous noterons par  $\Delta_{z_0}$  la région fermée contenant le disque  $|z| \leq |z_0|^2$  dont la frontière est formée par un arc du cercle  $|z| = |z_0|^2$  et par deux autres arcs de cercle  $\gamma_{z_0}$ ,  $\tilde{\gamma}_{z_0}$  qui joignent le point  $z_0$  respectivement aux points  $i|z_0|z_0$  et  $-i|z_0|z_0$  où ils sont tangents au cercle  $|z| = |z_0|^2$ . (Voir figure 3.5).

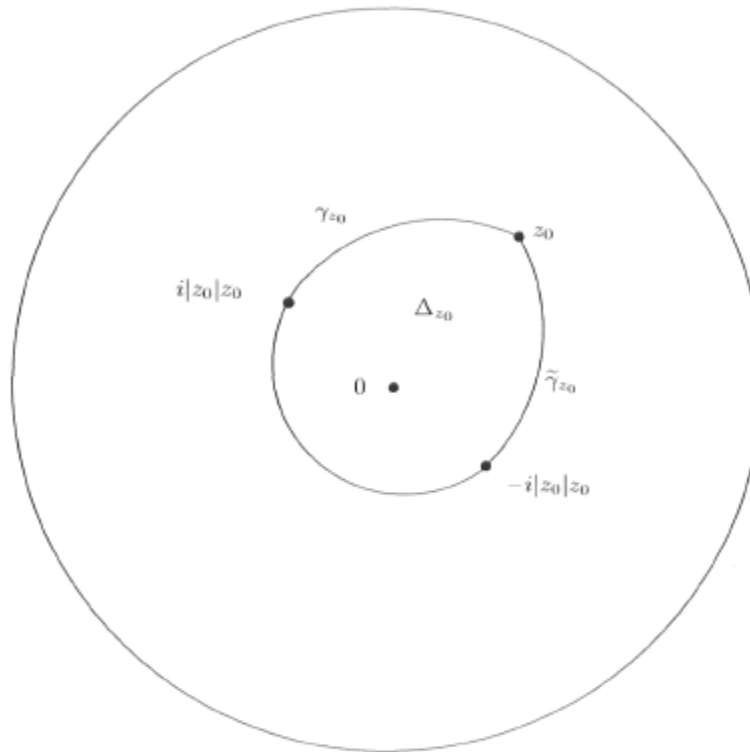


FIG. 3.5 – La région  $\Delta_{z_0}$ .

Voici donc l’énoncé du lemme.

**Lemme de Rogosinski.** *Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \geq 0$ . Alors, pour  $0 < |z_0| < 1$ ,  $f(z_0) \in \Delta_{z_0}$ .*

On remarque que le lemme est en fait une version améliorée du lemme de Schwarz, puisque  $f(z_0)$  appartient à une région plus petite que celle donnée par ce dernier. Brièvement, Rogosinski a prouvé ce résultat en montrant que  $f(z)/z \in \cup_t D_t$ , où  $D_t$  est un disque ouvert particulier dont le centre et le rayon sont fonction d’un paramètre  $t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Ainsi,  $f(z)$  appartient à l’enveloppe  $E$  de l’union des disques  $zD_t$ , où la notation  $zE$  désigne l’ensemble  $\{zw : w \in E\}$ . Rogosinski a ainsi calculé explicitement

quels étaient ces disques et quelle était l’enveloppe de l’union de ceux-ci. On peut retrouver la preuve de ce résultat dans [7], où les détails du calcul de l’enveloppe sont donnés.

Nous allons montrer dans cette partie comment il est possible, en adoptant un point de vue hyperbolique, d’éviter ces calculs. Nous allons donc montrer ce résultat de Rogosinski en utilisant spécifiquement les outils de la géométrie hyperbolique. De plus, nous supposerons que  $f'(0) \in \mathbb{R}$  plutôt que  $f'(0) \geq 0$ . En effet, le lemme de Rogosinski est vrai aussi pour ce cas plus général, ce qu’a l’avantage de montrer la preuve géométrique.

**Définition 3.4.3.** Soient  $\gamma$  une géodésique hyperbolique et  $r > 0$ . Une bande hyperbolique, notée  $\Sigma(\gamma, r)$ , est l’union des disques hyperboliques ouverts de rayon  $r$  dont le centre appartient à la géodésique  $\gamma$ .

Remarquons que la définition de bande hyperbolique est valide dans n’importe quel modèle de géométrie hyperbolique. On peut identifier facilement l’ensemble  $\Sigma(\gamma, r)$ . Pour ce faire, nous allons utiliser le modèle du demi-plan supérieur  $\mathbb{H}$ . Soient  $r > 0$  et  $D$  un disque hyperbolique ouvert de rayon  $r$  dont le centre est  $i$ . Il est clair que l’union de tous les disques hyperboliques de rayon  $r$  dont le centre appartient à l’axe imaginaire (qui est une géodésique hyperbolique de  $\mathbb{H}$ ) est l’ensemble  $\cup_{s>0} g_s(D)$ , où  $g_s(z) = sz$ , car dans  $(\mathbb{H}, \rho)$ ,  $g_s(z)$  est une isométrie. Ainsi,  $\Sigma(\gamma, r)$  où  $\gamma$  est l’axe imaginaire, est un ensemble de la forme  $|\arg(z) - \frac{\pi}{2}| < \theta_0$ , où  $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ , qui représente un angle dont le sommet est situé à l’origine. Par la transformation conforme  $\varphi(z)$  que nous avons définie dans la section 2.8, il est possible d’utiliser celle-ci afin de représenter une bande hyperbolique dans  $\mathbb{D}$ . Ainsi, on peut déduire que l’union de tous les disques ouverts hyperboliques dans  $\mathbb{D}$  dont le centre appartient à la géodésique hyperbolique  $\gamma = (-1, 1)$  et de rayon  $r$  sera la bande hyperbolique qui est l’intersection de deux disques euclidiens ouverts dont les frontières passent respectivement par  $-1, iy_0, 1$  et  $-1, -iy_0, 1$ .

Voici maintenant la version hyperbolique du lemme de Rogosinski.

**Théorème 3.4.2 (Lemme de Rogosinski).** Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique telle que  $f(0) = 0$  et  $f'(0) \in \mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,  $f(z) \in z\Sigma(\gamma, r)$ , où  $\gamma = (-1, 1)$  et  $r = \rho(0, z)$ .

*Démonstration.* Posons,  $g(z) = f(z)/z$ . Il est clair que  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est une fonction analytique. En effet, comme  $f(0) = 0$ , on a que  $z = 0$  est une singularité enlevable de  $g$ . Pour  $z \in \mathbb{D}$  fixé, le lemme de Schwarz–Pick implique que

$$\rho(g(z), g(0)) \leq \rho(z, 0).$$

Puisque  $f'(0) \in \mathbb{R}$ , cela implique que  $g(0) \in \mathbb{R}$  aussi. Donc,  $g(z)$  appartient à l'ensemble formé par l'union de tous les disques hyperboliques ouverts de rayon  $r = \rho(z, 0)$  et dont le centre appartient à la géodésique hyperbolique  $(-1, 1)$ . Ainsi,  $g(z) \in \Sigma(\gamma, r)$ . Finalement, on a bien que  $f(z) \in z\Sigma(\gamma, \rho(z, 0))$ , ce qui montre le résultat.  $\square$

**Remarque 3.4.2.** Puisque  $\rho(0, z) = \rho(0, i|z|)$ , il est évident que la bande hyperbolique  $\Sigma(\gamma, r)$  dans le lemme de Rogosinski est l'intersection de deux disques euclidiens dont les frontières passent par respectivement les points  $-1, i|z|, 1$  et  $-1, -i|z|, 1$ . Cela explique la provenance de la région  $\Delta_{z_0}$  présente dans la première version du lemme de Rogosinski.

### 3.5 Le problème de Nevanlinna–Pick à trois points

Nous terminons ce chapitre en montrant comment Beardon et Minda ont utilisé leur version du lemme de Schwarz–Pick pour obtenir une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick à trois points. Mais avant, nous allons rappeler en quoi consiste ce problème.

**Le problème classique de Nevanlinna–Pick.** *Étant donné  $n$  points distincts  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  et  $n$  points  $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ , déterminer des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ .*

Les origines du problème remontent jusqu'en 1916, époque à laquelle Pick [11] résolut le problème. Plus tard, en 1919, Nevanlinna [10] fit de même indépendamment de Pick. La réponse qu'ils apportèrent est la suivante : une telle fonction analytique existe si et seulement si la matrice  $M$ , appelée *matrice de Nevanlinna–Pick*, est semi-définie positive :

$$M = \left[ \frac{1 - \overline{w_j}w_i}{1 - \overline{z_j}z_i} \right] \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Le premier résultat d'importance faisant le lien entre la géométrie hyperbolique et le problème de Nevanlinna–Pick est le lemme de Schwarz–Pick. En effet, si on considère deux paires de points  $(z_1, w_1)$  et  $(z_2, w_2)$ , alors une condition nécessaire pour l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2$  est la suivante :

$$\rho(w_1, w_2) \leq \rho(z_1, z_2).$$

Ainsi, si les paires de points  $(z_1, w_1)$  et  $(z_2, w_2)$  ne satisfont pas l'inégalité précédente, alors il n'existe aucune fonction analytique. À la suite de ce résultat, on peut se demander si l'inégalité fournit en fait une condition qui soit suffisante. La réponse est affirmative et on a ainsi une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick dans le cas  $n = 2$ .

**Théorème 3.5.1 (Le problème de Nevanlinna–Pick à deux points).** *Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$ . Alors il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2$  si et seulement si*

$$\rho(w_1, w_2) \leq \rho(z_1, z_2). \quad (3.17)$$

*Démonstration.* S'il existe une fonction analytique  $f$  satisfaisant  $f(z_1) = w_1$  et  $f(z_2) = w_2$ , alors le lemme de Schwarz–Pick implique que (3.17) est vraie. Réciproquement, supposons que les points satisfont (3.17).

### Cas 1 : $z_2 = w_2 = 0$

En utilisant le théorème 2.5.1 et le fait que  $x \mapsto \tanh(x)$  est une fonction croissante, (3.17) implique que  $|w_1| \leq |z_1|$ . Si  $|w_1| = |z_1|$ , alors il est clair que  $f(z) = e^{i\theta}z$  pour un  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Si  $|w_1| < |z_1|$ , alors  $|w_1|/|z_1| < 1$ . Ainsi, il existe une fonction analytique  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  telle que  $g(z_1) = w_1/z_1$ . En effet, il suffit de prendre

$$g(z) = \chi \circ \sigma(z),$$

où

$$\sigma(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z} \quad \text{et} \quad \chi(z) = \frac{z + w_1/z_1}{1 + w_1/z_1 z}.$$

Ainsi, en prenant  $f(z) = zg(z)$ , il est clair que  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  et satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2$ .

### Cas 2 : Points quelconques

On se ramène facilement au cas 1, en utilisant les automorphismes suivants :

$$\phi(z) = \frac{z - z_2}{1 - \bar{z}_2 z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_2}{1 - \bar{w}_2 z}.$$

Alors, il existe une fonction  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  si et seulement s'il existe  $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  telle que  $F(z) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$  satisfaisant  $F(0) = 0$  et  $F(\phi(z_1)) = \psi(w_1)$ . D'après le cas 1 ce sera le cas si et seulement si  $|\psi(w_1)| \leq |\phi(z_1)|$ . En utilisant les mêmes arguments cités dans la preuve du cas 1 et le fait que  $\phi, \psi$  sont des isométries dans le modèle du disque de Poincaré, on a que :

$$|\psi(w_1)| \leq |\phi(z_1)| \Leftrightarrow \rho(\psi(w_1), \psi(w_2)) \leq \rho(\phi(z_1), \phi(z_2)) \Leftrightarrow \rho(w_1, w_2) \leq \rho(z_1, z_2).$$

Ainsi, comme nous avons supposé que les points satisfaisaient la dernière inégalité, cela entraîne l'existence de  $f$ , d'où le résultat.  $\square$

Le lien étroit entre le lemme de Schwarz–Pick et le problème de Nevanlinna–Pick à deux points laisse envisager la possibilité d'exploiter le même genre d'idées pour le cas général. Les mathématiciens Alan F. Beardon et David Minda ont franchi un premier pas décisif dans cette direction en obtenant d'abord une version à trois points du lemme qu'ils ont ensuite su utiliser pour l'obtention d'une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick à trois points. Cette approche originale apportée par Beardon et Minda a l'avantage d'être plus succincte et de nature géométrique, ce qui permet une meilleure compréhension de l'essence même du problème d'interpolation.

**Théorème 3.5.2 (Le problème de Nevanlinna–Pick à trois points).** *Soient  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{D}$ . Alors il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  qui satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et qui n'est pas un automorphisme du disque unité si et seulement si  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$*

$$\rho(w_i, w_j) < \rho(z_i, z_j) \quad (3.18)$$

et

$$\rho\left(\frac{[w_2, w_1]}{[z_2, z_1]}, \frac{[w_3, w_1]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \rho(z_2, z_3). \quad (3.19)$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  où  $f$  n'est pas un automorphisme et qui satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Alors, d'après le lemme de Schwarz–Pick :

$$\rho(f(z_i), f(z_j)) < \rho(z_i, z_j), \quad \forall i, j, i \neq j.$$

Aussi, d'après le théorème 3.3.1, on a :

$$\rho(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)) \leq \rho(z_2, z_3).$$

Réciproquement, supposons que (3.18) et (3.19) sont vraies.

### Cas 1 : $z_1 = w_1 = 0$

En utilisant le théorème 2.5.1 et le fait que  $x \mapsto \tanh(x)$  est une fonction croissante, il suit que (3.18) est équivalent à  $|w_i| < |z_i|$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Dans ce cas particulier,

(3.19) devient :

$$\rho\left(\frac{w_2}{z_2}, \frac{w_3}{z_3}\right) < \rho(z_2, z_3).$$

Clairement,  $w_2/z_2, w_3/z_3 \in \mathbb{D}$ , car  $|w_i| < |z_i|$  pour  $i = 2, 3$ . Ainsi, par le théorème 3.5.1, on peut déduire qu'il existe une fonction analytique  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  telle que  $g(z_2) = w_2/z_2$  et  $g(z_3) = w_3/z_3$ . Finalement, en prenant  $f(z) = zg(z)$ , on a que  $f$  est analytique et satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ .

### Cas 2 : Points quelconques

On peut se ramener au cas 1 aisément en utilisant les automorphismes du disque unité suivants :

$$\phi(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_1}{1 - \bar{w}_1 z}.$$

Alors, il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  si et seulement s'il existe une fonction analytique  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , où  $F(z) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$  satisfaisant :

$$F(0) = 0, \quad F(\phi(z_2)) = \psi(w_2), \quad F(\phi(z_3)) = \psi(w_3).$$

Ainsi, d'après le cas précédent,  $F$  existe si et seulement si

$$\rho(\psi(w_i), \psi(w_j)) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)), \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

et

$$\rho\left(\frac{\psi(w_2)}{\phi(z_2)}, \frac{\psi(w_3)}{\phi(z_3)}\right) \leq \rho(\phi(z_2), \phi(z_3)).$$

Comme les deux dernières conditions sont respectivement équivalentes à (3.18) et (3.19), le résultat suit.  $\square$

Dans le prochain exemple, nous allons montrer comment le théorème 3.5.2, qui apporte une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick à trois points, peut être utilisé afin de résoudre simplement un problème d'interpolation précis.

**Exemple 3.5.1.** Soient  $r, R \in (0, 1)$ . Considérons  $z_1 = R\omega$ ,  $z_2 = \bar{z}_1$ ,  $z_3 = 0$  et  $w_1 = r\bar{\omega}$ ,  $w_2 = \bar{w}_1$  et  $w_3 = 0$ , où  $\omega = e^{i\pi/3}$ . Nous voulons déterminer une condition suffisante et nécessaire pour l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  qui satisfait  $f(z_i) = w_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ . Pour ce faire, nous allons considérer le théorème 3.5.2. Il faut d'abord que les points satisfassent la condition (3.18) :



$$\begin{aligned}
\rho(w_i, w_3) < \rho(z_i, z_3) &\Leftrightarrow |w_i| < |z_i|, \text{ pour } i = 1, 2 \\
&\Leftrightarrow r < R \\
\rho(w_1, w_2) < \rho(z_1, z_2) &\Leftrightarrow p(w_1, w_2) < p(z_1, z_2) \\
&\Leftrightarrow \frac{r}{\sqrt{1+r^2+r^4}} < \frac{R}{\sqrt{1+R^2+R^4}}.
\end{aligned}$$

Comme l'application  $x \mapsto x/\sqrt{1+x^2+x^4}$  est croissante sur  $(0, 1)$ , il suit que la première condition du théorème 3.5.2 est équivalente à ce que  $r < R$ .

Il nous reste maintenant à vérifier la condition (3.19). On a :

$$\frac{[w_1, w_3]}{[z_1, z_3]} = \frac{w_1}{z_1} = \frac{r\bar{\omega}^2}{R}, \quad \frac{[w_2, w_3]}{[z_2, z_3]} = \frac{w_2}{z_2} = \frac{r\omega^2}{R}.$$

Posons  $t = r/R$ . Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
\rho(t\bar{\omega}^2, t\omega^2) \leq \rho(R\omega, R\bar{\omega}) &\Leftrightarrow p(t\bar{\omega}^2, t\omega^2) \leq p(R\omega, R\bar{\omega}) \\
&\Leftrightarrow \frac{t}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leq \frac{R}{\sqrt{1+R^2+R^4}} \\
&\Leftrightarrow t \leq R.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est équivalente à  $r \leq R^2$ . Finalement, pour assurer l'existence d'une fonction analytique satisfaisant les hypothèses, il faut et il suffit que  $r \leq R^2$ .

# Chapitre 4

## Un lemme de Schwarz–Pick à quatre points

Nous allons maintenant présenter un premier résultat obtenu dans le cadre de nos travaux de recherche. Comme notre objectif est d'étendre les résultats de Alan F. Beardon et David Minda pour un cadre plus général, une étape capitale est franchie ici dans cette voie. En effet, nous avons su exploiter leurs idées pour le cas de quatre points. Notre but principal consiste d'une part à obtenir l'équivalent de la fonction  $f^*$ , c'est-à-dire, une fonction ayant la propriété d'appartenir à  $\mathcal{H}(\mathbb{D})$  et dépendant de deux paramètres  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ . D'autre part, créer une version du lemme de Schwarz–Pick à quatre points à l'aide de cette nouvelle fonction, que l'on notera  $f^{**}(z, z_1, z_2)$ . Bien entendu, le principal intérêt de cette version du lemme de Schwarz–Pick est l'obtention d'une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick à quatre points.

### 4.1 Un lemme de Schwarz–Pick à quatre points

Voici donc cette fonction qui permet de remplir les objectifs cités précédemment.

**Définition 4.1.1.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un automorphisme et  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$ . On définit  $f^{**}(z, z_1, z_2)$  de la manière suivante :

$$f^{**}(z, z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{[f^*(z, z_1), f^*(z_2, z_1)]}{[[z, z_1], [z_2, z_1]]} & \text{si } z \neq z_2, \\ \frac{f^{*'}(z, z_1)|_{z=z_2} \frac{1 - |[z_2, z_1]|^2}{[z, z_1]'|_{z=z_2} \frac{1 - |f^*(z_2, z_1)|^2}}{1 - |f^*(z_2, z_1)|^2}}{1 - |f^*(z_2, z_1)|^2} & \text{si } z = z_2. \end{cases}$$

La définition de  $f^{**}$  semble une extension logique de celle de la fonction  $f^*$ , car elles ont exactement la même forme. En effet, elles sont définies grâce au quotient de deux quantités utilisant la distance pseudo-hyperbolique complexe. Il serait bon de noter également l'aspect itératif de la définition :  $f^*$  est définie à partir de  $f$  et  $f^{**}$  à partir de  $f^*$ . Ceci pourrait être utilisé dans une éventuelle extension pour le cas à  $n$  points. La définition 4.1.1 peut être vue comme étant également celle de l'application  $f \mapsto f^{**}$  que nous nommerons *l'opérateur- $**$* .

**Remarque 4.1.1.** Si  $z_1 = 0$  et  $f(z_1) = 0$ , alors on a :

$$f^{**}(z, 0, z_2) = \frac{\left[ \frac{f(z)}{z}, \frac{f(z_2)}{z_2} \right]}{[z, z_2]}.$$

**Remarque 4.1.2.** Dans ce qui va suivre nous considérerons  $f^{**} : z \mapsto f^{**}(z, z_1, z_2)$  comme une fonction de variable  $z$  ayant  $z_1, z_2$  comme paramètres.

La proposition suivante montre une première propriété importante : celle de l'analyticité de la fonction  $f^{**}$ .

**Proposition 4.1.1.** *Considérons  $f^{**} : z \mapsto f^{**}(z, z_1, z_2)$  avec  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$ . Alors  $f^{**}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer que  $f^{**}$  possède une singularité enlevable en  $z_2$ . Considérons la limite suivante.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_2} f^{**}(z, z_1, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{[f^*(z, z_1) - f^*(z_2, z_1)]}{[[z, z_1], [z_2, z_1]]} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{(f^*(z, z_1) - f^*(z_2, z_1))(1 - \overline{[z_2, z_1]}[z, z_1])}{([z, z_1] - [z_2, z_1])(1 - \overline{f^*(z_2, z_1)}f^*(z, z_1))}. \end{aligned}$$

Pour évaluer la limite, nous allons utiliser la règle de L'Hôpital. En dérivant le numérateur on a :

$$f^{*\prime}(z, z_1) - f^{*\prime}(z, z_1)\overline{[z_2, z_1]}[z, z_1] - f^*(z, z_1)\overline{[z_2, z_1]}[z, z_1]' + [z, z_1]'\overline{[z_2, z_1]}f^*(z_2, z_1).$$

De même pour le dénominateur :

$$[z, z_1]' - \overline{f^*(z_2, z_1)}f^{*\prime}(z, z_1)[z, z_1] - \overline{f^*(z_2, z_1)}f^*(z, z_1)[z, z_1]' + [z_2, z_1]\overline{f^*(z_2, z_1)}f^{*\prime}(z, z_1).$$

Finalement, on obtient :

$$\lim_{z \rightarrow z_2} f^{**}(z, z_1, z_2) = \frac{f^{*\prime}(z, z_1)|_{z=z_2}(1 - |[z_2, z_1]|^2)}{[z, z_1]'\big|_{z=z_2}(1 - |f^*(z_2, z_1)|^2)}.$$

Comme la limite existe lorsque  $z \rightarrow z_2$ , alors  $f^{**}$  est nécessairement bornée dans un voisinage de  $z_2$ . Par le théorème des singularités enlevables de Riemann,  $z_2$  est une singularité enlevable de la fonction et  $f^{**}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ .  $\square$

Lorsque  $f$  est un produit de Blaschke d'un certain degré, alors on peut donner explicitement la nature de la fonction  $f^{**}$  : c'est ce que montre la proposition qui suit.

**Proposition 4.1.2.** *Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique,  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,  $z_1 \neq z_2$  et  $k \geq 0$ . Alors  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 2$  si et seulement si  $f^{**}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ .*

*Démonstration.* Définissons  $T_v(z) = \frac{z-v}{1-\bar{v}z}$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} f^{**}(z, z_1, z_2) \times [[z, z_1], [z_2, z_1]] &= [f^*(z, z_1), f^*(z_2, z_1)] \\ f^{**}(z, z_1, z_2) \times [T_{z_1}(z), T_{z_1}(z_2)] &= T_{f^*(z_2, z_1)}(f^*(z, z_1)) \\ f^{**}(z, z_1, z_2) \times T_{T_{z_1}(z_2)}(T_{z_1}(z)) &= T_{f^*(z_2, z_1)}(f^*(z, z_1)). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.2.2 et le fait que  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 2$  si et seulement si  $f^*$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 1$ , alors  $f^{**}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$  si et seulement si  $f^*$  est un produit de Blaschke de degré  $k + 1$ .  $\square$

À la suite de proposition 4.1.2, il est possible de déterminer avec précision de quelle façon l'opérateur- $**$  agit sur différentes classes de fonctions.

**Théorème 4.1.1.** *Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ ,  $z_1 \neq z_2$ . Alors, on a les situations suivantes :*

1. Si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus B_1$ , alors  $f^{**} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cup \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
2. Si  $f \in B_2$ , alors  $f^{**} \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
3.  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus (B_1 \cup B_2)$  si et seulement si  $f^{**} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ .

*Démonstration.* Supposons que  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus B_1$ . Alors,  $f^{**}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ , d'après la proposition 4.1.1. Aussi, d'après le théorème 3.2.1,  $f^* : z \mapsto f^*(z, z_1) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . En utilisant les identités suivantes

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^*(z, z_1) - f^*(z_2, z_1)}{1 - \overline{f^*(z_2, z_1)} f^*(z, z_1)} \right| &= \tanh \frac{1}{2}(\rho(f^*(z, z_1), f^*(z_2, z_1))) \\ |[z, z_1], [z_2, z_1]| &= \tanh \frac{1}{2}\rho([z, z_1], [z_2, z_1]) = \tanh \frac{1}{2}\rho(z, z_2) \end{aligned}$$

et en appliquant le lemme de Schwarz–Pick, on a que  $|f^{**}(z, z_1, z_2)| \leq 1$  avec égalité si et seulement si  $f^*$  est un automorphisme. Ce sera le cas si et seulement si  $f \in B_2$ , d'après le théorème 3.2.1. Si on a égalité, par le principe du maximum  $f^{**}(z, z_1, z_2) \equiv \lambda$  avec  $|\lambda| = 1$ . Ceci montre bien (1), (2) et (3).  $\square$

Le théorème 4.1.1 est la pierre angulaire qui permet l’obtention d’une version du lemme de Schwarz–Pick à quatre points, ce qui concrétise le but fixé en début de chapitre.

**Théorème 4.1.2 (Lemme de Schwarz–Pick à quatre points).** *Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n’est pas un produit de Blaschke de degré  $\leq 2$  et  $u_1, u_2, z_1, z_2 \in \mathbb{D}, z_1 \neq z_2$ . Alors on a :*

$$\rho(f^{**}(u_1, z_1, z_2), f^{**}(u_2, z_1, z_2)) \leq \rho(u_1, u_2). \quad (4.1)$$

Il y a égalité dans (4.1) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 3.

*Démonstration.* Comme  $f^{**} : z \mapsto f^{**} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ , alors on peut appliquer le lemme de Schwarz–Pick avec  $u_1, u_2$ . Finalement, il y a égalité dans (4.1) si et seulement si  $f^{**}$  est un automorphisme, c’est-à-dire, un produit de Blaschke de degré 1. Ce sera le cas si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré 3.  $\square$

La démonstration est tout aussi étonnante que celle du cas  $n = 3$  : elle utilise seulement la version classique, c’est-à-dire, à deux points, du lemme de Schwarz–Pick.

## 4.2 Le problème de Nevanlinna–Pick à quatre points

Il est maintenant possible d’apporter, à la suite des résultats obtenus précédemment, une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick à quatre points. Cette dernière est de nature géométrique et fait intervenir indirectement les fonctions  $f^*$  et  $f^{**}$ .

**Théorème 4.2.1 (Le problème de Nevanlinna–Pick à quatre points).** *Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{D}$ . Alors il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  qui satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  et qui n’est pas un produit de Blaschke de degré  $\leq 2$  si et seulement si*

$$\rho(w_i, w_j) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j \quad (4.2)$$

$$\rho\left(\frac{[w_i, w_4]}{[z_i, z_4]}, \frac{[w_j, w_4]}{[z_j, z_4]}\right) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \quad (4.3)$$

et

$$\rho\left(\frac{\left(\frac{[w_2, w_4]}{[z_2, z_4]}, \frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]}\right)}{\left([z_2, z_4], [z_1, z_4]\right)}, \frac{\left(\frac{[w_3, w_4]}{[z_3, z_4]}, \frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]}\right)}{\left([z_3, z_4], [z_1, z_4]\right)}\right) \leq \rho(z_2, z_3). \quad (4.4)$$

*Démonstration.* Supposons que  $f$  existe. Alors, par le lemme de Schwarz–Pick à deux et à trois points on a respectivement (4.2) et (4.3). De plus, il est clair que (4.4) suit, en utilisant le lemme de Schwarz–Pick à quatre points.

Réciproquement, supposons maintenant que (4.2), (4.3) et (4.4) sont vraies.

### Cas 1 : $z_4 = w_4 = 0$

Puisque  $|w_4| = |z_4| = 0$ , la condition  $\rho(w_i, w_j) < \rho(z_i, z_j) \forall i \neq j \in \{1, 2, 3, 4\}$  implique que

$$|w_i| < |z_i| \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Aussi, dans ce cas particulier, (4.3) devient :

$$\rho\left(\frac{w_i}{z_i}, \frac{w_j}{z_j}\right) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i \neq j \in \{1, 2, 3\}.$$

De la même façon on a pour (4.4) :

$$\rho\left(\frac{\left[\frac{w_2}{z_2}, \frac{w_1}{z_1}\right]}{[z_2, z_1]}, \frac{\left[\frac{w_3}{z_3}, \frac{w_1}{z_1}\right]}{[z_3, z_1]}\right) \leq \rho(z_2, z_3).$$

Comme ces deux dernières sont équivalentes aux conditions (3.18) et (3.19) du problème de Nevanlinna–Pick à trois points, alors il existe une fonction analytique  $g$  telle que :

$$g(z_1) = \frac{w_1}{z_1}, g(z_2) = \frac{w_2}{z_2}, g(z_3) = \frac{w_3}{z_3}.$$

Finalement, il suffit de prendre  $f(z) = zg(z)$  et on a bien que  $f$  est analytique et vérifie  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ .

### Cas 2 : Points quelconques

On peut se ramener au cas précédent en utilisant des automorphismes du disque unité :

$$\phi(z) = \frac{z - z_4}{1 - \bar{z}_4 z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_4}{1 - \bar{w}_4 z}.$$

Alors, il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  si et seulement si il existe une fonction analytique  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , où  $F(z) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$  satisfaisant :

$$F(0) = 0, \quad F(\phi(z_1)) = \psi(w_1), \quad F(\phi(z_2)) = \psi(w_2), \quad F(\phi(z_3)) = \psi(w_3).$$

Ainsi, d'après le cas précédent,  $F$  existe si et seulement si  $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}, i \neq j$

$$\rho(\psi(w_i), \psi(w_j)) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j))$$

et  $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$

$$\rho\left(\frac{\psi(w_i)}{\phi(z_i)}, \frac{\psi(w_j)}{\phi(z_j)}\right) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)),$$

de même que,

$$\rho\left(\frac{\left[\frac{\psi(w_2)}{\phi(z_2)}, \frac{\psi(w_1)}{\phi(z_1)}\right]}{[\phi(z_2), \phi(z_1)]}, \frac{\left[\frac{\psi(w_3)}{\phi(z_3)}, \frac{\psi(w_1)}{\phi(z_1)}\right]}{[\phi(z_3), \phi(z_1)]}\right) \leq \rho(\phi(z_2), \phi(z_3)).$$

Comme les trois dernières conditions sont équivalentes respectivement à (4.2), (4.3) et (4.4), le résultat suit.  $\square$

### 4.3 Un problème de nature géométrique

Dans cette dernière section nous allons montrer comment on peut utiliser la théorie précédente pour résoudre des problèmes de type géométrique. Il s'agit d'une application simple mais efficace qui montre la portée de cette nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick.

Considérons deux carrés  $C_1, C_2$  centrés à l'origine possédant respectivement les sommets  $z_1 = r, z_2 = -ri, z_3 = -r, z_4 = ri$  et  $w_1 = -s, w_2 = -si, w_3 = s, w_4 = si$ , où  $0 < s, r < 1$ . Le problème que nous proposons de résoudre est celui-ci : quelles sont les conditions suffisantes et nécessaires qui assurent l'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$ . L'application dont il est question ferait correspondre les sommets de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r &\mapsto -s \\ -r &\mapsto s \\ ri &\mapsto si \\ -ri &\mapsto -si. \end{aligned}$$

On pourrait croire qu'il suffit que  $s < r$ , mais l'exemple qui suit montre que ce n'est pas suffisant.

**Exemple 4.3.1.** Prenons  $r = 0.54$  et  $s = 0.22$ . Si on vérifie une à une les conditions du problème de Nevanlinna–Pick à quatre points, on voit que la condition (4.4), qui est :

$$\rho \left( \left( \frac{[w_2, w_4]}{[z_2, z_4]}, \frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]} \right), \left( \frac{[w_3, w_4]}{[z_3, z_4]}, \frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]} \right) \right) \leq \rho(z_2, z_3)$$

échoue puisqu'en faisant les calculs, on obtient :

$$\rho(-0.343 - 0.695i, 0.527 - 0.605i) = 3.154 > \rho(z_2, z_3) = 1.871.$$

La solution de ce problème n'est donc pas triviale. La voici sous forme de théorème.

**Théorème 4.3.1.** Soient deux carrés  $C_1$  et  $C_2$  centrés à l'origine ayant respectivement comme sommets  $z_1 = r, z_2 = -ri, z_3 = -r, z_4 = ri$  et  $w_1 = -s, w_2 = -si, w_3 = s, w_4 = si$ , où  $0 < r, s < 1$ . Alors, il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  telle que  $f(z_i) = w_i$  si et seulement si  $r$  et  $s$  vérifient :

$$s \leq r^3. \quad (4.5)$$

*Démonstration.* Pour qu'une fonction  $f$  analytique existe et vérifie les hypothèses du théorème il faut que les points satisfassent les conditions (4.2), (4.3) et (4.4) du théorème 4.2.1. Remarquons qu'on peut utiliser la distance pseudo-hyperbolique pour faire les calculs. En effet, comme  $\tanh \frac{1}{2}\rho(z, w) = p(z, w)$  et que  $f(x) = \tanh(x)$  est une fonction croissante, des inégalités sur  $p(z, w)$  entraînent les mêmes pour  $\rho(z, w)$ .

Tout d'abord, considérons la condition (4.2) et en particulier les points  $z_1, z_3, w_1, w_3$ . Ces derniers doivent satisfaire l'inégalité suivante :

$$p(w_1, w_3) < p(z_1, z_3).$$

En faisant les calculs on obtient :

$$\frac{s}{1+s^2} < \frac{r}{1+r^4}. \quad (4.6)$$

L'inégalité (4.6) sera vérifiée si et seulement si  $s < r$ , puisque la fonction  $f(x) = x/(1+x^2)$  est croissante sur  $(0, 1)$ . On procède de la même façon pour les autres points. Ainsi, il est suffisant et nécessaire que  $s < r$  pour que les points vérifient la condition (4.2).



Pour la condition (4.3) on a :

$$\begin{aligned} p\left(\frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]}, \frac{[w_2, w_4]}{[z_2, z_4]}\right) < p(z_1, z_2) &\Leftrightarrow \frac{s}{\sqrt{r^4 + s^4}} < \frac{1}{\sqrt{1 + r^4}} \\ p\left(\frac{[w_1, w_4]}{[z_1, z_4]}, \frac{[w_3, w_4]}{[z_3, z_4]}\right) < p(z_1, z_3) &\Leftrightarrow \frac{s}{r^2 + s^2} < \frac{1}{1 + r^2} \\ p\left(\frac{[w_2, w_4]}{[z_2, z_4]}, \frac{[w_3, w_4]}{[z_3, z_4]}\right) < p(z_2, z_3) &\Leftrightarrow \frac{s}{\sqrt{r^4 + s^4}} < \frac{1}{\sqrt{1 + r^4}}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit nous allons supposer que  $s < r$  pour le reste de la preuve, d'après la condition (4.2). Posons  $g(s) = s/(r^2 + s^2)$ . Il est facile de vérifier que cette fonction est croissante pour  $0 < s < r$ . Comme  $g(r^2) = 1/(1 + r^2)$ , alors  $s < r^2 \Leftrightarrow s/(r^2 + s^2) < 1/(1 + r^2)$ . En utilisant le même argument, on a aussi que  $s < r^2 \Leftrightarrow s/\sqrt{r^4 + s^4} < 1/\sqrt{1 + r^4}$ .

Pour la condition (4.4), on obtient :

$$\frac{sr}{\sqrt{s^4 + r^8}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + r^4}}.$$

Posons  $h(s) = sr/\sqrt{s^4 + r^8}$ . La fonction  $h(s)$  est croissante pour  $0 < s \leq r^2$ . Comme  $h(r^3) = 1/\sqrt{1 + r^4}$ , il suit que  $s \leq r^3$  si et seulement si  $sr/\sqrt{s^4 + r^8} \leq 1/\sqrt{1 + r^4}$ .

Finalement, on peut conclure que les trois conditions du théorème 4.2.1 sont satisfaites dans cette situation si et seulement si  $s \leq r^3$ .

□

Cette approche utilisant la géométrie hyperbolique a donc l'avantage de résoudre efficacement notre problème impliquant des carrés comparativement à l'ancienne, où le calcul matriciel aurait été nécessaire.

# Chapitre 5

## Un lemme de Schwarz–Pick à points multiples

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une nouvelle solution au problème de Nevanlinna–Pick dans le cas général de  $n$  points. Il s’agit donc de l’apogée de notre travail de même que le fruit de nos recherches. L’idée qui est utilisée dans ce cas est la même que pour les cas  $n = 3$  et  $n = 4$ , c’est-à-dire, l’obtention d’une version à points multiples du lemme de Schwarz–Pick. C’est ce que nous allons expliquer en détail en début de chapitre. Nous terminerons en discutant de résultats qui montrent qu’il est possible de caractériser les solutions dans certains cas particuliers. Ceci vient donc compléter et enrichir les travaux amorcés par Beardon et Minda dans [5] et ce faisant, l’étude même du problème d’interpolation de Nevanlinna–Pick.

### 5.1 Un lemme Schwarz–Pick à $n$ points

Dans cette section, nous commencerons tout d’abord par présenter la généralisation des fonctions  $f^*$  et  $f^{**}$ . Cette fonction est définie récursivement comme suit.

**Définition 5.1.1.** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n’est pas un produit de Blaschke de degré  $< n$  et  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts. Nous définissons  $f^{*n}$  et  $\alpha_n$  pour  $n \geq 0$  de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
f^{*0}(z) &:= f(z) \\
f^{*1}(z, z_1) &:= \frac{[f(z), f(z_1)]}{\alpha_1(z, z_1)} \\
f^{*2}(z, z_1, z_2) &:= \frac{[f^{*1}(z, z_1), f^{*1}(z_2, z_1)]}{\alpha_2(z, z_1, z_2)} \\
f^{*3}(z, z_1, z_2, z_3) &:= \frac{[f^{*2}(z, z_1, z_2), f^{*2}(z_3, z_1, z_2)]}{\alpha_3(z, z_1, z_2, z_3)} \\
&\vdots \\
f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n) &:= \frac{[f^{*(n-1)}(z, z_1, \dots, z_{n-1}), f^{*(n-1)}(z_n, z_1, \dots, z_{n-1})]}{\alpha_n(z, z_1, \dots, z_n)}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_0(z) &= z \\
\alpha_1(z, z_1) &= [z, z_1] \\
\alpha_2(z, z_1, z_2) &= [\alpha_1(z, z_1), \alpha_1(z_2, z_1)] \\
\alpha_3(z, z_1, z_2, z_3) &= [\alpha_2(z, z_1, z_2), \alpha_2(z_3, z_1, z_2)] \\
\alpha_n(z, z_1, \dots, z_n) &= [\alpha_{n-1}(z, z_1, \dots, z_{n-1}), \alpha_{n-1}(z_n, z_1, \dots, z_{n-1})]
\end{aligned}$$

**Remarque 5.1.1.** Dans ce qui va suivre, nous considérerons  $f^{*n} : z \mapsto f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n)$  comme une fonction de  $z$  ayant  $z_1, z_2, \dots, z_n$  comme paramètres. Nous allons montrer plus loin que la fonction  $f^{*n}$  est bien définie dans  $\mathbb{D}$ .

**Remarque 5.1.2.** Par le lemme 3.2.2 on voit que les fonctions  $\alpha_n$  sont des produits de Blaschke de degré 1.

À première vue, il n'est pas clair que la fonction  $f^{*n}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ , mais nous allons démontrer que c'est bien le cas.

**Proposition 5.1.1.** Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un produit de Blaschke de degré  $< n$  et  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts. Alors, la fonction  $f^{*n}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ .

*Démonstration.* Nous allons utiliser l'induction sur  $n$  pour montrer ce résultat.

Pour  $n = 1$ , le résultat a été démontré au chapitre 3. Supposons maintenant que  $f^{*n}$  est analytique pour tout  $n \leq N$ . Nous allons montrer que cela implique nécessairement que  $f^{*(N+1)}$  est aussi analytique. Montrons que  $f^{*(N+1)}$  possède une singularité enlevable en  $z = z_{N+1}$ . Il est clair que  $f^{*(N+1)}$  est analytique pour tous les autres points de  $\mathbb{D}$ .

$$f^{*(N+1)}(z, z_1, \dots, z_{N+1}) = \frac{[f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N), f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)]}{\alpha_{N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1})},$$

où  $\alpha_{N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1}) = [\alpha_N(z, z_1, \dots, z_N), \alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)]$ .

$$f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1}) = \frac{(f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N) - f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N))}{\alpha_N(z, z_1, \dots, z_N) - \alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)} \times \frac{1 - \overline{\alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)} \alpha_N(z, z_1, \dots, z_N)}{1 - \overline{f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)} f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N)}.$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse d'induction, c'est-à-dire, que  $f^{*N}$  est analytique, de même que  $\alpha_N$ , on obtient à l'aide de la règle de L'Hôpital :

$$\lim_{z \rightarrow z_{N+1}} f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1}) = \frac{f'^{*N}(z, z_1, \dots, z_N)|_{z=z_{N+1}} (1 - |\alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)|^2)}{\alpha'_N(z, z_1, \dots, z_N)|_{z=z_{N+1}} (1 - |f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)|^2)}.$$

Ainsi,  $f^{*N+1}$  est bornée dans un voisinage de  $z = z_{N+1}$ . Ceci implique, d'après le théorème des singularités enlevables de Riemann, que  $z = z_{N+1}$  est une singularité enlevable de la fonction et que  $f^{*N+1}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ .  $\square$

**Remarque 5.1.3.** Sous les hypothèses de la proposition 5.1.1 la fonction  $f^{*n} : z \mapsto f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n)$  est bien définie dans  $\mathbb{D}$ . En effet, pour  $z = z_n$  on a :

$$f^{*n}(z_n, z_1, \dots, z_n) := \frac{f'^{*n-1}(z, z_1, \dots, z_{n-1})|_{z=z_n} (1 - |\alpha_{n-1}(z_n, z_1, \dots, z_{n-1})|^2)}{\alpha'_{n-1}(z, z_1, \dots, z_{n-1})|_{z=z_n} (1 - |f^{*n-1}(z_n, \dots, z_{n-1})|^2)}.$$

Voici l'équivalent de la proposition 4.1.2 du cas  $n = 4$  pour le cas général.

**Proposition 5.1.2.** Soient  $f$  une fonction analytique,  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $k \geq 0$ . Considérons  $f^{*n} : z \mapsto f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n)$  définie de la manière précédente. Alors,  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + n$  si et seulement si  $f^{*n}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ .

*Démonstration.* Définissons  $T_v(z) = (z - v)/(1 - \bar{v}z)$ . Nous allons montrer le résultat par induction.

Pour  $n = 1$ , le résultat découle du théorème 3.2.1. Supposons que  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + n$  si et seulement si  $f^{*n}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$  pour tout  $n \leq N$ . Montrons que cela implique que c'est aussi vrai pour  $f^{*N+1}$ . Par la définition de  $f^{*N+1}$ , on a :

$$f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1})[\alpha_N(z, z_1, \dots, z_N), \alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)] = [f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N), f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)].$$

En utilisant la notation précédente :

$$f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1})T_{\alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)}(\alpha_N(z, z_1, \dots, z_N)) = \\ T_{f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)}(f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N)).$$

Par l'hypothèse d'induction, on sait que  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + N$  si et seulement si  $f^{*N}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ . D'après la dernière égalité, il est clair que  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k + N + 1$  si et seulement si  $f^{*N+1}$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ .  $\square$

Le théorème qui suit permet de caractériser complètement la fonction  $f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n)$ , qui est une fonction de  $z$  ayant  $z_1, z_2, \dots, z_n$  comme paramètres, en vertu de la fonction  $f$ .

**Théorème 5.1.1.** *Soient  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts. Alors, on a les situations suivantes :*

1. Si  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_i$ , alors  $f^{*n} \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cup \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
2. Si  $f \in B_n$ , alors  $f^{*n} \in \mathcal{B}_0(\mathbb{D})$  ;
3.  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus \cup_{i=1}^n B_i$  si et seulement si  $f^{*n} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ .

*Démonstration.* Nous allons montrer le théorème par induction sur  $n$ .

Pour  $n = 1$ , le résultat est vrai d'après le théorème 3.2.1. Supposons que (1), (2), (3) sont vraies pour tout  $n \leq N$ . Montrons que cela implique que c'est aussi vrai pour  $N + 1$ . Supposons que  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \setminus \cup_{i=1}^N B_i$ , alors  $f^{*N+1}$  est analytique dans  $\mathbb{D}$ , d'après la proposition 5.1.1. Aussi, selon notre hypothèse d'induction,  $f^{*N} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . Considérons les identités suivantes :

$$\left| \frac{f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N) - f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)}{1 - \overline{f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)} f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N)} \right| = \\ \tanh \frac{1}{2}(\rho(f^{*N}(z, z_1, \dots, z_N), f^{*N}(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)));$$

$$|[\alpha_N(z, z_1, \dots, z_N), \alpha_N(z_{N+1}, z_1, \dots, z_N)]| = \tanh \frac{1}{2}\rho(z, z_{N+1}).$$

Par le lemme de Schwarz-Pick,  $|f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1})| \leq 1$  avec égalité si et seulement si  $f^{*N}$  est un automorphisme. Ce sera le cas si et seulement si  $f(z)$  est un produit de Blaschke de degré  $N + 1$ , d'après la proposition 5.1.2. Si on a égalité, par le principe du maximum,  $f^{*N+1}(z, z_1, \dots, z_{N+1}) \equiv \lambda$ , où  $|\lambda| = 1$ . Ceci montre (1), (2) et (3).  $\square$

L’analyticité de la fonction  $f^{*n}$ , qui dépend de certaines conditions sur  $f$ , permet l’obtention du lemme de Schwarz–Pick à  $n$  points qui est le pilier essentiel de la base du présent travail.

**Théorème 5.1.2 (Lemme de Schwarz–Pick à points multiples).** *Soient  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n’est pas un produit de Blaschke de degré  $\leq n$  et  $w_1, w_2, z_1, \dots, z_{n-2} \in \mathbb{D}$ , où les  $z_i$  sont distincts. Alors on a :*

$$\rho(f^{*n-2}(w_1, z_1, \dots, z_{n-2}), f^{*n-2}(w_2, z_1, \dots, z_{n-2})) \leq \rho(w_1, w_2) \quad (5.1)$$

L’égalité a lieu dans (5.1) si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n - 1$ .

*Démonstration.* D’après le théorème 5.1.1,  $f^{*n} : z \mapsto f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ . En utilisant le lemme de Schwarz–Pick avec  $w_1, w_2$ , le résultat suit. En ce qui concerne l’égalité, il suffit d’utiliser la proposition 5.1.2. En effet, il y a égalité dans (5.1) si et seulement si  $f^{*n-2}$  est un automorphisme, c’est-à-dire, un produit de Blaschke de degré 1. Ce sera le cas si et seulement si  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n - 1$ .  $\square$

## 5.2 Une nouvelle solution au problème classique de Nevanlinna–Pick

Nous allons à présent utiliser la théorie développée auparavant afin de donner une nouvelle solution au problème classique de Nevanlinna–Pick faisant intervenir  $n$  points. Il s’agit d’une solution tout-à-fait remarquable dans le sens où l’existence d’une fonction analytique interpolant des points du disque unité dans lui-même dépend de la structure géométrique de ces mêmes points. Cette solution vient donc apporter un éclairage nouveau au problème classique de Nevanlinna–Pick. En adoptant ce point de vue, on voit bien que le problème d’interpolation est sensible au choix des points : ils doivent absolument se conformer à une organisation spécifique et le non respect de cette architecture entraîne conséquemment l’inexistence de la fonction. D’autre part, la solution plus connue, où l’on doit vérifier si la matrice est semi-définie positive, ne montre en rien cet aspect, ce que la nouvelle solution a l’avantage de faire.

**Remarque 5.2.1.** Comme le problème de Nevanlinna–Pick est de trouver des conditions suffisantes et nécessaires pour l’existence d’une fonction vérifiant certaines hypothèses, nous allons faire un abus de notation afin d’utiliser celle définie précédemment. En effet, pour chacune des fonctions  $f^{*n}$  nous remplacerons, lorsqu’il y a lieu,  $f(z_i)$  par  $w_i$ . Ainsi, même si la fonction  $f$  n’est pas déterminée,  $f^{*n}(z, z_1, \dots, z_n)$  est bien définie.

**Théorème 5.2.1 (Le problème de Nevanlinna–Pick à  $n$  points).** Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ . L'existence d'une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$  dépend de l'un des trois cas suivants :

1. Pour  $n = 2$ ,  $f(z)$  existe si et seulement si

$$(\Gamma_2) \left\{ \rho(w_1, w_2) \leq \rho(z_1, z_2) \right\}.$$

2. Pour  $n = 3$ ,  $f(z)$  existe et n'est pas un automorphisme si et seulement si

$$(\Gamma_3) \left\{ \begin{array}{l} \rho(w_i, w_j) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \\ \rho(f^*(z_2, z_1), f^*(z_3, z_1)) \leq \rho(z_2, z_3). \end{array} \right.$$

3. Pour  $n \geq 4$   $f(z)$  existe et n'est pas un produit de Blaschke de degré  $\leq n - 2$  si et seulement si

$$(\Gamma_n) \left\{ \begin{array}{l} \rho(w_i, w_j) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \\ \rho(f^*(z_i, z_n), f^*(z_j, z_n)) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i \neq j \\ \rho(f^{**}(z_i, z_n, z_{n-1}), f^{**}(z_j, z_n, z_{n-1})) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-2\}, i \neq j \\ \vdots \\ \rho(f^{*n-3}(z_i, z_n, z_{n-1}, \dots, z_4), f^{*n-3}(z_j, z_n, z_{n-1}, \dots, z_4)) < \rho(z_i, z_j) \\ \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \\ \rho(f^{*n-2}(z_2, z_n, z_{n-1}, \dots, z_4, z_1), f^{*n-2}(z_3, z_n, z_{n-1}, \dots, z_4, z_1)) \leq \rho(z_2, z_3) \end{array} \right.$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer le cas (3), puisque les autres cas ont été démontrés au chapitre 3. Supposons que  $n \geq 4$  et que  $f$  existe et satisfait les hypothèses du problème. Alors, en appliquant le lemme de Schwarz–Pick à  $k$  points pour chaque fonction  $f^{*k-2}$ , où  $k = 2, \dots, n-2$ , on vérifie facilement que les  $n-1$  conditions de  $(\Gamma_n)$  sont toutes vérifiées. Réciproquement, supposons maintenant que les points satisfont les conditions de  $(\Gamma_n)$ . Nous démontrerons le résultat dans un cas particulier d'abord, puis dans le cas général ensuite.

### Cas 1 : $z_n = w_n = 0$

Remarquons que dans ce cas particulier,  $|w_i| < |z_i|$  pour tout  $i < n$ , d'après la première condition. Nous allons montrer le résultat par induction sur  $n$ . Pour  $n = 4$ , le cas a été démontré. Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout  $n \leq N$ . Montrons que cela est vrai aussi pour  $N + 1$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.2.1.** Soit  $n \geq 2$ . Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts,  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction analytique qui n'est pas un produit de Blaschke de degré  $< n - 2$  et telle que  $z_1 = f(z_1) = 0$ . Posons  $g(z) = f(z)/z$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha_n(z, 0, z_2, \dots, z_n) &= \alpha_{n-1}(z, z_2, \dots, z_n); \\ f^{*n}(z, 0, z_2, \dots, z_n) &= g^{*n-1}(z, z_2, \dots, z_n).\end{aligned}$$

*Démonstration.* Clairement,  $g$  est une fonction analytique dans  $\mathbb{D}$ . En effet, elle est dérivable partout et même en  $z = 0$ , car il s'agit d'une singularité enlevable de la fonction  $g$ . Aussi,  $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$  d'après le lemme de Schwarz. Démontrons le premier résultat par induction.

Pour  $n = 2$ , on a :

$$\alpha_2(z, 0, z_2) = [\alpha_1(z, 0), \alpha_1(z_2, 0)] = \alpha_1(z, z_2).$$

Supposons que  $\alpha_n(z, 0, \dots, z_n) = \alpha_{n-1}(z, z_2, \dots, z_n)$  pour tout  $n \leq N$ . Montrons que cela implique que le résultat est aussi vrai pour  $N + 1$ .

$$\begin{aligned}\alpha_{N+1}(z, 0, \dots, z_{N+1}) &= [\alpha_N(z, 0, z_2, \dots, z_N), \alpha_N(z_{N+1}, 0, \dots, z_N)] \\ &= [\alpha_{N-1}(z, z_2, \dots, z_N), \alpha_{N-1}(z_{N+1}, z_2, \dots, z_N)] \\ &= \alpha_N(z, z_2, \dots, z_{N+1}).\end{aligned}$$

Démontrons maintenant le deuxième résultat. Nous utiliserons l'induction encore une fois. Pour  $n = 2$ , on a :

$$\begin{aligned}f^{*2}(z, 0, z_2) &= \frac{[f^*(z, 0), f^*(z_2, 0)]}{[\alpha_2(z, 0, z_2)]} \\ &= \frac{\left[ \frac{f(z)}{z}, \frac{f(z_2)}{z_2} \right]}{\alpha_1(z, z_2)} \\ &= g^*(z, z_2).\end{aligned}$$

Supposons que  $f^{*n}(z, 0, z_2, \dots, z_n) = g^{*n-1}(z, z_2, \dots, z_n)$  pour tout  $n \leq N$ . Montrons que le résultat est vrai pour  $N + 1$ .

$$\begin{aligned}f^{*N+1}(z, 0, \dots, z_{N+1}) &= \frac{[f^{*N}(z, 0, \dots, z_N), f^{*N}(z_{N+1}, 0, \dots, z_N)]}{\alpha_{N+1}(z, 0, \dots, z_{N+1})} \\ &= \frac{[g^{*N-1}(z, z_2, \dots, z_N), g^{*N-1}(z_{N+1}, z_2, \dots, z_N)]}{\alpha_{N+1}(z, 0, \dots, z_{N+1})} \\ &= \frac{[g^{*N-1}(z, z_2, \dots, z_N), g^{*N-1}(z_{N+1}, z_2, \dots, z_N)]}{\alpha_N(z, z_2, \dots, z_{N+1})} \\ &= g^{*N}(z, z_2, \dots, z_{N+1}).\end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme. □



Retournons maintenant à la démonstration du cas 1. Puisque  $z_{N+1} = w_{N+1} = 0$ , on a que  $|w_i| < |z_i| \forall i < N + 1$  et dans ce cas particulier,  $(\Gamma_n)$  devient  $(\tilde{\Gamma})$  pour tout  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $i \neq j$ , où  $(\tilde{\Gamma})$  est :

$$(\tilde{\Gamma}) \left\{ \begin{array}{l} \rho(f^*(z_i, 0), f^*(z_j, 0)) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}, i \neq j \\ \rho(f^{**}(z_i, 0, z_N), f^{**}(z_j, 0, z_N)) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N-1\}, i \neq j \\ \vdots \\ \rho(f^{*N-2}(z_i, 0, z_N, \dots, z_4), f^{*N-1}(z_j, 0, z_N, \dots, z_4)) < \rho(z_i, z_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \\ \rho(f^{*N-1}(z_2, 0, z_N, \dots, z_4, z_1), f^{*N-1}(z_3, 0, z_N, \dots, z_4, z_1)) \leq \rho(z_2, z_3) \end{array} \right.$$

On peut se servir ici du lemme 5.2.1 en notant qu'il suffit de remplacer  $f(z_i)$  par  $w_i$  et  $g(z_i)$  par  $w_i/z_i$ . La validité du lemme n'est en rien changée, même si la fonction  $f(z)$  n'existe pas. Ainsi,  $(\tilde{\Gamma})$  devient :

$$(\tilde{\Gamma}) \left\{ \begin{array}{l} \rho\left(\frac{w_i}{z_i}, \frac{w_j}{z_j}\right) < \rho(z_i, z_j) \\ \rho(g^*(z_i, z_N), g^*(z_j, z_N)) < \rho(z_i, z_j) \\ \vdots \\ \rho(g^{*N-3}(z_i, z_N, \dots, z_4), g^{*N-3}(z_j, z_N, \dots, z_4)) < \rho(z_i, z_j) \\ \rho(g^{*N-2}(z_2, z_N, \dots, z_4, z_1), g^{*N-2}(z_3, z_N, \dots, z_4, z_1)) \leq \rho(z_2, z_3) \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse d'induction, il existe une fonction analytique  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  telle que  $g(z_i) = w_i/z_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ . Il suffit donc de prendre  $f(z) = zg(z)$  qui satisfait  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, N + 1$ . Ceci termine l'induction et montre le cas particulier où  $z_n = w_n = 0$ .

### Cas 2 : Points quelconques

On peut se ramener facilement au cas 1 en utilisant des automorphismes du disque unité :

$$\phi(z) = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad \psi(z) = \frac{z - w_n}{1 - \bar{w}_n z}.$$

Il existe une fonction analytique  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  satisfaisant  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  si et seulement s'il existe une fonction analytique  $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , où  $F(z) = \psi \circ f \circ \phi^{-1}(z)$  satisfaisant :

$$F(0) = 0, \quad F(\phi(z_i)) = \psi(w_i) \text{ pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Ainsi, d'après le cas précédent,  $F$  existe si et seulement si les points vérifient l'ensemble des conditions de  $(\tilde{\Gamma})$ . On notera dans ce cas particulier celles-ci par  $(\tilde{\Gamma})$ .

$$(\tilde{\Gamma}) \left\{ \begin{array}{l}
 \rho(\psi(w_i), \psi(w_j)) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \\
 \rho\left(\frac{\psi(w_i)}{\phi(z_i)}, \frac{\psi(w_j)}{\phi(z_j)}\right) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)) \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}, i \neq j \\
 \rho(G^*(\phi(z_i), \phi(z_{n-1})), G^*(\phi(z_j), \phi(z_{n-1}))) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)) \\
 \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-2\}, i \neq j \\
 \rho(G^{**}(\phi(z_i), \phi(z_{n-1}), \phi(z_{n-2})), G^{**}(\phi(z_j), \phi(z_{n-1}), \phi(z_{n-2}))) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)) \\
 \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n-3\}, i \neq j \\
 \vdots \\
 \rho(G^{*n-4}(\phi(z_i), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_4)), G^{*n-4}(\phi(z_j), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_4))) < \rho(\phi(z_i), \phi(z_j)) \\
 \forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j \\
 \rho(G^{*n-3}(\phi(z_2), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_1)), G^{*n-3}(\phi(z_3), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_1))) < \rho(\phi(z_2), \phi(z_3))
 \end{array} \right.$$

où  $G(z) = F(z)/z$  et l'on écrit  $\psi(w_i)/\phi(z_i)$  au lieu de  $G(\phi(z_i))$ .

Nous allons maintenant montrer que  $(\tilde{\Gamma})$  est équivalent à l'ensemble des conditions  $(\Gamma_n)$  du problème de Nevanlinna-Pick. Mais avant, nous aurons besoin du lemme qui suit.

**Lemme 5.2.2.** *En considérant ce qui précède, on a :*

$$\begin{aligned}
 \alpha_{n-4}(\phi(z_i), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_4)) &= \alpha_{n-3}(z_i, z_n, \dots, z_4); \\
 G^{*n-4}(\phi(z_i), \phi(z_{n-1}), \dots, \phi(z_4)) &= f^{*n-3}(z_i, z_n, \dots, z_4).
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour le premier énoncé, nous allons utiliser l'induction.

Pour  $n = 4$ , on retrouve :

$$\alpha_0(\phi(z_i)) = \phi(z_i) = \frac{z_i - z_4}{1 - \bar{z}_4 z_i} = \alpha_1(z_i, z_4).$$

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour tout  $n \leq N$ . Montrons que cela implique que c'est aussi vrai pour  $N + 1$ .

$$\begin{aligned}
 \alpha_{N-3}(\phi(z_i), \phi(z_N), \dots, \phi(z_4)) &= [\alpha_{N-4}(\phi(z_i), \dots, \phi(z_3)), \alpha_{N-4}(\phi(z_4), \dots, \phi(z_3))] \\
 &= [\alpha_{N-3}(z_i, z_{N+1}, \dots, z_3), \alpha_{N-3}(z_4, z_{N+1}, \dots, z_3)] \\
 &= \alpha_{N-2}(z_i, z_{N+1}, \dots, z_4).
 \end{aligned}$$

Ceci termine l'induction et montre le résultat. Pour le deuxième énoncé utilisons également l'induction.

Pour  $n = 4$ , on a :

$$G^{*0}(\phi(z_i)) = \frac{\psi(w_i)}{\phi(z_i)} = f^*(z_i, z_4).$$

Supposons le résultat vrai pour tout  $n \leq N$ . Montrons que c'est vrai aussi pour  $N + 1$ .

$$\begin{aligned} G^{*N-3}(\phi(z_i), \phi(z_N), \dots, \phi(z_4)) &= \frac{[G^{*N-4}(\phi(z_i), \phi(z_N), \dots, \phi(z_3)), G^{*N-4}(\phi(z_4), \phi(z_N), \dots, \phi(z_3))]}{\alpha_{N-3}(\phi(z_i), \phi(z_N), \dots, \phi(z_4))} \\ &= \frac{[f^{*N-3}(z_i, z_{N+1}, \dots, z_3), f^{*N-3}(z_4, z_{N+1}, \dots, z_3)]}{\alpha_{N-2}(z_i, z_{N+1}, \dots, z_3)} \\ &= f^{*N-2}(z_i, z_{N+1}, \dots, z_4). \end{aligned}$$

Ceci montre le lemme. □

Retournons à la démonstration du cas 2. En utilisant le lemme 5.2.2, nous pouvons conclure que  $(\tilde{\Gamma})$  est équivalent aux conditions  $(\Gamma_n)$  du problème de Nevanlinna–Pick, d'où le résultat. □

Le premier corollaire qui suit montre qu'il existe, sous certaines conditions, une fonction appartenant à une classe particulière qui est une solution au problème de Nevanlinna–Pick.

**Corollaire 5.2.1.** *Soient  $n \geq 2$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ . Supposons que les points  $z_i$  et  $w_i$  satisfont, pour  $i = 1, \dots, n$ , les conditions de  $(\Gamma_n)$ . Alors, il existe un produit de Blaschke  $B$  de degré au plus  $n$  qui satisfait  $B(z_i) = w_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'induction, la preuve du théorème 5.2.1 et le lemme 3.2.2, le résultat suit. □

Le prochain corollaire permet d'identifier les conditions sous lesquelles il y a unicité de la solution.

**Corollaire 5.2.2.** *Soient  $n \geq 2$ ,  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{D}$  des points distincts et  $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{D}$ . Supposons que les points  $z_i$  et  $w_i$  satisfont, pour  $i = 1, \dots, n$ , aux conditions de  $(\Gamma_n)$ . Alors, il existe une unique fonction  $f$  satisfaisant aux hypothèses du problème de Nevanlinna–Pick si et seulement s'il y a égalité dans la dernière condition de  $(\Gamma_n)$ . Dans ce cas, l'unique solution  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $n - 1$ .*

*Démonstration.* Vu que les points satisfont aux conditions de  $(\Gamma_n)$ , alors il existe une fonction  $f$  qui réalise l'interpolation du problème de Nevanlinna–Pick. De plus, comme il y a égalité dans la dernière condition  $(\Gamma_n)$ , alors  $f$  est nécessairement un produit de Blaschke de degré  $n - 1$ . Nous allons maintenant montrer l'unicité de la solution. Supposons qu'il existe deux solutions  $P_1, P_2$  qui sont des produits de Blaschke de degré  $n - 1$  tels que  $P_1(z_i) = P_2(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous allons montrer par induction sur  $n$  que  $P_1 \equiv P_2$ . Pour le cas  $n = 2$ , considérons  $P_1, P_2$  deux solutions au problème qui sont des produits de Blaschke de degré 1. Soient  $\varphi(z) = (z + z_2)/(1 + \bar{z}_2 z)$  et  $\psi(z) = (z - w_2)/(1 - \bar{w}_2 z)$ . Ainsi, on obtient pour  $i = 1, 2$  :

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(0) = 0; \quad (5.2)$$

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(\varphi^{-1}(z_1)) = \psi(w_1). \quad (5.3)$$

D'après la proposition 2.3.1, on a pour  $i = 1, 2$  :

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(z) = z\tilde{P}_i,$$

où  $\tilde{P}_i$  est un produit de Blaschke de degré 0. Par (5.3), il suit que  $\tilde{P}_1 \equiv \tilde{P}_2$ . Finalement, on a bien que  $P_1 \equiv P_2$ .

Supposons le résultat vrai pour  $n \leq N$  et montrons que c'est aussi le cas pour  $N + 1$ . Soient  $P_1, P_2$  deux solutions qui sont des produits de Blaschke de degré  $N$  vérifiant  $P_1(z_i) = P_2(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, \dots, N + 1$ . En utilisant les automorphismes  $\varphi(z) = (z + z_{N+1})/(1 + \bar{z}_{N+1} z)$  et  $\psi(z) = (z - w_{N+1})/(1 - \bar{w}_{N+1} z)$ , on a :

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(0) = 0; \quad (5.4)$$

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(\varphi^{-1}(z_j)) = \psi(w_j) \text{ pour } j = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

On obtient comme précédemment que

$$\psi \circ P_i \circ \varphi(z) = z\tilde{P}_i \text{ où } i = 1, 2.$$

En utilisant l'hypothèse d'induction et (5.5), il suit que  $\tilde{P}_1 \equiv \tilde{P}_2$ . Finalement, on a que  $P_1 \equiv P_2$ .

Ceci montre donc l'unicité de la solution dans le cas de l'égalité.

Réciproquement, supposons qu'il existe une unique fonction  $f$  réalisant l'interpolation du problème de Nevanlinna–Pick. Montrons qu'il y aura nécessairement égalité dans la dernière condition de  $(\Gamma_n)$ . Nous allons encore une fois utiliser l'induction.

Pour  $n = 2$ , supposons qu'il existe une unique solution  $f$  telle que  $f(z_i) = w_i$  pour  $i = 1, 2$ . Soient  $\varphi(z) = (z + z_2)/(1 + \bar{z}_2 z)$  et  $\psi(z) = (z - w_2)/(1 - \bar{w}_2 z)$ . Définissons  $F(z) = \psi \circ f \circ \varphi(z)$ , alors on a :

$$F(0) = 0; \quad (5.6)$$

$$F(\varphi^{-1}(z_1)) = \psi(w_1). \quad (5.7)$$

Puisqu'il existe une unique fonction  $f$ , alors il existe également une unique fonction  $F$ . Cette dernière est donc une rotation de la forme  $F(z) = e^{i\theta}z$ , où  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ainsi, il est clair que  $f$  est un automorphisme et que  $\rho(w_1, w_2) = \rho(z_1, z_2)$ .

Supposons le résultat vrai pour  $3 \leq n \leq N$  et montrons que cela est vrai aussi pour  $N + 1$ . Soit  $f$  l'unique fonction satisfaisant les hypothèses du problème, de même que les  $N$  conditions de  $(\Gamma_{N+1})$ . Soient  $\varphi(z) = (z + z_{N+1})/(1 + \overline{z_{N+1}}z)$  et  $\psi(z) = (z - w_{N+1})/(1 - \overline{w_{N+1}}z)$ . Définissons  $F(z) = \psi \circ f \circ \varphi(z)$ . On a :

$$F(0) = 0; \quad (5.8)$$

$$F(\varphi^{-1}(z_i)) = \psi(w_i) \text{ pour } i = 1, \dots, N. \quad (5.9)$$

Clairement,  $F(z) = zg(z)$ , où  $g$  est une fonction analytique dans  $\mathbb{D}$ . Comme  $f$  est unique, alors  $F$  est l'unique fonction satisfaisant (5.9). En utilisant l'hypothèse d'induction,  $F$  est un produit de Blaschke de degré  $N$ . Finalement,  $f$  est aussi un produit de Blaschke de degré  $N$ . Ceci montre donc qu'on a bien égalité dans la dernière condition de  $(\Gamma_{N+1})$ . Pour conclure, on a bien unicité de la solution si et seulement s'il y a égalité dans la dernière condition de  $(\Gamma_n)$ .  $\square$

Le résultat qui suit montre qu'il est possible d'obtenir une solution au problème, même dans le cas où seulement une partie des conditions du théorème 5.2.1 sont satisfaites.

**Corollaire 5.2.3.** *Soit  $n \geq 2$ . S'il y a inégalité stricte dans les  $k - 1$  premières conditions de  $(\Gamma_n)$  et égalité dans la  $k^{\text{ième}}$ , pour les points  $z_i, w_i$ , où  $i = 1, \dots, n$ , alors il existe une unique fonction analytique  $f$  qui satisfait les hypothèses du théorème 5.2.1. De plus,  $f$  est un produit de Blaschke de degré  $k$ .*

*Démonstration.* La preuve suit directement du lemme de Schwarz–Pick à points multiples et du corollaire 5.2.2.  $\square$

# Conclusion

Le principal objectif de cet ouvrage était de montrer comment il est possible d'utiliser la géométrie hyperbolique, de même que la théorie des fonctions d'une variable complexe, afin d'apporter une nouvelle approche à un problème fort connu d'interpolation : le problème classique de Nevanlinna–Pick. Pour atteindre cet objectif il fallait d'abord définir et caractériser complètement une fonction particulière que nous avons notée  $f^*(z, z_1, \dots, z_n)$ , où les  $z_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont des paramètres appartenant au disque unité. Par la suite, grâce à l'analyticité de cette dernière fonction, il devenait possible d'obtenir une version du lemme de Schwarz–Pick à points multiples. Ce résultat général est la pierre angulaire permettant de considérer d'une manière différente le problème de Nevanlinna–Pick et d'y apporter par le fait même une toute nouvelle solution. Les points  $z_i$  et  $w_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , doivent ainsi satisfaire des conditions géométriques afin d'assurer l'existence d'une fonction holomorphe satisfaisant les hypothèses du problème. Cette approche amène un éclairage nouveau au problème en permettant, entre autres, une interprétation plus géométrique de l'interpolation et montre bien l'importance que les points respectent une certaine structure organisationnelle. En effet, si certains points ne vérifient pas une organisation précise, alors ceci entraîne nécessairement la non existence de la fonction interpolante. Ainsi, le fait de poser un regard plus géométrique sur un problème a l'avantage de favoriser une meilleure compréhension de l'essence même de celui-ci.

# Bibliographie

- [1] Ahlfors, L.V., *Conformal Invariants*, McGraw-Hill, New York, (1973).
- [2] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, (troisième édition), McGraw-Hill, New York, (1979).
- [3] Beardon, A.F., *On the Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1983).
- [4] Beardon, A.F., *The Schwarz–Pick lemma for derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3255–3256.
- [5] Beardon, A.F. et Minda, D., *A multi-point Schwarz–Pick lemma*, J. Anal. Math., **92** (2004), 81–104.
- [6] Carathéodory, C., *Theory of Functions of a Complex Variable*, vol. II, Chelsea, New York, (1960).
- [7] Duren, P.L., *Univalent Functions*, Springer-Verlag, Berlin, (1980).
- [8] Gamelin, T. W., *Complex Analysis*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (2001).
- [9] Garnett, J. B., *Bounded Analytic Functions*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, (1981).
- [10] Nevanlinna, R., *Über beschränkte Funktionen, die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen*, Ann. Acad. Sci. Fenn., **13** (1919), no.1, 1–72.
- [11] Pick, G., *Über die Beschränkungen analytische Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden*, Math. Ann., **77** (1916), 7–23.
- [12] Rogosinski, W., *Zum Schwarzschen Lemma*, Jahresber, Deutsch, Math.-Verein., (1934).