

MARC-ANDRÉ DUMAS

Application du calcul d'incidence à la fusion de données

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie électrique
pour l'obtention du grade de Maître ès Sciences (M.Sc)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2006

Aucun ensemble de principe n'est
suffisamment riche pour couvrir de
façon complète les comportements qu'on
aimerait qualifier de logique

Daniel Kayser

Résumé

Le calcul d'incidence généralisé est une technique hybride symbolique-numérique qui présente un potentiel intéressant pour la fusion de données, notamment par sa correspondance possible avec la théorie de l'évidence.

Ce mémoire présente une série de modifications au calcul d'incidence généralisé afin qu'il puisse être utilisé pour éliminer le problème de bouclage d'information, un problème important de la fusion de données qui fait que les données corrélées prennent une importance plus grande. Ces modifications permettent aussi de représenter divers types de combinaisons à l'aide de l'approche des univers possibles. Il est notamment possible d'effectuer des combinaisons de Yager associatives et des parallèles peuvent être faits avec la théorie de Dezert et Smarandache.

Abstract

Generalized Incidence Calculus is a hybrid symbolic-numeric approach to data fusion that presents many interesting characteristics, in particular a correspondence with the Theory of Evidence.

This master's thesis presents modifications to Generalized Incidence Calculus for its application to eliminate the Data Looping problem which makes combination of correlated data take more importance. Those modifications also allow the representation of alternative combinations of the Theory of Evidence by using a possible worlds approach. In particular, it is possible to associatively combine data using the Yager combination and parallels can be made with the Dezert-Smarandache Theory.

Remerciements

Je voudrais remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à mes travaux.

Je remercie notamment mon directeur de recherche, le professeur Dominic Grenier qui, en plus de m'avoir donné l'occasion de faire ce travail, m'a grandement aidé à en identifier les éléments les plus intéressants et significatifs de manière à ce que je puisse bien les développer. De plus, son travail de révision de ce mémoire a significativement rehaussé la qualité de celui-ci.

Ma codirectrice de recherche, Anne-Laure Jousset, mérite aussi mes remerciements pour son support et pour ses commentaires constructifs. J'aimerais aussi remercier Éloi Bossé, Pierre Valin et Éric Lefebvre pour leur intérêt dans mes travaux ainsi que pour leurs suggestions et encouragements qui m'ont permis de continuer ce travail avec enthousiasme.

Mes camarades Mihai Cristian Florea et Marie-Line Gagnon ont permis l'écriture de l'appendice A. Le premier en m'ayant initié à certaines théories dont il est mentionné et la seconde pour m'avoir poussé à bien définir les concepts qui y sont présentés. Lukasz Czuban mérite également mes remerciements pour ses conseils et pour m'avoir incité à terminer ma rédaction le plus rapidement possible.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	iii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Table des matières	v
Liste des tableaux	viii
Liste des figures	x
1 Introduction	1
1.1 La fusion de données	2
1.2 Fusion de données pour identification	3
1.3 Contexte de l'étude	4
1.4 Objectif initial du travail	4
1.5 Objectifs réalisés	4
1.6 Structure du mémoire	5
2 Raisonnements numériques et symboliques	7
2.1 Propriétés recherchées	8
2.1.1 Non-monotonie ou défaisabilité	8
2.1.2 Capacité à gérer l'incertitude	9
2.1.3 Traçabilité	9
2.1.4 Associativité	10
2.1.5 Gestion de l'indépendance de l'information	10
2.2 Approches numériques	12
2.3 Approches symboliques	13
2.4 Approches hybrides	14
2.5 Quelques exemples de raisonnements	15

2.5.1	Logique propositionnelle	15
2.5.2	Raisonnement à base d'arguments défaisables	19
2.6	Discussion	20
3	Théorie de l'évidence	21
3.1	Concepts de base	22
3.1.1	Représentation de l'information	22
3.1.2	Combinaison de Dempster	26
3.2	Résolution de conflit	27
3.3	Propriétés	28
3.4	Ensembles vs propositions logiques	29
3.5	Discussion	30
4	Calcul d'incidence	31
4.1	Le calcul d'incidence	32
4.1.1	Définitions	32
4.1.2	Inférences	38
4.1.3	Limites de la théorie	38
4.2	Le calcul d'incidence généralisé	39
4.2.1	Définitions	40
4.2.2	Combinaison de l'information	43
4.3	Parallèle avec la théorie de l'évidence	45
4.4	Limitations du calcul d'incidence généralisé	46
4.5	Discussion	50
5	Calcul d'incidence généralisé modifié	51
5.1	Résumé des différences	52
5.1.1	Utilisation d'ensembles	52
5.1.2	Univers en conflit	52
5.1.3	Modèles d'application	52
5.2	Définitions	53
5.2.1	Notions de base	53
5.2.2	Modèle d'incidence	55
5.2.3	Manipulation des modèles d'incidence	56
5.2.4	Combinaison de l'information	57
5.2.5	Modèle d'application	60
5.3	Comparaison avec le calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu	60
5.3.1	Recombinaison des sources	61
5.3.2	Équivalence dans les autres cas	66
5.3.3	Traitement symbolique	69

5.4	Modélisation de l'information	70
5.4.1	Informations imparfaites	70
5.4.2	Informations heuristiques	73
5.5	Inférences	74
5.6	Discussion	76
6	Bouclage d'information	77
6.1	Introduction	78
6.2	Exemple d'une situation de bouclage d'information	79
6.3	Combinaison de Dempster	81
6.3.1	Combinaison de référence	81
6.3.2	Combinaison en bouclage	82
6.4	Combinaison utilisant le calcul d'incidence	85
6.4.1	Transformation des informations en MI	85
6.4.2	Création de MI_{F_1}	86
6.4.3	Création de MI_{F_2}	89
6.4.4	Création de $MI_{F_2'}$	92
6.4.5	Création de $MI_{F_1'}$	95
6.4.6	Extraction des résultats numériques	99
6.5	Discussion	101
7	Conclusion	102
A	Combinaisons et modèles alternatifs	105
A.1	Yager	106
A.1.1	Notions de base	106
A.1.2	Modification au CIGM	107
A.2	Dezert-Smarandache	111
A.2.1	La combinaison DSm classique	112
A.2.2	Équivalence du DSm classique et du calcul d'incidence	114
A.2.3	La combinaison DSm hybride	114
A.2.4	Modification au calcul d'incidence pour imiter la DSm hybride	119
A.2.5	Différence	126
A.3	Discussion	129
	Bibliographie	130
	Index	134

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Table de vérité des opérateurs logiques	16
2.2	Principales règles d'inférences de la logique propositionnelle	17
2.3	Principales règles d'inférence dérivées	18
3.1	Masse des diagnostics des deux médecins A et B	29
4.1	Les probabilités des propositions de \mathcal{A} de l'exemple 4.7	42
4.2	Les probabilités des propositions de \mathcal{A} de l'exemple 4.8	42
4.3	Combinaison des univers pour créer F1	49
4.4	Probabilités des univers F1 après normalisation	49
4.5	Combinaison des univers de F2	49
4.6	Combinaison des univers de F2, avec la normalisation prévue par le calcul d'incidence généralisé	50
4.7	Combinaison des univers de F2	50
5.1	Contexte \mathcal{W}_c de l'exemple 5.2	56
5.2	L'intersection des axiomes de MI_{S1} et MI_{S2}	61
5.3	Probabilité des univers combinés avec les GICT sans redistribution du conflit .	68
5.4	Probabilité des univers combinés avec les GICT avec redistribution du conflit .	68
5.5	Probabilité des univers après la deuxième combinaison, sans redistribution du conflit	68
5.6	Probabilité des univers après la deuxième combinaison, avec redistribution du conflit	68
6.1	Les cibles vues par chacune des sources.	80
6.2	Les données une fois modélisées sous forme de structures D-S.	81
6.3	Résultats de la combinaison des sources S1 et S2.	82
6.4	Résultats de la combinaison de la source F1 et S3.	82
6.5	Masses, croyances et plausibilités des propositions après normalisation.	82
6.6	Combinaisons de S2 et S3	83
6.7	Masses normalisées de F2	83

6.8	Combinaisons de F1 et de F2 pour donner F2'	83
6.9	Masses des hypothèses de F2' après normalisation de Dempster	84
6.10	Combinaisons de F1 et de F2' pour donner F1'	84
6.11	Masses des hypothèses de F1' après normalisation de Dempster	84
6.12	L'intersection des axiomes de MI_{S_1} et MI_{S_2}	88
6.13	L'intersection des axiomes de MI_{S_2} et MI_{S_3}	90
6.14	L'intersection des axiomes de MI_{F_1} et MI_{F_2}	94
6.15	L'intersection des axiomes de MI_{F_1} et $MI_{F_2'}$	97
6.16	Croyances et plausibilités des axiomes du $MI_{F_1'}$	101
A.1	Masse des propositions selon les sources S1, S2 et S3 de l'exemple A.1.	107
A.2	Résultats de la combinaison de Yager avec différents ordres de combinaison pour l'exemple A.1.	108
A.3	Masse des propositions selon les sources S1 et S2 de l'exemple A.3	113
A.4	Combinaison en utilisant le DSm libre de l'exemple A.3.	113
A.5	Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DSm libre de l'exemple A.3.	113
A.6	Probabilité des nouveaux ensembles d'univers créés de l'exemple A.4.	114
A.7	Nouvelles propositions du MI_3 de l'exemple A.4.	115
A.8	Incidence des propositions du MI_3 de l'exemple A.4.	115
A.9	Calcul des masses en utilisant la DSm hybride de l'exemple A.5.	117
A.10	Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DSm hybride de l'exemple A.5.	117
A.11	Calcul des masses en utilisant la DSm hybride de l'exemple A.6.	118
A.12	Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DSm hybride de l'exemple A.6.	119
A.13	Probabilités des nouveaux ensembles d'univers créés de l'exemple A.7.	121
A.14	Nouvelles propositions du MI_3 de l'exemple A.7.	121
A.15	Incidence $i_3(\phi)$ des propositions $\phi \in A_3$ de l'exemple A.7.	122
A.16	Croyances et plausibilités des propositions de l'exemple A.7.	122
A.17	Incidence des axiomes du MI_1 après la création d'un contexte commun de l'exemple A.8.	123
A.18	Incidence des axiomes du MI_2 après la création d'un contexte commun de l'exemple A.8.	124
A.19	Nouveaux axiomes de MI_3 de l'exemple A.8.	125
A.20	Incidence des nouveaux axiomes de MI_3 de l'exemple A.8, après application de l'algorithme B.	125
A.21	Probabilités des nouveaux ensembles d'univers créés, \mathcal{W}_3 de l'exemple A.8.	126
A.22	Incidences inférieures des axiomes, ainsi que leurs croyances et plausibilités	127
A.23	Croyances et plausibilités du résultat de l'exemple A.9	128

TABLE DES FIGURES

2.1	Combinaisons de sources indépendantes fournissant des informations semi-dépendantes	11
2.2	Combinaisons de sources dépendantes fournissant des informations dépendantes	11
2.3	Exemple d'un raisonnement symbolique utile à l'identification	14
2.4	Attaque par la contradiction de v et $\neg v$	19
2.5	Attaque de v par la contradiction d'une de ses prémisses	19
2.6	La conclusion $\neg r$ contredit ses propres prémisses	20
4.1	Les quatre univers de l'ensemble \mathcal{W} utilisé dans l'exemple 4.2	33
4.2	Couche du calcul de la probabilité d'une proposition selon chacune des approches	35
4.3	F1 devrait être identique à F2.	49
5.1	Partition de l'espace \mathcal{S} pour représenter l'exemple 5.1	54
5.2	Le produit des deux partitions donne naissance à un nouveau partitionnement des univers	55
5.3	Combinaisons de deux contextes en a) afin de créer un nouveau contexte en b)	59
5.4	F1 devrait être identique à F2.	61
5.5	Relations entre les opérations numériques et symboliques dans le calcul d'incidence	69
6.1	L'échange d'information entre S4 et S5 peut causer un bouclage	78
6.2	L'échange d'information entre S4 et S5 se fait à l'aide d'un intermédiaire, ce qui est plus difficilement détectable	78
6.3	L'information de S2 se fait renforcer en S4.	79
6.4	Bouclage d'information entre F1 et F2.	80
6.5	Deux premières itérations du BI de la Figure 6.4.	80
6.6	Les données sont réorganisées pour éviter les conditions de BI.	81
6.7	Flot des données transformées en modèles d'incidence.	85
A.1	Non-associativité d'une combinaison.	107

A.2 Quasi-associativité nécessitant une combinaison simultanée de toutes les informations!	107
--	-----

Introduction

Résumé : La fusion de données pour identification est un processus fait constamment par l'humain de façon instinctive qui n'est pas facile à émuler de façon artificielle. Certaines difficultés rencontrées sont énumérées et les objectifs du travail de maîtrise sont détaillés.

Sommaire

1.1	La fusion de données	2
1.2	Fusion de données pour identification	3
1.3	Contexte de l'étude	4
1.4	Objectif initial du travail	4
1.5	Objectifs réalisés	4
1.6	Structure du mémoire	5

1.1 La fusion de données

Le terme *fusion de données* désigne l'ensemble des techniques utilisées pour l'agrégation des informations provenant de plusieurs sources. Le but recherché en combinant ces informations est d'obtenir une meilleure connaissance d'un phénomène que celle fournie par chacune des sources. Il s'agit donc d'un exemple où l'ensemble est plus grand que la somme des parties.

La fusion de données a d'abord été développée dans le domaine militaire, et c'est toujours là qu'elle est la plus utilisée. D'autres applications commencent à émerger, notamment en traitement d'image (imagerie médicale, télédétection) et en aide à la décision (diagnostics).

Le processus de fusion de données est complexe dans l'état actuel de nos connaissances et des outils informatiques disponibles, mais il ne l'est pas du tout pour l'humain. En effet, à chaque instant de façon instinctive, chaque personne effectue de la fusion de données. Elle a ainsi la capacité de gérer des situations très complexes de façon tout à fait inconsciente. Chaque individu a accès à cinq sources d'informations, ses cinq sens.

Prenons par exemple la situation où une personne traverse une rue achalandée. Elle jettera un coup d'œil à la rue pour voir si un véhicule ne vient pas à sa rencontre. Pour se faire, une fusion des données de l'image retournée par les deux yeux est effectuée afin d'amasser de l'information sur la position, la vitesse et la direction des véhicules (*pistage*). Les oreilles feront un travail semblable en évaluant le bruit des moteurs pour déterminer s'ils accélèrent et de quelles directions ils proviennent. Les deux sources pourront être ensuite combinées (*fusion*) pour avoir une meilleure idée de la situation. De plus, les oreilles pourront ajouter au processus de fusion les bruits de klaxon éventuels (*détection*). Finalement, l'individu décidera s'il peut traverser ou non la rue (*décision*).

Accessoirement, l'individu pourrait combiner les caractéristiques visuelles et sonores d'un des véhicules et d'en déterminer sa marque ou son modèle. L'objectif de la fusion devient alors l'*identification*, le domaine qui nous intéresse ici.

La fusion de données est compliquée par différents problèmes que l'on rencontre dans les situations réelles : (D'après [Desodt-Lebrun, 1996])

- **Tenir compte de l'imprécision et de l'incertitude** : Rarement une source d'information ne peut donner précisément une information de type : « Il s'agit d'une Toyota Tercel produite en 1995 et dont le numéro de série est le FD 217 2171 2177 172 ». Dans presque toutes les situations, l'information est vague et incomplète, ce qui forme l'*imprécision*. Ce qui se traduirait ici par « Il s'agit d'une petite voiture d'une dizaine d'années ». De plus, l'information pourra être incertaine puisque toutes les sources ne

sont pas infaillibles et peuvent se tromper. On parlera alors d'incertitude, ce qui se traduirait par « Je crois qu'il s'agit d'une Toyota Tercel 1995 ». Les deux aspects peuvent être conjoints, ce qui donne quelque chose comme « Je crois qu'il s'agit d'une petite voiture d'une dizaine d'années ».

- **Diversité des types d'informations** : Une très grande quantité de capteurs peut être utilisée, ce qui fait que l'on doit gérer un très grand volume d'informations. De plus, ces capteurs ne sont pas tous du même type et peuvent donner des types d'informations complètement différents. Par exemple, un capteur peut retourner de l'information sur la taille d'un objet, un autre sur sa vitesse et un troisième sur sa température. Ces trois informations, même si elles sont complètement différentes, peuvent être utiles et le système doit en tenir compte.
- **Aspects temporels** : D'importantes quantités d'informations peuvent être traitées, mais ces informations ne sont pas nécessairement cadencées. Le système doit alors gérer des entrées asynchrones qui peuvent arriver à tout moment et le système doit pouvoir les intégrer et réviser ses résultats. La situation observée pouvant être changeante, certaines informations plus vieilles que les autres peuvent être appelées à expirer. Par exemple, un témoignage récent disant qu'il y a un orage à l'extérieur pourra remplacer un autre de la même personne datant de quelques heures disant que c'est ensoleillé.

1.2 Fusion de données pour identification

La fusion de données pour identification est un processus permettant l'intégration de sources de données hétérogènes avec pour but de déterminer ce qui est observé, ou du moins, en tirer un certain nombre d'informations utiles. Les sources de données peuvent aussi bien être des capteurs dirigés vers l'objet observé, une base de données ou le témoignage d'un humain.

Le système a habituellement à sa disposition une base de données contenant l'ensemble des objets pouvant être observés ainsi que leurs caractéristiques. Une série de capteurs achemine au système les caractéristiques de ce qu'ils observent. Chacun de ceux-ci est habituellement spécialisé et donnera des informations sur un aspect de l'objet, comme « L'objet est long », « L'objet a une vitesse de 100km/h » ou « L'objet est à une altitude de 20m ».

1.3 Contexte de l'étude

L'étude présentée dans ce mémoire se situe dans le cadre général de la fusion de données. Selon le modèle classique du JDL [Steinberg et al., 1998], la fusion de données s'effectue selon une hiérarchie 5 niveaux (de 0 à 4) où les niveaux les plus bas (0 et 1) sont les plus proches des données (traitement de signal, poursuite, identification, association, etc.), alors que les niveaux plus élevés (2 à 4) impliquent une composante plus abstraite où la compréhension, le raisonnement, la projection des événements dans un futur proche, ont beaucoup plus d'importance. Alors que les techniques numériques traditionnelles telles que les probabilités, les fonctions de croyance, ou encore les ensembles flous, sont de bons outils pour représenter et combiner des informations incertaines et imprécises pour les bas niveaux de fusion, celles-ci manquent d'une sémantique claire démontrent certaines faiblesses pour les plus hauts niveaux de fusion. Les approches logiques quant à elles, de part leur sémantique claire sont plus appropriées pour les raisonnement, mais cependant peuvent s'avérer inadéquates lorsqu'il s'agit de traiter des informations quantitatives. Par conséquent, dans le but d'utiliser un cadre unifié pour la fusion de données, il paraît naturel de chercher à concilier les approches quantitatives (numériques) et qualitatives (logiques).

1.4 Objectif initial du travail

Initialement, ce travail de maîtrise avait pour but d'explorer les avenues possibles du raisonnement logique dans la fusion de données pour identification. Le raisonnement logique, ou symbolique, présente plusieurs caractéristiques intéressantes qui manquent aux approches numériques, couramment utilisées.

1.5 Objectifs réalisés

À la suite de recherche documentaire, notamment à la lecture de [Maupin et al., 2005], et de l'exploration de diverses techniques, il est apparu que le calcul d'incidence de Alan Bundy [Bundy, 1985], tel que généralisé par Weiru Liu [Liu et Bundy, 1992], avait beaucoup de potentiel.

Dans un contexte de capteurs distribués, où plusieurs noeuds de fusion existent, le bouclage d'information devient un problème incontournable. Parmi les outils de traitement de l'incertitude, le calcul d'incidence généralisé apparaît comme une alternative intéressante à la

théorie de l'évidence puisque cette approche hybride symbolique-numérique, en plus d'avoir la capacité de définir des fonctions de croyance au sens de Shafer, offre un plus vaste champ d'applications de la règle de combinaison. En effet, contrairement à la règle de Dempster, la règle de combinaison définie dans le calcul d'incidence autorise une certaine dépendance entre les informations. Nous nous sommes toutefois rendu compte que le calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu comporte des limitations qui en empêchent l'application dans tous les cas.

Ainsi, l'objectif principal du mémoire est devenu de faire les modifications nécessaires au calcul de l'incidence généralisé afin de le rendre compatible pour combiner des données sans le problème de bouclage de l'information.

Un certain nombre de modifications seront donc proposées afin d'améliorer le calcul d'incidence. Nous avons ensuite testé le calcul d'incidence tel que modifié pour vérifier sa capacité de traiter des données provenant de bouclage d'information et nous avons obtenu un résultat positif. Il s'avère donc que le calcul d'incidence peut être appliqué dans certaines situations où les techniques classiques ne peuvent fonctionner directement. Nous désignons ces situations comme étant des cas de *semi-dépendances*, par opposition aux situations où les informations sont strictement indépendantes et celles où on ne peut déterminer leur relation de dépendance.

Il a semblé ensuite que la modification apportée au calcul d'incidence ouvre la porte à d'autres applications.

Ainsi, l'objectif secondaire du mémoire a été de démontrer que des combinaisons autres que celle de Dempster, telle la combinaison de Yager, peuvent s'opérer à l'intérieur du calcul de l'incidence ; que certains parallèles existent entre le calcul d'incidence et la théorie de Dezert-Smarandache. [Smarandache et Dezert, 2004]

Au cours de ce travail, le calcul d'incidence et les modifications qui y ont été apportées ont été codées en langage Matlab, ce qui a aidé lors de la mise sur pied de la théorie et nous a permis d'évaluer la performance de cette approche par rapport aux approches purement numériques.

1.6 Structure du mémoire

Le chapitre 2 introduit rapidement les deux grandes approches que sont les raisonnements numériques et les raisonnements symboliques en donnant leurs principales caractéristiques.

Le chapitre 3 introduit ensuite la théorie de l'évidence, une des techniques prédominantes actuelles dans la fusion de données pour identification.

On entre dans le cœur du sujet dans le chapitre 4 avec l'introduction du calcul d'incidence de Bundy et des modifications a apportées par Weiru Liu [Liu et Bundy, 1992]. Ce chapitre se termine avec la démonstration que le calcul d'incidence généralisé n'est pas complet et qu'il nécessite des améliorations. Nous présentons nos améliorations et nous montrons comment le calcul d'incidence généralisé tel que modifié peut être utile à la fusion de données pour identification au chapitre 5. Le chapitre 6 quant à lui contient un exemple complet d'une application du calcul d'incidence modifié au problème de bouclage d'information.

Nous montrons dans l'appendice A que le calcul d'incidence généralisé tel que nous l'avons modifié peut être utilisé pour calculer des combinaisons alternatives telles que la combinaison de Yager avec peu ou pas de modifications. Nous montrons ensuite que notre calcul d'incidence est très proche de la théorie de Dezert et Smarandache.

Nous concluons au chapitre 7 en expliquant comment nos modifications au calcul d'incidence présentent plusieurs possibilités de développement.

Raisonnements numériques et symboliques

Résumé : Différentes propriétés importantes de la fusion de données ne sont pas nécessairement respectées par toutes les techniques disponibles. On peut séparer ces techniques en trois grandes familles, soient les techniques numériques, symboliques et hybrides. La théorie de l'évidence est une technique purement numérique, la logique propositionnelle purement symbolique, alors que le calcul d'incidence et le raisonnement à base d'arguments sont des techniques hybrides.

Sommaire

2.1 Propriétés recherchées	8
2.2 Approches numériques	12
2.3 Approches symboliques	13
2.4 Approches hybrides	14
2.5 Quelques exemples de raisonnements	15
2.6 Discussion	20

Différentes approches ont été étudiées afin d'être utilisées avec la fusion de données pour identification. L'essentiel du travail jusqu'à maintenant a été effectué avec les approches numériques mais les approches symboliques ont des caractéristiques prometteuses. Il se pourrait toutefois qu'un mélange des deux puisse apporter le meilleur des deux techniques. Les principales caractéristiques souhaitables pour un bon système de fusion de données sont d'abord présentées avant de définir les grandes approches et donner quelques exemples.

2.1 Propriétés recherchées

Afin de mieux comparer les différentes approches numériques et symboliques, nous avons construit une liste de caractéristiques souhaitables. Cette liste ne se veut pas exhaustive, mais a pour but de mettre en évidence les propriétés les plus critiques ou les plus souhaitées.

2.1.1 Non-monotonie ou défaisabilité

Dans un système de fusion de données, différentes sources sont appelées à se prononcer régulièrement. Il arrivera toutefois qu'une source change sa sortie en raison de changement dans le sujet d'observation. Le système doit donc pouvoir changer ses conclusions de manière à tenir compte de ces modifications puisque de nouvelles informations peuvent remettre en question les conclusions précédentes.

Il arrivera aussi que certaines sources mettent plus de temps à se prononcer, ou ne soient pas immédiatement disponibles. Il serait préférable dans ces situations que le système puisse se prononcer même s'il n'a pas accès au verdict de toutes les sources. Il sera alors nécessaire de faire un certain nombre de suppositions avant de pouvoir donner des résultats.

Un système répondant à ces critères, que l'on peut résumer à la capacité de retirer ses conclusions, est qualifié de « non-monotone » ou « défaisable ».

La non-monotonie fait opposition à la propriété de monotonie donnée par cette définition : Si $\phi \models \theta$ et que $\phi \in \delta$, alors $\delta \models \theta$ [Antonelli, 2003]. Cela signifie que si ϕ infère θ , l'ensemble de propositions δ dont ϕ est membre inférera également θ . C'est donc dire que l'ajout d'informations à un raisonnement ne change rien aux conclusions précédemment trouvées. Au contraire, on veut pouvoir retirer des conclusions différentes si de nouvelles informations viennent les contredire.

L'opérateur \models ou « modélise » (*entailment* en anglais) signifie : « À partir du terme de gauche, il est possible d'obtenir le terme de droite en utilisant des règles d'inférences ».

2.1.2 Capacité à gérer l'incertitude

Les informations utilisées en fusion de données pour identification contiennent toujours un certain niveau d'incertitude en raison de la qualité limitée des sources d'informations. Ces sources peuvent notamment être des capteurs électroniques qui ne sont pas dans leurs conditions optimales d'opération ou bien des humains, dont le raisonnement et la fiabilité ne sont pas toujours prévisibles.

2.1.3 Traçabilité

Il est souhaitable qu'un système de fusion puisse facilement être compris par un humain pour que celui-ci se sente en confiance. En effet, aucun système n'est infaillible et ses décisions doivent être vérifiées si les conséquences sont importantes. Il ne faut pas oublier que même le raisonnement d'un humain est susceptible d'être contre-vérifié dans des situations critiques. L'opérateur doit avoir une certaine confiance en la recommandation du système afin de pouvoir se prononcer.

Typiquement, le système de fusion de données fait son évaluation en utilisant un processus de raisonnement différent de celui de l'humain. Le système prend diverses informations numériques de différents capteurs et fait une série de calculs arithmétiques et décide en comparant des valeurs numériques.

Lors d'une prise de décision, l'humain prend un processus bien différent. Ce processus est complexe et n'est pas bien maîtrisé : plusieurs écoles de pensées s'affrontent sur ce sujet, mais on peut dire que l'humain ne fait pas qu'un calcul numérique.

Le système de fusion de données et l'humain utilisant des raisonnements différents, il est difficile de communiquer la justification d'un choix d'un système de fusion de données à un humain. Il est tout de même possible pour l'humain de comprendre certaines identifications à l'aide d'un calcul mental approximatif, mais cela devient impossible lorsque les situations deviennent plus complexes.

2.1.4 Associativité

Dans certaines situations, de nouvelles informations peuvent arriver à tout moment. Il se pourrait qu'un capteur retourne régulièrement des informations mises à jour et que celles-ci soient intégrées aux autres informations déjà connues. Il se pourrait également qu'une source d'informations soit plus lente qu'une autre à retourner un résultat d'une scène en même temps.

Dans toutes ces situations, l'ordre de combinaison varie. Il est donc important que peu importe l'ordre, le résultat et la décision qui s'en suivra, seront les mêmes. On pourrait tenir compte du temps en ajoutant un facteur d'oubli le cas échéant, ce qui offrirait un meilleur contrôle.

De plus, on peut se poser des questions sur la signification d'un résultat si celui-ci est affecté par l'ordre des combinaisons. Évidemment, une vieille information relativement à la rapidité d'évolution (constante de temps) de la scène devrait prendre moins d'importance qu'une information plus récente, mais il n'y a pas de raison que deux informations combinées l'une après l'autre à l'intérieur d'un délai plus bref que la constante de temps à une première information, produisent un changement significatif du résultat comparativement à une combinaison simultanée des deux à la première.

2.1.5 Gestion de l'indépendance de l'information

Un système idéal, ou utopique, pourrait combiner de l'information sans se soucier des relations de dépendance entre celles-ci. Cette propriété est peut-être impossible à gérer parfaitement. En effet, si deux informations dépendent en partie d'une source commune sans savoir jusqu'à quel point elles sont corrélées, il n'est pas possible de combiner correctement ces informations.

Toutefois, si on fournit au système des informations indépendantes, un système peut les gérer correctement de manière à obtenir un résultat correct. Typiquement, un tel système combinerait l'information dans un certain ordre afin d'éviter de combiner deux informations corrélées entre elles.

Entre l'indépendance et la dépendance, se situe une autre catégorie de relation, la semi-dépendance.

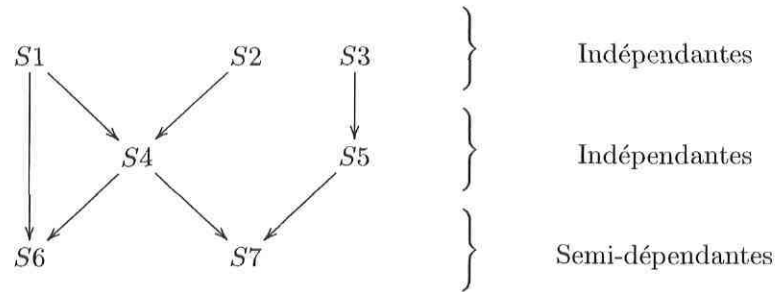


Figure 2.1: Combinaisons de sources indépendantes fournissant des informations semi-dépendantes

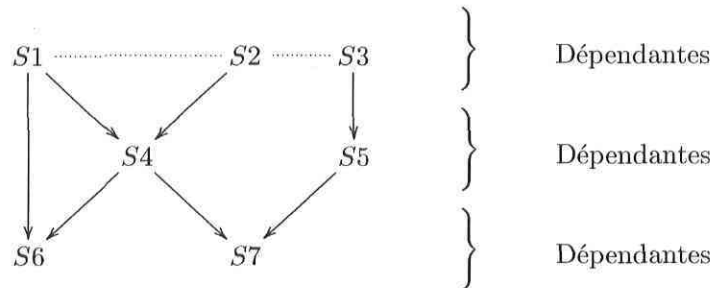


Figure 2.2: Combinaisons de sources dépendantes fournissant des informations dépendantes

Définition 2.1. Deux informations sont semi-dépendantes entre elles si elles sont le résultat de combinaisons d'informations indépendantes ou semi-dépendantes et que les informations nécessaires pour établir les relations entre elles sont disponibles.

Sur le premier niveau de la Figure 2.1, on remarque des informations indépendantes provenant directement de sources d'informations. Ces informations sont combinées sur le deuxième niveau, mais restent toujours indépendantes entre elles car elles n'ont pas d'ancêtre commun. Les informations du troisième niveau ont une certaine dépendance puisqu'elles proviennent en partie des sources S1 et S2. Nous dirons toutefois qu'elles sont semi-dépendantes car il est théoriquement possible de manipuler ces informations en connaissant la hiérarchie des combinaisons. En pratique, un tel processus est difficile à effectuer en raison de la difficulté inhérente à la conservation de la provenance de toutes les informations tout au long du traitement.

La Figure 2.2 donne un exemple de la combinaison d'informations dépendantes au premier niveau puisque le processus par lequel la dépendance se produit est inconnu. On ne pourra pas obtenir de combinaisons satisfaisantes de cette manière puisque l'on ne dispose pas suffisamment de renseignements sur les sources d'informations du premier niveau. En effet, il n'est pas possible de déterminer la relation entre S1, S2 et S3, à moins de connaître les données et les raisonnements qui sont utilisés par ces sources.

2.2 Approches numériques

On est porté à attribuer des valeurs numériques lors de la modélisation de l'information incertaine. Par exemple, le bulletin météo donne un degré de justification à ses prévisions, tel que « Pour ce soir, probabilité de précipitation de 80% ». Une personne pourra donc déterminer avec ce degré de justification sous forme de probabilité, s'il devra modifier ses activités ou tout simplement apporter un parapluie. Il est donc normal que l'essentiel du raisonnement sous incertitude soit basé sur des nombres et sur la combinaison de ces nombres afin de déterminer de nouvelles conclusions.

L'approche numérique est naturellement intéressante, mais comporte un certain nombre de défauts. D'abord, il est généralement difficile de gérer des informations qui ne sont pas indépendantes avec cette approche. Aussi, les approches numériques ne restent pas nécessairement aussi intuitives après quelques combinaisons, principalement puisqu'il devient difficile d'expliquer à un humain la signification d'un chiffre représentant une incertitude. Celui-ci préférera qu'on lui explique le raisonnement utilisé afin de se faire une idée de la justesse du résultat.

Une partie de la difficulté provient du fait qu'il existe plusieurs interprétations à donner aux valeurs numériques puisqu'il y a plusieurs interprétations possibles à la probabilité [Hájek, 2003]. La mesure de probabilité de précipitation n'échappe pas à ces interprétations multiples. Par exemple, « 80% de probabilité de précipitation » peut être interprété de trois façons différentes : [de Elía et Laprise, 2005]

- Interprétation fréquentiste : Sur 100 journées où cette prévision est faite, il pleuvra 80 jours.
- Interprétation subjective : Le météorologue est certain de sa prévision à 80%. La difficulté de cette interprétation est qu'il n'existe pas de méthode permettant de mesurer le degré de certitude d'une personne. Chaque météorologue aura tendance à donner des certitudes différentes selon sa personnalité.
- Interprétation propensioniste : Lorsque l'on observe ces conditions météorologiques précises, il pleut dans 80% des cas. On suppose ici qu'il y a un lien causal entre les conditions initiales et la précipitation.

Il a été montré lors de diverses études empiriques que les valeurs numériques d'incertitude causent des problèmes d'interprétation dans le public. Dans une de ces études [Tversky et Kahneman, 1983], des étudiants gradués, qui ont pourtant suivi des cours avancés de probabilités et de statistiques, font des erreurs grossières lorsque vient le temps d'attribuer des valeurs numériques à l'incertitude de propositions logiques simples.

De façon générale, les approches numériques ont la possibilité de gérer l'incertitude et peuvent se comporter de façon non-monotone. Toutefois, il leur est difficile de donner des traces de leur raisonnement et nécessitent une indépendance stricte de l'information.

La théorie de l'évidence de Dempster et Shafer est un très bon exemple d'une telle approche numérique. Une masse est attribuée à chaque information et les différentes informations sont combinées en calculant de nouvelles masses. Cette technique est présentée au chapitre 3.

2.3 Approches symboliques

Les approches purement symboliques utilisent des informations précises pour en sortir des conclusions précises. Un exemple bien connu d'une approche symbolique est l'algèbre de Boole.

Les approches symboliques sont attirantes en raison de leur rigueur logique. Ils ont la particularité de laisser des traces de leur raisonnement qui permettent à un humain de comprendre la logique derrière la réponse. De plus, ces approches sont aussi bien adaptées à la non-monotonie.

Exemple 2.1

La figure 2.3 présente un raisonnement logique simple. Les informations « S1 voit 4 roues » et « S1 est fiable » peuvent être combinés pour former une nouvelle proposition, « Présence de 4 roues ».

L'arrivée d'une information « S1 n'est pas fiable » forcera le système à revoir son raisonnement et à retirer ses conclusions « Présence de 4 roues », puis « Véhicule motorisé » si aucune autre information ne vient l'appuyer.

La rigueur des approches purement symboliques est aussi leur inconvénient majeur : ils ne peuvent pas représenter et raisonner lorsqu'elles sont en présence de propositions incertaines. Certains efforts ont tout de même été faits pour créer des systèmes logiques symboliques capables de répondre à cette demande. On retrouvera dans [Maupin et al., 2005] un énoncé des principales approches logiques et de leurs comportements en présence d'informations incertaines.

De façon générale, les approches symboliques performant bien au niveau de la non-monotonie, de leur traçabilité, de l'associativité et de la gestion de l'indépendance de l'information. Toutefois, la représentation de l'incertitude leur est difficile.

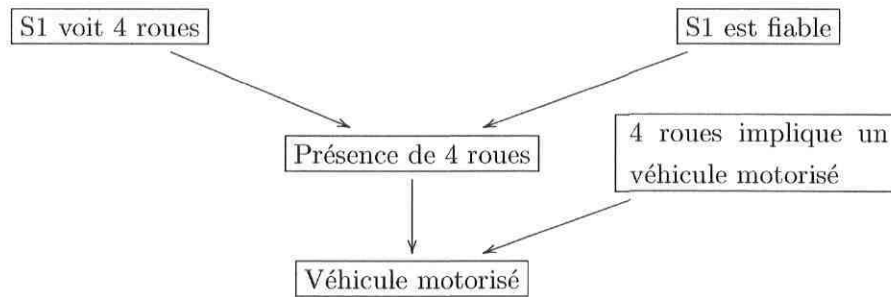


Figure 2.3: Exemple d'un raisonnement symbolique utile à l'identification

Un bon exemple d'une approche symbolique pure est la logique propositionnelle, présentée à la section 2.5.1.

2.4 Approches hybrides

Les approches numériques et symboliques ayant chacune leurs avantages, il est normal que l'on soit tenté de les combiner de manière à récupérer leurs meilleures caractéristiques. Plusieurs méthodes sont utilisées pour combiner les deux approches [Liu, 2001, p. 5] :

- **Mesures numériques superposées à un raisonnement symbolique** : Le raisonnement du système se fait grâce aux inférences symboliques. Des mesures de certitude numériques peuvent être calculées à partir des inférences, mais n'influencent pas le raisonnement. Le calcul d'incidence, le sujet principal de ce mémoire, est une méthode de ce type.
- **Raisonnement symbolique superposé à des mesures numériques** : Il s'agit d'une approche essentiellement numérique, où des raisonnements symboliques sont invoqués à l'occasion. Cette approche n'a pas été souvent utilisée.
- **Systèmes duals** : Les inférences symboliques et numériques sont toutes les deux calculées à chaque étape. Les logiques probabilistes et possibilistes ainsi que les logiques à base d'arguments sont de ce type.
- **Systèmes duals hybrides** : Dans ces systèmes, la distinction entre les informations numériques et symboliques devient plus floue, par l'utilisation conjointe de termes vagues et de mesures numériques par exemple.

L'intérêt porté aux approches hybrides est très récent si on le compare aux approches numériques et symboliques, mais certains systèmes commencent à émerger. C'est le cas du

calcul d'incidence, présenté au chapitre 4, mais aussi des systèmes de raisonnement à base d'arguments, brièvement présentés à la section 2.5.2.

2.5 Quelques exemples de raisonnements

2.5.1 Logique propositionnelle

La logique propositionnelle (LP) est un système de raisonnement très simple par rapport à d'autres systèmes plus puissants, comme la logique de premier ordre et la logique modale. La LP comporte tout de même un système d'inférences complet, et sa compréhension aide à introduire le raisonnement logique utilisé dans le calcul d'incidence.

Définitions

La LP manipule des propositions formées de propositions atomiques et d'opérateurs logiques. Une proposition atomique est une proposition formée d'un seul symbole, sans opérateur. Par exemple p , q et r sont chacune des propositions atomiques.

Les opérateurs logiques sont les suivants :

- \neg (non) : L'opérateur de négation
- \wedge (et) : L'opérateur de conjonction
- \vee (ou) : L'opérateur de disjonction
- \rightarrow (implique) : Si la proposition à gauche est vraie, celle de droite le sera aussi
- \leftrightarrow (si et seulement si) : $p \leftrightarrow q$ est équivalent à $p \rightarrow q$ et $q \rightarrow p$.

Les regroupements de propositions et d'opérateurs créent d'autres propositions. Voici quelques exemples de propositions valides :

- $p \vee q$
- $p \vee q \wedge r$
- $p \rightarrow (q \wedge r)$

L'ordre de priorité des opérateurs est le suivant (du plus haut au plus bas) : \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , et \leftrightarrow . Par exemple, $p \vee q \wedge r$ est équivalent à $p \vee (q \wedge r)$, mais pas à $(p \vee q) \wedge r$. On retrouve dans le tableau 2.1 l'effet des différents opérateurs sur les propositions.

La logique propositionnelle permet la définition de bases de données qui pourraient être utiles à la fusion de données pour identification.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
vrai	vrai	faux	vrai	vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux	faux	vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai	faux	vrai	vrai	faux
faux	faux	vrai	faux	faux	vrai	vrai

Tableau 2.1: Table de vérité des opérateurs logiques**Exemple 2.2**

À partir de l'exemple 2.1, on définit les propositions :

- p : « S1 voit 4 roues »
- q : « S1 est fiable »
- $(p \wedge q) \rightarrow r$: « si p et q sont vraies, on est en présence de 4 roues »
- $r \rightarrow s$: « Si r est vraie, on est en présence d'un véhicule motorisé »

On doit connaître les valeurs de toutes les propositions avant de pouvoir déterminer si la proposition s est vraie. Si on ne les connaît pas toutes, on tente de les connaître en utilisant des règles d'inférences.

Règles d'inférences

Les règles d'inférences sont utilisées pour connaître la valeur logique d'une proposition à partir des connaissances que l'on dispose déjà. Elles servent donc à trouver de nouvelles propositions vraies.

On retrouve dans le tableau 2.2 les règles d'inférences de base. Elles permettent de déterminer de nouvelles propositions à partir des propositions actuelles, les axiomes. La notation utilisée est en deux parties : la partie supérieure représente les prémisses à la règle et la partie inférieure, la nouvelle proposition qu'on peut en tirer. Par exemple, la règle du *modus ponens* qui signifie ceci : sachant que p implique q et qu'on apprend que p est vraie, alors on pourra alors dire que q l'est également :

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

Il existe une multitude règles dérivées, on en trouve quelques unes dans le tableau 2.3.

Nom	Formule	Description
Modus Ponens	$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$	Si p implique q et que l'on a p , alors q .
Double négation	$\frac{\neg\neg p}{p}$	p est équivalente à la négation de non p .
Réduction ad absurdum	$\frac{p \vdash q \quad p \vdash \neg q}{\neg p}$	Si on peut dériver q et $\neg q$ de p , alors $\neg p$.
Introduction de conjonction	$\frac{p \quad q}{p \wedge q}$	Si p et q sont vraies séparément, elles le sont aussi conjointement.
Élimination de conjonction	$\frac{p \wedge q}{p, q}$	Si p et q sont vraies conjointement, elles le sont séparément.
Introduction de disjonction	$\frac{p}{p \vee q}$	Si p est vraie, sa disjonction avec n'importe quelle proposition le sera aussi.
Élimination de disjonction	$\frac{p \rightarrow r \quad q \rightarrow r \quad p \vee q}{r}$	Si p implique r et q implique r , lorsque que p ou q est vraie, alors r l'est aussi.
Introduction biconditionnelle	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$	Si p implique q et q implique p , p est vraie si et seulement si q .
Élimination biconditionnelle	$\frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q, q \rightarrow p}$	p si et seulement si q , alors p implique q et q implique p
Preuve conditionnelle	$\frac{p}{\frac{q}{p \rightarrow q}}$	Si on peut inférer q en supposant p , alors p implique q .

Tableau 2.2: Principales règles d'inférences de la logique propositionnelle

Nom	Formule	Description
Syllogisme hypothétique	$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$	Si p implique q et que q implique r , alors p implique r .
Syllogisme disjonctif	$\frac{p \vee q \quad \neg q}{p}$	Si l'on a soit p ou q alors que $\neg q$ (donc q est fausse), on en tire p .
Modus Tollens	$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p}$	Si p implique q et qu'on a $\neg q$, alors $\neg p$.
Absorption	$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (q \vee r)}$	p implique q , donc p impliquera aussi q ou r .

Tableau 2.3: Principales règles d'inférence dérivées

Exemple 2.3

Toujours en suivant l'exemple 2.1 avec les axiomes définis précédemment ($p, q, (p \wedge q) \rightarrow r$ et $r \rightarrow s$), utilisons les règles d'inférences afin d'arriver à une conclusion. Notons que seules les inférences utiles à la conclusion r recherchée ont été utilisées. Le raisonnement est alors dit dirigé.

$$\begin{array}{c} \text{Int. Conj.} \frac{p \quad q}{p \wedge q} \\ \text{Modus Ponens} \frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{r} \end{array} \quad \frac{r \rightarrow s}{s}$$

Propriétés

La LP n'est pas capable de représenter l'incertitude, notamment parce qu'elle ne peut pas représenter des quantités, comme « certains » ou « parfois » [Maupin et al., 2005, 4.2.3]. De plus, la LP est monotone, puisque les règles d'inférences fournissent des conclusions, peu importe les autres axiomes dans le système.

Exemple 2.4

Afin de montrer la propriété de monotonie de la logique propositionnelle, ajoutons la règle $p \rightarrow \neg s$ à l'exemple précédent. Les conclusions $\neg s$ et $\neg p$ apparaissent, mais les conclusions précédentes, notamment s , restent valides.

$$\begin{array}{c} \text{Int. Conj.} \frac{p \quad q}{p \wedge q} \\ \text{Modus Ponens} \frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{r} \\ \text{Modus Ponens} \frac{r \rightarrow s}{s} \end{array} \quad \frac{p \rightarrow \neg s \quad p}{\neg s} \quad \frac{\neg s}{\neg p}$$

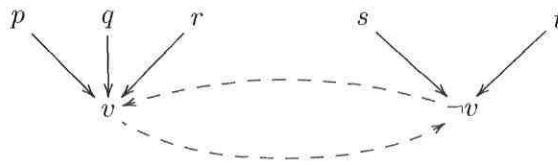


Figure 2.4: Attaque par la contradiction de v et $\neg v$

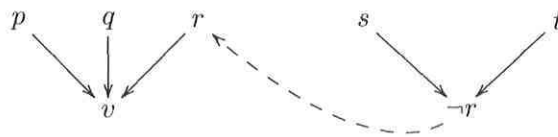


Figure 2.5: Attaque de v par la contradiction d'une de ses prémisses

2.5.2 Raisonnement à base d'arguments défaisables

Une sémantique intéressante du raisonnement symbolique est la sémantique à base d'arguments. Cette approche a été proposée par John Pollock [Pollock, 1995], mais l'idée de base a été reprise par différents chercheurs [Prakken et Vreeswijk, 2002].

Cette approche est très près de la logique propositionnelle classique puisqu'elle utilise la même notation et les mêmes règles d'inférences. En fait, le système de raisonnement est superposé aux propositions logiques. On y ajoute des dispositions qui permettent de gérer les conflits entre les propositions de façon à arriver à un raisonnement non-monotone.

Cette sémantique utilise principalement des graphes pour organiser les inférences et gérer les relations entre elles. En effet, certaines inférences peuvent être directement contredites, comme sur la figure 2.4. L'attaque peut aussi se faire par la contradiction d'une des prémisses utilisées pour arriver à la conclusion (Figure 2.5), ou par la contradiction de ses propres prémisses (Figure 2.6).

On utilisera généralement des algorithmes itératifs pour gérer les conflits entre les inférences. La gestion de ces conflits nécessite l'attribution de mesures de degré de justification afin de déterminer quelles conclusions devraient avoir préséance sur les autres. Pollock a soigneusement évité d'utiliser les probabilités en développant une mesure du degré de justification

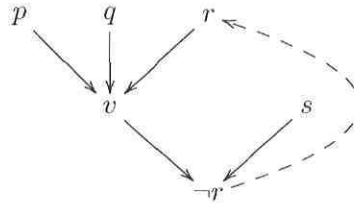


Figure 2.6: La conclusion $\neg r$ contredit ses propres prémisses

des arguments qui se démarque par son utilisation du principe du « plus faible lien » pour la combinaison des informations, c'est à dire qu'une information résultant d'une combinaison obtient le degré de justification de sa prémisses la plus faible. [Pollock, 2001]

2.6 Discussion

L'objectif de ce chapitre consistait principalement à situer le présent mémoire dans le contexte des différentes approches du raisonnement sous incertitude et de montrer que deux vues s'affrontent dans le raisonnement sous incertitude, soient la symbolique et la numérique.

On sait maintenant qu'il est possible de regrouper ces deux vues en une seule avec les approches hybrides. Dans un prochain chapitre, on présente une technique de calcul, le calcul d'incidence, fortement influencée par les approches numériques, mais qui tente d'aller chercher les forces des raisonnements symboliques. Mais avant, on présente une technique numérique très employée et qui sert de référence, la théorie de l'évidence.

Théorie de l'évidence

Résumé : La théorie de l'évidence est un outil mathématique important pour la fusion de données pour identification. Cette théorie permet la représentation et la combinaison d'informations incertaines. Cette théorie est critiquée pour son comportement en situation de conflit important, mais ses caractéristiques uniques en font un domaine de recherche très dynamique.

Sommaire

3.1	Concepts de base	22
3.2	Résolution de conflit	27
3.3	Propriétés	28
3.4	Ensembles vs propositions logiques	29
3.5	Discussion	30

3.1 Concepts de base

La théorie de l'évidence est basée sur le travail d'Arthur Dempster [Dempster, 1967], étendu par Glenn Shafer [Shafer, 1976]. Elle porte donc également le nom de « Théorie de Dempster-Shafer ». On rencontrera aussi parfois le terme « Théorie des fonctions de croyance ».

La théorie de l'évidence est basée sur deux idées principales : la représentation de l'information grâce à l'utilisation d'un degré de croyance d'une hypothèse qui dépend des autres informations disponibles, et puis d'une fonction de combinaison, dite de Dempster.

3.1.1 Représentation de l'information

Introduction

Il est possible qu'un capteur soit défectueux et que le résultat de ses observations soit erroné. On pourrait par exemple déterminer qu'un détecteur de pluie fonctionne bien dans 90% des cas. Lorsque le capteur fonctionne bien, sa réponse peut être considérée comme étant exacte et vraie. Dans le 10% des autres situations, il n'est pas justifié de considérer le résultat comme étant correct, mais on ne peut pas non plus dire qu'il est nécessairement faux. En effet, même défectueux, il peut arriver que le résultat soit exact. On peut faire ici l'analogie avec une horloge arrêtée qui donne toujours l'heure précise deux fois par jour.

Avec les probabilités traditionnelles, on serait limité à dire que si le capteur dit qu'il pleut, on croira qu'il pleut avec une certitude de 90%. Puisque la somme des probabilités doit donner 100%, on croira à 10% qu'il ne pleut pas, ce qui n'est pas tout à fait exact. En effet, rien ne justifie de croire avec une certitude de 10% qu'il ne pleut pas puisque le capteur peut quand même donner un bon résultat. Dans le cas de la théorie de l'évidence, on modélisera cette information avec une croyance qu'il pleut à 90% et une croyance qu'il ne pleut pas à 0%. On remarque que la somme des deux ne donne pas 100%. On pourra toutefois dire qu'il est plausible à 10% qu'il ne pleuve pas.

Définitions

La théorie travaille sur l'ensemble Θ , le *cadre de discernement* composé des hypothèses. Cet ensemble est exhaustif et les hypothèses mutuellement exclusives. Cette exhaustivité et cette exclusion mutuelle sont parfois désignées comme « modèle de Shafer ».

- $\theta_1, \theta_2, \dots$ sont des objets ou des hypothèses.
- $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\}$ est l'ensemble des objets contenus dans la base de données.
- N représente le nombre d'hypothèses ou d'objets. Il s'agit du cardinal de l'ensemble Θ

Exemple 3.1

On a par exemple un hypothétique détecteur de véhicule. L'ensemble représentant les identifications possibles d'un véhicule observé serait le suivant :

$$\Theta = \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}$$

θ_A, θ_B et θ_C représentent respectivement les hypothèses « Avion », « Bateau » et « Camion ». On peut voir ces hypothèses comme étant des propositions logiques signifiant qu'il y a présence de l'élément identifié. Par exemple « Avion » signifie : « Il y a présence d'un avion ».

Cette définition d'ensemble suppose que seuls ces trois types de véhicules sont possibles, et qu'un véhicule ne peut être qu'un seul de ces trois types.

De l'ensemble Θ , on crée l'ensemble 2^Θ , les hypothèses composées sur lesquelles on peut se prononcer. Il s'agit de tous les sous-ensembles présents dans l'ensemble Θ .

Chacune des hypothèses A de 2^Θ se voit associer une masse, telle que :

$$m : 2^\Theta \rightarrow [0, 1] \quad (3.1)$$

$$A \mapsto m(A) \quad (3.2)$$

$$\sum_{A \in 2^\Theta} m(A) = 1 \quad (3.3)$$

$$m(\emptyset) = 0 \quad (3.4)$$

A est utilisé pour identifier un membre de l'ensemble 2^Θ . On remarquera qu'on peut aussi le définir comme étant un ensemble des hypothèses de Θ . A aura donc toujours une valeur de masse positive inférieure à un, et la somme des masses de toutes les hypothèses de 2^Θ sera égale à l'unité.

Exemple 3.2

En reprenant l'exemple précédent, on se retrouve avec un ensemble 2^Θ tel que :

$$2^\Theta = \{\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}, \{\theta_A, \theta_B\}, \{\theta_A, \theta_C\}, \{\theta_B, \theta_C\}, \theta_A, \theta_B, \theta_C, \emptyset\}$$

L'élément $A = \{\theta_A, \theta_B\}$ signifie « On détecte un Avion ou un Bateau, mais pas un Camion ». Cela signifie que le capteur ne peut pas différencier un avion d'un bateau, mais est capable de rejeter l'hypothèse « Camion ».

Si notre capteur est certain de son jugement à 80%, il attribuera une masse de 0.8 à l'ensemble $A = \{\theta_A, \theta_B\}$. Puisque la somme des masses doit être égale à 1, il doit attribuer la masse restante de 0.2 à un ou plusieurs autres éléments. De manière à représenter le fait que son mauvais fonctionnement n'exclut aucune hypothèse, il attribuera une masse 0.2 à l'ensemble des propositions possibles, soit $\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}$.

L'information du capteur serait modélisée par la structure suivante :

$$\begin{aligned}\Theta &= \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \\ m(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) &= 0.2 \\ m(\{\theta_A, \theta_B\}) &= 0.8\end{aligned}$$

Deux principales fonctions sont utilisées avec la distribution des masses dans la théorie de l'évidence pour en extraire certaines informations : la fonction de croyance et la fonction de plausibilité [Shafer, 1976].

La fonction de croyance représente la confiance totale que l'on peut attribuer à l'hypothèse A et est définie par :

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad \forall B \in 2^\Theta \quad (3.5)$$

Il s'agit donc de la somme des masses des hypothèses qui appuient entièrement l'hypothèse A , ce qui revient à être ses sous-ensembles.

Cette fonction de croyance satisfait ces trois axiomes :

- La croyance de l'ensemble vide est nulle, et la croyance du cadre de discernement est égale à l'unité.

$$\text{Bel}(\emptyset) = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{Bel}(\Theta) = 1 \quad (3.7)$$

- La croyance d'un événement est toujours positive et inférieure ou égale à l'unité :

$$0 \leq \text{Bel}(A) \leq 1 \quad \forall A \in 2^\Theta \quad (3.8)$$

- La croyance de l'union de deux événements satisfait :

$$\text{Bel}(A \cup B) \geq \text{Bel}(A) + \text{Bel}(B) - \text{Bel}(A \cap B) \quad (3.9)$$

Exemple 3.3

Toujours en suivant le même exemple, la croyance de θ_B sera donnée par :

$$\text{Bel}(\theta_B) = 0$$

Le résultat est nul puisque rien n'appuie directement l'hypothèse « Bateau », aucun des sous-ensembles de $\{\theta_B\}$ n'ayant une masse supérieure à 0. On peut quand même calculer les croyances suivantes :

$$\begin{aligned}\text{Bel}(\{\theta_A, \theta_B\}) &= m(\{\theta_A, \theta_B\}) = 0.8 \\ \text{Bel}(\Theta) &= m(\{\theta_A, \theta_B\}) + m(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 1\end{aligned}$$

La croyance de Θ , l'ensemble des identifications possibles, est toujours égale à l'unité puisque ses sous-ensembles correspondent à 2^Θ .

La fonction de plausibilité quant à elle représente la valeur maximale de la crédibilité de l'hypothèse A. Elle retourne la somme des masses des hypothèses qui ne rejettent pas l'hypothèse A :

$$\text{Pl}(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad \forall B \in 2^\Theta \quad (3.10)$$

La plausibilité d'une proposition est toujours égale ou supérieure à sa croyance. Il y a d'ailleurs une relation entre les deux définie par :

$$\text{Pl}(A) = 1 - \text{Bel}(\overline{A}) \quad (3.11)$$

Exemple 3.4

La plausibilité de l'hypothèse θ_B sera calculée par :

$$\text{Pl}(\theta_B) = m(\{\theta_A, \theta_B\}) + m(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 1$$

Le résultat est unitaire puisque la conjonction de l'ensemble $\{\theta_B\}$ avec n'importe quel élément de 2^Θ est toujours non-nul. Cela n'est pas le cas pour l'hypothèse θ_A :

$$\text{Pl}(\theta_C) = m(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 0.2$$

3.1.2 Combinaison de Dempster

En fusion de données, les fonctions de combinaison sont très importantes, et celle de Dempster sert très bien la cause car elle présente des propriétés intéressantes. Ayant deux fonctions de masse produites par deux capteurs notées m_1 et m_2 respectivement, la combinaison de Dempster est une méthode qui permet de combiner deux structures en une seule :

$$m_f(C) = \frac{\sum_{A \cap B = C} m_1(A)m_2(B)}{1 - \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_2(B)} \quad \forall C \in 2^\Theta \quad (3.12)$$

Exemple 3.5

Soit l'exemple précédent sur l'identification de la nature d'un véhicule. On intègre un deuxième capteur pour ensuite combiner deux informations. La fonction de masse de Dempster-Shafer du premier capteur est :

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \\ m_1(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) &= 0.2 \\ m_1(\{\theta_A, \theta_B\}) &= 0.8 \end{aligned}$$

Le deuxième capteur détermine qu'il s'agit d'un bateau, soit l'hypothèse θ_B . La fiabilité de ce capteur permet de fixer une masse 0.7 sur cette hypothèse :

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \\ m_2(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) &= 0.3 \\ m_2(\{\theta_B\}) &= 0.7 \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} \Theta &= \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \\ m_f(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) &= m_1(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) \times m_2(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 0.2 \times 0.3 = 0.06 \\ m_f(\{\theta_A, \theta_B\}) &= m_1(\{\theta_A, \theta_B\}) \times m_2(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 0.8 \times 0.3 = 0.24 \\ m_f(\{\theta_B\}) &= m_1(\{\theta_A, \theta_B\}) \times m_2(\{\theta_B\}) + m_1(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) \times m_2(\{\theta_B\}) \\ &= 0.8 \times 0.7 + 0.2 \times 0.7 = 0.7 \end{aligned}$$

3.2 Résolution de conflit

Il peut arriver que deux hypothèses provenant de deux structures différentes entrent en contradiction. Il est donc impossible dans cette situation d'attribuer une masse à leur conjonction et la somme des masses n'est alors plus égale à l'unité. La solution consiste à redistribuer cette masse grâce au dénominateur de la combinaison de Dempster. Ce terme garantit que la somme des masses restera unitaire.

Exemple 3.6

On ajoute un troisième capteur l'exemple précédent. Celui-ci contredit les deux autres et détecte que le véhicule est plutôt un camion.

$$\Theta = \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \quad (3.13)$$

$$m_3(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = 0.2 \quad (3.14)$$

$$m_3(\{\theta_C\}) = 0.8 \quad (3.15)$$

Pour la démonstration, on combine le capteur 1 avec le capteur 3. On voit que l'ensemble $\{\theta_A, \theta_B\}$ du premier entre en conflit avec l'ensemble $\{\theta_C\}$ du troisième puisque $\{\theta_A, \theta_B\} \cap \{\theta_C\} = \emptyset$. Le dénominateur de la combinaison conjonctive ne sera plus unitaire; il y aura donc une redistribution du conflit :

$$1 - \sum_{A \cap B = \emptyset} m_1(A)m_3(B) = 1 - m_1(\{\theta_A, \theta_B\})m_3(\{\theta_C\}) = 1 - 0.64 = 0.36 \quad (3.16)$$

Les masses résultantes de la combinaison deviendront alors :

$$\Theta = \{\theta_A, \theta_B, \theta_C\} \quad (3.17)$$

$$m_f(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) = \frac{m_1(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) \times m_3(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\})}{0.36} = \frac{0.2 \times 0.2}{0.36} = 0.11 \quad (3.18)$$

$$m_f(\{\theta_A, \theta_B\}) = \frac{m_1(\{\theta_A, \theta_B\}) \times m_3(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\})}{0.36} = \frac{0.8 \times 0.2}{0.36} = 0.44 \quad (3.19)$$

$$m_f(\{\theta_C\}) = \frac{m_1(\{\theta_A, \theta_B, \theta_C\}) \times m_3(\{\theta_C\})}{0.36} = \frac{0.2 \times 0.8}{0.36} = 0.44 \quad (3.20)$$

Cette redistribution de masse a comme grand avantage de conserver l'associativité. On aurait pu combiner les capteurs 1 et 2 et y ajouter le capteur 3 et le même résultat serait le même que si on avait combiné les capteurs 2 et 3 puis ajouté le premier.

3.3 Propriétés

La théorie de l'évidence procure une très bonne représentation de l'incertitude et la combinaison de Dempster permet de combiner plusieurs informations incertaines afin d'obtenir un résultat qui semble correct dans la plupart des situations. De plus, la combinaison de Dempster est associative, ce qui permet d'avoir un ordre de combinaison quelconque. Il a aussi été démontré que la théorie de l'évidence se comporte de façon non-monotone grâce à la normalisation qu'effectue la combinaison de Dempster [Yager, 1994].

La théorie de l'évidence est typiquement numérique, et échoue donc là où les méthodes symboliques fonctionnent bien. La traçabilité n'est pas facile à obtenir puisqu'il est difficile d'expliquer à un humain la signification des différentes valeurs numériques lorsque l'on combine plusieurs sources d'informations. De plus, la théorie de l'évidence nécessite une indépendance stricte de toutes les informations qu'elle manipule, ce qui fait que le résultat d'une combinaison ne peut être combiné avec n'importe quelle autre information du système. On trouve à la section 6.3.2 un exemple démontrant ce problème. Voorbraak a défini formellement les conditions dans lesquelles la combinaison de Dempster peut être utilisée correctement. [Voorbraak, 1991]

La combinaison de Dempster a été fortement critiquée en raison de la redistribution de la masse de conflit. En effet, il a été démontré que la combinaison de Dempster se comporte de façon contre-intuitive lorsque le conflit entre deux structures devient trop grand. L'exemple de Zadeh illustre très bien ce problème [Zadeh, 1984] :

Exemple 3.7

Un patient P est examiné par deux médecins, A et B. Le médecin A diagnostique une méningite (ϕ_M) ou une tumeur au cerveau (ϕ_T). Il attribue une probabilité de 0.98 au premier et 0.02 au second. Le médecin B, sans connaître le diagnostic de A, affirme que le patient peut être atteint d'une tumeur au cerveau (ϕ_T) avec une probabilité de 0.02, mais il croit plutôt avec une probabilité de 0.98 que celui-ci est atteint d'une commotion cérébrale (ϕ_C). Ces diagnostics sont représentés au Tableau 3.1.

Avec la combinaison de Dempster dans la théorie de l'évidence, les masses respectives attribuées aux propositions ϕ_M et ϕ_T seront toutes deux de 0.0196 alors que ϕ_C aura une masse de 0.9604. On se retrouve donc dans une situation où, même si les deux médecins se sont entendus sur une très faible probabilité pour un diagnostic, la tumeur, le résultat de la combinaison en arrive à la conclusion que le patient est atteint d'une tumeur, et ce, avec une grande masse.

Proposition	m_A	m_B
θ_M	0.998	0
θ_C	0	0.998
θ_T	0.002	0.002

Tableau 3.1: Masse des diagnostics des deux médecins A et B

Ces résultats peuvent toutefois être expliqués par une mauvaise définition du problème. Selon [Haenni, 2005], le cadre de discernement choisi par Zadeh est trop restreint et l'on devrait tenir compte de la fiabilité des sources.

3.4 Ensembles vs propositions logiques

La théorie de l'évidence est habituellement définie à l'aide d'ensembles, contrairement aux autres techniques présentées dans ce mémoire qui utilisent des propositions logiques. L'utilisation d'ensembles dans la théorie de l'évidence a l'avantage de simplifier les notations, mais l'utilisation de propositions logiques permet un éventail plus riche d'hypothèses. Ce chapitre présente des définitions à base d'ensembles, mais nous aurions pu présenter des définitions basées sur la logique propositionnelle.

Exemple 3.8

D'un point de vue logique, l'ensemble 2^Θ de l'exemple 3.1 se définit comme suit :

$$2^\Theta = \{\phi_A \vee \phi_B \vee \phi_C, \phi_A \vee \phi_B, \phi_A \vee \phi_C, \phi_B \vee \phi_C, \phi_A, \phi_B, \phi_C, \text{faux}\}$$

L'élément $A = \{\theta_A, \theta_B\}$ serait donc équivalent à l'expression logique $\phi_A \vee \phi_B$. Comme on utilise le modèle de Shafer, qui force l'exhaustivité, cette expression est elle-même équivalente à $(\phi_A \vee \phi_B) \wedge \neg \phi_C$.

On peut illustrer la différence entre les deux représentations en présentant la fonction de croyance en utilisant la logique propositionnelle :

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B \rightarrow A} m(B) \quad \forall B \in 2^\Theta \quad (3.21)$$

La seule différence se situe au niveau de $B \subseteq A$ qui devient $B \rightarrow A$. On interprète alors la croyance comme étant la somme des masses des propositions logiques qui impliquent A.

L'utilisation d'un cadre plus large que la théorie des ensembles force la prise en compte des contraintes imposées par le modèle de Shafer. En effet, il faut s'assurer que la contrainte d'exclusivité mutuelle est toujours respectée. En utilisant les ensembles, $\{\theta_B, \theta_C\} \cap \{\theta_C\}$ correspond à $\{\theta_C\}$, mais selon la logique propositionnelle, $(\phi_B \vee \phi_C) \wedge \phi_C = \phi_C \vee (\phi_B \wedge \phi_C)$, et non à ϕ_C . Toutefois, en raison de l'exclusion mutuelle dans l'ensemble Θ , $\phi_B \wedge \phi_C$ n'est pas possible. L'expression peut donc être simplifiée en ϕ_C .

3.5 Discussion

Beaucoup d'efforts ont été investis afin de trouver des solutions aux apparentes incongruités de certains résultats. Deux principales approches ont été utilisées jusqu'à maintenant, soit la conception de nouvelles règles de combinaison, comme l'ont fait notamment Yager [Yager, 1987], Dubois et Prade [Dubois et Prade, 1986, 1988] et Florea [Florea et al., mai 2005], soit la révision de l'interprétation de certains concepts de la théorie. Dans ce dernier cas, on relève en particulier le travail de Fagin et Halpern [Halpern et Fagin, 1992] puis Weiru Liu [Liu et Hong, 2000]. Smets a récemment présenté un article résumant la question [Smets, 2004].

Calcul d'incidence

Résumé : Le calcul d'incidence semble être une base intéressante pour la fusion de données pour identification. Cette méthode hybride numérique-symbolique associe des probabilités à des ensembles d'univers possibles plutôt qu'aux formules directement. Une de ses variantes, le calcul d'incidence généralisé, permet de résoudre certains problèmes intéressants et peut être directement utilisé pour la fusion de données pour identification. Toutefois, cette technique réagit mal dans certaines situations de semi-dépendance.

Sommaire

4.1	Le calcul d'incidence	32
4.2	Le calcul d'incidence généralisé	39
4.3	Parallèle avec la théorie de l'évidence	45
4.4	Limitations du calcul d'incidence généralisé	46
4.5	Discussion	50

4.1 Le calcul d'incidence

Le calcul d'incidence (Incidence Calculus) a été introduit par Alan Bundy en 1985 [Bundy, 1985]. Celui-ci voulait intégrer des mesures numériques aux raisonnements symboliques fréquemment utilisés dans la logique afin d'y intégrer la notion d'incertitude. La plupart des tentatives jusqu'alors consistaient à assigner des valeurs numériques directement aux règles et aux informations afin d'en déterminer la certitude.

Alan Bundy a noté que les limitations des méthodes purement numériques au niveau de l'indépendance de l'information compliquaient la combinaison d'informations.

Exemple 4.1

Bundy a utilisé un exemple simple pour montrer ces limites. Soient les propositions A et $\neg A$. On affecte une probabilité au premier : $p(A) = 0.75$. Selon les règles de la probabilité, cela voudra donc dire que $p(\neg A) = 1 - p(A) = 0.25$. En effectuant une combinaison simple, qui ignore la relation de dépendance entre les deux propositions, on se retrouve avec :

$$p(A \wedge \neg A) = p(A) \cdot p(\neg A) = 0.75 \cdot 0.25 = 0.1875 \quad (4.1)$$

Ce résultat est évidemment erroné puisque l'on aurait dû tenir compte de la corrélation entre les deux propositions avec : (Puisque $c(A, \neg A) = -1$.)

$$p(A \wedge \neg A) = p(A) \cdot p(\neg A) + c(A, \neg A) \cdot \sqrt{p(A) \cdot p(\neg A) \cdot p(A) \cdot p(\neg A)} \quad (4.2)$$

$$= 0.1875 - \sqrt{0.1875^2} \quad (4.3)$$

$$= 0 \quad (4.4)$$

Il n'est toutefois pas facilement possible de conserver la mesure de corrélation entre chacune des propositions du système. C'est pourquoi Bundy a proposé une solution à base d'ensembles pour permettre de résoudre ce problème de dépendance, le calcul d'incidence. [Bundy, 1985].

4.1.1 Définitions

Posons un ensemble de points \mathcal{W} , chaque point étant une situation, ou monde possible ou univers possible, dans lequel une proposition sera vraie ou fausse. Ces points sont exhaustifs et disjoints.

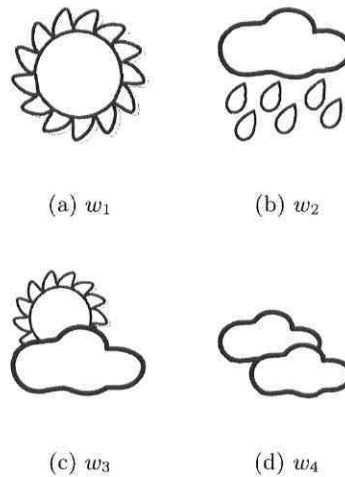


Figure 4.1: Les quatre univers de l'ensemble \mathcal{W} utilisé dans l'exemple 4.2

Exemple 4.2

Quatre univers possibles sont représentés schématiquement sur la figure 4.1. Ils représentent respectivement l'univers ensoleillé (w_1), l'univers pluvieux (w_2), l'univers variable (w_3) et l'univers nuageux (w_4). Ces univers sont mutuellement exclusifs puisque que sont des points distincts, totalement indépendants. Un observateur se retrouve dans un, et un seul des univers à la fois.

Posons ensuite $i(A)$, comme étant la fonction d'incidence de A , ou l'ensemble des univers de l'ensemble \mathcal{W} où la proposition A est vraie. Le terme incidence est utilisé ici dans le sens fréquentiel du terme, pour le nombre de situations.

$$i(A) = \{w \in \mathcal{W} \mid w \models A\} \tag{4.5}$$

(voir la section 2.1.1 pour une explication de l'opérateur \models)

L'utilisation d'ensembles permet de définir la dépendance de deux propositions comme étant l'intersection entre leurs incidences. Il en résulte les axiomes suivants :

$$i(\text{vrai}) = \mathcal{W} \quad (4.6)$$

$$i(\text{faux}) = \emptyset \quad (4.7)$$

$$i(\neg A) = \mathcal{W} \setminus i(A) \quad (4.8)$$

$$i(A \wedge B) = i(A) \cap i(B) \quad (4.9)$$

$$i(A \vee B) = i(A) \cup i(B) \quad (4.10)$$

$$i(A \rightarrow B) = (\mathcal{W} \setminus i(A)) \cup i(B) = i(\neg A) \cup i(B) \quad (4.11)$$

L'incidence de la tautologie vrai est l'ensemble des univers \mathcal{W} puisqu'une tautologie est toujours vraie, peu importe la situation. On remarque aussi que l'incidence de la conjonction et de la disjonction n'a pas à se soucier de la dépendance des propositions, puisque tout est géré par la théorie des ensembles.

Exemple 4.3

On ajoute des propositions à l'exemple précédent :

- p : Il fait soleil.
- q : Il y a des nuages dans le ciel.
- r : Il pleut.

On remarque que la proposition p est vraie si l'on se trouve dans les univers w_1 ou w_3 . On utilisera donc une fonction d'incidence pour indiquer cette observation :

$$i(p) = \{w_1, w_3\}$$

Les autres propositions se verront aussi attribuer une fonction d'incidence :

$$i(q) = \{w_2, w_3, w_4\}$$

$$i(r) = \{w_2\}$$

On peut ensuite faire quelques manipulations en utilisant les axiomes et notamment déterminer que c'est à la fois ensoleillé et nuageux dans l'univers w_3 :

$$i(p \wedge q) = i(p) \cap i(q) = \{w_1, w_3\} \cap \{w_2, w_3, w_4\} = \{w_3\}$$

On peut attribuer une probabilité à chacun des univers de l'ensemble \mathcal{W} . Si w est un univers, $\mu(w)$ sera la probabilité de se retrouver dans cet univers. La probabilité d'un ensemble d'univers I sera alors donnée par la somme des probabilités de chacun des univers w de

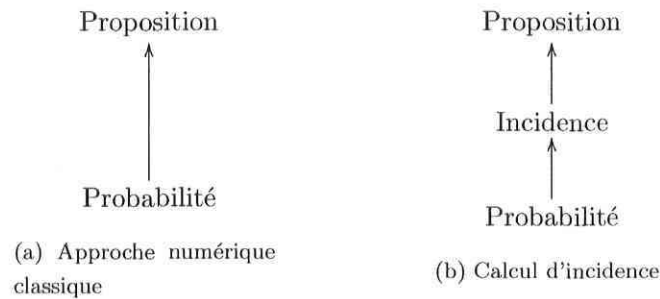


Figure 4.2: Couche du calcul de la probabilité d'une proposition selon chacune des approches

l'ensemble :

$$\mu(I) = \sum_{w \in I} \mu(w) \quad (4.12)$$

Puisque l'ensemble des univers de \mathcal{W} est exhaustif et disjoint, la probabilité de \mathcal{W} sera donnée par $\mu(\mathcal{W}) = 1$.

On utilisera donc la fonction d'incidence pour déterminer la probabilité d'une proposition au lieu d'attribuer une probabilité directement à chacune des propositions. Cette nouvelle couche de calcul est représentée sur la Figure 4.2.

$$\text{Prob}(\phi) = \mu(i(\phi)) \quad (4.13)$$

Exemple 4.4

En suivant toujours le même exemple, on pose la distribution de probabilité suivante :

- $\mu(w_1) = 0.2$
- $\mu(w_2) = 0.4$
- $\mu(w_3) = 0.1$
- $\mu(w_4) = 0.3$

On pourra ainsi déterminer que la probabilité que le ciel a des nuages est de 0.8 :

$$\text{Prob}(q) = \mu(i(q)) = \mu(\{w_2, w_3, w_4\}) = \mu(w_2) + \mu(w_3) + \mu(w_4) = 0.8$$

La probabilité d'avoir des nuages et du soleil se calculera par :

$$\text{Prob}(p \wedge q) = \mu(i(p \wedge q)) = \mu(i(p) \cap i(q)) = \mu(w_3) = 0.1$$

En résumé, l'information peut être modélisée selon la structure définie ci-dessous :

Définition 4.1. Structure de calcul d'incidence.

Une structure du calcul d'incidence (*Incidence Calculus Theory*, ou ICT) et une modélisation de l'information sous la forme d'un tuple tel que :

$$\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}, \mathcal{A}, i \rangle \quad (4.14)$$

où :

- \mathcal{W} : L'ensemble fini des univers possibles
- Pour tout $w \in \mathcal{W}$, $\mu(w)$ est la probabilité de w et $\mu(\mathcal{W}) = 1$, puisque $\mu(I) = \sum_{w \in I} \mu(w)$
- \mathcal{P} : Ensemble fini de propositions atomiques. Ex. : $\{a, b, c\}$. Chaque proposition atomique peut avoir soit l'état vrai, soit faux.
- \mathcal{A} : Sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ sur lequel on a de l'information. Ex. : $\{a, b, a \vee b, a \wedge c\}$
- i est une fonction, qui fait une transformation $\mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{W}}$. $i(\phi)$ est l'ensemble des univers dans \mathcal{W} pour lequel ϕ a une valeur vraie, i.e., $i(\phi) = \{w \in \mathcal{W} \mid w \models \phi\}$.

$\mathcal{L}(\mathcal{P})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, utilisé plus loin, nécessitent la définition :

Définition 4.2. Langage propositionnel $\mathcal{L}(O)$:

Si O est un ensemble fini de propositions, son langage propositionnel est formé des éléments suivants :

- vrai, faux $\in \mathcal{L}(O)$
- si $q \in O$, alors $q \in \mathcal{L}(O)$
- si $\phi, \psi \in \mathcal{L}(O)$ alors $\neg\phi, \neg\psi, \phi \wedge \psi, \phi \vee \psi, \phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \phi \in \mathcal{L}(O)$

C'est donc dire que $\mathcal{L}(O)$ est fermé avec les opérateurs logiques de négation (\neg), de disjonction (\vee), de conjonction (\wedge) et d'implication (\rightarrow).

Exemple 4.5

Soit l'ensemble des propositions atomiques $\mathcal{P} = \theta_1, \theta_2$, le langage propositionnel sera composé de toutes les combinaisons que l'on peut faire avec les opérateurs \neg, \vee, \wedge et \rightarrow , soient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \{ & \text{vrai, faux, } \theta_1, \theta_2, \neg\theta_1, \neg\theta_2, \theta_1 \vee \theta_2, \theta_1 \wedge \theta_2, \theta_1 \rightarrow \theta_2, \theta_2 \rightarrow \theta_1, \\ & \neg\theta_1 \vee \theta_2, \neg\theta_1 \wedge \theta_2, \neg\theta_1 \rightarrow \theta_2, \theta_2 \rightarrow \neg\theta_1, \theta_1 \vee \neg\theta_2, \theta_1 \wedge \neg\theta_2, \theta_1 \rightarrow \neg\theta_2, \neg\theta_2 \rightarrow \theta_1 \} \end{aligned}$$

La fonction i est définie pour les éléments de \mathcal{A} (les axiomes). Cependant, d'après (4.6)-(4.11) la définition peut être étendue aux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ (le langage de \mathcal{A}), fermé sous les opérateurs \neg, \vee et \wedge .

Une caractéristique importante du calcul d'incidence est l'existence de bornes inférieures et supérieures d'incidence, analogues à ce que l'on connaît dans la théorie de l'évidence.

$$i_*(\phi) = \bigcup_{\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \{i(\psi) \mid \psi \models \phi\} \quad (4.15)$$

$$i^*(\phi) = \bigcap_{\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \{i(\psi) \mid \phi \models \psi\} \quad (4.16)$$

Il a été démontré dans [Corrêa Da Silva et Bundy, 1991], et repris dans [Liu, 2001], que l'on peut en tirer deux propositions :

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}), i_*(\phi) = i(\phi) = i^*(\phi). \quad (4.17)$$

et

$$\forall \phi \in \mathcal{L}(\mathcal{P}), i_*(\phi) = \mathcal{W} \setminus i^*(\neg\phi). \quad (4.18)$$

Aux bornes inférieures et supérieures d'incidences correspondent les probabilités inférieure et supérieure, données par :

$$\text{Prob}^*(\phi) = \mu(i^*(\phi)) \quad (4.19)$$

$$\text{Prob}_*(\phi) = \mu(i_*(\phi)) \quad (4.20)$$

Ces définitions de probabilités supérieures et inférieures sont inutiles dans le calcul d'incidence en raison de (4.17). Elles sont tout de même définies ici afin d'aider à la comparaison avec le calcul d'incidence généralisé que l'on étudie plus loin (Section 4.2).

Exemple 4.6

Soit la structure d'incidence suivante :

$$\langle \mathcal{W}_a, \mu_a, \mathcal{P}_a, \mathcal{A}_a, i_a \rangle \quad (4.21)$$

où :

- $\mathcal{W}_a = \{w_{a1}, w_{a2}\}$
- $\mu_a(w_{a1}) = 0.6, \mu_a(w_{a2}) = 0.4$
- $\mathcal{P}_a = \{p\}$
- $\mathcal{A}_a = \{p\}$
- $i : i_a(p) = \{w_{a1}\}$

Les probabilités supérieure et inférieure de p correspondront à :

$$\text{Prob}^*(p) = \mu(i^*(p)) = \mu(\{w_{a1}\}) = 0.6 \quad (4.22)$$

$$\text{Prob}_*(p) = \mu(i_*(p)) = \mu(\mathcal{W} \setminus i(-p)) = \mu(\{w_{a1}\}) = 0.6 \quad (4.23)$$

L'axiome 4.8 permet également de déterminer les probabilités de $\neg p$:

$$\begin{aligned} \text{Prob}^*(\neg p) &= \mu(i^*(\neg p)) = \mu(i(\neg p) \cap i(\text{vrai})) = \mu(i(\neg p)) \\ &= \mu(\mathcal{W} \setminus i(p)) = \mu(\{w_{a2}\}) = 0.4 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\text{Prob}_*(\neg p) = \mu(i_*(\neg p)) = \mu(i(\neg p)) = \mu(\mathcal{W} \setminus i(p)) = \mu(\{w_{a2}\}) = 0.4 \quad (4.25)$$

Ce résultat est conséquent avec la proposition (4.17) : les probabilités inférieure et supérieure sont identiques puisque p et $\neg p$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

4.1.2 Inférences

Tout comme la logique propositionnelle, vue à la section 2.5.1, le calcul d'incidence utilise un algorithme et des règles pour déterminer quelles sont les nouvelles propositions logiques qu'il est possible d'inférer à partir des connaissances actuelles. Par exemple, si l'on sait que A est vraie et que $A \rightarrow B$ est aussi vraie, le système doit pouvoir déterminer que B sera vraie, par la règle du *modus ponens*.

Les axiomes (4.6) à (4.11) permettent d'inférer facilement de nouvelles propositions à l'aide des éléments de \mathcal{A} de manière à définir i sur $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Le calcul d'incidence peut aussi faire des inférences à partir des propositions dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ en utilisant les bornes inférieure et supérieure d'incidence. Pour ce faire, il utilise une méthode appelée *Legal Assignment Finder*. Il a été démontré par [Wang et al., 1996] que ces règles sont complètes.

Ces règles ne sont pas énumérées ici, mais elles valent la peine d'être mentionnées puisqu'elles présentent une approche originale au raisonnement, même si elles n'ont pas été reprises dans le calcul d'incidence généralisé, ni utilisées dans ce mémoire.

4.1.3 Limites de la théorie

Weiru Liu a déterminé trois grands inconvénients au calcul d'incidence [Liu, 2001].

1. Représentation limitée de l'ignorance

L'axiome 4.8 ($i(\neg A) = W \setminus i(A)$) nécessite que pour chaque proposition ϕ , l'incidence de sa négation $\neg\phi$ soit définie. Cela signifie qu'on ne peut avoir d'univers où on ne connaît pas l'état de la proposition : elle est soit vraie, soit fausse.

2. Complexité des algorithmes pour la construction des fonctions d'incidence

Dans la plupart des applications, les données sont déjà disponibles en format numérique et doivent être converties afin de pouvoir utiliser les fonctions d'incidence. Il existe des algorithmes [McLean et al., 1995] pour le faire, mais ils sont très peu efficaces.

3. Incapacité à gérer des informations multiples

Il n'existe pas de moyen pour combiner de l'information modélisée par le calcul d'incidence, ce qui est une limitation critique en fusion de données.

4.2 Le calcul d'incidence généralisé

Weiru Liu a apporté certaines améliorations au calcul d'incidence pour lui permettre d'abord de combiner de l'information [Liu et Bundy, 1992] en s'inspirant de la combinaison de Dempster. Elle a par la suite apporté de multiples raffinements à la théorie et a présenté le calcul d'incidence généralisé (*Generalized Incidence Calculus*) dans sa thèse doctorale. Elle publia plus tard un ouvrage présentant en détail cette théorie [Liu, 2001].

Le calcul d'incidence généralisé a comme objectif de régler les trois principaux problèmes énumérés à la section 4.1.3. On se concentrera ici sur les problèmes 1 et 3 qui sont particulièrement critiques pour la fusion de données. En effet, il faut absolument un moyen de représenter l'ignorance et une méthode pour combiner l'information.

4.2.1 Définitions

Définition 4.3. Théorie du calcul d'incidence généralisé.

Une théorie du calcul d'incidence généralisé (*Generalized Incidence Calculus Theory*, ou GICT) est une modélisation de l'information sous la forme d'un tuple tel que :

$$\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}, \mathcal{A}, i \rangle \quad (4.26)$$

où :

- \mathcal{W} : L'ensemble fini des univers possibles
- Pour tout $w \in \mathcal{W}$, $\mu(w)$ est la probabilité de w et $\mu(\mathcal{W}) = 1$, puisque $\mu(I) = \sum_{w \in I} \mu(w)$
- \mathcal{P} : Ensemble fini de propositions atomiques. Ex. : $\{a, b, c\}$. Chaque proposition atomique peut avoir l'état vrai, faux **ou inconnu**.
- \mathcal{A} : Sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ sur lequel on a de l'information. vrai et faux font toujours partis de cet ensemble. Ex. : $\{a, b, a \vee b, a \wedge c, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- i est une fonction qui fait une transformation $\mathcal{A} \rightarrow 2^{\mathcal{W}}$. $i(\phi)$ est l'ensemble des univers dans \mathcal{W} pour lequel ϕ a une valeur vraie, i.e., $i(\phi) = \{w \in \mathcal{W} \mid w \models \phi\}$.

On retrouve en gras dans cette définition les ajouts par rapport à la définition 4.1. De cette définition, on déduit une série d'axiomes qui diffèrent du calcul d'incidence :

$$i(A \wedge B) = i(A) \cap i(B) \quad (4.27)$$

$$i(A) \cap i(\neg A) = \emptyset \quad (4.28)$$

$$i(A) \cup i(\neg A) \subseteq \mathcal{W} \quad (4.29)$$

$$i(A) \cup i(B) \subseteq i(A \vee B) \quad (4.30)$$

$$i(A) \subseteq i(B) \text{ si } A \models B \quad (4.31)$$

On remarque principalement que $i(A) \cup i(\neg A)$ n'est plus égal à \mathcal{W} comme pour le calcul d'incidence. En effet, l'incidence de la négation d'une proposition n'est plus nécessairement définie, ce qui fait qu'une proposition peut avoir l'état *inconnu* dans certains univers. De plus, on remarque en (4.30) qu'il est possible que l'incidence de $A \vee B$ soit plus grande que l'incidence de A et de B réunies. En effet, on peut avoir un univers dans lequel A et B ont l'état inconnu, mais où l'on sait qu'au moins une des deux peut être vraie. Un exemple d'une telle situation serait un capteur qui ne peut distinguer A et B , alors qu'il observe soit A , soit B , soit les deux.

Exemple 4.7

Le bulletin météo annonce de la pluie avec une probabilité de 70%. Comment modéliser cette information en utilisant le calcul d'incidence ?

On définit l'ensemble des univers comme étant $\mathcal{W}_a = \{w_{a1}, w_{a2}\}$, où w_{a1} est l'ensemble des univers où il pleuvra et w_{a2} l'ensemble des univers où il ne pleuvra pas.

On définit ensuite la proposition p comme étant « Il pleuvra aujourd'hui » et $\neg p$ « Il ne pleuvra pas aujourd'hui ». La proposition p est vraie dans l'ensemble d'univers w_{a1} et $\neg p$ dans w_{a2} .

Définissons donc la GICT :

- $\mathcal{W} = \{w_{a1}, w_{a2}\}$

- $\mu :$

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.7 & w = w_{a1} \\ 0.3 & w = w_{a2} \end{cases}$$

- $\mathcal{P} = \{p\}$

- $\mathcal{A} = \{p, \neg p, \text{vrai}, \text{faux}\}$

- $i :$

$$i(\phi) = \begin{cases} \{w_{a1}, w_{a2}\} & \phi = \text{vrai} \\ \{w_{a1}\} & \phi = p \\ \{w_{a2}\} & \phi = \neg p \\ \emptyset & \phi = \text{faux} \end{cases}$$

La probabilité de pluie se calcule à partir de l'incidence de la proposition p , c'est à dire $i_*(p) = \{w_{a1}\}$. La probabilité inférieure sera donnée par :

$$\text{Prob}_*(p) = \mu(i_*(p)) = \mu(w_{a1}) = 0.7 \quad (4.32)$$

La probabilité supérieure est quant à elle calculée avec :

$$\text{Prob}^*(p) = \mu(i^*(p)) = \mu(\mathcal{W} \setminus i_*(\neg p)) = \mu(\{w_{a1}, w_{a2}\} \setminus w_{a2}) = \mu(w_{a1}) = 0.7 \quad (4.33)$$

Le Tableau 4.1 montre les probabilités pour toutes les propositions de \mathcal{A} . Puisque p et $\neg p$ sont définis en même temps, les bornes de probabilité inférieures et supérieures pour p sont identiques. On aurait obtenu le même résultat en utilisant le calcul d'incidence classique. L'exemple suivant présente une variante du même problème mettant en évidence le calcul d'incidence généralisé.

Exemple 4.8

Dans l'exemple précédent, la proposition $\neg p$ est spécifiée lors de la définition du GICT. Le résultat sera différent si on formule le problème de façon à mettre en évidence les caractéristiques de la théorie pour la représentation de l'ignorance :

$\phi \in \mathcal{A}$	$i_*(\phi)$	$i^*(\phi)$	$\text{Prob}_*(\phi)$	$\text{Prob}^*(\phi)$
p	w_{a1}	w_{a1}	0.7	0.7
$\neg p$	w_{a2}	w_{a2}	0.3	0.3
vrai	\mathcal{W}	\mathcal{W}	1	1
faux	\emptyset	\emptyset	0	0

Tableau 4.1: Les probabilités des propositions de \mathcal{A} de l'exemple 4.7

$\phi \in \mathcal{A}$	$i_*(\phi)$	$i^*(\phi)$	$\text{Prob}_*(\phi)$	$\text{Prob}^*(\phi)$
p	w_{b1}	\mathcal{W}	0.9	1
vrai	\mathcal{W}	\mathcal{W}	1	1
faux	\emptyset	\emptyset	0	0

Tableau 4.2: Les probabilités des propositions de \mathcal{A} de l'exemple 4.8

Un capteur extérieur retourne l'information sur les conditions météorologiques actuelles. Ce capteur n'est pas très fiable et ne retourne la bonne information que dans 90% des cas seulement. Dans le 10% restant, il a tendance à afficher n'importe quoi, qu'il pleuve ou non.

On définit donc la proposition p comme étant : « Il pleut ». On crée ensuite deux univers : l'un où le capteur fonctionne bien, et l'autre où il fait défaut, respectivement w_{b1} et w_{b2} de façon à obtenir la GICT :

- $\mathcal{W}_b = \{w_{b1}, w_{b2}\}$
- μ :

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.9 & w = w_{b1} \\ 0.1 & w = w_{b2} \end{cases}$$

- $\mathcal{P} = \{p\}$
- $\mathcal{A} = \{p, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- i :

$$i(\phi) = \begin{cases} \{w_{b1}, w_{b2}\} & \phi = \text{vrai} \\ \{w_{b1}\} & \phi = p \\ \emptyset & \phi = \text{faux} \end{cases}$$

On obtient alors les probabilités du Tableau 4.2. On remarque dans ce cas que $i^*(p) \neq i_*(p)$, puisque la proposition $\neg p$ n'est pas dans l'ensemble des axiomes \mathcal{A} . On peut tout de même calculer ses probabilités inférieures et supérieures, puisque $\neg p \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$:

$$\text{Prob}_*(\neg p) = \mu(i_*(\neg p)) = 0 \tag{4.34}$$

Le résultat est nul car aucun axiome de \mathcal{A} , à l'exception de « faux », n'appuie directement $\neg p$. La borne supérieure de probabilité se calcule ainsi :

$$\text{Prob}^*(\neg p) = \mu(i^*(\neg p)) = \mu(\mathcal{W} \setminus i_*(\neg(\neg p))) = \mu(w_{b2}) = 0.1 \quad (4.35)$$

Cette probabilité n'est pas unitaire puisque l'axiome p s'oppose à $\neg p$.

Les deux exemples précédents montrent bien la différence entre le fait d'avoir une proposition incluse dans \mathcal{A} et une autre qui est incluse dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ seulement. Ce qui peut sembler être, de prime abord, une subtilité, est en fait la principale différence entre le calcul d'incidence de Bundy et le calcul d'incidence généralisé de W. Liu, cette dernière théorie permettant la représentation de l'ignorance. L'exemple 4.8 est semblable à l'exemple 4.6, mais le résultat est complètement différent en raison de la proposition (4.8) utilisé dans le second, si l'on fait abstraction des valeurs numériques différentes.

4.2.2 Combinaison de l'information

L'autre important problème du calcul d'incidence est qu'il ne permet pas la combinaison de différentes pièces d'informations. Liu note les propriétés intéressantes de la combinaison de Dempster, mais aussi ses inconvénients, principalement au niveau de l'indépendance stricte des informations qui est nécessaire. Elle a développé une méthode de combinaison équivalente à la combinaison de Dempster mais qui est à base de symboles, de manière à éviter cette faiblesse de cette méthode numérique.

La combinaison se produit à l'arrivée d'une nouvelle information. Cette nouvelle information peut avoir un des trois effets suivants :

1. Révision de la distribution de probabilité : L'information peut simplement remplacer la distribution de probabilité par une nouvelle. Par exemple, une source peut conserver le même jugement, mais modifier son niveau de certitude en raison d'un changement dans les conditions d'observation. Dans ce cas, on n'a qu'à modifier la distribution μ et conserver toutes les autres informations, notamment l'ensemble des axiomes \mathcal{A} et la fonction d'incidence i . Il s'agit alors d'une nouvelle GICT qui remplace l'ancienne.
2. Nouvelle fonction d'incidence, même ensemble d'univers : Une nouvelle source spécifie une nouvelle fonction d'incidence i , mais conserve l'ensemble des univers possibles \mathcal{W} . Cette situation n'est pas habituelle dans la fusion de données pour identification, mais

l'exemple suivant illustre une telle situation : Soit l'ensemble $\mathcal{W} = \{Lun, Mar, Mer, Jeu, Ven, Sam, Dim\}$ et la fonction d'incidence $i_1(pluie) = \{Ven, Sam, Dim\}$. Une autre source disant que ce sera venteux jeudi et vendredi, on intègre $i_2(vent) = \{Jeu, Ven\}$. Encore une fois, cela donne une nouvelle GICT qui remplacera l'ancienne et qui tiendra compte de cette nouvelle source.

3. Nouvelle fonction d'incidence, avec un ensemble d'univers différent : Contrairement à l'effet précédent, il n'existe pas un ensemble d'univers communs entre les deux sources d'informations. Il faudra alors créer un ensemble d'univers communs pour les deux informations afin de les combiner.

Le cas 1 est le plus simple à réaliser, il suffit de copier la GICT et de remplacer la distribution μ par une autre. Le cas 3 est identique au cas 2, sauf qu'il nécessite une étape préliminaire afin d'accorder les univers des deux GICT pour qu'elles puissent utiliser le même.

Lorsque l'on est dans le troisième cas, il faut d'abord modifier les deux GICT avant de combiner, ce qui ne peut se faire que si que les deux GICT sont DS-indépendants.

Définition 4.4. Transformation des GICT :

Soient $\langle \mathcal{W}_1, \mu_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{A}_1, i_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{W}_2, \mu_2, \mathcal{P}_2, \mathcal{A}_2, i_2 \rangle$, deux GICT qui peuvent être transformées en :

$$\langle \mathcal{W}_3, \mu_3, \mathcal{P}_3, \mathcal{A}_1, i'_1 \rangle \quad (4.36)$$

et

$$\langle \mathcal{W}_3, \mu_3, \mathcal{P}_3, \mathcal{A}_2, i'_2 \rangle \quad (4.37)$$

où :

- $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_1 \otimes \mathcal{W}_2 \setminus \mathcal{W}_0$
- $\mathcal{W}_0 = \bigcup_{\phi \wedge \psi = \text{faux}} i_1(\phi) \otimes i_2(\psi)$
- $i'_1(\phi) = (i_1(\phi) \otimes \mathcal{W}_2) \setminus \mathcal{W}_0$, lorsque $\phi \in \mathcal{A}_1$
- $i'_2(\phi) = (\mathcal{W}_1 \otimes i_2(\phi)) \setminus \mathcal{W}_0$, lorsque $\phi \in \mathcal{A}_2$
- $\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

La nouvelle distribution de probabilité sur \mathcal{W}_3 est donnée par :

$$\mu_3(\langle w_{1i}, w_{2j} \rangle) = \frac{\mu_1(w_{1i})\mu_2(w_{2j})}{1 - \sum_{\langle w_{1m}, w_{2n} \rangle \in \mathcal{W}_0} \mu_1(w_{1m})\mu_2(w_{2n})} \quad (4.38)$$

Une fois que l'on a deux GICT avec le même ensemble \mathcal{W} , on peut procéder à la combinaison en tant que telle.

Définition 4.5. Règle de combinaison

Soient $\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}, \mathcal{A}_1, i_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}, \mathcal{A}_2, i_2 \rangle$, deux GICT avec un ensemble d'univers commun. Le résultat de la combinaison de ces deux GICT est donné par :

$$\langle \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_0, \mu', P, \mathcal{A}, i \rangle \quad (4.39)$$

où :

- $\mathcal{W}_0 = \bigcup \{i_1(\phi) \cap i_2(\psi) \mid \phi \wedge \psi = \text{faux}, \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2\}$
- $\mathcal{A} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2, \varphi \neq \text{faux}\}$
- $i(\varphi) = \bigcup \{i_1(\phi) \cap i_2(\psi) \mid \phi \wedge \psi \models \varphi, \varphi \in \mathcal{A}, \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2, \phi \wedge \psi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\}$
- Pour tout $w \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_0, \mu'(w) = \frac{\mu(w)}{1 - \sum_{w' \in \mathcal{W}_0} \mu(w')}$
- $i(\text{vrai}) = \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_0, i(\text{faux}) = \emptyset$

\mathcal{W}_0 devient l'ensemble des univers où se produisent des conflits entre différentes propositions. Ces univers sont retirés de l'ensemble \mathcal{W} et la probabilité est redistribuée sur les univers de façon à ce que la somme des probabilités reste unitaire. On procède également à une conjonction des axiomes des deux GICT de manière à créer de nouvelles propositions. Il n'est pas toujours nécessaire d'effectuer l'étape de transformations des GICT, c'est pourquoi la détection des conflits est effectuée à nouveau lors de la combinaison en tant que telle.

4.3 Parallèle avec la théorie de l'évidence

Il a été démontré par Liu et Bundy [Liu et Bundy, 1994] que le calcul d'incidence généralisé est équivalent à la théorie de l'évidence pour la combinaison d'informations DS-indépendantes. Il a d'abord été démontré que : [Liu et Bundy, 1994, section 4.1]

Théorème 1 (Représentation de l'évidence). Pour toute structure DS (Θ, Bel) , il existe une GICT. Pour tout sous-ensemble A de Θ et sa formule correspondante ϕ_A dans $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, $\text{Bel}(A)$ dans la théorie de l'évidence est égale à $p_*(\phi_A)$ dans la GICT.

$$\text{Bel}(A) = \mu(i_*(\phi_A)) \quad (4.40)$$

Il en découle que la plausibilité correspond à la probabilité de la borne supérieure de l'incidence :

$$\text{Pl}(A) = \mu(i^*(\phi_A)) \quad (4.41)$$

Il est aussi prouvé que la combinaison est équivalente : [Liu et Bundy, 1994, section 4.2]

Théorème 2 (Combinaison d'information DS-indépendantes). Soient (Θ, Bel_1) et (Θ, Bel_2) , deux structures DS et Bel_1 et Bel_2 sont obtenues de deux informations DS-indépendantes, et que la combinaison de ceux-ci donne une structure DS (Θ, Bel) . De plus, $\langle \mathcal{W}_1, \mu_1, \mathcal{P}_\Theta, \mathcal{A}_1, i_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{W}_2, \mu_2, \mathcal{P}_\Theta, \mathcal{A}_2, i_2 \rangle$ sont deux GICT produites à partir des deux premières structures DS et que $\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}_\Theta, \mathcal{A}, i \rangle$ est la GICT combinée, alors (Θ, Bel) est équivalente à $\langle \mathcal{W}, \mu, \mathcal{P}_\Theta, \mathcal{A}, i \rangle$. Cela veut donc dire que pour tout sous-ensemble A de Θ ,

$$Bel(A) = \mu(i_*(\phi_A)) \quad (4.42)$$

4.4 Limitations du calcul d'incidence généralisé

Bundy et Liu reconnaissent qu'il n'existe pas de solution générale à la combinaison d'information dépendante[Liu et Bundy, 1992]. Cette limite restreint considérablement l'usage du calcul d'incidence pour le bouclage d'information (chapitre 6). Cette limitation particulière s'illustre par la combinaison d'une source d'information avec elle-même, qui ne devrait pas changer l'information contenue, selon le principe d'idempotence : (\sqcap représente ici une combinaison)

$$S1 \equiv S1 \sqcap S1 \quad (4.43)$$

Le calcul d'incidence généralisé réussit facilement ce test. Toutefois, il ne réussit pas à gérer une situation légèrement plus complexe. La combinaison d'une source d'information avec l'une de ses composantes ne devrait pas non plus changer son contenu :

$$S1 \sqcap S2 \equiv S1 \sqcap (S1 \sqcap S2) \quad (4.44)$$

Weiru Liu a défini 3 cas de combinaisons[Liu, 2001] :

- R1 Les ensembles des univers \mathcal{W} sont identiques dans les deux GICT. La combinaison se fait directement dans ce cas.
- R2 Les ensembles des univers \mathcal{W} sont différents, et DS-indépendants, au sens de Voorbraak[Voorbraak, 1991]. On crée dans ce cas un nouvel ensemble d'univers qui sera commun aux deux GICT.
- R3 Les ensembles des univers ne sont pas DS-indépendants. Il n'est généralement pas possible de traiter ce type de combinaison.

Le cas présent est un cas particulier de la catégorie R3. Les deux GICT sont semi-dépendantes puisqu'il est théoriquement possible de remonter jusqu'à des sources indépendantes. Weiru

Liu n'a pas tenu compte de ce cas dans la conception de sa théorie. Cette limitation s'illustre facilement grâce à l'exemple 4.9.

Exemple 4.9

La Figure 4.3 présente un exemple de combinaison d'informations qui causera problème. Les informations des $GICT_{F1}$ et $GICT_{S1}$ ne sont manifestement pas indépendantes puisque ces deux GICT ont une même source d'informations en commun, mais sont semi-dépendantes puisqu'on sait quelle est cette source d'informations.

On pose d'abord une S1 et une S2 avec conflit :

$$\begin{aligned} GICT_{S1} = & \langle \{w_{s1c}, w_{s1i}\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_2, \theta_3\}, \\ & \{\{\theta_2 \vee \theta_3\}, \text{vrai, faux}\}, \{\{w_{s1c}\}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} GICT_{S2} = & \langle \{w_{s2c}, w_{s2i}\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_1\}, \\ & \{\{\theta_1\}, \text{vrai, faux}\}, \{\{w_{s2c}\}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (4.46)$$

Les univers créés pour la combinaison F1 sont présentés dans le Tableau 4.3. Toutefois, cette combinaison cause un conflit puisque $(\theta_2 \vee \theta_3) \wedge \theta_1 \models \text{faux}$ si l'on suppose l'exclusion mutuelle. Il en résulte que l'univers $\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle$ est impossible et doit être éliminé de l'ensemble \mathcal{W} car l'une des deux sources doit nécessairement se tromper. La probabilité de cet univers est redistribuée sur les autres, dans le tableau 4.4. On obtient donc la $GICT_{F1}$ suivante :

$$\begin{aligned} GICT_{F1} = & \langle \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\}, \\ & \{0.44, 0.44, 0.11\}, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\ & \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_1, \text{vrai, faux}\}, \\ & \{\{\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\}, \{\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (4.47)$$

On peut donc déterminer que :

$$\text{Prob}^*(\theta_1) = \mu(i^*(\theta_1)) = \mu(\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle) = 0.44 \quad (4.48)$$

Le problème survient lorsque l'on veut combiner une deuxième fois la même information, ici celle modélisée par la $GICT_{S1}$. Puisque $GICT_{S1}$ et $GICT_{F1}$ n'ont pas le même ensemble d'univers \mathcal{W} , on doit en créer un nouveau qui sera commun aux deux. On se rend compte dans le Tableau 4.5 que cette transformation donne parfois des résultats illogiques. On note la présence d'univers aberrants tels que $\langle w_{1c}, w_{1i}, w_{2c} \rangle$, c'est à dire un univers où la source S1 est à la fois correcte et incorrecte. Cette confusion n'est pas traitée par le calcul d'incidence modifié.

Avant de faire la combinaison en tant que telle, on doit ajuster les fonctions d'incidence des deux GICT et détecter les conflits.

$$i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle\} \quad (4.49)$$

$$i'_{F1}(\theta_1) = \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle\} \quad (4.50)$$

$$i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle\} \quad (4.51)$$

Puisque $\theta_2 \vee \theta_3$ et θ_1 entrent encore en conflit, on fait la conjonction de leur incidence et obtenir l'ensemble des conflits \mathcal{W}_0 :

$$\mathcal{W}_0 = \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle\} \quad (4.52)$$

On doit donc distribuer la probabilité de cet univers sur les autres de façon à obtenir le tableau 4.6.

Cela donne donc la GICT suivante :

$$\circ \mathcal{W} = \{\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle\}$$

$\circ \mu :$

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.5517 & w = \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle \\ 0.1379 & w = \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle \\ 0.1379 & w = \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle \\ 0.1379 & w = \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle \\ 0.0345 & w = \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle \end{cases}$$

$$\circ \mathcal{P} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

$$\circ \mathcal{A} = \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_1, \text{vrai}, \text{faux}\}$$

$\circ i :$

$$i(\phi) = \begin{cases} \{\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle\} & \phi = \theta_2 \vee \theta_3 \\ \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle\} & \phi = \theta_1 \end{cases}$$

$$\text{Prob}^*(\theta_1) = \mu(i^*(\theta_1)) = \mu(\{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle\}) = 0.1379 \quad (4.53)$$

On remarque que la probabilité de θ_1 a diminué entre F1 et F2 alors qu'il n'y a pas eu intégration de nouvelles informations. De plus, on se retrouve devant un dilemme étrange puisque certains univers sont contradictoires en eux-mêmes. L'élimination de ces univers contradictoires ne règle pas le problème puisque l'on se retrouverait tout de même avec le Tableau 4.7.

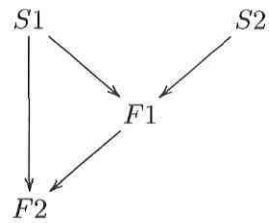


Figure 4.3: F1 devrait être identique à F2.

		$GICT_{S1}$	
		$\mu(w_{s1c}) = 0.8$	$\mu(w_{s1i}) = 0.2$
$GICT_{S2}$	$\mu(w_{s2c}) = 0.8$	0.64	0.16
	$\mu(w_{s2i}) = 0.2$	0.16	0.04

Tableau 4.3: Combinaison des univers pour créer F1

		$GICT_{S1}$	
		$\mu(w_{s1c}) = 0.8$	$\mu(w_{s1i}) = 0.2$
$GICT_{S2}$	$\mu(w_{s2c}) = 0.8$	0	0.44
	$\mu(w_{s2i}) = 0.2$	0.44	0.11

Tableau 4.4: Probabilités des univers F1 après normalisation

		$GICT_{S1}$	
		$\mu(w_{s1c}) = 0.8$	$\mu(w_{s1i}) = 0.2$
$GICT_{F1}$	$\mu(\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle) = 0.444$	0.355	0.088
	$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle) = 0.444$	0.355	0.088
	$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle) = 0.111$	0.088	0.022

Tableau 4.5: Combinaison des univers de F2

$GICT_{F1}$	$GICT_{S1}$	$\mu(w_{s1c}) = 0.8$	$\mu(w_{s1i}) = 0.2$
$\mu(\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle) = 0.444$		0.5517	0.1379
$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle) = 0.444$		0	0.1379
$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle) = 0.111$		0.1379	0.0345

Tableau 4.6: Combinaison des univers de F2, avec la normalisation prévue par le calcul d'incidence généralisé

$GICT_{F1}$	$GICT_{S1}$	$\mu(w_{s1c}) = 0.8$	$\mu(w_{s1i}) = 0.2$
$\mu(\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle) = 0.444$		0.7619	0
$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle) = 0.444$		0	0.1905
$\mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle) = 0.111$		0	0.0476

Tableau 4.7: Combinaison des univers de F2

Il semble donc que de l'information nécessaire à la deuxième combinaison ait été perdue lors la combinaison précédente. Dans cet exemple, on pourrait éviter cette situation en refusant de combiner une nouvelle fois l'information S1. Toutefois, cette avenue n'est pas toujours possible. Il devient difficile de différencier S1 si celle-ci est combinée à une information tierce avant d'être combinée à F1. Une telle situation est étudiée au chapitre 6.

4.5 Discussion

Le calcul d'incidence et son extension, le calcul d'incidence généralisé, présentent différents avantages au niveau de la représentation de l'information, notamment grâce à l'utilisation de symboles. Le calcul d'incidence généralisé est particulièrement intéressant de par sa capacité à représenter l'ignorance et de sa correspondance avec la théorie de l'évidence.

Nous avons toutefois détecté une limitation importante au calcul d'incidence généralisé dans une situation particulière. De la même manière que la théorie de l'évidence ne peut combiner des information dépendantes en raison de perte d'informations, le calcul d'incidence généralisé ne peut combiner le cas énoncé en raison d'information perdue en présence de conflit. C'est sur cette prémisse que nous nous basons pour faire des modifications au calcul d'incidence dans le chapitre 5.

Calcul d'incidence généralisé modifié

Résumé : Nous présentons une série de modifications au calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu afin d'éliminer le problème lié à la recombinaisons de sources. Ces modifications retirent les calculs numériques effectués sur les probabilités des univers de façon à rendre une plus grande partie de la combinaison symbolique et ainsi lui permettre de mieux gérer les informations semi-dépendantes. Nous présentons une représentation possible de l'information adaptée à la fusion de données pour identification et nous discutons des capacités de la théorie au niveau du raisonnement logique.

Sommaire

5.1	Résumé des différences	52
5.2	Définitions	53
5.3	Comparaison avec le calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu .	60
5.4	Modélisation de l'information	70
5.5	Inférences	74
5.6	Discussion	76

5.1 Résumé des différences

Suite aux problèmes rencontrés avec le calcul d'incidence généralisé dans la section 4.4, nous révisons certains concepts du calcul d'incidence.

5.1.1 Utilisation d'ensembles

Le calcul d'incidence généralisé utilise des points pour désigner les univers possibles, alors que nous utilisons plutôt des ensembles. Ces modèles sont interchangeables, mais les ensembles permettent de rendre certaines opérations plus intuitives, comme on le verra à la section 5.3.

5.1.2 Univers en conflit

Dans le calcul d'incidence généralisé, les univers dans lesquels des propositions causent des conflits sont immédiatement éliminés et leurs probabilités redistribuées sur les autres, d'une manière analogue à la combinaison de Dempster. Au lieu de les éliminer, nous les marquons d'un drapeau et nous ne touchons pas aux probabilités avant la toute fin du traitement, où une redistribution est alors effectuée. Ce changement permet d'éviter le problème identifié en 4.4 et réduit la perte d'informations lors des combinaisons.

5.1.3 Modèles d'application

Il est apparu lors de l'implémentation informatique du calcul d'incidence que l'exclusion mutuelle des hypothèses n'est pas définie formellement dans la théorie : elle s'applique dans certains cas, pas du tout dans d'autres et parfois elle s'applique que pour quelques propositions à la fois. Une représentation formelle étant nécessaire, nous avons intégré le concept de modèle de la DS_mT [Smarandache et Dezert, 2004].

5.2 Définitions

5.2.1 Notions de base

Quelques nouvelles notions utilisées dans le calcul d'incidence généralisé modifié doivent d'abord être expliquées. Il s'agit principalement de concepts connus mais qui sont maintenant définis de manière légèrement différente de façon à faciliter la compréhension et à rendre certaines opérations plus intuitives.

Définition 5.1. Univers :

Situation dans laquelle on se trouve. Il y a une infinité d'univers, membres de l'ensemble \mathcal{S} . La somme des probabilités de chacun des univers est unitaire.

$$\sum_{w \in \mathcal{S}} \text{Prob}(w) = 1 \quad (5.1)$$

Chaque univers a une probabilité non-nulle, mais puisqu'il y a une infinité d'univers, la probabilité de chacun de ceux-ci sera infinitésimale. Les ensembles d'univers w peuvent toutefois avoir des probabilités dénombrables, puisque la probabilité d'un ensemble d'univers est la somme des probabilités des univers le constituant.

$$\text{Prob}(w) = \sum_{w_k \in w} \text{Prob}(w_k) \quad (5.2)$$

Définition 5.2. Contexte initial :

Un contexte initial \mathcal{W} est l'ensemble des sous-ensembles d'une partition de l'ensemble des univers \mathcal{S} représentant une connaissance. Chaque sous-ensemble de la partition est appelé univers initial.

L'union des sous-ensembles d'une partition donne l'ensemble \mathcal{W} et que l'intersection de deux sous-ensembles de la partition donne un ensemble vide.

$$\bigcup_{w_k \in \mathcal{W}} w_k = \mathcal{W} \quad (5.3)$$

$$\bigcap_{w_k \in \mathcal{W}} w_k = \emptyset \quad (5.4)$$

Il est à noter que l'univers initial est bel et bien un ensemble d'univers. Toutefois, on parlera parfois d'univers et non d'ensemble par simplification.

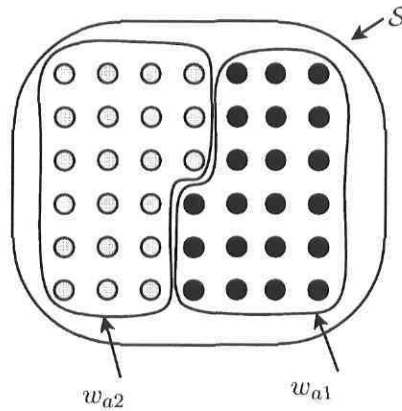


Figure 5.1: Partition de l'espace S pour représenter l'exemple 5.1

Exemple 5.1

Les points gris de Figure 5.1 représentent chacun un univers. On devrait théoriquement y retrouver une infinité d'univers, mais puisque cela ne peut se représenter, on suppose que chacun des cercles représente une infinité d'univers. Cet ensemble est partitionné en deux dans le contexte $\mathcal{W}_a = \{w_{a1}, w_{a2}\}$.

L'ensemble d'univers w_{a1} représente les univers dans lesquels il pleut aujourd'hui et l'ensemble w_{a2} , les univers dans lesquels il ne pleut pas. Cette partition montre que les deux ensembles sont mutuellement exclusifs et qu'ils recouvrent l'ensemble des univers possibles. La somme de leur probabilité est unitaire puisque les situations sont complémentaires et disjointes. Dans ce cas-ci, il pleuvra dans 50% des univers. L'ensemble w_{a1} se verra donc attribuer une probabilité de 0.5, ce qui implique nécessairement une probabilité de 0.5 à l'univers w_{a2} .

Définition 5.3. Contexte combiné :

Produit cartésien de deux contextes, initiaux ou combinés, tel que :

$$\mathcal{W}_c = \mathcal{W}_a \times \mathcal{W}_b \quad (5.5)$$

Il est à noter que $\mathcal{W}_a \times \mathcal{W}_b$ et $\mathcal{W}_b \times \mathcal{W}_a$ sont équivalents.

Exemple 5.2

Soient les contextes de la Figure 5.2 :

$$\mathcal{W}_a = \{w_{a1}, w_{a2}\} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{W}_b = \{w_{b1}, w_{b2}\} \quad (5.7)$$

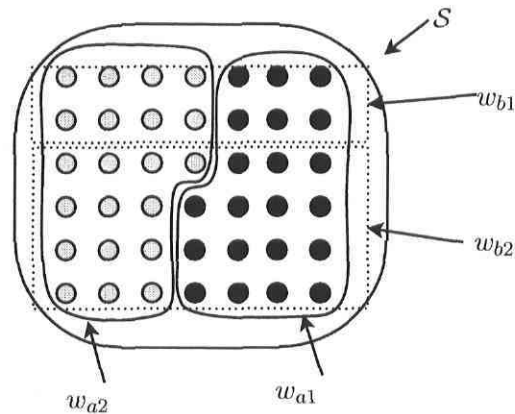


Figure 5.2: Le produit des deux partitions donne naissance à un nouveau partitionnement des univers

Le contexte \mathcal{W}_b est lié à la proposition a , « Annie possède une voiture de marque Audi ». Le contexte \mathcal{W}_a est quant à lui repris de l'exemple 5.1, et est lié à la chute ou non de pluie aujourd'hui. Les univers dans lesquels Annie possède cette voiture sont membres de l'ensemble w_{b1} . Un univers sur trois est membre de cet ensemble, alors que dans les univers membres de w_{b2} , Annie ne possède pas une telle voiture. Ce dernier ensemble a alors une fréquence de $\frac{2}{3}$.

Le contexte combiné \mathcal{W}_c est défini comme étant :

$$\mathcal{W}_c = \mathcal{W}_a \times \mathcal{W}_b \quad (5.8)$$

$$\mathcal{W}_c = \{\langle w_{a1}, w_{b1} \rangle, \langle w_{a1}, w_{b2} \rangle, \langle w_{a2}, w_{b1} \rangle, \langle w_{a2}, w_{b2} \rangle\} \quad (5.9)$$

Le Tableau 5.1 montre ce contexte combiné avec le module de chacune de ses partitions. Ce module est bien sûr relatif puisque l'on est en présence d'une infinité d'univers. On peut toutefois l'interpréter comme étant la proportion d'univers présents dans la partition. Pour l'ensemble $w_{a1} \cap w_{b1}$, il s'agit donc de 6 univers sur 42, soit 1 sur 7. La proposition qui y est associée est la proposition $p \wedge a$, à laquelle on attribue une probabilité fréquentielle de $\frac{1}{7}$.

5.2.2 Modèle d'incidence

Les données sont représentées dans une structure appelée modèle d'incidence (MI). Cette structure contient toutes les informations nécessaires aux combinaisons.

Ensemble d'univers	Module	Propositions associées
$w_{a1} \cap w_{b1}$	6	$p \wedge a$
$w_{a1} \cap w_{b2}$	15	$p \wedge \neg a$
$w_{a2} \cap w_{b1}$	8	$\neg p \wedge a$
$w_{a2} \cap w_{b2}$	13	$\neg p \wedge \neg a$

Tableau 5.1: Contexte \mathcal{W}_c de l'exemple 5.2

Définition 5.4. Modèle d'incidence (MI) :

Un modèle d'incidence est un tuple tel que :

$$\langle \mathcal{W}, \mathcal{W}^F, \mu^0, \mathcal{P}, \mathcal{A}, i \rangle \quad (5.10)$$

où :

- \mathcal{W} : Contexte du modèle. Il peut s'agir d'un contexte initial ou combiné. **Il peut contenir des univers impossibles.**
- \mathcal{W}^F : **L'ensemble des ensembles d'univers du contexte \mathcal{W} dans lesquels des contradictions logiques surviennent.**
- μ^0 : **Fonction de distribution des probabilités sur chacun des contextes initiaux du modèle, même après combinaison.**
- \mathcal{P} : Ensemble fini de propositions atomiques. Ex. : $\{a, b, c\}$
- \mathcal{A} : Sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{P})$ sur lequel on a de l'information. vrai et faux font également partis de cet ensemble. Ex. : $\{a, b, a \vee b, a \wedge c, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- i : $i(\phi)$ est l'ensemble des univers dans \mathcal{W} pour lequel ϕ a une valeur vraie et auquel on a retiré les univers impossibles \mathcal{W}^F , i.e., $i(\phi) = \{w \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^F \mid w \models \phi\}$.

5.2.3 Manipulation des modèles d'incidence

Une série d'équations est utilisée afin d'extraire des informations utiles à partir des MI.

Définition 5.5. L'incidence inférieure est l'ensemble des univers dans lequel une proposition est réputée comme étant vraie, telle que :

$$i_*(\phi) = \bigcup_{\psi \in \mathcal{A}, \psi \models \phi} i(\psi) \quad (5.11)$$

Définition 5.6. L'incidence supérieure est l'ensemble des univers où la proposition n'est pas fausse, telle que :

$$i^*(\phi) = \mathcal{W} \setminus i_*(\neg\phi) \quad (5.12)$$

L'incidence supérieure est déterminée grâce aux propositions qui ne s'opposent pas à ϕ . Par exemple, $\neg\theta_1$ s'oppose à θ_1 , mais θ_2 ne s'y oppose pas. Toutefois, si on travaille avec un modèle où chaque hypothèse est exclusive, θ_2 s'opposera à θ_1 puisque les deux ne peuvent pas être vraies à la fois.

Définition 5.7. La probabilité d'un ensemble d'univers est donnée par :

$$\mu(w) = \begin{cases} \mu_{\cap}(w) + \frac{\mu_{\cap}(w) \cdot \mu(\emptyset)}{1 - \mu(\emptyset)} = \frac{\mu_{\cap}(w)}{1 - \mu(\emptyset)} & \forall w \subseteq \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^F \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.13)$$

avec

$$\mu_{\cap}(w) = \prod_{w_j \in w} \mu^0(w_j) \quad (5.14)$$

$$\mu(\emptyset) = \sum_{w \in \mathcal{W}^F} \mu_{\cap}(w) \quad (5.15)$$

Cette redistribution donne des expressions équivalentes à celles retrouvées dans la Définition 4.4, à l'exception du fait que la notation est différente. Cette notation a aussi l'avantage de mettre en évidence le fait que la probabilité de chacun des ensembles est calculée à partir de la probabilité des univers qui le forme ($\mu_{\cap}(w)$) et augmentée d'une certaine valeur due aux conflits présents dans les autres univers. Les ensembles d'univers qui sont en conflit se retrouveront avec une probabilité nulle.

La probabilité d'une proposition n'est pas définie directement, mais passe toujours par son incidence. L'incidence étant un ensemble d'univers, on calcule la probabilité d'une proposition grâce à la probabilité des univers.

Définition 5.8. La borne supérieure de probabilité d'une proposition est donnée par :

$$\text{Prob}^*(\phi) = \mu(i^*(\phi)) \quad (5.16)$$

Sa borne inférieure est alors :

$$\text{Prob}_*(\phi) = \mu(i_*(\phi)) \quad (5.17)$$

5.2.4 Combinaison de l'information

Deux informations sous forme de MI se combinent en suivant les étapes décrites ci-après.

Étape 1 : La création d'un contexte commun.

Cette étape optionnelle est nécessaire si les deux MI ont des contextes \mathcal{W} différents. On doit alors modifier les deux MI, disons MI_1 et MI_2 pour leur attribuer un nouveau contexte. La Figure 5.3 donne l'exemple de la combinaison de deux contextes en (a) qui forment un nouveau contexte en (b).

$$\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2 \quad (5.18)$$

Puisque les fonctions i_1 et i_2 des MI font référence respectivement à \mathcal{W}_1 et \mathcal{W}_2 , on doit également les modifier pour qu'ils réfèrent au contexte \mathcal{W}_3 .

$$i'_1(\phi) = i_1(\phi) \times \mathcal{W}_2 \quad (5.19)$$

$$i'_2(\phi) = \mathcal{W}_1 \times i_2(\phi) \quad (5.20)$$

Les fonctions μ^0 seront alors combinées de manière à ce que la transformation d'un univers du contexte initial vers une probabilité reste la même. Cela revient à faire une concaténation de μ_1^0 et μ_2^0 en un μ_3^0 . L'on doit aussi ajuster les ensembles en conflit \mathcal{W}^F :

$$\mathcal{W}_1^{F'} = \mathcal{W}_1^F \times \mathcal{W}_2 \quad (5.21)$$

$$\mathcal{W}_2^{F'} = \mathcal{W}_1 \times \mathcal{W}_2^F \quad (5.22)$$

Dans certaines situations, les opérations précédentes peuvent mener à la création d'univers aberrants. Il peut arriver que l'on tente de faire le produit cartésien de deux ensembles faisant parti d'une même partition. Dans ce cas, on se retrouvera avec un ensemble vide qui sera rejeté du contexte, comme par exemple l'ensemble $\langle w_{a1}, w_{b1}, w_{a2} \rangle$. Cet ensemble ne contient aucun élément puisqu'il est formé de l'intersection de deux ensembles disjoints, w_{a1} et w_{a2} . Il faudra alors ajuster les fonctions d'incidence et les ensembles \mathcal{W}^F pour ne pas qu'ils contiennent eux aussi ces ensembles aberrants, même s'ils sont eux aussi impossibles. De la même manière, le produit cartésien d'un ensemble avec lui-même donnera un résultat idempotent. Le sous-ensemble $\langle w_{a1}, w_{b1}, w_{a1} \rangle$ se simplifiera donc en $\langle w_{a1}, w_{b1} \rangle$ puisque les deux représentent exactement le même sous-ensemble d'univers.

Suite à cette étape préparatoire, les deux MI conservent toujours les mêmes renseignements. La seule différence est qu'ils la représentent en utilisant un contexte commun. La combinaison en tant que telle ne commence qu'à l'étape suivante.

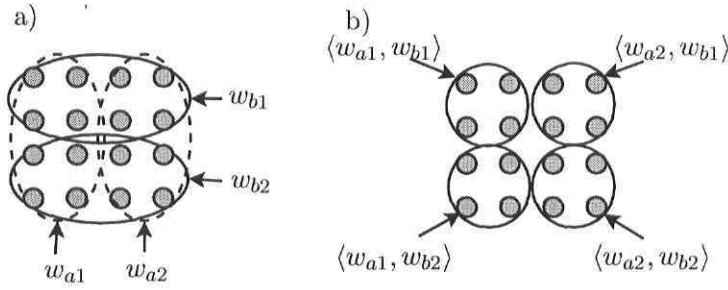


Figure 5.3: Combinaisons de deux contextes en a) afin de créer un nouveau contexte en b)

Étape 2 : Détection des conflits.

L'ensemble \mathcal{W}_3^C contient les univers dans lesquels des impossibilités logiques surviennent, c'est à dire $\phi \wedge \psi \models \text{faux}$. Cela revient à vérifier si la proposition $\phi \wedge \psi$ est validable.

$$\mathcal{W}_3^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi \models \text{faux}} i'_1(\phi) \cap i'_2(\psi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2 \quad (5.23)$$

On forme finalement l'ensemble \mathcal{W}_3^F en ajoutant les \mathcal{W}^F des prémisses, ce qui permet de garder les traces des univers impossibles qui étaient déjà détectés lors des combinaisons précédentes.

$$\mathcal{W}_3^F = \mathcal{W}_1^{F'} \cup \mathcal{W}_2^{F'} \cup \mathcal{W}_3^C \quad (5.24)$$

Si une proposition était impossible dans un des deux MI, elle le restera dans le MI combiné.

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions.

On construit l'ensemble des axiomes \mathcal{A}_3 en prenant les axiomes des deux MI combinés et en ajoutant de nouveaux axiomes créés par la conjonction de ceux-ci. Puisque les ensembles \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 comprennent les propositions vrai et faux, l'opération suivante sera suffisante :

$$\mathcal{A}_3 = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (5.25)$$

Le contenu de l'ensemble des propositions \mathcal{P}_3 sera le résultat d'une simple union :

$$\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \quad (5.26)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

On doit finalement créer une fonction d'incidence qui tiendra compte des nouvelles propositions créées grâce à la disjonction.

$$i_3(\varphi) = \bigcup \{i'_1(\phi) \cap i'_2(\psi) \mid (\phi \wedge \psi \models \varphi), \phi \in \mathcal{A}_1, \psi \in \mathcal{A}_2, \phi \wedge \psi \neq \text{faux}\} \setminus \mathcal{W}_3^F \quad (5.27)$$

On est maintenant en mesure de former un MI_3 tel que :

$$\langle \mathcal{W}_3, \mathcal{W}_3^F, \mu^0, \mathcal{P}_3, \mathcal{A}_3, i_3 \rangle \quad (5.28)$$

5.2.5 Modèle d'application

La théorie de Dempster-Shafer utilise le modèle de Shafer, où toutes les hypothèses de l'ensemble Θ sont mutuellement exclusives et exhaustives. Cela signifie qu'une, et une seule, proposition atomique est vraie à la fois. Le calcul d'incidence n'a pas cette contrainte, mais il est possible de l'ajouter car des situations imposent cette condition. Pour ce faire, on n'a qu'à vérifier les contraintes lors de l'évaluation de la validabilité des propositions combinées avec $\phi \wedge \psi \neq \text{faux}$.

Une contrainte pourrait affirmer l'exclusivité des hypothèses, comme dans le modèle de Shafer, mais pourrait être moins restrictive en disant que seulement certaines propositions sont mutuellement exclusives. On pourrait dire par exemple que $\theta_1 \wedge \theta_2 \equiv \text{faux}$. Ce concept de contraintes est semblable au concept du modèle hybride de la théorie de Dezert-Smarandache [Smarandache et Dezert, 2004].

5.3 Comparaison avec le calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu

Cette section montre que le calcul d'incidence avec les modifications apportées se comporte de la même manière que le calcul d'incidence généralisé, sauf dans certaines situations où les modifications donnent des résultats intéressants.

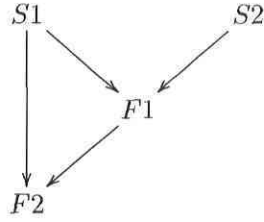


Figure 5.4: F1 devrait être identique à F2.

		\mathcal{A}_{S1}		
		$\theta_2 \vee \theta_3$	vrai	faux
\mathcal{A}_{S2}	θ_1	f	θ_1	f
	vrai	$\theta_2 \vee \theta_3$	v	f
	faux	f	f	f

 Tableau 5.2: L'intersection des axiomes de MI_{S1} et MI_{S2}

5.3.1 Recombinaison des sources

La recombinaison des sources est un cas mal géré par le calcul d'incidence généralisé qui nous a poussés à faire les présentes modifications au calcul d'incidence. Nous nous étions rendu compte que le calcul d'incidence gérait mal les cas en situation de conflit où des informations sont combinées à nouveaux. On reprend donc l'exemple 4.9, représenté sur la Figure 5.4, afin de démontrer que ces modifications permettent bien d'obtenir un bon résultat là où le calcul d'incidence généralisé échoue. Les combinaisons utilisent le modèle de Shafer qui force l'exclusion mutuelle des hypothèses.

Exemple 5.3

On modélise d'abord les informations sous forme de modèles d'incidence :

$$\begin{aligned}
 MI_{S1} = & \langle \{w_{s1c}, w_{s1i}\}, \{\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_2, \theta_3\}, \\
 & \{\{\theta_2 \vee \theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{s1c}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$$\begin{aligned}
 MI_{S2} = & \langle \{w_{s2c}, w_{s2i}\}, \{\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_1\}, \\
 & \{\{\theta_1\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{s2c}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Combinaison de S1 et S2**Étape 1 : Construction d'un contexte commun**

Selon (5.18), le nouveau contexte sera donné par :

$$\mathcal{W}_{F1} = \mathcal{W}_{S1} \times \mathcal{W}_{S2} = \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \quad (5.31)$$

Ce nouveau contexte force le réajustement des fonctions d'incidence par l'utilisation de (5.19) et (5.20).

$$\begin{aligned} i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= i_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \times \mathcal{W}_{S2} \\ &= \{w_{s1c}\} \times \{w_{s2c}, w_{s2i}\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} i'_{S2}(\theta_1) &= \mathcal{W}_{S1} \times i_{S2}(\theta_1) \\ &= \{w_{s1c}, w_{s1i}\} \times \{w_{s2c}\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

\mathcal{W}_{S1}^F et \mathcal{W}_{S2}^F étant vides, on n'a pas besoin de (5.21) et (5.22) pour réévaluer les conflits.

$$\mathcal{W}_{S1}^{F'} = \mathcal{W}_{S2}^{F'} = \emptyset \quad (5.34)$$

Étape 2 : Détection des conflits

Le Tableau 5.2 donne le résultat de la conjonction de chacun des axiomes des deux sources. Les conflits surviennent lorsque la conjonction n'est pas validable, ce qui est représenté par le résultat faux. Comme on pouvait le prévoir, la conjonction de n'importe quel axiome avec faux n'est pas validable. Puisque l'incidence de cette proposition est nulle, cela n'aura aucun impact sur l'ensemble \mathcal{W}_{F1}^C . On remarque toutefois que, en raison du modèle de Shafer utilisé dans ce problème, les axiomes $\theta_2 \vee \theta_3$ et θ_1 sont incompatibles et que la conjonction de leurs fonctions d'incidence n'est pas nulle. Celle-ci deviendra donc membre de l'ensemble des univers impossibles grâce à (5.23).

$$\mathcal{W}_{F1}^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi = \text{faux}} i'_{S1}(\phi) \cap i'_{S2}(\psi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2} \quad (5.35)$$

$$= i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{S2}(\theta_1) \quad (5.36)$$

$$= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle\} \quad (5.37)$$

On applique ensuite (5.24) afin de tenir compte de ce nouvel ensemble d'univers en conflit :

$$\mathcal{W}_{F1}^F = \mathcal{W}_{S1}^{F'} \cup \mathcal{W}_{S2}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F1}^C = \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle\} \quad (5.38)$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

L'équation (5.25) permet de déterminer l'ensemble des axiomes du nouveau MI. Dans ce cas-ci, aucun nouvel axiome n'est créé puisque le seul candidat potentiel, $(\theta_2 \vee \theta_3) \wedge \theta_1$, n'est pas

validable.

$$\mathcal{A}_{F1} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (5.39)$$

$$= \{(\theta_2 \vee \theta_3) \wedge \text{vrai}, \text{vrai} \wedge \theta_1, \text{vrai} \wedge \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (5.40)$$

$$= \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_1, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (5.41)$$

On remarque que \mathcal{A}_{F1} est tout simplement le contenu du Tableau 5.2, auquel on ajoute par définition faux. L'ensemble des propositions est tout simplement une concaténation effectuée grâce à (5.26).

$$\mathcal{P}_{F1} = \mathcal{P}_{S1} \cup \mathcal{P}_{S2} \quad (5.42)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

On détermine maintenant les fonctions d'incidence associées aux axiomes de l'étape précédente en utilisant (5.27).

$$i_{F1}(\varphi) = \bigcup \{i'_{S1}(\phi) \cap i'_{S2}(\psi) \mid (\phi \wedge \psi \models \varphi), \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2}, \phi \wedge \psi \neq \text{faux}\} \setminus \mathcal{W}_{F1}^F$$

Dans ce cas-ci, l'opération est très simple puisqu'on ne fait que reprendre les fonctions d'incidence ajustées à l'étape 1 puisque qu'aucun nouvel axiome ne vient compliquer la tâche.

$$\begin{aligned} i_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{S2}(\text{vrai}) \setminus \mathcal{W}_{F1}^F \\ &= (\{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\} \cap \mathcal{W}_{F1}) \setminus \mathcal{W}_{F1}^F \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} i_{F1}(\theta_1) &= i'_{S1}(\text{vrai}) \cap i'_{S2}(\theta_1) \\ &= (\mathcal{W}_{F1} \cap \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\}) \setminus \mathcal{W}_{F1}^F \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$= \{\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\} \quad (5.45)$$

Suite à cette combinaison, on se retrouve donc avec le MI suivant :

$$\begin{aligned} MI_{F1} &= \langle \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\}, \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle\}, \\ &\quad \{0.8, 0.2, 0.8, 0.2\}, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_1\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \\ &\quad \{\{\langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\}, \{\langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (5.46)$$

Combinaison de S1 et F1

On recombine maintenant l'information S1 avec le résultat de la combinaison précédente.

Étape 1 : Construction d'un contexte commun

L'utilisation de la notation utilisant les ensembles d'univers permet d'effectuer cette étape de façon intuitive. En effet, on se rend compte que certains ensembles d'univers créés sont vides, alors que d'autres voient leur notation simplifiée. Il faut garder en tête que

$\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle$ représente l'intersection des ensembles w_{s1c}, w_{s2c} et w_{s1i} . Cet ensemble vide peut alors être éliminé. La même situation se présente pour $\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle$, $\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle$ et $\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle$. D'autres, comme $\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle$, $\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle$, $\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle$ et $\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle$ sont simplifiés.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{F2} &= \mathcal{W}_{S1} \times \mathcal{W}_{F1} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1c} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s1i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s1i} \rangle \} \\
&\equiv \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \\
i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \\
&\equiv \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \\
i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \\
&\equiv \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \\
i'_{F1}(\theta_1) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \\
&\equiv \{ \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \\
\mathcal{W}_{F1}^{F'} &= \mathcal{W}_{S1} \times \mathcal{W}_{F1}^F \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \\
&\equiv \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \}
\end{aligned}$$

Cette simplification des univers retourne le même contexte que pour le MI_{F1} .

Étape 2 : Détection des conflits

Comme lors de la combinaison précédente, $\theta_2 \vee \theta_3$ de S1 et θ_1 de F1 sont incompatibles. La conjonction de leur fonction d'incidence deviendra membre de l'ensemble des univers impossibles.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{F2}^C &= \bigcup_{\phi \wedge \psi = \text{faux}} i'_{S1}(\phi) \cap i'_{F2}(\psi) && \forall \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{F1} \\
&= i'_{S1}(\theta_2 \wedge \theta_3) \cap i'_{F1}(\theta_1) \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \cap \{ \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} = \emptyset
\end{aligned} \tag{5.47}$$

On obtient un ensemble vide car le conflit a déjà été détecté lors d'une combinaison précédente.

On le retrouve dans \mathcal{W}_{F2}^F :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{F2}^F &= \mathcal{W}_{S1}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F1}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F2}^C \\
&= \emptyset \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \cup \emptyset = \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \}
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

$$\mathcal{A}_{F2} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{F1}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (5.49)$$

$$= \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_1, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (5.50)$$

$$\mathcal{P}_{F1} = \mathcal{P}_{S1} \cup \mathcal{P}_{S2} \quad (5.51)$$

On obtient ici le même résultat que lors de la combinaison précédente car aucun nouvel axiome ou proposition n'est ajoutée dans le MI.

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

Puisque :

$$i_{F2}(\varphi) = \bigcup \{i'_1(\phi) \cap i'_2(\psi) \mid (\phi \wedge \psi \models \varphi), \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{F1}, \phi \wedge \psi \neq \text{faux}\} \setminus \mathcal{W}_{F2}^F$$

On obtient

$$\begin{aligned} i_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \left\{ \left(i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \left(i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F1}(\text{vrai}) \right) \cup \right. \\ &\quad \left. \left(i'_{S1}(\text{vrai}) \cap i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F2}^F \\ &= \left\{ \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \right\} \\ &\quad \setminus \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \\ i_{F2}(\theta_1) &= \left(i'_{S1}(\theta_1) \cap i'_{F1}(\text{vrai}) \right) \setminus \mathcal{W}_{F2}^F \\ &= \{ \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \setminus \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \\ &= \{ \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \end{aligned}$$

Suite à cette combinaison, on retrouve encore ici exactement le même MI que lors de la combinaison précédente, ce qui confirme que le calcul d'incidence tel que modifié peut recombinaison l'information d'une même source.

$$\begin{aligned} MI_{F2} &= \langle \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \}, \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \}, \\ &\quad \{ 0.8, 0.2, 0.8, 0.2 \}, \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}, \{ \{ \theta_2 \vee \theta_3, \theta_1 \}, \text{vrai}, \text{faux} \}, \\ &\quad \{ \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \}, \{ \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle \end{aligned} \quad (5.52)$$

5.3.2 Équivalence dans les autres cas

On doit voir les modifications apportées comme étant une légère généralisation du calcul d'incidence lui permettant de gérer des cas non prévus dans la théorie originale et qui permettra d'étendre la théorie vers de nouvelles applications. Ces modifications au calcul d'incidence généralisé n'affectent donc pas le fondement théorique de celui-ci.

La principale modification se situe au niveau de la redistribution de la masse de conflit, c'est à dire la masse de l'ensemble \mathcal{W}^0 redistribuée lors de chaque combinaison dans le calcul d'incidence généralisé de Weiru Liu. Avec notre modification, cette masse est plutôt redistribuée à la toute fin du processus.

Démonstration.

Soient trois informations, modélisées par des modèles d'incidence MI_1 , MI_2 et MI_3 et par des théories de calcul d'incidence généralisé $GICT_1$, $GICT_2$ et $GICT_3$. Chacune des informations combinées ont un certain conflit entre eux. Chacune des GICT a un contexte composé de deux univers et contient des propositions contradictoires avec le modèle de Shafer.

Afin de faire la démonstration, on combine les trois GICT et on compare le résultat avec la combinaison des trois MI.

$$GICT_1 = \langle \{w_{11}, w_{12}\}, \{a, 1 - a\}, \{\theta_1\}, \{\{\theta_1\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{11}, \mathcal{W}_1, \emptyset\} \rangle \quad (5.53)$$

$$GICT_2 = \langle \{w_{21}, w_{22}\}, \{b, 1 - b\}, \{\theta_2\}, \{\{\theta_2\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{21}, \mathcal{W}_2, \emptyset\} \rangle \quad (5.54)$$

$$GICT_3 = \langle \{w_{31}, w_{32}\}, \{c, 1 - c\}, \{\theta_3\}, \{\{\theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{31}, \mathcal{W}_3, \emptyset\} \rangle \quad (5.55)$$

Les modèles d'incidence (MI) sont très semblables, mais sont caractérisés par la présence de l'ensemble \mathcal{W}^F .

$$MI_1 = \langle \{w_{11}, w_{12}\}, \{\}, \{a, 1 - a\}, \{\theta_1\}, \{\{\theta_1\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{11}, \mathcal{W}_1, \emptyset\} \rangle \quad (5.56)$$

$$MI_2 = \langle \{w_{21}, w_{22}\}, \{\}, \{b, 1 - b\}, \{\theta_2\}, \{\{\theta_2\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{21}, \mathcal{W}_2, \emptyset\} \rangle \quad (5.57)$$

$$MI_3 = \langle \{w_{31}, w_{32}\}, \{\}, \{c, 1 - c\}, \{\theta_3\}, \{\{\theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{31}, \mathcal{W}_3, \emptyset\} \rangle \quad (5.58)$$

Les $GICT_1$ et $GICT_2$ sont d'abord combinées et les probabilités de leurs univers sont calculées au Tableau 5.3. Puisque la proposition a de la première GICT et la proposition b de la deuxième entrent en conflit, on se retrouve avec un univers impossible, $\langle w_{11}, w_{21} \rangle$. Le calcul d'incidence généralisé redistribue immédiatement cette probabilité sur les autres univers, ce qui est fait au Tableau 5.4. En combinant le résultat avec la troisième GICT, on obtient les univers du Tableau 5.5. Encore une fois, des conflits rendent univers certains impossibles. Ici, les conflits entre θ_1 et θ_2 et puis θ_2 et θ_3 font que $\langle w_{11}, w_{22}, w_{31} \rangle$ et $\langle w_{12}, w_{21}, w_{31} \rangle$ sont impossibles et s'ajoutent à $\langle w_{11}, w_{21}, w_{31} \rangle$ et $\langle w_{11}, w_{21}, w_{32} \rangle$. Leur probabilité est alors redistribuée sur les autres univers et on obtient le Tableau 5.6.

On procède plus directement avec les modifications apportées. En effet, il suffit de déterminer le contenu de l'ensemble \mathcal{W}^F et d'appliquer (5.13). L'ensemble des univers impossibles \mathcal{W}^F correspondra à ceux qui ont une probabilité nulle dans le Tableau 5.6. Afin de démontrer l'équivalence des deux méthodes au niveau de la valeur des probabilités des autres univers, on calcule la probabilité de l'univers $\langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle$ à l'aide de notre méthode. (voir (5.13), (5.14) et (5.15))

$$\begin{aligned}
\mu(\langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle) &= \mu_{\cap}(w) + \frac{\mu_{\cap}(w) \cdot \mu(\emptyset)}{1 - \mu(\emptyset)} \\
&= \prod_{w_j \in w} \mu^0(w_j) + \frac{\prod_{w_j \in w} \mu^0(w_j) \cdot \mu(\emptyset)}{1 - \mu(\emptyset)} \\
&= \mu^0(w_{11})\mu^0(w_{22})\mu^0(w_{32}) + \frac{\mu^0(w_{11})\mu^0(w_{22})\mu^0(w_{32})\mu(\emptyset)}{1 - \mu(\emptyset)} \\
&= \frac{\mu^0(w_{11})\mu^0(w_{22})\mu^0(w_{32})}{1 - \mu(\emptyset)} \\
&= \frac{a(1-b)(1-c)}{1 - abc - a(1-b)c - (1-a)bc - ab(1-c)} \\
&= \frac{a(1-b)(1-c)}{1 - ab - a(1-b)c - (1-a)bc}
\end{aligned}$$

La probabilité des autres univers s'obtient de la même manière pour fournir les mêmes résultats que ceux du Tableau 5.6.

Cette démonstration donne quelques indications sur la raison pour laquelle le calcul d'incidence, et par extension la combinaison de Dempster, sont associatifs. On se rend compte que la redistribution du conflit se réalise sous la forme d'une somme, soustraite de l'unité. L'ordre de combinaison des données détermine l'ordre dans lequel les probabilités sont multipliées et soustraites, ce qui ne change pas le résultat puisque la somme et la multiplication sont associatives.

		$GICT_2$	
		$\mu(w_{21}) = b$	$\mu(w_{22}) = 1 - b$
$GICT_1$	$\mu(w_{11}) = a$	ab	$a(1 - b)$
	$\mu(w_{12}) = 1 - a$	$(1 - a)b$	$(1 - a)(1 - b)$

Tableau 5.3: Probabilité des univers combinés avec les GICT sans redistribution du conflit

		$GICT_2$	
		$\mu(w_{21})$	$\mu(w_{22})$
$GICT_1$	$\mu(w_{11})$	0	$\frac{a(1-b)}{1-ab}$
	$\mu(w_{12})$	$\frac{(1-a)b}{1-ab}$	$\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}$

Tableau 5.4: Probabilité des univers combinés avec les GICT avec redistribution du conflit

		$GICT_3$	
		$\mu(w_{31}) = c$	$\mu(w_{32}) = 1 - c$
$GICT_{1-2}$	$\mu(\langle w_{11}, w_{21} \rangle) = ab$	0	0
	$\mu(\langle w_{11}, w_{22} \rangle) = a(1 - b)$	$\frac{a(1-b)}{1-ab}c$	$\frac{a(1-b)}{1-ab}(1 - c)$
	$\mu(\langle w_{12}, w_{21} \rangle) = (1 - a)b$	$\frac{(1-a)b}{1-ab}c$	$\frac{(1-a)b}{1-ab}(1 - c)$
	$\mu(\langle w_{12}, w_{22} \rangle) = (1 - a)(1 - b)$	$\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}c$	$\frac{(1-a)(1-b)}{1-ab}(1 - c)$

Tableau 5.5: Probabilité des univers après la deuxième combinaison, sans redistribution du conflit

		$GICT_3$	
		$\mu(w_{31})$	$\mu(w_{32})$
$GICT_{1-2}$	$\mu(\langle w_{11}, w_{21} \rangle)$	0	0
	$\mu(\langle w_{11}, w_{22} \rangle)$	0	$\frac{a(1-b)(1-c)}{1-ab-a(1-b)c-(1-a)bc}$
	$\mu(\langle w_{12}, w_{21} \rangle)$	0	$\frac{(1-a)b(1-c)}{1-ab-a(1-b)c-(1-a)bc}$
	$\mu(\langle w_{12}, w_{22} \rangle)$	$\frac{(1-a)(1-b)c}{1-ab-a(1-b)c-(1-a)bc}$	$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{1-ab-a(1-b)c-(1-a)bc}$

Tableau 5.6: Probabilité des univers après la deuxième combinaison, avec redistribution du conflit

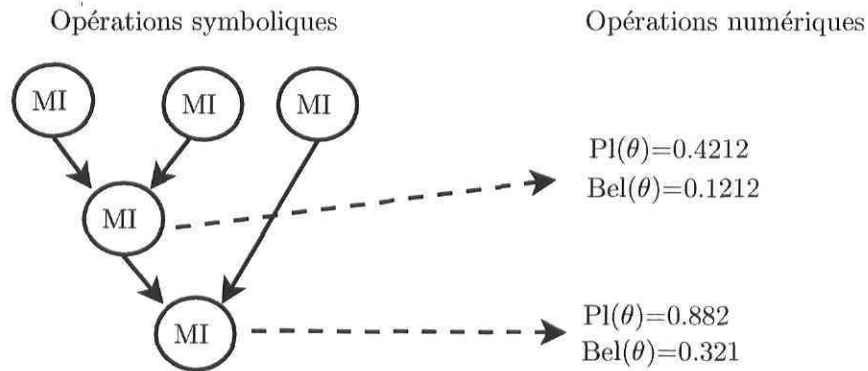


Figure 5.5: Relations entre les opérations numériques et symboliques dans le calcul d'incidence

5.3.3 Traitement symbolique

Une caractéristique importante de la modification apportée est qu'elle exclut toutes opérations numériques des combinaisons et se concentre sur les opérations symboliques. De plus, ces opérations sont indépendantes des résultats numériques. La Figure 5.5 représente cette distinction entre les opérations numériques et symboliques. Cette distinction a aussi comme avantage de réduire le nombre d'opérations à virgule flottante nécessaires pour l'obtention des résultats.

Les opérations numériques ne sont nécessaires qu'au moment où l'on désire avoir des mesures de croyance, de plausibilité ou de probabilité sur les informations. On peut alors prendre n'importe quel MI du processus pour en sortir les valeurs.

De plus, le fait d'avoir des expressions symboliques permet d'effectuer facilement certaines analyses graphiques et algébriques qui sont plus coûteuses sur le plan de temps de calcul avec l'utilisation d'un traitement numérique. Certains outils de calculs peuvent être utilisés, comme le gradient, de manière à déterminer par exemple quelle source est la plus critique dans une identification.

5.4 Modélisation de l'information

Afin d'utiliser le calcul d'incidence modifié à la fusion de données pour identification, on doit définir une modélisation de l'information qui s'applique au type de problème traité. Nous présentons ici un modèle compatible avec celui utilisé avec la théorie de l'évidence.

5.4.1 Informations imparfaites

Les informations sont souvent imparfaites, tel que discuté au chapitre 2. Ces imperfections peuvent se résumer à deux grands défauts, soient l'incertitude et l'imprécision. Pour chacune de ces imperfections, nous définissons un modèle et nous proposons ensuite un modèle regroupant ces deux défauts.

Imprécision

Dans le cas de la fusion pour identification, une information précise ne fait référence qu'à un seul objet. On veut pouvoir représenter des informations imprécises, et le calcul d'incidence, de part son utilisation de la logique propositionnelle pour la représentation de l'information, peut très bien le faire. Il n'a qu'à définir une expression logique représentant l'ensemble des hypothèses.

Exemple 5.4

Un cas classique est la source détectant un objet qu'elle est incapable d'identifier. Elle pourrait toutefois fournir une liste d'objets pouvant correspondre à ce qu'elle observe. Puisqu'elle ne peut fournir un seul objet, on dira que l'information est imprécise. Elle retournerait par exemple les objets A, B et D comme étant des objets possibles. Cette information pourrait être modélisée par le MI suivant :

- $\mathcal{W} = \{w_1\}$
- $\mathcal{W}^F = \emptyset$
- $\mu(w_1) = 1$
- $\mathcal{P} = \{\phi_A, \phi_B, \phi_D\}$
- $\mathcal{A} = \{\phi_A \vee \phi_B \vee \phi_D, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- $i(\phi_A \vee \phi_B \vee \phi_D) = w_1$

On note que la probabilité de l'univers w_1 est de 100% car on ne tient pas compte de l'incertitude.

Le calcul d'incidence a la propriété intéressante d'être capable de modéliser des situations plus complexes que celles modélisées avec la théorie de l'évidence. En effet, la logique propositionnelle permet l'utilisation notamment des opérateurs \wedge et \neg .

Exemple 5.5

Une source détecte un objet, mais est incapable de distinguer s'il s'agit de l'objet ϕ_D ou un assemblage de (ϕ_A et ϕ_B) ou de (ϕ_B et ϕ_C). En effet, ces deux paires d'objets ont la particularité de ressembler à l'objet ϕ_D lorsqu'ils sont à proximité l'un de l'autre. La source est tout de même capable de déterminer qu'il ne s'agit pas de ϕ_E . La source attribue une probabilité de 0.5 à l'objet ϕ_D et le reste aux deux paires.

- $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$

- $\mathcal{W}^F = \emptyset$

- $\mu :$

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.5 & w = w_1 \\ 0.5 & w = w_2 \end{cases}$$

- $\mathcal{P} = \{\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_D, \phi_E\}$

- $\mathcal{A} = \{\phi_A \wedge \phi_B, \phi_B \wedge \phi_C, \phi_D, \phi_E, \text{vrai}, \text{faux}\}$

- $i :$

$$i(\psi) = \begin{cases} w_1 & \psi = \phi_D \\ w_2 & \psi = \phi_A \wedge \phi_B \\ w_2 & \psi = \phi_B \wedge \phi_C \\ \{w_1, w_2\} & \psi = \neg\phi_E \end{cases}$$

Incertitude

Certaines sources ne peuvent pas bien fonctionner dans toutes les conditions et leur résultat devient incertain. La source elle-même peut évaluer que les conditions d'observation ne sont pas idéales et que son jugement n'est pas parfait. Trois situations sont possibles :

- La source est justifiée de donner le résultat, ce dernier est donc correct.
- Le résultat n'est pas justifié mais correct.
- Le résultat n'est pas justifié et incorrect.

Il est difficile de différencier les deux derniers cas puisque le résultat non justifié peut autant être correct qu'incorrect. On doit alors se placer en état d'ignorance et ne pouvoir ni accepter ni exclure le résultat. Le calcul d'incidence permet l'ajout d'un ensemble d'univers dont la probabilité sera non nulle, mais qu'aucune fonction d'incidence n'utilisera.

Exemple 5.6

Un capteur détermine la présence de pluie à l'extérieur. Il se peut que le capteur soit défectueux et on évalue que cette situation se produit une fois sur dix. Dans ce cas, l'information retournée est aléatoire. Le capteur peut donc donner une réponse correcte ou incorrecte, mais ce résultat ne sera pas justifié.

Il y a donc deux situations, soit le capteur est justifié, soit il ne l'est pas. Le capteur retourne la proposition « pluie ». Lorsque le capteur est justifié, la proposition « pluie » est considérée comme étant vraie. Lorsqu'il n'est pas justifié, la proposition « pluie » est considérée incertaine, mais pas nécessairement fausse. On peut modéliser cette information ainsi :

- $\mathcal{W} = \{w_{\text{justifié}}, w_{\text{non-justifié}}\}$
- $\mathcal{W}^F = \emptyset$
- $\mu(w_{\text{justifié}}) = 0.9, \mu(w_{\text{non-justifié}}) = 0.1$
- $P = \{Pluie\}$
- $\mathcal{A} = \{Pluie, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- $i(Pluie) = w_{\text{justifié}}$

Aucune fonction d'incidence ne pointe vers l'univers $w_{\text{non-justifié}}$, on a alors $\text{Bel}(Pluie) = 0.9$ et $\text{Pl}(Pluie) = 1$.

Informations imprécises et incertaines

On est habituellement confronté à des informations à la fois imprécises et incertaines. Afin d'obtenir un modèle correspondant à cette situation, on combine les caractéristiques des deux modèles précédents.

Exemple 5.7

On reprend le modèle d'incertitude de l'exemple 5.6 et le modèle d'imprécision de l'exemple 5.5, puis on combine les concepts utilisés afin d'obtenir le MI suivant. On note que l'on n'a pas effectué une combinaison des MI en tant que telle, mais seulement une combinaison des concepts.

- $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_n\}$
- $\mathcal{W}^F = \emptyset$
- $\mu :$

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.45 & w = w_1 \\ 0.45 & w = w_2 \\ 0.1 & w = w_n \end{cases}$$

- $\mathcal{P} = \{\phi_A, \phi_B, \phi_C, \phi_D, \phi_E\}$
- $\mathcal{A} = \{\phi_A \wedge \phi_B, \phi_B \wedge \phi_C, \phi_D, \phi_E, \text{vrai}, \text{faux}\}$

◦ i :

$$i(\psi) = \begin{cases} w_2 & \psi = \phi_A \wedge \phi_B \\ w_2 & \psi = \phi_B \wedge \phi_C \\ w_1 & \psi = \phi_D \\ \{w_1, w_2\} & \psi = \neg\phi_E \end{cases}$$

Ici, les probabilités des univers w_1 et w_2 sont multipliées par la probabilité que le capteur soit justifié, 0.9. L'ignorance reste la même avec w_n qui est l'univers dans lequel le capteur n'est pas justifié de se prononcer.

5.4.2 Informations heuristiques

L'utilisation de la logique propositionnelle au lieu de la théorie des ensembles dans la théorie de l'évidence, permet au calcul d'incidence de représenter des informations beaucoup plus riches.

Les bases de données, qui permettent notamment la correspondance entre une caractéristique et des objets, peuvent être remplacées par une série de propositions.

Exemple 5.8

Voici quelques exemples d'informations retrouvées dans une base de données qui pourrait être intégré dans un modèle d'incidence :

$$E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11}) \quad (5.59)$$

$$Long \rightarrow (\theta_9 \vee \theta_{10}) \quad (5.60)$$

$$(\theta_2 \wedge \theta_4) \rightarrow \theta_{12} \quad (5.61)$$

$E44$ correspond à « L'émetteur $E44$ est détecté », alors que $E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11})$ signifie : « Si on a le capteur $E44$, on est en présence de l'objet θ_{10} ou l'objet θ_{11} . Le troisième pourrait signifier que la présence des objets 2 et 4 indique la présence de l'objet 12 puisqu'ils en sont des composantes.

La base de données peut devenir elle même un MI qui peut être combiné comme n'importe quelle information et auquel on peut attribuer de l'incertitude. Cela constitue l'intérêt d'une telle modélisation. Les données heuristiques peuvent être combinées avec n'importe quelle autre donnée.

Exemple 5.9

Les règles de l'exemple 5.8 peuvent être regroupés dans un MI auquel on attribue une incertitude. Une certitude de 0.9 est attribuée au fait que ces règles sont correctes.

- $\mathcal{W}_{BD} = \{w_1, w_2\}$
- $\mathcal{W}_{BD}^F = \emptyset$
- $\mu_{BD} :$

$$\mu_{BD}(w) = \begin{cases} 0.9 & w = w_1 \\ 0.1 & w = w_2 \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_{BD} = \{E44, \theta_2, \theta_4, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, Long\}$
- $\mathcal{A}_{BD} = \{E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11}), Long \rightarrow (\theta_9 \vee \theta_{10}), (\theta_2 \wedge \theta_4) \rightarrow \theta_{12}, \text{vrai, faux}\}$
- $i_{BD} :$

$$i_{BD}(\psi) = \begin{cases} w_1 & \psi = E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11}) \\ w_1 & \psi = Long \rightarrow (\theta_9 \vee \theta_{10}) \\ w_1 & \psi = (\theta_2 \wedge \theta_4) \rightarrow \theta_{12} \end{cases}$$

5.5 Inférences

La combinaison de deux MI se fait en évaluant si le résultat de la conjonction de deux propositions est validable ou non. Cette évaluation est exprimée par $\phi \wedge \psi \models \text{faux}$. Cette expression, malgré qu'elle fonctionne très bien, n'exprime pas précisément ce qui se passe. En effet, la conjonction dans un modèle d'application autre que le domaine de Shafer correspond à un raisonnement à base d'inférences comme on en retrouve dans la logique propositionnelle. (section 2.5.1) Cela s'illustre avec la règle d'inférence la plus couramment utilisée ici, l'introduction de la conjonction. C'est d'ailleurs celle de la règle de combinaison :

$$\frac{p \quad q}{p \wedge q}$$

Toutefois, d'autres règles peuvent être utilisées, conjointement avec l'introduction de la conjonction, comme le modus ponens :

$$\frac{\frac{p \rightarrow q \quad p}{q} \quad p}{p \wedge q}$$

Cette inférence nous permet de dire que la conjonction de $p \rightarrow q$ et de p est validable ($\phi \wedge \psi \neq$ faux) puisque l'on peut créer la nouvelle proposition $p \wedge q$, dont l'incidence est la conjonction de l'incidence des deux prémisses.

Exemple 5.10

Une source détecte l'émetteur 44 avec une certitude de 0.8. Cette source peut être représentée par le MI :

- $\mathcal{W}_{s1} = \{w_{s1c}, w_{s1i}\}$
- $\mathcal{W}_{s1}^F = \emptyset$
- $\mu_{s1} :$

$$\mu_{s1}(w) = \begin{cases} 0.8 & w = w_{s1c} \\ 0.2 & w = w_{s1i} \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_{s1} = \{E44\}$
- $\mathcal{A}_{s1} = \{E44, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- $i_{s1}(E44) = w_{s1c}$

Ce MI peut être combiné au MI_{BD} de l'exemple 5.9 :

- $\mathcal{W} = \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle, \langle w_1, w_{s1i} \rangle, \langle w_2, w_{s1c} \rangle, \langle w_2, w_{s1i} \rangle\}$
- $\mathcal{W}^F = \emptyset$
- $\mu :$

$$\mu(w) = \begin{cases} 0.72 & w = \langle w_1, w_{s1c} \rangle \\ 0.18 & w = \langle w_1, w_{s1i} \rangle \\ 0.08 & w = \langle w_2, w_{s1c} \rangle \\ 0.02 & w = \langle w_2, w_{s1i} \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{P} = \{E44, \theta_2, \theta_4, \theta_9, \theta_{10}, \theta_{11}, \theta_{12}, Long\}$
- $\mathcal{A} = \{E44, E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11}), Long \rightarrow (\theta_9 \vee \theta_{10}), (\theta_2 \wedge \theta_4) \rightarrow \theta_{12}, E44 \wedge (\theta_{10} \vee \theta_{11}), \text{vrai}, \text{faux}\}$
- $i :$

$$i(\psi) = \begin{cases} \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle, \langle w_1, w_{s1i} \rangle\} & \psi = E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11}) \\ \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle, \langle w_1, w_{s1i} \rangle\} & \psi = Long \rightarrow (\theta_9 \vee \theta_{10}) \\ \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle\} & \psi = E44 \wedge (\theta_{10} \vee \theta_{11}) \\ \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle, \langle w_1, w_{s1i} \rangle\} & \psi = (\theta_2 \wedge \theta_4) \rightarrow \theta_{12} \\ \{\langle w_1, w_{s1c} \rangle, \langle w_2, w_{s1c} \rangle\} & \psi = E44 \end{cases}$$

On remarque l'apparition d'un nouvel axiome dans l'ensemble \mathcal{A} , soit $E44 \wedge (\theta_{10} \vee \theta_{11})$, issu de la conjonction des propositions $E44 \rightarrow (\theta_{10} \vee \theta_{11})$ et $E44$. Il s'agit en fait d'une inférence créée à l'aide de la règle du modus ponens.

Dans l'état actuel de la théorie, le calcul d'incidence généralisé modifié peut raisonner à l'aide de la logique propositionnelle lors des combinaisons en tentant des inférences entre les axiomes des deux modèles. Par contre, il n'y a pas de raisonnement d'effectué à l'intérieur même d'un MI, comme il peut être fait dans le calcul d'incidence classique grâce au *Legal Assignment Finder*.

5.6 Discussion

Ce chapitre a présenté une nouvelle définition du calcul d'incidence qui utilise des univers à base d'ensembles et qui enlève certaines restrictions à la théorie originale. On a ensuite démontré que cette nouvelle définition est équivalente au calcul d'incidence généralisé mais comporte certaines caractéristiques permettant de gérer des cas qui auraient autrement donné des résultats incorrects.

On a aussi montré que le calcul d'incidence généralisé modifié permet de faire des raisonnements logiques à l'aide d'inférences. Cela n'est pas aussi facile en utilisant le cadre de Shafer comme dans la théorie originale.

Le prochain chapitre présente une application de ce nouveau calcul d'incidence à un problème de fusion de données pour identification.

Bouclage d'information

Résumé : Le bouclage d'information (BI), ou data looping, est une situation non-désirée qui peut survenir lors de la combinaison d'information. Le calcul d'incidence semble être une bonne méthode pour éviter les erreurs que cette situation peut causer. Après quelques considérations théoriques, nous démontrerons à l'aide d'un exemple que le calcul d'incidence généralisé, tel que modifié au chapitre 5, permet de faire des combinaisons équivalentes à la combinaison de Dempster tout en évitant les problèmes reliés au BI.

Sommaire

6.1	Introduction	78
6.2	Exemple d'une situation de bouclage d'information	79
6.3	Combinaison de Dempster	81
6.4	Combinaison utilisant le calcul d'incidence	85
6.5	Discussion	101

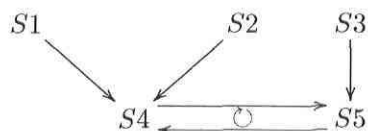


Figure 6.1: L'échange d'information entre S4 et S5 peut causer un bouclage

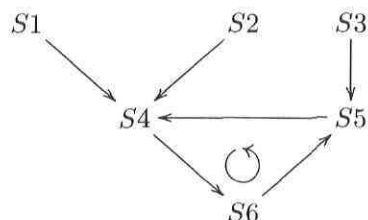


Figure 6.2: L'échange d'information entre S4 et S5 se fait à l'aide d'un intermédiaire, ce qui est plus difficilement détectable

6.1 Introduction

Le bouclage d'information (BI), ou data looping, est une situation où, dans un système de fusion, une information est combinée à plusieurs reprises à la suite d'échange entre des unités de traitement séparées. Cette situation est généralement non-désirée car elle peut mener à un surenforcement de l'information bouclée.

La Figure 6.1 montre un exemple d'une situation où pourrait se produire un BI. Dans cette situation, les sources S4 et S5 s'échangent le résultat de leur combinaison. Du point de vue de S4, S5 est une simple source d'information, tout comme S1 et S2. On combinera donc l'information provenant de S5 comme on le ferait avec S1. Toutefois, puisque S5 utilise S4 comme une source, son résultat sera dépendant de S4. L'information bouclera donc entre S4 et S5 et des mauvais résultats seront obtenus.

Cette situation précise pourrait être facilement évitée puisque S4 et S5 peuvent se rendre compte qu'ils reçoivent de l'information de la part d'un des récipiendaires de la leur. Toutefois, le bouclage peut être causé par l'intervention d'un intermédiaire comme sur la Figure 6.2. Cette situation est beaucoup plus difficile à détecter, à moins que chacune des sources ne connaisse l'ensemble de la hiérarchie de combinaison. Évidemment, ces problèmes peuvent être évités par une architecture adéquate.

Un troisième cas possible survient lorsque des informations dépendantes sont combinées ensemble, comme à la Figure 6.3. Dans ce cas-ci, l'information de la source S2 prend un parcours imprévu ce qui fait qu'elle est renforcée en S4. Cette situation est moins grave que

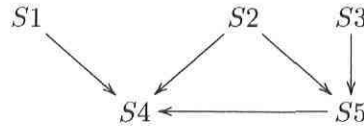


Figure 6.3: L'information de S2 se fait renforcer en S4.

les deux précédentes puisque l'absence de boucle empêche que le surenforcement se fasse à l'infini.

Comme on a vu à la section 2.1.5, une information peut ne pas être strictement indépendante, mais semi-dépendante. Dans ce cas, il est possible de combiner l'information. Dans plusieurs cas de bouclage d'information, il est possible de modéliser l'information de manière à ce qu'elle conserve sa semi-dépendance tout le long du traitement.

6.2 Exemple d'une situation de bouclage d'information

Afin de démontrer la justesse du calcul d'incidence en situation de BI, on examinera un exemple de cette situation de trois différentes façons. D'abord, on réorganise l'information afin que la combinaison puisse s'opérer normalement avec la théorie de l'évidence et ainsi obtenir un point de référence (section 6.3.1). Ensuite, on montre le résultat qui serait obtenu avec la théorie de l'évidence en situation de bouclage (section 6.3.2). Finalement, le calcul d'incidence sera utilisé et le résultat comparé avec notre point de référence (section 6.4).

La situation qui servira à la démonstration est représentée sur la Figure 6.4. On y retrouve 3 sources d'informations, S1, S2 et S3 et deux sites de fusion, F1 et F2. Le site F1 a accès aux sources S1 et S2 alors que le site F2 a accès aux sources S2 et S3. Les sites F1 et F2 s'échangent le résultat de leur combinaison, ce qui résulte en un bouclage. Cette situation revient au cas problématique de la Figure 6.1. De plus, on aurait un problème de surenforcement avec la théorie de l'évidence car les deux sites se serviraient des informations de la même source, S2. Les sites F1 et F2 sont donc semi-dépendants, mais la théorie de l'évidence ne conserve pas suffisamment de renseignements pour permettre la combinaison.

Le bouclage présenté à la Figure 6.4 est infini, puisque les deux sources s'échangent continuellement de l'information. Pour la fin de notre démonstration, seules les deux premières itérations sont effectuées, comme à la Figure 6.5.

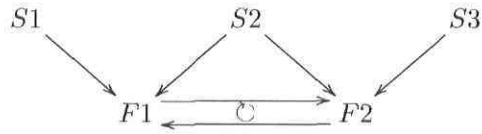


Figure 6.4: Bouclage d'information entre F1 et F2.

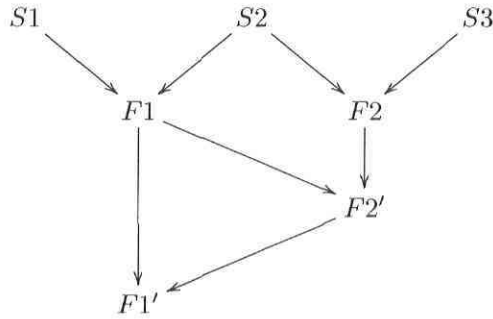


Figure 6.5: Deux premières itérations du BI de la Figure 6.4.

Source	Proposition	Fiabilité
S1	cible θ_1 ou cible θ_2	0.8
S2	cible θ_2 ou cible θ_3	0.8
S3	cible θ_4	0.8

Tableau 6.1: Les cibles vues par chacune des sources.

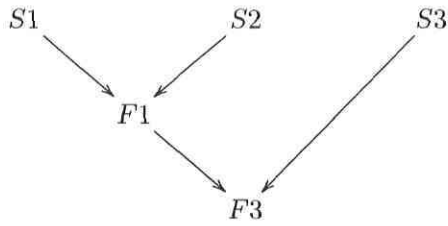


Figure 6.6: Les données sont réorganisées pour éviter les conditions de BI.

ϕ	$m_{S1}(\phi)$	$m_{S2}(\phi)$	$m_{S3}(\phi)$
$\{\theta_1, \theta_2\}$	0.8	0	0
$\{\theta_2, \theta_3\}$	0	0.8	0
$\{\theta_4\}$	0	0	0.8
Θ	0.2	0.2	0.2

Tableau 6.2: Les données une fois modélisées sous forme de structures D-S.

On attribue une masse de 0.8 à chacune des informations, correspondant à la fiabilité de la source (Tableau 6.1). La source S1 voit les cibles $\{\theta_1, \theta_2\}$, la source S2, $\{\theta_2, \theta_3\}$ et la source S3, $\{\theta_4\}$.

6.3 Combinaison de Dempster

6.3.1 Combinaison de référence

Le résultat d'une combinaison de Dempster est maintenant calculé en utilisant les données de l'exemple. On combine toutefois les données des sources S1, S2 et S3 l'une après l'autre afin d'éviter les conditions menant au BI (Figure 6.6). Le résultat de ces trois combinaisons successives servira de référence.

Les informations modélisées sous la forme de structures Dempster-Shafer sont représentées dans le Tableau 6.2.

	S2		
S1		$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.8$	$\Theta - 0.2$
$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.8$		$\{\theta_2\} - 0.64$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.16$
$\Theta - 0.2$		$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.16$	$\Theta - 0.04$

Tableau 6.3: Résultats de la combinaison des sources S1 et S2.

	F1				
S3		$\{\theta_2\} - 0.64$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.16$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.16$	$\Theta - 0.04$
$\{\theta_4\} - 0.8$		$\emptyset - 0.512$	$\emptyset - 0.128$	$\emptyset - 0.128$	$\{\theta_4\} - 0.032$
$\Theta - 0.2$		$\{\theta_2\} - 0.128$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.032$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.032$	$\Theta 0.008$

Tableau 6.4: Résultats de la combinaison de la source F1 et S3.

ϕ	$m(\phi)$	$\text{Bel}(\phi)$	$\text{Pl}(\phi)$
$\{\theta_2\}$	0.5517	0.5517	0.8621
$\{\theta_1, \theta_2\}$	0.1379	0.6896	0.8621
$\{\theta_2, \theta_3\}$	0.1379	0.6896	0.8621
$\{\theta_4\}$	0.1379	0.1379	0.1725
Θ	0.0345	1	1

Tableau 6.5: Masses, croyances et plausibilités des propositions après normalisation.

On calcule d'abord le résultat de la première combinaison de Dempster, avec la source S1 et la source S2 (Tableau 6.3). On combine ensuite le résultat avec S3 afin d'obtenir F3. (Tableau 6.4)

On doit ensuite normaliser en raison des conflits qui découlent des masses attribuées à l'ensemble vide, pour finalement obtenir les plausibilités et croyances du Tableau 6.5.

6.3.2 Combinaison en bouclage

Les informations ont été combinées dans la section précédente de façon à éviter le BI. Nous montrons ici ce qui se produirait si l'on utilisait la théorie de l'évidence sans réorganiser l'entrée des données, c'est à dire en déterminant F1 et F2 pour ensuite les combiner en F2' puis en recombinant F1 pour obtenir F1'.

		S2	
		$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.8$	$\Theta - 0.2$
S3	$\{\theta_4\} - 0.8$	$\emptyset - 0.64$	$\{\theta_4\} - 0.16$
	$\Theta - 0.2$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.16$	$\Theta - 0.04$

Tableau 6.6: Combinaisons de S2 et S3

ϕ	$m(\phi)$
$\{\theta_4\}$	0.4444
$\{\theta_2, \theta_3\}$	0.4444
Θ	0.1111

Tableau 6.7: Masses normalisées de F2

		F2		
		$\{\theta_4\} - 0.444$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.444$	$\Theta - 0.111$
F1	$\{\theta_2\} - 0.64$	$\emptyset - 0.2844$	$\{\theta_2\} - 0.2844$	$\{\theta_2\} - 0.0711$
	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.16$	$\emptyset - 0.0711$	$\{\theta_2\} - 0.0711$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.0178$
	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.16$	$\emptyset - 0.0711$	$\{\theta_2\} - 0.0711$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0178$
	$\Theta - 0.04$	$\{\theta_4\} - 0.0178$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0178$	$\Theta - 0.0044$

Tableau 6.8: Combinaisons de F1 et de F2 pour donner F2'

On combine tout d'abord S2 et S3 pour obtenir F2 (Tableau 6.6). Les masses données à l'ensemble vide nous forcent alors à normaliser les masses dans le Tableau 6.7. On réutilise le F1 de la section précédente et le combine avec F2 dans le Tableau 6.8. Une normalisation est ensuite effectuée de manière à obtenir le Tableau 6.9.

On observe que les informations provenant de la source S2 ont une masse démesurément trop grande par rapport aux autres, si l'on compare avec la combinaison correcte faite précédemment (Tableau 6.5). La proposition θ_2 voit sa masse augmenter alors que celles de toutes les autres ont diminuées. Cela est dû à la combinaison de sources semi-dépendantes, F1 et F2.

On recombine ensuite F1 à F2' dans le Tableau 6.10 afin de compléter la boucle d'information. Le résultat normalisé du Tableau 6.11 montre que la masse de la proposition θ_2 augmente encore alors qu'aucune nouvelle source d'information n'a été combinée. Le surenforcement empirerait avec d'autres itérations

ϕ	$m(\phi)$
$\{\theta_2\}$	0.8834
$\{\theta_1, \theta_2\}$	0.0316
$\{\theta_2, \theta_3\}$	0.0632
$\{\theta_4\}$	0.0316
Θ	0.0078

Tableau 6.9: Masses des hypothèses de F2' après normalisation de Dempster

F2' \ F1	$\{\theta_2\} - 0.64$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.16$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.16$	$\Theta - 0.004$
$\{\theta_2\} - 0.8834$	$\{\theta_2\} - 0.5654$	$\{\theta_2\} - 0.1413$	$\{\theta_2\} - 0.1413$	$\{\theta_2\} - 0.0353$
$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.0316$	$\{\theta_2\} - 0.0202$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.0051$	$\{\theta_2\} - 0.0051$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.0013$
$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0632$	$\{\theta_2\} - 0.0404$	$\{\theta_2\} - 0.0101$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0101$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0025$
$\{\theta_4\} - 0.0316$	$\emptyset - 0.0202$	$\emptyset - 0.0051$	$\emptyset - 0.0051$	$\{\theta_4\} - 0.0013$
$\Theta - 0.0078$	$\{\theta_2\} - 0.0050$	$\{\theta_1, \theta_2\} - 0.0013$	$\{\theta_2, \theta_3\} - 0.0013$	$\Theta - 0.0003$

Tableau 6.10: Combinaisons de F1 et de F2' pour donner F1'

ϕ	$m(\phi)$
$\{\theta_2\}$	0.9944
$\{\theta_1, \theta_2\}$	0.0079
$\{\theta_2, \theta_3\}$	0.0144
$\{\theta_4\}$	0.0013
Θ	0.0003

Tableau 6.11: Masses des hypothèses de F1' après normalisation de Dempster

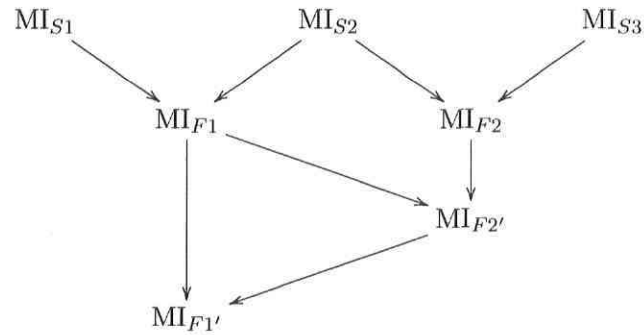


Figure 6.7: Flot des données transformées en modèles d'incidence.

6.4 Combinaison utilisant le calcul d'incidence

On combine finalement les informations de l'exemple avec le calcul d'incidence généralisé modifié. Afin de pouvoir faire une comparaison valide, les opérations logiques sont faites en tenant compte du domaine de Shafer, c'est à dire en supposant l'exhaustivité et l'exclusivité des éléments. L'on utilisera également les règles relatives à la combinaison de Dempster lors de la détection de conflit et du calcul des probabilités des univers.

6.4.1 Transformation des informations en MI

La première chose à faire avec les informations est de les modéliser sous forme de modèle d'incidence (MI). Les MI peuvent ensuite être combinés l'un dans l'autre afin de faire une combinaison équivalente à la combinaison de Dempster. Chacune des sources aura donc son propre MI.

La source S1 a une seule proposition, c'est à dire $\{\theta_1 \vee \theta_2\}$. Deux ensembles d'univers sont possibles pour la source S1. Il y a les univers où S1 retourne le bon résultat et les univers où S1 fonctionne mal et alors la justesse du résultat est inconnue. Ces deux univers sont nommés w_{s1c} et w_{s1i} , respectivement pour l'univers où la source S1 est correcte et l'univers où la source S1 est incorrecte. L'ensemble \mathcal{W}^F est vide car il n'y a aucun conflit dans ces données.

On obtient donc le modèle d'incidence MI_{S1} :

- $\mathcal{W}_{S1} = \{w_{s1c}, w_{s1i}\}$
- $\mathcal{W}_{S1}^F = \{\}$

◦ $\mu_{S_1}^0$:

$$\mu_{S_1}^0(w) = \begin{cases} 0.9 & w = w_{s1c} \\ 0.2 & w = w_{s1i} \end{cases}$$

◦ $\mathcal{P}_{S_1} = \{\theta_1, \theta_2\}$

◦ $\mathcal{A}_{S_1} = \{\theta_1 \vee \theta_2, \text{vrai}, \text{faux}\}$

◦ i_{S_1} :

$$i_{S_1}(\phi) = \begin{cases} w_{s1c} & \phi = \theta_1 \vee \theta_2 \\ \mathcal{W}_{S_1} & \phi = \text{vrai} \\ \emptyset & \phi = \text{faux} \end{cases}$$

On peut décrire MI_{S_1} avec le tuple :

$$\begin{aligned} \text{MI}_{S_1} = & \langle \{w_{s1c}, w_{s1i}\}, \{\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \\ & \{\{\theta_1 \vee \theta_2\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{s1c}, \mathcal{W}_{S_1}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (6.1)$$

On peut ensuite former de manière similaire les autres MI :

$$\begin{aligned} \text{MI}_{S_2} = & \langle \{w_{s2c}, w_{s2i}\}, \{\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_2, \theta_3\}, \\ & \{\{\theta_2 \vee \theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{s2c}, \mathcal{W}_{S_2}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \text{MI}_{S_3} = & \langle \{w_{s3c}, w_{s3i}\}, \{\}, \{0.8, 0.2\}, \{\theta_4\}, \\ & \{\{\theta_4\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{s3c}, \mathcal{W}_{S_3}, \emptyset\} \rangle \end{aligned} \quad (6.3)$$

6.4.2 Création de MI_{F_1}

On combine d'abord MI_{S_1} et MI_{S_2} par une première fusion afin de créer un nouvel MI_{F_1} .

Étape 1 : Création d'un contexte commun

Une condition à la combinaison de deux MI est qu'ils doivent avoir le même contexte. Puisque cela n'est pas le cas ici, on doit en créer un qui sera commun aux deux MI. Pour ce faire, l'on applique le produit cartésien défini dans l'équation (5.18).

$$\mathcal{W}_{F_1} = \mathcal{W}_{S_1} \times \mathcal{W}_{S_2} \quad (6.4)$$

$$\mathcal{W}_{F_1} = \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \quad (6.5)$$

Puisque l'on dispose maintenant d'un contexte commun aux deux modèles, les fonctions d'incidence de chacun d'eux doivent être ajustés pour y faire référence. Les équations (5.19) et (5.20) sont alors utilisées :

$$i'_{S1}(\phi) = i_{S1}(\phi) \times \mathcal{W}_{S2} \quad (6.6)$$

$$i'_{S2}(\phi) = \mathcal{W}_{S1} \times i_{S2}(\phi) \quad (6.7)$$

Ce qui donne alors les fonctions d'incidence :

$$i'_{S1}(\theta_1 \vee \theta_2) = w_{s1c} \times \{w_{s2c}, w_{s2i}\} = \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\} \quad (6.8)$$

$$i'_{S2}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{w_{s1c}, w_{s1i}\} \times w_{s2c} = \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\} \quad (6.9)$$

On doit aussi ajuster les ensembles \mathcal{W}_1^F et \mathcal{W}_2^F , à l'aide des équations (5.21) et (5.22), mais puisqu'ils sont vides, les nouveaux ensembles $\mathcal{W}_1^{F'}$ et $\mathcal{W}_2^{F'}$ le seront aussi.

$$\mathcal{W}_1^{F'} = \mathcal{W}_2^{F'} = \emptyset \quad (6.10)$$

Les fonctions μ_{S1}^0 et μ_{S2}^0 sont intégrées afin d'obtenir μ_{F1}^0 :

$$\mu_{F1}^0([w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2c}]) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2] \quad (6.11)$$

On a donc maintenant deux modèles, MI'_{S1} et MI'_{S2} qui contiennent toujours les mêmes informations qu'auparavant, mais qui partagent maintenant le même contexte \mathcal{W}_{F1} .

Étape 2 : Détection des conflits

Avant la combinaison en tant que telle, il faut vérifier si celle-ci n'engendrera pas des conflits. Pour ce faire, on doit déterminer l'ensemble \mathcal{W}_{F1}^C contenant les ensembles d'univers impossibles dus à des conflits entre les propositions des MI_{S1} et MI_{S2} . Un tableau comme le Tableau 6.12 permet de déterminer si de tels conflits existent. Comme on peut le prévoir, l'intersection des propositions avec la proposition faux cause un conflit, mais cela n'a pas d'impact sur le résultat puisque $i(\text{faux}) = \emptyset$.

Puisque aucun conflit significatif n'est détecté, l'équation (5.23) donne un ensemble vide. En utilisant (5.24), on peut ensuite créer un l'ensemble \mathcal{W}_{F1}^F qui sera lui aussi vide.

	\mathcal{A}_{S1}	$\theta_1 \vee \theta_2$	vrai	faux
\mathcal{A}_{S2}				
	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	$\theta_2 \vee \theta_3$	f
	vrai	$\theta_1 \vee \theta_2$	v	f
	faux	f	f	f

Tableau 6.12: L'intersection des axiomes de MI_{S1} et MI_{S2}

$$\mathcal{W}_{F1}^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi \neq \text{faux}} i'_1(\phi) \cap i'_2(\psi) = \emptyset \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2} \quad (6.12)$$

$$\mathcal{W}_{F1}^E = \mathcal{W}_{S1}^{E'} \cup \mathcal{W}_{S2}^{E'} \cup \mathcal{W}_{F1}^C \quad (6.13)$$

$$= \emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \quad (6.14)$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

La seconde étape consiste en la création de nouveaux axiomes pour le MI_{F1} , en utilisant l'équation (5.25). Cela revient à prendre le contenu du Tableau 6.12. Ici, $\varphi \neq \text{faux}$ signifie que φ est valable, c'est à dire qu'elle est peut être vraie. La proposition faux est ajoutée à \mathcal{A} par définition.

$$\mathcal{A}_{F1} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (6.15)$$

$$\mathcal{A}_{F1} = \{\theta_2, \theta_1 \vee \theta_2, \theta_2 \vee \theta_3, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (6.16)$$

On détermine ensuite les propositions membres \mathcal{P}_{F1} grâce à (5.26) :

$$\mathcal{P}_{F1} = \mathcal{P}_{S1} \cup \mathcal{P}_{S2} \quad (6.17)$$

$$= \{\theta_1, \theta_2\} \cup \{\theta_2, \theta_3\} \quad (6.18)$$

$$= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\} \quad (6.19)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

De nouveaux univers et de nouveaux axiomes nécessitent une nouvelle fonction d'incidence, qui seront créés en utilisant l'équation (5.27). Cela revient à prendre les axiomes déterminés

à l'étape précédente et à faire la conjonction de leurs fonctions d'incidence.

$$i_{F1}(\varphi) = \bigcup \{ i'_{S1}(\phi) \wedge i'_{S2}(\psi) \mid \phi \wedge \psi \models \varphi, \\ \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2}, \phi \wedge \psi \neq \text{faux} \} \setminus \mathcal{W}_{F1}^F \quad (6.20)$$

Ce qui donne :

$$i_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) = \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \quad (6.21)$$

$$i_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \quad (6.22)$$

$$i_{F1}(\theta_2) = \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \quad (6.23)$$

$$i_{F1}(\text{vrai}) = i_{F1}(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{F1} \quad (6.24)$$

$$i_{F1}(\text{faux}) = \emptyset \quad (6.25)$$

Il est à noter que (6.24) et (6.25) vont toujours donner le même résultat. Nous les incluons ici par rigueur mathématique.

Étape finale

On a maintenant tous les éléments nécessaires pour notre MI_{F1} :

$$\text{MI}_{F1} = \langle \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \}, \\ \{ \}, \mu^0([w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2c}]) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2], \\ \{ \theta_1, \theta_2, \theta_3 \}, \{ \theta_1 \vee \theta_2, \theta_2 \vee \theta_3, \theta_2, \text{vrai}, \text{faux} \} \rangle \quad (6.26)$$

6.4.3 Création de MI_{F2}

La fusion 2 est produite à partir des sources S2 et S3 et se fait sensiblement de la même manière que la fusion 1. Toutefois, on observera un conflit qu'il faudra tenir compte avec \mathcal{W}^F .

Étape 1 : Création d'un contexte commun

$$\mathcal{W}_{F2} = \mathcal{W}_{S2} \times \mathcal{W}_{S3} \quad (6.27)$$

$$= \{ \langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \quad (6.28)$$

	\mathcal{A}_{S2}	$\theta_2 \vee \theta_3$	vrai	faux
\mathcal{A}_{S3}				
	θ_4	f	θ_4	f
	vrai	$\theta_2 \vee \theta_3$	v	f
	faux	f	f	f

Tableau 6.13: L'intersection des axiomes de MI_{S2} et MI_{S3}

On procède ensuite à l'ajustement des fonctions d'incidence :

$$i'_{S2}(\phi) = i_{S2}(\phi) \times \mathcal{W}_{S3} \quad (6.29)$$

$$i'_{S3}(\phi) = \mathcal{W}_{S2} \times i_{S3}(\phi) \quad (6.30)$$

Pour obtenir :

$$i'_{S2}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{w_{s2c}\} \times \{w_{s3c}, w_{s3i}\} = \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \quad (6.31)$$

$$i'_{S3}(\theta_4) = \{w_{s2c}, w_{s2i}\} \times \{w_{s3c}\} = \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.32)$$

Les ensembles $\mathcal{W}_{S2}^{F'}$ et $\mathcal{W}_{S3}^{F'}$ restent vides et l'on fait la concaténation de μ_{S2}^0 et μ_{S3}^0 pour obtenir μ_{F2}^0 :

$$\mu_{F2}^0([w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c}, w_{s3i}]) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2] \quad (6.33)$$

Étape 2 : Détection des conflits

On remarque dans le Tableau 6.13 que les propositions $\theta_2 \vee \theta_3$ et θ_4 se contredisent puisque l'on est dans le modèle de Shafer et que les propositions sont mutuellement exclusives. Il n'est donc pas possible que la source S2 et la source S3 soient correctes à la fois.

$$\mathcal{W}_{F2}^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi \models \text{faux}} i'_{S2}(\phi) \cap i'_{S3}(\psi) \quad \forall \phi \in \mathcal{A}_{S1}, \psi \in \mathcal{A}_{S2} \quad (6.34)$$

$$= i'_{S1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{S3}(\theta_4) \quad (6.35)$$

$$= \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.36)$$

$$\mathcal{W}_{F2}^F = \mathcal{W}_{S2}^{F'} \cup \mathcal{W}_{S3}^{F'} \cup \mathcal{W}_3^C \quad (6.37)$$

$$= \emptyset \cup \emptyset \cup \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle\} = \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.38)$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

On crée maintenant de nouveaux axiomes pour le MI_{F2} et on définit la liste des propositions \mathcal{P} .

$$\mathcal{A}_{F2} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{S2}, \psi \in \mathcal{A}_{S3}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (6.39)$$

$$= \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_4, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (6.40)$$

$$\mathcal{P}_{F2} = \mathcal{P}_{S2} \cup \mathcal{P}_{S3} \quad (6.41)$$

$$= \{\theta_2, \theta_3\} \cup \{\theta_4\} \quad (6.42)$$

$$= \{\theta_2, \theta_3, \theta_4\} \quad (6.43)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

On obtient la fonction d'incidence pour MI_{F2} . Il est à noter que les ensembles d'univers membres de \mathcal{W}_{F2}^F ont été retranchés des fonctions d'incidence comme le prévoit l'équation (5.27).

$$i_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) = \{\langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \quad (6.44)$$

$$i_{F2}(\theta_4) = \{\langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.45)$$

$$i_{F2}(\text{vrai}) = i_{F2}(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{F2} \setminus \mathcal{W}_{F2}^F \quad (6.46)$$

$$i_{F2}(\text{faux}) = \emptyset \quad (6.47)$$

On remarque que l'équation (6.46) ne donne pas le contexte au complet, mais seulement l'ensemble des univers qui sont logiquement possibles.

Étape finale :

On peut maintenant donner le tuplet de notre nouveau MI :

$$\begin{aligned} \text{MI}_{F2} = & \langle \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\}, \\ & \{\langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle\}, \mu^0([\langle w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c}, w_{s3i} \rangle]) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2], \\ & \{\theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \{\theta_2 \vee \theta_3, \theta_4, \text{vrai}, \text{faux}\} \rangle \end{aligned} \quad (6.48)$$

6.4.4 Création de $MI_{F_2'}$

Cette fusion consiste à combiner le MI_{F_2} et le MI_{F_1} . C'est à ce moment-ci que le calcul d'incidence commence à diverger des autres méthodes.

Étape 1 : Création d'un contexte commun

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{F_2'} &= \mathcal{W}_{F_1} \times \mathcal{W}_{F_2} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.49}$$

On obtiendra un $\mathcal{W}_{F_2'}$ contenant 2^4 univers. Toutefois, certains univers peuvent être simplifiés alors que d'autres sont impossibles. Par exemple, l'ensemble d'univers $\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle$ est vide puisqu'il est entre autres formé de l'intersection des ensembles w_{s2c} et w_{s2i} . Ces deux ensembles étant disjoints, le nouvel univers créé sera vide, donc impossible. Intuitivement, il s'agirait d'un ensemble d'univers dans lequel la source S2 serait à la fois correcte et incorrecte.

En utilisant le même raisonnement, on se rend compte que l'univers $\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle$ est équivalent à $\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle$. Une fois que les doublons et les impossibilités sont enlevés, on obtient 2^3 univers, ce qui représente le nombre d'univers que l'on obtiendrait si on combinait les sources S1, S2 et S3 d'un coup.

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}'_{F2'} &= \mathcal{W}_{F1} \times \mathcal{W}_{F2} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Il faut ensuite ajuster les fonctions d'incidence aux nouveaux univers :

$$i'_{F1}(\phi) = i_{F1}(\phi) \times \mathcal{W}_{F2} \tag{6.51}$$

$$i'_{F2}(\phi) = \mathcal{W}_{F1} \times i_{F2}(\phi) \tag{6.52}$$

Pour ensuite obtenir, à l'aide de (6.21) et (6.28), de (6.22) et (6.28), de (6.23) et (6.28) :

$$\begin{aligned}
i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle \} \times \\
&\quad \{ \langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.53}$$

$$\begin{aligned}
i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle \} \times \\
&\quad \{ \langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned}
i'_{F1}(\theta_2) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle \} \times \{ \langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Puis, à l'aide de (6.5) et (6.44), (6.5) et (6.45) :

$$\begin{aligned}
i'_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \times \{ \langle w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
i'_{F2}(\theta_4) &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \times \{ \langle w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

L'on doit aussi ajuster les ensembles de conflit \mathcal{W}'_{F1} grâce aux équations (5.21) et (5.22) :

$$\mathcal{W}'_{F1} = \mathcal{W}_{F1}^F \times \mathcal{W}_{F2} = \emptyset \times \mathcal{W}_{F2} = \emptyset \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}'_{F2} &= \mathcal{W}_{F1} \times \mathcal{W}_{F2}^F \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \times \{ \langle w_{s2c}, w_{s3c} \rangle \} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle \}
\end{aligned} \tag{6.59}$$

La fonction $\mu_{F2'}^0$ est aussi créée grâce à μ_{F1}^0 et μ_{F2}^0 :

$$\mu_{F2'}^0(\langle w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c}, w_{s3i} \rangle) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2, 0.8, 0.2] \tag{6.60}$$

$\mathcal{A}_{F_2} \backslash \mathcal{A}_{F_1}$	$\theta_1 \vee \theta_2$	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	vrai	faux
$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	$\theta_2 \vee \theta_3$	f
θ_4	f	f	f	θ_4	f
vrai	$\theta_1 \vee \theta_2$	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	v	f
faux	f	f	f	f	f

Tableau 6.14: L'intersection des axiomes de MI_{F_1} et MI_{F_2}

Étape 2 : Détection des conflits

Toutes les incidences de MI_{F_1} et de MI_{F_2} doivent maintenant être évaluées afin de trouver des conflits qui permettent de déterminer $\mathcal{W}_{F_2'}^C$. Le Tableau 6.14 démontre un certain nombre de contradictions entre les deux MI. Ces contradictions donnent l'ensemble $\mathcal{W}_{F_2'}^C$ suivant :

$$\mathcal{W}_{F_2'}^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi \neq \text{faux}} i'_{F_1}(\phi) \cap i'_{F_2}(\psi) \quad (6.61)$$

$$= (i'_{F_1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F_2}(\theta_4)) \cup (i'_{F_1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F_2}(\theta_4)) \cup (i'_{F_1}(\theta_2) \cap i'_{F_2}(\theta_4)) \quad (6.62)$$

$$= \{\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.63)$$

D'où l'on tire en prenant (6.58), (6.59) et (6.63) :

$$\mathcal{W}_{F_2'}^{F'} = \mathcal{W}_{F_1}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F_2}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F_2'}^C \quad (6.64)$$

$$= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \quad (6.65)$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

On crée maintenant de nouveaux axiomes pour le $MI_{F_2'}$ et la liste des propositions \mathcal{P} .

$$\mathcal{A}_{F_2'} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{F_1}, \psi \in \mathcal{A}_{F_2}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (6.66)$$

$$\mathcal{A}_{F_2'} = \{\theta_2, \theta_2 \vee \theta_3, \theta_4, \theta_1 \vee \theta_2, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (6.67)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{F_2'} &= \mathcal{P}_{F_1} \cup \mathcal{P}_{F_2} \\ &= \{\theta_1, \theta_2\} \cup \{\theta_2, \theta_3, \theta_4\} \\ &= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

L'application de l'équation (5.27) en utilisant les fonctions d'incidence modifiées (6.53) à (6.57) retourne les fonctions d'incidence.

$$\begin{aligned}
i_{F2'}(\theta_2) &= \left\{ \left(i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \right. \\
&\quad \left. \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2}(\text{vrai}) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F \\
&= (\{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \}) \cup \\
&\quad \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \tag{6.69}
\end{aligned}$$

$$i_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) = \left\{ \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2}(\text{vrai}) \right) \cup \right. \tag{6.70}$$

$$\left. \left(i'_{F1}(\text{vrai}) \cap i'_{F2}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F \tag{6.71}$$

$$= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \tag{6.72}$$

$$i_{F2'}(\theta_4) = \{ i'_{F1}(\text{vrai}) \cap i'_{F2}(\theta_4) \} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F = \{ \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \tag{6.73}$$

$$\begin{aligned}
i_{F2'}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \{ i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2}(\text{vrai}) \} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \tag{6.74}
\end{aligned}$$

$$i_{F2'}(\text{vrai}) = i_{F2'}(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{F2'} \setminus \mathcal{W}_{F2'}^F \tag{6.75}$$

$$i_{F2'}(\text{faux}) = \emptyset \tag{6.76}$$

6.4.5 Création de $\text{MI}_{F1'}$

Cette fusion finale consiste à boucler la boule d'information en combinant le $\text{MI}_{F2'}$ et le MI_{F1} .

Étape 1 : Création d'un contexte commun

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}'_{F1'} &= \mathcal{W}_{F1} \times \mathcal{W}_{F2'} \\
&= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \\
&\quad \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \tag{6.77}
\end{aligned}$$

Il faut ensuite ajuster les fonctions d'incidence aux nouveaux univers :

$$i'_{F1}(\phi) = i_{F1}(\phi) \times \mathcal{W}_{F2'} \quad (6.78)$$

$$i'_{F2'}(\phi) = \mathcal{W}_{F1} \times i_{F2'}(\phi) \quad (6.79)$$

Pour ensuite obtenir, à l'aide de (6.21) et (6.50), de (6.22) et (6.50), de (6.23) et (6.50) :

$$\begin{aligned} i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle\} \times \\ &\quad \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\ &\quad \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.80)$$

$$\begin{aligned} i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle\} \times \\ &\quad \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\ &\quad \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} i'_{F1}(\theta_2) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle\} \times \\ &\quad \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle, \\ &\quad \{\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.82)$$

Puis, à l'aide de (6.5) et (6.69), (6.5) et (6.72), (6.5) et (6.73) et (6.5) et (6.74) :

$$\begin{aligned} i'_{F2'}(\theta_2) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \times \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.83)$$

$$\begin{aligned} i'_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \times \\ &\quad \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.84)$$

$$\begin{aligned} i'_{F2'}(\theta_4) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \times \{\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\begin{aligned} i'_{F2}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle\} \times \\ &\quad \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \\ &= \{\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle\} \end{aligned} \quad (6.86)$$

$\mathcal{A}_{F2'}$	\mathcal{A}_{F1}	$\theta_1 \vee \theta_2$	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	vrai	faux
	θ_2		θ_2	θ_2	θ_2	θ_2
$\theta_2 \vee \theta_3$		θ_2	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	$\theta_2 \vee \theta_3$	f
θ_4		f	f	f	θ_4	f
$\theta_1 \vee \theta_2$		$\theta_1 \vee \theta_2$	θ_2	θ_2	$\theta_1 \vee \theta_2$	f
vrai		$\theta_1 \vee \theta_2$	$\theta_2 \vee \theta_3$	θ_2	v	f
faux		f	f	f	f	f

Tableau 6.15: L'intersection des axiomes de MI_{F1} et $MI_{F2'}$

L'on doit aussi ajuster les ensembles de conflit \mathcal{W}_{F1}^F grâce aux équations (5.21) et (5.22) :

$$\mathcal{W}_{F1}^{F'} = \mathcal{W}_{F1}^F \times \mathcal{W}_{F2'} = \emptyset \times \mathcal{W}_{F2} = \emptyset \quad (6.87)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{F2'}^{F'} &= \mathcal{W}_{F1} \times \mathcal{W}_{F2'}^F \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2i} \rangle \} \times \\ &\quad \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \end{aligned} \quad (6.88)$$

La fonction $\mu_{F1'}^0$ est aussi créée grâce à μ_{F1}^0 et μ_{F2}^0 :

$$\mu_{F1'}^0([w_{s1c}, w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s2i}, w_{s3c}, w_{s3i}]) = [0.8, 0.2, 0.8, 0.2, 0.8, 0.2] \quad (6.89)$$

Étape 2 : Détection des conflits

Toutes les incidences de MI_{F1} et de MI_{F2} doivent maintenant être évaluées afin de trouver des conflits qui permettent de déterminer $\mathcal{W}_{F2'}^C$. Le Tableau 6.15 démontre un certain nombre de contradictions entre les deux MI. Ces contradictions donnent l'ensemble $\mathcal{W}_{F2'}^C$ suivant :

$$\mathcal{W}_{F1'}^C = \bigcup_{\phi \wedge \psi \models \text{faux}} i'_{F1}(\phi) \cap i'_{F2'}(\psi) \quad (6.90)$$

$$= (i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_4)) \cup (i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2'}(\theta_4)) \cup (i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_4)) \quad (6.91)$$

$$= \emptyset \quad (6.92)$$

D'où l'on tire en prenant (6.87), (6.88) et (6.92) :

$$\mathcal{W}_{F1'}^F = \mathcal{W}_{F1}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F2'}^{F'} \cup \mathcal{W}_{F1'}^C \quad (6.93)$$

$$= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \quad (6.94)$$

Étape 3 : Construction des nouveaux axiomes et propositions

On crée maintenant de nouveaux axiomes pour le $MI_{F1'}$ et la liste des propositions \mathcal{P} .

$$\mathcal{A}_{F1'} = \{\varphi \mid \varphi = \phi \wedge \psi, \phi \in \mathcal{A}_{F1}, \psi \in \mathcal{A}_{F2'}, \varphi \neq \text{faux}\} \cup \{\text{faux}\} \quad (6.95)$$

$$\mathcal{A}_{F1'} = \{\theta_2, \theta_2 \vee \theta_3, \theta_4, \theta_1 \vee \theta_2, \text{vrai}, \text{faux}\} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{F1'} &= \mathcal{P}_{F1} \cup \mathcal{P}_{F2'} \\ &= \{\theta_1, \theta_2\} \cup \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \\ &= \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\} \end{aligned} \quad (6.97)$$

Étape 4 : Création de nouvelles fonctions d'incidence

L'application de l'équation (5.27) en utilisant les fonctions d'incidence modifiées (6.80) à (6.86) retourne les fonctions d'incidence finales.

$$\begin{aligned} i_{F1'}(\theta_2) &= \left\{ \left(i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_2) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2'}(\theta_2) \right) \cup \right. \\ &\quad \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_2) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \\ &\quad \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2'}(\theta_1 \vee \theta_2) \right) \cup \\ &\quad \left. \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_1 \vee \theta_2) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2) \cap i'_{F2'}(\text{vrai}) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F \\ &= (\{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \}) \cup \\ &\quad \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \\ &\quad \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \\ &\quad \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \cup \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3c} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \\ i_{F1'}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \left\{ \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_2 \vee \theta_3) \cap i'_{F2'}(\text{vrai}) \right) \cup \right. \\ &\quad \left. \left(i'_{F1}(\text{vrai}) \cap i'_{F2'}(\theta_2 \vee \theta_3) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle \} \\ i_{F1'}(\theta_4) &= \{ i'_{F1}(\text{vrai}) \cap i'_{F2'}(\theta_4) \} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F = \{ \langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle \} \\ i_{F1'}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \left\{ \left(i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2'}(\theta_1 \vee \theta_2) \right) \cup \left(i'_{F1}(\theta_1 \vee \theta_2) \cap i'_{F2'}(\text{vrai}) \right) \cup \right. \\ &\quad \left. \left(i'_{F1}(\text{vrai}) \cap i'_{F2'}(\theta_1 \vee \theta_2) \right) \right\} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F \\ &= \{ \langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle, \langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle \} \\ i_{F1'}(\text{vrai}) &= i_{F1'}(\mathcal{A}) = \mathcal{W}_{F1'} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F \\ i_{F1'}(\text{faux}) &= \emptyset \end{aligned}$$

Le résultat de la combinaison, le $MI_{F1'}$ est identique à $MI_{F2'}$, ce qui confirme que le calcul d'incidence généralisé modifié a bien géré ce cas de bouclage d'information.

6.4.6 Extraction des résultats numériques

Calcul de la probabilité des ensembles d'univers

On calcule maintenant les valeurs numériques associées aux axiomes pour le $MI_{F1'}$, mais on aurait pu tout aussi bien prendre $MI_{F2'}$ puisqu'il est identique. On doit d'abord calculer la probabilité de chacun des ensembles d'univers de $\mathcal{W}_{F1'}$ en utilisant les équations (5.13) à (5.15) de manière à effectuer une redistribution de Dempster.

De (5.15) on obtient la probabilité des univers impossibles :

$$\mu(\emptyset) = \sum_{w \in \mathcal{W}_{F1'}^F} \prod_{w_i \in w} \mu^0(w_i) \quad (6.98)$$

$$= \mu(w_{s1c})\mu(w_{s2c})\mu(w_{s3c}) + \mu(w_{s1i})\mu(w_{s2c})\mu(w_{s3c}) + \mu(w_{s1c})\mu(w_{s2i})\mu(w_{s3c}) \quad (6.99)$$

$$= (0.8)(0.8)(0.8) + (0.2)(0.8)(0.8) + (0.8)(0.2)(0.8) = 0.768 \quad (6.100)$$

Ce résultat et l'équation (5.13) permettent de calculer la probabilité de chacun des ensembles membres de $\mathcal{W}_{F1'} \setminus \mathcal{W}_{F1'}^F$.

$$\mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) = \frac{\mu_{\cap}(w)}{1 - \mu(\emptyset)} \quad (6.101)$$

$$= \frac{\prod_{w_i \in w} \mu^0(w_i)}{1 - \mu(\emptyset)} = \frac{0.8 \times 0.8 \times 0.2}{1 - 0.768} = 0.5517 \quad (6.102)$$

$$\mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle) = \frac{0.8 \times 0.2 \times 0.2}{1 - \mu(\emptyset)} = 0.1379 \quad (6.103)$$

$$\mu_{F1'}(\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) = \frac{0.2 \times 0.8 \times 0.2}{1 - \mu(\emptyset)} = 0.1379 \quad (6.104)$$

$$\mu_{F1'}(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle) = \frac{0.2 \times 0.2 \times 0.2}{1 - \mu(\emptyset)} = 0.0344 \quad (6.105)$$

$$\mu_{F1'}(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle) = \frac{0.2 \times 0.2 \times 0.8}{1 - \mu(\emptyset)} = 0.1379 \quad (6.106)$$

Croyances et plausibilités

On veut maintenant trouver les croyances et les plausibilités de nos axiomes dans \mathcal{A} afin de pouvoir comparer avec le résultat obtenu avec la combinaison de Dempster.

Comme il a été mentionné au chapitre 4, la croyance et la plausibilité de la théorie de l'évidence trouve une équivalence avec les bornes de probabilité inférieure et supérieure de la théorie de l'incidence. Les équations (4.40) et (4.41) utilisées avec les équations (5.11) et (5.12) définissent la croyance et la plausibilité comme étant :

$$\text{Bel}(A) = \mu(i_*(\phi_A)) = \mu\left(\bigcup_{\psi \in \mathcal{A}, \psi \models \phi_A} i(\psi)\right) \quad (6.107)$$

$$\text{Pl}(A) = \mu(i^*(\phi_A)) = \mu(\mathcal{W} \setminus i_*(\neg\phi_A)) \quad (6.108)$$

Le Tableau 6.16 contient les croyances et plausibilités obtenues.

$$\begin{aligned} \text{Bel}(\theta_2) &= \mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) = 0.5517 \\ \text{Bel}(\theta_2 \vee \theta_3) &= \mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) + \mu_{F1'}(\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) = 0.6896 \\ \text{Bel}(\theta_1 \vee \theta_2) &= \mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) + \mu_{F1'}(\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle) = 0.6896 \\ \text{Bel}(\theta_4) &= \mu_{F1'}(\mu_{F1'}(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle)) = 0.1379 \\ \\ \text{Pl}(\theta_2) &= 1 - \mu(i_*(\neg(\theta_2))) = 1 - \mu(i(\theta_4)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle) = 1 - 0.1379 = 0.8621 \\ \text{Pl}(\theta_2 \vee \theta_3) &= 1 - \mu(i_*(\neg(\theta_2 \vee \theta_3))) = 1 - \mu(i(\theta_4)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle) = 1 - 0.1379 = 0.8621 \\ \text{Pl}(\theta_1 \vee \theta_2) &= 1 - \mu(i_*(\neg(\theta_1 \vee \theta_2))) = 1 - \mu(i(\theta_4)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{s1i}, w_{s2i}, w_{s3c} \rangle) = 1 - 0.1379 = 0.8621 \\ \text{Pl}(\theta_4) &= 1 - \mu(i_*(\neg\theta_4)) = 1 - \mu(i(\theta_1 \vee \theta_3) \cup i(\theta_2) \cup i(\theta_2 \vee \theta_3)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{s1c}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) - \mu(\langle w_{s1i}, w_{s2c}, w_{s3i} \rangle) - \mu(\langle w_{s1c}, w_{s2i}, w_{s3i} \rangle) \\ &= 1 - 0.5517 - 0.1379 - 0.1379 = 0.1725 \end{aligned}$$

On remarquera que ce résultat est équivalent à celui du le Tableau 6.5, obtenu grâce à une combinaison de Dempster effectuée sur des données réorganisées afin d'éviter le bouclage d'information.

ϕ	$\text{Bel}(\phi)$	$\text{Pl}(\phi)$
$\theta_1 \vee \theta_2$	0.6896	0.8621
θ_2	0.5517	0.8621
$\theta_2 \vee \theta_3$	0.6896	0.8621
θ_4	0.1379	0.1725

Tableau 6.16: Croyances et plausibilités des axiomes du MI_{F_1}

6.5 Discussion

La comparaison des résultats obtenus par la combinaison de Dempster et par le calcul d'incidence généralisé modifié montre que ce dernier est capable de gérer des cas qui ne peuvent être résolus par la combinaison de Dempster sans en modifier le flot de données. Le calcul d'incidence est donc intéressant pour des cas où des combinaisons se font dans des systèmes séparés qui s'échangent leurs résultats.

Il est à noter qu'un prérequis à la bonne marche de la combinaison en situation de bouclage d'information est que les sources doivent s'entendre à l'avance sur un protocole de communication qui leur attribuera des identificateurs uniques de manière à ce que les ensembles d'univers ne puissent pas être confondus.

CHAPITRE

SEPT

Conclusion

Ce mémoire traite de la fusion de données d'un point de vue symbolique alors que les techniques numériques sont prédominantes dans ce domaine. Il a été montré que les techniques symboliques ne sont pas à écarter même si elles présentent des défauts importants par rapport aux techniques numériques : celles-ci ont aussi leurs défauts qui sont mis en évidence lorsque l'on compare avec les premières. Les techniques hybrides ont ici été privilégiées puisqu'elles tentent de réconcilier ces deux grandes familles afin d'en obtenir les meilleures caractéristiques.

Les approches hybrides numériques-symboliques ont un important potentiel dans le domaine de la fusion de données et le calcul d'incidence et sa généralisation, le calcul d'incidence généralisé sont une bonne porte d'entrée. Cette dernière théorie est particulièrement intéressante puisqu'elle présente une correspondance avec la théorie de l'évidence. Cette correspondance est importante puisqu'elle permet au calcul d'incidence généralisé d'être utilisée là où la théorie de l'évidence l'est : c'est à dire dans presque toutes les applications de la fusion de données.

Le calcul d'incidence généralisé comporte toutefois quelques limitations. Ces limitations sont évidentes lorsque l'on tente d'utiliser le calcul d'incidence généralisé pour résoudre le problème de bouclage d'information, problème qui peut se régler facilement à en juger les propriétés potentielles du GIC.

Nous avons donc proposé une série de modifications au calcul d'incidence généralisé pour lui permettre la gestion de la semi-dépendance des informations. Une fois ces modifications apportées, le calcul d'incidence résout sans peine des situations de bouclage d'information sans qu'il ne soit nécessaire de réorganiser les combinaisons. Il s'est avéré que ces modifications ouvraient la porte à d'autres applications, qui sont explorées dans l'appendice A.

Les travaux de ce mémoire ont contribué sur certains aspects :

- La définition du concept de semi-dépendance, important dans le problème de bouclage d'information. (Section 2.1.5)
- La mise au point du calcul d'incidence généralisé modifié (CIGM) afin de gérer les cas de semi-dépendance. (Chapitre 5)
- La résolution d'un cas de bouclage d'information sans nécessiter une réorganisation de l'entrée des données. (Chapitre 6)
- La mise au point d'une combinaison de Yager associative grâce à l'utilisation du CIGM (Section A.1.2)
- Une réflexion sur les liens entre le CIGM et la théorie de Dezert-Smarandache. (Section A.2)

Le CIGM présente beaucoup de potentiels, mais certains points doivent être éclaircis avant son utilisation dans des applications réelles. Parallèlement à cela, des questions théoriques méritent d'être étudiées afin d'apprécier le plein potentiel du CIGM. Voici donc quelques travaux de recherches futurs liés au CIGM :

1. Implémentation logicielle efficace : Au cours de travail, le CIGM a été implémenté en utilisant le logiciel Matlab afin d'aider à son développement et à des tests utilisés dans ce mémoire. Cette implémentation n'ayant pas été conçue pour obtenir de bonnes performances, sa réécriture serait souhaitable.
2. Étude de la complexité par rapport aux autres techniques : Le CIGM utilise beaucoup de mémoire par rapport à d'autres techniques de fusion de données, mais utilise des opérations mathématiques plus rapides que celles nécessaires dans les techniques numériques. Il serait bon de savoir comment une implémentation logicielle efficace du CIGM se comparerait face aux autres techniques disponibles. Il serait notamment important de déterminer si la complexité augmente linéairement ou exponentiellement avec le nombre de sources ou le nombre d'objets.
3. Approximation des modèles d'incidence : Le CIGM utilisant beaucoup d'espace mémoire pour la représentation de ses données, il serait pertinent de trouver une manière d'ap-

proximer un modèle d'incidence afin d'en réduire la taille. Ce problème est complexe mais nécessaire puisque les approximations sont couramment utilisées dans les applications réelles de fusion de données.

4. Représentation des diverses techniques utilisée en fusion de données : Les modifications que nous proposons au calcul d'incidence ont aussi l'avantage d'ouvrir la porte à d'autres types de combinaisons et même de s'ouvrir à d'autres cadres de raisonnement. L'appendice A présente un début de cette réflexion en traitant la combinaison de Yager et la théorie de Dezert-Smarandache. La réflexion pourrait être poussée beaucoup plus loin afin d'englober un plus grand nombre de techniques. Il serait aussi possible d'élargir vers d'autres techniques symboliques. Ce rapprochement de techniques numériques dans le monde symbolique pourrait permettre de gagner les caractéristiques de ces dernières, notamment la possibilité de faire des inférences et règles logiques.

Combinaisons et modèles alternatifs

Résumé : Le calcul d'incidence généralisé modifié a été conçu pour réaliser des combinaisons de Dempster. Il est toutefois possible d'effectuer des modifications afin de réaliser d'autres types de combinaison, notamment des combinaisons de Yager et de Dezert-Smarandache. Cet annexe présente des résultats préliminaires avec ces types de combinaison.

Sommaire

A.1	Yager	106
A.2	Dezert-Smarandache	111
A.3	Discussion	129

Cette annexe présente les possibilités du calcul d'incidence généralisé modifié en utilisant des combinaisons alternatives à la combinaison de Dempster ; il ne doit pas être vu comme une démonstration complète. On se limite ici à donner des exemples de combinaisons faites à l'aide du calcul d'incidence généralisé modifié. Dans certains cas, comme pour la combinaison de Yager, le calcul d'incidence est utilisé pratiquement tel quel, alors que pour d'autres, comme pour la théorie de Dezert-Smarandache, d'importantes modifications doivent être effectuées.

A.1 Yager

A.1.1 Notions de base

La combinaison de Yager est semblable à celle de Dempster, mais au lieu de redistribuer la masse de conflit sur l'ensemble des autres propositions issues de la conjonction, elle attribue la masse à l'ignorance totale. La notation de Lefevre [Lefevre et al., 2002] représente cette combinaison ainsi :

$$\mathcal{P} = \{\Theta\} \tag{A.1}$$

$$\mathbf{w}(w) = 1 \quad \forall w \subseteq \mathcal{P} \tag{A.2}$$

Cette combinaison redistribue donc l'ensemble du poids de conflit sur une proposition contenant tous les éléments possibles, ce qui correspond à grossir l'ignorance. La combinaison de Yager n'est pas associative, ce qui fait que l'on obtient des résultats différents selon l'ordre de combinaison. Yager justifie sa combinaison en disant qu'elle est plutôt quasi-associative, c'est à dire qu'il est possible de décomposer le processus en combinant plusieurs informations simultanément plutôt que de les prendre deux à deux.

La Figure A.1 montre le problème de la non-associativité puisque l'ordre de combinaison peut varier dans des situations réelles. La Figure A.2 montre une recombinaison qui permettra de donner un résultat quasi-associatif.

Exemple A.1

La non-associativité de la combinaison de Yager se démontre facilement avec un exemple simple. Prenons les trois sources d'information du Tableau A.1. On peut les combiner de quatre manières différentes avec la combinaison de Yager. Le résultat de trois des combinaisons sont présentées dans le Tableau A.2. La différence dans les résultats entre les deux premières combinaisons démontrent que la combinaison de Yager n'est pas associative. Le troisième résultat est obtenu à l'aide de la structure associative de Yager qui nécessite la combinaison simultanée de toutes les informations.

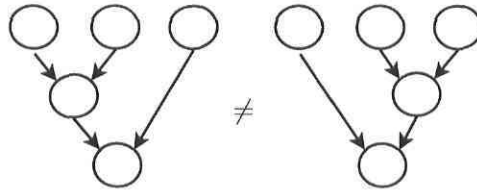


Figure A.1: Non-associativité d'une combinaison.

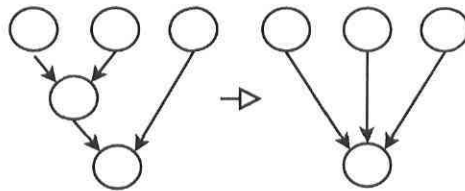


Figure A.2: Quasi-associativité nécessitant une combinaison simultanée de toutes les informations.

Proposition	m_{S1}	m_{S2}	m_{S3}
θ_1	0	0.88	0.09
θ_2	0.95	0.02	0.88
$\theta_1 \vee \theta_2$	0.05	0.1	0.03

Tableau A.1: Masse des propositions selon les sources S1, S2 et S3 de l'exemple A.1.

A.1.2 Modification au CIGM

Afin de pouvoir effectuer une combinaison de Yager en utilisant le calcul d'incidence, on ajoute une étape immédiatement avant le calcul de la probabilité des univers :

$$i'(I_t) = i(I_t) \cup i(\mathcal{W}^F) \quad (\text{A.3})$$

ϕ	$(S1 \sqcap S2) \sqcap S3$		$(S2 \sqcap S3) \sqcap S1$		$(S1 \sqcap S2 \sqcap S3)$	
	$m(\phi)$	$Pl(\phi)$	$m(\phi)$	$Pl(\phi)$	$m(\phi)$	$Pl(\phi)$
θ_1	0.08102	0.15527	0.00573	0.15356	0.0057	0.8909
θ_2	0.84473	0.91898	0.84644	0.99427	0.1091	0.9943
$\theta_1 \vee \theta_2$	0.07430	1	0.14783	1	0.8852	1

Tableau A.2: Résultats de la combinaison de Yager avec différents ordres de combinaison pour l'exemple A.1.

avec

$$I_t = \bigvee_{p \in \mathcal{P}} p \quad (\text{A.4})$$

Si la proposition I_t ne faisait pas partie de l'ensemble des axiomes \mathcal{A} , elle y est ajoutée. L'ensemble \mathcal{W}^F est utilisé pour enlever les références aux ensembles d'univers en conflit dans les autres propositions, mais est ensuite vidé avant de calculer les probabilités des fonctions d'incidence. Puisqu'il n'est plus nécessaire de redistribuer la probabilité du conflit, le calcul des probabilités se verra simplifié.

Exemple A.2

Soient les trois sources du Tableau A.1. L'information est convertie en des MI qui sont ensuite combinés selon la méthode du calcul d'incidence généralisé modifié. On extrait l'information avec la modification afin de faire une combinaison de Yager.

$$MI_1 = \langle \{w_{11}, w_{12}\}, \{\}, \{0.95, 0.05\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \{\{\phi_2\}, \{\phi_1 \vee \phi_2\}\}, \text{vrai, faux} \rangle, \\ \{w_{11}, \{w_{11}, w_{12}\}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle \quad (\text{A.5})$$

$$MI_2 = \langle \{w_{21}, w_{22}, w_{23}\}, \{\}, \{0.88, 0.02, 0.1\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \{\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \{\phi_1 \vee \phi_2\}\}, \text{vrai, faux} \rangle, \\ \{w_{21}, w_{22}, \{w_{21}, w_{22}, w_{23}\}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle \quad (\text{A.6})$$

$$MI_3 = \langle \{w_{31}, w_{32}, w_{33}\}, \{\}, \{0.09, 0.88, 0.03\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \{\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \{\phi_1 \vee \phi_2\}\}, \text{vrai, faux} \rangle, \\ \{w_{31}, w_{32}, \{w_{31}, w_{32}, w_{33}\}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle \quad (\text{A.7})$$

On combine d'abord MI_{S1} avec MI_{S2} en MI_{F1} :

$$\circ \mathcal{W}_{F1} = \{\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{11}, w_{22} \rangle, \langle w_{11}, w_{23} \rangle, \langle w_{12}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle, \langle w_{12}, w_{23} \rangle\}$$

$$\circ \mathcal{W}_{F1}^F = \{\langle w_{11}, w_{21} \rangle\}$$

$\circ \mu_{F1}$:

$$\mu_{F1}(w) = \begin{cases} 0.836 & w = \langle w_{11}, w_{21} \rangle \\ 0.019 & w = \langle w_{11}, w_{22} \rangle \\ 0.095 & w = \langle w_{11}, w_{23} \rangle \\ 0.044 & w = \langle w_{12}, w_{21} \rangle \\ 0.001 & w = \langle w_{12}, w_{22} \rangle \\ 0.005 & w = \langle w_{12}, w_{23} \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_{F1} = \{\phi_1, \phi_2\}$
- $\mathcal{A}_{F1} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- i_{F1} :

$$i_{F1}(\psi) = \begin{cases} \{\langle w_{12}, w_{21} \rangle\} & \psi = \phi_1 \\ \{\langle w_{11}, w_{22} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle, \langle w_{11}, w_{23} \rangle\} & \psi = \phi_2 \\ \mathcal{W}_{F1} \setminus \langle w_{11}, w_{21} \rangle & \psi = \phi_1 \vee \phi_2 \\ \mathcal{W}_{F1} \setminus \langle w_{11}, w_{21} \rangle & \psi = \text{vrai} \\ \emptyset & \psi = \text{faux} \end{cases}$$

Ce MI est combiné avec MI_{S3} de manière à obtenir MI_{F2} :

- \mathcal{W}_{F2} :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{F2} = \{ & \langle w_{11}, w_{21}, w_{31} \rangle, \langle w_{11}, w_{22}, w_{31} \rangle, \langle w_{11}, w_{23}, w_{31} \rangle, \langle w_{12}, w_{21}, w_{31} \rangle, \\ & \langle w_{12}, w_{22}, w_{31} \rangle, \langle w_{12}, w_{23}, w_{31} \rangle, \langle w_{11}, w_{21}, w_{32} \rangle, \langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle, \\ & \langle w_{11}, w_{23}, w_{32} \rangle, \langle w_{12}, w_{21}, w_{32} \rangle, \langle w_{12}, w_{22}, w_{32} \rangle, \langle w_{12}, w_{23}, w_{32} \rangle, \\ & \langle w_{11}, w_{21}, w_{33} \rangle, \langle w_{11}, w_{22}, w_{33} \rangle, \langle w_{11}, w_{23}, w_{33} \rangle, \langle w_{12}, w_{21}, w_{33} \rangle, \\ & \langle w_{12}, w_{22}, w_{33} \rangle, \langle w_{12}, w_{23}, w_{33} \rangle \} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

- \mathcal{W}_{F2}^F :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{F2}^F = \{ & \langle w_{11}, w_{21}, w_{31} \rangle, \langle w_{11}, w_{21}, w_{32} \rangle, \langle w_{11}, w_{21}, w_{33} \rangle, \langle w_{12}, w_{21}, w_{32} \rangle \\ & \langle w_{11}, w_{22}, w_{31} \rangle, \langle w_{11}, w_{23}, w_{31} \rangle, \langle w_{12}, w_{22}, w_{31} \rangle \} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

- μ_{F2} :

$$\mu_{F2}(w) = \begin{cases} 0.07524 & w = \langle w_{11}, w_{21}, w_{31} \rangle \\ 0.00171 & w = \langle w_{11}, w_{21}, w_{32} \rangle \\ 0.00855 & w = \langle w_{11}, w_{21}, w_{33} \rangle \\ 0.00396 & w = \langle w_{11}, w_{22}, w_{31} \rangle \\ 0.00009 & w = \langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle \\ 0.00045 & w = \langle w_{11}, w_{22}, w_{33} \rangle \\ 0.73570 & w = \langle w_{11}, w_{23}, w_{31} \rangle \\ 0.01672 & w = \langle w_{11}, w_{23}, w_{32} \rangle \\ 0.08360 & w = \langle w_{11}, w_{23}, w_{33} \rangle \\ 0.03872 & w = \langle w_{12}, w_{21}, w_{31} \rangle \\ 0.00088 & w = \langle w_{12}, w_{21}, w_{32} \rangle \\ 0.00440 & w = \langle w_{12}, w_{21}, w_{33} \rangle \\ 0.02508 & w = \langle w_{12}, w_{22}, w_{31} \rangle \\ 0.00057 & w = \langle w_{12}, w_{22}, w_{32} \rangle \\ 0.00285 & w = \langle w_{12}, w_{22}, w_{33} \rangle \\ 0.00132 & w = \langle w_{12}, w_{23}, w_{31} \rangle \\ 0.00005 & w = \langle w_{12}, w_{23}, w_{32} \rangle \\ 0.00015 & w = \langle w_{12}, w_{23}, w_{33} \rangle \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_{F2} = \{\phi_1, \phi_2\}$
- $\mathcal{A}_{F2} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \text{vrai}, \text{faux}\}$
- i_{F2} :

$$i_{F2}(\psi) = \begin{cases} \{\langle w_{12}, w_{21}, w_{31} \rangle, \langle w_{12}, w_{23}, w_{31} \rangle, \langle w_{12}, w_{21}, w_{33} \rangle\} & \psi = \phi_1 \\ \{\langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle, \langle w_{11}, w_{23}, w_{32} \rangle, \langle w_{12}, w_{22}, w_{32} \rangle, \\ \langle w_{12}, w_{23}, w_{32} \rangle, \langle w_{11}, w_{22}, w_{33} \rangle, \langle w_{11}, w_{23}, w_{33} \rangle, \\ \langle w_{12}, w_{22}, w_{33} \rangle\} & \psi = \phi_2 \\ \mathcal{W}_{F2} \setminus \mathcal{W}_{F2}^F & \psi = \phi_1 \vee \phi_2 \\ \mathcal{W}_{F2} \setminus \mathcal{W}_{F2}^F & \psi = \text{vrai} \\ \emptyset & \psi = \text{faux} \end{cases}$$

Selon la combinaison de Yager, la masse de l'ensemble vide ($\mu(i(\mathcal{W}^F))$) est réattribuée à l'ignorance totale, ici la proposition $\phi_1 \vee \phi_2$. Son incidence devient alors :

$$i'_{F2}(\phi_1 \vee \phi_2) = i_{F2}(\phi_1 \vee \phi_2) \cup i_{F2}(\mathcal{W}_{F2}^F) = \mathcal{W}_{F2}$$

L'incidence des autres propositions reste la même, ce qui permet le calcul de la probabilité de l'incidence supérieure, la plausibilité.

$$\begin{aligned} \text{Pl}(\phi_1) &= 1 - \mu(i_*(\neg(\phi_1))) = 1 - \mu(i(\phi_2)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{11}, w_{22}, w_{32} \rangle) - \mu(\langle w_{11}, w_{23}, w_{32} \rangle) - \mu(\langle w_{12}, w_{22}, w_{32} \rangle) - \\ &\quad \mu(\langle w_{12}, w_{23}, w_{32} \rangle) - \mu(\langle w_{11}, w_{22}, w_{33} \rangle) - \mu(\langle w_{11}, w_{23}, w_{33} \rangle) - \mu(\langle w_{12}, w_{22}, w_{33} \rangle) \\ &= 1 - 0.01672 - 0.0836 - 0.00088 - 0.0044 - 0.00057 - 0.00285 - 0.00003 = 0.89095 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pl}(\phi_2) &= 1 - \mu(i_*(\neg(\phi_2))) = 1 - \mu(i(\phi_1)) \\ &= 1 - \mu(\langle w_{12}, w_{21}, w_{31} \rangle) - \mu(\langle w_{12}, w_{23}, w_{31} \rangle) - \mu(\langle w_{12}, w_{21}, w_{33} \rangle) \\ &= 1 - 0.00396 - 0.00045 - 0.00132 = 0.99427 \end{aligned}$$

$$\text{Pl}(\phi_1 \vee \phi_2) = 1 - \mu(i_*(\neg(\phi_1 \vee \phi_2))) = 1 - \mu(i(\emptyset)) = 1$$

La modélisation des informations grâce au calcul d'incidence et la combinaison de celles-ci en utilisant la combinaison standard et en intégrant la modification au niveau de la redistribution de conflit donne le même résultat qu'une combinaison simultanée de Yager, comme à la troisième colonne du Tableau A.2.

Le calcul d'incidence généralisé modifié est associatif au départ. Puisque aucune modification n'a été apportée aux étapes de combinaison, le procédé demeure associatif. La modification apportée ici n'affecte que la toute fin de processus.

On remarque également que la règle de combinaison de Yager ou de Dempster peut-être à fin de toutes les combinaisons standards du calcul d'incidence. On peut donc choisir après la fin des combinaisons si l'on veut combiner à la manière de Yager ou de Dempster. Il est donc possible d'obtenir les deux résultats sans que cela ne nécessite beaucoup plus de calculs.

A.2 Dezert-Smarandache

La théorie de Dezert et Smarandache (DSmT) est basée sur la théorie de l'évidence, mais en diverge par l'introduction du concept de l'hyper-puissance. Ce concept permet d'avoir des propositions disjonctives, ce que la DSmT utilise lorsqu'une contradiction est rencontrée. La DSmT peut être vue comme une amélioration de la théorie partiellement disjonctive de Dubois et Prade [Dubois et Prade, 1986, 1988]. Toutefois, la DSmT raffine ce concept, ce qui lui permet de bien se comporter dans des situations où la combinaison de Dubois-Prade échoue.

Le concept d'ensemble d'hyper puissance D^Θ procure une nouvelle flexibilité sur l'espace de raisonnement. Le modèle dit de Shafer, utilisé dans la combinaison de Dempster et dans la majorité des alternatives proposées, suppose que les hypothèses de Θ sont exclusives et exhaustives. Cela veut dire qu'avec un ensemble $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$, on peut être assuré que notre raisonnement retournera un de ces éléments, mais jamais deux à la fois. La proposition $\theta_1 \vee \theta_2$ est permise alors que $\theta_1 \wedge \theta_2$ ne l'est pas. Voici la liste des propositions permises dans un modèle de Shafer avec ce cadre de discernement :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\equiv \emptyset \\ \alpha_1 &\equiv \theta_1 \\ \alpha_2 &\equiv \theta_2 \\ \alpha_3 &\equiv \theta_1 \cup \theta_2\end{aligned}$$

La DSmT introduit le modèle libre et le modèle hybride. Le modèle libre est un modèle dans lequel tous les sous-ensembles produits par les opérateurs disjonctifs et conjonctifs peuvent se produire. Par exemple, l'ensemble $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ permettra de générer les proposi-

tions suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &\equiv \emptyset \\ \alpha_1 &\equiv \theta_1 \cap \theta_2 \\ \alpha_2 &\equiv \theta_1 \\ \alpha_3 &\equiv \theta_2 \\ \alpha_4 &\equiv \theta_1 \cup \theta_2\end{aligned}$$

Le modèle hybride est un modèle libre auquel on ajoute certaines contraintes. On peut ainsi modifier le modèle libre précédent de façon à ce qu'il devienne un modèle de Shafer en ajoutant la contrainte $\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \emptyset$. Cette flexibilité est l'élément le plus intéressant de la DSMT puisqu'elle permet de modifier l'ensemble Θ tout en conservant un résultat correct. Cette flexibilité au niveau de la représentation permet aussi de créer une combinaison qui permet de solutionner des problèmes sur lesquels les autres combinaisons dans d'autres cadres de raisonnement échouent.

A.2.1 La combinaison DSMT classique

La combinaison DSMT classique est effectuée sans aucune contrainte en utilisant le modèle libre. Dans ce cas, toutes les intersections sont permises.

$$m_{\mathcal{M}(\Theta)}(C) \equiv S_1(C) = m(C) = \sum_{\substack{A, B \in D^\Theta \\ A \cap B = C}} m_1(A)m_2(B) \quad (\text{A.10})$$

Exemple A.3

On reprend l'exemple de Zadeh (exemple 3.7) en y appliquant la combinaison DSMT classique dans D^Θ plutôt que la combinaison de Dempster.

On pose deux sources indépendantes qui se prononcent sur l'ensemble $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. Les données retournées par les deux sources sont présentées dans le Tableau A.3 et la combinaison s'effectue dans le Tableau A.4. Le résultat est résumé dans le Tableau A.5.

On remarque que l'hypothèse $\theta_1 \wedge \theta_2$ obtient presque toute la masse, ce qui n'aurait pas été possible avec la théorie de Dempster ; la masse aurait été redistribuée en donnant le résultat aberrant que l'on connaît.

La DSMT impose en partie ce qui est souhaité dans [Haenni, 2005], c'est à dire un cadre de discernement plus large tenant compte du fait qu'un malade puisse avoir plus d'une maladie.

Proposition	m_{S1}	m_{S2}
θ_1	0.998	0
θ_2	0	0.998
θ_3	0.002	0.002

Tableau A.3: Masse des propositions selon les sources S1 et S2 de l'exemple A.3

Éléments A de D^\ominus	$m_1(A)$	$m_2(A)$	$S_1(A)$	$m(A)$
\emptyset	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$	0	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0	0	0.0196	0.0196
$\theta_1 \cap \theta_3$	0	0	0.0196	0.0196
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0	0	0	0
θ_3	0.02	0.02	0.0004	0.0004
$\theta_1 \cap \theta_2$	0	0	0.9604	0.9604
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	0	0	0	0
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	0	0	0	0
θ_2	0	0.998	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0	0	0	0
$\theta_2 \cup \theta_3$	0	0	0	0
θ_1	0.998	0	0	0
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0	0	0	0
$\theta_1 \cup \theta_3$	0	0	0	0
$\theta_1 \cup \theta_2$	0	0	0	0
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0	0	0	0

Tableau A.4: Combinaison en utilisant le DSM libre de l'exemple A.3.

Élément A de D^\ominus	$m(A)$	$\text{Bel}(A)$	$\text{Pl}(A)$
θ_3	0.0004	0.0396	0.0396
$\theta_2 \cap \theta_3$	0.0196	0.0196	0.0196
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.0196	0.0196	0.0196
$\theta_1 \cap \theta_2$	0.9604	0.9604	0.9604

Tableau A.5: Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DSM libre de l'exemple A.3.

		$w \in \mathcal{W}_{S1}$	
		w_{11}	w_{12}
$w \in \mathcal{W}_{S2}$	w_{21}	0.9604	0.0196
	w_{22}	0.0196	0.0004

Tableau A.6: Probabilité des nouveaux ensembles d'univers créés de l'exemple A.4.

A.2.2 Équivalence du DS*m* classique et du calcul d'incidence

On peut remarquer plusieurs points communs entre le DS*m* classique et le calcul d'incidence généralisé modifié auquel on ne soumet aucune contrainte. En effet, le DS*m* classique peut attribuer une masse à n'importe quel élément de l'ensemble hyper-puissance alors que le CIGM peut attribuer une incidence à n'importe quelle fonction valide de la logique propositionnelle. Cette dernière étant plus riche, le CIGM n'a pas de difficulté à représenter l'information de la même manière que la DS*m*.

Exemple A.4

On reprend l'exemple A.3 en utilisant cette fois-ci le calcul d'incidence, de manière à démontrer son équivalence avec le DS*m* classique. On modélise les 2 modèles d'incidence ainsi :

$$MI_1 = \langle \{w_{11}, w_{12}\}, \{\}, \{0.98, 0.02\}, \{\phi_1, \phi_3\}, \{\{\phi_1\}, \{\phi_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{11}, w_{12}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle$$

$$MI_2 = \langle \{w_{21}, w_{22}\}, \{\}, \{0.98, 0.02\}, \{\phi_2, \phi_3\}, \{\{\phi_2\}, \{\phi_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{21}, w_{22}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle$$

Le Tableau A.6 montre les probabilités des 4 nouveaux ensembles d'univers créés pour la combinaison. On observe dans le Tableau A.7 le résultat des conjonctions des propositions, mais puisqu'il n'y a pas de contraintes, aucune proposition n'est rejetée, ni reformulée. Le Tableau A.8 présente les fonctions d'incidence des propositions créées, ainsi que la croyance et la plausibilité qui leurs sont associées.

Le résultat correspond au résultat obtenu avec le DS*m* libre.

A.2.3 La combinaison DS*m* hybride

La combinaison DS*m* hybride est basée sur la combinaison DS*m* libre, mais permet l'utilisation de contraintes sur les ensembles. Cela permet de définir que certaines propositions ne

	$\psi \in \mathcal{A}_{S1}$		ϕ_1	ϕ_3
$\psi \in \mathcal{A}_{S2}$				
	ϕ_2		$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\phi_2 \wedge \phi_3$
	ϕ_3		$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3

Tableau A.7: Nouvelles propositions du MI_3 de l'exemple A.4.

$\psi \in \mathcal{A}$	$i(\psi)$	$Bel(\psi)$	$PI(\psi)$
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\{\langle w_{11}, w_{21} \rangle\}$	0.9604	0.9604
$\phi_1 \wedge \phi_3$	$\{\langle w_{11}, w_{22} \rangle\}$	0.0196	0.0196
$\phi_2 \wedge \phi_3$	$\{\langle w_{12}, w_{21} \rangle\}$	0.0196	0.0196
ϕ_3	$\{\langle w_{11}, w_{22} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle\}$	0.0396	0.0396
ϕ_2	$\{\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{21} \rangle\}$	0.98	0.98
ϕ_1	$\{\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{11}, w_{22} \rangle\}$	0.98	0.98

Tableau A.8: Incidence des propositions du MI_3 de l'exemple A.4.

peuvent être vraies en même temps (ex. : $\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \emptyset$) ou de rejeter une proposition particulièrement (ex : $\theta_1 \equiv \emptyset$). La DSm hybride utilise une règle de combinaison plus complexe que la DSm libre :

$$m_{\mathcal{M}(\Theta)}(C) \triangleq \Phi(C) [S_1(C) + S_2(C) + S_3(C)] \quad (\text{A.11})$$

La fonction $\Phi(C)$ détermine si C fait parti des contraintes qui sont imposées. Si oui, la fonction retourne 0 et la masse finale devient nulle. Si C n'entre pas en conflit avec les contraintes, sa masse devient la somme des termes S_1 , S_2 et S_3 .

On connaît déjà S_1 , définie pour la DSm classique :

$$S_1(C) = \sum_{\substack{A, B \in D^\Theta \\ A \cap B = C}} m_1(A)m_2(B) \quad (\text{A.12})$$

Puisque la fonction $\Phi(C)$ rejette certains résultats et que la somme des masses doit rester unitaire, on ajoute S_3 , qui permet de redistribuer les masses du conflit sur d'autres éléments de D^Θ :

$$S_3(C) = \sum_{\substack{A, B \in D^\Theta \\ A \cup B = C \\ A \cap B = \emptyset}} m_1(A)m_2(B) \quad (\text{A.13})$$

À défaut d'avoir pu attribuer la masse à la conjonction en utilisant S_1 , la fonction S_3 tente de l'attribuer à la disjonction de A et de B . Il arrive toutefois que le résultat de S_3 soit annulé par $\Phi(C)$. Cela se produit lorsque A ou B sont eux-mêmes exclus par le modèle utilisé. On doit alors se rabattre sur S_2 :

$$S_2(C) = \sum_{\substack{A, B \in \emptyset \\ [(u(A) \cup u(B) = C) \vee [(u(A) \cup u(B) \in \emptyset) \wedge (A = I_t)]]}} m_1(A)m_2(B) \quad (\text{A.14})$$

Le terme S_2 est en deux parties. Si la première partie échoue, la deuxième apporte une autre solution. Il serait d'ailleurs plus clair de séparer le terme S_2 en deux. On définit d'abord la fonction $u(A)$ qui y est utilisée. La fonction u sert à retourner une disjonction des propositions atomiques présentes dans A . Par exemple, $u(\theta_1 \cap \theta_2) = \theta_1 \vee \theta_2$ et $u(\theta_1 \cap (\theta_2 \cup \theta_3)) = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$.

La première partie $[(u(A) \cup u(B) = C)]$, tente de créer une proposition C à partir de la disjonction de toutes les propositions atomiques présentes dans A et B . Si cette disjonction est encore incluse dans l'ensemble vide, la seconde partie du terme ($[(u(A) \cup u(B) \in \emptyset) \wedge (A = I_t)]$) envoie la masse correspondante à l'ignorance totale, I_t . I_t correspond à la disjonction de toutes les propositions atomiques.

Exemple A.5

Contrairement aux deux exemples précédents, on impose des contraintes sur l'exemple de Zadeh de manière à obtenir l'exclusion mutuelle des diagnostics. On définit donc que les intersections des ensembles sont vides :

$$\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \emptyset$$

$$\theta_1 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$$

$$\theta_2 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$$

Le Tableau A.9 donne le résultat de la combinaison DSm hybride correspondante. La colonne $S_1(O)$ correspond à ce qui a été obtenu lors de l'exemple A.3, mais puisque $\Phi(C)$ indique que plusieurs d'entre eux correspondent à l'ensemble vide, on doit remplir la colonne $S_3(O)$. Puisque les éléments non-nuls de celle-ci ne font pas parti de l'ensemble vide, on n'a pas à remplir $S_2(O)$. La somme des lignes se trouve dans la dernière colonne et correspond à la masse de chacun des éléments après combinaison. Le Tableau A.10 présente un tableau simplifié des croyances et plausibilités correspondantes.

Puisque l'exemple précédent n'utilise pas le terme S_2 de la combinaison, un deuxième exemple s'impose.

Éléments A de D^Θ	$\Phi(A)$	$m_1(A)$	$m_2(A)$	$S_1(A)$	$S_2(A)$	$S_3(A)$	$m(A)$
\emptyset	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3$	0	0	0	0.0196	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_3$	0	0	0	0.0196	0	0	0
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3$	0	0	0	0	0	0	0
θ_3	1	0.02	0.02	0.0004	0	0	0.0004
$\theta_1 \cap \theta_2$	0	0	0	0.9604	0	0	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2$	0	0	0	0	0	0	0
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1$	0	0	0	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup (\theta_2 \cap \theta_3)$	0	0	0	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3$	0	0	0	0	0	0	0
θ_2	1	0	0.98	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0	0.0196	0.0196
θ_1	1	0.98	0	0	0	0	0
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0	0.0196	0.0196
$\theta_1 \cup \theta_2$	1	0	0	0	0	0.9604	0.9604
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	1	0	0	0	0	0	0

Tableau A.9: Calcul des masses en utilisant la DS_m hybride de l'exemple A.5.

Éléments O de D^Θ	$m(O)$	$\text{Bel}(O)$	$\text{Pl}(O)$
θ_3	0.0004	0.0396	0.0396
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.0196	0.02	1
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.0196	0.02	1
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.9604	0.9604	0.9604

Tableau A.10: Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DS_m hybride de l'exemple A.5.

Éléments O de D^Θ	$m_1(O)$	$m_2(O)$	$\Phi(O)$	$S_1(O)$	$S_2(O)$	$S_3(O)$	$m(O)$
\emptyset	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$	0	0	0	0.16	0	0	0
$\theta_2 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$	0	0.20	0	0.19	0	0	0
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.10	0	1	0.12	0	0	0.12
$(\theta_1 \cup \theta_2) \cap \theta_3 \equiv \emptyset$	0	0	1	0.01	0	0.02	0.03
θ_3	0.30	0.10	1	0.10	0	0.06	0.16
$\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \emptyset$	0.10	0.20	0	0.22	0	0.02	0
$(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \equiv \emptyset$	0	0	0	0.05	0	0.02	0
$(\theta_2 \cup \theta_3) \cap \theta_1 \equiv \emptyset$	0	0	1	0	0	0.02	0.02
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup (\theta_1 \cap \theta_3) \cup$ $(\theta_2 \cap \theta_3) \equiv \theta_1 \cap \theta_3$	0	0	1	0	0	0	0
$(\theta_1 \cap \theta_2) \cup \theta_3 \equiv \theta_3$	0	0	1	0	0	0.07	0.07
θ_2	0.20	0.10	1	0.03	0	0.09	0.12
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0	0	1	0	0	0.01	0.01
$\theta_2 \cup \theta_3$	0	0	1	0	0	0.05	0.05
θ_1	0.10	0.20	1	0.08	0	0.12	0.12
$(\theta_2 \cap \theta_3) \cup \theta_1 \equiv \theta_1$	0	0	1	0.02	0	0.04	0.04
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.10	0.20	1	0.02	0	0.08	0.08
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.10	0	1	0	0.02	0.09	0.11
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0	0	1	0	0.02	0.05	0.07

Tableau A.11: Calcul des masses en utilisant la DSm hybride de l'exemple A.6.

Exemple A.6

On reprend ici un exemple de Dezert et Smarandache qui illustre plusieurs aspects de la théorie [Smarandache et Dezert, 2004, Ex. 4.5.8.3]. Il s'agit de la combinaison de deux sources d'informations dans un modèle qui interdit l'ensemble $(\theta_1 \cup \theta_3) \cap \theta_2 \equiv \emptyset$. Cette contrainte implique que $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$, $\theta_1 \cap \theta_2 \equiv \emptyset$ et $\theta_2 \cap \theta_3 \equiv \emptyset$.

Le Tableau A.11 contient les données de l'exemple ainsi que le résultat. Une fois la colonne S_1 remplie, on remarque que plusieurs des éléments sont vides, selon la colonne $\Phi(O)$. On utilise alors S_3 , mais deux éléments sont encore vides. La colonne S_2 complète alors le tableau afin de permettre que la somme de la colonne $m(O)$ soit unitaire. Le résultat est résumé dans le tableau A.12.

Éléments O de D^Θ	$m(O)$	$Bel(O)$	$Pl(O)$
\emptyset	0	0	1
$\theta_1 \cap \theta_3$	0.17	0.17	0.88
θ_3	0.23	0.4	0.88
θ_2	0.12	0.12	0.36
$(\theta_1 \cap \theta_3) \cup \theta_2$	0.01	0.3	1
$\theta_2 \cup \theta_3$	0.05	0.58	1
θ_1	0.16	0.33	0.88
$\theta_1 \cup \theta_3$	0.08	0.64	0.88
$\theta_1 \cup \theta_2$	0.11	0.57	1
$\theta_1 \cup \theta_2 \cup \theta_3$	0.07	1	1

Tableau A.12: Croyances et plausibilités du résultat de la combinaison DSm hybride de l'exemple A.6.

A.2.4 Modification au calcul d'incidence pour imiter la DSm hybride

Il est facile de modifier le calcul d'incidence présenté dans ce mémoire pour qu'il puisse se comporter comme la combinaison de Dezert-Smarandache hybride. En reprenant la combinaison telle que définie à la section 5.2.4, on retire les étapes 3 et 4 et on les remplace par les opérations décrites dans cette section.

La fonction $u(\phi)$ est donnée par :

$$u(\phi) = \bigcup_{\psi \models \phi, \psi \in \mathcal{P}} \psi \quad (\text{A.15})$$

L'ignorance totale I_t se calcule par :

$$I_t = \bigcup_{\psi \in \mathcal{P}} \psi \quad (\text{A.16})$$

Le calcul de \mathcal{A} et de l'incidence se fait facilement par l'algorithme A :

1. Boucle (1) : Itérer tous les ψ dans l'ensemble \mathcal{A}_1

(a) Boucle (2) : Itérer tous les ϕ dans l'ensemble \mathcal{A}_2

- i. Si $\phi \wedge \psi \neq$ faux, l'ajouter à \mathcal{A}_{3a} , $i_3(\phi \wedge \psi) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi) \setminus \mathcal{W}_3^F$. Boucler (2)
- ii. Si $\phi, \psi \neq$ faux, ajouter $\phi \vee \psi$ à \mathcal{A}_{3b} . Définir $i_3(\phi \vee \psi) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi)$. Boucler (2).

- iii. Si $\phi \neq$ faux, l'ajouter à \mathcal{A}_{3b} . Définir $i_3(\phi) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi)$. Boucler (2).
 - iv. Si $\psi \neq$ faux, l'ajouter à \mathcal{A}_{3b} . Définir $i_3(\psi) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi)$. Boucler (2).
 - v. Si $u(\phi) \vee u(\psi) \neq$ faux, l'ajouter à \mathcal{A}_{3b} . Définir $i_3(u(\phi) \vee u(\psi)) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi)$. Boucler (2).
 - vi. Ajouter I_t à \mathcal{A}_{3b} . Définir $i_3(I_t) = i'_1(\phi) \cap i_2(\psi)$. Boucler (2).
2. Boucler (1).
 3. Vider \mathcal{W}_3^F de son contenu et définir $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_{3a} \cup \mathcal{A}_{3b}$

Il faut ensuite filtrer les fonctions d'incidence pour retirer les univers impossibles. Cette étape est complexe puisque l'on doit conserver les univers des nouveaux axiomes alors que certains nouveaux axiomes doivent se faire amputer de certains univers impossibles afin d'obtenir le même résultat qu'avec la DSmT. Nous n'avons pas la solution qui fonctionne dans tous les cas, mais l'algorithme B donne de bons résultats dans la grande majorité des cas :

1. Trouver $|i(a)|$: Le module de l'incidence, soit nombre d'ensemble d'univers dans lequel la proposition a est vraie.
2. Boucle (1) : Itérer de $j = 2$ jusqu'à $\max(|i(a)|) \forall a \in \mathcal{A}_3$
 - (a) Boucle (2) : Itérer tous les ψ dans l'ensemble \mathcal{A}_{3b}
 - i. Si $|i(\psi)| \leq j$
 - ii. Boucle (3) : Itérer tous les ϕ dans l'ensemble \mathcal{A}_{3b}
 - A. Si $|i(\phi)| > j$, $i'(\phi) = i(\phi) \setminus i(\psi)$
 - B. Boucler (3).
 - iii. Boucler (2).
 - (b) Boucler (1)

Cette technique donne priorité aux axiomes dont l'incidence a peu d'éléments lorsque l'on élimine les univers en conflit. De cette manière, aucun axiome ne se retrouve avec un ensemble vide comme fonction d'incidence. Cet algorithme ne fonctionne malheureusement pas à tous les coups. De plus, la relation entre le module des fonctions d'incidence et le contenu de celles-ci est difficile à justifier. On doit donc considérer cette proposition comme étant une émulation et non comme étant une équivalence de la DSm hybride.

Exemple A.7

On reprend l'exemple A.5 en utilisant cette fois-ci le CIGM. Les données du problème sont

		$w \in \mathcal{W}_{S1}$	
		w_{11}	w_{12}
$w \in \mathcal{W}_{S2}$	w_{21}	0.9604	0.0196
	w_{22}	0.0196	0.0004

Tableau A.13: Probabilités des nouveaux ensembles d'univers créés de l'exemple A.7.

		$\psi \in \mathcal{A}_{S1}$	
		ϕ_1	ϕ_3
$\psi \in \mathcal{A}_{S2}$	ϕ_2	$\phi_1 \vee \phi_2$	$\phi_2 \vee \phi_3$
	ϕ_3	$\phi_1 \vee \phi_3$	ϕ_3

Tableau A.14: Nouvelles propositions du MI_3 de l'exemple A.7.

modélisées selon les deux modèles d'incidence suivant :

$$MI_1 = \langle \{w_{11}, w_{12}\}, \{\}, \{0.98, 0.02\}, \{\theta_1, \theta_3\}, \{\{\theta_1\}, \{\theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{11}, w_{12}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle$$

$$MI_2 = \langle \{w_{21}, w_{22}\}, \{\}, \{0.98, 0.02\}, \{\theta_2, \theta_3\}, \{\{\theta_2\}, \{\theta_3\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \{w_{21}, w_{22}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle$$

Le Tableau A.13 montre les probabilités des 4 nouveaux ensembles d'univers créés pour la combinaison. Les tableaux A.14 et A.15 sont remplis grâce à l'algorithme A. On remarque que toutes les propositions n'ont pu être combinées grâce à la conjonction et l'ont été en utilisant une disjonction. L'algorithme B est ensuite invoqué, mais ne change pas le contenu du tableau. Le Tableau A.16 présente les fonctions d'incidence des propositions créées, ainsi que la croyance et la plausibilité qui leurs sont associées. On note que les propositions « vrai » et « faux » devraient se retrouver dans ces tableaux, mais ont été omises afin de ne pas les alourdir.

On remarquera que les tableaux A.10 et A.16 ont les mêmes croyances et plausibilités, ce qui montre l'équivalence du DSmT et du calcul d'incidence sur cet exemple. Avec la combinaison disjonctive ou celle de Dubois-Prade on obtient les mêmes résultats.

Une autre technique¹ qui fonctionne bien est de filtrer les informations à l'entrée même du système de manière à éliminer les axiomes qui sont impossibles selon le modèle utilisé. Cette technique a l'avantage d'être beaucoup plus facilement justifiable.

¹suggérée par Marie-Line Gagnon

	$i'_2(\psi) \in \mathcal{A}_{S1}$	$\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{11}, w_{22} \rangle$	$\langle w_{12}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle$
$i'_1(\psi) \in \mathcal{A}_{S2}$			
	$\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{21} \rangle$	$\langle w_{11}, w_{21} \rangle$	$\langle w_{12}, w_{21} \rangle$
	$\langle w_{11}, w_{22} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle$	$\langle w_{11}, w_{22} \rangle$	$\langle w_{12}, w_{22} \rangle$

Tableau A.15: Incidence $i_3(\phi)$ des propositions $\phi \in \mathcal{A}_3$ de l'exemple A.7.

ψ	Bel(ψ)	Pl(ψ)
$\phi_1 \vee \phi_2$	0.9604	0.9604
$\phi_1 \vee \phi_3$	0.02	1
$\phi_2 \vee \phi_2$	0.02	1
ϕ_3	0.0004	0.9604

Tableau A.16: Croyances et plausibilités des propositions de l'exemple A.7.

Exemple A.8

L'exemple A.6 est lui aussi réalisable en utilisant le CIGM. On définit le problème sous forme de MI :

$$\begin{aligned}
\text{MI}_1 = & \langle \{w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_{17}\}, \{\}, \{0.1, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1, 0.1\}, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\
& \{\{\theta_1 \wedge \theta_3\}, \{\theta_3\}, \{\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{\theta_2\}, \{\theta_1\}, \{\theta_1 \vee \theta_3\}, \{\theta_1 \vee \theta_2\}, \text{vrai, faux}\}, \\
& \{w_{11}, \{w_{11}, w_{12}\}, w_{13}, \{w_{13}, w_{14}\}, \{w_{11}, w_{13}, w_{15}\}, \{w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{15}, w_{16}\}, \\
& \{w_{11}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{17}\}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle > \\
\text{MI}_2 = & \langle \{w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}, w_{25}, w_{26}\}, \{\}, \{0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.2\}, \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}, \\
& \{\{\theta_2 \wedge \theta_3\}, \{\theta_3\}, \{\theta_1 \wedge \theta_2\}, \{\theta_2\}, \{\theta_1\}, \{\theta_1 \vee \theta_3\}, \text{vrai, faux}\}, \\
& \{w_{21}, \{w_{21}, w_{22}\}, w_{23}, \{w_{21}, w_{23}, w_{24}\}, \{w_{23}, w_{25}\}, \{w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{25}, w_{26}\}, \mathcal{W}, \emptyset \rangle >
\end{aligned}$$

On retrouve dans les tableaux A.17 et A.18 les fonctions d'incidence des deux MI suite à la création d'un contexte commun. L'algorithme A est ensuite utilisé pour remplir les tableaux A.19 et A.20 qui contiennent respectivement les nouveaux axiomes et les fonctions d'incidence qui y sont associées. On doit noter que les axiomes déjà existants ne sont pas dans ces tableaux mais sont utilisés plus loin.

L'application de l'algorithme B efface certains éléments du Tableau A.20 qui sont marqués d'un trait. La probabilité des nouveaux univers sont calculés dans le tableau A.21, ce qui permet d'obtenir les résultats numériques du Tableau A.22. Ces résultats sont identiques à ceux obtenus à l'aide de la DSm hybride, dans le Tableau A.12.

ψ	$i'_1(\psi)$
$\phi_1 \wedge \phi_3$	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle \}$
ϕ_3	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{22} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{24} \rangle, \langle w_{12}w_{25} \rangle, \langle w_{12}w_{26} \rangle \}$
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\{ \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle \}$
ϕ_2	$\{ \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{22} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{24} \rangle, \langle w_{14}w_{25} \rangle, \langle w_{14}w_{26} \rangle \}$
ϕ_1	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{22} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{24} \rangle, \langle w_{15}w_{25} \rangle, \langle w_{15}w_{26} \rangle \}$
$\phi_1 \vee \phi_3$	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{22} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{24} \rangle, \langle w_{12}w_{25} \rangle, \langle w_{12}w_{26} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{22} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{24} \rangle, \langle w_{15}w_{25} \rangle, \langle w_{15}w_{26} \rangle, \langle w_{16}w_{21} \rangle, \langle w_{16}w_{22} \rangle, \langle w_{16}w_{23} \rangle, \langle w_{16}w_{24} \rangle, \langle w_{16}w_{25} \rangle, \langle w_{16}w_{26} \rangle \}$
$\phi_1 \vee \phi_2$	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{22} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{24} \rangle, \langle w_{14}w_{25} \rangle, \langle w_{14}w_{26} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{22} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{24} \rangle, \langle w_{15}w_{25} \rangle, \langle w_{15}w_{26} \rangle, \langle w_{17}w_{21} \rangle, \langle w_{17}w_{22} \rangle, \langle w_{17}w_{23} \rangle, \langle w_{17}w_{24} \rangle, \langle w_{17}w_{25} \rangle, \langle w_{17}w_{26} \rangle \}$

Tableau A.17: Incidence des axiomes du MI_1 après la création d'un contexte commun de l'exemple A.8.

ψ	$i'_2(\psi)$
$\phi_2 \wedge \phi_3$	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{16}w_{21} \rangle, \langle w_{17}w_{21} \rangle \}$
ϕ_3	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{22} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{22} \rangle, \langle w_{16}w_{21} \rangle, \langle w_{16}w_{22} \rangle, \langle w_{17}w_{21} \rangle, \langle w_{17}w_{22} \rangle \}$
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\{ \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{16}w_{23} \rangle, \langle w_{17}w_{23} \rangle \}$
ϕ_2	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{24} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{24} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{24} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{24} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{24} \rangle, \langle w_{16}w_{21} \rangle, \langle w_{16}w_{23} \rangle, \langle w_{16}w_{24} \rangle, \langle w_{17}w_{21} \rangle, \langle w_{17}w_{23} \rangle, \langle w_{17}w_{24} \rangle \}$
ϕ_1	$\{ \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{25} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{25} \rangle, \langle w_{16}w_{23} \rangle, \langle w_{16}w_{25} \rangle, \langle w_{17}w_{23} \rangle, \langle w_{17}w_{25} \rangle \}$
$\phi_1 \vee \phi_3$	$\{ \langle w_{11}w_{21} \rangle, \langle w_{11}w_{22} \rangle, \langle w_{11}w_{23} \rangle, \langle w_{11}w_{25} \rangle, \langle w_{11}w_{26} \rangle, \langle w_{12}w_{21} \rangle, \langle w_{12}w_{22} \rangle, \langle w_{12}w_{23} \rangle, \langle w_{12}w_{25} \rangle, \langle w_{12}w_{26} \rangle, \langle w_{13}w_{21} \rangle, \langle w_{13}w_{22} \rangle, \langle w_{13}w_{23} \rangle, \langle w_{13}w_{25} \rangle, \langle w_{13}w_{26} \rangle, \langle w_{14}w_{21} \rangle, \langle w_{14}w_{22} \rangle, \langle w_{14}w_{23} \rangle, \langle w_{14}w_{25} \rangle, \langle w_{14}w_{26} \rangle, \langle w_{15}w_{21} \rangle, \langle w_{15}w_{22} \rangle, \langle w_{15}w_{23} \rangle, \langle w_{15}w_{25} \rangle, \langle w_{15}w_{26} \rangle, \langle w_{16}w_{21} \rangle, \langle w_{16}w_{22} \rangle, \langle w_{16}w_{23} \rangle, \langle w_{16}w_{25} \rangle, \langle w_{16}w_{26} \rangle, \langle w_{17}w_{21} \rangle, \langle w_{17}w_{22} \rangle, \langle w_{17}w_{23} \rangle, \langle w_{17}w_{25} \rangle, \langle w_{17}w_{26} \rangle \}$

Tableau A.18: Incidence des axiomes du MI_2 après la création d'un contexte commun de l'exemple A.8.

A_{S2} \ A_{S1}	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	$\phi_1 \wedge \phi_2$	ϕ_2	ϕ_1	$\phi_1 \vee \phi_3$	$\phi_1 \vee \phi_2$
$\phi_2 \wedge \phi_3$	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	$\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3$	ϕ_2	ϕ_1	$\phi_1 \vee \phi_3$	$\phi_1 \vee \phi_2$
ϕ_3	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	ϕ_3	$\phi_2 \vee \phi_3$	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	$\phi_1 \wedge \phi_3$
$\phi_1 \wedge \phi_2$	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	$\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3$	ϕ_2	ϕ_1	$\phi_1 \vee \phi_3$	$\phi_1 \vee \phi_2$
ϕ_2	$(\phi_1 \wedge \phi_3) \vee \phi_2$	$\phi_2 \vee \phi_3$	ϕ_2	ϕ_2	$\phi_1 \vee \phi_2$	$\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3$	ϕ_2
ϕ_1	$\phi_1 \wedge \phi_3$	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_1	$\phi_1 \wedge \phi_2$	ϕ_1	ϕ_1	ϕ_1
$\phi_1 \vee \phi_3$	$\phi_1 \wedge \phi_3$	ϕ_3	$\phi_1 \vee \phi_3$	$\phi_1 \vee \phi_2 \vee \phi_3$	ϕ_1	$\phi_1 \vee \phi_3$	ϕ_1

Tableau A.19: Nouveaux axiomes de MI_3 de l'exemple A.8.

A_{S2} \ A_{S1}	$i'_1(\phi_1 \wedge \phi_3)$	$i'_1(\phi_3)$	$i'_1(\phi_1 \wedge \phi_2)$	$i'_1(\phi_2)$	$i'_1(\phi_1)$	$i'_1(\phi_1 \vee \phi_3)$	$i'_1(\phi_1 \vee \phi_2)$
$i'_2(\phi_2 \wedge \phi_3)$	$\{(w_{11}w_{21})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{12}w_{21})\}$	$\{(w_{13}w_{21})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{21}}, (w_{14}w_{21})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (\cancel{w_{13}w_{21}}, (w_{15}w_{21})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{12}w_{21}), (\cancel{w_{13}w_{21}}, (w_{15}w_{21}), (w_{16}w_{21})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (\cancel{w_{13}w_{21}}, (w_{14}w_{21}), (w_{15}w_{21}), (w_{17}w_{21})\}$
$i'_2(\phi_3)$	$\{(w_{11}w_{22})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{12}w_{22})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{22}}, (w_{13}w_{22})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{22}}, (w_{13}w_{22}), (w_{14}w_{22}), (w_{14}w_{22})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{15}w_{22})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{12}w_{22}), (w_{15}w_{22}), (w_{16}w_{22})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{15}w_{22}), (w_{17}w_{22})\}$
$i'_2(\phi_1 \wedge \phi_2)$	$\{(w_{11}w_{23})\}$	$\{(w_{11}w_{23}), (w_{12}w_{23})\}$	$\{(w_{13}w_{23})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{14}w_{23})\}$	$\{(w_{11}w_{23}), (\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{15}w_{23})\}$	$\{(w_{11}w_{23}), (w_{12}w_{23}), (\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{15}w_{23}), (w_{16}w_{23})\}$	$\{(w_{11}w_{23}), (\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{14}w_{23}), (w_{15}w_{23}), (w_{17}w_{23})\}$
$i'_2(\phi_2)$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{11}w_{23}), (w_{11}w_{24})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{11}w_{23}), (w_{11}w_{24}), (w_{12}w_{21}), (w_{12}w_{23}), (w_{12}w_{24})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{21}}, (\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{13}w_{24})\}$	$\{(w_{14}w_{24})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{11}w_{23}), (w_{11}w_{24}), (\cancel{w_{13}w_{21}}, (w_{13}w_{24}), (w_{15}w_{21}), (w_{15}w_{23}), (w_{15}w_{24})\}$	$\{(w_{11}w_{21}), (w_{11}w_{23}), (w_{11}w_{24}), (w_{12}w_{21}), (w_{12}w_{23}), (w_{12}w_{24}), (\cancel{w_{13}w_{21}}, (\cancel{w_{13}w_{23}}, (w_{13}w_{24}), (w_{15}w_{21}), (w_{15}w_{23}), (w_{15}w_{24}), (w_{16}w_{21}), (w_{16}w_{23}), (w_{16}w_{24})\}$	$\{(w_{14}w_{24}), (w_{17}w_{24})\}$
$i'_2(\phi_1)$	$\{(w_{11}w_{25})\}$	$\{(w_{11}w_{25}), (w_{12}w_{25})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{25}}, (w_{13}w_{25})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{25}}, (w_{13}w_{25}), (w_{14}w_{25}), (w_{14}w_{25})\}$	$\{(w_{11}w_{25}), (w_{15}w_{25})\}$	$\{(w_{11}w_{25}), (w_{12}w_{25}), (w_{15}w_{25}), (w_{16}w_{25})\}$	$\{(w_{11}w_{25}), (w_{15}w_{25}), (w_{17}w_{25})\}$
$i'_2(\phi_1 \vee \phi_3)$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{11}w_{25}), (w_{11}w_{26})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{11}w_{25}), (w_{11}w_{26}), (w_{12}w_{22}), (w_{12}w_{25}), (w_{12}w_{26})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{22}}, (\cancel{w_{13}w_{25}}, (w_{13}w_{26}), (w_{13}w_{26})\}$	$\{(\cancel{w_{13}w_{22}}, (\cancel{w_{13}w_{25}}, (w_{13}w_{26}), (w_{13}w_{26}), (w_{14}w_{22}), (w_{14}w_{23}), (w_{14}w_{25}), (w_{14}w_{26})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{11}w_{25}), (w_{11}w_{26}), (w_{15}w_{22}), (w_{15}w_{25}), (w_{15}w_{26})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{11}w_{25}), (w_{11}w_{26}), (w_{12}w_{22}), (w_{12}w_{25}), (w_{12}w_{26}), (w_{15}w_{22}), (w_{15}w_{25}), (w_{15}w_{26}), (w_{16}w_{22}), (w_{16}w_{25}), (w_{16}w_{26})\}$	$\{(w_{11}w_{22}), (w_{11}w_{25}), (w_{11}w_{26}), (w_{15}w_{22}), (w_{15}w_{25}), (w_{15}w_{26}), (w_{17}w_{22}), (w_{17}w_{25}), (w_{17}w_{26})\}$

Tableau A.20: Incidence des nouveaux axiomes de MI_3 de l'exemple A.8, après application de l'algorithme B.

\mathcal{W}_2	\mathcal{W}_1						
	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	w_{16}	w_{17}
w_{21}	0.02	0.06	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02
w_{22}	0.01	0.03	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01
w_{23}	0.02	0.06	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02
w_{24}	0.01	0.03	0.01	0.02	0.01	0.01	0.01
w_{25}	0.02	0.06	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02
w_{26}	0.02	0.06	0.02	0.04	0.02	0.02	0.02

Tableau A.21: Probabilités des nouveaux ensembles d'univers créés, \mathcal{W}_3 de l'exemple A.8.

A.2.5 Différence

Le CIGM et la DSMT divergent en ce qui a trait à la masse de l'ensemble vide. Les deux méthodes peuvent gérer des informations non-normalisées où la masse de l'ensemble vide est non nulle. La DSMT attribue cette masse à l'ignorance totale après une combinaison alors que le CIGM ne s'en occupe pas et laisse la masse à l'ensemble vide. Cela s'explique par le fait que le CIGM ne représente pas directement l'ensemble vide mais l'ignore d'une certaine manière en ayant certains univers qui ne sont pas référés par des fonctions d'incidence.

Exemple A.9

Cet exemple, tiré de [Smarandache et Dezert, 2004, Ex. 1.4.3], montre la combinaison de deux informations où la masse de l'ensemble vide est non nulle.

$$\begin{aligned}
\text{MI}_1 &= \langle \{w_{11}, w_{12}, w_{13}\}, \{\}, \{0.2, 0.4, 0.4\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \\
&\quad \{\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \\
&\quad \{w_{12}, w_{13}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle \\
\text{MI}_2 &= \langle \{w_{21}, w_{22}, w_{23}\}, \{\}, \{0.3, 0.6, 0.1\}, \{\phi_1, \phi_2\}, \\
&\quad \{\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \text{vrai}, \text{faux}\}, \\
&\quad \{w_{22}, w_{23}, \mathcal{W}, \emptyset\} \rangle
\end{aligned}$$

On remarque que l'ensemble vide n'est pas implicitement défini dans l'ensemble des axiomes \mathcal{A} , mais qu'un des univers dans chacun des MI n'est pas utilisé dans aucune des fonctions d'incidence, soit w_{11} et w_{21} . En utilisant le modèle de Shafer, la combinaison des deux MI donnera le résultat MI_3 suivant :

ϕ	$\text{Bel}(\phi)$	$\text{Pl}(\phi)$
θ_1	0.48	0.82
θ_2	0.18	0.52
$\theta_1 \vee \theta_2$	0.94	1
vrai	1	1

Tableau A.23: Croyances et plausibilités du résultat de l'exemple A.9

○ \mathcal{W}_3 :

$$\mathcal{W}_3 = \{\langle w_{11}, w_{21} \rangle, \langle w_{11}, w_{22} \rangle, \langle w_{11}, w_{23} \rangle, \langle w_{12}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle, \langle w_{12}, w_{23} \rangle, \quad (\text{A.17})$$

$$\langle w_{13}, w_{21} \rangle, \langle w_{13}, w_{22} \rangle, \langle w_{13}, w_{23} \rangle\} \quad (\text{A.18})$$

○ $\mathcal{W}_3^F = \{\}$

○ μ_3 :

$$\mu_3(w) = \begin{cases} 0.06 & w = \langle w_{11}, w_{21} \rangle \\ 0.12 & w = \langle w_{11}, w_{22} \rangle \\ 0.02 & w = \langle w_{11}, w_{23} \rangle \\ 0.12 & w = \langle w_{12}, w_{21} \rangle \\ 0.24 & w = \langle w_{12}, w_{22} \rangle \\ 0.04 & w = \langle w_{12}, w_{23} \rangle \\ 0.12 & w = \langle w_{13}, w_{21} \rangle \\ 0.24 & w = \langle w_{13}, w_{22} \rangle \\ 0.04 & w = \langle w_{13}, w_{23} \rangle \end{cases}$$

○ $\mathcal{P}_3 = \{\phi_1, \phi_2\}$

○ $\mathcal{A}_3 = \{\phi_1, \phi_2, \phi_1 \vee \phi_2, \text{vrai}, \text{faux}\}$

○ i_3 :

$$i_3(\psi) = \begin{cases} \{\langle w_{12}, w_{21} \rangle, \langle w_{12}, w_{22} \rangle, \langle w_{11}, w_{22} \rangle\} & \psi = \phi_1 \\ \{\langle w_{13}, w_{21} \rangle, \langle w_{13}, w_{23} \rangle, \langle w_{11}, w_{23} \rangle\} & \psi = \phi_2 \\ \{\langle w_{12}, w_{23} \rangle, \langle w_{13}, w_{22} \rangle\} & \psi = \phi_1 \vee \phi_2 \\ \mathcal{W}_3 & \psi = \text{vrai} \\ \emptyset & \psi = \text{faux} \end{cases}$$

Le résultat numérique de l'exemple se trouve dans le Tableau A.23. On observe que la croyance de l'ignorance totale est de 0.94 alors que la DSm hybride obtient plutôt une croyance unitaire. Le comportement du GICT rejoint ici celui de la combinaison disjunctive.

A.3 Discussion

On a présenté deux manières d'adapter le calcul d'incidence généralisé modifié pour qu'il puisse représenter d'autres combinaisons que la combinaison de Dempster. L'utilisation du CIGM pour effectuer une combinaison de Yager présente l'avantage important de rendre la combinaison de Yager associative. Quant à la combinaison de Dezert-Smarandache, la CIGM présente une nouvelle interprétation de ses idées de base. Peut-être que les imperfections ou différences du CIGM pourraient alimenter la réflexion au sujet de la DSMT.

Cette annexe ne se voulait pas une démonstration formelle du CIGM à ce niveau, mais plutôt une étude préliminaire de son potentiel ; cela pourra, peut-être, inspirer d'autres chercheurs.

BIBLIOGRAPHIE

[Antonelli, 2003]

Antonelli, A. *Non-monotonic Logic*. Dans E. N. Zalta, éditeur, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2003. URL <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/logic-nonmonotonic/>.

[Bundy, 1985]

Bundy, A. *Incidence calculus : A mechanism for probabilistic reasoning*. J. Autom. Reason., 1(3) :263–283, 1985. ISSN 0168-7433.

[Corrêa Da Silva et Bundy, 1991]

Corrêa Da Silva, F. S. et Bundy, A. *A rational reconstruction of incidence calculus*. Rapport technique RP517, Department of Artificial Intelligence, University of Edinburgh, 1991. Introuvable. faudrait demander à l'auteur.

[Dempster, 1967]

Dempster, A. *Upper and Lower Probabilities Induced by Multivalued Mapping*. The Annals of Mathematical Statistics, 38 :325–339, 1967.

[Desodt-Lebrun, 1996]

Desodt-Lebrun, A.-M. *Fusion de données*. Techniques de l'Ingénieur, traité Mesures et Contrôle, (R7226), 1996.

[Dubois et Prade, 1986]

Dubois, D. et Prade, H. *A Set-Theoretic View of Belief Functions : Logical operations and approximations by fuzzy sets*. International Journal of General Systems, 12(12) :193–226, 1986.

[Dubois et Prade, 1988]

Dubois, D. et Prade, H. *Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures*. Computational Intelligence, 4 :244–264, 1988.

[de Elía et Laprise, 2005]

de Elía, R. et Laprise, R. *Diversity in Interpretations of Probability : Implications for Weather Forecasting*. Monthly Weather Review, 133(5) :1129–1143, 2005.

[Florea et al., mai 2005]

Florea, M. C., Jousselme, A.-L. et Grenier, D. *Dempster-Shafer evidence theory through the years : limitations, practical examples, variants under conflict and a new adaptive combination rule*. Dans *NATO ASI 2005 - Multisensor Data and Information Processing for Rapid and Robust Situation and Threat Assessment*, Albena, Bulgaria. mai 2005.

[Haenni, 2005]

Haenni, R. *Shedding new Light on Zadeh's Criticism of Dempster's rule of Combination*. Dans *FUSION'05, 8th International Conference on Information Fusion*, C8-1. 2005.

[Halpern et Fagin, 1992]

Halpern, J. Y. et Fagin, R. *Two Views of Belief : Belief as Generalized Probability and Belief as Evidence..* Artif. Intell., 54(2) :275–317, 1992.

[Hájek, 2003]

Hájek, A. *Interpretations of Probability*. Dans E. N. Zalta, éditeur, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2003. URL <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/probability-interpret/>.

[Kayser, 1997]

Kayser, D. *La représentation des connaissances*. Hermès, Paris, 1997.

[Lefevre et al., 2002]

Lefevre, E., Colot, O. et Vannoorenberghe, P. *Belief function combination and conflict management*. Information Fusion, 3(2) :149–162, 2002.

[Liu, 2001]

Liu, W. *Propositional, Probabilistic and Evidential Reasoning*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Physica-Verlag, 2001.

[Liu et Bundy, 1992]

Liu, W. et Bundy, A. *The combination of different pieces of evidence using incidence calculus*. Rapport technique RP599, University of Edinburgh, 1992.

[Liu et Bundy, 1994]

Liu, W. et Bundy, A. *A comprehensive comparison between generalized incidence calculus and the Dempster-Shafer theory of evidence*. International Journal of Human-Computer Studies, 40(6) :1009–1032, 1994.

[Liu et Hong, 2000]

Liu, W. et Hong, J. *Reinvestigating Dempster's Idea on Evidence Combination*. Knowledge and Information Systems, 2(2) :223–241, 2000.

[Maupin et al., 2005]

Maupin, P., Jousselme, A.-L. et Bossé, É. *Logical and mathematical perspectives in high-level information fusion*. Rapport technique TR 2002-233, Recherche et développement pour la défense Canada - Valcartier, 2005. En rédaction.

[McLean et al., 1995]

McLean, D., Bundy, A. et Liu, W. *Assignment methods for incidence calculus*. International Journal of Approximate Reasoning, 12 :21–41, 1995.

[Pollock, 1995]

Pollock, J. L. *Cognitive Carpentry : A Blueprint for How to Build a Person*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1995. ISBN 0262161524. 391 p.

[Pollock, 2001]

Pollock, J. L. *Defeasible reasoning with variable degrees of justification*. Artificial Intelligence, 133(1-2) :233–282, 2001. ISSN 0004-3702.

[Prakken et Vreeswijk, 2002]

Prakken, H. et Vreeswijk, G. *Logics for Defeasible Argumentation*. Dans D. Gabbay et F. Guenther, éditeurs, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 4, pages 218–319. Kluwer Academic Publishers, second édition, 2002.

[Shafer, 1976]

Shafer, G. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[Smarandache et Dezert, 2004]

Smarandache, F. et Dezert, J., éditeurs. *Advances and Applications of DSMT for Information Fusion*. American Research Press, 2004.

[Smets, 2004]

Smets, P. *Analyzing the Combination of Conflicting Belief Functions*, 2004. URL http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/Combi_Confl.pdf. Soumis.

[Steinberg et al., 1998]

Steinberg, A. N., Bowman, C. L. et White, F. E. *Revision to the JDL data fusion model*. Dans *Joint NATO/IRIS Conference*. Quebec City, 1998.

[Tversky et Kahneman, 1983]

Tversky, A. et Kahneman, D. *Extensional Versus Intuitive Reasoning : The Conjunction Fallacy in Probability Judgment*. Psychological Review, 90(4) :293–315, 1983.

[Voorbraak, 1991]

Voorbraak, F: *On the Justification of Dempster's Rule of Combination..* Artif. Intell., 48(2) :171-197, 1991.

[Wang et al., 1996]

Wang, L., Wong, S. K. M. et Yao, Y. *On the Completeness of Incidence Calculus..* J. Autom. Reasoning, 16(3) :355-368, 1996.

[Yager, 1987]

Yager, R. R. *On the dempster-shafer framework and new combination rules.* Information Sciences, 41(2) :93-137, 1987.

[Yager, 1994]

Yager, R. R. *Nonmonotonic reasoning with belief structures.* Dans R. R. Yager, M. Fedrizzi et J. Kacprzyk, éditeurs, *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence.* Wiley, 1994.

[Zadeh, 1984]

Zadeh, L. A. *Book Review : A Mathematical Theory of Evidence..* AI Magazine, 5(3) :81-83, 1984.

INDEX

- \models , 9
- Antonelli [2003], 8
- approximation, 103
- arguments défaisables, 19
- associativité, 10, 13, 28, 67, 106, 110
- axiomes, 56
- base de données, 3, 73
- bornes d'incidence, 37
- bouclage d'information, 78, 103
- Bundy [1985], 4, 32
- cadre de discernement, 22
- calcul d'incidence, 31
 - axiomes, 34
 - structure, 36
- calcul d'incidence généralisé, 39
 - axiomes, 40
 - conflits, 45
 - règle de combinaison, 45
- calcul d'incidence généralisé modifié, 51
- capteurs, 3
- combinaison
 - calcul d'incidence généralisé, 43
 - calcul d'incidence généralisé modifié, 57
 - Dempster, 22, 26, 43
 - disjonctive, 128
 - Dubois et Prade, 30
 - Florea, 30
 - Yager, 30
- complexité, 39, 103
- conflit, 27, 28, 59, 66
- conjonction, 15
- contexte
 - combiné, 54
 - commun, 58
 - initial, 53, 58
- Corrêa Da Silva et Bundy [1991], 37
- crédibilité, 25
- croissance, 22, 24, 45
- data looping, 78
- défaisabilité, 8, 19
- degré de justification, 19
- Dempster-Shafer, 13, 22
- Dempster [1967], 22
- Desodt-Lebrun [1996], 2
- Dezert-Smarandache (Théorie de), 5, 52, 60, 103, 111
- de Elía et Laprise [2005], 12
- disjonction, 15
- diversité, 3
- double négation, 17
- DS-indépendance, 45, 46
- DSm classique, 112, 114
- DSm hybride, 114
- DSmT, 5, 52, 60, 111
- Dubois et Prade [1986], 30, 111
- Dubois et Prade [1988], 30, 111
- élimination biconditionnelle, 17
- élimination de conjonction, 17
- élimination de disjonction, 17

- ensemble vide, 126
- ensembles, 73
- entailment*, 9
- évidence, 13, 21, 45
 - réinterprétation, 30
- exclusivité, 22
- exhaustivité, 22

- Florea et al. [mai 2005], 30

- GICT, voir calcul d'incidence généralisé

- Hájek [2003], 12
- Haenni [2005], 29, 112
- Halpern et Fagin [1992], 30
- heuristique, 73
- hiérarchie, 78
- humain, 9
- hybride, 14
- hyper-powerset, 111
- hyper-puissance, 111
- hypothèses, 22

- ICT, voir calcul d'incidence
- idempotence, 46
- identification, 3
- ignorance, 39, 41
- ignorance totale, 106, 110
- implication, 15
- imprécision, 2, 70, 72
- incertitude, 2, 9, 12, 13, 18, 70–72
- incidence
 - fonction, 33
 - inférieure, 37, 56
 - supérieure, 37, 56
- incomplet, voir imprécision
- inférence, 15, 16
- inférences, 19, 38, 74
- information
 - dépendance, 10
 - indépendance, 10, 12, 13
 - modélisation, 22
 - perte d', 50, 52
 - représentation, 22
- information imparfaite, 70
- introduction biconditionnelle, 17
- introduction de conjonction, 17
- introduction de disjonction, 17

- JDL, 4
- justification, 22, 71

- Kayser [1997], ii

- langage propositionnel, 36
- Lefevre et al. [2002], 106
- Legal Assignment Finder, 38, 76
- Liu et Bundy [1992], 4, 6, 39, 46
- Liu et Bundy [1994], 45
- Liu et Hong [2000], 30
- Liu [2001], 14, 37–39, 46
- logiciel, 103
- logique
 - modale, 15
 - opérateurs, 15
 - premier ordre, 15
 - propositionnelle, 15
- logique propositionnelle, 14, 73

- masse, 13, 23
- Maupin et al. [2005], 4, 13, 18
- McLean et al. [1995], 39
- MI, voir modèle d'incidence
- modèle
 - hybride, 60, 111
 - libre, 111, 112
 - Shafer, 22, 60, 61, 111
- modèle d'application, 60
- modèle d'incidence, 55
- models, 9
- modus ponens, 75
- monde possible, voir univers possibles

- monotonie, 8, 18
- négation, 15
- non-monotonie, 8, 13, 28
- numérique, 12
- objectifs, 4
- opérateur, 9
 - modélise, 9
- ordre de combinaison, voir associativité
- partition, 53, 54
- plausibilité, 24, 45
- Pollock [1995], 19
- Pollock [2001], 20
- Prakken et Vreeswijk [2002], 19
- preuve conditionnelle, 17
- probabilité, 53
 - fréquentiste, 12
 - inférieure, 37
 - interprétations, 12
 - précipitation, 12
 - propensioniste, 12
 - subjective, 12
 - supérieure, 37
- proposition, 15
- propositions atomiques, 56
- quasi-associativité, 106
- raisonnement, 8
- recombinaison, 61
- redistribution, 27
- réduction ad absurdum, 17
- semi-dépendance, 10, 79, 103
- Shafer (modèle de), 22, 111
- Shafer [1976], 22, 24
- Smarandache et Dezert [2004], 5, 52, 60, 118, 126
- Smets [2004], 30
- sources d'information, 9
- Steinberg et al. [1998], 4
- surenforcement, 78
- symbolique, 13, 69
- temps, 3
- Théorie de l'évidence, voir évidence
- traçabilité, 9, 13, 28
- transformation, 44
- Tversky et Kahneman [1983], 12
- univers, 53
- univers aberrants, 58, 64
- univers possibles, 32
- vague, voir imprécision
- validabilité, 74
- virgule flottante, 69
- Voorbraak [1991], 28, 46
- Wang et al. [1996], 38
- Yager, 106, 129
- Yager [1987], 30
- Yager [1994], 28
- Zadeh (exemple de), 28, 112
- Zadeh [1984], 28