



# **Développement d'un nouveau connecteur pour garantir la ductilité des structures composites en bois-béton**

**Mémoire**

**Samuel Cuerrier Auclair**

**Maîtrise en génie civil**  
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© Samuel Cuerrier Auclair, 2016



# Résumé

Les structures composites bois-béton sont largement utilisées aujourd'hui grâce à l'optimisation des performances et du coût de la structure qu'elles permettent. Le comportement de ces structures dépend fortement de la connexion entre les deux matériaux. La conception de ce type d'ouvrage peut rapidement devenir complexe, car il existe une multitude de connecteurs qui ont tout un chacun des comportements qui peuvent être très différents des uns des autres. Dans ce mémoire de maîtrise, un modèle numérique qui permet de calculer avec précision les fréquences naturelles d'une poutre composite est présenté et implémenté. De plus, un modèle qui permet de prédire le comportement statique d'un connecteur ponctuel et d'une poutre composite en tenant compte du comportement non linéaire de chacun des matériaux est présenté et implémenté. Ces modèles reproduisent très bien les essais expérimentaux. Avec les simulations effectuées, il a pu être conclu qu'un connecteur dimensionnable serait l'idéal pour achever une performance ductile d'une poutre composite bois-béton. L'idée de ce type de connecteur est donc explorée et testée en laboratoire. Garantir une performance ductile rend la structure plus sécuritaire et permet ainsi d'augmenter l'utilisation du bois dans le secteur non résidentiel de la construction.





# Abstract

The timber-concrete composite structures are widely used today because they allow the performance optimization and the structure cost. The behaviour of timber concrete composite (TCC) structures depends heavily on the connection between the two materials. The design of this type of structure can quickly become complex because there are a host of connectors whose behaviour may be very different from each other. In this master thesis, a numerical model that can accurately calculate the natural frequencies of a composite beam is introduced and implemented. In addition, a model that predicts the static behaviour of a discrete connector and of a composite beam by taking into account the non linear behaviour of each material is presented and implemented. These models reproduce very well the experimental tests. With simulations, it has been found that an engineered connector would be ideal to provide for a ductile performance of a TCC beam. The idea of this type of connector is explored and tested in a laboratory. Ensure ductile performance makes the structure more secure and thus can increase the use of wood in non-residential construction sector.



# Table des matières

|   |              |
|---|--------------|
| <b>Résumé</b>   | <b>iii</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>v</b>     |
| <b>Table des matières</b>                                 | <b>vii</b>   |
| <b>Liste des tableaux</b>                                 | <b>xi</b>    |
| <b>Liste des figures</b>                                  | <b>xiii</b>  |
| <b>Remerciements</b>                                      | <b>xxi</b>   |
| <b>Avant-propos</b>                                       | <b>xxiii</b> |
| <b>Introduction</b>                                       | <b>1</b>     |
| <b>1 Synthèse bibliographique</b>                         | <b>5</b>     |
| 1.1 Système de connexion bois-béton . . . . .             | 5            |
| 1.1.1 Connecteurs du groupe A . . . . .                   | 5            |
| 1.1.2 Connecteurs du groupe B . . . . .                   | 8            |
| 1.1.3 Connecteur du groupe C . . . . .                    | 10           |
| 1.1.4 Connecteur du groupe D . . . . .                    | 12           |
| 1.1.5 Collage . . . . .                                   | 14           |
| 1.2 Propriété des matériaux . . . . .                     | 14           |
| 1.2.1 Bois . . . . .                                      | 14           |
| 1.2.2 Béton . . . . .                                     | 19           |
| 1.3 Essais de cisaillement . . . . .                      | 25           |
| 1.3.1 Expérimental . . . . .                              | 25           |
| 1.3.2 Méthode analytique . . . . .                        | 29           |
| 1.4 Méthode de calcul des structures mixtes . . . . .     | 30           |
| 1.4.1 Gamma méthode . . . . .                             | 30           |
| 1.4.2 Méthode Frozen shear force . . . . .                | 32           |
| 1.4.3 Modèle matriciel de flexibilité . . . . .           | 34           |
| 1.5 Vibration des poutres composites bois-béton . . . . . | 37           |
| 1.5.1 Critère de vibration . . . . .                      | 38           |
| 1.5.2 Prédiction de la fréquence naturelle . . . . .      | 40           |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 1.6      | Conclusion . . . . .  | 41        |
| <b>2</b> | <b>The Effect of Rotatory Inertia on the Natural Frequencies of Composite Beams</b>   | <b>43</b> |
|          | Notation . . . . .  | 45        |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 47        |
| 2.2      | Static theory of a composite beam with interface slip . . . . .   | 48        |
| 2.2.1    | Slip theory of a composite beam . . . . .   | 49        |
| 2.2.2    | Coupling Euler-Bernoulli beam theory and slip theory . . . . .  | 53        |
| 2.2.3    | General boundary conditions . . . . .   | 53        |
| 2.3      | Dynamics theory of a composite beam with interface slip . . . . .   | 55        |
| 2.3.1    | Vertical acceleration . . . . .   | 55        |
| 2.3.2    | Rotational acceleration . . . . .   | 55        |
| 2.4      | Model formulation within Finite Element Method (FEM) . . . . .  | 57        |
| 2.4.1    | Matrix development . . . . .  | 57        |
| 2.4.2    | Eigenvalue calculation . . . . .  | 59        |
| 2.5      | Model validation . . . . .  | 59        |
| 2.6      | Parametric analysis: Effect of the rotatory inertia on the natural frequencies of a composite beam . . . . .  | 61        |
| 2.6.1    | Effect of the boundary conditions and the span-to-depth ratio . . . . .   | 62        |
| 2.6.2    | Effect of the flexural rigidity parameter and the interaction parameter . . . . .   | 63        |
| 2.6.3    | Effect of the connection stiffness at the ends of the composite beam . . . . .  | 65        |
| 2.6.4    | Simplified formula to take into account the rotatory inertia . . . . .  | 65        |
| 2.7      | Conclusions . . . . .   | 68        |
|          | A. Elementary matrix . . . . .  | 70        |
|          | B. General boundary conditions in the global stiffness matrix . . . . .   | 72        |
| <b>3</b> | <b>Simplified Nonlinear Model for Timber-Concrete Composite Beams</b>   | <b>73</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .  | 76        |
| 3.2      | A new 4-level model for TCC structures . . . . .  | 78        |
| 3.2.1    | Upscaling model #1: from the steel material law (level 1) to the moment-curvature relationship of a steel dowel (level 2) . . . . .                 | 78        |
| 3.2.2    | Upscaling model #2: from the moment-curvature relationship of the dowel (level 2) to the shear force-slip law of the connection (level 3) . . . . . | 79        |
| 3.2.3    | Upscaling model #3: from the connection law (level 3) to the response of the structure (level 4) . . . . .  | 81        |
| 3.3      | Model Validation . . . . .  | 86        |
| 3.3.1    | Upscaling model #1 . . . . .  | 86        |
| 3.3.2    | Upscaling model #2 . . . . .  | 86        |
| 3.3.3    | Upscaling model #3 . . . . .  | 89        |
| 3.4      | Structural analysis and discussion . . . . .  | 93        |
| 3.4.1    | Evolution of the integrity in the concrete slab . . . . .   | 93        |
| 3.4.2    | Moment and normal force distributions in the TCC beam . . . . .   | 96        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.5      | Effect of the dowel diameter . . . . .                                    | 98         |
| 3.6      | Conclusion . . . . .  | 100        |
|          | A. Elementary stiffness matrix of Euler-Bernoulli beam . . . . .          | 103        |
|          | B. Elementary stiffness matrix of the composite beam . . . . .            | 104        |
| <b>4</b> | <b>A New Composite Connector for Timber-Concrete Composite Structures</b> | <b>107</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .  | 110        |
| 4.2      | New connector concept and theoretical background . . . . .                | 112        |
|          | 4.2.1 Concept of a new composite connector . . . . .                      | 112        |
|          | 4.2.2 Background on composite beam theory . . . . .                       | 112        |
| 4.3      | Experimental tests on the new connector . . . . .                         | 114        |
|          | 4.3.1 Materials . . . . .   | 114        |
|          | 4.3.2 Fabrication of the test specimens . . . . .                         | 114        |
|          | 4.3.3 Test procedure . . . . .  | 115        |
|          | 4.3.4 Test results . . . . .  | 115        |
| 4.4      | Modelling of the shear tests . . . . .                                    | 119        |
|          | 4.4.1 Model parameters . . . . .  | 119        |
|          | 4.4.2 Analysis results . . . . .  | 122        |
| 4.5      | Design for ductile failure of TCC beams . . . . .                         | 123        |
| 4.6      | Conclusion . . . . .  | 126        |
|          | <b>Conclusion</b>   | <b>127</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>  | <b>129</b> |



# Liste des tableaux

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.1 | Propriétés mécaniques élastiques de certaines essences de résineux (1) et feuillus (2) (Navi et Heger [74]) . . . . . | 19  |
| 1.2 | Résistances prévues et module élastique de bois lamellé-collé en MPa (CSA-O86 [7]) . . . . .                          | 20  |
| 1.3 | Composition classique du béton ordinaire, du BHP et du BFUP (Guenet [55])   | 21  |
| 1.4 | Propriétés générales du béton ordinaire, du BHP et du BFUP (Guenet [55]) .  | 22  |
| 2.1 | The first ten frequencies of the P-P beam (rad/s) . . . . .   | 61  |
| 2.2 | The first ten frequencies of the C-P beam (rad/s) . . . . .   | 61  |
| 2.3 | The first ten frequencies of the C-C beam (rad/s) . . . . .   | 61  |
| 2.4 | The first ten frequencies of the C-F beam (rad/s) . . . . .   | 62  |
| 2.5 | Fixed or free boundary condition . . . . .  | 72  |
| 3.1 | Material proprieties of the dowels [MPa] . . . . .  | 86  |
| 3.2 | Comparison of the experimental and predicted load-deflection performance of TCC beam . . . . .                        | 91  |
| 3.3 | Connection proprieties . . . . .  | 99  |
| 3.4 | Spacing of dowels and the beam performance . . . . .  | 100 |
| 4.1 | Average values of mechanical properties of materials used in shear tests (MPa)  | 114 |
| 4.2 | Configurations of the tested connectors . . . . .   | 116 |
| 4.3 | Shear test results . . . . .  | 118 |
| 4.4 | Performance parameters of TCC beams with various connectors . . . . .   | 125 |





# Liste des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Exemple de connexion bois-béton : (A1) Clou ; (A2) Barre d'armature collée ; (A3) Vis ; (A4) Vis inclinée ; (B1) Anneau fendu ; (B2) Plaques dentées ; (B3) Tube d'acier ; (B4) Plaque métallique en acier perforé ; (C1) Entaille ronde dans le bois avec attache empêchant le décollement ; (C2) Entaille carrée dans le bois avec attache empêchant le décollement ; (C3) Entaille sous forme de coupe avec barre d'acier précontraint ; (C4) Planches de bois clouées pont et plaques de cisaillement d'acier fendu à travers les planches profondes ; (D1) Treillis d'acier collé dans le bois ; (D2) Plaque d'acier collé dans le bois . . . . . | 6  |
| 1.2  | Différents types de clous et vis testée par Ahmadi et Saka [13] . . . . .  | 7  |
| 1.3  | Direction des contraintes principales (Nežerka [75]) . . . . .   | 7  |
| 1.4  | Brevet d'invention de Welch [103] . . . . .  | 8  |
| 1.5  | Brevet d'invention de Grimaud [54] . . . . .   | 9  |
| 1.6  | Brevet d'invention de Raymond [85] . . . . .   | 9  |
| 1.7  | Brevet d'invention de Bettex [18] . . . . .  | 10 |
| 1.8  | Brevet d'invention de Schaub [91] . . . . .  | 11 |
| 1.9  | Brevet d'invention de Deperraz [36] . . . . .  | 11 |
| 1.10 | Brevet d'invention de Molard <i>et al.</i> [70] . . . . .  | 12 |
| 1.11 | Brevet d'invention de Martinotta [66] . . . . .  | 12 |
| 1.12 | Connecteur plaque d'acier testé par Piazza et Ballerini [82] (dimensions en mm) . . . . .  | 13 |
| 1.13 | Brevet d'invention de Bathon et Bathon [17] . . . . .  | 13 |
| 1.14 | Surface de rupture près de la ligne de colle . . . . .   | 14 |
| 1.15 | Potentiel de réchauffement climatique d'une poutre analysé avec le logiciel ATHENA <sup>TM</sup> [26] . . . . .  | 15 |
| 1.16 | Structure générale d'un tronc d'arbre (Bary-Langer et Nebout [15]) . . . . .   | 16 |
| 1.17 | Les trois directions principales du bois (Cloutier [31]) . . . . .   | 17 |
| 1.18 | Propriétés mécaniques d'un solide . . . . .  | 18 |
| 1.19 | Loi typique de bois (Barbier <i>et al.</i> [14]) . . . . .   | 20 |
| 1.20 | Loi linéaire pour le béton en compression . . . . .  | 22 |
| 1.21 | Loi parabolique pour le béton en compression . . . . .   | 23 |
| 1.22 | Loi de Popovics pour le béton en compression . . . . .   | 23 |
| 1.23 | Loi de Popovics pour béton à haute résistance en compression . . . . .   | 24 |
| 1.24 | Loi de traction pour du béton standard . . . . .   | 25 |
| 1.25 | Loi de traction pour du BFUP (Guenet [55]) . . . . .   | 25 |
| 1.26 | Exemple de loi de connecteur . . . . .   | 26 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.27 | Configuration pour essai de cisaillement symétrique . . . . .  | 26 |
| 1.28 | Configuration pour essai de cisaillement asymétrique . . . . .   | 27 |
| 1.29 | Procédure de chargement [1] . . . . .  | 28 |
| 1.30 | Modélisation de la connexion (adapté de Gelfi <i>et al.</i> [44]) . . . . .  | 29 |
| 1.31 | Modélisation de la rupture de la connexion (adapté de Gelfi <i>et al.</i> [44]) . . . . .  | 30 |
| 1.32 | Distribution des contraintes sur une poutre composite (adapté de Lukaszewska [65]) . . . . .   | 32 |
| 1.33 | Méthode Frozen shear force (Zhang [107]) . . . . .   | 33 |
| 1.34 | Sous-système de la méthode matricielle . . . . .   | 35 |
| 1.35 | Profil du moment causé par les deux sous-systèmes . . . . .  | 37 |
| 2.1  | (a) Cross section; (b) applied loads, moments and forces of a composite beam . . . . .   | 50 |
| 2.2  | Slip component due to the axial force and rotation . . . . .   | 51 |
| 2.3  | General boundary conditions at the end of a composite beam . . . . .   | 54 |
| 2.4  | Longitudinal displacement of each layer . . . . .  | 56 |
| 2.5  | Two-layer composite beam used for validation ( $m_a=34.5$ kg/m, $m_b=5.25$ kg/m, $E_a=12$ GPa, $E_b=8$ GPa, $G_a=5$ GPa, $G_b=3$ GPa, $K=50$ MPa) . . . . .  | 60 |
| 2.6  | Effect of the RI, the boundary conditions and the span-to-depth ratio . . . . .  | 63 |
| 2.7  | Effect of the RI, the flexural rigidity parameter ( $EI_\infty/EI_0$ ) and the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/H$ ) . . . . .   | 64 |
| 2.8  | Effect of the RI, the interaction parameter ( $\alpha L$ ) and the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/H$ ) . . . . .   | 64 |
| 2.9  | Effect of the slip stiffness at the end of the beam ( $K_{s,dl}$ ) . . . . .   | 66 |
| 2.10 | Effect of the rotational stiffness at the end of the beam ( $K_{\theta,dl}$ ) . . . . .  | 66 |
| 2.11 | Combined effect of the connection stiffness ( $K_{s,dl}$ ) and the rotational stiffness ( $K_{\theta,dl}$ ) at the end of the beam . . . . .   | 67 |
| 2.12 | Comparison between the dimensionless numerical curve and the approximate curve . . . . .   | 68 |
| 3.1  | General algorithm of the proposed 4-level model . . . . .  | 78 |
| 3.2  | Visual representation of the upscaling #1 algorithm . . . . .  | 79 |
| 3.3  | Timber-concrete connection with a steel dowel (after Gelfi <i>et al.</i> [44]) and its model with a beam on a Winkler elastic foundation in the initial state (a and b) and in the deformed state (c and d). . . . . | 80 |
| 3.4  | Experimental curves for evaluation of wood stiffness $k_w$ [44] . . . . .  | 81 |
| 3.5  | Section properties of a composite beam . . . . .   | 82 |
| 3.6  | Numerical layer discretization of the concrete slab for evaluating $EI_c$ , $E_c A_c$ and $d_c$ . . . . .  | 84 |
| 3.7  | Evaluation of the secant stiffness ( $K^{(n)}$ ) of the connection . . . . .   | 84 |
| 3.8  | Load on a composite beam . . . . .   | 86 |
| 3.9  | Dowel properties . . . . .   | 87 |
| 3.10 | Experimental [45] and calculated shear force vs. slip curves for timber-concrete connections . . . . .   | 88 |
| 3.11 | Configuration and material proprieties of a TCC beam tested by Gelfi et Guiriani [45] . . . . .  | 89 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.12 | Material law for concrete . . . . .   | 90  |
| 3.13 | Experimental [45] and calculated load vs. deflection curves for a TCC beam . . . . .  | 92  |
| 3.14 | Experimental [45] and calculated relative slip at the timber-concrete interface . . . . .   | 93  |
| 3.15 | Evolution of integrity in the concrete slab in TCC beam at mid-span . . . . .   | 94  |
| 3.15 | Evolution of damage in the concrete slab along the span of TCC beam . . . . .   | 96  |
| 3.15 | Moment-curvature relationships in TCC beam . . . . .  | 98  |
| 3.16 | Normal force vs. curvature relationship in TCC beam . . . . .   | 99  |
| 3.17 | Connection laws for steel dowels . . . . .  | 99  |
| 3.18 | Calculated load vs. deflection curves of TCC beams with different diameter and spacing of dowels . . . . .  | 100 |
| 4.1  | Load vs. slip curves of various connectors (After Lukaszewska [65]) . . . . .   | 110 |
| 4.2  | Timber-concrete connection with a steel dowel (after Gelfi <i>et al.</i> [44]) and its Winkler model in the initial state (a and b) and in the deformed state (c and d) . . . . . | 113 |
| 4.3  | Experimental curves for the evaluation of wood foundation stiffness $k_w$ (Gelfi <i>et al.</i> [44]) . . . . .  | 113 |
| 4.4  | Geometry of the composite connector . . . . .   | 115 |
| 4.5  | Shear test set-up . . . . .   | 116 |
| 4.6  | View of the connection surfaces after failure . . . . .   | 118 |
| 4.7  | Material laws of UHPFRC . . . . .   | 120 |
| 4.8  | Bending test on UHPFRC beam . . . . .   | 121 |
| 4.9  | Material laws of steel cores . . . . .  | 121 |
| 4.10 | Calculated vs. experimental load-slip curves . . . . .  | 122 |
| 4.11 | Calibrated vs. experimental load-slip curves . . . . .  | 124 |
| 4.12 | Configuration and material properties of the analysed TCC beam . . . . .  | 124 |
| 4.13 | Calculated load-deflection curves of TCC beams with various connectors . . . . .  | 125 |



*À toute ma famille et mes amis*



La vie, c'est comme une  
bicyclette, il faut avancer pour ne  
pas perdre l'équilibre

---

Albert Einstein





# Remerciements

La réalisation de ce travail de maîtrise n'aurait pas été possible sans la précieuse collaboration de plusieurs personnes. Je pense surtout entre autres à mon directeur de recherche Luca Sorelli pour sa grande disponibilité, son grand intérêt pour mes résultats, ces conseils ainsi que son support dans la réalisation des articles. Mes remerciements s'adressent aussi à l'endroit de mon codirecteur, Alexander Salenikovich, où ses conseils pour ma rédaction m'ont été d'un grand aide et mon ainsi permis de mener à terme ce mémoire.

Je ne pourrais également passer à côté de mes amis et collègues qui grâce à nos discussions portant sur divers sujet en lien à nos maîtrises communes m'ont permis d'approfondir ma compréhension sur divers aspect de ma maîtrise et ainsi me sauver un temps considérable en plus de créer une bonne ambiance de travail au bureau. Je pense entre autres à Jessy Frech-Baronet, Youri Duhamel-Labrecque, Marc-Antoine Baril et Benoit Gendron.

Je tiens également à remercier la chaire de recherche sur la construction écoresponsable (CIRCERB) en bois pour leur soutien financé. Mes remerciements vont également au titulaire du CIRCERB, Pierre Blanchet, pour toutes les opportunités qu'il a su créer pour les étudiants du CIRCERB.

Je remercie également Mario Fafard pour son soutien et son aide pour l'écriture de mon premier article.

Je ne saurais également passer sous silence, ma famille ainsi que ma conjointe, pour leur constant soutien depuis le début du projet et ainsi que leur patience pour avoir dû endurer mes monologues concernant mon sujet de maîtrise.



# Avant-propos

Ce mémoire de maîtrise fait partie d'un projet stratégique de la chaire industrielle de recherche sur la construction écoresponsable en bois (CIRCERB). Le CIRCERB concentre leur recherche selon 3 thèmes : concevoir, construire et opérer. Le présent travail fait partie du thème construire et a été sous la direction de Luca Sorelli, professeur au département de génie civil et des eaux, et sous la codirection de Alexander Salenikovich, professeur au département des sciences du bois et de la forêt, tous deux de l'Université Laval. Mario Fafard est également coauteur sur le premier article présenté et a participé principalement au développement mathématique dans cet article. Mario Fafard est professeur au département de génie civil et des eaux et est également titulaire du centre de recherche sur l'aluminium (REGAL).

Ce document est présenté sous la forme d'un mémoire par article. On y retrouve dans cet ouvrage trois articles écrits en anglais présenté dans les chapitres 2, 3 et 4, respectivement :

- Article I

**Samuel C. Auclair**, Luca Sorelli, Alexander Salenikovich, Mario Fafard (2015), The Effect of Rotatory Inertia on the Natural Frequencies of Composite Beams, accepté pour publication à la revue *Journal of Sound and Vibration*

- Article II

**Samuel C. Auclair**, Luca Sorelli, Alexander Salenikovich (2015), Simplified Nonlinear Model for Timber-Concrete Composite Beams, accepté pour publication à la revue *International Journal of Mechanical Sciences*

- Article III

**Samuel C. Auclair**, Luca Sorelli, Alexander Salenikovich (2015), A New Composite Connector for Timber-Concrete Composite Structures, accepté pour publication à la revue *Construction and Building Materials*

Le premier article traite surtout le calcul des fréquences naturelles d'une poutre composite selon différentes conditions aux appuis avec l'effet de l'inertie rotationnelle. Les équations

gouvernantes d'une poutre composite sont développées et les matrices élémentaires d'un modèle par éléments finis unidimensionnel sont ensuite dérivées.

Le deuxième article traite d'un modèle à quatre niveaux afin de tenir du comportement non linéaire de la connexion entre le bois et le béton ainsi que du comportement non linéaire du béton. Grâce à cette méthode, il est possible de modéliser assez fidèlement le comportement en flexion d'une poutre composite bois-béton. La dernière étape du modèle présentée est disponible avec une interface graphique sur le site internet du CIRCERB.

Le troisième article traite d'un connecteur composite dimensionnable pouvant assurer une rupture ductile d'une poutre composite bois-béton. Ce connecteur a été inventé au courant de la maîtrise et l'idée est venue grâce aux simulations faites avec la méthode présentée dans le deuxième article. Une demande de brevet a été faite sur ce connecteur en septembre 2015 aux États-Unis d'Amérique.

Le travail de ce mémoire a également été présenté aux conférences suivantes :

**Samuel C. Auclair**, Luca Sorelli, Alexander Salenikovich (2015), Un connecteur innovateur pour garantir la ductilité des structures bois/béton, *22e Colloque sur la progression de la recherche québécoise sur les ouvrages d'art*, 5 et 6 mai

**Samuel C. Auclair**, Luca Sorelli, Alexander Salenikovich (2014), Conception ductile des structures composites bois/Béton, *Présentation CRIB, Centre de recherche sur les infrastructures en béton*, 4 décembre

# Introduction

## Contexte et problématique industrielle

Dans un contexte de changement climatique en partie causé par l'émission de gaz à effet de serre issu de plusieurs secteurs, l'utilisation du bois comme matériau de construction peut permettre de réduire la quantité de gaz à effet de serre émis par le secteur de la construction. En effet, le bois est dit comme un matériau carboneutre contrairement aux bétons armés et à l'acier. La Chaire industrielle de recherche sur la construction écoresponsable en bois (CIRCERB) a pour but de diminuer le potentiel d'impact de changement climatique émis par le secteur de la construction en concentrant leur projet de recherche suivant 3 thèmes : concevoir, construire et opérer.

Pour toutes les raisons mentionnées, il est donc important de proposer, dans une démarche d'écoconception, des solutions techniques innovantes intégrant du bois, étant donné les réserves de carbone que peuvent permettre les constructions de ce matériau. De plus, il est également raisonnable de croire, dans une vision de quelques décennies, que les nouvelles constructions intégreront plus de bois qu'aujourd'hui grâce à l'aspect développement durable qu'amène ce type de structure.

Le contexte actuel est donc favorable à ce projet de maîtrise où celui-ci est situé sous le thème construire du CIRCERB. Les normes d'acier et de béton obligent les ingénieurs à concevoir des structures ductiles, mais ce n'est pas le cas pour le bois dont le comportement est défini par la nature et non par l'intervention de l'homme. Dans un but d'optimisation de la performance structurale, d'isolation acoustique et de durabilité, une poutre composite bois-béton est un excellent choix. En effet, l'ajout d'une dalle de béton sur une poutre de bois permet d'augmenter la rigidité de la poutre, de diminuer les vibrations, d'améliorer l'isolation acoustique en plus d'augmenter la ductilité lorsque la poutre composite est conçue en conséquence. Puisque la connexion entre le bois et le béton est souvent une connexion ductile, il est donc possible d'assurer une rupture ductile de la poutre en s'assurant que le

connecteur atteint sa pleine résistance avant la rupture du bois ou du béton. Cependant, au Canada, il n'existe aucune norme de conception pour les structures bois-béton.

## **Objectif du mémoire**

L'objectif de ce mémoire est donc d'approfondir les connaissances sur le comportement des poutres bois-béton tant d'un point de vue du comportement dynamique que du comportement statique tout en fournissant une solution pour garantir une rupture ductile d'une poutre composite bois-béton. La réalisation de cet objectif est décomposée comme suite :

1. développer un modèle pour calculer la fréquence naturelle d'une poutre composite qui tient compte de l'inertie rotationnelle ;
2. développer un modèle pour calculer la déformation d'une poutre composite lors de perte d'action composite ;
3. développer un modèle qui prévoit le comportement en cisaillement d'un connecteur ponctuel ;
4. valider les modèles par des essais en laboratoire et ;
5. proposer une solution viable pour assurer une rupture ductile de la poutre composite bois-béton.

Les modèles développés serviront à prédire si une poutre composite, selon une géométrie donnée, des matériaux donnés et un connecteur donné, se comportera bien en service et à l'ultime en plus de prédire la ductilité de la poutre.

## **Organisation du mémoire**

Le premier chapitre du mémoire présente une synthèse bibliographique, des systèmes de connexion bois-béton, des propriétés du bois et du béton pour modélisation, des essais de cisaillement ainsi que des méthodes de calculs.

Les équations gouvernantes d'une poutre composite sont ensuite développées dans le chapitre 2. Les matrices élémentaires pour un modèle par éléments finis unidimensionnel sont ensuite développées selon ces équations gouvernantes. Grâce à ce modèle par éléments finis il est possible de calculer les fréquences naturelles d'une poutre composite selon n'importe quel type de retenue aux extrémités. Ce chapitre permet la réalisation du premier sous-objectif.

Dans le troisième chapitre, un modèle à quatre niveaux est présenté. Ce modèle permet de tenir compte du comportement non linéaire de la connexion entre le bois et le béton ainsi que du comportement non linéaire du béton. Les résultats obtenus ont été validés par des essais en laboratoire disponible en littérature. Ce chapitre permet la réalisation des sous-objectifs 2 et 3 et partiellement le 4.

Le quatrième chapitre présente un nouveau connecteur inventé dans le cadre de ce projet de maîtrise. Il s'agit d'un connecteur composite dimensionnable pouvant assurer la performance ductile d'une poutre composite bois-béton. Les résultats des essais de cisaillement sont présentés et analysés. Ce chapitre permet de réaliser partiellement le sous-objectif 4 et de réaliser le sous-objectif 5.

Ce mémoire a à la fois un caractère théorique, numérique et expérimental. Cette démarche est laborieuse, mais permet d'évaluer la validité des modèles développés de la façon la plus éclairée possible. Ce mémoire constitue une contribution originale visant une meilleure compréhension du comportement mécanique des structures composites bois-béton en plus de proposer une solution viable afin de garantir un minimum de ductilité aux structures bois-béton.





# Chapitre 1

## Synthèse bibliographique

Le présent chapitre passe en revue les informations nécessaires pour se familiariser avec les poutres composites bois-béton. Tout d'abord, les connecteurs sont présentés puisqu'il s'agit d'un élément clé pour l'étude d'une poutre composite bois-béton. Ensuite, les propriétés des matériaux, soit le bois et le béton, sont présentées aux fins de modélisation. Ensuite, les méthodes pour effectuer des essais de cisaillement expérimental et analytique sont présentées. Quelques méthodes de calcul existantes pour prédire le comportement d'une poutre composite sont survolées dans la dernière section.

### 1.1 Système de connexion bois-béton

Les connecteurs bois-béton les plus communément utilisés ont été originalement classifiés par Ceccotti [24] en 1995. Quatre groupes de connecteur ont été formés où ceux-ci vont du plus rigide au moins rigide. Le groupe A présente la plus faible rigidité tandis que le groupe D présente la plus grande rigidité. La figure 1.1 résume de classement fait par Ceccotti [24].

#### 1.1.1 Connecteurs du groupe A

Les connecteurs du groupe A ont l'avantage d'être économiques et faciles à installer, mais comme mentionnés par Ceccotti [24], ces connecteurs sont considérés comme les moins rigides. Puisque les connecteurs de ce groupe sont des connecteurs locaux, les efforts de cisaillement entre le bois et le béton engendrent des contraintes locales qui peuvent causer de la fissuration du béton à l'endroit du connecteur ou l'enfoncement du connecteur dans le bois.

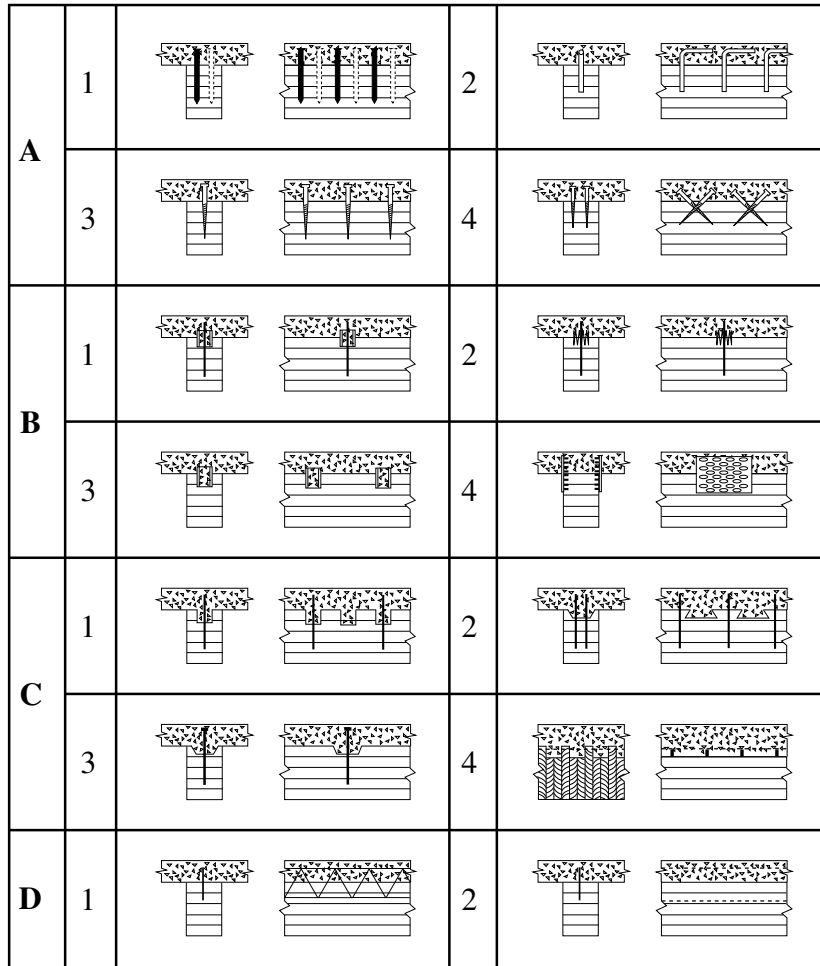


FIGURE 1.1 – Exemple de connexion bois-béton : (A1) Clou ; (A2) Barre d’armature collée ; (A3) Vis ; (A4) Vis inclinée ; (B1) Anneau fendu ; (B2) Plaques dentées ; (B3) Tube d’acier ; (B4) Plaque métallique en acier perforé ; (C1) Entaille ronde dans le bois avec attache empêchant le décollement ; (C2) Entaille carrée dans le bois avec attache empêchant le décollement ; (C3) Entaille sous forme de coupe avec barre d’acier précontraint ; (C4) Planches de bois clouées pont et plaques de cisaillement d’acier fendu à travers les planches profondes ; (D1) Treillis d’acier collé dans le bois ; (D2) Plaque d’acier collé dans le bois

Ahmadi et Saka [13] ont testé dix types de clous et de vis de grande résistance sur lesquels ils ont fait varier la profondeur de pénétration du connecteur dans le bois selon le diamètre,  $d$ . La gamme de profondeur testée varie de  $8$  à  $15d$ . Les résultats des essais de cisaillement montrent que la résistance des connecteurs augmente jusqu'à une profondeur de  $11d$  pour ensuite se stabiliser. La figure 1.2 montre les différents clous et vis testés par Ahmadi et Saka [13].

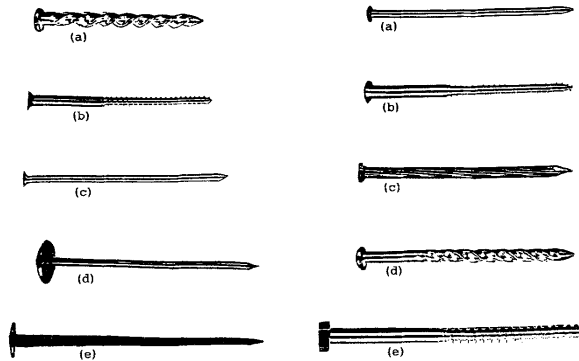


FIGURE 1.2 – Différents types de clous et vis testée par Ahmadi et Saka [13]

Les vis peuvent également être inclinées à  $\pm 45^\circ$  dans le but d'augmenter la rigidité de la connexion. Selon Timmermann et Meierhofer [98] une telle inclinaison peut augmenter la rigidité du connecteur d'un facteur de trois comparé à une vis verticale, où ce connecteur agit essentiellement en flexion. Le fait d'arranger les connecteurs en angle permet de former un treillis virtuel, où les connecteurs sont les diagonales du treillis. La figure 1.3 montre l'effet treillis occasionné par les connecteurs en angle sur le logiciel ADINA Strucutres.

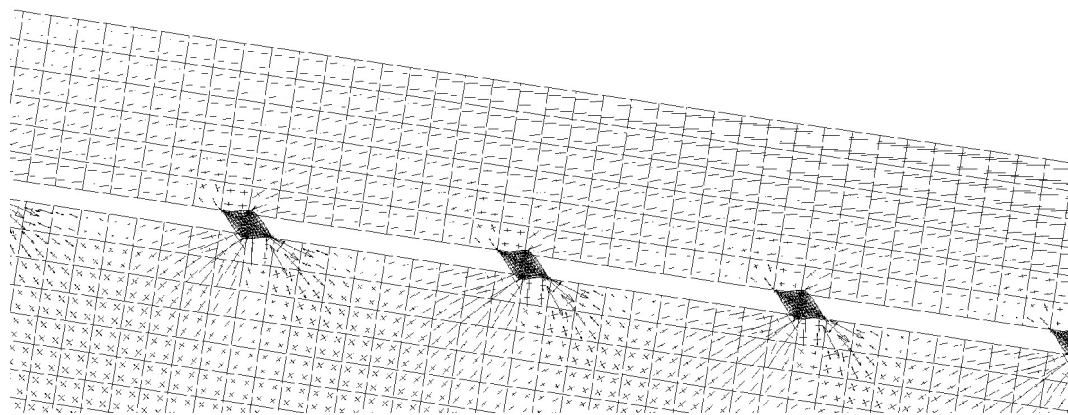


FIGURE 1.3 – Direction des contraintes principales (Nežerka [75])

### 1.1.2 Connecteurs du groupe B

Les connecteurs du groupe B présentent une plus grande rigidité et résistance que les connecteurs du groupe A (Blaß et Schlager [19]). La principale raison de ce meilleur comportement est que le type de rupture des petits connecteurs est plus souvent un type de rupture où il y a beaucoup d'enfoncement dans le bois tandis que le type de rupture des connecteurs du groupe B est plus souvent des ruptures par cisaillement dans le connecteur ou par fissuration du béton. Plusieurs auteurs de brevet se trouvent dans le groupe B selon le classement de Ceccotti [24]. On y trouve entre autres les systèmes de connexion de Welch [103], Grimaud [54], Raymond [85] et Bettex [18].

Pour améliorer la ductilité du connecteur tout en ayant une connexion rigide, Welch [103], en 1984, a proposé un connecteur sous forme de tube métallique avec fente pour permettre un glissement relatif entre le bois et le béton (Fig. 1.4). Un trou est foré dans le bois pour permettre la mise en place du connecteur.

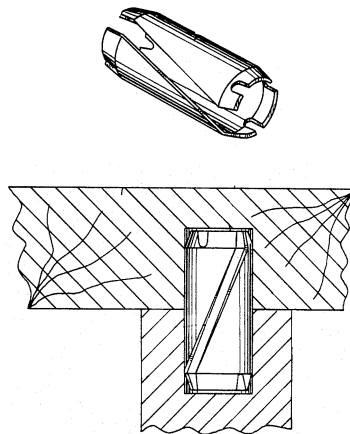


FIGURE 1.4 – Brevet d'invention de Welch [103]

Grimaud [54], en 1989, peu de temps après Welch [103], a proposé un connecteur formé d'un tube d'acier suffisamment grand pour permettre le remplissage du béton lors du coulage et ainsi renforcer le connecteur (Fig. 1.5). Une rainure circulaire est creusée dans le bois pour permettre d'enfoncer le tube métallique dans le bois tout en laissant subsister un noyau de bois.

Raymond [85], en 1995, a amélioré la résistance du connecteur à l'arrachement en changeant la section du tube de Grimaud. La portion du tube situé dans le bois est collée au moyen d'une résine tandis que l'autre partie est noyée dans le béton (Fig. 1.6). Le connecteur présente

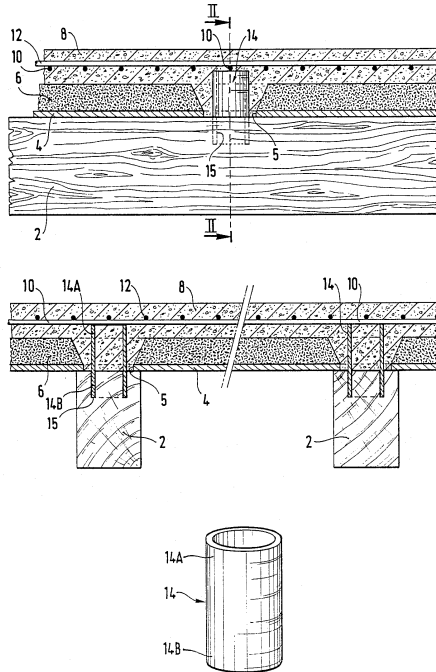


FIGURE 1.5 – Brevet d’invention de Grimaud [54]

également une partie intermédiaire où la section est réduite ce qui permet un glissement relatif entre le bois et le béton et ainsi empêche une rupture fragile du connecteur.

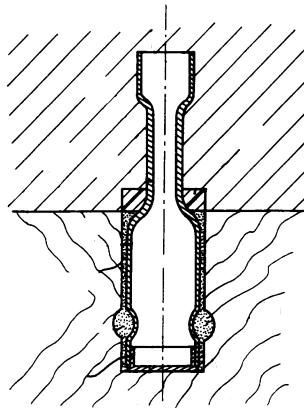


FIGURE 1.6 – Brevet d’invention de Raymond [85]

Toujours dans la catégorie des connecteurs du groupe B, Bettex [18], en 1994, propose d’utiliser des plaques à pointes métalliques pour assurer la connexion entre le bois et le béton. Ce type de plaque est fréquemment utilisé pour assurer les connexions bois-bois dans la construction de charpentes légères. Selon l’utilisation proposée par Bettex [18], une partie

des pointes est enfoncée dans le bois et une autre partie des pointes est noyée dans le béton (Fig. 1.7).

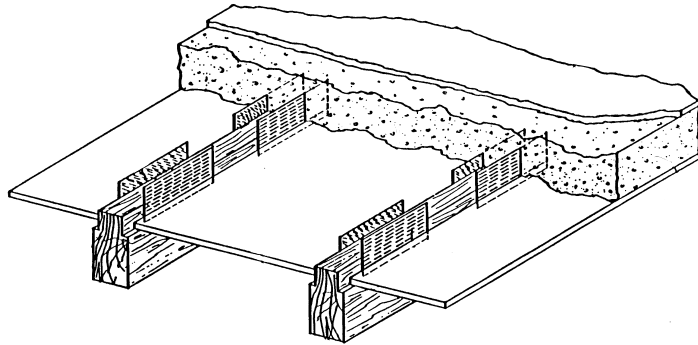


FIGURE 1.7 – Brevet d’invention de Bettex [18]

### 1.1.3 Connecteur du groupe C

Les connecteurs du groupe C, selon le classement de Ceccotti [24], sont tous des connecteurs par entailles. Les entailles sont d’abord usinées dans le bois et sont ensuite remplies de béton lors de la coulée pour ainsi renforcer la rigidité et la résistance de la connexion. Les entailles peuvent avoir diverses formes et peuvent être renforcées avec des clous ou des vis.

Schaub [91], en 1931, dans le but de proposer une solution alternative aux structures acier/béton, suggère d’effectuer des entailles dentées, crénelées ou trouées dans le bois afin d’empêcher le glissement relatif entre le bois et le béton. Afin de renforcer le béton dans les entailles de bois, Schaub [91] propose de rajouter des étriers d’acier ou des vis d’acier enfoncé dans le bois pour éviter la rupture en cisaillement du béton à l’endroit de l’entaille (Fig. 1.8).

Deperraz [36], en 1998, dans le but d’avoir une action composite se rapprochant le plus près possible d’une action composite totale, propose des entailles à section variable. Ces entailles sont maximales près de la dalle de béton et finissent en pointe fine à l’endroit où les efforts de cisaillement horizontaux sont maximums dans le bois (Fig. 1.9). Ce profil d’entaille correctement orienté et renforcé permet une action composite très forte tout en ne diminuant pas la résistance en cisaillement du bois.

À la même année que Deperraz, Molard *et al.* [70], propose une autre technique de connexion par entaille. Celle-ci consiste à assembler des lattes de bois entre elles par clouage, vissage ou collage de manière à ce qu’au moins une latte sur deux soit plus haut que les chants supérieurs des lattes juxtaposées pour créer des rainures longitudinales (Fig. 1.10). De plus, des

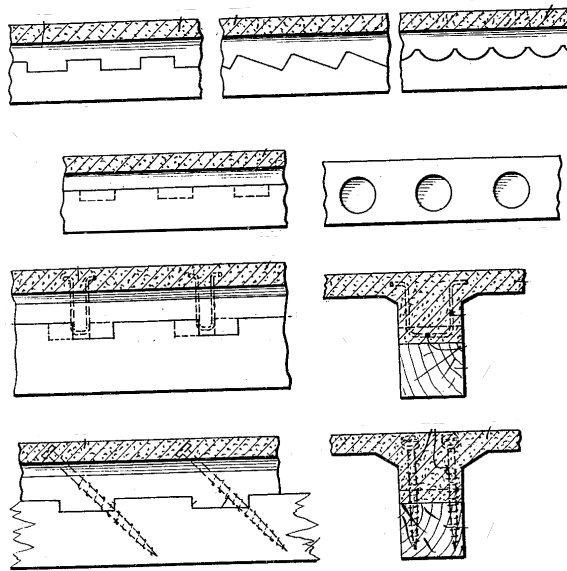


FIGURE 1.8 – Brevet d’invention de Schaub [91]

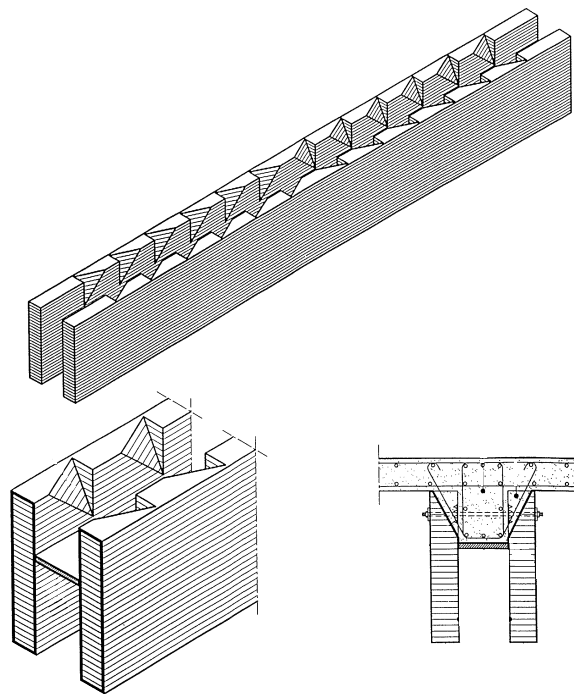


FIGURE 1.9 – Brevet d’invention de Deperraz [36]

connecteurs sur chacune des lattes saillantes sont disposés transversalement. Ces connecteurs peuvent être par exemple des chevilles de bois ou des tubes métalliques.

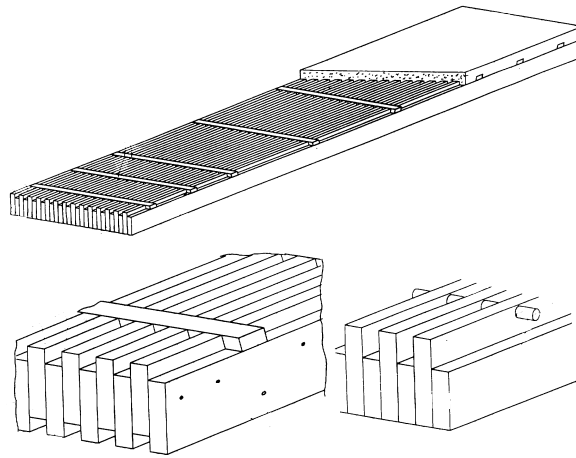


FIGURE 1.10 – Brevet d’invention de Molard *et al.* [70]

Toujours dans le but d’avoir une bonne action composite avec une bonne résistance, Martinotta [66], en 2005, propose de renforcer les entailles de forme trapézoïdale dans le bois par des éléments d’acier de section identique (Fig. 1.11). Martinotta juge que son système est à la fois économique et accélère le temps de construction en chantier, car les éléments d’acier sont installés à la main sans aucun besoin d’outil.

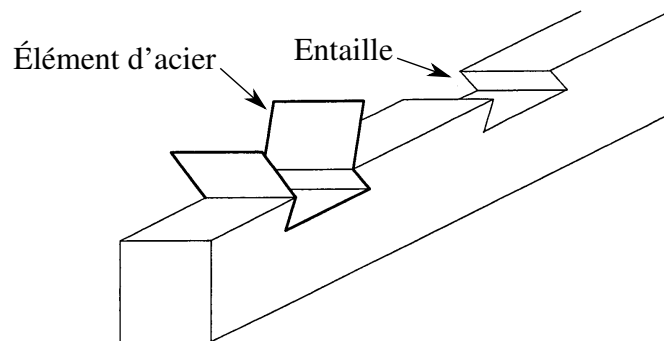


FIGURE 1.11 – Brevet d’invention de Martinotta [66]

#### 1.1.4 Connecteur du groupe D

Selon le classement de Ceccotti [24], les connecteurs du groupe D sont tous des connecteurs continus. Ces connecteurs, contrairement aux connecteurs locaux, n’engendrent pas de



contrainte locale importante dans le bois et le béton. Les connecteurs du groupe D sont considérés comme étant les plus rigides. Il est donc possible d’assumer qu’il n’a pas de glissement entre le bois et le béton, ce qui facilite grandement le calcul, puisque le calcul peut être fait avec la théorie d’une poutre standard sans glissement en transformant toute la poutre mixte en bois équivalent (Clouston *et al.* [30]).

Piazza et Ballerini [82], en 2000, ont effectué plusieurs essais de flexion sur des poutres composites de 6 m de long avec 8 différents types de connecteurs. L’un de ces essais était constitué d’un connecteur fait d’une plaque métallique de 2 mm dont une partie est collée dans le bois et l’autre partie est noyée dans le béton (Fig. 1.12). Le connecteur a montré un comportement pratiquement linéaire jusqu’à l’atteinte de sa résistance maximale pour ensuite avoir un comportement pseudo-plastique, dû à la rupture progressive du connecteur.

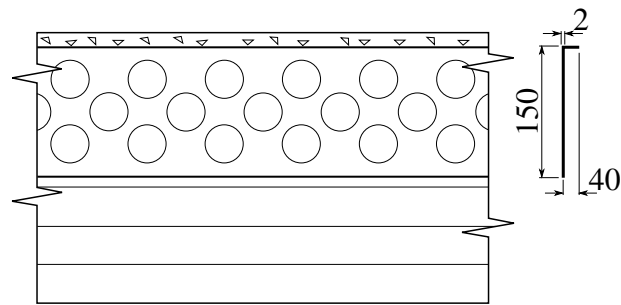


FIGURE 1.12 – Connecteur plaque d’acier testé par Piazza et Ballerini [82] (dimensions en mm)

Un autre système de connexion continu très répandu jusqu’à maintenant est le système proposé par Bathon et Bathon [17] dont le brevet américain a été publié en 2012. Ce système de connexion a reçu le code d’approbation pour une utilisation en Europe. Le connecteur de Bathon et Bathon [17] est une grille métallique (Fig. 1.13) dont une partie est collée dans le bois (au moins 40 mm) et une autre partie est noyée dans le béton (au moins 50 mm) [49].

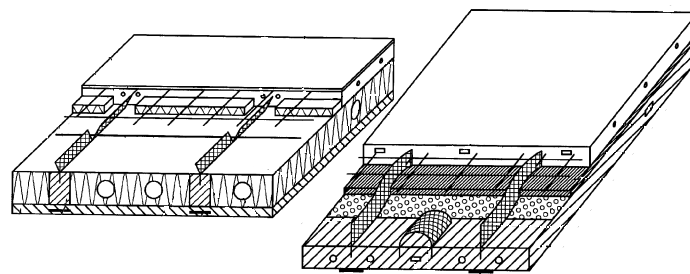


FIGURE 1.13 – Brevet d’invention de Bathon et Bathon [17]

### 1.1.5 Collage

Tous les connecteurs présentés sur la figure 1.1 et décrits précédemment sont tous des connecteurs de type mécaniques. Il existe cependant aussi une autre technique de connexion, il s'agit d'une connexion par collage. Plusieurs auteurs ont investigué sur les connexions par collage tels que Negrão *et al.* [76] et Schäfers et Seim [92]. Les résultats montrent une connexion très rigide entre les deux matériaux qui se rapproche d'une action composite parfaite, c'est-à-dire sans glissement. De plus, lorsque la connexion rompt, la rupture s'effectue majoritairement près de la colle dans le bois (Fig. 1.14)

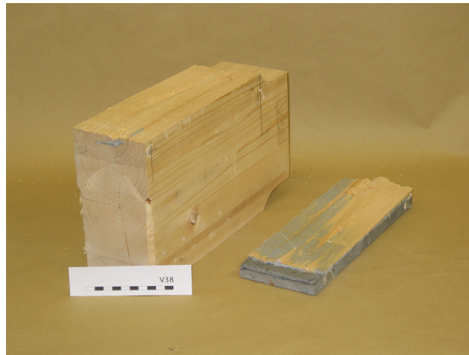


FIGURE 1.14 – Surface de rupture près de la ligne de colle

## 1.2 Propriété des matériaux

Il a trois variables importantes qui expliquent le comportement structural d'une poutre composite. Il y a :

- Les propriétés mécaniques de la connexion ;
- Les propriétés mécaniques du bois ;
- Les propriétés mécaniques du béton.

La première a déjà été abordée précédemment, les deux autres seront discutés dans la section qui suit.

### 1.2.1 Bois

La ressource forestière du Québec recouvre environ 50% du territoire (764 897 sur 1 667 712 km<sup>2</sup>) ce qui en fait une ressource largement disponible pour diverse application telle que la construction. Le Québec est la deuxième province la plus productrice de bois d'œuvre au Canada derrière la Colombie-Britannique, elle possède à elle seule environ 25% des ressources

forestières du Canada. Le Québec récolte approximativement 24 000 000 m<sup>3</sup> de bois par année et importe approximativement 6 500 000 m<sup>3</sup> de bois par année. De cette quantité, environ 22 000 000 m<sup>3</sup> sont consommés par les usines de scieries annuellement. Les résineux sont la principale source de récoltes de la forêt au Québec, où ceux-ci sont principalement le sapin, l'épinette, le pin gris et le mélèze [20].

Du côté environnemental, le bois présente de grands avantages par rapport à ces concurrents principaux du domaine de la construction soit l'acier et le béton. Les nouvelles forêts de l'Amérique du Nord et de l'Europe peuvent absorber et stocker de 1 à 3 tonnes de carbone par hectare par année (Greco et Baldocchi [52]). Ces données font en sorte que le bois est réellement avantageux au terme d'une analyse de cycle de vie (ACV) pour la construction d'une structure. De plus, plusieurs autres facteurs sont en faveur du bois :

- le bois est un matériau renouvelable ;
- le bois est un matériau durable avec de bonnes conditions d'entretien et de conception ;
- le bois permet de diminuer l'impact des changements climatiques causés par la construction des structures ;
- l'utilisation du bois diminue les charges à la fondation grâce à sa légèreté.

De plus, différentes études ont démontré qu'en moyenne l'utilisation de 1 m<sup>3</sup> de bois permet d'éviter l'émission de 1000 kg de CO<sub>2</sub> (Reid *et al.* [88]). Du côté structural, la conception d'une poutre, selon les trois matériaux les plus communs, de 7.3 m avec une charge supplémentaire de 14.4 kN/m permet de constater les avantages du bois pour contrer les changements climatiques (Fig. 1.15).



FIGURE 1.15 – Potentiel de réchauffement climatique d'une poutre analysé avec le logiciel ATHENA<sup>TM</sup>[26]

L'ajout d'une dalle de béton collaborant sur une structure de bois peut également être un bon moyen de réhabilitation de structure de bois qui présente des déformations excessives ce qui permet ainsi de prolonger la vie utile d'un bâtiment (Gelfi *et al.* [44]).

### Structure générale d'un tronc d'arbre

La principale particularité du bois par rapport aux autres matériaux de l'ingénierie civile est son anisotropie et son hygroscopicité. L'hygroscopicité explique le fait que le volume du bois peut changer selon le taux d'humidité et l'anisotropie du bois explique le fait que le bois a différentes propriétés mécaniques selon les sens de sollicitation par rapport aux fibres. Sur la figure 1.16, 5 zones distinctes peuvent être observées du centre de l'arbre vers l'écorce : le duramen, l'aubier, le cambium, le phloème et l'écorce. Les zones qui sont de plus grandes importances pour le bois de construction sont le duramen et l'aubier.

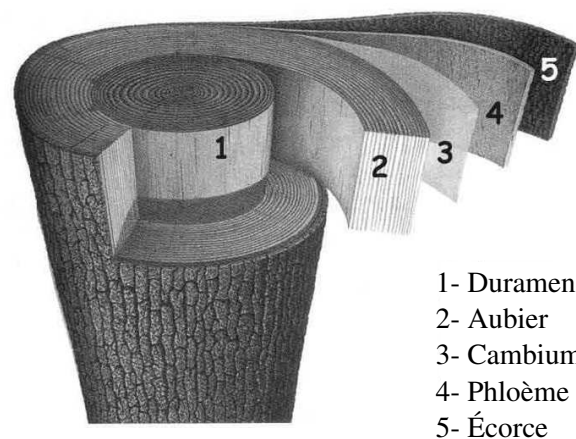


FIGURE 1.16 – Structure générale d'un tronc d'arbre (Bary-Langer et Nebout [15])

Dans toutes les zones du bois, il lui est reconnu certaines propriétés physiques et mécaniques selon trois principales directions par rapport aux fibres. La figure 1.17 montre ces trois directions du bois, soit : longitudinale (L), tangentielle (T) et radiale (R).

### Propriétés mécaniques du bois

Le bois, comme tout autre matériau, est un solide déformable qui réagit aux contraintes qui lui sont appliquées en se déformant sous leurs effets. La loi de Hooke ( $\varepsilon = \sigma/E$ ) permet de relier la relation contrainte-déformation d'un matériau parfaitement élastique. Étant donné que le bois est fortement anisotrope, la loi de Hooke généralisé (Éq. (1.1)) est nécessaire pour bien expliquer le comportement du bois. Cette loi fait appel à un tenseur d'ordre 4, où

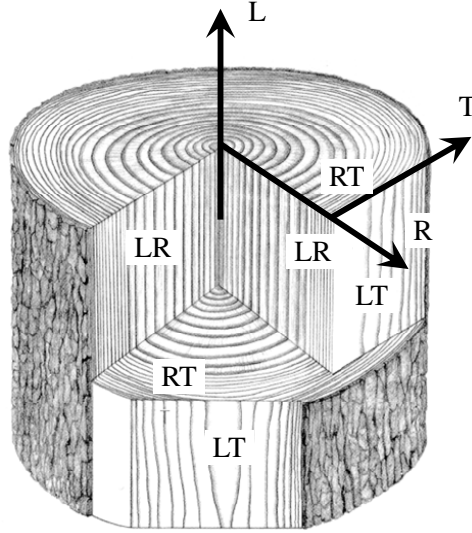


FIGURE 1.17 – Les trois directions principales du bois (Cloutier [31])

celui-ci est exprimé en notation de Voigt pour simplifier l'écriture.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_L \\ \gamma_{TL} \\ \gamma_{RL} \\ \gamma_{RT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{RT}}{E_T} & -\frac{\nu_{RL}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TR}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{TL}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_R} & -\frac{\nu_{LT}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RL}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_T \\ \sigma_L \\ \tau_{TL} \\ \tau_{RL} \\ \tau_{RT} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Où :

- $\varepsilon_R, \varepsilon_T, \varepsilon_L$  sont les déformations unitaires selon les trois directions R, T et L ;
- $\gamma_{TL}, \gamma_{RL}, \gamma_{RT}$  sont les déformations angulaires en radian des plans TL, RL et RT respectivement par rapport à R, T et L ;
- $E_R, E_T, E_L$  sont les modules de Young selon les trois directions R, T et L ;
- $G_{TL}, G_{RL}, G_{RT}$  sont les modules de Coulomb (ou de cisaillement) selon les plans TL, RL et RT respectivement par rapport à R, T et L ;
- $\nu_{RL}, \nu_{LR}, \nu_{TL}, \nu_{LT}, \nu_{RT}, \nu_{TR}$  sont les coefficients de poisson ;
- $\sigma_R, \sigma_T, \sigma_L$  sont les contraintes normales selon les trois directions R, T et L ;
- $\tau_R, \tau_T, \tau_L$  sont les contraintes de cisaillement selon les trois plans TL, RL et RT.

Les modules de Young,  $E$ , les modules de Coulomb,  $G$ , et les coefficients de poisson,  $\nu$ , sont des constantes qui définissent le comportement d'un solide. La signification de ces variables est présentée sur la figure 1.18.

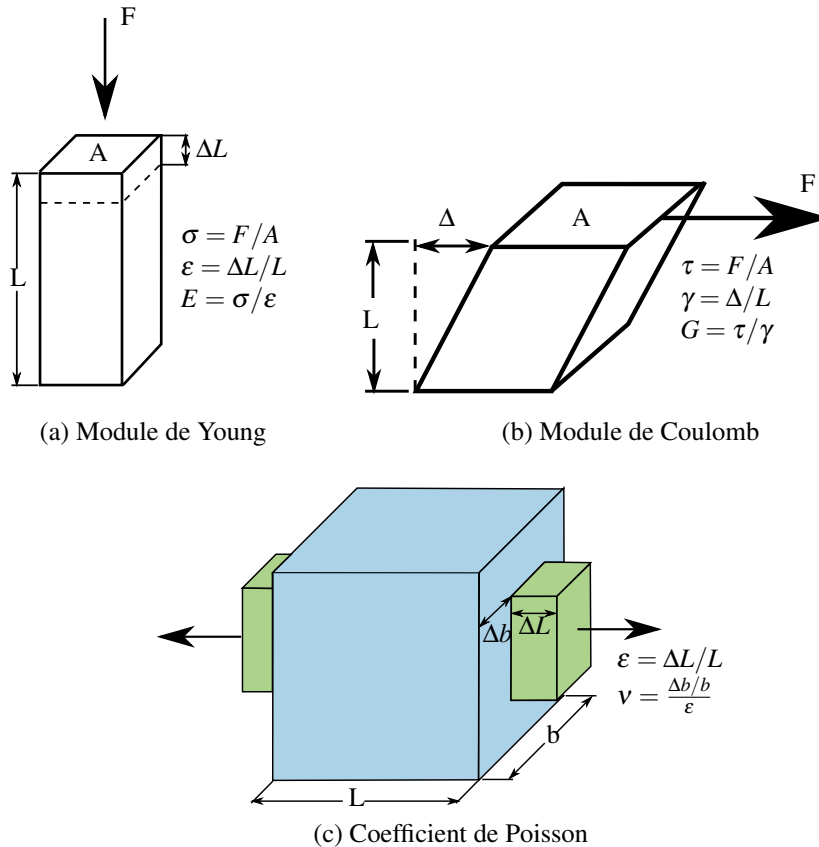


FIGURE 1.18 – Propriétés mécaniques d'un solide

Pour un matériau orthotrope tel qu'est considéré le bois aux fins de modélisation, la matrice de souplesse (Éq.(1.1)) devient symétrique, cela induit donc :

$$\frac{\nu_{RT}}{E_T} = \frac{\nu_{TR}}{E_R} \quad , \quad \frac{\nu_{RL}}{E_L} = \frac{\nu_{LR}}{E_R} \quad , \quad \frac{\nu_{TL}}{E_L} = \frac{\nu_{LT}}{E_T} \quad (1.2)$$

En assumant la symétrie, 9 paramètres sont nécessaires pour définir son comportement. Plusieurs auteurs fournissent des valeurs pour les propriétés mécaniques. Parmi ces auteurs, Navi et Heger [74] présentent une excellente synthèse des propriétés mécaniques du bois selon les espèces et le taux d'humidité du bois (Tableau 1.1), où celui-ci peut avoir une grande influence sur les propriétés du bois.

Le tableau 1.1 avec le tenseur de l'équation (1.1) permet de définir le comportement élastique, c'est-à-dire la partie où le comportement du bois est linéaire. Cependant, ces propriétés ne donnent pas d'information sur la résistance du bois. Barbier *et al.* [14] donne quelques valeurs de résistance moyenne type selon plusieurs espèces. Les normes telles que l'Eurocode 5 ou la CSA-O86 donne également des valeurs de résistance pour certaines espèces. Les valeurs de résistance données par les normes sont généralement bien plus faibles que les ré-

TABLE 1.1 – Propriétés mécaniques élastiques de certaines essences de résineux (1) et feuillus (2) (Navi et Heger [74])

| Constante                       | Epicéa (1)<br>( <i>piecea<br/>sitchensis</i> ) | Douglas<br>(1) ( <i>pseu-<br/>dotsuga<br/>menziesii</i> ) | Sapin (1)<br>( <i>abies</i> ) | Peuplier<br>(2)<br>( <i>populus<br/>alba</i> ) | Chêne<br>rouge (2)<br>( <i>quercus<br/>rubra</i> ) | Hêtre (2)<br>( <i>fagus<br/>silvatica</i> ) |
|---------------------------------|--|---|-------------------------------|--|--|---|
| Teneur en<br>eau [%]            | 12   | 12  | 13                            | 14   | 12   | 11  |
| Densité<br>[g/cm <sup>3</sup> ] | 0.36   | 0.59  | 0.31                          | 0.4  | 0.6  | 0.74  |
| $E_L$                           | 10700  | 16550   | 8020                          | 6830   | 14800  | 14000                                       |
| $E_R$                           | 649  | 1300  | 816                           | 1190   | 1500   | 2280  |
| $E_T$                           | 348  | 900   | 304                           | 493  | 828  | 1160  |
| $G_{RL}$                        | 533  | 1200  | 558                           | 1000   | 967  | 1640  |
| $G_{RT}$                        | 41   | 80  | 48                            | 200  | 398  | 470   |
| $G_{TL}$                        | 438  | 929   | 461                           | 900  | 695  | 1080  |
| $\nu_{RL}$                      | 0.02   | 0.03  | 0.03                          | 0.04   | 0.06   | 0.07  |
| $\nu_{TR}$                      | 0.30   | 0.41  | 0.25                          | 0.37   | 0.33   | 0.36  |
| $\nu_{LT}$                      | 0.40   | 0.38  | 0.33                          | 0.45   | 0.69   | 0.52  |

sistances moyennes puisque ceux-ci tiennent compte de la résistance statistique d'échantillon et s'assurent que 95% des contraintes de rupture des échantillons lui soient supérieures. Le tableau 1.2 montre les résistances de l'épinette, pin tordu et pin gris de la norme CSA-O86 [7] pour le bois lamellé-collé qui sont ajustés à la durée de charge nominale (3 mois).

Dans le sens principal des fibres, le bois n'a pas le même comportement en traction et en compression. En traction, le bois est considéré comme élastique fragile et en compression le bois est considéré comme élastoplastique. La plasticité du bois s'explique par le microflambement des cellules du bois. En traction, puisque le phénomène de flambement est absent, le bois est fragile (Fig. 1.19).

## 1.2.2 Béton

Le béton est le matériau de construction le plus utilisé à travers le monde. Actuellement, plus de 2 milliards de tonnes de béton sont produites chaque année [6]. Plusieurs types de béton existe selon l'utilisation qu'on souhaite en faire. La résistance des bétons peut varier de 25 MPa pour du béton ordinaire jusqu'à du 250 MPa (AFGC [12]) pour du béton fibré à ultra hautes performances (BFUP).

TABLE 1.2 – Résistances prévues et module élastique de bois lamellé-collé en MPa (CSA-O86 [7])

|   | Épinette, pin tordu et pin gris |        |       |       |
|---|---------------------------------|--------|-------|-------|
|   | 20f-E                           | 20f-EX | 14t-E | 12c-E |
| Moment de flexion (pos.), $f_b$                   | 25.6                            | 25.6   | 24.3  | 9.8   |
| Moment de flexion (nég.), $f_b$                   | 19.2                            | 25.6   | 24.3  | 9.8   |
| Cisaillement longitudinal, $f_v$                  | 1.75                            | 1.75   | 1.75  | 1.75  |
| Compression parallèle au fil, $f_c$               | 25.2                            | 25.2   | 25.2  | 25.2  |
| Compression parallèle au fil et flexion, $f_{cb}$ | 25.2                            | 25.2   | 25.2  | 25.2  |
| Compression perpendiculaire au fil, $f_{cp}$      |                                 |        |       |       |
| Résistance à l'appui : face comprimée             | 5.8                             | 5.8    | 5.8   | 5.8   |
| Résistance à l'appui : face tendue                | 5.8                             | 5.8    | 5.8   | 5.8   |
| Aire nette en traction, $f_{tn}$                  | 17.0                            | 17.0   | 17.9  | 17    |
| Aire brute en traction, $f_{tg}$                  | 12.7                            | 12.7   | 13.4  | 12.7  |
| Traction perpendiculaire au fil, $f_{tp}$         | 0.51                            | 0.51   | 0.51  | 0.51  |
| Module élastique, $E$                             | 10300                           | 10300  | 10700 | 9700  |

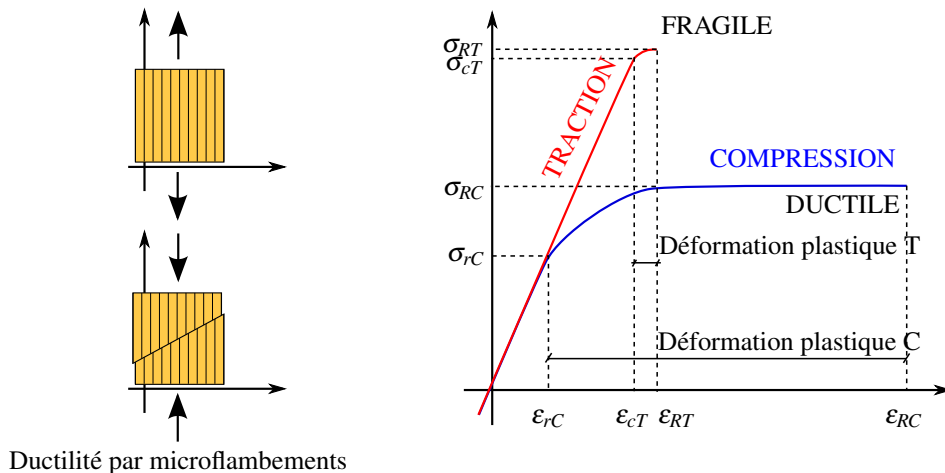


FIGURE 1.19 – Loi typique de bois (Barbier *et al.* [14])



## Composition

Le tableau 1.3 présente la composition typique de différents types de béton, soit le béton ordinaire, le béton à hautes performances et le béton fibré à ultra hautes performances. En règle générale, plus le rapport Eau/liant est faible, plus le béton est résistant et moins poreux, mais l'ouvrabilité est moindre, c'est pour cela que l'ajout de super plastifiant est nécessaire. De plus, plusieurs autres adjuvants peuvent être ajoutés aux mélanges de béton selon les besoins tels que de l'air entrainé, des retardateurs de prise ou bien des accélérateurs de prise (Kosmatka *et al.* [59]).

TABLE 1.3 – Composition classique du béton ordinaire, du BHP et du BFUP (Guenet [55])

| Composition                            | Béton ordinaire | BHP        | BFUP        |
|--|-----------------|------------|-------------|
| Rapport Eau/Liant                      | 0.4 à 0.6       | 0.3 à 0.35 | 0.16 à 0.2  |
| Liant [kg/m <sup>3</sup> ]             | 300 à 375       | 350 à 500  | 700 à 1500  |
| Eau [kg/m <sup>3</sup> ]               | 150 à 200       | 140 à 160  | 160 à 230   |
| Super plastifiant [kg/m <sup>3</sup> ] | -               | 3.5 à 10   | 10 à 45     |
| Fumée de silice [kg/m <sup>3</sup> ]   | -               | 150 à 250  | 175 à 375   |
| Masse volumique [kg/m <sup>3</sup> ]   | 2300            | 2300       | 2400 à 2600 |

## Propriétés mécaniques du béton

Le béton contrairement au bois est considéré comme isotrope avant l'apparition de fissure. Le tableau 1.4 présente les propriétés de différents types de béton. On y constate que l'énergie nécessaire pour engendrer une fissure dans le BFUP est beaucoup plus grande que celui du béton ordinaire. Le BFUP est également un matériau très compact ce qui donne une meilleure durabilité au béton. De plus, une grande quantité de ciment est non hydratée dans le BFUP ce qui lui donne une capacité d'autocicatrisation. Les microfissures peuvent être comblées par les produits créés lors d'une nouvelle hydratation si l'eau entre en contact avec le ciment (Habel [57]).

Il existe plusieurs types de lois pour représenter le comportement du béton en compression selon sa résistance et sa rigidité avant et après le pic de résistance. De ces lois, on peut retrouver la loi élastoplastique (normalement pas utilisé), la loi de Hognestad (où celle-ci est une parabole), la loi de Popovics [84] et la loi de Popovics modifié pour béton à haute résistance (Collins et Porasz [32]).

La loi linéaire, montrée sur la figure 1.20 et représentée par l'équation (1.3), est une loi élastoplastique. Cette loi à l'avantage d'être simple, mais représente mal le comportement du

TABLE 1.4 – Propriétés générales du béton ordinaire, du BHP et du BFUP (Guenet [55])

| Propriétés                              | Béton ordinaire | BHP     | BFUP      |
|---|-----------------|---------|-----------|
| Résistances en compression [MPa]        | 20 à 40         | 50 à 80 | 150 à 250 |
| Résistances en traction [MPa]           | 1 à 3           | -       | 7 à 15    |
| Énergie de rupture [kJ/m <sup>2</sup> ] | 0.003           | -       | 10 à 40   |
| Module de Young [GPa]                   | 25 à 35         | 35 à 40 | 50 à 60   |
| Porosité à l'eau [%]                    | 14 à 20         | 10 à 13 | 1.5 à 5   |

béton.

$$f = \begin{cases} \frac{f_p}{\varepsilon_p} \varepsilon & \text{pour } \varepsilon < \varepsilon_p \\ f_p & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_p \end{cases} \quad (1.3)$$

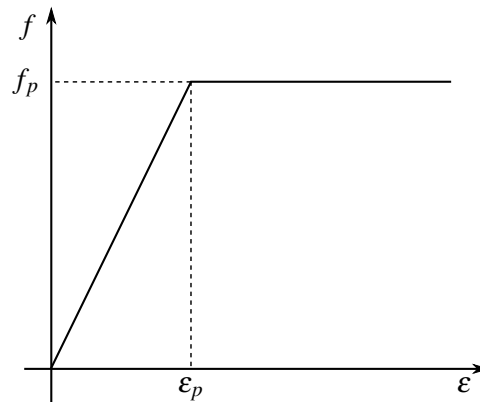


FIGURE 1.20 – Loi linéaire pour le béton en compression

La loi de Hognestad, montré sur la figure 1.21 et représenté par l'équation (1.4), est une loi de compression simple qui représente plutôt bien le comportement du béton ordinaire (< 40 MPa). Il est également possible de définir une déformation maximale où après cette déformation la résistance est nulle.

$$f = \begin{cases} \left( 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right)^2 \right) f_p & \text{pour } \varepsilon < \varepsilon_u \\ 0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_u \end{cases} \quad (1.4)$$

La loi de Popovics [84], montré sur la figure 1.22 et représenté par l'équation (1.5), est une loi qui représente assez bien les bétons ordinaires. La courbe reste linéaire avant le pic et réduit plus rapidement après le pic. Le paramètre  $n$  dans l'équation (1.5) sert à ce que la courbe soit

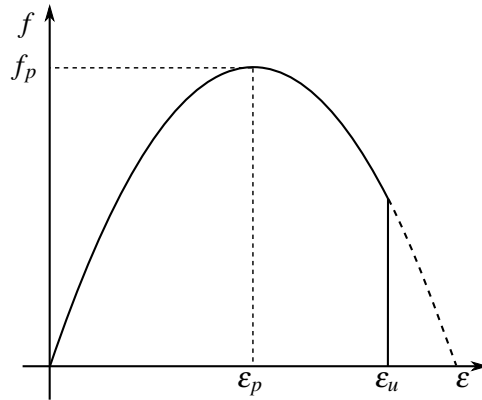


FIGURE 1.21 – Loi parabolique pour le béton en compression

plus linéaire avant le pic en plus d’avoir une descente plus rapide après le pic pour du béton de plus haute résistance.

$$f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^n} f_p \quad (1.5)$$

Où :

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{sec}} \quad (1.6)$$

$$E_{sec} = \frac{f_p}{\varepsilon_p} \quad (1.7)$$

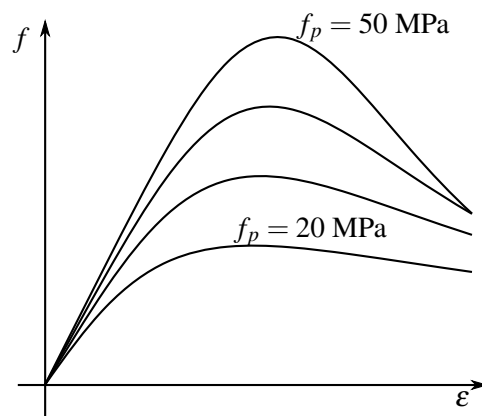


FIGURE 1.22 – Loi de Popovics pour le béton en compression

Collins et Porasz [32] a proposé une modification à la loi de Popovics pour les bétons à haute résistance. Cette modification permet une meilleure corrélation entre l’expérimental et la loi pour les bétons de plus haute résistance. Tout comme la loi de Popovics, la courbe reste assez

linéaire avant le pic et réduit plus rapidement après le pic. La loi de Popovics est modifiée pour le comportement après-pic avec le paramètre  $k$ . La loi modifiée de Popovics est montrée sur la figure 1.23 et sur l'équation (1.8). L'AFGC [12] recommande l'utilisation de cette loi pour les BFUP.

$$f = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \frac{n}{n-1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}\right)^{nk}} f_p \quad (1.8)$$

Où :

$$n = 0.8 + \frac{f_p}{17} \quad (f_p \text{ en MPa}) \quad (1.9)$$

$$k = \begin{cases} 1.0 & \text{pour } \varepsilon < \varepsilon_p \\ 0.67 + \frac{f_p}{62} \geq 1.0 & \text{pour } \varepsilon > \varepsilon_p \quad (f_p \text{ en MPa}) \end{cases} \quad (1.10)$$

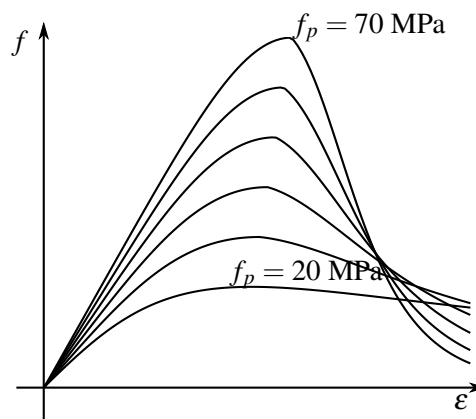


FIGURE 1.23 – Loi de Popovics pour béton à haute résistance en compression

La loi de comportement du béton en traction est souvent considérée linéaire jusqu'à la rupture pour ensuite avoir une rupture fragile (Fig. 1.24). Cependant, la présence de fibre dans le béton permet d'adoucir la rupture et ainsi avoir une moins fragile. Dans le cas des BFUP, lorsque la quantité de fibre est suffisante, il est même possible d'avoir un domaine écrouissant et ainsi permettre la multi fissuration, pour ensuite avoir localisation et perte de résistance (Fig. 1.25).

Pour tous les types de béton, il est possible d'exprimer la loi de traction par une série de points où celle-ci peut varier entre 3 et 5 points.

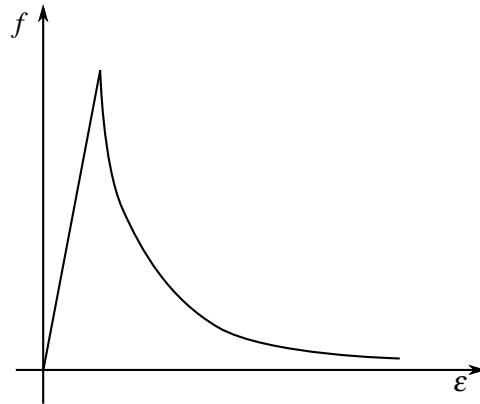


FIGURE 1.24 – Loi de traction pour du béton standard

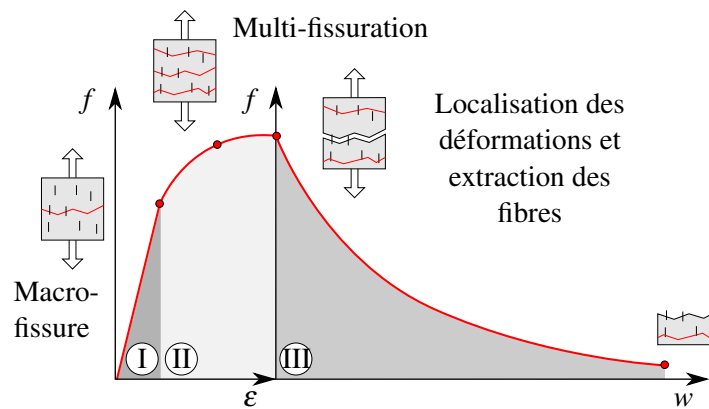


FIGURE 1.25 – Loi de traction pour du BFUP (Guenet [55])

## 1.3 Essais de cisaillement

Une structure composite bois-béton est grandement influencée par le comportement de l'interface entre les deux matériaux, soit le connecteur. Tout comme le bois et le béton, où leurs propriétés mécaniques sont déterminées par des essais en laboratoire, il en est de même pour les connexions bois-béton. Il existe tout de même une méthode analytique pour prédire le comportement de certains connecteurs discrets, qui seront présentés dans cette section.

### 1.3.1 Expérimental

L'essai de cisaillement est la méthode la plus commune pour déterminer la loi de la connexion. Avec cet essai, il est possible de déterminer la rigidité de la connexion,  $k$ , sa résistance,  $F_{max}$ , et sa ductilité (Fig. 1.26). Jusqu'à présent, il n'existe pas d'essai normalisé pour caractériser le comportement d'une connexion bois-béton, mais plusieurs auteurs ont déjà effectué des essais de cisaillement selon plusieurs configurations. Les configurations des essais de

cisaillement peuvent être séparées en deux groupes, soit les essais symétriques et les essais asymétriques.

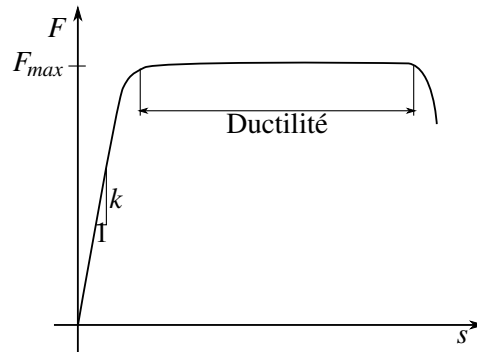


FIGURE 1.26 – Exemple de loi de connecteur

### Essai symétrique

Carvalho et Mantilla Carrasco [23] ont testé les deux types de configuration des essais symétriques afin d'en connaître leurs avantages et inconvénients. Les deux configurations possibles sont la configuration bois-béton-bois et béton-bois-béton (Fig. 1.27).

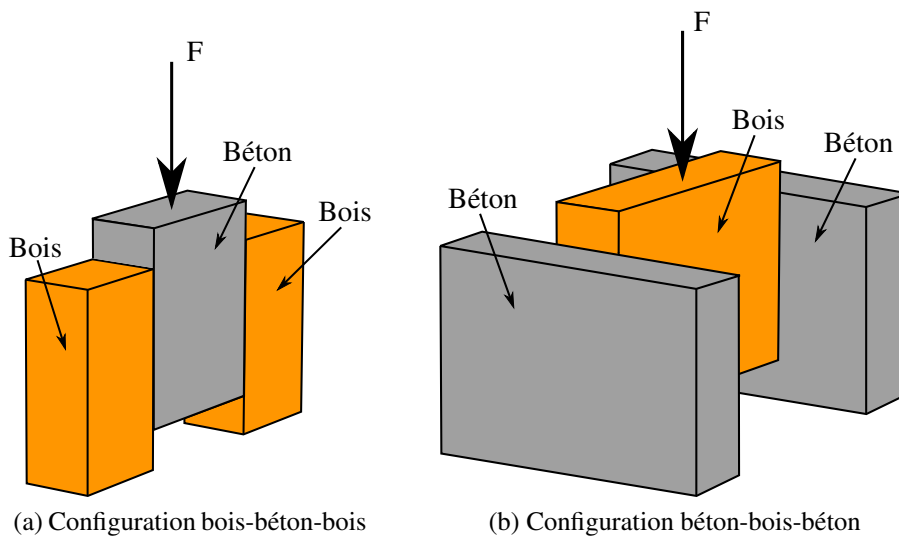


FIGURE 1.27 – Configuration pour essai de cisaillement symétrique

Carvalho et Mantilla Carrasco [23] ont conclu que l'arrangement bois-béton-bois présente une plus faible résistance et un plus fort module de glissement lors de l'essai, mais que cette configuration ne permet pas de voir le gain de résistance attendu lors de l'augmentation du

diamètre du connecteur. L'arrangement béton-bois-béton présente une meilleure résistance et un plus faible module de glissement que l'autre arrangement, ces résultats sont plus cohérents par rapport aux attentes en plus d'être plus près de la configuration des essais standard pour les connexions acier-béton.

Lors d'un essai symétrique, deux connecteurs sont testés en même temps, il en résulte donc que c'est le comportement moyen des connecteurs qui est mesuré ce qui peut réduire ainsi certains phénomènes locaux qui peuvent se produire sur un seul connecteur pendant l'essai. De plus, il est également possible qu'un effet voûte se produise pendant l'essai et ainsi augmenter la rigidité mesurée durant l'essai (Gatteco [42]).

### Essai asymétrique

Il existe plusieurs configurations pour les essais asymétriques, les plus communs sont présentés sur la figure 1.28. Les trois configurations ont été utilisées respectivement par Kuklík *et al.* [62], Tommola *et al.* [100] et Gelfi et Guiriani [45].

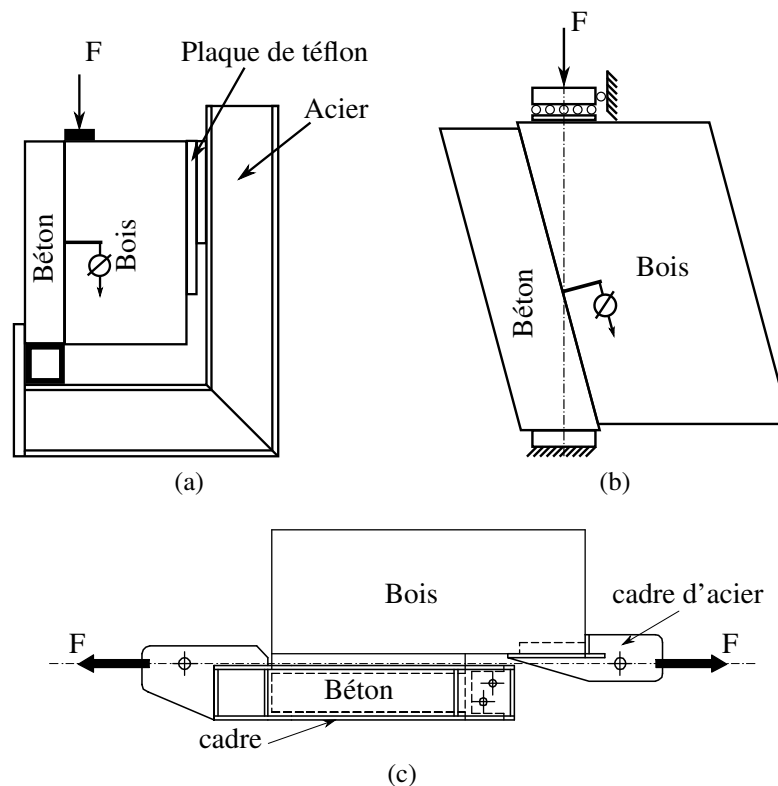


FIGURE 1.28 – Configuration pour essai de cisaillement asymétrique

Les configurations asymétriques permettent de tester un seul connecteur à la fois et per-

mettent ainsi de mieux observer les phénomènes locaux qui peuvent se produire lors d'un essai. Cependant, à cause de l'asymétrie un effort axial peut se créer à l'interface et ainsi avoir une répercussion sur les résultats qui est difficilement quantifiable. Dans le cas de la configuration de la figure 1.28a, l'asymétrie peut engendrer une surestimation de la rigidité d'environ 10% (Lukaszewska [65]).

### Protocole de chargement et évaluation de la rigidité

La norme EN 26891 [1] spécifie le protocole de chargement et la méthode de calcul pour la rigidité des attaches mécaniques pour les structures de bois. Avant de commencer l'essai, il est important d'avoir une estimation de la charge maximale du joint afin de respecter le chargement présenté sur la figure 1.29. L'essai est d'abord piloté en charge pour atteindre  $0.4F_{est}$  en deux minutes et ensuite maintenir la charge pendant 30 s. La charge est ensuite réduite jusqu'à  $0.1F_{est}$  et maintenue pendant 30 s. Ensuite, l'essai est piloté selon le glissement où selon la charge jusqu'à  $0.7F_{est}$  à une vitesse de  $0.2F_{est}$  par minute pour ensuite être piloté selon le glissement jusqu'à rupture du joint ou un glissement de 15 mm [1].

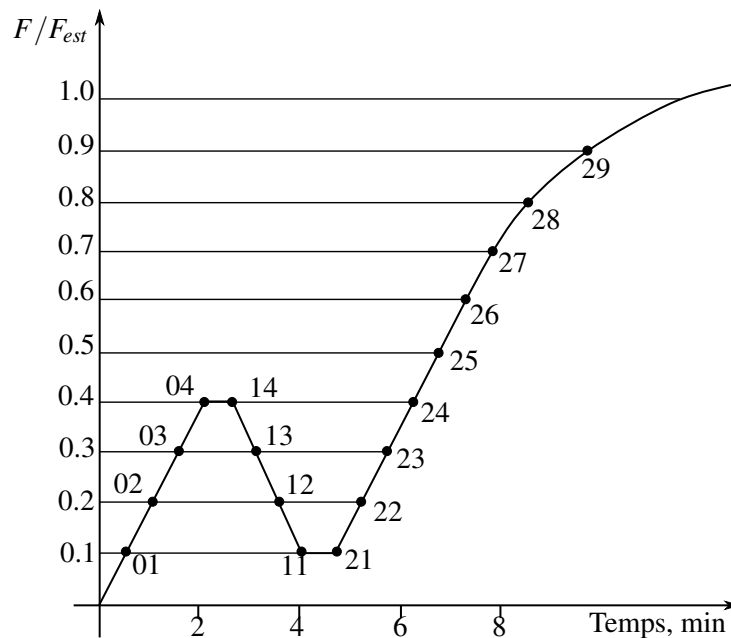


FIGURE 1.29 – Procédure de chargement [1]

Selon la norme EN 26891 [1], la rigidité du joint en service est calculée selon l'équation (1.11) et (1.12). En suivant ces formules, la pente entre les points 01 et 04 de la figure ref-fig :loadproc est calculée.

$$k_s = 0.4 \frac{F_{est}}{v_{i,mod}} \quad (1.11)$$



Où :

$$v_{i,mod} = \frac{4}{3}(v_{04} - v_{01}) \quad (1.12)$$

### 1.3.2 Méthode analytique

Dans le cas des petits connecteurs ponctuels, il est possible de prédire la loi de comportement de la connexion. Gelfi *et al.* [44] a proposé une méthode pour calculer la rigidité et la force de plastification de la connexion en considérant le connecteur comme une poutre Euler-Bernoulli sur fondation élastique où cette fondation est le bois et le béton.

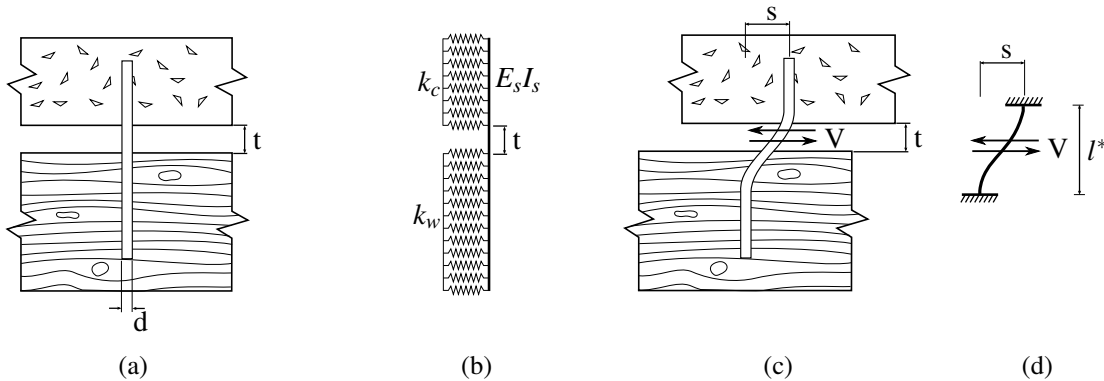


FIGURE 1.30 – Modélisation de la connexion (adapté de Gelfi *et al.* [44])

En utilisant le principe présenté sur la figure 1.30 et en assumant que la longueur du connecteur est infinie dans les deux fondations, soit le béton et le bois. Il est possible de développer une équation simple qui prédit la rigidité de la connexion (Éq. (1.13)). Cette équation est basée sur des rigidités de fondation élastique de 1300 MPa pour le bois et 10 000 MPa pour le béton et le diamètre du connecteur doit se situer entre 12 et 20 mm et l'espacement entre le bois et le béton doit être inférieur à 50 mm.

$$k = 124\,000 \frac{d}{(4.34 + \frac{t}{d})^3} \quad (1.13)$$

Il est également possible de prédire la résistance de la connexion avec un principe similaire (Fig.1.31). Il est assumé que les fondations élastiques plastifient ( $f_{hc}$  et  $f_{hw}$ ) et que le connecteur plastifie également, ce qui est une hypothèse réaliste selon les dimensions pratiques des connecteurs. Avec les hypothèses mentionnées, la résistance de la connexion se calcule avec les équations (1.14) et (1.15).

$$l_w = \frac{d}{1 + \frac{f_{hw}}{f_{hc}}} \left( \sqrt{\frac{2}{3} \frac{f_y}{f_{hw}} \left( 1 + \frac{f_{hw}}{f_{hc}} \right) + \left( \frac{t}{d} \right)^2} - \frac{t}{d} \right) \quad (1.14)$$

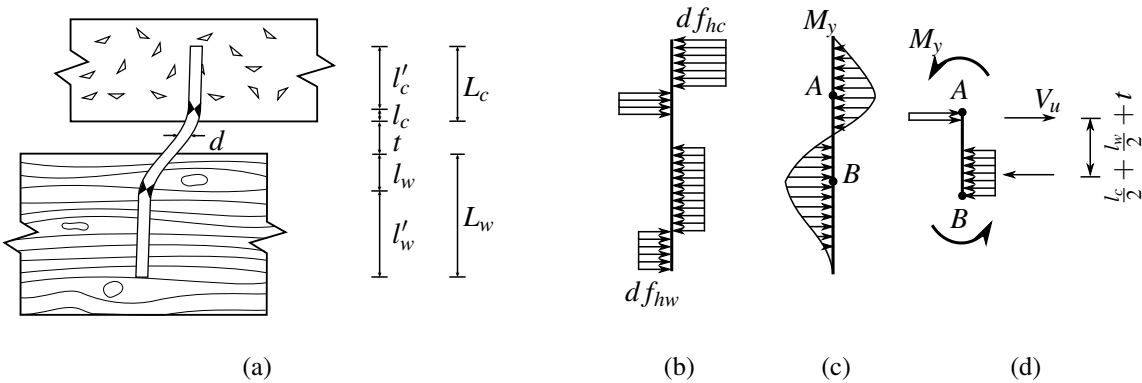


FIGURE 1.31 – Modélisation de la rupture de la connexion (adapté de Gelfi *et al.* [44])

$$V_u = f_{hw} l_w d \quad (1.15)$$

## 1.4 Méthode de calcul des structures mixtes

Il existe plusieurs méthodes de calcul pour évaluer la rigidité flexionnelle et la résistance d'une structure mixte bois-béton. La section qui suit présente quelques-unes des méthodes existantes.

### 1.4.1 Gamma méthode

La gamma,  $\gamma$ , méthode est la méthode de calcul qui est la plus utilisée actuellement. Cette méthode est présentée dans l'Eurocode 5 [2]. Il s'agit d'une méthode simplifiée qui tient compte de la rigidité de la connexion pour évaluer la rigidité flexionnelle et les efforts sur les matériaux tels que le bois ou le béton. Les hypothèses pour la méthode sont :

- Les déplacements dus à la flexion sont petits, donc la théorie des petits déplacements est valide
- Les couches de bois et de béton ont la même flèche, la même rotation et la même courbure, donc il n'y a pas de décollement entre le bois et le béton
- La couche de bois et la couche de béton se comportent comme une poutre Euler-Bernoulli, donc les déformations de cisaillement sont négligées
- Les connecteurs sont espacés uniformément le long de la poutre ou varient selon l'effort de cisaillement
- La charge appliquée est une charge de forme sinusoïdale (le principe de la  $\gamma$  méthode)

Le coefficient  $\gamma$  peut varier entre 0 et 1. Lorsque  $\gamma$  égal à 0, cela veut dire que l'action composite est nulle et lorsque  $\gamma$  égal à 1, l'action composite est infiniment rigide, donc il n'a aucun glissement entre le bois et le béton. Le coefficient se calcule selon l'équation (1.16).

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_c A_c s_p}{kL^2}} \quad (1.16)$$

Où  $E_c$  et  $A_c$  est le module de Young et l'aire sectionnelle de la dalle de béton,  $s_p$  est l'espacement du connecteur,  $k$  est la rigidité d'une connexion et  $L$  est la portée de la poutre composite.

Pour tenir compte des états limites ultimes et de service, la rigidité du connecteur,  $k$ , est ajustée dans la formule de  $\gamma$ . En général, la rigidité du connecteur pour l'état limite ultime ( $k_u$ ) est égale au 2/3 de la rigidité du connecteur en service ( $k_u = 2/3k_s$ ).

Les formules de la  $\gamma$  méthode sont complètement développées par Cvetković et Stojić [35]. Une fois le coefficient  $\gamma$  calculé, la rigidité flexionnelle de la poutre composite (Fig. 1.32) ce calcul selon l'équation (1.17).

$$EI_{eff} = E_c I_c + E_b I_b + \gamma E_c A_c a_c^2 + E_b A_b a_b^2 \quad (1.17)$$

Où :

$$a_b = \frac{\gamma E_c A_c (h_c + h_b)}{2(\gamma E_c A_c + E_b A_b)} \quad (1.18)$$

$$a_c = \frac{h_c + h_b}{2} - a_b \quad (1.19)$$

Où  $E_b$  et  $A_b$  est le module de Young et l'aire sectionnelle de la poutre de bois,  $h_c$  et  $h_b$  est la hauteur du béton et du bois et  $a_c$  et  $a_b$  est la distance entre le centre de rigidité du béton et du bois avec l'axe neutre effectif de la poutre de bois.

La figure 1.32 montre les contraintes dues à l'effort normal ( $\sigma_N$ ) sur chacune des couches et les contraintes dû à l'effort de flexion ( $\sigma_B$ ) sur chacune des couches. Ces contraintes peuvent être calculées avec les équations (1.20) et (1.21).

$$\sigma_{c,N} = \frac{\gamma E_c a_c}{EI_{eff}} M, \quad \sigma_{t,N} = \frac{E_b a_b}{EI_{eff}} M \quad (1.20)$$

$$\sigma_{c,B} = \frac{0.5 E_c h_c}{EI_{eff}} M, \quad \sigma_{t,B} = \frac{0.5 E_b h_b}{EI_{eff}} M \quad (1.21)$$

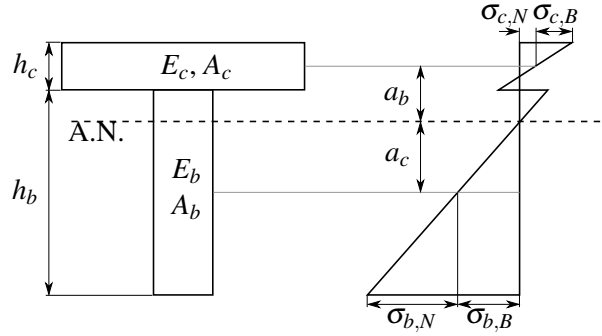


FIGURE 1.32 – Distribution des contraintes sur une poutre composite (adapté de Lukaszewska [65])

La contrainte de cisaillement dans la poutre de bois est calculée avec l'équation (1.22).

$$\tau_b = \frac{E_b h_b^2}{2EI_{eff}} V \quad (1.22)$$

Où  $V$  est l'effort tranchant à l'endroit de l'analyse. La flèche de la poutre composite peut être calculée de la même manière qu'une poutre standard une fois la rigidité flexionnelle effective,  $EI_{eff}$ , connue. La flèche au centre de la poutre soumit à une charge uniformément répartie,  $q$ , se calcul avec l'équation (1.23).

$$\Delta = \frac{5qL^4}{384EI_{eff}} \quad (1.23)$$

Selon la méthode, la poutre de bois satisfait les critères de conception à court terme pour le service et l'ultime lorsque les équations qui suivent sont satisfaites.

$$\Delta \leq \Delta_{max} \quad \text{Pour } q_{ser} \text{ et } k_{ser} \quad (1.24)$$

$$\frac{\sigma_{c,B}}{f_{b,d}} + \frac{\sigma_{c,N}}{f_{tg,d}} \leq 1 \quad \text{Pour } q_{ult} \text{ et } k_{ult} \quad (1.25)$$

$$\tau_b \leq f_{v,d} \quad \text{Pour } q_{ult} \text{ et } k_{ult} \quad (1.26)$$

Où  $\Delta_{max}$  est la flèche maximale permise en service,  $f_{b,d}$  et  $f_{tg,d}$  sont les contraintes de dimensionnement en flexion et en traction selon l'aire brute du bois et  $f_{v,d}$  est la contrainte de dimensionnement pour le cisaillement du bois.

## 1.4.2 Méthode Frozen shear force

Pour tenir compte de la non-linéarité de la connexion Van der Linden [101] a introduit une modification à la  $\gamma$  méthode pour tenir compte de la résistance et de la ductilité du connecteur.

Le comportement du connecteur est assumé comme élastoplastique. Ce qui engendre que la méthode «Frozen shear force» peut uniquement être appliquée pour des poutres composites avec des connecteurs ductiles.

Puisque le principe de la méthode «Frozen shear force» est la même que celle de la  $\gamma$  méthode, les mêmes hypothèses restent appliquées. Cependant, lorsque le premier connecteur près de l'appui plastifie, tous les connecteurs le long de la poutre plastifient en même temps (Fig. 1.33).

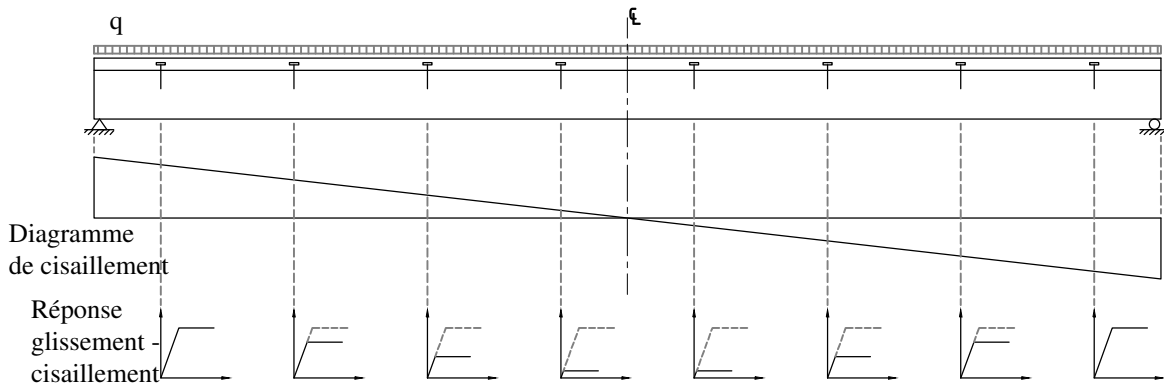


FIGURE 1.33 – Méthode Frozen shear force (Zhang [107])

Il en résulte une surestimation de la flèche de la poutre composite puisque malgré que ce ne soit pas tous les connecteurs qui ont quitté leur domaine élastique, ils sont tout de même tous considérés plastiques. Il est considéré que tous les connecteurs ont plastifié lorsque la résistance du connecteur le plus près de l'appui a atteint sa résistance maximale (éq. (1.27)).

$$F = \frac{\gamma E_c A_c a_c s V}{EI_{eff}}, \quad (F < F_{max}) \quad (1.27)$$

Où  $\gamma$  est le coefficient de cisaillement calculé avec l'équation (1.16),  $E_c$  est le module de Young du béton,  $A_c$  est l'aire sectionnelle du béton,  $a_c$  est la distance entre le centre de rigidité du béton et l'axe neutre effectif du bois calculé avec l'équation (1.19),  $s$  est l'espacement des connecteurs,  $V$  est l'effort de cisaillement à l'endroit du connecteur et  $EI_{eff}$  est l'inertie effective de la poutre composite calculée avec les équations (1.17) à (1.19).

Pour calculer la flèche de la poutre composite ainsi que les contraintes sur les matériaux, le principe est le même que celle de la  $\gamma$  méthode. Cependant, une fois les connecteurs ont plastifié,  $EI_{eff}$  est remplacée par le terme  $EI_0$  où celui-ci est la rigidité flexionnelle de la poutre sans action composite. Avant plastification, les équations (1.20) à (1.23) sont utilisées

pour calculer les contraintes et les flèches. Après plastification, les contraintes et la flèche se calculent avec les équations suivantes :

$$\sigma_{c,N} = \gamma E_c a_c \left( \frac{M_y}{EI_{eff}} + \frac{M - M_y}{EI_0} \right), \quad \sigma_{t,N} = E_b a_b \left( \frac{M_y}{EI_{eff}} + \frac{M - M_y}{EI_0} \right) \quad (1.28)$$

$$\sigma_{c,B} = 0.5 E_c h_c \left( \frac{M_y}{EI_{eff}} + \frac{M - M_y}{EI_0} \right), \quad \sigma_{t,B} = 0.5 E_b h_b \left( \frac{M_y}{EI_{eff}} + \frac{M - M_y}{EI_0} \right) \quad (1.29)$$

$$\tau_b = \frac{E_b h_b^2}{2} \left( \frac{V_y}{EI_{eff}} + \frac{V - V_y}{EI_0} \right) \quad (1.30)$$

$$\Delta = \frac{5L^4}{384} \left( \frac{q_y}{EI_{eff}} + \frac{q - q_y}{EI_0} \right) \quad (1.31)$$

Où  $M_y$  et  $V_y$  sont le moment et le cisaillement à l'endroit de l'analyse lorsque les connecteurs plastifient et  $q_y$  est la charge uniformément répartie qui cause la plastification des connecteurs. La méthode «Frozen shear force» permet de tenir compte de la ductilité des connecteurs, mais assume que tous les connecteurs plastifient en même temps. Il est donc omis que les connecteurs peuvent plastifié progressivement des appuis vers le centre de la poutre ce qui sous-estime ainsi la capacité portante et surestime la flèche de la poutre composite. À l'inverse, puisque la  $\gamma$  méthode néglige la ductilité des connecteurs, celle-ci surestime la capacité portante et sous-estime la flèche de la poutre composite.

### 1.4.3 Modèle matriciel de flexibilité

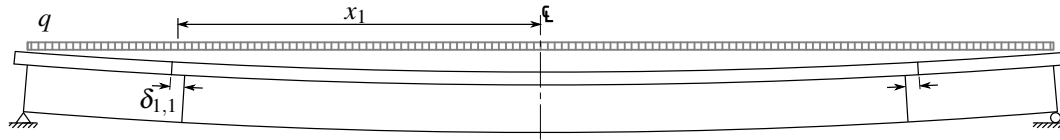
Tommola et Jutila [99] ont proposé un modèle qui permet de tenir compte du comportement d'une poutre composite avec des connecteurs discrets. Les hypothèses de leur modèle sont :

- les membrures individuelles (le bois et le béton) sont linéaires et élastiques ;
- les membrures sont connectées par des connecteurs de cisaillement discrets qui sont parfaitement linéaires ;
- les connecteurs de cisaillement sont rigides dans la direction verticale, il n'y a donc pas de décollement entre le bois et le béton.

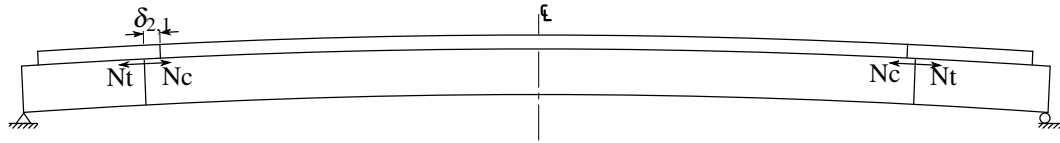
Le modèle est basé sur deux sous-systèmes. Le premier sous système est une poutre composite non connectée (Fig. 1.34a) et le second est les charges surabondantes engendrer par les connecteurs (Fig. 1.34b).

En se basant sur l'équilibre des glissements selon les deux sous-systèmes (Éq. (1.32)), il est possible de définir une équation de compatibilité.

$$\delta_{1,i} + \delta_{2,i} = 0 \quad (1.32)$$



(a) Glissement causé par le premier sous système



(b) Glissement causé par le second sous système

FIGURE 1.34 – Sous-système de la méthode matricielle

Où  $\delta_{1,i}$  est le glissement causé par le sous-système 1 au connecteur  $i$  et  $\delta_{2,i}$  est le glissement opposé causé par le sous-système 2 au connecteur  $i$ . Le sous-système 2 comprend la rigidité axiale du bois et du béton en plus de la rigidité des connecteurs. L'effort du connecteur d'une demi-poutre qui contient seulement un seul connecteur discret avec une charge symétrique peut être calculé avec l'équation suivante :

$$\delta_{1,1} + A_{1,1}N_1 + \frac{1}{k}N_1 = 0 \quad (1.33)$$

Où  $k$  est la rigidité du connecteur et les autres variables sont calculées avec les équations qui suivent :

$$\delta_{1,1} = \theta(x)d = \frac{h_c + h_b}{2EI_0} \int_{\frac{L}{2}-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} M(x) dx \quad (1.34)$$

$$A_{1,1} = \int_{\frac{L}{2}-x_1}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{1}{E_b A_b} + \frac{e_b}{E_b S_b} + \frac{1}{E_c A_c} + \frac{e_c}{E_c S_c} \right) dx \quad (1.35)$$

$$e_b = \frac{h_c + h_b}{2} \frac{E_b I_b}{EI_0} \quad e_c = \frac{h_c + h_b}{2} \frac{E_c I_c}{EI_0} \quad (1.36)$$

Lorsque la géométrie de la poutre est constante, l'équation (1.35) devient :

$$A_{1,1} = \left( \frac{1}{E_b A_b} + \frac{e_b}{E_b S_b} + \frac{1}{E_c A_c} + \frac{e_c}{E_c S_c} \right) x_1 \quad (1.37)$$

Pour le cas d'une demi-poutre avec plusieurs connecteurs, le principe est le même, il faut dans ce cas résoudre un système d'équations qui peut être exprimé par l'équation (1.38).

$$\{\delta_1\} + [F] \{N\} = 0 \quad (1.38)$$

Où :

$$[F] = \begin{bmatrix} A_{1,1} + \frac{1}{k_1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} + \frac{1}{k_2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} + \frac{1}{k_3} & \dots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & \dots & A_{n,n} + \frac{1}{k_n} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

$$A_{i,j} = \int_{\max(\frac{L}{2}-x_i; \frac{L}{2}-x_j)}^{\frac{L}{2}} \left( \frac{1}{E_b A_b} + \frac{e_b}{E_b S_b} + \frac{1}{E_c A_c} + \frac{e_c}{E_c S_c} \right) dx \quad (1.40)$$

$$\{\delta_1\} = \left\{ \delta_{1,1} \quad \delta_{1,2} \quad \delta_{1,3} \quad \dots \quad \delta_{1,n} \right\} \quad (1.41)$$

$$\{N\} = \left\{ N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_n \right\} \quad (1.42)$$

Lorsque la géométrie de la poutre est constante, l'équation (1.40) devient :

$$A_{i,j} = \left( \frac{1}{E_b A_b} + \frac{e_b}{E_b S_b} + \frac{1}{E_c A_c} + \frac{e_c}{E_c S_c} \right) \cdot \min(x_i; x_j) \quad (1.43)$$

Lorsque la poutre composite est symétrique autant dans sa géométrie que dans sa charge. La force dans chacun des connecteurs peut donc être calculée en inversant la matrice de flexibilité.

$$\{N\} = -[F]^{-1} \{\delta_1\} \quad (1.44)$$

Il est possible de calculer les efforts et la déformé de la structure une fois que tous les efforts des connecteurs sont connus avec le principe de superposition des deux sous-systèmes. Le moment sur la poutre est calculé avec la charge  $q$  appliquée et les efforts des connecteurs (Fig. 1.35).

Une fois le profil de moment connu sur la poutre composite, la flèche peut être calculée selon plusieurs méthodes. Pour connaître la flèche au centre de la poutre, la méthode du travail virtuel peut être utilisée. La flèche est calculée en considérant une rigidité flexionnelle de  $EI_0$  cohérente avec les hypothèses des deux sous-systèmes.

Avec la méthode de la matrice de flexibilité, il est possible de tenir compte de différent type d'espacement en plus d'être plus précis puisque cette méthode n'est pas basée sur une charge sinusoïdale contrairement à la  $\gamma$  méthode et la méthode «Frozen shear force». Pour tenir compte de la ductilité des connecteurs, Zhang [107] propose une modification qui consiste à réduire la matrice de flexibilité au fur et à mesure que les connecteurs plastifient puisque



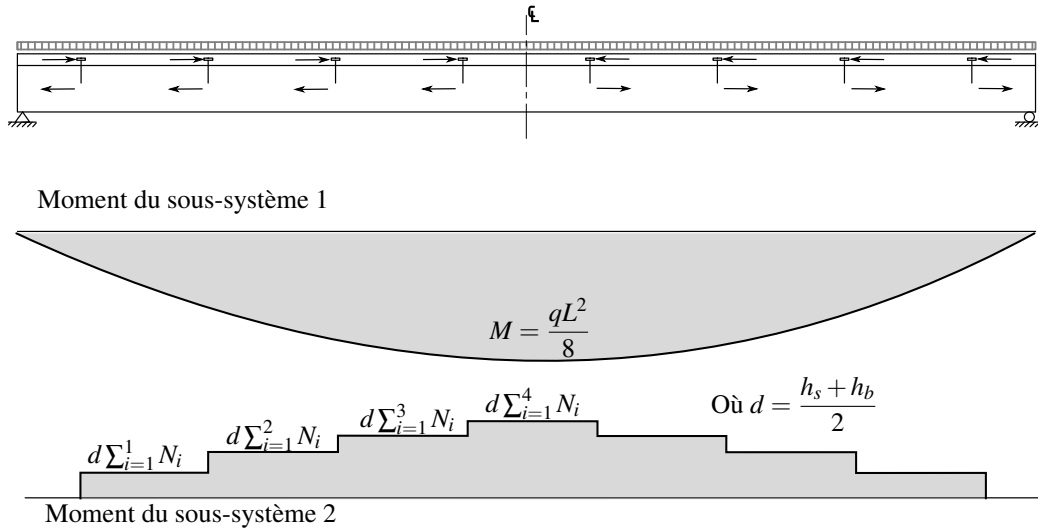


FIGURE 1.35 – Profil du moment causé par les deux sous-systèmes

la charge des connecteurs plastifiés est connue ( $F_{max}$ ). Une demi-poutre constituée de trois connecteurs dont le premier connecteur à plastifier peut être exprimé par le système d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1,2} \\ \delta_{1,3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} A_{2,1}F_{max} \\ A_{3,1}F_{max} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{2,2} + \frac{1}{k_2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} + \frac{1}{k_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (1.45)$$

L'avantage de la méthode proposée par Zhang [107] est qu'elle permet de tenir compte de la plastification progressive des connecteurs en plus de l'effet de l'action composite partielle. D'autres méthodes ou modèles existent, mais n'ont pas été présentés dans cette section. Il y a entre autres le modèle M4-5n qui permet de tenir compte des connexions imparfaites dans un modèle d'éléments finis tel que présenté dans la thèse de Pham [81].

## 1.5 Vibration des poutres composites bois-béton

L'analyse du comportement vibratoire des structures en bois est une étape très importante puisque celle-ci est souvent critique lors du dimensionnement. La limite des portées pour un dimensionnement donné est souvent limitée par le comportement vibratoire pour les structures de bois. Il en est de même pour les structures bois-béton. La section qui suit présente des critères de vibrations selon l'Eurocode 5 [2] et quelques méthodes de calcul pour prédire la fréquence naturelle d'une poutre composite.

## 1.5.1 Critère de vibration

Le comportement vibratoire d'une structure fait partie intégrante du dimensionnement en service. L'effet des sollicitations dynamiques se répartit en deux groupes pour les bâtiments :

- les vibrations induites par la marche, la danse, etc., c'est-à-dire par l'activité humaine ;
- les vibrations induites par les machines, les équipements mécaniques, etc.

La sensibilité de l'homme face aux vibrations est un phénomène complexe, en partie à cause de son aspect subjectif [73]. Cette complexité se reflète en plus sur le fait que les critères de vibration ne sont pas les mêmes pour une structure d'acier, de béton ou de bois. Cependant, ces considérations de base peuvent généralement être admise [53] :

- mobilisation de la sensibilité par les accélérations des vibrations de fréquences  $< 8$  Hz ;
- mobilisation de la sensibilité par les vitesses des vibrations de fréquences  $> 8$  Hz ;
- augmentation de la sensibilité par la durée de la vibration ;
- diminution de la sensibilité par la proximité et la connaissance de la source de la vibration ;
- diminution de la sensibilité par une activité humaine.

Pour les dalles composites bois-béton, à défaut d'avoir des valeurs limites pour ce type de structures, les critères de l'Eurocode 5 [2] pour les planchers de bois peuvent être utilisé [73]. Ces critères s'appliquent pour des planchers dont la fréquence est supérieure à 8 Hz. Lorsque la fréquence est inférieure, la réponse résonnante dynamique est plus sévère et il est important de recourir à d'autre méthode de calcul qui prend en compte les accélérations des vibrations.

Pour une dalle mixte appuyée sur quatre côtés, la première fréquence propre est définie approximativement par l'équation suivante :

$$f_1 = f_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{b}\right)^4 \frac{(EI)_b}{(EI)_l}} \quad (1.46)$$

- $f_0$  : fréquence fondamentale de la structure mixte pour une largeur unitaire [Hz]
- $L$  : portée de la dalle mixte [m]
- $b$  : largeur de la dalle mixte [m]
- $(EI)_l$  : rigidité effective flexionnelle de la dalle mixte selon l'axe porteur [Nmm<sup>2</sup>/m]
- $(EI)_b$  : rigidité effective flexionnelle de la dalle mixte selon l'axe non porteur, avec  $(EI)_b \ll (EI)_l$  [Nmm<sup>2</sup>/m]

La fréquence fondamentale de la structure mixte pour une largeur unitaire s'évalue avec l'équation suivante :

$$f_0 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{(EI)_l}{m}} \quad (1.47)$$

$m$  : masse par unité de surface [kg/m<sup>2</sup>]

L'Eurocode 5 [2] impose deux conditions. L'une d'entre elles est de limiter la déformation unitaire et l'autre est de limiter la vitesse due à une réponse impulsionnelle :

$$\frac{w_F}{F} = \frac{L^3}{48(EI)_l b_F} \leq a \quad [\text{mm/kN}] \quad (1.48)$$

$$v_{vel,max} = b^{(f_1 \zeta - 1)} \leq a \quad [\text{m}/(\text{Ns}^2)] \quad (1.49)$$

$w_F$  : flèche verticale statique provoquée par la force  $F$  [mm]

$F$  : force statique verticale concentrée [kN]

$b_F$  : largeur participante de la dalle pour la force concentré  $F$  [m]

$a, b$  : valeurs limites, données dans l'Eurocode 5 [2], en fonction du niveau de performance vibratoire exigée pour la dalle

$v_{vel,max}$  : vitesse de réponse impulsionnelle [m/(Ns<sup>2</sup>)]

$\zeta$  : coefficient d'amortissement modal ; ce coefficient est 0.01 pour les dalles mixtes courantes [-]

La largeur participante  $b_F$  sous une force concentrée  $F$  est :

$$b_F = \frac{L}{1.1} \sqrt[4]{\frac{(EI)_b}{(EI)_l}} \quad (1.50)$$

La vitesse de réponse impulsionnelle  $v_{vel,max}$  pour une dalle rectangulaire appuyée sur quatre côtés peut être calculée avec l'équation suivante :

$$v_{vel,max} = \frac{4(0.4 + 0.6n_{40})}{m \cdot b \cdot L + 200} \quad (1.51)$$

Le paramètre  $(m \cdot b \cdot L)$  correspond à la masse totale de la dalle et  $n_{40}$  représente le nombre de modes propres inférieures à 40 Hz. Celui-ci peut être calculé approximativement avec l'équation suivante :

$$n_{40} = \left\{ \left[ \left( \frac{40}{f_1} \right)^2 - 1 \right] \left( \frac{b}{L} \right)^4 \frac{(EI)_l}{(EI)_b} \right\}^{0.25} \quad (1.52)$$

## 1.5.2 Prédiction de la fréquence naturelle

La précision de calcul de la fréquence naturelle est un aspect important afin de s'assurer de bien respecter les critères de vibrations. De plus, lors d'analyse dynamique plus poussée, la précision de calcul des fréquences de mode supérieur peut devenir très importante. Plusieurs auteurs proposent des méthodes pour évaluer les fréquences naturelles d'une poutre composite. Les méthodes les plus simples négligent les déformations de cisaillement des membrures ainsi que l'inertie rotationnelle tandis que les méthodes les plus complètes en tiennent compte. Lorsque ces effets sont négligés, la fréquence prédite est de plus en plus surestimée plus le mode est élevé.

Girhammar *et al.* [48] propose une méthode simple, qui néglige les déformations de cisaillement des membrures et l'inertie rotationnelle, pour évaluer les fréquences naturelles d'une poutre composite :

$$f_n = \sqrt{\frac{EI_{eff}}{EI_\infty}} f_{n,\infty}, \quad (1.53)$$

Où,

$$\frac{EI_{eff}}{EI_\infty} = \left(\frac{\mu_{n,\infty}}{\mu_n}\right)^4 \left[1 + \frac{EI_\infty/EI_0 - 1}{1 + (\mu_n/\pi)^2(\alpha L)^2}\right]^{-1}, \quad (1.54)$$

$$f_{n,\infty} = \left(\frac{\pi}{\mu_{n,\infty}L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_\infty}{\rho A}}. \quad (1.55)$$

$\rho A$  représente la masse par unité de longueur de la poutre composite.  $EI_\infty$  et  $EI_0$  représente l'inertie flexionnelle de la poutre composite avec une action composite parfaite et nulle respectivement.  $\mu_n$  et  $\mu_{n,\infty}$  représente la longueur effectivement du mode vibratoire de la poutre composite selon la véritable action composite et selon une action composite parfaite respectivement. Dans le cas d'une poutre simplement appuyée,  $\mu_n = \mu_{n,\infty}$  et est évalué selon l'équation suivante :

$$\mu_{n,\infty} = \frac{1}{n}. \quad (1.56)$$

Xu et Wu [105] propose une méthode plus complète afin de tenir compte de la déformation de cisaillement sur chacune des couches et de l'inertie rotationnelle. La fréquence naturelle pour une poutre simplement appuyée s'évalue selon l'équation suivante :

$$f_n^2 = (1 - f_{slip}) f_{sh-ro} f_{n,0}^2, \quad (1.57)$$

Où,

$$f_{n,0}^2 = \frac{\xi^4}{\gamma_1}, \quad (1.58)$$

$$f_{slip} = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + \alpha^2 / \xi^2}, \quad (1.59)$$

$$f_{sh-ro} = \frac{1}{1 + \xi^2 [\gamma_2 + (1 - f_{slip}) \gamma_3]}, \quad (1.60)$$

$$\gamma_1 = \frac{\rho A}{EI_\infty}, \quad (1.61)$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{\rho I}}{m}, \quad (1.62)$$

$$\gamma_3 = \frac{EI_\infty}{\kappa GA}, \quad (1.63)$$

$$\xi = \frac{n\pi}{L}, \quad (1.64)$$

$$\beta = \frac{EI_\infty}{EI_0}, \quad (1.65)$$

$$\alpha^2 = k \left( \frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_b A_b} + \frac{d^2}{EI_0} \right). \quad (1.66)$$

$\overline{\rho I}$  représente l'inertie rotationnelle de la poutre composite et  $\overline{\kappa GA}$  représente la rigidité de cisaillement de chacune de membrure où  $\kappa$  est un coefficient de correction de forme et  $G$  un module de cisaillement. Ces propriétés se calculent selon les deux équations qui suivent :

$$\overline{\rho I} = \rho_c I_c + \rho_b I_b, \quad (1.67)$$

$$\overline{\kappa GA} = \kappa_c G_c A_c + \kappa_b G_b A_b. \quad (1.68)$$

La méthode de Xu et Wu [105] permet également de tenir compte de la présence d'une charge axiale, mais n'est pas présentée ici.

## 1.6 Conclusion

Le comportement d'une poutre composite bois-béton dépend grandement des caractéristiques mécaniques du bois, de béton et plus particulièrement de la connexion entre les deux matériaux. Dans une optique de conception ductile pour une poutre composite bois-béton, il est primordial de connaître la loi non linéaire de la connexion, c'est-à-dire la charge de cisaillement que la connexion offre selon le glissement relatif qu'elle subit, en plus de bien connaître la loi de comportement du béton. Le bois en flexion est plutôt considéré comme un matériau élastique fragile et offre ainsi très peu de déformation plastique.

La littérature nous a montré qu'une connexion rigide permet d'avoir une meilleure action composite et ainsi réduire la quantité de matériaux utilisés. Cependant, souvent les connexions rigides sont très résistantes et ne rompent pas avant le bois. La poutre composite bois-béton demeure donc fragile, car elle ne peut bénéficier de la ductilité du connecteur.

De plus, les méthodes de calcul existantes permettent difficilement de tenir compte des différents types de conditions d'appuis, des espacements variables des connecteurs, et de la non-linéarité de la connexion et du béton dans un modèle unidimensionnelle. Un modèle fiable qui peut reproduire fidèlement les essais en laboratoire pourrait ainsi nous permettre de prédire quel type de connecteur permet d'optimiser la ductilité de la poutre composite par la rupture de la connexion.

De plus, le calcul des fréquences naturelles d'une poutre composite bois-béton est un aspect important pour la conception, car des vibrations excessives sur des poutres de bois sont souvent observées ce qui engendre un inconfort pour les utilisateurs. Le prochain chapitre traite ce sujet.

## Chapitre 2

# The Effect of Rotatory Inertia on the Natural Frequencies of Composite Beams

### Résumé

Ce papier met l'accent sur le comportement dynamique d'une poutre composite à deux couches, où cet aspect est important pour l'analyse des performances d'une structure telle qu'une dalle de béton sur une poutre d'un plancher résidentiel ou d'un pont. Après une brève révision sur la théorie d'une poutre composite basée sur l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la formulation dynamique est développée en incluant l'effet du déplacement longitudinal relatif de chacune des couches dans l'inertie rotationnelle, où celui-ci peut être particulièrement important pour les poutres composites bois-béton. Les équations gouvernantes et le modèle d'élément finis sont dérivés en détail et validés en comparant les fréquences naturelles prédites contre d'autres méthodes. Une analyse paramétrique montre les facteurs clés qui affectent l'inertie rotationnelle et son influence sur la fréquence naturelle sur poutre composite d'une portée selon différentes conditions aux appuis. L'effet de l'inertie rotationnelle sur la première fréquence naturelle d'une poutre composite est en dessous de 5% ; toutefois, l'effet sur les fréquences naturelles supérieures devient plus important et non négligeable dans le cadre d'une analyse dynamique complète. Finalement, une équation simplifiée est proposée pour tenir en compte l'effet de l'inertie rotationnelle sur le calcul des fréquences naturelles d'une poutre composite à des fins de conception.

**Mots clés :** Action composite partielle, Glissement relatif, Ratio portée-profondeur, Conditions limites, Méthode par éléments finis, Analyse paramétrique

## Abstract

This article focuses on the dynamic behaviour of two-layer composite beams, which is an important aspect of performance of structures, such as a concrete slab on a girder in residential floors or bridges. After briefly reviewing the composite beam theory based on Euler-Bernoulli hypothesis, the dynamic formulation is extended by including the effect of the relative longitudinal motion of the layers in the rotatory inertia, which can be particularly important for timber-concrete composite beams. The governing equation and the finite element model are derived in detail and validated by comparing the natural frequency predictions against other methods. A parametric analysis shows the key factors, which affect the rotatory inertia and its influence on the frequency of a single-span composite beam with different boundary conditions. The effect of the rotatory inertia on the first natural frequency of the composite beam appears below 5%; however, the effect on the higher natural frequencies becomes more important and not negligible in a full dynamics analysis. Finally, a simplified equation is proposed to account for the effect of the rotatory inertia on the calculation of the frequency of a composite beam for design purpose.

**Keywords:** Partial Interaction, Interlayer Slip, Span-to-Depth Ratio, Boundary Conditions, Finite Element Method, Parametric analysis



## Nomenclature

|               |   |             |
|---------------|---|-------------|
| $A_b, A_s$    | Cross sectional area of the girder and the slab, respectively   | $[m^2]$     |
| $E_b, E_s$    | The Young's modulus of the girder and the slab, respectively  | $[Nm^{-2}]$ |
| $EA^*$        | Axial stiffness parameter of the composite beam<br>$\left(EA^* = \left(\frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_b A_b}\right)^{-1}\right)$                          | $[N]$       |
| $EI_{eff}$    | Effective flexural stiffness of the composite beam  | $[Nm^2]$    |
| $EI_0$        | Flexural stiffness of the composite beam without connector<br>$(EI_0 = E_s I_s + E_b I_b)$  | $[Nm^2]$    |
| $d$           | Distance between the centroid of rigidity of the slab and the girder  | $[m]$       |
| $G(x)$        | Shape function of $N(x)$  | $[N]$       |
| $h$           | Depth of the composite beam   | $[m]$       |
| $h_1, h_2$    | Longitudinal displacement of the slab and the girder, respectively  | $[m]$       |
| $I_b, I_s$    | Second moment of inertia of the girder and the slab, respectively   | $[m^4]$     |
| $K$           | Stiffness of the connection   | $[Nm^{-2}]$ |
| $K_s, K_v$    | Spring stiffness at the end of the composite beam for slip and for vertical displacement, respectively  | $[Nm^{-1}]$ |
| $K_\theta$    | Spring stiffness at the end of the composite beam for rotation  | $[Nm]$      |
| $L$           | Length of the composite beam  | $[m]$       |
| $m$           | Distributed moment in the composite beam ( $m = m_1 + m_2$ )  | $[N]$       |
| $m_1, m_2$    | Distributed moment due to the rotational acceleration and due to the relative longitudinal acceleration of the layers in the composite beam, respectively | $[N]$       |
| $M, M_b, M_s$ | Moment in the composite beam, on the girder and on the slab, respectively   | $[Nm]$      |
| $n$           | Frequency mode  | $[-]$       |
| $N, N_\infty$ | Normal force acting on the slab and the girder, with the real stiffness connection and with an infinitely rigid connection, respectively                  | $[N]$       |
| $\Delta N$    | Contribution of the slip to the normal force on the slab and the girder   | $[N]$       |

|   |   |              |
|---|---|--------------|
| $q$   | Distributed load on the composite beam  | $[Nm^{-1}]$  |
| $s$   | Slip between layers of the composite beam   | $[m]$        |
| $s_1, s_2$  | Slip component due to the normal force acting on the slab and girder and due to the rotation of the composite beam, respectively  | $[m]$        |
| $t$   | time  | $[s]$        |
| $V$   | Shear force in the composite beam   | $[N]$        |
| $w, w_\infty$                                       | Deflection of the composite beam with a deformable connection and with an infinitely rigid connection, respectively   | $[m]$        |
| $\Delta w$  | Contribution of the slip to the deflection of the composite beam  | $[m]$        |
| $W(x)$  | Shape function of $w(x)$  | $[m]$        |
| $x$   | Position along the composite beam   | $[m]$        |
| $y_b, y_{gm}, y_s$                                  | Distance of the centroid of mass of the girder, of the composite beam and of the slab from the top of the composite beam, respectively  | $[m]$        |
| $\mu_n$   | Eigenmode length coefficient  | $[-]$        |
| $\omega$  | Natural frequency of the composite beam   | $[s^{-1}]$   |
| $\omega_{slip,rot,K_s=\infty, K_\theta=\infty,C-C}$ | Natural frequency of the composite beam with slip effect, RI effect, $K_s = \infty$ at each end, $K_\theta = \infty$ at each end and clamped-clamped boundary condition, respectively | $[s^{-1}]$   |
| $\rho_s, \rho_b$                                    | Density of the slab and the girder, respectively  | $[kgm^{-3}]$ |
| $\rho A$  | Distributed weight of the composite beam ( $\rho A = \rho_s A_s + \rho_b A_b$ )   | $[kgm^{-1}]$ |
| $\rho I, \rho A y^2$                                | Rotatory inertia term of the composite beam<br>$\rho I = \rho_s I_s + \rho_b I_b$ and $\rho A y^2 = \rho_s A_s (y_{gm} - y_s)^2 + \rho_b A_b (y_b - y_{gm})^2$                        | $[kgm]$      |
| $[\mathbf{K}], [\mathbf{K}^e]$                      | Global and elementary stiffness matrix, respectively  | $[-]$        |
| $[\mathbf{M}], [\mathbf{M}^e]$                      | Global and elementary mass matrix, respectively   | $[-]$        |
| $\{\mathbf{Q}^e\}, \{\Delta^e\}$                    | Elementary vector of secondary and primary variable, respectively   | $[-]$        |

## 2.1 Introduction

Structures composed of dissimilar materials, for example, timber-concrete composite floors in buildings or concrete slabs on steel girders in bridges, are widely used today in new construction and rehabilitation. Such hybrid structures have been fostering civil engineering applications as they allow optimization of construction time, cost and performances by taking advantage of different materials. For instance, in timber-concrete floors, the composite action of the concrete slab on timber beams allows dramatically increasing the stiffness and reducing the natural frequency while keeping the lightness and the ecological imprint of the structure. Furthermore, tall timber buildings are emerging worldwide as economically efficient by taking advantage of composite systems not only for optimizing the performance of the floors, but also the diaphragms and the vertical bracing system [93].

The composite beam theory was developed from the Euler-Bernoulli beam theory and has been successfully used in many applications [50]. According to this theory, a composite beam consists of two or more layers connected by means of a linearly behaving connection. The shear force transferred by the connection develops an axial force in the connected layers, which contribute to the rotatory inertia of the overall section. In early 1950s the 2nd order differential equation of a composite beam was derived independently by several researchers: in Switzerland by Stüssi [96], in Sweden by Granholm [51], in United States by Newmark *et al.* [77] and in Russia by Pleshkov [83]. The differential equation is valid for various beam configurations and can be solved using different methods [40]. In particular, Faella *et al.* [39] developed an "exact" analytical expression of the stiffness matrix for a finite element (FE) model by employing the shape functions from the flexibility matrix of the composite beam theory.

The composite beam theory was first extended to dynamic analysis by means of variational principles [48, 78, 104]. Xu et Wu [105] and Nguyen *et al.* [78] finally included the effect of shear deformation by considering the Timoshenko beam theory. Xu et Wu [105] provided a solution for single-span composite beams under uniform load accounting for the effect of the rotatory inertia on the frequency modes of the composite beam. Their results showed that, while the effect of shear deformation is considerable, the effect of rotatory inertia on the frequency was rather limited and inferior to 2% in the first three modes of vibration. Furthermore, Girhammar *et al.* [48] provided a simple formulation for single-span composite beams with various boundary conditions. However, neither Xu et Wu [105] nor Girhammar *et al.* [48] included the inertia of relative longitudinal motion of the layers of the composite beam in the solution. As pointed out by Girhammar *et al.* [48] only flexural and no relative

longitudinal vibrations of the layers were considered, i.e. the inertia of longitudinal motion of the composite beam was not included. Finally, it is worth mentioning further studies on the vibration of composite beam which includes the elasto-plastic behaviour [11, 10] and thermal loads [58].

This work aims at fostering the composite beam theory by considering the contribution of the relative longitudinal acceleration on the rotatory inertia, which can be particularly important for partially connected layers with differential longitudinal vibrations, such as timber-concrete composite structures.

The objectives of this work is are as follows:

1. Include the contribution of the relative longitudinal acceleration of the layers to the rotatory inertia within the theory based on the Euler-Bernoulli hypothesis;
2. Provide details of the FE formulation which considers general elastic boundary conditions;
3. Validate the accuracy of the proposed model against existing analytical and numerical methods;
4. Assess the importance of the rotatory inertia on the first frequency modes of a composite beam; and
5. Propose a simplified formula based on an equivalent inertia concept to consider the rotatory inertia in calculating the frequencies of a composite beam.

The article is structured as follows. Section 2 summarizes the static theory of a composite beam with interface slip. Section 3 develops the dynamics governing equations with the two contributions to the rotatory inertia. Section 4 presents the FE formulation (details are given in the annex A). Section 5 compares the accuracy of the presented one-dimensional (1D) model against a well-recognized analytical model and a 2-dimensional (2D) FE analysis. Subsection 6.2 presents the results of a parametric analysis to check the importance of the rotatory inertia on the natural frequency of a composite beam with different cases, such as: beam geometry, span-to-depth ratio, boundary conditions, and connection stiffness. Subsection 6.3 introduces a simplified formula to correct the frequency of a composite beam taking into account the effect of the rotatory inertia.

## **2.2 Static theory of a composite beam with interface slip**

The scope of this section is to present a brief and complete review of the composite beam theory derived from classical equilibrium principles, which is necessary for the development

of the rotatory inertia terms and the numerical implementation presented in sections 3 and 4, respectively. The theory of a composite beam under static loading described in the works of Newmark *et al.* [77], Gelfi et Giuriani [43] and Girhammar et Pan [47] relies on the following hypotheses:

1. The elastic behaviour of each layer is based on the classical Euler-Bernoulli beam theory (i.e., it neglects the effects of shear deformation on the flexural behaviour);
2. The layers have the same deflection, rotation and curvature (i.e., no separation is considered);
3. The shear stiffness of the connection is continuous along the beam. The connections behave as linearly elastic with a constant slip modulus ( $K$ ).

In the following, full composite action is represented by the subscript symbol  $\infty$  and non-composite action is represented by the subscript symbol 0. These two conditions represent the upper and the lower bounds of the composite action.

### 2.2.1 Slip theory of a composite beam

Fig. 2.1a shows a composite section comprised of a two-layer beam, where  $E_s$  and  $E_b$  are the Young's moduli of the slab and the girder, respectively,  $A_s$  and  $A_b$  are the cross-sectional areas of the slab and the girder, respectively, and  $d$  is the distance of the centroid of rigidity of each beam section. Fig.2.1b shows the equilibrium of the external and internal forces, moments and axial forces, acting on each layer, where  $q(x)$  is the external vertical distributed load and  $m(x)$  is the external distributed moment. The total internal moment ( $M$ ) and shear force ( $V$ ) can be decomposed into the moment ( $M_s$ ) and axial force ( $N_s$ ) acting on the slab and the moment ( $M_b$ ) and axial force ( $N_b$ ) acting on the beam. Note that the axial forces have to be in equilibrium ( $N_s = N_b = N$ ). In this context, the following equation is derived from the equilibrium:

$$M = M_s + M_b + Nd \quad (2.1)$$

where  $M$ ,  $M_s$ ,  $M_b$  and  $N$  are, respectively, the moments acting on the composite beam, on the slab and on the girder, and the axial force acting on each layer. From the Euler-Bernoulli assumption, the following equation is derived:

$$w'' = \frac{M_s}{E_s I_s} = \frac{M_b}{E_b I_b} \quad (2.2)$$

where  $E_s I_s$  and  $E_b I_b$  are the flexural stiffness of the slab and the girder, respectively. Substituting Eq. (2.2) into Eq. (2.1), where  $E I_0 = E_s I_s + E_b I_b$ , gives the following:

$$M = E I_0 w'' + N d. \quad (2.3)$$

Therefore, the curvature can be expressed as follows:

$$w'' = \frac{M - N d}{E I_0}. \quad (2.4)$$

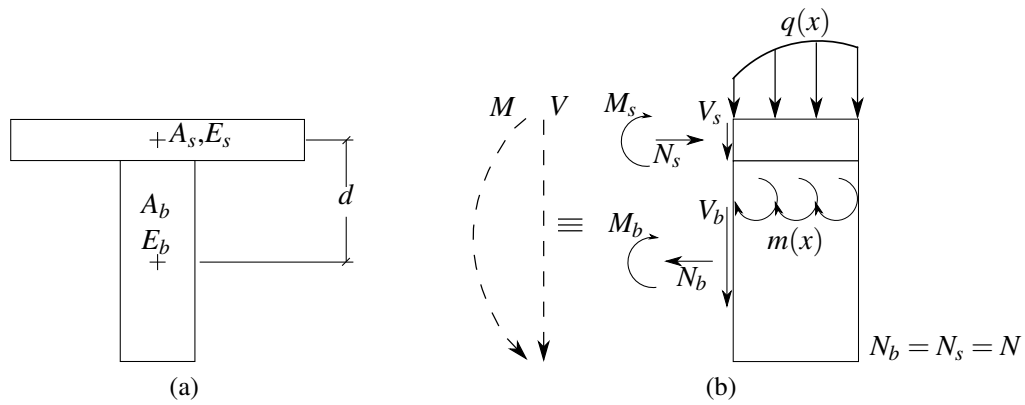


Figure 2.1: (a) Cross section; (b) applied loads, moments and forces of a composite beam

The curvature of the composite beam can be expressed as the sum of the curvature given by the classical no-slip theory  $w''_{\infty}$  and the curvature contribution due to the slip  $\Delta w''$

$$w'' = w''_{\infty} + \Delta w''. \quad (2.5)$$

Substituting Eq. (2.5) into Eq. (2.4), the curvature increment becomes:

$$\Delta w'' = w'' - w''_{\infty} = \frac{M - N d}{E I_0} - w''_{\infty}. \quad (2.6)$$

In the case of no-slip, the curvature of Eq. (2.4) reduces to:

$$w''_{\infty} = \frac{M - N_{\infty} d}{E I_0} \quad (2.7)$$

where  $N_{\infty}$  is the axial force acting on the centroid of rigidity of each layer with no slip. Substituting Eq. (2.7) into Eq. (2.6) yields:

$$\Delta w'' = \frac{M - Nd - M + N_\infty d}{EI_0} = -\frac{\Delta Nd}{EI_0} \quad (2.8)$$

where:

$$\Delta N = N - N_\infty. \quad (2.9)$$

Fig. 2.2 shows the kinematics of the slip by superposition principle as the sum of two contributions: (i) the slip component  $s_1$  due to the axial forces, which is equal to the sum of the longitudinal displacements of each member ( $u_s + u_b$ ) due to the axial forces and; (ii) the slip component  $s_2$  due to the rotation, which can be described by the product between the longitudinal slope  $w'$  and the distance  $d$  between the centres of rotation of each layer (i.e., their centroids of rigidity). According to the kinematics, the slip relation  $s$  of the composite beam can be expressed as follows (see Fig. 2):

$$s = s_2 - s_1 = w'd - (u_s + u_b) \quad (2.10)$$

By derivation one obtains:

$$s' = w'd - (u'_s + u'_b) \quad (2.11)$$

which can be written as:

$$s' = w''d - \frac{N}{EA^*} \quad (2.12)$$

where the following definitions have been employed for brevity:

$$u'_s = \varepsilon_s = \frac{N}{E_s A_s}; \quad u'_b = \varepsilon_b = \frac{N}{E_b A_b}; \quad \frac{1}{EA^*} = \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_b A_b}.$$

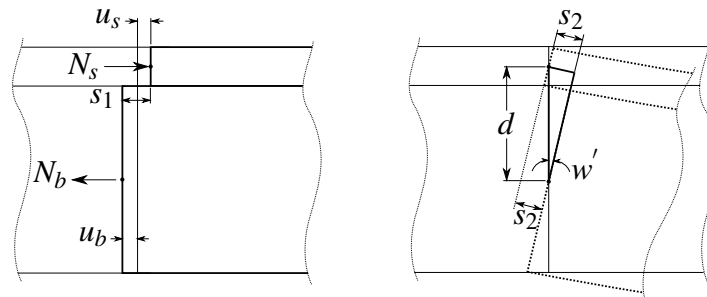


Figure 2.2: Slip component due to the axial force and rotation

Substituting Eq. (2.5) and Eq. (2.9) into Eq. (2.12):

$$s' = (w''_{\infty} + \Delta w'')d - \frac{N_{\infty} + \Delta N}{EA^*} \quad (2.13)$$

and recalling that the slip is zero in the no-slip theory ( $\Delta w'' = \Delta N = 0$ ), the curvature becomes:

$$w''_{\infty}d - \frac{N_{\infty}}{EA^*} = 0 \quad (2.14)$$

which, in turn, allows reducing Eq. (2.13) to:

$$s' = \Delta w''d - \frac{\Delta N}{EA^*}. \quad (2.15)$$

Substituting Eq. (2.8) into Eq. (2.15) yields:

$$s' = \left( \frac{1}{EA^*} + \frac{d^2}{EI_0} \right) (N_{\infty} - N). \quad (2.16)$$

By taking Eq. (2.14),  $N_{\infty}$  can be expressed as:

$$N_{\infty} = \frac{M}{EI_{\infty}} EA^* d \quad (2.17)$$

where

$$EI_{\infty} = EI_0 + EA^* d^2. \quad (2.18)$$

The axial force  $N$  on each layer is directly related to the slip on the composite beam:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -Ks(x). \quad (2.19)$$

where  $x$  defines the position along the composite beam. It is assumed that the interface shear force is linearly proportional to the slip  $s(x)$  by a constant stiffness,  $K$ . The mechanical consequence is the "non-local" character of the composite beam theory in the sense that the sectional forces depend on a variable slip integrated over the length of the beam. In other words, the behaviour of a section in composite beam theory is coupled with the behaviour of the whole structure.

Substituting Eq. (2.17) and Eq. (2.19) into Eq. (2.16):

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{K} \frac{dN(x)}{dx} \right) - \frac{EI_{\infty}}{EA^* EI_0} N(x) = -\frac{M(x)d}{EI_0}. \quad (2.20)$$

Eq. (2.20) is the governing equation for the normal force on each layer of a composite beam.



## 2.2.2 Coupling Euler-Bernoulli beam theory and slip theory

The final step is to couple the governing equation for the normal force of each layer with the overall equilibrium of the composite beam. First, we recall the beam equations:

$$M'(x) = V(x) - m(x) \quad (2.21)$$

$$V'(x) = q(x) \quad (2.22)$$

where  $q(x)$  is a distributed load and  $m(x)$  is a distributed moment on the composite beam (see Fig. 2.1). Substituting Eq. (2.3) into Eq. (2.21) yields:

$$\frac{d}{dx} (EI_0 w''(x) + N(x)d) = V(x) - m(x). \quad (2.23)$$

Differentiating Eq. (2.23) and substitute Eq. (2.22) into it provides the first working equation of the beam theory:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI_0 w''(x) + N(x)d) = q(x) - m'(x). \quad (2.24)$$

Finally, substituting Eqs. (2.3) and (2.18) into Eq. (2.20) yields:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{K} \frac{dN(x)}{dx} \right) - \frac{1}{EA^*} N(x) + dw''(x) = 0, \quad (2.25)$$

which is the second governing equation. This equation does not include a term of the external force which will have a consequence on the dynamics behaviour. In summary, the beam theory is fully described by a system of coupled differential equations, one of the fourth order Eq. (2.24) and one of second order Eq. (2.25).

## 2.2.3 General boundary conditions

In order to reproduce different boundary conditions, we defined three springs to represent all possible end supports of a single-span composite beam as shown in Fig. 2.3. In the figure, two external springs represent the rotational,  $K_\theta$ , and the vertical,  $K_v$ , stiffness, and the third spring,  $K_s$ , is an internal spring restraining the slip at the end of the beam. Six boundary conditions are necessary to solve the system of the partial differential equations Eqs. (2.24) and (2.25). Considering the general case of the boundary conditions shown in Fig. 2.3, the following equations can be written [48, 28]:

$$\left( EI_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N(x)d \right) \Big|_F = -K_\theta w'(x) \Big|_F$$

at  $F = 0$  and  $F = L$  (2.26)

$$\frac{d}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N(x)d \right) \Big|_F = -K_v w(x) \Big|_F$$

at  $F = 0$  and  $F = L$  (2.27)

$$\frac{1}{K} \frac{dN(x)}{dx} \Big|_F = \frac{1}{K_s} N(x) \Big|_F$$

at  $F = 0$  and  $F = L$  (2.28)

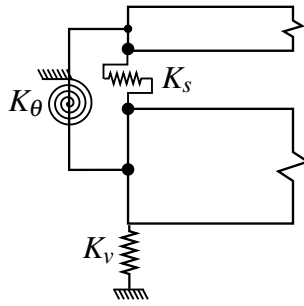


Figure 2.3: General boundary conditions at the end of a composite beam

The following specific cases of the boundary conditions can be considered at each end of the composite beam (at  $x = 0$  and  $x = L$ ) :

*Pinned end:*

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \left( EI_0 \frac{d^2 w}{dx^2} + Nd \right) &= 0, \\ N &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

*Clamped end:*

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ \frac{dw}{dx} &= 0, \\ \frac{1}{K} \frac{dN}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

Free end:

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} &= 0, \\ \frac{d}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2w}{dx^2} + Nd \right) &= 0, \\ N &= 0.\end{aligned}\tag{2.31}$$

## 2.3 Dynamics theory of a composite beam with interface slip

The scope of this section is to consider the inertial forces and moments acting on a composite beam in accordance with the Lagrange–d’Alembert principle, which is the dynamic analogue to the principle of virtual work for applied forces in a static system.

### 2.3.1 Vertical acceleration

As a standard approach, the vertical force of inertia is calculated by means of the Lagrange–d’Alembert principle as follows:

$$q(x,t) = -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\tag{2.32}$$

where,

$$\rho A = \rho_s A_s + \rho_b A_b.\tag{2.33}$$

Eq. (2.32) is directly substituted into Eq. (2.24)

### 2.3.2 Rotational acceleration

The rotatory inertia (RI) of a composite beam is derived from the Lagrange–d’Alembert principle. The moment of inertia  $m(x)$  is split into two terms in Eq. (2.34). The first term is due to the rotational acceleration of each layer taken separately, while the second term is the contribution caused by the relative longitudinal acceleration of the layers. The first term has been considered in the previous work by Xu et Wu [105]. The second term has not been considered in the past and is being introduced and developed for the first time in this work.

$$m(x,t) = m_1(x,t) + m_2(x,t)\tag{2.34}$$

The term  $m_1(x,t)$  can be directly expressed from the Lagrange–d’Alembert principle by Eq. (2.35)

$$m_1(x,t) = -\rho I_0 \frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x}\tag{2.35}$$

where,

$$\rho I_0 = \rho_s I_s + \rho_b I_b. \quad (2.36)$$

Now, let's derive the term  $m_2(x, t)$  caused by the relative longitudinal motion of the layers. Fig. 2.4 shows the assumed kinematics due to the rotation by considering the two terms  $h_1(x, t)$  and  $h_2(x, t)$ , which are evaluated by simple trigonometry in terms of the distance  $d$  between the centroids of rigidity of each member and the centroid of mass of the overall section  $y_{gm}$  defined as follows:

$$y_{gm} = \frac{\rho_s A_s y_s + \rho_b A_b y_b}{\rho_s A_s + \rho_b A_b}. \quad (2.37)$$

Based on this kinematics, the horizontal displacement of the centroid of mass of each member  $h_1(x, t)$  and  $h_2(x, t)$  read:

$$\begin{aligned} h_1(x, t) &= (y_{gm} - y_s) \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{Kd} \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \right) \\ h_2(x, t) &= (y_b - y_{gm}) \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{Kd} \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

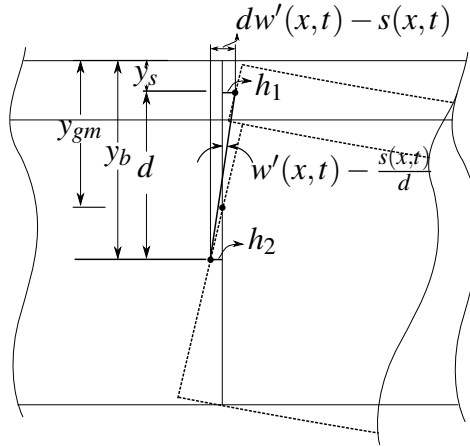


Figure 2.4: Longitudinal displacement of each layer

For the equilibrium of the horizontal force, the longitudinal acceleration of each layer must be proportional to its mass. Thus, the moment due to the relative longitudinal acceleration of the layers is written as follows:

$$m_2(x, t) = -\rho A \bar{y}^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{Kd} \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2.39)$$

where,

$$\rho A \bar{y}^2 = \rho_s A_s (y_{gm} - y_s)^2 + \rho_b A_b (y_b - y_{gm})^2. \quad (2.40)$$

The first working equation can be derived by substituting Eq. (2.32), Eq. (2.35) and Eq. (2.39) into the static governing Eq. (2.24), which yields:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_0 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + N(x,t)d \right) = -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \rho I_0 \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial t^2 \partial x^2} + \rho A \bar{y}^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{Kd} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \right). \quad (2.41)$$

Finally, the second working equation, Eq. (2.25), must be symmetric based on the cause and effect principle [22]. This equation does not include  $N(x,t)$  derived over time because Eq. (2.25) does not include a term of an external force which means it will have zeros on the diagonal in the mass matrix for the FE formulation:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{K} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{1}{EA^*} N(x,t) + d \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2}. \quad (2.42)$$

## 2.4 Model formulation within Finite Element Method (FEM)

This sections reports the details of the numerical implementation within the Finite Element Method (FEM) of the eigenvalue problem which allows calculating the natural frequencies of the composite beam.

### 2.4.1 Matrix development

The classical Finite Element Method (FEM) is herein employed by solving the integral form the differential equations with compactly supported weight (or basis) functions, also called weak formulation. In more details, the FEM application aims at calculating the natural frequency of the composite system by solving the following identity:

$$\left| [\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}] \right| = 0. \quad (2.43)$$

In order to formulate the stiffness matrix  $[\mathbf{K}]$  and the mass matrix  $[\mathbf{M}]$ , the solution of the governing equations is assumed to be a periodic with natural frequency  $\omega$ . The shape of the periodic motion can be expressed by functions  $W(x)$  for  $w$  and  $G(x)$  for  $N$ .

$$\begin{aligned} w(x,t) &= W(x)e^{-i\omega t} \\ N(x,t) &= G(x)e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Substituting Eqs. (2.44) into Eq. (2.41) and Eq. (2.42) yields:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) = -\omega^2 \rho A W(x) - \omega^2 (\rho I_o + \rho A \bar{y}^2) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{d^2 G(x)}{dx^2}, \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{K} \frac{dG(x)}{dx} \right) - \frac{1}{EA^*} G(x) + d \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{d^2 W(x)}{dx^2}. \quad (2.46)$$

Thus, the weak formulation of the Eqs. (2.45) and (2.46) is as follows:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) - \omega^2 (\rho I_o + \rho A \bar{y}^2) \frac{dv_1(x)}{dx} \frac{dW(x)}{dx} + \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{dv_1(x)}{dx} \frac{dG(x)}{dx} - \omega^2 \rho A v_1(x) W(x) \right\} dx + \left\{ v_1(x) \left[ \frac{d}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) + \omega^2 (\rho I_o + \rho A \bar{y}^2) \frac{dW(x)}{dx} - \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{dG(x)}{dx} \right] - \frac{dv_1(x)}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) \right\}_{x_a}^{x_b}, \quad (2.47)$$

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left\{ -\frac{dv_2(x)}{dx} \left( \frac{1}{K} \frac{dG(x)}{dx} \right) - \frac{1}{EA^*} v_2(x) G(x) + v_2(x) d \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{dv_2(x)}{dx} \frac{dW(x)}{dx} \right\} dx + \left[ v_2(x) \left( \frac{1}{K} \frac{dG(x)}{dx} - \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{dW(x)}{dx} \right) \right]_{x_a}^{x_b}, \quad (2.48)$$

where the weight functions  $v_1(x)$  and  $v_2(x)$  are :

$$v_1(x) = \sum_{j=1}^m W_j^* \psi_j^{(1)}(x), \quad v_2(x) = \sum_{j=1}^n G_j^* \psi_j^{(2)}(x), \quad (2.49)$$

where  $\psi_i^{(1)}$  is a Hermite cubic polynomial and  $\psi_i^{(2)}$  is a Lagrange polynomial with a minimum degree of one. The FEM weak formulation is then discretised by assuming the approximation functions of the following form:

$$W(x) = \sum_{j=1}^m W_j \psi_j^{(1)}(x), \quad G(x) = \sum_{j=1}^n G_j \psi_j^{(2)}(x), \quad (2.50)$$

Finally, the FEM approach allows reducing the problem of solving the governing differential equations into the following problem of linear algebra:

$$([\mathbf{K}^e] - \omega^2 [\mathbf{M}^e]) \{\Delta^e\} = \{\mathbf{Q}^e\}, \quad (2.51)$$

where the involved matrices are :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}^e] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{K}^{11}] & [\mathbf{K}^{12}] \\ [\mathbf{K}^{21}] & [\mathbf{K}^{22}] \end{bmatrix}, \\
K_{ij}^{11} &= \int_{x_a}^{x_b} EI_0 \frac{d^2 \psi_i^{(1)}}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j^{(1)}}{dx^2} dx, \quad K_{ij}^{12} = K_{ji}^{21} = \int_{x_a}^{x_b} d \frac{d^2 \psi_i^{(1)}}{dx^2} \psi_j^{(2)} dx, \\
K_{ij}^{22} &= \int_{x_a}^{x_b} \left\{ -\frac{1}{K} \frac{d\psi_i^{(2)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(2)}}{dx} - \frac{1}{EA^*} \psi_i^{(2)} \psi_j^{(2)} \right\} dx, \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}^e] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{M}^{11}] & [\mathbf{M}^{12}] \\ [\mathbf{M}^{21}] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}, \\
M_{ij}^{11} &= \int_{x_a}^{x_b} \rho A \psi_i^{(1)} \psi_j^{(1)} dx + \int_{x_a}^{x_b} (\rho I_0 + \rho A \bar{y}^2) \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(1)}}{dx} dx, \\
M_{ij}^{12} &= M_{ji}^{21} = - \int_{x_a}^{x_b} \frac{\rho A \bar{y}^2}{Kd} \frac{d\psi_i^{(1)}}{dx} \frac{d\psi_j^{(2)}}{dx} dx. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

The elemental stiffness matrix, the elemental mass matrix and the elemental vectors are shown in Appendix A, where a linear polynomial is used for  $\psi_i^{(2)}$ . The FE matrices are symmetric due to the convenient choice of Eq. (2.42).

## 2.4.2 Eigenvalue calculation

When the global stiffness matrix,  $[\mathbf{K}]$ , and the global mass matrix,  $[\mathbf{M}]$ , are obtained with the appropriate boundary conditions (see Appendix B) the natural frequency from Eq. (2.43) is calculated by an iteration procedure, which is conveniently carried out in the following way:

1. Assume a frequency increment  $\Delta\omega_n$  and set  $\omega_n^j = \omega_n^{j-1} + \Delta\omega_n$  in which  $\omega_n^0 = 0$ ;
2. Calculate the sign ( $sign^j$ ) of the determinant of the Eq.(2.43) and if  $sign^{j-1} sign^j < 0$  then  $\Delta\omega_n = -\Delta\omega_n/2$ ;
3. Check the convergence: if  $\left| \frac{\omega_n^j - \omega_n^{j-1}}{\omega_n^j} \right| \leq \text{specified tolerance}$ , then go to step 4. Else set  $j = j + 1$  and go back to step 1;
4. If  $n = \text{desired mode number}$ , then end the iteration. Else, set  $n = n + 1$  and  $\omega_n^0 = \omega_{n-1}^j$ . Assume a new frequency increment  $\Delta\omega_n$  and go back to step 1.

## 2.5 Model validation

The scope of this section is to validate the proposed model against a 2D FE model and an existing 1D analytical model [48]. Since the former accounts for both rotatory inertia and

shear deformation, while the latter does not account for neither effects, it is expected that the proposed 1D FE model yields an intermediary solutions in terms of natural frequencies. We validated the proposed 1D FE model by considering a single-span beam with the same properties, geometry and boundary conditions which were used by several authors to validate their models [48, 78, 105, 10] (see Fig. 2.5). The natural frequencies of the composite beam were calculated using the following methods: (i) a 2D FE model taking into account the RI and the shear deformation; (ii-iii) the method presented in this article with and without RI, respectively; (iv-v) the Girhammar *et al.* [48] method with and without RI correction, respectively. The 2D FE model considers also the interface slip by means of thin elements with an equivalent shear stiffness to reproduce the connection stiffness. So, the model has three types of shell element, one for the upper beam, one for the lower beam and one for the connection. The difference between the frequency values estimated by different methods is compared in percentage to the value calculated by the 2D FE model, which is here considered as the reference.

Table 2.1 shows that the proposed model without RI provides essentially the same frequency values as the ones calculated by the 2D FE model and similar to the ones of the Girhammar *et al.* [48] method. The effect of the RI is less than 3% for the three first modes for the case considered in this study. The mismatch between the proposed model with RI and the 2D FE model is due to the shear deformation, which is not considered in the proposed model.

Finally, the frequencies calculated by Girhammar *et al.* [48] method corrected by Eq. (2.60) are very similar to the ones obtained by the proposed model with RI. For sake of completeness, Tables 2.2 to 2.4 show the same comparison for different boundary conditions, such as: pinned-pinned, pinned-clamped, clamped-clamped, and clamped-free. Again, the results confirm that the proposed model provides frequency values coherent with the other methods and well accounts for the effect of the RI.

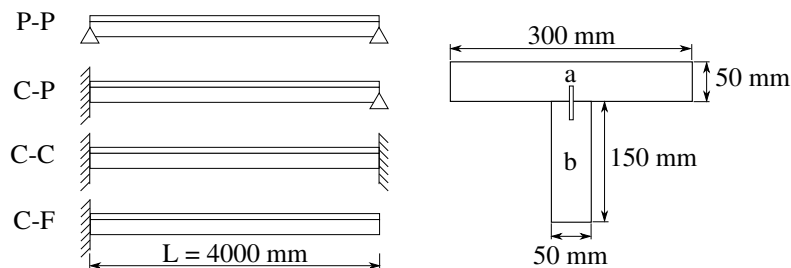


Figure 2.5: Two-layer composite beam used for validation ( $m_a=34.5$  kg/m,  $m_b=5.25$  kg/m,  $E_a=12$  GPa,  $E_b=8$  GPa,  $G_a=5$  GPa,  $G_b=3$  GPa,  $K=50$  MPa)



Table 2.1: The first ten frequencies of the P-P beam (rad/s)

| Mode | 2D FEM | Proposed model with RI | Proposed model without RI | Girhammar et al. method corrected with RI by Eq. (2.60) | Girhammar et al. method without RI |
|------|--------|------------------------|---------------------------|---|------------------------------------|
| 1    | 64.40  | 64.79 (0.59%)          | 64.84 (0.68%)             | 64.75 (0.54%)   | 64.85 (0.70%)                      |
| 2    | 207.1  | 209.8 (1.32%)          | 210.7 (1.72%)             | 209.6 (1.21%)   | 210.7 (1.72%)                      |
| 3    | 405.9  | 413.9 (1.97%)          | 417.7 (2.92%)             | 413.6 (1.90%)   | 417.7 (2.91%)                      |
| 4    | 666.3  | 680.8 (2.19%)          | 692.2 (3.89%)             | 681.2 (2.24%)   | 692.2 (3.89%)                      |
| 5    | 984.8  | 1012 (2.75%)           | 1038 (5.44%)              | 1014 (3.00%)  | 1038 (5.44%)                       |
| 6    | 1360   | 1406 (3.34%)           | 1458 (7.20%)              | 1413 (3.85%)  | 1458 (7.20%)                       |
| 7    | 1788   | 1860 (4.06%)           | 1953 (9.24%)              | 1874 (4.84%)  | 1953 (9.24%)                       |
| 8    | 2261   | 2373 (4.97%)           | 2523 (11.6%)              | 2397 (6.00%)  | 2523 (11.6%)                       |
| 9    | 2772   | 2944 (6.18%)           | 3168 (14.3%)              | 2976 (7.37%)  | 3168 (14.3%)                       |
| 10   | 3314   | 3573 (7.82%)           | 3889 (17.3%)              | 3611 (8.97%)  | 3889 (17.4%)                       |

Table 2.2: The first ten frequencies of the C-P beam (rad/s)

| Mode | 2D FEM | Proposed model with RI | Proposed model without RI | Girhammar et al. method corrected with RI by Eq. (2.60) | Girhammar et al. method without RI |
|------|--------|------------------------|---------------------------|---|------------------------------------|
| 1    | 88.66  | 89.48 (0.92%)          | 89.56 (1.03%)             | 89.16 (0.56%)   | 89.34 (0.77%)                      |
| 2    | 243.4  | 247.4 (1.65%)          | 248.4 (2.07%)             | 254.9 (4.72%)   | 256.5 (5.36%)                      |
| 3    | 457.7  | 468.0 (2.25%)          | 472.5 (3.23%)             | 474.4 (3.66%)   | 479.8 (4.84%)                      |
| 4    | 732.2  | 752.7 (2.80%)          | 765.6 (4.55%)             | 758.3 (3.56%)   | 771.9 (5.42%)                      |
| 5    | 1066   | 1102 (3.34%)           | 1131 (6.08%)              | 1108 (3.92%)  | 1136 (6.60%)                       |
| 6    | 1456   | 1513 (3.94%)           | 1570 (7.86%)              | 1522 (4.56%)  | 1575 (8.18%)                       |
| 7    | 1897   | 1985 (4.65%)           | 2084 (9.89%)              | 1999 (5.42%)  | 2088 (10.1%)                       |
| 8    | 2382   | 2514 (5.54%)           | 2673 (12.2%)              | 2536 (6.47%)  | 2677 (12.4%)                       |
| 9    | 2907   | 3101 (6.68%)           | 3338 (14.8%)              | 3130 (7.69%)  | 3341 (14.9%)                       |
| 10   | 3461   | 3747 (8.26%)           | 4077 (17.8%)              | 3777 (9.15%)  | 4081 (17.9%)                       |

Table 2.3: The first ten frequencies of the C-C beam (rad/s)

| Mode | 2D FEM | Proposed model with RI | Proposed model without RI | Girhammar et al. method corrected with RI by Eq. (2.60) | Girhammar et al. method without RI |
|------|--------|------------------------|---------------------------|---|------------------------------------|
| 1    | 116.2  | 118.0 (1.53%)          | 118.2 (1.65%)             | 120.8 (3.94%)   | 121.2 (4.23%)                      |
| 2    | 282.4  | 288.5 (2.16%)          | 289.8 (2.63%)             | 303.9 (7.62%)   | 306.1 (8.40%)                      |
| 3    | 512.6  | 526.5 (2.72%)          | 532.0 (3.79%)             | 539.2 (5.20%)   | 546.2 (6.56%)                      |
| 4    | 802.6  | 828.8 (3.27%)          | 843.9 (5.15%)             | 839.6 (4.61%)   | 856.2 (6.68%)                      |
| 5    | 1151   | 1195 (3.81%)           | 1228 (6.71%)              | 1206 (4.72%)  | 1239 (7.63%)                       |
| 6    | 1555   | 1623 (4.41%)           | 1687 (8.50%)              | 1636 (5.21%)  | 1696 (9.10%)                       |
| 7    | 2009   | 2111 (5.09%)           | 2220 (10.5%)              | 2128 (5.93%)  | 2228 (10.9%)                       |
| 8    | 2508   | 2657 (5.94%)           | 2829 (12.8%)              | 2679 (6.85%)  | 2836 (13.1%)                       |
| 9    | 3046   | 3260 (7.02%)           | 3512 (15.3%)              | 3287 (7.92%)  | 3519 (15.5%)                       |
| 10   | 3617   | 3923 (8.46%)           | 4271 (18.1%)              | 3947 (9.12%)  | 4277 (18.2%)                       |

## 2.6 Parametric analysis: Effect of the rotatory inertia on the natural frequencies of a composite beam

The scope of the parametric analysis is twofold: to check the importance of the RI on the natural frequencies of a composite beams and to reveal the most important parameters which govern this effect. We employed the FE model to evaluate the effect of RI on the first two fre-

Table 2.4: The first ten frequencies of the C-F beam (rad/s)

| Mode | 2D FEM | Proposed model with RI | Proposed model without RI | Girhammar et al. method corrected with RI by Eq. (2.60) | Girhammar et al. method without RI |
|------|--------|------------------------|---------------------------|---|------------------------------------|
| 1    | 25.07  | 25.11 (0.16%)          | 25.12 (0.19%)             | 25.11 (0.17%)   | 25.13 (0.24%)                      |
| 2    | 125.3  | 126.5 (0.95%)          | 126.8 (1.21%)             | 128.8 (2.82%)   | 129.2 (3.13%)                      |
| 3    | 302.4  | 306.6 (1.37%)          | 308.9 (2.14%)             | 304.0 (0.51%)   | 306.2 (1.25%)                      |
| 4    | 532.9  | 542.3 (1.75%)          | 550.4 (3.28%)             | 539.2 (1.18%)   | 546.2 (2.49%)                      |
| 5    | 824.1  | 841 (2.05%)            | 861.7 (4.57%)             | 839.5 (1.88%)   | 856.2 (3.89%)                      |
| 6    | 1174   | 1201 (2.35%)           | 1245 (6.04%)              | 1206 (2.71%)  | 1239 (5.57%)                       |
| 7    | 1579   | 1623 (2.73%)           | 1702 (7.75%)              | 1636 (3.57%)  | 1696 (7.40%)                       |
| 8    | 2036   | 2102 (3.27%)           | 2234 (9.72%)              | 2128 (4.53%)  | 2228 (9.46%)                       |
| 9    | 2538   | 2640 (4.01%)           | 2841 (11.9%)              | 2679 (5.57%)  | 2836 (11.7%)                       |
| 10   | 3079   | 3236 (5.10%)           | 3524 (14.4%)              | 3287 (6.77%)  | 3519 (14.3%)                       |

quency modes of the composite beam by varying the structural parameters. To distinguish the effect of the RI from that of the interface slip, we considered hereafter the ratio between the frequency of the composite beam with RI and the corresponding frequency of the composite beam without RI,  $(\omega_{slip,rot}/\omega_{slip})$ . The latter reflects only the effect of the RI on the natural frequency. Moreover, throughout this study, we used a value of the flexural stiffness parameter  $(EI_{\infty}/EI_0 = 4)$  which is considered to be a realistic for a timber-concrete composite beam [47].

### 2.6.1 Effect of the boundary conditions and the span-to-depth ratio

In this section we considered four possible boundary conditions at the ends of a single-span composite beam, such as follows: (i) clamped-free; (ii) pinned-pinned; (iii) clamped-pinned; (iv) clamped-clamped. The last two cases are statically indeterminate structures. Fig. 2.6 shows the relative frequency  $(\omega_{slip,rot}/\omega_{slip})$  for the first two modes as a function of the span-to-depth ratio  $(L/h)$  for the four boundary conditions. The effect of the RI on the first frequency is noticeable only for  $L/h < 5$  and its maximum effect is less than 5% for very short spans. As expected, the effect of the RI is a reduction of the estimated frequency. Moreover, the statically indeterminate structures are the most affected by the RI. As for the second natural frequency, the same trends are valid, but the effect of the RI increases by a factor of about 3 (i.e., up to 15%). This result is coherent with the previous results of Girhammar *et al.* [48] where the equivalent indicator, such as the eigenmode length coefficient  $\mu_n$  (where  $n$  is the considered mode) is the smallest (or greatest) value for the clamped-clamped (or clamped-free) boundary conditions (see Eq. (2.54)). The eigenmode length coefficient is used to modify the length of the beam so that the calculation is identical to the calculation of

the first frequency of a simply supported beam.

$$\mu_n = \begin{cases} (n - 1/2)^{-1} (n \geq 2), \mu_1 = 1.675, & \text{Clamped-Free} \\ (n)^{-1}, & \text{Pinned-Pinned} \\ (n + 1/4)^{-1}, & \text{Clamped-Pinned} \\ (n + 1/2)^{-1}, & \text{Clamped-Clamped} \end{cases} \quad (2.54)$$

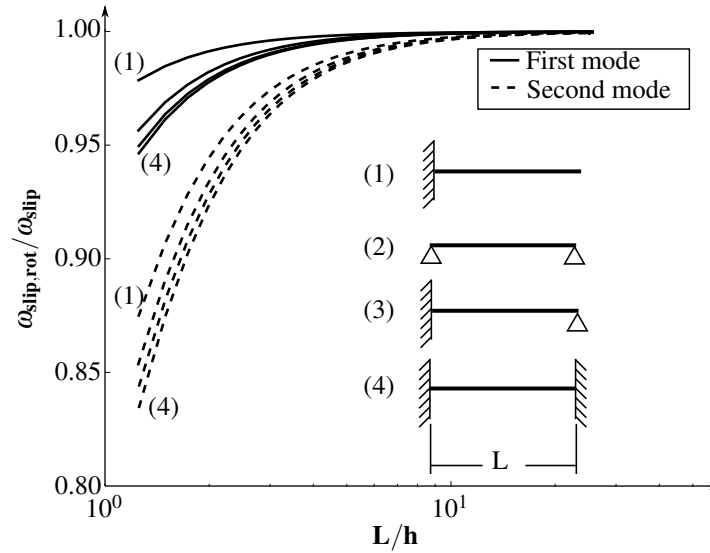


Figure 2.6: Effect of the RI, the boundary conditions and the span-to-depth ratio

## 2.6.2 Effect of the flexural rigidity parameter and the interaction parameter

The dimensionless interaction parameter,  $\alpha L$ , representing the degree of interaction between layers of the composite beam [47, 104] is calculated using the following equation:

$$\alpha L = \sqrt{\frac{KEI_\infty}{EA^*EI_0}} L. \quad (2.55)$$

Fig. 2.7 shows the first relative frequency ( $\omega_{slip,rot}/\omega_{slip}$ ) as a function of the stiffness rigidity parameter,  $EI_\infty/EI_0$ , and the span-to-depth parameter,  $\mu_n L/H$ , in a 3D plot for the case of a single-span beam with pinned-pinned boundary conditions. The effect of the RI is greater for higher  $EI_\infty/EI_0$ .

Fig. 2.8 shows the first relative frequency ( $\omega_{slip,rot}/\omega_{slip}$ ) as a function of the interaction parameter,  $\alpha L$ , and  $\mu_n L/H$  in a 3D plot for the case of a single-span beam with pinned-pinned

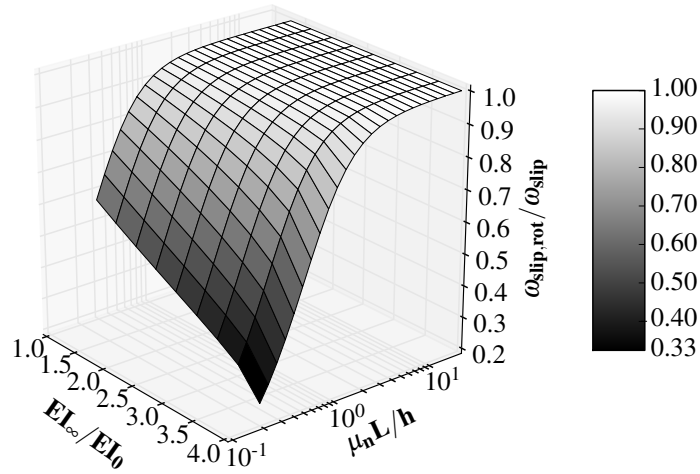


Figure 2.7: Effect of the RI, the flexural rigidity parameter ( $EI_\infty/EI_0$ ) and the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/H$ )

boundary conditions. The interaction parameter does not amplify the effect of RI on the natural frequency of the composite beams. Note that this observation can be particularly important as shown by Girhammar *et al.* [48]. Furthermore, for very low levels of the interaction the effect of RI reduces, because of the reduced relative longitudinal acceleration of the layers. Obviously, with a weak interaction between layers, each of them vibrates without relative longitudinal acceleration, while a strong interaction generates a normal force in each layer and develops relative longitudinal acceleration.

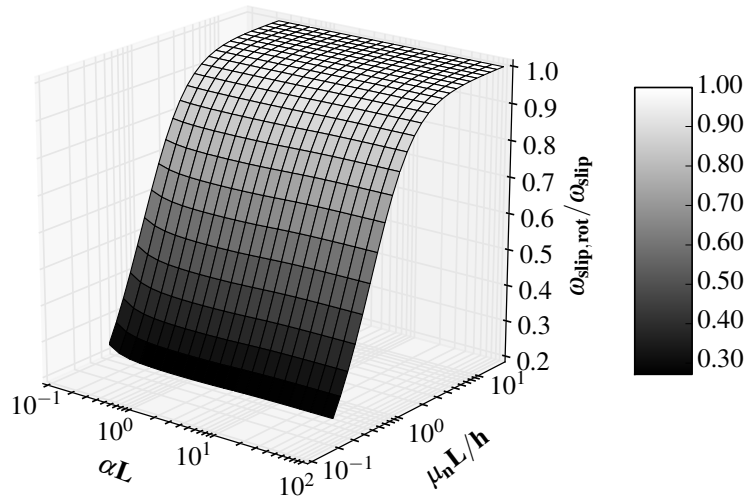


Figure 2.8: Effect of the RI, the interaction parameter ( $\alpha L$ ) and the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/H$ )

### 2.6.3 Effect of the connection stiffness at the ends of the composite beam

This section investigates the effect of the rotational and slip stiffness at the end of a single-span composite beam on its natural frequency. This is particularly important, because rigid connections are often difficult to realize in practice. For simplicity, the same boundary conditions are assumed at both ends. The vertical displacement of the beam ends is fixed and  $\alpha L = 8$ , which is a reasonable value for a composite beam action. For the sake of generality, we defined a dimensionless rotational stiffness:

$$K_{\theta,dl} = K_{\theta} \frac{L}{4EI_0}, \quad (2.56)$$

and a dimensionless slip stiffness

$$K_{s,dl} = K_s \frac{KL^2 + 3EA^*}{3KLEA^*}. \quad (2.57)$$

The subscript "dl" mean dimensionless. To obtain the dimensionless stiffness, we use the diagonal term of the corresponding degree of freedom of the stiffness matrix in appendix A. The variable  $h_e$  is simply substituted by the length of the beam  $L$ . For instance, if  $K_{s,dl} = 0$  the slip at the end beam is the maximum possible, while if  $K_{s,dl} = \infty$  there is no slip at the end beam.

Fig. 2.9 shows that the maximum effect of the connection stiffness ( $K_{s,dl}$ ) on the relative frequency ( $\omega_{slip,rot} / \omega_{slip,K_s=\infty}$ ) can be a reduction of 5% to 12% depending on the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/h$ ), where  $\omega_{slip,K_s=\infty}$  represents the frequency of a pinned-pinned composite beam with  $K_s = \infty$ , with slip theory and without RI. Fig. 2.10 shows that the effect of the connection rotational stiffness at the end of the beam is quite important and it can reduce the relative frequency ( $\omega_{slip,rot} / \omega_{slip,K_{\theta}=\infty}$ ) by 40-45% depending on the span-to-depth parameter ( $\mu_n L/h$ ), where  $\omega_{slip,K_{\theta}=\infty}$  represents the frequency of a pinned-pinned composite beam with  $K_{\theta} = \infty$ , with slip theory and without RI. Fig. 2.11 shows the combined effect of both rotational and slip stiffness of the connection on the relative frequency ( $\omega_{slip,rot} / \omega_{slip,C-C}$ ), where  $\omega_{slip,C-C}$  represents the frequency of a clamped-clamped composite beam ( $K_s = \infty$  and  $K_{\theta} = \infty$ ).

### 2.6.4 Simplified formula to take into account the rotatory inertia

Based on the results of the parametric analysis, one notes that the major structural parameter which governs the effect of the RI on the natural frequency is the span-to-depth parameter and the flexural stiffness parameter. using the least squares fitting procedure, a curve

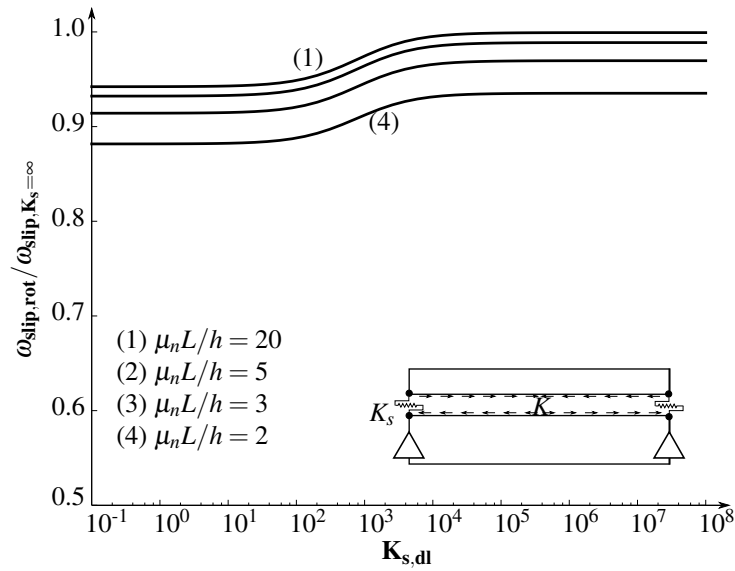


Figure 2.9: Effect of the slip stiffness at the end of the beam ( $K_{s,dl}$ )

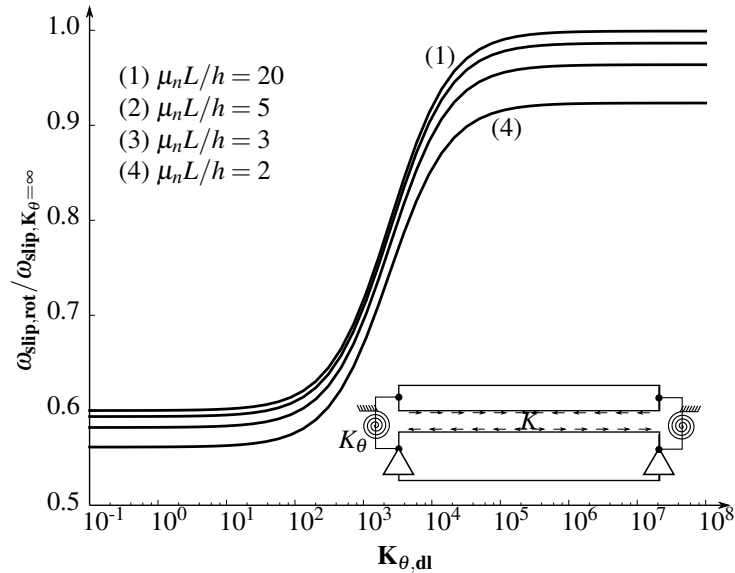


Figure 2.10: Effect of the rotational stiffness at the end of the beam ( $K_{\theta,dl}$ )

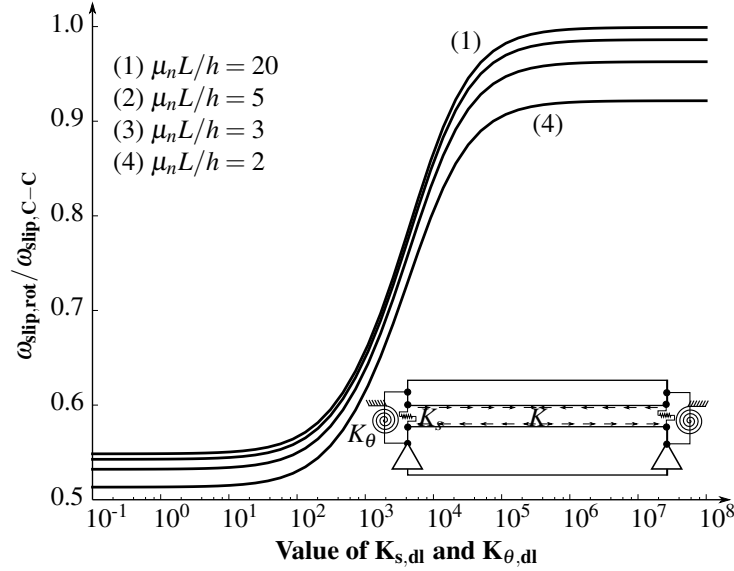


Figure 2.11: Combined effect of the connection stiffness ( $K_{s,dl}$ ) and the rotational stiffness ( $K_{\theta,dl}$ ) at the end of the beam

( $\omega_{slip,rot}/\omega_{slip}$ ) for a single-span composite beam with  $EI_{\infty}/EI_0 = 4$  from Fig. 2.6 was fit to a simple function of the following form:

$$\frac{\omega_{slip,rot}}{\omega_{slip}} = \text{func} \left( \frac{L}{h} \right) \approx \frac{\left( \frac{L}{h} \right)^a}{b + \left( \frac{L}{h} \right)^a} \quad (2.58)$$

where  $a = 1.7$  and  $b = 0.25$  for pinned-pinned boundary conditions. Fig. 2.12 shows the dimensionless numerical curve and the approximate curve.

Eq. (2.58) can be combined with the Girhammar's eigenmode length coefficient  $\mu_n$  [48] to take into account the four possible boundary conditions and the higher modes of vibration.

$$\frac{\omega_{slip,rot,n}}{\omega_{slip,n}} \approx \frac{\left( \mu_n \frac{L}{h} \right)^{1.7}}{0.25 + \left( \mu_n \frac{L}{h} \right)^{1.7}} \quad (2.59)$$

In practice, one could use the analytical method presented by Girhammar *et al.* [48] to estimate  $\omega_{slip,n}$ , which accounts for the effect of the slip, and correct it with the proposed function which accounts for the effect of RI as follows:

$$\omega_{slip,rot,n} \approx \omega_{slip,n} \frac{\left( \mu_n \frac{L}{h} \right)^{1.7}}{0.25 + \left( \mu_n \frac{L}{h} \right)^{1.7}} \quad (2.60)$$

Tables 2.1, 2.2, 2.4 and 2.3 show the goodness of the proposed correction term. The frequency values were estimated with the Girhammar and Pan's method [48] without RI corrected by Eq. (2.60). For sake of completeness, let's recall that according to that Girhammar

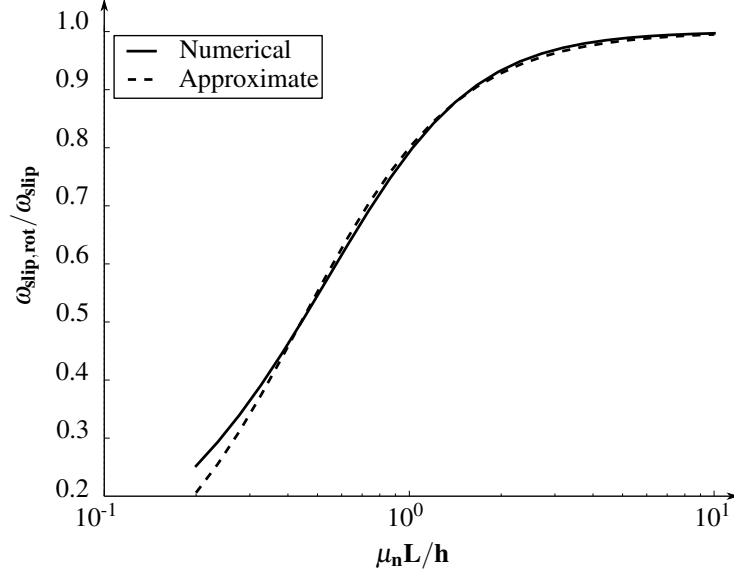


Figure 2.12: Comparison between the dimensionless numerical curve and the approximate curve

*et al.* [48]  $\omega_{slip,n}$  is calculated as follows:

$$\omega_{slip,n} = \sqrt{\frac{EI_{eff,n}}{EI_{\infty}}} \omega_{n,\infty} \quad (2.61)$$

where  $EI_{eff,n}$  is the effective flexural stiffness calculated with the eigenmode length coefficient from the Girhammar *et al.* [48] and  $\omega_{n,\infty}$  is the natural frequency of the composite beam with an infinitely rigid connection.

## 2.7 Conclusions

This work brings an original contribution to the dynamic formulation of the composite beam theory by adding the effect of the relative longitudinal acceleration of the layers on the rotatory inertia. Based on the present results, we can draw the following conclusions:

1. The effect of the relative longitudinal acceleration of the layers on the the rotatory inertia has been formulated within the dynamic theory of a composite beam;
2. The model has been numerically implemented in a FE model and the FE matrix has been developed in full detail;
3. A parametric analysis has showed the key structural parameters which govern the effect of the rotatory inertia on the vibration mode of a composite beam. The results reported in dimensionless graphs show that the rotational stiffness at the end supports,



the span-to-depth ratio and the flexural stiffness parameter affect the first natural frequency. The beam sections and the connection slip stiffness do not affect significantly the natural frequency estimation without considering the rotatory inertia as the inertia term induced by the relative longitudinal acceleration of the layers was found to be rather negligible;

4. The effect of the rotatory inertia on the first frequency is less than 5% and it may be neglected in the assessment of the vibration performance of a composite beam;
5. The effect of the rotatory inertia on the second frequency is, on average, three times greater than the effect on the first frequency. The effect of the rotatory inertia on the higher natural frequencies is even more important. The rotatory inertia of a composite beam should be considered in a full dynamics analysis for beams of span-to-depth ratios below 10;
6. A simplified equation has been proposed to account for the rotatory inertia effect on the natural frequency of a composite beam for practical use.

## **Acknowledgments**

We would like to acknowledge the National Sciences and Engineering Research Council of Canada funding - Collaborative Research and Development Grants (RDCPJ 445200) - associated to the NSERC Industrial research chair on ecoresponsible wood construction (CIRCERB) for supporting the present research.

# Appendix

## A. Elementary matrix

The elementary matrix can be calculated by Eqs. (2.52) and (2.53). The polynomial interpolations is a hermite cubic for  $\psi_i^{(1)}$  and a linear polynomial for  $\psi_i^{(2)}$ . These polynomials are [87]:

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(1)} &= 1 - 3 \left( \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 + 2 \left( \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \\
 \psi_2^{(1)} &= -\bar{x} \left( 1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 \\
 \psi_3^{(1)} &= 3 \left( \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^2 - 2 \left( \frac{\bar{x}}{h_e} \right)^3 \\
 \psi_1^{(2)} &= 1 - \frac{\bar{x}}{h_e} \\
 \psi_5^{(2)} &= \frac{\bar{x}}{h_e}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Where,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x - x_a \\
 h_e &= x_b - x_a
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

With these polynomial interpolations, we obtain a stiffness elementary matrix, mass elementary matrix, primary variable vector and secondary variable vector:

$$[\mathbf{K}^e] = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_0}{h_e^3} & -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & -12 \frac{EI_0}{h_e^3} & -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & -\frac{d}{h_e} & \frac{d}{h_e} \\ -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 4 \frac{EI_0}{h_e} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 2 \frac{EI_0}{h_e} & d & 0 \\ -12 \frac{EI_0}{h_e^3} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 12 \frac{EI_0}{h_e^3} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & \frac{d}{h_e} & -\frac{d}{h_e} \\ -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 2 \frac{EI_0}{h_e} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 4 \frac{EI_0}{h_e} & 0 & -d \\ -\frac{d}{h_e} & d & \frac{d}{h_e} & 0 & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} & -\frac{h_e}{6EA^*} + \frac{1}{Kh_e} \\ \frac{d}{h_e} & 0 & -\frac{d}{h_e} & -d & -\frac{h_e}{6EA^*} + \frac{1}{Kh_e} & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{M}^e] = & \frac{\rho A h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e & 0 & 0 \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 & 0 & 0 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e & 0 & 0 \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \frac{\rho I + \rho A \bar{y}^2}{30h_e} \begin{bmatrix} 36 & -3h_e & -36 & -3h_e & 0 & 0 \\ -3h_e & 4h_e^2 & 3h_e & -h_e^2 & 0 & 0 \\ -36 & 3h_e & 36 & 3h_e & 0 & 0 \\ -3h_e & -h_e^2 & 3h_e & 4h_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& - \frac{\rho A \bar{y}^2}{K d h_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)
\end{aligned}$$

$$\{\Delta^e\} = \begin{Bmatrix} w(x_a) \\ w'(x_a) \\ w(x_b) \\ w'(x_b) \\ N(x_a) \\ N(x_b) \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

$$\{\mathbf{Q}^e\} = \begin{pmatrix} \left[ \frac{d}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) + \omega^2 \rho I_0 \frac{dW(x)}{dx} \right]_{x_a} \\ \left[ EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right]_{x_a} \\ - \left[ \frac{d}{dx} \left( EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right) + \omega^2 \rho I_0 \frac{dW(x)}{dx} \right]_{x_b} \\ - \left[ EI_0 \frac{d^2 W(x)}{dx^2} + G(x)d \right]_{x_b} \\ \left[ \frac{1}{K} \frac{dG(x)}{dx} - \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{K d} \frac{dF(x)}{dx} \right]_{x_a} \\ - \left[ \frac{1}{K} \frac{dG(x)}{dx} - \omega^2 \frac{\rho A \bar{y}^2}{K d} \frac{dF(x)}{dx} \right]_{x_b} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} -V(x_a) \\ -M(x_a) \\ V(x_b) \\ M(x_b) \\ -s(x_a) \\ s(x_b) \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

When the rotatory inertia is neglected, the second and the third terms of the mass matrix Eq. (2.65) are omitted.

## B. General boundary conditions in the global stiffness matrix

To take account all possible boundary conditions, we need to adjust the global stiffness matrix. First, to facilitate the construct of the global stiffness matrix, the 5th column and line of elementary matrix are switched with the 3rd column and line. This switch is made to have the stiffness of the first node in the first three column and line and the stiffness of the second node on the three last columns and lines. When the global stiffness matrix is made by the elementary matrix, the matrix can be adjusted by in the following way:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 12\frac{EI_0}{h_e^3} + K_{vL} & -6\frac{EI_0}{h_e^2} & -\frac{d}{h_e} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -6\frac{EI_0}{h_e^2} & 4\frac{EI_0}{h_e} + K_{\theta L} & d & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{h_e} & d & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} - \frac{1}{K_{sL}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 12\frac{EI_0}{h_e^3} + K_{vR} & 6\frac{EI_0}{h_e^2} & -\frac{d}{h_e} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 6\frac{EI_0}{h_e^2} & 4\frac{EI_0}{h_e} + K_{\theta R} & -d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{d}{h_e} & -d & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} - \frac{1}{K_{sR}} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Fig. 2.3 shows the definition of  $K_v$ ,  $K_\theta$  and  $K_s$ . When we have a completely fixed or completely free boundary conditions we have the following three possibilities:

Table 2.5: Fixed or free boundary condition

| Spring            | $K_v$    | $K_\theta$ | $K_s$    |
|-------------------|----------|------------|----------|
| Degree of freedom | Vertical | Rotational | Slip     |
| Fixed             | $\infty$ | $\infty$   | $\infty$ |
| Free              | 0        | 0          | 0        |

## Chapter 3

# Simplified Nonlinear Model for Timber-Concrete Composite Beams

### Résumé

Les structures en bois-béton ont fait leur apparition dans plusieurs applications industrielles en raison du potentiel d'optimiser simultanément leur rigidité, leurs vibrations dynamiques et leur empreinte écologique. Cependant, si l'on considère le comportement non linéaire de la connexion bois-béton et l'endommagement de la dalle de béton, l'analyse du système composite devient très complexe. La portée de cet article est de fournir un puissant modèle unidimensionnel prenant en compte le comportement non linéaire de connexions des goujons d'acier et l'endommagement de la dalle de béton pour mieux comprendre le comportement des structures composites bois-béton. Tout d'abord, nous avons étendu le modèle Winkler existant d'une poutre sur fondation élastique pour le calcul de la relation de charge-glissement d'un goujon d'acier reliant le béton au bois. Ensuite, nous avons étendu la théorie de la poutre composite avec l'approche de la rigidité sécante pour tenir compte du comportement non linéaire de la connexion et de l'endommagement du béton dans une poutre composite bois-béton. Un modèle à 4 niveaux pour prédire le comportement de la structure d'une poutre composite à partir de la loi de matériau d'un goujon d'acier est élaboré en combinant trois modèles de changement d'échelle. Le modèle a été mis en œuvre dans une méthode par éléments finis et a été validé par des tests expérimentaux disponibles dans la littérature. Une discussion en profondeur des résultats montre l'utilité d'un tel modèle d'ingénierie simplifiée pour mieux comprendre le comportement structural des poutres composites bois-béton en termes de l'action composite, la distribution de l'endommagement et la ductilité de la structure.

**Mots clés :** Endommagement du béton, Essai de flexion, Essai de cisaillement sur un connecteur, Goujon d'acier, Méthode de rigidité sécante, Modélisation

## Abstract

Timber-concrete composite (TCC) structures have been emerging in several industrial applications due to potential to simultaneously optimize their structural stiffness, dynamic vibration and ecological imprint. However, when one considers nonlinear behaviour of timber-to-concrete connections and the cracking of the concrete slab, the structural analysis of the composite system becomes quite complex. The scope of this article is to provide a powerful one-dimensional model accounting for the nonlinear behaviour of steel dowel connections and cracking of the concrete slab for better understanding the structural behaviour of TCC structures. First, we extended the existing Winkler model of a beam on an elastic foundation for calculating the load-slip deformation of a steel dowel connecting concrete to timber. Then, we extended the composite beam theory with the secant stiffness approach to account for the nonlinear behaviour of the connection and the cracking of concrete in a TCC beam. An original 4-level model for predicting the structural behaviour of a TCC beam starting from the behaviour of the steel dowel connection is developed by combining three upscaling models. The model has been implemented in a Finite Element Method and has been validated with experimental tests available in literature. An in-depth discussion of the results shows the usefulness of such simplified engineering model to better understand the structural behaviour of TCC beams in terms of the composite action, cracking distribution and structural ductility.

**Keywords:** Concrete Integrity, Bending Test, Shear Connection tests, Steel Dowel, Secant Stiffness Method, Modelling

## 3.1 Introduction

In the last decades timber-concrete composite (TCC) structures have been emerging for retrofit and strengthening of existing timber floors as well as for new residential and public building floors, bridges and prefabricated floors and walls [97, 37, 33, 61, 56]. For instance, in TCC floors, the composite action of the concrete slab on timber beams allows significantly increasing the stiffness and reducing the natural frequency while keeping the lightness and the ecological imprint of the construction. Furthermore, composite systems have been recently applied in tall timber buildings as an economically efficient solution for optimizing the floor performance, horizontal diaphragms and the vertical bracing system [93].

The behaviour of TCC structures under bending is fairly complex as it depends on the composite action (i.e., the self-equilibrated normal action in each connected member), which, in turn, depends on connection behaviour and the slip distribution along the timber-concrete interface. Indeed, the shear force transferred by the connection develops axial forces in the connected members, which contribute to their resistant moments. The analysis of TCC structures is complicated by phenomena such as nonlinear behaviour of the materials and connections under short- and long-term loads. Most of the models developed for composite structures with partial composite action are applicable to TCC systems [96, 51, 77, 83]. In general, the composite beam theory describes the behaviour of a composite beam made of two Euler-Bernoulli beams connected by means of a linearly behaving connection. For instance, Annex B of Eurocode 5 [2] proposes a linear version of the composite beam theory in the  $\gamma$ -method for analysing the initial linear behaviour of a composite beam. However, this approach is limited by the following assumptions: the members have constant sections, the applied load has a sinusoidal distribution in order to have exact solutions, and the materials and joints are linear elastic. Other models have been developed to overcome these limitations. For instance, Natterer et Hoefl [72] presented a model derived from the general differential equation to consider different loading conditions.

The behaviour of the timber-concrete connection is often assumed to be nonlinear, especially in the case of steel dowels [38]. Furthermore, in order to reduce the overall cost in residential applications, it is sometimes convenient to reduce the number of connections, which may result in greater slip and decrease of composite action. The nonlinear behaviour of the connection can be accounted for by an analytical method based on compliance matrix in the case of linear-perfectly plastic connectors [108]. However, without considering the concrete cracking the result can be non-conservative, as it will be demonstrated in detail below. Salari *et al.* [89] included a comprehensive formulation of the nonlinear slip behaviour



of deformable shear connectors using the Finite Element Method (FEM). However, regular concrete has a very low tensile strength and it is likely to be damaged with several cracks under flexural loading [45]. One solution to account for the concrete cracking is the use of three-dimensional FEM, as tried by different authors [40, 13, 101]. The results of three-dimensional FEM analyses capture the local behaviour of the connections in terms of the stress and strain quite accurately; however, interpretation of the results in terms of internal forces and moments in the concrete and timber members is not straightforward.

Simplified linear-elastic models for TCC structures, such as the  $\gamma$ -method [69], do not provide good predictions of the failure loads in the case of plasticity of the connections or significant cracking of the concrete slab [44, 41, 108]. Furthermore, there may be special cases for which the knowledge of the full non-linear response and ductility may be relevant; e.g., the use of small screws or nails, the use of special classes of concrete with high tensile post-cracking resistance, such as ultra-high performance reinforced concrete [90], the use of statically determined structures, or the use of TCC in high-rise building for better dissipating seismic energy [29, 106].

The scope of this article is to develop a simplified one-dimensional model, which accounts for the nonlinearity of the connections and the concrete cracking of TCC beams. The article is structured as follows: section 2 presents details of the proposed model; sections 2.1 and 2.2 extend the existing Winkler model of a beam on an elastic foundation [60, 44] to calculate the entire shear force vs. slip curve, which describes the behaviour of a steel dowel connection; section 2.3 develops and implements the composite beam theory in the FEM; section 3 validates the model with experimental results available in literature; section 4 presents an in-depth analysis of the structural behaviour of a TCC beam with the emphasis on the composite action, cracking distribution and structural ductility; section 5 presents an application of the model to predict the effect of the dowel diameter and spacing on the structural response. Annexes A and B present details of the FEM formulation for a TCC beam.

The original contribution of this work is threefold: (i) extend the Winkler model of a beam on elastic foundation to describe nonlinear behaviour of a discrete connector working essentially in bending, such as dowel-type connection; (ii) extend the composite beam theory with a secant stiffness approach to account for the nonlinearity of the concrete cracking and of any connection (discrete or continuous) with known behaviour; and (iii) combine the developed models in a FEM to provide a powerful tool for practicing engineers to predict the nonlinear behaviour of TCC structures.

## 3.2 A new 4-level model for TCC structures

The 4-level model scales the behaviour of a dowel-type connection up to the flexural behaviour of the TCC structure through the shear behaviour of the connection as illustrated in Fig. 3.1. The upscaling models and the numerical algorithms are explained in detail in the following sections.

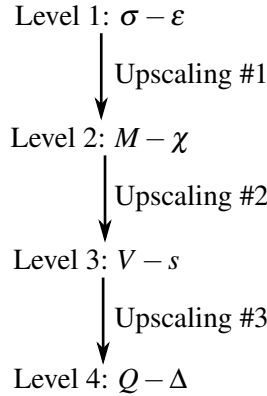


Figure 3.1: General algorithm of the proposed 4-level model

### 3.2.1 Upscaling model #1: from the steel material law (level 1) to the moment-curvature relationship of a steel dowel (level 2)

This step aims at calculating the moment-curvature relationship ( $M - \chi$ ) (Fig. 3.2b) of a steel dowel directly from the uniaxial stress-strain relationship ( $\sigma - \varepsilon$ ) law of steel by means of a classical sectional analysis within the framework of Euler-Bernoulli beam theory as schematically shown in Fig. 3.2a. It is assumed that the strain distribution is linear and the sections remain plain. First, the section of the dowel is subdivided in several layers as shown in Fig. 3.2d. The sectional analysis algorithm is the same as presented in the works of Paultre [79] and Kwak et Kim [63] and consists of the following steps:

1. Assume the initial curvature  $\chi^{(1)} = 0$  and the position of the neutral axis  $c^{(1)} = d_F/2$ ;
2. Increase the curvature by an increment ( $\chi^{(n)} = \chi^{(n-1)} + \Delta\chi$ );
3. Calculate the linear strain distribution over the section layers (Fig. 3.2e);
4. From the stress-strain law ( $\sigma - \varepsilon$ ), calculate the stress in each section layer (Fig. 3.2f);
5. Calculate the resultant moment ( $M$ ) and force ( $N$ ) (Fig. 3.2g);
6. Iterate on the value of  $c^{(n,j)}$  to satisfy the equilibrium of force ( $N = 0$ ) within an acceptable tolerance  $\left( \left| \frac{c^{(n,j)} - c^{(n,j-1)}}{c^{(n,j)}} \right| < \varepsilon \right)$  by repeating the steps 3 and 4;

7. Save the moment-curvature ( $M - \chi$ ) point at the  $n^{th}$  step;
8. Repeat steps from 2 to 7 until the maximum value  $\chi_{max}$  of the curvature is reached.

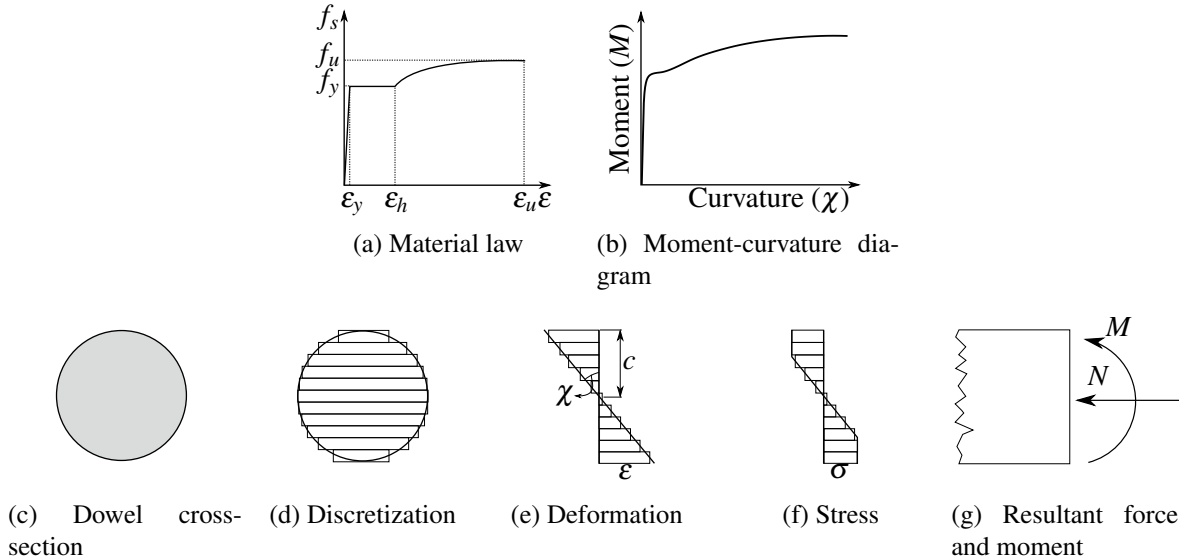


Figure 3.2: Visual representation of the upscaling #1 algorithm

### 3.2.2 Upscaling model #2: from the moment-curvature relationship of the dowel (level 2) to the shear force-slip law of the connection (level 3)

This step aims at calculating the connection law in terms of shear force vs. slip ( $V - s$ ) from the moment-curvature relationship ( $M - \chi$ ) of the dowel and the properties of concrete and timber. For this purpose, the dowel is modelled as a beam on an elastic foundation as schematically presented in Fig. 3.3. Kuenzi *et al.* [60] were the first to apply this method to timber connections with dowel-type fasteners assuming a linear elastic bearing behaviour of the timber, i.e., an elastic foundation. Gelfi *et al.* [44] derived an extension of the model for a beam on elastic foundation to calculate the slip modulus of timber-concrete connections taking into consideration the interlayer between the members. They calculated a closed-form solution of the connection stiffness as a function of the foundation stiffness of concrete and timber, the diameter and the Young's modulus of a steel dowel by solving the elastic problem. Furthermore, Gelfi *et al.* [44] considered the failure mechanism of the dowel connection and calculated the maximum shear force ( $V_{max}$ ) by applying the upper-bound theorem of yield limit analysis.

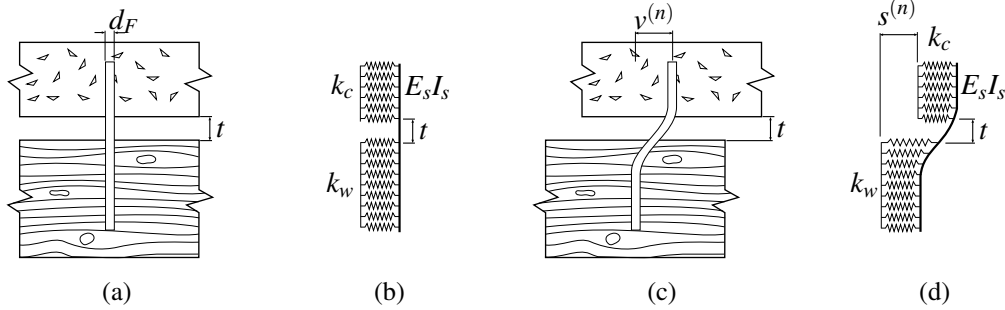


Figure 3.3: Timber-concrete connection with a steel dowel (after Gelfi *et al.* [44]) and its model with a beam on a Winkler elastic foundation in the initial state (a and b) and in the deformed state (c and d).

Figs. 3.3c and 3.3d show the connection in its deformed state where the variable  $v^{(n)}$  represents the deformation of the dowel and the variable  $s^{(n)}$  represents the slip between the two members. In this work we extended the model to calculate the entire curve ( $V - s$ ) of the connection by considering nonlinear moment-curvature relationship ( $M - \chi$ ) of the steel dowel (as described in section 2.1) by solving the following differential equation of a beam on elastic foundation:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI\chi(x)) = -k_i(w(x) - s(x)) \quad (3.1)$$

where  $E$  is the Young's modulus,  $I$  is the moment of inertia,  $k_i$  is the foundation stiffness with subscript  $i = c$  or  $w$  indicating concrete or wood, respectively. Note that  $s(x)$  is a step function which is equal to the slip  $s^{(n)}$  for the embedded length within the concrete and zero elsewhere. Eq. (3.1) was implemented into a FEM and the elementary matrices are reported in detail in Appendix A. The elemental stiffness matrix ( $[K^e]$ ) is a function of the moment-curvature relation, the curvature along the dowel, and the stiffness of the Winkler foundation. The elemental force vector ( $[Q^e]$ ) is a function of the slip ( $s^{(n)}$ ) and the stiffness of the Winkler concrete foundation. The foundation stiffness of the wood is a nonlinear function of the slip, which has been experimentally measured by Gelfi *et al.* [44] and it is shown in Fig. 3.4. Generally, the information on the dowel-bearing stiffness of the foundation is available from the literature. Otherwise, it can be obtained from simple inexpensive standardized tests.

The numerical analysis is performed according to a secant stiffness method [102, 86, 94], which employs the secant flexural stiffness ( $EI$ ) calculated from the moment-curvature relationship of Fig. 3.2b for a given value of curvature as follows:  $EI(\chi^{(n)}) = M(\chi^{(n)})/\chi^{(n)}$ . The iterative algorithm consists of the following steps:

1. Assume the initial slip  $s^{(0)} = 0$  and the flexural stiffness ( $EI$ ) of the dowels as the slope

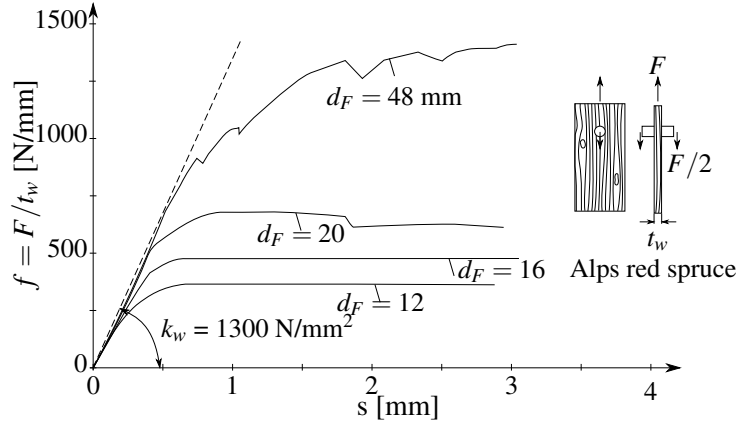


Figure 3.4: Experimental curves for evaluation of wood stiffness  $k_w$  [44]

of the moment-curvature relationship;

2. Increase the slip ( $s^{(n)} = s^{(n-1)} + \Delta s$ ), which corresponds to an increment of applied load on the dowel over the concrete embedded length of  $q = s^{(n)}k_c$ ;
3. Compute element matrices  $[K^e]$  and  $[Q^e]$ , which are given in Appendix A;
4. Solve the assembled matrix  $\left( \left\{ u^{(n,j)} \right\} = [K^{(n)}]^{-1} \left\{ Q^{(n)} \right\} \right)$ , where  $\left( \left\{ u^{(n,j)} \right\} \right)$  is the vector of the primary variables;
5. Check the convergence  $\left( \frac{\sum_i^N |u^{(n,j)} - u^{(n,j-1)}|}{\sum_i^N |u^{(n,j)}|} < \varepsilon \right)$ ;
6. If the convergence criterion is satisfied, repeat steps 2-5 increasing the slip, otherwise iterate on  $u^{(n,j)}$  repeating steps 3-5.

Note that the model of a beam on nonlinear Winkler foundation developed for the upscaling model #2 is valid for an elongated connector working in flexure (e.g., embedded length-to-diameter greater than 4). Shorter embedded length is usually not practical and the shear behaviour of the dowel would have to be modelled additionally.

### 3.2.3 Upscaling model #3: from the connection law (level 3) to the response of the structure (level 4)

This step aims at calculating the response the structure from the connection law ( $V - s$ ), the section geometry and the material laws of concrete and wood ( $\sigma - \varepsilon$ ). When the connection law is known, the flexural behaviour of a TCC beam with any type of connection, discrete or continuous, can be calculated. The elastic theory of a composite beam with shear connection, which is linearly proportional to the interlayer slip, was formulated by different authors for statics and dynamics [77, 47, 48, 43]. The governing equations of the composite beam theory

are:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N(x)d \right) = q(x), \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{K} \frac{dN(x)}{dx} \right) - \frac{1}{EA^*} N(x) + d \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0. \quad (3.3)$$

where  $w(x)$  is the composite beam deflection,  $N(x)$  is the axial force in each member,  $q(x)$  is the distributed load on the beam,  $EI_0$  is the sum of flexural stiffness' of the members,  $EA^*$  is the axial stiffness parameter, and  $d$  is the distance between the centroids of the members. The geometry and material parameters are defined as follows (Fig. 3.5):

$$EI_0 = E_c I_c + E_w I_w \quad (3.4)$$

$$EA^* = \left( \frac{1}{E_c A_c} + \frac{1}{E_w A_w} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

$$d = d_c + d_w + t \quad (3.6)$$

Eqs. (3.2) and (3.3) have been discretized in a classical FEM with a Hermite cubic polynomial for  $w(x)$  and with a linear Lagrange polynomial for  $N(x)$ . Each node has three degrees of freedom:  $w$ ,  $\theta$ ,  $N$ . The vector of the degrees of freedom  $\{u\}$ , stiffness matrix  $[K^e]$  and force vector  $[Q^e]$  of the finite element are given in Appendix B.

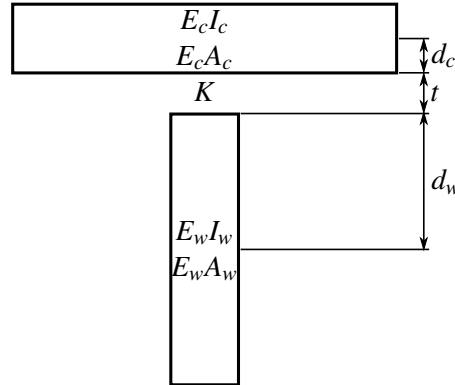


Figure 3.5: Section properties of a composite beam

We further developed the composite beam theory to account for the nonlinearity of shear connection ( $V - s$ ) and of concrete ( $\sigma - \varepsilon$ ). Concrete cracking has been accounted for with a classical secant method by decreasing the Young's modulus [68]. The following assumptions have been considered:

1. The mechanical behaviour of the timber beam and the concrete slab is described by the Euler-Bernoulli beam theory, which neglects the effects of shear deformation on the beam deflection;

2. The concrete slab and the timber beam have the same deflection and rotation, i.e., there is no separation between the two members;
3. The connection between the slab and the beam are characterized by a shear force-slip connection law ( $V - s$ );
4. The behaviour of concrete in compression and tension is given in terms of a simplified one-dimensional relationship between stress and strain ( $\sigma - \varepsilon$ );
5. The slab can be reinforced with a steel longitudinal steel rebar with one-dimensional law between stress and strain ( $\sigma - \varepsilon$ ).
6. The behaviour of timber is assumed linear until rupture;

### Modelling the cracks of concrete slab

The concrete slab in bending cracks when its tensile strength is exceeded. As a consequence, a vertical crack forms and the neutral axis of the cracked section is shifted upwards. Furthermore, if the concrete is reinforced with a longitudinal steel bar, the latter can plasticize when the steel yielding stress ( $\sigma_y$ ) is reached. Considering the composite beam theory, the cracks of the concrete slab will affect the flexural stiffness ( $EI_0$ ), the axial stiffness parameter ( $EA^*$ ) and the distance ( $d$ ) between the centroids of the two members. To account for the cracks of concrete slab, one needs to evaluate the values of parameters  $E_c I_c$ ,  $E_c A_c$  and  $d_c$  for each increment ( $n$ ) of the slip using the secant method as follows:

1. At a given  $n^{th}$  slip increment, calculate the axial deformation ( $\varepsilon_{axial,i}^{(n)}$ ) and the curvature ( $\chi_i^{(n)}$ ) at the  $i^{th}$  node of the concrete slab;
2. Calculate the deformation of each  $j^{th}$  layer by assuming the centroid at  $d_{c,i}^{(n-1)}$  (see Fig. 3.6);
3. Considering the material laws of concrete and steel ( $\sigma - \varepsilon$ ), determine the secant Young's modulus on each  $j^{th}$  layer ( $E_{c,i,j} = \frac{\sigma_j}{\varepsilon_j}$ ), calculate the mean secant Young's modulus for the overall section ( $\overline{E_{c,i}}^{(n)} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J E_{c,i,j}^{(n)}$ ), and calculate the axial stiffness of the concrete section ( $E_c A_{c,i} = \overline{E_{c,i}}^{(n)} A_c$ ), where  $J$  is the number of layers;
4. Determine the centroid of the concrete slab ( $d_{c,i}^{(n)} = \frac{\sum_{j=1}^J E_{c,i,j} A_{c,j} d_j}{\sum_{j=1}^J E_{c,i,j} A_{c,j}}$ );
5. Determine the normal force on the overall section ( $N = \sum_{j=1}^J \sigma_j A_{c,j}$ ), calculate the moment on the concrete slab ( $M_{c,i}^{(n)} = \sum_{j=1}^J \sigma_j A_{c,j} d_j - N d_{c,i}^{(n)}$ ), and its flexural stiffness ( $E_c I_{c,i}^{(n)} = \frac{|M_{c,i}^{(n)}|}{\chi_i^{(n)}}$ );
6. Calculate  $EI_0$ ,  $EA^*$  and  $d$  using Eqs. (3.4) to (3.6) using the properties according to the material laws;

7. Update the node  $i$  at  $i = i + 1$  and repeat steps 1-5 until the end of the slab is achieved.

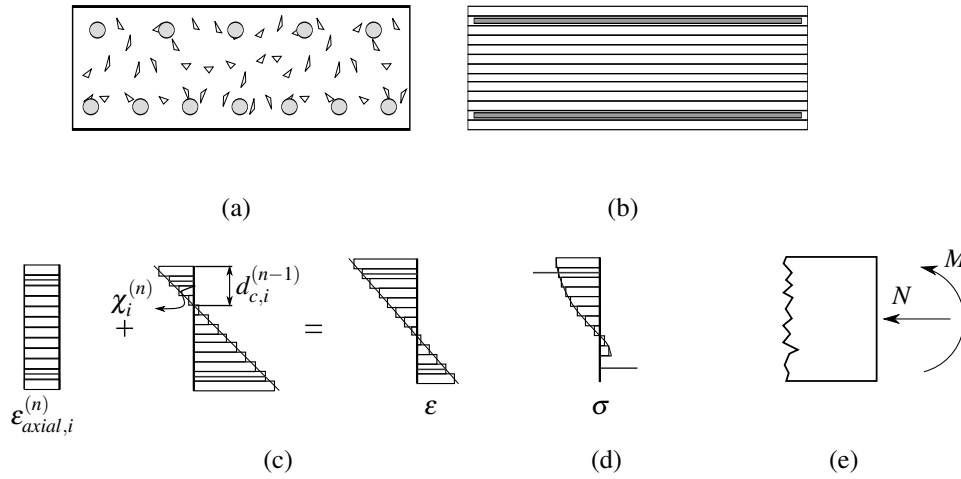


Figure 3.6: Numerical layer discretization of the concrete slab for evaluating  $EI_c$ ,  $E_cA_c$  and  $d_c$

### Modelling the nonlinear timber-concrete connection

The nonlinear performance of the timber-concrete connection is estimated using the secant stiffness, which is calculated at each  $n^{th}$  slip increment along the beam axis by the following algorithm:

1. At a given  $n^{th}$  slip increment, find the secant value of the connection stiffness per unit length  $K_i^{(n)} = \frac{V_i^{(n)}}{s_{F,i}s_i^{(n)}}$  from the nonlinear connector shear force vs. slip law (see Fig. 3.7) at the first node ( $i = 1$ ) where  $s_{F,i}$  is the spacing of the connectors at the  $i^{th}$  node;
2. Increase  $i$  at  $i = i + 1$  and repeat step 1 until the end of the beam is achieved.

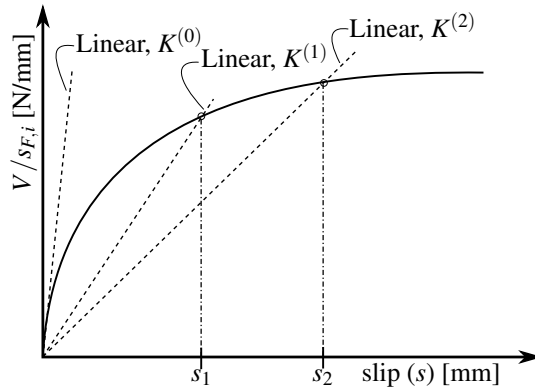


Figure 3.7: Evaluation of the secant stiffness ( $K^{(n)}$ ) of the connection



## Global algorithm

The analysis of a TCC beam is carried out by imposing an incrementally increasing slip starting at the beam end. Controlling the slip is used to enhance the numerical robustness of the algorithm and to capture the possible snap-back behaviour of the load vs. deflection at the peak load. The system of loads ( $Q$ ) applied on the TCC beam is uniformly increased by a scalar factor  $f$  (see Fig. 3.8). The iterative algorithm consists of the following steps:

1. From the system load  $Q$ , compute the elemental force vector  $\{Q^e\}$  and assemble the global force vector  $\{Q\}$ ;
2. At the initial step, assume the slip, the force and the moment along the beam are zero ( $M^{(n=0)} = N^{(n=0)} = s^{(n=0)} = 0$ );
3. At the beginning of the  $n^{th}$  step, increase the slip at one end of the beam  $s^{(n)} = s^{(n-1)} + \Delta s$  and calculate the moment ( $M^{(n,r)}$ ), the curvature ( $\chi^{(n,r)}$ ) and the axial deformation on the concrete ( $\epsilon_{axial}^{(n,r)}$ ) using Eqs. (3.7) to (3.9);

$$M^{(n,r)} = M_w^{(n,r)} + M_c^{(n,r)} + N^{(n,r)} d^{(n-1,r)} \quad (3.7)$$

$$\chi^{(n,r)} = \frac{M_w^{(n,r)} + M_c^{(n,r)}}{EI_0^{(n-1,r)}} \quad (3.8)$$

$$\epsilon_{axial}^{(n,r)} = \frac{N^{(n,r)}}{E_c A_c^{(n-1,r)}} \quad (3.9)$$

Where  $M$ ,  $M_c$  and  $M_w$  are the moments in the TCC beam, in the concrete slab, and in the timber beam, respectively.

4. Evaluate  $EI_0^{(n,r)}$ ,  $EA^{*(n,r)}$ ,  $d^{(n,r)}$  and  $K^{(n,r)}$  by the secant method (see sections 2.3.1 and 2.3.2);
5. Compute the elemental stiffness matrix  $[K^e]$  and assemble the global stiffness matrix  $[K^{(n,r)}]$  with the appropriate boundary conditions;
6. Solve the assembled matrix  $\{u^{(n,r)}\} = [K^{(n,r)}]^{-1} \{Q\}$ ;
7. Calculate the secondary variables obtained by multiplying the elementary matrix  $[K^e]$  with the vector  $\{u^{(n,r,j)}\}$  for each node;
8. Calculate the scalar factor of the force  $f^{(n,r)} = \frac{s^{(n)}}{s_i^{(n,r)}}$  where  $i$  is the node of the controlled slip end and multiply the primary and secondary variables by this scalar;
9. Check the convergence on the primary variables  $\left( \frac{\sum_i^N |u_i^{(n,r)} - u_i^{(n-1,r)}|}{\sum_i^N |u_i^{(n,r)}|} \right) < \epsilon$ ;

10. If the convergence criterion is satisfied, repeat steps 3-9 increasing the slip value  $s^{(n)}$ , otherwise iterate over  $r$  on  $u_i^{(n,r)}$  repeating steps 4-9.

The iterative procedure described above is implicit. One could make it explicit by assuming the convergence at the step 9, but a sufficiently small slip increment ( $\Delta s$ ) is needed to guarantee the stability of the solution.

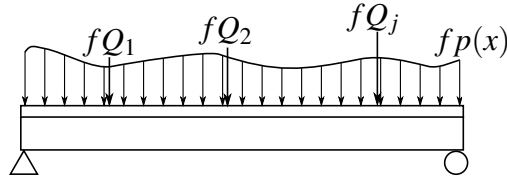


Figure 3.8: Load on a composite beam

### 3.3 Model Validation

The 4-level model proposed in this work has been validated using the experimental results presented by Gelfi et al. [45, 44]. Details for the analysis are presented in the following sections.

#### 3.3.1 Upscaling model #1

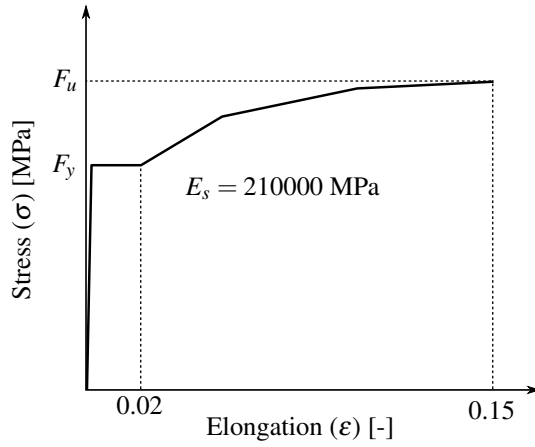
The material properties of dowels are presented in Table 3.1. Fig. 3.9 shows the material law for steel dowels and the corresponding moment-curvature relation obtained with the algorithm of upscaling #1 presented in section 2.1.

Table 3.1: Material properties of the dowels [MPa]

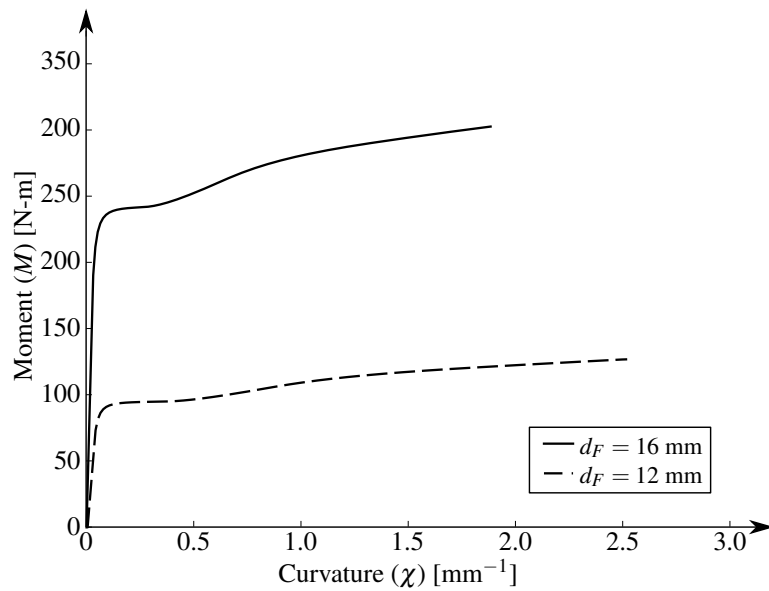
| Diameter ( $d_F$ ) [mm]    | 12      | 16      |
|----------------------------|---------|---------|
| Yielding stress ( $F_y$ )  | 330     | 355     |
| Tensile strength ( $F_u$ ) | 490     | 483     |
| Young's modulus ( $E_s$ )  | 210 000 | 210 000 |

#### 3.3.2 Upscaling model #2

Gelfi et Guiriani [45] experimentally characterized two configurations of dowel connections. The first consisted of a concrete slab cast over a wood plank of 22 mm in thickness connected to a timber beam and a steel dowel of diameter  $d_F = 16$  mm. For the shear test, the plank



(a) Material law for steel dowels

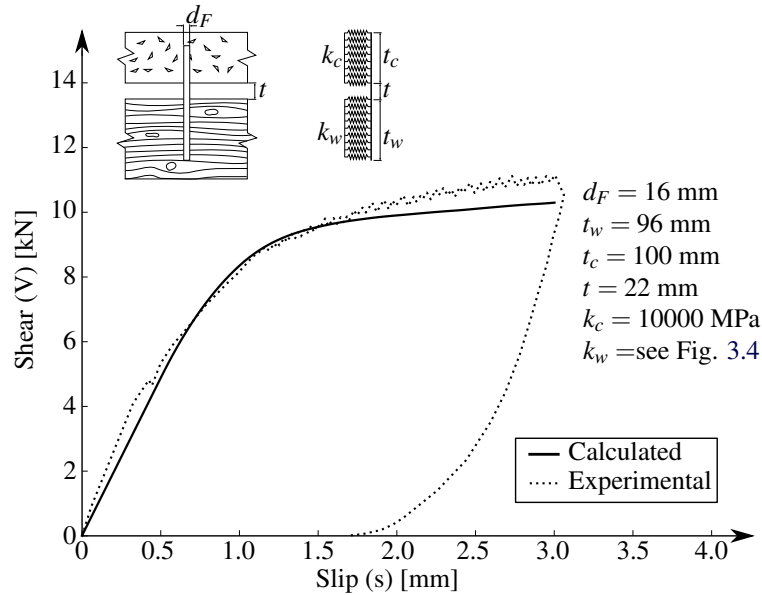


(b) Moment-Curvature relation of the dowels

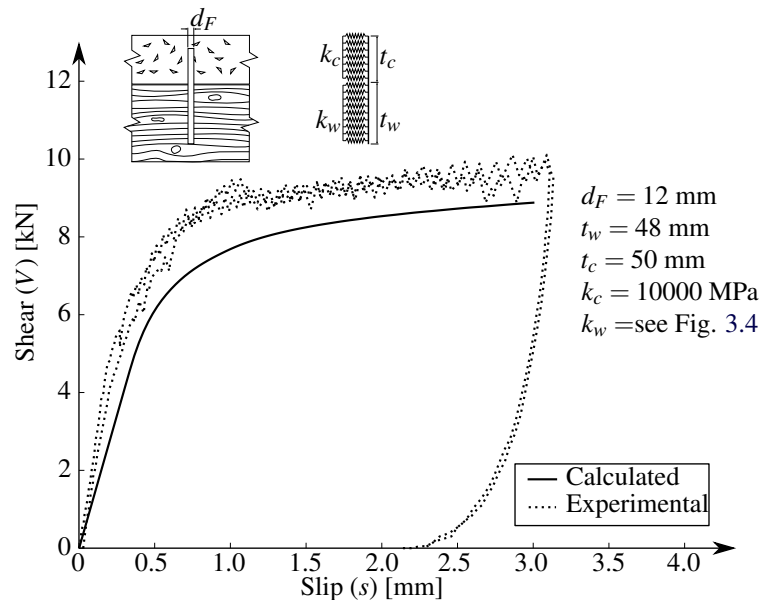
Figure 3.9: Dowel properties

was removed. The connection geometry is shown in Fig. 3.10a along with the result of the shear test in terms of shear force vs. slip. The second connection consisted of a concrete slab in direct contact with the timber beam and a steel dowel of diameter  $d_F = 12 \text{ mm}$ . The connection geometry and the shear test results are shown in Fig. 3.10b. To install the steel dowels, the holes were made by ordinary drills with a diameter 0.25 mm smaller than that of the stud. The stud was driven in the hole with a hammer [44]. The Winkler foundation stiffness parameters (Fig. 3.3) were taken from by Gelfi *et al.* [44] as follows: (i) linear elastic for concrete with  $k_c = 10 \text{ GPa}$ , and (ii) nonlinear for wood, as a function of the slip, as shown in Fig. 3.4, with  $k_w \approx 1.3 \text{ GPa}$  in the initial linear part.

Fig. 3.10a and Fig. 3.10b show the experimental and calculated curves in terms of shear force vs. slip ( $V - s$ ) for the first and the second connections, respectively. In the first case, the model prediction is excellent. In the second case, it is still fairly good, although the model underestimates the connection performance, likely due to the friction between the timber-concrete interface, which is not accounted for in the model.



(a) First connection:  $d_F = 16 \text{ mm}$



(b) Second connection:  $d_F = 12 \text{ mm}$ ,  $t = 0 \text{ mm}$

Figure 3.10: Experimental [45] and calculated shear force vs. slip curves for timber-concrete connections

### 3.3.3 Upscaling model #3

Gelfi et Guiriani [45] carried out a test on a full-scale TCC beam with a span of 4.37 m and a total height of 230 mm, as shown in Fig. 3.11. The dowel spacing was 200 mm in the central half-span and 100 mm at the outer quarter-span. A welded reinforcement mesh was placed in the concrete slab to control the crack formation.

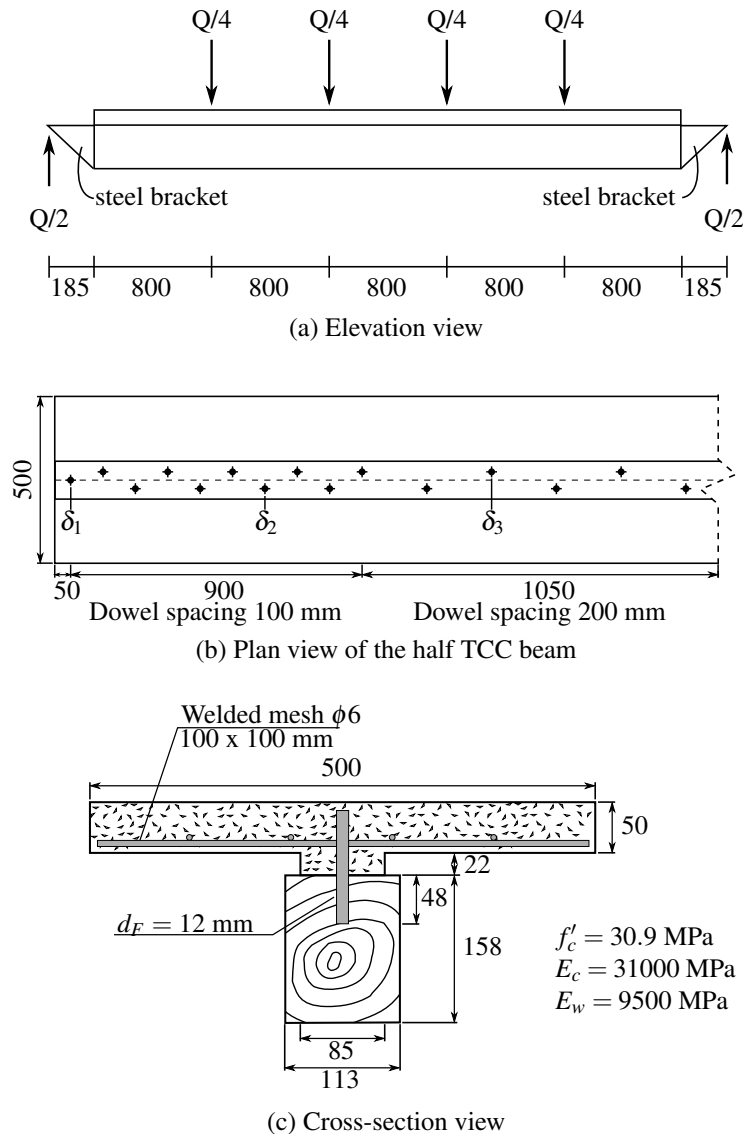


Figure 3.11: Configuration and material properties of a TCC beam tested by Gelfi et Guiriani [45]

The behaviour of timber beam was assumed linear elastic with  $E_w = 9.5 \text{ GPa}$ . The maximum tensile strength of timber was assumed 61.3 MPa, which corresponded to the maximum stress developed during the experimental test by Gelfi et Guiriani [45]. To model the material

law ( $\sigma - \epsilon$ ) of the concrete in compression, we employed Eqs. (3.10)-(3.12), proposed by Popovics [84], as a function of the compression strength ( $f'_c$ ) and Young's modulus ( $E_c$ ), as shown in Fig. 3.12. The tensile behaviour of the concrete was assumed to be perfectly linear with the same Young's modulus as in compression until the cracking at  $\sigma = f'_t$  and then completely brittle ( $\sigma = 0$  MPa). The tensile strength of  $f'_t = 3.3$  MPa considered in the analysis was based on the Canadian standard (Eq.(3.13))[5].

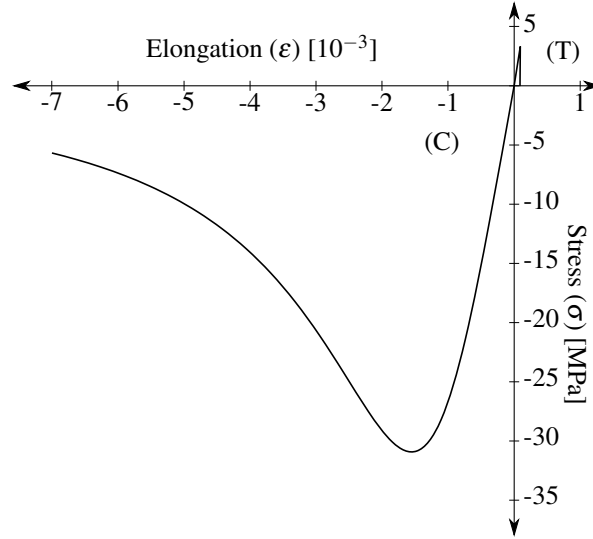


Figure 3.12: Material law for concrete

$$\sigma = f'_c \frac{\epsilon}{\epsilon_p} \frac{n}{n - 1 + \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_p}\right)^n} \quad (3.10)$$

where:

$$\epsilon_p = \frac{1}{E_c} (f'_c + 17.2) \quad (3.11)$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - \frac{f'_c}{\epsilon_p}} \quad (3.12)$$

$$f'_t = 0.6\sqrt{f'_c} \quad (3.13)$$

Fig. 3.13a shows the experimental and calculated curves of the applied load vs. mid-span deflection ( $Q - \Delta$ ) of the composite beam with the dowels of diameter  $d_F = 12$  mm and no interlayer gap ( $t = 0$ ). The calculated curves are based on the calculated connection law using the upscaling model #2 shown in Fig. 3.10b. The serviceability load is approximately

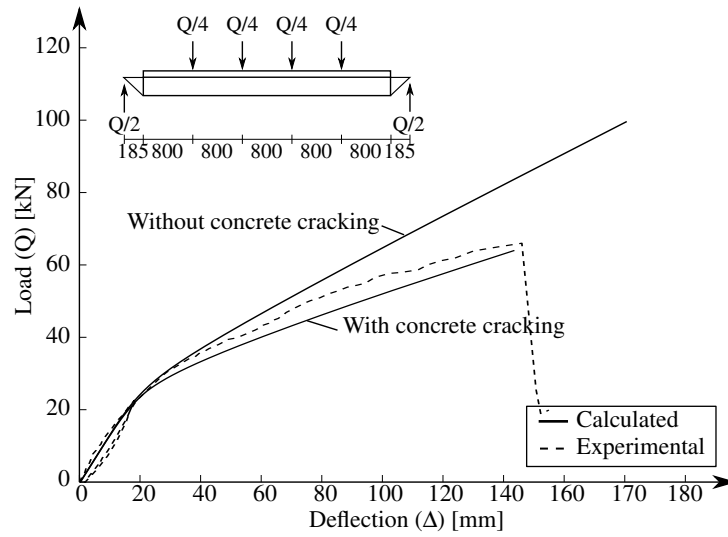
10 kN [44]. To appreciate the effect of the concrete cracking, Fig. 3.13a presents the calculated curves, with and without concrete cracking. These calculated curves demonstrate significant difference in the prediction of the nonlinear performance of the TCC beam due to the cracks of the concrete slab. Indeed, vertical cracks in the concrete were observed during the experimental test [45]; therefore, it is obvious that the model without concrete cracking underestimated the beam deflection, while the model with concrete cracking provided a more conservative prediction. The deviation from the test result was likely due to the discrepancy between the calculated model of the connection law ( $V - s$ ) and the experimental one, as discussed above. A numerical simulation employing the experimental connection law shown in Fig. 3.10b provided a closer agreement with the TCC beam test results in the nonlinear zone, as can be seen in Fig. 3.13b. After the slip of 3 mm, the connection law has been extrapolated up to 12 mm using an exponential function with asymptote  $V_{max} = 11$  kN. This assumption appears to hold, because one can observe in Fig. 3.13b and Fig. 3.14 that the evolution of slip along the beam was fairly well predicted.

Table 3.2 shows the comparison between the experimental and predicted load-deflection performance of the TCC beam. The proposed model predicts very well the performance in the elastic range (up to load of 10 kN), which is governed by the initial connection stiffness, same as the  $\gamma$ -method does. The proposed model also gives very good predictions at higher load levels up to the experimental failure load.

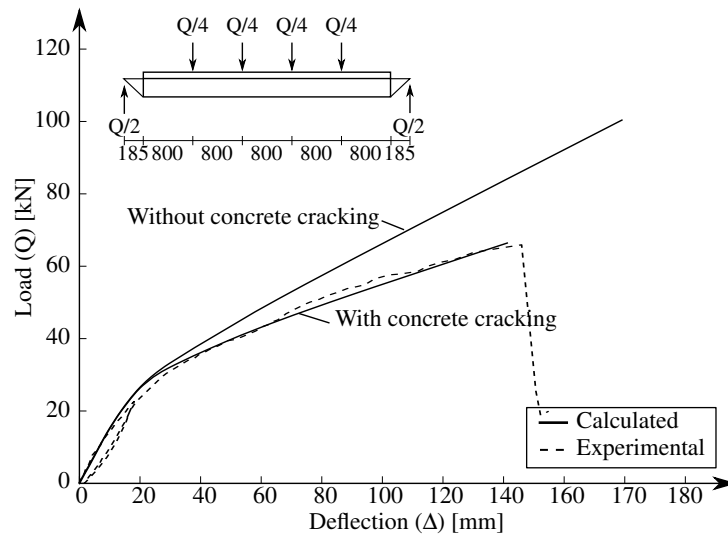
Table 3.2: Comparison of the experimental and predicted load-deflection performance of TCC beam

| Deflection<br>(mm) | Experimental load<br>(kN) | Predicted load<br>(kN) | Error<br>(%) |
|--------------------|---------------------------|------------------------|--------------|
| 6.65               | 10                        | 10.2                   | 2.5          |
| 10                 | 14.4                      | 15.2                   | 5.6          |
| 20                 | 23.6                      | 26.4                   | 11.7         |
| 40                 | 35.8                      | 36.2                   | 1.2          |
| 60                 | 43.0                      | 43.2                   | 0.5          |
| 80                 | 51.2                      | 49.3                   | -3.6         |
| 100                | 57.1                      | 55.1                   | -3.6         |
| 120                | 61.3                      | 60.6                   | -1.0         |
| 140                | 65.2                      | 66.1                   | 1.5          |

During the experimental test, three displacement transducers were placed along the longitudinal axis to measure the slip between the concrete slab and the timber beam at locations  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  and  $\delta_3$  shown in Fig. 3.11(b). Fig. 3.14 shows load-slip curves, which were measured



(a) Using calculated connection law



(b) Using experimental connection law

Figure 3.13: Experimental [45] and calculated load vs. deflection curves for a TCC beam



experimentally and predicted with the proposed model. The model accuracy in predicting the slip distribution at the timber-concrete interface may be considered satisfactory.

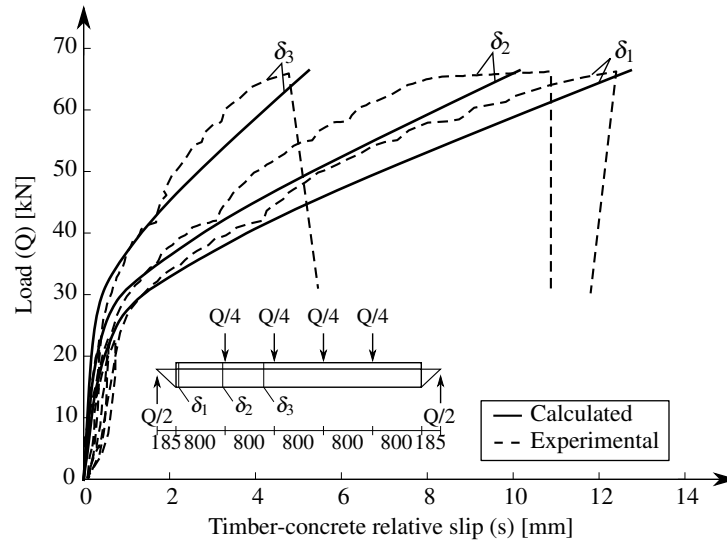


Figure 3.14: Experimental [45] and calculated relative slip at the timber-concrete interface

### 3.4 Structural analysis and discussion

Taking advantage of the developed model this section aims at further analysing the behaviour of the TCC beam studied above to better understand the complex mechanisms of such composite structure. The term integrity is meant as indicator of the stiffness reduction in comparison to the initial stiffness of the concrete.

#### 3.4.1 Evolution of the integrity in the concrete slab

To demonstrate the progressive damage of the concrete slab in the presented model of the TCC beam, we will discuss the evolution of parameters  $E_c I_c$ ,  $E_c A_c$  and  $y_{gc}$  in the mid-span (see Fig. 3.15) and along the beam axis (see Fig. 3.15) under the increasing load. The parameter  $y_{gc}$  is the distance from the upper surface to the centroid of the concrete slab, which is used instead of  $d_c$  for graphical convenience. These model parameters are presented as fractions of their initial values at the mid-span section before the onset of cracking as follows:  $E_c I_{c,0} = 2.37 \times 10^{11} \text{ Nmm}^2$ ,  $E_c A_{c,0} = 8.64 \times 10^8 \text{ N}$ , and  $y_{gc,0} = 27.6 \text{ mm}$ .

Fig. 3.15 shows that the concrete cracking starts early on, at load of about 10 kN, even though a transition into nonlinear performance is visible on the calculated load-deflection curve (Fig. 3.13) only at a load above 25 kN. Furthermore, one can observe that the flexural

stiffness of the concrete slab ( $E_c I_c$ ) decreases quite rapidly to less than 10% of its initial value, while the axial stiffness ( $E_c A_c$ ) and the position of the centroid ( $y_g$ ) do not drop below 40% of the initial values even at the advanced stage of crack. It should be noted that the model parameters show a nonlinear dependency with respect to the mid-span deflection (see Fig. 3.15), while the calculated load-deflection curve is quite linear beyond 30 kN up to the peak load (see Fig. 3.13). It indicates that the contribution of the concrete slab to the composite action decreases significantly with the onset of crack, and it is the linear properties of the timber beam that provide most of the resistance to the load.

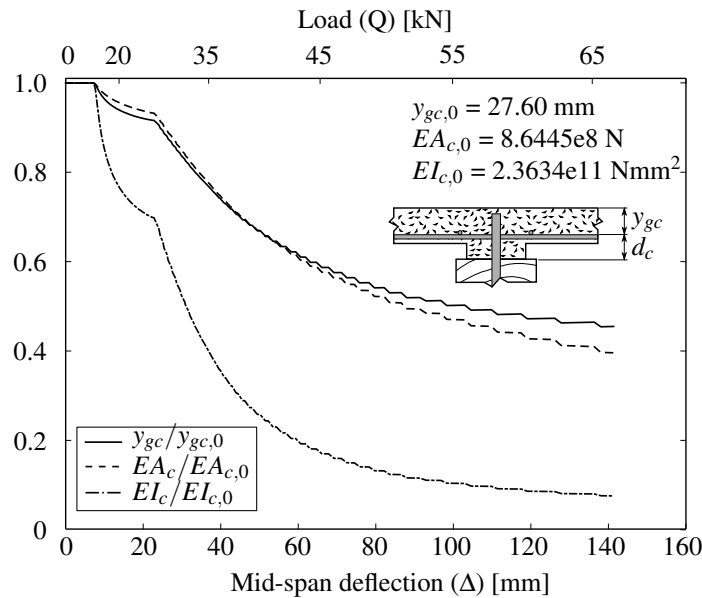
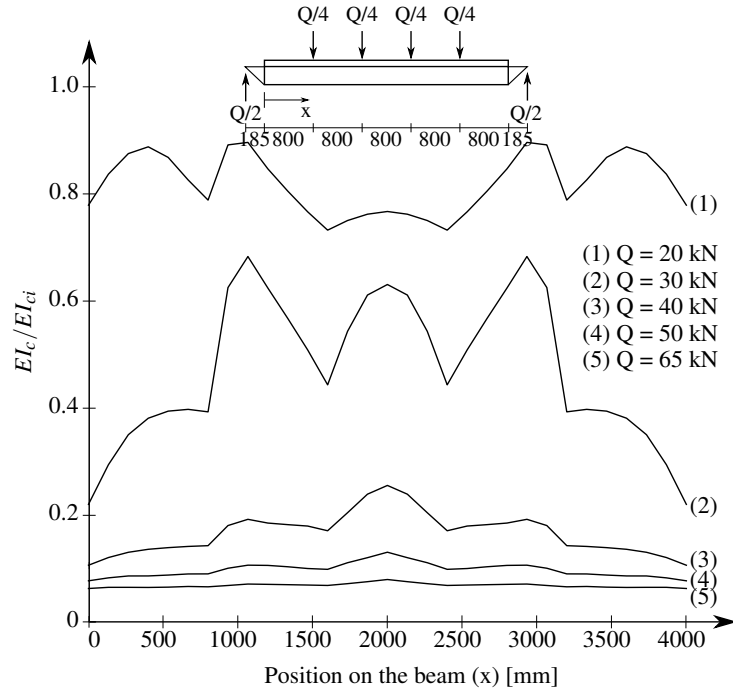


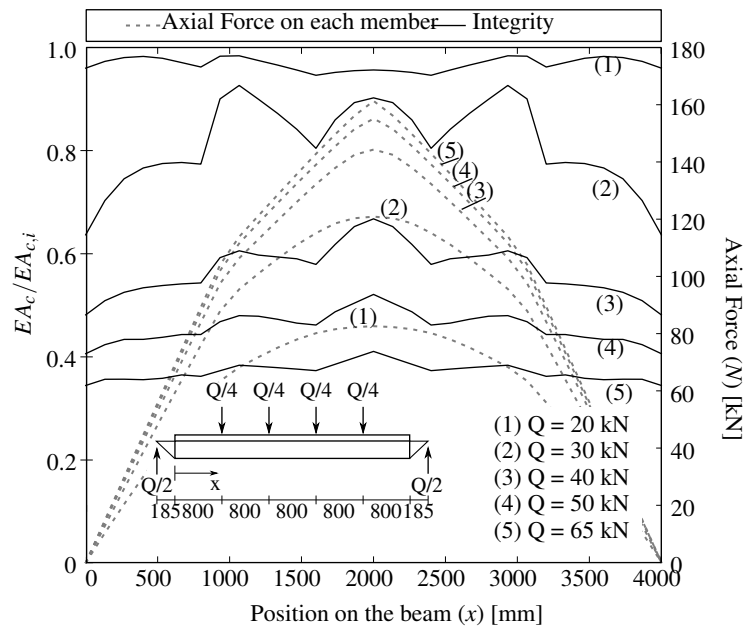
Figure 3.15: Evolution of integrity in the concrete slab in TCC beam at mid-span

Fig. 3.16a shows the progressive cracking along the span of the beam under the increasing load in terms of the loss of flexural stiffness ( $E_c I_c$ ). At the load level of 20 kN, the cracking is concentrated under the load points and above the end supports; then, at the load level of 30 kN, it is progressively developed especially near the end supports; and finally, at loads beyond 40 kN, it is distributed rather uniformly along the beam reducing the flexural stiffness of the slab by over 90%. The evolution of the axial stiffness ( $E_c A_c/E_c A_{c,0}$ ) and the centroid position ( $y_{gc}/y_{gc,0}$ ) along the span of the concrete slab shows similar trends, as seen in Figs. 3.16b and 3.15c, respectively. At first, the cracks and the associated loss of the axial stiffness are concentrated at the load points and at the end supports; and then, with the increasing load, they are uniformly distributed going down 35% to 40% at the peak load. Interestingly, all three parameters exhibit rather smooth distributions at advanced stages of loading showing that the concrete slab in the TCC beam is able to provide the stress redistribution minimizing

the progression of the important local crack, which typical stand alone concrete slab would not be able to do.



(a) Flexural stiffness



(b) Axial stiffness

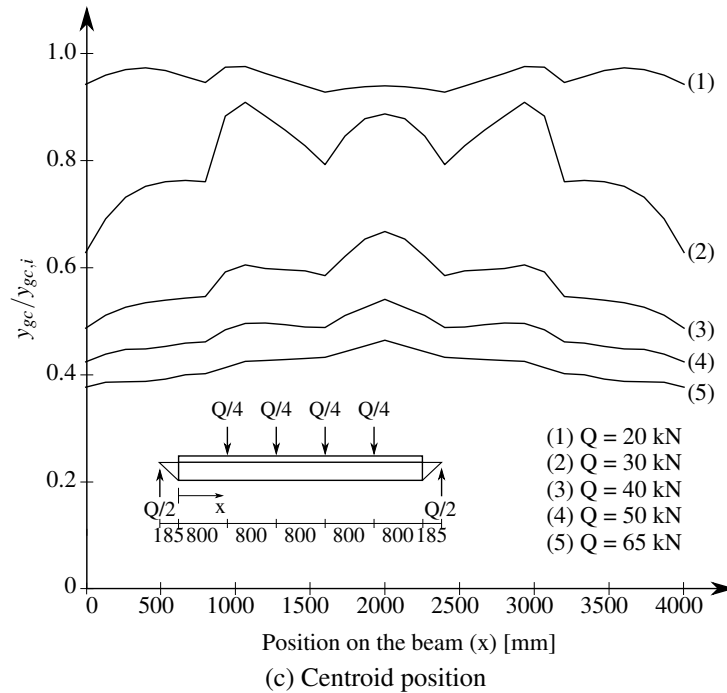


Figure 3.15: Evolution of damage in the concrete slab along the span of TCC beam

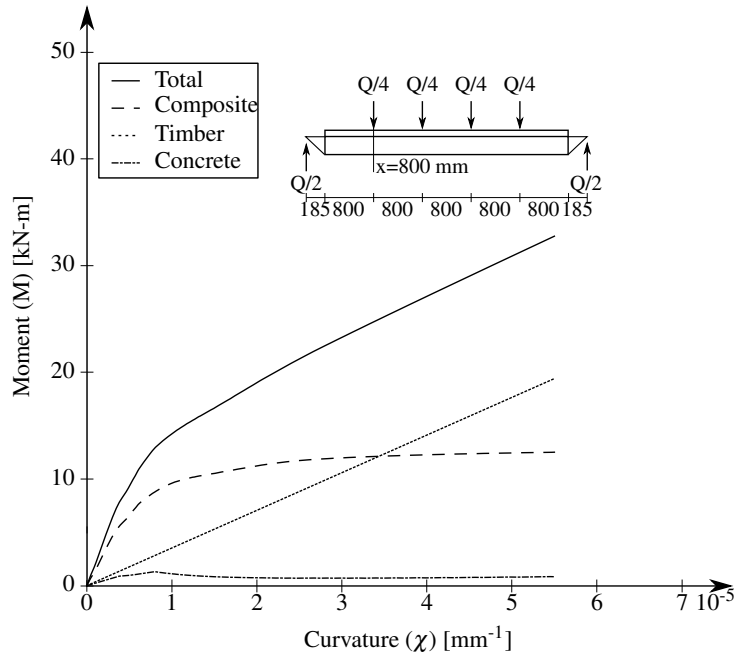
### 3.4.2 Moment and normal force distributions in the TCC beam

The total moment ( $M$ ) resisted by the TCC beam is calculated as a sum of moments resisted by the concrete slab ( $M_c$ ), by the timber beam ( $M_w$ ) and by the composite action ( $M_{comp}$ ) using Eq.(3.7). The latter is calculated as the product of the normal force ( $N$ ) and the distance ( $d$ ) between the centroids of the members (see Fig. 3.5):

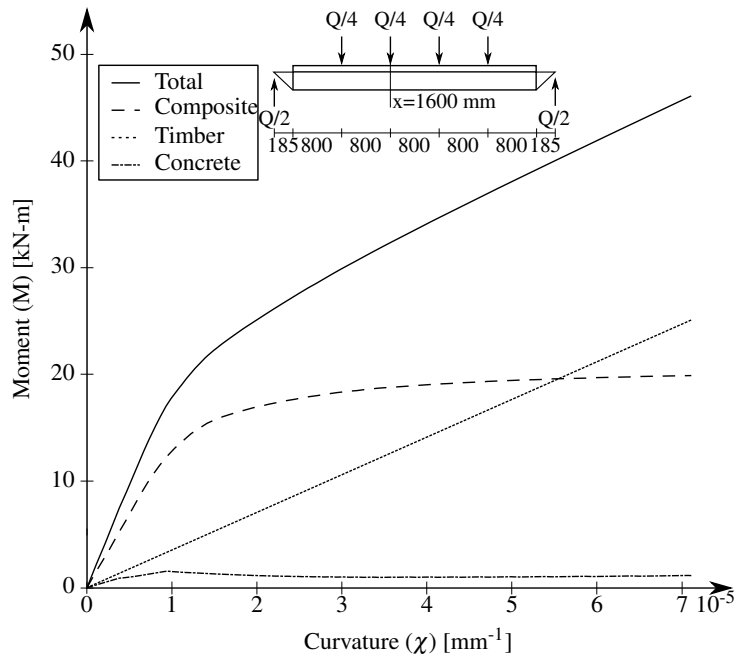
$$M_{comp} = N(d_c + t + d_w) \quad (3.14)$$

Since the axial force varies with the slip, the moment-curvature relationship varies along the beam axis. Fig. 3.15 shows the moment-curvature relationships in the TCC beam under the load points and the mid-span and the contributions of each of the components to the total moment. The moment contribution of the timber beam is linear and it exceeds significantly the contribution of the concrete slab; however, it is the transfer of the axial force between the two members, which increases the resistant moment due to the composite action. These results emphasize the importance of the axial stiffness of the members for the composite action of a TCC beam. Comparing the graphs in Figs. 3.16a and 3.15c, it can be noted that the contribution of the composite action is more important in the mid-span ( $x = 2000$  mm) than near the end supports ( $x = 800$  mm).

Fig. 3.16 shows the normal force ( $N$ ) in the members under the load points and in the mid-



(a) At the load point  $x = 800$  mm



(b) At the load point  $x = 1600$  mm

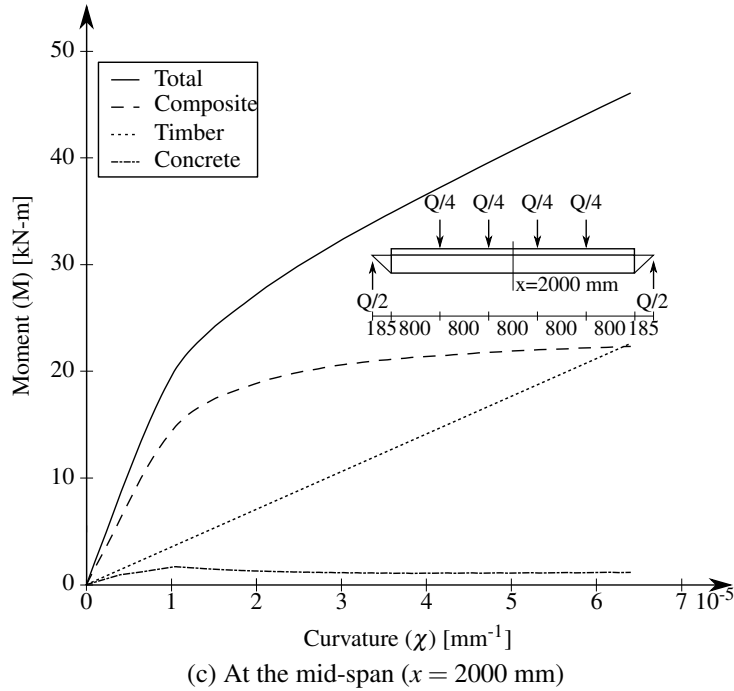


Figure 3.15: Moment-curvature relationships in TCC beam

span of the TCC beam as a function of the beam curvature. It can be seen that the normal compressive force increases with the curvature and it is significantly greater in the mid-span than near the ends of the beam. The higher compressive force hinders the crack propagation in the mid-span and the cracks are redistributed smoothly towards the supports, as shown in section 4.1.

### 3.5 Effect of the dowel diameter

This section shows the ability of the proposed 4-level model to predict the structural behaviour of a TCC beam as a function of the diameter ( $d_F$ ) and spacing ( $s_F$ ) of steel dowels connecting the concrete and timber members. For this purpose, we analysed three TCC beams with dowels of three different diameters (12, 16 and 20 mm) installed at variable spacing. The connection laws for each dowel diameter were calculated with the upscaling models #1 and #2 by assuming the dowel penetration depth of  $4d$  in the timber and 52 mm in the concrete, as shown in Fig. 3.17. Table 3.3 reports the connection resistance ( $V_{max}$ ) determined at a slip of 3 mm and the connection stiffness ( $k$ ) calculated as the slope of the load-slip curve between 10% and 40% of  $V_{max}$ , according to EN 26891 [1].

For the structural analysis, the same material proprieties, beam geometry and load configu-

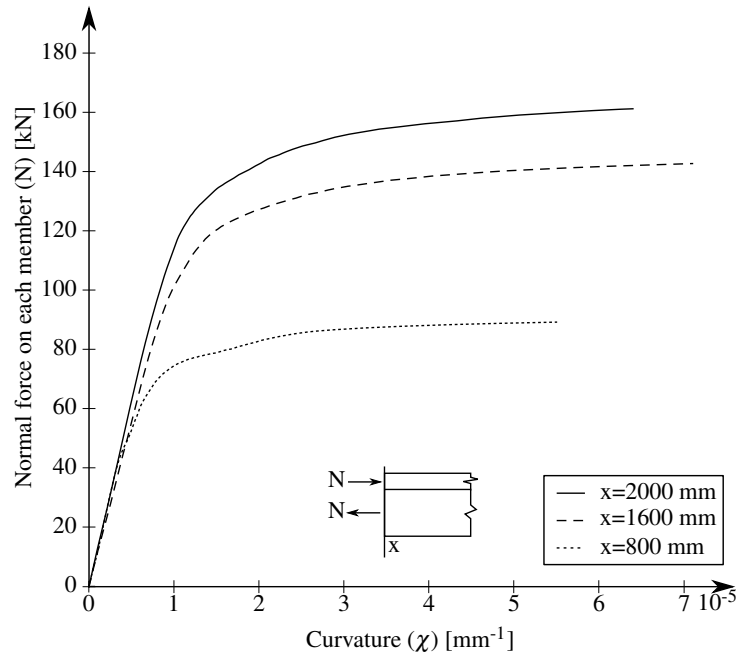


Figure 3.16: Normal force vs. curvature relationship in TCC beam

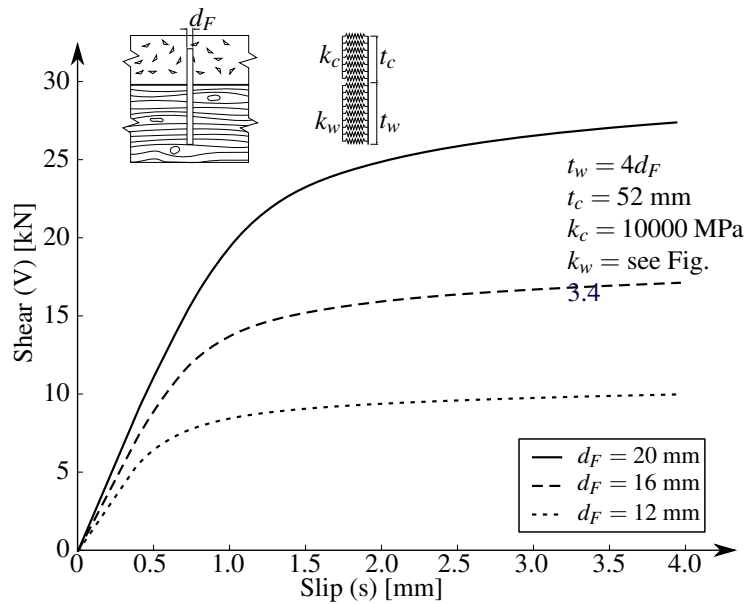


Figure 3.17: Connection laws for steel dowels

Table 3.3: Connection proprieties

| $d_F$ (mm) | $k$ (kN/mm) | $V_{max}$ (kN) |
|------------|-------------|----------------|
| 12         | 14216       | 9.80           |
| 16         | 18667       | 16.74          |
| 20         | 22327       | 26.58          |

ration were employed as in Section 3. Table 3.4 shows the dowel spacing and performance parameters of the beams, which were designed in order to produce the same flexural stiffness in terms of the initial slope of the load-deflection curves as shown in Fig. 3.18. It can be seen from Table 3.4 that increasing the dowel diameter by an increment of 4 mm improved the resistance of the beam by approximately 10 kN even with the increased dowel spacing. However, the apparent ductility ratio (see Eq.(3.15)) was declining with the increasing dowel diameter.

$$\mu = \frac{\Delta_u - \Delta_e}{\Delta_e} \quad (3.15)$$

Where  $\Delta_e$  is the elastic deflection and  $\Delta_u$  is the ultimate deflection.

Table 3.4: Spacing of dowels and the beam performance

| $d_F$<br>(mm) | $s$ for $x < 950$ mm<br>(mm) | $s$ for $x > 950$ mm<br>(mm) | $\Delta_e$<br>(mm) | $\Delta_u$<br>(mm) | $\mu$<br>(-) | $Q_{max}$<br>(kN) |
|---------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|--------------------|--------------|-------------------|
| 12            | 100                          | 200                          | 22.1               | 143.3              | 5.5          | 63.9              |
| 16            | 131.3                        | 262.6                        | 31.2               | 136.3              | 3.4          | 72.1              |
| 20            | 157.1                        | 314.2                        | 41.3               | 127.5              | 2.1          | 81.4              |

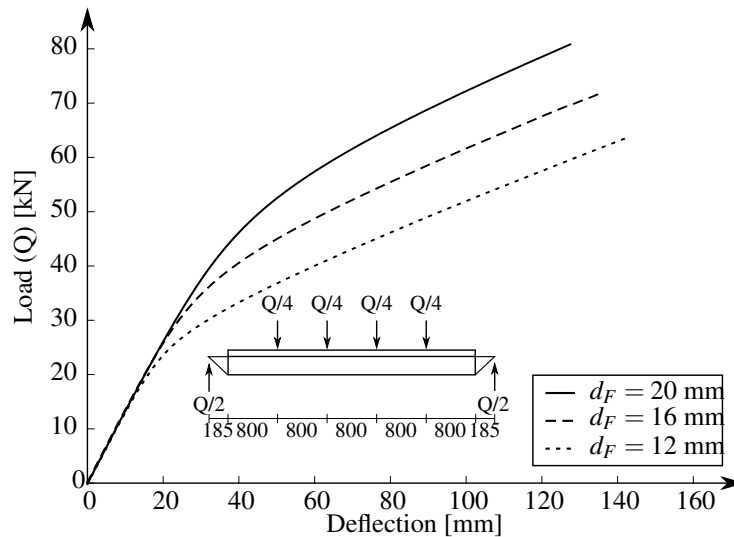


Figure 3.18: Calculated load vs. deflection curves of TCC beams with different diameter and spacing of dowels

### 3.6 Conclusion

A 4-level model for a TCC beam with steel dowels has been developed and validated with experimental shear tests on the timber-concrete connections and flexural tests on the full-



size composite beams found in the literature. The original contributions of this work to the composite beam theory are as follows:

1. The model of a beam on Winkler elastic foundation has been extended to account the nonlinearity of the wood foundation stiffness and the nonlinear moment-curvature relationship of the steel dowel for calculating the entire shear force vs. slip curve of the connection;
2. The composite beam theory has been extended to account for nonlinearity of the connection law and of the concrete cracking using a secant stiffness approach;
3. The model predicting the structural behaviour of a composite beam directly from the material properties of the members and of the steel dowels has been developed and validated against experimental results available in literature.

When applied to the studied case of a TCC beam with steel dowels, the following conclusions can be drawn:

4. The unreinforced relatively stiff concrete slab may have a non-negligible effect on the structural response of a TCC beam and its importance should be considered in the analysis of timber-concrete structures;
5. The composite action efficiently avoids the concentration of the concrete cracking, which becomes quite uniformly distributed along the beam span at the advanced stage of loading;
6. Although the flexural stiffness of the concrete slab is strongly reduced under loading, the axial stiffness provides a remarkable contribution to the resistant moment due to the composite action;
7. With increasing dowel diameter and spacing that provide equivalent elastic stiffness, the resistance of the composite beam increases while the apparent ductility ratio of the TCC beam decreases.

Future studies should consider humidity and the long term effects, such as creep and shrinkage, on the performance of TCC structures.

## **Acknowledgments**

We would like to acknowledge the National Sciences and Engineering Research Council of Canada funding - Collaborative Research and Development Grants (RDCPJ 445200) - associated to the NSERC Industrial research chair on ecoresponsible wood construction

(CIRCERB) for supporting the present research. We acknowledge CIRCERB for making available the version beta of the FEM model here developed in their website <https://circularb.chaire.ulaval.ca>

## Appendix

### A. Elementary stiffness matrix of Euler-Bernoulli beam

The FEM is expressed by the following equation for an Euler-Bernoulli beam:

$$[K^e] \{u^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\}. \quad (3.16)$$

The elemental stiffness matrix for an Euler-Bernoulli beam is expressed as follows:

$$[K^e] = \frac{2E_e I_e}{h_e^3} \begin{bmatrix} 6 & -3h_e & -6 & -3h_e \\ -3h_e & 2h_e^2 & 3h_e & h_e^2 \\ -6 & 3h_e & 6 & 3h_e \\ -3h_e & h_e^2 & 3h_e & 2h_e^2 \end{bmatrix} + \frac{k_e h_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22h_e & 54 & 13h_e \\ -22h_e & 4h_e^2 & -13h_e & -3h_e^2 \\ 54 & -13h_e & 156 & 22h_e \\ 13h_e & -3h_e^2 & 22h_e & 4h_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$E_e I_e$  is the flexural stiffness of a discretely element of the connector,  $k_e$  is the stiffness of the Winkler foundation on a discrete element of the connector, and  $h_e$  is the length of a discrete element of the connector.

The elemental vector of degree of freedom is express as follows:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

The elemental force vector is express as follows:

$$\{Q^e\} = \frac{q_e h_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 6 \\ h_e \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Where  $q_e$  is the uniform load on a discrete element of the connector. The uniform load is only applied to the part of the connector, which is embedded in the concrete slab.

The vector of the secondary variable, which is the internal force for an element is expressed as follows:

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} -V_1 \\ -M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

## B. Elementary stiffness matrix of the composite beam

The FEM is expressed by the following equation for the composite beam:

$$[K^e] \{u^e\} = \{Q^e\} + \{F^e\}. \quad (3.21)$$

The elemental stiffness matrix for a composite beam is expressed as follows:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 12 \frac{EI_0}{h_e^3} & -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & -\frac{d}{h_e} & -12 \frac{EI_0}{h_e^3} & -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & \frac{d}{h_e} \\ -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 4 \frac{EI_0}{h_e} & d & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 2 \frac{EI_0}{h_e} & 0 \\ -\frac{d}{h_e} & d & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} & \frac{d}{h_e} & 0 & -\frac{h_e}{6EA^*} + \frac{1}{Kh_e} \\ -12 \frac{EI_0}{h_e^3} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & \frac{d}{h_e} & 12 \frac{EI_0}{h_e^3} & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & -\frac{d}{h_e} \\ -6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 2 \frac{EI_0}{h_e} & 0 & 6 \frac{EI_0}{h_e^2} & 4 \frac{EI_0}{h_e} & -d \\ \frac{d}{h_e} & 0 & -\frac{h_e}{6EA^*} + \frac{1}{Kh_e} & -\frac{d}{h_e} & -d & -\frac{h_e}{3EA^*} - \frac{1}{Kh_e} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

The elemental vector of degree of freedom is expressed as follows:

$$\{u^e\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ N_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

The elemental force vector for the composite beam is expressed as follows:

$$\{Q^e\} = \frac{q_e h_e}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -h_e \\ 0 \\ 6 \\ h_e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

The vector of the secondary variable for an element is expressed as follows:

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} -V_1 \\ -M_1 \\ -s_1 \\ V_2 \\ M_2 \\ s_2 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

In Eq. (3.24), we can see that the terms 1, 2, 4, and 5 are the same as the corresponding terms in Eq. (3.19). To include punctual force on the composite beam and distributed load, but not uniform, Reddy [87] gives a method to determine the elemental vector force as a function of the force on an element for an Euler-Bernoulli beam.



## **Chapter 4**

# **A New Composite Connector for Timber-Concrete Composite Structures**

### **Résumé**

Les structures en bois-béton font leur apparition dans plusieurs applications industrielles comme une méthode efficace pour optimiser la performance et le coût de la construction. Leur efficacité dépend fortement du type de connexion utilisé. Afin de garantir une ductilité suffisante pour la structure sans sacrifier sa rigidité et la résistance, les connexions doivent être rigides, solides et se déformer plastiquement avant l'effondrement fragile du bois ou des éléments en béton. Ce travail présente un nouveau connecteur composite, qui peut être utilisé pour améliorer la ductilité d'une structure sans perte significative de la rigidité aux états limites de service. Le connecteur composite étudié se compose d'un cylindre constitué d'un béton fibré à ultra-haute performance (BFUP) avec un noyau cylindrique en acier. Le BFUP améliore la microrésistance à la fissuration et la dissipation d'énergie sous de grandes déformations. Les caractéristiques de performance des connecteurs de différentes tailles ont été évaluées par des essais de cisaillement. Les résultats montrent que la raideur de la connexion est principalement régie par le diamètre extérieur du connecteur, tandis que la résistance du connecteur est principalement régie par le diamètre du noyau en acier. Une poutre sur fondation Winkler a été appliquée pour décrire le comportement du connecteur composite pour les essais de cisaillement. Enfin, la théorie des poutres composite a été appliquée pour prédire le comportement d'une poutre composite bois-béton avec différents paramètres des connecteurs composites. Les résultats montrent que les diamètres du béton et du noyau d'acier du connecteur peuvent être facilement modifiés pour optimiser le comportement de la poutre en améliorant de manière significative sa ductilité sans perte significative de rigidité à la flexion

et sa résistance.

**Mots clés :** Béton fibré à ultra haute performance, Connecteur de cisaillement, Essai de cisaillement, Résistance de connexion, Rigidité de connexion, Ductilité structurale



## Abstract

Timber-Concrete Composite (TCC) structures are emerging in several industrial applications as an efficient method for optimizing the structural performance and the cost of construction. Their effectiveness depends strongly on the kind of connection employed. In order to guarantee sufficient ductility to the structure without sacrificing its stiffness and strength, the connections have to be rigid, strong and deform plastically before the brittle collapse of the timber or concrete members. This work presents a new composite connector, which can be used to enhance the ductility of a structure without significant loss of stiffness at serviceability limit states. The studied composite connector consists of a composite cylinder made of ultra-high performance fibre-reinforced concrete (UHPFRC) shell with a steel cylindrical core. The UHPFRC enhances micro-cracking resistance and energy dissipation under large deformations. Performance characteristics of the connectors of various sizes have been evaluated using shear tests of connections. The results show that the connection stiffness is principally governed by the diameter of the concrete shell, while the connection resistance is principally governed by the diameter of the steel core. A beam on a Winkler foundation model has been applied to describe the behaviour of the composite connector in the shear tests. Finally, the composite beam theory has been applied to predict the structural behaviour of TCC beams with different parameters of the composite connectors. The results show that the diameters of the concrete shell and of the steel core of the connector can be conveniently varied to optimize the TCC beam performance by significantly enhancing its structural ductility without significant loss of flexural stiffness and load bearing capacity.

**Keywords:** Ultra-high performance fibre-reinforced concrete, Shear connector, Shear connection test, Connection strength, Connection rigidity, Structural ductility

## 4.1 Introduction

Timber-concrete composite (TCC) structures present an efficient method for optimizing the structural performance and the construction cost of buildings and bridges, as well as for retrofit and strengthening of existing floors, through an intelligent use of the properties of both materials [101, 25, 67, 21, 82]. In a TCC floor, the concrete slab increases the overall stiffness and reduces the floor vibrations, while the timber beam provides the resistance, reduces the weight and improves the environmental impact and appearance of the structure.

A TCC structure consists of a concrete slab supported by timber panel or beam, which may be attached by means of different types of connectors. The timber primarily resists tensile stress and the concrete resists compressive stress generated by moments and by the composite action. The shear connection between timber and concrete generates the axial force, which greatly contributes to the total resistant moment of a TCC structure [95, 13]. The behaviour of the connection can be determined by means of a shear test, also called push-out test [106]. Fig. 4.1 illustrates the behaviour of different connectors in terms of shear load vs. slip curves ( $V - s$ ) from data available in literature [64, 65, 16]. The connector law ( $V - s$ ) is often highly non-linear within a slip range of 3 mm, especially in the case of discrete connectors, like screws, studs or dowels [38, 71].

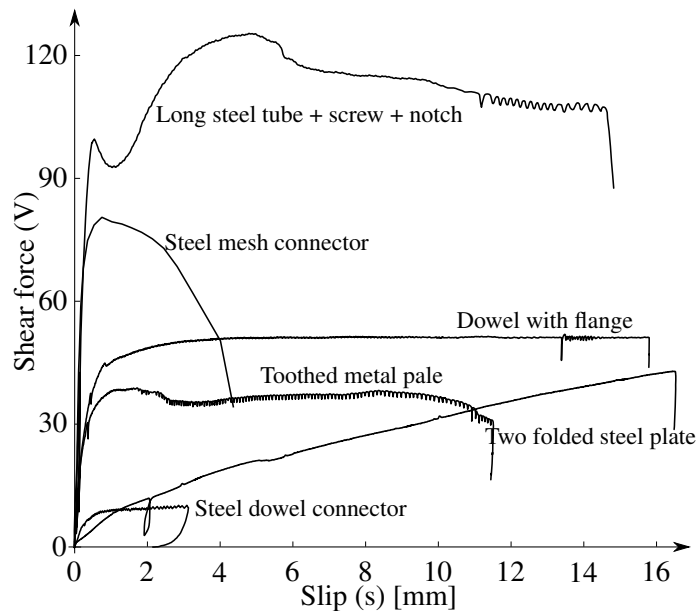


Figure 4.1: Load vs. slip curves of various connectors (After Lukaszewska [65])

The structural behaviour of TCC floors with different types of connections has been investigated by several authors [82, 65, 24]. The connection parameters governing the structural behaviour of a TCC structure are: (i) stiffness, or slip modulus, ( $k_i$ ); (ii) resistance, or max-

imum shear resistance, ( $V_{max}$ ); and (iii) ductility ( $\mu$ ). The connection stiffness affects the degree of composite action between the members. The resistance and ductility of the connection affect the behaviour of a TCC structure only if the resistance of the connector is achieved before the main member collapse in bending or tension. If the connection behaves elastically when the timber reaches the maximum tensile strength in the external fibre, the composite structure will have a brittle failure, albeit the connection load-slip relationship is ductile [16, 108]. On the other hand, when the connections yield before the collapse of the timber, the TCC structure will start deforming plastically resulting into a non-linear, ductile behaviour [44, 41].

To analyse the non-linear behaviour of TCC structures in bending, the composite beam theory has been recently extended to account for the non-linear load-slip ( $V - s$ ) of connections [77, 89, 34]. In the case where connections fail before the timber collapse, Frangi et Fontana [41] proposed a simplified estimation of the maximum load for TCC structures by assuming a rigid-perfectly plastic load-slip relationship ( $V - s$ ) where the maximum connection shear strength is reached at the interface. In design practice, when serviceability limit states, such as deflection and vibration, govern the design of the floor, a simplified linear elastic calculation model, such as the  $\gamma$ -method in the Annex B of Eurocode 5 [2], is suitable to design a TCC structure.

By optimizing the connection it is possible to enhance ductility of a TCC structure without compromising its stiffness at the serviceability state. However, in the case of steel dowel connectors, Gelfi *et al.* [44] found that the connection stiffness is approximately linearly proportional to the dowel diameter, while the maximum shear resistance of the connection is proportional to the square root of the dowel diameter. In the context of the present discussion, it is challenging to vary the diameter of a steel dowel to achieve the suitable connection resistance, which allows the ductile failure of the structure, as it also affects the connection stiffness and, hence, the flexural stiffness of the structure. The underlying idea of this work is to develop a composite connector with variable properties allowing optimisation of the flexural stiffness, resistance and ductility of TCC structures. The objective of the present work is twofold: (i) to develop a concept of a new composite connector and characterize its performance by experimental shear tests; and (ii) to assess the gain in the structural performance of a TCC beam by varying the composite connector parameters. The article is structured as follows: section 2 introduces the connector concept and theoretical background for analysis of the connection and of TCC beams; section 3 presents and discusses the experimental tests on the proposed connections; section 4 analyses the experimental results using numerical modelling for better understanding the behaviour of the connection; and section 5 predicts

the structural response of TCC beams with the new connectors using the numerical modelling with the emphasis on the stiffness and ductility of the structure.

## 4.2 New connector concept and theoretical background

### 4.2.1 Concept of a new composite connector

According to the capacity design approach, in a ductile TCC structure the connection should undergo non-linear deformation before the collapse of the main member. In this study, we developed a prototype of a cylindrical connector made of a concrete shell with or without a steel core. The concrete shell diameter governs the connection stiffness, while the steel core governs the connection resistance. To allow large energy dissipation and micro-cracking resistance special ultra-high performance fibre-reinforced concrete (UHPFRC) is employed. Furthermore, the connector has an elongated shape to provide flexural behaviour, which is predictable by simple models.

### 4.2.2 Background on composite beam theory

For the analysis of the connections and TCC beams in this work we employed two existing methods well established for composite structures, such as follows:

1. For the connection analysis, the Winkler model is used, which allows predicting the shear behaviour ( $V - s$ ) of a connection by representing the connector as a beam on an elastic foundation [44, 60], as schematically shown in Fig. 4.2, where:  $k_c$  and  $k_w$  are the elastic foundation with moduli of the the concrete and the timber, respectively;  $E_s I_s$  is the flexural stiffness of the steel cylindrical core;  $t$  is the distance between the concrete slab and the timber beam;  $s_n$  represents the slip between the two members;  $v_n$  is the horizontal displacement of the top end of the connector. The Winkler model is suitable for elongated connectors, which mainly work in flexure, e.g., steel dowels [38, 44]. As experimentally determined by Gelfi *et al.* [44], the wood foundation modulus ( $k_w$ ) is taken as non-linear relationship of the shear force vs. slip ( $V - s$ ) (see Fig. 4.3). The Winkler model has been recently extended to account for the non-linear behaviour of the connector, in terms of moment and curvature ( $M - \chi$ ) by means of a secant stiffness approach [34, 94]. The non-linearity of the moment-curvature relationship, which is due to steel yielding or concrete cracking, can be determined by a classical sectional analysis from the one-dimensional material law of the connector materials in terms of

stress and strain ( $\sigma - \varepsilon$ ) [79]. Full details of such model, numerical implementation and validation can be found in Cuerrier Auclair *et al.* [34].

- For the structural analysis of a TCC beam, the composite beam theory is used. The governing equation has been developed by Newmark *et al.* [77] and validated on several applications of composite beams [101, 47, 46] under the following assumptions: (i) the timber beam and the concrete slab behave according to the classical Euler-Bernoulli beam theory, which neglects the shear deformation effect on the deflection; (ii) each member has the same deflection, rotation and curvature, i.e., there is no separation between the two members; and (iii) the connection between the members is elastic. This theory has been recently extended to account for non-linear relationship of shear load vs. slip ( $V - s$ ) and the concrete damage [89, 34] by means of a secant stiffness approach [94, 86, 68]. The extended composite beam model was implemented in a finite element method (FEM) and validated using experimental tests on TCC beams with a fairly satisfactory accuracy [34, 9].

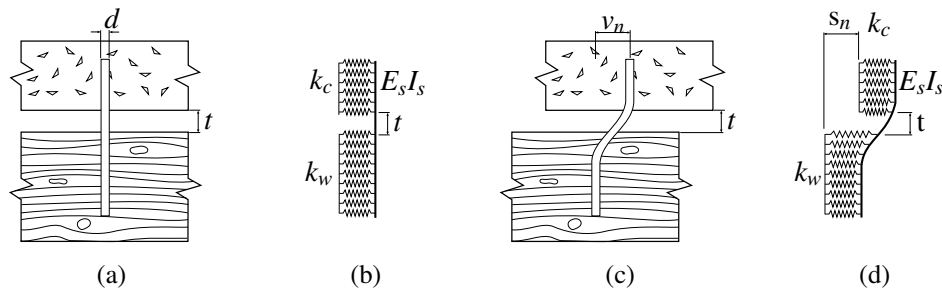


Figure 4.2: Timber-concrete connection with a steel dowel (after Gelfi *et al.* [44]) and its Winkler model in the initial state (a and b) and in the deformed state (c and d)

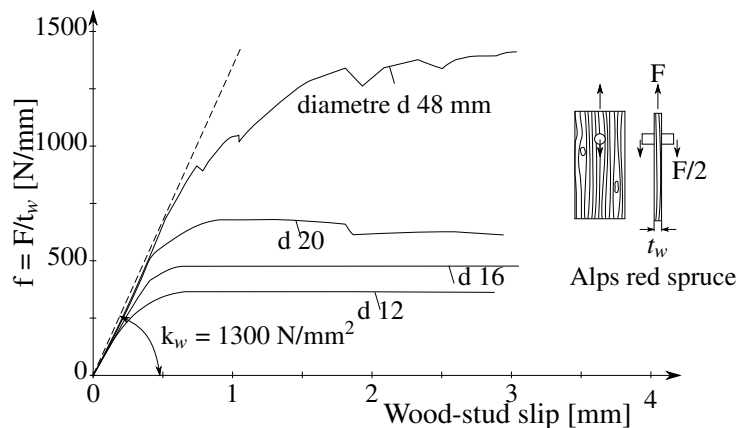


Figure 4.3: Experimental curves for the evaluation of wood foundation stiffness  $k_w$  (Gelfi *et al.* [44])

## 4.3 Experimental tests on the new connector

### 4.3.1 Materials

The performance of the prototype connectors was evaluated using shear tests on specimens fabricated from the following materials. The timber members were Canadian-made glulam Nordic-Lam 24F-ES/NPG in air-dry condition. The mechanical properties of timber were taken from the manufacturer's specification [8], and the mean values for 10-min load duration were estimated using CSA O86 standard practice [7]. The concrete members were fabricated from standard concrete, and its strength was measured by a standard compression test [3]. The connector shells were made of two different sizes and using two types of concrete: (i) UHPFRC with 2% steel fibre volume, and (ii) a regular concrete mortar. The properties of the UHPFRC were taken from the literature [80, 27]. The strength of the concrete mortar was measured by standard compression tests on cylindrical samples [3]. For the connector core two types of steel were used: (i) threaded rods (M6 or M12) and (ii) a rebar (10M). Their mechanical properties were determined in laboratory from standard direct tension tests [4]. One series of tests used an UHPFRC connector without steel core. The average values of the mechanical properties of all materials used in the tests are reported in Table 4.1.

Table 4.1: Average values of mechanical properties of materials used in shear tests (MPa)

| Component       | Product              | $E$    | $f_b$ | $f_t$ | $f_c$ | $f_y$ | $f_u$ |
|-----------------|----------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Timber beam     | NordicLam 24F-ES/NPG | 12400  | 45.9  | 30.8  | 54.8  | -     | -     |
| Concrete slab   | Standard concrete    | -      | -     | -     | 41    | -     | -     |
| Connector shell | UHPFRC               | 50000  | -     | 14.2  | 150   | -     | -     |
|                 | Standard mortar      | -      | -     | -     | 34    | -     | -     |
| Connector core  | Threaded rod         | 210000 | -     | -     | -     | 568   | 633   |
|                 | Rebar                | 207000 | -     | -     | -     | 434   | 599   |

$E$ : Young's modulus,  $f_b$ : Flexural str.,  $f_t$ : Tension str.,  $f_c$ : Compression str.,  $f_y$ : Yielding str.,  $f_u$ : Ultimate str.

### 4.3.2 Fabrication of the test specimens

The geometry and configurations of the tested connectors are shown in Fig. 4.4 and Table 4.2, respectively. All connectors were made with a square head of the same size of  $b_c = 80$  mm and  $l_c = 40$  mm using individual custom-made wood moulds with a tolerance of  $\pm 0.5$  mm. The concrete mix was poured into the mould with the steel core in place. The mould was removed after 24 hours and the connectors were allowed to cure for seven days at  $60^\circ\text{C}$  and 95% relative humidity to accelerate the hydration before installation into the timber beam.

To assemble the specimen the connector was inserted into the timber beam by tapping into a hole pre-drilled with the same diameter and length as the connector. Then, the concrete slab was cast in place by pouring regular concrete mix into a formwork attached to the timber beam. A plastic film was laid under the concrete to protect the timber from wetting and to minimize the friction between the members during the shear test, as it was not taken into account in the model.

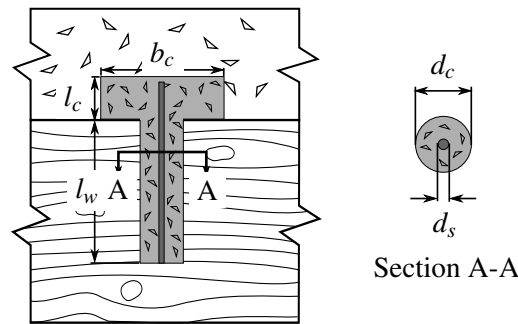


Figure 4.4: Geometry of the composite connector

### 4.3.3 Test procedure

Fig. 4.5 shows the shear test set-up and dimensions of the specimens. Each specimen included a single connector. Two steel guards with Teflon plates were attached to the steel frame on both sides of the timber beam to prevent out-of-plane rotation of the specimen under load. The tests were performed according to the EN 26891 [1] without the pre-load cycle. The average connection slip was determined by measuring the displacements between the concrete and timber with two LVDT's installed on the sides of the specimen, as shown in Fig. 4.5.

Different composite connectors were tested under shear force by varying the concrete and steel diameters as reported in Table 4.2. The length of the connector in the wood ( $l_w$ ) was about 95 and 135 mm for the connectors with a diameter of about 25 and 35 mm, respectively.

### 4.3.4 Test results

The connectors made of mortar were susceptible to cracking due to concrete shrinkage and their test results are reported here only for sake of completeness (except for the connector #06 that cracked during the installation), but disregarded in the following discussion. None of the UHPFRC connectors cracked during installation. Table 4.3 reports the test results

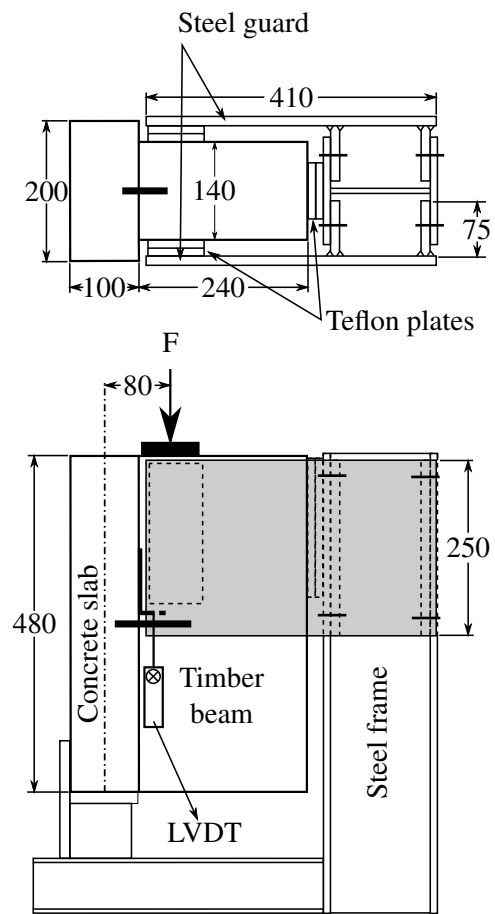


Figure 4.5: Shear test set-up

Table 4.2: Configurations of the tested connectors

| Test   | Concrete shell | Steel core | $d_c$ [mm] | $d_s$ [mm] | $l_w$ [mm] |
|--------|----------------|------------|------------|------------|------------|
| #01-02 | UHPFRC         | -          | 25.4       | 0          | 95         |
| #03-04 | UHPFRC         | TR*        | 25.4       | 5 (M6)     | 95         |
| #05-06 | Mortar         | TR         | 25.4       | 5 (M6)     | 95         |
| #07-08 | UHPFRC         | TR         | 25.4       | 10.2 (M12) | 95         |
| #09-10 | UHPFRC         | RB*        | 25.4       | 10 (10M)   | 95         |
| #11-12 | Mortar         | TR         | 25.4       | 10.2 (M12) | 95         |
| #13-14 | UHPFRC         | TR         | 34.9       | 5 (M5)     | 135        |
| #15    | UHPFRC         | TR         | 34.9       | 10.2 (M12) | 135        |
| #16    | UHPFRC         | RB         | 34.9       | 10 (10M)   | 135        |

\*TR: Threaded Rod, RB: Reinforcement Bar



in terms of the maximum load ( $F_{max}$ ), the slip modulus ( $k_i$ ), the ultimate slip ( $\delta_u$ ), and the failure modes. The maximum load was measured within the slip of 3 mm. The slip modulus represents the slope of the linear portion of the load-slip curve. The ultimate slip corresponds to the significant load drop indicating the failure of the connector. The failure modes were determined via examination of the connection surfaces after the test, which are illustrated in Fig. 4.6.

The results show that the increase of the steel core diameter from 5 to 10 mm effectively increases the connection resistance ( $F_{max}$ ) approximately 80%. The increase of the external concrete diameter from 25 to 35 mm increases the connection stiffness ( $k_i$ ) at least 67%. The connectors with a threaded rod provided 75% greater connection stiffness than the connectors reinforced with a rebar of the same diameter, possibly due to a better bond between the concrete and the threads. Not surprisingly, the connectors without steel core (#01-02) showed significant dispersion of the connection performance parameters, whereas the connectors with steel cores showed better repeatability of results, especially the maximum resistance, with the average difference of 4.8% between two matched specimens. However, the variation in the connection stiffness between the matched specimens was rather significant, most likely due to the low tolerances of fabrication of connectors, which may have lead to gaps in the assembly and poor initial contact with timber. To improve the fabrication tolerances, steel moulds can be utilised and/or the gaps can be filled with epoxy or other gap fillers.

Table 4.3 indicates that the matched specimens reproduced the same failure modes. The failure mode (1), shear failure of the connector, was observed most frequently (10 out of 15 tests). It represents the target failure mechanism, because it depends mostly on the properties of the prefabricated connector, which are better controlled and less variable than those of the connected members. The failure mode (2), pull-out of the steel core from the connector head, was observed in connectors made with regular mortar, and it was accompanied with cracking in the concrete slab. It shows that the use of mortar for this type of connection is not desirable. The failure mode (3), pull-out of the steel core from the connector shank, was observed on connectors made with a rebar, and it was followed up with wood crushing produced by the withdrawn steel rod. This failure mode demonstrated the weak bond between the rebar and the concrete shell and, along with the lower stiffness of the connection discussed above, it proved to be less desirable in this application.

Table 4.3: Shear test results

| Test | $F_{max}$<br>[kN] | $k_i$<br>[kN/mm] | $\delta_u$<br>[mm] | Failure mode | Test | $F_{max}$<br>[kN] | $k_i$<br>[kN/mm] | $\delta_u$<br>[mm] | Failure mode |
|------|-------------------|------------------|--------------------|--------------|------|-------------------|------------------|--------------------|--------------|
| #01  | 8.44              | 22.4             | 3.0                | (1)          | #09  | 27.85             | 14.4             | >15                | (3)          |
| #02  | 12.42             | 13.5             | 5.0                | (1)          | #10  | 29.00             | 21.6             | >15                | (3)          |
| #03  | 16.93             | 28.6             | 7.4                | (1)          | #11  | 20.38             | 19.9             | 12.9               | (2)          |
| #04  | 17.59             | 11.8             | 7.7                | (1)          | #12  | 19.73             | 8.8              | 12.6               | (2)          |
| #05  | 4.15              | 18.1             | 9.7                | (2)          | #13  | 28.06             | 48.0             | 1.1                | (1)          |
| #06  | -                 | -                | -                  | (-)          | #14  | 27.82             | 36.3             | 1.8                | (1)          |
| #07  | 35.95             | 37.0             | 12.1               | (1)          | #15  | 51.24             | 52.8             | 12.0               | (1)          |
| #08  | 31.36             | 26.2             | 11.2               | (1)          | #16  | 50.11             | 29.9             | >15                | (1)          |

(1) Shear failure of the connector at the interface; (2) Pull-out of the steel core from the connector head;  
 (3) Pull-out of the steel core from the connector shank

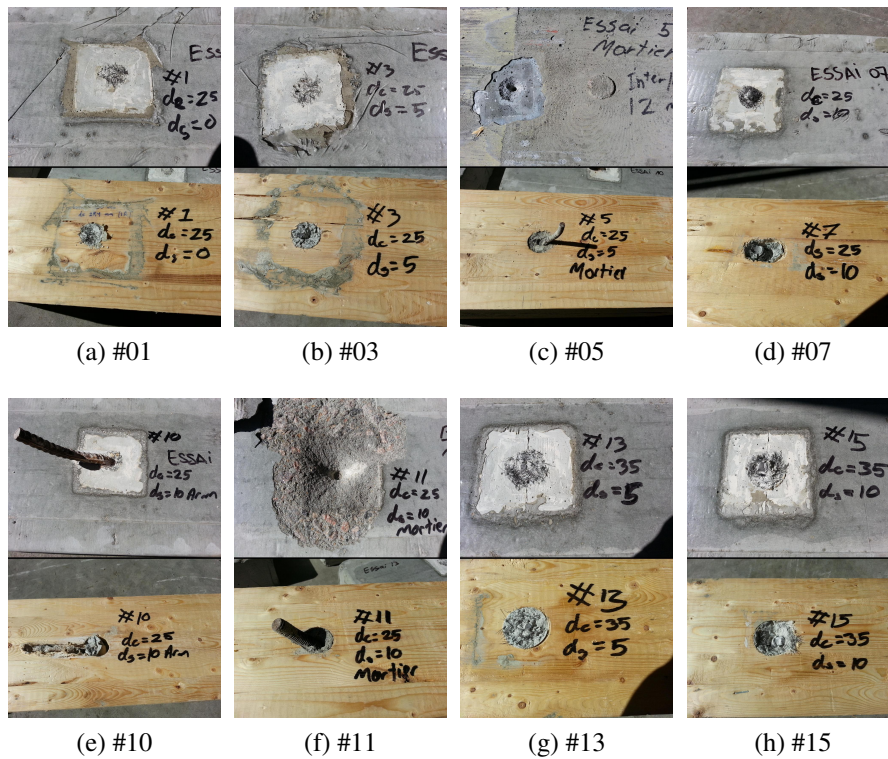


Figure 4.6: View of the connection surfaces after failure

## 4.4 Modelling of the shear tests

### 4.4.1 Model parameters

The shear tests were analysed with the Winkler model presented in Section 2.2, which is particularly suitable for a discrete elongated connector working in flexure like a beam on an elastic foundation [44, 34]. The material law of the UHPFRC in compression is described by Eqs. (4.1) to (4.6) proposed by Popovics [84], Collins et Porasz [32] and it is illustrated in Fig. 4.7a.

$$\sigma = f'_c \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{1,f}} \frac{\eta}{\eta - 1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{1,f}} \eta \varphi} \quad (4.1)$$

where,

$$\varepsilon_1 = \left[ 1 + 0.16 \frac{k_0}{f'_c{}^2 + 800} \right] \frac{f'_c{}^{2/3}}{k_0}; \quad \varepsilon_2 = \left[ 1 + \frac{20}{f'_c} \right] \varepsilon_1 \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_{1,f} = \left[ 1 + 4 \frac{f_t}{f'_c} \right] \varepsilon_1; \quad \varepsilon_{2,f} = \left[ 1 + 15 \frac{f_t}{f'_c} \right] \varepsilon_2 \quad (4.3)$$

$$X = \frac{\varepsilon_{2,f}}{\varepsilon_{1,f}}; \quad \eta = \frac{k}{k-1} \quad (4.4)$$

$$k = E_c \frac{\varepsilon_{1,f}}{f'_c}; \quad k_0 = \frac{E_c}{f'_c{}^{1/3}} \quad (4.5)$$

$$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon < \varepsilon_p \\ \frac{\ln 1 - \eta + \eta X / 0.7}{\eta \ln X} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.6)$$

The values of the strength in compression ( $f'_c$ ) and tension ( $f_t$ ) and on the Young's modulus ( $E_c$ ) of the UHPFRC shown in Table 1 were used in the analysis. The tensile law of UHPFRC illustrated in Fig. 4.7b was determined by inverse analysis from third-point bending tests (Fig. 4.8), which were carried out on four UHPFRC prismatic beams with a span of 1200 mm, height of 100 mm and width of 40 mm. The comparison between the experimental and calculated flexural behaviour presented in Fig. 4.8 in terms of load vs. mid-span deflection shows satisfactory agreement. The material laws of the steel rebar and the threaded rods were experimentally determined from tensile tests according to ASTM E8 [4] and the average curves based on three samples are shown in Fig. 4.9. The elastic stiffness of the Winkler foundation was determined from Gelfi *et al.* [44], for concrete:  $k_c = 10$  GPa, for wood:  $k_w = 1.3$  GPa. The non-linear performance parameters of the wood foundation were determined via linear interpolation of the results shown in Fig 4.3.

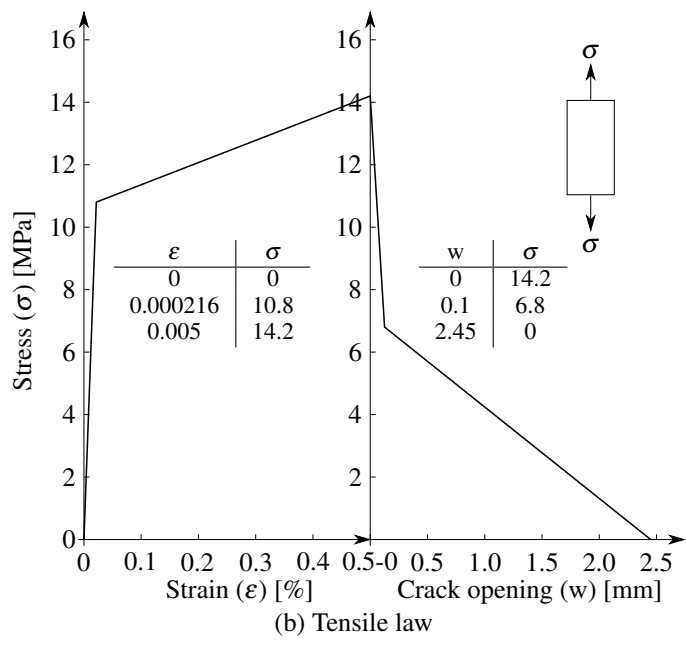
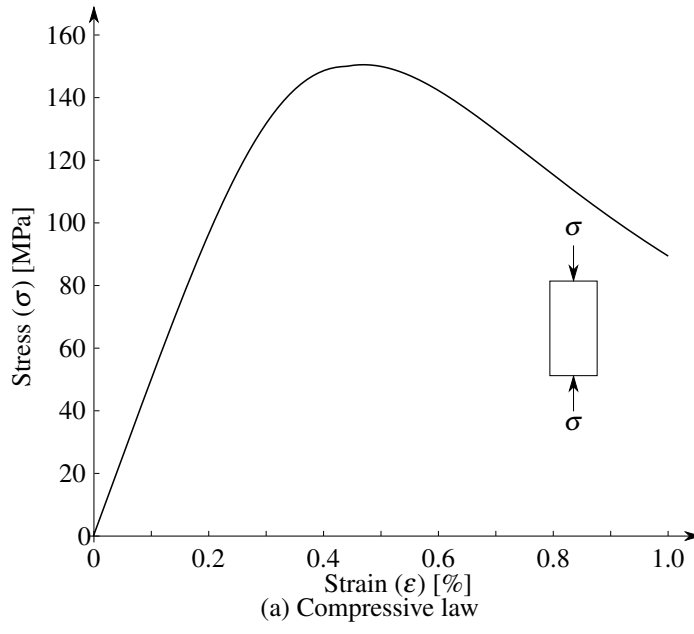


Figure 4.7: Material laws of UHPFRC

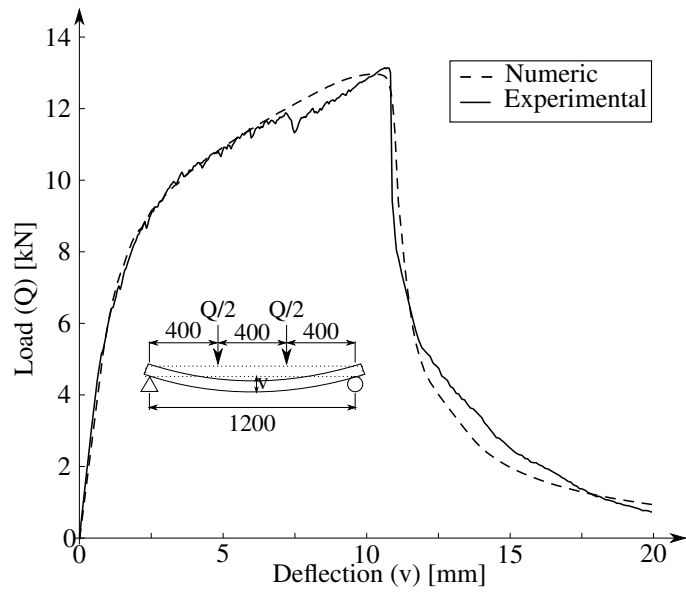


Figure 4.8: Bending test on UHPFRC beam

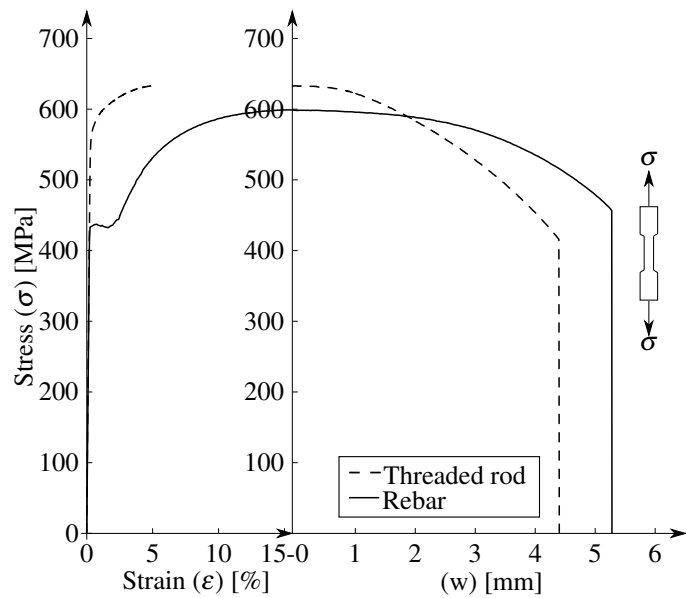
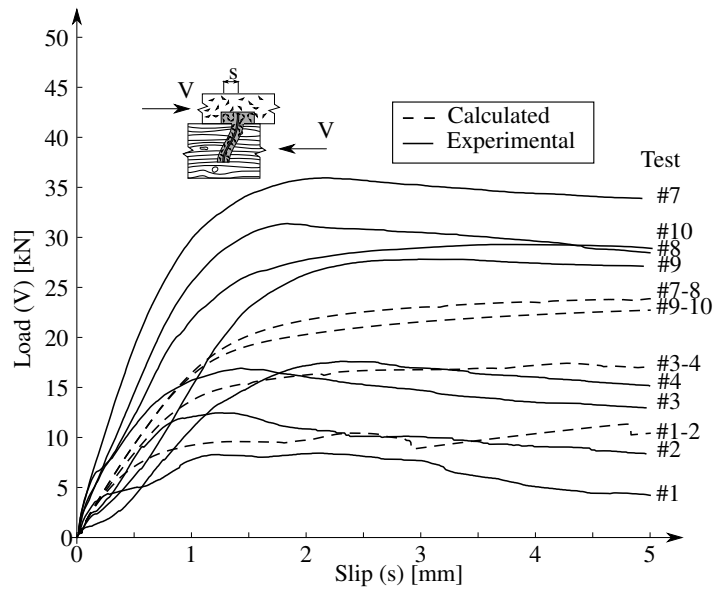


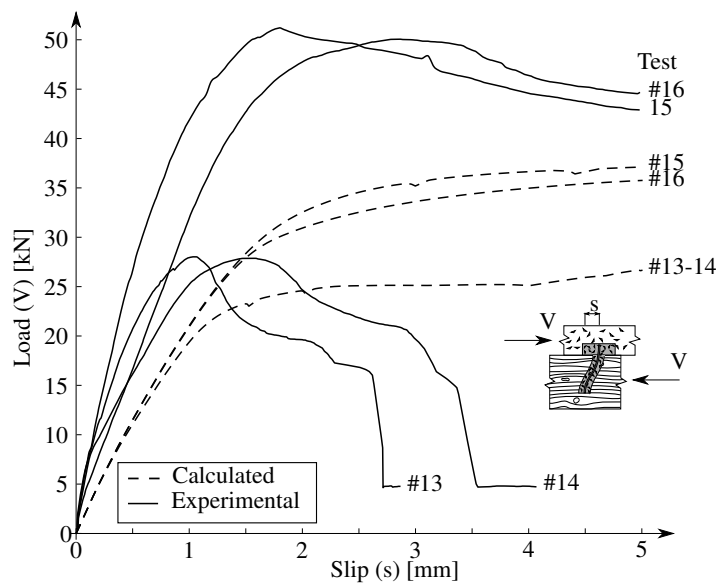
Figure 4.9: Material laws of steel cores

## 4.4.2 Analysis results

Fig. 4.10 shows the calculated load-slip curves plotted against the corresponding experimental curves for each tested connector (except for those made with mortar). While some sort of agreement between the curves can be found for the connectors without steel core (#01-02) and with 5 mm TR core (#03-04 and #13-14), the predictions for the other connectors were rather poor, with the initial stiffness and strength being significantly underestimated.



(a) 25 mm concrete diameter



(b) 35 mm concrete diameter

Figure 4.10: Calculated vs. experimental load-slip curves

Wood density of the Alpine red spruce (*Picea rubens*) is lower than Douglas fir (*Pseudotsuga menziesii*) used in the tests. Also, it is known that the embedment stiffness and strength of wood depend on the dowel diameter. Therefore, it is plausible that the model parameters  $k_w$  and  $f_w$  assumed in Section 4.1 for the analysis were not representative of the tested material. To verify this hypothesis in the absence of the material test data, we calibrated the wood foundation properties by inverse analysis of the model. Fig. 4.11 shows the calibrated curves obtained using the best-fitted parameters of the wood foundation, which correspond to the experimental curves more closely. This exercise illustrated the influence of the wood foundation properties on the connection behaviour.

## 4.5 Design for ductile failure of TCC beams

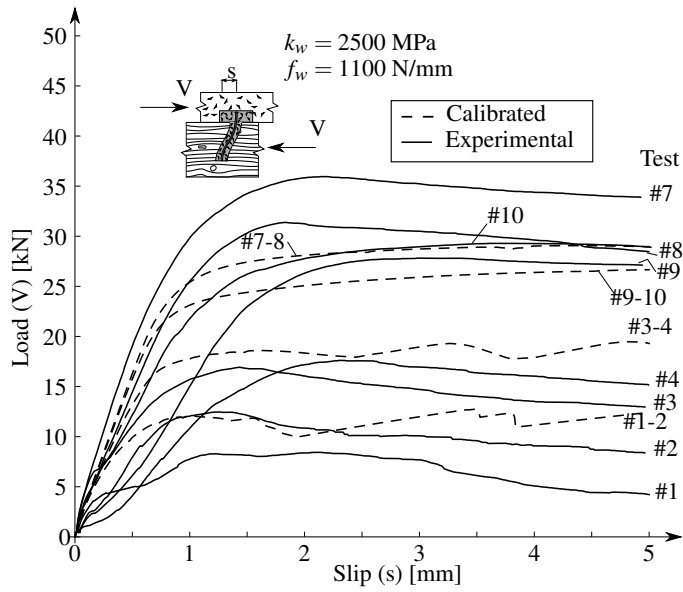
This section shows the prediction of the flexural behaviour of a TCC beam using the experimental connection law ( $V - s$ ) and the assessment of the possible gain in the structural ductility by employing different composite connectors.

The configuration and material properties of the analysed TCC beam are presented in Fig. 4.12. Timber beam was assumed to be Nordic-Lam 24F-ES/NPG glulam with the same properties as shown in Table 4.1 representing the average values adjusted to 10 min load duration and size effect in bending. For the concrete slab, the mean values of the properties were taken in accordance with the mechanical relationships proposed in CSA A23.3-04 [5] for regular concrete. The analyses were performed for the beams assembled with connectors #03, #07, #13 and #15 with their respective experimental ( $V - s$ ) curves from Fig. 4.10 and uniform spacing along the beam span, as shown in Table 4.4, selected in such a way to achieve similar initial flexural stiffness of the beams. For comparison, the performance of the same TCC beam assembled with a continuous steel mesh connector with the connection law shown in Fig. 4.1 was calculated.

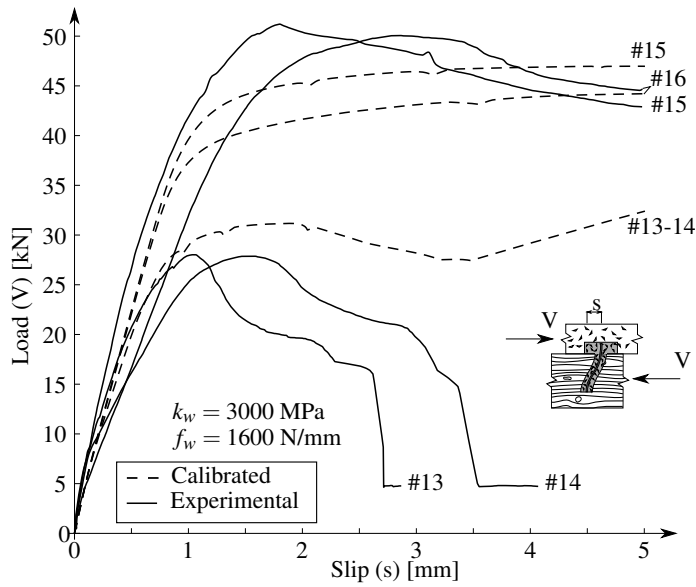
Fig. 4.13 shows the calculated flexural response of the beams in terms of load vs. mid-span deflection. The calculations predicted beam failure due the wood rupture in tension at the exterior fibre except for the beam with connector #13 where the connectors would break first. The performance parameters of each analysed beam are presented in Table 4.4, where the flexural stiffness was calculated with  $\gamma$ -method [2] and the ductility ratio ( $\mu$ ) was defined as follows:

$$\mu = \frac{v_u - v_e}{v_e}, \quad (4.7)$$

where  $v_u$  is the deflection at failure and  $v_e$  is the limit of the elastic deflection.



(a) 25 mm concrete diameter



(b) 35 mm concrete diameter

Figure 4.11: Calibrated vs. experimental load-slip curves

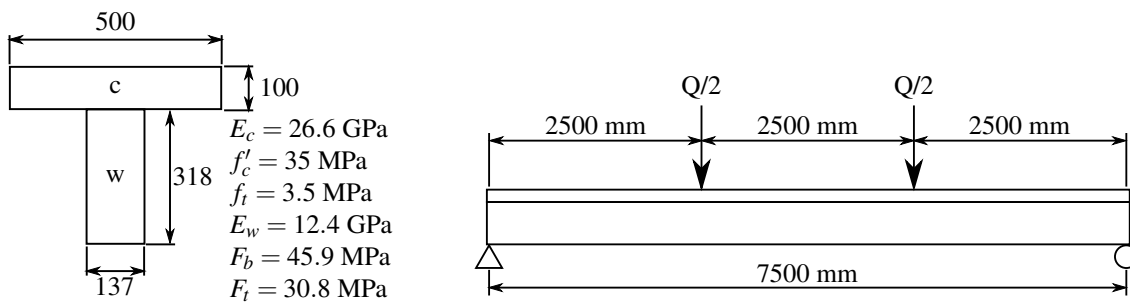


Figure 4.12: Configuration and material properties of the analysed TCC beam



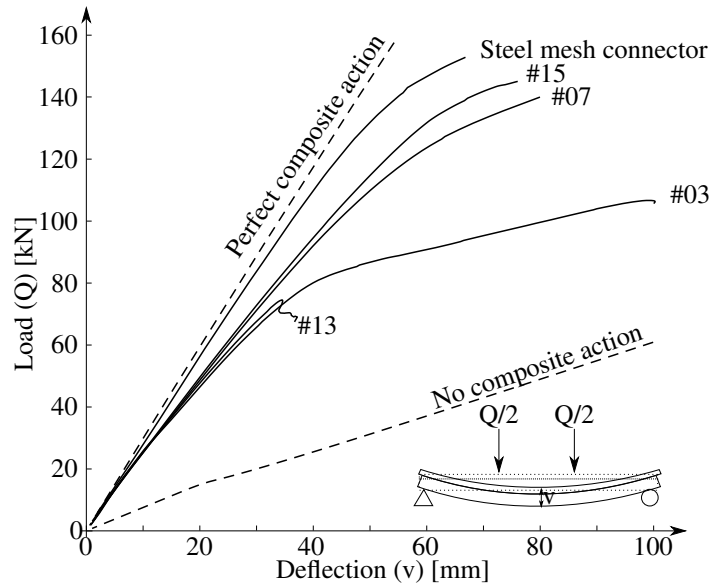


Figure 4.13: Calculated load-deflection curves of TCC beams with various connectors

Table 4.4: Performance parameters of TCC beams with various connectors

| Connector   | $d_c$<br>[mm] | Steel<br>core | Spacing<br>[mm] | $(EI)_{ef}$<br>[Nmm <sup>2</sup> · 10 <sup>12</sup> ] | $Q_{max}$<br>[kN] | $v_e$<br>[mm] | $v_u$<br>[mm] | $\mu$<br>[-] |
|-------------|---------------|---------------|-----------------|---|-------------------|---------------|---------------|--------------|
| Continuous* | -             | -             | -               | 21.17   | 152               | 55.5          | 66.6          | 0.20         |
| #03         | 25.4          | M6            | 150             | 18.05   | 106               | 37.7          | 100.2         | 1.66         |
| #07         | 25.4          | M12           | 200             | 17.96   | 140               | 57.5          | 79.8          | 0.39         |
| #13         | 34.9          | M6            | 250             | 18.08   | 75                | 33.6          | 34.3          | 0.02         |
| #15         | 34.9          | M12           | 250             | 18.38   | 145               | 60.6          | 75.9          | 0.25         |

\*Continuous steel mesh connector

The results confirm that by choosing the connector and the spacing the designer can achieve desired stiffness, strength and ductility of a TCC structure. TCC beams with similar flexural stiffness can have remarkably different strength and ductility ratios. The continuous steel mesh connector provides nearly perfect composite action with higher flexural stiffness and strength of the beam than the discrete connectors, but a very low ductility. The connector #13 ( $d_c = 35$  mm,  $d_s = 5$  mm), which presents a rather brittle failure during the shear test, causes a brittle failure of the TCC beam at a very low load. This confirms that a brittle connection would cause premature and brittle structural collapse. The connector #03 provides the highest ductility ratio to the beam with a reduction of the maximum load of about 30% with respect the steel mesh connector. The beams with connectors #07 ( $d_c = 25$  mm,  $d_s = 10$  mm) and #15 ( $d_c = 35$  mm,  $d_s = 10$  mm) present lower ductility ratios, because the resistance of connectors was not completely achieved before the collapse of the timber. However, this

example demonstrates that using an appropriate composite connector (#15 with  $d_c = 35$  mm,  $d_s = 10$  mm) one can significantly improve the structural ductility by only losing 15% of the flexural stiffness and the load bearing capacity of about 8% relative to the beam with continuous steel mesh connector.

## 4.6 Conclusion

This paper presents an original work on a new composite connector for TCC structures, which is composed of an elongated cylinder of UHPFRC and a steel core. Based on the presented results, the following conclusions can be drawn:

1. Experimental shear tests with the proposed composite connectors of various configurations demonstrated that the connection stiffness mainly depends on the concrete shell diameter and the connection resistance mainly depends on the steel core diameter;
2. The connections with the composite connectors demonstrated acceptable repeatability of the maximum shear resistance, but the dispersion on the connection stiffness needs to be improved by tightening the fabrication tolerances or using gap fillers;
3. The performance of the shear connections can be effectively analysed using the Winkler model for a beam on elastic foundation provided that non-linear stiffness of the wood foundation is properly evaluated as a function of wood density and external connector diameter;
4. The analysis of the flexural behaviour of a TCC beam showed that by choosing a proper composite connector diameter and spacing, it is possible to improve the ductility of TCC beams without significantly reducing their flexural stiffness and loading bearing capacity.

## Acknowledgements

We would like to acknowledge the National Sciences and Engineering Research Council of Canada funding - Collaborative Research and Development Grants (RDCPJ 445200) - associated to the NSERC Industrial research chair on ecoresponsible wood construction (CIRCERB) for supporting the present research.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions générales

Le comportement structural d'une poutre composite bois/béton est grandement influencé par les propriétés de la connexion et des matériaux. La revue littérature a montré une grande quantité des connecteurs existants pour concevoir une poutre composite bois-béton. Chacun de ces connecteurs a leurs propres propriétés mécaniques auxquelles il peut y être défini la rigidité, la résistance et la ductilité. Dans le cadre d'une conception d'une poutre composite en ayant pour but d'optimiser les performances structurales telles que la rigidité, la vibration et la ductilité, il peut être difficile de choisir le connecteur idéal. L'objectif du mémoire était donc d'établir un modèle qui permet de prédire la réponse structurale d'une poutre composite bois-béton tel que sa flèche selon la charge, sa fréquence naturelle, l'endommagement de la dalle de béton et de la connexion tout le long de la poutre ainsi que la ductilité de la structure.

L'implémentation du modèle concernant le calcul des fréquences naturelles a permis d'augmenter la précision de calcul pour les fréquences naturelles des poutres composites en incluant l'inertie rotationnelle qui comprend l'inertie due au déplacement relatif horizontal entre le bois et le béton dans les équations gouvernantes. Avec ce modèle, il peut être conclu que l'inertie rotationnelle a une plus grande influence sur les poutres composites bois-béton que les autres types de poutres composites telles que les poutres acier-béton. Inclure l'effet de l'inertie rotationnelle peut diminuer la première fréquence naturelle jusqu'à 5% et l'effet ne fait que devenir de plus en plus important sur les modes supérieures.

L'implémentation du modèle à 4 niveaux a permis d'approfondir la compréhension des poutres composites bois-béton autant du point de vue du connecteur que du point de vue du comportement statique de la poutre. Avec ce modèle, il est possible de prédire entièrement la loi de comportement d'un goujon d'acier en terme de cisaillement en fonction du glissement en plus de tenir compte de l'endommagement du béton pendant l'analyse. Grâce à ce modèle, il est également possible de prédire le comportement statique d'une poutre composite bois-

béton avec n'importe qu'elle type de connecteur lorsque l'algorithme pour passer du niveau 3 au 4 est utilisé. Il est donc possible de déterminer qu'elle est le type de connexion idéal pour optimiser les performances d'une poutre composite bois-béton selon des contraintes géométriques et de chargement.

Avec ce modèle, il a été conclu qu'il est difficile de garantir une rupture ductile d'une poutre composite selon différentes propriétés de matériaux et géométrie avec un seul type de connecteur choisi tout en gardant une bonne action composite. C'est pour cela que dans le chapitre 4, un nouveau connecteur qui est dimensionnable a été testé et proposé. L'avantage de ce connecteur est qu'il peut être dimensionné selon les performances visées de la poutre composite. Le connecteur est composite et est fait de béton fibré à ultra haute performance (BFUP) avec un cœur d'acier. Le grand diamètre du connecteur permet d'avoir une bonne rigidité et le diamètre du cœur d'acier permet de contrôler la résistance du connecteur. Il est donc possible de s'assurer que le connecteur atteint sa résistance avec la rupture du bois et ainsi transmettre son comportement ductile à la poutre composite.

## **Perspectives de recherche**

Grâce au modèle développé, il est maintenant possible d'optimiser une poutre composite bois-béton selon certains critères recherchés tels que la rigidité, la résistance, la ductilité et la vibration. Cependant, le modèle peut être amélioré en intégrant l'effet du retrait du béton sur la poutre et les efforts que ce retrait peut engendrer. Ce type d'effort peut devenir relativement important étant donné la différence des propriétés qu'il existe entre le bois et le béton pour le retrait. Le modèle peut également être amélioré en incluant l'effet du fluage. Ce dernier peut rapidement devenir complexe, car il faut tenir compte du fluage du béton, du bois et de la connexion en plus de coupler chacun de ces effets entre eux.

De plus, le modèle peut être utilisé pour la réhabilitation de structure de bois. Il est courant, surtout en Europe, d'ajouter une mince dalle de béton par-dessus un plancher de bois qui présente de grandes déformations. Le modèle pourrait être utilisé de sorte à trouver l'épaisseur idéale de béton ainsi que la connexion idéale, tout cela dans un but d'optimiser les performances et le coût. Finalement, la recherche de ce mémoire a permis d'avancer les connaissances dans le domaine des structures composites bois-béton ce qu'il peut grandement aider à l'élaboration d'une norme pour ce type de structure au Canada et ainsi augmenter la part du marché du bois dans le secteur de construction non résidentiel. Cette augmentation de la part du marché permettra de réduire la quantité de gaz à effet de serre émis dans l'atmosphère par le secteur de la construction ce qui est un des buts du CIRCERB.

# Bibliographie

- [1] 1991. EN 26891, Timber structure – Joints made with mechanical fasteners – General principles for the determination of strength and deformation characteristics, European Committee for Standardization CEN.
- [2] 2004. Eurocode 5 : Design of timber structures - Part 1-1 : General - Common rules and rules for buildings, European committee for standardization, EN 1995-1-1.
- [3] 2004. CSA A23.2-04, Methods of test and standard practices for concrete.
- [4] 2004. ASTM E8-04, Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials, ASTM International, West Conshohocken, PA.
- [5] 2008. CSA A23.3-04, Concrete Design Handbook, Third edition, Canadian Standards Association.
- [6] The concrete conundrum. Chemistry world, March 2008. construction, 62 - 66.
- [7] 2014. CSA O86-14, Engineering design in wood, Canadian Standards Association.
- [8] 2015. Technical note S01, Limite states design (CAN), Nordic, Wood Structures.
- [9] Software dductiletcs®. <http://www.gci.ulaval.ca/DDuctileTCS>, 2015. Accessed : 2015-03-01.
- [10] C. ADAM, R. HEUER et A. JESCHKO : Flexural vibrations of elastic composite beams with interlayer slip. *Acta Mechanica*, 125:17–30, 1997.
- [11] Christoph ADAM et Franz ZIEGLER : Forced flexural vibrations of elastic-plastic composite beams with thick layers. *Composites Part B : Engineering*, 28(3):201–213, 1997.
- [12] AFGC : *Bétons fibrés à ultra-hautes performances*. Association Française en Génie Civil, Jan. 2012.

- [13] B. AHMADI et M. SAKA : Behavior of composite timber-concrete floors. *Journal of Structural Engineering*, 119(11):3111–3130, 1993.
- [14] Vincent BARBIER, Jacques BERTHELLEMY, Dominique CALVI, Jean-Louis CHAZELAS, Pierre CORFDIR, Stella JELDEN, Jérôme LAPLAN et Robert LEROY : Guide technique, les ponts en bois, comment assurer leur durabilité. Rapport technique, Service d'études techniques des routes et autoroutes (Sétra), 2006.
- [15] Anne BARY-LANGER et Jean-Paul NEBOUT : *Le chêne pédonculé et sessile en France et en Belgique*. 1993.
- [16] Leander BATHON et Peggi CLOUSTON : Experimental and numerical results on semi prestressed wood-concrete composite floor systems for long span applications. *In Proceedings of the 8th world conference on timber engineering*, volume 1, pages 339–44, 2004.
- [17] Tobias BATHON et Leander BATHON : Wood-concrete-composite systems, août 21 2012. URL <http://www.google.com.ar/patents/US8245470>. US Patent 8,245,470.
- [18] R. BETTEX : Plancher mixte bois-beton, novembre 23 1994. URL <https://www.google.com/patents/EP0625233A1?cl=fr>. EP Patent App. EP19,930,924,484.
- [19] H. BLAß et M. SCHLAGER : Trag- und verformungsverhalten von holz-beton-verbundkonstruktionen. teil 1. *Bauen mit Holz*, 5:395–399, 1996.
- [20] Étienne BOULAY : Ressources et industries forestières, portrait statistique. Rapport technique, Ministère des forêts, de la faune et des parcs, Direction du développement de l'industrie des produits du bois, Québec, Québec, Canada, 2015.
- [21] Andy BUCHANAN, Bruce DEAM, Massimo FRAGIACOMO, Stefano PAMPANIN et Alessandro PALERMO : Multi-storey prestressed timber buildings in new zealand. *Structural Engineering International*, 18(2):166–173, 2008.
- [22] David S. BURNETT : *Finite element analysis from concepts to applications*. Addison-Wesley, 1987.
- [23] Eliene Pires CARVALHO et Edgar V. MANTILLA CARRASCO : Influence of test specimen on experimental characterization of timber–concrete composite joints. *Construction and Building Materials*, 24(8):1313 – 1322, 2010.

- [24] A. CECCOTTI : *Timber-concrete composite structures*, chapitre E13, page E13/3. Timber Engineering, step 2, The Netherlands, Centrum Hout, 1st édition, 1995.
- [25] Ario CECCOTTI : Composite concrete-timber structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 4(3):264–275, 2002.
- [26] CECOBOIS : L'avantage environnemental des systèmes de construction en bois dans le contexte des changements climatiques. Centre d'expertise sur la construction commerciale en bois.
- [27] Gilles CHANVILLARD et Stephane RIGAUD : Complete characterization of tensile properties of ductal® uhpfrc according to the french recommendations. *In Proceedings of the 4th International RILEM workshop High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites*, pages 21–34, 2003.
- [28] Y. H. CHUI et I. SMITH : Influence of rotatory inertia, shear deformation and support condition on natural frequencies of wooden beams. *Wood science and technology*, 24 (3):233 – 245, 1990.
- [29] Peggi CLOUSTON, Leander A BATHON et Alexander SCHREYER : Shear and bending performance of a novel wood–concrete composite system. *Journal of Structural Engineering*, 131(9):1404–1412, 2005.
- [30] Peggi CLOUSTON, Scott CIVJAN et Leander BATHON : Experimental behavior of a continuous metal connector for a wood-concrete composite system. *Forest Products Journal*, 54(6):76 – 84, 2004.
- [31] Alain CLOUTIER : *Anatomie et structure du bois. Note de cours*, chapitre 1. Département des sciences du bois et de la forêt, Université Laval, 2005.
- [32] M. P. COLLINS et A. PORASZ : Shear design for high-strength concrete. *CEB Bulletin d'information*, (193):77–83, December 1989.
- [33] Rilem TC111 CST : Behaviour of timber-concrete composite load-bearing structures. *In Proceedings of ACMAR-Ravenna International Symposium, Dept. of Civil Engineering, University of Florence, Italy*, 1992.
- [34] Samuel CUERRIER AUCLAIR, Luca SORELLI et Alexander SALENIKOVICH : Simplified nonlinear model for timber-concrete composite beams. 2015.
- [35] Radovan CVETKOVIĆ et STOJIC : Design methods of a timber-concrete t-cross-section. *Architecture and Civil Engineering*, 2(5):329 – 338, 2003.

- [36] Georges DEPERRAZ : Poutre mixte bois-béton pour la construction et l’ouvrage d’art, juin 30 1998. URL <http://www.orbit.com/RenderStaticFirstPage?XPN=KH9wmC7j0pjdGqGyRhNS9XfDUqlXTJ5uwQdFuycu4uk=>. Brevet d’invention FR2780427, Institut national de la propriété industrielle.
- [37] Alfredo Manuel Pereira Geraldias DIAS : *Mechanical behaviour of timber-concrete joints*. TU Delft, Delft University of Technology, 2005.
- [38] Alfredo MPG DIAS et Luís FC JORGE : The effect of ductile connectors on the behaviour of timber-concrete composite beams. *Engineering Structures*, 33(11):3033–3042, 2011.
- [39] Ciro FAELLA, Enzo MARTINELLI et Emidio NIGRO : Steel and concrete composite beams with flexible shear connection : “exact” analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Computers & Structures*, 80(11):1001 – 1009, 2002.
- [40] M FRAGIACOMO : A finite element model for long-term analysis of timber-concrete composite beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 20(2):173–189, 2005.
- [41] Andrea FRANGI et Mario FONTANA : Elasto-plastic model for timber-concrete composite beams with ductile connection. *Structural Engineering International*, 13(1):47–57, 2003.
- [42] Natalino GATTECO : Experimental study on different dowel techniques for shear transfer in wood-concrete composite beams. *In Creative Systems in Structural and Construction Engineering*, pages 487–492, Honolulu, Hawaii, USA, Jan, 2001. First Int. Structural Engineering and Construction Conference ISEC 01.
- [43] P. GELFI et E. GIURIANI : Influence of slab-beam on the deflection of composite beams. *International Journal fo Restoriation of Buildings and Monuments*, 9(5):475 – 490, 2003.
- [44] Piero GELFI, Ezio GIURIANI et Alessandra MARINI : Stud shear connection design for composite concrete slab and wood beams. *Journal of Structural Engineering*, 128 (12):1544 – 1550, 2002.
- [45] Piero GELFI et Ezio GUIRIANI : Behaviour of stud connectors in wood-concrete composite beams. *Structural studies, Repair and maintenance of historical buildings VI : Proceedings of the sixth international conference (Stremah 99)*, pages 565 – 578, 1999.



- [46] Ulf Arne GIRHAMMAR et Vijaya KA GOPU : Composite beam-columns with interlayer slip—exact analysis. *Journal of Structural Engineering*, 119(4):1265–1282, 1993.
- [47] Ulf Arne GIRHAMMAR et Dan H. PAN : Exact static analysis of partially composite beams and beam-columns. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(2):239 – 255, 2007.
- [48] Ulf Arne GIRHAMMAR, Dan H. PAN et Anders GUSTAFSSON : Exact dynamic analysis of composite beams with partial interaction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51(8):565 – 582, 2009.
- [49] Société TiCOMTEC GMBH : Avis technique 3/12-719, plancher miste bois-béton composite wood-concrete floor, hbv. Rapport technique, Société Dorcas System, 2012.
- [50] J. R. GOODMAN : *Layered wood systems with interlayer slip*. Thèse de doctorat, University of California, 1967.
- [51] H. GRANHOLM : Composite beams and columns with particular regard to nailed timber structures. *Technical Report 88. Sweden : Chalmers Univeristy of Technology ;*, pages 214 –, 1949.
- [52] Susanna GRECO et Dennis D BALDOCCHI : Seasonal variations of co2 and water vapour exchange rates over a temperate deciduous forest. *Global Change Biology*, 2 (3):183–197, 1996.
- [53] M. J. GRIFFIN : Handbook of human vibration. Rapport technique, London : Academic Press, 1990.
- [54] A. GRIMAUD : Floor with co-operation between wood and concrete, juin 27 1989. URL <http://www.google.com.ar/patents/US4841703>. US Patent 4,841,703.
- [55] Thomas GUENET : Un modèle numérique pour structures en béton fibré à ultra-hautes performances : prise en compte de l’orientation des fibres par une approche d’endommagement micromécanique. Mémoire de D.E.A., Université Laval, 2012.
- [56] Richard M GUTKOWSKI, Kevin BROWN, Abdalla SHIGIDI et Julius NATTERER : Investigation of notched composite wood-concrete connections. *Journal of Structural Engineering*, 130(10):1553–1561, 2004.

- [57] Katrin HABEL : *Structural behaviour of elements combining ultra-high performance fibre reinforced concretes (UHPFRC) and reinforced concrete*. Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- [58] Rudolf HEUER, Christoph ADAM et Franz ZIEGLER : Sandwich panels with interlayer slip subjected to thermal loads. *Journal of thermal stresses*, 26(11-12):1185–1192, 2003.
- [59] Steven H. KOSMATKA, Beatrix KERKHOFF, William C. PANARESE, Normand F. MACLEOD et Richard J. MCGRATH : *Dosage et Contrôle des Mélanges de Béton*. Association Canadienne du Ciment, Ottawa, Ontario, Canada, 2003.
- [60] Edward W KUENZI *et al.* : Theoretical design of a nailed or bolted joint under lateral load. 1960.
- [61] Ulrike KUHLMANN et J SCHÄNZLIN : Grooves as shear connectors for timber-concrete composite decks. *In International RILEM Symposium on Joints in Timber Structures. Stuttgart, Germany*, pages 283–290, 2001.
- [62] Petr KUKLÍK, Pavel NECHANICKÝ et Anna KUKLÍKOVÁ : Development of prefabricated timber-concrete composite floors. volume 1, pages 519 – 526, Auckland, New Zealand, July 2012.
- [63] Hyo-Gyoung KWAK et Sun-Pil KIM : Nonlinear analysis of {RC} beams based on moment–curvature relation. *Computers & Structures*, 80(7–8):615 – 628, 2002.
- [64] E LUKASZEWSKA, H JOHNSON et M FRAGIACOMO : Performance of connections for prefabricated timber–concrete composite floors. *Materials and Structures*, 41(9): 1533–1550, 2008.
- [65] Elzbieta LUKASZEWSKA : *Development of prefabricated timber-concrete composite floors*. Thèse de doctorat, Luleå University of Technology, 2009.
- [66] M. MARTINOTTA : System for the construction of mixed wood and concrete floors, and the components required to join the two materials, octobre 5 2005. URL <http://www.google.com/patents/EP1582644A1?cl=en>. EP Patent App. EP20,050,004,976.
- [67] NT MASCIA et J SORIANO : Benefits of timber-concrete composite action in rural bridges. *Materials and structures*, 37(2):122–128, 2004.

- [68] Jacky MAZARS : A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 25(5):729–737, 1986.
- [69] K MÖHLER : On the load carrying behavior of beams and columns of compound sections with flexible connections, 1956.
- [70] Dominique MOLARD, Wolfgang WINTER et Lucien FORGE : Élément de paroi composite bois-béton, janvier 27 1998. Brevet d’invention FR2774112, Institut national de la propriété industrielle.
- [71] Martin S MUNGWA, Jean-François JULLIEN, Amos FOUJDET et Guy HENTGES : Experimental study of a composite wood–concrete beam with the insa–hilti new flexible shear connector. *Construction and Building Materials*, 13(7):371–382, 1999.
- [72] Julius NATTERER et Michael HOEFT : Zum tragverhalten von holz-beton-verbundkonstruktionen. Rapport technique, 1987.
- [73] Julius NATTERER, Jean Luc SANDOZ et Martial REY : *Construction en bois, Matériau, technologie et dimensionnement*, volume 13. 2004. Traité de Génie Civil de l’école polytechnique fédérale de Lausanne.
- [74] P. NAVI et F. HEGER : *Comportement thermo-hydrromécanique du bois : applications technologiques et dans les structures*. Matériaux (Lausanne). Presses polytechniques et universitaires romandes, 2005. ISBN 9782880746209.
- [75] Václav NEŽERKA : Timber-concrete composite structures. Mémoire de D.E.A., Czech Technical University in Prague Faculty of Civil Engineering, 2010.
- [76] João H. NEGRÃO, Francisco M. OLIVEIRA et Catarina L. OLIVEIRA : Investigation on timber-concrete glued composites. volume 1, pages 327 – 334, Portland, OR, United states, 2006.
- [77] N. M. NEWMARK, C. P. SIESS et I. M. VIEST : Test and analysis of composite beams incomplete interaction. *Proceedings of Society for Experimental Stress and Analysis*, 9(1):75 – 92, 1951.
- [78] Quang-Huy NGUYEN, Mohammed HJIAJ et Philippe Le GROGNEC : Analytical approach for free vibration analysis of two-layer timoshenko beams with interlayer slip. *Journal of Sound and Vibration*, 331(12):2949 – 2961, 2012.
- [79] Patrick PAULTRE : *Structure en béton armé, Analyse et dimensionnement*. Presses internationales polytechnique, 2011.

- [80] V. H. PERRY et P. J. SEIBERT : The use of uhpfr (ductal<sup>®</sup>) for bridges in north america : The technology, applications and challenges facing commercialization. *In Second International Symposium on Ultra High Performance Concrete*, pages 815–822, University of Kassel, Germany, March 2008.
- [81] Hoai Son PHAM : *Optimisation et comportement en fatigue de la connexion bois-BFUP pour de nouveaux ponts mixtes*. Thèse de doctorat, École National des Ponts et Chaussées, Nov 2007.
- [82] Maurizio PIAZZA et Marco BALLERINI : Experimental and numerical results on timber-concrete composite floors with different connection systems. volume 1, Whistler Resort, British Columbia, Canada, 2000.
- [83] PF. PLESHKOV : Theoretical studies of composite wood structures. Moscow, 1952.
- [84] Sandor POPOVICS : A numerical approach to the complete stress-strain curve of concrete. *Cement and Concrete Research*, 3(5):583 – 599, 1973.
- [85] Hentges Guy RAYMOND : Connecteur pour plancher mixte, plancher incorporant un tel connecteur et procédé de réalisation, décembre 19 1995. Brevet d’invention FR2742459, Institut national de la propriété industrielle.
- [86] J. N. REDDY : *An introduction to nonlinear finite element analysis*. Oxford University Press, 2004.
- [87] J. N. REDDY : *An introduction to the finite element method*. McGraw Hill, third édition, 2006.
- [88] Hannah REID, Saleemul HUQ, Aino INKINEN, James MACGREGOR, Duncan MACQUEEN, James MAYERS, Laurel MURRAY et Richard TIPPER : Using wood products to mitigate climate change : a review of evidence and key issues for sustainable development. Rapport technique, International Institute for Environment and Development, London, United Kingdom, 2004.
- [89] M Reza SALARI, Enrico SPACONE, P Benson SHING et Dan M FRANGOPOL : Non-linear analysis of composite beams with deformable shear connectors. *Journal of Structural Engineering*, 124(10):1148–1158, 1998.
- [90] Jason Angeles SALONGA : *Innovative systems for arch bridges using ultra high-performance fibre-reinforced concrete*. Thèse de doctorat, University of Toronto, 2010.

- [91] O. SCHAUB : Wood reenforced concrete structural member, février 10 1931. URL <http://www.google.com/patents/US1792040>. US Patent 1,792,040.
- [92] Martin SCHÄFERS et Werner SEIM : Investigation on bonding between timber and ultra-high performance concrete (uhpc). *Construction and Building Materials*, 25(7): 3078 – 3088, 2011.
- [93] Ian SMITH et Andrea FRANGI : Use of timber in tall multi-storey buildings. Zurich, Switzerland, 2014. International Association for Bridge and Structural Engineering, IABSE.
- [94] Suzanne Weaver SMITH et Christopher A BEATTIE : Secant-method adjustment for structural models. *AIAA journal*, 29(1):119–126, 1991.
- [95] Eric STEINBERG, Ricky SELLE et Thorsten FAUST : Connectors for timber-lightweight concrete composite structures. *Journal of structural engineering*, 129 (11):1538–1545, 2003.
- [96] F. STÜSSI : Zusammengesetzte vollwandträger. *International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 8:249 – 269, 1947.
- [97] Sven THELANDERSSON et Hans J LARSEN : *Timber engineering*. John Wiley & Sons, 2003.
- [98] K. TIMMERMANN et U.A. MEIERHOFER : *Holz/Beton-Verbundkonstruktionen : Untersuchungen und Entwicklungen zum mechanischen Verbund von Holz und Beton*. Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe. EMPA, Abt. 115, 1993. URL <https://books.google.ca/books?id=vJHcPQAACAAJ>.
- [99] J. TOMMOLA et A. JUTILA : Analysis of wood-concrete composite girder with discrete shear connector. In *IABSE Conference on Innovative Wooden Structures and Bridges*, pages 489–494, Finland, Aug. 2001.
- [100] J. TOMMOLA, L. SALOKANGAS et A. JUTILA : Tests on shear connector. Rapport technique, Helsinki University of Technology-Laboratory of bridge Engineering, 2005.
- [101] Mario Van der LINDEN : Timber-concrete composite beams. *Heron, Delft University of Technology*, 44(3):215–239, 1999.

- [102] F.J. VECCHIO : Disturbed stress field model for reinforced concrete : implementation. *Journal of structural engineering New York, N.Y.*, 127(1):12 – 20, 2001.
- [103] M.J. WELCH : Dowel fastener and joints including same, octobre 2 1984. URL <http://www.google.tl/patents/US4474493>. US Patent 4,474,493.
- [104] Yu-Fei WU, Rongqiao XU et Weiqiu CHEN : Free vibrations of the partial-interaction composite members with axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4–5):1074 – 1093, 2007.
- [105] Rongqiao XU et Yufei WU : Static, dynamic, and buckling analysis of partial interaction composite members using timoshenko's beam theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(10):1139 – 55, 2007.
- [106] David YEOH, Massimo FRAGIACOMO, Mary DE FRANCESCHI et Koh Heng BOON : State of the art on timber-concrete composite structures : Literature review. *Journal of Structural Engineering*, 2010.
- [107] Chao ZHANG : Analysis of the timber-concrete composite systems with ductile connection. Mémoire de D.E.A., University of Toronto, 2013.
- [108] Chao ZHANG et Paul GAUVREAU : Timber-concrete composite systems with ductile connections. *Journal of Structural Engineering*, page 04014179, 2014.