



# Étude des nanobâres dans les pinces optiques

Thèse

Paul Brûlé Bareil

**Doctorat en Physique**  
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Paul Brûlé Bareil, 2016

# **Étude des nanobâres dans les pinces optiques**

**Thèse**

**Paul Brûlé Bareil**

Sous la direction de:

Yunlong Sheng

# Résumé

On expose ici le travail fait dans le cadre d'une étude portant sur l'utilisation des pinces optiques pour la capture de nanobarres anisotropes et isotropes. La capture de nanobarres anisotropes et non linéaire a été faite et divers problèmes concernant leur application en imagerie haute résolution ont été mis en évidence. Nous avons donc fait une étude approfondie de l'interaction du champ électromagnétique avec des nanobarres anisotropes. Nous avons utilisé la méthode de la matrice de transfert pour analyser les paramètres de capture optique de nanobarres. Nous avons aussi étudié diverses méthodes de simulation du faisceau incident et défini des critères d'applications de ces derniers en fonction de l'ouverture numérique à utiliser. Nous avons aussi pu mettre sur pied une nouvelle méthode permettant d'évaluer précisément la qualité des pinces optiques à des ouvertures numériques très grandes et pu donner des limites d'application et des exemples d'application spécifiques.

Afin de faire ressortir l'aspect physique des captures optiques, nous avons calculé la distribution du champ électromagnétique sur la surface des objets capturés. Ceci nous a ensuite permis de calculer le stress, les forces et les torques en utilisant le tenseur de stress de Maxwell. Différentes nanobarres isotropes ou anisotropes possédant des longueurs et des rayons différents, ont été modélisés. Des faisceaux laser possédant des ouvertures numériques ( $NA$ ) différentes, un inclinaison différente et différentes positions dans l'espace ont été étudiés. Il a été ainsi possible de démontrer comment une capture optique de nanobarres était affectée en translation, en rotation, en vibration de toutes directions et comment il était possible de l'améliorer. De la même façon, les particules anisotropes ont été étudiées et des propriétés spéciales, presque impossibles à déterminer expérimentalement, ont pu être démontrées telles que l'existence d'une force de torsion à l'intérieur des nanobarres ou la possibilité d'une capture non alignée avec le faisceau.

Les résultats de calculs ont aussi été comparés qualitativement avec un logiciel commercial utilisant la méthode FDTD, avec le résultat de calcul par tracé de rayon sur des objets microscopiques et par la comparaison avec les observations expérimentales lorsque c'était possible. Finalement, les expériences réalisées sur une pince optique ont démontré qu'il est possible de capturer des nanobarres avec une  $NA = 1.25$  et une longueur d'onde de  $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$ . Des voies d'amélioration de l'expérience ont été exposées.

# Abstract

In this thesis we present a study on the use of optical tweezers to capture anisotropic or isotropic nanorods. For this purpose, we used the T-Matrix method for analyzing the parameters of optical tweezing of nanorods. We also studied various methods of simulation of the incident beam and defined criteria on their use based on the numerical aperture to use. We were also able to develop a new method to accurately assess the quality of optical tweezers with numerical apertures greater than 1.20 and have given the limits of applications and examples of application specific to high numerical apertures.

To highlight the physical aspect of optical tweezers, we calculated the distribution of the electromagnetic field. The stress, forces and torques were then evaluated using the Maxwell stress tensor of isotropic or anisotropic nanorods. Nanorods were modelled having different lengths, different radii and the incident beam was calculated having different  $NA$ , different inclinations and different positions in space. Thus, it was possible to demonstrate how an optical capture of nanorods was affected in translation, rotation, vibration from all directions and how it was possible to improve the optical trap. Similarly, anisotropic particles have been studied and special properties, almost impossible to determine experimentally, could be demonstrated. For example, the existence of a twisting force within nanorods or the possibility of capture at an angle with respect to the optical axis.

Calculation results were also compared qualitatively with commercial software using the FDTD method. Finally, experiments on optical tweezers have shown that it is possible to capture nanorods with  $NA = 1.25$  and a wavelength of  $\lambda = 1064 \mu\text{m}$ . Ways of improving the experimental setup are discussed at the end.

# Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Liste des symboles	x
Remerciements	xiii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Capture de nanobarres</b>	<b>4</b>
<b>3 Les pinces optiques</b>	<b>11</b>
3.1 La base . . . . .	11
3.2 Géométrie du problème . . . . .	12
3.2.1 Méthodes de calcul . . . . .	14
<b>4 Matrice de transfert</b>	<b>16</b>
4.1 Calcul de la matrice de transfert . . . . .	16
4.1.1 Équation d'onde . . . . .	16
4.1.2 Vecteurs de base . . . . .	17
4.1.3 Vector Spherical Wave Function (VSWF) . . . . .	18
4.1.4 VSWF dans un milieu anisotrope . . . . .	20
Expansion de VSWF dans un milieu anisotrope . . . . .	21
4.1.5 La matrice de transfert . . . . .	22
4.1.6 Méthode par "point matching" . . . . .	23
Conditions aux frontières normales . . . . .	28
Conditions aux frontières tangentielles . . . . .	33
4.2 Comparaison des résultats . . . . .	34
4.2.1 Méthode EBCM . . . . .	37
4.3 Comparaison avec FDTD . . . . .	41
4.4 Comparaison sur particule sphérique . . . . .	43
<b>5 Champ incident</b>	<b>45</b>
5.1 Calcul du champ incident . . . . .	45

5.1.1	Point Matching Method . . . . .	47
	Champ lointain . . . . .	47
	Champ lointain modifié . . . . .	53
5.1.2	Profil de faisceau à hautes NA . . . . .	57
	Expansion dans le champ lointain modifié . . . . .	68
	Point Matching au champ proche . . . . .	71
	Champ proche hybride . . . . .	74
	Faisceau décentré . . . . .	76
	Faisceau incliné . . . . .	77
5.1.3	Correction à très haute focalisation . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Stress, force et torque</b>	<b>82</b>
6.1	Stress . . . . .	82
6.2	Force . . . . .	87
	6.2.1 Méthode analytique . . . . .	87
	Force selon l'axe z . . . . .	89
	Force selon l'axe x ou y . . . . .	99
	6.2.2 Méthode numérique . . . . .	105
6.3	Torque . . . . .	106
	6.3.1 Méthode numérique . . . . .	106
	6.3.2 Méthode analytique . . . . .	107
6.4	Position d'équilibre . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Résultats</b>	<b>115</b>
7.1	Nanocylindres isotropes . . . . .	115
	7.1.1 La stabilité de la position . . . . .	115
	7.1.2 La stabilité d'orientation . . . . .	119
	7.1.3 Correction à très haute focalisation . . . . .	124
	Effet de la polarisation . . . . .	126
7.2	Nanocylindres anisotropes . . . . .	130
	7.2.1 Stress distribution . . . . .	130
	Impact de l'ouverture numérique . . . . .	134
	7.2.2 Torque . . . . .	139
	Cristal tourné . . . . .	144
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Symétrie du tenseur diélectrique</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Tenseur de Maxwell</b>	<b>155</b>
<b>C</b>	<b>Programme automatisé</b>	<b>157</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Liste des figures

2.1	Image SEM de nanobarres montrant la longueur. . . . .	5
2.2	Image SEM de nanobarres montrant le rayon. . . . .	5
2.3	Schéma du montage expérimental de la pince optique . . . . .	7
2.4	Images de nanobarres capturés. . . . .	9
3.1	Système de coordonnées cartésiennes et sphériques utilisées dans ce document . . . . .	12
4.1	Comparaison du stress calculé avec les deux types de conditions aux frontières. . . . .	35
4.2	Comparaison du torque calculé avec les deux types de conditions aux frontières. . . . .	36
4.3	Stress appliqué sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	36
4.4	Comparaison des résultats de stressa avec la méthode de FDTD. . . . .	43
5.1	Distribution du champ électrique avec la méthode de point matching dans le champ lointain. . . . .	52
5.2	Stress sur un nanocylindre avec la méthode de point matching dans le champ lointain. . . . .	53
5.3	Distribution du champ électrique avec la méthode de point matching dans le champ lointain. . . . .	55
5.4	Distribution en 1D du champ électrique avec la méthode de point matching dans le champ lointain. . . . .	56
5.5	Distribution en 1D du champ électrique avec la méthode de point matching dans le champ lointain avec correction de puissance. . . . .	57
5.6	Distribution du champ électrique en fonction de différent ordres de correction. . . . .	60
5.7	Largeur à mi-hauteur et intensité maximale en fonction de l'ouverture numérique . . . . .	64
5.8	Distribution du champ électrique à différentes $NA$ . . . . .	64
5.9	Distribution champ électrique à différentes polarisations. . . . .	65
5.10	Composantes vectorielles du champ électrique à $NA = 0.9$ . . . . .	66
5.11	Composantes vectorielles du champ électrique à $NA = 1.20$ . . . . .	67
5.12	Largeur du faisceau corrigé en fonction de la position axiale à $NA = 1.20$ . . . . .	68
5.13	Distribution du champ électrique pour la méthode dans le champ lointain modifiée à $NA = 1.25$ . . . . .	69
5.14	Distribution du champ électrique pour la méthode dans le champ lointain modifiée à $NA = 1.15$ . . . . .	70
5.15	Distribution du champ électrique pour la méthode dans le champ lointain modifiée à $NA = 1.15$ et $z = 500$ nm. . . . .	70
5.16	Largeur du faisceau gaussien en fonction de la distance sur l'axe optique. . . . .	71

5.17	Distribution du champ électrique pour la méthode dans le plan focal à $NA = 1.25$ et $z = 0$ nm. . . . .	73
5.18	Distribution du champ électrique pour la méthode dans le plan focal à $NA = 1.25$ et $z = 500$ nm. . . . .	74
5.19	Distribution du champ électrique pour la méthode hybride à $NA = 1.15$ . . . . .	75
5.20	Distribution du champ électrique pour la méthode hybride à $NA = 1.20$ . . . . .	76
5.21	Distribution du champ électrique pour la méthode hybride d'un faisceau décentré. . . . .	77
5.22	Effet de l'inclinaison d'un faisceau sur la distribution de stress. . . . .	78
5.23	Pourcentage du champ qui est représenté par le champ dispersé. . . . .	79
5.24	Impact sur la distribution de stress de la correction aux hautes $NA$ . . . . .	80
5.25	Impact sur la distribution de stress de la correction aux hautes $NA$ . . . . .	81
6.1	Force selon l'axe $z$ ( $F_z$ ) en fonction du déplacement sur l'axe optique. . . . .	99
7.1	Impact d'un déplacement latéral du faisceau incident. . . . .	117
7.2	Rigidité axiale en fonction de la longueur. . . . .	118
7.3	Rigidité latérale en fonction de la longueur. . . . .	119
7.4	Différents types de torques. . . . .	120
7.5	Force latérale et son gradient pour un nanocylindre incliné de $\pm 40^\circ$ . . . . .	121
7.6	Torque latéral en fonction de l'angle d'inclinaison pour un nanocylindre de rayon $R = 50$ nm. . . . .	122
7.7	Torque latéral et son gradient en fonction de l'angle d'inclinaison pour un nanocylindre. . . . .	122
7.8	Calculs des torques pour des petits nanobarres. . . . .	123
7.9	Impact de la correction à hautes $NA$ sur le calcul des forces latérales et de la rigidité latérale. . . . .	125
7.10	Largeur du potentiel de capture optique. . . . .	126
7.11	Effet de la polarisation sur la distribution du champ électromagnétique. . . . .	127
7.12	Distribution du champ électrique lorsque la polarisation est linéaire. . . . .	128
7.13	Comparaison de la polarisation circulaire à droite et à gauche. . . . .	129
7.14	Distribution de stress sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	131
7.15	Distribution de stress sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	132
7.16	Distribution de stress normal sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	134
7.17	Distribution de stress tangentiel sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	135
7.18	Distribution de stress sur un nanocylindre anisotrope. . . . .	136
7.19	Force axiale et rigidité axiale en fonction du déplacement axial par rapport à l'équilibre pour un nanocylindre anisotrope. . . . .	137
7.20	Force latérale et rigidité latérale en fonction du déplacement latéral. . . . .	137
7.21	Distribution de stress sur un nanocylindre. . . . .	139
7.22	Convention pour les types de torques. . . . .	140
7.23	Torque appliqué sur un nanocylindre anisotrope en fonction de l'inclinaison. . . . .	140
7.24	Distribution de stress normal et tangentiel sur un nanocylindre anisotrope lorsque le faisceau incident est incliné. . . . .	141
7.25	Direction du stress tangentiel à des intervalles régulièrement espacées sur la surface du nanocylindre anisotrope lorsque le faisceau incident est incliné. . . . .	143
7.26	Torque en fonction de l'angle d'incidence du faisceau laser appliqué sur un nanocylindre anisotrope qui a subi une rotation de son système d'axe diélectrique. . . . .	145



7.27	Stress en fonction de l'angle d'incidence du faisceau laser appliqué sur un nanocylindre anisotrope qui a subi une rotation de son système d'axe diélectrique.	146
7.28	Image de nanobarres capturés avec une pince optique. . . . .	147

# Liste des symboles

La liste des symboles utilisée ici est la même pour tout le document à moins qu'il ne soit précisé explicitement dans le texte.

$Rg\vec{M}_{nm}(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle régulière de type M
$Rg\vec{N}_{nm}(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle régulière de type N
$\vec{M}_{nm}^1(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle d'ordre 1 de type M
$\vec{N}_{nm}^1(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle d'ordre 1 de type N
$\vec{M}_{nm}^2(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle d'ordre 2 de type M
$\vec{N}_{nm}^2(kr)$	Harmonique d'onde sphérique vectorielle d'ordre 2 de type N
VSWF	Harmonique d'onde sphérique vectorielle
$a_{nm}$	Coefficient d'expansion du faisceau incident pour la composante $Rg\vec{M}_{nm}(kr)$ du faisceau incident
$b_{nm}$	Coefficient d'expansion du faisceau incident pour la composante $Rg\vec{N}_{nm}(kr)$ du faisceau incident
$p_{nm}$	Coefficient d'expansion du faisceau incident pour la composante $\vec{M}_{nm}^1(kr)$ du faisceau diffusé
$q_{nm}$	Coefficient d'expansion du faisceau incident pour la composante $\vec{N}_{nm}^1(kr)$ du faisceau diffusé
$\vec{E}$	Champ électrique
$n$	Indice de réfraction d'un matériaux qui peut être un scalaire ou un tenseur
$\vec{D} = n\vec{E}$	Champ électrique de déplacement

$\rho_s$	Charge libre
$\vec{H}$	Champ magnétique
$\mu$	Perméabilité du vide
$\vec{B} = \mu\vec{H}$	Champ magnétique
$\vec{J}_s$	Courant de surface
$n_1$	Indice de réfraction du milieu à l'extérieur de l'objet étudié
$n_2$	Indice de réfraction du milieu à l'intérieur de l'objet étudié
$\hat{a}_{n2}$	Vecteur unitaire normal à la surface pointant du milieu 2 vers le milieu 1
$\hat{a}_r$	Vecteur unitaire dans la direction de $r$
$\hat{a}_\theta$	Vecteur unitaire dans la direction de $\theta$
$\hat{a}_\phi$	Vecteur unitaire dans la direction de $\phi$
$\hat{i}$	Vecteur unitaire dans la direction de $x$
$\hat{j}$	Vecteur unitaire dans la direction de $y$
$\hat{k}$	Vecteur unitaire dans la direction de $z$
$E_{inc}$	Représente le champ électrique incident
$E_{scat}$	Représente le champ électrique diffusé
$E_{int}$	Représente le champ électrique intérieur
$H_{inc}$	Représente le champ magnétique incident
$H_{scat}$	Représente le champ magnétique diffusé
$H_{int}$	Représente le champ magnétique intérieur
$w_0$	Demi-largeur du faisceau gaussien au centre de la trappe
$T_{ij}$	Tenseur de stress de Maxwell
$\sigma$	Stress appliqué sur une surface
$\vec{E}_n$	Vecteur du champ électrique normal à une surface
$\vec{E}_t$	Vecteur du champ électrique tangentiel à une surface
$\vec{F}$	Vecteur de force appliqué sur un objet
$\vec{\tau}$	Vecteur de torque sur un objet

$R$	Rayon du cylindre
$r$	Rayon défini en coordonnées sphériques
$\theta$	Définit l'angle polaire $0 \leq \theta \leq \pi$
$\phi$	Définit l'angle azimutal entre $0 \leq \phi \leq 2\pi$
$H$	Longueur (hauteur) d'un nanobarre

# Remerciements

La réalisation de ce travail n'aurait pu être possible sans le support et l'aide de personnes que je tiens à remercier.

En premier lieu, je remercie tout particulièrement ma conjointe qui m'a supporté dans les moments les plus difficiles, qui a su écouter patiemment mes explications souvent incompréhensibles et qui m'a supporté durant ces 4 années. Je tiens aussi à remercier le CRSNG et le FQRNT pour leur support financier. Finalement, merci à mon directeur de recherche, Dr Sheng pour ses conseils et pour m'avoir donné l'opportunité de faire ce travail.

Je voudrais finalement mentionner au lecteur que ce travail a été publié en partie dans différents journaux. Il est donc possible, pour l'instant, de consulter les Ref. (Bareil Sheng, 2010a), (Rancourt-Grenier , 2010). Le travail a aussi fait objet de conférences lors de la tenue de SPIE Optics and Photonics de San Diego en 2009 et 2010 (Bareil Sheng, 2010b), (Bareil , 2009a).

# Chapitre 1

## Introduction

Dans les dernières années, la manipulation des nanoparticules avec les pinces optiques a suscité beaucoup d'intérêt et de la recherche intensive (Dienerowitz , 2008) sur le sujet. Par exemple, un article récent montre que les champs évanescents seraient utiles pour capturer efficacement les nanoparticules (Liu , 2011). La capture des nano-particules est plus difficile compte tenu de leur petite dimension. En effet, à mesure que la grosseur de la particule diminue, la force appliquée par la radiation diminue aussi proportionnellement. De plus, le mouvement brownien augmente ce qui ne fait qu'enlever encore plus de stabilité à la trappe optique. La capture de cristaux anisotropes de  $KNbO_3$  de rayons plus petits que la longueur d'onde et de longueurs de l'ordre de la longueur d'onde a été démontrée expérimentalement (Nakayama , 2007a). Cet article a montré le potentiel de ce type de nanoparticule pour les applications en microscopie de résolution sous longueur d'onde en utilisant la seconde harmonique créée par le faisceau de capture comme une source de lumière pour sonder un milieu. Dans cette expérience les fluctuations dans la position et dans l'orientation des nanobarres capturées peuvent grandement affecter la résolution de l'image. Ainsi, la rigidité de la trappe, la position angulaire ainsi que la stabilité angulaire des nanobarres capturées devient un problème important à étudier. De plus, il peut être intéressant d'essayer de capturer plusieurs de ces nanobarres afin de produire un certain arrangement qui permettrait de sonder un milieu avec une plus grande efficacité. Ainsi, l'étude du potentiel et de son étendue d'application de capture optique est aussi importante à évaluer. Dans la référence (Borghese , 2008), les nanobarres sont modélisées comme une chaîne linéaire de sphères identiques. Cependant, une différence significative existe entre la géométrie d'un nanobarre et celle d'une chaîne linéaire de nanosphères ; seules certaines longueurs discrètes peuvent être modélisées et le ratio  $H/2R$  doit être plus grand que deux. À la référence, (Simpson Hanna, 2011), les nanobarres sont modélisées comme des sphéroïdes avec des ratios d'aspect  $H/2R$  grand. Même si le modèle est meilleur, les résultats donnés ne permettent pas de comprendre pourquoi et comment les torques et les forces sont générés. Il est en effet primordial de bien comprendre comment la lumière est affectée par la présence de ces nanoparticules si on veut être en mesure de prédire des phénomènes expérimentaux ou si l'on

veut être capable d'apporter les bonnes modifications à une expérience qui ne fonctionnerait pas correctement.

Ce projet de doctorat a donc porté sur l'étude des nanobattes anisotropes et isotropes dans les pinces optiques dans le but de capturer une matrice de nanobattes qui serviraient de sonde pour un système d'imagerie à hyperrésolution. La capture de particules anisotropes non linéaires a pu être réalisée et les observations faites ont été utilisées pour orienter la recherche théorique. La partie la plus importante de ce projet a donc été de comprendre comment un faisceau laser incident pouvait interagir avec les nanobattes. Plusieurs problèmes expérimentaux doivent être surmontés pour que ce type d'expérience fonctionne. Il est donc primordial de comprendre l'interaction de la pince optique avec ces particules pour ensuite mieux contrôler les conditions dans lesquelles ces expériences sont faites. Par exemple, la longueur des nanobattes produits n'est pas la même. Nous avons donc vérifié s'il était possible de capturer chaque nanobatte de façon à ce qu'ils forment une sonde identique. Pour ce faire la force axiale, c.-à-d. la force dans la direction de l'axe optique, a été étudiée. Ensuite, les nanobattes ne sont pas totalement stables comme le rapporte (Nakayama , 2007a), ainsi il fallait étudier la rigidité de la pince optique en fonction de tous les paramètres physiques variables. Cette thèse de doctorat permet de faire l'étude complète des forces, des torques et des stress appliqués sur des nanobattes isotropes ou anisotropes (biréfringence axiale ou bi-axiale). De plus, la démarche expérimentale utilisée pour faire la capture de nanobattes de  $KNbO_3$  est expliquée et des recommandations pour améliorer le montage expérimental sont données.

Pour commencer, cette thèse montre comment nous avons pu faire la capture optique de nanobattes. La description des nanobattes utilisés est ensuite faite et comparée avec celle des autres nanobattes utilisés dans la littérature. Cette thèse fait ensuite le rappel de la base du calcul et explique le modèle géométrique utilisé. Par la suite le calcul des champs électromagnétiques est abordé. On y expose la méthode de la matrice de transfert utilisée pour faire les calculs de dispersion sur les objets anisotropes et isotropes. Pour faire les calculs d'interaction avec le champ électromagnétique, nous expliquons comment la matrice de transfert (T-Matrix) a été utilisée et calculée. En modifiant une méthode de calcul de la matrice de transfert, nous avons pu simuler l'interaction de nanobattes biréfringents avec un faisceau laser hautement focalisé. De la même façon, nous nous sommes assurés que le champ incident était bien décrit et nous avons mis au point diverses méthodes pour le calcul de champ hautement focalisé applicable à la méthode de la matrice de transfert. Ces méthodes permettent de simuler le déplacement en trois dimensions du faisceau incident et permettent aussi d'incliner ce dernier dans n'importe quel angle. Ainsi, n'importe quel type de faisceau incident peut être simulé.

Ensuite, les différentes méthodes de calcul de forces de torque et de stress sont exposées et permettent l'application future de ces équations à des systèmes très différents de celui de la présente étude. Cette partie dépasse l'application des calculs aux nanocylindres. L'utilisation

du tenseur de stress de Maxwell est nécessaire dans cette partie (Barton , 1989), mais pas suffisante. Diverses méthodes d'intégration du stress sur la surface ou d'intégration analytique de fonctions orthogonales sont explorées et analysées. Les méthodes numériques sont privilégiées dans les calculs puisqu'elles permettent de mieux comprendre l'aspect physique de l'application des forces des nanocylindres, même si elles demandent plus de ressources et de temps pour être complétées.

Par la suite, cette thèse regroupe les résultats de calculs et expérimentaux les plus importants obtenus ainsi que les conclusions ou tendances importantes retenues. Les différences entre les deux méthodes de calcul de la matrice de transfert sont explorées. On expose les résultats de stress, de torque et de force sur les particules isotropes et anisotropes. L'influence de l'ouverture numérique, du rayon et de la longueur des particules, des propriétés diélectriques, etc. est étudiée dans tous les cas possibles d'expérience avec les nanoparticules. L'application de la méthode de calcul à des objets sphériques pour le calcul des forces sur des globules rouges est aussi exposée. De plus, une comparaison des calculs avec une méthode commerciale de calcul par FDTD (finite-difference time-domain) est effectuée.

Quant à elles, les parties en annexe montrent deux aspects moins importants de la réalisation de ce projet de doctorat. La première partie est une démonstration mathématique de la symétrie d'un tenseur diélectrique et la seconde partie donne les codes construits pour permettre une interface automatisée de gestion du logiciel commercial OptiFDTD.



## Chapitre 2

# Capture de nanobarres

La motivation expérimentale de ce travail de doctorat était de développer un système d'imagerie de haute résolution en utilisant des nanobarres. La microscopie en balayage dans le champ proche (NSOM) est réalisable avec ce type de particule, comme montré à la référence (Nakayama , 2007b). Plus précisément, il est possible d'utiliser des nanobarres anisotropes (biréfringents bi-axial) et non linéaires comme le potassium néobate  $KNbO_3$  pour effectuer de l'imagerie de haute résolution. La biréfringence de ces particules et leur grande susceptibilité non linéaire  $\xi$  permettant de générer une seconde harmonique (Boyd, 2003), il est d'autant plus intéressant de les utiliser pour ce type d'application. En effet, la seconde harmonique générée à l'extrémité du nanobarre permet d'obtenir une illumination très localisée qui dépend du diamètre du nanobarre. La résolution ultime de ce type de sonde dépend donc du diamètre du nanobarre utilisé. Comme des nanobarres de rayon 40 nm peuvent être capturés par une pince optique (Nakayama , 2007b) utilisant une longueur d'onde de  $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$  et qu'ils peuvent être déplacés au dessus d'un échantillon, on peut penser que la résolution ultime que l'on peut obtenir avec  $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$  est de 40 nm.

Cependant, la résolution maximale peut être influencée par différents facteurs de la capture optique. Comme rapporté à la référence (Nakayama , 2007b) et comme observé durant nos expériences (voir le vidéo), la capture de ces nanobarres n'est pas aussi stable que pour les particules micrométriques. La référence (Nakayama , 2007b) rapporte des fluctuations de 10 nm aux extrémités des nanobarres sans préciser la longueur du nanobarre utilisé ni son diamètre. Il était donc intéressant de vérifier expérimentalement si l'on pouvait répéter la capture optique d'un nanobarre anisotrope et non linéaire pour vérifier la stabilité de la capture optique.

Grace à une collaboration avec l'Université ShenZhen en Chine, des nanobarres de potassium niobate ( $KNbO_3$ ) ont pu être obtenus. Ce type de nanobarres permet aussi de générer une seconde harmonique à  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . Selon la référence (Roland Schiek, 2011) la susceptibilité non linéaire  $\xi$  du  $KNbO_3$  est évaluée entre  $10.8 \text{ pm/V}$  et  $19.6 \text{ pm/V}$ . De plus, selon la référence (Zysset , 1992) les indices de réfraction du  $KNbO_3$  sont  $n_{xx} = 2.2195$ ,  $n_{yy} = 2.2576$  et  $n_{zz} =$

2.1194.

Les dimensions physiques des nanobarres ont été déterminées en utilisant le microscope SEM (scanning electron microscope) du COPL à l'Université Laval. Les longueurs varient entre  $H = 300$  nm et  $H = 2 \mu\text{m}$  comme le montre la figure 2.1. Les rayons varient entre  $R = 50$  nm à  $R = 75$  nm comme le montre la figure 2.2.

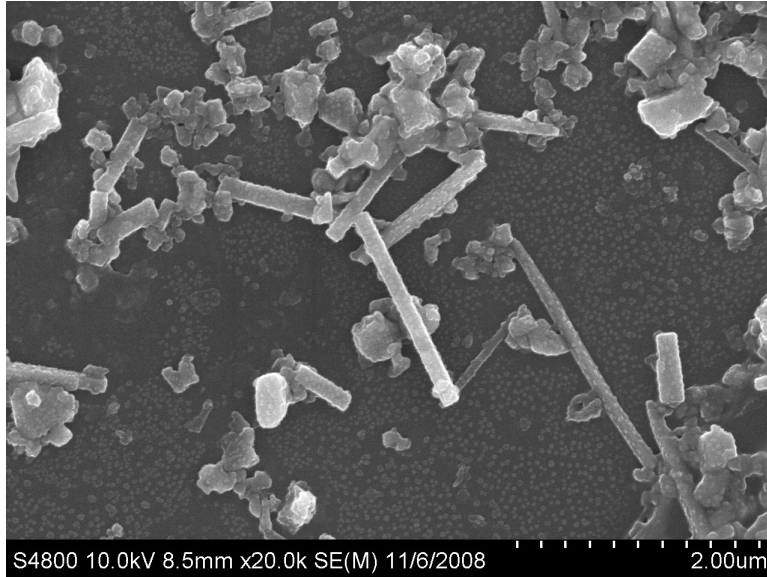


FIGURE 2.1: Image faite avec un microscope SEM (scanning electron microscope) des nanobarres utilisés pour les expériences de capture avec la pince optique. L'échelle est divisée en dix parties représentant chacune 200 nm.

La longueur d'onde de la pince optique utilisée en laboratoire était de  $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$ . Cette longueur d'onde permet donc de générer une seconde harmonique à 532 nm. Notez que le projet de doctorat s'est terminé avant que l'on puisse vérifier la génération de cette seconde harmonique par les nanobarres en notre possession.

Nous avons déjà une pince optique traditionnelle fonctionnant au laboratoire pour la capture de microparticules sphériques. Elle a donc dû être modifiée pour pouvoir capturer des nanobarres. Cette pince optique, illustrée à la figure 2.3, est construite à partir d'un microscope debout avec un objectif (OB) d'une ouverture numérique de  $NA = 1.25$  à immersion dans l'huile. Le faisceau utilisé pour capturer les objets est un laser à fibre de 5W Nd :YVO4 (IPG Photonics, Oxford, Massachusetts) émettant à  $1.064 \mu\text{m}$ . Le faisceau laser passe à travers une plaque demi-onde suivie d'un prisme de Glan séparant les polarisations. Ceci a pour but un contrôle optimal de la puissance du faisceau en effectuant une rotation de la plaque demi-onde. Le miroir M1 et le miroir semi-réfléchissant DM sont utilisés pour aligner le faisceau laser. Les miroirs M4 à M7 redirigent le faisceau vers le miroir M8 qui sert à coupler le faisceau dans l'objectif d'immersion à l'huile  $NA = 1.25$ . Un laser He-Ne est présent pour connaître la

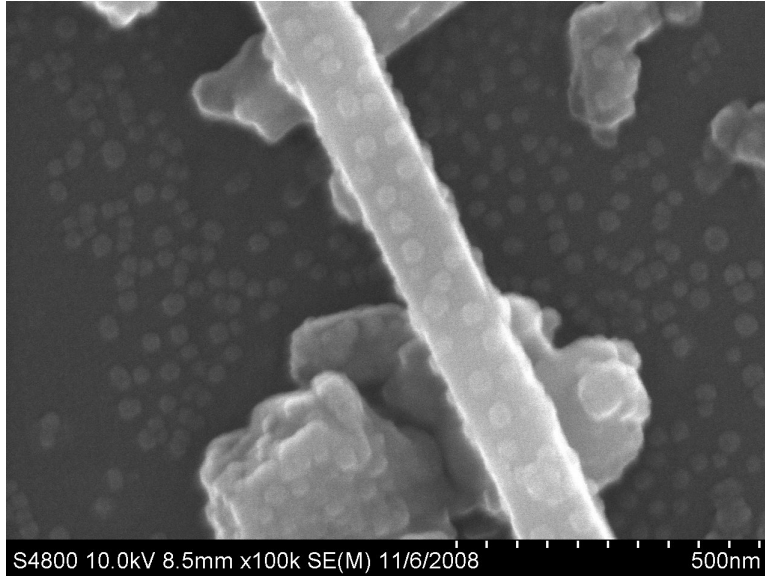


FIGURE 2.2: Image faite avec un microscope SEM (scanning electron microscope) des nanobâres utilisés pour les expériences de capture avec la pince optique. L'échelle est divisée en dix parties représentant chacune 50 nm.

position de l'objet par rapport à la position du faisceau de capture. Le faisceau laser He-Ne est agrandi en utilisant les lentilles L2 et L3. Les miroirs M2 et M3 permettent quant à eux de guider le faisceau laser de positionnement dans le même parcours que le faisceau de trappe en utilisant le cube de séparation de faisceau (BC). La lumière du laser He-Ne qui est réfléchiée par la particule capturée est recueillie par le même objectif ( $NA = 1.25$ ) et est envoyée par la plaque de séparateur de faisceau (BS) au détecteur à quatre quadrants (S5981 ; Hamamatsu, Bridgewater, New Jersey). Les longueurs d'ondes non désirées sont éliminées de la détection par un filtre F3 positionné à l'avant du détecteur à quatre quadrants.

Quant à lui, le système d'imagerie est couplé à la pince optique et fonctionne par contraste de phase ; c'est-à-dire que l'objectif servant à focaliser la lumière de capture, sert aussi d'objectif de microscope et que la lumière, en passant à travers les particules, permet d'imager ces dernières sur un détecteur CCD. Un illuminateur à fibre émettant de la lumière blanche a été utilisé comme source lumineuse pour le système d'imagerie. Cependant, au départ cette lumière blanche passait par un condenseur avec une  $NA=0.3$  (20x). La résolution maximale  $R$  d'un microscope étant donnée par l'équation

$$R = \frac{1.22\lambda}{NA_{condenseur} + NA_{objectif}} \quad (2.0.1)$$

il est important d'utiliser un condenseur avec la plus grande ouverture numérique possible pour obtenir la meilleure résolution possible. Les nanobâres ayant un diamètre maximal de 150 nm il est important d'optimiser la résolution du système. Il a donc été possible d'utiliser un condenseur avec une ouverture numérique de  $NA = 1.20$  à immersion dans l'huile. Par la



alors beaucoup plus agglomérés et il peut être difficile de trouver un nanobarre seul.

Avec de la lumière blanche de longueur d'onde moyenne d'environ 550nm, on peut obtenir une résolution maximale de  $R = 273$  nm. Comme les nanobarres ont un diamètre maximal d'environ 150 nm, on ne peut voir clairement les nanobarres lorsqu'elles sont complètement alignées avec la pince optique. À ce moment, seule une tâche d'Airy est visible. Lorsqu'elles reposent à angle, les nanobarres sont mieux visibles puisque la plupart possèdent une longueur moyenne d'environ 1  $\mu$ m (maximum 2  $\mu$ m, minimum 300 nm,). Dans certain cas, un nanobarre est capturé dans la pince optique avec un certain angle par rapport au faisceau incident, d'autres fois il est complètement aligné avec le faisceau.

On peut voir dans le vidéo fournit avec la présente thèse la capture de deux nanobarres. La pince optique est positionnée au centre gauche-droite de l'image et à environ 2/3 de la distance à partir du bas. Au temps  $t = 10$  secondes à partir du début de la vidéo, on peut voir la capture d'un premier nanobarre. Notez qu'à  $t = 15$  secondes, une seconde particule vient se coller à la première dans le même faisceau de trappe. Dû au fait que la résolution est faible et que le nanobarre semble aligné avec le faisceau de capture, il est très difficile d'évaluer l'angle de capture entre le nanocylindre et le faisceau incident. Cependant, il est possible de voir que le mouvement brownien de la particule recommence lorsque la pince optique est éteinte et qu'il diminue aussitôt que la pince est remise en marche. Il reste toujours un mouvement de la particule qui est visible lorsque la capture est en marche. Cette vibration maximale de la pointe du nanobarre semble représenter plus de deux fois le diamètre de la particule. Cette vibration est clairement inacceptable pour une application en imagerie NSOM. La capture est cependant assez stable pour permettre le déplacement du nanobarre. Elle a été réalisée avec une puissance de 200 mW.

À 1min25s du vidéo, une seconde particule est capturée dans la pince optique. Cette seconde particule semblent être capturée avec un certain angle par rapport au faisceau incident. En effet, on peut voir à la figure 2.4(a) un nanobarre non capturé qui est complètement perpendiculaire à l'axe du faisceau. D'un autre côté, on peut voir à la figure 2.4(b) le second nanobarre capturé avec un certain angle  $\theta > 0$ . Si ce nanobarre avait été capturé et directement aligné avec l'axe optique, l'image de capture du nanobarre aurait seulement montré une tâche d'Airy. Cet angle  $\theta$  de capture n'est pas constant d'un nanobarre à l'autre puisque celui de la figure 2.4(c) montre un angle  $\theta \rightarrow 0$ .

Dans les sections qui suivront nous tenterons donc d'expliquer comment la stabilité et le changement d'orientation du nanobarre peut varier d'un nanobarre à l'autre. Ceci nous permettra de mieux comprendre les expériences de capture optique de ces particules dans le but de mieux les contrôler. En effet, pour que de l'imagerie de haute résolution soit réalisable avec ce type de particule, la vibration des nanobarres doit être mieux contrôlée. Les forces et les torques doivent donc être les plus élevés possible pour que la capture optique soit la plus rigide pos-

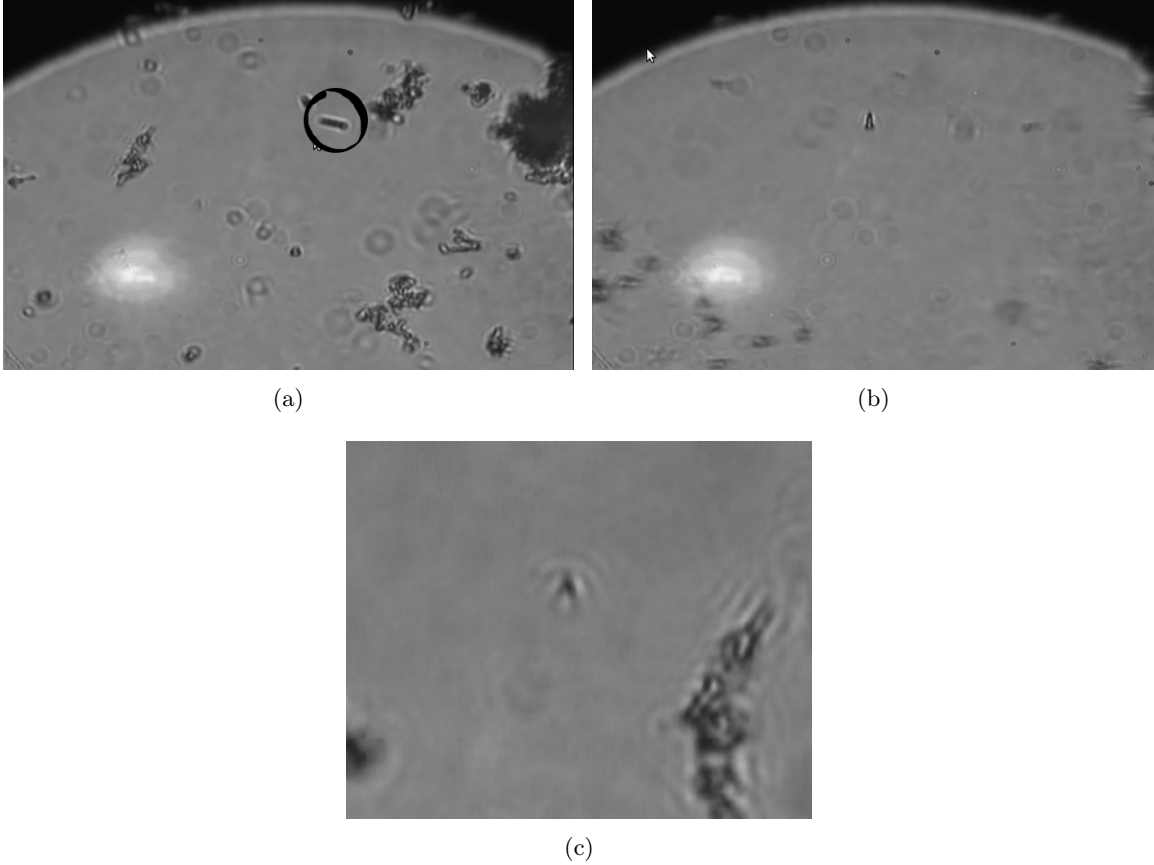


FIGURE 2.4: Image de nanobarres de  $KNbO_3$  de  $R \approx 75$  nm et  $H \approx 1$   $\mu$ m (a) nanobarre non capturé perpendiculaire au faisceau incident. (b) nanobarre capturé avec un angle  $\theta > 0$  (c) nanobarre capturé avec un angle  $\theta \rightarrow 0$ .

sible. De plus, on doit trouver une façon d'éviter que plusieurs nanobarres se retrouvent dans le même faisceau de trappe en même temps. Il pourrait aussi être intéressant dans les expériences futures d'utiliser un modulateur acousto-optique ou un générateur d'hologramme pour effectuer la capture de plusieurs nanobarres servant toutes de sonde pour de l'imagerie sous longueur d'onde. Dans ce cas, on doit donc pouvoir évaluer à quelle distance on peut approcher deux nanobarres et comment cette distance peut être affectée. Beaucoup de paramètres physique des nanobarres pourraient être changés pour atteindre ces buts. On peut penser que les indices de réfraction des particules peuvent influencer les forces et les torques en jeux. De la même façon, leur dimension physique pourrait être mieux choisies. On peut aussi penser à changer des paramètres de la pince optique comme l'ouverture numérique.

Ces paramètres physiques sont nombreux et nécessitent avant tout une bonne compréhension théorique de la capture de nanobarre. En effet, pour mieux ajuster l'expérience il convient d'étudier théoriquement tous les types de forces en jeux. Les sections qui suivent porteront donc sur l'étude des forces, des stress et des torques appliqués sur des nanobarres en fonction

de tous les paramètres physiques mentionnés ci-haut.

Pour ce qui est de la résolution d'imagerie de la pince optique. Il est clair qu'elle devrait être améliorée par l'utilisation d'une ouverture numérique plus grande pour le condenseur et pour l'objectif. De la même façon, la longueur d'onde d'illumination utilisée devrait être plus courte. Ainsi, avec une  $NA = 1.30$  pour l'objectif et le condenseur, couplée avec une longueur d'onde d'illumination de  $\lambda = 400 \text{ nm}$ , une résolution de théorique de  $R = 187 \text{ nm}$  aurait été possible selon l'équation 2.0.1. Cela aurait donc permis de voir plus clairement la position de stabilité du nanobarre. Il n'aurait cependant pas été possible de calculer l'angle précisément de cette façon.

# Chapitre 3

## Les pinces optiques

### 3.1 La base

Il existe deux grands types de pinces optiques. Le premier type, qui est un peu moins connu, utilise deux faisceaux divergents pour tenir en place un objet qui est alors capturé puisque de la force de dispersion des deux faisceaux est en sens opposée. Ce type de pince optique a été étudié dans mes travaux précédents. Il est possible de consulter les publications sur ce sujet aux références : (Bareil , 2006), (Bareil , 2007a),(Bareil , 2007b) ,(Bareil Sheng, 2007), (Liao , 2008) (Bareil , 2009b), (Bareil Sheng, 2010a), (Bareil Sheng, 2015).

Dans le second type, auquel on s'intéressera pour ce projet de doctorat, un seul faisceau hautement focalisé est nécessaire. La focalisation du faisceau donne naissance à un gradient de force qui permet de retenir la particule capturée dans les 3 axes. Le principe d'action des forces est identique dans les deux types de pinces optiques. Lorsque l'indice de réfraction du milieu dans lequel la particule est submergée, habituellement constituée d'eau avec  $n_1 = 1.33$  est plus faible que celui de la particule, chaque rayon lumineux génère une force dirigée vers l'extérieur de la particule au point d'impact. On peut alors calculer les forces appliquées et déduire les tendances physiques qui s'y rapportent. On note que les particules considérées ici ne sont pas conductrices.

L'équation 3.1.1 permet de déduire le stress à la surface d'une particule selon le modèle de Minkowski. Ces particules doivent cependant être beaucoup plus grandes que la longueur d'onde pour que la quantité de mouvement des photons  $P = nE/c$  puisse directement être utilisée. Un faisceau passant dans une particule d'indice de réfraction plus élevé que le milieu extérieur, gagne de la quantité de mouvement puisque la quantité de mouvement d'un photon, selon le modèle de Minkowski est donnée par  $P = nE/c$  où  $E$  est l'énergie du faisceau,  $c$  la vitesse de la lumière et  $n$  l'indice de réfraction. Ainsi, lorsque  $n$  augmente la quantité de mouvement augmente aussi. Ceci donne naissance à une force dirigée vers l'extérieur qui permet de capturer des objets ou de les étirer. On peut aussi déduire que les forces générées



vont dépendre de l'indice de réfraction du milieu et de l'intensité du faisceau  $I = P/A$  où  $P$  représente la puissance et  $A$  représente l'aire occupée par le faisceau.

La partie la plus importante de cette équation repose dans le calcul de l'équation 3.1.1 qui dépend des propriétés physiques de la particule et du faisceau incident. Comme on s'intéresse aux particules nanométriques et que les longueurs d'onde utilisées pour les pinces optiques sont de l'ordre du micron, il est clair que les outils mathématiques de tracé de rayon développés à la maîtrise ne seront plus utiles ici.

$$\vec{\sigma} = \frac{\Delta \vec{P}}{A \Delta t} = \frac{\vec{P}_i - (\vec{P}_t + \vec{P}_r)}{A \Delta t} = \frac{1}{c} \frac{E_i}{A \Delta t} n_1 (\vec{a}_k - (nT\vec{a}_t + R\vec{a}_r)) \equiv \frac{n_1 P}{c A} \vec{Q} \quad (3.1.1)$$

## 3.2 Géométrie du problème

On utilisera dans ce document le système de coordonnées sphérique et le système de coordonnées cartésien comme représenté à la Fig. 3.1 où  $\theta$  représente l'angle polaire,  $\phi$  l'angle azimutal,  $\vec{r}$  le vecteur partant de l'origine  $O$  et pointant un point quelconque sur la surface du cylindre,  $r$  la norme du vecteur  $\vec{r}$ ,  $r_1$  le vecteur partant de l'origine  $O$  et pointant vers une position dans le plan  $XY$  en  $z = \pm H$ ,  $\rho$  la distance de l'axe  $Z$  sur un plan  $xy$ ,  $R$  le rayon du cylindre,  $H$  la longueur du cylindre et finalement  $\vec{n}$  qui représente la normale du cylindre pointant du milieu intérieur (milieu 1) vers le milieu extérieur (milieu 2). L'équation 3.2.1

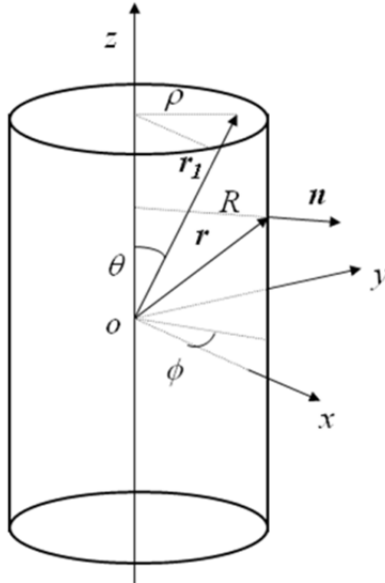


FIGURE 3.1: Système de coordonnées cartésiennes et sphériques utilisées dans ce document

permet de transférer un point d'un système de coordonnées cartésien à un système de coordonnées sphérique et l'équation 3.2.2 d'un système de coordonnées sphériques en un système

de coordonnées cartésien.

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos(z/r) \\ \phi &= \arctan(y/x)\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Il est aussi souvent utile de transformer des vecteurs d'un système de coordonnées à l'autre. Pour trouver les règles de transformation d'un système à l'autre on doit transformer un vecteur en coordonnées cartésiennes  $\vec{a}_{car} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$  en coordonnées sphériques  $\vec{a}_{sph} = a_r \hat{a}_r + a_\theta \hat{a}_\theta + a_\phi \hat{a}_\phi$  où  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  et  $z = r \cos \theta$ . Pour ce faire, il faut se rappeler que les vecteurs unitaires sont définis par l'équation 3.2.3

$$\vec{a}_r = \frac{\partial \vec{a}_{car}}{\partial r} \quad \vec{a}_\theta = \frac{\partial \vec{a}_{car}}{\partial \theta} \quad \vec{a}_\phi = \frac{\partial \vec{a}_{car}}{\partial \phi}\tag{3.2.3}$$

en calculant chaque des termes de l'équation 3.2.3 on trouve l'équation 3.2.4

$$\begin{aligned}\vec{a}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{a}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{i} + \cos \theta \sin \phi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{a}_\phi &= -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

En collectant chaque terme en  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  de  $\vec{a}_{sph} = a_r \hat{a}_r + a_\theta \hat{a}_\theta + a_\phi \hat{a}_\phi$ , on trouve l'équation 3.2.5

$$\begin{aligned}a_x &= \sin \theta \cos \phi a_r + \cos \theta \cos \phi a_\theta - \sin \phi a_\phi \\ a_y &= \sin \theta \sin \phi a_r + \cos \theta \sin \phi a_\theta + \cos \phi a_\phi \\ a_z &= \cos \theta a_r - \sin \theta a_\theta\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

Ce qui donne, sous la forme matricielle, l'équation 3.2.6 qui permet de changer un vecteur en coordonnées sphériques à un vecteur en coordonnées cartésienne

$$\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_r & a_\theta & a_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix}\tag{3.2.6}$$

Pour trouver la transformation inverse ; c'est à dire la transformation d'un vecteur en coordonnées cartésiennes à un vecteur en coordonnées sphériques, il faut calculer la matrice inverse

de l'équation 3.2.6. Sous forme matricielle, l'équation 3.2.7 est obtenue. Notez que la matrice de la transformation inverse est tout simplement la matrice transposée de la transformation directe.

$$\begin{bmatrix} a_r & a_\theta & a_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

De plus, pour éviter de normaliser les valeurs de forces, de stress et de torques, on simulera toujours une puissance laser  $P = 10$  mW pour les besoins des calculs numériques. Il peut être intéressant de normaliser les calculs, mais trop de méthodes de normalisation existent dans la littérature ce qui rend les comparaisons souvent difficiles. De plus, comme les résultats sont directement proportionnels à la puissance laser, il est alors très facile d'évaluer les résultats obtenus à des puissances différentes. Finalement, ce travail théorique a pour but la compréhension des phénomènes de capture optique expérimentaux. Il fait donc plus de sens d'utiliser des valeurs compréhensibles et directement utilisables dans les expériences.

### 3.2.1 Méthodes de calcul

Lorsqu'il est nécessaire d'évaluer l'interaction du champ électromagnétique avec une particule, plusieurs choix s'offrent à nous. Il existe en effet diverses méthodes de calcul du champ électromagnétique, mais chacune possède ses forces et ses faiblesses. Il convient donc de choisir une méthode qui s'applique bien au problème qui est à l'étude ici ; c'est-à-dire des nanobarres de potassium niobate ( $KNbO_3$ ) anisotropes de rayons  $R < 200 \mu\text{m}$  et de longueur  $H < 2 \mu\text{m}$ . Ainsi, la méthode de calcul doit pouvoir être utilisée pour des particules anisotropes qui sont beaucoup plus petites que la longueur d'onde et de forme cylindrique.

La méthode la plus facile à utiliser pour moi était celle du tracé de rayon puisque ma maîtrise portait justement sur l'utilisation de cette méthode. Cependant, elle n'est valide que pour les objets beaucoup plus grands que la longueur d'onde. À l'autre opposé, l'approximation de Rayleigh est valide pour les objets qui sont beaucoup plus petits que la longueur d'onde. Encore là, cette méthode ne peut être utilisée puisque la longueur des nanocylindres fait en sorte que l'objet est environ de la même grandeur que la longueur d'onde. L'autre théorie simple à utiliser est la théorie de Lorentz-Mie généralisée (Gouesbet Grehan, 1982), mais elle n'est valide que pour des particules sphériques.

Les méthodes ayant la capacité de calculer la distribution du champ électromagnétique pour des particules correspondant à nos critères sont assez limitées. On note la méthode FDTD (finite-difference time-domain) (Gauthier, 2005), la méthode des éléments finis (FEM) (White, 2000), la méthode DDA (discrete dipole approximation) (Simpson Hanna, 2011) et la méthode de la matrice de transfert (Waterman, 1971). Parmi ces méthodes, les méthodes DDA, FEM

et FDTD permettent aussi de calculer la dispersion du champ électromagnétique pour des particules biréfringentes. Cependant, ces méthodes, bien que générales, sont longues à calculer et demandent donc des ordinateurs puissants. Le temps de simulation pour chaque paramètre physique est alors considérablement élevé. De son côté, la méthode de la matrice de transfert permet le type de calcul que nous recherchons, mais avec certaines modifications (Schmidt Wriedt, 2009). Une fois calculée, la matrice de transfert peut être réutilisée pour des calculs différents tant que les propriétés des deux milieux ne changent pas. Il est donc possible de simuler des polarisation différentes, des NA différentes, des directions de faisceau différentes sans avoir à recalculer la matrice de transfert. Pour cette raison, la méthode la matrice de transfert a été sélectionnée comme méthode de calcul. La méthode développée pour le calcul des particules anisotropes sera donc étudiée dans les prochaines sections du document.

# Chapitre 4

## Matrice de transfert

### 4.1 Calcul de la matrice de transfert

#### 4.1.1 Équation d'onde

Aucune solution analytique n'existe pour la géométrie cylindrique du présent document. La théorie de la matrice de transfert utilise donc des fonctions qui sont des solutions aux équations de Maxwell.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= iw\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= -iw\vec{D} + \vec{J} \\ \nabla \bullet \vec{H} &= 0 \\ \nabla \bullet \vec{D} &= 0\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

où pour une particule biréfringente

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}\tag{4.1.2}$$

où  $\epsilon$  est tensoriel.

Les deux premières équations donnent

$$\nabla \times \nabla\vec{E} - k^2\vec{E} = 0\tag{4.1.3}$$

où  $k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon$ . En utilisant l'identité suivante pour un vecteur de champ  $\vec{V}$ ,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \vec{\nabla}\nabla \bullet \vec{V} - \vec{\nabla} \bullet \nabla\vec{V}\tag{4.1.4}$$

on trouve l'équation d'Helmholtz qui peut être utilisée pour le cas isotrope seulement.

$$\nabla^2\vec{E} - k^2\vec{E} = 0\tag{4.1.5}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes, l'équation 4.1.5 peut être décomposée en trois équations d'Helmholtz scalaires indépendantes avec trois composantes  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$ . Dans

d'autres systèmes de coordonnées, comme dans le cas du système de coordonnées sphériques, l'opérateur Laplacien agissant sur le champ  $\vec{E}$  prend une forme beaucoup plus complexe, ce qui donne trois équations différentielles couplées non-séparables. Pour cette raison, il est préférable d'utiliser une forme plus générale de l'équation 4.1.5 écrite sous la forme

$$\vec{\nabla}\nabla\cdot\vec{V}-\nabla\times\nabla\times\vec{V}+k^2\vec{V}=0 \quad (4.1.6)$$

où le vecteur  $\vec{V}$  peut être n'importe quel des champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ , le vecteur de potentiel ou les vecteurs Hertiens. L'équation d'onde vectorielle 4.1.6 est plus générale que l'équation d'Helmholtz puisqu'elle est vérifiée par les solutions qui ont une divergence non-nulle comme dans le cas d'un milieu anisotrope, comme montré dans notre publication à la référence (Bareil Sheng, 2013).

### 4.1.2 Vecteurs de base

Pour solutionner l'équation d'onde 4.1.6, on doit utiliser une série de vecteurs de base. Le champ incident, le champ dispersé par la particule et le champ à l'intérieur de la particule sont alors représentés par une série infinie de fonctions qui sont solutions aux équations de Maxwell. Similairement aux séries de Fourier ou de Taylor de diverses fonctions, ces fonctions orthonormales sont utilisées pour faire une expansion en série du champ électromagnétique dans chacune des parties : incident, dispersé et intérieur.

Les vecteurs de base sont construits comme suit

$$\vec{L}=\nabla\psi \quad (4.1.7a)$$

$$\vec{M}=\nabla\times\vec{a}\psi \quad (4.1.7b)$$

$$\vec{N}=(1/k)\nabla\times\vec{M} \quad (4.1.7c)$$

où le potentiel  $\psi$  est une fonction de l'équation d'Helmholtz scalaire  $\vec{\nabla}^2\psi+k^2\psi=0$  et  $\vec{a}$  est un vecteur constant arbitraire et unitaire. Les vecteurs  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  satisfont individuellement l'équation 4.1.6 comme montré à la ref. (Bareil Sheng, 2013). Précisons que  $\nabla\times\vec{L}=\nabla\times(\nabla\psi)=0$  et que  $\nabla\cdot\vec{L}=\nabla^2\psi=k^2\psi$ . Ainsi,  $\vec{L}$  représente la solution divergente (non-solénoïde) avec  $\nabla\cdot\vec{L}\neq 0$  alors que  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  représentent les solutions non-divergentes (solénoïde) avec  $\nabla\cdot\vec{M}=0$  et  $\nabla\cdot\vec{N}=0$  puisque la divergence d'un rotationnel est nulle.

Si la fonction  $\psi$  est choisie comme étant l'onde plane,  $\psi=\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$  où  $\vec{r}$  représente la position dans l'espace et le nombre d'onde est  $\vec{k}$ , on obtient

$$\vec{L}=\nabla\psi=i\psi\vec{k} \quad (4.1.8a)$$

$$\vec{M}=\nabla\times\vec{a}\psi=i\psi\vec{k}\times\vec{a} \quad (4.1.8b)$$

$$\vec{N}=(1/k)\nabla\times\vec{M}=(1/k)\psi(\vec{k}\vec{a})\times\vec{k} \quad (4.1.8c)$$

d'où l'on peut déduire que  $\vec{L}$  est parallèle à la direction de propagation  $\vec{k}$ , que  $\vec{M}$  est perpendiculaire à  $\vec{L}$ , que  $\vec{N}$  est perpendiculaire à  $\vec{k}$  et  $\vec{M}$ . Ainsi, les vecteurs de base sont mutuellement

orthogonaux peut importe le système de coordonnées choisi. Le seul critère est que  $\psi$  soit choisit comme des ondes planes. Il a aussi été prouvé à la référence (Nieminen, 2003) que les fonctions  $\vec{L}$ ,  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  forment une base complète solution de l'équation 4.1.6.

### 4.1.3 Vector Spherical Wave Function (VSWF)

Pour solutionner la matrice de transfert, on utilise les ondes vectorielles sphériques. Suivant la définition de l'équation 4.1.7, on choisit la fonction d'onde  $\psi$  comme étant solution à l'équation d'Helmholtz dans un système de coordonnées sphérique selon

$$\psi_{nm} = iN_n h_n^{(1,2)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (4.1.9)$$

ou

$$\psi_{nm} = iN_n j_n^{(1,2)}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (4.1.10)$$

où  $h_n^{(1,2)}(kr)$  représente les fonctions de Hankel sphériques de premier et second ordre,  $j_n(kr)$  représente la fonction de Bessel sphérique et  $N_n = i/\sqrt{n(n+1)}$  est une constante de normalisation des harmoniques sphériques. Quant à elles les fonctions  $Y_{nm}(\theta, \phi)$  représentent les harmoniques sphériques normalisées données par

$$Y_{nm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos\phi) \exp(im\theta) \quad (4.1.11)$$

où  $P_n^m$  représente les fonctions de Legendre associées.

Avec les solutions  $\psi_{nm}$  représentées ci-haut, on trouve que les trois VSWF principales  $\vec{M}, \vec{N}, \vec{L}$  forment une base complète (Stratton, 1941) où  $\vec{L} \cdot \vec{M} = 0, \vec{M} \cdot \vec{N} = 0$  et  $\vec{N} \cdot \vec{L} = 0$ . Le vecteur  $\vec{a}$  dans la définition des VSWF de l'équation 4.1.8 prend la position de  $\vec{r}$  au lieu de  $\hat{r}$ .

Il est cependant important de rappeler que les équations VSWF sont toutes solutions à l'équation 4.1.6. Ainsi, n'importe qu'elle solution à l'équation d'onde peut être exprimée comme une combinaison linéaire des vecteurs  $\vec{L}_n m, \vec{M}_n m$  et  $\vec{N}_n m$  :

$$\vec{V} = \sum_{nm} (a_n \vec{M}_{nm} + b_n \vec{N}_{nm} + A_i C_n \vec{L}_{nm}) \quad (4.1.12)$$

où  $0 \leq m \leq n$  et  $1 \leq n \leq \infty$ .

Plus précisément, les VSWF utilisées ici sont définies par les équations 4.1.13 (Geng , 2004a;

Ren, 1993; Liu , 2005; Stratton, 1941; Nieminen, 2003)

$$\vec{M}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r}) = N_n h_n^{(1,2)}(kr) \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.1.13a)$$

$$\vec{N}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r}) = \frac{h_n^{(1,2)}(kr)}{kr N_n} \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + N_n \left( h_{n-1}^{(1,2)}(kr) - \frac{nh_n^{(1,2)}(kr)}{kr} \right) \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.1.13b)$$

$$\vec{L}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r}) = k N_n \frac{dh_n^{(1,2)}(kr)}{d(kr)} \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + \frac{N_n h_n^{(1,2)}(kr)}{r} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.1.13c)$$

$$Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) = N_n j_n(kr) \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.1.13d)$$

$$Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) = \frac{j_n(kr)}{kr N_n} \vec{P}_{nm}(\theta, \phi) + N_n \left( j_{n-1}(kr) - \frac{nj_n(kr)}{kr} \right) \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (4.1.13e)$$

Pour alléger la notation les arguments des VSWF sont notés  $\vec{F}_{nm}(k\vec{r})$  alors que ces fonctions vectorielles sont explicitement fonction  $\vec{F}_{nm}(kr, \theta, \phi)$ . La variation en  $\theta, \phi$  est donc implicite.

Les harmoniques sphériques vectorielles sont, quant à elles, représentées par les équations 4.1.14

$$\vec{P}_{nm} = Y_{nm} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.1.14a)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{nm} &= r \vec{\nabla} Y_{nm} = r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \\ &= \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (4.1.14b)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_{nm} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\nabla} Y_{nm} = \hat{\mathbf{r}} \times \left( \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \\ &= -\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (4.1.14c)$$

Plus précisément, dans le cas où le champ se propage dans un milieu isotrope, les équations 4.1.15 sont utilisées pour représenter le champ électrique et les équations 4.1.17 pour le champ magnétique (Nieminen, 2003). Pour assurer une bonne convergence, le nombre de modes est limité à  $N_{max} = kr_0$  (Brock, 2001) où  $k$  est le nombre d'onde et  $r_0$  le rayon de la plus petite sphère contenant l'objet.

$$\vec{E}_{inc}(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n a_{nm} Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + b_{nm} Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \quad (4.1.15a)$$

$$\vec{E}_{scat}(r) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n p_{nm} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + q_{nm} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \quad (4.1.15b)$$

$$\vec{E}_{int}(r) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + d_{nm} Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \quad (4.1.15c)$$

Dans le cas d'un milieu anisotrope, l'équation du champ intérieur doit prendre l'une des deux



formes suivantes

$$\vec{D}_{int}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c_{nm}^l Rg \vec{M}_{nm}(k_l \vec{r}) + d_{nm}^l Rg \vec{N}_{nm}(k_l \vec{r}) \quad (4.1.16a)$$

$$\vec{E}_{int}(\vec{r}) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c_{nm}^l Rg \vec{M}_{nm}(k_l \vec{r}) + d_{nm}^l Rg \vec{N}_{nm}(k_l \vec{r}) + e_{nm}^l Rg \vec{L}_{nm}(k_l \vec{r}) \quad (4.1.16b)$$

où  $L$  est le nombre d'éléments non-nuls dans le tenseur de permittivité de la particule et  $k_l$  est le nombre d'onde associé à l'indice de réfraction  $l$ . Lorsque les axes optiques d'un crystal anisotrope sont alignés avec les coordonnées du laboratoire  $(x, y, z)$  et que le faisceau se propage selon l'axe  $z$ , le tenseur de permittivité est diagonal et possède seulement deux indices non-nuls. Ainsi, pour un cristal uniaxial  $L = 2$  et pour un cristal biaxial,  $L = 3$ . Lorsque l'axe optique n'est pas aligné avec  $(x, y, z)$  le tenseur de permittivité aura plusieurs éléments non-nuls et donc  $L > 3$ . Ainsi,  $\vec{D}_{int}$  est la somme d'un nombre fini de VSWF. Le fait d'utiliser plusieurs valeurs de  $k_l$  permet d'inclure plusieurs fonctions avec des variations différentes ce qui permet une meilleure convergence. On peut aussi faire le parallèle avec l'optique de tracé de rayon où le faisceau d'entrée est séparé en plusieurs composantes distinctes. Cependant, ici l'analogie est purement mathématique.

Par ailleurs, on note que la différence entre le champ  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  provient du fait que  $\nabla \bullet \vec{L} \neq 0$ ,  $\nabla \bullet \vec{E} \neq 0$  et que  $\nabla \bullet \vec{D} = 0$ .

On donne ici les équations pour le champ magnétique qui sont très similaires.

$$\vec{H}_{inc}(r) = \frac{1}{\eta_1} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n b_{nm} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + a_{nm} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \quad (4.1.17a)$$

$$\vec{H}_{scat}(r) = \frac{1}{\eta_1} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n q_{nm} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + p_{nm} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \quad (4.1.17b)$$

$$\vec{H}_{int}(r) = \frac{1}{\eta_2} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + d_{nm} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \quad (4.1.17c)$$

Contrairement à la référence (Nieminen , 2007) qui utilise les fonctions de Hankel sphériques pour décrire le champ incident, les fonctions de Bessel sphériques sont utilisées. Ces dernières fonctions ne divergent pas à l'origine contrairement aux fonctions de Hankel. Nos calculs de la matrice de transfert ont montré que l'utilisation de la fonction de Hankel sphérique pour le champ incident limitait la convergence de la matrice de transfert pour les nanocylindres. Ces derniers étant petits par rapport à la longueur d'onde, l'évaluation de la fonction de Hankel sphérique à la surface d'un nanocylindre se rapproche trop de la singularité de la fonction. Cela ralentit la convergence de l'algorithme de calcul de la matrice de transfert et n'est donc pas souhaité.

#### 4.1.4 VSWF dans un milieu anisotrope

Il convient de regarder plus en détail la validité de l'expansion en VSWF de  $\vec{D}$  dans un milieu anisotrope. Premièrement, dans un milieu anisotrope, on a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (4.1.18)$$

où  $\epsilon_r$  est le tenseur diélectrique du milieu étudié. Comme la divergence de  $\vec{E}$  est non-nulle, il convient tout de suite de mentionner que la VSWF  $\vec{L}$  doit être utilisée pour représenter le champ  $\vec{E}$ . Elle n'est cependant pas nécessaire pour représenter  $\vec{D}$ . Ainsi, on peut se sortir de cette difficulté en calculant le champ  $\vec{D}$  au lieu de  $\vec{E}$ . Il y a cependant, un problème plus difficile à régler. En effet, l'équation d'onde anisotrope est différente de l'équation d'onde 4.1.5. Dans un milieu anisotrope sans source, non magnétique avec une perméabilité constante et scalaire, on trouve que l'équation d'onde vectorielle anisotrope est donnée par

$$\nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (4.1.19)$$

où  $k_0^2 = \omega^2/c_0^2$ . On peut aussi définir

$$\nabla \times (\nabla \times \epsilon_r^{-1} \vec{D}) - k_0^2 \vec{D} = 0 \quad (4.1.20)$$

Les VSWF ne sont pas individuellement des solutions aux équations 4.1.19 et 4.1.20. Premièrement,  $\nabla \times \vec{L} = 0$  donc  $\vec{L}$  ne satisfait pas l'équation 4.1.19. Deuxièmement,  $\vec{M}$  et  $\vec{N}$  ne satisfont pas les équations d'onde anisotropes à cause de la présence du tenseur  $\epsilon_r$ . Il y a cependant moyen de contourner cette difficulté.

#### Expansion de VSWF dans un milieu anisotrope

La première approche, présenté par Geng (Geng , 2004b) résoud l'équation d'onde anisotrope dans l'espace de Fourier. La solution est représentée comme une intégrale d'ondes planes  $\vec{E}(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}$  où  $\vec{k}(k, \theta_k, \phi_k)$  représente le vecteur de position dans l'espace de Fourier  $k$  et  $\vec{r}$  est le vecteur de position. À partir de l'équation d'onde dans l'espace  $k$ , l'équation caractéristique  $Det[\mathbf{K}(\vec{k})] = 0$  est obtenue où  $\mathbf{K}(\vec{k})$  est le tenseur construit à partir du tenseur de permittivité (et de perméabilité) du milieu anisotrope. À partir de cette équation, on obtient les vecteurs propres  $\vec{k}_q$  du champ  $\vec{E}(\vec{k})$  avec  $q = 1, 2, 3, 4$ . Dans un milieu homogène et uniaxial anisotrope, il y seulement deux vecteurs propres avec  $q = 1, 3$  et  $q = 2, 4$  respectivement. L'avantage de cette approche est que la représentation en ondes planes permet de déterminer les vecteurs propres des ondes planes dans un milieu anisotrope. Cependant, pour obtenir les solutions dans le système de coordonnées sphériques, les deux ondes planes propres doivent subir une expansion en trois séries de VSWF selon l'équation

$$\vec{F}_q(\theta_k, \phi_k)e^{i\vec{k}_q\vec{r}} = \sum_{n,m} [A_{nm}M_{nm}(\vec{r}, \theta, \phi) + B_{nm}N_{nm}(\vec{r}, \theta, \phi) + C_{nm}L_{nm}(\vec{r}, \theta, \phi)]e^{-im\phi_k} \quad (4.1.21)$$

où  $\vec{F}_q(\theta_k, \phi_k)$  sont des fonctions algébriques représentant l'amplitude du spectre angulaire de distribution  $\vec{E}(\vec{k}_q)$  des deux ondes planes propres. Les coefficients d'expansion en VSWF sont  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$ ,  $C_{nm}$  et dépendent de  $\phi_k$  et  $\theta_k$ . La solution finale  $\vec{E}(r)$  est obtenue par l'intégration des trois expansions en VSWF par rapport à  $\phi_k$  et  $\theta_k$  dans l'espace  $k$  selon

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{q=1}^2 \sum_{n,m} \sum_{n'} \int_0^\pi [A_{nm}(\theta_k)M_{nm}(r,k_q) + B_{nm}(\theta_k)N_{nm}(r,k_q) + C_{nm}(\theta_k)L_{nm}(r,k_q)] P_{n'}^M \cos(\theta_k)k_q^2 \sin(\theta_k)d\theta_k \quad (4.1.22)$$

où les coefficients d'expansion sont calculés à partir de l'intégrale par rapport à  $\theta_k$ .

Dans cette approche, le champ qui est solution à l'équation anisotrope, est en premier lieu calculé comme une combinaison linéaire d'ondes planes qui peuvent avoir une divergence non-nulle. Ensuite, les ondes planes sont, elles, mises en séries de VSWF pour obtenir la solution complète dans le système de coordonnées sphériques (Sarkar Halas, 1997; Schmidt Wriedt, 2009). Un ensemble d'onde plane forme alors un ensemble complet de solution pour l'équation d'onde vectorielle anisotrope 4.1.19. En effet, les ondes planes sont aussi solutions à l'équation d'onde dans le milieu anisotrope et peuvent donc représenter n'importe quel champ électrique. De plus, n'importe quelle onde plane peut être exprimée par une série convergente de VSWF puisque les VSWF forment un ensemble complet. Par extension, il est donc possible que n'importe quel champ électrique anisotrope soit représenté par une série de VSWF.

La seconde approche, proposée par (Liu , 2005), utilise l'expansion directe en VSWF. Pour les champ dépourvus de divergence  $\vec{D}$  et  $\vec{B}$ , l'expansion n'utilise que les  $\vec{M}_{nm}$  et  $\vec{N}_{nm}$  puisque  $\vec{L}_{nm}$  possède une divergence non-nulle. Pour les autres champs avec divergence non-nulle, l'expansion utilise les trois types de VSWF.

La légitimité de l'expansion directe en VSWF provient de la transformée de Fourier inverse du champ électrique dans l'espace- $k$  avec les ondes planes en expansion de VSWF. En effet, l'expansion en deux étapes (expansion en ondes planes qui sont alors calculées en expansion de VSWF) est équivalente à l'expansion en une seule étape (l'expansion directe en VSWF). Dans l'espace de Fourier, la solution à l'équation d'onde vectorielle dans une milieu anisotrope et homogène  $\vec{E}(r,\theta,\phi)$  est représenté par son spectre d'expansion angulaire propre comme

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) = \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\phi_k \int_0^\pi \sin \theta_k d\theta_k E(k,\phi_k,\theta_k) e^{ik \cdot r} \quad (4.1.23)$$

Comme l'onde plane est décrite comme une série de VSWF on a

$$e^{ik \cdot r} = \sum_{n,m} [A_{nm}(\theta_k)M_{nm}(r,k_q) + B_{nm}(\theta_k)N_{nm}(r,k_q) + C_{nm}(\theta_k)L_{nm}(r,k_q)] \quad (4.1.24)$$

En substituant l'équation 4.1.24 dans l'équation 4.1.23 et en inversant l'ordre d'intégration et de sommation, on obtient l'équation 4.1.16a ou 4.1.16b. L'expansion directe des équations

4.1.16a et 4.1.16b est donc une décomposition des vecteurs dans l'espace 3D euclidien. En effet, n'importe quel onde vectorielle  $\vec{E}(r,\theta,\phi)$  ou  $\vec{D}(r,\theta,\phi)$  dans l'espace peut être décomposée comme une combinaison linéaire de trois vecteurs, lesquelles sont représentés par trois séries avec fonctions de bases  $\vec{L}_{nm}(r,\theta,\phi)$ ,  $\vec{M}_{nm}(r,\theta,\phi)$  et  $\vec{N}_{nm}(r,\theta,\phi)$ .

#### 4.1.5 La matrice de transfert

La matrice de transfert permet de faire le pont entre les diverses parties de l'expansion en série de VSWF. Connaissant les coefficients d'expansion du champ incident  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$ , il est possible de calculer les coefficients d'expansion  $p_{nm}$  et  $q_{nm}$  du champ dispersé avec l'équation 4.1.25 et les coefficients d'expansion  $c_{nm}$  et  $d_{nm}$  du champ intérieur avec l'équation 4.1.26 pour un cas isotrope.

$$\begin{bmatrix} p_{nm} \\ q_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{11}_{n'm'} & T^{12}_{n'm'} \\ T^{21}_{n'm'} & T^{22}_{n'm'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n'm'} \\ b_{n'm'} \end{bmatrix} \quad (4.1.25)$$

$$\begin{bmatrix} c_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'^{11}_{n'm'} & T'^{12}_{n'm'} \\ T'^{21}_{n'm'} & T'^{22}_{n'm'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n'm'} \\ b_{n'm'} \end{bmatrix} \quad (4.1.26)$$

Il existe plusieurs façons de calculer une matrice de transfert. Parmi ces méthodes la plus populaire est la méthode dite EBCM (Extended Boundary Condition Method) dont la solution à la matrice de transfert est une intégrale (Mishchenko , 2002). Il est aussi possible d'utiliser la méthode FDTD et la méthode DDA (discrete dipole approximation) pour trouver la relation entre les champs incidents et dispersés (Simpson Hanna, 2011), (Nieminen, 2003). La méthode EBCM est cependant très lente lorsque des objets anisotropes ou non sphériques sont utilisés. Les méthodes de FDTD sont précises, mais toujours lentes à calculer. Il existe aussi la méthode de point matching (Nieminen , 2007) qui permet de faire des calculs plus rapidement que la méthode EBCM lorsque des particules non sphériques sont utilisées.

#### 4.1.6 Méthode par "point matching"

Comme avec toutes les autres méthodes de calcul de la matrice de transfert, dans la méthode dite de "point matching", le champ incident est connu ; c'est-à-dire que les coefficients d'expansions  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$  des équations 4.1.15 et 4.1.17 sont connus. Dans notre cas, le champ incident est un faisceau laser modélisé en utilisant aussi une méthode de point matching comme expliqué à la section 5.1 où une correction au 7e ordre de l'équation du faisceau gaussien est utilisée pour représenter correctement le faisceau hautement focalisé. Ceci nous permet de calculer les coefficients d'expansion  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$  du champ incident par une méthode de point matching sur plusieurs plans transverses.

Pour chaque expansion en séries, chaque coefficient  $a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}, p_{nm}, q_{nm}$  possède un certain nombre de modes inconnus donnés par  $N_{max} (N_{max} + 2)$ . Au total il y a donc

$$4N_{max} (N_{max} + 2)$$

inconnus que sont les  $c_{nm}, d_{nm}, p_{nm}, q_{nm}$ . Pour résoudre toutes ces inconnues, il nous faut donc au moins  $4N_{max} (N_{max} + 2)$  équations. Pour trouver ces équations, les conditions aux frontières normales à la surface peuvent être utilisées comme à la section 4.1.6 ou les conditions tangentielles à la surface comme à la section 4.1.6. Ces conditions aux frontières peuvent donc être utilisées pour construire un système d'équations surdéterminé avec  $8N_{max} (N_{max} + 2)$  équations. Le but de cette démarche étant d'assurer et d'étendre la validité de l'expansion en série des VSWF à l'extérieur des frontières de l'objet d'intérêt, ainsi que de compenser pour toutes équations colinéaires qui pourrait se retrouver dans notre système d'équations.

La procédure générale d'un algorithme de point matching consiste à construire un système d'équations linéaires en utilisant un calcul point par point dans l'espace. Chaque point correspond à une coordonnée  $(x, y, z)$  ou  $(r, \theta, \phi)$  et donne une équation linéaire supplémentaire. Sous une forme matricielle compacte, un algorithme de point matching peut être écrit sous la forme  $Ax = B$  où  $x$  est un vecteur inconnu,  $B$  est un vecteur où les composantes peuvent être calculées et  $A$  est une matrice qui est aussi calculée. La longueur du vecteur inconnu  $x$  spécifie donc le nombre de paramètres inconnus. Le nombre d'équations linéaires doit donc être égal ou supérieur au nombre d'inconnus pour trouver une solution  $x = A^{-1}B$ . Posons  $x$  comme étant un vecteur colonne. Dans ce cas, chaque ligne de la matrice  $A$  et du vecteur  $B$  correspondent à une équation linéaire différente. Similairement, chaque column de la matrice  $A$  représente un coefficient –un chiffre– qui multiplie chaque inconnu du vecteur  $x$ .

Dans le cas particulier de la matrice de transfert, les inconnus sont  $p_{nm}, q_{nm}, c_{nm}, c_{nm}$  représentant chaque mode de l'expansion en VSWF du champ dispersé et intérieur décrites par les équations 4.1.15. Ces inconnus formeront donc le vecteur colonne  $x$ . D'un autre côté, le champ incident est connu et peut donc être calculé en tout point dans l'espace sous la forme du vecteur  $B$ . Les autres paramètres qui sont connus sont les VSWF  $Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}), Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}), \vec{M}_{nm}(k\vec{r})$  et  $Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r})$  qui peuvent être évaluées à n'importe quel point dans l'espace. Seule la relation entre les coefficients inconnus et connus est nécessaire.

À ce point, les mathématiques pour les cas isotrope et anisotrope sont identiques. On utilise donc ici le cas isotrope pour simplifier l'écriture. En utilisant les équations aux frontières normales 4.1.46 ou tangentielles 4.1.55 on obtient un système d'équations qui est représenté par les 2 équations 4.1.27 suivantes :

$$\begin{aligned} \left( n_1^2(\vec{E}_{inc})_n \right) &= \left( n_2^2\vec{E}_{int} - n_1^2\vec{E}_{scat} \right)_n \\ \left( \vec{E}_{inc} \right)_t &= \left( \vec{E}_{int} - \vec{E}_{scat} \right)_t \end{aligned} \tag{4.1.27}$$

où les indices  $n$  et  $t$  représentent les conditions normales ou tangentielles.

En remplaçant les équations pour le champ électrique 4.1.15 et magnétique 4.1.17 dans la partie de droite de l'équation 4.1.27 pour la condition tangentielle  $\parallel$  ou normale  $\perp$ , l'équation 4.1.28 est obtenue

$$\left[ \begin{aligned} E_{inc}(\theta, \phi) &= - \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n p_{nm} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + q_{nm} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + d_{nm} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \end{aligned} \right]_{\perp \parallel} \quad (4.1.28)$$

où le produit avec les tenseurs  $n_1^2$  et  $n_2^2$  doit être réalisé lorsque la composante normale est utilisée.

Ensuite, en remplaçant, mode par mode –c'est-à-dire qu'un seul mode du champ incident est considéré à la fois– la partie de droite de l'équation 4.1.28 en suivant les équations 4.1.15a et 4.1.17a, on obtient pour le champ électrique les deux équations suivantes.

$$\left[ \begin{aligned} a_{n'm'} Rg \vec{M}_{n'm'}(k\vec{r}) &= - \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n p_{nm} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + q_{nm} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c_{nm} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + d_{nm} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \end{aligned} \right]_{\perp \parallel} \quad (4.1.29a)$$

$$\left[ \begin{aligned} b_{n'm'} Rg \vec{N}_{n'm'}(k\vec{r}) &= - \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n p'_{nm} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + q'_{nm} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n c'_{nm} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + d'_{nm} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \end{aligned} \right]_{\perp \parallel} \quad (4.1.29b)$$

En divisant chaque mode des équations 4.1.29 par  $a_{n'm'}$  et  $b_{n'm'}$  respectivement et en utilisant les définitions suivantes  $t_{11} = p_{nm}/a_{n'm'}$ ,  $t_{21} = q_{nm}/a_{n'm'}$ ,  $t'_{11} = c_{nm}/a_{n'm'}$ ,  $t'_{21} = d_{nm}/a_{n'm'}$ ,  $t_{12} = p_{nm}/b_{n'm'}$ ,  $t_{22} = q_{nm}/b_{n'm'}$ ,  $t'_{12} = c_{nm}/b_{n'm'}$ ,  $t'_{22} = d_{nm}/b_{n'm'}$  on obtient les équations suivantes pour le champ électrique

$$\left[ \begin{aligned} Rg \vec{M}_{n'm'}(k\vec{r}) &= - \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t_{11} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + t_{21} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t'_{11} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + t'_{21} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \\ Rg \vec{N}_{n'm'}(k\vec{r}) &= - \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t_{12} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + t_{22} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ &+ \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t'_{12} Rg \vec{M}_{nm}(k\vec{r}) + t'_{22} Rg \vec{N}_{nm}(k\vec{r}) \end{aligned} \right]_{\perp \parallel} \quad (4.1.30)$$

et les équations suivantes pour le champ magnétique dans le cas où les conditions sont tan-

gentielles seulement

$$\left[ \begin{array}{l} Rg\vec{N}_{n'm'}(k\vec{r}) = -\frac{1}{\eta_1} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t_{11} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + t_{21} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ \quad + \frac{1}{\eta_2} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t'_{11} Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) + t'_{21} Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) \\ Rg\vec{M}_{n'm'}(k\vec{r}) = -\frac{1}{\eta_1} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t_{12} \vec{N}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) + t_{22} \vec{M}_{nm}^{(1)}(k\vec{r}) \\ \quad + \frac{1}{\eta_2} \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n t'_{12} Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) + t'_{22} Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) \end{array} \right]_{\parallel} \quad (4.1.31)$$

En écrivant les deux dernières équations 4.1.30 et 4.1.31 sous forme matricielle en remplaçant les symboles sommations par  $[\ ]$  et en enlevant les arguments  $(k\vec{r})$  pour alléger l'écriture, le système d'équations suivant est obtenu pour le champ électrique

$$\left[ \begin{array}{cc} Rg\vec{M}_{n'm'} & Rg\vec{N}_{n'm'} \end{array} \right]_{\perp\parallel} = \left[ \begin{array}{cc} -[\vec{M}_{nm}^{(1)}] & -[\vec{N}_{nm}^{(1)}] \\ [Rg\vec{M}_{nm}] & [Rg\vec{N}_{nm}] \end{array} \right]_{\perp\parallel} \left[ \begin{array}{cc} t_{11} & t_{12} \\ \vdots & \vdots \\ t_{21} & t_{22} \\ \vdots & \vdots \\ t'_{11} & t'_{12} \\ \vdots & \vdots \\ t'_{21} & t'_{22} \\ \vdots & \vdots \end{array} \right] \quad (4.1.32)$$

et le système d'équations suivantes pour le champ magnétique

$$\left[ \begin{array}{cc} Rg\vec{N}_{n'm'} & Rg\vec{M}_{n'm'} \end{array} \right]_{\perp\parallel} = \frac{1}{\eta_1} \left[ \begin{array}{cc} -[\vec{N}_{nm}^{(1)}] & -[\vec{M}_{nm}^{(1)}] \\ \frac{\eta_1}{\eta_2} [Rg\vec{N}_{nm}] & \frac{\eta_1}{\eta_2} [Rg\vec{M}_{nm}] \end{array} \right]_{\parallel} \left[ \begin{array}{cc} t_{11} & t_{12} \\ \vdots & \vdots \\ t_{21} & t_{22} \\ \vdots & \vdots \\ t'_{11} & t'_{12} \\ \vdots & \vdots \\ t'_{21} & t'_{22} \\ \vdots & \vdots \end{array} \right] \quad (4.1.33)$$

qui peuvent être résolus pour obtenir la matrice de transfert. La résolution du système d'équations matriciel sous la forme  $Ax = B$  est donc réalisé de façon à ce que  $x$  représente la matrice de transfert. Le vecteur  $B$  contient donc sur chaque ligne les VSWF incidentes évaluées en plusieurs points sur la surface de l'objet. Quant à elle, la matrice  $A$  est construite en utilisant les VSWF du champ intérieur et dispersé. Chaque ligne de cette matrice représente donc un point différent sur la surface de l'objet.

Si chaque mode du vecteur de gauche de l'équation 4.1.32 est multiplié par son mode  $a_{nm}$  ou  $b_{nm}$  respectif et qu'on rassemble les termes des expansions en séries du champ dispersé et intérieur, on obtient :

$$\vec{E}_{scat} = [\vec{M}_{nm}^{(1)}](t_{11}a_{n'm'} + t_{12}b_{n'm'}) + [\vec{N}_{nm}^{(1)}](t_{21}a_{n'm'} + t_{22}b_{n'm'}) \quad (4.1.34a)$$

$$\vec{E}_{int} = [Rg\vec{M}_{nm}^{(1)}](t'_{11}a_{n'm'} + t'_{12}b_{n'm'}) + [Rg\vec{N}_{nm}^{(1)}](t'_{21}a_{n'm'} + t'_{22}b_{n'm'}) \quad (4.1.34b)$$

En regroupant les coefficients d'expansion des VSWF individuellement ( $\vec{M}_{nm}^{(1)}$ ,  $\vec{N}_{nm}^{(1)}$ ,  $Rg\vec{M}_{nm}^{(1)}$  et  $Rg\vec{N}_{nm}^{(1)}$ ) et en utilisant les équations 4.1.15, on peut déduire par analogie que les coefficients du champ dispersé sont donnés par

$$p_{nm} = t_{11}a_{n'm'} + t_{12}b_{n'm'} \quad (4.1.35)$$

$$q_{nm} = t_{21}a_{n'm'} + t_{22}b_{n'm'} \quad (4.1.36)$$

et que les coefficients du champ intérieur sont donnés par

$$c_{nm} = t'_{11}a_{n'm'} + t'_{12}b_{n'm'} \quad (4.1.37)$$

$$d_{nm} = t'_{21}a_{n'm'} + t'_{22}b_{n'm'} \quad (4.1.38)$$

De la dernière équation 4.1.34, on peut déduire que la matrice de transfert des coefficients du champ incident vers le champ dispersé est donnée par la matrice suivante

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1.39)$$

et que la matrice de transfert des coefficients du champ incident vers le champ intérieur est donnée par la matrice suivante

$$T' = \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1.40)$$

Ajoutons que, comme les nanobarres sont symétriques par rapport à leur axe central qui est fixe et aligné avec l'axe  $z$ , le problème peut se simplifier encore plus. En effet, dans notre cas le nanobarre est symétrique par rapport à l'axe  $z$ . Comme il est mentionné à la référence (Tsang, 1984), les valeurs de la matrice de transfert sont nulles à moins que  $m' = m$ . Ainsi, dans



le cas général où aucune symétrie n'est présente, la situation est représentée par l'équation 4.1.41 pour un mode.

$$\sum_{n=1}^{N_{\max}} \sum_{m=-n}^n \left( -\vec{M}_{nm}^{(1)} t_{11} - \vec{N}_{nm}^{(1)} t_{21} + Rg \vec{M}_{nm} t'_{11} + Rg \vec{N}_{nm} t'_{21} \right) = Rg \vec{M}_{n'm'} \quad (4.1.41)$$

ce qui donne  $4N_{\max} (N_{\max} + 2)$  inconnues pour un mode. Cependant, dans le cas symétrique, la situation est représentée par l'équation 4.1.42

$$\sum_{n=1}^{N_{\max}} \left( -\vec{M}_{nm'}^{(1)} t_{11} - \vec{N}_{nm'}^{(1)} t_{21} + Rg \vec{M}_{nm'} t'_{11} + Rg \vec{N}_{nm'} t'_{21} \right) = Rg \vec{M}_{n'm'} \quad (4.1.42)$$

où il y a seulement  $N_{\max}$  inconnus à résoudre. On peut donc générer une matrice de  $2N_{\max} + 2$  points sur la surface pour résoudre la matrice de transfert.

Une fois le système d'équations construit on obtient une équation matricielle sous la forme  $AX = B$  qui peut être résolu en procédant par décomposition matricielle LU ou QR.

### Conditions aux frontières normales

La section précédente a permis d'expliquer comment le système d'équations linéaire construit en utilisant les conditions aux frontières permettait de solutionner la matrice de transfert. On explique ici pourquoi et comment le choix d'une condition aux frontières normale nous a permis d'étendre la validité de la méthode de point matching aux cas des objets anisotropes. En effet, la méthode développée à la référence (Nieminen , 2007) qui utilise la condition aux frontières tangentielle pour le calcul de la matrice de transfert ne permet pas de solutions aux cas anisotropes.

Pour trouver la relation entre les coefficients d'expansion du champ incident  $a_{nm}, b_{nm}$  et du champ dispersé par le nanobarre  $p_{nm}, q_{nm}$  on a besoin de la matrice de transfert (T) qui permet de donner la relation matricielle entre les deux expansions en série de VSWF comme à l'équation 4.1.25. Quant à elles, les conditions aux frontières permettent de construire le système d'équations nécessaire à la résolution de la matrice de transfert par la méthode de "point matching". Ainsi, la solution trouvée dépend du type de conditions aux frontières que l'on utilise.

L'équation 4.1.43 représente les conditions aux frontières pour un milieu quelconque.

$$\begin{aligned} E_{1t} &= E_{2t} \\ \hat{a}_{n2} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s \\ \hat{a}_{n2} \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \rho_s \\ B_{1n} &= B_{2n} \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

où les indices 1 et 2 représentent le champ électrique dans le milieu incident et intérieur à l'objet respectivement. Notons aussi que  $\vec{D} = n^2 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  où  $\vec{J}_s$  représente les courants de surface et  $\rho_s$  représente la charge libre.

Les autres articles publiés utilisant le principe de "point matching" pour le calcul de la matrice de transfert (Nieminen , 2007) utilisent la condition aux frontières tangentielles  $E_{1t} = E_{2t}$ , ce qui veut dire que les valeurs de  $\vec{J}_s$  et de  $\rho_s$  sont laissées aléatoires. En effet, la condition aux frontières  $E_{1t} = E_{2t}$  est toujours respectée même si l'autre condition aux frontières s'écrit  $\hat{a}_{n2} \times (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$  avec  $\rho_s \neq 0$ . La condition aux frontières tangentielle ne fait donc pas la différence avec une valeur de  $\rho_s = 0$  pour un milieu diélectrique sans perte ou une valeur de  $\rho_s \neq 0$  pour un milieu conducteur. Ainsi, lorsque l'on utilise la condition aux frontières  $E_{1t} = E_{2t}$  pour résoudre d'une matrice T, on laisse une variable de libre : la charge de surface. En effet, on ne stipule pas directement dans les équations que la charge libre doit être nulle. Ainsi, on ne traite pas nécessairement le problème d'un diélectrique parfait, comme dans le cas qui nous occupe ici. Il est donc suggéré d'utiliser les conditions aux frontières normales, car les résultats obtenus convergent mieux dû au fait qu'une information supplémentaire est donnée au problème. Par le fait même, les résultats obtenus sont plus précis.

Les conditions aux frontières pour un conducteur parfait sont représentées par l'équation 4.1.44.

$$\begin{aligned}
E_{1t} &= E_{2t} = 0 \\
\hat{a}_{n2} \times \vec{H}_1 &= \vec{J}_s \\
\hat{a}_{n2} \bullet (\vec{D}_1) &= \rho_s \\
B_{1n} &= B_{2n} = 0
\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

tandis que les conditions aux frontières pour un diélectrique parfait sont représentées par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
E_{1t} &= E_{2t} \\
\hat{a}_{n2} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= 0 \\
\hat{a}_{n2} \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= 0 \\
B_{1n} &= B_{2n}
\end{aligned} \tag{4.1.45}$$

La condition  $\hat{a}_{n2} \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$  permet de fixer la charge. C'est donc cette équation qui devrait être utilisée pour le calcul de matrices de transfert. Il faut ajouter que cette condition aux frontières permet d'amener une autre information supplémentaire au problème. Elle permet d'inclure l'effet d'un indice de réfraction  $n$  matriciel -milieu anisotrope- sur le champ électrique. C'est cette propriété va qui permettre de calculer les matrices de transfert pour le cas où on a une biréfringence uniaxiale ou biaxiale.

En effet, si on détaille la condition  $\hat{a}_{n2} \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$  où  $\rho_s = 0$ , on obtient  $\hat{a}_{n2} \bullet (n_1^2 \vec{E}_1 - n_2^2 \vec{E}_2) = 0$  où l'indice 1 désigne le champ extérieur et l'indice 2 le champ intérieur. Il est aussi possible d'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} (\vec{D}_1)_n &= (\vec{D}_2)_n \\ (\vec{D}_{inc} + \vec{D}_{scat})_n &= (\vec{D}_{int})_n \\ (n_1^2 \vec{E}_{inc})_n &= (\vec{D}_{int} - n_1^2 \vec{E}_{scat})_n \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

où les indices  $n$  représente les composantes normales à la surface,  $n_1$  et  $n_2$  représentent le milieu extérieur et le milieu intérieur à l'objet respectivement et sont donnés par

$$n_1 = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 \end{bmatrix} \quad (4.1.47)$$

pour un milieu extérieur à l'objet isotrope comme de l'eau (donc  $n_1$  est un scalaire) et par

$$n_2 = \begin{bmatrix} n_{aa} & n_{ab} & n_{ac} \\ n_{ba} & n_{bb} & n_{bc} \\ n_{ca} & n_{cb} & n_{cc} \end{bmatrix} \quad (4.1.48)$$

pour un objet biréfringent duquel les axes principaux du crystal ne correspondent pas avec le système de coordonnées. Dans le cas où le système de coordonnées correspond avec un axe principal du cristal, le tenseur diélectrique se simplifie comme dans l'équation 4.1.49.

$$n_2 = \begin{bmatrix} n_a & 0 & 0 \\ 0 & n_b & 0 \\ 0 & 0 & n_c \end{bmatrix} \quad (4.1.49)$$

Il est possible de diagonaliser tout tenseur diélectrique non diagonal. En effet, pour diagonaliser un tenseur diélectrique diagonal, on peut multiplier le tenseur diélectrique non diagonal par une ou plusieurs matrices de rotations successives (Jazar, 2010), (Hand Finch, 1998). On peut effectuer des rotations selon  $(R_{x,\theta}, R_{z,\phi}, R_{y,\gamma})$  comme données par les équations 4.1.50 autour de l'axe X, Z et Y respectivement.

$$\begin{aligned}
R_{x,\theta} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \\
R_{z,\phi} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_{y,\gamma} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1.50}$$

Dans le traitement classique de la biréfringence biaxiale, le faisceau incident est séparé en 3 composantes à l'intérieur de l'objet. Chaque composante possède une direction de polarisation différente comme expliqué dans (Brehat Wyncke, 1993). Dans le milieu extérieur, une onde plane représente le champ électromagnétique et dans le milieu intérieur à l'objet, le champ électromagnétique est représenté par une superposition de trois ondes planes avec des polarisations et des nombres d'ondes différents.

Dans le cas qui nous occupe, le traitement est similaire, mais on utilise une superposition d'ondes sphériques vectorielles pour représenter chacune des parties du champ électromagnétique dans le milieu extérieur et intérieur au lieu des ondes planes. Deux expansions en séries de VSWF dans le milieu extérieur représentent l'onde incidente et l'onde dispersée par l'objet. Dans le milieu intérieur à l'objet, on a trois expansions en séries de VSWF (dans le cas où le tenseur diélectrique est diagonal) qui ont un nombre d'ondes  $k$  distinct représentant chacune des directions de polarisation différentes du tenseur symétrique 4.1.49. De ce fait, la direction de propagation de chacune des composantes n'est plus donnée par le nombre d'onde  $k$  qui est ici scalaire, mais par la composante vectorielle de l'expansion en série de VSWF. Il est cependant important de rappeler que ces analogies sont purement mathématique et que l'utilisation de plusieurs valeurs différentes de  $k$  permet d'inclure un spectre de VSWF plus large qui rend possible une convergence de l'algorithme de la matrice de transfert.

Ainsi, la condition aux frontières normale de l'équation 4.1.45 est exprimée comme à l'équation 4.1.51 dans le cas où le tenseur diélectrique est diagonal

$$a_{n2} \bullet \epsilon_0 \left[ \begin{array}{c} n_1^2 \left( \vec{E}_{inc}(k\vec{r}) + \vec{E}_{scat}(k\vec{r}) \right) \\ - \left( \vec{D}^a(k_a\vec{r}) + \vec{D}^b(k_b\vec{r}) + \vec{D}^c(k_c\vec{r}) \right) \end{array} \right] = 0 \tag{4.1.51}$$

où  $k_i = 2\pi n_i/\lambda$  sont scalaires,  $i = a, b$  ou  $c$  et  $n_i$  représente les trois indices de réfraction possible sur la diagonale. Notez que c'est cette information supplémentaire venant du produit scalaire qui permet de trouver la direction de propagation des ondes à l'intérieur de l'objet. Dans le cas classique, la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement à l'interface est une condition aux frontières qui se traduit par la loi de Snell et qui dicte la direction des faisceaux dans le milieu anisotrope alors qu'ici, c'est l'équation des conditions aux frontières données par l'équation de Maxwell 4.1.45 qui dicte la direction des ondes à l'intérieur de l'objet.

Dans le cas où le tenseur diélectrique est complètement non diagonal, on procède de la même façon, c'est-à-dire que l'on traite chaque composante du tenseur diélectrique séparément comme on le ferait dans le cas classique. Dans ce cas, la condition aux frontières normale est exprimée comme à l'équation 4.1.52 où le champ intérieur est décomposé en 9 composantes du champ possédant chacune leur nombre d'onde propre et une direction de propagation qui peut être différente.

$$a_{n2} \bullet \left[ \begin{array}{c} n_1^2 \left( \vec{E}_{inc}(k\vec{r}) + \vec{E}_{scat}(k\vec{r}) \right) \\ - \left( \begin{array}{c} \vec{D}^{aa}(k_{aa}\vec{r}) + \vec{D}^{ab}(k_{ab}\vec{r}) + \vec{D}^{ac}(k_{ac}\vec{r}) \\ + \vec{D}^{ba}(k_{ba}\vec{r}) + \vec{D}^{bb}(k_{bb}\vec{r}) + \vec{D}^{bc}(k_{bc}\vec{r}) \\ + \vec{D}^{ca}(k_{ca}\vec{r}) + \vec{D}^{cb}(k_{cb}\vec{r}) + \vec{D}^{cc}(k_{cc}\vec{r}) \end{array} \right) \end{array} \right] = 0 \quad (4.1.52)$$

Par ailleurs, le lecteur doit faire attention aux systèmes de coordonnées s'il veut utiliser la valeur de  $\vec{D}$  pour calculer  $\vec{E}$ . En effet, dans la partie de droite de l'équation  $\vec{D} = n_2^2 \epsilon_0 \vec{E}$ , le champ est calculé en coordonnées sphériques et forme aussi un vecteur en coordonnées sphériques avec les VSWF. Cependant, le tenseur diélectrique est donné en coordonnées cartésiennes. On doit donc faire la transition entre les 2 types de coordonnées pour assurer de la validité de la condition aux frontières. Le champ peut être calculé dans n'importe quel système de coordonnées pourvu que son vecteur (représentant sa polarisation) soit en coordonnées cartésiennes. Ainsi, on doit avoir pour le calcul de  $\vec{D}$ , le champ  $\vec{E}$  sous la forme  $\begin{bmatrix} D_x & D_y & D_z \end{bmatrix} = n_2^2 \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x(r, \theta, \phi) & E_y(r, \theta, \phi) & E_z(r, \theta, \phi) \end{bmatrix}$ . Notez qu'il est aussi possible de transformer la base du tenseur.

Comme mentionné plus haut, le milieu intérieur à l'objet est séparé en trois ou neuf expansions en séries de VSWF, tout dépendant si le tenseur diélectrique est diagonal ou non. Chaque expansion en VSWF possède un nombre d'ondes distinct et chaque expansion représente une direction de polarisation différente. L'équation 4.1.53 représente donc le champ électromagnétique intérieur pour le cas où le tenseur est diagonal. Il est important de mentionner à ce point-ci que le traitement qui suit est identique si on a un tenseur non diagonal. En effet, on peut résumer en disant que chaque composante non nulle du tenseur diélectrique donne naissance à une expansion en VSWF. Ainsi, on peut se limiter à trois expansion en VSWF

dans le but d'alléger la notation et d'ainsi rendre les explications plus claires.

$$\vec{D}_2 = \vec{D}^a(k_a \vec{r}) + \vec{D}^b(k_b \vec{r}) + \vec{D}^c(k_c \vec{r}) \quad (4.1.53)$$

On verra plus loin que le champ intérieur n'est pas nécessaire pour le calcul des forces, stress et torques ; il ne fait donc aucune différence d'obtenir le calcul du champ pour  $\vec{D}$  ou pour  $\vec{E}$ .

Il faut aussi noter que l'on ne peut pas, dans le cas où l'on utilise des conditions aux frontières normales à la surface, utiliser les équations du champ magnétique pour doubler le nombre d'équations linéaires construites comme mentionné à la section 4.1.6, car les conditions aux frontières normales pour le champ magnétique sont différentes et ne permettent pas d'inclure l'anisotropie du milieu. On note cependant que le champ magnétique peut être calculé simplement à partir du champ électrique et qu'il n'est de toute façon pas nécessaire de le connaître comme on verra dans les sections suivantes.

### Conditions aux frontières tangentielles

Dans le cas où l'on utilise les conditions aux frontières tangentielles à l'interface, on connaît le champ incident comme dans le cas où l'on utilise les conditions aux frontières normales pour le calcul de la matrice de transfert (T). Autrement dit, on connaît les valeurs des coefficients d'expansion du champ hautement focalisé provenant du faisceau laser.

Comme mentionné à la section 4.1.6, on a l'équation 4.1.43 qui représente les conditions aux frontières pour un milieu quelconque. Rappelons aussi que l'utilisation des conditions aux frontières tangentielles est la méthode utilisée par les autres articles publiés utilisant le principe de "point matching" pour le calcul de la matrice de transfert (Nieminen , 2007). Ainsi, la condition  $E_{1t} = E_{2t}$ , est appliquée pour former un système d'équations linéaires, ce qui veut dire que les valeurs de  $\vec{J}_s$  et de  $\rho_s$  sont laissées aléatoires.

Mentionnons cependant que cette méthode donne des résultats très proches de ceux obtenus avec les conditions aux frontières normales dans le cas isotrope comme il est montré à la figure 4.1 qui donne la distribution de stress sur deux nanobarres possédant les mêmes propriétés physiques. S'il n'est pas nécessaire de calculer la dispersion du champ pour un objet anisotrope, alors les conditions aux frontières tangentielles peuvent être utilisées. Cela a l'avantage de simplifier très légèrement le calcul de la matrice de transfert comme nous allons le montrer dans cette section. Ainsi, dans les deux premières publications faites durant mon doctorat (Bareil Sheng, 2010a) et (Rancourt-Grenier , 2010) et la seconde conférence (Bareil Sheng, 2010b) présentée à San Diego lors de la tenue de «SPIE Optics and Photonics», la matrice de transfert a été construite en utilisant des conditions tangentielles.

Pour utiliser cette condition aux frontières, on définit l'indice de réfraction du milieu autour de la particule comme étant un scalaire  $n_1$  et le milieu à l'intérieur de l'objet est aussi défini comme étant un scalaire avec un indice de réfraction  $n_2$  et donc cet objet est considéré isotrope.

Dans ce cas-ci, peu importe l'orientation de l'objet, l'indice de réfraction est fixe. La première simplification de cette méthode provient du fait que faisceau incident n'a besoin d'être séparé qu'en un faisceau dispersé et un faisceau intérieur comme aux équations 4.1.15 et 4.1.17. En effet, on a pas besoin de supposer que le faisceau intérieur est séparé en trois parties distinctes comme dans le cas où un objet anisotrope est étudié. L'équation pour une condition aux frontières tangentiellles est

$$a_{n2} \times \left( \vec{E}_{inc}(kr) + \vec{E}_{scat}(kr) \right) = a_{n2} \times \vec{E}_{int}(k_a r) \quad (4.1.54)$$

qui peut aussi s'exprimer de la façon suivante

$$\begin{aligned} (\vec{E}_{1t} - \vec{E}_{2t}) &= 0 \\ \left( \vec{E}_1 \right)_t &= \left( \vec{E}_2 \right)_t \\ \left( \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{scat} \right)_t &= \left( \vec{E}_{int} \right)_t \\ \left( \vec{E}_{inc} \right)_t &= \left( \vec{E}_{int} - \vec{E}_{scat} \right)_t \end{aligned} \quad (4.1.55)$$

où l'indice  $t$  représente la composante tangentielle.

La seconde simplification provient du fait que, dans le cas d'un milieu anisotrope, on devait changer le système de coordonnées des VSWF de sphérique à cartésien pour les produits avec la matrice d'indice de réfraction et vice-versa. Dans ce cas-ci, on peut multiplier l'indice de réfraction scalaire par les VSWF en coordonnées sphériques directement sans faire de changement de base.

Il reste finalement à générer assez d'équations aux frontières pour résoudre la matrice de transfert. Comme mentionné à la section 4.1.6 il y a  $N_{max} (N_{max} + 2)$  coefficients d'expansion inconnus par groupe que sont les  $p_{nm}$ ,  $q_{nm}$ ,  $c_{nm}$  et  $d_{nm}$  ce qui fait  $4N_{max} (N_{max} + 2)$  inconnus. On doit donc générer une grille de  $8N_{max} (N_{max} + 2)$  points pour s'assurer d'utiliser un algorithme de "point matching" surdéterminé pour résoudre le système linéaire. Dans le cas où l'objet d'intérêt possède un axe de symétrie de révolution, il y a seulement  $N_{max}$  inconnus à résoudre. On peut donc générer une matrice de  $2N_{max} + 2$  points sur la surface pour résoudre la matrice de transfert.

Il faut aussi noter qu'on peut, dans le cas où l'on utilise des conditions aux frontières tangentiellles à la surface, utiliser les équations du champ magnétique pour doubler le nombre d'équations linéaires construites comme mentionné à la section 4.1.6. Ainsi, le nombre de points sur la surface nécessaires à évaluer diminue de moitié par rapport aux valeurs mentionnées ci-haut.

## 4.2 Comparaison des résultats

Comme on peut le constater en regardant les deux dernières sections, la différence dans le calcul d'une matrice de transfert en utilisant une condition aux frontières normale et une condition aux frontières tangentielle est quand même assez importante du point de vue mathématique. Il est donc intéressant de regarder ce qu'il advient des résultats que l'on peut obtenir des deux méthodes. En effet, comme il a été dit, les conditions aux frontières normales permettent de pousser plus loin la méthode du «point matching» en permettant le calcul du champ électromagnétique dans le cas où un objet anisotrope est d'intérêt. Cependant, il est quand même possible d'utiliser les conditions aux frontières normales pour le calcul du champ électromagnétique dans le cas d'un objet isotrope. On est donc en droit de se demander l'impact que cela peut apporter aux résultats. En effet, les conditions aux frontières permettent de fixer la charge libre à  $\rho = 0$  comme mentionné à la page 29, ce qui n'est pas le cas des conditions aux frontières tangentielles.

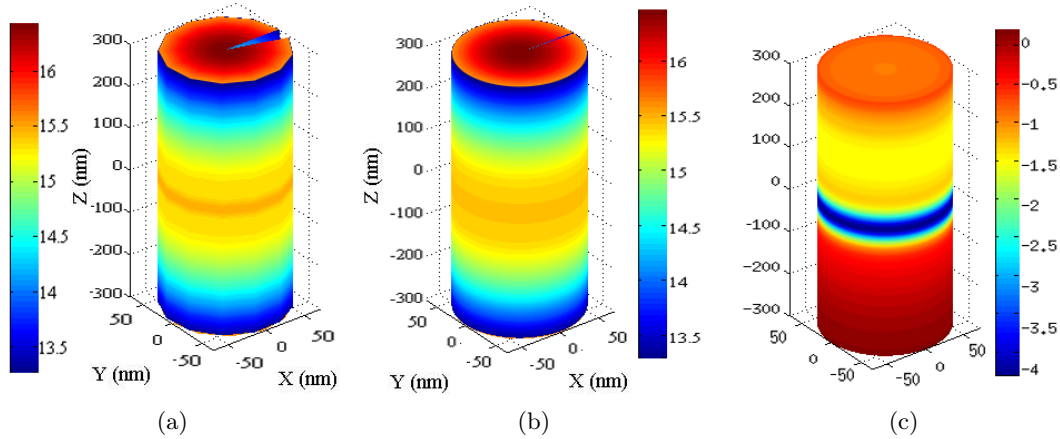


FIGURE 4.1: Stress en  $\text{Nm}^{-1}$  appliqué sur un cylindre isotrope avec un indice de réfraction de  $n_2 = 1.59$ , une longueur  $H = 600$  nm et un rayon  $R = 70$  nm entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$  où le faisceau laser se propage sur l'axe-z avec un angle  $\theta = 0$  calculé avec (a) des conditions aux frontières normales et (b) des conditions aux frontières tangentielles. En (c) on peut voir le pourcentage d'écart entre les valeurs des figures (a) et (b).

Les figures 4.1 permettent de voir l'impact du choix d'une condition aux frontières sur un calcul typique de la distribution de stress sur des nanobâres isotropes de dimensions moyenne  $R = 70$  nm,  $H = 600$  nm avec un indice de réfraction standard. L'impact entre les deux types de méthode de calcul est assez minime puisque la distribution de stress ne change que très peu entre les paires de figures. Le pourcentage d'écart est maximal au centre de la distribution de stress à -4%. On note que le signe négatif signifie que les conditions aux frontières tangentielles amènent des valeurs de stress plus importantes. Ainsi, comme on devait s'y attendre, les deux conditions aux frontières permettent d'obtenir des résultats similaires dans le cas isotrope. Le calcul du stress est discuté à la section 6.1.



Quant à elles, les figures 4.2 permettent de voir l'impact du choix d'une condition aux frontières sur le calcul du torque lorsque le nanocylindre possède des dimensions  $R = 70 \text{ nm}$ ,  $H = 600 \text{ nm}$  ou des dimensions  $R = 100 \text{ nm}$ ,  $H = 1200 \text{ nm}$ . Le calcul de torque est discuté à la section 6.3. Les calculs effectués avec les deux types de conditions aux frontières sont tellement près l'un

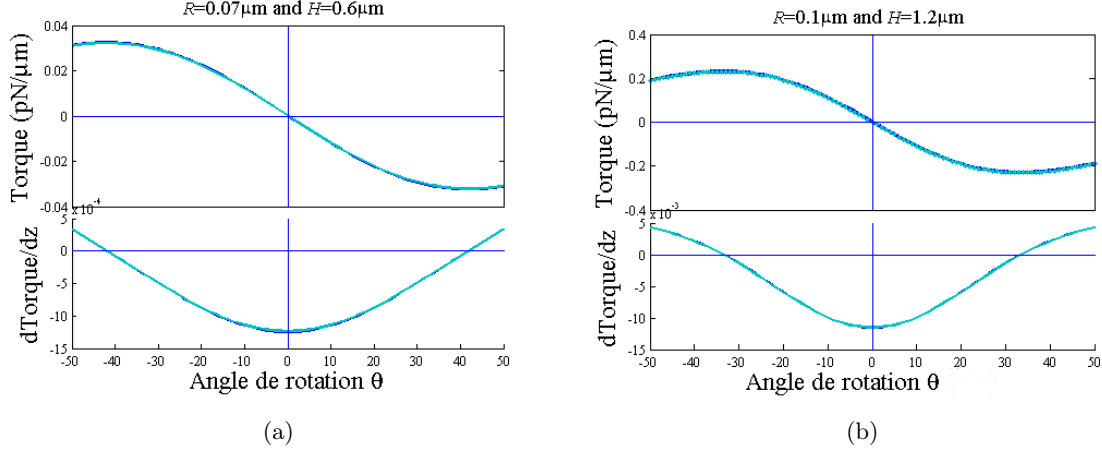


FIGURE 4.2: Torque en  $pN \mu\text{m}^{-1}$  appliqué sur un cylindre isotrope avec un indice de réfraction de  $n_2 = 1.59$ , une dimension de (a)  $R = 70 \text{ nm}$ ,  $H = 600 \text{ nm}$  et (b)  $R = 100 \text{ nm}$ ,  $H = 1200 \text{ nm}$  entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$  où le faisceau laser se propage sur l'axe- $z$  avec un angle  $\theta = 0$  calculé avec des conditions aux frontières normales en bleu et des conditions aux frontières tangentiellles en vert

de l'autre, qu'il est impossible de distinguer les courbes de torque et de dérivée du torque. Pour cette raison, les courbes apparaissent en turquoise qui est le mélange de couleurs bleue et verte. Comme on devait s'y attendre, les deux conditions aux frontières donnent des résultats, pour le calcul du torque, qui sont équivalents.

Comme il est expliqué à la section 4.1.6, il est plus compliqué et légèrement plus lent de faire les calculs en utilisant une condition aux frontières normales. Cependant, cela nous permet de faire des calculs avec des objets anisotropes. La figure 4.3 montre la distribution de stress sur un nanocylindre anisotrope dont le tenseur diélectrique diagonal est donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.59 & 0 & 0 \\ 0 & 1.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1.59 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

possédant une longueur  $H = 600 \text{ nm}$  et un rayon  $R = 70 \text{ nm}$ .

Comme les résultats effectués avec les deux types de conditions aux frontières sont équivalents, il est possible de comparer des résultats provenant des deux méthodes de calcul sans craindre d'insérer des différences qui proviendraient du calcul lui-même et non de la différence physique.

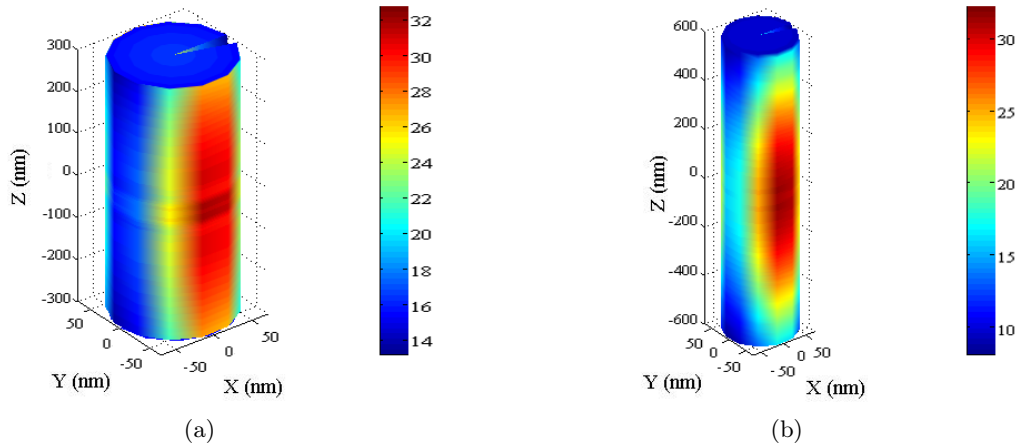


FIGURE 4.3: Stress en  $\text{Nm}^{-1}$  appliqué sur un cylindre anisotrope avec un indice de réfraction de  $n_2$  comme en 4.2.1, une longueur (a)  $H = 600$  nm (b)  $H = 1200$  nm et un rayon  $R = 70$  nm entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$  où le faisceau laser se propage sur l'axe-z avec un angle  $\theta = 0$

#### 4.2.1 Méthode EBCM

La méthode de résolution de la matrice de transfert la plus populaire est sans conteste la méthode EBCM qui signifie «Extended Boundary Condition Method». Dans certaines publications l'acronyme EBCM est même utilisé comme synonyme de la méthode de la matrice de transfert. L'idée de cette méthode EBCM est de résoudre directement l'équation d'Helmholtz par intégration. La précision de la méthode dépend alors grandement de la précision de la méthode d'intégration utilisée. Aussi, cela signifie-t-il que la vitesse à laquelle la solution peut être trouvée dépend grandement de la symétrie du problème, comme expliqué à la référence (Waterman, 1971).

L'équation d'Helmholtz est donnée par

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (4.2.2)$$

où les VSWF définies à la page 19 sont solutions de cette équation. Cependant, pour simplifier la notation, on procède ici comme à la référence (Waterman, 1971) en utilisant comme solution à l'équation d'Helmholtz les équations suivantes pour le champ incident  $\vec{E}_i$  et le champ diffusé  $\vec{E}_s$ . Notez que l'on ne peut pas utiliser cette méthode de résolution de la matrice de transfert pour des calculs avec des objets biréfringents. Ce n'est donc pas la méthode privilégiée pour le présent document.

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= \sum_n a_n Rg(\vec{\psi}_n(kr)) \\ \vec{E}_s(r) &= \sum_n f_n \vec{\psi}_n(kr) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Dans ce formalisme simplifié, les fonctions  $\vec{\psi}_n(kr)$  et  $Rg(\vec{\psi}_n(kr))$  représentent les fonctions de base de l'expansion en série du champ électromagnétique incident et dispersé. De la même façon qu'aux sections 4.1.6 et 4.1.6, la fonction  $Rg(\vec{\psi}_n(kr))$  est utilisée pour définir le champ incident, car ce dernier doit être continu à l'origine. En effet, on explique à la page 19 que les fonctions régulières (Rg) utilisent une fonction de Bessel pour leur dépendance avec la distance du point d'origine ( $r$ ) tandis que les autres fonctions non-régulières utilisent une fonction de Hankel. Les fonctions de Bessel sont continues à l'origine tandis que les fonctions de Hankel divergent à l'origine. De cette façon, on peut définir une matrice de transfert simplifiée définie par  $f_m = \sum_n T_{mn} a_n$ .

On définit aussi les équations de Maxwell 4.2.4 et l'identité de Green 4.2.5,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= iw\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= -iw\varepsilon\vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \bullet \vec{H} &= 0 \\ \nabla \bullet \vec{E} &= \rho/\epsilon\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

$$\int_V \left[ G\hat{a} \bullet \nabla \times \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \bullet \nabla \times \nabla \times G\hat{a} \right] dV = - \int_S \left( \vec{E} \times \nabla \times G\hat{a} - G\hat{a} \times \nabla \times \vec{E} \right) \bullet \vec{n} ds\tag{4.2.5}$$

$$G = \frac{e^{ikr}}{r}\tag{4.2.6}$$

où  $\hat{a}$  est un vecteur unitaire arbitraire,  $\vec{n}$  est la normale à la surface et  $G$  est la fonction de Green donnée par l'équation 4.2.6. De plus, en utilisant les relations 4.2.7 et les équations de Maxwell,

$$\begin{aligned}A \times B \times C &= B(A \bullet C) - C(A \bullet B) \\ A \bullet [B \times (C \times D)] &= (A \times B) \bullet (C \times D) \\ A \bullet (B \times C) &= B \bullet C \times A \\ \nabla(A \bullet B) &= (A \bullet \nabla)B + (B \bullet \nabla)A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A)\end{aligned}\tag{4.2.7}$$

on trouve que

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \vec{E} &= k^2 + iw\mu\vec{J} \\ \nabla \times G\hat{a} &= \nabla G \times \hat{a} \\ \nabla \times \nabla \times G\hat{a} &= \hat{a}k^2G + \nabla(\hat{a} \bullet \nabla G) \\ \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= k^2 + \nabla \times \vec{J}\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

En appliquant les relations 4.2.8 à l'identité de Green 4.2.5, on trouve que

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[ G\hat{a} \bullet \nabla \times \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \bullet \nabla \times \nabla \times G\hat{a} \right] dV \\
&= \int_V \left[ G\hat{a} \left( k^2 \vec{E} + i\omega\mu J \right) - \vec{E} G\hat{a} k^2 - \vec{E} \bullet \nabla (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \\
&= \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \vec{E} \bullet \nabla (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \tag{4.2.9} \\
&= \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} + \nabla \bullet \vec{E} (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \\
&= \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} + \frac{\rho}{\epsilon} (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV
\end{aligned}$$

où le troisième terme de la première égalité de l'équation 4.2.9 vient du fait que

$$\nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} = [(\hat{a} \bullet \nabla) \nabla G + (\nabla G \bullet \nabla) \hat{a}] \vec{E}$$

ce qui fait que

$$\vec{E} \bullet \nabla (\hat{a} \bullet \nabla G) = \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} - \nabla \bullet \vec{E} (\hat{a} \bullet \nabla G)$$

En utilisant les égalités définies en 4.2.8, on peut aller plus loin et dire que l'équation de Green 4.2.9 peut se simplifier sous la forme

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} + \frac{\rho}{\epsilon} (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \\
&= - \int_S \left( \vec{E} \times \nabla \times G\hat{a} - G\hat{a} \times \nabla \times \vec{E} \right) \bullet \vec{n} ds \\
&= - \int_S \left[ \left( \vec{E} \times \nabla G \times \hat{a} \right) \bullet \vec{n} - \left( G\hat{a} \times \left( i\omega\mu \vec{H} \right) \right) \bullet \vec{n} \right] ds \tag{4.2.10} \\
&= - \int_S \left[ \hat{a} \bullet \nabla G \times \left( \vec{n} \times \vec{E} \right) - G\hat{a} \bullet \left( i\omega\mu \vec{H} \times \vec{n} \right) \right] ds
\end{aligned}$$

ce qui nous donne une identité sous la forme

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} + \frac{\rho}{\epsilon} (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \\
&= - \int_S \left[ \hat{a} \bullet \nabla G \times \left( \vec{n} \times \vec{E} \right) - G\hat{a} \bullet \left( i\omega\mu \vec{H} \times \vec{n} \right) \right] ds \tag{4.2.11}
\end{aligned}$$

De plus, en sortant de l'identité 4.2.11 le paramètre  $\hat{a}$  et en utilisant le théorème de la divergence sur le second terme de la première égalité de 4.2.11, on a

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[ i\omega\mu G\hat{a} \bullet \vec{J} - \nabla \bullet (\hat{a} \bullet \nabla G) \vec{E} + \frac{\rho}{\epsilon} (\hat{a} \bullet \nabla G) \right] dV \\
&= \hat{a} \bullet \int_V \left[ i\omega\mu G\vec{J} + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla G \right] dV - \hat{a} \bullet \int_S \left( \vec{E} \bullet \vec{n} \right) \nabla G ds \tag{4.2.12} \\
&= \hat{a} \bullet \int_S \left[ \left( \vec{n} \times \vec{E} \right) \times \nabla G + G \left( i\omega\mu \vec{H} \times \vec{n} \right) \right] ds
\end{aligned}$$

ce qui se simplifie pour donner

$$\begin{aligned}
\int_V \left[ iw\mu G \vec{J} + \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla G \right] dV &= \int_S \left[ (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G + G (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + (\vec{E} \bullet \vec{n}) \nabla G \right] ds \\
&= \int_S \left[ G (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \nabla G \right] ds
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

À partir de ce point, il convient de noter que la fonction de Green est discontinue en  $r = 0$ , ainsi on sépare le volume en 2 surfaces sphériques  $Stot = S + S'$ , où  $S'$  est la surface intérieure.

On a donc

$$\nabla G = \left( \frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{r} r_0$$

où  $\vec{r}_0 = -\vec{n}$  sur la surface intérieure. Si  $r$  tend vers 0, on a pour la dernière égalité de 4.2.12

$$\begin{aligned}
&\int_S \left[ G (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \nabla G \right] ds \\
&= \lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_S \left[ \frac{1}{r_1} (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + \left( \frac{1}{r_1} - ik \right) \frac{\vec{r}_0}{r_1} \times (\vec{E} \times \vec{n}) + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \left( \frac{1}{r_1} - ik \right) \frac{\vec{r}_0}{r_1} \right] ds
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

en utilisant l'identité,

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \bullet \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \bullet \vec{B})$$

on peut faire la simplification suivante

$$\vec{r}_0 \times (\vec{E} \times \vec{n}) = (\vec{r}_0 \bullet \vec{n}) \vec{E} - (\vec{E} \bullet \vec{n}) \vec{r}_0 + \vec{E} \times (\vec{r}_0 \bullet \vec{n}) = -\vec{E} - (\vec{E} \bullet \vec{n}) \vec{r}_0$$

Ainsi, l'identité 4.2.14 devient

$$\begin{aligned}
&\int_S \left[ G (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \nabla G \right] ds \\
&= \lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_S \left[ \frac{1}{r_1} (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) + \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{ik}{r_1} \right) \vec{E} \right] ds \\
&= \lim_{r_1 \rightarrow 0} \left[ \frac{4\pi r_1^2}{r_1} (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) - \left( \frac{1}{r_1^2} \right) \vec{E}_0 4\pi r_1^2 \right] \\
&= -4\pi \vec{E}
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned}
\vec{E} \rightarrow r_{externe} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) G + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \nabla G \right] ds \\
0 \rightarrow r_{interne} &
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Comme  $G$  est fonction de la distance entre 2 points, on peut dire que  $G = G(r - r')$  et redéfinir 4.2.16 comme suit

$$\begin{aligned}
\vec{E} \rightarrow r_{externe} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ (iw\mu \vec{H} \times \vec{n}) G(r - r') + (\vec{n} \times \vec{E}) \times \nabla G(r - r') \right. \\
0 \rightarrow r_{interne} &\quad \left. + (\vec{n} \bullet \vec{E}) \nabla G(r - r') \right] ds'
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

où  $\nabla = -\nabla'$ , ce qui nous permet de dire que

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow r_{\text{externe}} &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left( iw\mu\vec{H} \times \vec{n} \right) G(r-r') ds' \\ 0 \rightarrow r_{\text{interne}} &\quad -\frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_S \left( \vec{n} \times \vec{E} \right) G(r-r') ds' \\ &\quad -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_S \left( \vec{n} \bullet \vec{E} \right) G(r-r') ds' \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Finalement, si on multiplie par l'opérateur rotationnel et qu'on intègre par partie la première partie de l'équation 4.2.18 en servant des équations de Maxwell, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow r_{\text{externe}} &= \nabla \times \nabla \times \int_S \left( \vec{n} \times \vec{H} \right) G(R) id s' + \nabla \times \int_S \left( \vec{n} \times \vec{E} \right) G(R) k ds' \\ 0 \rightarrow r_{\text{interne}} &\end{aligned} \quad (4.2.19)$$

où, pour faire disparaître le facteur  $4\pi$  de l'équation précédente, on substitue la fonction de Green selon la règle

$$G(R) = \frac{e^{ik(R)}}{R} \rightarrow \frac{e^{ik(R)}}{4\pi k R}$$

La méthode dite «Extended boundary condition» est appelée ainsi parce que l'on étend la validité du champ électromagnétique à l'intérieur de la région par le biais de  $r'$ . On va donc trouver les champs extérieurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sur le côté extérieur de la particule et, comme on connaît le champ incident, on va utiliser l'équation 4.2.19 pour résoudre le champ dispersé.

### 4.3 Comparaison avec FDTD

Afin de tester les résultats de calcul effectués avec la matrice de transfert, un logiciel commercial de calcul par FDTD, OptiFDTD de la compagnie Optiwave (version 9) a été utilisé. Il est cependant important de préciser que ce logiciel n'est pas adapté pour faire le calcul de stress, de torques ou de forces sur des particules dans une pince optique. Il pose deux défis de taille.

Le premier défi provient du traitement nécessaire à effectuer au champ électromagnétique calculé par le logiciel. En effet, ce logiciel permet de visualiser en quatre dimensions (espace,  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$ ) la distribution du champ électromagnétique. Cependant, il ne permet l'exportation du champ électromagnétique qu'en couches bidimensionnelles. Pour importer tout le champ électromagnétique autour du nanocylindre dans un logiciel comme Matlab<sup>®</sup> pour en faire un traitement externe, il faut faire des milliers opérations manuelles très longues pour extraire chacune des couches bidimensionnelles successives. Précisons que l'utilisateur doit, dans ce cas, répéter lui-même toutes ces opérations puisqu'il n'y a pas moyen d'automatiser l'exportation avec le logiciel OptiFDTD. Pour remédier à cette situation, un programme fonctionnant sous Linux a été conçu. Ce programme permet, sans l'interaction d'un utilisateur de bouger la souris, cliquer, exporter et renommer manuellement des centaines de fichiers d'exportation

du logiciel OptiFDTD de façon automatique. En copiant et en ajustant le programme de l'Annexe C, on sauve ainsi une quantité incroyables d'heures de travail répétitif où les erreurs sont inévitables.

Le second défi provient du calcul du champ électromagnétique incident. Ce logiciel ne permet pas de simuler un champ électromagnétique incident sous une forme gaussienne convergente. Les enveloppes gaussiennes disponibles à la simulations sont toujours divergentes. Ce qui est très loin de représenter le faisceau que nous utilisons dans le calcul avec la matrice de transfert comme expliqué à la section 5.1. Comme les calculs de forces, de stress et de torque sont réalisés pour des applications dans les pinces optiques, cela ne convient pas.

Pour contourner le problème, la solution la plus simple, utilisée ici, consiste à simuler seulement la moitié du problème. Par exemple, pour calculer le stress sur la surface d'un cylindre anisotrope résultant de l'interaction d'un faisceau gaussien avec un cylindre de 600 nm de longueur, un cylindre de 300nm de longueur est simulé dans le logiciel FDTD. Le faisceau incident de largeur minimale  $2w_0$  est alors positionné à une extrémité du cylindre. Une fois le champ électrique récupéré avec le programme automatisé, on calcul le stress en utilisant Matlab(R). La section montre comment calculer le stress sur la surface. De cette façon, il est possible de comparer la distribution de stress sur la moitié du cylindre. Comme le stress est assez symétrique par rapport au plan  $xy$  situé en  $z = 0$ , la comparaison est assez bonne.

Deux raisons principales font en sorte que les résultats obtenus avec FDTD en procédant de cette manière sont beaucoup moins précis. Premièrement, le faisceau gaussien doit impérativement être collé à une extrémité du cylindre. Le problème dans ce cas est que le logiciel FDTD garde toujours une valeur du champ constante à cet endroit. Ainsi, sur le côté collé au champ incident le champ électromagnétique simulé sera beaucoup trop intense car il ne sera pas dispersé. Ceci revient à imposer une valeur à une extrémité du cylindre sans tenir compte de la dispersion.

L'exemple du nanocylindre de rayon  $R = 70$  nm et de longueur  $H = 600$  nm est repris à la figure 4.4 pour comparer les calculs obtenus avec la matrice de transfert dans le cas anisotrope où un tenseur d'indice de réfraction interne est donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.59 & 0 & 0 \\ 0 & 1.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1.59 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Comme il a été mentionné ci-haut, le stress est nécessairement beaucoup plus élevé à l'entrée du demi nanocylindre dans le cas où les calculs sont réalisés avec FDTD, car on impose à cet endroit une intensité précise du champ électromagnétique qui n'est donc pas dispersé. Outre cela, les deux figures montrent des similarités assez importantes. En effet, à chaque  $90^\circ$  de

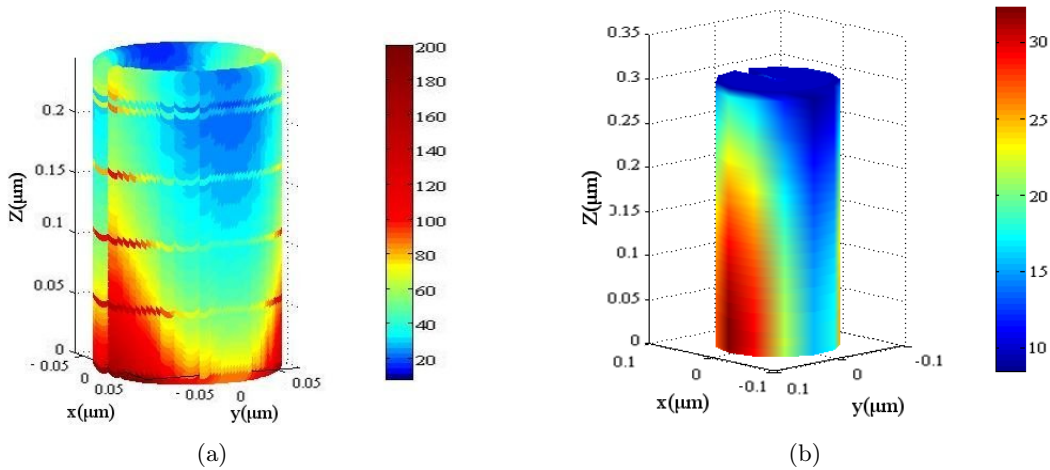


FIGURE 4.4: Stress normal à la surface en  $\text{Nm}^{-1}$  appliqué sur un cylindre anisotrope avec un tenseur diélectrique donné par  $n_2$  (4.3.1), une longueur  $H = 600 \text{ nm}$  et un rayon  $R = 70 \text{ nm}$  entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$  où le faisceau laser se propage sur l'axe- $z$  avec un angle  $\theta = 0$  calculé avec (a) FDTD et (b) la méthode de la matrice de transfert

rotation dans la direction  $\pm\phi$ ; c'est-à-dire autour de l'axe de symétrie du nanocylindre, un changement du stress maximal au stress minimal s'effectue. Cette brisure dans la symétrie du stress avec l'axe de symétrie du nanocylindre n'est pas visible dans les cas où l'on calcule le stress avec un objet isotrope comme mis en évidence aux Figures 4.1 est donc caractéristique d'un tenseur diélectrique comme celui utilisé aux Figures 4.4. Par ailleurs, avec les deux méthodes de calcul, le stress diminue avec la longueur du cylindre à mesure que l'on se rapproche de l'extrémité du demi nanocylindre. On peut donc déduire que la variation du stress est très similaire dans les deux cas. Comme les forces et les torques peuvent être calculés avec le stress, on peut aussi déduire que les forces et torques prédits avec un logiciel FDTD qui permettraient de bien modéliser le faisceau incident donneraient aussi des résultats similaires.

#### 4.4 Comparaison sur particule sphérique

La méthode de calcul développée pour le calcul de la matrice de transfert a aussi été utile pour le calcul des forces appliquées sur des globules rouges sphériques (Rancourt-Grenier, 2010). De plus, cela a permis de comparer les résultats obtenus avec la méthode de la matrice de transfert dans le cas d'objets beaucoup plus grands que la longueur d'onde. Dans ce cas, les particules peuvent être étudiées approximativement par la méthode du tracé de rayon ou un logiciel commercial FDTD. Ils ont aussi été comparés avec la théorie de Mie généralisée qui est une solution analytique des équations de Maxwell.

Il faut noter que les résultats de calculs de FDTD ne peuvent pas être identiques à ceux



obtenus avec la méthode de la matrice de transfert parce que le logiciel commercial FDTD Optiwave pour les mêmes raisons que celle évoquée à la section précédente ; c'est-à-dire que le logiciel commercial ne permet pas de simuler un faisceau incident convergent. Quant au tracé de rayon, c'est une méthode approximative.

À la référence (Rancourt-Grenier , 2010), un faisceau hautement focalisé sur une globule rouge modélisé par une surface sphérique de rayon  $R = 3.86 \mu\text{m}$  est modulé par un acousto-optique à haute fréquence. Ceci permet de déplacer assez rapidement le faisceau laser pour que le système s'apparente à un système à deux faisceaux espacés d'une certaine distance. Les résultats calculés avec la méthode développée ici sont très près de ceux obtenus par la méthode du tracé de rayon ou obtenus par le logiciel FDTD. On note qu'ils sont identiques aux résultats obtenus avec la théorie de Mie généralisée. Pour le respect des droits d'auteur, les lecteurs sont invités à comparer, à la figure 1 du travail publié dans (Rancourt-Grenier , 2010). Cette figure montre la distribution de stress calculée avec une  $NA = 1.25$  lorsque le faisceau laser est déplacé latéralement d'un côté et de l'autre d'une particule à une certaine fréquence. Les calculs ont été faits avec diverses distances d'oscillation du faisceau gaussien incident et comparés avec le tracé de rayon, le calcul avec FDTD et la méthode de la matrice de transfert développée ici.

# Chapitre 5

## Champ incident

### 5.1 Calcul du champ incident

Les faisceaux laser ne sont habituellement pas solutions de l'équation d'Helmholtz. On ne peut donc pas se servir de cette équation ou de toute autre fonction solution de l'équation d'Helmholtz pour représenter parfaitement le champ électromagnétique d'un laser. Cependant, lorsqu'un faisceau laser fonctionnant en mode fondamental  $TEM_{00}$  est utilisé, le profil émi se rapproche alors d'une enveloppe gaussienne. Dans notre cas, la pince optique utilisée au laboratoire fonctionne en mode fondamental et la plupart des études sur les nanobares fonctionnent aussi avec un mode  $TEM_{00}$  ce qui rend le faisceau gaussien une bonne approximation à utiliser. Précisons que selon (Davis, 1979; Barton Alexander, 1989), pour obtenir des résultats de plus grande précision pour un faisceau laser hautement focalisé, les corrections aux ordres supérieurs devraient être utilisées.

Le facteur le plus important dans une pince optique est bien entendu le faisceau laser. Il sera modélisé ici comme un faisceau gaussien. En utilisant cette définition du champ incident, on peut définir une largeur  $w_0$  qui représente la demi-largeur minimale du faisceau. Elle est définie au centre de la trappe optique ; c'est-à-dire au point le plus petit du faisceau gaussien qui est situé au point focal. Cette valeur minimale de  $w_0$  est déterminé par la limite de diffraction. L'équation de cette largeur minimale est donnée par la formule suivante (Smith , 1999) pour un faisceau gaussien.

$$w_0 = \frac{1.22\lambda_0}{n} \sqrt{\left(\frac{n}{NA}\right)^2 - 1} \quad (5.1.1)$$

Notons que la formule classique de la limite de diffraction  $Z = 0.61\lambda/NA$  où  $Z$  est la séparation entre deux objets est aussi valide. Cependant, l'équation 5.1.1 tient compte du caractère spécial d'une enveloppe gaussienne et de la définition de la largeur  $w_0$ .

Par exemple, dans le cas qui nous intéresse, les nanobares sont capturés dans l'eau où  $n = 1.33$ , avec une longueur d'onde de  $\lambda = 1064$  nm et une ouverture numérique de  $NA = 1.2$ .

Le rayon minimal du faisceau gaussien est alors de  $w_0 = 440$  nm. La solution à l'équation d'Helmholtz pour une enveloppe gaussienne paraxiale nécessite l'utilisation de l'approximation de l'enveloppe lente ; c'est-à-dire que la variation de l'enveloppe du faisceau gaussien est lente par rapport à la fréquence du laser. Pour satisfaire à cette approximation, la largeur du faisceau laser doit respecter la condition suivante (Siegman, 1986)

$$w_0 \gg \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}} \quad (5.1.2)$$

Ce qui donne la condition  $w_0 \gg 0.23$  mm pour un faisceau gaussien avec une longueur d'onde  $\lambda = 1.064$  mm. En effet, selon (Siegman, 1986), on doit avoir

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{2k\partial u}{\partial z} \right| \quad (5.1.3)$$

où l'enveloppe paraxiale du faisceau gaussien est donnée par

$$u = \frac{u_0}{q(z)} \exp \left[ -j \frac{kr^2}{2q(z)} \right] \quad (5.1.4)$$

On a  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} |_{r=0} = \frac{2u_0}{q^3}$  et  $\frac{\partial u}{\partial z} |_{r=0} = \frac{-u_0}{q^2}$  d'où

$$\left| \frac{2u_0}{q^3} \right| \ll \left| \frac{-2ku_0}{q^2} \right| \quad (5.1.5)$$

$$\left| \frac{1}{q} \right| \ll |k| \quad (5.1.6)$$

$$1 \ll |kq| \quad (5.1.7)$$

où

$$q = q_0 + z \quad (5.1.8)$$

$$q = jz_R + z \quad (5.1.9)$$

où  $z_R$  est la distance de Rayleigh. On a donc

$$kq = k(q_0 + z) \quad (5.1.10)$$

$$kq = k(jz_R + z) \quad (5.1.11)$$

$$kq = k\sqrt{z^2 + z_R^2} \quad (5.1.12)$$

ce qui rend la condition de l'enveloppe lente sous la forme

$$k\sqrt{z^2 + z_R^2} \gg 1 \quad (5.1.13)$$

ainsi, pour avoir une condition satisfaite partout en  $z$  (même en  $z = 0$ ), on doit avoir

$$kz_R \gg 1 \quad (5.1.14)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \gg 1 \quad (5.1.15)$$

$$w_0 \gg \frac{\lambda}{\pi\sqrt{2}} \quad (5.1.16)$$

Ainsi, avant d'utiliser l'équation gaussienne pour représenter notre champ incident, il faut préciser un dernier détail important. Lorsque l'on utilise un faisceau laser fonctionnant en mode  $TEM_{00}$  dans une pince optique, on doit tenir compte du caractère hautement focalisé du faisceau incident. En effet, les lasers sont utilisés avec des lentilles à très grande ouverture numérique qui changent la distribution électromagnétique du faisceau laser au foyer. Comme on peut le voir ci-haut, la condition à respecter pour obtenir une distribution correcte du champ est de  $w_0 \gg 230$  nm pour un faisceau paraxial alors que la largeur pour un faisceau –dans l'eau  $n = 1.33$ , avec une longueur d'onde de  $\lambda = 1064$  nm et une ouverture numérique de  $NA = 1.2$ – est de  $w_0 = 440$  nm. On peut donc dire que la condition est respectée faiblement et que la distribution paraxiale aux hautes  $NA$  peut-être approximative au mieux. Ainsi, la description du faisceau gaussien devra être étudiée en tenant compte du caractère spécial des faisceaux aux grandes  $NA$ .

De plus, les VSWF devront être utilisées pour calculer l'expansion en série du champ incident comme défini à la section 4.1.5 et plus particulièrement comme à l'équation 4.1.15a. Rappelons que le champ incident utilise l'équation 4.1.15a puisque les VSWF régulières sont convergentes à l'origine.

### 5.1.1 Point Matching Method

#### Champ lointain

Une façon simple de tenir compte du caractère hautement focalisé du champ électromagnétique est d'utiliser une solution dite de «point matching» comme à la référence (Nieminen , 2003). Cet algorithme est très similaire à celui utilisé pour le calcul de la matrice de transfert. Dans ce cas-ci, on doit préalablement calculer la distribution du champ électromagnétique à l'endroit voulu. Par exemple, les corrections du deuxième au septième ordre peuvent être utilisées comme montré aux références (Davis, 1979; Barton Alexander, 1989; Cao , 2002; Zhang, 2010) pour calculer très précisément la distribution du champ électromagnétique au centre de la pince optique. Ensuite, un système d'équations linéaires est créé avec les VSWF. Les paramètres d'expansion  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$  représentent  $N_{max}(N_{max} + 2)$  inconnus chacun ce qui donne  $2N_{max}(N_{max} + 2)$  inconnus à trouver. Pour les trouver, un système surdéterminé d'équations est construit avec par exemple  $4N_{max}(N_{max} + 2)$  équations. Chaque équation est donc construite en utilisant la valeur du champ calculé en un point donné et la valeur du champ que l'on doit calculer en utilisant l'équation 4.1.15a.

Précisons que le fait d'utiliser un système surdéterminé permet de résoudre les paramètres  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$  –donc l'expansion mathématique du champ électromagnétique– selon une moyenne quadratique qui permet d'améliorer la qualité de l'expansion en série. Notons aussi qu'un système surdéterminé peut permettre d'éviter des erreurs de convergence dans le cas où certaines équations linéaires ne seraient pas complètement linéairement indépendantes les unes des autres.

Mathématiquement, le système d'équation est construit de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{inc}(r_1, \theta_1, \phi_1) \\ \vec{E}_{inc}(r_2, \theta_2, \phi_2) \\ \vdots \\ \vec{E}_{inc}(r_F, \theta_F, \phi_F) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n \begin{pmatrix} a_{nm} Rg\vec{M}_{nm}(kr_1, \theta_1, \phi_1) \\ + b_{nm} Rg\vec{N}_{nm}(kr_1, \theta_1, \phi_1) \end{pmatrix} \\ \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n \begin{pmatrix} a_{nm} Rg\vec{M}_{nm}(kr_2, \theta_2, \phi_2) \\ + b_{nm} Rg\vec{N}_{nm}(kr_2, \theta_2, \phi_2) \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{N_{max}} \sum_{m=-n}^n \begin{pmatrix} a_{nm} Rg\vec{M}_{nm}(kr_F, \theta_F, \phi_F) \\ + b_{nm} Rg\vec{N}_{nm}(kr_F, \theta_F, \phi_F) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (5.1.17)$$

où  $F = 4N_{max} (N_{max} + 2)$ . La matrice de gauche représente le champ électromagnétique que l'on a préalablement calculé avec une méthode comme aux références (Davis, 1979; Barton Alexander, 1989) ou autre. On évalue le champ en différents points dans l'espace que l'on positionne sur différentes lignes. La matrice de droite représente l'équation 4.1.15a qui est l'expansion en série de VSWF du champ incident pour chaque point dans l'espace.

Si on prend chaque composante de l'expansion en série et que l'on réécrit la dernière équation sous forme matricielle en remplaçant les symboles de sommations par [ ], on obtient l'équation matricielle suivante pour chacune des lignes de l'équation 5.1.17

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_{inc}(r, \theta, \phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [Rg\vec{M}_{nm}(r, \theta, \phi)] & [Rg\vec{N}_{nm}(r, \theta, \phi)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.1.18)$$

où les symboles  $\vdots$  représentent différents coefficients d'expansion en série pour des valeurs de  $n$  et  $m$  différentes. Comme on peut calculer la valeur numérique des fonctions  $Rg\vec{M}_{nm}$  et  $Rg\vec{N}_{nm}$ , seuls les paramètres  $a_{nm}$  et  $b_{nm}$  sont inconnus.

Ainsi, une fois le système d'équations construit, seule la matrice colonne

$$\begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

est inconnue et peut donc être résolue directement ce qui donne une expansion en série de VSWF qui représente le champ préalablement calculé.

Pour construire le système d'équations de l'équation 5.1.17 le champ au plan focal peut être utilisé (Nieminen , 2003). Le champ lointain est aussi une option viable pour faire le calcul et permet aussi de tenir compte du caractère hautement focalisé du faisceau gaussien. Il est important de noter que contrairement à la référence (Nieminen , 2003), nous calculons ici l'expansion dans le cas où le champ électromagnétique incident est donné par l'équation 4.1.15 qui utilise les VSWF régulières 4.1.15a au lieu d'utiliser des VSWF du second ordre 5.1.39.

Il est donc utile de définir la valeur asymptotique des fonctions de Hankel sphériques pour des grands arguments (Louis, 2000).

$$h_n^{(1)}(kr)|_{kr \gg n^2} = (-j)^{n+1} \frac{e^{jkr}}{kr} \quad (5.1.19)$$

$$h_n^{(2)}(kr)|_{kr \gg n^2} = (j)^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{kr} \quad (5.1.20)$$

qui peuvent aussi s'écrire selon

$$h_n^{(1)}(kr)|_{kr \gg n^2} = \frac{\exp\left(jkr - j(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \quad (5.1.21)$$

$$h_n^{(2)}(kr)|_{kr \gg n^2} = \frac{\exp\left(-jkr + j(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \quad (5.1.22)$$

ce qui donne pour la fonction de Bessel sphérique

$$j_n(kr)|_{kr \gg n^2} = \frac{1}{2}h_n^{(1)}(kr)|_{kr \gg n^2} + \frac{1}{2}h_n^{(2)}(kr)|_{kr \gg n^2} \quad (5.1.23)$$

$$j_n(kr)|_{kr \gg n^2} = \frac{\exp\left(jkr - j(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2kr} + \frac{\exp\left(-jkr + j(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2kr} \quad (5.1.24)$$

$$j_n(kr)|_{kr \gg n^2} = \frac{\cos\left(kr - j(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \quad (5.1.25)$$

Ainsi, l'équation 4.1.13 devient dans le cas asymptotique des arguments très grands ( $kr \gg n^2$ )

$$\vec{M}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n (\mp j)^{n+1} \frac{\pm e^{jkr}}{kr} \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (5.1.26a)$$

$$\vec{N}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n h_{n-1}^{(1,2)}(kr)|_{kr \gg n^2} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (5.1.26b)$$

$$= N_n (\mp j)^n \frac{\pm e^{jkr}}{kr} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (5.1.26c)$$

$$Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n \frac{\cos\left(kr - (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{kr} \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (5.1.26d)$$

$$Rg\vec{N}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n \frac{\cos\left(kr - \frac{n\pi}{2}\right)}{kr} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (5.1.26e)$$

Les équations 5.1.26 permettent donc de calculer rapidement l'expansion en série de VSWF dans le champ lointain ; c'est-à-dire la matrice au centre de l'équation 5.1.18 dans le cas où  $kr \gg n^2$ .

Nous avons aussi besoin de l'équation du champ électromagnétique dans le champ lointain. Le champ électromagnétique scalaire normalisé pour la puissance est donné par l'équation paraxiale 5.1.29 en coordonnées cartésiennes (Siegman, 1986).

$$E(x,y,z) = \sqrt{\frac{4P}{\pi c_n \epsilon_n}} \frac{q_0}{w_0 q(z)} \exp \left[ -jkz - jk \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] \quad (5.1.27)$$

$$= \sqrt{\frac{4P}{\pi c_n \epsilon_n}} \frac{q_0}{w_0 q(z)} \exp \left[ -jkz - jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \quad (5.1.28)$$

$$= E_0 \frac{1}{w(z)} \exp \left[ -jkz + j\psi(z) - jk \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \quad (5.1.29)$$

où  $P$  est la puissance du faisceau en Watt,  $c_n$  est la vitesse de la lumière dans le milieu,  $\epsilon_n$  est la permittivité du milieu,  $q_0 = jz_R$  avec  $z_R$  la distance de Rayleigh  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ ,  $q(z) = q_0 + z$  avec aussi

$$E_0 = \sqrt{\frac{4P}{\pi c_n \epsilon_n}} \quad (5.1.30)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (5.1.31)$$

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (5.1.32)$$

$$\psi(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (5.1.33)$$

En coordonnées cylindriques où  $\rho^2 = x^2 + y^2$  l'équation paraxiale 5.1.29 devient

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{1}{w(z)} \exp \left[ -jkz + j\psi(z) - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \quad (5.1.34)$$

Dans le champ lointain où  $z \gg z_R$  l'équation 5.1.31 devient  $w(z) = \frac{2z}{kw_0}$ , l'équation 5.1.32 devient  $R(z) = z$  où  $\psi(z) = \pi/2$  tandis qu'en utilisant la règle de transformation des coordonnées cylindriques en coordonnées sphériques on a  $\rho = z \tan \theta$  et  $z = r \cos \theta$  ce qui nous permet d'écrire l'équation 5.1.34 sous la forme

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{kw_0}{2z} \exp \left[ -jkz + i\frac{\pi}{2} - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} - \frac{z^2 k^2 w_0^2 \tan^2 \theta}{4z^2} \right] \quad (5.1.35)$$

$$= jE_0 \frac{kw_0}{2r \cos \theta} \exp \left[ -jkr \cos \theta - jk \frac{r \cos \theta \tan^2 \theta}{2} - k^2 \frac{w_0^2 \tan^2 \theta}{4} \right] \quad (5.1.36)$$

Dans le champ lointain, à une position  $z$  fixe, la distribution scalaire du champ électromagnétique dans un plan  $xy$  est représenté par l'équation 5.1.36. En tenant compte de la polarisation  $E_0$  devient  $E_0 \Rightarrow \vec{E}_0 = E_0 \vec{P}$  où  $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  pour une polarisation linéaire selon  $x$ ,  $\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$  pour une polarisation linéaire selon  $y$ ,  $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 & j \end{bmatrix}$  pour une polarisation circulaire à droite,  $\vec{P} = \begin{bmatrix} 1 & -j \end{bmatrix}$  pour une polarisation circulaire à gauche.

On peut reformuler le système d'équation 5.1.18 en utilisant l'équation de l'enveloppe gaussienne dans le champ lointain 5.1.36, les équations des VSWF asymptotiques 5.1.26 et en utilisant les équations de transformation d'un vecteur en coordonnées cartésiennes en vecteur en coordonnées sphériques 3.2.4. L'équation 5.1.18 est exprimée en coordonnées sphériques selon

$$\left[ j\vec{P}E_0 \frac{kw_0}{2r \cos \theta} \exp \left[ -jkr \cos \theta - jk \frac{r \cos \theta \tan^2 \theta}{2} - k^2 \frac{w_0^2 \tan^2 \theta}{4} \right] \right]_{r,\theta,\phi} = \quad (5.1.37)$$

$$\frac{N_n}{kr} \left[ \left( \cos \left\{ kr - (n+1) \frac{\pi}{2} \right\} \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi) \right) \quad \left( \cos \left\{ kr - \frac{n\pi}{2} \right\} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \right) \right] \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

On peut aussi simplifier un peu plus l'équation précédente.

$$\vec{P}E_0 \frac{kw_0}{2 \cos \theta} \left[ \exp \left[ -jkr \cos \theta - jk \frac{r \cos \theta \tan^2 \theta}{2} - k^2 \frac{w_0^2 \tan^2 \theta}{4} \right] \right]_{r,\theta,\phi} = \quad (5.1.38)$$

$$\frac{N_n}{k} \left[ \left[ \cos \left( kr - (n+1) \frac{\pi}{2} \right) \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi) \right] \quad \left[ \cos \left( kr - \frac{n\pi}{2} \right) \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \right] \right] \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Cependant, comme on peut voir à la dernière équation l'expansion en série obtenue dépend de la distance  $z$  à laquelle le champ électromagnétique incident est développé puisque  $r = z / \cos \theta$ . Il faut donc trouver une façon d'éliminer la dépendance en  $z$  de l'équation précédente.

Il est quand même intéressant de regarder les résultats obtenus à différentes positions  $z$ . La Figure 5.1(a), représente la distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  telle que donnée par l'enveloppe gaussienne. Chaque ligne de cette figure représente la variation selon  $x$  en une position  $y$  donnée. On peut donc lire ces graphiques comme une topographie du profil de faisceau incident. La ligne donnant la valeur la plus importante est celle au centre du faisceau en  $y = 0$ .

Les figures 5.1(b) à 5.1(d) montrent que le profil de distribution du champ électrique calculé avec la solution résultante de l'équation 5.1.38 sont effectivement dépendantes de la position  $z$  dans le champ lointain à laquelle on réalise l'expansion en série.

Les profils de distribution du champ électrique calculés avec la méthode de point matching sont aussi un peu différents du profil l'enveloppe paraxiale comme la comparaison des figures 5.1(b) à 5.1(d) avec la figure 5.1(a) le montre. Ceci est normal puisque l'enveloppe gaussienne



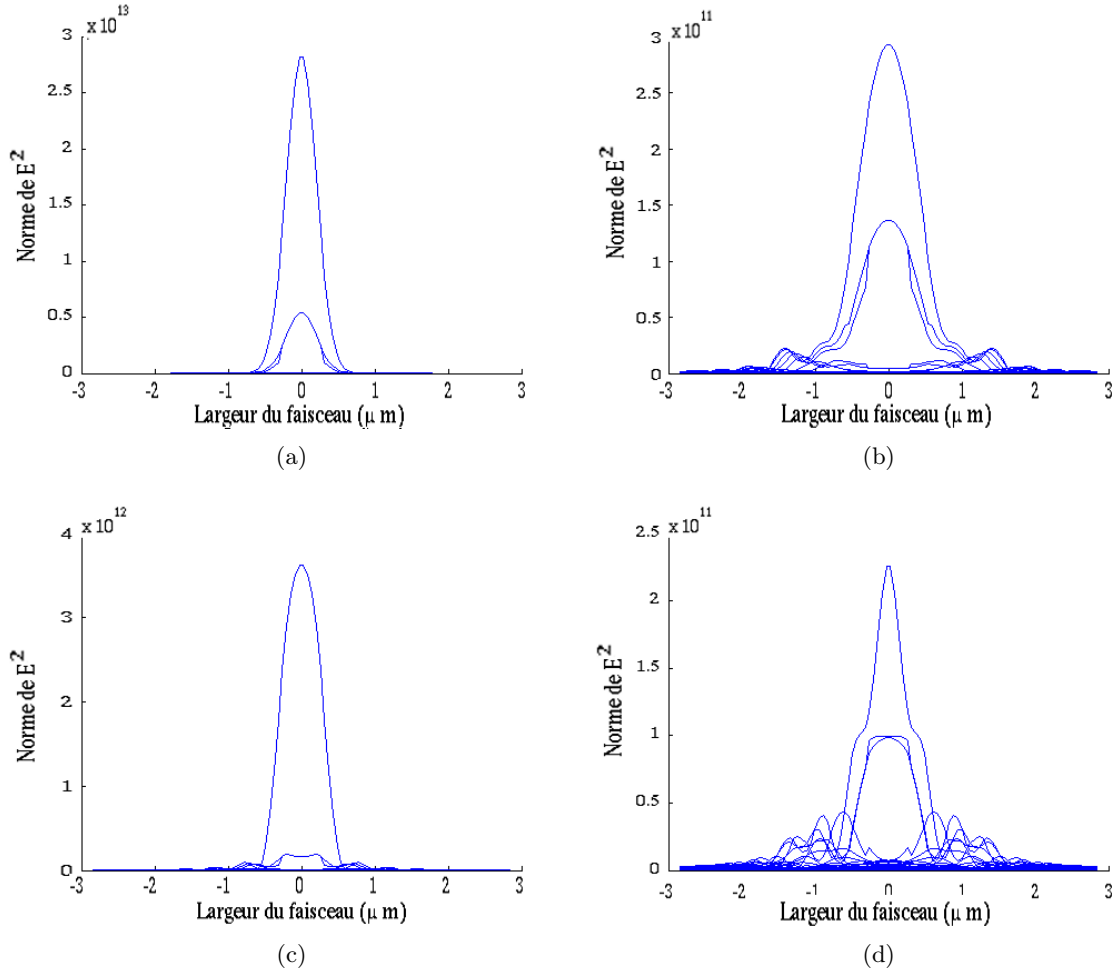


FIGURE 5.1: Distribution en 2D de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec  $w_0 = 0.37 \mu\text{m}$  vu dans la direction  $x$  à différentes position  $y$  (a) le cas calculé avec l'équation paraxiale 5.1.29 (b) le cas calculé avec la méthode de point matching dans le champ lointain donné par l'équation 5.1.38 où  $z = 1000\pi/k$  (c) où  $z = 2000\pi/k$  (d) où  $z = 3000\pi/k$

doit être corrigée par des ordres supérieurs aux hautes NA. La largeur du faisceau gaussien généré par l'expansion en série est plus importante tandis que l'intensité maximale du champ diminue d'un facteur entre 10 et 100. L'intégrale de l'aire sous la courbe –qui correspond à la puissance laser totale– diminue donc. Similairement l'intensité du faisceau simulé par l'expansion en VSWF diminue. Ceci veut donc dire que stress appliqué sur la surface, qui est proportionnel à la puissance laser (Bareil , 2006) , diminue aussi d'un facteur entre 10 et 100 par rapport à ce qui serait calculé avec une distribution du champ électrique où la puissance laser totale serait conservée.

Les figures 5.2 montrent l'impact que chacun des profils de distribution du champ électrique des figures 5.1(b) à 5.1(d) ont sur le stress résultant à la surface d'un nanocylindre isotrope

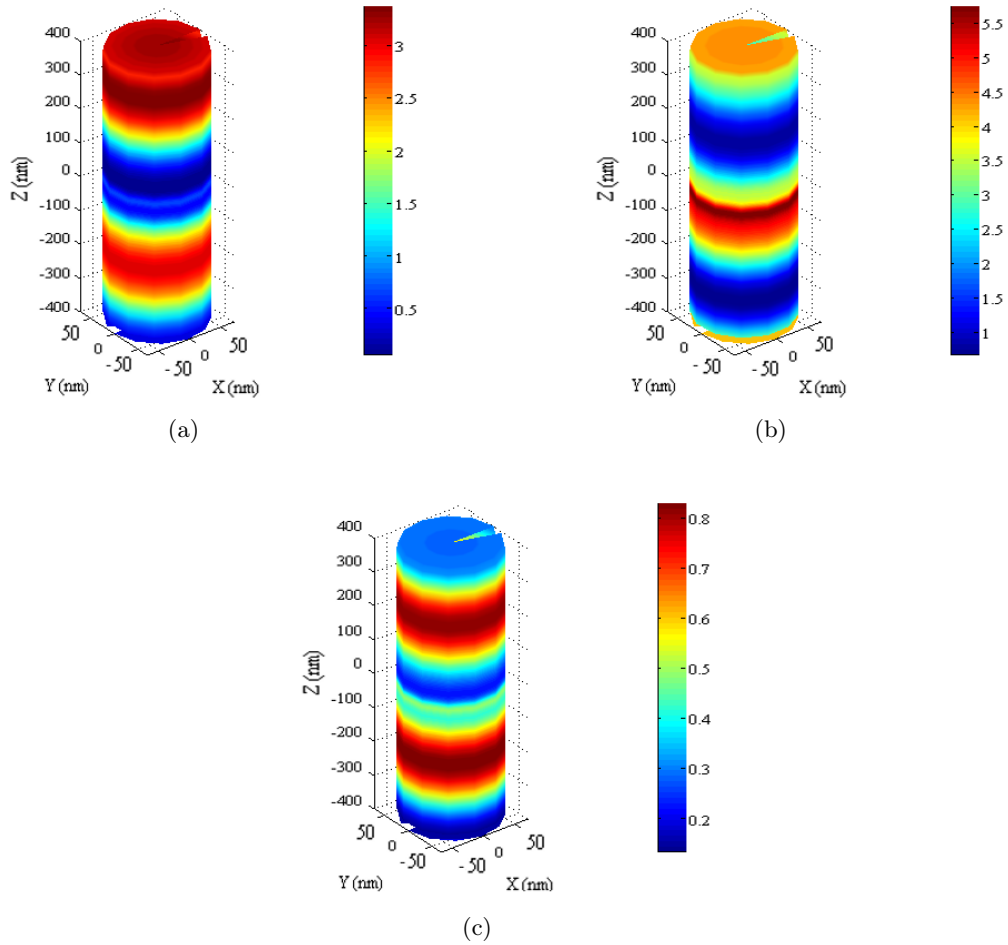


FIGURE 5.2: Stress en  $\text{Nm}^{-1}$  appliqué sur un cylindre isotrope avec un indice de réfraction de  $n_2 = 1.59$  une longueur (a)  $H = 800$  nm et un rayon  $R = 70$  nm entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$  où le faisceau laser se propage sur l'axe- $z$  avec un angle  $\theta = 0$  calculé avec la méthode de point matching dans le champ lointain donné par l'équation 5.1.38 où (a)  $z = 1000\pi/k$  (b) où  $z = 2000\pi/k$  (c) où  $z = 3000\pi/k$

avec un indice de réfraction de  $n_2 = 1.59$ , une longueur  $H = 800$  nm et un rayon  $R = 70$  nm entouré d'un milieu ayant un indice de réfraction de  $n_1 = 1.33$ . Il est donc clair que la méthode d'expansion du champ incident doit être indépendante de la position  $z$ .

### Champ lointain modifié

L'astuce pour contrer la dépendance de l'expansion en série du champ électrique avec la distance  $Z$  dans le champ lointain, consiste à momentanément utiliser l'équation 5.1.39 qui donne une expansion du champ incident modifié au lieu de l'équation 4.1.15a pour définir le

champ incident comme à la référence (Nieminen , 2003).

$$\vec{E}_{inc}(r) = \sum_{n=1}^{N \max} \sum_{m=-n}^n a'_{nm} \vec{M}_{nm}^{(2)}(k\vec{r}) + b'_{nm} \vec{N}_{nm}^{(2)}(k\vec{r}) \quad (5.1.39)$$

L'équation 5.1.24 permet de déduire que les coefficients de l'expansion du champ incident sont reliés aux coefficients du champ incident modifié par l'équation  $a_{nm} = 2a'_{nm}$  et  $b_{nm} = 2b'_{nm}$ . Dans ce cas, l'équation 5.1.38 devient

$$\vec{P}E_0 \frac{kw_0}{2 \cos \theta} \left[ \exp \left[ -jkr \cos \theta \left( 1 + \frac{\tan^2 \theta}{2} \right) - k^2 \frac{w_0^2 \tan^2 \theta}{4} \right] \right]_{r,\theta,\phi} = \quad (5.1.40)$$

$$\frac{N_n}{k} \left[ \begin{array}{cc} [(j)^{n+1} e^{-jkr} \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi)] & [(j)^n e^{-jkr} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi)] \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Comme seule la variation spatiale de l'enveloppe gaussienne près de l'axe optique nous intéresse dans le champ lointain, on peut faire l'approximation que  $\cos \theta \rightarrow 1$  et que  $\tan \theta \rightarrow 0$  ce qui nous permet donc de négliger la phase des deux expansions en séries. Ainsi, on a l'équation 5.1.40 qui devient

$$\vec{P}E_0 \frac{kw_0}{2 \cos \theta} \left[ e \left[ -k^2 \frac{w_0^2 \tan^2 \theta}{4} \right] \right]_{r,\theta,\phi} = \quad (5.1.41)$$

$$\frac{N_n}{k} \left[ \begin{array}{cc} (j)^{n+1} \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi) & (j)^n \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

où l'expansion en série du champ incident ne dépend plus de la distance  $z$  à laquelle on utilise la méthode de point matching.

Les Figures 5.3 comparent la distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  calculée avec la méthode du champ incident modifié et la distribution gaussienne de l'équation paraxiale 5.1.29. On se rend compte que, même avec cette méthode, la largeur du faisceau gaussien de l'expansion en série est légèrement plus grande que celle du faisceau de départ ce qui semble un écart normal pour améliorer la description d'un faisceau incident hautement focalisé. La description précise d'un faisceau hautement focalisé sera étudiée à la section 5.1.2.

Dans certain cas, il est utile de pouvoir spécifier une valeur exacte de largeur à mi-hauteur  $w_0$ . Pour simuler un faisceau gaussien d'une largeur  $w_0$  voulue, il faut donc solutionner l'équation

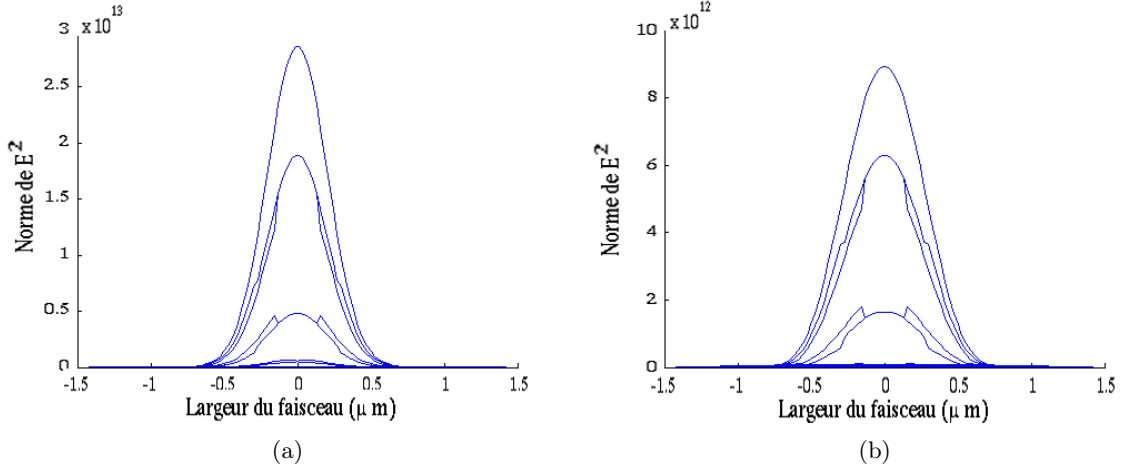


FIGURE 5.3: Distribution 2D de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec  $w_0 = 0.35 \mu\text{m}$  vu dans la direction  $x$  à différentes position  $y$  (a) le cas calculé avec l'équation paraxiale 5.1.29 (b) le cas calculé avec la méthode de point matching dans le champ lointain donné par l'équation 5.1.41

5.1.41 en utilisant une largeur du faisceau temporaire  $w_{0temp}$  qui est plus petite que la valeur voulue. Pour trouver la valeur de  $w_{0temp}$  on peut procéder par itération, mais il est possible de définir une équation empirique qui dépend de la polarisation. Dans le cas de la polarisation circulaire et pour une ouverture numérique  $NA$  entre 1.2 et 1.25, on a trouvé que la largeur du faisceau à simuler est donnée en  $\mu\text{m}$  par

$$w_{0temp\bigcirc} = -7.373e - 05 + 630.1w_0 - 2.021e + 09w_0^2 + 2.888e + 15w_0^3 - 1.546e + 21w_0^4 \quad (5.1.42)$$

tandis que dans le cas de la polarisation linéaire, on trouve que la largeur minimale est respectée lorsque

$$w_{0temp\text{lin}} = -9.956e - 06 + 109.5w_0 - 4.499e + 08w_0^2 + 8.279e + 14w_0^3 - 5.666e + 20w_0^4 \quad (5.1.43)$$

Ainsi, pour un faisceau avec une polarisation circulaire et largeur  $w_0 = 0.37 \mu\text{m}$  le faisceau généré par l'expansion en série de VSWF est donné par la courbe rouge de la figure 5.4 tandis que la distribution calculée par l'équation paraxiale 5.1.29 est donnée par la courbe bleue de la figure 5.4.

Même si la largeur à mi-hauteur est identique, les deux distributions de la figure 5.4 sont différentes. En effet, contrairement à la référence (Nieminen , 2003) qui compare seulement la distribution spatiale du faisceau gaussien, on compare aussi la puissance totale. Pour ce faire, il faut aussi modifier l'expansion en série pour conserver la puissance totale du faisceau puisque, tout comme la largeur simulée, la puissance totale n'est pas conservée par la méthode de point matching. Pour s'assurer que la puissance totale est constante, le calcul numériquement de

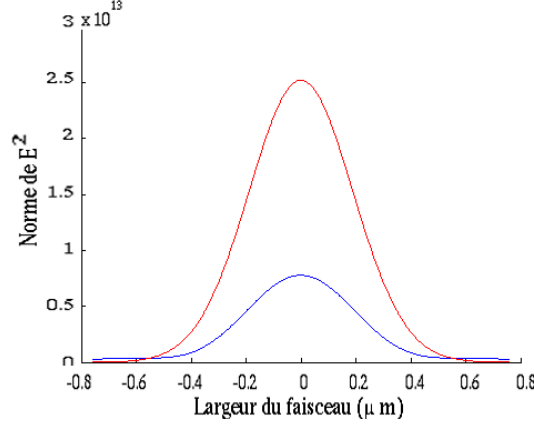


FIGURE 5.4: Distribution 1D en  $z = y = 0$  de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en fonction de la distance au centre de l’axe optique pour un faisceau avec  $w_0 = 0.37 \mu\text{m}$  pour une polarisation circulaire. (rouge) le cas calculé avec l’équation paraxiale 5.1.29 (bleue) le cas calculé avec la méthode de point matching dans le champ lointain donné par l’équation 5.1.41 où la largeur utilisée pour faire le calcul est donnée par l’équation 5.1.42

l’aire sous la courbe de la distribution 2D (en  $z = 0$ ) de  $E^2$  est réalisée. La puissance simulée par l’expansion en VSWF est donc corrigée par une multiplication avec une constante

$$E_{\text{corrigé}} = cteE \quad (5.1.44)$$

où  $cte$  est une constante variant entre 1.5 et 2.5 qui est déterminée à chaque calcul et qui permet d’avoir une puissance totale constante. Notons que cette partie du calcul, qui a été omise dans la référence (Nieminen , 2003), est extrêmement importante. Elle évite que les variations observées dans le résultat proviennent d’une variation virtuelle de la puissance simulée.

Ainsi, en compensant pour la largeur à mi-hauteur et la puissance totale, la distribution de  $E^2$  calculée avec l’expansion en VSWF de l’équation 5.1.41 est donnée par les courbes bleues de la figure 5.5. De son côté, la distribution paraxiale de  $E^2$  calculée avec l’équation paraxiale 5.1.29 représente les courbes rouges. Même si la largeur du faisceau gaussien  $w_0$  est la même et que la puissance totale est conservées, la distribution n’est pas la même que celle prédite par l’équation paraxiale 5.1.29. Encore une fois, ceci est normal puisque la méthode de point matching dans le champ lointain permet justement d’améliorer la distribution du champ électromagnétique dans le champ proche pour les cas hautement focalisés où les corrections d’ordres supérieurs sont nécessaires.

Il est donc primordial d’étudier comment les corrections aux ordres supérieurs permettent d’améliorer la description du faisceau gaussien pour être en mesure de mieux évaluer la qualité de l’expansion en VSWF.

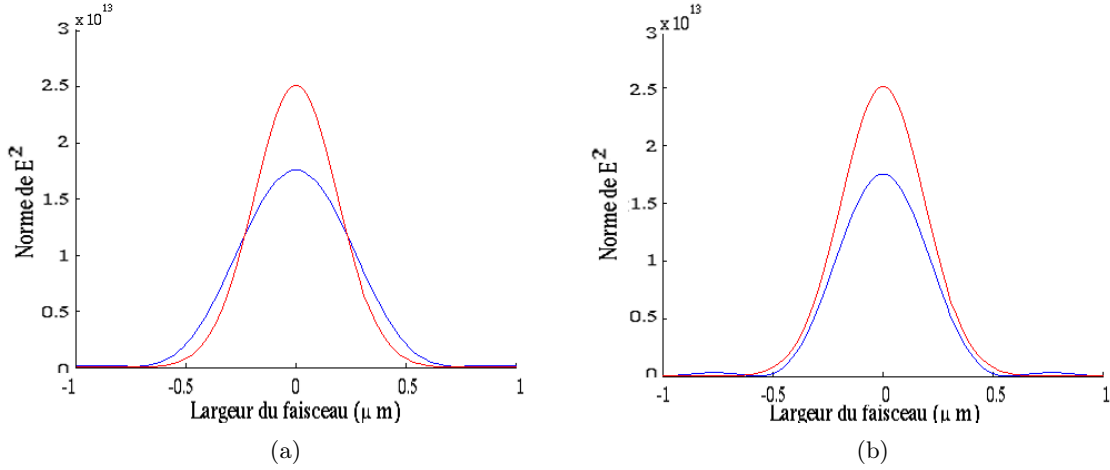


FIGURE 5.5: Distribution 1D de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec  $\text{NA}=1.25$  ( $w_0 = 0.37 \mu\text{m}$ ) et une polarisation linéaire selon l'axe  $x$ . La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF et la courbe **rouge** la distribution calculée selon l'équation paraxiale 5.1.29 (a) vu dans la direction  $x$  en  $y = 0$  (b) vu dans la direction  $y$  en  $x = 0$

### 5.1.2 Profil de faisceau à hautes NA

Selon le travail de (Davis, 1979), pour trouver les corrections aux ordres supérieures d'un faisceau gaussien hautement focalisé, on commence par l'équation d'Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 A = 0 \quad (5.1.45)$$

Pour un faisceau polarisé linéairement dans la direction  $x$  et se propageant dans la direction  $z$ , on suppose une solution sous la forme

$$\vec{A} = A\vec{x} = \psi(x,y,z)e^{-ikz}\vec{x} \quad (5.1.46)$$

où  $\psi(x,y,z)$  est une fonction qui varie lentement. En effectuant le changement de variable  $\xi = x/w_0$ ,  $\eta = y/w_0$ ,  $\varsigma = z/kw_0^2$  et  $s = 1/kw_0$ , l'équation d'Helmholtz peut être ré-écrite sous la forme

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \varsigma} \right) \psi = -s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varsigma^2} \quad (5.1.47)$$

En utilisant la méthode de la perturbation, on peut ré-écrire  $\psi$  sous la forme

$$\psi = \psi_0 + s^2 \psi_2 + s^4 \psi_4 + s^6 \psi_6 + \dots \quad (5.1.48)$$

ce qui donne une série d'équation d'Helmholtz modifiées à solutionner. Elles prennent la forme

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 2i \frac{\partial}{\partial \varsigma} \right) \psi_{2n} = -\frac{\partial^2 \psi_{2n-2}}{\partial \varsigma^2} \quad (5.1.49)$$

où  $n = 1, 2, 3, \dots$ . On note que  $\psi_0$  est la solution paraxiale donnée par l'équation  $\psi_0 = iQe^{-1\rho^2Q}$  où  $Q = 1/(i + 2z/l)$  et  $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$ . Par la suite, la série binomiale d'une onde sphérique divergente centrée au point focal est utilisée pour remplacer les fonctions  $\psi_{2n}$  trouvée à l'intérieur de la fonction d'onde.

La précision des ordres plus élevés de correction a été démontrée en soumettant directement le champ électromagnétique calculé aux équations de Maxwell à 216 points dans l'espace autour du point focal. Les résultats ont montré une bonne augmentation de la précision lorsque les ordres supérieurs sont ajoutés comparativement à l'utilisation directe de la solution paraxiale (Barton Alexander, 1989). Par exemple, le 5e ordre de correction génère 1% d'écart aux équations de Maxwell lorsque  $s=0.2$  et  $kw_0 > 5$  qui correspond à  $NA < 1$  dans l'eau avec  $n_1 = 1.33$ . Cependant, lorsque des valeurs plus élevés de NA sont utilisées, les valeurs de  $s$  augmentent et la solution corrigée au 5e ordre est moins précise. Dans ce cas, les corrections aux ordres supérieurs sont nécessaires. Selon la référence (Cao, 2002), qui compare les valeurs expérimentales d'accélération d'électrons aux valeurs simulées en utilisant les corrections aux ordres supérieures, la distribution gaussienne paraxiale donne de bons résultats quand  $kw_0 > 5$  ( $NA < 1$ ), la correction au cinquième ordre quand  $3 < kw_0 < 5$  ( $NA < 1.15$ ) et la correction au septième ordre quand  $kw_0 < 3$  ( $NA > 1.15$ ); ce qui correspond à des ouvertures numériques de  $NA < 1$ ,  $1 < NA < 1.15$  et  $NA > 1.15$  respectivement.

Selon (Luo Liu, 2007; Wang Webb, 2005) la distribution du champ électrique d'un faisceau gaussien corrigé jusqu'au neuvième ordre dans le cas d'une polarisation linéaire selon l'axe  $x$  est donnée par l'équation suivante

$$E_x = E_0\psi_0e^{i\zeta/s^2} \left\{ 1 + s^2 (-\rho^2Q^2 + i\rho^4Q^3 - 2Q^2\xi^2) + s^4 [2\rho^4Q^4 - 3i\rho^6Q^5 - 0.5\rho^8Q^6 + (8\rho^2Q^4 - 2i\rho^4Q^5)\xi^2] + s^6 [-5\rho^6Q^6 + 9i\rho^8Q^7 + 2.5i\rho^{10}Q^8 - i/6\rho^{12}Q^9 - \xi^2(30\rho^4Q^6 - 12i\rho^6Q^7 - \rho^8Q^8)] + s^8 [(112Q^8\rho^6 - 56iQ^9\rho^8 - 8Q^{10}\rho^{10} + \frac{1}{3}iQ^{11}\rho^{12})\xi^2 + 14Q^8\rho^8 - 28iQ^9\rho^{10} - 10Q^{10}\rho^{12} + \frac{7}{6}iQ^{11}\rho^{14} + \frac{1}{24}Q^{12}\rho^{16}] \right\} \quad (5.1.50a)$$

$$E_y = E_0\psi_0e^{i\zeta/s^2}\xi\eta \left\{ -2s^2Q^2 + s^4 [(8\rho^2Q^4 - 2i\rho^4Q^5)] + s^6 [-(30\rho^4Q^6 - 12i\rho^6Q^7 - \rho^8Q^8)] + s^8 (112Q^8\rho^6 - 56iQ^9\rho^8 - 8Q^{10}\rho^{10} + iQ^{11}\rho^{12}/3) \right\} \quad (5.1.50b)$$

$$E_z = E_0\psi_0e^{i\zeta/s^2} \left\{ -2sQ\xi + s^3 [(6\rho^2Q^3 - 2i\rho^4Q^4)\xi] + s^5 [(-20\rho^4Q^5 + 10i\rho^6Q^6 + \rho^8Q^7)\xi] + s^7 (70\rho^6Q^7 - 42i\rho^8Q^8 - 7\rho^{10}Q^9 + i\rho^{12}Q^{10}/3)\xi + s^9 \left( -252Q^9\rho^8 + 168iQ^{10}\rho^{10} + 36Q^{11}\rho^{12} - 3iQ^{12}\rho^{14} + \frac{1}{12}Q^{13}\rho^{16} \right) \xi \right\} \quad (5.1.50c)$$

où  $s = 1/(kw_0)$ ,  $l = kw_0^2$ ,  $Q = 1/(i + 2z/l)$ ,  $\xi = x/w_0$ ,  $\eta = y/w_0$ ,  $\zeta = z/l$ . La valeur de  $E_0$

peut être calculée par cette équation

$$E_0 = \sqrt{\left(\frac{4P}{c_n \epsilon_n \pi w_0^2 (1 + s^2 + 1.5s^4 + 3s^6 + 7.5s^8)}\right)} \quad (5.1.51)$$

où P représente la puissance laser à simuler,  $c_n$  la vitesse de la lumière dans le milieu et  $\epsilon_n = \epsilon_0 n_1^2$ .

Dans le cas d'une polarisation linéaire selon  $y$ , la référence (Zhang, 2010) donne les équations au cinquième ordre. Un changement de variable est utilisé pour effectuer une rotation au système d'axe. Le changement de variable est simplement  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow x$  et permet de faire la rotation du système d'axe de  $90^\circ$ . En utilisant cette même démarche pour le 9e ordre, l'équation suivante pour la polarisation selon  $y$  est trouvée

$$E'_x = E_0 \psi_0 e^{i\zeta/s^2} \xi \eta \left\{ -2s^2 Q^2 + s^4 [(8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5)] \right. \\ \left. + s^6 [-(30\rho^4 Q^6 - 12i\rho^6 Q^7 - \rho^8 Q^8)] + s^8 (112Q^8 \rho^6 - 56iQ^9 \rho^8 - 8Q^{10} \rho^{10} \right. \\ \left. + iQ^{11} \rho^{12}/3) \right\} \quad (5.1.52a)$$

$$E'_y = E_0 \psi_0 e^{i\zeta/s^2} \left\{ 1 + s^2 (-\rho^2 Q^2 + i\rho^4 Q^3 - 2Q^2 \eta^2) + s^4 [2\rho^4 Q^4 - 3i\rho^6 Q^5 - 0.5\rho^8 Q^6 \right. \\ \left. + (8\rho^2 Q^4 - 2i\rho^4 Q^5) \eta^2] + s^6 [-5\rho^6 Q^6 + 9i\rho^8 Q^7 + 2.5i\rho^{10} Q^8 - i/6\rho^{12} Q^9 \right. \\ \left. - \eta^2 (30\rho^4 Q^6 - 12i\rho^6 Q^7 - \rho^8 Q^8)] + s^8 [(112Q^8 \rho^6 - 56iQ^9 \rho^8 - 8Q^{10} \rho^{10} + \right. \\ \left. \frac{1}{3}iQ^{11} \rho^{12}) \eta^2 + 14Q^8 \rho^8 - 28iQ^9 \rho^{10} - 10Q^{10} \rho^{12} + \frac{7}{6}iQ^{11} \rho^{14} + \frac{1}{24}Q^{12} \rho^{16}] \right\} \quad (5.1.52b)$$

$$E'_z = E_0 \psi_0 e^{i\zeta/s^2} \left\{ -2sQ\eta + s^3 [(6\rho^2 Q^3 - 2i\rho^4 Q^4) \eta] \right. \\ \left. + s^5 [(-20\rho^4 Q^5 + 10i\rho^6 Q^6 + \rho^8 Q^7) \eta] \right. \\ \left. + s^7 (70\rho^6 Q^7 - 42i\rho^8 Q^8 - 7\rho^{10} Q^9 + i\rho^{12} Q^{10}/3) \eta \right. \\ \left. + s^9 \left( -252Q^9 \rho^8 + 168iQ^{10} \rho^{10} + 36Q^{11} \rho^{12} - 3iQ^{12} \rho^{14} + \frac{1}{12}Q^{13} \rho^{16} \right) \eta \right\} \quad (5.1.52c)$$

Puis, le cas d'une polarisation circulaire  $E_c$  à droite (+) ou à gauche (-) peut être calculée en utilisant l'équation suivante (Zhang, 2010)

$$E_{cx} = E_x \pm iE'_x \\ E_{cy} = E_y \pm iE'_y \\ E_{cz} = E_z \pm iE'_z \quad (5.1.53)$$

Les Figures 5.6 comparent quatre profils de distribution du faisceau gaussien calculés avec les méthodes : paraxiale, au 5e ordre, au 7e ordre et au 9e ordre pour des valeurs de NA=1, NA=1.15 et NA=1.25. Pour chaque valeur de NA, les valeurs correspondantes de  $w_0$ , utilisées dans le calcul des équations 5.1.50 à 5.1.53, ont été calculées avec l'équation 5.1.1 qui représente les valeurs minimales de la tâche d'Airy à cette ouverture numérique. Cela nous permet de voir l'effet d'une plus grande focalisation sur la distribution du champ électrique



d'un faisceau gaussien et de comprendre pourquoi il est si important de tenir compte de ces corrections. À mesure que l'ouverture numérique augmente, la focalisation est moins intense pour les faisceaux corrigés aux ordres supérieurs que pour l'approximation paraxiale. Les figures 5.6 montrent en effet que la largeur du faisceau diminue à mesure que NA augmente.

D'un autre côté, la figure 5.6(a), qui représente la distribution du champ électrique à  $NA=1.25$  pour différents types d'équations gaussiennes, montre qu'à mesure que les correction aux ordres supérieures sont utilisées, la largeur du faisceau tend vers une valeur  $w_0$  plus grande que celle de l'équation paraxiale. Également important à noter est le fait que la correction au 9e ordre apporte une correction minime et difficile à voir puisque la distribution du champ prévue diverge très rapidement à partir de  $0.2\lambda$ .

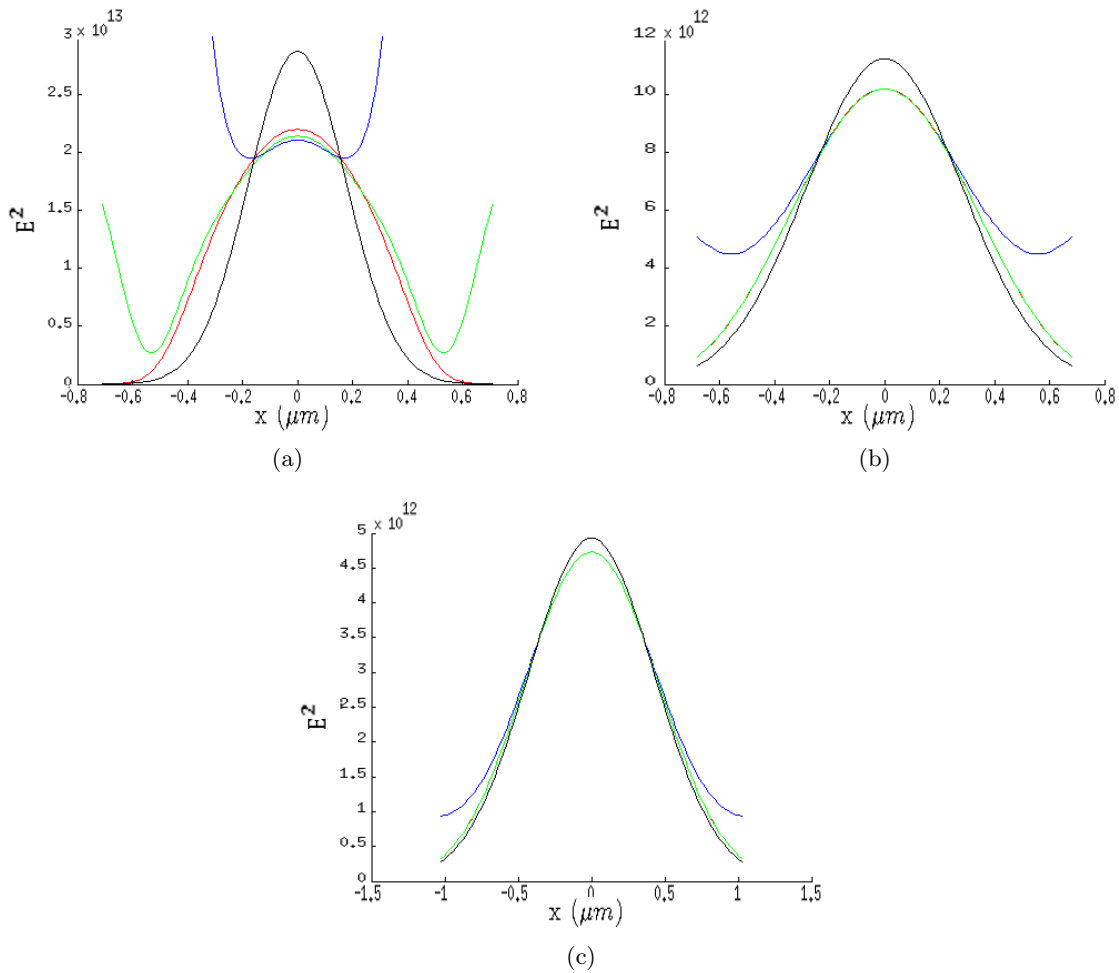


FIGURE 5.6: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique vue dans la direction  $x$ . La courbe noire représente l'**approximation paraxiale**, la courbe rouge la correction au **cinquième ordre**, la courbe verte la correction au **septième ordre** et la courbe bleue la correction au **neuvième ordre** (a)  $kw_0 = 2.09$  ( $NA=1.25$ ,  $w_0 = 0.33\lambda$ ) (b)  $kw_0 = 3.35$  ( $NA=1.15$ ,  $w_0 = 0.5\lambda$ ) (c)  $kw_0 = 5.05$  ( $NA=1$ ,  $w_0 = 0.8\lambda$ ). La polarisation est circulaire à droite.

À  $NA = 1$ , comme montré à la figure 5.6(c), les approximations du 5e ordre au 7e ordre donnent exactement le même résultat, mais l'approximation paraxiale est à la limite de sa validité. En effet, à  $NA = 1.15$  la figure 5.6(b) montre que l'approximation paraxiale s'éloigne de plus en plus de la représentation des faisceaux corrigés. À  $NA = 1.25$ , l'erreur sur la distribution paraxiale représente 32% au centre de la trappe optique. Cela veut donc dire que l'erreur commise sur le calcul de stress à la surface est aussi de 32% avec une approximation paraxiale. Comme le champ électrique est utilisé pour le calcul du stress, des forces, etc. on peut donc en déduire que cela peut aussi affecter les résultats de ces calculs d'au moins 32%. Il est donc important, pour les faisceaux hautement focalisés, que l'expansion en série de VSWF se rapproche le plus possible d'une distribution corrigée.

Il convient cependant de se demander jusqu'à quelle correction il est nécessaire d'aller. On voit à la figure 5.6, que toutes les corrections donnent des résultats identiques jusqu'à  $NA = 1.15$ . Par la suite, les résultats divergent de plus en plus. À  $NA = 1.25$  la correction au cinquième ordre sur estime légèrement la focalisation ce qui donne une erreur maximale de 3.2% au centre de la trappe optique. Il peut donc être intéressant d'utiliser le 7e ordre de correction. Quant à lui, le 9e ordre de correction n'apporte que 1.5% de correction sur le 7e ordre au centre de la trappe. De plus, comme on peut le voir à la figure 5.6(a), le 9e ordre diverge très rapidement à  $x = 200nm$  lorsque l'on s'éloigne du centre du faisceau. Les corrections aux ordres supérieurs ne sont effectivement valides qu'à l'intérieur de certaines bornes qui représentent une distance maximale du centre du faisceau. Jusqu'à une certaine distance du centre du faisceau, les corrections sont convergentes ; c'est-à-dire que chaque ordre supérieur dans les équations 5.1.50 apporte une correction qui est plus petite que la précédente. La distance à laquelle les corrections aux ordres supérieurs sont valides dépende de deux facteurs : la largeur du faisceau  $w_0$  et l'ordre de correction. Plus le faisceau est hautement focalisé et que l'ordre de correction est élevé, plus la distance de validité est courte dans le plan  $xy$ . Ainsi, une correction au 5e ordre peut représenter le faisceau sur une surface  $xy$  plus grande que la correction au 7e ordre. De la même façon, la correction au 7e ordre peut représenter le faisceau sur une surface  $xy$  plus grande que celle au 9e ordre comme on le voit à la figure 5.6(a). Dans nos expériences, les nanobarres ont un rayon maximal de  $R = 100 nm$ , mais il peut être intéressant de simuler les forces appliquées sur des nanobarres de rayons plus grands. Il faut donc être prudent en utilisant le 9e ordre aux grandes NA pour ne pas que la description diverge à l'intérieur des bornes de la nanoparticule.

Mathématiquement, on peut comprendre la divergence en rappelant que la dérivation des équations aux ordres supérieurs est une expansion en série du type

$$E_x = E_0 [1 + s^2 O(\rho^4) + s^4 O(\rho^8) + s^6 O(\rho^{12}) + s^8 O(\rho^{16}) + \dots] \quad (5.1.54)$$

où la correction  $s^2$  est multipliée par une fonction d'ordre 4 de  $\rho$ , la correction  $s^4$  est d'ordre 8 avec  $\rho$  et ainsi de suite pour les suivantes. On rappelle ici que  $\rho$  est la variable d'espace dans le plans  $xy$  qui permet donc d'évaluer le faisceau dans un plan  $xy$ . Cette variable est donnée

par  $\rho^2 = (x/w_0)^2 + (y/w_0)^2$ . Si l'équation 5.1.54 est évaluée à une distance  $x = y = 1.5w_0$  du centre du faisceau, on obtient  $\rho^2 = 4.5$ . Si on suppose que  $w_0 = 0.7\lambda$  on obtient que  $s = 1/kw_0 = 1/5$ . L'équation 5.1.54 devient

$$E_x = E_0 [1 + (1/5)^2(4.5)^2 + (1/5)^4(4.5)^4 + (1/5)^6(4.5)^6 + (1/5)^8(4.5)^8 + \dots] \quad (5.1.55)$$

Comme chaque terme de correction de l'équation précédente est plus petit que son précédent, l'équation converge. Cependant, si la distance est  $x = y = 2w_0$ , on obtient  $\rho^2 = 8$ . Si  $w_0$  est encore constant à  $w_0 = 0.7\lambda$ , alors  $s = 1/5$  ce qui donne

$$E_x = E_0 [1 + (1/5)^2(8)^2 + (1/5)^4(8)^4 + (1/5)^6(8)^6 + (1/5)^8(8)^8 + \dots] \quad (5.1.56)$$

Comme  $8 > 5$  alors l'équation précédente diverge puisque chaque terme d'ordre supérieur est plus grand que son précédent ; c'est-à-dire que les corrections sont plus grandes que 1.

Pour s'assurer que l'équation ne diverge pas on doit avoir  $\rho^2 < s$  ce qui revient à dire que  $\rho^2 < \frac{\lambda}{2\pi w_0}$ . Il est cependant important de noter que cette équation n'est que suffisante et non nécessaire pour toutes les corrections. En effet, il se pourrait qu'une correction à un certain ordre converge pour  $\rho^2$  supérieure à  $\frac{\lambda}{2\pi w_0}$  puisque chaque terme de correction comprend plusieurs autres termes qui peuvent ramener une correction plus grande que 1 à une correction plus petite que 1. Ainsi, chaque ordre de correction possède une règle de convergence distincte. Il faut noter que la distance de convergence diminue toujours avec les ordres supérieures. Par exemple une description du faisceau incident corrigée au 9e ordre avec  $w_0 = 0.33\lambda$  commence à diverger à partir de  $x = 200nm$  selon la figure 5.6(a) alors que la même description du faisceau incident corrigée au 7e ordre commence à diverger à partir de  $w_0 = 500nm$

On note que la convergence diminue aussi avec NA. Ceci peut être compris mathématiquement en regardant de plus près la condition suffisante  $\rho^2 < \lambda/(2\pi w_0)$ . On peut ré-écrire cette équation selon

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &< \lambda/(2\pi w_0) \\ (x/w_0)^2 + (y/w_0)^2 &< \lambda/(2\pi w_0) \\ x^2 + y^2 &< \lambda w_0^2/(2\pi w_0) \\ x^2 + y^2 &< \lambda w_0/2\pi \\ r^2 &< \lambda w_0/2\pi \end{aligned}$$

Comme  $w_0$  diminue lorsque NA augmente, alors le rayon  $r$  dans le plan  $xy$  auquel on peut évaluer les corrections aux ordres supérieures diminue aussi lorsque NA augmente.

La figure 5.6(a) montre que l'approximation au 9e ordre ne permet la description que d'une petite partie du faisceau incident à haute NA. La correction au 7e ordre est donc un choix plus judicieux pour la description du champ incident pour des hautes NA puisque qu'elle permet une bonne description complète du faisceau –du centre du faisceau jusqu'à la mi-hauteur–

$NA$	$2w_0$ 7ième ordre ( $\mu m$ )	$2w_0$ Paraxial ( $\mu m$ )	Tache Airy minimum ( $\mu m$ )
1.00	1.80	1.72	1.71
1.10	1.44	1.32	1.33
1.15	1.28	1.12	1.11
1.20	1.12	0.92	0.93
1.22	1.04	0.84	0.85

TABLE 5.1: Table représentant la largeur à mi-hauteur d'un faisceau polarisé circulairement à droite en fonction de sa représentation. La tache d'Airy représente la limite de diffraction à la longueur d'onde de  $\lambda = 1.064$  nm

jusqu'à  $NA = 1.25$  pour une immersion dans l'eau avec  $n_1 = 1.33$ . Nous utiliserons donc, pour le reste de ce document l'approximation au 7e ordre pour vérifier l'expansion en série de VSWF des faisceaux incidents.

Avant de continuer avec les différents types d'expansion en série de VSWF, il convient de regarder comment le faisceau se comporte par rapport à la limite de diffraction. La table 5.1, montre que la correction du faisceau gaussien au 7e ordre diminue la focalisation prévue par l'approximation paraxiale. Aussi, est-il important de préciser que l'approximation paraxiale, même si elle n'est pas valide à haute ouverture numérique, ne prédit pas un faisceau plus focalisé que la limite de diffraction puisque la valeur de  $w_0$  utilisée pour son calcul ne dépasse pas elle non plus cette limite. En effet, la valeur de  $w_0$  a été calculée avec l'équation 5.1.1 et est donc égale à la valeur du rayon de la tâche d'Airy. Il revient donc aux utilisateurs de l'équation paraxiale de s'assurer que la valeur de  $w_0$  utilisée soit physiquement correcte.

La figure 5.7(a), qui représente la largeur  $2w_0$  du faisceau en fonction de  $NA$ , montre que la largeur du faisceau diminue presque linéairement avec  $NA$ . De la même façon, la figure 5.7(b), qui représente la valeur maximale de  $E^2$  en fonction de  $NA$ , montre que l'intensité maximale au centre du faisceau augmente exponentiellement avec  $NA$ . Selon l'équation 5.1.51 la valeur maximale du champ au centre de la pince optique augmente à mesure que  $w_0$  diminue. Il est aussi important de noter que cette augmentation est plus modérée que celle prévue par l'approximation paraxiale puisqu'à mesure que le paramètre  $s = 1/(w_0k)$  augmente, la croissance de  $E_0$  ralentit. En effet, plus  $NA$  augmente, plus  $w_0$  diminue et plus  $s$  augmente.

Similairement, les figures 5.8, qui représentent la distribution du champ électrique au carré vue au point focal à différente  $NA$  selon  $x$  et  $y$ , montre que plus l'ouverture numérique augmente plus la focalisation est intense. Ces figures montrent aussi que, même à hautes ouverture numérique, la focalisation est identique dans les deux plans pour la polarisation circulaire.

Cependant, cette symétrie est brisée lorsque la polarisation change. La figure 5.9, représente

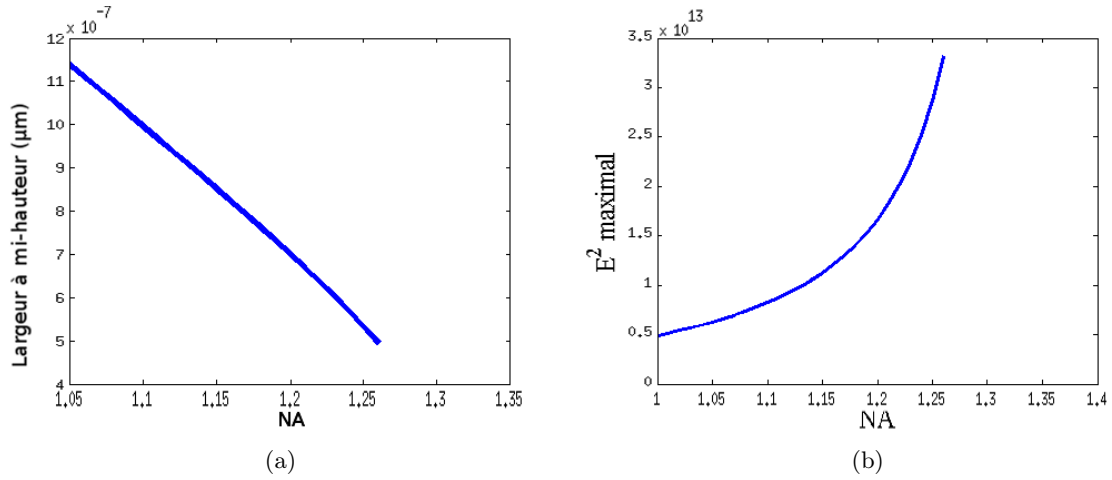


FIGURE 5.7: (a) Largeur à mi-hauteur  $2\omega_0$  en fonction de l'ouverture numérique (b) intensité maximale au centre du faisceau en fonction de l'ouverture numérique. La correction au 7e ordre est utilisée avec une polarisation circulaire à droite.

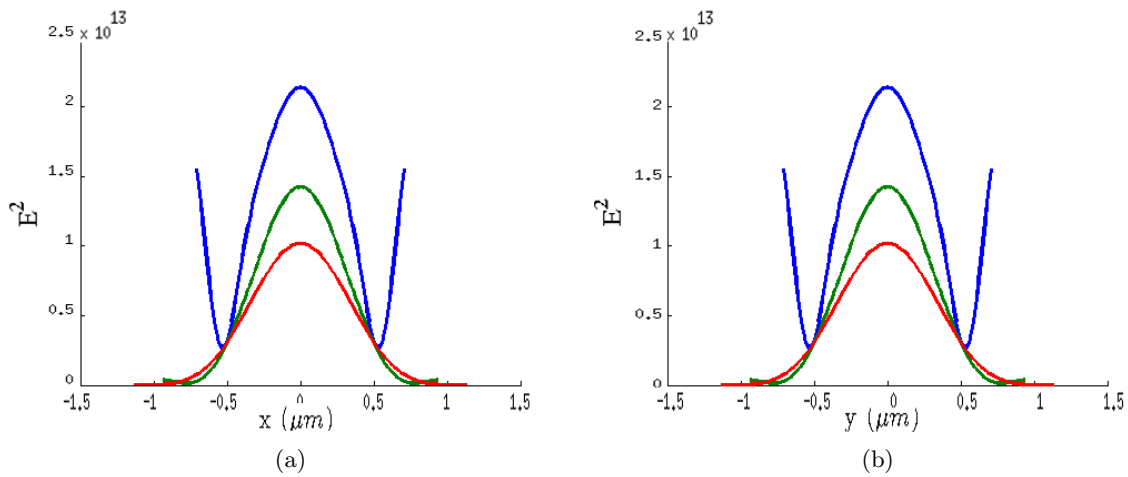


FIGURE 5.8: Profil de distribution du champ électrique au carré pour  $NA = 1.25$  en bleu,  $NA = 1.20$  en vert et  $NA = 1.15$  en rouge, vu au plan focal selon (a)  $x$  (b)  $y$  pour une polarisation circulaire.

la distribution du champ électrique dans au plan focal vu dans le plan  $xy$  pour différentes polarisations. La distribution est symétrique avec l'axe optique lorsque la polarisation est circulaire tandis qu'elle est asymétrique à haute  $NA$  lorsque la polarisation est linéaire. En effet, la comparaison de la figure 5.9(b), qui représente la distribution du champ pour une polarisation linéaire lorsque  $NA = 1.25$ , avec la figure 5.9(d), qui représente la distribution du champ pour la même polarisation lorsque  $NA = 0.9$ , permet de dire que c'est la valeur élevée de  $NA$  qui apporte une asymétrie au faisceau dans le cas de la polarisation linéaire. Notons que ce phénomène a déjà été abordé à la référence (Nieminen , 2003). Parallèlement à

ceci, il est intéressant de remarquer qu'aux hautes  $NA$ , la largeur du faisceau est plus faible dans la direction de polarisation que dans la direction perpendiculaire à la polarisation. En effet, les figures 5.9(b) et 5.9(c), qui représentent le profil de distribution du champ lorsque la polarisation est linéaire selon  $x$  et  $y$  respectivement, montre que le faisceau est plus large dans la direction  $x$  et  $y$  que dans la direction  $y$  et  $x$  respectivement.

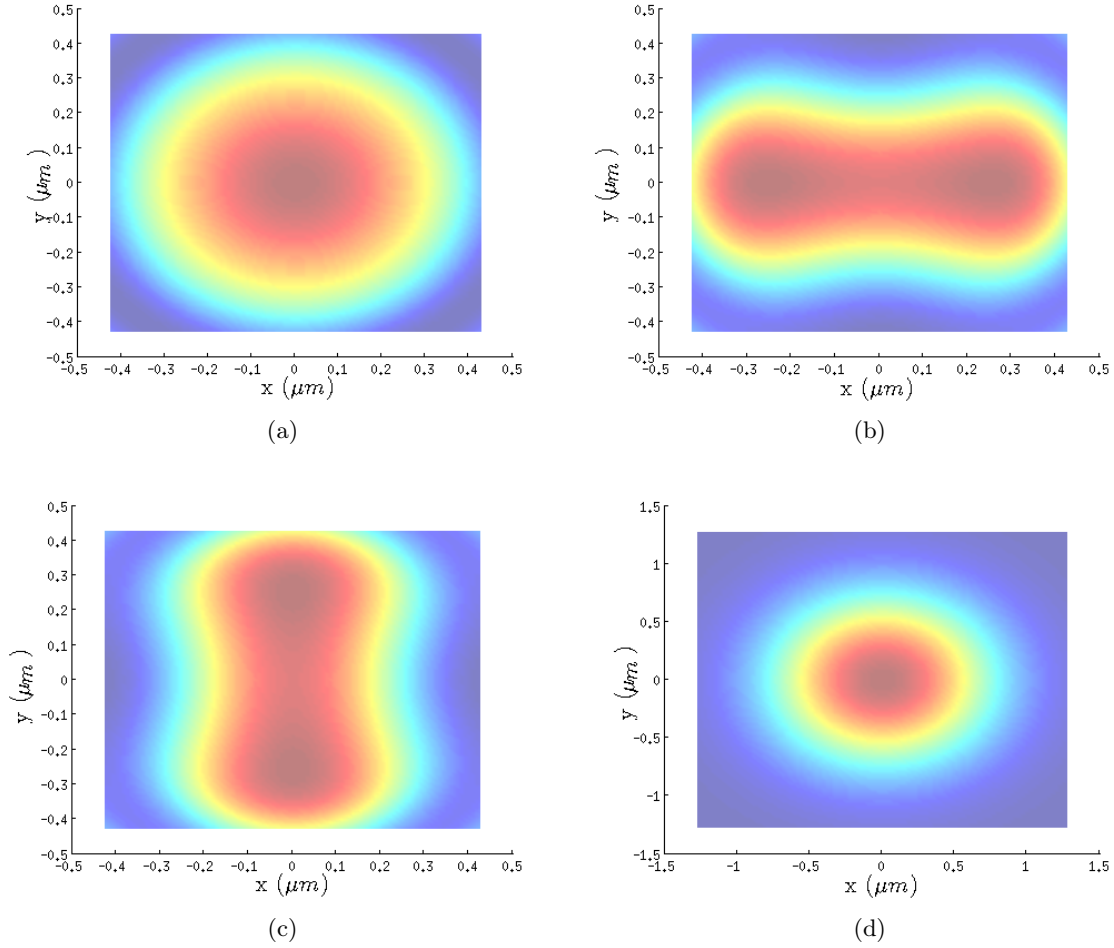


FIGURE 5.9: Profil de distribution du champ électrique au carré pour  $NA = 1.25$  vu au plan focal dans le plan  $xy$  pour une polarisation (a) circulaire (b) linéaire selon  $x$  et (c) linéaire selon  $y$  (d) linéaire selon  $x$  avec  $NA = 0.9$

Il est par ailleurs intéressant de regarder comment chacune des composantes du champ électrique  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  change à mesure que l'ouverture numérique augmente. La figure 5.10 représente le profil du champ électrique dans les trois axes de polarisation au point focal avec une  $NA$  faible de  $NA = 0.9$  calculée avec une correction au 7e ordre tandis que la figure 5.11 montre la même chose avec  $NA = 1.20$ . Il est important de regarder la graduation des axes de ces figures pour bien comprendre l'effet de l'ouverture numérique. De façon prévisible, chacune des composante de polarisation du champ voit son intensité augmenter avec  $NA$ . Il est

cependant intéressant de noter qu'à mesure que le faisceau est plus focalisé, la composante  $E_z$  du champ électrique prend de l'importance. En effet, à  $NA = 0.9$ , la composante  $E_z$  est 500 fois plus faible que la composante  $E_x$  tandis qu'à  $NA = 1.20$  la composante  $E_z$  est seulement la moitié de la composante  $E_x$ . Ceci a pour effet qu'à  $NA = 1.20$ , les deux lobes (comme 2 yeux) de la composante  $E_z$  de la figure 5.11(c) prennent de l'importance et font en sorte que le champ électrique  $[E_x, E_y, E_z]$  soit asymétrique à la figure 5.9(b). En effet, on peut voir à la figure 5.9(b), qui représente la distribution du champ électrique dans le plan focal  $xy$  à  $NA = 1.20$ , que les deux lobes de la composante  $E_z$  sont visibles au même endroit qu'à la figure 5.11(c).

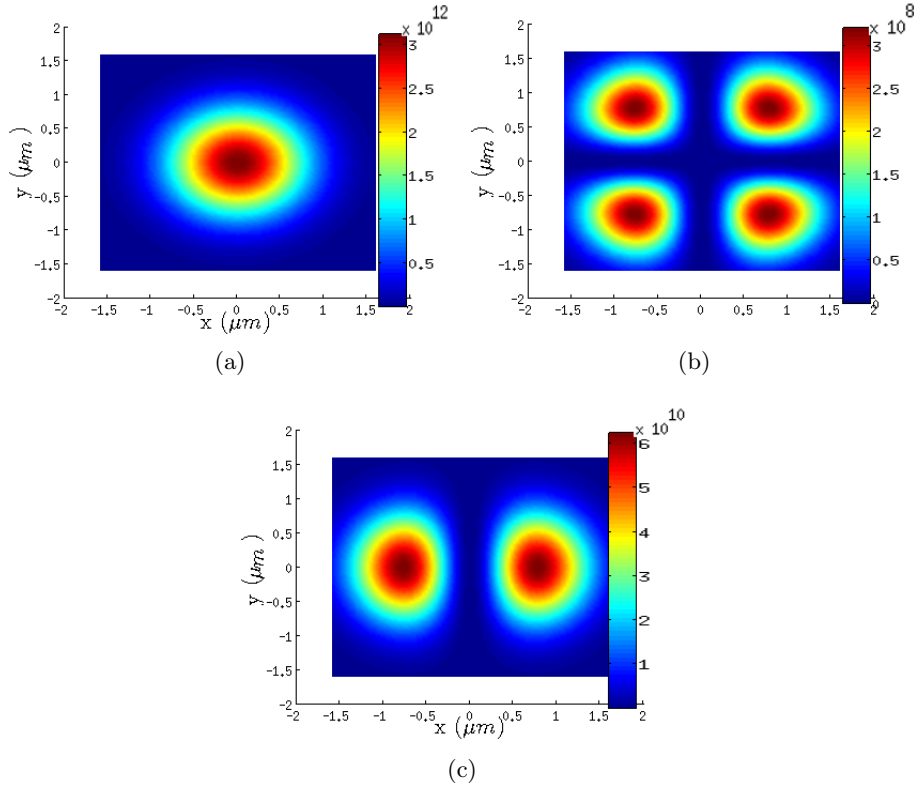


FIGURE 5.10: Profil de distribution du champ électrique au carré du faisceau incident pour chaque polarisation vu au plan focal dans le plan  $xy$  avec  $NA = 0.9$ . (a)  $E_x$  (b)  $E_y$  (c)  $E_z$ . La polarisation est linéaire selon  $x$ .

De la même façon, lorsque  $NA = 0.9$ , la composante  $E_z$  est faible par rapport à  $E_x$  comme le montre la comparaison des figures 5.10(c) et 5.10(a). Lorsque le champ total est évalué à la figure 5.9(d) les deux lobes de la composante  $E_z$  ne sont pas visibles puisque leur contribution au champ électrique total est faible par rapport aux autres. Il est aussi intéressant de remarquer que, lorsque la polarisation change de direction de  $x$  à  $y$ , la position des lobes effectue une rotation de  $90^\circ$ . Ceci est simplement dû au fait que la composante  $E_z$  effectue une rotation de  $90^\circ$  aussi. On rappelle que les équations corrigées au 7e ordre décrivant le champ dans le

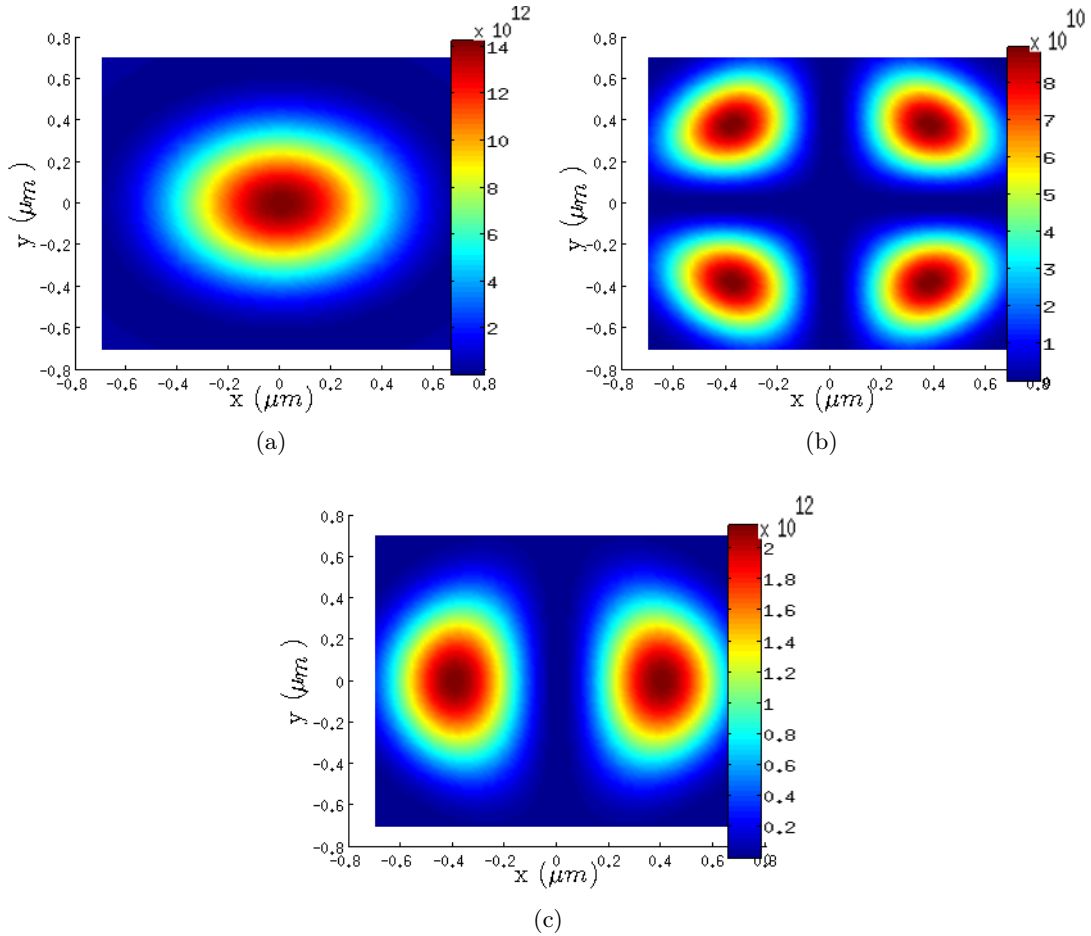


FIGURE 5.11: Profil de distribution du champ électrique au carré du faisceau incident pour chaque polarisation vu au plan focal dans le plan  $xy$  avec  $NA = 1.20$ . (a)  $E_x$  (b)  $E_y$  (c)  $E_z$ . La polarisation est linéaire selon  $x$ .

cas d'une polarisation linéaire selon  $y$  peuvent être calculées mathématiquement en effectuant un changement de variable qui effectue justement une rotation de  $90^\circ$  du système d'axe. Les équations 5.1.50 et 5.1.52 montrent effectivement que  $E_z$  est fonction de  $\eta = y/w_0$  pour la polarisation selon  $y$  et que  $E_z$  est fonction de  $\xi = x/w_0$  pour la polarisation selon  $x$  ce qui revient encore une fois à une rotation de  $90^\circ$  du système d'axe.

Il est aussi important de tenir compte du profil de faisceau dans l'axe optique. Jusqu'ici, la variation du champ au point focal en fonction de  $NA$  a été observée, mais il est aussi important de voir l'effet que la correction peut avoir sur la vitesse avec laquelle le minimum focal est atteint. En effet, plus l'angle de sortie du faisceau laser est grand plus les gradients de force seront importants. Cela peut donc influencer la capture optique. La figure 5.12, représente la variation de la largeur du faisceau à mesure qu'il se propage sur l'axe  $z$  pour une  $NA = 1.20$  et une  $NA = 1$ . La vitesse de focalisation est visiblement plus importante à hautes  $NA$  tout comme la focalisation maximale. Ceci est sans grande surprise puisque pour  $NA = 1.20$



la longueur de collimation –distance de propagation sur laquelle la taille du faisceau reste inférieure à  $\sqrt{2}w_0$ – est  $z_R = 0.64\mu m$  tandis qu'elle est de  $z_R = 2.1\mu m$  pour  $NA = 1$ .

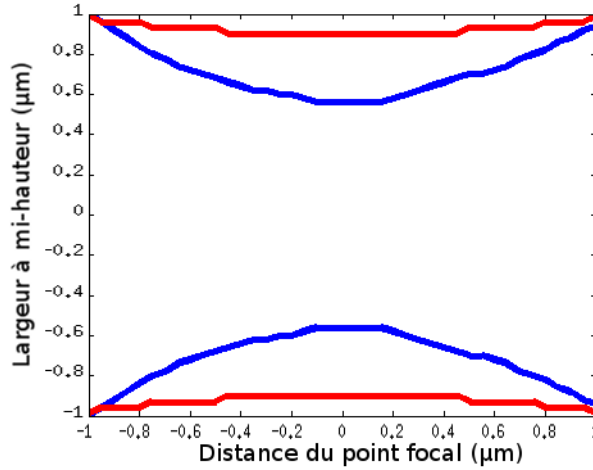


FIGURE 5.12: Variation de la largeur du faisceau en fonction de la position sur l’axe optique pour une  $NA = 1.20$  en bleu et  $NA = 1$  en rouge. La correction au 7e ordre est utilisée.  $NA = 1.20$  correspond à une valeur de  $z_R = 0.64\mu m$  et  $NA = 1$  correspond à une valeur de  $z_R = 2.1\mu m$

### Expansion dans le champ lointain modifié

À la fin de la section 5.1.1, la figure 5.5 comparait la distribution de VSWF obtenue dans le champ lointain (modifiée) avec la distribution gaussienne non corrigée pour  $NA=1.25$ . Avec ce qu’il a été discuté à la section précédente 5.1.2, on comprend mieux que la différence observée était nécessaire. En effet, il est normal que la largeur à mi-hauteur du faisceau soit plus grande dans la direction parallèle à la polarisation aux hautes NA.

La figure 5.13, compare la distribution du champ électrique calculée avec une expansion en VSWF dans le champ lointain et une distribution au septième ordre. La largeur du faisceau corrigé au 7e ordre est alors plus grande dans la direction de polarisation,  $x$ . Quant à elle, l’expansion en VSWF effectuée dans le champ lointain, ne peut représenter parfaitement le champ à cette NA. La figure 5.13(a) montre que la distribution de stress au septième ordre est 33% plus faible au centre de la trappe que celle calculée avec la méthode d’expansion dans le champ lointain. Il faut cependant noter que l’expansion en VSWF permet de mieux représenter la distribution du champ dans la direction perpendiculaire à la polarisation. La figure 5.13(b) montre une différence de 28% au centre de la trappe, mais le reste de la distribution, même si elle est sur évaluée par l’expansion en VSWF montre un profil similaire ; c’est-à-dire la largeur du faisceau est similaire.

En effet, pour obtenir des prédictions physiques correctes ce n’est pas l’intensité maximale

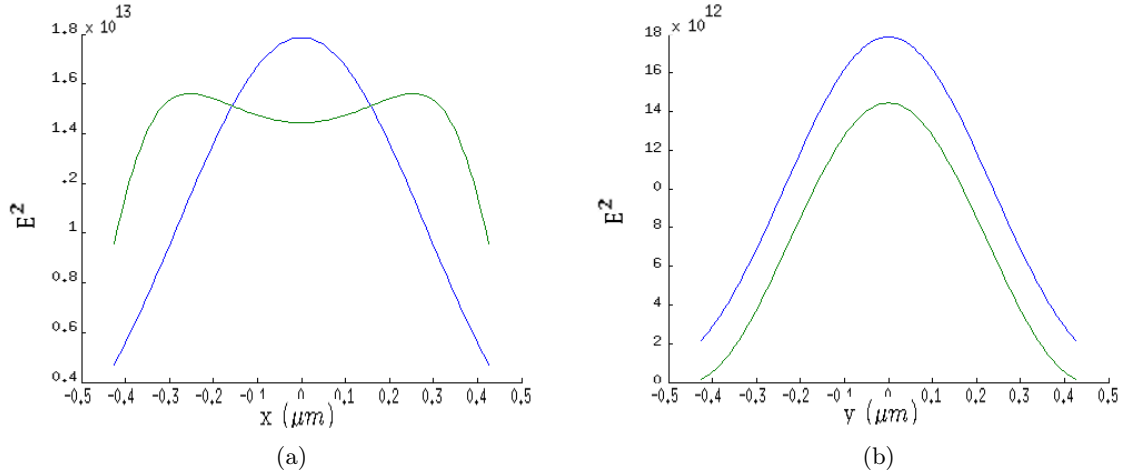


FIGURE 5.13: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique selon (a)  $x$  (b)  $y$ .  $NA = 1.25$  et la polarisation est linéaire selon l'axe  $x$ . La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWEF selon la méthode dans le champ lointain modifiée et la courbe **verte** la distribution calculée au septième ordre

au centre du faisceau qui est la plus importante, mais le profil de distribution du champ. Si l'intensité maximale simulée n'est pas totalement correcte, cela veut dire que la puissance laser devra être augmentée ou diminuée expérimentalement pour arriver aux mêmes résultats que ceux prédits théoriquement. Cependant, si les profils de distribution du champ sont différents, cela signifie que la façon dont le stress et les forces vont s'appliquer changeront. Ceci est plus dommageable puisqu'on ne peut compenser expérimentalement pour ce type d'erreur.

L'expansion dans le champ lointain n'est donc pas la meilleure méthode à utiliser à cette ouverture numérique. Il est cependant important de noter que cette méthode permet de représenter assez bien le profil des faisceaux jusqu'à une ouverture numérique de  $NA = 1.15$ . La figure 5.14 représentant la distribution du champ à  $NA = 1.15$  avec cette méthode montre que le profil du champ électrique calculé est très similaire à celui de la distribution au 7e ordre. La valeur maximale du champ électrique au carré prévue au centre de la trappe optique augmente de 14%, et 13% dans la direction  $x$  et  $y$  respectivement par rapport à la valeur corrigée. Cependant, le profil de distribution est très similaire dans les deux cas.

Il est aussi important de regarder comment le faisceau se propage sur l'axe optique puisque, dans les calculs de forces dans les pinces optiques, il n'y a pas que le plan focal qui soit important. En effet, la façon dont le faisceau se propage est aussi importante. Dans notre cas, les nanobarres étudiés avaient une longueur moyenne d'environ  $1 \mu\text{m}$ . Ainsi, sur les extrémités des nanobarres, le faisceau a subi une propagation d'environ  $500 \text{ nm}$ . Il est donc intéressant de regarder à cette distance le profil du champ pour s'assurer que l'expansion en série correspond toujours à la correction au 7e ordre à  $NA = 1.15$ . La figure 5.15 compare la distribution du

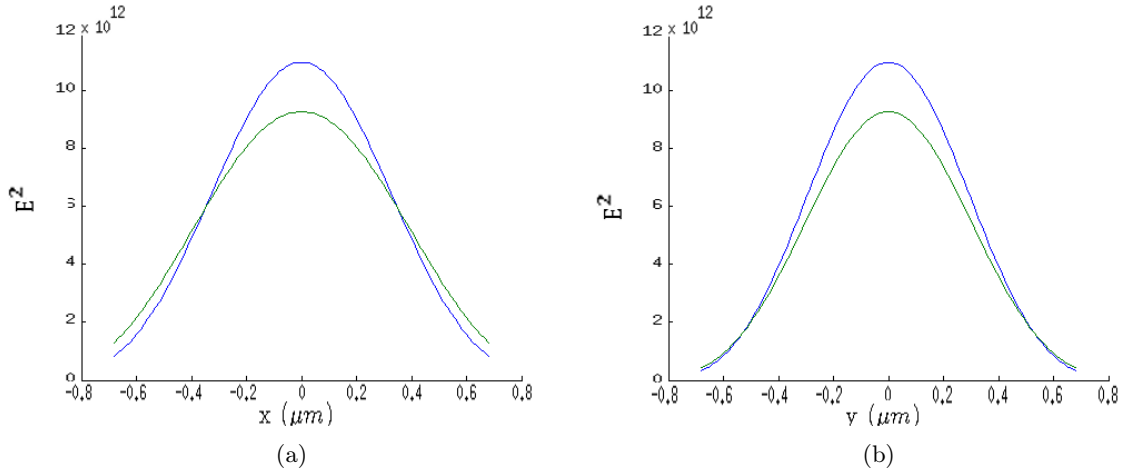


FIGURE 5.14: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique selon (a)  $x$  (b)  $y$ .  $NA = 1.15$  et la polarisation est linéaire selon l'axe  $x$ . La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF selon la méthode dans le champ lointain modifiée et la courbe **verte** la distribution calculée au septième ordre

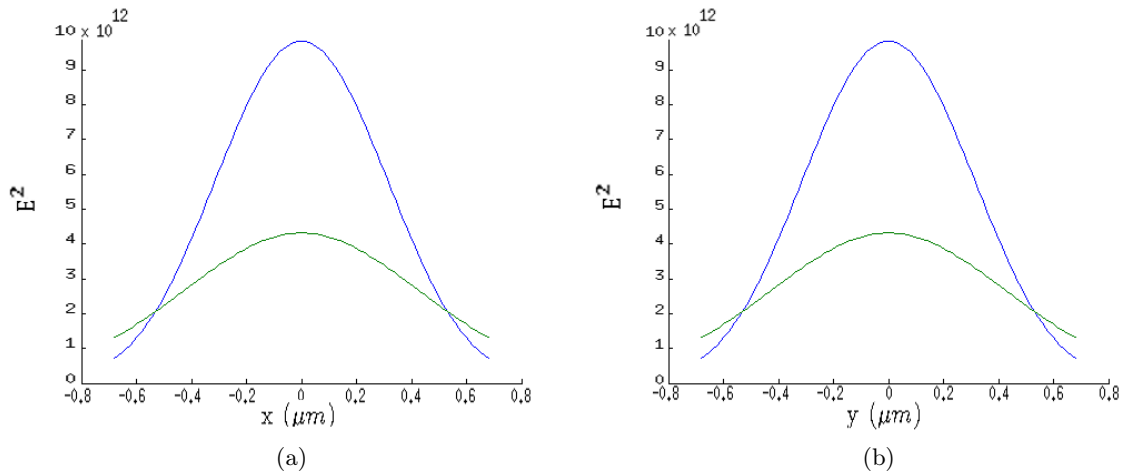


FIGURE 5.15: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 500$  nm en fonction de la distance au centre de l'axe optique selon (a)  $x$  (b)  $y$ .  $NA = 1.15$  et la polarisation est linéaire selon l'axe  $x$ . La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF selon la méthode dans le champ lointain modifiée et la courbe **verte** la distribution calculée au septième ordre

champ à  $NA = 1.15$  en  $z = 500$  nm entre l'expansion dans le champ lointain et la correction au 7e ordre. À  $z = 500$  nm l'expansion en série dans le champ lointain donne de moins bons résultats qu'au plan focal. En effet, l'erreur maximale commise est de 220% à  $z = 500$  nm alors qu'elle était de 18% au plan focal. De la même façon, la figure 5.16 représentant la largeur à mi-hauteur en fonction de la propagation dans l'axe optique, montre que l'expansion en série

dans le champ lointain décrit de moins en moins bien le faisceau incident à mesure que l'on s'éloigne sur l'axe optique. Ceci veut donc dire que, même si le stress calculé au centre du nanobarre serait assez précis, celui calculé aux extrémités le serait moins.

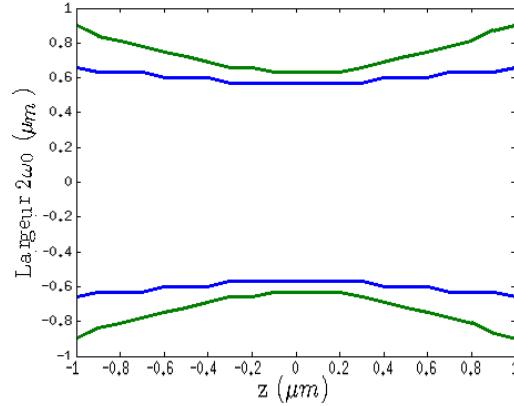


FIGURE 5.16: Largeur du faisceau gaussien en fonction de la distance sur l'axe optique.  $NA = 1.15$  et la polarisation est circulaire. La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF selon la méthode dans le champ lointain modifiée et la courbe **verte** la distribution calculée au septième ordre

Ainsi, il convient de regarder d'autres façons de calculer une expansion en série de VSWF qui donneraient de bons résultats à hautes  $NA$  partout sur l'axe optique.

### Point Matching au champ proche

Comme nous l'avons vu à la section précédente, développer une expansion en série dans le champ lointain est une bonne façon de tenir compte du caractère spécial d'un faisceau gaussien hautement focalisé pour des ouvertures numériques  $NA$  inférieures à 1.15. Cependant, une méthode encore plus précise permettant des calculs pour des ouvertures numériques supérieures à 1.15 peut être développée en utilisant les mêmes outils.

Une procédure est expliquée à la référence (Nieminen , 2003) pour produire une expansion en série à partir de la distribution du champ au foyer. Cependant, ces auteurs utilisent l'équation paraxiale 5.1.29 au lieu de l'équation corrigée 5.1.50. Dans ce qui suit, l'explication de la méthode comme présentée par la référence (Nieminen , 2003) sera faite, mais on y ajoutera des précisions sur les méthodes numériques à utiliser pour permettre une convergence accrue au foyer et en dehors du foyer.

Encore une fois, le faisceau gaussien se propage dans la direction  $+z$ . Le but est de trouver une expansion en série en utilisant une méthode de point matching dans le plan  $xy$  en  $z = 0$ ; c'est-à-dire au plan focal. En suivant la logique de la méthode de point matching dans le

champ lointain, l'équation suivante devrait fonctionner pour le plan focal

$$\begin{bmatrix} E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}_{r,\theta,\phi} = \begin{bmatrix} Rg\vec{M} & Rg\vec{N} \end{bmatrix}_{(kr,\theta,\phi)} \begin{bmatrix} a_{nm} \\ \vdots \\ b_{nm} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.1.57)$$

où  $E_x, E_y, E_z$  sont données par les équations corrigées 5.1.50 et  $Rg\vec{M}, Rg\vec{N}$  par les équations 4.1.13. Cependant, au plan focal en  $z = 0, \theta = \pi/2$ . Les fonctions  $Rg\vec{M}$  avec une somme des leurs indices  $n + m$  pairs sont nulles dans la direction vectorielle  $x$  et  $y$ . Les fonctions  $Rg\vec{N}$  avec une somme de leurs indices  $n + m$  impairs sont nulles dans la direction vectorielle  $x$  et  $y$ . Il n'est donc pas possible d'utiliser la solution d'un système linéaire pour trouver tous les coefficients de l'expansion puisque certaines VSWF posséderont une valeur nulle. L'astuce est de solutionner le système pour les VSWF qui sont non-nulles. Ensuite, on peut retrouver l'autre moitié des coefficients manquant en se servant de la direction de propagation. Pour un faisceau se propageant dans la direction  $+z$ , on trouve que  $a_{nm} = -b_{nm}$  pour le cas  $n + m$  pairs ou  $b_{nm} = -a_{nm}$  pour le cas  $n + m$  impairs. Notez ici que la référence (Nieminen , 2003) fait une erreur en mentionnant les VSWF qui sont nulles en inversant le critère de sélection.

Cette équation est donc à solutionner

$$\begin{bmatrix} E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}_{r,\theta,\phi} = \begin{bmatrix} Rg\vec{M} | Rg\vec{N} \end{bmatrix}_{(kr,\theta,\phi)} \begin{bmatrix} ab_{nm} \end{bmatrix} \quad (5.1.58)$$

où  $Rg\vec{M} | Rg\vec{N}$  signifie que l'on utilise la seulement la fonction qui est non-nulle dans la direction  $x$  et  $y$  et  $ab_{nm}$  représente le coefficient correspondant à la VSWF utilisée.

Une façon simple de construire le système d'équations consiste donc à utiliser  $\theta = \pi/2$  et  $\phi$  variant de 0 à  $2\pi$ . On utilise ensuite un rayon représentant la distance sur laquelle le faisceau gaussien est utilisé dans le plan  $xy$  focal. Il faut cependant noter que, si la plage du rayon utilisée est trop grande, la convergence de l'algorithme est grandement diminuée puisque la correction au 7e ordre diverge à des distances trop grandes. Le rayon utilisé  $R$  varie entre  $0 \mu\text{m}$  et  $2w_0$  ce qui est suffisant pour bien échantillonner la partie importante du faisceau gaussien.

La Figure 5.17 montre le profil du champ électrique calculée avec l'équation gaussienne corrigée 5.1.50, la méthode de point matching au plan focal et la méthode dans le champ lointain. Par rapport à la méthode dans le champ lointain, la méthode au plan focal permet d'améliorer la précision du profil de champ électrique obtenu avec l'expansion en VSWF. L'expansion dans le champ lointain apporte à  $NA = 1.15$  une erreur maximale commise au centre du faisceau de 18% tandis qu'elle est de 10% dans le cas du champ proche.

La courbe noire de la figure 5.17(b) représente le cas où le profil de référence au plan focal est la distribution paraxiale. Les courbes bleues des figures 5.17 représentent le cas où le profil de

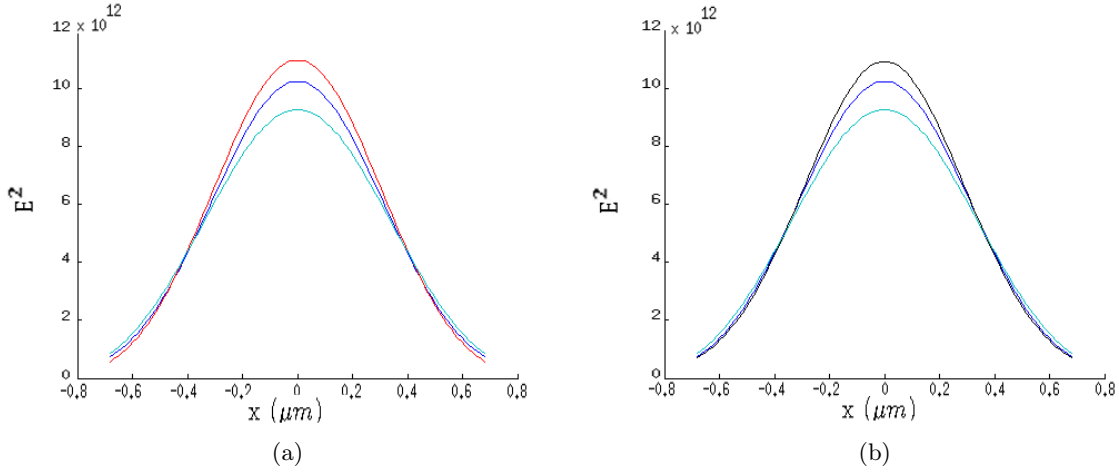


FIGURE 5.17: Distribution de la norme au carré  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec  $w_0 = 0.35 \mu\text{m}$  ( $NA = 1.25$ ) et une polarisation circulaire. La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF au *plan focal*, la courbe **rouge** l'expansion en série de VSWF dans *le champ lointain*, la courbe **turquoise** la correction au 7e ordre et la courbe **noire** représente l'expansion en série dans le plan focal en utilisant l'approximation paraxiale.

référence au plan focal est la distribution corrigée au 7e ordre. L'expansion en VSWF obtenue par point matching au champ proche est bien meilleure dans le cas où la correction au 7e ordre est utilisée comme profil de référence que dans le cas où la distribution paraxiale est utilisée comme la référence (Nieminen , 2003) le fait. En effet, lorsque l'expansion en série est faite en utilisant l'approximation paraxiale, le faisceau obtenus est plus étroit et effilé. Aux figures 5.17, l'erreur commise au centre du faisceau est de 18% si l'expansion est réalisée avec l'approximation paraxiale tandis qu'elle est de 10% si l'expansion est réalisée avec la correction au 7e ordre.

Notons aussi que l'expansion dans le champ lointain donne des résultats similaires à ceux de l'expansion dans le plan focal lorsque l'approximation paraxiale est utilisée comme profil de référence. La courbe rouge de la figure 5.17(a) donne le profil de distribution du champ pour la méthode d'expansion dans le champ lointain. L'erreur maximale commise est de 18% pour l'expansion dans le champ lointain et aussi 18% pour le plan focal lorsque l'approximation paraxiale est utilisée comme profil de référence.

Jusqu'à présent la méthode dans le plan focal utilisant la correction au 7e ordre comme profil de référence est donc la méthode qui permet la meilleure description du faisceau à  $NA = 1.15$ . Notons cependant que plus l'ouverture numérique augmente ou plus que la distance sur l'axe optique augmente moins la description est bonne.

En effet, la figure 5.18(a), représentant la distribution du champ à  $z = 500 \text{ nm}$  et  $NA = 1.15$ , montre que l'erreur maximale commise augmente avec la distance sur l'axe optique. Elle est de

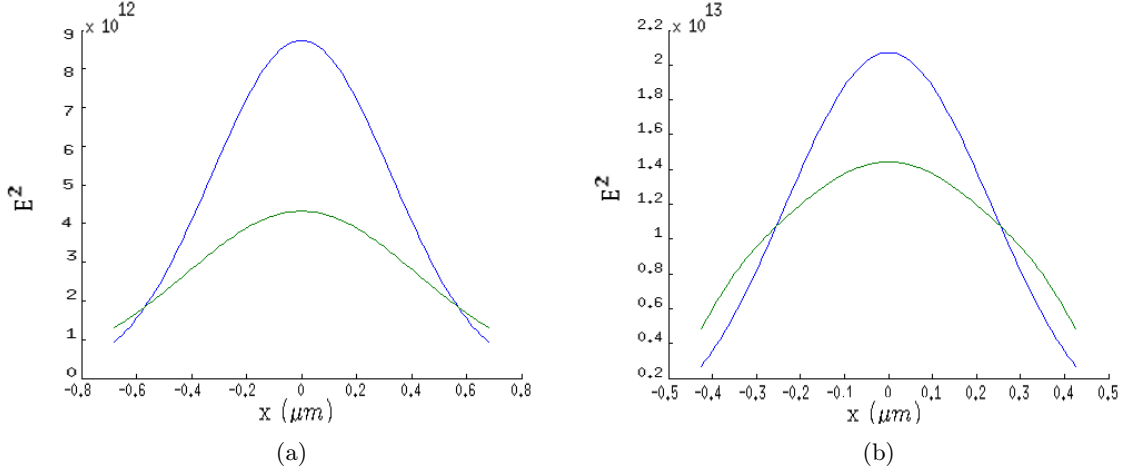


FIGURE 5.18: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en (a)  $z = 500$  nm avec  $NA = 1.15$  (b)  $z = 0$  nm avec  $NA = 1.25$  en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour une polarisation linéaire selon l'axe  $x$ . La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF au plan focal. La courbe **verte** représente la distribution au 7e ordre.

200% à  $z = 500$  nm contrairement à 10% au plan focal. De la même façon, lorsque l'ouverture numérique augmente, la figure 5.18(b), représentant la distribution du champ à  $z = 0$  nm et  $NA = 1.25$ , montre que l'erreur maximale est de 43% à  $NA = 1.25$  contrairement à 10% à  $NA = 1.15$ .

### Champ proche hybride

La solution retenue pour obtenir une expansion en série de VSWF de bien meilleure qualité permettant de bien représenter une correction au septième ordre au centre des nanobarres (au point focal) et aux extrémités de ces derniers est d'utiliser une méthode hybride. L'algorithme de point matching développé pour le plan focal est alors amélioré. Au lieu de développer le champ au plan focal seulement, on développe simultanément l'expansion en série dans plusieurs plans  $xy$  parallèles situés à des distances  $z$  différentes. Pour se faire, on change la valeur de  $\theta$  qui était fixe à  $\theta = \pi/2$  et on donne un degré de liberté à cette variable qui restera cependant comprise entre  $[0, \pi/2]$ . Ceci correspond à une variation des plans  $xy$  dans la direction  $z = r \cos \theta$ . Cette variation sur l'axe optique reste comprise entre des valeurs  $z = \pm 5w_0$ . D'un autre côté, la variation selon  $x$  et  $y$  permise est plus restreinte puisque la correction aux ordres supérieurs diverge lorsque l'on s'éloigne trop loin du centre du faisceau. Une variation radiale donnée par  $x = y = \pm 4w_0$  permet une bonne description du faisceau et une bonne convergence de l'algorithme. Dans ce cas, notons qu'il n'est plus nécessaire d'imposer  $a_{nm} = -b_{nm}$  pour le cas  $n + m$  pairs ou  $b_{nm} = -a_{nm}$  pour le cas  $n + m$  impairs.

La figure 5.19 compare la distribution du champ électrique calculé par une correction au 7e ordre et une méthode de point matching hybride telle que décrite ci-haut. L'expansion en série

de VSWF obtenue permet de mieux représenter la distribution du champ électrique au point focal  $z = 0$  et à une position  $z = 500$  nm pour  $NA = 1.15$  que les autres méthodes évaluées plus haut. L'erreur maximale commise par l'expansion en VSWF réalisée avec la méthode au

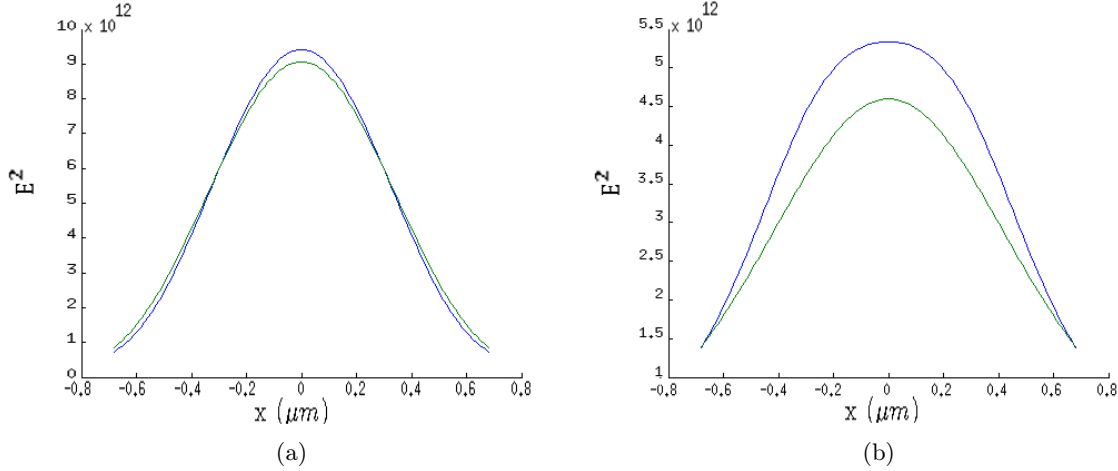


FIGURE 5.19: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec et une polarisation circulaire à  $NA = 1.15$  en (a)  $z = 0$  nm (b)  $z = 500$  nm. La courbe bleue représente l'expansion en série de VSWF calculée avec la méthode hybride et la courbe verte représente la correction au 7e ordre.

plan focal hybride est de 4% en  $z = 0$  au lieu de 8% pour la méthode au plan focal. Elle est aussi de 16% à une position  $z = 500$  nm sur l'axe optique au lieu de 200% dans le cas de la méthode au plan focal.

La figure 5.20(b) montre que cette méthode permet aussi de bien décrire le champ jusqu'à  $NA = 1.20$ . Les figures 5.20, représentant la distribution du champ à  $z = 0$  nm et à  $z = 500$  nm pour  $NA = 1.20$ , montrent en effet que l'erreur maximale commise au point focal est au maximum de 8% et qu'elle est de 35% en  $z = 500$  nm. Ces erreurs sont du même ordre que les erreurs commises à une ouverture  $NA = 1.15$  avec la méthode au plan focal non améliorée. Il fait donc plus de sens d'utiliser l'expansion en série dans le champ proche hybride jusqu'à une  $NA = 1.20$ , mais il faut noter que les résultats les plus précis seront obtenus avec  $NA = 1.15$ .

Finalement, il faut aussi noter qu'un nombre de modes donné par  $N_{max} = 2kw_0$  permet une convergence correcte et que, comme mentionné à la référence (Brock) un nombre de modes donné par  $N_{max} = 2kw_0 + 3(2kw_0)^{1/3}$  permet une convergence optimale. Veuillez noter qu'il est contre-productif d'utiliser un nombre de modes trop grand puisque cela rend la convergence plus difficile par l'ajout de fonctions qui ont un profil trop différent du problème à solutionner. Par exemples, dans le cas où l'ouverture numérique est très grande comme  $NA = 1.25$ , et que la valeur de  $w_0$  est alors petite, un nombre minimal de modes égal à 4 doit être utilisé pour obtenir une bonne convergence.



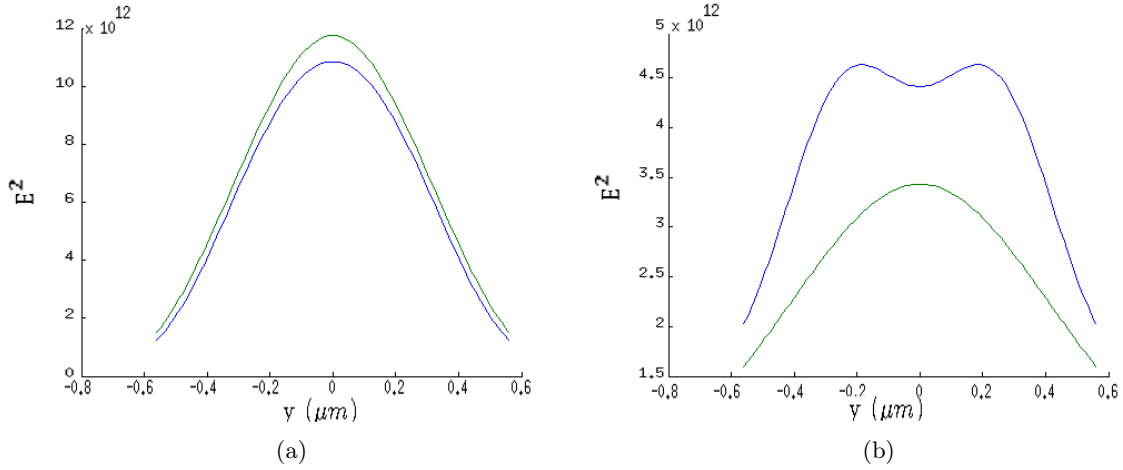


FIGURE 5.20: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en fonction de la distance au centre de l'axe optique pour un faisceau avec une polarisation circulaire à  $NA = 1.20$  en (a)  $z = 0$  nm (b)  $z = 500$  nm. La courbe **bleue** représente l'expansion en série de VSWF calculée avec la méthode hybride et la courbe **verte** représente la correction au 7e ordre.

### Faisceau décentré

Il est souvent nécessaire et utile de représenter un faisceau gaussien dont l'axe de propagation est décentré de l'axe  $z$  pour simuler une perturbation ou pour tester un aspect physique. En utilisant la méthode précédente, il est aisé de trouver une expansion en série de VSWF qui représente un tel faisceau. De plus, contrairement à la référence (Boyde , 2011) notre expansions en série de VSWF permet de représenter le faisceau au hautes NA. En effet, cette référence montre une méthode qui permet de déplacer le faisceau, mais la comparaison avec la distribution paraxiale du faisceau gaussien est faite. Nous avons vu plus haut que la distribution gaussienne n'est plus valide aux hautes NA.

Pour réaliser une translation dans n'importe laquelle des 3 dimensions, il ne suffit que d'utiliser l'équation corrigée au 7e ordre 5.1.50 à laquelle on fait subir un changement de variable  $x \rightarrow x - x_0$ ,  $y \rightarrow y - y_0$ ,  $z \rightarrow z - z_0$  où  $x_0$ ,  $y_0$  et  $z_0$  représentent un déplacement tridimensionnel du faisceau gaussien par rapport à la position du système d'axe. Par la suite, le même algorithme va produire une expansion en série qui permet de représenter ce même déphasage avec une excellente convergence comme le démontre le figure 5.21(b) qui donne la distribution du champ électrique au carré d'un faisceau incident qui serait décentré de 250 nm dans la direction  $+x$ . On note que l'ouverture numérique  $NA=1.25$ . Quant à elle, la figure montre un déplacement en (250 nm, 250 nm) du point focal.

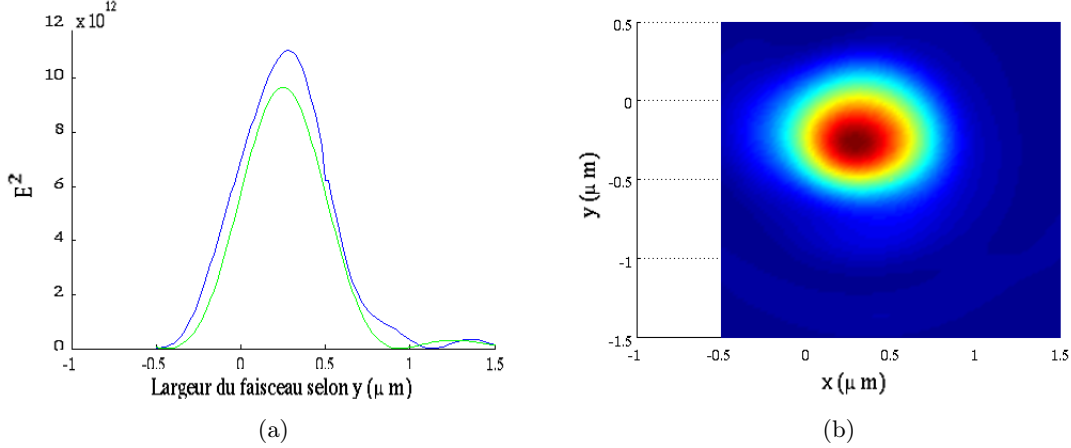


FIGURE 5.21: Distribution de la norme au carrée  $E^2$  du champ électrique en  $z = 0$ , en fonction de la distance au centre de l’axe optique pour un faisceau avec  $\text{NA}=1.25$  ( $w_0 = 0.37 \mu\text{m}$ ) et une polarisation linéaire selon l’axe  $x$ . (a) La courbe **bleue** représente l’expansion en série de VSWF et la courbe **verte** représente la distribution calculée selon les équations 5.1.50 pour un dé-centrage de  $y_0 = 250\text{nm}$  vu dans la direction  $y$  (b) Expansion en série calculée pour un dé-centrage de  $x_0 = -y_0 = 250\text{nm}$  vue dans le plan  $xy$

### Faisceau incliné

Comme la matrice de transfert se calcule plus facilement lorsque les objets sont symétriques en rotation avec l’axe  $z$ , il est plus facile d’incliner le faisceau incident que d’incliner le nanocylindre pour simuler une inclinaison entre le faisceau incident et le nanobarre. Pour ce faire, on utilise la théorie de rotation des VSWF. En effet, la rotation de chaque fonction de l’expansion en série de VSWF va nécessairement résulter en une rotation de tout le faisceau.

Par exemple, pour les VSWF de premier et deuxième type  $\vec{M}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})$ , les VSWF ayant subit une rotation  $\vec{M}'_{nm}(1,2)(k\vec{r})$  sont données par l’équation suivante (Mishchenko, 1991; Dachsels, 2006)

$$\vec{M}'_{nm}(1,2)(k\vec{r}) = \sum_{m'=-n}^n D_{m'm}^n(\alpha, \beta, \gamma) \vec{M}_{nm'}^{(1,2)}(k\vec{r}) \quad (5.1.59)$$

où  $D_{m'm}^n$  sont les fonctions de Wigner D. De la même façon, on peut faire le calcul pour  $\vec{N}'_{nm}(1,2)(k\vec{r})$  et les fonctions régulières. Les figures 5.22 permettent de comparer la distribution de stress à la surface d’un nanocylindre lorsque le faisceau incident a subit une rotation de  $50^\circ$  et lorsqu’il est encore aligné avec l’axe  $z$ .

### 5.1.3 Correction à très haute focalisation

Comme il a été mentionné plus haut, la méthode au champ proche hybride permet une bonne description du faisceau jusqu’à  $\text{NA}=1.20$ , mais les résultats sont plus précis jusqu’à  $\text{NA}=1.15$ . Ainsi, le faisceau gaussien simulé introduit toujours certaines erreurs dans la distribution du

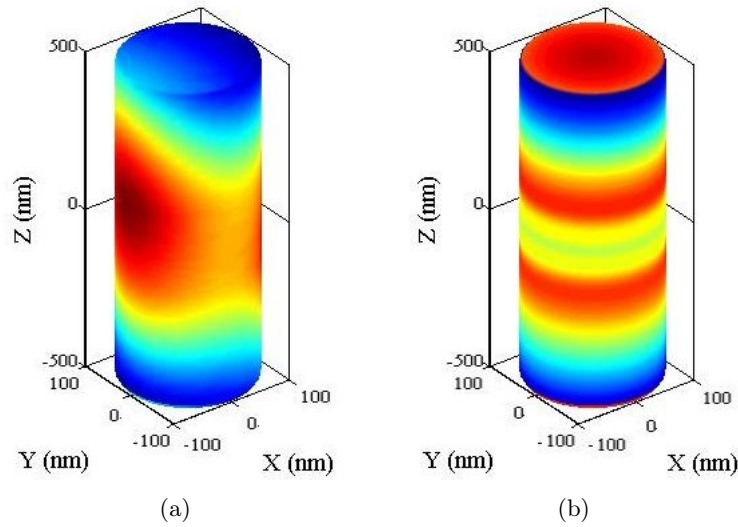


FIGURE 5.22: Distribution de stress sur un nanocylindre de  $R = 100$  nm,  $H = 1 \mu\text{m}$  lorsque (a) le faisceau est incliné de  $50^\circ$  (b) le faisceau n'est pas incliné

champ. Pour de très hautes ouvertures numériques, la fiabilité des calculs est donc nécessairement affectée. Une nouvelle méthode permettant de corriger ces erreurs de calcul pour obtenir des résultats beaucoup plus fiables aux hautes NA sera présenté.

Il faut tout d'abord se rendre compte que le champ dispersé est toujours beaucoup moins intense que le champ incident sur les nanocylindres, car ces derniers sont plus petits ou du même ordre que la longueur d'onde. Ainsi, seule une petite partie de l'énergie est réfléchi sur ces particules diélectriques. Par exemple, la figure 5.23(a) montre le pourcentage du champ qui est représenté par le champ dispersé à la surface d'un nanocylindre. Au maximum, près du centre du nanobarre le champ dispersé représente 3.3% du champ total si la particule est isotrope avec  $n_2 = 1.89$  et des dimensions de  $R = 50$  nm,  $H = 1000$  nm. Le champ dispersé prend de l'importance lorsque les indices de réfractifs et le rayon du nanocylindre augmentent. Par exemple, une particule biréfringente de potassium niobate avec  $n_{xx} = 2.2195$ ,  $n_{yy} = 2.2576$  et  $n_{zz} = 2.1194$  à  $1064\text{nm}$  (Zysset, 1992) et une dimension plus importante de  $R = 200$  nm et  $H = 1 \mu\text{m}$  voit son pourcentage de champ dispersé à la surface augmenté à 16.5% comme montré à la figure 5.23(b). Ainsi, le champ dispersé est toujours beaucoup moins intense que le champ incident pour les nanocylindres de la grandeur qui nous intéressent ; c.-à-d. plus petit que  $R = 300$  nm de rayon.

Notons que le champ total utilisé pour calculer le stress, les forces et le torque résultant est calculé en utilisant l'équation  $E = E_{inc} + E_{scat}$  où  $E_{scat}$  est calculée en utilisant la matrice de transfert à partir des modes du champ incident  $E_{inc}$ . Cependant, comme  $E_{scat}$  change peu la valeur du champ total pour la grosseur de nanocylindre à l'étude ici, les erreurs commises pour calculer  $E_{scat}$  ont beaucoup moins d'impact sur le résultat final du stress, des torques

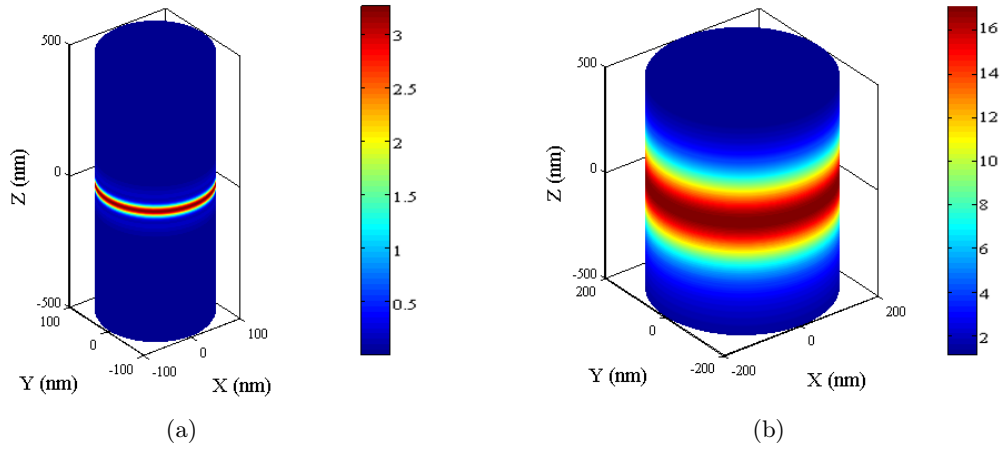


FIGURE 5.23: Pourcentage du champ qui est représenté par le champ dispersé près de la surface d'un nanobarré si (a)  $n_2 = 1.89$   $R = 50$  nm,  $H = 1000$  nm (b) potassium néobate avec  $R = 200$  nm,  $H = 1000$  nm

ou des forces. Inversement, les erreurs commises dans l'expansion du champ incident ont un grand impact sur les résultats finaux. Il peut donc être avantageux de définir une matrice de correction du champ incident. Cette matrice de correction du champ incident ne s'applique pas sur les modes de  $E_{inc}$ , mais sur la distribution calculée numériquement du champ  $E_{inc}$ . Elle n'affecte donc pas le champ dispersé. Selon cette méthode, l'erreur commise sur le champ dispersé reste non-corrigée, mais cette partie ne représente qu'environ 0.54 à 16.5% du champ total tout dépendant de la grosseur de la particule et de son indice de réfraction.

Par exemple, si l'erreur commise sur le champ dispersé est de 30%, puisque cette partie ne peut pas être corrigée, et que le champ dispersé ne représente que 5% du champ total, alors l'erreur totale commise sur les calculs finaux est seulement de 1.5%. Ceci est beaucoup mieux que le cas où la correction n'est tout simplement pas appliquée. Dans ce cas, le même exemple nous permet de dire que l'erreur commise sur le champ total est de 30% et donc que l'erreur maximale possiblement commise sur les résultats finaux est aussi de 30%.

Mathématiquement, l'expansion en série du champ calculée à la section 5.1.2 est utilisée pour calculer numériquement le champ électrique incident  $E_{inc}$ . Parallèlement, le champ électrique est aussi calculé numériquement en utilisant l'équation corrigée au septième ordre  $E_7$  5.1.50. La correction est calculée point par point selon l'équation suivante

$$\begin{aligned}
 correction &= \frac{E_7(x,y,z)}{E_{inc}(x,y,z)} \\
 E_{corrig}(x,y,z) &= correction E_{inc}
 \end{aligned}
 \tag{5.1.60}$$

La figure 5.24 montre que le stress calculé sur la surface d'un nanobarré avec indice de réfraction

$n_2$  donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.59 & 0 & 0 \\ 0 & 1.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1.59 \end{bmatrix}$$

dans le cas corrigé et non-corrigé pour une ouverture numérique  $NA=1.25$ . Comme le faisceau est hautement focalisé, la correction est assez grande et l'effet est important. En effet, la figure corrigée de 5.24 montre un stress qui est 26% plus élevé que ce que la figure non-corrigée prévoit. De plus, la distribution du stress de la figure non corrigé suppose une asymétrie très importante entre  $z > 0$  et  $z < 0$  alors que la figure corrigée ne montre pas ce genre d'asymétrie. D'un autre côté, à la figure 5.25, l'ouverture numérique est seulement de  $NA=1$ . Dans ce cas, la correction est faible puisque l'expansion en série du champ incident est bonne. En effet, il est presque impossible de voir une différence dans la distribution de stress de ces deux figures.

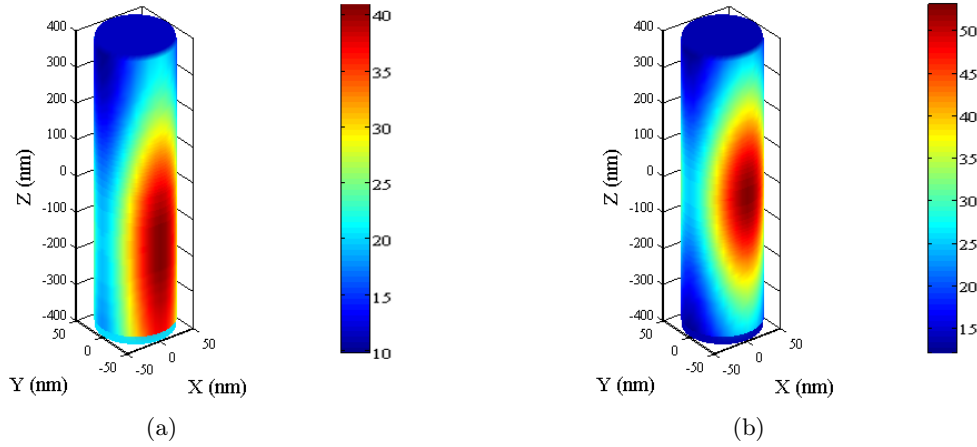


FIGURE 5.24: Stress ( $\text{Nm}^{-1}$ ) sur la surface d'un cylindre anisotrope de  $R = 50 \text{ nm}$  et  $H = 800 \text{ nm}$  avec indice de réfraction  $n_1 = 1.33$ ,  $n_{2o} = 1.59$ ,  $n_{2e} = 1.89$  et  $NA=1.25$  qui est (a) non corrigé par la matrice de correction du champ incident (b) corrigé par la matrice de correction du champ incident. Le faisceau est centré en  $z=0$ .

Ainsi, pour les calculs effectués aux hautes  $NA$ , il est avantageux d'utiliser cette méthode puisqu'elle améliore le calcul du stress. Comme c'est le stress qui est à la base du calcul des autres paramètres physiques (voir section 6.1) comme le torque et les forces, on peut aussi penser que les autres paramètres peuvent être influencés. Par exemple, on montre à la section 7.1.3 que la largeur du potentiel de force de capture optique est influencée de 35% par la correction aux hautes focalisations.

Pour la correction des faisceaux inclinés ou ayant effectué une rotation par rapport à un axe, il est possible d'utiliser les matrices de rotation. Dans ce cas, elles 4.1.50 sont utilisées

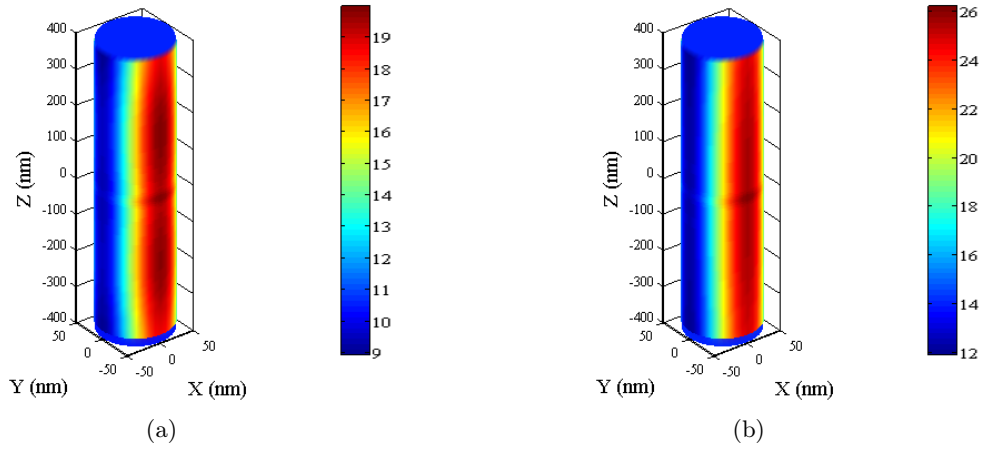


FIGURE 5.25: Stress ( $\text{Nm}^{-1}$ ) sur la surface d'un cylindre avec indice de réfraction  $n_1 = 1.33$ ,  $n_{2o} = 1.59$ ,  $n_{2e} = 1.89$  et  $\text{NA}=1.00$  qui est (a) non corrigé par la matrice de correction du champ incident (b) corrigé par la matrice de correction du champ incident. Le faisceau est centré en  $z=0$ .

pour faire faire une rotation au système de coordonnées des équations 5.1.50 et 5.1.52. La correction au 7e ordre est donc évaluée dans un système de coordonnées  $[x' y' z']$  donné par  $[x', y', z'] = rotation * [x, y, z]$ .

Il est important de rappeler ici les deux limites de cette méthode. Il faut premièrement noter que la correction ne permet pas de faire des calculs avec les coefficients d'expansions en séries pour le calcul des forces et des torques aux équations 6.2.47, 6.2.70 ou 6.3.34. En effet, la correction s'applique sur le calcul numérique du champ et non pas sur les coefficients d'expansion en VSWF. Deuxièmement, il est important de préciser que plus un objet possède un grand rayon, plus les erreurs commise sur le calcul de l'expansion en VSWF du champ incident deviennent importantes. En effet, comme le champ dispersé devient une composante importante du champ sur la surface externe de la particule à grand rayon, on doit aussi pouvoir le corriger.

# Chapitre 6

## Stress, force et torque

### 6.1 Stress

Le calcul du stress en tout point sur la surface ne permet pas de calculer directement de paramètres physiques observables directement lors d'expériences. Cependant, le stress peut être utilisé avec des intégrales sur la surface pour le calcul de forces et de torques et permet donc de comprendre comment ces paramètres physiques observables sont générés lors des expériences. Ainsi, le calcul du stress permet de connaître sous quelles conditions une particule est stable. Il permet aussi de bien comprendre comment ces conditions sont générées. Par exemple, le stress permet de faire ressortir les conséquences physiques d'un accroissement de longueur ou de rayon lorsque d'un objet isotrope ou anisotrope est capturé comme le montre le chapitre 7. Ainsi, le calcul du stress est primordial dans l'interprétation et la compréhension des résultats de calcul de force et de torque.

Il faut noter qu'il est possible d'utiliser deux méthodes pour calculer la force et le torque qui ont chacun des points positifs et négatifs. La première méthode, utilisant l'intégrale analytique du tenseur de Maxwell, est simple à utiliser et rapide à calculer puisque le résultat ne dépend que des paramètres d'expansion des VSWF du champ incident et dispersé 4.1.13  $a_{nm}, b_{nm}, p_{nm}, q_{nm}$ . Les équations 6.2.47 et 6.2.70 montre des exemples pour le calcul de la force axiale et latérale respectivement. Cette méthode ne nécessite donc pas l'évaluation d'une série de VSWF en tout point de la surface. Elle est donc utile pour voir une tendance à un phénomène qui requiert le calcul de beaucoup cas physiques différents comme à la figure 7.2(d) qui montre la variation de la rigidité de la capture optique en fonction de l'ouverture numérique. Dans ce cas, chaque calcul de rigidité à chaque valeur de  $NA$  requiert l'évaluation de plusieurs valeurs de force à différentes positions. Il fait donc du sens d'utiliser la méthode la plus rapide à calculer pour ce cas.

La seconde méthode utilisant l'intégrale numérique du stress est plus longue à calculer et à utiliser puisqu'elle requiert le calcul de l'expansion en série de  $VSWF$  en tout point sur la

surface. Cependant, elle permet d'aller chercher plus de sens physique aux résultats ce qui permet de mieux comprendre les tendances. Par exemple, il peut être intéressant de séparer le calcul des torques provenant des côtés d'un nanobarre à ceux provenant des extrémités d'un nanobarre pour comprendre l'effet d'un changement de rayon ou de longueur comme discuté à la section 7.1.2. De plus cette méthode a permis de prédire l'existence d'une force de torsion présente à l'intérieur du nanobarre comme montré à la section 7.2.2. Ceci aurait été impossible avec le calcul direct du torque  $\tau_z$  en utilisant les équations analytiques. Pour faire une étude complète et rigoureuse, il est donc nécessaire d'utiliser les deux méthodes. Le présent chapitre montrera donc comment calculer le stress, les forces et les torques avec les deux méthodes.

Le point de départ du calcul du stress pour le cas isotrope est le tenseur de Maxwell donné par l'équation suivante

$$\Gamma_{ij} = \epsilon \left[ E_i E_j^* + \frac{1}{\epsilon \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \left( E^2 + \frac{1}{\epsilon \mu_0} B^2 \right) \delta_{ij} \right] \quad (6.1.1)$$

où la composante  $ij$  donne le stress dans une direction parallèle à l'axe  $i$  subie par une surface normale à l'axe  $j$ . Donc le stress moyen parallèle à l'axe  $i$  appliqué sur la frontière de 2 médiums avec des indices  $\epsilon$  différents est donnée par l'équation

$$\sigma_i = \frac{1}{2} Re \left\{ \sum_j (\Gamma_{2ij} - \Gamma_{1ij}) n_j \right\} \quad (6.1.2)$$

où  $i$  représente les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $n_j$  représentent les composantes du vecteur normal à la surface pointant du milieu 1 vers le milieu 2 et le facteur  $\frac{1}{2} Re$  est nécessaire pour prendre seulement la moyenne sur un cycle du tenseur de Maxwell. En notation vectorielle, on a

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} Re \{ \vec{n} \cdot (\Gamma_2 - \Gamma_1) \} \quad (6.1.3)$$

Pour analyser le tenseur de stress dans un milieu anisotrope, on doit considérer le tenseur énergie-momentum qui est plus général. La forme correcte de ce tenseur fait l'objet d'un débat depuis très longtemps et est plus connue sous la controverse d'Abraham-Minkowski. La densité de quantité de mouvement dans un milieu s'écrit sous la forme  $\vec{P} = \vec{D} \times \vec{B}$  selon Minkowski ou  $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}/c^2$  selon Abraham (Robinson Robinson, 1974), (Brevik, 1979), (Pfeifer, 2007). Cependant, comme il est expliqué dans (Pfeifer, 2007), les deux formes sont correctes si la partie matérielle du tenseur énergie-momentum est prise en considération. On assume que le matériel ne présente aucune discontinuité magnétique et ne présente aucune magnétisation, on peut éliminer les forces magnétiques. De plus, on assume que les effets electrostrictifs, qui sont reliés aux dérivées temporelles du tenseur diélectrique  $\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$  sont négligeables ce qui nous permet d'éliminer la partie matérielle du tenseur énergie-momentum. On assume aussi que le milieu est linéaire, donc que  $\epsilon_{ij}$  n'est pas fonction de  $E$ . En effet, dans une pince optique de nanoparticules à l'équilibre, l'état du matériel par rapport à des déformations microscopique, des rotation ou tout autre mouvement à l'intérieur même de l'objet demeure inchangé



puisque les nanoparticules sont ni flexibles, ni déformables. Les propriétés des nanoparticules considérées ici comme leur anisotropie ou leur forme, ne changent pas sous l'effet d'un champ électromagnétique.

Selon la version de Minkowski, on peut trouver que le tenseur de stress qui est relié à la quantité de mouvement ou l'énergie linéaire (qui ne comprend donc pas l'énergie dû au spin des photons) est donnée par

$$\Gamma_{ij} = \left[ D_i E_j^* - \frac{1}{2} (DE) \delta_{ij} \right] \quad (6.1.4)$$

d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} 2\Gamma \cdot \hat{n} &= \begin{pmatrix} n_x(2E_x D_x - \vec{E} \cdot \vec{D}) + 2n_y(E_x D_y) + 2n_z(E_x D_z) \\ 2n_x(E_y D_x) + n_y(2E_y D_y - \vec{E} \cdot \vec{D}) + 2n_z(E_y D_z) \\ 2n_x(E_z D_x) + 2n_y(E_z D_y) + n_z(2E_z D_z - \vec{E} \cdot \vec{D}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_x + 2n_x E_x D_x + 2D_y n_y E_x + 2E_x (n_z D_z) \\ -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_y + 2n_y E_y D_y + 2D_x n_x E_y + 2E_y (n_z D_z) \\ -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_z + 2n_z E_z D_z + 2D_y n_y E_z + 2E_z (n_x D_x) \end{pmatrix} \\ &= -(\vec{E} \cdot \vec{D})\hat{n} + 2(\vec{D} \cdot \hat{n})\vec{E} \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

En substituant l'équation 6.1.5 dans l'équation 6.1.3 le stress appliqué à l'interface est donné par

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \left( 2D_{2n} \vec{E}_2 - \hat{n} (\vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2) \right) - \frac{1}{2} \text{Re} \left( 2D_{1n} \vec{E}_1 - \hat{n} (\vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1) \right) \quad (6.1.6)$$

où tout le stress appliqué est normal à l'interface puisque l'on peut écrire avec  $D_{2n} = D_{1n}$  et  $E_{2t} = E_{1t}$  que

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ -(\vec{E}_2 \vec{D}_2 - \vec{E}_1 \vec{D}_1) \hat{n} - 2D_n (E_{2n} - E_{1n}) \hat{n} \right\} \quad (6.1.7)$$

On note ici que le tenseur de stress n'est pas diagonalement symétrique et, sans sa partie matérielle, viole la conservation du moment angulaire ce qui peut causer des problèmes pour le calcul futur des torques. Pour cette raison, on utilise le tenseur de stress de Abraham qui est symétrique selon l'équation

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} (E_i D_j + E_j D_i - \vec{E} \vec{D} \delta_{ij}) \quad (6.1.8)$$

De la même façon, on peut calculer que

$$\begin{aligned}
2\Gamma \cdot \hat{n} &= \begin{pmatrix} n_x(2E_x D_x - \vec{E} \cdot \vec{D}) + n_y(E_x D_y + E_y D_x) + n_z(E_x D_z + E_z D_x) \\ n_x(E_y D_x + E_x D_y) + n_y(2E_y D_y - \vec{E} \cdot \vec{D}) + n_z(E_y D_z + E_z D_y) \\ n_x(E_z D_x + E_x D_z) + n_y(E_z D_y + E_y D_z) + n_z(2E_z D_z - \vec{E} \cdot \vec{D}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_x + 2n_x E_x D_x + D_x(n_y E_y + n_z E_z) + E_x(n_y D_y + n_z D_z) \\ -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_y + 2n_y E_y D_y + D_y(n_x E_x + n_z E_z) + E_y(n_x D_x + n_z D_z) \\ -(\vec{E} \cdot \vec{D})n_z + 2n_z E_z D_z + D_z(n_x E_x + n_y E_y) + E_z(n_x D_x + n_y D_y) \end{pmatrix} \quad (6.1.9) \\
&= -(\vec{E} \cdot \vec{D})\hat{n} + (\vec{E} \cdot \hat{n})\vec{D} + (\vec{D} \cdot \hat{n})\vec{E}
\end{aligned}$$

et en utilisant  $D_{2n} = D_{1n}$  et que  $E_{2t} = E_{1t}$ , on obtient cette fois que

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ (\vec{E}_1 \cdot \vec{D}_1 - \vec{E}_2 \cdot \vec{D}_2)\vec{n} + 2D_n(E_{2n} - E_{1n})\vec{n} + (E_{2n}D_{2t} - E_{1n}D_{1t})\vec{t} \right\} \quad (6.1.10)$$

On note à partir de la dernière equation que le stress, dans le cas du tenseur symétrique de Abraham, peut avoir une composante tangentielle non nulle qui n'est pas due au spin des photons. En effet, dans le tenseur-énergie momentum la conservation du moment angulaire  $L$  des photons n'est pas prise en compte. Dans la littérature, (Crichton Marston, 2000) on parle de spin et de moment angulaire orbital pour désigner le torque dû au spin d'un photon et le torque dû au tenseur énergie-momentum respectivement.

On peut simplifier l'équation précédente en utilisant l'identité  $\vec{A} = \vec{A}_n + \vec{A}_t$  et les conditions aux frontières dans un milieu parfaitement diélectrique et anisotrope qui sont données par

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (6.1.11a)$$

$$\vec{n} \bullet \vec{D}_1 = \vec{n} \bullet \vec{D}_2 \quad (6.1.11b)$$

La première équation peut se traduire par  $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$  et la seconde par  $D_{1n} = D_{2n}$  qui s'exprime aussi sous la forme  $E_{2n} = \epsilon_2^{-1}\epsilon_1 E_{1n}$ . Il est important de remarquer que la première condition est vectorielle et la seconde scalaire. La condition aux frontières  $D_{1n} = D_{2n}$  est scalaire, mais on peut déduire de cette condition aux frontières que, pour un milieu isotrope :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{2n} &= E_{2n}\vec{n} \\
\Rightarrow \vec{E}_{2n} &= \epsilon_2^{-1}\epsilon_1 E_{1n}\vec{n} = \epsilon_2^{-1}\epsilon_1 \vec{E}_{1n}
\end{aligned} \quad (6.1.12)$$

De la même façon, l'autre condition aux frontières est vectorielle, mais on peut écrire

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{2t} &= \vec{E}_{1t} \\
\Rightarrow \vec{E}_{2t} \cdot \vec{E}_{2t} &= E_{1t} \cdot \vec{E}_{2t} \\
\Rightarrow E_{2t}^2 &= E_{1t} \cdot \vec{E}_{1t} \\
\Rightarrow E_{2t}^2 &= E_{1t}^2
\end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Chaque partie de l'équation ?? deviennent donc

$$\begin{aligned}
E_{2n}\vec{D}_2 &= E_{2n}(D_{1n}\vec{n} + \vec{D}_{2t}) \\
D_{2n}\vec{E}_2 &= D_{1n}(E_{2n}\vec{n} + \vec{E}_{1t}) \\
E_{1n}\vec{D}_1 &= E_{1n}(D_{1n}\vec{n} + \vec{D}_{1t}) \\
D_{1n}\vec{E}_1 &= D_{1n}(E_{1n}\vec{n} + \vec{E}_{1t}) \\
\vec{n}(\vec{E}_x \bullet \vec{D}_x) &= \vec{n}(E_{xn}D_{xn} + E_{1t}D_{xt})
\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

où  $x = 1, 2$ .

L'équation ?? peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma} &= \frac{1}{2} \left( E_{2n}(D_{1n}\vec{n} + \vec{D}_{2t}) + D_{1n}(E_{2n}\vec{n} + \vec{E}_{1t}) - E_{1n}(D_{1n}\vec{n} + \vec{D}_{1t}) \right. \\
&\quad \left. - D_{1n}(E_{1n}\vec{n} + \vec{E}_{1t}) - \vec{n}(E_{2n}D_{2n} - E_{1n}D_{2n}) - \vec{n}(E_{1t}(D_{2t} - D_{1t})) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[ \vec{n}(2D_{1n}E_{2n} - 2D_{1n}E_{1n} - E_{2n}D_{2n} + E_{1n}D_{2n} + E_{1t}(D_{2t} - D_{1t})) + \vec{t}(E_{2n}D_{2t} - E_{1n}D_{1t}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \vec{n} [D_{1n}(E_{2n} - E_{1n}) - E_{1t}(D_{2t} - D_{1t})] + \vec{t}(E_{2n}D_{2t} - E_{1n}D_{1t})
\end{aligned} \tag{6.1.15}$$

Comme le tenseur diélectrique n'a pas tous les éléments sur la diagonale identiques dans le cas d'un objet anisotrope, alors  $E_{2n}D_{2t} \neq E_{1n}D_{1t}$ . En effet, si on définit

$$\epsilon_2 = \epsilon \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{6.1.16}$$

et que  $a \neq b$  et/ou  $b \neq c$  et/ou  $a \neq c$  on peut dire que le stress a une composante tangentielle à la surface. Ainsi, un objet biréfringent donne automatiquement naissance à des stress tangentiels à la surface et un objet isotrope voit son stress toujours perpendiculaire à la surface.

Notons qu'il est utile, pour arriver au résultat ci-haut, d'utiliser le fait que  $\vec{E}_n \bullet \vec{E}_t = 0$  et  $\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t}$ . De la même façon, on a donc  $\vec{E}_{2n} \bullet \vec{E}_{1t} = 0$ . On peut simplifier encore plus la dernière équation en utilisant le fait que  $\vec{E}_{1n} = (\vec{n} \cdot \vec{E})\vec{n}$  et que  $E_{1n} = (\vec{n} \cdot E)$ . Par conséquent, on peut trouver que, dans le cas d'un objet isotrope, on peut simplifier l'équation ci-haut par

$$\vec{\sigma} = \frac{(\epsilon_2^{-1}\epsilon_1 - 1)}{2} [\epsilon_1 E_{1n}^2 + \epsilon_2 E_{1t}^2] \vec{n} \tag{6.1.17}$$

Notons ici la différence avec l'équation donnée par (Okamoto Kawata, 1999) qui manque un facteur  $\frac{1}{2}$  qui est nécessaire pour prendre la valeur moyenne du tenseur de stress de Maxwell sur un cycle.

On note que, dans ce cas-ci, le stress est toujours perpendiculaire à la surface. Ainsi, le stress est toujours perpendiculaire à la surface dans le cas d'un objet isotrope et une composante tangentielle à la surface existe dans le cas anisotrope.

## 6.2 Force

Pour les calculs de force, il est aussi important de noter que des dérivations semblables qui utilisent des formalismes ou des fonctions différentes ont déjà été effectués dans d'autres publications (Barton , 1989; Yan Yao, 2007). Cependant, comme on utilise ici une expansion en VSWF légèrement différente et un formalisme différent, il est nécessaire de refaire les calculs.

Ainsi, l'équation est donnée par

$$\langle \vec{F} \rangle = \oint_S dS \vec{n} \bullet \langle \Gamma \rangle = \oint_S dS \hat{r} \bullet \langle \Gamma \rangle \quad (6.2.1)$$

où la seconde égalité provient du fait que l'on fait l'intégrale sur une surface fermée. En effet, peut importe la surface sur laquelle on fait l'intégrale, le résultat est identique en autant que la surface soit fermée. On choisit donc par simplicité une sphère où la normale  $\vec{n}$  est tout simplement le rayon  $\vec{r}$ .

De plus, on sait que la valeur moyenne du tenseur de stress  $\langle \Gamma \rangle$  peut être représentée par  $\frac{1}{2} \text{Re}(\Gamma)$ . Ainsi, la force due à un champ électrique est donnée par l'équation suivante

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \oint_S dS \vec{n} \bullet \Gamma \right) \quad (6.2.2)$$

Il est important de noter que, contrairement à l'équation 6.1.3, on n'utilise pas la différence des Tenseur de stress de Maxwell dans l'intégrale de la force. En effet, comme il est mentionné à la page 261 de (Jackson, 1998), l'intégrale sur une surface fermée qui provient du théorème de divergence permet de calculer la force par unité d'aire transmise à travers la surface  $S$  et qui agit sur le système combiné de la particule et du champ interne. Ainsi, l'intégrale sur la surface fermée permet d'elle-même de tenir compte du champ intérieur. Par opposition, l'équation 6.1.3 ne se fait pas sur une surface fermée. Il est alors nécessaire de tenir compte explicitement du champ intérieur dans cette équation.

### 6.2.1 Méthode analytique

Pour faire le calcul analytique, il est nécessaire d'utiliser le tenseur de stress de Maxwell en coordonnées sphériques, car les fonctions utilisées pour décrire le champ électrique, les harmoniques sphériques vectorielles (VSWF) sont des vecteurs en coordonnées sphériques comme expliqué à la section 4.1.5.

De plus on note que le calcul analytique est effectué sur par une intégrale sur une surface fermée, on choisit une sphère où le vecteur  $\vec{n}$  devient  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_r \hat{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Le calcul du tenseur de stress de Maxwell en coordonnées cartésienne est fait en annexe B.

Il est important de noter que l'on peut simplifier encore plus le problème en considérant une autre surface fermée : celle d'une sphère dans le champ lointain. En effet, on se rappelle qu'à la section 5.1.1 que l'on a défini les VSWF dans le champ lointain aux équations 5.1.26 sous la forme

$$\vec{M}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n (\mp j)^{n+1} \frac{\pm e^{jkr}}{kr} \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3a)$$

$$= N_n h_n^{(1,2)} \vec{C}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3b)$$

$$\vec{N}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n (\mp j)^n \frac{\pm e^{jkr}}{kr} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3c)$$

$$= N_n I_n^{(1,2)} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3d)$$

$$Rg\vec{M}_{nm}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n \frac{\cos(kr - (n+1)\frac{\pi}{2})}{kr} \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi) \quad (6.2.3e)$$

$$= N_n j_n \vec{C}_{nm}(\theta, \varphi) \quad (6.2.3f)$$

$$Rg\vec{N}_{nm}(k\vec{r})|_{kr \gg n^2} = N_n \frac{\cos(kr - \frac{n\pi}{2})}{kr} \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3g)$$

$$= N_n n_n \vec{B}_{nm}(\theta, \phi) \quad (6.2.3h)$$

où les harmoniques sphériques vectorielles définies aux équations 4.1.14 sont

$$\vec{P}_{nm} = Y_{nm} \hat{\mathbf{r}} \quad (6.2.4a)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{nm} &= r \vec{\nabla} Y_{nm} = r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \\ &= \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.2.4b)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}_{nm} &= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\nabla} Y_{nm} = \hat{\mathbf{r}} \times \left( \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\phi} \right) \\ &= -\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (6.2.4c)$$

On répète ici ces équations parce qu'elles sont très importantes pour la suite de la dérivation mathématique et parce qu'il est plus aisé de constater que les VSWF dans le champ lointain sont dépendantes seulement de  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\phi}$ . Ceci vient simplifier les composantes du tenseur de Maxwell B.0.2 qui contiennent une partie dans la direction  $\hat{\mathbf{r}}$  puisque  $H_r = E_r = 0$  dans le champ lointain.

Ainsi, l'équation B.0.6 devient

$$\begin{aligned} (n \cdot \Gamma)_x &= (n_r \Gamma_{rr}) \cos \phi \sin \theta = - \left\{ \frac{1}{2} \epsilon \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_\theta H_\theta^* + H_\phi H_\phi^* \right) \right\} \cos \phi \sin \theta \\ (n \cdot \Gamma)_y &= (n_r \Gamma_{rr}) \sin \phi \sin \theta = - \left\{ \frac{1}{2} \epsilon \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_\theta H_\theta^* + H_\phi H_\phi^* \right) \right\} \sin \phi \sin \theta \\ (n \cdot \Gamma)_z &= (n_r \Gamma_{rr}) \cos \theta = - \left\{ \frac{1}{2} \epsilon \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_\theta H_\theta^* + H_\phi H_\phi^* \right) \right\} \cos \theta \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Le problème est donc de trouver la force donnée par l'équation 6.2.2 en utilisant l'équation 6.2.5 pour l'intégrand et la définition d'une unité d'aire en coordonnées sphériques  $ds = r^2 \sin \theta$ .

### Force selon l'axe z

Ainsi, pour le calcul de la force selon l'axe z ( $F_z$ ) du à un champ électromagnétique défini par une expansion en série d'un champ incident et dispersé on obtient

$$F_z = \frac{1}{2} Re \iint ((n \cdot T)_z r^2 \sin \theta d\theta d\phi) \quad (6.2.6)$$

En considérant seulement le champ électrique, puisque le champ magnétique se dérive de la même façon, on obtient

$$F_z = \frac{-\epsilon r^2}{4} Re \iint (E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^*) \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (6.2.7)$$

À partir d'ici, il est utile d'utiliser la notation de Bra et de Ket. Cette notation permet de représenter des intégrales beaucoup plus simplement. Sous cette notation, on peut réécrire l'équation 6.2.7 sous la forme suivante

$$F_z = \frac{-\epsilon r^2}{4} Re \{ \langle E_\theta \cos \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi \cos \theta | E_\phi \rangle \} \quad (6.2.8)$$

Ainsi, en se servant des équations 6.2.4 et 6.2.3, on peut définir les composantes du champ électromagnétique total à l'extérieur de l'objet comme étant

$$\begin{aligned} E_r(r) &= 0 \\ E_\theta(r) &= a_{nm} N_n j_n \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} + p_{nm} N_n h_n^{(1)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} + b_{nm} N_n n_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + q_{nm} N_n I_n^{(1)} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \\ &= N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} (b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)}) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} (a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)}) \\ E_\phi(r) &= -a_{nm} N_n j_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} - b_{nm} N_n n_n \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} + p_{nm} N_n h_n^{(1)} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} + q_{nm} N_n I_n^{(1)} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \\ &= -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} (a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)}) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} (b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)}) \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Si on pose

$$\begin{aligned} A &= (b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)}) \\ A' &= (b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)}) \\ B &= (a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)}) \\ B' &= (a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)}) \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

la première partie de l'équation 6.2.8 peut donc se simplifier sous la forme

$$\begin{aligned}
\langle E_\theta \cos \theta | E_\theta \rangle &= \langle N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta A + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta B \\
&\quad | N'_n \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' + \frac{N'_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} B' \rangle \\
&= N_n N'_n \left\{ \langle A \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' \rangle + \langle B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} B' \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle A \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} B' \rangle + \langle B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

et la seconde partie

$$\begin{aligned}
\langle E_\phi \cos \theta | E_\phi \rangle &= \langle -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta B + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta A \\
&\quad | -N'_n \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' + \frac{N'_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} A' \rangle \\
&= N_n N'_n \left\{ \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta B | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' \rangle + \langle \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta A | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} A' \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta B | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} A' \rangle - \langle A \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' \rangle \right\}
\end{aligned} \tag{6.2.12}$$

En remettant les deux parties ensemble on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle E_\theta \cos \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi \cos \theta | E_\phi \rangle = \\
&\left\{ \langle A \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' \rangle + \langle B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} B' \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle A \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} B' \rangle + \langle B \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' \rangle \right\} N_n N'_n + \\
&\left\{ \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta B | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' \rangle + \langle \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta A | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} A' \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta B | \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \phi} A' \rangle - \langle A \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' \rangle \right\} N_n N'_n \\
&= \left\{ \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle (AA' + BB') \right. \\
&\quad + \langle \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{im}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle (AA' + BB') \\
&\quad + \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{im'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle (AB' - BA') \\
&\quad \left. + \langle \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle (BA' - AB') \right\} N_n N'_n \\
&= N_n N'_n \left\{ (AA' + BB') \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right) \right. \\
&\quad \left. - i (AB' - BA') \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle \right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.2.13}$$

On doit donc réaliser les deux intégrales suivantes

$$N_n N'_n \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right) \tag{6.2.14a}$$

$$N_n N'_n \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle \right) \tag{6.2.14b}$$

où les harmoniques sphériques  $Y_{nm}$  peuvent s'écrire sous la forme

$$Y_{nm} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta) \quad (6.2.15)$$

$$A_{nm} e^{im\phi} P_n^m(\cos\theta)$$

où  $P_n^m(\cos\theta)$  représente le polynôme associé de Legendre et  $A_{nm}$  représente les constantes de normalisation.

Ainsi, la première intégrale à résoudre peut s'écrire selon l'équation suivante si on omet d'écrire la dépendance en  $\cos\theta$  des fonctions de Legendre pour simplifier l'écriture.

$$\begin{aligned} & N_n N'_n \left( \langle A_{nm} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos\theta | A_{n'm'} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin\theta} Y_{nm} \cos\theta | \frac{m'}{\sin\theta} Y_{n'm'} \rangle \right) = \\ & N_n N'_n \left( \langle A_{nm} e^{im\phi} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos\theta | A_{n'm'} e^{im'\phi} \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right. \\ & \left. + \langle A_{nm} m e^{im\phi} \frac{P_n^m}{\sin\theta} \cos\theta | A_{n'm'} m' e^{im'\phi} \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin\theta} \rangle \right) = \\ & N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m')\phi} \left( \langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos\theta | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle + \langle m m' \frac{P_n^m}{\sin\theta} \cos\theta | \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin\theta} \rangle \right) = \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

En utilisant la référence (Kim Lee, 1983) et en ajustant pour le type de normalisation de la fonction de Legendre que l'on utilise, on trouve que

$$\begin{aligned} & N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m')\phi} \left( \langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos\theta | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle + \langle m m' \frac{P_n^m}{\sin\theta} \cos\theta | \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin\theta} \rangle \right) = \\ & N_n N'_n \frac{4\pi}{(2n+1)(2n'+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{m,m'} [n'(n'+2)(n'-m+1)\delta_{n'+1,n} \\ & + (n'-1)(n'+1)(n'+m)\delta_{n'-1,n}] \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)(n'-m')!}{4\pi(n'+m')!}} \\ & = N_n N'_n n'(n'+2) \sqrt{\frac{(n'-m+1)!(n'+m+1)!}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'+1} \\ & + N_n N'_n n(n+2) \sqrt{\frac{(n-m+1)!(n+m+1)!}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{n+1,n'} \\ & = \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)!(n+m+1)!}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{m,m'} \delta_{n',n+1} \\ & + \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{n'(n'+2)(n'-m+1)!(n'+m+1)!}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{m,m'} \delta_{n+1,n'} \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

où  $m = m'$  et  $n' = n + 1$ .

La seconde intégrale peut s'écrire selon l'équation suivante si on omet d'écrire la dépendance en  $\cos\theta$  pour simplifier l'écriture.

$$\begin{aligned} & N_n N'_n \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos\theta | \frac{m'}{\sin\theta} Y_{n'm'} \rangle + \langle \frac{m}{\sin\theta} Y_{nm} \cos\theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle \right) \\ & = N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} \left( m' \langle e^{im\phi} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos\theta | e^{im'\phi} \frac{1}{\sin\theta} P_{n'}^{m'} \rangle \right. \\ & \left. + m \langle e^{im\phi} \frac{1}{\sin\theta} P_n^m \cos\theta | e^{im'\phi} \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right) \\ & = N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m')\phi} \left( m' \langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos\theta | \frac{1}{\sin\theta} P_{n'}^{m'} \rangle + m \langle \frac{1}{\sin\theta} P_n^m \cos\theta | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right) \end{aligned} \quad (6.2.18)$$



En utilisant la référence (Kim Lee, 1983) et en ajustant pour le type de normalisation de la fonction de Legendre que l'on utilise, on trouve que

$$\begin{aligned}
& N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m')\phi} \left( m' \left\langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos \theta \middle| \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \right\rangle + m \left\langle \frac{1}{\sin \theta} P_n^m \cos \theta \middle| \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \right\rangle \right) \\
&= N_n N'_n \frac{4\pi}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} m \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \times \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)}{4\pi} \frac{(n'-m')!}{(n'+m')!}} \\
&= N_n N'_n m \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \\
&= \frac{m}{n(n+1)} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}
\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

où  $m = m'$  et  $n' = n$ .

En remettant ces deux intégrales dans la dernière égalité de l'équation 6.2.13, on trouve que

$$\begin{aligned}
& \left\{ (AA' + BB') \left( \left\langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta \middle| \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \right\rangle + \left\langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta \middle| \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \right\rangle \right) \right. \\
& \quad \left. - i (AB' - BA') \left( \left\langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \cos \theta \middle| \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \right\rangle + \left\langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} \cos \theta \middle| \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \right\rangle \right) \right\} N_n N'_n \\
&= (AA' + BB') \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)!}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{m,m'} \delta_{n',n+1} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{n'(n'+2)(n'-m+1)(n'+m+1)!}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{m,m'} \delta_{n+1,n'} \right] \\
& \quad - i (AB' - BA') \frac{m}{n(n+1)} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'}
\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

Selon l'équation 6.2.8 on doit prendre la partie réelle de la dernière équation. Il faut aussi prendre soin de noter que l'on doit prendre la *moyenne sur un cycle complet* de ces fonctions. En effet, à l'équation 6.1.1 on utilise la valeur moyenne du tenseur de Maxwell sur un cycle. Si on pose

$$J = \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)!}{(2n+1)(2n+3)}} \tag{6.2.21}$$

La première partie peut se solutionner de la façon suivante

$$\begin{aligned}
& Re(AA' + BB') [J\delta_{m,m'}\delta_{n',n+1} + J_2\delta_{m,m'}\delta_{n+1,n'}] \\
= & Re \left[ J_1\delta_{m,m'}\delta_{n',n+1} \left( b_{nm}n_n + q_{nm}I_n^{(1)} \right) \left( b_{n'm'}^*n_{n'}^* + q_{n'm'}^*I_{n'}^{*(1)} \right) \right. \\
& \left. + J\delta_{m,m'}\delta_{n',n+1} \left( a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)} \right) \left( a_{n'm'}^*j_{n'}^* + p_{n'm'}^*h_{n'}^{*(1)} \right) \right] \\
& + Re \left[ J\delta_{m,m'}\delta_{n+1,n'} \left( b_{nm}n_n + q_{nm}I_n^{(1)} \right) \left( b_{n'm'}^*n_{n'}^* + q_{n'm'}^*I_{n'}^{*(1)} \right) \right. \\
& \left. + J\delta_{m,m'}\delta_{n+1,n'} \left( a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)} \right) \left( a_{n'm'}^*j_{n'}^* + p_{n'm'}^*h_{n'}^{*(1)} \right) \right] \\
= & JRe \left( b_{nm}b_{n+1,m}^*n_n n_{n+1}^* + b_{nm}q_{n+1,m}^*n_n I_{n+1}^{*(1)} + q_{nm}q_{n+1,m}^*I_n^{(1)} I_{n+1}^{*(1)} \right. \\
& \left. + q_{nm}b_{n+1,m}^*I_n^{(1)} n_{n+1}^* + a_{nm}a_{n+1,m}^*j_n j_{n+1}^* + a_{nm}p_{n+1,m}^*j_n h_{n+1}^{*(1)} \right. \\
& \left. + p_{nm}a_{n+1,m}^*h_n^{(1)} j_{n+1}^* + p_{nm}p_{n+1,m}^*h_n^{(1)} h_{n+1}^{*(1)} \right) \\
& + JRe \left( b_{n+1,m}b_{n,m}^*n_{n+1} n_n^* + b_{n+1,m}q_{n,m}^*n_{n+1} I_n^{*(1)} + q_{n+1,m}q_{n,m}^*I_{n+1}^{(1)} I_n^{*(1)} \right. \\
& \left. + q_{n+1,m}b_{n,m}^*I_{n+1}^{(1)} n_n^* + a_{n+1,m}a_{n,m}^*j_{n+1} j_n^* + a_{n+1,m}p_{n,m}^*j_{n+1} h_n^{*(1)} \right. \\
& \left. + p_{n+1,m}a_{n,m}^*h_{n+1}^{(1)} j_n^* + p_{n+1,m}p_{n,m}^*h_{n+1}^{(1)} h_n^{*(1)} \right)
\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

En ré-écrivant les fonctions  $I_n^{(1)}$ ,  $n_n$ ,  $j_n$  et  $h_n^{(1)}$  sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
I_n^{(1)} &= \frac{e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})}}{kr} \\
n_n &= \frac{1}{2kr} \left[ e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right] \\
j_n &= \frac{1}{2kr} \left[ e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right] \\
h_n^{(1)} &= \frac{e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})}}{kr}
\end{aligned} \tag{6.2.23}$$

on peut trouver les relations suivantes où les crochets  $\langle \rangle$  mettent l'emphase sur le fait que l'on calcule une valeur moyenne sur un cycle. La première relation

$$\begin{aligned}
\langle n_n n_{n+1}^* \rangle &= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) \left( e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} e^{-\frac{i\pi}{2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= 0 = \langle n_{n+1} n_n^* \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.24}$$

où la dernière égalité provient du fait que la moyenne sur un cycle d'une fonction sinusoidale est nulle. La seconde relation

$$\begin{aligned}
\langle n_n I_{n+1}^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2} = -\langle n_{n+1} I_n^{*(1)} \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.25}$$

La troisième relation

$$\begin{aligned}
\langle I_n^{(1)} I_{n+1}^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \rangle \langle e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} \rangle \\
&= \frac{i}{k^2 r^2} = -\langle I_{n+1}^{(1)} I_n^{*(1)} \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.26}$$

La quatrième relation

$$\begin{aligned}
\langle I_n^{(1)} n_{n+1}^* \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \left( e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2} = -\langle I_{n+1}^{(1)} n_n^* \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.27}$$

La cinquième relation

$$\begin{aligned}
\langle j_n j_{n+1}^* \rangle &= \frac{1}{4k^2 r^2} \langle \left( e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \left( e^{-i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} e^{-\frac{i\pi}{2}} \rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \langle e^{2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} \rangle \\
&= 0 = \langle j_{n+1} j_n^* \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

La sixième relation

$$\begin{aligned}
\langle j_n h_{n+1}^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle \left( e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) e^{-i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2} = -\langle j_{n+1} h_n^{*(1)} \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

La septième relation

$$\begin{aligned}
\langle h_n^{(1)} j_{n+1}^* \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \left( e^{-i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2} = -\langle h_{n+1}^{(1)} j_n^* \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

La huitième relation

$$\begin{aligned}
\langle h_n^{(1)} h_{n+1}^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \rangle \langle e^{-i(kr - \frac{(n+2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{\frac{i\pi}{2}} \rangle \\
&= \frac{i}{k^2 r^2} = -\langle h_{n+1}^{(1)} h_n^{*(1)} \rangle
\end{aligned} \tag{6.2.31}$$

L'équation 6.2.22 devient donc

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} (AA' + BB') \delta_{m,m'} \delta_{n',n+1} = \\
& = J \operatorname{Re} \left( b_{nm} b_{n+1,m}^* n_n n_{n+1}^* + b_{nm} q_{n+1,m}^* n_n I_{n+1}^{*(1)} + q_{nm} q_{n+1,m}^* I_n^{(1)} I_{n+1}^{*(1)} \right. \\
& \quad + q_{nm} b_{n+1,m}^* I_n^{(1)} n_{n+1}^* + a_{nm} a_{n+1,m}^* j_n j_{n+1}^* + a_{nm} p_{n+1,m}^* j_n h_{n+1}^{*(1)} \\
& \quad \left. + p_{nm} a_{n+1,m}^* h_n^{(1)} j_{n+1}^* + p_{nm} p_{n+1,m}^* h_n^{(1)} h_{n+1}^{*(1)} \right) \\
& \quad + J \operatorname{Re} \left( b_{n+1,m} b_{n,m}^* n_{n+1} n_n^* + b_{n+1,m} q_{n,m}^* n_{n+1} I_n^{*(1)} + q_{n+1,m} q_{n,m}^* I_{n+1}^{(1)} I_n^{*(1)} \right. \\
& \quad + q_{n+1,m} b_{n,m}^* I_{n+1}^{(1)} n_n^* + a_{n+1,m} a_{n,m}^* j_{n+1} j_n^* + a_{n+1,m} p_{n,m}^* j_{n+1} h_n^{*(1)} \\
& \quad \left. + p_{n+1,m} a_{n,m}^* h_{n+1}^{(1)} j_n^* + p_{n+1,m} p_{n,m}^* h_{n+1}^{(1)} h_n^{*(1)} \right) \tag{6.2.32} \\
& = -\frac{J}{2k^2 r^2} \operatorname{Im} \left( b_{nm} q_{n+1,m}^* + q_{nm} b_{n+1,m}^* + 2q_{nm} q_{n+1,m}^* \right. \\
& \quad \left. + a_{nm} p_{n+1,m}^* + p_{nm} a_{n+1,m}^* + 2p_{nm} p_{n+1,m}^* \right) \\
& \quad + \frac{J}{2k^2 r^2} \operatorname{Im} \left( b_{n+1,m} q_{n,m}^* + q_{n+1,m} b_{n,m}^* + 2q_{n+1,m} q_{n,m}^* \right. \\
& \quad \left. + a_{n+1,m} p_{n,m}^* + p_{n+1,m} a_{n,m}^* + 2p_{n+1,m} p_{n,m}^* \right) \\
& = -\frac{2J}{2k^2 r^2} \operatorname{Im} \left( b_{nm} q_{n+1,m}^* + q_{nm} b_{n+1,m}^* + 2q_{nm} q_{n+1,m}^* \right. \\
& \quad \left. + a_{nm} p_{n+1,m}^* + p_{nm} a_{n+1,m}^* + 2p_{nm} p_{n+1,m}^* \right)
\end{aligned}$$

où les relations suivantes ont été utilisées pour la dernière égalité.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} (XY^*) &= \operatorname{Re} (X^*Y) \\
\operatorname{Re} (iX) &= -\operatorname{Im} (X) \\
\operatorname{Im} (XY^*) &= -\operatorname{Im} (X^*Y) \\
\operatorname{Im} (X^*) &= -\operatorname{Im} (X)
\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

La seconde partie de l'équation 6.2.20 devient

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re} (AB' - BA') i \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} = \\
& = \operatorname{Re} \left[ i \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) \left( a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \right. \\
& \quad \left. - i \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \right] \tag{6.2.34} \\
& = \operatorname{Re} i \left( b_{nm} a_{nm}^* n_n j_n^* + b_{nm} p_{nm}^* n_n h_n^{*(1)} + q_{nm} a_{nm}^* I_n^{(1)} j_n^* + q_{nm} p_{nm}^* I_n^{(1)} h_n^* \right) \\
& \quad - \operatorname{Re} i \left( a_{nm} b_{nm}^* j_n n_n^* + a_{nm} q_{nm}^* j_n I_n^{*(1)} + p_{nm} b_{nm}^* h_n^{(1)} n_n^* + p_{nm} q_{nm}^* h_n^{(1)} I_n^* \right)
\end{aligned}$$

En utilisant les fonctions comme à l'équation 6.2.23 on peut encore trouver 8 relations. La

première relation

$$\begin{aligned}
\langle n_n j_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) \left( e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} e^{-\frac{i\pi}{2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

La deuxième relation

$$\begin{aligned}
\langle n_n h_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.36}$$

la troisième relation

$$\begin{aligned}
\langle I_n^{(1)} j_n^* \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \left( e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{i}{2k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.37}$$

La quatrième relation

$$\begin{aligned}
\langle I_n^{(1)} h_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{k^2 r^2} \left\langle e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right\rangle \left\langle e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{1}{k^2 r^2} \left\langle e^{\frac{i\pi}{2}} \right\rangle \\
&= \frac{i}{k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.38}$$

La cinquième relation

$$\begin{aligned}
\langle j_n n_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) \left( e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{-\frac{i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} e^{\frac{i\pi}{2}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{4k^2 r^2} \left\langle e^{2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

La sixième relation

$$\begin{aligned}
\langle j_n I_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle \left( e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} + e^{-i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \right) e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \left\langle e^{-\frac{i\pi}{2}} + e^{-2i(kr - \frac{(n+1/2)\pi}{2})} \right\rangle \\
&= \frac{-i}{2k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.40}$$

la septième relation

$$\begin{aligned}
\langle h_n^{(1)} n_n^* \rangle &= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \left( e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} + e^{i(kr - \frac{n\pi}{2})} \right) \rangle \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} \langle e^{\frac{-i\pi}{2}} + e^{2i(kr - \frac{(n+3/2)\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{-i}{2k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.41}$$

La huitième relation

$$\begin{aligned}
\langle h_n^{(1)} I_n^{*(1)} \rangle &= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{i(kr - \frac{(n+1)\pi}{2})} \rangle \langle e^{-i(kr - \frac{n\pi}{2})} \rangle \\
&= \frac{1}{k^2 r^2} \langle e^{\frac{-i\pi}{2}} \rangle \\
&= \frac{-i}{k^2 r^2}
\end{aligned} \tag{6.2.42}$$

L'équation 6.2.34 devient donc

$$\begin{aligned}
&Re (AB' - BA') i \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} = \\
&= Re i \left( b_{nm} a_{nm}^* n_n j_n^* + b_{nm} p_{nm}^* n_n h_n^{*(1)} + q_{nm} a_{nm}^* I_n^{(1)} j_n^* + q_{nm} p_{nm}^* I_n^{(1)} h_n^* \right) \\
&\quad - Re i \left( a_{nm} b_{nm}^* j_n n_n^* + a_{nm} q_{nm}^* j_n I_n^{*(1)} + p_{nm} b_{nm}^* h_n^{(1)} n_n^* + p_{nm} q_{nm}^* h_n^{(1)} I_n^* \right) \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} Re i (b_{nm} p_{nm}^* i + q_{nm} a_{nm}^* i + q_{nm} p_{nm}^* 2i) \\
&\quad - \frac{1}{2k^2 r^2} Re i (a_{nm} q_{nm}^* (-i) + p_{nm} b_{nm}^* (-i) + p_{nm} q_{nm}^* (-2i)) \\
&= -\frac{1}{2k^2 r^2} Re (b_{nm} p_{nm}^* + q_{nm} a_{nm}^* + 2q_{nm} p_{nm}^* + a_{nm} q_{nm}^* + p_{nm} b_{nm}^* + 2p_{nm} q_{nm}^*) \\
&= -2 \frac{1}{2k^2 r^2} Re (b_{nm} p_{nm}^* + q_{nm} a_{nm}^* + 2q_{nm} p_{nm}^*)
\end{aligned} \tag{6.2.43}$$

où les relations 6.2.33 on été utilisées.

Finalement, on peut trouver la valeur de la force selon l'axe  $z$  de l'équation 6.2.8 en utilisant les équations 6.2.43, 6.2.32 et 6.2.20. La force selon  $z$  exercée par le champ électrique est donc donné par

$$\begin{aligned}
F_{z(E)} &= \frac{-\epsilon r^2}{4} Re \{ \langle E_\theta \cos \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi \cos \theta | E_\phi \rangle \} \\
&= \frac{-2\epsilon r^2}{4} \left( -\frac{1}{2k^2 r^2} \right) Im (b_{nm} q_{n+1,m}^* + q_{nm} b_{n+1,m}^* + 2q_{nm} q_{n+1,m}^* \\
&\quad + a_{nm} p_{n+1,m}^* + p_{nm} a_{n+1,m}^* + 2p_{nm} p_{n+1,m}^*) \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} \\
&\quad - 2 \frac{\epsilon r^2}{4} \frac{1}{2k^2 r^2} Re (b_{nm} p_{nm}^* + q_{nm} a_{nm}^* + 2q_{nm} p_{nm}^*) \frac{m}{n(n+1)} \\
&= \frac{\epsilon}{4k^2} \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} Im (b_{nm} q_{n+1,m}^* + q_{nm} b_{n+1,m}^* + 2q_{nm} q_{n+1,m}^* \right. \\
&\quad \left. + a_{nm} p_{n+1,m}^* + p_{nm} a_{n+1,m}^* + 2p_{nm} p_{n+1,m}^*) \right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{n(n+1)} Re (b_{nm} p_{nm}^* + q_{nm} a_{nm}^* + 2q_{nm} p_{nm}^*) \right]
\end{aligned} \tag{6.2.44}$$

De la même façon, on peut calculer la force exercée par le champ magnétique. En utilisant une seconde fois l'équation 6.2.8, mais en remplaçant les valeurs de champ et de permittivité par celle du champ magnétique on trouve

$$F_z = -\frac{\mu r^2}{4} Re \{ \langle H_\theta \cos \theta | H_\theta \rangle + \langle H_\phi \cos \theta | H_\phi \rangle \} \quad (6.2.45)$$

où les valeurs du champ magnétique sont données sur une sphère de rayon infini. La dérivation est, à quelques exceptions près identique. On obtient alors

$$\begin{aligned} F_{z(H)} = & \frac{\mu}{4k^2\eta^2} \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} Im (b_{nm}q_{n+1,m}^* + q_{nm}b_{n+1,m}^* + 2q_{nm}q_{n+1,m}^* \right. \\ & + a_{nm}p_{n+1,m}^* + p_{nm}a_{n+1,m}^* + 2p_{nm}p_{n+1,m}^*) \\ & \left. - \frac{m}{n(n+1)} Re (b_{nm}p_{nm}^* + q_{nm}a_{nm}^* + 2q_{nm}p_{nm}^*) \right] \end{aligned} \quad (6.2.46)$$

où  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  et  $\frac{\mu}{\eta^2} = \epsilon$

La force totale est donc donnée par l'équation 6.2.47.

$$\begin{aligned} F_{z(int)} = & \frac{\epsilon}{2k^2} \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n-m+1)(n+m+1)}{(2n+1)(2n+3)}} Im (b_{nm}q_{n+1,m}^* + q_{nm}b_{n+1,m}^* + 2q_{nm}q_{n+1,m}^* \right. \\ & + a_{nm}p_{n+1,m}^* + p_{nm}a_{n+1,m}^* + 2p_{nm}p_{n+1,m}^*) \\ & \left. - \frac{m}{n(n+1)} Re (b_{nm}p_{nm}^* + q_{nm}a_{nm}^* + 2q_{nm}p_{nm}^*) \right] \end{aligned} \quad (6.2.47)$$

où  $\epsilon$  est à prendre dans le milieu extérieur à l'objet.

À ce point, il est intéressant de noter que l'intégrale numérique de l'équation 6.2.6 donne le même résultat que l'équation 6.2.47 ce qui confirme la validité de l'équation précédente comme le montre la figure 6.1 qui représente la force selon l'axe  $z$   $F_z$  en fonction du déplacement sur l'axe optique.

Si le milieu intérieur est anisotrope, on doit tenir compte du fait que  $\epsilon_2$  soit un tenseur. Ainsi, on doit remonter à l'équation B.0.4 et mettre en évidence  $\epsilon_2$ . Si on définit

$$\epsilon_2 = \epsilon \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (6.2.48)$$

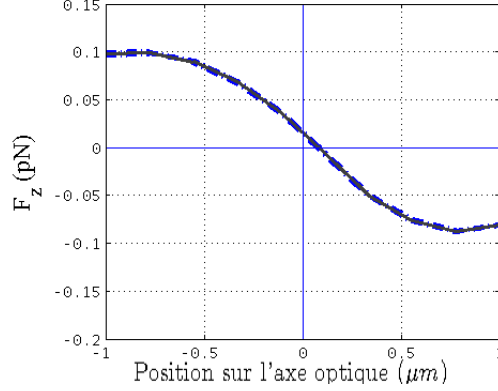


FIGURE 6.1: Force selon l'axe  $z$   $F_z$  en fonction du déplacement sur l'axe optique pour un nanocylindre de  $R = 50nm$  et  $H = 800nm$  avec  $n_1 = 1.33$ ,  $n_2 = 1.77$ . La courbe bleue représente le calcul fait avec l'équation analytique et la courbe noire le calcul fait avec l'intégrale numérique.

L'équation B.0.4 devient donc

$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \Gamma &= \vec{n} \cdot \epsilon_2 \Gamma' \\
&= \begin{bmatrix} n_x \hat{x} & n_y \hat{y} & n_z \hat{z} \end{bmatrix} \epsilon_2 \cdot \Gamma' \\
&= \begin{bmatrix} n_x \hat{x} & n_y \hat{y} & n_z \hat{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \Gamma' \\
&= \begin{bmatrix} (n_x a_1 + n_y b_1 + n_z c_1) \hat{x} & (n_x a_2 + n_y b_2 + n_z c_2) \hat{y} & (n_x a_3 + n_y b_3 + n_z c_3) \hat{z} \end{bmatrix} \cdot \Gamma'
\end{aligned} \tag{6.2.49}$$

où  $\Gamma = \epsilon_2 \Gamma'$ . Dans ce calcul, le tenseur est appliqué sur la normale au lieu du champ électrique, mais respecte la priorité des opérations. Il est important de noter que le vecteur normal à la surface change de direction lors de son produit avec le tenseur. Ainsi, le vecteur  $\vec{n} \cdot \epsilon_2 \neq c \vec{n}$  où  $c$  est une constante. En d'autres termes, si on pose  $\vec{n} \cdot \epsilon_2 \neq \vec{v}$ ,  $\vec{v}$  n'est plus nécessairement normal à la surface. On ne peut donc pas poser la simplification faite pour obtenir l'équation B.0.4. On doit alors utiliser l'équation B.0.3 qui nécessite une quantité de travail mathématique beaucoup plus grande. La méthode numérique s'avère alors plus utile pour les cas anisotropes.

### Force selon l'axe $x$ ou $y$

La force dans la direction  $x$  ou  $y$  se trouve de la même façon que celle dans la direction  $z$ . Ainsi, pour trouver la force appliquée due à un champ électrique défini par une expansion en série de VSWF incidente et dispersée, on utilise la partie selon  $x$  ou  $y$  de l'équation 6.2.2 qui peut s'écrire, pour la partie selon  $x$  sous la forme

$$F_x = \frac{1}{2} Re \left( \iint ((n \cdot T)_x r^2 \sin \theta d\theta d\phi) \right) \tag{6.2.50}$$



et pour la partie selon  $y$  sous la forme

$$F_y = \frac{1}{2} Re \left( \iint \left( (n \cdot T)_y r^2 \sin \theta d\theta d\phi \right) \right) \quad (6.2.51)$$

En utilisant seulement la partie du champ électrique des équations 6.2.5, puisque la partie pour le champ magnétique se dérive de façon similaire, les deux équations précédentes deviennent respectivement

$$F_x = -\frac{\epsilon r^2}{4} Re \left( \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) \cos \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right) \quad (6.2.52)$$

et pour la partie selon  $y$  sous la forme

$$F_y = -\frac{\epsilon r^2}{4} Re \left( \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) \sin \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right) \quad (6.2.53)$$

Si on calcule  $F_x + iF_y$  on obtient

$$\begin{aligned} F_x + iF_y &= -\frac{\epsilon r^2}{4} Re \left( \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) \cos \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right. \\ &\quad \left. + i Re \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) \sin \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right) \\ &= -\frac{\epsilon r^2}{4} Re \left( \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) \cos \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right. \\ &\quad \left. + Im \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) i \sin \phi \sin^2 \theta d\theta d\phi \right) \end{aligned} \quad (6.2.54)$$

où l'on utilise la relation  $iRe(z) = Im(iz)$  Ainsi, on peut déduire que si l'on calcule

$$F = -\frac{\epsilon r^2}{4} \iint \left( E_\theta E_\theta^* + E_\phi E_\phi^* \right) e^{i\phi} \sin^2 \theta d\theta d\phi \quad (6.2.55)$$

alors  $Re(F) = F_x$  et  $Im(F) = F_y$ .

Il est encore une fois important de garder en tête que l'on veut la moyenne de la force électromagnétique. Ainsi, les symboles  $\langle \rangle$  sont omis pour simplifier la notation et on utilise les Bras et les Kets. On note ici que la seule chose qui différencie l'équation 6.2.7 de l'équation 6.2.52 ou 6.2.53 est en relation avec la multiplication du champ électrique par des fonctions sinusoïdales. Ainsi, on peut réutiliser l'équation 6.2.9 où on peut encore une fois utiliser la substitution

$$\begin{aligned} A &= \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) \\ A' &= \left( b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \\ B &= \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \\ B' &= \left( a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \end{aligned} \quad (6.2.56)$$

pour simplifier la démarche. De la même façon, l'équation 6.2.13 peut être réutilisée en changeant seulement la partie sinusoïdale. On obtient pour la force  $x$  et  $y$  de l'équation 6.2.54 un

intégrant sous la forme

$$\begin{aligned}
& \langle E_\theta e^{(i\phi)} \sin \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi e^{(i\phi)} \sin \theta | E_\phi \rangle \\
= & \left\{ (AA' + BB') \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right) \right. \\
& \left. - i (AB' - BA') \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle \right) \right\} N_n N'_n
\end{aligned} \tag{6.2.57}$$

On doit donc réaliser les 2 intégrales suivantes

$$N_n N'_n \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right) \tag{6.2.58a}$$

$$N_n N'_n \left( \langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle \right) \tag{6.2.58b}$$

où les harmoniques sphériques  $Y_{nm}$  peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
Y_{nm} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) \\
&A_{nm} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{6.2.59}$$

où  $P_n^m(\cos \theta)$  représente le polynôme associé de Legendre et  $A_{nm}$  représentent les constantes de normalisation.

La première intégrale à résoudre peut s'écrire selon l'équation suivante si on omet d'écrire la dépendance en  $\cos \theta$  des fonctions de Legendre pour simplifier l'écriture.

$$\begin{aligned}
& N_n N'_n \left( \langle A_{nm} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | A_{n'm'} \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + \langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right) = \\
& N_n N'_n \left( \langle A_{nm} e^{im\phi} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | A_{n'm'} e^{im'\phi} \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right. \\
& \left. + \langle A_{nm} m e^{im\phi} \frac{P_n^m}{\sin \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | A_{n'm'} m' e^{im'\phi} \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin \theta} \rangle \right) = \\
& N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m')\phi} \left( \langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle + \langle m m' \frac{P_n^m}{\sin \theta} e^{(i\phi)} \sin \theta | \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin \theta} \rangle \right) =
\end{aligned} \tag{6.2.60}$$

En utilisant la référence (Kim Lee, 1983) et en ajustant pour le type de normalisation de la

fonction de Legendre que l'on utilise, on trouve que

$$\begin{aligned}
& N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m'+1)\phi} \left( \left\langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \sin \theta \middle| \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \right\rangle + \left\langle m m' \frac{P_n^m}{\sin \theta} \sin \theta \middle| \frac{P_{n'}^{m'}}{\sin \theta} \right\rangle \right) = \\
& N_n N'_n \frac{4\pi}{(2n+1)(2n'+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} [(n'-1)(n'+1)(n'+m)(n'+m+1)\delta_{n,n'-1} \\
& - n'(n'+2)(n'-m)(n'-m+1)\delta_{n,n'+1}] \delta_{m+1,m'} \times \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)}{4\pi} \frac{(n'-m')!}{(n'+m')!}} \\
& = N_n N'_n \left[ n(n+2) \sqrt{\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \right. \\
& \left. - n'(n'+2) \sqrt{\frac{(n'-m'+1)(n'-m'+2)}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1} \right] \\
& = \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \\
& - \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{(n'(n'+2)(n'-m'+1)(n'-m'+2)}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1}
\end{aligned} \tag{6.2.61}$$

La seconde intégrale à résoudre peut s'écrire

$$\begin{aligned}
& N_n N'_n \left( \left\langle \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} e^{i\phi} \sin \theta \middle| \frac{m'}{\sin \theta} Y_{n'm'} \right\rangle + \left\langle \frac{m}{\sin \theta} Y_{nm} e^{i\phi} \sin \theta \middle| \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \right\rangle \right) \\
& = N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} \left( m' \left\langle e^{im\phi} \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} e^{i\phi} \sin \theta \middle| e^{im'\phi} \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \right\rangle \right. \\
& \left. + m \left\langle e^{im\phi} \frac{1}{\sin \theta} P_n^m e^{i\phi} \sin \theta \middle| e^{im'\phi} \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \right\rangle \right) \\
& = N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m'+1)\phi} \left( m' \left\langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \sin \theta \middle| \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \right\rangle + m \left\langle \frac{1}{\sin \theta} P_n^m \sin \theta \middle| \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \right\rangle \right)
\end{aligned} \tag{6.2.62}$$

En utilisant la référence (Kim Lee, 1983) et en ajustant pour le type de normalisation de la fonction de Legendre que l'on utilise, on trouve que

$$\begin{aligned}
& N_n N'_n A_{nm} A_{n'm'} e^{i(m-m'+1)\phi} \left( m' \left\langle \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \cos \theta \middle| \frac{1}{\cos \theta} P_{n'}^{m'} \right\rangle + m \left\langle \frac{1}{\cos \theta} P_n^m \cos \theta \middle| \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \right\rangle \right) \\
& N_n N'_n \frac{-4\pi}{(2n+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (n-m)(n+m+1) \delta_{m+1,m'} \delta_{n,n'} \\
& \times \sqrt{\frac{(2n+1)}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \sqrt{\frac{(2n'+1)}{4\pi} \frac{(n'-m')!}{(n'+m')!}} \\
& = -N_n N'_n \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \delta_{m+1,m'} \delta_{n,n'} \\
& = -\frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \delta_{m+1,m'} \delta_{n,n'}
\end{aligned} \tag{6.2.63}$$

En remettant ces deux intégrales dans l'équation 6.2.57 on obtient

$$\begin{aligned}
& \langle E_\theta e^{i\phi} \sin \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi e^{i\phi} \sin \theta | E_\phi \rangle \\
& = (AA' + BB') \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \right. \\
& \left. - \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{(n'(n'+2)(n'-m'+1)(n'-m'+2)}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1} \right] \\
& + i(AB' - BA') \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \delta_{m+1,m'} \delta_{n,n'}
\end{aligned} \tag{6.2.64}$$

Si on pose

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \\ I_2 &= \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{n'(n'+2)(n'-m'+1)(n'-m'+2)}{(2n'+1)(2n'+3)}} \end{aligned} \quad (6.2.65)$$

La première partie de l'équation 6.2.64 devient, en utilisant les relations 6.2.24 à 6.2.31 et 6.2.33

$$\begin{aligned} & (AA' + BB') (I_1 \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} - I_2 \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1}) \\ &= \left[ I_1 \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) \left( b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \right. \\ &+ I_1 \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \\ &- I_2 \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1} \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) \left( b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \\ &- I_2 \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \left. \right] \\ &= I_1 \left( b_{nm} b_{n+1,m+1}^* n_n n_{n+1}^* + b_{nm} q_{n+1,m+1}^* n_n I_{n+1}^{*(1)} + q_{nm} q_{n+1,m+1}^* I_n^{(1)} I_{n+1}^{*(1)} \right. \\ &+ q_{nm} b_{n+1,m+1}^* I_n^{(1)} n_{n+1}^* + a_{nm} a_{n+1,m+1}^* j_n j_{n+1}^* + a_{nm} p_{n+1,m+1}^* j_n h_{n+1}^{*(1)} \\ &+ p_{nm} a_{n+1,m+1}^* h_n^{(1)} j_{n+1}^* + p_{nm} p_{n+1,m+1}^* h_n^{(1)} h_{n+1}^{*(1)} \left. \right) \\ &- I_2 \left( b_{n+1,m-1} b_{n,m}^* n_{n+1} n_n^* + b_{n+1,m-1} q_{n,m}^* n_{n+1} I_n^{*(1)} + q_{n+1,m-1} q_{n,m}^* I_{n+1}^{(1)} I_n^{*(1)} \right. \\ &+ q_{n+1,m-1} b_{n,m}^* I_{n+1}^{(1)} n_n^* + a_{n+1,m-1} a_{n,m}^* j_{n+1} j_n^* + a_{n+1,m-1} p_{n,m}^* j_{n+1} h_n^{*(1)} \\ &+ p_{n+1,m-1} a_{n,m}^* h_{n+1}^{(1)} j_n^* + p_{n+1,m-1} p_{n,m}^* h_{n+1}^{(1)} h_n^{*(1)} \left. \right) \\ &= I_1 \frac{1}{2k^2 r^2} \left( b_{nm} b_{n+1,m+1}^* 0 + b_{nm} q_{n+1,m+1}^* i + q_{nm} q_{n+1,m+1}^* (2i) \right. \\ &+ q_{nm} b_{n+1,m+1}^* i + a_{nm} a_{n+1,m+1}^* 0 + a_{nm} p_{n+1,m+1}^* i \\ &+ p_{nm} a_{n+1,m+1}^* i + p_{nm} p_{n+1,m+1}^* (2i) \left. \right) \\ &- I_2 \frac{1}{2k^2 r^2} \left( b_{n+1,m-1} b_{n,m}^* 0 + b_{n+1,m-1} q_{n,m}^* (-i) + q_{n+1,m-1} q_{n,m}^* (-2i) \right. \\ &+ q_{n+1,m-1} b_{n,m}^* (-i) + a_{n+1,m-1} a_{n,m}^* 0 + a_{n+1,m-1} p_{n,m}^* (-i) \\ &+ p_{n+1,m-1} a_{n,m}^* (-i) + p_{n+1,m-1} p_{n,m}^* (-2i) \left. \right) \\ &= I_1 \frac{1}{2k^2 r^2} \left( i b_{nm} q_{n+1,m+1}^* + 2i q_{nm} q_{n+1,m+1}^* + i q_{nm} b_{n+1,m+1}^* + i a_{nm} p_{n+1,m+1}^* \right. \\ &+ i p_{nm} a_{n+1,m+1}^* + 2i p_{nm} p_{n+1,m+1}^* \left. \right) \\ &+ I_2 \frac{1}{2k^2 r^2} \left( +i b_{n+1,m-1} q_{n,m}^* + 2i q_{n+1,m-1} q_{n,m}^* + i q_{n+1,m-1} b_{n,m}^* + i a_{n+1,m-1} p_{n,m}^* \right. \\ &+ i p_{n+1,m-1} a_{n,m}^* + 2i p_{n+1,m-1} p_{n,m}^* \left. \right) \end{aligned} \quad (6.2.66)$$

La seconde partie de l'équation de l'équation 6.2.64 devient, en utilisant les mêmes relations

que dans l'équation précédente

$$\begin{aligned}
& (AB' - BA') i\delta_{m+1,m'}\delta_{n,n'} = \left[ i \left( b_{nm}n_n + q_{nm}I_n^{(1)} \right) \left( a_{n,m+1}^*j_{n'}^* + p_{n,m+1}^*h_n^{*(1)} \right) \right. \\
& \quad \left. - i \left( a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)} \right) \left( b_{n,m+1}^*n_n^* + q_{n,m+1}^*I_n^{*(1)} \right) \right] \\
& = i \left( b_{nm}a_{n,m+1}^*n_nj_n^* + b_{nm}p_{n,m+1}^*n_nh_n^{*(1)} + q_{nm}a_{n,m+1}^*I_n^{(1)}j_n^* + q_{nm}p_{n,m+1}^*I_n^{(1)}h_n^{*(1)} \right) \\
& \quad - i \left( a_{nm}b_{n,m+1}^*j_nn_n^* + a_{nm}q_{n,m+1}^*j_nI_n^{*(1)} + p_{nm}b_{n,m+1}^*h_n^{(1)}n_n^* + p_{nm}q_{n,m+1}^*h_n^{(1)}I_n^{*(1)} \right) \\
& = \frac{1}{2k^2r^2} \left( b_{nm}a_{n,m+1}^*0 + b_{nm}p_{n,m+1}^*(i * i) + q_{nm}a_{n,m+1}^*(i * i) + q_{nm}p_{n,m+1}^*(2i * i) \right) \\
& \quad + \frac{1}{2k^2r^2} \left( a_{nm}b_{n,m+1}^*0 + a_{nm}q_{n,m+1}^*(-i * i) \right) \\
& \quad + p_{nm}b_{n,m+1}^*(-i * i) + p_{nm}q_{n,m+1}^*(-2i * i) \\
& = -\frac{1}{2k^2r^2} \left( b_{nm}p_{n,m+1}^* + q_{nm}a_{n,m+1}^* + 2q_{nm}p_{n,m+1}^* \right. \\
& \quad \left. - a_{nm}q_{n,m+1}^* - p_{nm}b_{n,m+1}^* - 2p_{nm}q_{n,m+1}^* \right)
\end{aligned} \tag{6.2.67}$$

L'équation 6.2.64 devient donc

$$\begin{aligned}
& \langle E_\theta e^{(i\phi)} \sin \theta | E_\theta \rangle + \langle E_\phi e^{(i\phi)} \sin \theta | E_\phi \rangle \\
& = (AA' + BB') \left[ \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \delta_{n',n+1} \delta_{m',m+1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{(n'+1)} \sqrt{\frac{(n'(n'+2)(n'-m'+1)(n'-m'+2)}{(2n'+1)(2n'+3)}} \delta_{n,n'+1} \delta_{m,m'-1} \right] \\
& \quad + i(AB' - BA') \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \delta_{m+1,m'} \delta_{n,n'} \\
& = \frac{1}{2k^2r^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \left( ib_{nm}q_{n+1,m+1}^* + 2iq_{nm}q_{n+1,m+1}^* \right. \\
& \quad \left. + iq_{nm}b_{n+1,m+1}^* + ia_{nm}p_{n+1,m+1}^* + ip_{nm}a_{n+1,m+1}^* + 2ip_{nm}p_{n+1,m+1}^* \right) \\
& \quad + \frac{1}{2k^2r^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}} \left( +ib_{n+1,m-1}q_{n,m}^* + 2iq_{n+1,m-1}q_{n,m}^* \right. \\
& \quad \left. + iq_{n+1,m-1}b_{n,m}^* + ia_{n+1,m-1}p_{n,m}^* + ip_{n+1,m-1}a_{n,m}^* + 2ip_{n+1,m-1}p_{n,m}^* \right) \\
& \quad - \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \frac{1}{2k^2r^2} \left( b_{nm}p_{n,m+1}^* + q_{nm}a_{n,m+1}^* + 2q_{nm}p_{n,m+1}^* \right. \\
& \quad \left. - a_{nm}q_{n,m+1}^* - p_{nm}b_{n,m+1}^* - 2p_{nm}q_{n,m+1}^* \right)
\end{aligned} \tag{6.2.68}$$

On trouve que la force appliquée par un champ électrique en  $x$  ou  $y$  donnée par l'équation

6.2.54 devient

$$\begin{aligned}
F_x + iF_y = & -\frac{\epsilon}{8k^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}}} (ib_{nm}q_{n+1,m+1}^* + 2iq_{nm}q_{n+1,m+1}^* \\
& + iq_{nm}b_{n+1,m+1}^* + ia_{nm}p_{n+1,m+1}^* + ip_{nm}a_{n+1,m+1}^* + 2ip_{nm}p_{n+1,m+1}^*) \\
& -\frac{\epsilon}{8k^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}}} (ib_{n+1,m-1}q_{n,m}^* + 2iq_{n+1,m-1}q_{n,m}^* \\
& + iq_{n+1,m-1}b_{n,m}^* + ia_{n+1,m-1}p_{n,m}^* + ip_{n+1,m-1}a_{n,m}^* + 2ip_{n+1,m-1}p_{n,m}^*) \\
& +\frac{\epsilon}{8k^2} \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} (b_{nm}p_{n,m+1}^* + q_{nm}a_{n,m+1}^* \\
& + 2q_{nm}p_{n,m+1}^* - a_{nm}q_{n,m+1}^* - p_{nm}b_{n,m+1}^* - 2p_{nm}q_{n,m+1}^*)
\end{aligned} \tag{6.2.69}$$

Finalement, on trouve que la force totale exercée par le champ électromagnétique est donnée par

$$\begin{aligned}
F_x + iF_y = & -\frac{\epsilon}{4k^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n+m+1)(n+m+2)}{(2n+1)(2n+3)}}} (ib_{nm}q_{n+1,m+1}^* + 2iq_{nm}q_{n+1,m+1}^* \\
& + iq_{nm}b_{n+1,m+1}^* + ia_{nm}p_{n+1,m+1}^* + ip_{nm}a_{n+1,m+1}^* + 2ip_{nm}p_{n+1,m+1}^*) \\
& -\frac{\epsilon}{4k^2} \frac{1}{(n+1)} \sqrt{\frac{(n(n+2)(n-m+1)(n-m+2)}{(2n+1)(2n+3)}}} (ib_{n+1,m-1}q_{n,m}^* + 2iq_{n+1,m-1}q_{n,m}^* \\
& + iq_{n+1,m-1}b_{n,m}^* + ia_{n+1,m-1}p_{n,m}^* + ip_{n+1,m-1}a_{n,m}^* + 2ip_{n+1,m-1}p_{n,m}^*) \\
& +\frac{\epsilon}{4k^2} \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{(n+m+1)(n-m)} (b_{nm}p_{n,m+1}^* + q_{nm}a_{n,m+1}^* \\
& + 2q_{nm}p_{n,m+1}^* - a_{nm}q_{n,m+1}^* - p_{nm}b_{n,m+1}^* - 2p_{nm}q_{n,m+1}^*)
\end{aligned} \tag{6.2.70}$$

puisque, comme mentionné à l'équation 6.2.46 pour le calcul de la force en  $z$ , la partie du champ magnétique donne un résultat identique.

## 6.2.2 Méthode numérique

La méthode analytique consiste à utiliser le stress sur la surface d'une particule pour calculer la force totale. Cette méthode est plus lente que celle présentée ci-haut puisque l'on doit calculer l'expansion en  $VSWF$  à plusieurs points sur la surface.

Ainsi, on utilise l'équation donnant le stress sur la surface 6.1.10 qui provient d'un calcul analytique sur le tenseur de stress de Maxwell. Il ne suffit ensuite que d'intégrer le stress sur toute la surface pour trouver la force totale appliquée. Ainsi, en trois dimensions, on obtient

$$\vec{F} = \iint_S \vec{\sigma} dS \tag{6.2.71}$$

où  $S$  représente la surface du cylindre. Si l'intégrale est faite en coordonnées sphériques, il est

utile de définir  $dS$  pour les côtés et les extrémités comme suit

$$\begin{aligned} dS(\text{côtés}) &= R^2 d\theta d\phi \\ dS(\text{extrémités}) &= \frac{H^2}{4} \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (6.2.72)$$

où  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  et  $(\tan^{-1} \frac{2R}{H}) \leq \theta \leq (\pi - \tan^{-1} \frac{2R}{H})$ .

## 6.3 Torque

Encore une fois, comme on utilise des expansions en harmoniques sphériques vectorielles (VSWF), on peut utiliser différentes façons de calculer. La première méthode utilise une intégrale numérique sur la surface de la particule et la seconde est analytique et utilise les propriétés orthonormales des harmoniques sphériques vectorielles.

### 6.3.1 Méthode numérique

Comme dans le cas de la force, la méthode analytique consiste à utiliser le stress sur la surface d'une particule pour calculer le torque total.

À la base, un torque se calcul selon  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Lorsqu'une surface  $dS$  donne lieu à une force donnée par  $d\vec{F} = \vec{\sigma} dS$ , alors on peut déduire que  $d\vec{\tau} = \vec{r} \times (\vec{\sigma} dS)$ . On utilise donc l'équation pour le stress qui est donnée par l'équation 6.1.10 qui provient d'un calcul analytique sur le tenseur de énergie-momentum de Abraham.

Il ne suffit ensuite que d'intégrer le torque sur toute la surface pour trouver le torque total appliqué. Ainsi, on obtient que le torque est donné par

$$\vec{\tau} = \iint_S \vec{r} \times (\vec{\sigma} dS) \quad (6.3.1)$$

où  $S$  représente la surface du cylindre. Il convient de rappeler que ce torque ne contient pas la contribution du spin du photon, mais seulement du moment angulaire orbital. La contribution du spin peut être calculé par l'intégrale sur le volume de la densité de moment angulaire selon l'équations

$$\vec{\tau}_s = \int_V \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) dV \quad (6.3.2)$$

L'équation 6.3.2 représente la contribution du moment angulaire du photon. Pour une particule anisotrope, l'état de polarisation du faisceau de trappe change lorsqu'il passe à travers la particule. Selon la loi de conservation de la quantité de moment angulaire, le torque de spin provient de la perte de moment angulaire des photons de par leur interaction avec le milieu. Il a été montré que pour une particule isotrope, nanocylindrique, le torque latéral due au stress est 2-3 ordre plus grand que le spin torque (Bareil Sheng, 2010a).

Encore une fois, si l'intégrale est réalisée en coordonnées sphériques, il est utile de définir  $dS$  pour les côtés et les extrémités comme suit

$$\begin{aligned} dS(\text{côtés}) &= R^2 d\theta d\phi \\ dS(\text{extrémités}) &= \frac{H^2}{4} \tan \theta \sec^2 \theta d\theta d\phi \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

où  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  et  $(\tan^{-1} \frac{2R}{H}) \leq \theta \leq (\pi - \tan^{-1} \frac{2R}{H})$ .

### 6.3.2 Méthode analytique

Le torque, appliqué par un champ électromagnétique, peut être calculé directement en utilisant le tenseur de Maxwell. En effet, le torque peut simplement être exprimé comme  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  où  $\vec{\tau}$  est le vecteur de torque,  $\vec{r}$  le vecteur position et  $\vec{F}$  le vecteur force qui est exprimé à l'équation 6.2.2. Ainsi, l'équation pour le torque devient, comme exprimé dans la référence (Barton , 1989), où  $\vec{n}$  est dirigé du milieu 2 vers le milieu 1 dans cette équation.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\langle \iint_s \vec{n} \bullet (\Gamma \times \vec{r}) dS \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} \iint_s \vec{n} \bullet (\Gamma \times \vec{r}) dS \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Il est donc possible d'intégrer directement la dernière équation en utilisant les équations B.0.2. L'intégrand de l'équation 6.3.4 peut être écrit, dans le cas général, par

$$\vec{n} \bullet (\Gamma \times \vec{r}) = \begin{bmatrix} (n_r \Gamma_{rr} + n_\theta \Gamma_{\theta r} + n_\phi \Gamma_{\phi r}) \hat{r} \\ (n_r \Gamma_{r\theta} + n_\theta \Gamma_{\theta\theta} + n_\phi \Gamma_{\phi\theta}) \hat{\theta} \\ (n_r \Gamma_{r\phi} + n_\theta \Gamma_{\theta\phi} + n_\phi \Gamma_{\phi\phi}) \hat{\phi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n_r \\ n_\theta \\ n_\phi \end{bmatrix} \quad (6.3.5)$$

où  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_r & n_\theta & n_\phi \end{bmatrix}$ . Pour simplifier, on calcule le torque sur une sphère de rayon infinie comme dans le cas de la force, on peut alors simplifier l'équation précédente selon

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet (\Gamma \times \vec{r}) &= \begin{bmatrix} (n_r \Gamma_{rr}) \hat{r} \\ (n_r \Gamma_{r\theta}) \hat{\theta} \\ (n_r \Gamma_{r\phi}) \hat{\phi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= rn_r \Gamma_{r\phi} \hat{\theta} - rn_r \Gamma_{r\theta} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

où  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_r & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . En utilisant l'équation 3.2.5, on peut ré-écrire l'équation précédente pour obtenir les composantes du torque en coordonnées cartésiennes. Dans le cas où on objet est isotrope, l'équation se simplifie à l'équation suivante

$$rn_r \Gamma_{r\phi} \hat{\theta} - rn_r \Gamma_{r\theta} \hat{\phi} = \left\{ \begin{array}{l} (n \cdot \Gamma \times r)_x = rn_r \Gamma_{r\phi} \cos \phi \cos \theta + rn_r \Gamma_{r\theta} \sin \phi \\ (n \cdot \Gamma \times r)_y = rn_r \Gamma_{r\phi} \sin \phi \cos \theta - rn_r \Gamma_{r\theta} \cos \phi \\ (n \cdot \Gamma \times r)_z = -rn_r \Gamma_{r\phi} \sin \theta \end{array} \right\} \quad (6.3.7)$$



ce qui nous permet de trouver que les équations pour le calcul du torque sur un objet isotrope, en se servant directement du tenseur de stress de Maxwell, peuvent être données par les équations suivantes en coordonnées cartésiennes.

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x &= -\frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^3 \sin \theta (n_r \Gamma_{r\phi} \cos \phi \cos \theta + n_r \Gamma_{r\theta} \sin \phi) d\theta d\phi \\
\vec{\tau}_y &= -\frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^3 \sin \theta (n_r \Gamma_{r\phi} \sin \phi \cos \theta - n_r \Gamma_{r\theta} \cos \phi) d\theta d\phi \\
\vec{\tau}_z &= \frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^3 \sin^2 \theta n_r \Gamma_{r\phi} d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

où  $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ .

Le calcul analytique du torque se calcule de la même façon que la force en  $x$ ,  $y$ , ou  $z$ ; c'est-à-dire que l'on peut utiliser le tenseur de stress de Maxwell pour faire l'intégrale dans le champ lointain sur une surface fermée, que l'on choisit sphérique. Les intégrales sont représentées par les équations 6.3.8 qui peuvent être simplifiées en utilisant les équations B.0.2 où l'on retient seulement la partie du champ électrique pour l'instant. On peut ré-écrire l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x &= -\frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^2 \sin \theta \left( r \epsilon E_r E_\phi^* \cos \phi \cos \theta + r \epsilon E_r E_\theta^* \sin \phi \right) d\theta d\phi \\
\vec{\tau}_y &= -\frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^2 \sin \theta \left( r \epsilon E_r E_\phi^* \sin \phi \cos \theta - r \epsilon E_r E_\theta^* \cos \phi \right) d\theta d\phi \\
\vec{\tau}_z &= \frac{1}{2}\text{Re} \iint_S r^2 \sin^2 \theta r \epsilon E_r E_\phi^* d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

Comme on a besoin de connaître  $rE_r$ , on peut ainsi ré-écrire les équations 4.1.13, qui sont ici multipliées par  $r$  dans le champ lointain, sous la forme

$$r\vec{M}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r}) = N_n h_n^{(1,2)} r \left( -\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \hat{\theta} \right) \tag{6.3.10a}$$

$$\begin{aligned}
r\vec{N}_{nm}^{(1,2)}(k\vec{r}) &= \frac{h_n^{(1,2)}}{kN_n} Y_{nm} \hat{r} + N_n \left( r h_{n-1}^{(1,2)}(kr) - \frac{n h_n^{(1,2)}(kr)}{kr} \right) \\
&\times \left( \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \hat{\phi} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.10b}$$

$$rRg\vec{M}_{nm}(k\vec{r}) = N_n j_n(kr) r \left( -\frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\phi} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \hat{\theta} \right) \tag{6.3.10c}$$

$$\begin{aligned}
rRg\vec{N}_{nm}(k\vec{r}) &= \frac{j_n}{kN_n} Y_{nm} \hat{r} + N_n \left( r j_{n-1}(kr) - \frac{n j_n(kr)}{kr} \right) \\
&\times \left( \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{im}{\sin \theta} Y_{nm} \hat{\phi} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.10d}$$

où les arguments  $kr$  et  $\theta, \phi$  ont été enlevés pour rendre l'écriture plus simple. En utilisant l'équation précédente, on trouve que  $rE_r$  est donné par

$$rE_r = \frac{1}{kN_n} Y_{nm} \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \tag{6.3.11}$$

et  $E_\phi$ ,  $E_\theta$  est donné, encore une fois, par les équations 6.2.9

$$\begin{aligned}
E_\theta(r) &= N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \\
&= N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} A + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} B \\
E_\phi(r) &= -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \left( b_{nm} n_n + q_{nm} I_n^{(1)} \right) \\
&= -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} B + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} A
\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

Il faut noter qu'ici, la partie due au champ magnétique est différente, ainsi on a

$$r H_r = \frac{1}{\eta_1 k N_n} Y_{nm} \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right) \tag{6.3.13}$$

et

$$\begin{aligned}
\eta_1 H_\theta(r) &= N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \left( a_{nm} n_n + p_{nm} I_n^{(1)} \right) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \\
&= N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} D + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} E \\
\eta_1 H_\phi(r) &= -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} \left( a_{nm} n_n + p_{nm} I_n^{(1)} \right) \\
&= -N_n \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \theta} E + \frac{N_n}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{nm}}{\partial \phi} D
\end{aligned} \tag{6.3.14}$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
A' &= \left( b_{n'm'}^* n_{n'}^* + q_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \\
B' &= \left( a_{n'm'}^* j_{n'}^* + p_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \\
D' &= \left( a_{n'm'}^* n_{n'}^* + p_{n'm'}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \\
E' &= \left( b_{n'm'}^* j_{n'}^* + q_{n'm'}^* h_{n'}^{*(1)} \right) \\
C &= \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \\
C2 &= \left( a_{nm} j_n + p_{nm} h_n^{(1)} \right)
\end{aligned} \tag{6.3.15}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
r E_r E_\phi^* &= \frac{N'_n}{k N_n} Y_{nm} C \left[ -\frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} B' + \frac{-im'}{\sin \theta} Y_{n'm'} A' \right] \\
r E_r E_\theta^* &= \frac{N'_n}{k N_n} Y_{nm} C \left[ \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} A' + \frac{-im'}{\sin \theta} Y_{n'm'} B' \right]
\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

où on n'a qu'à remplacer C par C2, A' par D' et B' par E' pour faire les calculs avec le champ

magnétique. Les équations 6.3.9 peuvent donc s'écrire

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x &= -\frac{1}{2} \text{Re} \iint_S r^2 \sin \theta \left( r \epsilon E_r E_\phi^* \cos \phi \cos \theta + r \epsilon E_r E_\theta^* \sin \phi \right) d\theta d\phi \\
&= \frac{\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} \text{Re} C \left[ B' \langle \cos \phi \cos \theta Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' \langle \cos \phi \cos \theta Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right] \\
&\quad - \frac{\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} \text{Re} C \left[ A' \langle \sin \phi Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle - im' B' \langle \sin \phi Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right] \\
\vec{\tau}_y &= -\frac{1}{2} \text{Re} \iint_S r^2 \sin \theta \left( r \epsilon E_r E_\phi^* \sin \phi \cos \theta - r \epsilon E_r E_\theta^* \cos \phi \right) d\theta d\phi \\
&= \frac{\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} \text{Re} C \left[ B' \langle \sin \phi \cos \theta Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' \langle \sin \phi \cos \theta Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right] \\
&\quad + \frac{\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} \text{Re} C \left[ A' \langle \cos \phi Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle - im' B' \langle \cos \phi Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right] \\
\vec{\tau}_z &= \text{Re} \frac{1}{2} \text{Re} \iint_S r^2 \sin^2 \theta r \epsilon E_r E_\phi^* d\theta d\phi \\
&= -\text{Re} \frac{\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} \text{Re} C \left[ B' \langle Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' \langle Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{6.3.17}$$

Comme  $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$  et  $ie^{i\phi} = i \cos \phi - \sin \phi$  on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{r^2 \epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} C \left[ B' \langle e^{i\phi} \cos \theta Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' \langle e^{i\phi} \cos \theta Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right. \\
&\quad \left. + A' \langle ie^{i\phi} Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle - im' B' \langle ie^{i\phi} Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right] \\
\vec{\tau}_z &= -\text{Re} \frac{\epsilon r^2}{2} \frac{N'_n}{kN_n} C \left[ B' \langle Y_{nm} | \frac{\partial Y_{n'm'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' \langle Y_{nm} | \frac{1}{\sin \theta} Y_{n'm'} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{6.3.18}$$

En utilisant le fait que les harmoniques sphériques  $Y_{nm}$  peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
Y_{nm} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta) \\
&A_{nm} e^{im\phi} P_n^m(\cos \theta)
\end{aligned} \tag{6.3.19}$$

où  $P_n^m(\cos \theta)$  représente le polynôme associé de Legendre et  $A_{nm}$  représente les constantes de normalisation, on obtient en omettant la dépendance  $(\theta, \phi)$

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{r^2 \epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} C A_{nm} A_{n'm'} \left[ B' \langle e^{i(m-m'+1)\phi} \cos \theta P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right. \\
&\quad + im' A' \langle e^{i(m-m'+1)\phi} \cos \theta P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \rangle \\
&\quad + iA' \langle e^{i(m-m'+1)\phi} P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \\
&\quad \left. + m' B' \langle e^{i(m-m'+1)\phi} P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \rangle \right] \\
\vec{\tau}_z &= -\text{Re} \frac{r^2 \epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} A_{nm} A_{n'm'} C \left[ B' \langle e^{im\phi} P_n^m | \frac{\partial e^{-im'\phi} P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle \right. \\
&\quad \left. + im' A' \langle e^{im\phi} P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} e^{-im'\phi} P_{n'}^{m'} \rangle \right]
\end{aligned} \tag{6.3.20}$$

En utilisant les références (Gouesbet , 1985) et (Chang Lee, 1985), on trouve les relations nécessaires pour calculer les intégrales de l'équation 6.3.20. On peut ainsi trouver ou calculer

que

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi e^{i(m-m')\phi} d\phi = \pi(\delta_{m',m+1} + \delta_{m,m'+1}) \quad (6.3.21a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \phi e^{i(m-m')\phi} d\phi = i\pi(\delta_{m,m'+1} - \delta_{m',m+1}) \quad (6.3.21b)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m'+1)\phi} d\phi = 2\pi\delta_{m',m+1} \quad (6.3.21c)$$

En utilisant les deux dernières relations, on trouve

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{r^2 2\pi\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} C A_{nm} A_{n'm'} \delta_{m',m+1} \left[ B' \langle \cos \theta P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m+1}}{\partial \theta} \rangle \delta_{m',m+1} \right. \\ &\quad + im' A' \langle \cos \theta P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m+1} \rangle \\ &\quad + iA' \langle P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m+1}}{\partial \theta} \rangle \\ &\quad \left. + m' B' \langle P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m+1} \rangle \right] \\ &= \frac{r^2 2\pi\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} C A_{nm} A_{n'm'} \delta_{m',m+1} \quad (6.3.22) \\ &\quad \left\{ B' \left[ \langle \cos \theta P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m+1}}{\partial \theta} \rangle + (m+1) \langle P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m+1} \rangle \right] \right. \\ &\quad \left. + iA' \left[ (m+1) \langle \cos \theta P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m+1} \rangle + \langle P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m+1}}{\partial \theta} \rangle \right] \right\} \\ \vec{\tau}_z &= -Re \frac{r^2\epsilon}{2} \frac{N'_n}{kN_n} A_{nm} A_{n'm'} C \\ &\quad \left[ B' e^{i(m-m')\phi} \langle P_n^m | \frac{\partial P_{n'}^{m'}}{\partial \theta} \rangle + im' A' e^{i(m-m')\phi} \langle P_n^m | \frac{1}{\sin \theta} P_{n'}^{m'} \rangle \right] \end{aligned}$$

En utilisant les relations suivantes

$$(m+1) \cos \theta P_{n'}^{m+1} + \sin \theta \frac{dP_{n'}^{m+1}}{d\theta} = (n'+m+1)(n'-m) \sin \theta P_{n'}^m \quad (6.3.23a)$$

$$\begin{aligned} \frac{(m+1)}{\sin \theta} P_{n'}^{m+1} + \cos \theta \frac{dP_{n'}^{m+1}}{d\theta} &= \frac{1}{2n'+1} [(n'+m+1)(n'+m)(n'+1)P_{n'}^m \\ &\quad + n'(n'-m+1)(n'-m)P_{n'+1}^m] \quad (6.3.23b) \end{aligned}$$

$$\frac{P_n^m}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta}{2m} [(n-m+1)(n+m)P_n^{m-1} + P_n^{m+1}] \quad (6.3.23c)$$

$$+ \sin \theta P_n^m \quad (6.3.23d)$$

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} = \frac{1}{2} ((n-m+1)(n+m)P_n^{m-1} - P_n^{m+1}) \quad (6.3.23e)$$

$$\int_0^\pi \sin \theta P_n^m P_{n'}^m d\theta = \langle P_n^m P_{n'}^m \rangle = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'} \quad (6.3.23f)$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi = \delta_{m,m'} \quad (6.3.23g)$$

l'équation 6.3.22 devient

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{2\pi r^2 \epsilon}{2k} \frac{N'_n}{N_n} C A_{nm} A_{n'm'} \delta_{m',m+1} \left\{ B' \left[ \frac{1}{2n'+1} [(n'+m+1)(n'+m)(n'+1) \langle P_n^m | P_{n'-1}^m \rangle \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + n'(n'-m+1)(n'-m) \langle P_n^m | P_{n'+1}^m \rangle \right] + iA' [(n+m+1)(n-m) \langle P_n^m | P_{n'}^m \rangle] \right\} \\
&= \frac{2r^2 \pi \epsilon}{2k} C A_{nm} A_{n'm'} \delta_{m',m+1} \\
&\quad \times \left\{ B' \left[ \frac{2}{(2n+1)(2n'+1)} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left( \frac{N'_n}{N_n} (n'+m+1)(n'+m)(n'+1) \delta_{n+1,n'} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{N'_n}{N_n} n'(n'-m+1)(n'-m) \delta_{n-1,n'} \right) \right] \\
&\quad \left. + iA' \left[ (n+m+1)(n-m) \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'} \right] \right\} \\
\vec{\tau}_z &= -Re \frac{r^2 \epsilon}{2} \frac{N'_n}{k N_n} A_{nm} A_{n'm'} C i m A' \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}
\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

on peut simplifier l'équation précédente pour obtenir

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{r^2 \epsilon}{2k} C \delta_{m',m+1} \\
&\quad \times \left\{ B' \left[ \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \left( \sqrt{(n+2)(n+m+2)(n+m+1)} \delta_{n+1,n'} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sqrt{(n-1)(n-m)(n-m-1)} \delta_{n-1,n'} \right) \right] \\
&\quad \left. + iA' \sqrt{(n+m+1)(n-m)} \delta_{n,n'} \right\} \\
\vec{\tau}_z &= -Re \frac{r^2 \epsilon}{2} \frac{1}{k} C i m A' \delta_{n,n'} \delta_{m,m'}
\end{aligned} \tag{6.3.25}$$

On peut aussi calculer que

$$\begin{aligned}
C A' \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} &= \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( b_{nm}^* n_n^* + q_{nm}^* I_n^{*(1)} \right) \\
&= b_{nm} j_n b_{nm}^* n_n^* + b_{nm} j_n q_{nm}^* I_n^{*(1)} + q_{nm} h_n^{(1)} b_{nm}^* n_n^* + q_{nm} h_n^{(1)} q_{nm}^* I_n^{*(1)} \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} (-i b_{nm} q_{nm}^* - i q_{nm} b_{nm}^* - 2i q_{nm} q_{nm}^*)
\end{aligned} \tag{6.3.26}$$

$$\begin{aligned}
C A' \delta_{n,n'} \delta_{m',m+1} &= \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( b_{nm+1}^* n_{n'}^* + q_{nm+1}^* I_{n'}^{*(1)} \right) \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} (-i b_{nm} q_{nm+1}^* - i q_{nm} b_{nm+1}^* - 2i q_{nm} q_{nm+1}^*)
\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

$$\begin{aligned}
C B' \delta_{n+1,n'} \delta_{m',m+1} &= \left( b_{nm} j_n + q_{nm} h_n^{(1)} \right) \left( a_{n+1m+1}^* j_{n+1}^* + p_{n+1m+1}^* h_{n+1}^{*(1)} \right) \\
&= b_{nm} j_n a_{n+1m+1}^* j_{n+1}^* + b_{nm} j_n p_{n+1m+1}^* h_{n+1}^{*(1)} \\
&\quad + q_{nm} h_n^{(1)} a_{n+1m+1}^* j_{n+1}^* + q_{nm} h_n^{(1)} p_{n+1m+1}^* h_{n+1}^{*(1)} \\
&= \frac{1}{2k^2 r^2} (i b_{nm} p_{n+1m+1}^* + i q_{nm} a_{n+1m+1}^* + 2i q_{nm} p_{n+1m+1}^*)
\end{aligned} \tag{6.3.28}$$

$$\begin{aligned}
CB'\delta_{n-1,n'}\delta_{m',m+1} &= \left(b_{nm}j_n + q_{nm}h_n^{(1)}\right) \left(a_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + p_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)}\right) \\
&= b_{nm}j_n a_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + b_{nm}j_n p_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)} \\
&\quad + q_{nm}h_n^{(1)} a_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + q_{nm}h_n^{(1)} p_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)} \\
&= -\frac{1}{2k^2r^2} \left(ib_{nm}p_{n-1m+1}^* + iq_{nm}a_{n-1m+1}^* + 2iq_{nm}p_{n-1m+1}^*\right)
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

où les relations 6.2.24 à 6.2.31, 6.2.35 à 6.2.42 et 6.2.33 ont été utilisées. De la même façon, on peut faire le calcul pour le champ magnétique. La différence, comme mentionnée plus haut, consiste à remplacer C par C2, A' par D' et B' par E'. On obtient alors

$$\begin{aligned}
C2D'\delta_{n,n'}\delta_{m,m'} &= \left(a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)}\right) \left(a_{nm}^*n_n^* + p_{nm}^*I_n^{*(1)}\right) \\
&= a_{nm}j_n a_{nm}^*n_n^* + a_{nm}j_n p_{nm}^*I_n^{*(1)} + p_{nm}h_n^{(1)} a_{nm}^*n_n^* + p_{nm}h_n^{(1)} p_{nm}^*I_n^{*(1)} \\
&= \frac{1}{2k^2r^2} \left(-ia_{nm}p_{nm}^* - ip_{nm}a_{nm}^* - 2ip_{nm}p_{nm}^*\right)
\end{aligned} \tag{6.3.30}$$

$$\begin{aligned}
C2D'\delta_{n,n'}\delta_{m',m+1} &= \left(a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)}\right) \left(a_{nm+1}^*n_{n'}^* + p_{nm+1}^*I_{n'}^{*(1)}\right) \\
&= \frac{1}{2k^2r^2} \left(-ia_{nm}p_{nm+1}^* - ip_{nm}a_{nm+1}^* - 2ip_{nm}p_{nm+1}^*\right)
\end{aligned} \tag{6.3.31}$$

$$\begin{aligned}
C2E'\delta_{n+1,n'}\delta_{m',m+1} &= \left(a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)}\right) \left(b_{n+1m+1}^*j_{n+1}^* + q_{n+1m+1}^*h_{n+1}^{*(1)}\right) \\
&= a_{nm}j_n b_{n+1m+1}^*j_{n+1}^* + a_{nm}j_n q_{n+1m+1}^*h_{n+1}^{*(1)} \\
&\quad + p_{nm}h_n^{(1)} b_{n+1m+1}^*j_{n+1}^* + p_{nm}h_n^{(1)} q_{n+1m+1}^*h_{n+1}^{*(1)} \\
&= \frac{1}{2k^2r^2} \left(ia_{nm}q_{n+1m+1}^* + ip_{nm}b_{n+1m+1}^* + 2ip_{nm}q_{n+1m+1}^*\right)
\end{aligned} \tag{6.3.32}$$

$$\begin{aligned}
C2E'\delta_{n-1,n'}\delta_{m',m+1} &= \left(a_{nm}j_n + p_{nm}h_n^{(1)}\right) \left(b_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + q_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)}\right) \\
&= a_{nm}j_n b_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + a_{nm}j_n q_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)} \\
&\quad + p_{nm}h_n^{(1)} b_{n-1m+1}^*j_{n-1}^* + p_{nm}h_n^{(1)} q_{n-1m+1}^*h_{n-1}^{*(1)} \\
&= -\frac{1}{2k^2r^2} \left(ia_{nm}q_{n-1m+1}^* + ip_{nm}b_{n-1m+1}^* + 2ip_{nm}q_{n-1m+1}^*\right)
\end{aligned} \tag{6.3.33}$$

On peut finalement écrire le torque appliqué sur un objet isotrope par le champ électroma-

gnétique selon les équations

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_x + i\vec{\tau}_y &= \frac{\epsilon}{2k^3} \sum_{n,m} \left\{ \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \left( \sqrt{(n+2)(n+m+2)(n+m+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (ib_{nm}p_{n+1m+1}^* + iq_{nm}a_{n+1m+1}^* + 2iq_{nm}p_{n+1m+1}^* + ia_{nm}q_{n+1m+1}^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + ip_{nm}b_{n+1m+1}^* + 2ip_{nm}q_{n+1m+1}^*) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sqrt{(n-1)(n-m)(n-m-1)} (ib_{nm}p_{n-1m+1}^* + iq_{nm}a_{n-1m+1}^* \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2iq_{nm}p_{n-1m+1}^* + ia_{nm}q_{n-1m+1}^* + ip_{nm}b_{n-1m+1}^* + 2ip_{nm}q_{n-1m+1}^*) \right) \right) \\
&\quad \left. + \sqrt{(n+m+1)(n-m)} (b_{nm}q_{nm+1}^* + q_{nm}b_{nm+1}^* + 2q_{nm}q_{nm+1}^* \right. \\
&\quad \left. + a_{nm}p_{nm+1}^* + p_{nm}a_{nm+1}^* + 2p_{nm}p_{nm+1}^*) \right\} \\
\vec{\tau}_z &= -Re \frac{\epsilon}{2k^3} \sum_{n,m} m (b_{nm}q_{nm}^* + q_{nm}b_{nm}^* + 2q_{nm}q_{nm}^* + a_{nm}p_{nm}^* + p_{nm}a_{nm}^* + 2p_{nm}p_{nm}^*)
\end{aligned} \tag{6.3.34}$$

Pour le calcul du torque dû au spin, il est plus facile à calculer. On peut trouver à plusieurs endroits (Crichton Marston, 2000),(Nieminen , 2004), (Bishop , 2003) que

$$\vec{\tau}_{spin} = \sum_{n,m} m (a_{nm}a_{nm}^* + b_{nm}b_{nm}^* - q_{nm}q_{nm}^* - p_{nm}p_{nm}^*) / P \tag{6.3.35}$$

en unité de  $\hbar$  par photon où

$$P = \sum_{n,m} (a_{nm}a_{nm}^* + b_{nm}b_{nm}^*) \tag{6.3.36}$$

## 6.4 Position d'équilibre

Il est aussi important de pouvoir trouver la position d'équilibre d'un objet capturé par une pince optique. La position d'équilibre peut-être donnée comme une coordonnée en trois dimensions, mais elle peut aussi représenter une position angulaire par rapport à l'axe optique. En effet, sous certaines conditions, un nanobarre peut ne pas s'aligner avec l'axe optique comme montré au chapitre 7.

Pour calculer les positions d'équilibres spatiales et angulaires, deux conditions doivent être satisfaites. D'abord, il est nécessaire que le torque (équilibre angulaire)  $\vec{\tau} = 0$  ou la force (équilibre spatial)  $\vec{F} = 0$  soit nul en un point donné. Ensuite, il est nécessaire qu'à ce même point, la dérivée du torque  $\partial\vec{\tau}/\partial\theta$  ou de la force  $\nabla\vec{F} = 0$  soit négative. En effet, une dérivée négative signifie que le système lutte contre le déplacement angulaire ou spatial pour forcer la particule à revenir à sa position d'équilibre tandis qu'une dérivée positive signifie que le système cherche à amplifier le mouvement.

# Chapitre 7

## Résultats

### 7.1 Nanocylindres isotropes

Les calculs effectués dans cette section ont été publiés dans la revue scientifique *Optics Express* à la référence (Bareil Sheng, 2010a). La méthode de la matrice de transfert avec les conditions aux frontières tangentiels a été utilisée pour cette partie. Pour ce qui est du faisceau incident, la méthode d'expansion de «point matching» dans le lointain modifié comme expliqué à la section 5.1.1 a été utilisée pour décrire le champ incident. Les corrections pour très hautes focalisations mentionnées à la section 5.1.3 ne sont pas appliquées ici. Pour les calculs de stress, l'équation numérique 6.1.10 est utilisée. Pour les calculs de forces, l'équation analytique 6.2.47 est utilisée. Pour le calcul des torques, les intégrales numériques données par les équations 6.3.1 et 6.3.3 sont utilisées. Les équations numériques sont utilisées pour le calcul du torque, même si elles sont plus longues à calculer, parce qu'il est intéressant de pouvoir séparer le torque généré par les extrémités d'un nanocylindre de celui exercé par les côtés ; la seule façon de pouvoir découper le torque de cette façon est d'utiliser la méthode numérique.

Dans les calculs qui suivent, le faisceau laser est polarisé circulairement à droite et le nanocylindre est de forme cylindrique. Il est aussi complètement diélectrique et isotrope. On néglige la force de gravité et la force de flottement puisque le nanocylindre se retrouve dans une solution aqueuse dans les expériences. En effet, ces deux dernières forces sont constantes et leur différence est négligeable par rapport aux forces exercées par le faisceau incident.

#### 7.1.1 La stabilité de la position

Pour étudier la stabilité de la capture d'un nanocylindre contre le mouvement brownien dans le milieu aqueux, nous avons calculé les forces et les torques lorsque le nanocylindre a subi une translation ou une inclinaison par rapport à sa position d'équilibre. Nous avons premièrement considéré un nanocylindre capturé selon l'axe  $z$  et avons calculé sa position d'équilibre ainsi que sa stabilité. Pour tous les calculs effectués dans cette section, on utilise une ouverture



numérique de  $NA = 1.25$  et une puissance de  $P=10\text{mW}$  à moins d'avis contraire. Rappelons aussi que le faisceau incident se propage dans la direction  $+z$ , qu'il bouge par rapport à l'objet –il peut être incliné ou déplacé dans les 3 dimensions. De plus, le nanocylindre est fixe dans le système de coordonnées et il est centré à l'origine. Notons aussi que les nanocylindres simulés ont des ratios longueur ( $H$ ) sur diamètre ( $2R$ ) raisonnable où  $H/2R \ll 20$ . En effet, lorsque  $H/2R > 20$  la dispersion peut être différente et la matrice de transfert peut ne plus être valide comme mentionné à la référence (Mishchenko , 2002). Pour simplifier les calculs, on assume que le faisceau incident ne subit jamais de translation selon l'axe  $y$ , mais plutôt selon l'axe  $x$ . Ceci n'apporte aucune perte de généralité puisque le faisceau incident et le nanocylindre sont tous les deux symétriques par rapport au plan  $x - z$ . Cependant, cela permet de simplifier l'étude puisque les forces selon l'axe  $y$  sont toujours nulles  $F_y = 0$  à cause de cette symétrie.

Nous avons calculé la position d'équilibre des nanocylindres capturés et alignés le long de l'axe du faisceau. Lorsque l'axe du faisceau est l'axe  $z$ , la distribution du stress sur les côtés du nanocylindre est symétrique par rapport à l'axe du faisceau comme montré à la figure 7.1(a). Plus précisément, comme discuté à la section 6.4, la position d'équilibre en  $z$  est située à l'endroit où les forces sur le dessus et sur le dessous du nanocylindres sont égales et où le gradient  $\partial F_z/\partial z < 0$ , c.-à-d. une force qui est opposée au déplacement de la position d'équilibre du nanocylindre. De la même façon, latéralement –dans la direction  $x-$ , le point d'équilibre est situé à l'endroit où les forces  $F_x$  et  $F_y$  sont nulles ainsi que leurs dérivées  $\partial F_x/\partial x < 0$ ,  $\partial F_y/\partial y < 0$  négatives. La figure 7.1(a) montre que le stress est symétrique avec l'axe  $z$  lorsque le point focal du faisceau est situé sur l'axe  $z$ , ce qui résulte en une force radiale ( $F_x$  et  $F_y$ ) qui est nulle. De plus, la figure 7.1(b) montre que le stress devient asymétrique radialement lorsque l'on déplace le faisceau de l'axe  $z$ . En effet, les forces étant perpendiculaires pour un l'objet isotrope (voir 6.1), la force de rappel exercée sur le nanocylindre est dans la direction opposée au déplacement simulé du nanocylindre donc  $\partial F_x/\partial x < 0$  ce qui assure que le nanocylindre est stable dans la direction radiale lorsque son point focal correspond à l'axe  $z$ .

Pour calculer la stabilité du nanocylindre, la position d'équilibre  $z_{eq}$  est trouvée relativement à la position du point focal dans la direction de propagation du faisceau. Notons que la longueur  $z_{eq}$  tend à augmenter avec la longueur du nanocylindre. La force totale  $F_z$  en fonction de la position du point focal selon  $z$  est montrée à la figure 7.1(c) pour des nanocylindres de rayon  $R = 300\text{ nm}$ . Avec un nanocylindre de longueur  $H = 1200\text{ nm}$ , on obtient une position d'équilibre  $z_{eq} = +0.13\ \mu\text{m}$  et  $z_{eq} = +0.41\ \mu\text{m}$  lorsque  $H = 3\ \mu\text{m}$ .

Le gradient des forces  $|\frac{\partial F_z}{\partial z}|$  et/ou  $|\frac{\partial F_x}{\partial x}|$  est défini comme étant la rigidité de capture axiale et latérale respectivement. Les fonctions  $U(x) = -\int F_x \partial x$  et  $U(z) = -\int F_z dz$  sont, quant à elles, définies comme les potentiels de capture de la force latérale et axiale respectivement. Elles représentent donc l'énergie requise pour arracher le nanobarre de la pince optique. Notons que  $U(z)$ , qui correspond à l'aire sous la courbe dans la figure 7.1(c) est asymétrique par rapport à la position d'équilibre où  $F_z = 0$ . En effet, la barrière de potentiel est plus faible dans la

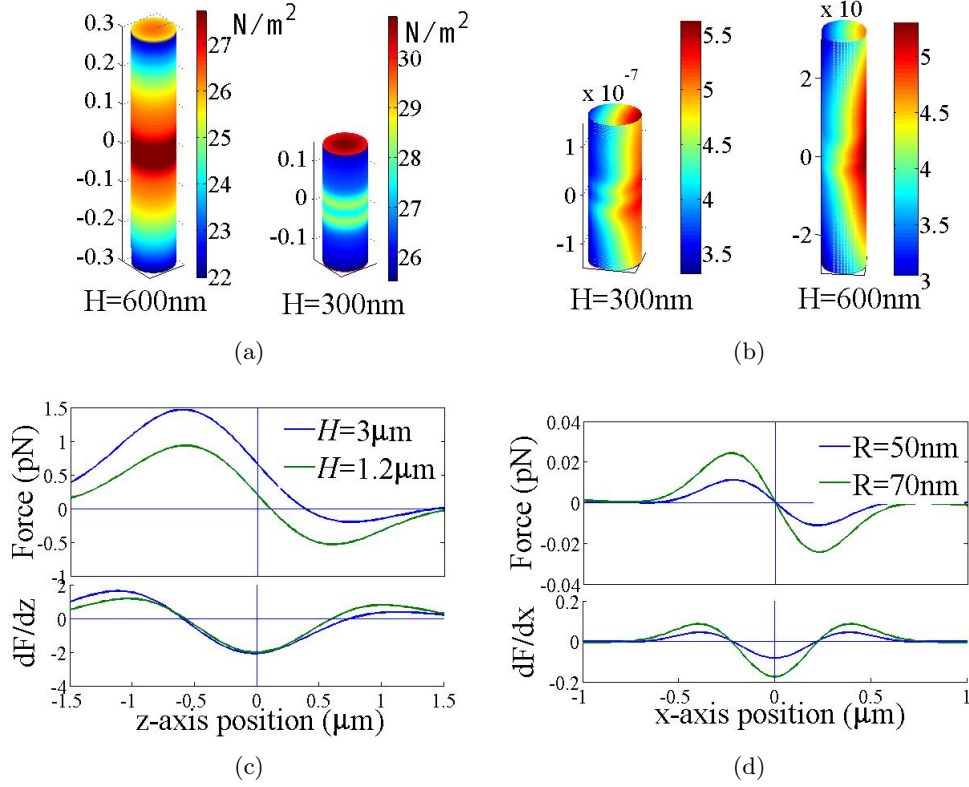


FIGURE 7.1: Distribution de stress sur un nanocylindre de  $R = 50\text{ nm}$  à sa position d'équilibre axiale avec (a) le faisceau selon l'axe  $z$ ; (b) le faisceau déplacé à  $x = 50\text{ nm}$ ; (c) la force et la rigidité axiale en fonction de la position et du point focal sur l'axe  $z$  pour un rayon de  $R = 300\text{ nm}$ ; (d) la force et la rigidité latérale en fonction de la distance de la position d'équilibre selon l'axe  $x$  pour une longueur  $H = 1\text{ }\mu\text{m}$ .

direction de propagation du faisceau puisque la présence d'une particule dans le chemin du faisceau change sa symétrie. La comparaison des courbes bleues et vertes dans la figure 7.1(c) montre que, les nanocylindres les plus longs affichent une position d'équilibre plus lointaine, une rigidité axiale plus faible et une asymétrie plus prononcée des potentiels de capture. Ils sont donc plus sensibles et plus faciles à arracher de la pince optique que les nanocylindres les plus petits.

Lorsque le faisceau incident est parallèle au nanocylindre, la position d'équilibre latérale est à  $x = 0$  où  $F_x = 0$  et  $\frac{\partial F_x}{\partial x}$  comme montré à la figure 7.1(d). Le potentiel latéral de force  $U(x) = -\int F_x \partial x$  est symétrique avec l'axe  $x = 0$ . Lorsque le faisceau incident est parallèle à l'axe  $z$  mais déplacé d'une certaine valeur selon  $x$ , le stress est plus concentré sur le côté duquel le faisceau est déplacé comme montré à la figure 7.1(b). Comme le stress est toujours perpendiculaire à la surface pour les objets diélectriques, il en résulte donc une force de rappel qui pousse le nanocylindre à se déplacer vers le centre du faisceau dans le même sens de déplacement du faisceau incident. De plus, on note que que la rigidité latérale de capture  $\frac{\partial F_x}{\partial x}$

est plus grande pour un nanocylindre de  $R = 70$  nm que pour un  $R = 50$  nm comme montré à la figure 7.1(d).

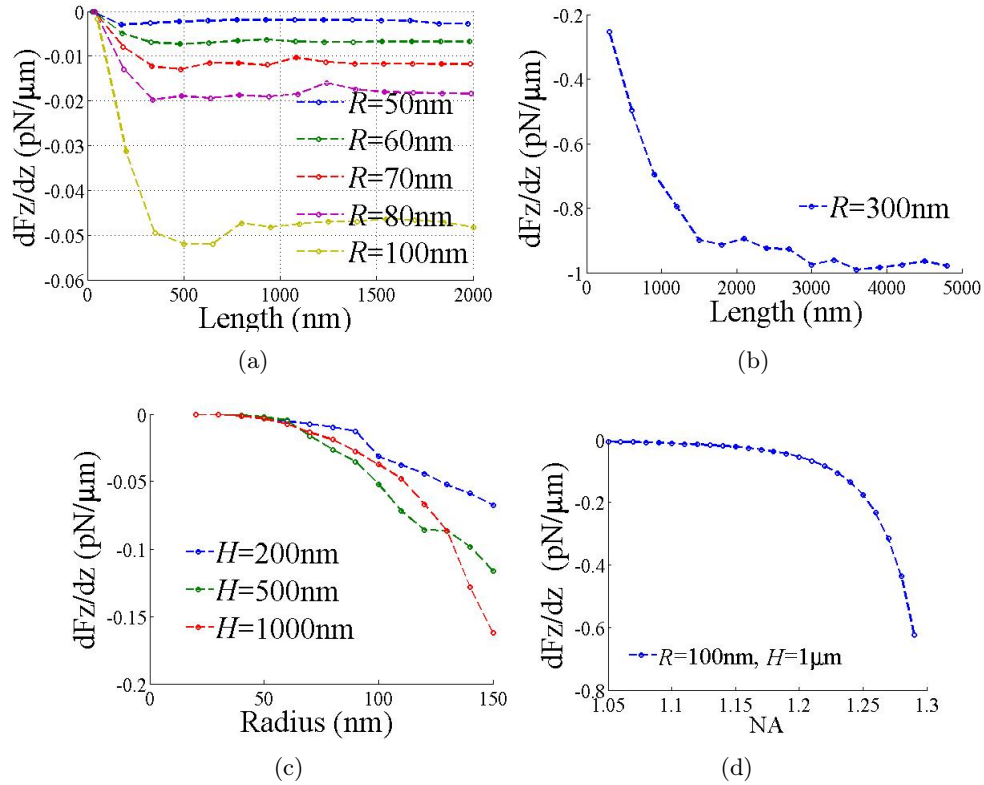


FIGURE 7.2: Rigidity axiale en fonction de la longueur pour (a) un rayon compris en  $R = 50$  nm et  $R = 100$  nm ; (b)  $R = 300$  nm ; (c)  $R = 300$  nm en fonction de la longueur pour  $H = 200$  nm à  $H = 1000$  nm et (d) NA pour  $R = 100$  nm et  $H = 1 \mu\text{m}$ .

Les figures 7.2(a) et 7.2(b) montrent la rigidité axiale de la capture  $\frac{\partial F_z}{\partial z}$  en fonction de la longueur et du rayon d'un nanocylindre. À la position d'équilibre, la rigidité axiale augmente avec le rayon du nanocylindre. La rigidité augmente avec la longueur des nanocylindres jusqu'à une valeur maximale et tend ensuite à une valeur constante après que le ration  $H/2R > 2.5$ . Quant à elle, la valeur maximale de la rigidité augmente avec le rayon du nanocylindre. Pour les nanocylindres de petits rayons, la rigidité de la trappe optique n'augmente pas beaucoup avec la longueur comme montré à la figure 7.2(a) pour  $R = 50$  nm. La longueur nécessaire pour atteindre la rigidité maximale augmente aussi avec le rayon. Par exemple, pour un rayon  $R = 100$  nm, la rigidité maximale est obtenue à  $H = 500$  nm, alors que pour un rayon de  $R = 300$  nm, la rigidité maximale est atteinte à  $H = 2 \mu\text{m}$ . La rigidité latérale de capture a montré des dépendances similaires avec le rayon et la longueur des nanocylindres comme montré aux figures 7.3(a) et 7.3(b). Cependant, la rigidité latérale de la capture est plusieurs fois supérieure que la rigidité axiale.

La rigidité axiale et latérale augmentent avec le rayon du nanocylindre comme montré à la

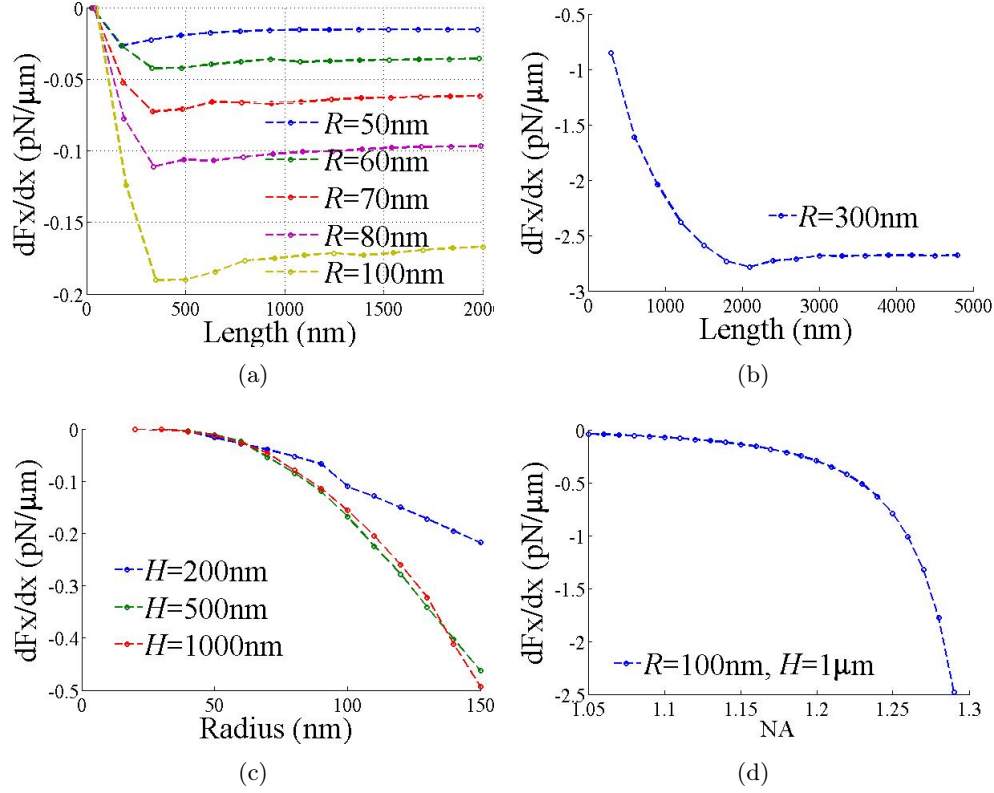


FIGURE 7.3: Rigidité latérale en fonction de la longueur pour (a) un rayon compris en  $R = 50$  nm et  $R = 100$  nm; (b)  $R = 300$  nm; (c)  $R = 300$  nm en fonction de la longueur pour  $H = 200$  nm à  $H = 1000$  nm et (d) NA pour  $R = 100$  nm et  $H = 1 \mu\text{m}$ .

figure 7.2(c) et 7.3(c) respectivement. Plus précisément, la rigidité axiale et latérale restent presque constantes pour  $20 \text{ nm} < R < 60 \text{ nm}$ , mais augmentent dramatiquement par un facteur 8 pour  $60 \text{ nm} < R < 140 \text{ nm}$ .

L'autre paramètre important affectant la rigidité de la pince optique est l'ouverture numérique NA. Les figures 7.2(d) et 7.3(d) montrent que la rigidité de la capture augmente avec NA de 1.05 à 1.29 pour un nanocylindre avec une longueur  $H = 1 \mu\text{m}$  et rayon  $R = 100$  nm. Il faut aussi remarquer qu'il y a une augmentation rapide de la rigidité pour  $NA > 1.2$ . Par exemple, la rigidité latérale augmente de seulement  $0.3 \text{ pN}/\mu\text{m}$  lorsque NA augmente de 1.05 à 1.2, mais augmente plus de 7 fois lorsque NA passe de 1.2 à 1.29.

### 7.1.2 La stabilité d'orientation

La distribution de stress peut ne pas être uniforme sur le nanocylindre de façon à générer un torque qui va permettre au nanocylindre d'effectuer une rotation selon l'angle  $\theta$ . Pour étudier la stabilité d'orientation des nanocylindre, on considère le cas où un nanocylindre est tourné de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta$  à cause du mouvement brownien ou d'un

autre phénomène mécanique. Comme la matrice de transfert dépend seulement des propriétés physiques de l'objet étudié, il est équivalent et plus simple d'effectuer une rotation au faisceau incident d'un angle  $\beta = -\theta$  dans le plan  $x - z$ , tout en laissant le nanocylindre fixe comme montré à la figure 7.4(b). De cette façon, la matrice de transfert pour être réutilisée pour tous les angles  $\theta$  de rotation.

La rotation détruit la symétrie axiale de la distribution de stress avec l'axe  $z$  ce qui donne naissance à un stress latéral  $\tau_y$ . Les valeurs de  $\tau_y$  tendent à tourner le nanocylindre pour l'aligner avec l'axe du faisceau incident. Inversement, les valeurs positives de  $\tau_y$  tendent à tourner le nanocylindre pour l'aligner perpendiculairement à l'axe du faisceau. Le gradient du torque

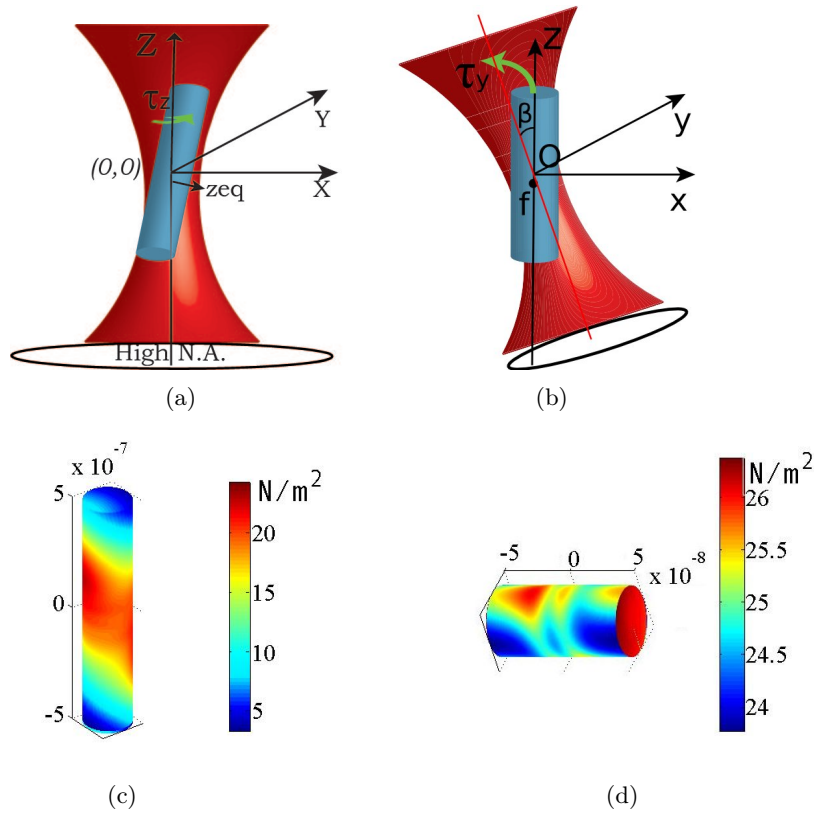


FIGURE 7.4: (a) Torque de spin  $\tau_z$ , (b) Torque latéral  $\tau_y$ . (c) Distribution de stress dans la situation (b) avec un nanocylindre de rayon  $R = 100 \text{ nm}$  et  $H = 1 \mu\text{m}$ ; (d) Distribution de stress sur un nanocylindre aligné le long de l'axe  $x$  avec le faisceau incident incliné de  $\beta = 40$  par rapport au nanocylindre,  $R = 25 \text{ nm}$  et  $H = 100 \text{ nm}$ .

latéral  $\frac{\partial \tau_y}{\partial \beta}$  est défini comme la rigidité angulaire de la capture. À la figure 7.4(c), on montre la distribution du stress lorsque le faisceau est tourné d'un angle  $\beta = 40$ . Comme le stress est perpendiculaire et dirigé vers l'extérieur de la surface du nanocylindre, cette distribution de stress génère un torque latéral négatif. Lorsque le faisceau est incliné, la symétrie par rapport à l'axe  $x$  et l'axe  $z$  est perdue, la dispersion du faisceau par les parties positives et négatives selon  $x$  et  $z$  du faisceau incident devient différente de façon à ce que la position d'équilibre

dans la direction  $x$  où  $F_x = 0$  n'est plus à  $x = 0$  comme montré à la figure 7.5(a). Le potentiel de force de capture latérale devient asymétrique par rapport à l'axe  $x$ , comme montré à la figure 7.5(a) pour  $H = 2.8 \mu\text{m}$ ,  $R = 300 \text{ nm}$  et  $\beta = \pm 40$ . Lorsque  $\beta$  est négatif, la barrière d'énergie qui permet au nanocylindre de s'échapper est plus petite dans la direction  $-x$ . L'asymétrie du potentiel de force et le changement de position d'équilibre selon  $x$  est petit pour des nanocylindres de petits rayons comme  $R = 70 \text{ nm}$  montré à la figure 7.5(b). La position d'équilibre dans la direction  $z$  est aussi affectée par l'inclinaison du nanocylindre par rapport au faisceau incident.

Nous avons calculé le torque latéral  $\tau_y$  en fonction de l'inclinaison  $\beta$  pour des nanocylindres de rayon  $R = 50 \text{ nm}$  et longueur variant entre  $100 \text{ nm}$  et  $1.2 \mu\text{m}$  comme montré à la figure 7.1.2. Cette figure montre que, dans le voisinage de la position d'équilibre  $\beta = 0$ , la valeur de  $|\tau_y|$  augmente linéairement avec  $\beta$  jusqu'à ce qu'une valeur maximale qui augmente aussi avec la longueur des nanocylindres. Après la valeur maximale à  $\beta = 35 - 45$ ,  $|\tau_y|$  commence à décroître à mesure que l'angle d'inclinaison augmente, mais le torque latéral est toujours négatif, sauf lorsque des nanocylindres avec des petits ratios comme lorsque  $H = 100 \text{ nm}$  et  $H/2R = 1$ , le torque latéral  $\tau_y$  est toujours positif.

Nos calculs montrent que le stress sur le côté des nanocylindres contribue beaucoup plus que le stress sur les extrémités de nanocylindre pour les ratios  $H/2R > 2$ . Si on considère l'extrémité où  $z = H/2$ , du côté avec  $x > 0$ , le stress donne naissance à un torque latéral  $\tau_y$  négatif alors que la partie avec  $x < 0$  donne naissance à un torque latéral  $\tau_y$  positif puisque  $\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times \vec{n}$  et que le stress est toujours normal à l'extrémité dans la direction  $+z$  (voir 3.1).

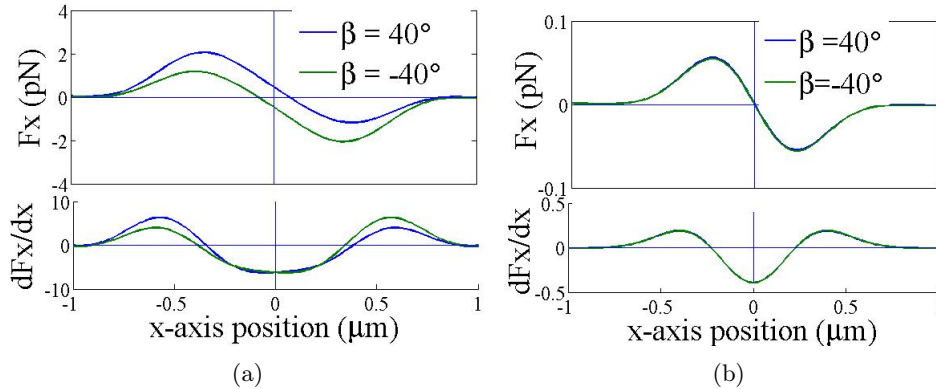


FIGURE 7.5: Force latérale  $F_x$  et son gradient  $\frac{dF_x}{dx}$  pour un nanocylindre incliné de  $\pm 40$  pour  $H = 2.8 \mu\text{m}$  et (a)  $R = 300 \text{ nm}$ , (b)  $R = 70 \text{ nm}$ .

Le torque total  $\tau_y$  est la différence entre le torque des deux côtés du nanocylindre. Comme la partie avec  $x < 0$  est plus proche du faisceau incliné, comme montré dans la figure 7.4(b), le torque total est positif sur les deux extrémités. Cependant, cette valeur de torque est presque deux ordres de grandeur plus faible que celle du torque négatif associé au stress sur le côté du



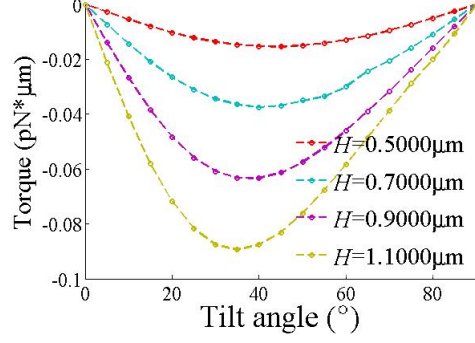


FIGURE 7.6: Torque latéral en fonction de l'angle d'inclinaison pour un nanocylindre de rayon  $R = 50 \text{ nm}$

nanocylindre. Ceci est particulièrement vrai pour les nanocylindre de ratio  $H/2R$  élevé. En effet, dans ce cas le côté du nanocylindre représente une zone d'application de la force plus grande que celle sur les extrémités. De plus, le bras de levier sur le côté ( $r \cos \theta$ ) peut être beaucoup plus grande que celui sur les extrémités  $r_1 \sin \theta = \rho$ , comme on peut voir sur la figure 3.1. Le torque latéral en fonction de l'angle d'inclinaison et du ratio  $H/2R$  est montré dans la figure 7.1.2. Ainsi, la modélisation des nanobâres comme une chaîne linéaire de sphères à la référence (Borghese , 2008) pourrait entraîner des erreurs dans le torque latéral calculé et le torque total en raison de l'imprécision de la présentation du côté des nanocylindres.

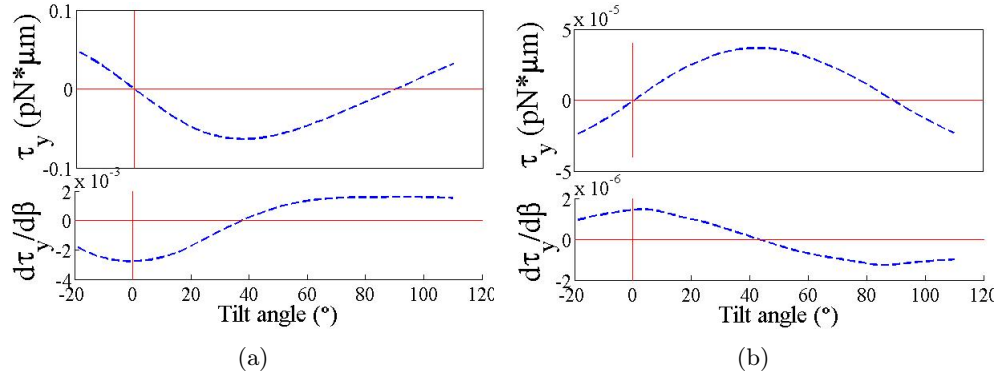


FIGURE 7.7: Torque latéral  $\tau_y$  et son gradient  $\partial\tau_y/\partial\beta$  en fonction de l'angle d'inclinaison pour un nanocylindre de (a)  $R = 50 \text{ nm}$  et  $H = 900 \text{ nm}$ ; (b)  $R = 25 \text{ nm}$  et  $H = 100 \text{ nm}$ .

La figure 7.7(a) montre le torque latéral  $\tau_y$  et le gradient  $\partial\tau_y/d\beta$  pour une inclinaison entre  $-20 < \beta < 110$  pour un nanocylindre de  $R = 50 \text{ nm}$  et  $H = 900 \text{ nm}$ . Peu importe si l'inclinaison est positive ou négative, l'équilibre d'orientation est à  $\beta = 0$  où  $\tau_y = 0$  et  $\partial\tau_y/d\beta$  est négatif. Le nanocylindre est donc capturé le long de l'axe optique. Notons qu'à l'inclinaison  $\beta = 90$ , le torque  $\tau_y = 0$ , mais le nanocylindre ne peut pas être stable à cet endroit parce que  $\partial\tau_y/d\beta > 0$ .

D'un autre côté, pour un nanocylindre de  $R = 25$  nm et  $H = 100$  nm, avec un ratio  $H/2R = 2$ , la figure 7.7(b) montre que la position d'équilibre est à  $\beta = 90$  où  $\tau_y = 0$  et  $\partial\tau_y/d\beta < 0$ . Ceci fait donc en sorte que le nanocylindre est capturé et aligné normal à l'axe du faisceau incident. De plus, comme le torque latéral est positif  $\tau_y > 0$  pour les inclinaisons entre  $0 < \beta < 90$ , le nanocylindre n'est pas stable le long de l'axe  $z$ . Toute inclinaison va immédiatement donner lieu à une rotation du nanocylindre jusqu'à ce qu'il atteigne sa position d'équilibre.

Les expériences montrent qu'une particule allongée tend en général à s'aligner le long de l'axe optique (Singer , 2006). Nos calculs montrent pourquoi les nanocylindres de ratio  $H/2R < 2$  sont alignés perpendiculairement à l'axe du faisceau incident. En fait, lorsque le ratio  $H/2R$  diminue, le torque associé au stress sur les extrémités devient, à un certain point, plus important que le stress appliqué sur les côtés puisque la grandeur relative de la surface et des bras de levier augmente sur les extrémités. Comme le torque sur les extrémités est positif, à un certain point, le torque total devient aussi positif. La figure 7.4(d) montre que la distribution de stress sur un nanocylindre de  $R = 25$  nm et  $H = 100$  nm aligné avec l'axe  $x$  lorsque le faisceau est incliné de  $40^\circ$ . Dans ce cas, la distribution de stress sur le côté est similaire à celle sur les extrémités d'un nanocylindre aligné avec l'axe  $z$  et le torque est positif. Notons aussi que la variation de stress sur la surface d'un tel nanocylindre est faible ( $24 - 26\text{N/m}^2$ ).

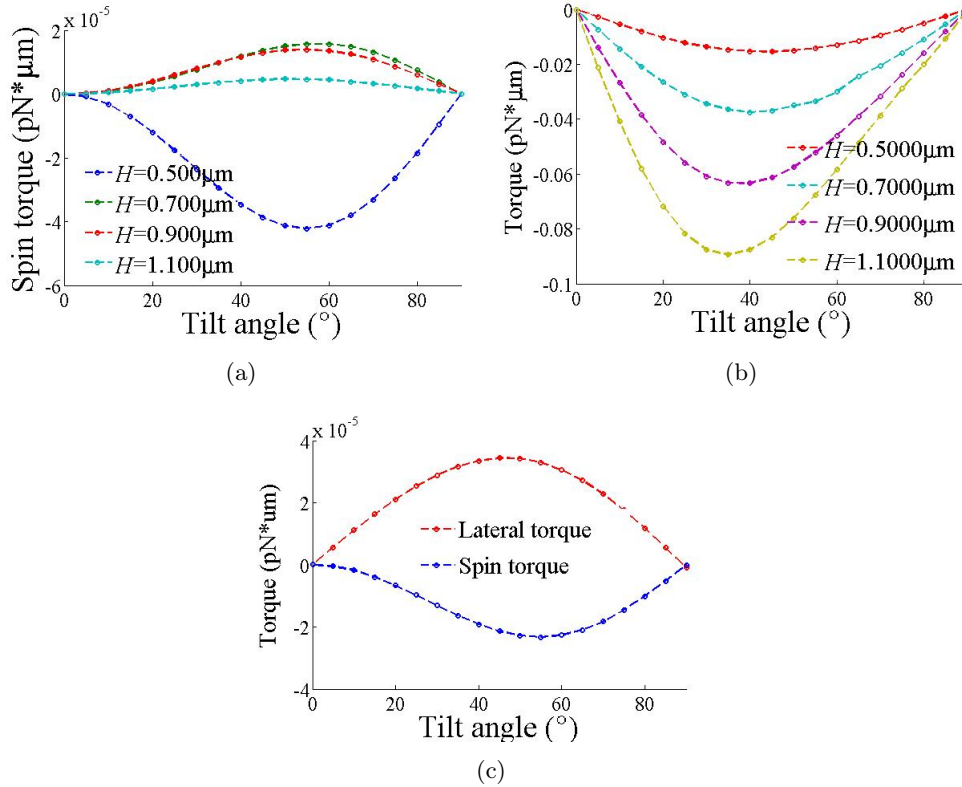


FIGURE 7.8: Spin torque  $\tau_z$  et (b) torque latéral en fonction de l'inclinaison pour  $R = 50$  nm à  $R = 1.1 \mu\text{m}$ ; (c) torque latéral et spin for  $R = 25$  nm and  $H = 100$  nm.



Nous avons calculé la longueur critique pour que le torque latéral change de négatif à positif. Cette longueur critique est  $H < 100$  nm pour  $R = 25$  nm et  $H < 250$  nm pour  $R = 50$  nm. Ces résultats sont différents de ceux obtenus à la référence (Borghese , 2008) ( $H < 400$  nm pour  $R = 25$  nm et  $R = 50$  nm) où les nanocylindres sont modélisés comme des chaînes de sphères.

Le torque de spin  $\tau_z$  résulte du transfert de moment angulaire du faisceau incident au nanocylindre comme représenté à la figure 7.4(a). Pour le nanocylindre incliné par rapport à l'axe  $z$ ,  $\tau_z$  induit une rotation autour de l'axe optique comme montré à la référence (Neves , 2010) pour des nanofibres. Notons cependant que les nanofibres peuvent avoir un ratio  $H/2R$  qui dépassent les contraintes de notre modèle. Notre calcul a pu montrer que le spin torque est au moins 2-3 ordres de grandeur plus petits que le torque latéral pour les nanocylindres de grand ratio  $H/2R$ , comme montré aux figures 7.8(a) et 7.8(b). Cependant, pour les petits ratios comme  $H/2R = 2$ , le torque latéral est petit et peut être comparable au spin comme montré à la figure 7.8(c).

### 7.1.3 Correction à très haute focalisation

Comme il a été mentionné au début de la section précédente 7.1, les calculs effectués plus haut ont été faits avec une expansion en série utilisant l'expansion dans le champ lointain modifié de la section 5.1.1. Comme il a été montré à la section 5.1.2, l'expansion dans le champ lointain et dans le champ proche donne de bons résultats pour  $NA < 1.15$ . L'expansion dans le champ proche hybride donne de bons résultats jusqu'à  $NA = 1.20$ . Quant à elle la correction aux hautes NA peut toujours s'appliquer. Il est donc intéressant de voir l'effet qu'une correction aux hautes NA peut avoir sur les résultats de calcul effectués plus haut et de chercher l'impact qu'une haute NA peut avoir sur les paramètres importants de capture optique.

Les figures 7.9(a) et 7.9(b), qui représentent la force et la rigidité latérale en fonction de la distance du point d'équilibre pour le cas corrigé et non corrigé respectivement, montre que les valeurs prévues sont différentes à mesure que l'on déplace le nanocylindre. La différence la plus marquée se situe dans la calcul de la largeur latérale du potentiel de capture optique. Le nanocylindre est considéré comme étant capturé par la pince optique lorsque  $\partial F_x/\partial x < 0$ . En effet, lorsque  $\partial F_x/\partial x < 0$  la force est de rappel alors que  $\partial F_x/\partial x > 0$  signifie que la force est répulsive. La largeur latérale du potentiel de capture optique est donc de 320 nm dans le cas où le faisceau incident utilisé est corrigé alors qu'elle est de 420 nm lorsque le faisceau incident n'est pas corrigé. Une erreur de 35% est donc commise sur cette prédiction lorsque le faisceau non corrigé est utilisé. La figure ?? montre que la largeur latérale du potentiel de capture optique est de  $0.38 \mu\text{m}$  lorsque  $NA=1.1$  ce qui signifie une diminution de 10% ou 60nm lorsque l'on passe de  $NA=1.10$  à  $NA=1.25$ . Il est aussi important de noter que cette largeur de capture est indépendante de l'indice de réfraction  $n_2$  utilisé. Comme mentionné à la section 3.2, les forces appliquées sont proportionnelles à l'indice  $n_2$  de la particule. Le changement d'indice de réfraction correspond donc à une augmentation de la puissance laser.

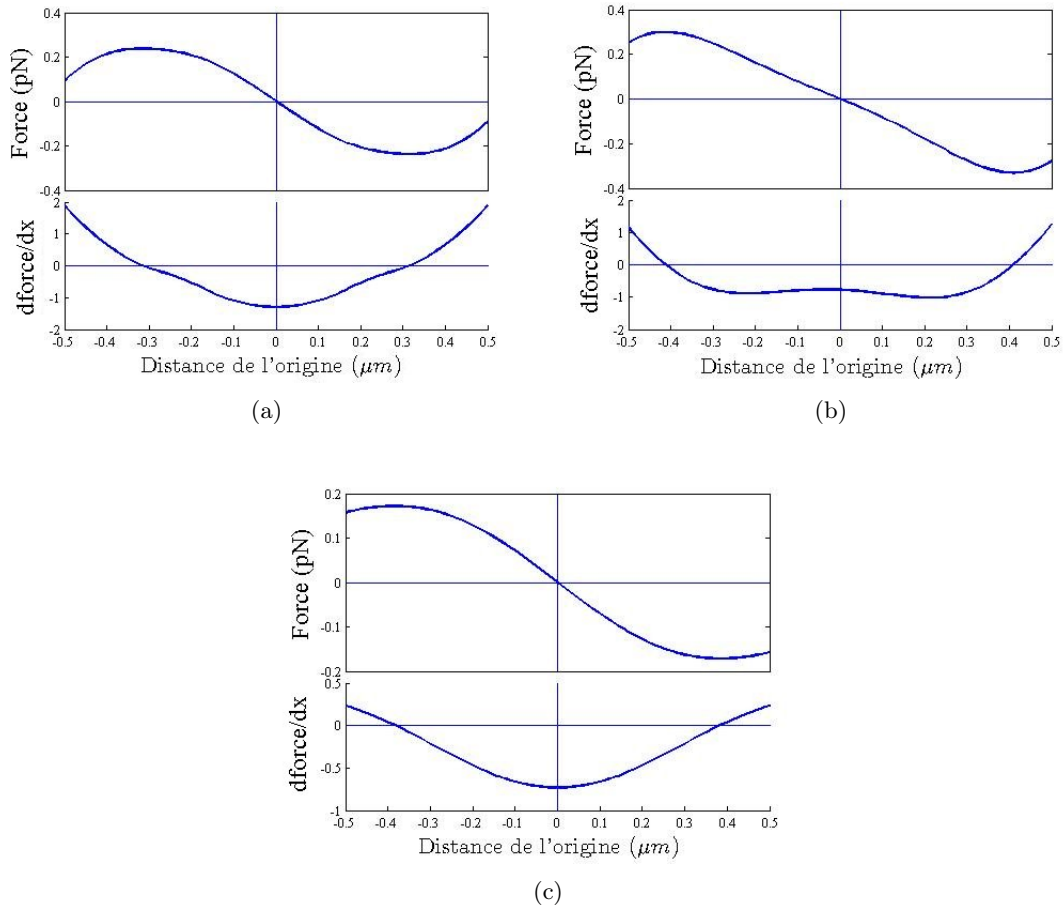


FIGURE 7.9: Force latérale  $F_x$  et rigidité latérale  $\partial F_x / dx$  pour un nanocylindre d'indice  $n_2 = 2$  de  $R = 50$  nm,  $H = 1$   $\mu\text{m}$  en fonction du déplacement latéral lorsque (a) la correction pour les hautes focalisations est utilisée avec  $NA = 1.25$  et (b) l'expansion dans le champ lointain est utilisée avec  $NA = 1.25$  (c) une  $NA = 1.10$  est utilisée avec correction

Cependant, il est important de préciser que, dans les deux cas, la rigidité totale est environ 10 fois plus élevée à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1$  comme le montre la comparaison des figures 7.9(a) et 7.9(b) avec la figure 7.9(c) qui représente la situation où  $NA=1$  est utilisée. Les prédictions de force maximale et de rigidité sont donc peu affectées par cette correction. On peut donc en conclure que les résultats de la section 7.1 qui ont été publiés dans (Bareil Sheng, 2010a) sont précis même à  $NA > 1.15$ .

Dans le cas où la force et la rigidité axiale (selon l'axe  $z$ ) sont étudiées, la figure 7.10 montre qu'elles sont plus intenses à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.10$ . Il faut se rappeler que plus  $NA$  est grand, plus le faisceau sort de l'objectif avec un angle très grand. Autrement dit, plus  $NA$  est grand, plus le faisceau incident atteint son point focal sur une distance courte. Le gradient de force axial est alors plus intense et la stabilité axiale de la pince augmente.

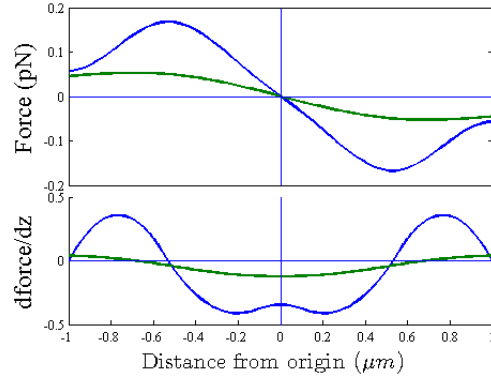


FIGURE 7.10: Force axiale (pN)  $F_z$  et rigidité axiale  $\partial F_z/dz$  en fonction du déplacement axial par rapport à l'équilibre pour un nanocylindre avec  $n_2 = 1.57$ ,  $R = 50$  nm,  $H = 1$   $\mu$ m. Les courbes bleues représentent  $NA = 1.25$  et les vertes  $NA = 1.10$ . Le champ incident corrigé est utilisé avec une polarisation circulaire à droite.

Les deux courbes de la figure 7.10, qui représentent la rigidité axiale (selon l'axe  $z$ ) à  $NA = 1.25$  et à  $NA = 1.10$ , montrent que la largeur axiale du potentiel de capture optique s'étend sur une surface légèrement moins grande à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.10$  puisque la région où la dérivée de la force  $\partial F_x/dz < 0$  est négative est moins grande à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.10$ . Le rayon d'action axial de la pince optique est de 650 nm à  $NA=1.10$  et de 520 nm à  $NA=1.25$  ce qui correspond à une diminution de 25% contrairement à 10% pour le cas latéral.

Un autre avantage d'utiliser une  $NA$  plus élevée dans une pince optique est donc de permettre à l'utilisateur de pouvoir capturer des nanocylindres sans affecter les autres aux alentours. Dans une expérience où plusieurs particules devraient être capturées par plusieurs faisceaux incidents (avec acousto-modulateur ou holographie), il serait donc judicieux d'utiliser une  $NA$  la plus élevée possible. Un autre problème expérimental des pinces optique est que plusieurs particules tendent à tomber dans le même faisceau de capture. Pour éviter que cela ne se produise, ou diminuer sa fréquence, une grande  $NA$  peut être utile puisque le rayon d'action est diminué. De la même façon, dans les expériences où les particules à capturées sont rares, un rayon d'action très grand peut être voulu. Dans ce cas, des  $NA$  faibles peuvent être utiles.

### Effet de la polarisation

Ainsi, selon nos calculs la meilleure ouverture numérique à utiliser pour maximiser les forces, les rigidités axiale et latérale et pour minimiser le rayon d'action de la pince optique (la largeur du potentiel optique) est celle où l'intensité du faisceau incident serait la plus élevée ; c.-à.d. l'ouverture numérique donnant la plus petite valeur de largeur à mi-hauteur. Selon la table 7.1, la meilleure ouverture numérique à utiliser pour améliorer la stabilité dans la direction  $x$  serait à  $NA = 1.25$ . La stabilité dans la direction  $y$  est moins élevée puisque le faisceau  $y$  est moins focalisé. En effet, tout dépendant de la polarisation, la symétrie de rotation du faisceau

$NA$	Largeur $2\omega_{0y}$ ( $\mu\text{m}$ )	Largeur $2\omega_{0x}$ ( $\mu\text{m}$ )
1.10	1.32	1.52
1.15	1.12	1.36
1.20	0.92	1.24
1.25	0.68	1.06

TABLE 7.1: Table représentant la largeur à mi-hauteur dans la direction  $x$  et  $y$  pour un faisceau polarisé selon  $x$ .

est brisée à très haute ouverture numérique. Par exemple, à  $NA = 1.10$ , le point focal du faisceau incident est encore presque totalement symétrique comme le montre la figure 7.11(a), alors qu'il est asymétrique à la figure 7.11(b) pour  $NA = 1.22$ . Pour comprendre pourquoi ce phénomène se produit, le lecteur est référé à la section 5.1.2. On rappelle ici que la polarisation

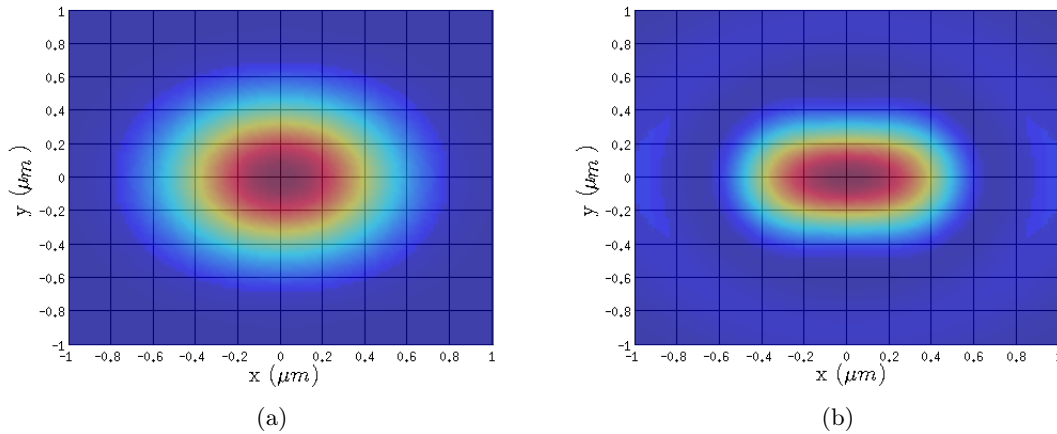


FIGURE 7.11: Distribution du champ électrique au carré  $E^2$  vue dans le plan  $xy$  au plan focal  $z = 0$  lorsque la polarisation linéaire selon  $x$ . (a)  $NA = 1.10$  (b)  $NA = 1.22$

linéaire selon  $y$  donne une distribution du champ électrique qui est perpendiculaire à celle en  $x$ . Ainsi, la table 7.1 est valide pour la polarisation selon  $y$ , mais il faut alors inverser les titres des colonnes pour obtenir la table 7.2 qui représente la largeur du faisceau en fonction de  $NA$  pour une polarisation selon  $y$ .

La figure 7.12 représente la distribution du champ électrique au carré  $E^2$  pour une polarisation linéaire selon  $y$ . On voit clairement que le faisceau est plus focalisé selon  $x$ . En comparaison, la figure 7.11(b) montre que le faisceau est plus focalisé selon  $y$  lorsque la polarisation est linéaire selon  $x$ . La polarisation selon  $x$  ou  $y$  fait donc en sorte que la rigidité de la pince optique est différente dans les deux directions latérales. Lorsque la polarisation est selon  $x$ , la trappe optique est plus stable selon la direction  $y$  puisque le faisceau  $y$  est plus focalisé. De la même

$NA$	Largeur $2\omega_{0x}$ ( $\mu\text{m}$ )	Largeur $2\omega_{0y}$ ( $\mu\text{m}$ )
1.10	1.32	1.52
1.15	1.12	1.36
1.20	0.92	1.24
1.25	0.68	1.06

TABLE 7.2: Table représentant la largeur à mi-hauteur dans la direction  $x$  et  $y$  pour un faisceau polarisé selon  $y$ .

façon, lorsque la polarisation est selon  $y$ , le faisceau est plus focalisé selon  $x$  et donc la trappe sera plus stable dans cette direction.

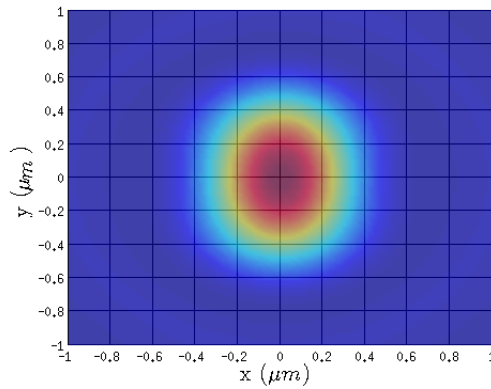


FIGURE 7.12: Distribution du champ électrique au carré  $E^2$  vue dans le plan  $xy$  au plan focal  $z = 0$  lorsque la polarisation linéaire selon  $y$  et  $NA = 1.20$

Dans le cas de la polarisation circulaire à droite ou à gauche, le résultat est identique selon  $x$  ou  $y$  ; c'est-à-dire que le faisceau reste toujours symétrique par rapport à l'axe optique. On voit aux figures 7.13(a) et 7.13(b), qui représentent la distribution du champ électrique au carré  $E^2$  lorsque la polarisation est circulaire à droite et à gauche respectivement, que le type de polarisation circulaire (gauche ou droite) n'influence pas la distribution du champ et que celle-ci est toujours symétrique même à très haute ouverture numérique. Ceci explique donc pourquoi, aux sections précédentes 7.1.1 et 7.1.1, la force selon  $y$  ou le torque selon  $y$  ont été considéré comme étant les mêmes que dans la direction  $x$ . La table 7.3 montre l'évolution de la largeur à mi-hauteur du faisceau incident en fonction de différentes ouvertures numériques. En comparant ces valeurs à celles des polarisations linéaires de la table 7.2 ou 7.1, on remarque que la polarisation linéaire permet de mieux focaliser le faisceau dans au moins une direction qu'avec une polarisation circulaire. Il se pourrait donc qu'il soit plus avantageux, pour certaines expériences, d'utiliser une polarisation linéaire. Par exemple, dans le cas où l'on voudrait

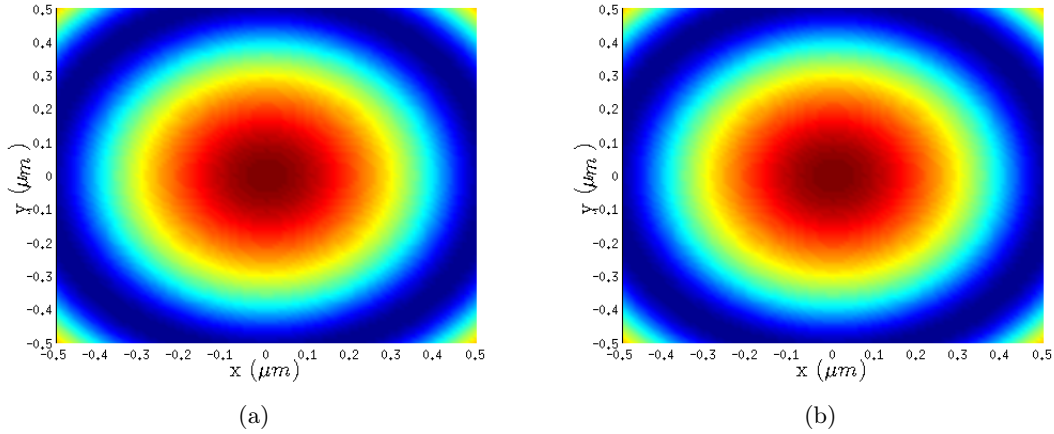


FIGURE 7.13: Distribution du champ électrique au carré  $E^2$  vue dans le plan  $xy$  au plan focal  $z = 0$  avec  $NA = 1.25$ , lorsque la polarisation est circulaire à (a) droite (b) gauche

$NA$	Largeur $2\omega_0$ ( $\mu\text{m}$ )
1.10	1.44
1.15	1.28
1.20	1.12
1.25	1.02

TABLE 7.3: Table représentant la largeur à mi-hauteur dans la direction  $x$  et  $y$  pour un faisceau polarisé circulairement à gauche ou à droite.

aligner plusieurs particules les unes aux côtés des autres sur une ligne imaginaire avec une pince optique holographique, il pourrait être intéressant d'avoir une focalisation plus intense dans la direction de l'alignement des nanocylindres. Ceci pourrait permettre d'éviter que le faisceau incident n'affecte deux nanocylindres à la fois et que ceux-ci se retrouvent dans le même faisceau.

Cependant, on peut aussi conclure que la polarisation linéaire ne permet pas de focaliser aussi intensément le faisceau que la polarisation circulaire dans au moins une direction. La stabilité de la trappe est donc moindre (et son rayon d'action supérieur) dans une direction qu'elle pourrait l'être avec une polarisation circulaire. En reprenant le même exemple de capture optique de plusieurs nanobâres, on peut penser qu'il peut être avantageux d'utiliser une polarisation circulaire dans certains cas. Par exemple, si l'arrangement spatial n'est plus linéaire, mais nécessite l'alignement des particules dans deux directions perpendiculaires  $x$  et  $y$ , alors la stabilité de la capture optique doit être égale dans les deux directions. Il fait alors plus de sens d'utiliser une polarisation circulaire. De la même façon, si la pince optique doit

Contrainte sur le tenseur	Type de cristal	Direction axe optique
$n_{xx} \neq n_{yy} \neq n_{zz}$	Biaxial	Dépend de $n_{xx}, n_{yy}, n_{zz}$
$n_{xx} < n_{yy} = n_{zz}$	Uniaxial	Direction $\vec{x}$
$n_{yy} < n_{xx} = n_{zz}$	Uniaxial	Direction $\vec{y}$
$n_{zz} < n_{xx} = n_{yy}$	Uniaxial	Direction $\vec{z}$
$n_{xx} = n_{yy} < n_{zz}$	Uniaxial	Direction $\vec{z}$
$n_{zz} = n_{xx} < n_{yy}$	Uniaxial	Direction $\vec{y}$
$n_{zz} = n_{yy} < n_{xx}$	Uniaxial	Direction $\vec{x}$
$n_{xx} = n_{yy} = n_{zz}$	Isotrope	Toutes les directions

TABLE 7.4: Table représentant les diverses types d'anisotropie rencontrée.

être utilisée comme une sonde pour de l'imagerie sous longueur d'onde, la stabilité doit alors être identique dans toutes les directions. En effet, la résolution maximale d'un tel système étant dépendant de la stabilité du nanobarre dans la pince optique et la résolution doit être identique dans toutes les directions.

## 7.2 Nanocylindres anisotropes

Pour les calculs effectués dans cette section, la méthode de la matrice de transfert avec les conditions aux frontières normales a été utilisée. Pour ce qui est du faisceau incident, la méthode d'expansion de «point matching» dans le champ proche modifiée a été utilisée. Les corrections pour très hautes focalisations mentionnées à la section 5.1.3 ont aussi été ajoutées. Pour les calculs de stress, l'équation 6.1.10 est utilisée. Pour les calculs de forces, l'équation 6.2.71 est utilisée et pour le calcul des torques, les équations 6.3.1 et 6.3.3 sont utilisées.

Par ailleurs, pour alléger l'écriture et la lecture du document, lorsqu'un tenseur diagonal d'indice de réfraction est utilisé, on utilise un tenseur sous la forme

$$n_2 = \begin{bmatrix} n_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & n_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & n_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.2.1)$$

où les différents types de biréfringence résultants sont donnés par la table 7.4.

### 7.2.1 Stress distribution

Dans cette section, l'influence sur la distribution de stress de chacun des paramètres physique de la pince optique et des nanocylindres anisotropes est étudiée. L'étude de la distribution de

stress est importante puisqu'elle permet de comprendre plus facilement comment les forces et les torques sont appliqués et ainsi d'en faire ressortir des constantes physiques.

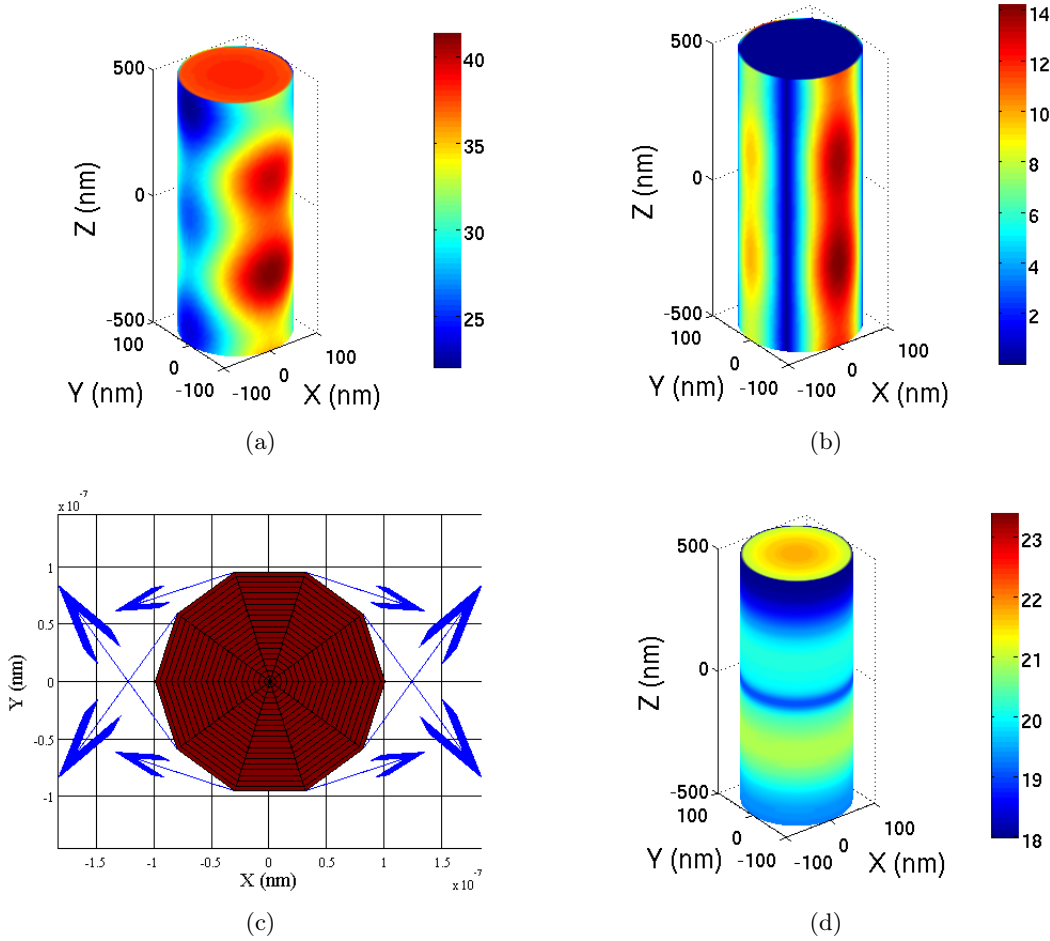


FIGURE 7.14: Distribution de stress ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) sur un nanocylindre anisotrope de  $R = 100 \text{ nm}$  et de  $H = 1 \mu\text{m}$ . Le tenseur diélectrique est diagonal avec comme valeur d'indice de réfraction  $n_{xx} = 1.89, n_{yy} = 1.57, n_{zz} = 1.57$ . Avec une  $NA = 1.1$ , la figure (a) représente le stress normal à la surface la figure (b) le stress tangentiel à la surface et la figure (c) représente la direction du stress tangentiel à des intervalles régulièrement espacées sur la surface du nanocylindre. La longueur des flèches représente une intensité relative du stress tangentiel. (d) représente la distribution du stress pour le cas isotrope si  $n_2 = 1.57$ . Le point focal est en  $z = 0$ . L'axe optique est selon  $\vec{x}$  et le faisceau se propage selon  $z$ .

Les figures 7.14(a) et 7.14(b), qui représentent le stress appliqué sur un nanocylindre anisotrope possédant un tenseur d'indice de réfraction donné selon

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.89 & 0 & 0 \\ 0 & 1.57 & 0 \\ 0 & 0 & 1.57 \end{bmatrix} \quad (7.2.2)$$



, montre que le stress sur une particule anisotrope dont l'axe optique n'est pas aligné avec le faisceau incident n'est plus complètement perpendiculaire à la surface, mais qu'une composante tangentielle d'intensité plus faible et non négligeable est présente. De plus, la figure 7.14(c) montre que la direction du stress, vue selon le plan  $xy$ , est de même grandeur, mais de sens opposée à chaque points diamétralement opposé du nanocylindre. Ainsi, dans la position actuelle du faisceau incident ; c-a-d. que le faisceau n'est pas incliné par rapport au nanocylindre, le torque est nul. La figure 7.14(b) montre aussi que le stress tangentiel est nul aux extrémités. Ainsi aucun torque selon  $x$  ou  $y$  provenant du stress tangentiel n'est induit par les extrémités du nanocylindre.

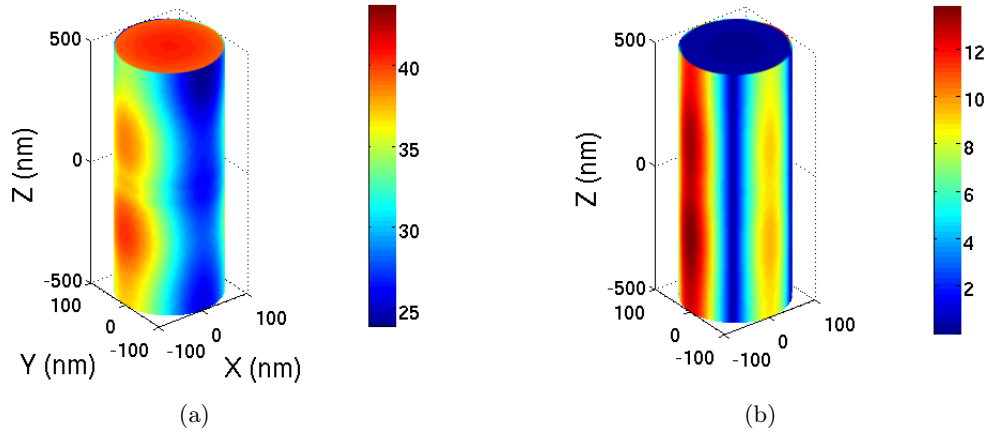


FIGURE 7.15: Distribution de stress ( $\text{N/m}^2$ ) sur un nanocylindre anisotrope de  $R = 100$  nm et de  $H = 1 \mu\text{m}$ . Le tenseur diélectrique est diagonal avec comme valeur d'indice de réfraction  $n_{xx} = 1.57, n_{yy} = 1.89, n_{zz} = 1.57$ . Avec une  $NA = 1.1$ , la figure (a) représente le stress normal à la surface la figure (b) le stress tangentiel à la surface. L'axe optique est selon  $\vec{y}$  et le faisceau se propage selon  $z$ .

En comparant la distribution de stress du nanocylindre anisotrope avec la figure 7.14(d) qui représente le stress sur un nanocylindre isotrope d'indice de réfraction  $n_2 = 1.57$ , il est clair que l'anisotropie induit une gradation du stress selon  $\phi$  qui donne une impression de séparation verticale de la distribution de stress. La symétrie de rotation du stress selon l'axe  $z$  est donc perdue. Ceci apporte une influence physique notable. En effet, à la figure 7.14(a), qui représente le stress normal à la surface, il est possible de déduire que la rigidité et les forces appliquées dans la direction  $x$  seraient plus faibles que celle appliquées dans la direction  $y$ . En effet, l'intégrale du stress est clairement plus faible sur la façade  $xz$  que  $yz$ .

Il faut aussi noter que la direction dans laquelle le stress, et donc les forces et rigidités, sont plus faibles peut être déterminé à l'avance par le tenseur diélectrique. En effet, si la composante  $n_{yy}$  du tenseur est inversée avec la composante  $n_{xx}$  du tenseur, on obtient aux figures 7.15(a) et 7.15(b) une distribution de stress qui a subi une rotation de  $90^\circ$  par rapport à la distribution de stress normale ou tangentielle des figures 7.14(a) et 7.14(b). Ainsi, dans le premier cas, le

tenseur d'indice de réfraction est donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.89 & 0 & 0 \\ 0 & 1.57 & 0 \\ 0 & 0 & 1.57 \end{bmatrix}$$

alors qu'il est donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.57 & 0 & 0 \\ 0 & 1.89 & 0 \\ 0 & 0 & 1.57 \end{bmatrix}$$

dans le second cas. Notons que la distribution du stress tangentiel subit aussi une rotation de  $90^\circ$ , mais comme la composante tangentielle est périodique à tous les  $90^\circ$  contrairement à tous les  $180^\circ$  dans le cas de la composante normale à la surface, il est difficile à observer sur les figures de stress.

Si le tenseur d'indice de réfraction est plutôt du type suivant

$$n_2 = \begin{bmatrix} 1.57 & 0 & 0 \\ 0 & 1.57 & 0 \\ 0 & 0 & n_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.2.3)$$

où les indices  $n_{xx}$  et  $n_{yy}$  sont égaux, on obtient l'effet montré aux figures 7.16 et 7.17. Elles représentent la distribution de stress normal et tangentiel respectivement sur un nanocylindre lorsque  $n_{zz}$  augmente. Le stress tangentiel à la surface, comme montré aux figures 7.17, est nul. Ainsi, ce sont les différences entre  $n_{xx}$  et  $n_{yy}$  qui donnent naissance à la création de stress tangentiel à la surface. Ceci est parfaitement normal lorsque seul  $n_{zz}$  est différent. En effet, à ce moment l'axe optique de la particule devient l'axe  $z$ . Comme le faisceau se propage selon  $z$ , l'axe optique de la particule biréfringente correspond à l'axe optique du faisceau. Alors la particule apparaît isotrope pour le faisceau incident. On obtient en effet une distribution de stress qui ressemble à une particule isotrope; c'est-à-dire que le stress est symétrique par rapport à l'axe  $z$  et que la composante tangentielle de stress est nulle comme on le voit à la figure 7.16(d) qui représente le stress normal à la surface pour une particule isotrope.

Pour ce qui est du stress normal à la surface, le fait de changer  $n_{zz}$  n'influence presque pas la distribution de stress sur les côtés du nanocylindre, mais plutôt la distribution aux extrémités. En effet, on peut voir aux figures 7.16 que la distribution de stress aux extrémités augmente avec la valeur de  $n_{zz}$ . De plus, il convient de porter particulièrement attention aux valeurs de stress et au code de couleur de la légende. Les figures 7.16 montre que la distribution de stress sur les côtés du nanocylindre change très peu même si la couleur de la distribution de stress change. En fait, la couleur change sur les côtés du nanocylindre parce que l'échelle de

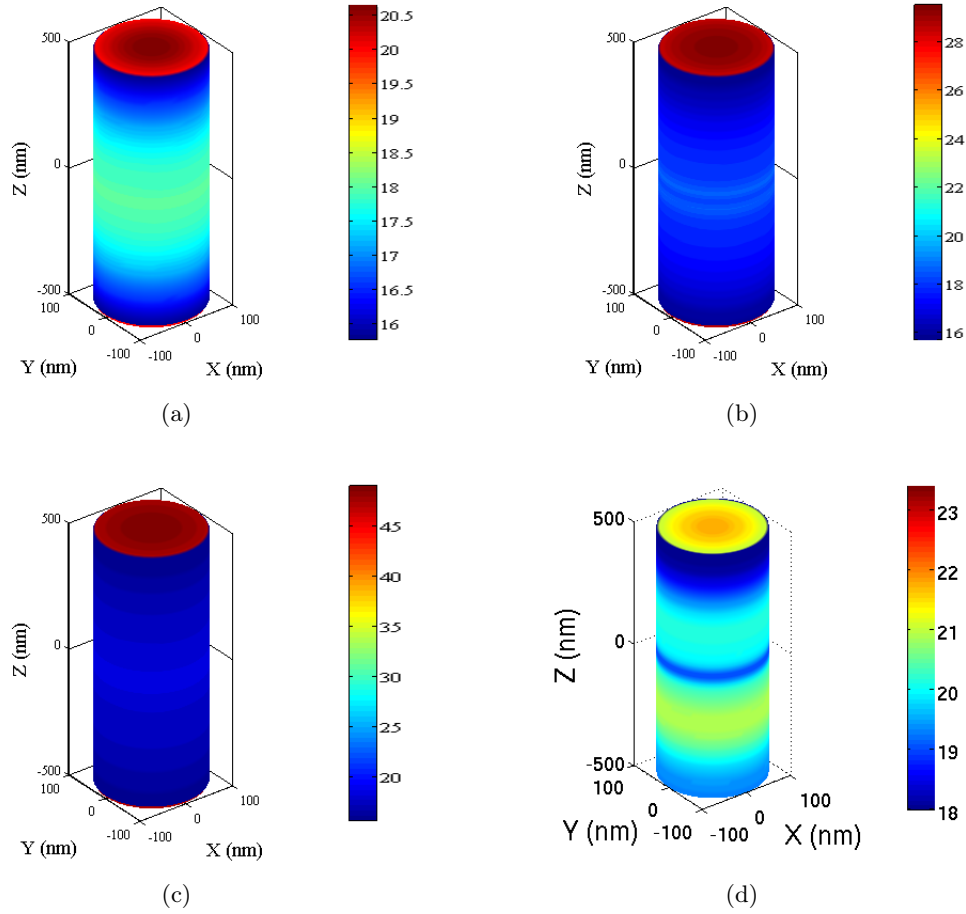


FIGURE 7.16: Distribution de stress normal sur un nanocylindre de  $R = 100$  nm et  $H = 1 \mu\text{m}$  avec une ouverture numérique  $NA = 1.10$ . Le faisceau incident est focalisé en  $x = y = z = 0$  et il est de polarisation circulaire à droite. Le tenseur d'indice de réfraction est donné par le tenseur 7.2.3 où (a)  $n_{zz} = 1.59$  (b)  $n_{zz} = 1.69$  (c)  $n_{zz} = 1.89$ . (d)  $n_{zz} = 1.57$  donc une particule isotrope. L'axe optique est selon  $z$  et le faisceau se propage selon  $z$ .

couleur doit être adaptée pour la valeur maximale de stress grandissante aux extrémités. On peut donc déduire que, dans le cas où  $n_{xx}$  et  $n_{yy}$  sont identiques, le stress est symétrique en rotation par rapport à l'axe  $z$ . Comme dans le cas isotrope de la figure 7.16(d).

### Impact de l'ouverture numérique

Comme la section 5.1.2 décrivant l'impact de l'ouverture numérique sur le faisceau incident le montre, l'intensité augmente au centre du faisceau gaussien avec l'ouverture numérique. De plus, rappelons que le stress est directement proportionnel à l'intensité (Bareil , 2006). Le stress est donc supérieur à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.1$  par exemple. La très haute ouverture numérique peut donc être utile pour des nanoparticules puisque ces objets sont en général plus difficiles à capturer. En effet, plus le faisceau incident est localisé plus des petits objets

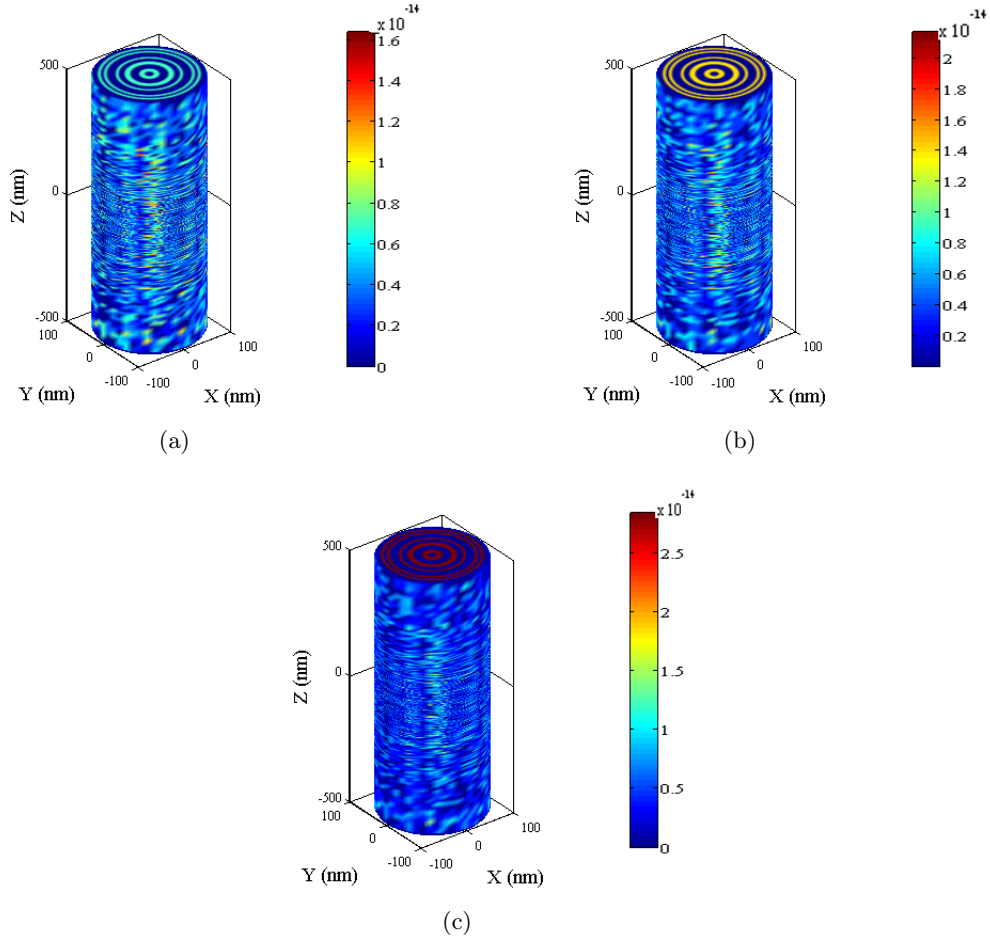


FIGURE 7.17: Distribution de stress tangentiel sur un nanocylindre de  $R = 100$  nm et  $H = 1$   $\mu$ m avec une ouverture numérique  $NA = 1.10$ . Le faisceau incident est focalisé en  $x = y = z = 0$  et il est de polarisation circulaire à droite. Le tenseur d'indice de réfraction est donné par le tenseur 7.2.3 où (a)  $n_{zz} = 1.59$  (b)  $n_{zz} = 1.69$  (c)  $n_{zz} = 1.89$ .

peuvent être capturés (Liu , 2011). De ce fait, la première chose que l'on remarque entre les figures 7.18(a) et 7.18(c) représentant le stress normal à  $NA = 1.1$  et à  $NA = 1.25$ , est que le stress est plus localisé au centre du nanobarre. On remarque aussi le même phénomène pour le stress tangentiel. Comme la section 7.1.3 l'a démontré, cela signifie que la stabilité de la capture sera supérieure à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.1$ .

De plus, les stress tangentiel et normal à la surface sont plus intenses à  $NA=1.25$  qu'à  $NA=1.15$ . De ce fait, les forces et la rigidité axiale résultante (selon l'axe  $z$ ) sont aussi plus intense à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.15$ . La figure 7.19 montre effectivement que la force axiale est plus élevée à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.15$  pour un nanocylindre anisotrope. Cette même figure montre aussi que la force et la rigidité axiale ne sont pas influencées lors que les indices  $n_{xx}$  et  $n_{yy}$  sont inversés.

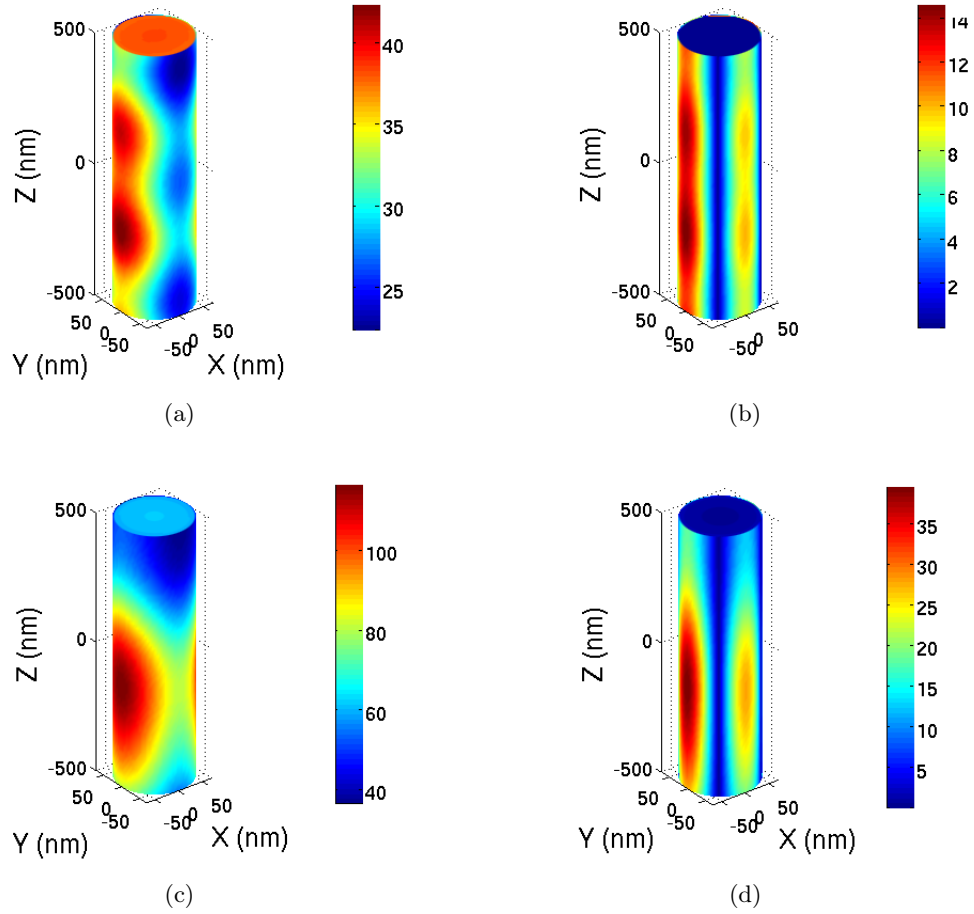


FIGURE 7.18: Distribution de stress ( $\text{N/m}^2$ ) sur un nanocylindre de  $R = 70 \text{ nm}$  et de  $H = 1 \mu\text{m}$ . Le tenseur diélectrique est diagonal avec comme valeur d'indice de réfraction  $n_{xx} = 1.57, n_{yy} = 1.89, n_{zz} = 1.57$ . Avec une  $NA = 1.1$ , la figure (a) représente le stress normal à la surface la figure (b) le stress tangential à la surface. Avec une  $NA = 1.25$ , la figure (c) représente le stress normal à la surface la figure (d) le stress tangential à la surface. Le faisceau incident est focalisé en  $x = y = z = 0$  et il est de polarisation circulaire à droite.

Comme dans le cas des particules isotropes, une  $NA = 1.25$  ou même plus peut être intéressante à utiliser expérimentalement pour éviter que deux nanoparticules capturées côte-à-côte ne s'affectent l'une l'autre. En effet, les grandes ouvertures numériques amènent une rigidité et des forces appliquées plus grandes, mais l'avantage d'une plus grande rapidité de focalisation est que les nanocylindres se retrouvent dans un potentiel de capture plus étroit. On peut effectivement voir à la figure 7.19 que le potentiel de trappe est plus étroit à  $NA = 1.25$  puisque la dérivée de la force  $\partial F_z / \partial z < 0$  est plus petite que 0 sur une plage plus petite qu'à  $NA = 1.15$ . La largeur du potentiel de capture optique est de  $0.6 \mu\text{m}$  à  $NA = 1.15$  alors qu'il est de  $0.4 \mu\text{m}$  à  $NA = 1.25$  ce qui représente une diminution de 50% du rayon d'action de la pince optique dans l'axe optique. Les hautes NA permettraient donc théoriquement d'approcher deux nano-

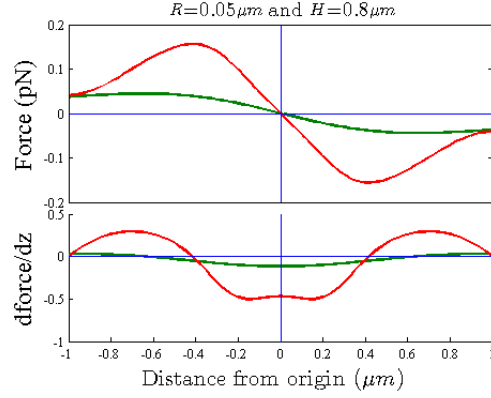


FIGURE 7.19: Force axiale (pN)  $F_z$  et rigidité axiale  $\partial F_z/dz$  en fonction du déplacement axial par rapport à l'équilibre pour un nanocylindre anisotrope où  $n_{xx} \neq n_{yy}$ ,  $R = 50$  nm,  $H = 800$  nm. Courbe rouge  $NA = 1.25$ , courbe verte  $NA = 1.15$ . Le champ incident corrigé est utilisé avec une polarisation circulaire à droite.  $n_{xx} = 1.57$   $n_{yy} = 1.87$  ou l'inverse  $n_{xx} = 1.87$   $n_{yy} = 1.57$  donne les mêmes résultats.

cylindres beaucoup plus près l'un de l'autre (dans l'axe optique) que les cas où l'ouverture numérique est faible.

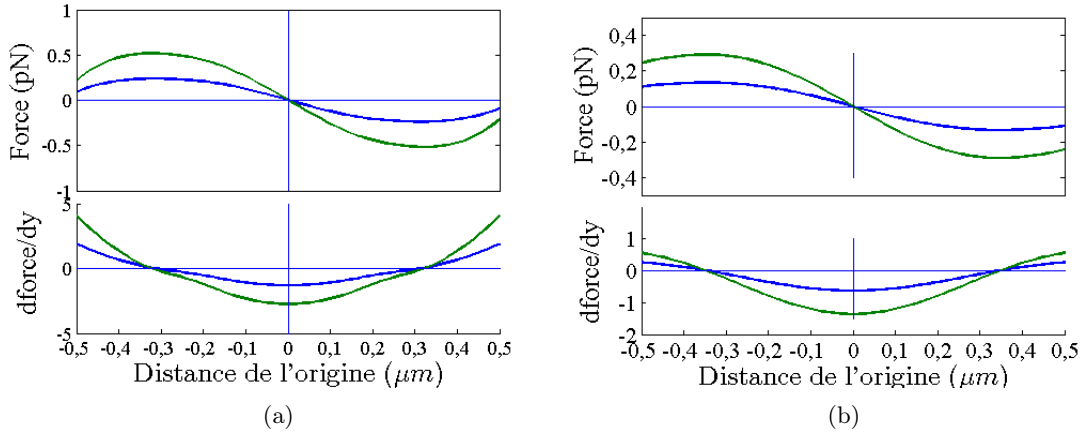


FIGURE 7.20: Force latérale (pN)  $F_y$  et rigidité latérale  $\partial F_y/dy$  en fonction du déplacement latéral en  $y$  par rapport à l'équilibre pour un nanocylindre où  $R = 50$  nm,  $H = 1$   $\mu$ m. (a)  $NA = 1.25$  (b)  $NA = 1.15$ . Le champ incident corrigé est utilisé avec une polarisation circulaire à droite. Les courbes bleues représentent des indices  $n_{xx} = 1.87$ ,  $n_{yy} = 1.57$ ,  $n_{zz} = 1.67$ . Les courbes vertes représentent des indices  $n_{xx} = 1.57$ ,  $n_{yy} = 1.87$ ,  $n_{zz} = 1.67$ .

De la même façon, les figures 7.20 montrent que le potentiel de force latéral est plus intense à  $NA = 1.25$  qu'à  $NA = 1.15$ . En effet, la rigidité et la force latérale augmentent avec l'ouverture numérique. Cependant, la largeur du potentiel latéral est très peu affectée par l'ouverture numérique comparativement à la largeur du potentiel axial. En effet, selon ces figures, à  $NA = 1.25$  il serait possible d'approcher deux nanocylindres à une distance latérale

de  $0.32 \mu\text{m}$  l'un de l'autre sans qu'ils ne tombent dans la même trappe optique alors que cette distance est à  $0.34 \mu\text{m}$  avec une  $NA = 1.15$ . Ceci donne donc une diminution du rayon d'action de la pince optique de 6% latéralement contrairement à 50% axialement.

Par ailleurs, il est aussi intéressant de constater que la force latérale selon  $y$  est plus importante lorsque la valeur de  $n_{yy}$  est plus grande. En effet, les figures 7.20, qui représentent la force latérale pour des indices  $n_{yy} \leq n_{xx}$  et  $n_{yy} \geq n_{xx}$ , montrent que lorsque  $n_{yy}$  augmente, la force selon  $y$  ( $F_y$ ) et la rigidité latérale selon  $y$  sont plus grandes comme on s'y attendait après l'étude du stress sur la surface effectuée ci-haut. Cependant, la largeur du potentiel de capture optique n'est pas affectée par les indices  $n_{yy} \geq n_{xx}$  ou  $n_{yy} \leq n_{xx}$ , mais seulement la rigidité de la capture optique. En effet, la largeur du potentiel est définie par l'endroit où la particule est considérée capturée ; c'est-à-dire lorsque  $\partial F_y / \partial y < 0$ . Les courbes représentant  $\partial F_y / \partial y$  des figures 7.20 coupent l'axe  $\partial F_y / \partial y = 0$  aux mêmes endroits peu importe les valeurs de  $n_{yy}$  ou  $n_{xx}$ .

Notons aussi que l'utilisation d'un tenseur d'indice de réfraction où les 3 indices sont différents comme dans le cas de l'objet bi-axial, des figures 7.20 n'ajoute pas de d'autres propriétés intéressantes dans la distribution de stress que celles étudiées pour les objets uni-axiaux. En effet, la particule ne fait que cumuler les propriétés déjà étudiées. Ainsi, si  $n_{xx} \neq n_{yy}$  une stabilité latérale et des forces latérales qui ne sont pas les mêmes dans toutes les directions est obtenue. Si on ajoute alors une valeur différente de  $n_{zz}$  cela ne fait qu'affecter les forces aux extrémités et donc la stabilité et les forces axiales. Ainsi, le stress appliqué aux extrémités doit être plus grand par rapport au stress sur les côtés, il convient d'utiliser  $n_{zz} > n_{xx}$  et  $n_{zz} > n_{yy}$ . De la même façon, si le stress ne doit pas être symétrique par rapport à l'axe optique, alors la condition  $n_{xx} \neq n_{yy}$  doit être respectée. La figure 7.21 représente le stress normal et tangentiel sur un tel nanocylindre.

Rappelons que le tenseur diélectrique peut toujours mathématiquement être exprimé sous une forme diagonale comme discuté à la section 4.1.6. Le cas des tenseurs quelconques peut aussi être intéressant lorsque les axes principaux des tenseurs diélectriques ne correspondent pas avec les axes principaux de la particule. Cependant, les résultats des calculs de force ou de stress n'apportent pas de différence physique visible par rapport aux calculs effectués avec la matrice diagonale. En effet, comme un tenseur diélectrique quelconque peut toujours être ramené à un tenseur diagonal, il fait du sens que les résultats soient semblables. Cependant, comme un tenseur diélectrique quelconque est en fait un tenseur diagonal qui a effectué une rotation, il est donc possible que les valeurs de torques soient affectées par un tenseur diélectrique non-diagonal. La prochaine section portera donc sur l'analyse des torques appliqués aux objets anisotropes.

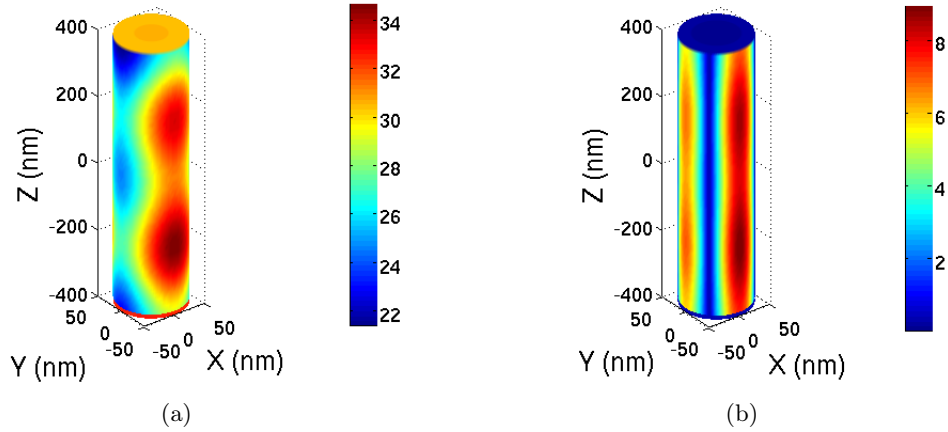


FIGURE 7.21: Distribution de stress sur un nanocylindre de  $R = 50$  nm,  $H = 800$  nm lorsque  $n_{xx} = 1.77$ ,  $n_{yy} = 1.57$ ,  $n_{zz} = 2$  pour une polarisation circulaire à droite. (a) composante normale (b) composante tangentielle

### 7.2.2 Torque

Comme dans le cas isotrope, la distribution de stress peut ne pas être uniforme sur le nanocylindre de façon à générer un torque qui va permettre d'effectuer une rotation selon l'angle  $\theta$  autour de l'axe  $z$  7.22(a) pour un torque que nous appellerons ici le torque de spin et autour de l'axe  $y$  7.22(b) lorsque le faisceau ou le nanocylindre est incliné dans le plan  $xz$ . Il faut noter qu'il est possible de générer un torque autour de l'axe  $x$  en inclinant le faisceau ou le nanocylindre dans le plan  $yz$ . Cependant, comme le faisceau et le nanocylindre sont symétriques en rotation, ces résultats seront nécessairement identiques au cas où l'inclinaison est dans le plan  $yz$ . Pour cette raison nous considérerons ici seulement le torque latéral selon  $y$ . Pour étudier la stabilité d'orientation des nanocylindres, on considère le cas où un nanocylindre est tourné de sa position d'équilibre d'un angle  $\theta$  à cause du mouvement brownien ou d'un autre phénomène mécanique. Comme la matrice de transfert dépend seulement des propriétés physiques de l'objet étudié, il est équivalent et plus simple d'effectuer une rotation au faisceau incident d'un angle  $\beta = -\theta$  dans le plan  $xz$ , tout en laissant le nanocylindre fixe comme montré à la figure 7.22(b). De cette façon, la matrice de transfert pour être réutilisée pour tous les angles  $\theta$  de rotation. Il faut cependant noter que le signe de  $\tau_y$  change. En effet, lorsque l'on tourne le faisceau de  $\beta = 10$  le torque est négatif alors que lorsque l'on tourne le nanocylindre  $\theta = -10$ , le torque est positif.

La figure 7.23(a), qui représente le torque  $\tau_y$  en fonction de l'inclinaison du nanocylindre dans le plan  $yz$ , montre que le torque  $\tau_y$  et la rigidité  $\partial\tau_y/\partial y$  –pente des courbes de torque– augmentent lorsque le tenseur d'indice de réfraction possède une valeur de  $n_{xx}$  qui augmente aussi. En effet, lorsque  $n_{xx}$  augmente, même si  $n_{yy}$  reste diminuée, le stress est plus important sur les côtés du nanocylindre qui font faces au plan  $yz$ . La figure 7.24(a), qui représente le



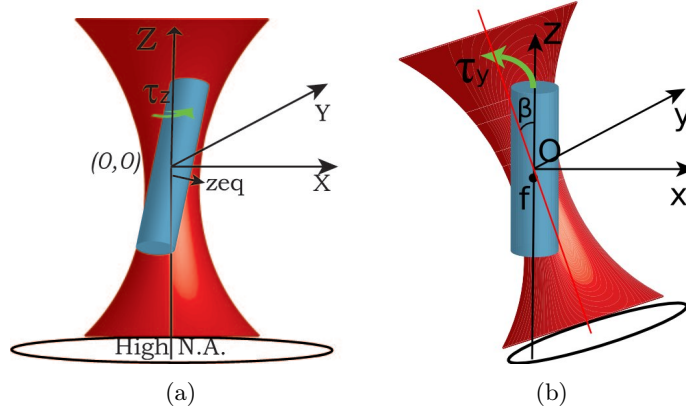


FIGURE 7.22: (a) Torque de spin  $\tau_z$ , (b) Torque latéral  $\tau_y < 0$

stress normal à la surface sur un nanocylindre où  $n_{xx} > n_{yy}$  et  $\theta = 37$ , montre ce phénomène. Comme le stress est normal à la surface, la partie du nanocylindre avec  $z > 0$  va générer un torque  $\tau_y < 0$  alors que la partie du bas ( $z < 0$ ) va générer un torque positif. Le stress étant plus intense dans la partie du haut à cause de l'inclinaison du faisceau, le torque total est négatif  $\tau_y < 0$ . De cette façon, le nanocylindre est ramené vers le faisceau incident. Ceci veut donc aussi dire que la stabilité angulaire de capture sera meilleure dans la direction de l'indice de réfraction qui est supérieur.

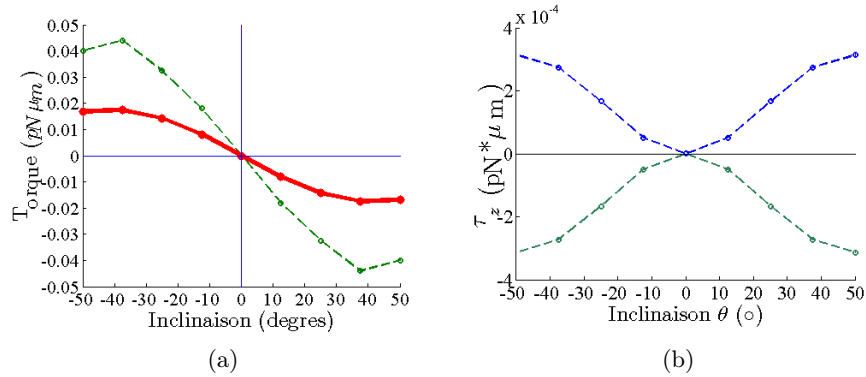


FIGURE 7.23: Torque appliqué sur un nanocylindre de  $R = 50$  nm,  $H = 700$  nm en fonction de l'inclinaison  $\theta$  dans le plan  $xz$  entre le faisceau et le nanocylindre lorsque le faisceau incident est polarisé circulairement à droite avec  $NA = 1.15$ . La figure (a) représente le torque selon l'axe  $y$   $\tau_y$  et (b) selon  $z$  ( $\tau_z$ ). La courbe rouge représente le torque lorsque le tenseur d'indice de réfraction est diagonal avec  $n_{xx} = n_{zz} = 1.57$  et  $n_{yy} = 1.87$ , la courbe verte le torque lorsque  $n_{xx} = 1.87$  et  $n_{yy} = n_{zz} = 1.57$ . La courbe (bleue) le cas de la polarisation circulaire à gauche.

Il est aussi important de rappeler que la polarisation du faisceau incident peut aussi produire le même phénomène; c'est-à-dire une asymétrie de la stabilité de capture. Nous avons pu

effectivement observer ce phénomène a plusieurs reprise dans les expériences faites sur les nanobarres de  $KNbO_3$ . À  $t=10s$ , ce [vidéo](#) montre la capture d'un nanobarre. On peut voir que la capture est instable et que le nanobarre vibre. Cependant, cette vibration est plus prononcée et important dans une seule direction qui semble ici presque verticale. Ceci est identique à ce que le calcul du torque et des forces de la section précédente ont prédit. Pour la réalisation de ce vidéo, on note que la direction des vecteurs propres du tenseur diélectrique du nanobarres sont inconnus. De plus, compte tenu de la résolution maximale, on ne peut évaluer la longueur ni le rayon de ce dernier. On sait cependant qu'un seul nanobarre était capturé, que la polarisation du faisceau incident était linéaire et que  $NA=1.25$ . Ceci veut donc dire que le profil de distribution du champ électrique était asymétrique comme discuté à la section 5.1.2. Notez qu'à  $t=15s$  le faisceau laser est arrêté une fraction de seconde pour montrer le mouvement brownien lorsqu'aucun faisceau n'est présent. Les autres détails techniques des expériences faites sont disponibles à la section 2.

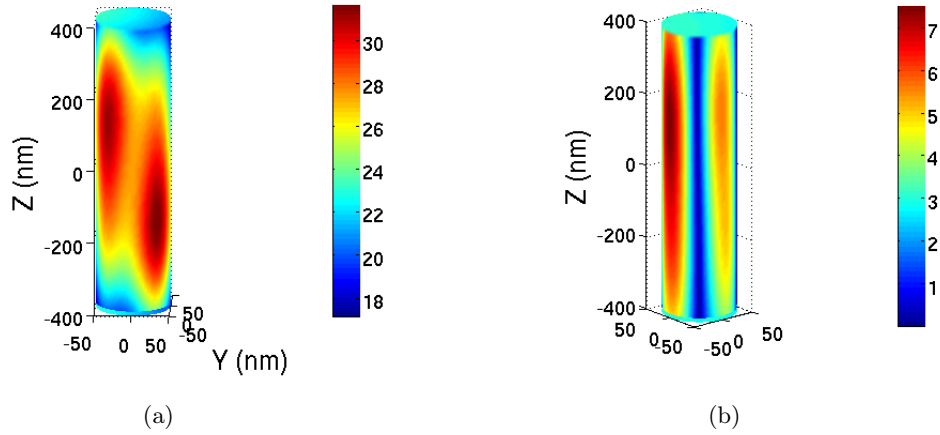


FIGURE 7.24: Distribution de stress (a) normal et (b) tangentiel sur un nanocylindre avec  $n_{xx} = 1.87, n_{yy} = n_{zz} = 1.57$  lorsque le faisceau est incliné de  $37^\circ$  dans le plan  $yz$  avec  $NA=1.25$ . La flèche représente la direction du faisceau incident.

Quant à elle, la figure 7.23(b) nous montre le torque  $\tau_z$  à mesure que le faisceau est incliné dans le plan  $xz$ . Notons que l'axe optique de la particule est perpendiculaire à l'axe de propagation du faisceau. Comme dans le cas isotrope, le torque selon  $z$  ( $\tau_z$ , spin torque) est beaucoup plus faible que le torque latéral. Il est aussi intéressant de mentionner que le torque  $\tau_z$  est nul lorsque l'axe long du nanocylindre est aligné avec l'axe du faisceau (inclinaison= $0^\circ$ ), même lorsque l'axe optique de la particule n'est pas aligné avec l'axe de propagation du faisceau gaussien. Ceci peut paraître contradictoire à la référence (Singer , 2006) qui mentionne que lorsque l'axe optique de la particule biréfringente n'est pas alignée avec l'axe du faisceau, la particule agit comme une «wave plate» qui va changer la polarisation de la lumière incidente et ainsi générer un torque. L'explication à ceci vient du fait que pour les petites particules, la force due à la forme physique du nanobarre surpasse de beaucoup la force provenant de la polarisation. En

effet, la référence (Singer , 2006) étudie les particules de plus de  $5\ \mu\text{m}$  de diamètre alors qu'ici, les particules ont un rayon de  $0.2\ \mu\text{m}$  au maximum. Dans notre cas, l'interaction du faisceau avec la particule est plus faible ce qui fait que la particule agit beaucoup moins comme une «wave plate». En effet, comme nous avons mentionné à la section 5.1.3 pour un nanobarre, le champ dispersé peut représenter 3.3% du champ total seulement. Ceci veut donc dire que le changement de polarisation est marginal et donc que le torque résultant aussi. On peut en déduire que la polarisation du faisceau incident sera peut affectée par la présence d'un nanobarre anisotrope.

De plus, les références faites par (Nakayama , 2007b; Grange , 2009) abondent dans le même sens puisque selon leurs expériences, les nanobarres n'effectuent pas de rotation autour l'axe du faisceau incident. Précisons que leurs expériences utilisent des nanobarres biréfringents d'une taille très similaire à celle de la figure 7.23(b). Ainsi, même si un stress tangentiel s'applique à la surface du nanocylindre comme montré à la figure 7.24(b), la somme de toutes les composantes de stress à la surface s'annulent pour ne donner qu'un torque de spin très petit. Notons aussi que ce torque est bien dépendant de la polarisation du faisceau comme rapporté à la référence (Sheu , 2010) puisque, comme le montre la figure 7.23(b), représentant le torque  $\tau_z$  pour une polarisation circulaire à gauche et à droite, la direction dans laquelle le nanocylindre va tourner dépend de la polarisation. Dans le cas de la polarisation circulaire à droite, le  $\tau_z < 0$  ce qui est bien une rotation vers la droite et dans le cas de la polarisation circulaire à gauche  $\tau_z > 0$  ce qui donne une rotation vers la gauche.

Comme les stress tangentiels donnent naissance à des torques de spin et que cette composante est petite comparé au torque latéral, cela veut donc dire que le torque généré par le stress tangentiel s'annule en partie pour ne rester qu'une petite composante de torque  $\tau_z$  qui est de l'ordre de  $10^{-4}$ . En effet, la figure 7.25(a) donnant la direction du stress tangentiel vu dans le plan  $xy$  montre que le stress tangentiel est appliqué dans des directions opposées et de mêmes grandeurs à des positions diamétralement opposées du nanocylindre. Par exemple, les torques appliqués par les stress tangentiels dans la direction A sont annulés en partie par les torques appliqué par les stress tangentiels dans la direction B. Le même phénomène se reproduit avec les stress dans la partie C et D.

Par ailleurs, la figure 7.25(b), qui donne une vue en 3D de la direction du stress dans la direction A et B, montre que le stress tangentiel n'est pas constant à tous les plans parallèles  $xy$  à mesure que  $z$  varie. Les stress tangentiels sont plus intenses au centre du nanocylindre puisque c'est à cet endroit que le faisceau est le plus focalisé. De plus, le torque total résultant de toutes les directions de stress tangentiel n'est totalement nul à chaque plan  $xy$ . La figure 7.25(c) représente le torque de spin –normalisé sur la valeur maximal– à chaque plan parallèle  $xy$  en fonction de la position sur le nanocylindre en  $z$ . Cette figure montre que le torque résultant généré par les plans  $xy$  avec  $z > 0$  génèrent des torques  $\tau_z > 0$  alors que ceux avec  $z < 0$  génèrent des torques dans la direction opposée  $\tau_z < 0$ . Ceci veut donc dire qu'une

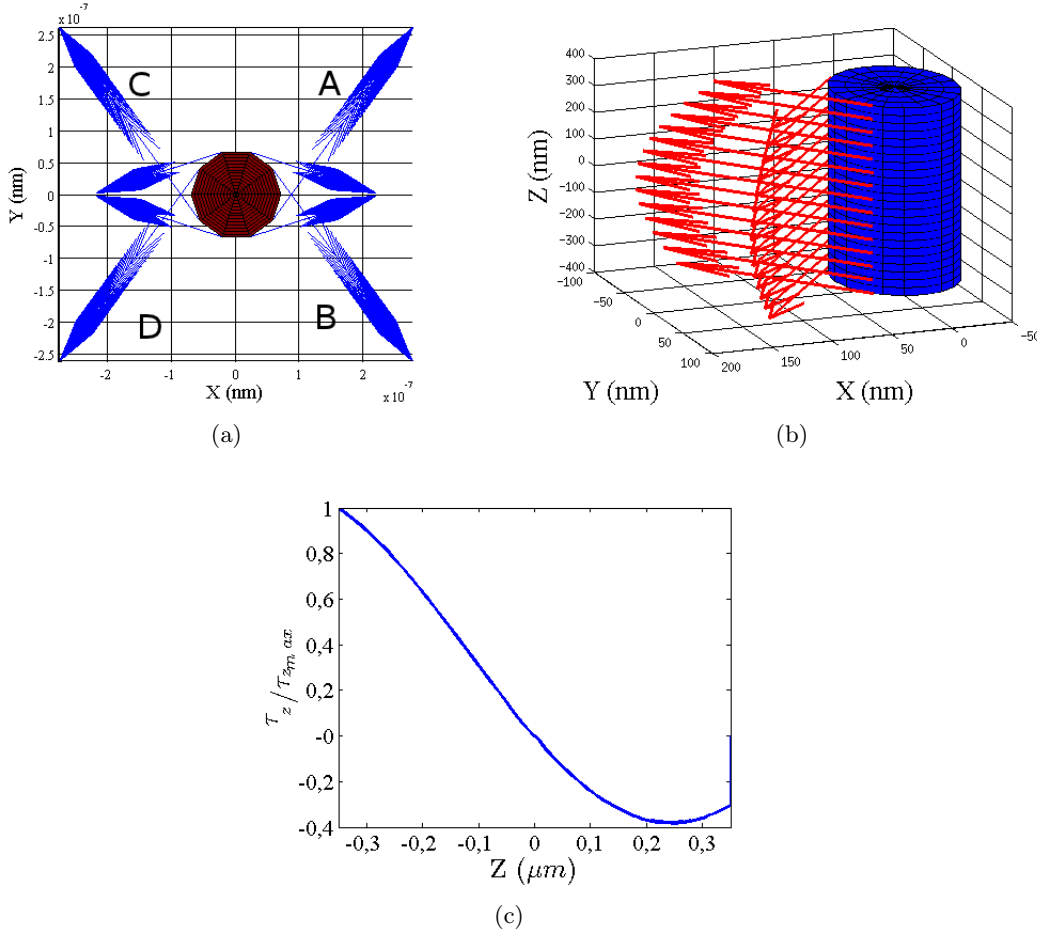


FIGURE 7.25: Direction du stress tangentiel à des intervalles régulièrement espacés sur la surface du nanocylindre lorsque  $R = 70 \text{ nm}$ ,  $H = 1 \mu\text{m}$ , l'inclinaison est  $37^\circ$  dans le plan  $yz$  et la polarisation est circulaire à droite.  $n_{xx} = 1.87, n_{yy} = n_{zz} = 1.57$ . La longueur des flèches représente une intensité relative du stress tangentiel. (a) est une vue selon le plan  $xy$ , (b) est une vue en des direction A et B en 3D (c) torque total  $\tau_z$  normalisé résultant à chaque plan  $xy$  en fonction de  $z$

contrainte de torsion est appliquée à l'intérieur même du nanocylindre lorsqu'il est incliné. En effet, le haut du nanocylindre tend à tourner dans une direction alors que le bas cherche à tourner dans la direction opposée. Le profil de torque sur la surface du nanocylindre de la figure 7.25(c) est asymétrique puisque la partie avec  $z < 0$  génère des valeurs de torques  $\tau_z$  qui sont plus grandes que les valeurs de torques de la partie  $z > 0$ . La somme de tous les torques à tous les plans parallèles  $xy$  génère donc un torque total de  $\tau_z = +3.08 \times 10^{-4} pN \mu\text{m}$ . Similairement, la partie de la figure 7.25(c) où  $z > 0$  génère un torque négatif qui est contrebalancé. Cette partie génère donc une torsion  $\tau_s = -3.7 \times 10^{-4} pN \mu\text{m}$ . Ainsi, un objet anisotrope mou pourrait être tordu par un faisceau laser hautement focalisé si un stress tangentiel était présent ; c'est-à-dire si  $n_{xx} \neq n_{yy}$ .

Physiquement, le torque de spin est petit même si des stress tangentiels existent puisque les parties du nanocylindres où le faisceau incident est convergent ( $z < 0$ ) génèrent des torques de spin dans la direction opposée aux parties où le faisceau incident est divergent ( $z > 0$ ). Comme la dispersion du faisceau par le nanocylindre amène une asymétrie du profil de faisceau entre  $z < 0$  et  $z > 0$ ; c'est-à-dire entre la partie convergente du faisceau et la partie divergente, le torque total n'est pas nulle et une torsion est créée.

### Cristal tourné

La Figure 7.28 montre le torque appliqué sur un nanobarre de  $KNbO_3$  en fonction de l'angle d'incidence du faisceau laser. Dans la Figure 7.26(a) le torque est calculé pour un nanobarre donc le tenseur diélectrique est donné par

$$n_2 = \begin{bmatrix} 2.2195 & 0 & 0 \\ 0 & 2.2576 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1194 \end{bmatrix}$$

tandis que dans la la Figure 7.26(b) le tenseur diélectrique a subit une rotation de  $\theta = -25$  en utilisant la première matrice de rotation des équations 4.1.50, ce qui donne un tenseur diélectrique représenté par

$$n'_2 = \begin{bmatrix} 2.0116 & 0 & -0.8957 \\ 0 & 2.2576 & 0 \\ 0.9380 & 0 & 1.9208 \end{bmatrix}$$

Le premier tenseur représente donc le tenseur d'indice de réfraction du  $KNbO_3$  lorsque ses axes propres sont alignés avec le système de coordonnées du laboratoire. Le second tenseur simule le cas où les axes propres du tenseur d'indice de réfraction du  $KNbO_3$  ne sont pas aligné avec le système de coordonnées du laboratoire.

En comparant la valeur absolue du torque et de la rigidité angulaire des figures 7.26(a) et 7.26(b), il est possible de voir que le torque et la rigidité angulaire (dérivée du torque) diminuent dans le cas où le tenseur n'est plus diagonal. Ainsi, la stabilité angulaire du nanocylindre est meilleure quand les axes principaux du cristal correspondent avec les axes principaux du cylindre, qui sont ici, les axes X, Y et Z.

L'autre point important à remarquer est que, pour le cas du tenseur diagonal de la figure 7.26(a), la position angulaire d'équilibre est à  $\theta = 0$ , car le torque est nul et la dérivée du torque est minimale à cet endroit (voir section 6.4). D'un autre côté, dans le cas où le tenseur a subit une rotation de  $25^\circ$  comme à la figure 7.26(b), la position angulaire d'équilibre est à  $\theta = -19.5$  si  $H = 700$  nm,  $\theta = -15$  si  $H = 800$  nm et à  $\theta = -3$  si  $H=1$   $\mu$ m. En effet, à ces points respectifs, le torque est nul et la dérivée du torque est négative.

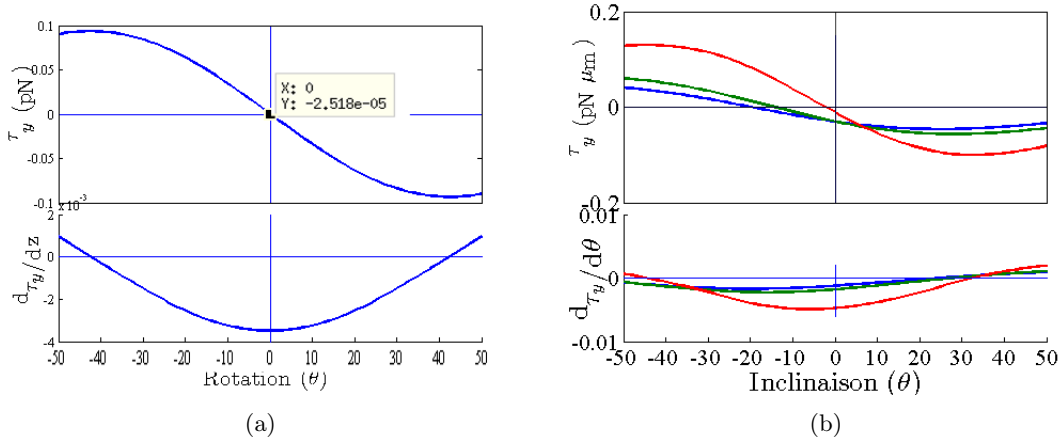


FIGURE 7.26: Torque en  $\text{pN } \mu\text{m}^{-1}$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  du faisceau laser appliqué sur un nanocylindre de longueur  $H = 800$  nm et un rayon  $R = 50$  nm calculé avec (a) un tenseur diélectrique diagonal donné par  $n_2$ . (b) le tenseur  $n_2$  qui a subi une rotation de  $\theta = 25$  de son système d'axe d'axe où la courbe bleue représente  $H = 700$  nm, la courbe verte  $H = 800$  nm et la courbe rouge  $H = 1$   $\mu\text{m}$ . Le rayon est constant à  $R = 50$  nm.

Lorsque le tenseur diélectrique est diagonal et que le faisceau gaussien est aligné selon l'axe  $z$ , la distribution du stress normale à la surface est toujours symétrique par rapport à l'axe  $z = 0$  du système de coordonnées; c'est-à-dire que le stress d'un côté de l'axe  $z = 0$  d'un objet est contre-balané par le torque généré de l'autre côté de l'axe  $z = 0$  du même objet comme montré à la figure 7.18(a). La position angulaire d'équilibre est donc à  $\theta = 0$  comme le montre la Figure 7.26(a) représentant la variation du torque en fonction de l'angle  $\theta$  du faisceau incident pour un cylindre dont le tenseur diélectrique est diagonal.

Cependant, lorsque le tenseur n'est pas diagonal, alors le système de coordonnées ne correspond pas aux vecteurs propres du tenseur diélectrique. En effet, les vecteurs propres du tenseur diélectrique on subit une rotation. Cela est donc similaire au cas où le nanocylindre lui-même aurait subi une rotation dans le système de coordonnées. Un torque est donc généré et la position d'équilibre angulaire de l'objet n'est plus à  $\theta = 0$ . En effet, la figure 7.26(b), qui représente le torque latéral en fonction de  $\theta$  pour un tenseur diélectrique diagonal qui a subi une rotation de  $\theta = -25$ , montre que la position angulaire d'équilibre n'est plus à 0, mais qu'elle dépend de la longueur. De la même façon, la figure 7.27(b), qui représente la distribution de stress sur la surface d'un nanocylindre dont le tenseur diagonal est donné par  $n'_2$  -tourné de  $-25^\circ$  selon  $\theta$ -, montre que le stress n'est plus distribué également de part et d'autre de l'axe  $z = 0$ . En effet, le stress normal à la surface est plus élevé dans la partie  $z > 0$  que dans la partie  $z < 0$  ce qui va générer un torque net  $\tau_y < 0$ .

On peut donc déduire que les nanocylindres tendent à aligner leur axe long avec l'axe optique, comme montré dans les sections précédentes, mais en même temps ils tendent à aligner leurs

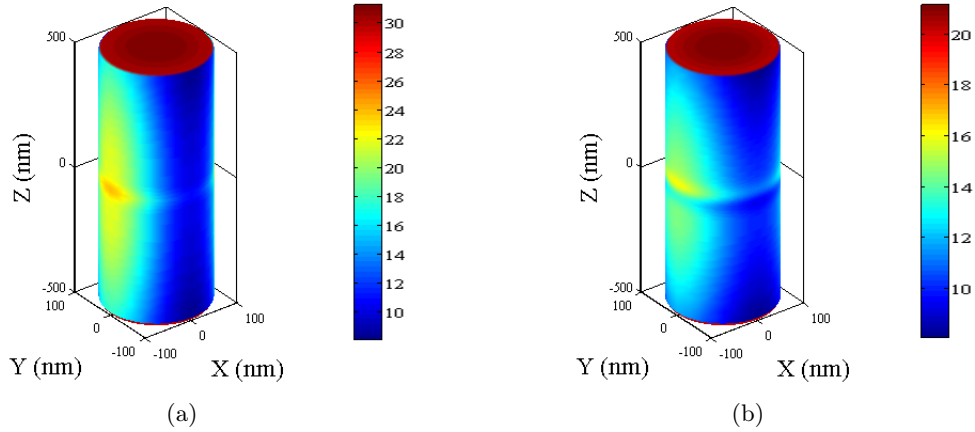


FIGURE 7.27: Stress normal à la surface sur un nanocylindre aligné avec le faisceau incident ( $\theta = 0$ ) lorsque le nanocylindre possède La longueur et  $H = 1000$  nm et le rayon  $R = 100$  nm (a) un tenseur diélectrique diagonal donné par  $n_2$ (b) le tenseur  $n_2$  qui a subi une rotation de  $\theta = 25$  de son système d'axe ( $\theta$  donc  $n'_2$ )

vecteurs propre du tenseur diélectrique avec le système de coordonnées du faisceau incident. Cependant, le torque généré par la rotation du tenseur diélectrique dépend faiblement de la longueur du nanobarre alors que le torque latéral dépend fortement de la longueur du nanobarre. Lorsque le nanobarre est long la position d'équilibre  $\theta \rightarrow 0$  comme montré à la figure 7.26(b) pour  $H=1 \mu\text{m}$ . Inversement, lorsque le nanobarre est plus courts la position d'équilibre tend vers  $\theta = -25$  qui correspond à l'angle de rotation du tenseur diélectrique.

Ainsi, l'alignement avec l'axe long du nanocylindre et l'alignement avec le système de coordonnées du tenseur diélectrique génèrent tous les deux des torques contraires l'un à l'autre, la position d'équilibre n'est ni à l'une ni à l'autre position ; c.-a-d. ni  $0^\circ$  pour l'axe long ni  $25^\circ$  pour les vecteurs propres. Il est important de noter que la longueur du nanocylindre et le degré de rotation du tenseur diélectrique influencent tous les deux la position à laquelle le nanocylindre sera capturé.

Lors des expériences faites en laboratoire comme décrites à la section 2, nous avons effectivement pu remarquer que certain nanobarres anisotropes ne s'alignaient pas avec l'axe du faisceau incident. En effet, la figure 7.28(a) montre un nanobarre non capturé qui est complètement perpendiculaire à l'axe du faisceau. D'un autre côté, la figure 7.28(b) montre un nanobarre capturé avec un certain angle  $\theta > 0$ . Cet angle  $\theta$  de capture dépend des propriétés diélectriques et physiques de chaque nanobarre puisque celui de la figure 7.28(c) montre un angle de capture  $\theta \rightarrow 0$ . Si ce nanobarre avait été capturé et directement aligné avec l'axe optique, la figure de capture du nanobarre aurait seulement montré une tâche d'Airy puisque la résolution maximale du système est de 273 nm et les nanobarres ont un diamètre maximal de 150 nm.

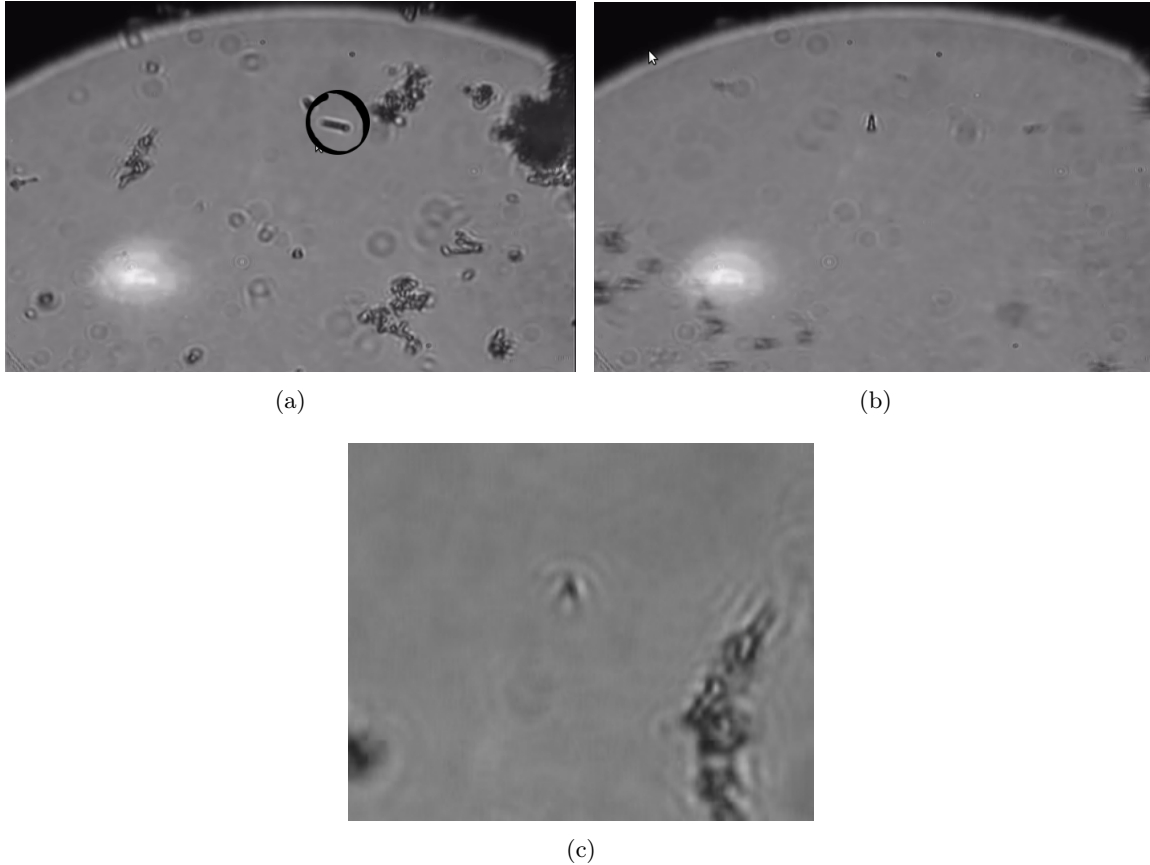


FIGURE 7.28: Image de nanobâres de  $KNbO_3$  de  $R \approx 75$  nm et  $H \approx 1$   $\mu$ m (a) nanobarre non capturé perpendiculaire au faisceau incident. (b) nanobarre capturé avec un angle  $\theta > 0$  (c) nanobarre capturé avec un angle  $\theta \rightarrow 0$ .

Ces expériences ont été réalisées avec une pince optique unique où un laser à fibre émettant à  $\lambda = 1.064$  nm est focalisé en utilisant un objectif avec  $NA=1.25$ . Le système de détection utilise le principe de contraste de phase. En utilisant le même objectif de capture pour le système de détection couplé à un condenseur avec  $NA=1.20$  et une lumière d'illumination blanche on a pu obtenir une résolution maximale de 273 nm. Une puissance laser de 200mW et une polarisation linéaire ont été utilisées pour la capture.

Il faut du sens de penser que la croissance des nanobâres n'était pas constante et que certains d'entre eux avaient des vecteurs propres de leur tenseur diélectrique qui n'étaient pas identiques aux autres d'où la position angulaire d'équilibre différente. Pour en être certain, il aurait fallu faire une étude de la configuration atomique des nanobâres de  $KNbO_3$  avec un bombardement de rayons x. De cette façon, il aurait été possible de savoir comment les axes principaux du tenseur diélectrique sont organisés en fonction des paramètres physiques du nanobarre. Cependant, on peut penser que chaque nanobarre peut ne pas être complètement identique aux autres. De cette façon, chaque particule peut posséder un tenseur diélectrique légèrement



différent par rapport au système de coordonnées du laboratoire.

Il est aussi probable que tous les nanobares avaient des propriétés diélectriques identiques et n'avaient donc pas des tenseurs diélectriques diagonal dans le référentiel du laboratoire. De cette façon, les nanobares les plus longs sont capturés avec des angles  $\theta \rightarrow 0$  et les nanobares les plus courts avec  $\theta > 0$ .

## Chapitre 8

# Conclusion

Nous avons utilisé la méthode de la matrice de transfert pour analyser les paramètres de capture optique de nanobarres. La méthode de "point-matching" a été utilisée pour le calcul de l'expansion en série de VSWF du champ incident hautement focalisé ainsi que pour le calcul de la matrice de transfert. Pour le calcul de la matrice de transfert, les conditions aux frontières normales et tangentielles ont été analysées pour construire le système d'équations de la méthode de "point-matching". Nous avons pu démontrer que les conditions aux frontières normales permettaient de calculer la matrice de transfert pour les cas où la particule d'intérêt est anisotrope. Les résultats obtenus ont été comparés avec un logiciel FDTD commercial et ont montré une bonne corrélation. Le programme d'exportation automatisé conçu sous Linux est disponible en annexe C. De plus, nous avons comparé les résultats obtenus dans le cas d'une particule sphérique beaucoup plus grande que la longueur d'onde à la référence (Rancourt-Grenier, 2010). La comparaison a été réalisée avec la méthode FDTD, la méthode du tracé de rayon et la théorie de Mie. Dans tous les cas, les résultats obtenus étaient similaires.

L'étude complète du champ hautement focalisé a été faite pour s'assurer que le faisceau simulé était de bonne qualité. Les corrections jusqu'au 9e ordre à l'équation paraxiale du faisceau gaussien ont été évaluées et la divergence de ces corrections sous certaines conditions a été mise en évidence. La précision de ces équations a été évaluée par un remplacement direct dans les équations de Maxwell et par une comparaison avec les résultats expérimentaux d'accélération d'électrons. La correction au 7e ordre a été choisie comme le meilleur choix pour la comparaison des profils du champ incident.

Pour le calcul du champ incident, diverses méthodes ont été évaluées. Pour des  $NA \leq 1.15$ , nous avons conclu que la méthode de point matching dans le champ lointain pouvait être utilisée. Pour plus de précision, nous avons amélioré la méthode d'expansion dans le champ proche en utilisant une description corrigée du champ incident. Pour encore plus de précision, jusqu'à des  $NA \leq 1.20$ , nous avons développé une méthode hybride d'expansion en VSWF du champ incident. Pour des simulations à  $NA > 1.20$ , nous avons démontré qu'il était possible

d'utiliser une correction à très haute focalisation du champ incident pour obtenir une parfaite représentation du champ incident à toutes les ouvertures numériques. Il convient de préciser que la précision de ce type de correction dépend du rayon de la particule. On suggère d'utiliser cette méthode pour des nanobâres plus petit que  $R = 300$  nm.

Afin de faire ressortir l'aspect physique des captures optiques, nous avons calculé la distribution de stress sur la surface de différents nanocylindres isotropes ou anisotropes de différentes longueurs, de différents rayons, à des  $NA$  différentes, à différents degrés d'inclinaisons entre le faisceau incident et le nanocylindre et à différentes positions du point focal du faisceau incident. De son côté, l'équation pour le calcul du stress a été dérivée à partir du tenseur de Maxwell. De façon similaire, et en utilisant beaucoup de relations de récursions entre les fonctions de Legendre et des principes d'orthogonalités, on peut trouver les équations analytiques pour le calcul des forces et des torques appliqués. Cependant, ces équations permettent difficilement de voir l'interaction physique entre le faisceau incident et la particule. Ainsi, à partir du stress sur la surface de la particule, on peut réaliser diverses intégrales sur la surface qui permettent de calculer les forces totales et les torques dans toutes les directions.

Nous avons étudié la stabilité de la capture optique de nanocylindres qui sont bougés et inclinés par rapport au faisceau à cause du mouvement Brownien en calculant la rigidité des forces et des torques appliqués par la pince optique. Nous avons montré la dépendance de la rigidité en fonction de la longueur et du rayon pour les forces latérales et axiales. La barrière d'énergie nécessaire pour qu'un nanocylindre isotrope échappe à la pince optique diminue à mesure que la longueur augmente. Ainsi, les nanocylindres trop longs ne peuvent être capturés totalement. Nous avons aussi trouvé que la rigidité de la force latérale est plusieurs fois plus grande que la rigidité de la force axiale. Nous avons montré que la rigidité des forces augmentait avec le rayon des nanocylindres et avec l'ouverture numérique.

Nous avons aussi démontré que les potentiels de capture optique étaient plus étroits lorsqu'une plus grande ouverture numérique était utilisée. Ainsi, dans le cas où deux particules isotropes devraient se rapprocher très près l'une de l'autre, il peut être utile d'utiliser une ouverture numérique la plus grande possible. Nous avons pu démontrer qu'à  $NA = 1.25$  deux particules pouvaient s'approcher d'une distance axiale de 520 nm alors que cette distance est de 650 nm à  $NA=1.10$ . D'un autre côté, dans la direction radiale, la distance d'approche maximale est de 380 nm lorsque  $NA=1.1$  et subit une diminution de 60 nm lorsque l'on passe de  $NA=1.10$  à  $NA=1.25$ . Dans le cas des particules anisotropes, la distance axiale serait de 600 nm à  $NA=1.15$  et de 400 nm à  $NA = 1.25$  alors que la distance latérale varie peu dans le cas anisotrope. On peut espérer passer de 340 nm à  $NA=1.15$  à 320 nm à  $NA=1.25$  dans la direction latérale. La largeur du potentiel optique n'est pas affectée par la valeur absolue des indices de réfractifs

De la même façon, pour certaines expériences, il peut être plus judicieux d'utiliser une polarisation linéaire. En effet, dans le cas où plusieurs particules seraient alignées avec une pince

optique holographique ou avec modulateur acousto-optique, il peut être intéressant d’avoir une focalisation plus intense dans la direction de l’alignement des nanocylindres pour éviter que le faisceau incident affecte deux nanocylindres à la fois et que ceux-ci se ramassent dans le même faisceau. En effet, on a pu démontrer que la pince optique était plus stable dans la direction perpendiculaire à la polarisation pour les objets isotropes et anisotropes. De la même façon, si la pince optique doit être utilisée comme une sonde pour de l’imagerie sous longueur d’onde, la stabilité doit alors être identique dans toutes les directions ce qui impose l’utilisation d’une polarisation circulaire.

Nous avons aussi pu démontrer que la stabilité d’orientation des nanocylindres dépend surtout du torque généré sur les côté du nanobarre puisqu’il est 1-2 ordres de grandeur de plus que le torque généré sur les extrémités. Le torque appliqué sur les extrémités est positif et celui appliqué sur les côtés est négatif. Ainsi, pour les nanocylindres de faible ratio  $H/2R < 2$ , le torque positif appliqué sur les extrémités peut dépasser le torque appliqué sur les côtés et donc le torque total devient positif ce qui change l’alignement de la particule. En effet, ces particules peuvent être stables lorsqu’elles sont alignées perpendiculairement à l’axe du faisceau.

De son côté, le torque de spin est 2-3 ordres de grandeur plus faible que le torque latéral, même dans le cas où la particule est anisotrope. Cependant, pour des particules de ratio  $H/2R < 2$  le torque de spin peut être comparable au torque latéral. De plus, il faut noter que dans le cas anisotrope, même si le torque de spin est très faible, ce dernier donne naissance à une force de torsion du nanocylindre. Notons aussi que dans le cas où  $n_{xx} = n_{yy}$  le stress est symétrique en rotation par rapport à l’axe  $z$  même si  $n_{zz}$  est différent.

Les particules anisotropes causent aussi une asymétrie dans les forces et rigidités des torques ce qui fait qu’elles peuvent être capturées moins stablement dans une direction que dans l’autre. Ceci a aussi pu être observé expérimentalement. De plus, une des propriétés les plus intéressantes des nanocylindres anisotropes est qu’ils peuvent être capturés à des angles différents par rapport au faisceau incident lorsque les axes principaux du tenseur diélectrique ne correspondent pas avec les axes physiques du nanocylindre. Cette affirmation n’a pu être vérifiée hors de tout doute dans les expériences de capture de nanobarres effectuées puisque la résolution du système optique était insuffisante, mais elles semblent pointer dans la bonne direction.

Trois méthodes de description du champ incident ont été étudiées en détail. Toutes permettent d’effectuer une translation dans les trois dimensions. La méthode la plus précise est sans conteste la correction à très haute focalisation du faisceau incident. Cependant, elle ne peut être utilisée pour simuler une inclination du faisceau incident. Quant à elle, l’expansion dans le champ lointain donne des bons résultats pour une ouverture numérique  $NA < 1.15$ . L’expansion au plan focal peut améliorer la précision des résultats, mais l’expansion dans le champ proche hybride donne les meilleurs résultats jusqu’à  $NA = 1.20$ . Dans tous les cas, la méthode

de la correction aux hautes NA peut être utilisée pour étendre la validité de description du champ à des NA plus grande et améliorer la précision des calculs.

Parallèlement, deux méthodes de calcul de la matrice de transfert ont été étudiées. Les deux méthodes utilisent un algorithme de point matching pour résoudre la matrice, mais dans un cas les conditions aux frontières tangentiels sont utilisées et dans l'autre les conditions normales. Nous avons pu démontrer que les conditions normales permettaient d'introduire l'anisotropie de la particule tout en donnant des valeurs équivalentes pour les particules isotropes. Il est important de noter que ces résultats ont été obtenus pour des objets dont le ratio  $H/2R < 20$  puisque la méthode de la matrice de transfert n'est pas assez précise pour des objets dont le ratio est plus grand (Mishchenko , 2002). Les résultats obtenus sur un nanocylindre anisotrope ont aussi été comparés avec un logiciel commercial de FDTD. En utilisant une forme approximative de faisceau incident, le logiciel de calcul numérique vient supporter les calculs faits avec la méthode la matrice de transfert.

Par ailleurs, les expériences réalisées sur une pince optique ont démontré qu'il est possible de capturer des nanobarres avec une  $NA = 1.25$  et une longueur d'onde de  $\lambda = 1.064 \mu\text{mm}$  et d'obtenir une résolution minimalement acceptable pour ce type d'expérience avec un condenseur de  $NA = 1.20$ . Cependant, les recommandations pour ce type d'expérience seraient d'utiliser une ouverture numérique plus importante pour le condenseur et pour l'objectif de la pince optique pour maximiser la résolution du système optique et la stabilité de la capture. Dans la même lignée, il est aussi préférable d'utiliser une illumination monochromatique à faible longueur d'onde pour obtenir la résolution la plus précise possible. Finalement, une sonification d'une heure est recommandée pour permettre de disperser les nanobarres. Un autre avantage d'utiliser une  $NA$  plus élevée dans une pince optique est de permettre à l'utilisateur de pouvoir capturer des nanocylindres sans affecter les autres aux alentours et d'éviter que plusieurs particules tombent dans le même faisceau de capture.

## Annexe A

# Symétrie du tenseur diélectrique

En suivant la démarche effectuée au chapitre 15.1 de (Born Wolf, 2000), on peut facilement prouver que le tenseur diélectrique est toujours symétrique et donc qu'on peut toujours trouver un système de coordonnées dans lequel, le tenseur diélectrique, est toujours diagonal.

Les équations de Maxwell sont données par les équations suivantes

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= +\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{A.0.1}$$

En utilisant les deux premières équations, on peut dire que

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = +\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{A.0.2}$$

où l'identité suivante peut être utilisée.

$$\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = -\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})\tag{A.0.3}$$

On obtient donc

$$-\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = +\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{A.0.4}$$

en substituant l'équation pour le vecteur de Poynting  $S = \vec{E} \times \vec{H}$  on a

$$-\nabla \cdot \vec{S} = +\vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\tag{A.0.5}$$

Ainsi chaque terme à droite de l'égalité de l'équation A.0.5 représente le taux de variation du flux d'énergie électromagnétique. On peut donc en déduire que  $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  doit représenter le taux

de variation du flux d'énergie électrique (  $\frac{dw_E}{dt}$  ), on a

$$\frac{dw_E}{dt} = \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{A.0.6})$$

$$= \sum_{kl} E_k \epsilon_{kl} \frac{\partial E_l}{\partial t} \quad (\text{A.0.7})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kl} \epsilon_{kl} \left( E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} + \frac{\partial E_k}{\partial t} E_l \right) \quad (\text{A.0.8})$$

où  $k$  et  $l$  désignent tous les deux  $x, y, z$  Ainsi, on peut donc aussi écrire que

$$\frac{1}{2} \sum_{kl} \epsilon_{kl} E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \epsilon_{kl} \frac{\partial E_k}{\partial t} E_l \quad (\text{A.0.9})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{kl} \epsilon_{kl} \frac{\partial E_l}{\partial t} E_k \quad (\text{A.0.10})$$

On peut donc aussi dire que

$$\sum_{kl} \epsilon_{kl} E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} = \sum_{kl} \epsilon_{lk} E_k \frac{\partial E_l}{\partial t} \quad (\text{A.0.11})$$

vu que  $k$  et  $l$  sont des indices muets ce qui revient à dire que  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$  et donc que le tenseur diélectrique est symétrique.

## Annexe B

# Tenseur de Maxwell

Si on écrit le tenseur de Maxwell 6.1.1 sous une forme matricielle et en coordonnées sphériques on obtient

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{rr} & \Gamma_{r\theta} & \Gamma_{r\phi} \\ \Gamma_{\theta r} & \Gamma_{\theta\theta} & \Gamma_{\theta\phi} \\ \Gamma_{\phi r} & \Gamma_{\phi\theta} & \Gamma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

En coordonnées sphériques, le champ électrique est représenté, sous forme vectorielle, par  $\vec{E} = \begin{bmatrix} E_r & E_\theta & E_\phi \end{bmatrix}$ . On peut donc réécrire chacune des composantes de l'équation B.0.1 selon

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr} &= \frac{1}{2}\epsilon \left( \mathbf{E}_r \mathbf{E}_r^* - E_\theta E_\theta^* - E_\phi E_\phi^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_r H_r^* - H_\theta H_\theta^* - H_\phi H_\phi^* \right) \\ \Gamma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}\epsilon \left( \mathbf{E}_\theta \mathbf{E}_\theta^* - E_r E_r^* - E_\phi E_\phi^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_\theta H_\theta^* - H_r H_r^* - H_\phi H_\phi^* \right) \\ \Gamma_{\phi\phi} &= \frac{1}{2}\epsilon \left( \mathbf{E}_\phi \mathbf{E}_\phi^* - E_r E_r^* - E_\theta E_\theta^* \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( H_\phi H_\phi^* - H_r H_r^* - H_\theta H_\theta^* \right) \\ \Gamma_{r\theta} &= \epsilon E_r E_\theta^* + \mu H_r H_\theta^* & \Gamma_{\theta r} &= \epsilon E_\theta E_r^* + \mu H_\theta H_r^* \\ \Gamma_{r\phi} &= \epsilon E_r E_\phi^* + \mu H_r H_\phi^* & \Gamma_{\phi r} &= \epsilon E_\phi E_r^* + \mu H_\phi H_r^* \\ \Gamma_{\theta\phi} &= \epsilon E_\theta E_\phi^* + \mu H_\theta H_\phi^* & \Gamma_{\phi\theta} &= \epsilon E_\phi E_\theta^* + \mu H_\phi H_\theta^* \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

on peut aussi écrire la normale à une surface sous la forme  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_r \hat{r} & n_\theta \hat{\theta} & n_\phi \hat{\phi} \end{bmatrix}$ . Ainsi, l'intégrand de l'équation 6.2.2 s'écrit sous la forme



$$\begin{aligned}
\vec{n} \cdot \Gamma &= \begin{bmatrix} n_r & n_\theta & n_\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{rr} & \Gamma_{r\theta} & \Gamma_{r\phi} \\ \Gamma_{\theta r} & \Gamma_{\theta\theta} & \Gamma_{\theta\phi} \\ \Gamma_{\phi r} & \Gamma_{\phi\theta} & \Gamma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \\
&= (n_r \Gamma_{rr} + n_\theta \Gamma_{\theta r} + n_\phi \Gamma_{\phi r}) \hat{r} + (n_r \Gamma_{r\theta} + n_\theta \Gamma_{\theta\theta} + n_\phi \Gamma_{\phi\theta}) \hat{\theta} \\
&\quad + (n_r \Gamma_{r\phi} + n_\theta \Gamma_{\theta\phi} + n_\phi \Gamma_{\phi\phi}) \hat{\phi}
\end{aligned} \tag{B.0.3}$$

Encore une fois, comme c'est une intégrale sur une surface fermée, on choisit une sphère où le vecteur  $\vec{n}$  devient  $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_r \hat{r} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Ainsi, l'équation précédente devient

$$\vec{n} \cdot \Gamma = (n_r \Gamma_{rr}) \hat{r} + (n_r \Gamma_{r\theta}) \hat{\theta} + (n_r \Gamma_{r\phi}) \hat{\phi} \tag{B.0.4}$$

Si l'on veut exprimer la force en coordonnées cartésienne, on doit modifier l'intégrant en utilisant les équations 3.2.5

$$\begin{aligned}
(n \cdot \Gamma) \hat{x} &= (n_r \Gamma_{rr} + n_\theta \Gamma_{\theta r} + n_\phi \Gamma_{\phi r}) \cos \phi \sin \theta + (n_r \Gamma_{r\theta} + n_\theta \Gamma_{\theta\theta} + n_\phi \Gamma_{\phi\theta}) \cos \phi \cos \theta \\
&\quad - (n_r \Gamma_{r\phi} + n_\theta \Gamma_{\theta\phi} + n_\phi \Gamma_{\phi\phi}) \sin \phi \\
(n \cdot \Gamma) \hat{y} &= (n_r \Gamma_{rr} + n_\theta \Gamma_{\theta r} + n_\phi \Gamma_{\phi r}) \sin \phi \sin \theta + (n_r \Gamma_{r\theta} + n_\theta \Gamma_{\theta\theta} + n_\phi \Gamma_{\phi\theta}) \sin \phi \cos \theta \\
&\quad + (n_r \Gamma_{r\phi} + n_\theta \Gamma_{\theta\phi} + n_\phi \Gamma_{\phi\phi}) \cos \phi \\
(n \cdot \Gamma) \hat{z} &= (n_r \Gamma_{rr} + n_\theta \Gamma_{\theta r} + n_\phi \Gamma_{\phi r}) \cos \theta - (n_r \Gamma_{r\theta} + n_\theta \Gamma_{\theta\theta} + n_\phi \Gamma_{\phi\theta}) \sin \theta
\end{aligned} \tag{B.0.5}$$

Ainsi, en utilisant une surface sphérique on peut simplifier grandement l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned}
(n \cdot \Gamma) \hat{x} &= (n_r \Gamma_{rr}) \cos \phi \sin \theta + (n_r \Gamma_{r\theta}) \cos \phi \cos \theta - (n_r \Gamma_{r\phi}) \sin \phi \\
(n \cdot \Gamma) \hat{y} &= (n_r \Gamma_{rr}) \sin \phi \sin \theta + (n_r \Gamma_{r\theta}) \sin \phi \cos \theta + (n_r \Gamma_{r\phi}) \cos \phi \\
(n \cdot \Gamma) \hat{z} &= (n_r \Gamma_{rr}) \cos \theta - (n_r \Gamma_{r\theta}) \sin \theta
\end{aligned} \tag{B.0.6}$$

## Annexe C

# Programme automatisé

```
#!/bin/bash
init=43 #point de départ du curseur de position
difference=17 #nombre maximal de la boucle
init2=33 #point de départ du numéro des champs

for i in 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
do
xte 'mousemove 521 758' 'mouseclick 1' 'mousemove 309 82'
xte 'mouseclick 1' 'mouseclick 1'
a='expr $a + 1'
valeur=$(( $a + $init ))
valeur2=$(( $a + $init2 ))
arr=$(echo $valeur | sed 's/\(.\)/\1\n/g');
for x in $arr
do
    $x
xdotool key $x
done
#changer de ligne et aller au champ Ex
xte 'key Tab' 'key Tab' 'key Tab' 'key Tab' 'key Left'
xte 'key Left' 'key Left' 'key Left' 'key BackSpace' 'key BackSpace'
#Écrire la nouvelle valeur
arr=$(echo $valeur2 | sed 's/\(.\)/\1\n/g');
for x in $arr
do
    $x
```

```

xdotool key $x
done
#changer de ligne et aller au champ Ey
xte 'key Tab' 'key Tab' 'key Tab' 'key Left' 'key Left' 'key Left'
xte 'key Left' 'key BackSpace' 'key BackSpace'
#Écrire la nouvelle valeur
for x in $arr
do
    $x
xdotool key $x
done
#changer de ligne et aller au champ EZ
xte 'key Tab' 'key Tab' 'key Tab' 'key Left' 'key Left' 'key Left'
xte 'key Left' 'key BackSpace' 'key BackSpace'
#Écrire la nouvelle valeur
for x in $arr
do
    $x
xdotool key $x
done
xdotool key Return
xte 'sleep 20'
#wait $8243
echo $i
done
exit

```

# Bibliographie

- Bareil, P. B. Y. Sheng. 2007, «Evaluation of fiber coupling coefficient by a deformed cell in dual-beam optical stretcher», *Proc. SPIE*, 6832, doi :10.1117/12.754723, 1–8. URL [http://spiedigitallibrary.org/proceedings/resource/2/psisdg/6832/1/68320L\\_1](http://spiedigitallibrary.org/proceedings/resource/2/psisdg/6832/1/68320L_1).
- Bareil, P. B. Y. Sheng. 2010a, «Angular and position stability of a nanorod trapped in an optical tweezers», *Opt. Express*, 18, 25, doi :10.1364/OE.18.026388, 26 388–26 398. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-25-26388>.
- Bareil, P. B. Y. Sheng. 2010b, «Study of angular and position stability in optical trap of a nanorod», *Proceedings of SPIE*, 7762, May 2011, doi :10.1117/12.860543, 77 621A–77 621A–8. URL <http://link.aip.org/link/PSISDG/v7762/i1/p77621A/s1&Agg=doi>.
- Bareil, P. B. Y. Sheng. 2013, «Modeling highly focused laser beam in optical tweezers with the vector Gaussian beam in the T-matrix method.», *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision*, 30, 1, 1–6, ISSN 1520-8532. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23455996>.
- Bareil, P. B. Y. Sheng. 2015, «Optical trapping of the anisotropic crystal nanorod.», *Optics express*, 23, 10, doi :10.1364/OE.23.013130, 13 130–40, ISSN 1094-4087. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/26074566>.
- Bareil, P. B., Y. Sheng, Y.-q. Chen A. Chiou. 2007a, «Calculation of spherical red blood cell deformation in a dual-beam optical stretcher», *Nanotechnology*, 15, 24, 16 029–16 034.
- Bareil, P. B., Y. Sheng, Y.-Q. Chen A. Chiou. 2007b, «Calculation of spherical red blood cell deformation in a dual-beam optical stretcher.», *Optics express*, 15, 24, 16 029–34, ISSN 1094-4087. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19550890>.
- Bareil, P. B., Y. Sheng A. Chiou. 2006, «Local scattering stress distribution on surface of a spherical cell in optical stretcher», *Opt. Express*, 14, 25, doi :10.1364/OE.14.012503, 12 503–12 509. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-14-25-12503>.
- Bareil, P. B., Y. Sheng A. E. Chiou. 2009a, «Theoretical prediction for cell deformation in the optical traps», *Proceedings of SPIE*, 7400, May 2011, doi :10.1117/12.826638, 74 000D–74 000D–7. URL <http://link.aip.org/link/PSISDG/v7400/i1/p74000D/s1&Agg=doi>.

- Bareil, P. B., Y. Sheng A. E. Chiou. 2009b, «Theoretical prediction for cell deformation in the optical traps», *Proceedings of SPIE*, 7400, May 2011, doi :10.1117/12.826638, 74 000D–74 000D–7. URL <http://link.aip.org/link/PSISDG/v7400/i1/p74000D/s1&Agg=doi>.
- Barton, J. P. D. R. Alexander. 1989, «Fifth-order corrected electromagnetic field components for a fundamental gaussian beam», *J. Appl. Phys.*, 66, 7, doi :DOI:10.1063/1.344207, 2800–2802, ISSN 00218979. URL <http://link.aip.org/link/doi/10.1063/1.344207>.
- Barton, J. P., D. R. Alexander S. A. Schaub. 1989, «Theoretical determination of net radiation force and torque for a spherical particle illuminated by a focused laser beam», *Journal of Applied Physics*, 66, 10, doi :10.1063/1.343813, 4594, ISSN 00218979. URL [http://jap.aip.org/japiau/v66/i10/p4594\\_s1?isAuthorized=no](http://jap.aip.org/japiau/v66/i10/p4594_s1?isAuthorized=no).
- Bishop, A. I., T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg H. Rubinsztein-dunlop. 2003, «Optical application and measurement of torque on microparticles of isotropic nonabsorbing material», *Physical Review A*, doi :10.1103/PhysRevA.68.033802, 1–8. URL <http://pra.aps.org/abstract/PRA/v68/i3/e033802>.
- Borghese, F., P. Denti R. Saija. 2008, «Radiation Torque and Force on Optically Trapped Linear Nanostructures», 163903, April, doi :10.1103/PhysRevLett.100.163903, 1–4. URL <http://prl.aps.org/abstract/PRL/v100/i16/e163903>.
- Born, M. E. Wolf. 2000, *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, CUP Archive, ISBN 0521784492, 986 .
- Boyd, R. W. 2003, *Nonlinear optics*, Academic Press, ISBN 0121216829, 578 .
- Boyde, L., K. J. Chalut J. Guck. 2011, «Exact analytical expansion of an off-axis Gaussian laser beam using the translation theorems for the vector spherical harmonics.», *Applied optics*, 50, 7tout, 1023–33, ISSN 1539-4522. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/21364726>.
- Brehat, F. B. Wyncke. 1993, «Calculation of the refractive indices and direction of refracted rays as functions of the angle of incidence, in uniaxial and biaxial crystals», *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 293. URL <http://iopscience.iop.org/0022-3727/26/2/018>.
- Brevik, I. 1979, «Experiments in phenomenological electrodynamics and electromagnetic energy-momentum tensor», *Physics Reports*, 133–201.
- Brock, B. C. «Using Vector Spherical Harmonics to Compute Antenna Mutual Impedance from Measured or Computed Fields», , SANDIA Report. URL <http://www.osti.gov/bridge/servlets/purl/763320-IdDDPB/webviewable/763320.pdf>.

- Brock, B. C. 2001, «Using Vector Spherical Harmonics to Compute Antenna Mutual Impedance from Measured or Computed Fields», *Online*, , April. URL <http://prod.sandia.gov/techlib/access-control.cgi/2000/002217r.pdf>.
- Cao, N., Y. K. Ho, Q. Kong, P. X. Wang, X. Q. Yuan, Y. Nishida, N. Yugami H. Ito. 2002, «Accurate description of Gaussian laser beams and electron dynamics», *Optics Communications*, 204, April, 7–15. URL <http://144.206.159.178/FT/809/62592/13867755.pdf>.
- Chang, S. S. S. Lee. 1985, «Optical torque exerted on a homogeneous sphere levitated in the circularly polarized fundamental-mode laser beam», *J. Opt. Soc. Am. B*, 2, 11. URL <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josab-2-11-1853>.
- Crichton, J. H. P. L. Marston. 2000, «The measurable distinction between the spin and orbital angular momenta of electromagnetic radiation», .
- Dachsel, H. 2006, «Fast and accurate determination of the Wigner rotation matrices in the fast multipole method», *J. Chem. Phys.*, 124, doi :10.1063/1.2194548, 6. URL [http://jcp.aip.org/resource/1/jcpsa6/v124/i14/p144115\\_s1](http://jcp.aip.org/resource/1/jcpsa6/v124/i14/p144115_s1).
- Davis, L. W. 1979, «Theory of electromagnetic beams», *Phys. Rev. A.*, 19, 3, 1177–1179. URL [http://pra.aps.org/abstract/PRA/v19/i3/p1177\\_1](http://pra.aps.org/abstract/PRA/v19/i3/p1177_1).
- Dienerowitz, M., M. Mazilu K. Dholakia. 2008, «Optical manipulation of nanoparticles : a review», *J. Nanophoton.*, 2, September, doi :10.1117/1.2992045, 1–32. URL [http://spiedigitallibrary.org/jnp/resource/1/jnoacq/v2/i1/p021875\\_s1](http://spiedigitallibrary.org/jnp/resource/1/jnoacq/v2/i1/p021875_s1).
- Gauthier, R. 2005, «Computation of the optical trapping force using an fdtd based technique», *Opt. Express*, 13, 10, doi :10.1364/OPEX.13.003707, 3707–3718. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-13-10-3707>.
- Geng, Y.-L., X.-B. Wu, L.-W. Li B.-R. Guan. 2004a, «Mie scattering by a uniaxial anisotropic sphere», *Phys. Rev. E*, 70, 056 609–1.
- Geng, Y.-L., X.-B. Wu, L.-W. Li B.-R. Guan. 2004b, «Mie scattering by a uniaxial anisotropic sphere.», *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 70, 5 Pt 2, 056 609, ISSN 1539-3755. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/15600781>.
- Gouesbet, G. G. Grehan. 1982, «Sur la generalisation de la theorie de lorenz-mie», 13, 2, 97–103. URL <http://iopscience.iop.org/0150-536X/13/2/006/>.
- Gouesbet, G., G. Grehan B. Maheu. 1985, «Scattering of a gaussian beam by a mie scatter center using a bromwich formalism», 16, 2, 83–93. URL <http://iopscience.iop.org/0150-536X/16/2/004>.

- Grange, R., J.-W. Choi, C.-L. Hsieh, Y. Pu, A. Magrez, R. Smajda, L. Forro D. Psaltis. 2009, «Lithium niobate nanowires synthesis, optical properties, and manipulation», *Applied Physics Letters*, 95, 14, doi :10.1063/1.3236777, 143105, ISSN 00036951. URL <http://link.aip.org/link/?APPLAB/95/143105/1>.
- Hand, L. N. J. D. Finch. 1998, *Analytical mechanics*, Cambridge University Press, ISBN 0521575729, 575 .
- Jackson, J. D. 1998, *Classical Electrodynamics Third Edition*, Wiley ; 3 edition, 808 .
- Jazar, R. N. 2010, *Theory of Applied Robotics : Kinematics, Dynamics, and Control*, , Springer, ISBN 1441917497, 883 .
- Kim, j. S. S. S. Lee. 1983, «Scattering of laser beams and the optical potential well for a homogeneous sphere», *Journal of the Optical Society of America*, 73, 3, doi :10.1364/JOSA.73.000303, 303, ISSN 0030-3941. URL <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-73-3-303>.
- Liao, G.-b., P. B. Bareil, Y. Sheng A. Chiou. 2008, «One-dimensional jumping optical tweezers for optical stretching of bi-concave human red blood cells», *Optics Express*, 16, 3. URL <http://dx.doi.org/10.1364/OE.16.001996>.
- Liu, B., L. Yang Y. Wang. 2011, «Trapping of nanoparticles in water by evanescent wave near a NSOM probe», 8097, 1, doi :10.1117/12.891047, 8, ISSN 0277786X. URL <http://link.aip.org/link/?PSISDG/8097/80971Y/1>.
- Liu, M., N. Ji, Z. Lin S. Chui. 2005, «Radiation torque on a birefringent sphere caused by an electromagnetic wave», *Physical Review E*, 72, 5, doi :10.1103/PhysRevE.72.056610, 1–13, ISSN 1539-3755. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.056610>.
- Louis, M. 2000, *Mécanique quantique*, De Boeck Université, ISBN 280413315X, 524 . URL <http://www.amazon.ca/M%C3%A9canique-quantique-marchildon-Marchildon-Louis/dp/280413315X>.
- Luo, H. S. Liu. 2007, «Comment on : Calculation of electromagnetic field components for a fundamental Gaussian beam», *Physical Review E*, 75, 3, doi :10.1103/PhysRevE.75.038501, 3–4, ISSN 1539-3755. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.75.038501>.
- Mishchenko, M. I. 1991, «Light scattering by randomly oriented axially symmetric particles», *J. Opt. Soc. Am. A*, 8, 6, 871–882.
- Mishchenko, M. I., L. D. Travis A. A. Lacis. 2002, *Scattering, absorption, and emission of light by small particles*, Cambridge University Press, ISBN 052178252X, 445 . URL [http://books.google.com/books?id=i6r1YFyK\\_g8C&pgis=1](http://books.google.com/books?id=i6r1YFyK_g8C&pgis=1).

- Nakayama, Y., P. J. Pauzauskie, A. Radenovic, R. M. Onorato, R. J. Saykally, J. Liphardt P. Yang. 2007a, «Tunable nanowire nonlinear optical probe.», *Nature*, 447, 7148, doi : 10.1038/nature05921, 1098–101, ISSN 1476-4687. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/17597756>.
- Nakayama, Y., P. J. Pauzauskie, A. Radenovic, R. M. Onorato, R. J. Saykally, J. Liphardt P. Yang. 2007b, «Tunable nanowire nonlinear optical probe», *Nature*, 447, June, doi : 10.1038/nature05921, 1098–1102. URL <http://www.nature.com/nature/journal/v447/n7148/abs/nature05921.html>.
- Neves, A. A. R., A. Camposeo, S. Pagliara, R. Saija, F. Borghese, P. Denti, M. A. Iati, R. Cingolani, O. M. Maragò D. Pisignano. 2010, «Rotational dynamics of optically trapped nanofibers.», *Optics express*, 18, 2, 822–30, ISSN 1094-4087. URL <http://dx.doi.org/10.1364/OE.18.000822>.
- Nieminen, T. 2003, «Calculation of the T-matrix : general considerations and application of the point-matching method», *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 79-80, doi :10.1016/S0022-4073(02)00336-9, 1019–1029, ISSN 00224073. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0022407302003369>.
- Nieminen, T. A., V. L. Y. Loke, A. B. Stilgoe, N. R. Heckenberg H. Rubinsztein-dunlop. 2007, «Optical tweezers computational toolbox», 9, doi :10.1088/1464-4258/9/8/S12. URL <http://iopscience.iop.org/1464-4258/9/8/S12>.
- Nieminen, T. A., S. Parkin, N. R. Heckenberg H. Rubinsztein-dunlop. 2004, «Optical torque and symmetry», 5514, doi :10.1117/12.557070, 254–263.
- Nieminen, T. A., H. Rubinsztein-Dunlop N. R. Heckenberg. 2003, «Multipole expansion of strongly focussed laser beams», *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 79-80, doi :DOI:10.1016/S0022-4073(02)00335-7, 1005 – 1017, ISSN 0022-4073. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022407302003357>, electromagnetic and Light Scattering by Non-Spherical Particles.
- Okamoto, K. S. Kawata. 1999, «Radiation Force Exerted on Subwavelength Particles near a Nanoaperture», *Physical Review Letters*, 83, 22, 4534–4537. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.4534>.
- Pfeifer, R. N. C., T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg H. Rubinsztein-dunlop. 2007, «Colloquium : Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media», .
- Rancourt-Grenier, S., M.-T. Wei, J.-J. Bai, A. Chiou, P. B. Bareil, P.-L. Duval Y. Sheng. 2010, «Dynamic deformation of red blood cell in dual-trap optical tweezers.», *Optics express*, 18, 10, 10 462–72, ISSN 1094-4087. URL <http://dx.doi.org/10.1364/OE.18.010462>.



- Ren, W. 1993, «Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media», *Physical Review E*, 47, 1, 664–673. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.056610>.
- Robinson, F. N. H. F. N. H. Robinson. 1974, «Electromagnetic stress and momentum in matter», .
- Roland Schiek. 2011, «Absolute measurement of the quadratic nonlinear susceptibility of lithium niobate in waveguides - OSA Technical Digest (CD)», , NWE15URL <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=NLO-2011-NWE15>.
- Sarkar, D. N. Halas. 1997, «General vector basis function solution of Maxwells equations», 56, doi :10.1103/PhysRevE.56.1102, 1102–1112, ISSN 1063-651X.
- Schmidt, V. T. Wriedt. 2009, «T-matrix method for biaxial anisotropic particles», *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, doi :10.1016/j.jqsrt.2009.01.025, 1–6, ISSN 0022-4073. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jqsrt.2009.01.025>.
- Sheu, F.-W., T.-K. Lan, Y.-C. Lin, S. Chen C. Ay. 2010, «Stable trapping and manually controlled rotation of an asymmetric or birefringent microparticle using dual-mode split-beam optical tweezers.», *Optics express*, 18, 14, 14724–9, ISSN 1094-4087. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20639958>.
- Siegman, A. E. 1986, *Lasers*, Mill Valley, Calif. : University Science Books, 1283 .
- Simpson, S. H. S. Hanna. 2011, «Application of the discrete dipole approximation to optical trapping calculations of inhomogeneous and anisotropic particles», *Opt. Express*, 19, 17, doi :10.1364/OE.19.016526, 16526–16541. URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-19-17-16526>.
- Singer, W., T. A. Nieminen, U. J. Gibson, N. R. Heckenberg H. Rubinsztein-dunlop. 2006, «Orientation of optically trapped nonspherical birefringent particles», *Physical Review E*, , February, doi :10.1103/PhysRevE.73.021911, 1–5. URL <http://pre.aps.org/abstract/PRE/v73/i2/e021911>.
- Smith, S. P., S. R. Bhalotra, A. L. Brody, B. L. Brown, E. K. Boyda M. Prentiss. 1999, «Inexpensive optical tweezers for undergraduate laboratories», *Am. J. Phys.*, , 67, 26–35. URL [http://ajp.aapt.org/resource/1/ajpias/v67/i1/p26\\_s1](http://ajp.aapt.org/resource/1/ajpias/v67/i1/p26_s1).
- Stratton, J. A. 1941, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill.
- Tsang, L., J. A. Kong R. T. Shin. 1984, «Radiative transfer theory for active remote sensing of a layer of nonspherical particles», *Radio Science*, 19, 2, doi :10.1029/RS019i002p00629, 629, ISSN 0048-6604. URL <http://www.agu.org/pubs/crossref/1984/RS019i002p00629.shtml>.

- Wang, G. J. Webb. 2005, «Calculation of electromagnetic field components for a fundamental Gaussian beam», *Physical Review E*, 72, 4, doi :10.1103/PhysRevE.72.046501, ISSN 1539-3755. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.72.046501>.
- Waterman, P. C. 1971, «Symmetry, Unitarity, and Geometry in Electromagnetic Scattering», *Physical Review D*, 3, 4, 825–839. URL [http://prd.aps.org/abstract/PRD/v3/i4/p825\\_1](http://prd.aps.org/abstract/PRD/v3/i4/p825_1).
- White, D. 2000, «Numerical Modeling of Optical Gradient Traps Using the Vector Finite Element Method», *Journal of Computational Physics*, 159, 1, doi :10.1006/jcph.2000.6422, 13–37, ISSN 00219991. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.2000.6422>.
- Yan, S. B. Yao. 2007, «Transverse trapping forces of focused Gaussian beam on ellipsoidal particles», *J. Opt. Soc. Am. B*, 24, 7, 1596–1602. URL <http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.24.001596>.
- Zhang, S. Y. 2010, «Accurate correction field of circularly polarized laser and its acceleration effect», *Journal of Atomic and Molecular Sciences*, 1, 4, doi :10.4208/jams.042110.051010a, 308–317, ISSN 20751303. URL <http://www.global-sci.org/jams/galley/jams-10-058.pdf>.
- Zysset, B., I. Biaggio P. Günter. 1992, «Refractive indices of orthorhombic KNbO<sub>3</sub> I Dispersion and temperature dependence», *Journal of the Optical Society of America B*, 9, 3, doi : 10.1364/JOSAB.9.000380, 380, ISSN 0740-3224. URL <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-9-3-380>.