IMEN HENTATI

Duopole en prix et allocation de capacité sur deux marchés

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en économique
pour l'obtention du grade de maître ès arts (M.A.)

Faculté des Sciences Sociales
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2008

Avant-propos

Un sincère remerciement à mon directeur de recherche, Monsieur Patrick González, qui m'a fait bénéficier de son expérience et de ses conseils précis. Je lui dois une grande reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée et le soutien dont il m'a gratifié. Je voudrais aussi remercier le Ministère de l'Éducation Tunisien pour son support moral et financier.

Un remerciement particulier à tous les membres de ma famille pour leurs encouragements et leur confiance illimités. Un gros merci à ma mère et à mon père. Sans eux, je n'aurais certainement pas tenu le coup jusqu'à maintenant. Je remercie également mon fiancé sans qui rien n'aurait pu être possible et avec qui tout est possible.

Et finalement, merci aux membres du département d'économique, autant professeurs qu'étudiants et à tous ceux qui m'ont appuyée de près ou de loin dans cette aventure.

Résumé

Nous étudions l'incidence de contraintes de capacité dans un modèle de concurrence oligopolistique en prix sur deux marchés. Pour des capacités de production données, Levitan et Shubik (1972) ont identifié un équilibre en stratégies mixtes dans le cas d'un duopole formé de deux firmes qui se concurrencent en prix sur un seul marché. Supposons que ces deux firmes décident de s'installer sur deux marchés, elles doivent alors répartir leurs capacités entre ces marchés. Chaque firme répartit sa capacité totale et fixe alors son prix sur chaque marché. Une des stratégies offertes pour la firme dans ce nouveau contexte concurrentiel est de suivre l'allocation de capacité et la politique de prix d'équilibre sur un seul marché identifiées par Levitan et Shubik. Nous montrons que cette allocation ne constitue pas un équilibre lorsqu'elle est répliquée sur deux marchés.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Si une firme en concurrence est libre de choisir la quantité qu'elle produit, elle demeure néanmoins contrainte par sa capacité de production. En effet, le niveau de production d'une firme est fonction de sa capacité financière, humaine et matérielle. Par exemple, dans l'industrie du vin, la quantité de production est directement liée aux surfaces plantées en vigne dans la mesure où ces surfaces déterminent à long terme la capacité de production des régions viticoles (Caron et Laye, 2002). Si la firme choisit de s'installer sur plusieurs marchés, comment doit-elle répartir sa capacité de production ? Il s'agit d'une décision cruciale pour la firme qui affecte aussi bien les prix que les profits futurs. Cette question d'allocation se pose dans le marché du vin une fois que les firmes ont fixé leur capacité totale. En effet, le marché du vin forme un réseau complexe entre les régions productrices et les marchés consommateurs. La France et l'Australie sont parmi les principaux concurrents sur le marché du vin. Les deux régions produisent du vin d'une qualité comparable. Du côté de la demande, cette production du vin est destinée à deux marchés distincts : britannique et nord américain. Pour une capacité de production totale donnée, accroître sa présence sur l'un de ces marchés se traduit par un repli sur l'autre marché. En concurrence imparfaite, l'effet d'une telle réallocation sur les prix de vente et les profits est complexe.

L'allocation de la capacité est aussi importante dans le secteur du textile en Tunisie. Il s'agit d'un secteur en pleine croissance qui a tiré profit de la loi 72/650 du 11 juillet 1972. Cette loi vise à alléger les charges fiscales pour les entreprises exportatrices afin de leur permettre de faire face aux exigences environnementales internationales. La production du textile en Tunisie est destinée aux marchés locaux et étrangers. En tenant compte de sa capacité totale et en respectant les règlements de l'exportation, le producteur tunisien fixe la quantité de production allouée pour chaque marché. Néanmoins, le marché local de textile subit la concurrence des produits de haute qualité importés de France. Connaître l'impact d'un choix de quantité destinée à l'exportation sur le profit total est un enjeu important pour la Tunisie si elle désire protéger ses intérêts face à la concurrence étrangère.

L'industrie cimentière a aussi été l'objet d'un mouvement d'internationalisation des entreprises ces derniers années (Dumez et Jeunemaître, 2000). Dans les années 80, les cimentiers américains ont dû faire face à des importations en provenance du Japon, du Mexique, de Corée ou d'Europe. De même, le marché européen a subi la concurrence des importations venant de Grèce et le marché japonais des importations venant de Corée. Cette extention internationale des marchés est due au développement technologique et à des conditions macroéconomiques (coût de transport et de déchargement faibles). Dans tous ces cas, le problème de l'allocation de la capacité entre les marchés intérieur et extérieur est posé.

D'un point de vue théorique, l'introduction de contraintes de capacité dans un modèle de concurrence en prix en duopole a été étudiée par Edgeworth (1897). Le modèle d'Edgeworth est une généralisation de celui de Bertrand (1883). Dans une concurrence à la Bertrand, chaque firme demande éventuellement le prix qui serait pratiqué en concurrence parfaite, soit son coût marginal. Donc même si, a priori, la firme a une totale liberté pour fixer son prix, le jeu de la concurrence fait en sorte que cette liberté est illusoire. Ce résultat est souvent connu sous le nom de « paradoxe de Bertrand ». En effet, il est difficile de croire que les firmes en duopole ne réussissent jamais à manipuler le prix du marché pour réaliser des bénéfices.

Pour résoudre le paradoxe de Bertrand, Edgeworth introduit explicitement des contraintes de capacité. La prise en compte de ces contraintes remet en question la solution de Bertrand. Pour comprendre l'idée d'Edgeworth, plaçons nous dans le cas où les deux firmes ont le même coût marginal. Chaque firme a intérêt alors à suivre la baisse de prix de son concurrent, sinon elle perd toute sa part de marché. Mais si la capacité de production du concurrent est inférieure à la taille du marché, la firme qui propose le prix le plus élevé peut conserver la demande résiduelle. Si sa capacité est aussi limitée, elle aura alors moins d'incitations pour suivre la baisse de prix de son concurrent. Même si la demande qui s'adresse à la firme double lorsqu'elle baisse son prix, elle n'aura pas nécessairement la capacité de doubler sa production dans le court terme (Yildizoglu, 2001). Elle ne pourra alors servir qu'une fraction des consommateurs jusqu'à concurrence de sa capacité et les autres devront se retourner vers la firme demandant le prix le plus élevé. Cette dernière a alors le monopole de la demande résiduelle, ce qui lui permet de réaliser un profit positif si son prix est supérieur à son coût marginal. Par conséquent, la solution de Bertrand n'est pas un équilibre.

Quel est alors le prix d'équilibre ? Edgeworth montre qu'il n'existe pas d'équilibre pur : si l'une des deux firmes fixe un prix supérieur au coût marginal, l'autre firme a intérêt à fixer un prix tout juste inférieur et vendre ainsi toute sa capacité. Cependant si la firme fixe un prix inférieur ou égal au coût marginal, la firme concurrente a intérêt à fixer un prix supérieur et recupère ainsi la demande résiduelle. Edgeworth montre donc que la solution du modèle statique de Bertrand n'est pas stable lorsque les entreprises ont des capacités de production limitées.

Pour des capacités de production données et une fonction de demande linéaire, Shubik et Levitan (1972) proposent un équilibre en stratégies mixtes pour ce jeu : cet équilibre correspond à une densité de probabilité positive associée à un intervalle de prix. Dans leur article, Levitan et Shubik prouvent que, pour des faibles capacités et sous certaines règles de rationnement, l'équilibre obtenu est identique à l'équilibre de quantité de Cournot.

Le modèle de Cournot (1838) suppose que les firmes choisissent les quantités à produire plutôt que le prix, de sorte que celui-ci est déterminé par la confrontation de l'offre et la demande. Ce modèle est souvent critiqué parce que la fixation des prix est une décision stratégique pour la firme et que le marché seul est incapable de déterminer le prix d'équilibre. Tirole (1995) défend le modèle de Cournot et propose qu'en introduisant des contraintes de capacité, il peut être considéré comme un jeu à deux étapes dans lequel les firmes choisissent d'abord leurs capacités de production et ensuite se concurrencent en prix.

Tirole reprend ainsi l'argument de Kreps et Sheinkman (1983) qui ont montré que dans un jeu à deux étapes avec choix de capacité puis concurrence en prix, et sous certaines conditions sur la demande de marché et le rationnement des consommateurs, l'équilibre du jeu à deux étapes est le même que celui de Cournot avec une étape[1].

La résolution de l'équilibre avec contraintes de capacité devient plus complexe dans un contexte multi-marchés. En effet, si les firmes décident de s'installer sur plusieurs marchés, chaque firme doit répartir sa capacité totale sur les marchés cibles et fixer ainsi un prix sur chaque marché. Tout choix de capacité ou de prix relatif à un marché affecte le profit total de la firme. D'autre part, chaque firme doit prendre en considération toutes les stratégies jouées par son concurrent sur les divers marchés. Ce phénomène est accentué par le fait que ces firmes ne peuvent pas déterminer avec certitude la demande sur chaque marché.

L'étude de l'incidence de contraintes de capacité dans un modèle de concurrence oligopolistique en prix sur plusieurs marchés vise notamment à résoudre des problèmes stratégiques rencontrés par les firmes de nombreux secteurs de l'industrie suite à leur in-

[1]Ce résultat donne le titre de leur article « Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes ».

ternationalisation. En fait, les firmes installées ont des politiques de croissance continue des marchés locaux pour améliorer leurs profits et bénéficier ainsi d'économies d'échelle. C'est en particulier le cas dans le secteur de textile en Tunisie où la production est destinée non seulement aux marchés locaux mais aussi aux marchés étrangers. Le marché local de textile en Tunisie subit aussi la concurrence des produits importés de la France. Le développement d'une concurrence multi-marchés en textile peut aider les firmes de l'industrie à se développer tout en protégeant leurs marchés pour y maintenir leurs positions. En tenant compte de sa capacité totale, le producteur tunisien (respectivement le producteur français) détermine d'abord la capacité allouée pour chaque marché, ensuite il fixe le prix sur chaque marché. Si la production de textile en Tunisie (respectivement en France) est destinée seulement au marché local, la stratégie optimale de prix serait celle identifiée par Levitan et Shubik. Mais si le producteur de textile décide de consacrer une quantité de production pour l'export sa stratégie optimale change. En fait, si les deux producteurs choisissent de suivre l'allocation de capacité et la politique de prix définies selon le modèle de Levitan et Shubik sur les deux marchés, une réallocation de capacité par l'un des producteurs pourrait lui permettre d'améliorer ses profits.

Le modèle que nous présentons s'inspire de celui de Levitan et Shubik : il retient les mêmes hypothèses, mais l'analyse est menée sur deux marchés. Levitan et Shubik ont prouvé l'existence d'un équilibre en stratégies mixtes dans le cas d'un duopole formé de deux firmes soumises à des contraintes de capacités qui se concurrencent en prix sur un seul marché. Si ces deux firmes doivent allouer leurs capacités sur deux marchés, la solution demeure-t-elle la même ? Nous vérifions si l'équilibre identifié par Levitan et Shubik caractérise aussi la concurrence dans un contexte multi-marchés.

Notre contribution tient donc dans la construction d'un modèle de concurrence en prix sur deux marchés qui généralise celui de Levitan et Shubik et la démontration que l'équilibre qu'ils ont identifié n'est valide que lorsque la concurrence opère sur un seul marché.

Dans le chapitre 1, nous présentons notre modèle : deux firmes qui se concurrencent en prix sur deux marchés et qui sont contraintes en capacité. Dans le chapitre 2, nous developpons le modèle de Levitan et Shubik comme un cas particulier du notre modèle. Nous identifions les résultats qui manquent pour généraliser les résultats de Levitan et Shubik au contexte multi-marchés. Enfin, dans le dernier chapitre, nous vérifierons si l'équilibre identifié par Levitan et Shubik, dans le cadre d'une concurrence sur un seul marché, demeure toujours valide dans un contexte multi-marchés.

Chapitre 1

Le modèle

On considère deux firmes indicées par 1 et 2 en concurrence sur deux marchés notés A et B. La firme i a une capacité k_i qu'elle peut répartir entre les marchés A et B. On note k_i^m la capacité allouée par la firme i au marché m. La capacité totale sur le marché m est notée $2k^m$, de sorte que chaque firme y alloue en moyenne k^m (cf. Figure 1.1).

On suppose que la demande est linéaire sur chaque marché :

$$\begin{aligned} q^m &= D(p^m) \\ &= a - p^m \end{aligned}$$

où le paramètre a dénote la taille du marché ou encore le plus haut prix pouvant se traduire par une vente[1]. Pour simplifier l'analyse, on suppose que le coût de production de chaque firme est nul.

L'objectif de la firme i est de maximiser son profit total sur les deux marchés en anticipant les quantités mises sur chaque marché par son concurrent :

$$\pi_i = \pi_i^A + \pi_i^B$$

[1]Lorsque $p \to 0, q^m \to a$ ou encore $a = \sup\{p \geq 0 : q^m > 0\}$.

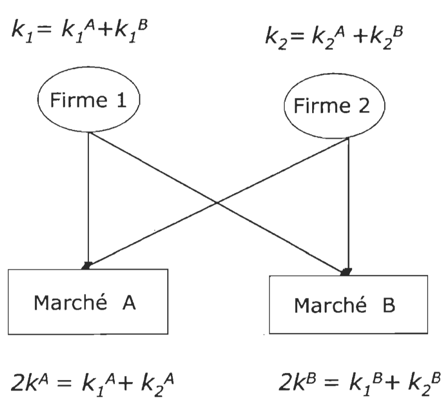

FIG. 1.1 – Présentation graphique du modèle

Dans une concurrence en prix, les consommateurs achètent en priorité de la firme affichant le prix le plus bas. Sans perte de généralité, on suppose que le prix de la firme i au marché m est inférieur au prix de la firme j. Dans ce cas, la firme i ne peut servir qu'une fraction des consommateurs sur le marché m, jusqu'à concurrence de sa capacité k_i^m. La firme j obtient alors le monopole de la demande résiduelle sur ce marché. La composition de cette demande résiduelle dépend du mécanisme de rationnement en vigueur dans l'industrie. On distingue deux formes de rationnement, soit le rationnement efficace et le rationnement proportionnel (Tirole, 1995) :

Le rationnement efficace :

Dans une industrie soumise à un mode de rationnement efficace, les consommateurs qui désirent plus le bien, c'est à dire ceux qui ont une disposition marginale à payer plus élevée, sont servis en priorité par la firme ayant le prix le plus bas. Ceux qui n'ont pas pu être servis s'adressent à la seconde firme.

La règle de rationnement efficace implique donc que la demande résiduelle de la firme j est de la forme :

$$D_j(p_j) = \begin{cases} D(p_j) - k_i & \text{si } D(p_j) \geq k_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De ce fait, la firme j ne peut recevoir une demande résiduelle que si la firme i est incapable de satisfaire la totalité de la demande du marché.

Le rationnement proportionnel :

Cette règle de rationnement suppose que l'ordre dans lequel sont servis les consommateurs est tout à fait aléatoire. Ainsi, chaque consommateur a la même probabilité d'être rationné. Selon cette règle, si la capacité de production de la firme i est inférieure à la demande au prix p_i, alors la probabilité de ne pas pouvoir acheter de cette dernière correspond à la portion des consommateurs non servis par la firme i $(D(p_i) - k_i)$ par rapport à l'ensemble des consommateurs qui désirent acheter au prix p_i $(D(p_i))$. De ce fait, la probabilité est donnée par :

$$\frac{D(p_i) - k_i}{D(p_i)}$$

Ainsi, pour déterminer la demande résiduelle de la firme j, il suffit de multiplier le pourcentage des consommateurs non servis par la firme i par le nombre total des consommateurs qui sont prêts à acheter au prix p_j :

$$D_j(p_j) = D(p_j)\left(\frac{D(p_i) - k_i}{D(p_i)}\right)$$

Dans notre modèle on suppose un mode de rationnement efficace : les consommateurs sont servis en priorité par la firme ayant le prix le plus bas en ordre décroissant de la disposition marginale de payer. Ceux qui n'ont pas pu être servis s'adresse à l'autre firme.

Ce modèle comporte tous les éléments nécessaires pour le traiter comme un jeu : une liste de joueurs (les firmes), un ensemble de choix possibles pour chaque joueur (allocation de capacité et prix) et enfin des gains associées à chaque choix des joueurs (les profits des firmes). Les règles de marché (forme de rationnement) s'apparentent aux règles du jeu entre les deux firmes. On construit un jeu à deux joueurs et à deux étapes. En première étape, chaque firme i répartit sa capacité k_i sur les deux marchés en choisissant $k_i^A \in [0, k_i]$ de sorte que $k_i^B = k_i - k_i^A$. Au début de la seconde étape, chaque firme observe la répartition (k_1^A, k_2^A) des capacités. Chacune décide alors d'un couple de prix (p_i^A, p_i^B). Il s'agit d'un jeu séquentiel où les décisions sont prises simultanément par les deux joueurs à chacune des étapes. La forme extensive de ce jeu est illustrée dans la figure 1.2.

Le premier noeud de l'arbre appartient à la firme 1. Celle-ci alloue une capacité k_1^A au marché A sans connaître la capacité que y allouera la firme 2. De même, la firme 2 choisit sa capacité k_2^A sans avoir observé le choix de capacité de la firme 1. Une fois que les deux firmes ont pris connaissance de la répartition des capacités (k_1^A, k_2^A), elles choisissent simultanément leurs politiques de prix (p_i^A, p_i^B). À la fin du jeu, on arrive à un résultat auquel les gains correspondants (π_1, π_2) sont associés.

Une stratégie pure est un plan d'action complet qui spécifie une action pour chaque

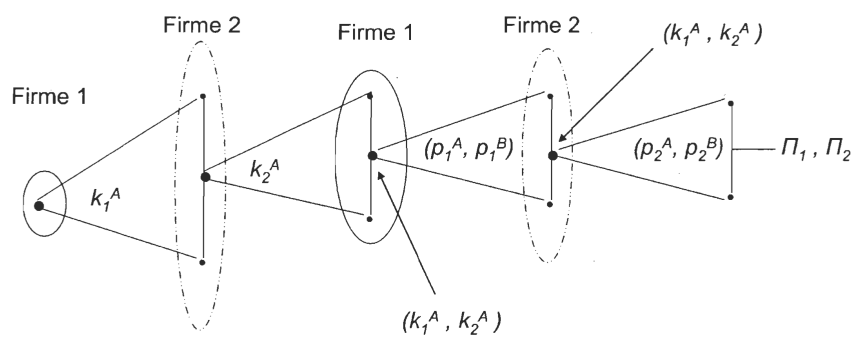

FIG. 1.2 – Forme extensive du jeu

noeud. Ici une stratégie pure est un choix ferme de capacités et de prix. Chaque firme doit déterminer la capacité qu'elle alloue à chaque marché. Puis, une fois que les choix de capacité ont été observés, elle fixe son prix sur chaque marché. Ainsi une stratégie pure pour la firme i est un triplet de capacité et de règles de prix désigné par (k_i^A, p_i^A, p_i^B) tel que :

$$k_i^A \in [0, k_i]$$

et

$$p_i^m : [0, k_i] \times [0, k_j] \longrightarrow [0, a]$$

où a est le prix le plus élevé qu'une firme peut fixer sur chaque marché.

Dans un jeu séquentiel, il est d'usage de représenter les stratégies mixtes par leur présentation behaviorale. Une stratégie behaviorale pour la firme i est un plan d'action qui indique quel choix, éventuellement aléatoire, elle fait à chacun de ses noeuds de décision. À la première étape, chaque firme i doit spécifier une distribution de probabilité sur $[0, k_i]$. À la seconde étape, et pour chacun des choix de capacités, chaque firme doit choisir une distribution de probabilité sur $[0, a] \times [0, a]$.

Le profit de la firme i associé au marché m est une fonction à la fois de k_i^m, k_j^m, p_i^m et p_j^m. Si $p_i^m \leq p_j^m$:

$$\pi_i^m = p_i^m \min(k_i^m, a - p_i^m)$$

Tous les consommateurs, sur le marché m, achètent en priorité de la firme i. Cette dernière ne peut servir qu'une fraction de la demande sur le marché m jusqu'à concurrence de sa capacité k_i^m. En revanche, si $p_i^m > p_j^m$:

$$\pi_i^m = p_i^m \max(0, \min(k_i^m, a - p_i^m - k_j^m))$$

La firme i ne peut réaliser un profit positif et recevoir ainsi une demande résiduelle $(a - p_i^m - k_j^m)$ que si la firme j est incapable de satisfaire la totalité de la demande du marché m.

Étant donnée la structure du jeu et donc celle des gains, nous pouvons déterminer les stratégies de la firme i qui lui assurent le plus grand profit espéré en tenant compte de la stratégie jouée par l'autre firme. Le concept de meilleure réponse généralise cette idée et permet de définir l'équilibre de Nash du jeu. Néanmoins, un équilibre de Nash est souvent basé sur une menace non-crédible : ce type d'équilibre est basé sur des actions qui ne seront jamais adoptées si le joueur concerné est effectivement confronté à ce choix. Le concept d'équilibre parfait en sous-jeu permet de résoudre les incohérences que l'équilibre de Nash peut laisser subsister : il permet d'éliminer ces menaces en assurant le choix optimal pour le joueur chaque fois qu'il va prendre une décision.

Pour trouver l'équilibre de Nash parfait d'un jeu à décisions séquentielles, on procède selon la méthode de « récurrence inverse » appelée aussi « induction à rebours » : on détermine d'abord les équilibres de Nash des sous-jeux propres et on remplace ces sous-jeux par les profits d'équilibre correspondants, appelés « valeurs séquentielles ». Puis on remonte et on recommence l'opération jusqu'à ce que l'on atteigne l'équilibre de Nash du sous-jeu qui découle du noeud initial.

Pour déterminer ici l'équilibre parfait en sous-jeu, on doit calculer les valeurs séquentielles $\pi_i(k_i^A, k_j^A)$ au niveau de chaque sous-jeu propre (k_i^A, k_j^A). En effet, chaque firme i répartit sa capacité k_i sur les deux marchés en choisissant $k_i^A \in [0, k_i]$ et à chaque choix de capacité (k_i^A, k_j^A) correspond un sous-jeu propre. On désigne par S l'ensemble des sous-jeux propres :

$$S = [0, k_i] \times [0, k_j]$$

Cet ensemble peut être présenté dans le plan $(k_i^A,\ k_j^A)$(cf. Figure 1.3).

Tout point du plan (k_i^A, k_j^A) correspond à un sous-jeu propre. On distingue huit sous-ensembles distincts de sous-jeux propres dans le tableau suivant (cf. Figure 1.4).

Chaque colonne du tableau définit un sous-ensemble de l'ensemble intiale S. Un sous-ensemble décrit tous les sous-jeux propres qui vérifient la même condition sur

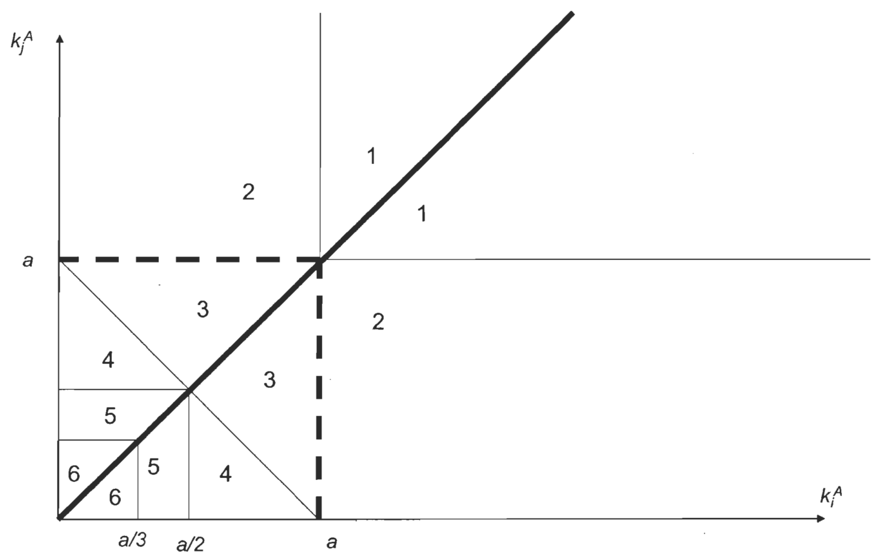

FIG. 1.3 – Présentation des sous-jeux propres

Présentation graphique	———	– – –	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4	Zone 5	Zone 6
Sous-ensemble	$k_1^A = k_2^A$	$k_1^A = a > k_2^A$	$k_1^A > k_2^A > a$	$k_1^A > a >= k_2^A$	$2k > a >= k_1^A > k_2^A$	$2k_1^A > a >= 2k > 2k_2^A$	$2a/3 < 2k_2^A < 2k_1^A =< a$	$2k_2^A < 2k_1^A =< 2a/3$

FIG. 1.4 – Détermination des sous-ensembles

les capacités au niveau du marché A. La firme i répartit sa capacité k_i sur les deux marchés en choisissant $k_i^A \in [0, k_i]$ de sorte que $k_i^B = k_i - k_i^A$. Par la suite, elle observe la répartition (k_i^A, k_j^A) des capacités, et décide alors d'un couple de prix (p_i^A, p_i^B) ; de même pour la firme j. Ainsi, pour déterminer l'équilibre parfait en sous-jeu, on doit calculer les valeurs séquentielles (π_i, π_j) au niveau de chaque sous-ensemble. Si les deux firmes choisissent d'allouer leurs capacités dans les deux marchés selon les conditions définies dans le premier ou le deuxième sous-ensemble ($k_i^m = k_j^m$ ou $k_i^m = a > k_j^m$), les profits d'équilibre correspondants sur chaque marché sont celles identifiés par Levitan et Shubik en 1972.

Chapitre 2

Le modèle de Levitan et Shubik

Pour des capacités de production données identiques $k_1^A = k_2^A$ ou différentes $k_1^A = a > k_2^A$ (ces deux cas sont présentés respectivement par la ligne en gras et aux deux segments en pointillé dans la figure 1. 3) et une fonction de demande linéaire, Levitan et Shubik prouvent l'existence d'un équilibre en stratégies mixtes dans le cas d'un duopole formé de deux firmes qui se concurrencent en prix[1]. Le modèle de Levitan et Shubik est un cas particulier du modèle qu'on vient de présenter : il conserve les mêmes hypothèses mais l'analyse est menée sur un **seul** marché, soit le marché A. Néanmoins, Levitan et Shubik prouvent que pour des capacités de production faibles ou illimitées, l'équilibre obtenu est identique à l'équilibre pur de Cournot. Ainsi, en fonction des quantités de capacité, l'équilibre contraint de ce jeu peut être soit un équilibre pur, soit un équilibre mixte.

[1] Beckman (1965) a présenté un équilibre en stratégies mixtes similaire à celui proposée par Shubik et Levitan. La différence entre les deux modèles est que l'équilibre a été calculé sous sa forme explicite par Beckman pour le rationnement proportionnel et par Levitan et Shubik pour le rationnement efficace.

2.1 L'équilibre contraint pur

Pour $k_i^A \geq a$ et $k_i^A \in [0, \frac{a}{3}]$ (ces deux cas sont présentés respectivement par la zone 1 et la zone 6 ainsi que les deux segments de la ligne en gras qui vérifient ces deux conditions), l'équilibre contraint serait identique à l'équilibre pur de Cournot (1838). En effet, si $k_i^A \geq a$, chaque firme i est capable de satisfaire toute la demande qui s'adresse à elle sur le marché A. Ainsi pour déterminer l'équilibre, chaque firme doit calculer la capacité qui maximise son profit pour chaque niveau de capacité possible de son concurrent.

Pour une capacité de production $k_i^A \geq a$ et une fonction de demande linéaire, le profit de la firme i sur le marché A est déterminé comme suit :

$$\pi_i^A = [a - (k_i^A + k_j^A)]k_i^A$$

La fonction de réaction de la firme i définit sa meilleure réponse à une décision donnée de l'adversaire. On la détermine en maximisant le profit tout en considérant comme donnée la capacité du concurrent. La condition de premier ordre de l'équation de profit donne la fonction de réaction de la firme i :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial k_i^A} = 0 \Leftrightarrow a - 2k_i^A - k_j^A = 0$$

La fonction de réaction de la firme i est égale alors à :

$$k_i^A = r_i^A(k_j^A) = \frac{a}{2} - \frac{1}{2}k_j^A$$

L'équilibre de Cournot-Nash est la situation obtenue en résolvant le système constitué des deux fonctions de réaction à deux inconnues k_i^A et k_j^A. On peut présenter l'équilibre de Cournot dans le plan des capacités (k_i^A, k_j^A) (cf. Figure 2.1). Les conditions de premier ordre des entreprises déterminent leurs courbes de réaction.

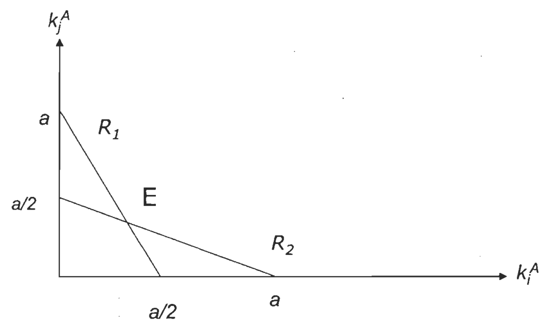

FIG. 2.1 – L'équilibre Cournot-Nash

L'équilibre se situe au point d'intersection de ces courbes (point E). Une fois les quantités d'équilibres déterminées, on peut calculer le prix d'équilibre :

$$p^{A^*} = a - (k_i^{A^*} + k_j^{A^*})$$

Pour $k_i^A \in [0, \frac{a}{3}]$, et sous la règle de rationnement efficace, Levitan et Shubik prouvent que l'équilibre contraint correspond aussi à l'équilibre pur de Cournot. Avec un prix égal à p^{A^*}, les deux firmes vendent leurs capacités sur le marché A. Aucune firme n'a intérêt à fixer un prix inférieur à p^{A^*} car elle est incapable de satisfaire toute la demande à ce prix et donc elle offrirait simplement une quantité égale à sa capacité à un prix moindre. Est-il intéressant pour la firme i d'accroître son prix au delà de p^{A^*} ? Si on désigne par x_i^A la quantité vendue par la firme i à un prix $p^A > p^{A^*}$, alors son profit devient :

$$\pi_i^A = p^A(a - p^A - k_j^A) = (a - x_i^A - k_j^A)x_i^A$$

Le dernier profit est le même que celui réalisé dans une concurrence à la Cournot : il correspond au profit réalisé par la firme i qui vend la quantité x_i^A étant donnée que la firme concurrente offre k_j^A. Ainsi, le prix sur le marché A est détérminé par la confrontation de l'offre et la demande sur ce marché. On appelle ce profit le profit de Cournot[2]. La fonction de profit $[(a - x_i^A - k_j^A)x_i^A]$ est concave en x_i^A. La dérivé par rapport à x_i^A en $x_i^A = k_i^A$ est :

$$a - 2k_i^A - k_j^A \geq 0$$

Elle est non négative car k_i^A et k_j^A sont inférieurs à $\frac{a}{3}$. Ainsi il n'est pas optimal pour la firme i de diminuer sa production et donc d'augmenter son prix au delà de p^{*A}. Donc p^{*A} est le prix d'équilibre.

[2]Jean Tirole, p. 27-28.

2.2 L'équilibre contraint mixte

2.2.1 L'équilibre du jeu avec capacités identiques :

Levitan et Shubik traitent d'abord le cas le plus simple où les deux firmes ont des capacités identiques :

$$k_1^A = k_2^A = k$$

Pour $k_i^A = k \in]\frac{a}{3}, a[$, Levitan et Shubik prouvent l'existence d'un équilibre mixte. Cet équilibre correspond à une densité de probabilité positive associée à un intervalle de point désigné par $[p_l^A, p_h^A]$, où :

p_l^A désigne le prix minimum que la firme fixe sur le marché A.

p_h^A désigne le prix maximun que la firme fixe sur le marché A.

Pour déterminer l'équilibre mixte, on désigne par x_i^A la quantité vendue par la firme i au marché A. Cette quantité est fonction des prix de vente des deux firmes p_i^A et p_j^A. En effet, si la firme i fixe un prix inférieur à son concurrent, alors elle reçoit toute la demande $a - p_i^A$ mais elle ne peut pas vendre plus que sa capacité. Toutefois, si la firme i fixe un prix supérieur au prix de la firme j, toute la demande serait récupérée par la firme j. Néanmoins, si la capacité de production de cette dernière est inférieure à la demande, la firme i reçoit la demande résiduelle $a - p_i^A - k_j^A$ qu'elle peut satisfaire jusqu'à concurrence de sa capacité (cf. Figure 2.2). Á partir de la figure 2.2, on peut déduire que :

- si $p_i^A < p_j^A$ alors $x_i^A = \min(k_i^A, a - p_i^A)$
- si $p_i^A > p_j^A$ alors $x_i^A = \max(0, \min(k_i^A, a - k_j^A - p_i^A))$

Les deux cas sont illustrés dans les figures 2.3 et 2.4.

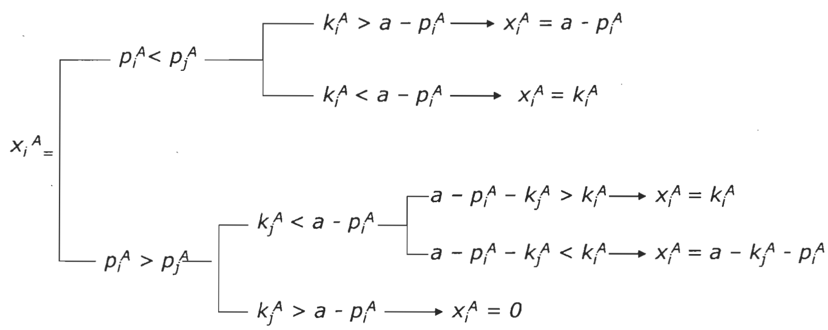

FIG. 2.2 – Détermination des ventes

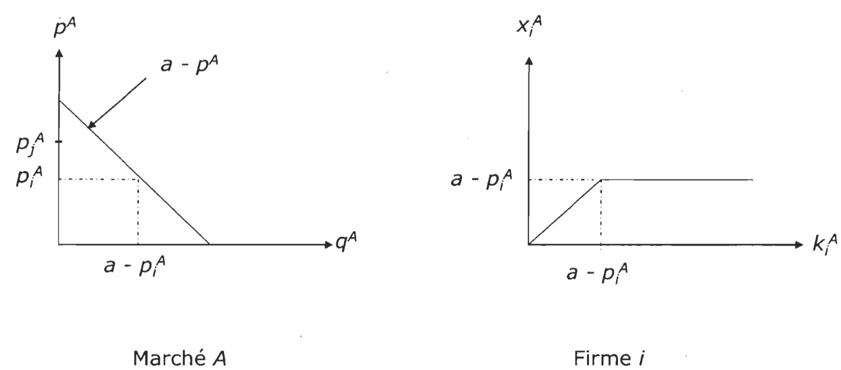

FIG. 2.3 – La quantité vendue si $p_i^A < p_j^A$

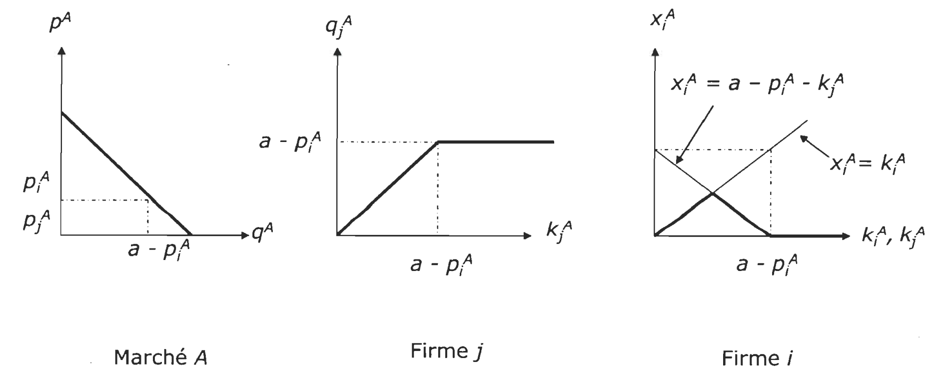

FIG. 2.4 – La quantité vendue si $p_i^A > p_j^A$

Le volet de gauche de la figure 2.3 représente la demande sur le marché A. Pour un prix $p_i^A < p_j^A$ et une fonction de demande linéaire, la demande sur le marché A est égale à $a - p_i^A$: toute la demande s'adresse à la firme i. Une fois la demande déterminée, on passe au volet de droite de la figure pour identifier la quantité vendue. Si la capacité de la firme i est inférieure à la demande, alors elle vend juste sa capacité : cet état de figure est présenté par la première bissectrice ($x_i^A = k_i^A$). Si la capacité de de la firme i est supérieure à la demande, tous les consommateurs sont servis : cet deuxième état de figure est présenté par la demi-droite horizontale ($x_i^A = a - p_i^A$). Ainsi, les ventes espérées de la firme i sur le marché A dépendent uniquement de sa capacité.

Si la firme i fixe un prix supérieur au prix de la firme j sur le marché A, ses ventes espérées dépendent non seulement de sa capacité mais aussi de la capacité de son concurrent. Une fois la demande déterminée sur le marché A, la firme j ayant le prix le plus faible recupère toute la demande : tous les consommateurs achètent en priorité de la firme j ; ceux qui n'ont pas pu être servi s'adressent à la firme i qui recupère ainsi une demande résiduelle non nulle. Ainsi, si la capacité de la firme i est inférieure à la demande résiduelle, alors elle vend juste sa capacité. Graphiquement, cette situation est illustrée dans le volet de droite de la figure 2.4 : elle correspond au cas où la droite présentant la demande résiduelle $x_i^A = a - p_i^A - k_j^A$ est au-dessus de la première bissectrice $x_i^A = k_i^A$. Dans le cas inverse, où la première bissectrice est au-dessus de la droite présentant la demande résiduelle, la firme i a une capacité suffisante pour satisfaire toute la demande résiduelle. La ligne en gras présente la quantité vendue par la firme i dans les deux situations.

Soit $\phi_j^A(p_i^A)$ la probabilité que le prix de la firme j soit inférieur au prix p_i^A de la firme i sur le marché A :

$$\phi_j^A(p_i^A) = \text{Prob}(p_j^A \leq p_i^A)$$

Les ventes espérées de la firme i sont alors déterminées comme suit :

$$E(x_i^A) = (1 - \phi_j^A(p_i^A)) \min(k_i^A, a - p_i^A) + \phi_j^A(p_i^A) \max(0, \min(k_i^A, a - k_j^A - p_i^A))$$

Le prix de la firme i est inférieur au prix de la firme j avec probabilité $1 - \phi_j^A(p_i^A)$. Dans ce cas, la firme i peut vendre jusqu'à concurrence de sa capacité k_i^A. Avec probabilité $\phi_j^A(p_i^A)$, le prix de la firme i est supérieur au prix de la firme j. Dans ce cas, si la firme j satisfait toute la demande, la firme i ne vend rien. Mais si la firme j est incapable de servir toute la demande, la firme i reçoit la demande résiduelle $a - k_j^A - p_i^A$. Si la capacité de cette dernière est inférieure à la demande résiduelle alors elle vend juste sa capacité.

Il suffit de multiplier l'expression des ventes espérées par le prix associé pour définir le profit espéré de la firme i :

$$\pi_i^A = p_i^A E(x_i^A)$$

Si la firme i joue une stratégie mixte, son profit doit être constant le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$. De ce fait, les profits sont égaux au niveau des deux prix extrêmes de l'intervalle :

$$k_i^A \cdot p_l^A = (a - k_j^A - p_h^A) \cdot p_h^A$$

Pour garantir des profits non nuls et constants le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$, Levitan et Shubik caractérisent les bornes de cet intervalle :

Première caractérisation : $p_h^A < a - k_i^A$

Pour vérifier cette caratérisation, on raisonne par l'absurde. Par définition $\phi_j(p_h^A) = 1$. Ainsi, si on suppose que $p_h^A \geq a - k_i^A$, le profit de la firme i au prix p_h^A, et par conséquent pour tout prix de l'intervalle, est nul :

$$\pi_i^A(p_h^A) = p_h^A(1 - \phi_j(p_h^A))(a - p_h^A) = 0$$

À l'équilibre, chaque joueur joue une meilleure réponse et obtient donc un profit au moins aussi élevé à celui qu'il peut obtenir avec toute autre stratégie. En jouant $p_1^A = (a - k_1^A) > 0$, la firme 1 obtient :

$$\pi_1^A = p_1^A(1 - \phi_2^A)k_1^A > 0$$

En jouant $p_2^A = \frac{a-k_1^A}{2} > 0$, la firme 2 obtient :

$$\pi_2^A = p_2^A[(1 - \phi_1^A)\min(\frac{a + k_1^A}{2}, k_2^A) + \phi_1^A p_2^A] > 0$$

Les deux joueurs doivent donc obtenir un profit strictement positif.

Donc à l'équilibre $p_h^A < a - k_i^A$.

Deuxième caractérisation : $p_l^A \geq a - k_i^A - k_j^A$

Pour prouver cette caractérisation, il faut tout d'abord déterminer l'expression de p_l^A :

$$k_i^A \cdot p_l^A = (a - k_j^A - p_h^A) \cdot p_h^A$$

Or, en fixant son prix à son niveau maximum p_h^A, la firme i aurait le monopole de la demande résiduelle sur le marché A. Dans ce cas, son prix dépend uniquement de la capacité de son adversaire :

$$p_h^A = \frac{a - k_j^A}{2}$$

d'où :

$$p_l^A = \frac{1}{k_i^A}\left(\frac{a - k_j^A}{2}\right)^2$$

Donc, il suffit de prouver que :

$$p_l^A = \frac{1}{k_i^A}\left(\frac{a - k_j^A}{2}\right)^2 \geq a - k_i^A - k_j^A$$

Or, les firmes ont des capacités identiques :$k_i^A = k_j^A = k$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\left(\frac{a-k}{2}\right)^2 &\geq a - 2k \\
\left(\frac{a-k}{2}\right)^2 &\geq ak - 2k^2 \\
(a-k)^2 &\geq 4ak - 8k^2 \\
a^2 - 2ak + k^2 &\geq 4ak - 8k^2 \\
a^2 - 6ak + 9k^2 &\geq 0 \\
(a-3k)^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Ceci est toujours vrai : donc à l'équilibre $p_l^A \geq a - 2k$.

En tenant compte des deux caratérisations, on déduit :

$\forall p^A \in [p_l^A, p_h^A]$, on a :

$$\min(k_i^A, a - p_i^A) = k_i^A$$

et

$$\min(k_i^A, a - k_j^A - p_i^A) = a - k_j^A - p_i^A$$

Ainsi, la firme ayant le prix le plus faible est toujours incapable de satisfaire toute la demande qui s'adresse à elle. Les consommateurs qui n'ont pas pu être servis doivent nécessairement s'adresser à la seconde firme.

Le profit espéré de la firme i peut alors s'exprimer :

$$\pi_i(p_i^A) = p_i^A[(1-\phi_j^A)k_i^A + \phi_j^A(p_i^A)(a - k_j^A - p_i^A)]$$

En réarrangeant les termes, on en déduit que :

$$\phi_j^A(p_i^A) = \text{Prob}(p_j^A \leq p_i^A) = \frac{k_i^A - \pi_i^A/p_i^A}{p_i^A + k_i^A + k_j^A - a} = \frac{k - \pi_i^A/p_i^A}{p_i^A + 2k - a} \qquad (1)$$

L'équilibre du modèle correspond à une densité de probabilité positive qui est fonction des prix et des profits. Étant donné que le profit de la firme i sur le marché A est constant le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$, la détermination de l'équilibre en stratégies mixtes, revient donc à calculer π_i^A, p_l^A et p_h^A.

On a démontré que si la firme i fixe comme prix $p_i^A = p_h^A$, alors elle obtient le monopole de la demande résiduelle. Son prix correspond alors au prix de monopole, lequel dépend donc uniquement de la capacité de la firme j :

$$p_h^A = \frac{a - k_j^A}{2}$$

Puisque le profit de la firme i doit demeurer constant le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$, alors :

$$\pi_i^A = (a - k_j^A)(a - p_h^A - k_j^A)/2 = \left(\frac{a - k_j^A}{2}\right)^2$$

En fixant le prix minimum de l'intervalle, la firme i doit aussi réaliser le même profit en vendant toute sa capacité :

$$\pi_i^A = k_i^A p_l^A = \left(\frac{a - k_j^A}{2}\right)^2$$

On obtient ainsi une expression de p_l^A :

$$p_l^A = \frac{1}{k_i^A}\left(\frac{a - k_j^A}{2}\right)^2$$

En remplaçant π_i^A par son expression dans l'équation (1), on conclut que :

$$\phi_j^A(p_i^A) = \frac{kp_i^A - [(a-k)/2]^2}{p_i^A(p_i^A + 2k - a)}$$

2.2.2 L'équilibre du jeu avec capacités différentes

Levitan et Shubik ont aussi caractérisé l'équilibre mixte lorsque les firmes ont des capacités différentes et que $k_1^A = a > k_2^A$ (ce cas correspond aux deux segments en pointillé de la figure 1.3). Pour déterminer cet équilibre, Levitan et Shubik suivent la même démarche que celle optée dans le cas des capacités identiques. En tenant compte de l'hétérogénéité des firmes au niveau des capacités, le profit de la firme i est défini comme suit :

$$\pi_i^A(p_i^A) = p_i^A[(1-\phi_j^A)\min(k_i^A, a-p_i^A) + \phi_j^A \max(0, \min(k_i^A, a-k_j^A-p_i^A))]$$

Ceci est équivalent à[3] :

$$\pi_i^A(p_i^A) = p_i^A[\min(k_i^A, a-p_i^A) - \phi_j^A \min(k_i^A, a-p_i^A, \max(0, k_i^A+k_j^A-a+p_i^A), \max(k_j^A, a-k_i^A-p_i^A))]$$

Étant donné que $k_1^A = a$ et $k_2^A = k < a$, les profits des firmes deviennent :

$$\begin{aligned}
\pi_1^A(p_1^A) &= p_1^A[\min(a, a-p_1^A) - \phi_2^A \min(a, a-p_1^A, \max(0, a+k-a+p_1^A), \max(k, a-a-p_1^A))] \\
&= p_1^A[(a-p_1^A) - \phi_2^A \min(a-p_1^A, k)] \\
\pi_2^A(p_2^A) &= p_2^A[\min(k, a-p_2^A) - \phi_1^A \min(k, a-p_2^A, \max(0, k+a-a+p_2^A), \max(a, a-k-p_2^A))] \\
&= p_2^A(1-\phi_1^A)\min(k, a-p_2^A)
\end{aligned}$$

[3]Voir p. 40 annexe 1 pour la démonstration.

Les deux firmes ont des fonctions de profit différentes, mais qui dépendent des mêmes paramètres.

Pour garantir des profits positifs à l'équilibre le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$, Levitan et Shubik caractérisent les bornes de cet intervalle :

$$a - p_l \geq a - p_h \geq k$$

En effet, si la firme 1 fixe comme prix le prix maximal de l'intervalle, alors son profit devient :

$$\begin{aligned}\pi_1^A(p_h^A) &= p_h^A[(a - p_h^A) - \phi_2^A(p_h^A)\min(a - p_h^A, k)] \\ &= p_h^A(a - p_h^A - k)\end{aligned}$$

Ainsi pour avoir un profit positif, il faut que $a - p_h^A \geq k$ et par la suite on obtient :

$$a - p_l^A \geq a - p_h^A \geq k$$

En tenant compte des résultats cités ci-dessus, on peut simplifier les expressions des fonctions de profit et déterminer ainsi les expressions de ϕ_1^A et ϕ_2^A :

$$\phi_1^A = \frac{\min(k, a - p_2^A) - \pi_2^A/p_2^A}{\min(k, a - p_2^A)} = \frac{k^A - \pi_2^A/p_2^A}{k^A} \tag{2.1}$$

$$\phi_2^A = \frac{a - p_1^A - \pi_1^A/p_1^A}{\min(k, a - p_1^A)} = \frac{a - p_1^A - \pi_1/p_1^A}{k^A} \tag{2.2}$$

Pour des capacités de production differentes, l'équilibre mixte n'est pas symétrique : il correspond à deux densités de probabilité positives. Définir cet équilibre revient essentiellement à déterminer π_i^A, p_l^A et p_h^A :

Détermination de p_h^A :

Comme la densité de probabilité est une fonction positive du prix, alors :

$$d\phi_2^A/dp_1^A \geq 0$$

En effet, au fur et à mesure que la firme 1 augmente son prix p_1^A sur le marché A, la probabilité que le prix de la firme 2 soit inférieur au prix de la firme 1 augmente et donc ϕ_2^A augmente.

Donc à partir de l'équation (2.2), on déduit :

$$[-1 + (\pi_1^A/(p_1^A)^2)]/k \geq 0$$

Or $\left(\frac{1}{k}\right)$ est un terme strictement positif, alors :

$$(-1 + (\pi_1^A/(p_1^A)^2)) \geq 0$$

ou encore :

$$\pi_1^A(p_1^A) = \pi_1(p_h^A) = p_h^A[a - p_h^A - k] \geq (p_h^A)^2$$

d'où :

$$p_h^A \leq \frac{a-k}{2}$$

Levitan et Shubik suppose que le profit de la firme 1 est constant le long de l'intervalle $[p_l^A, p_h^A]$. Toutefois, toute augmentation du prix au delà de p_h^A entraîne une diminution de son profit :

$$\partial\pi_1^A/\partial p_h^A \leq 0 \Rightarrow a - p_h^A - k + p_h^A(-1) \leq 0$$

d'où :

$$p_h^A \geq \frac{a-k}{2}$$

En tenant compte des deux inégalités, on peut déduire l'expression de p_h^A :

$$p_h^A = \frac{a-k}{2}$$

Le prix maximum que chaque firme peut fixer sur le marché A dépend uniquement de la capacité de la firme 2 ($k_2^A = k$) vu que la firme 1 n'est pas contrainte en capacité ($k_1^A = a$).

Détermination de p_l^A :

Si la firme 1 fixe un prix sur le marché A égale à p_h^A, son profit devient :

$$\pi_1^A(p_h^A) = p_h^A[a - p_h^A - k] = \left(\frac{a-k}{2}\right)^2$$

Supposons que $k = \theta a$ avec $\theta \in]0,1[$, la firme 1 obtient un profit égale à :

$$\pi_1^A(p_h^A) = \left(\frac{a(1-\theta)}{2}\right)^2 = \pi_1^A(p_l^A) = p_l^A(a - p_l^A)$$

ainsi :

$$p_l^A = \frac{a}{2}[1 - \sqrt{\theta(2-\theta)}]$$

d'où les expressions de ϕ_1^A et ϕ_2^A :

$$\phi_1^A = 1 - \left(\frac{a(1 - \sqrt{\theta(2-\theta)}}{2p_2^A}\right)$$

$$\phi_2^A = \frac{a - p_1^A - \left(\frac{a^2(1-\theta)^2}{4p_1^A}\right)}{\theta a}$$

Pour des capacités de production différentes, l'équilibre mixte n'est pas symétrique : il correspond à deux densités de probabilité positives qui varient en fonction des capacités prédéfinies des firmes.

Chapitre 3

Équilibre du modèle dans un contexte multi-marchés

L'équilibre du modèle que nous présentons dans ce travail est un équilibre parfait en sous-jeu. Pour déterminer cet équilibre, on doit calculer les valeurs séquentielles $\pi_i(k_i^A, k_j^A)$ de chaque firme pour chaque sous-ensemble défini dans la figure 1.4. Levitan et Shubik ont déjà calculé les profits d'équilibre dans le cas de capacités identiques (première bissectrice de la figure 1. 3). Supposons, par exemple, que la stratégie de concurrence de la firme 1 sur les deux marchés est déterminée comme suit :

$$k^A = k^B = k$$

$$\frac{a}{3} < k < a$$

et

$$\phi^A(p) = \phi^B(p) = \phi^{LS}(p)$$

où $\phi^m(p)$ est la distribution de probabilité de prix associée au marché m et $\phi^{LS}(p)$ est la distribution de probabilité de prix identifiée par Levitan et Shubik.

Est-il optimal pour la firme 2 d'allouer sa capacité et de fixer ses prix de la même façon que la firme 1 ? Autrement dit, l'équilibre de Levitan et Shubik s'applique-t-il dans un contexte multi-marchés ?

Supposons que la firme 2 suit la même stratégie de prix et de quantité que celle de la firme 1. Son profit total sur les deux marchés serait comme suit :

$$\pi_2^{LS} = p_2^A[(1-\phi_1^A)k + \phi_1^A(a-k-p_2^A)] + p_2^B[(1-\phi_1^B)k + \phi_1^B(a-k-p_2^B)]$$

Toutefois, si la firme 2 divertit une petite unité Δ de sa capacité du marché A vers le marché B, telle que :

$$k_2^A = k - \Delta$$
$$k_2^B = k + \Delta$$

son profit total devient :

$$\begin{aligned}\pi_2' &= p_2^A[(1-\phi_1^A)(k-\Delta) + \phi_1^A(a-k-p_2^A)] + p_2^B[(1-\phi_1^B)(k+\Delta) + \phi_1^B(a-k-p_2^B)] \\ &= \pi_2^{LS} + \Delta \cdot [p_2^B(1-\phi_1^B) - p_2^A(1-\phi_1^A)] \\ &= \pi_2^{LS} + \lambda\end{aligned}$$

où $\lambda = \Delta \cdot [p_2^B(1-\phi_1^B) - p_2^A(1-\phi_1^A)]$.

Quels que soient $p_2^A \in [p_l^A, p_h^A]$ et $p_2^B \in [p_l^B, p_h^B]$, le profit de la firme 2 est toujours constant. Toutefois, le terme λ varie en fonction des prix. Supposons que la firme 2 pratique le plus haut prix sur le marché A et le plus faible prix sur le marché B, telle que : $p_2^A = p_h$ et $p_2^B = p_l$. Dans ce cas, elle assure sa part de marché dans le marché B

et reçoit juste la demande résiduelle du marché A. Ainsi, le terme λ devient :

$$\begin{aligned}\lambda &= \Delta \cdot [p_2^B(1-\phi_1^B) - p_2^A(1-\phi_1^A)] \\ &= \Delta \cdot [p_l(1-\phi_1^B(p_l)) - p_h(1-\phi_1^A(p_h))] \\ &= \Delta \cdot p_l\end{aligned}$$

Ainsi, à la suite d'une réallocation de sa capacité, le profit total de la firme 2 devient :

$$\pi_2' = \pi_2^{LS} + \Delta \cdot p_l$$

Une telle variation accroît le profit de la firme 2. Ainsi, partager la capacité de façon symétrique entre les deux marchés n'est pas une randomisation optimale pour la firme 2. La solution de Levitan et Shubik est un équilibre qui caractérise un cas particulier de sous-jeu propre, mais ne correspond pas à l'équilibre du jeu de notre exemple. Pour déterminer l'équilibre de ce jeu, il faut calculer les valeurs séquentielles pour tous les sous-jeux. Définir cet équilibre revient non seulement à identifier l'équilibre en prix mais aussi à déterminer le choix d'allocation de capacité.

Conclusion

Dans toute analyse déductive, le résultat dépend toujours des hypothèses que l'on pose. Une des hypothèses de Levitan et Shubik est que les firmes se concurrencent sur un seul marché. Nous avons établi que si cette hypothèse est relâchée, l'allocation obtenue à l'équilibre sur un seul marché ne correspond pas à une allocation d'équilibre lorsque les firmes se concurrencent sur deux marchés. La solution de Levitan et Shubik caractérise le sous-jeu propre où les firmes consacrent toute leur capacité au même marché. Pour déterminer l'équilibre en sous-jeu parfait du jeu complet (avec allocation de capacité), on doit traiter tous les cas et déduire ainsi la ou les stratégie(s) de la firme i qui lui assurent le plus grand profit espéré en tenant compte de la stratégie jouée par l'autre firme (même chose pour la firme j). Dans certains cas, le calcul de ces profits se déduit à partir des résultats obtenus par Levitan et Shubik. Dans d'autres le travail reste à faire.

Bibliographie

Beckman. M., (avec l'aide de Dieter Hochstadter), *duopole d'Edgeworth-Bertrand réétudié*, édité par Rudolf Henn, Sonderdruck, Verlag, Anton Hain et Meisenheim, 1965.

Bertrand. J., *Théorie des richesses* : revue des théories mathématiques de la richesse sociale par Léon Walras et recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses par Augustin Cournot, 1883, *Journal des savants.*

Caron. C. et Laye. J., « Equilibre de Cournot-Nash avec contraintes de capacité : une formule explicite », Laboratoire d'Organisation Industrielle Agro-alimentaire, 2002.

Cournot. A., *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* : nouvelle édition avec compléments de Léon Walras, Joseph Bertrand et Vilfredo Pareto, publié avec une introduction et des notes par G. Lutfalaa, Paris, Marcel Rivière, 1938.

Dumez. H. et Jeunemaître. A., « Comprendre la globalisation ». Centre de Recherche en Gestion, École polytechnique, Nuffield College, Oxford, 2000.

Edgeworth F. Y., *Mathematical psychics. An essay on the application of mathematics to the moral sciences*, C.Kegon Paul & Co, Londres, 1881.

Kreps D. M. et Sheinkman J. A., « Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes ». *The Bell Journal of Economics*, Vol. 14, No. 2, automne 1983, pp. 326-337.

Levitan. R et Shubik. M., « Price duopoly and capacity constraints ». *International economic review*, vol. 13, No. 1, 1972, pp. 111-122.

Tirole. J., *Théorie de l'organisation industrielle.* Tome II, Economica, Paris, 1995.

Yildizoglu. M., « Micro-économie : marchés et concurrence ». Université Montesquieu-Bordeaux IV, 2001.

Annexe 1

Dans le modèle de Levitan et Shubik, on donne :

$$\pi_i^A(p^A) = p^A[(1-\phi_j^A)\min(k_i^A, a-p^A) + \phi_j^A \max(0, \min(k_i^A, a-k_j^A-p^A))] \qquad (1)$$

ceci est équivalent à :

$$\pi_i^A(p^A) = p^A[\min(k_i^A, a-p^A) - \phi_j^A \min(k_i^A, a-p^A, \max(0, k_i^A+k_j^A-a+p^A), \qquad (2)$$
$$\max(k_j^A, a-k_i^A-p^A))]$$

On veut comprendre le passage de (1) à (2).

On note que :

$$\begin{aligned}\pi_i^A(p^A) &= p^A[(1-\phi_j^A)\min(k_i^A, a-p^A) + \phi_j^A \max(0, \min(k_i^A, a-k_j^A-p^A))] \\ &= p^A[\min(k_i^A, a-p^A) - \phi_j^A(\min(k_i^A, a-p^A) \\ &- \max(0, \min(k_i^A, a-k_j^A-p^A))]\end{aligned}$$

donc il faut prouver que :

$$\min(k_i^A, a-p^A) - \max(0, \min(k_i^A, a-k_j^A-p^A) = \min(k_i^A, a-p^A, \max(0, k_i^A+k_j^A$$
$$-a+p^A), \max(k_j^A, a-k_i^A-p^A))$$

or, on note que :

$$\begin{aligned}-\max(0, \min(k_i^A, a - k_j^A - p^A) &= \min(0, -\min(k_i^A, a - k_j^A - p^A) \\ &= \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A)\end{aligned}$$

donc on veut prouver que :

$$\min(k_i^A, a - p^A) + \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A) = \min(k_i^A, a - p^A, \max(0, k_i^A + k_j^A \tag{3}$$
$$- a + p^A), \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A))$$

• Supposons que $k_i^A < a - p^A$, alors :

$$\min(k_i^A, a - p^A) = k_i^A$$

et

$$k_i^A + k_j^A - a + p^A = k_j^A - (a - p^A - k_i^A) < k_j^A$$

et puisque $0 < k_j^A$, et $k_j^A \leq \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A)$, on en conclut que :

$$\max(0, k_i^A + k_j^A - a + p^A) < k_j^A \leq \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A) \tag{*}$$

On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}&\min(k_i^A, a - p^A) + \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A) \\ &\qquad = k_i^A + \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A) \\ &\qquad = \min(k_i^A, \max(0, k_i^A + k_j^A - a + p^A)) \\ &\qquad = \min(k_i^A, a - p^A, \max(0, k_i^A + k_j^A - a + p^A)) \\ &\qquad = \min(k_i^A, a - p^A, \max(0, k_i^A + k_j^A - a + p^A), \\ &\qquad \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A))\end{aligned}$$

où $\max(k_j^A, a - k_i^A - p^A)$ peut être ajouté à la dernière ligne à cause de (*).

• Supposons que $k_i^A > a - p^A$, alors :

$$\min(k_i^A, a - p^A) = a - p^A$$

et

$$k_i^A - (a - p^A) > 0$$

ainsi :

$$\begin{aligned}\max(k_j^A, a - k_i^A - p^A) &< k_i^A - (a - p^A) + \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A)(**)\\ &< \max(k_j^A + k_i^A - a + p^A, 0) = \max(0, k_j^A\\ &+ k_i^A - a + p^A)\end{aligned}$$

d'où, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\min(k_i^A, a - p^A) &+ \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A)\\ &= a - p^A + \min(0, \max(-k_i^A, k_j^A - a + p^A)\\ &= \min(a - p^A, \max(a - k_i^A - p^A, k_j^A))\\ &= \min(a - p^A, \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A))\\ &= \min(k_i^A, a - p^A, \max(k_j^A, a - k_i^A - p^A))\\ &= \min(k_i^A, a - p^A, \max(0, k_j^A + k_i^A - a + p^A),\\ &\max(k_j^A, a - k_i^A - p^A))\end{aligned}$$

où $\max(0, k_j^A + k_i^A - a + p^A)$ peut être ajouté à la dernière ligne à cause de (**).

On a donc prouvé que (3) était vraie lorsque $k_i^A < a - p^A$ et lorsque $k_i^A > a - p^A$. Le cas d'égalité se traite de la même manière. Donc (3) est vraie.