Polarisation et candidatures stratégiques sous des systèmes de vote préférentiel

Mémoire

Alexandre Gauthier Belzile

Maîtrise en économique

Maître ès arts (M.A.)

Québec, Canada

Résumé

Ce mémoire compare les politiques implémentées sous le vote de pluralité et les systèmes de vote préférentiel. En raison de certaines caractéristiques jugées indésirables du vote de pluralité, plusieurs règles de vote alternatives ont été proposées par différents académiques et activistes politiques afin de le remplacer. En particulier, les systèmes de vote préférentiel constituent une alternative très discutée mais sur laquelle peu de recherches ont été effectuées. En endogénéisant les décisions de candidature grâce au modèle du candidat-citoyen, je m'intéresserai à savoir si certains systèmes de vote préférentiel mènent à une modération des politiques comparativement au vote de pluralité comme il est parfois suggéré dans le débat public. Cette étude théorique permettra donc de mieux connaître les possibles conséquences d'une réforme électorale basée sur ce type de système de vote.

Table des matières

Résumé iii

Table des figures vii

Remerciements ix

1 Introduction 1

2 Revue de la littérature 11

3 Modèle 15

4 Résultats 23

4.1 Caractérisation des équilibres 23

4.1.1 Équilibres à une position 23

4.1.2 Équilibres à deux positions 25

4.1.3 Équilibres à trois positions 34

4.2 Polarisation 37

4.3 Exemple 41

5 Introduction d'une rente associée à la fonction de décideur 47

6 Conclusion 53

Références 55

Annexe 59

Table des figures

1 Exemple lorsque $\delta = 0,2$ et $\beta = 0$ 43

2 Exemple lorsque $\delta = \beta = 0,2$ 48

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de maîtrise Arnaud Dellis. Au-delà de tout ce que tu m'as appris sur l'économie, je ne le remercierai jamais assez pour ses judicieux conseils et sa disponibilité durant l'ensemble de mes études universitaires. Ensuite, un merci tout spécial à ma copine Caroline pour son support et sa compréhension. Même durant les moments plus difficiles, elle a toujours été là pour moi. Je voudrais aussi remercier mon père, ma mère ainsi que ma soeur pour leur appui tout au long de mes études. Je ne pourrais pas non plus rédiger mes remerciements sans souligner le soutien de mes amis Jean-Pascal, Patrick et Stéphane. Malgré toutes les difficultés rencontrées, mes deux années de maitrise resteront mémorables particulièrement grâce à eux. Finalement, je voudrais remercier le CRSH, la Banque Nationale, le CIRPÉE ainsi que le département d'économique de l'Université Laval pour le financement que j'ai reçu au cours de ma maitrise. Grâce à cet apport financier, j'ai pu me concentrer totalement sur mes activités académiques lors des deux dernières années.

1 Introduction

À tous les niveaux politiques, les citoyens sont amenés à voter afin d'élire les représentants qui implémenteront les politiques en leur nom. L'économie publique s'intéresse particulièrement à savoir qui sont ces représentants et comprendre comment ces derniers sont choisis par la population. Pour répondre à ces questions, il est impératif de s'intéresser aux élections ainsi qu'aux différentes règles de vote utilisées pour déterminer le gagnant de ces élections. En ce qui a trait aux élections tenues aux différents niveaux politiques, l'évidence empirique démontre que le comportement des électeurs et des candidats potentiels à l'élection varie selon la règle de vote utilisée (Myerson, 1999). De ce fait, l'utilisation d'une règle de vote quelconque peut avoir des effets importants sur le résultat de l'élection ainsi que sur la structure politique qui en découle. Persson et Tabellini (2003) ont d'ailleurs montré que la structure politique d'un pays peut avoir d'importants impacts sur la croissance économique, le chômage, la distribution des richesses et la corruption. De plus, il a été observé empiriquement que la règle de représentation proportionnelle favorise le multipartisme aux élections ce qui conduit généralement à des niveaux importants de déficits et de dettes publiques pour les pays qui l'utilisent (Roubini et Sachs, 1989).

Ainsi, il est possible de voir que le choix d'une règle de vote peut avoir une incidence directe sur les finances publiques et l'économie d'un pays. Par exemple, lorsqu'une réforme électorale est implémentée de façon trop hâtive, cela peut mener à des résultats non-désirés et impliquer des coûts très élevés pour la société. Un exemple de cela est la réforme électorale qui a eu lieu en Italie en 1993. Le pays, qui voulait plus de stabilité politique, est passé d'un système de vote proportionnel à une règle de vote mixte (une combinaison du vote de pluralité et du système de vote proportionnel). Cependant, dix ans plus tard (2003), la réforme n'ayant pas eu les effets escomptés, l'Italie dû refaire une autre réforme électorale. Effectivement, comme le démontre Bordignon et Monticini (2012), la réforme de 1993 n'a eu aucun effet sur le nombre de partis présents aux élections ou sur la stabilité du gouvernement. Encore aujourd'hui, une troisième réforme du système électoral italien est envisagée en raison des effets non-désirés de la règle de vote en place. Comme le souligne Myerson (1999), il est donc important de bien comprendre les propriétés théoriques des différentes règles de vote afin d'être en mesure de prévoir leurs impacts et éviter certaines mauvaises surprises liées à leur mise en place. [1]

Au Canada, comme dans une grande majorité de pays descendant de la tradition anglo-saxonne, le système électoral majoritairement utilisé est celui du vote de pluralité. Sous cette règle de vote, chaque citoyen peut seulement voter pour un candidat et celui qui reçoit le plus de votes remporte l'élection. Dans ce mémoire, je m'intéresserai aux possibles conséquences d'une réforme électorale visant à remplacer le vote de pluralité par une autre règle de vote. En effet, de nombreux académiques et activistes politiques remettent en question certaines caractéristiques du vote de pluralité. L'argumentaire fait par ces individus a conduit à l'apparition d'un débat public important sur la possible réforme des systèmes électoraux utilisant cette règle de vote. Le Québec n'échappe pas à cette tendance où plusieurs intellectuels ainsi que deux partis politiques dénoncent certains effets du vote de pluralité. [2, 3, 4]

Au niveau académique, Cox (1987,1990) ainsi que Grofman et Feld (2004) ont montré que le vote de pluralité mène à la polarisation des candidats présents aux élections c'est-à-dire que les plates-formes politiques adoptées ne se situent pas près du centre de l'axe politique gauche-droite. Cependant, dans le cadre de la majorité des modèles économiques utilisés

1. Dans son papier de 1999, Myerson explique pourquoi il est important de se pencher sur les effets possibles de l'utilisation de différentes règles de vote même si elles sont rarement utilisées dans la réalité. Voici son explication où il prend l'exemple du vote négatif (règle de vote où chaque citoyen vote contre un candidat et celui qui reçoit le moins de votes remporte l'élection) : ≪ Such negative voting is rarely used, but it offers a nice theoretical contrast with [plurality] voting. In our theoretical modeling, we will see some compelling reasons why [negative] voting should not be used in democratic elections. But that is why we want to have a theory of electoral systems : to enable us to see the problems that may be generated by an electoral system before it is used. ≫

2. //voir.ca/jepenseque/2012/05/28/la-paix-sociale-par-la-proportionnelle/, consulté le 12 janvier 2013

3. www.quebecsolidaire.net/tag/proportionnelle/, consulté le 12 janvier 2013

4. www.optionnationale.org/presse/communiques/nos-institutions-democratiques-doivent-etre-modernisees, consulté le 12 janvier 2013

pour étudier les systèmes électoraux, c'est le candidat situé à la médiane des préférences de la population qui maximise le bien-être de la société. Dans cette optique, il serait donc souhaitable que les candidats élus se situent au centre de l'axe politique. [5]

En ce qui a trait à la polarisation des candidats, Cox (1987,1990) a démontré que sous le vote de pluralité, les candidats extrêmes avaient intérêt à prendre les candidats centristes en étaux. En effet, en se déplaçant plus près de la médiane des préférences des citoyens, les candidats extrêmes recueillent des votes qui auraient pu être obtenus par un candidat centriste. De ce fait, cette stratégie de la part des candidats extrêmes diminue la probabilité de victoire d'un candidat centriste et conduit à la polarisation des politiques implémentées sous le vote de pluralité. Dans le cadre de ses deux papiers, Cox trouve donc qu'en présence de plus de deux candidats, le vote de pluralité conduit à des équilibres électoraux qui sont non convergents, c'est-à-dire que les partis politiques ne choisissaient pas tous la même politique à implémenter.

De plus, Palfrey (1984) démontre que la polarisation des candidats sous le vote de pluralité peut être amplifiée par le fait que les partis en place tentent de limiter l'entrée de nouveaux candidats dans l'élection. Effectivement, si les concurrents déjà en place étaient tous positionnés très près du centre de l'axe politique, il serait facile pour un nouveau parti de se placer à une position un peu plus extrême et remporter l'élection. Cette polarisation des candidats déjà en place diminue donc la probabilité des entrants de remporter l'élection.

En étant conscients de ce problème, certains chercheurs ont démontré qu'il existait des règles de vote sous lesquelles un suffrage aurait comme conséquence l'élection d'un candidat plus près du centre de l'axe politique que sous le vote de pluralité ce qui mène à une

5. Dans ce mémoire, j'utiliserai indifféremment les termes médian et centriste. En effet, sous l'hypothèse que les préférences des individus pour les politiques sont distribuées de façon symétrique, comme c'est le cas dans le modèle que j'utiliserai, la position médiane dans l'électorat est aussi la position centriste.

modération politique. On définit ici la modération politique comme l'adoption de politiques qui s'approchent de la politique idéale de l'électeur médian. Cox (1987,1990), notamment, a prouvé sous l'hypothèse de vote sincère, qu'il existait des classes générales de règles de vote qui mènent à des équilibres convergents conduisant à une modération des politiques comparativement au vote de pluralité.

Cependant, les résultats précédents trouvés par certains académiques, dont Cox, possèdent une certaine faiblesse du côté méthodologique. En effet, les auteurs ont tenu comme fixe l'ensemble des candidats sous chacune des règles de vote. Autrement dit, ils ont fait l'hypothèse qu'il n'y avait aucune entrée ou sortie de candidats lors de la transition entre les systèmes électoraux. Ce faisant, les auteurs ont considéré comme exogènes les décisions de candidature dans leur modèle. Pourtant, cette hypothèse n'est pas compatible avec la réalité. En effet, il a été observé empiriquement que la carte des candidats varie selon la règle de vote utilisée (Cox, 1997). De plus, Dutta, Jackson et Le Breton (2001) démontrent que toute règle de vote non dictatoriale (satisfaisant un axiome d'unanimité extrêmement faible) est sujette à des décisions stratégiques de candidature. Prendre l'ensemble des candidats comme exogène revient à ignorer ces décisions stratégiques ce qui peut conduire à des prédictions erronées. De plus, dans le cadre de ses papiers de 1987 et 1990, Cox a utilisé un concept d'équilibre restrectif pour son analyse, soit les équilibres convergents. Un équilibre est convergent lorsque tous les candidats adoptent la même plate-forme électorale. Ainsi, dans son analyse, Cox compare seulement les équilibres convergents sous les différentes règles de vote. Cette hypothèse limite la portée des résultats sachant que sous les familles de règles de vote étudiées par Cox, il peut exister des équilibres non-convergents dont il n'a pas tenu compte.

Dans ce mémoire, je m'intéresserai à savoir si certaines règles de vote supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. Ma principale contribution dans ce mémoire est le fait que je tiendrai compte des décisions stratégiques de candidature sous chacune des règles de vote étudiées. Pour ce faire, j'utiliserai le modèle du candidat-citoyen développé par Osborne et Slivinski (1996) ainsi que Besley et Coate (1997). De plus, au contraire de Cox, j'utiliserai une définition standard du concept d'équilibre (qui sera discutée dans le chapitre 3) qui me permettra une comparaison des différentes règles de vote étudiées dans ce mémoire. Dans ce cadre théorique, je porterai mon attention sur la comparaison entre le vote de pluralité, le système à deux tours et trois systèmes de vote préférentiel afin de regarder si ces différentes règles de vote mènent à une modération des politiques comparativement au vote de pluralité. Les trois systèmes de vote préférentiel que j'étuderai sont le vote alternatif, la règle de Coombs et la règle de Bucklin.

Voici un petit résumé rapide du fonctionnement des règles de vote étudiées dans ce mémoire. Tout d'abord, sous les systèmes de vote préférentiel, chaque citoyen doit classer tous les candidats selon ses préférences. Si un candidat reçoit une majorité des votes de première place, il est élu. Dans le cas où cette exigence n'est pas respectée, on utilise les votes aux positions subséquentes afin de déterminer le gagnant de l'élection. Lorsqu'un ex-aequo survient, celui-ci est départagé de façon aléatoire. C'est lorsqu'un candidat ne reçoit pas une majorité des votes de première position qu'il y a divergence de fonctionnement entre les différents systèmes de vote préférentiel. Dans le cadre du vote alternatif, le candidat ayant cumulé le moins de votes de première position, c'est-à-dire le candidat qui possède le support le plus faible, est éliminé jusqu'au moment où un candidat reçoive une majorité des votes de première place. En ce qui concerne la règle de Coombs, le candidat éliminé à chaque étape est celui ayant obtenu le plus de votes de dernière position, c'est-à-dire le candidat qui possède la plus forte opposition. Finalement, pour ce qui est de la règle de Bucklin, si aucun candidat ne reçoit une majorité des votes de première position, on ajoute aux votes de première position les votes de seconde position ; un candidat est alors élu s'il reçoit un vote d'une majorité d'électeurs. Si ce n'est pas le cas, on ajoute au total les votes de troisième position et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un candidat apparaisse dans une majorité des bulletins de vote et remporte l'élection. Dans le cas où plus d'un candidat récoltent une majorité des votes simultanément, c'est celui ayant le plus de votes qui remporte l'élection.

La comparaison entre le vote de pluralité et les systèmes de vote préférentiel est une contribution importante de mon mémoire à la littérature. Effectivement, peu de papiers théoriques font le parallèle entre ces deux types de règles électorales et aucun avec candidatures endogènes. Pourtant, les systèmes de vote préférentiel, notamment le vote alternatif, font l'objet de plusieurs discussions quand on évoque de possibles réformes électorales pour remplacer le vote de pluralité. Effectivement, en 2009, la Colombie-Britannique a soumis à référendum l'adoption du vote alternatif pour les élections au niveau provincial. De son côté, la Grande-Bretagne s'est aussi exprimée sur la question lors d'une consultation à ce sujet en 2011 afin d'utiliser le vote alternatif pour l'élection à la chambre des communes. Au Royaume-Uni, l'argument avancé par les partisans du vote alternatif était que les partis centristes, notamment le parti libéral démocrate, allaient être favorisés par l'utilisation de cette règle de vote comparativement au vote de pluralité. [6] Présentement, le vote alternatif est utilisé dans plusieurs pays et régions de tradition anglo-saxonne qui utilisaient précédemment le vote de pluralité soit l'Australie, l'Irlande et l'Écosse. Quelques villes comme San Francisco et Londres utilisent aussi une variante de cette règle de vote au niveau municipal.

Outre le fait que le vote alternatif est fréquemment évoqué pour remplacer le vote de pluralité, plusieurs raisons expliquent le choix des règles de vote qui seront étudiées dans ce mémoire. [7]

6. www.independent.co.uk/news/uk/politics/av/lib-dems-corrupt-system-elected-thatcher-2275376.html, consulté le 20 Décembre 2012

7. Dans le cadre de ce mémoire, il est intéressant de noter que les résultats sous la règle de vote à élimination successive sont identiques à ceux obtenus sous le vote alternatif. Sous le vote à élimination successive, chaque électeur vote pour un candidat. Si l'un des candidats reçoit une majorité des votes de première position, il remporte l'élection. Sinon, le candidat ayant reçu le moins de votes de première position est éliminé et les électeurs votent à nouveau pour un des candidats restants). Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'un candidat récolte une majorité des votes de première position. Cette règle de vote est notamment utilisée pour élire le recteur de l'Université Laval ainsi que la ville hôtesse des Jeux Olympiques.

Tout d'abord, le vote alternatif possède plusieurs similitudes avec une autre règle de vote très souvent discutée comme alternative crédible au vote de pluralité soit le système à deux tours. Cependant, la tenue d'une élection sous cette dernière règle de vote est très coûteuse en raison des deux tours de scrutin. J'étudierai donc le système à deux tours dans ce mémoire afin de vérifier si celui-ci et le vote alternatif arrivent à des résultats similaires en ce qui a trait à la polarisation des candidats en tenant compte des décisions stratégiques de candidature.

Par la suite, j'ai décidé d'étudier la règle de Coombs en raison de sa similarité avec le vote alternatif, à l'exception du fait que le vote alternatif élimine les candidats avec le soutien le plus faible alors que la règle de Coombs élimine les candidats faisant face à l'opposition la plus forte. Il est donc intéressant de voir si cette différence en ce qui a trait à l'identité du candidat éliminé peut avoir un impact sur la polarisation des candidats supportée sous la règle de Coombs et le vote alternatif en tenant compte des décisions stratégiques de candidature.

Enfin, j'ai aussi inclus la règle de Bucklin dans mon mémoire afin de comparer la polarisation des candidats sous le vote alternatif avec un système de vote préférentiel utilisant une méthode différente afin d'élire le gagnant de l'élection. Effectivement, comme je l'ai illustré précédemment, la règle de Bucklin utilise un système d'agrégation où l'on additionne les résultats des tours subséquents plutôt qu'un système d'élimination des candidats comme le vote alternatif et la règle de Coombs. Il est donc intéressant de voir si cette différence aura un impact important sur le support de polarisation de cette règle de vote préférentiel. [8]

8. Il est intéressant de noter que le vote alternatif, la règle de Coombs ainsi que la règle de Bucklin constituent les versions préférentielles de trois règles de vote très discutées au niveau académique soit respectivement le vote de pluralité, le vote négatif et le vote d'approbation. Sous le vote négatif, chaque citoyen vote contre un candidat et celui qui reçoit le moins de votes remporte l'élection. Sous le vote d'approbation, les citoyens peuvent voter pour autant de candidats qu'ils le veulent. Le candidat qui reçoit le plus de votes remporte l'élection.

Étant donné que les systèmes de vote préférentiel sont une alternative crédible au vote de pluralité, il est important de connaître les conséquences possibles de son adoption sur le résultat des élections. Comme l'indique Bouton et al. (2012), l'adoption du vote alternatif en Grande-Bretagne lors du référendum de 2011 a principalement été rejetée en raison de l'incertitude quant à savoir si le vote alternatif conduirait réellement à des résultats ≪ préférables ≫ au vote de pluralité. De plus, comme je l'ai illustré précédemment avec l'exemple de l'Italie, une réforme électorale hâtive peut être coûteuse pour un pays. Il est donc important et justifié de bien investiguer les effets potentiels de cette règle de vote sur l'implémentation des politiques et la structure politique qui pourrait découler de son utilisation.

En ce qui a trait aux résultats obtenus dans ce mémoire, l'analyse de mon modèle m'a permis d'obtenir deux résultats centraux. Tous ces résultats sont valides sous l'hypothèse que les candidats sont suffisamment intéressés par la politique adoptée.

Le premier résultat porte sur la polarisation que peut supporter les différentes règles de vote. Tout d'abord, le vote de pluralité est la règle de vote étudiée qui supporte le plus de polarisation. On trouve ensuite que le vote alternatif et le système à deux tours supportent autant de polarisation l'une que l'autre mais moins que le vote de pluralité. Enfin, les deux règles de vote supportant le moins de polarisation sont la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Ces dernières supportent exactement le même degré de polarisation. Il est aussi très intéressant de noter que la différence de support de polarisation peut être marginale entre deux règles de vote. Par exemple, les différences de support de polarisation entre le vote de pluralité et le vote alternatif sont, sous certaines conditions, minimes.

De façon intuitive, ces résultats peuvent être expliqués par les incitatifs que possède un candidat centriste à se présenter sous chacune des règles de vote. Plus les incitatifs sont élevés, moins la règle de vote supportera de polarisation. Dans cette optique, le vote de pluralité est la règle de vote qui favorise le moins l'élection d'un candidat centriste. Effectivement, pour que celui-ci ait une probabilité positive de remporter l'élection sous cette règle de vote, il doit posséder la part des votes la plus élevée. En comparaison, dans le cadre d'une élection sous le vote alternatif et le système à deux tours, un candidat centriste possède une probabilité positive de remporter l'élection même s'il possède la seconde part des votes la plus élevée (ce qui n'est pas le cas sous le vote de pluralité). Effectivement, dès que le candidat centriste accède au second tour, il remporte l'élection avec probabilité 1. Enfin, sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin, un candidat centriste qui décide de concourir possède toujours une probabilité positive de remporter l'élection. Cela est le cas car sous ces deux règles de vote, un gagnant de Condorcet est toujours élu. On nomme gagnant de Condorcet un candidat qui est préféré à tout autre candidat par une majorité d'électeurs.

Le second résultat provenant de mon modèle est en lien avec le nombre effectif de partis. Je trouve que sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours au plus deux candidats sont présents. Ces résultats sont en accord avec l'évidence empirique du nombre effectif de partis sous le vote alternatif, le système à deux tours et le vote de pluralité (voir tableau 1.1 dans Farrell et McAllister, 2006). En définitive, je trouve donc qu'une régularité empirique observée sous le vote de pluralité peut aussi être retrouvée sous le vote alternatif et le système à deux tours en raison des décisions stratégiques de candidature.

Le reste de mon mémoire est organisé comme suit. Le chapitre 2 comportera une revue de la littérature reliée à mon mémoire. Le chapitre 3 décrit le modèle que j'utiliserai afin de procéder à mon analyse. Le chapitre 4 présentera une analyse complète des équilibres trouvés sous chacune des règles de vote ainsi qu'une comparaison de la polarisation supportée par chacune sous l'hypothèse que les candidats sont intéressés uniquement par la politique qui est adoptée. Dans le chapitre 5, je regarderai à une extension de mon modèle de base afin de tester sa robustesse. Enfin, le chapitre 6 conclut.

2 Revue de la littérature

Le sujet de mon mémoire s'inscrit simultanément à l'intérieur de trois champs de littérature distincts. Premièrement, plusieurs études antérieures à caractère descriptif ont été effectuées sur les systèmes de vote préférentiel. Tideman (1995) fait une synthèse très complète des caractéristiques du vote alternatif. De leur côté, Grofman et Feld (2004) montrent, en tenant l'ensemble des candidats comme exogène, que la règle de Coombs mène toujours au choix de la politique préférée par l'électeur médian sous l'hypothèse de vote sincère et d'un espace des politiques unidimentionnel. Dans le cas où quatre candidats ou moins se présentent à l'élection, Grofman et Feld montrent que le vote alternatif augmente les chances d'élection de la politique préférée par l'électeur médian comparativement au vote de pluralité. Au niveau expérimental, Van der Straeten et al. (2010) étudient les comportements de vote des électeurs sous différents systèmes électoraux. Ceux-ci observent que le candidat centriste est rarement élu sous le vote alternatif et que le comportement de vote sous cette règle de vote est majoritairement sincère. Van der Straeten et al. trouvent aussi que le comportement de vote des électeurs sous le système à deux tours n'est pas sincère. Effectivement, les électeurs ont tendance à ne pas voter pour les candidats ayant peu de chances de remporter l'élection. À l'intérieur de la littérature portant sur les systèmes de vote préférentiel, la contribution de mon mémoire se situe au niveau des décisions de candidature. En effet, dans les papiers précédents, l'ensemble des candidats était considéré comme fixe alors que de mon côté, j'endogénéiserai les décisions de candidature.

La seconde contribution relative à mon mémoire se situe dans la littérature portant sur le modèle du candidat-citoyen. Osborne et Slivinski (1996) ainsi que Besley et Coate (1997), ont été les principaux artisans de cette méthodologie permettant de tenir compte des décisions stratégiques de candidature en endogénéisant l'ensemble des candidats présents. Dans leur étude, Osborne et Slivinski comparent le nombre de candidats et leur polarisation sous le vote de pluralité et le système à deux tours dans un contexte unidimensionnel et en faisant l'hypothèse de vote sincère. De leur côté, Besley et Coate s'attardent à déterminer les équilibres électoraux sous le vote de pluralité dans un espace des politiques multidimensionnel et en tenant compte des comportements de vote stratégiques. Ils utilisent principalement leur analyse afin d'étudier l'efficacité des politiques implémentées dans une démocratie. Plus récemment, Dellis (2009) et Dellis et Oak (2006,2013) ont utilisé cette méthodologie afin de comparer les politiques implémentées sous le vote de pluralité et plusieurs classes générales de règles de vote. Dans leur papier de 2013, Dellis et Oak trouvent notamment que certaines règles de vote où tous les électeurs peuvent voter pour plus d'un candidat supportent plus de polarisation que le vote de pluralité. Ils montrent que ce résultat s'explique par les décisions stratégiques de candidature, plus spécifiquement l'indépendance ou non de la règle de vote à la présence de clones (candidats partageant la même plate-forme électorale). Une autre étude effectuée par Morelli (2004) a examiné la formation des partis politiques et la différence du nombre effectif de partis sous le vote de pluralité et la représentation proportionnelle. Morelli montre que le nombre effectif de partis est plus élevé sous la représentation proportionnelle. La contribution de mon mémoire à cette littérature se situe au niveau des systèmes de vote étudiés. En effet, aucune des études précédentes n'a comparé de façon systématique les décisions de candidature, et leurs implications sur les politiques publiques, sous la famille des règles de vote préférentiel et sous le vote de pluralité.

Le dernier champ de littérature auquel mon mémoire contribue est la comparaison des politiques implémentées sous les différents systèmes de vote. Une grande section de cette littérature est consacrée exclusivement à la comparaison de différentes règles de vote par rapport au vote de pluralité en supposant exogène l'ensemble des candidats. Cox (1987, 1990) montre que sous l'hypothèse du vote sincère, il existe à l'intérieur de classes générales de systèmes électoraux, des règles de vote menant à des équilibres qui favorisent l'élection du candidat centriste comparativement au vote de pluralité. Dans le même ordre d'idée, Myerson et Weber (1993) effectuent une comparaison entre le vote de pluralité et le vote d'approbation sous l'hypothèse du vote stratégique.[9] Ces derniers trouvent alors que le vote d'approbation mène toujours à une modération des politiques implémentées comparativement au vote de pluralité. De leur côté, Callander (2005) et Bouton (2012) ont travaillé sur le résultat des élections tenues sous le système à deux tours. Dans son papier de 2012, Bouton démontre qu'il n'est pas clair que le vote de pluralité supporte plus de polarisation que le système à deux tours. De son côté, Callander (2005), en tenant compte des décisions stratégiques de candidature et sous l'hypothèse de vote sincère, montre qu'il existe des équilibres sous le système à deux tours où seulement deux candidats sont présents. Au contraire des études citées précédemment dans ce paragraphe (excluant Callander (2005)), mon mémoire tiendra compte des décisions stratégiques de candidature grâce à l'apport du modèle du candidat-citoyen. Comme mentionné plus haut, Osborne et Slivinski (1996), Morelli (2004), Dellis (2009), Dellis et Oak (2006, 2013) utilisent tous cette méthodologie afin de comparer les politiques implémentées sous le vote de pluralité avec celles implémentées sous un autre système électoral. Cependant, aucun d'entre eux ne fait la comparaison directe entre le vote de pluralité et les systèmes de vote préférentiel, ce qui est précisément le thème de mon mémoire.

9. Sous le vote d'approbation, les citoyens peuvent voter pour autant de candidats qu'ils le veulent. Le candidat qui reçoit le plus de votes remporte l'élection.

3 Modèle

Considérons une communauté de citoyens qui doivent élire un représentant. Ce dernier devra par la suite choisir et implémenter une politique. L'ensemble des politiques est ici dénoté par X. On fixe X = [0,1]. Notez que cette hypothèse implique un espace des politiques unidimensionnel. Cette hypothèse est faite de façon à permettre la comparaison des résultats avec les contributions précédentes sur le sujet qui pour la plupart, utilisent aussi un espace unidimensionnel (ex : Osborne et Slivinski, 1996).

L'ensemble des électeurs, N, est un continuum de citoyens ayant une masse unitaire. L'hypothèse d'un continuum de citoyens est cohérente avec l'hypothèse de sincérité du vote des électeurs qui est ici supposée. En effet, avec un continuum de citoyens, la probabilité que le vote d'un seul électeur soit décisif est nulle. Dès lors, le vote sincère (comme toute autre stratégie de vote d'ailleurs) est une meilleure réponse aux stratégies de vote des autres électeurs. Il est à noter que le vote sincère est défini ici par le fait que la carte de vote des citoyens représente leurs vraies préférences. Par exemple, dans le cas du vote de pluralité et du système à deux tours, le vote sincère implique que chaque citoyen vote pour son candidat préféré. Dans le cadre des règles de vote préférentiel, le vote sincère se traduit par le fait que le citoyen classe les candidats dans l'ordre de ses préférences.

Chaque citoyen $l \in N$ possède des préférences sur l'ensemble des politiques X, qui sont représentées par la fonction d'utilité $u_l(x) = u(|x - x_l|)$, où u est une fonction strictement décroissante et faiblement concave. De son côté, x_l représente la politique idéale du citoyen l et par conséquent, l'argument qui maximise l'utilité de ce dernier. Afin de simplifier les calculs, l'utilité du citoyen l provenant de l'implémentation de sa politique idéale a été normalisée à zéro. Le choix du type de fonction d'utilité utilisé dans ce mémoire est motivé par sa présence importante dans la littérature sur l'analyse des systèmes électoraux (Osborne et Slivinski 1996, Besley et Coate 1997, Morelli 2004). Son utilisation est donc pertinente dans le but de faciliter la comparaison des résultats obtenus dans mon analyse avec les contributions précédentes à l'intérieur de ce champ de recherche.

Les politiques idéales de tous les citoyens sont distribuées sur l'espace des politiques X = [0,1] selon une fonction de distribution F strictement croissante sur X. La seule restriction faite sur la distribution des politiques idéales est que $F(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Cela implique que l'électeur médian a comme politique idéale $m = \frac{1}{2}$.

Considérons ensuite $P \subset N$ l'ensemble des candidats potentiels. Les candidats potentiels sont les citoyens qui peuvent choisir de se porter candidat à l'élection. Dans le modèle, je considère que l'ensemble des candidats potentiels est fini. Cette dernière hypothèse est cohérente avec le fait que chaque candidat potentiel se comporte de façon stratégique lorsqu'il prend sa décision de candidature. Dénotons par x_i, la politique idéale d'un candidat potentiel i. La politique idéale d'un candidat potentiel constitue ce que j'appelerai son type. Pour faciliter l'analyse, on suppose que les candidats potentiels sont de trois types au plus : x_G, x_M, x_D où $0 < x_G < x_M < x_D, < 1$. "G" ("D") fait référence à la gauche (droite) et "M" au centre ou à la médiane. On fixe ici $x_M = \frac{1}{2}$, alors que x_G et x_D occuperont respectivement une position symétrique à gauche et à droite de la position médiane x_M. La symétrie de x_G et x_D implique donc que $|x_G - x_M| = |x_D - x_M|$. Ces hypothèses sont faites pour simplifier la présentation.

En suivant l'approche théorique du modèle du candidat-citoyen, je modéliserai dans cette étude le processus de sélection d'un décideur politique comme un jeu en information complète composé de trois étapes. La première étape du processus est la décision de candidature. Lors de cette dernière, les candidats potentiels décident s'ils se présentent ou non à l'élection. Un candidat potentiel qui décide de se présenter à l'élection supporte un coût de candidature (exprimé en termes d'utilité) $\delta > 0$. Il est à noter que les décisions de candidature se font simultanément et sans coopération entre les candidats potentiels. Une hypothèse importante du modèle du candidat-citoyen réside dans le fait que les candidats ne peuvent pas s'engager de façon crédible sur la politique qu'ils implémenteront une fois élu. Cette hypothèse du modèle est soutenue par des faits empiriques. Effectivement, il a été observé dans la réalité que les candidats ne modifient pas leur politique dans l'optique d'avoir plus de chances de remporter les élections et donc qu'une fois élu, ils implémentent la politique qu'ils défendaient (Lee, Moretti et Butler, 2004). La deuxième étape du processus de décision est marquée par la tenue de l'élection où les citoyens voteront selon la règle de scrutin fixée, afin d'élire un décideur politique à l'intérieur de l'ensemble des candidats déclarés. Lors de la troisième étape, le candidat qui remporte l'élection implémente la politique de son choix. Ce dernier reçoit aussi un bénéfice $\beta \geq 0$ d'avoir gagné l'élection. Dans le cas où personne ne se présente comme candidat à l'élection, une politique par défaut dénotée par $x_0 \in X$ est implémentée. Je vais maintenant analyser en détail ces trois étapes dans l'ordre inverse de leur réalisation.

Étape du choix de la politique : Puisqu'il s'agit de la dernière étape du jeu et que les candidats ne peuvent pas s'engager sur la politique qu'ils implémenteront une fois élu, le candidat élu choisit d'implémenter sa politique idéale.

Étape de l'élection : Soit un ensemble non-vide de candidats $C \subseteq P$ et dénotons par $b_l(C) = (b_l^1, b_l^2, ..., b_l^{\#C})$ le bulletin de vote du citoyen l et où $b_l^i \in \{1, 2, ..., \#C\}$ est la position à laquelle le citoyen l classe le candidat i. Par exemple, si dans une élection à trois candidats (A,B,C) un citoyen l place le candidat B premier, le candidat C deuxième et le candidat A troisième, son bulletin de vote sera représenté par $b_l(C) = (3, 1, 2)$. Dans le cadre du modèle, un bulletin de vote doit être tel que deux candidats ne peuvent pas être classés au même rang par un électeur ; formellement, $b_l^j \neq b_l^i$ pour tout $j \in C, j \neq i$. Dans ce mémoire, je considérerai seulement un type de bulletin de vote soit ceux qui ont été remplis totalement, où $b_l : C \rightarrow \{1, 2, ..., \#C\}$ est une bijection, c'est-à-dire, que les citoyens doivent classer tous les candidats. De plus, je considérerai seulement les bulletins de vote sincère. Un bulletin de vote est dit sincère si pour tout citoyen l et toute paire de candidats $i, j \in C$, $u_l(x_i) > u_l(x_j)$ implique $b_l^j > b_l^i \geq 1$. En d'autres termes, si le citoyen l préfère le candidat i au candidat j, ce dernier positionnera le candidat i au-dessus du candidat j dans son classement.

Dénotons par $\alpha_l(C)$ la stratégie de vote du citoyen l, où $b_l(C) \in \alpha_l(C)$ si et seulement si le citoyen l soumet le bulletin $b_l(C)$ avec une probabilité strictement positive. Si le citoyen l possède des préférences strictes sur chacun des candidats (il n'est indifférent entre aucun des candidats) alors $\#\alpha_l(C) = 1$. Dans le cas contraire où le citoyen l est indifférent entre deux ou plusieurs candidats alors $\#\alpha_l(C) > 1$. Dans cette situation, le citoyen l choisira chacun de ces bulletins avec une probabilité égale à $\frac{1}{\#\alpha_l(C)}$. Une stratégie de vote $\alpha_l(C)$ est dite sincère pour le citoyen l si pour tout bulletin de vote $b_l(C)$ on a :

$$b_l(C) \in \alpha_l(C) \Leftrightarrow b_l(C) \text{ est sincère.}$$

Pour illustrer les caractéristiques précédentes, prenons deux exemples d'un citoyen qui doit classer trois candidats (A,B,C). Dans le premier cas, le citoyen préfère strictement le candidat A au candidat B et le candidat B au candidat C. En faisant l'hypothèse du vote sincère, sa stratégie de vote sera composée uniquement d'un bulletin de vote où il placera le candidat A premier, le candidat B deuxième et le candidat C troisième ($b = (1, 2, 3)$). Dans la seconde situation, le citoyen est indifférent entre les candidats A et B, mais préfère strictement ces derniers au candidat C. Dans le cas où le citoyen vote sincèrement, sa stratégie sera composée de deux bulletins de vote. Le premier où il placera le candidat A premier, le candidat B deuxième et le candidat C troisième ($b = (1, 2, 3)$) ; et le second où il positionnera le candidat B premier, le candidat A deuxième et le candidat C troisième ($b' = (2, 1, 3)$). Il choisira chacun des deux bulletins de vote avec la même probabilité, soit $\frac{1}{2}$. Dans les exemples précédents, on peut affirmer que la stratégie de vote du citoyen est sincère car les bulletins de vote qui composent les stratégies dans les deux cas ont été remplis de façon sincère.

Le profil des stratégies de vote de tous les citoyens est dénoté par $\alpha(C)$. J'utiliserai parfois la terminologie suivante afin de décrire le profil des stratégies de vote, soit $\alpha(C) = (\alpha_l(C), \alpha_{-l}(C))$, où $\alpha_{-l}(C)$ dénote le profil de vote de tous les citoyens autres que l.

Étape de candidature : Soit $e_i \in \{0, 1\}$, une stratégie (pure) de candidature pour le candidat potentiel $i \in P$, où $e_i = 1$ quand le candidat entre dans la course et $e_i = 0$ lorsqu'il n'entre pas. On dénote par $e = (e_1, e_2, ..., e_{\#P})$ le profil de candidature. Par exemple, si nous sommes dans une situation où il existe trois candidats potentiels (A,B,C) et que seulement les candidats A et C entrent dans la course électorale, alors le profil de candidature est représenté par $e = (1, 0, 1)$. J'utiliserai parfois la terminologie suivante afin de décrire le profil de candidature, soit $e = (e_i, e_{-i})$ où e_{-i} représente le profil de candidature de tous les candidats potentiels autres que le candidat i. Sans perte de généralité, je ferai l'hypothèse que dans le cas où un candidat potentiel est indifférent entre se présenter à l'élection ou non, il décidera d'entrer dans la course électorale.

Pour un profil de candidature donné e, on définit $C(e) \equiv \{i \in P : e_i = 1\}$ comme l'ensemble des candidats effectifs, c'est-à-dire tous les candidats potentiels qui se présentent à l'élection. L'utilité du candidat potentiel i est représentée par :

$$U_i(e, \alpha) = \begin{cases} \sum_{j \in P} p_j\Big(C(e), \alpha\big(C(e)\big)\Big) u_i(x_j) - \delta e_i & \text{si} \quad C(e) \neq \phi \\ u_i(x_0) & \text{si} \quad C(e) = \phi \end{cases}$$

où $p_j\Big(C(e), \alpha\big(C(e)\big)\Big)$ représente la probabilité que le candidat potentiel j remporte l'élection étant donné le profil de candidature C et le profil de stratégie de vote α.

Je vais maintenant définir de façon formelle un équilibre de candidature.

Définition 1 (Équilibre de candidature). Pour un profil de vote donné α, un profil de candidature e^* est un équilibre de candidature si pour tout candidat potentiel $i \in P$, e_i^* est tel que :

$$U_i(e_i^*, e_{-i}^*, \alpha) \geq U_i(e_i, e_{-i}^*, \alpha)$$

pour tout $e_i \in \{0, 1\}$.

En d'autres mots, un profil de candidature e^* est un équilibre de candidature si l'action posée par tout candidat i est une meilleure réponse aux actions de tous les autres candidats potentiels étant donné le profil de vote α.

Équilibre politique. Je suis maintenant en mesure de définir un équilibre pour l'ensemble du jeu que je nommerai équilibre politique.

Définition 2 (Équilibre politique). Un équilibre politique consiste en une paire (e^*, α^*) où :

1) $\alpha^*(C)$ est un profil de vote sincère pour tous les ensembles non-vides de candidats C.

2) e^* est un équilibre de candidature étant donné α^*.

Je vais maintenant définir de façon formelle le concept de polarisation.

Définition 3 (Polarisation). Considérons V et V' deux règles de vote. Soit E_V et $E_{V'}$ l'ensemble des politiques supportées par un équilibre politique sous V et V' respectivement. On dit que V supporte davantage de polarisation que V' si :

1) $|x - m| > |y - m|$ pour tout $x \in E_V \backslash E_{V'}$ et $y \in E_{V'}$, et

2) $|x - m| > |y - m|$ pour tout $x \in E_V$ et $y \in E_{V'} \backslash E_V$.

En d'autres termes, une règle de vote V supporte davantage de polarisation qu'une autre règle de vote V' si (1) toute politique supportée uniquement par un équilibre sous V est davantage extrême que n'importe laquelle des politiques supportées par un équilibre sous V', et (2) toute politique supportée uniquement par un équilibre sous V' est davantage modérée que n'importe laquelle des politiques supportées par un équilibre sous V. [10]

10. Il est à noter que pour les règles de vote étudiées dans ce mémoire, la seconde condition ne s'appliquera pas.

4 Résultats

Dans ce chapitre, je procède à l'analyse du modèle de base, dans lequel les candidats sont uniquement intéressés par la politique implémentée ($\beta = 0$) et où il y a seulement trois positions potentielles soit l'ensemble $\{x_G, x_M, x_D\}$ où $x_G \in [0, \frac{1}{2}[$, $x_M = \frac{1}{2}$ et $x_D = (1-x_G) \in]\frac{1}{2}, 1]$.

4.1 Caractérisation des équilibres

De façon à simplifier l'exposition, je procède en partitionnant l'ensemble des équilibres en trois sous-ensembles : les équilibres à une position, à deux positions et à trois positions respectivement. Dans un équilibre à n positions, on trouve des candidats présents à n positions. Je caractérise complètement chacun de ces sous-ensembles.

4.1.1 Équilibres à une position

Le lemme 1 caractérise complètement les équilibres à une position. Il établit qu'un seul candidat est présent et que la position de ce candidat doit être suffisamment éloignée du statut quo. De plus, dans la situation où le candidat a x_G ou x_D comme politique idéale, la polarisation de x_G et x_D ne doit pas être trop forte de façon à éviter qu'un candidat potentiel à une autre position ne veuille se présenter à l'élection.

Lemme 1 *: Dans tout équilibre à une position, un seul candidat est présent. Un équilibre avec i comme seul candidat existe ssi :*

1)$-u(|x_i - x_0|) \geq \delta$*, et*

2) $\delta > -\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$ *si* $i \in \{G, D\}$.

De façon à comprendre pourquoi il y a un seul candidat, supposons une situation où n>1 candidats sont présents et que tous ont x_i comme politique idéale. Il est facile de voir que cette situation ne peut correspondre à un équilibre. En effet, tous les candidats sauf un auraient intérêt à ne pas se présenter car ils doivent supporter le coût de candidature δ et n'influencent pas la probabilité que x_i soit adopté (égale à 1).

La première condition garantit que le candidat i souhaite se présenter à l'élection. Effectivement, elle assure que son gain en utilité de remplacer le statut quo x_0 par sa politique idéale x_i est supérieur au coût de candidature δ.

La seconde condition garantit qu'aucun candidat à une autre position ne veuille entrer dans la compétition électorale. Si $x_i = x_M$, un candidat à une autre position serait défait et ne voudrait donc pas entrer. Si $x_i \in \{x_G, x_D\}$, un candidat situé à l'autre position extrême obtiendrait la même masse de voix et serait élu avec probabilité $\frac{1}{2}$. La condition 2) garantit que son gain espéré d'utilité est inférieur au coût de candidature ($\delta > -\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$). En outre, si un candidat à x_M venait à entrer, il serait élu avec probabilité 1. Cependant, la concavité de la fonction d'utilité implique que $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq -u(|x_M - x_i|)$ où le dernier terme représente le gain en utilité du centriste de voir implémenter sa politique idéale. Ainsi, la condition 2) est suffisante pour qu'un candidat à x_M ne veuille pas entrer dans la compétition électorale.

Il est important de noter que dans le lemme 1, il n'est fait aucune référence à la règle de vote utilisée. C'est parce qu'à l'équilibre, un seul candidat est présent. Par conséquent, seuls les ensembles avec zéro, un ou deux candidats importent pour la caractérisation des équilibres à une position. Or, avec au plus deux candidats, toutes les règles de vote élisent le même candidat. La caractérisation des équilibres à une posititon est donc la même sous toute règle de vote.

4.1.2 Équilibres à deux positions

Je caractérise maintenant les équilibres à deux positions. Pour ce faire, je débute en montrant que dans tout équilibre (à une, deux ou trois positions), il ne peut y avoir plus d'un candidat à chacune des positions lorsque l'élection se tient sous le vote de pluralité, le vote alternatif ou le système à deux tours. Par la suite, je présente la caractérisation complète des équilibres à deux positions sous chacune des règles de vote soit le vote de pluralité, le vote alternatif, le système à deux tours, la règle de Coombs et la règle de Bucklin.

Lemme 2 *: Dans tout équilibre (à une, deux ou trois positions) sous le vote de pluralité, le vote alternatif ou le système à deux tours, le nombre de candidats* $c_h \leq 1$ *pour toute position* x_h, $h \in \{G,M,D\}$.

L'intuition sous-jacente à ce résultat est la suivante. Sous le vote de pluralité et le système à deux tours, ce résultat provient de la division des votes entre les candidats ayant la même politique idéale. En effet, un plus grand nombre de candidats à une position donnée réduit le nombre de votes reçu par chacun des candidats à cette position, ce qui a pour effet de diminuer ou laisser inchangé la probabilité qu'un candidat à cette position soit élu ou se qualifie pour le second tour et donc, la probabilité que cette politique soit implémentée. Ainsi, tous les candidats à cette position sauf un ont intérêt à dévier de leur stratégie de candidature et ne pas concourir afin d'accroître les chances d'adoption de leur politique idéale tout en évitant de supporter le coût de candidature δ.

Dans le cas du vote alternatif, ce résultat provient de la méthode d'élimination des candidats. En effet, un nombre plus élevé de candidats à une ou plusieurs positions potentielles ne fait qu'allonger le processus d'élimination sans toutefois changer la probabilité avec laquelle chaque politique est implémentée. Je présente ici l'intuition pour un équilibre à deux positions. Cette intuition est la même pour les équilibres à trois positions.

Je commence par montrer qu'il ne peut y avoir un équilibre avec x_G et x_M comme positions. Commençons par noter qu'un candidat en x_G ne peut être élu que lorsque tous les candidats en x_M sont éliminés. Cependant, cela n'est pas possible. En effet, à l'étape où il ne reste qu'un seul candidat en x_M, celui-ci est classé premier par une majorité d'électeurs (tout électeur i dont la position idéale $x_i > \frac{x_G+x_M}{2}$) et est donc élu. Il s'ensuit que tout candidat en x_G a une probabilité nulle de remporter l'élection, et préfère donc ne pas se porter candidat puisque dans tous les cas, x_M est implémentée avec probabilité 1.

Par le même argument, on peut montrer qu'il ne peut y avoir un équilibre avec x_D et x_M comme positions.

Considérons maintenant un équilibre avec x_G et x_D comme positions. De façon à expliquer le plus simplement possible pourquoi il ne peut y avoir qu'un seul candidat à chaque position, je vais considérer le cas où il y aurait deux candidats en x_G et un seul candidat en x_D. Les deux candidats en x_G reçoivent chacun 25 % des votes de première place alors que le candidat en x_D en reçoit 50 %. Aucun candidat n'obtient une majorité des votes de première position, et un candidat en x_G est alors éliminé puisque leur part de votes de première position (25%) est plus faible que celle du candidat en x_D (50 %). Nous nous retrouvons alors dans la même situation que celle où il n'y aurait qu'un seul candidat à chaque position. Un candidat en x_G aurait donc intérêt à dévier puisque sa candidature n'a aucun effet sur la probabilité que sa politique idéale soit adoptée. On peut donc en inférer que cette situation ne correspond pas à un équilibre.

Je suis maintenant en mesure de caractériser complètement les équilibres à deux positions. De façon à simplifier la notation, je dénoterai par $\underline{x} = \frac{x_G+x_M}{2}$ la position où un individu est indifférent entre les politiques de candidats en x_G et x_M. De façon similaire, je représenterai par $\overline{x} = \frac{x_M + x_D}{2}$ la position où un individu est indifférent entre les politiques de candidats en x_M et x_D. Observons que $\underline{x} < \frac{1}{2}$ et que $\overline{x} > \frac{1}{2}$.

Le prochain lemme caractérise les équilibres à deux positions sous le vote de pluralité.

Lemme 3 *: Un équilibre à deux positions existe sous le vote de pluralité ssi :*

1) $x_i \in \{x_G, x_D\}$ *pour tout candidat* i,

2) $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq \delta$, *et*

3) une des conditions suivantes est satisfaite :

a) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] > max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -u(|x_M - x_G|)$

b) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] = max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\} > min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -\frac{1}{2}u(|x_M - x_G|)$

c) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] = max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\} = min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -\frac{1}{3}u(|x_M - x_G|)$

d) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] < max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$.

La première condition implique qu'aucun candidat centriste n'est présent dans un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité. De façon à comprendre pourquoi, rappelons-nous que dans tout équilibre sous le vote de pluralité, il ne peut y avoir plus d'un candidat à une position (lemme 2). Par conséquent, un candidat en x_M serait élu avec probabilité 1. En effet, contre un candidat en x_G, il serait préféré par tous les électeurs à droite de $\underline{x}$ et recevrait une part des votes égale à 1-F($\underline{x}$). Puisque $\underline{x} < \frac{1}{2}$ et que F($\frac{1}{2}$)=$\frac{1}{2}$, on a que 1- F($\underline{x}$) $> \frac{1}{2}$. Le candidat en x_G aurait donc intérêt à ne pas se présenter puisque (1) le candidat centriste serait toujours élu avec probabilité 1 et (2) le candidat en x_G éviterait de supporter le coût de candidature. Cette situation ne correspond donc pas à un équilibre. Le même argument s'applique avec un candidat en x_D.

La deuxième condition garantit que ni le candidat en x_G ni celui en x_D ne serait mieux de dévier et de ne pas entrer dans la compétition électorale. Pour comprendre pourquoi, observons que chacun des deux candidats obtient la moitié des voix et est élu avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si un candidat, disons celui en x_G, venait à ne pas se présenter, le candidat en x_D serait élu avec probabilité 1. Le gain en utilité de se présenter est donc égal à $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$. La condition 2) assure que ce gain excède le coût de candidature.

La troisième condition garantit qu'aucun candidat en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Si la part des votes obtenue par le centriste $(F(\overline{x}) - F(\underline{x}))$ est inférieure à l'une des parts obtenue par chacun des candidats extrêmes ($F(\underline{x})$ pour le candidat en x_G, 1- F($\overline{x}$) pour le candidat en x_D), alors le candidat en x_M possède une probabilité nulle de remporter l'élection et ne veut pas entrer. Cette situation est couverte par la condition 3d). Dans le cas où la part des votes obtenue par le centriste est supérieure ou égale à la part la plus élevée obtenue par l'un des deux candidats extrêmes, alors il possède une probabilité positive de remporter l'élection. Il existe alors trois cas possibles : le centriste possède la part des votes la plus élevée et remporte l'élection avec probabilité 1 ; le centriste est ex-æquo avec le candidat extrême ayant la part la plus élevée et il remporte l'élection avec probabilité $\frac{1}{2}$; le centriste est ex-æquo avec les deux candidats extrêmes et remporte l'élection avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ces trois situations sont respectivement couvertes par les conditions 3a), 3b) et 3c) qui garantissent dans chaque cas que le gain espéré d'utilité du candidat en x_M est inférieur au coût de candidature ce qui implique que ce dernier ne veut pas entrer dans la compétition électorale.

Voici maintenant la caractérisation des équilibres à deux positions sous le vote alternatif et le système à deux tours.

Lemme 4 *: Un équilibre à deux positions existe sous le vote alternatif et le système à deux tours ssi :*

1) $x_i \in \{x_G, x_D\}$ *pour tout candidat i,*

2) $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq \delta$*, et*

3) une des conditions suivantes est satisfaite :

a) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] > min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -u(|x_M - x_G|)$

b) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] = max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\} > min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -\frac{1}{2}u(|x_M - x_G|)$

c) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] = max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\} = min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$ *et* $\delta > -\frac{2}{3}u(|x_M - x_G|)$

d) Soit $[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] < min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$.

Il est important de noter que les conditions obtenues sous le vote alternatif et le système à deux tours sont les mêmes. Effectivement, comme seulement au plus trois candidats sont présents sous les deux règles de vote (résultat provenant du lemme 2), le procédé d'élimination sous ces règles donne le même résultat. Ainsi, dans cette section, j'utiliserai le système à deux tours afin d'illustrer les conditions obtenues. Il est à noter que l'intuition utilisée est similaire sous le vote alternatif.

Selon le lemme 2, il ne peut y avoir plus d'un candidat à chaque position. Sachant cela, la première condition implique qu'aucun candidat centriste n'est présent dans un équilibre à deux positions. Dans cette situation, ce dernier remporterait l'élection avec probabilité 1 et le candidat extrême aurait intérêt à ne pas concourir afin d'épargner le coût de candidature δ. La logique derrière ce résultat est la même qui a été présentée dans la première condition du lemme 3 sous le vote de pluralité.

La deuxième condition garantit que les candidats en x_G et x_D souhaitent se présenter à l'élection. En effet, elle assure que le coût de candidature supporté par chacun des candidats est inférieur à la perte d'utilité obtenue par un candidat extrême en ne se présentant pas à l'élection sachant que l'autre candidat extrême remporte alors le vote avec probabilité 1.

Notons que cette deuxième condition est identique à la condition 2) du lemme 3 sous le vote de pluralité. Cela provient du fait que dans un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours, il n'y a que deux candidats (lemme 2). Or, avec seulement deux candidats, tout système électoral élit le même candidat.

La troisième condition garantit qu'aucun candidat en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Dans le cas du système à deux tours, si la part des votes obtenue par le centriste au premier tour (F($\overline{x}$)-F($\underline{x}$)) est inférieure aux parts obtenues par chacun des candidats extrêmes (F($\underline{x}$) pour le candidat en x_G, 1- F($\overline{x}$) pour le candidat en x_D), alors le candidat en x_M possède une probabilité nulle de remporter l'élection et ne veut pas entrer. Effectivement, dans cette situation, le candidat centriste est éliminé au premier tour. Cette situation est couverte par la condition 3d). Dans le cas où la part des votes obtenue par le centriste est supérieure ou égale à l'une des parts des voix obtenues par l'un des deux candidats extrêmes, alors il se qualifie pour le second tour avec une probabilité positive. Puisqu'un candidat en x_M est préféré par une majorité des citoyens à un candidat en x_G ou en x_D, le candidat centriste emporte alors le second tour. Il est donc élu avec une probabilité positive. Il y a ici trois cas à considérer. Premièrement, le centriste peut posséder au moins la seconde part la plus élevée des votes. Dans ce cas, il est soit élu directement (s'il reçoit une majorité des votes de première place), soit il accède au second tour. Il remporte alors l'élection avec probabilité 1. Le second cas est celui où le centriste est ex-æquo avec le candidat extrême ayant la part des votes la plus faible. Dans cette situation, le centriste accède au second tour avec probabilité $\frac{1}{2}$ et est donc élu avec probabilité $\frac{1}{2}$. Le troisième cas est celui où le centriste est ex-æquo avec les deux candidats extrêmes. Dans cette situation, le candidat centriste accède au second tour avec probabilité $\frac{2}{3}$ et est donc élu avec probabilité $\frac{2}{3}$ également. Ces trois situations sont respectivement couvertes par les conditions 3a), 3b) et 3c) qui garantissent dans chaque cas que le gain espéré d'utilité du candidat en x_M est inférieur au coût de candidature, ce qui implique qu'un candidat potentiel en x_M ne veut pas entrer dans la compétition électorale.

Il est important de souligner que les deux premières conditions en ce qui a trait aux équilibres à deux positions sous le vote de pluralité, sous le vote alternatif ainsi que le système à deux tours sont identiques. Les différences entre ces systèmes proviennent des incitations pour un candidat potentiel en x_M à se présenter à l'élection (troisième condition des lemmes 3 et 4). Effectivement, il est possible d'observer que ces incitations sont moins fortes sous le vote de pluralité, car pour remporter l'élection, un candidat centriste doit obtenir une pluralité de votes, c'est-à-dire la part des votes la plus élevée. Cela n'est pas le cas sous le système à deux tours ou sous le vote alternatif puisqu'un centriste a alors seulement besoin de ne pas être éliminé au premier tour. Pour cela, il ne doit pas obtenir la part des votes la plus faible.

Il reste à caractériser les équilibres à deux positions sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin. La caractérisation est identique pour ces deux règles de vote.

Lemme 5 *: Un équilibre à deux positions existe sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin ssi :*

1) $x_i \in \{x_G, x_D\}$ *pour tout candidat i,*

2) $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq \delta$, *et*

3) $\delta > -u(|x_M - x_G|)$.

La première condition implique qu'aucun candidat centriste n'est présent dans un équilibre à deux positions. Dans cette situation, ce dernier remporterait l'élection avec probabilité 1 et le(s) candidat(s) extrême(s) aurait (auraient) intérêt à ne pas concourir afin d'épargner le coût de candidature δ. La logique derrière ce résultat est la même que celle qui a été présentée dans la première condition du lemme 3 sous le vote de pluralité.

Pour comprendre la deuxième condition, il convient de noter qu'il doit y avoir le même nombre de candidats en x_G et en x_D. Dans le cas de la règle de Coombs, cela provient du fait qu'un plus grand nombre de candidats à une position divise davantage les votes de dernière place et améliore les chances d'élection des candidats à cette position. Pour comprendre cela, supposons qu'il y ait deux candidats à x_G et un seul candidat à x_D. Aucun candidat n'obtient une majorité de premiers classements. Le candidat en x_D reçoit 50 % des votes de dernière place, tandis que chacun des candidats en x_G reçoit 25 % des votes de dernière place. Le candidat en x_D est donc éliminé et un candidat en x_G est alors élu. Le candidat en x_D serait donc mieux de ne pas se présenter à l'élection puisque la politique x_G serait toujours adoptée avec probabilité 1 mais il ne supporterait pas le coût de candidature.

Dans le cas de la règle de Bucklin, le plus grand nombre de candidats à une position, disons en x_G, permet de repousser la position des candidats en x_D dans le classement des électeurs à gauche de la médiane. De ce fait, cela retarde le moment où les votes des électeurs pour les candidats en x_D seront comptés. Pour voir cela, supposons à nouveau qu'il y ait deux candidats en x_G et un seul candidat en x_D. Au premier compte (où seuls les votes de première position sont comptabilisés), chaque candidat en x_G reçoit les votes de 25 % des électeurs (la moitié des électeurs ayant leur politique idéale située à gauche de la médiane), tandis que le candidat en x_D reçoit les votes de 50 % des électeurs (les électeurs ayant leur politique idéale située à droite de la médiane). Comme aucun candidat n'obtient une majorité absolue, les votes de deuxième position sont ajoutés. Chaque candidat en x_G reçoit maintenant les votes de 75 % des électeurs (tous les électeurs ayant leur politique idéale située à gauche de la médiane et la moitié des électeurs ayant leur politique idéale située à droite de la médiane), tandis que le candidat situé en x_D reçoit toujours les votes de 50 % des électeurs (tous les électeurs ayant leur politique idéale située à droite de la médiane). Un candidat en x_G est donc élu. Le candidat en x_D serait donc mieux de ne pas se présenter à l'élection.

Sachant que le nombre de candidats doit être égal en x_G et x_D, chaque politique est adoptée avec probabilité $\frac{1}{2}$. La deuxième condition du lemme 5 garantit que les candidats souhaitent se présenter à l'élection. En effet, elle assure que le coût de candidature supporté par chacun des candidats est inférieur à la perte d'utilité obtenue par un candidat extrême ne se présentant pas à l'élection. Effectivement, par le même argument, il cause la défaite de son alternative préférée avec probabilité 1 ce qui résulte en une perte d'utilité égale à $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$.

La dernière condition garantit qu'aucun candidat en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Selon le lemme A.1 contenu dans l'annexe, nous savons que la règle de Coombs et la règle de Bucklin élisent un gagnant de Condorcet. Un gagnant de Condorcet est un candidat qui est préféré par une majorité d'électeurs à n'importe quel autre candidat. Dans le cas présent, un candidat centriste est le gagnant de Condorcet. Ainsi, lorsqu'un candidat centriste se présente sous la règle de Coombs ou sous la règle de Bucklin, il remporte l'élection avec probabilité 1.

Sous la règle de Coombs, ce résultat provient du fait que le candidat centriste n'est classé dernier dans aucun bulletin sous l'hypothèse du vote sincère. De ce fait, tous les candidats en x_G ou en x_D, dépendamment de leur nombre respectif, seront éliminés en premier lieu. À ce moment, le candidat en x_M reçoit une majorité des votes de première place et est élu avec probabilité 1. Il convient de mentionnier que ce résultat a déjà été établi par Grofman et Feld en 2004.

Sous la règle de Bucklin, ce résultat provient du fait que le candidat centriste reçoit les votes des électeurs de droite avant les candidats de gauche, et reçoit les votes des électeurs de gauche avant les candidats de droite. Effectivement, on sait que la politique x_M est préférée à x_G par tous les citoyens à droite de la médiane et par une masse positive de citoyens entre x_M et x_G. De la même manière, la politique x_M est préférée à x_D par tous les citoyens à gauche de la médiane et par un nombre non-nul de citoyens entre x_M et x_D. Par conséquent, il est impossible qu'un candidat en x_G ou en x_D apparaisse dans la majorité des bulletins de vote avant un candidat en x_M.

La condition 3) garantit que le gain espéré d'utilité du candidat en x_M est inférieur au coût de candidature, ce qui implique que ce dernier ne veut pas entrer dans la compétition électorale.

4.1.3 Équilibres à trois positions

Il reste à caractériser les équilibres à trois positions.

Lemme 6 *: Un équilibre à trois positions n'existe pas sous les règles de vote ici considérées.*

La logique derrière ce résultat est différente selon la règle de vote utilisée. Sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours, la non-existence des équilibres à trois positions provient du fait qu'au moins un candidat situé en x_G ou en x_D a intérêt à dévier et ne pas se présenter à l'élection. Pour voir cela, prenons l'exemple d'une élection sous le vote de pluralité où la probabilité d'élection du candidat en x_G est inférieure ou égale à la probabilité d'élection du candidat en x_D. Nous savons d'après le lemme 2 qu'un seul candidat est présent à chaque position. Si le candidat en x_G se présente à l'élection, son utilité espérée est égale à $\pi_G u_G(x_G) + \pi_M u_G(x_M) + \pi_D u_G(x_D)$ où π_i représente la probabilité que le candidat i remporte l'élection et où $u_G(x_i)$ est l'utilité du candidat en x_G lorsque le candidat i remporte l'élection. Dans le cas où le candidat en x_G décide de ne pas se présenter à l'élection, le candidat centriste remporte l'élection avec probabilité 1 car il reçoit une majorité de votes (la part des votes qu'il reçoit est égale à F($\overline{x}$)). De ce fait, le candidat en x_G retire une utilité égale à $u_G(x_M)$. Dans cette situation, comme la fonction d'utilité des citoyens est (faiblement) concave et que $\pi_G \leq \pi_D$, un candidat potentiel ayant x_G comme politique idéale est toujours mieux de ne pas se présenter et de voir un candidat centriste remporter l'élection avec probabilité 1 ($u_G(x_M) > \pi_G u_G(x_G) + \pi_M u_G(x_M) + \pi_D u_G(x_D) - \delta$). Cette même logique s'applique aussi au vote alternatif et au système à deux tours car au plus un candidat est présent à chaque position.

Sous la règle de Coombs ou la règle de Bucklin, la logique est différente. Effectivement, sachant que le candidat centriste est élu avec probabilité 1 sous ces deux règles de vote (lemme A.1), les candidats extrêmes présents n'ont aucune raison de concourir car (1) ils ne peuvent influencer le résultat de l'élection (le centriste remporte toujours l'élection avec probabilité 1) et (2) ils devront supporter le coût de candidature δ.

Le résultat obtenu sur la non-existence d'équilibres à trois positions sous le vote de pluralité est cohérent avec une régularité empirique très connue soit la loi de Duverger (Duverger, 1954). Dans les années 1950, Maurice Duverger, politicologue français, a observé que le vote de pluralité tend à favoriser un système politique avec seulement deux partis. On impute souvent cette régularité empirique au vote stratégique et au phénomène que l'on appelle l'effet du vote perdu. Supposons une élection tenue sous le vote de pluralité où au moins trois candidats sont présents. Si un électeur anticipe que son candidat préféré n'a peu ou pas de chances de remporter l'élection, il va craindre de gaspiller son vote en le donnant à ce candidat. Dans le but que son vote ait un effet plus important sur le résultat de l'élection, ce même électeur peut choisir de voter stratégiquement et d'appuyer le candidat qu'il préfère parmi ceux qui sont favoris pour remporter l'élection. Ainsi, les candidats ayant peu ou pas de chances de remporter l'élection sous le vote de pluralité sont laissés de côté ce qui explique l'observation de bipartisme sous cette règle de vote.

Dans le cadre de ce mémoire, malgré l'hypothèse de sincérité du vote des électeurs, je trouve que le nombre de candidats\partis à l'équilibre sous le vote de pluralité n'excède pas deux. Ce résultat n'est pas surprenant. Effectivement, comme Morelli (2004) l'avait déjà noté, les décisions stratégiques de candidature peuvent substituer l'effet du vote stratégique des électeurs. De plus, la non-existence d'équilibres à trois positions sous les règles de vote étudiées suggère aussi que les décisions stratégiques de candidature peuvent mener au même résultat sous d'autres règles de vote que le vote de pluralité, notamment sous le vote alternatif et le système à deux tours.[11] En effet, comme dans le cas du vote de pluralité, je trouve que le nombre effectif de partis sous ces deux règles de vote n'excède pas deux. Ce résultat concorde avec les observations empiriques obtenues dans les pays utilisant ces deux règles de vote aux élections. Effectivement dans leur livre publié en 2006, Farrell et McAllister agrègent le nombre effectif de partis calculé pour tous les pays sous une même règle de vote.[12] Ils trouvent que le nombre effectif de partis sous le système à deux tours et le vote alternatif est respectivement 2,3 et 2,5. En même temps, Farrell et McAllister observent un nombre effectif de partis sous le vote de pluralité qui est supérieur à ceux obtenus sous le vote alternatif et le système à deux tours. Ces observations supportent donc l'hypothèse

11. De façon intéressante, en tenant compte des décisions stratégiques de candidature et sous l'hypothèse de sincérité du vote des électeurs, Callander (2005) trouve que des équilibres à deux positions existent sous le système à deux tours.

12. Le nombre effectif de partis est une mesure de la concentration du pouvoir politique proposé par Laakso et Taagepera (1979) Plus le nombre effectif de partis est élevé, plus le paysage politique est fragmenté. Dans le cas du vote de pluralité, selon la loi de Duverger, on pourrait donc s'attendre à ce que le nombre effectif de partis se situe près de 2.

selon laquelle les décisions stratégiques de candidature sous le vote alternatif et le système à deux tours pourraient conduire à un système bipartite.

4.2 Polarisation

Je suis maintenant en mesure d'analyser les implications concernant le degré de polarisation soutenu par chacune des règles de vote.

Proposition 1 : *Après la comparaison de chacune des règles de vote, je trouve que :*

$$\text{VP}>\text{VA}=\text{S2T}>\text{RB}=\text{RC},$$

où ">" signifie supporte plus de polarisation, "=" signifie supporte autant de polarisation, VP signifie vote de pluralité, VA signifie vote alternatif, S2T signifie système à deux tours, RB signifie règle de Bucklin et RC signifie règle de Coombs.

L'intuition sous-jacente à ce résultat est la suivante. Premièrement, l'ensemble des équilibres à une position est identique sous toutes les règles de vote (lemme 1). Donc, on ne peut pas trouver de différences entre les règles de vote étudiées dans ce mémoire en comparant ce type d'équilibres. De plus, il n'existe aucun équilibre à trois positions sous les règles de vote étudiées. La différence de support de polarisation entre ces différentes règles de vote provient donc des équilibres à deux positions.

Dans les équilibres à deux positions (lemme 3 sous le vote de pluralité, lemme 4 sous le vote alternatif et le système à deux tours, et lemme 5 sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin), les deux premières conditions nécessaires sont les mêmes. La première condition implique qu'aucun candidat centriste n'est présent dans un équilibre à deux positions. De son côté, la seconde condition garantit que les candidats présents en x_G et x_D ne souhaitent pas dévier de leur stratégie de candidature. Cette condition est identique sous toutes les règles de vote étudiées dans le cadre de ce mémoire sachant que la présence de chaque candidat contribue au maintien de la probabilité d'adoption de leur politique idéale qui est égale à $\frac{1}{2}$. Ceci provient du fait que dans un équilibre à deux positions, chaque candidat situé respectivement en x_G et en x_D contribue à maintenir à $\frac{1}{2}$ la probabilité que sa politique idéale soit implémentée.

Sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours, comme la moitié des électeurs possède une politique idéale située à gauche de la médiane (et donc que la politique idéale de l'autre moitié est située à droite de m) et que les positions des candidats en x_G et x_D sont symétriques, les deux candidats se retrouvent alors ex-æquo ce qui implique que chacun des candidats possède une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de remporter l'élection. Dans cette situation, si un des deux candidats décide de ne pas concourir, il voit la probabilité que sa politique idéale soit implémentée passer de $\frac{1}{2}$ à zéro ce qui conduit à une diminution de son utilité. Par exemple, si un candidat en x_G décide de ne pas se présenter à l'élection, il subira une perte d'utilité égale à $\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$.

Sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin, nous avons vu que la logique est quelque peu différente. Pour qu'un équilibre existe, il faut que le nombre de candidats en x_G et en x_D soit le même. Sachant que la moitié des électeurs possède une politique idéale située à gauche de la médiane (et donc que la politique idéale de l'autre moitié est située à droite de m), chaque candidat recevra la même part des votes. Chacun des candidats possède une probabilité égale à $\frac{1}{C}$ d'être élu (où C représente le nombre de candidats présents à l'élection) et contribue à maintenir à $\frac{1}{2}$ la probabilité que sa politique idéale soit implémentée. Dans cette situation, si l'un des candidats en x_G ou x_D décide de ne pas concourir, il voit la probabilité que sa politique idéale soit implémentée passer de $\frac{1}{2}$ à zéro ce qui conduit à une diminution de son utilité. Par exemple, si un candidat en x_G décide de ne pas se présenter à l'élection, il subira une perte d'utilité égale à $\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$.

La condition 2) assure donc que le coût de candidature que doit supporter un candidat soit inférieur à ce gain d'utilité obtenu par un candidat extrême présent dans un équilibre à deux positions ($-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq \delta$).

Deux observations importantes peuvent être tirées des résultats précédents. Premièrement, la borne inférieure (près de la médiane) de la polarisation des équilibres à deux positions est aussi la borne supérieure de la polarisation des équilibres à une position (deuxième condition du lemme 1). Pour un coût de candidature donné, un équilibre à deux positions existe jusqu'au moment où le gain en utilité des candidats extrêmes est supérieur ou égal à leur coût de candidature ce qui est représenté par la condition 2) du lemme 3 (vote de pluralité), du lemme 4 (vote alternatif/système à deux tours) et du lemme 5 (règle de Coombs/règle de Bucklin). Si les deux candidats extrêmes sont situés trop près l'un de l'autre pour que cette condition soit respectée, un équilibre à deux positions n'existe pas. Cette situation correspond à un équilibre à une position car la condition 2) du lemme 1 est respectée et le gain en utilité du candidat centriste est trop faible pour qu'il veuille concourir. [13]

Deuxièmement, il est aussi important de remarquer que l'ensemble de tous les équilibres (à une et deux positions) est un intervalle c'est-à-dire qu'il n'existe aucune discontinuité entre l'ensemble des équilibres à une et deux positions. Effectivement lorsque $\delta = -\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|)$ les candidats extrêmes sont indifférents à se présenter ou non à l'élection (dans cette situation, j'avais fait l'hypothèse que les candidats se présentent). L'existence de ce point d'indifférence additionnée au fait qu'un équilibre à une position existe pour une valeur infiniment plus faible de la distance entre x_G et x_D assure que l'ensemble de tous les équilibres est un intervalle.

13. En raison de la (faible) concavité de la fonction d'utilité, nous savons que le gain en utilité d'un candidat extrême est plus élevé ou égal que celui d'un candidat centriste ($-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq -u(|x_M - x_i|)$ où $i \in \{G, D\}$). Ainsi, lorsque le coût de candidature est plus élevé que le gain en utilité d'un candidat extrême, le candidat centriste ne veut pas concourir.

Sachant que les conditions 1) et 2) des équilibres à deux positions sont identiques sous toutes les règles de vote étudiées, c'est la troisième condition des lemmes 3 (vote de pluralité), 4 (vote alternatif et système à deux tours) et 5 (règle de Coombs et règle de Bucklin) qui permettra de comparer leur différent support de polarisation. De façon assez intuitive, la troisième condition assure qu'aucun candidat en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Plus les contraintes imposées pour que le candidat centriste ne se présente pas sont grandes, plus le centriste possède des incitatifs importants à entrer sous la règle de vote.

Les deux règles de vote favorisant le plus l'élection d'un candidat centriste sont la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Effectivement, dès qu'un candidat positionné en x_M est présent sous l'une de ces deux règles de vote, il remporte l'élection avec probabilité 1. En ce qui a trait au vote alternatif ainsi qu'au système à deux tours, un candidat centriste dès lors qu'il obtient la seconde part des votes la plus élevée, possède une probabilité positive de remporter l'élection ($[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] > min\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$). Finalement, dans le cas du vote de pluralité, un candidat en x_M doit recueillir la part la plus élevée des votes afin de remporter l'élection ($[F(\overline{x}) - F(\underline{x})] > max\{F(\underline{x}), 1 - F(\overline{x})\}$). Ainsi, un candidat centriste possède des incitatifs plus forts à se présenter sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin, suivi par le vote alternatif et le système à deux tours. De son côté, le vote de pluralité est la règle de vote qui favorise la moins l'élection d'un candidat en x_M.

Regardons maintenant quelles règles de vote étudiées supportent davantage de polarisation des candidats en x_G et x_D. Sachant que la règle de Coombs et la règle de Bucklin sont les deux règles de vote impliquant les plus grandes contraintes pour qu'un candidat centriste ne se présente pas, il est possible de démontrer que tous les équilibres sous ces deux règles de vote sont aussi des équilibres sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours. Cependant, le contraire n'est pas vrai. Donc, la règle de Coombs et la règle de Bucklin supportent moins de polarisation que le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours. Par la suite, le vote alternatif et le système à deux tours exigent des contraintes plus grandes que le vote de pluralité pour empêcher l'entrée de candidats centristes. Tous les équilibres sous ces deux règles de vote existent donc sous le vote de pluralité. Cependant, le contraire n'est pas vrai. On peut donc affirmer que le vote alternatif et le système à deux tours supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. Cette conclusion rejoint les résultats théoriques et expérimentaux trouvés par certains académiques tel Grofman et Feld (2004) ainsi que Van der Straeten et al. (2010). De plus, le résultat obtenu est aussi conséquent avec la croyance populaire comme quoi le vote alternatif favorise davantage l'élection du candidat centriste que le vote de pluralité. Cette croyance a été particulièrement mise de l'avant pendant la campagne précédant le référendum sur la question de l'adoption du vote alternatif en Grande-Bretagne en 2011. Effectivement, une grande vague de publicité en faveur de l'adoption du vote alternatif a été mise sur pied par le Parti Libéral Démocrate (centre-gauche), parti qui selon les analystes politiques, pouvait bénéficier fortement de cette réforme. [14]

4.3 Exemple

Afin de terminer le chapitre, voici un exemple illustrant bien les résultats obtenus. Considérons une population où les préférences au niveau de la politique idéale sont distribuées uniformément sur l'intervalle [0,1]. Chaque citoyen l possède une fonction d'utilité $u_l(x) = -|x - x_l|$ sur la politique implémentée. Le coût de candidature δ est égal à 0,2 et la politique implémentée par défaut si aucun candidat ne se présente (x_0) est 0. En utilisant le lemme 1 (équilibres à une position), le lemme 3 (équilibres à deux positions sous le vote de pluralité), le lemme 4 (équilibres à deux positions sous le vote alternatif et le système à

14. Le parti libéral démocrate lors les élections tenues sous le vote de pluralité a toujours été sous représenté à la Chambre des Communes comparativement au pourcentage de votes qu'il a obtenu. Lors des six dernières élections, le parti a reçu environ 20 % des votes mais il n'a jamais occupé plus de 9,6 % des sièges à la chambre des communes.

deux tours) et le lemme 5 (équilibres à deux positions sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin), il est possible de calculer l'ensemble des politiques supportées par un équilibre sous les différentes règles de vote. Ces résultats sont représentés dans la figure 1.

Tout d'abord, je vais discuter de l'ensemble des politiques supportées par un équilibre à une position. Comme mentionné dans le lemme 1, cet ensemble est le même pour les cinq règles de vote. À la suite des calculs, on trouve que cet ensemble est inclu entre les positions 0,3 et 0,7. Afin d'illustrer les calculs, prenons le cas d'un candidat en x_G situé à la position 0,4. Pour qu'un équilibre à une position existe, il faut tout d'abord que le gain d'utilité du candidat en x_G comparativement au cas où la politique x_0 est implémentée soit supérieur au coût de candidature δ. Ici, cette condition est vérifiée car $-u(|x_G - x_0|) = 0,4 \geq \delta = 0,2$. Par la suite, il faut aussi qu'aucun autre candidat n'ait intérêt à concourir contre le candidat à 0,4. Dans le cas où un candidat à $x_M = \frac{1}{2}$ décide de se présenter à l'élection, son gain d'utilité est égal à $-u(|x_M - x_G|) = 0,1$ ce qui est inférieur au coût de candidature. Le candidat à $\frac{1}{2}$ ne voudra donc pas dévier. Si un candidat à $x_D = 0,6$ décide de se présenter à l'élection, son gain en utilité est égal à $-\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) = 0,1$. Cependant comme dans le cas du candidat centriste, le coût de candidature est plus élevé que son gain $(0,2 > 0,1)$ et il ne souhaitera donc pas concourir. De ce fait, un équilibre à une position existe lorsqu'un candidat est présent à 0,4.

En ce qui a trait aux équilibres à deux positions, l'ensemble diffère selon les règles de vote utilisées. Dans l'exemple suivant, il n'existe aucun équilibre à deux positions sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Effectivement, il n'existe aucune valeur de coût de candidature (δ) tel que -$\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) \geq \delta$, et $\delta > -u(|x_M - x_G|)$. Par ailleurs, dans cet exemple, l'ensemble des politiques supportées par un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité est donné par $[\frac{1}{6}, \frac{3}{10}] \cup [\frac{7}{10}, \frac{5}{6}]$ alors que celui supporté par le vote alternatif et le système à deux tours est égal à $]\frac{1}{6}, \frac{3}{10}] \cup [\frac{7}{10}, \frac{5}{6}[$.

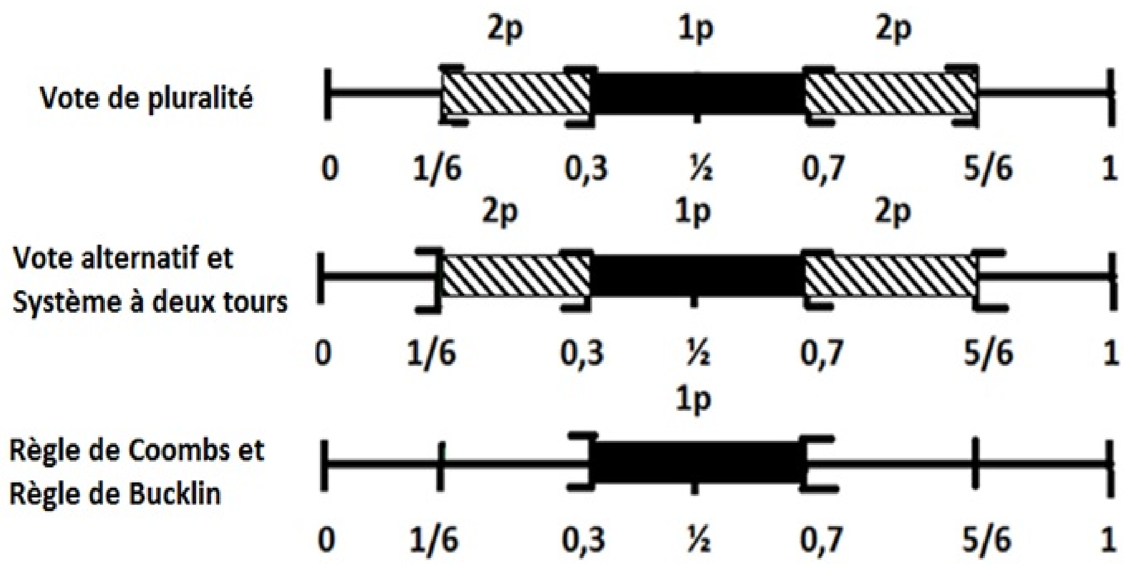

FIGURE 1 – Exemple lorsque $\delta = 0,2$ et $\beta = 0$

Voici un exemple de calculs pour un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité. Prenons le cas d'un candidat en x_G et un candidat en x_D situés respectivement aux positions 0,2 et 0,8. Pour qu'un équilibre à deux positions existe, il faut tout d'abord que le gain en utilité de se présenter pour les candidats extrêmes soit supérieur au coût de candidature qu'ils doivent supporter. Ici, cette condition est vérifiée car -$\frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) = 0,3 \geq \delta = 0,2$. Par la suite, il faut aussi qu'un candidat centriste n'ait pas intérêt à concourir. Dans cet exemple, un candidat centriste qui déciderait de concourir perdrait l'élection avec probabilité 1 car la proportion des votes qu'il reçoit est la plus faible des trois candidats (30 % contre 35 % pour chacun des candidats extrêmes). De ce fait, un candidat situé en x_M ne voudra pas se présenter à l'élection car (1) il n'influence pas son résultat et (2) il devrait supporter le coût de candidature égal à 0,2. Par conséquent, le cas où un candidat en x_G et un candidat en x_D sont situés respectivement aux positions 0,2 et 0,8 sous le vote de pluralité est un équilibre. Par contre, dans la situation où un candidat en x_G est situé à 0,1 et un candidat en x_D est situé à 0,9, il est possible de voir qu'un équilibre à deux positions n'existe pas pour un coût de candidature égal à 0,2. Effectivement, dans cette situation, si un candidat en $x_M = \frac{1}{2}$ se présente, il reçoit la part des votes la plus élevée (35% des votes de première position pour le centriste contre 30% pour chacun des candidats extrêmes) et remporte l'élection. Son gain d'utilité lorsqu'il se présente est donc égal à 0,4 ce qui est supérieur au coût de candidature qu'il doit supporter. [15] Ainsi, le candidat en x_M voudra dévier et se présenter à l'élection.

Il est intéressant de noter que les positions 0,3 et 0,7 constituent les limites entre les équilibres à une position et deux positions. Lorsqu'un candidat est situé à la position 0,3 par exemple, le gain en utilité du candidat centriste s'il se présente est égal à son coût de candidature ($-u(|x_M - x_G|) = 0,2 = \delta$). Ainsi, le candidat en x_M est indifférent à se présenter ou non à l'élection. Dans le cadre de ce mémoire, j'ai fait l'hypothèse que cette situation, le candidat souhaite concourir. De ce fait, la position 0,3 n'est pas soutenue par un équilibre à une position. La même logique s'applique à la position 0,7. Dans le cas où un candidat est présent en 0,3 et 0,7 un équilibre à deux positions existe sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours. Premièrement, le gain en utilité des candidats extrêmes est égal au coût de candidature ($-\frac{1}{2}u(x_D - x_G) = 0,2 = \delta$) ce qui implique que ceux-ci ne veulent pas dévier. De plus, comme la probabilité que le candidat en x_M remporte l'élection est nulle, ce dernier ne voudra pas dévier. La paire (0,3 , 0,7) est donc supportée par un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours.

Un résultat important qui est illustré dans cet exemple est que l'ensemble des équilibres sous le vote de pluralité et le vote alternatif est génériquement identique. Dans le cas du vote alternatif la seule différence avec le vote de pluralité est que l'équilibre à deux positions où le candidat de gauche est situé à $\frac{1}{6}$ et le candidat de droite est situé à $\frac{5}{6}$ n'existe pas. Ce résultat est dû au fait que lorsqu'un candidat est positionné à $\frac{1}{6}$ et à $\frac{5}{6}$, un candidat centriste qui voudrait concourir à l'élection se retrouverait ex-aequo avec les deux candidats

15. Lorsqu'il ne se présente pas, la politique implémentée (soit 0,1 ou 0,9) est toujours située à une distance de 0,4 de la position du candidat en x_M

extrêmes. Chacun des candidats recevrait $\frac{1}{3}$ des votes de première position autant sous le vote de pluralité que sous le vote alternatif. Lors d'une élection tenue sous le vote de pluralité, un candidat en x_M n'aurait pas intérêt à dévier et se présenter à l'élection puisque son gain en utilité égal à $-\frac{1}{3}u(|x_M - x_G) = 0,11$ est plus faible que le coût de candidature égal à $0,2$. Dans le cadre d'une élection tenue sous le vote alternatif, un candidat en x_M aurait intérêt à se présenter car son gain en utilité égal à $-\frac{2}{3}u(|x_M - x_G) = 0,22$ est plus élevé que le coût de candidature égal à $0,2$. Ce résultat est expliqué par le fait que lors d'une triple égalité, le candidat en x_M possède $\frac{2}{3}$ des chances de remporter l'élection sous le vote alternatif contre $\frac{1}{3}$ des chances sous le vote de pluralité. [16]

Deux observations très importantes ressortent des résultats obtenus dans cet exemple. Tout d'abord, bien que j'ai démontré dans la proposition 1 que le vote alternatif est modéré comparativement au vote de pluralité, les différences de support de polarisation entre les deux règles de vote peuvent s'avérer être négligeables. Cette observation apporte un bémol à l'argument selon lequel le vote alternatif supporte moins de polarisation que le vote de pluralité. Le résultat des élections législatives en Australie (où l'on utilise le vote alternatif) est un cas qui illustre bien ce fait. Comme le mentionne l'expert des élections australiennes Anthony Green : « L'expérience montre que dans la majorité des cas, utiliser le vote alternatif pour élire un candidat revient au même résultat que si l'on utilisait le vote de pluralité ». [17]

Cependant, la seconde chose qu'il est important de souligner est que la similitude des ensembles dans cet exemple est due à la symétrie de la distribution des politiques idéales dans la population. Dans le cas où la distribution des politiques idéales ne serait pas symétrique par rapport à la médiane, il est possible d'observer de plus grandes différences entre l'ensemble

16. Sous le vote alternatif, dès que le candidat centriste se rend au second tour, il remporte l'élection avec probabilité 1. Il possède $\frac{2}{3}$ des chances de se rendre au second tour advenant une triple égalité ce qui explique pourquoi sa probabilité de victoire est égale à $\frac{2}{3}$. Sous le vote de pluralité, dans le cas d'une triple égalité, le gagnant est tiré au hasard ce qui explique la probabilité de victoire du candidat en x_M égale à $\frac{1}{3}$

17. http ://www.bbc.co.uk/news/uk-politics-13065069, consulté en ligne le 12 janvier 2013

des équilibres à deux positions sous le vote alternatif et celui sous le vote de pluralité.[18]

18. Pour qu'un candidat centriste remporte l'élection sous le vote de pluralité, ce dernier doit recevoir la part des votes la plus élevée alors que sous le vote alternatif, celui-ci doit obtenir au moins la seconde part des votes la plus importante pour être vainqueur. Lorsque la distribution des politiques idéales est symétrique, un candidat en x_G et en x_D lorsqu'ils sont tout deux présents dans la compétition électorale, reçoivent toujours le même support des électeurs. Dans cette situation les contraintes pour qu'un centriste remporte l'élection sont similaires sous les deux règles de vote si on exclut le cas où certains candidats sont ex-aequo. Cependant, lorsqu'on permet à la distribution des politiques idéales d'être asymétrique, un candidat en x_G et en x_D lorsqu'ils sont tout deux présents, n'ont plus nécessairement le même support. Cela crée donc une réelle différence entre recevoir la part des votes la plus élevée et obtenir au moins la seconde part des votes la plus importante. Ainsi, dans cette situation, il serait possible d'observer de fortes différences entre l'ensemble des équilibres sous le vote de pluralité et sous le vote alternatif.

5 Introduction d'une rente associée à la fonction de décideur

Dans cette section, je regarderai à l'effet de l'introduction des bénéfices reliés au poste de décideur ($\beta > 0$)sur les résultats obtenus dans le modèle de base. Je montrerai alors que ces résultats sont robustes à l'introduction de bénéfices, pour autant que ces bénéfices ne soient pas trop élevés.

Dans le chapitre précédent, j'avais fait l'hypothèse que les candidats étaient seulement intéressés par la politique mise en place. Effectivement, l'utilité d'un candidat en x_i provenant de la mise en place de son alternative préférée était la même peu importe l'identité du vainqueur de l'élection. Il ne recevait donc aucun bénéfice supplémentaire attaché au fait d'être le gagnant de l'élection. Cependant, dans la réalité, il est connu que des bénéfices sont reliés à la fonction de décideur comme, par exemple, les commodités fournies lors des mandats (logement, voiture), l'argent provenant des multiples conférences données après la fin du mandat et la reconnaissance due au fait d'occuper un poste important (par exemple, être un personnage important de l'histoire d'un pays). Dans la littérature, on nomme ces bénéfices *ego rent*. Dans mon modèle, le paramètre β représente les bénéfices reliés au poste de décideur.

Afin d'illustrer les résultats obtenus lorsque $\beta > 0$, j'utiliserai le même exemple qu'à la fin du chapitre précédent. Cependant, je ferai l'hypothèse qu'il y a au plus un candidat potentiel à chaque position afin de simplifier l'analyse. Cette hypothèse n'est pas sans perte de généralité et ses conséquences seront exposées plus loin dans cette section. Par la suite, les paramètres utilisés dans l'exemple sont les suivants : les politiques idéales sont distribuées uniformément dans la population, la fonction d'utilité sur la politique implémentée est représentée par $u_l(x) = -|x - x_l|$, le coût de candidature δ est égal à 0,2 et la politique par défaut x_0 est égale à 0. Cependant, je donnerai ici à β une valeur non-nulle égale à 0,2. Autrement dit, dans cet exemple, β=δ. Les politiques soutenues par un équilibre dans cette

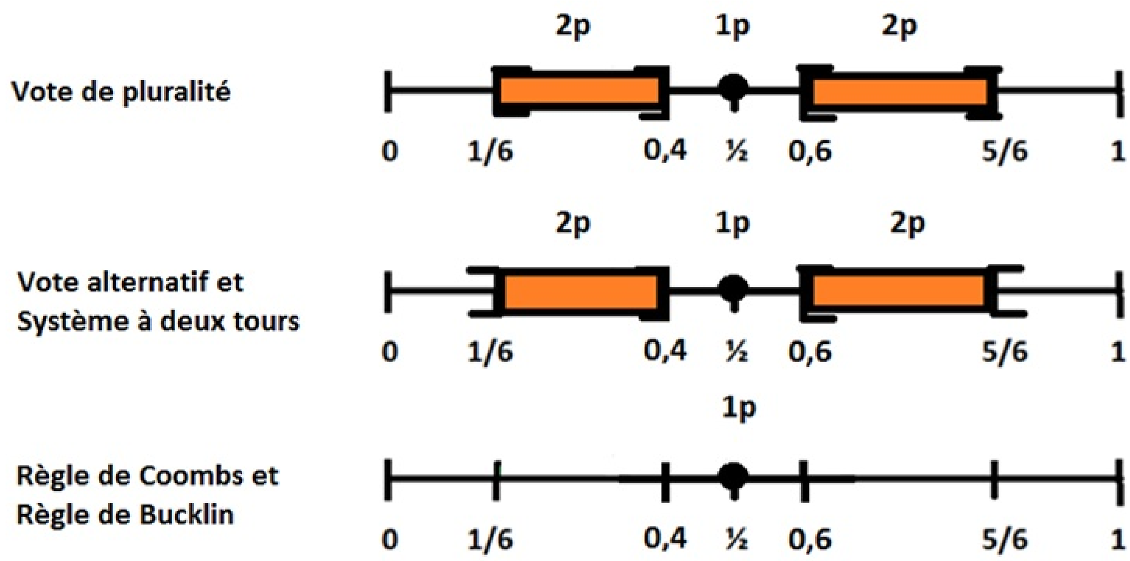

FIGURE 2 – Exemple lorsque $\delta = \beta = 0,2$

situation sont représentées dans la figure 2.

Tout d'abord, je vais discuter des différents ensembles d'équilibre. Comme mentionné dans le lemme 1, tous les équilibres à une position sont les mêmes pour les cinq règles de vote. À la suite des calculs, on trouve que l'ensemble des politiques suportées par un équilibre à une position est seulement égal à $\frac{1}{2}$. Cela veut dire qu'il n'existe aucun équilibre à une position où un candidat extrême est présent. Ce résultat est facilement explicable si l'on observe le gain en utilité d'un candidat centriste dans le cadre d'élections comprenant deux participants ou moins. Effectivement, si un candidat centriste entre dans la compétition électorale contre un candidat en x_G ou x_D, il est élu avec probabilité 1. Comme la rente associée au poste de décideur couvre les coûts de candidature du candidat en x_M, ce dernier voudra se présenter.

En ce qui a trait aux équilibres à deux positions, l'ensemble diffère selon les règles de vote utilisées. Dans l'exemple suivant, il n'existe aucun équilibre à deux positions sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Effectivement, comme un candidat centriste remporte l'élection avec probabilité 1 lorsqu'il décide de concourir, son coût de candidature net des bénéfices (β - δ) est nul ce qui implique qu'il a toujours intérêt à se présenter car son gain en utilité est supérieur à zéro. Ainsi, un candidat positionné soit en x_G ou en x_D n'a jamais intérêt à se présenter car (1) il n'influence pas le résultat de l'élection et (2) il doit supporter le coût de candidature.

En ce qui concerne l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote alternatif/système à deux tours et le vote de pluralité, on remarque encore une fois que l'ensemble des politiques supportées par un équilibre sous ces règles de vote est génériquement identique. Dans cet exemple, l'ensemble des politiques supportées par un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité est $[\frac{1}{6}, \frac{2}{5}] \cup [\frac{3}{5}, \frac{5}{6}]$. Dans le cas du vote alternatif et du système à deux tours, la seule différence est que l'équilibre à deux positions où le candidat de gauche est situé à $\frac{1}{6}$ et le candidat de droite est situé à $\frac{5}{6}$ n'existe pas comme dans le cas de l'exemple précédent. La logique derrière ce résultat est la même qui a été développée dans la section 4.3.

Pour ce qui est du calcul des équilibres à deux positions, la démarche est identique à celle présentée dans l'exemple où $\beta = 0$. Effectivement, la logique reste la même car l'introduction de bénéfices reliés au poste de décideur ne modifie pas les chances d'élection du candidat centriste. La seule différence provient du fait que le gain en utilité de tous les candidats est supérieur en raison de la présence de β.

Dans cet exemple, il n'existe aucun équilibre à trois positions sous les règles de vote étudiées. Nous retrouvons donc les mêmes résultats sur la polarisation que dans l'exemple où les bénéfices liés au poste de décideur étaient nuls soit que le vote de pluralité est la règle de vote qui supporte le plus de polarisation suivit ex-æquo par le vote alternatif et le système à deux tours. Finalement, les deux règles de vote qui supportent le moins de polarisation sont la règle de Coombs et la règle de Bucklin.

Si on compare les résultats obtenus avec le cas où $\beta = 0$, on remarque deux tendances reliées qui peuvent être généralisées. Premièrement, l'ensemble des équilibres à deux positions se rapproche de la médiane au fur et à mesure que β augmente. Effectivement, dans cette situation, le gain en utilité de remporter l'élection pour les candidats en x_G et x_D augmente considérablement. Ainsi, en raison des bénéfices reliés au poste de décideur, des équilibres où les candidats extrêmes sont très près l'un de l'autre existent maintenant. Dans le cas où β=0, ces équilibres n'existent pas car le gain en utilité d'un candidat extrême de se présenter est trop faible.

La deuxième tendance est la réduction des équilibres à une position. Ce résultat est dû au fait que les incitatifs pour un candidat centriste de se présenter augmentent avec la valeur de β. Dans le cas où $\beta = \delta$, le centriste a toujours intérêt à se présenter si un candidat à une autre position est présent ce qui explique que le seul équilibre existant est $\frac{1}{2}$. Pour des valeurs de β comprises entre 0 et δ, on remarque donc que l'ensemble des équilibres à une position rétrécit. Comme je l'ai mentionné, ces deux tendances sont reliées à l'augmentation du gain d'utilité que peuvent obtenir les candidats. Par exemple, dans une situation donnée, il est possible qu'en raison de l'apparition des bénéfices reliés au poste de décideur, un candidat en x_D décide de se présenter alors qu'auparavant un candidat en x_G était le seul à concourrir. Ainsi, l'ensemble des équilibres à deux positions se rapproche de la médiane alors que l'ensemble des équilibres à une position se contracte.

Il est important de souligner que si β est élevé, il est possible d'observer deux phénomènes qui n'étaient pas présents dans mon modèle de base soit des équilibres à trois positions ainsi que des candidatures multiples. En ce qui concerne les équilibres à trois positions, une valeur de β élevée ($\beta \geq delta$) peut amener un candidat extrême qui avait intérêt à ne pas concourir précédemment en l'absence de bénéfices à se présenter à l'élection. Effectivement, si ce candidat possède une probabilité positive de remporter l'élection, ce dernier voit son gain en utilité s'accroître fortement en raison de la rente reliée au poste de décideur. Dans le cas des candidatures multiples, lorsque de $\beta \geq 2\delta$, il est possible d'observer des équilibres où plus d'un candidat est présent à une position donnée. Le choix de la valeur de β dans l'exemple ci-contre a été motivé par le fait que le cas β=δ n'induit pas de candidatures multiples sous le vote de pluralité, le vote alternatif et le système à deux tours et d'équilibres à trois positions ce qui facilite l'exposition.

Finalement, il est possible de voir que pour des valeurs modérées de β, les résultats obtenus avec le modèle de base tiennent toujours. Effectivement lorsque les bénéfices ne sont pas trop élevés, ce sont toujours les incitants des règles de vote qui sont la source principale expliquant les décisions de candidature. Cependant, pour des valeurs de β trop élevées, c'est plutôt les bénéfices reliés au poste de décideur qui influencent les décisions de candidature, rendant difficile la comparaison entre les différentes règles de vote.

6 Conclusion

Dans ce mémoire, je me suis intéressé à savoir si certaines règles de vote, notamment trois systèmes de vote préférentiel, supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. D'autres contributions se sont déjà intéressées à cette question. Celles-ci ont fait cette analyse en considérant comme exogène les décisions de candidature ce qui avait comme effet de garder fixe l'ensemble des candidats sous les différentes règles de vote. Cependant, il est connu que les incitatifs pour un candidat à se présenter à une élection varient selon la règle de vote utilisée. La contribution principale de ce mémoire est de regarder le support de polarisation sous certaines règles de vote en tenant compte de ces différents incitatifs en endogénéisant les décisions de candidature.

En faisant l'hypothèse que le vote des citoyens est sincère, j'ai trouvé que certaines règles de vote préférentiel ainsi que le système à deux tours supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. Ces résultats sont cohérents avec l'argument avancé dans le débat public selon lequel le vote alternatif augmenterait la probabilité qu'un candidat près de la médiane des préférences de la population soit élu comparativement au vote de pluralité. Cependant, les résultats que j'ai obtenu apportent un bémol important à cet argument. Effectivement, dans certaines situations, les résultats obtenus sous le vote alternatif et le vote de pluralité sont génériquement identiques. Dans ce cas, une réforme électorale qui consisterait à adopter le vote alternatif en lieu du vote de pluralité ne changerait pratiquement rien. Ce résultat concorde avec les observations faites en Australie en ce qui a trait aux élections législatives.

Dans le cadre de mon mémoire, je trouve également que le vote alternatif et le système à deux tours supportent exactement le même degré de polarisation. Ainsi, sachant que l'implantation du système à deux tours est coûteuse pour une société en raison de la tenue de deux scrutins, ce résultat démontre que le vote alternatif peut s'avérer une option intéressante pour le remplacer. Cependant, il est important de noter certaines limites à ce résultat.

Premièrement, j'ai supposé que le comportement de vote des citoyens est sincère. Par contre, comme le démontrent Van der Straeten et al. dans leur papier de 2010, le vote alternatif est la seule des règles de vote ici étudiées où l'évidence expérimentale suggère que le comportement de vote des citoyens est sincère. Ils trouvent notamment que le comportement de vote des électeurs est compatible avec un comportement de vote stratégique sous le vote de pluralité et le système à deux tours. De plus, même si aucune recherche empirique ou expérimentale ne le démontre, il est possible de croire que le vote stratégique est aussi présent sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Sous la règle de Coombs notamment, on peut penser que les électeurs ont intérêt à placer dernier un candidat sérieux même s'il n'est pas le candidat qu'ils aiment le moins. En ce qui a trait aux autres limites au niveau de la comparaison de la polarisation sous le système à deux tours et le vote alternatif, j'ai fait fi des abstentions qui peuvent survenir entre le premier et le second tour ainsi que des possibilités de négociation entre les partis pouvant survenir entre les deux scrutins sous le système à deux tours. Comme le mentionne Élections Canada dans sa revue des différentes règles de vote : « Le scrutin à deux tours favorise la formation de coalitions (fondées sur des critères personnels ou de couleur politique) entre les candidats entre les deux tours. [...] cela favorise un certain degré de négociation et de troc entre partis ou entre candidats. » .[19]

Finalement, pour ce qui est des autres règles de vote étudiées dans le cadre de ce mémoire, je trouve que le système à deux tours, la règle de Coombs ainsi que la règle de Bucklin supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. Il est aussi intéressant de noter que la règle de Coombs et la règle de Bucklin supportent le même degré de polarisation et que ces deux modes de scrutin sont ceux qui supportent le moins de polarisation en ce qui concerne les règles de vote étudiées dans ce mémoire.

19. http ://elections.ca/content.aspx ?section=resdir=rec/fra/sys/courtneydocument=courtneylang=f, consulté le 12 janvier 2013

Références

[1] Besley, T. and S. Coate, (1997). An economic model of representative democracy. *Quarterly Journal of Economics* : 112, 85-114.

[2] Bordignon, M. et A. Monticini, (2012). The importance of the electoral rule : Evidence from Italy. *Economics Letters* : 117, 322-325.

[3] Bouton, L., (2012). *Theory of Strategic Voting in Runoff Elections*. Mimeo.

[4] Bouton, L., M. Castanheira et A. Llorente-Saguer, (2012). *Divided Majority and Information Aggregation : Theory and Experiment*. Mimeo.

[5] Callander, S., (2005). Duverger's hypothesis, the Run-Off rule, and electoral competition. *Political Analysis* : 13, 209-232.

[6] Cox, G., (1987). Electoral equilibrium under alternative voting institutions. *American Journal of Political Science* : 31, 82-108.

[7] Cox, G., (1990). Centripetal and centrifugal incentives in electoral systems. *American Journal of Political Science* : 34, 903-935.

[8] Cox, G., (1997). *Making Votes Count*. Cambridge University Press, Cambridge (MA).

[9] Dellis, A., (2009). Would letting people vote for multiple candidates yield policy moderation ? *Journal of Economic Theory* : 144, 772-801.

[10] Dellis, A. et M. Oak, (2006). Approval Voting with endogenous candidates. *Games and Economic Behavior* : 54, 47-76.

[11] Dellis, A. et M. Oak, (2013). *Multiple Votes, Multiple Candidacies and Polarization*. Mimeo.

[12] Dutta, B., M. Jackson et M. Le Breton, (2001). Strategic candidacy and voting procedures. *Econometrica* : 69, 1013-1037.

[13] Duverger, M., (1954). *Political Parties*. Wiley, New York (NY).

[14] Farrell, D. et I. McAllister, (2006). *The Australian Electoral System : Origins, Variations and Consequences*. University of New South Wales Press, Sidney, Australia.

[15] Grofman, B. et S. Feld, (2004). If you like the alternative vote (a.k.a. the instant runoff), then you ought to know about the Coombs rule. *Electoral Studies* : 23, 641-659.

[16] Laakso, M. et R. Taagepera, (1979). "Effective" number of parties : A measure with application to West Europe. *Comparative Political Studies* : 12, 3-27.

[17] Lee, D., E. Moretti et M. Butler, (2004). Do voters affect or elect policies ? Evidence from the U.S. House. *Quarterly Journal of Economics* : 119, 807-859.

[18] Morelli, M., (2004). Party formation and policy outcomes under different electoral systems. *Review of Economic Studies* : 71, 829-853.

[19] Myerson, R., (1999). Theorical comparaisons of electoral systems. *European Economic Review* : 43, 671-697.

[20] Myerson, R. et R. Weber, (1993). A theory of voting equilibria. *American Political Science Review* : 87, 102-114.

[21] Osborne, M. et A. Slivinski, (1996). A model of political competition with citizen-candidates. *Quarterly Journal of Economics* : 111, 65-96.

[22] Palfrey, T., (1984). Spatial equilibrium with entry. *Review of Economic Studies* : 51, 139-156.

[23] Persson, T. et G. Tabellini, (2003). *The Economic Effects of Constitutions*. MIT Press, Cambridge (MA).

[24] Roubini, N. et J. Sachs, (1989). Government spending and budget deficits in the industrial countries. *Economic Policy* : 4, 100-132.

[25] Tideman N., (1995). The Single Transferable Vote. *Journal of Economic Perspectives* : 9, 27-38.

[26] Van der Straeten, K., J-F. Laslier, N. Sauger et A. Blais, (2010). Strategic, sincere, and heuristic voting under four election rules : An experimental study. *Social Choice and Welfare* : 35, 435-472.

Annexe

Preuve du Lemme 1 :

Dans un équilibre à une position, un seul candidat est présent. En effet, si plusieurs candidats à cette position étaient présents, au moins l'un d'entre eux serait mieux de dévier de sa stratégie de candidature et ne pas concourir puisque sa politique idéale serait toujours implémentée avec probabilité 1, mais il épargnerait le coût de candidature δ.

Je vais maintenant établir la nécessité de chacune des deux conditions. Considérons un équilibre dans lequel i est le seul candidat. Pour qu'il ne soit pas mieux de dévier et de ne pas se présenter comme candidat, il faut que son utilité lorsqu'il se présente, égale à 0-δ, excède son utilité $u(|x_i - x_0|)$ lorsqu'il ne se présente pas et que le statut quo x_0 est maintenu. Ainsi la nécessité de la condition 1).

Il faut également qu'aucun autre candidat potentiel ne veuille entrer dans la compétition électorale. Si $x_i \in \{x_G, x_D\}$, disons $x_i = x_G$, alors un candidat j à x_D obtiendrait la moitié des voix et serait élu avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour qu'il ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à $(0 + \frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) - \delta$, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_D - x_G|)$. Ainsi la nécessité de la condition 2).

Il est facile de voir qu'ensemble les conditions 1) et 2) sont suffisantes à l'existence d'un équilibre à une position. Un exemple est disponible auprès de l'auteur.

Preuve du Lemme 2 :

Je commencerai par démontrer le résultat du lemme 2 sous le vote de pluralité et sous le système à deux tours. Comme les deux règles de vote ont un fonctionnement similaire lorsqu'au plus un candidat est présent à chaque position, j'utiliserai le vote de pluralité pour la démonstration et la logique sera la même pour le système à deux tours.

Soit un équilibre sous le vote de pluralité tel que $c_h \geq 2$ candidats se présentent à la position x_h. Dans cette situation, dénotons par π_h la probabilité de victoire d'un candidat positionné en x_h, alors que v_h représente la proportion totale des votes reçue par l'ensemble des candidats occupant cette même position. Chaque candidat en x_h reçoit donc une proportion des votes égale à $\frac{v_h}{c_h}$.

Faisons l'hypothèse que l'un des candidats positionné en x_h dévie et ne se présente pas, alors $c_h^* = c_h - 1$. Sachant que $v_h^* = v_h$ en raison de l'hypothèse de sincérité des électeurs, la proportion des votes reçue par chacun des candidats en x_h est strictement plus grande qu'initialement ($v_h^*/c_h^* > v_h/c_h$) ce qui implique que $\pi_h^* \geq \pi_h$. Dans ce cas, un candidat en x_h serait mieux de dévier et de ne pas entrer dans la compétition puisque cela accroîtrait ou laisserait inchangé π_h tout en lui évitant de supporter le coût de candidature δ.

Je prouve maintenant la validité du lemme 2 pour le vote alternatif. Pour ce faire, je démontre le résultat obtenu dans le cas des équilibres à deux positions. Il est à noter que la logique est la même pour un équilibre à trois positions.

Soit un équilibre à deux positions sous le vote alternatif. Dans le cas où x_M fait partie des deux positions, la seule situation où un candidat extrême remporte l'élection survient lorsque tous les candidats en M sont éliminés. Cependant, cela est impossible sachant que lorsqu'il restera un seul candidat en M, ce dernier recevra une majorité des votes de première place puisque des candidats sont seulement présents à deux positions, et remportera l'élection avec probabilité 1. Prenons par exemple le cas où il ne reste seulement qu'un candidat en x_M et un ou plusieurs candidats en x_D. Dans cette situation, le candidat en x_M possède une part des votes de première place représentée par $F(\frac{x_M+x_D}{2})$. Sachant que $\frac{x_M+x_D}{2} > x_M$ et que F(x_M)= $\frac{1}{2}$, on sait que le candidat en x_M obtient une majorité des votes de première place. De ce fait, cette situation n'est pas un équilibre car les candidats extrêmes possèdent une probabilité nulle de remporter l'élection et préfèrent ne pas concourir.

Dans le cas où un candidat est présent en x_G et en x_D, il y aura élimination de tous les candidats jusqu'au moment où il ne restera qu'un candidat en x_G et en x_D. Comme le support des deux candidats est égal en raison de la symétrie de x_G et x_D autour de la médiane m ($v_G = v_D$), le gagnant de l'élection est déterminé aléatoirement ce qui implique que $\pi_G = \pi_D = \frac{1}{2}$. Dans le cas présent, un candidat en x_G ou x_D serait mieux de dévier et de ne pas entrer dans la compétition puisque cela laisserait inchangé la probabilité que sa politique idéale soit implémentée (elle resterait toujours égale à $\frac{1}{2}$) tout en lui évitant de supporter le coût de candidature δ.

Preuve du Lemme 3 :

Dans un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité, un seul candidat est présent à chaque position (lemme 2).

Je vais maintenant établir la nécessité de chacune des trois conditions. Considérons un équilibre sous le vote de pluralité dans lequel x_M est présent avec un candidat situé à une position extrême, x_D par exemple. Dans ce cas, le candidat centriste reçoit une part des votes égale à F($\frac{x_M+x_D}{2}$) alors que la part des votes du candidat en x_D est de 1-F($\frac{x_M+x_D}{2}$). Sachant que $\frac{x_M+x_D}{2} > x_M$ et que F(x_M)= $\frac{1}{2}$, on sait que le candidat en x_M obtient une majorité des votes de première place et remporte l'élection. Dans ce cas, le candidat en x_D aurait intérêt à ne pas concourir afin d'épargner le coût de candidature δ. Ainsi la nécessité de la condition 1).

Considérons un équilibre sous le vote de pluralité dans lequel un candidat est présent en x_G et en x_D. Pour que les deux participants ne soient pas mieux de dévier et de ne pas se présenter comme candidat, il faut que leur utilité lorsqu'ils se présentent, égale à $0 + \frac{1}{2}u(x_D - x_G|) - \delta$, excède leur utilité lorsqu'ils ne se présentent pas correspondant à $u(|x_D - x_G|)$ et que le candidat extrême toujours en lice remporte l'élection avec probabilité 1. Ainsi la nécessité de la condition 2).

Il faut également qu'aucun candidat potentiel en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Supposons qu'un candidat potentiel en x_M entre dans la compétition. Il existe quatre cas à distinguer :

1. La part des votes obtenue par le centriste (F($\overline{x}$)-F($\underline{x}$)) est inférieure à l'une des parts obtenue par chacun des candidats extrêmes (F($\underline{x}$), 1- F($\overline{x}$)). Dans ce cas, le candidat en x_M possède une probabilité nulle de remporter l'élection et ne veut pas dévier de sa stratégie de candidature.

2. Le centriste possède la part la plus élevée des votes et remporte l'élection avec probabilité 1. Pour qu'il ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à 0-δ, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$.

3. Le candidat en x_M est ex-æquo avec le candidat extrême ayant la part la plus élevée des votes. Dans cette situation, le candidat centriste remporte l'élection avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour qu'il ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à $0 + \frac{1}{2}u(|x_M - x_G|) - \delta$, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$.

4. Le candidat centriste reçoit exactement la même proportion des votes que les deux

candidats extrêmes. Dans ce cas, le candidat centriste remporte l'élection avec probabilité $\frac{1}{3}$. Afin que ce dernier ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à $0+\frac{2}{3}u(|x_M-x_G|)-\delta$, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M-x_G|)$.

Ainsi la nécessité des conditions 3a), 3b), 3c) et 3d).

Il est facile de montrer par construction qu'ensemble les conditions 1), 2) et 3) sont suffisantes à l'existence d'un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité. Un exemple est disponible auprès de l'auteur.

Preuve du Lemme 4 :

Je démontrerai la nécessité des trois conditions du lemme 4 en utilisant le système à deux tours sachant que les résultats sont similaires sous le vote alternatif. Effectivement, comme seulement au plus trois candidats sont présents sous les deux règles de vote (résultat provenant du lemme 2), l'élimination du candidat ayant le moins de votes de première position sous le vote alternatif et le passage au second tour des deux candidats ayant le plus de votes sous le système à deux tours reviennent au même résultat.

Je vais maintenant établir la nécessité de chacune des trois conditions. Considérons un équilibre sous le système à deux tours où un candidat en x_M et un candidat situé à une position extrême, x_D par exemple, sont présents. Par la même logique utilisée dans la condition 1 du lemme 3, le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité 1. Le candidat en x_D aurait donc intérêt à ne pas concourir afin d'épargner le coût de candidature δ. Ainsi, la nécessité de la condition 1).

Considérons un équilibre sous le système à deux tours dans lequel un candidat est présent en x_G et en x_D. Pour que les deux participants ne souhaitent pas dévier et ne pas concourir, il faut que leur utilité lorsqu'ils se présentent, égale à $0 + \frac{1}{2}(|x_D - x_G|) - \delta$, excède leur utilité lorsqu'ils ne se présentent pas correspondant à $u(|x_D - x_G|)$ et que le candidat extrême toujours en lice remporte l'élection avec probabilité 1. Ainsi la nécessité de la condition 2).

Il faut également qu'aucun candidat potentiel en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Supposons qu'un candidat potentiel en x_M entre dans la compétition. Il existe quatre cas à distinguer :

1. La part des votes obtenue par le centriste (F($\overline{x}$)-F($\underline{x}$)) est inférieure à chacune des parts obtenues par les candidats extrêmes (F($\underline{x}$), 1- F($\overline{x}$)). Dans ce cas, le candidat en x_M possède une probabilité nulle de remporter l'élection et ne veut pas dévier de sa stratégie de candidature.

2. La part des votes reçue par le candidat en x_M est supérieur à celle d'au moins un des deux candidats extrêmes. Dans cette situation, le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité 1. Pour qu'il ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à 0-δ, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$.

3. Le candidat en x_M est ex-æquo avec le candidat extrême ayant la part des votes la plus faible. Dans cette situation, le candidat centriste remporte l'élection avec probabilité $\frac{1}{2}$. Pour qu'il ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à $0 + \frac{1}{2}u(|x_M - x_G|) - \delta$, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$.

4. Le candidat centriste reçoit exactement la même proportion des votes que les deux candidats extrêmes. Dans ce cas, le candidat centriste remporte l'élection avec probabilité $\frac{2}{3}$. Afin que ce dernier ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à $0 + \frac{1}{3}u(|x_M - x_G|) - \delta$, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$.

Ainsi la nécessité des conditions 3)a, 3)b, 3)c, 3)d.

Il est facile de montrer par construction qu'ensemble les conditions 1, 2 et 3 sont suffisantes à l'existence d'un équilibre à deux positions sous le vote de pluralité. Un exemple est disponible auprès de l'auteur.

Lemma A.1 : *Le gagnant de Condorcet est toujours élu sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin*

Preuve du Lemme A.1 :

Sous la règle de Coombs, ce résultat est démontré par Grofman et Feld (2004).

Je démontrerai donc ce résultat sous la règle de Bucklin.

Supposons que le gagnant de l'élection sous la règle de Bucklin est une alternative autre que le gagnant de Condorcet. On sait que le gagnant de Condorcet est l'alternative préférée de l'électeur médian. De ce fait, le gagnant de Condorcet est préféré strictement par une majorité de la population à l'alternative gagnante de l'élection ce qui implique que le gagnant de Condorcet est placé devant cette même alternative dans une majorité des bulletins de vote. Pour remporter le vote sous la règle de Bucklin, l'alternative gagnante doit être la première à apparaître dans la majorité des bulletins de vote. Il est donc impossible que l'alternative gagnante soit autre que le gagnant de Condorcet car cette dernière apparaîtrait avant elle dans une majorité des bulletins de vote.

Preuve du Lemme 5 :

Je vais maintenant établir la nécessité de chacune des trois conditions. Considérons un équilibre sous la règle de Coombs ou la règle de Bucklin dans lequel x_M est présent avec un candidat situé à une position extrême, x_D par exemple. Par la même logique utilisée dans la condition 1) du lemme 3, le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité 1. Le candidat en x_D aurait donc intérêt à ne pas concourir afin d'épargner le coût de candidature δ. Ainsi, la nécessité de la condition 1).

Considérons un équilibre sous la règle de Coombs ou la règle de Bucklin dans lequel un candidat est présent en x_G et en x_D. Pour que les deux participants ne soient pas mieux de dévier et de ne pas se présenter comme candidat, il faut que leur utilité lorsqu'ils se présentent, égale à $0 + \frac{1}{2}u(|x_D - x_G|) - \delta$, excède leur utilité $u(|x_D - x_G|)$ lorsqu'ils ne se présentent pas et que le candidat extrême toujours en lice remporte l'élection avec probabilité 1.

De plus, afin qu'un équilibre à deux positions existe sous la règle de Coombs et la règle de Bucklin, il faut que le nombre de candidats potentiels soit égal en x_G et en x_D. Effectivement, si le nombre de candidat est plus élevé à l'une des positions, cette dernière est implémentée avec probabilité 1. Voici la logique de ce résultat pour chacune des règles de vote qui est assuré par la condition 2).

Dans le cadre de la règle de Coombs, ce résultat est obtenu car un plus grand nombre de candidats divise plus fortement le nombre de votes de dernière place récolté pour une position donnée. Par exemple, dans une situation où deux candidats sont présents en x_G et un seul est présent en x_D, chacun des candidats en x_G recevront 25 % des votes de dernière position alors que le candidat en x_D recevra 50 % des votes de dernière position. Le candidat en x_D est donc éliminé et un candidat en x_G remporte l'élection avec probabilité 1.

Dans le cas de la règle de Bucklin, le plus grand nombre de candidats à une position, en x_G par exemple, permet de repousser dans le classement les candidats en x_D et de ralentir le transfert des votes vers ceux-ci. Prenons le même exemple que précédemment où deux candidats sont présents en x_G et un seul en x_D. Aucun des candidats ne reçoit une majorité de premier classement dans cette situation (les deux candidats en x_G reçoivent chacun 25 % des premiers classement alors que le candidat en x_D en reçoit 50 %). Lorsque l'on tient compte des seconds classements, les deux candidats en x_G figure en première ou seconde place dans 75 % des bulletins de vote contre 50 % pour le candidat en x_D. Dans cette situation, un candidat en x_G remporte l'élection avec probabilité 1. Dans cet exemple, comme il n'y avait qu'un candidat en x_D de présent, les citoyens dont la politique idéale était située à droite de la médiane n'avait pas le choix de classer deuxième un candidat en x_G ce qui explique pourquoi ils ont reçus une majorité de premier et deuxième classements.

Il faut également qu'aucun candidat potentiel en x_M ne veuille entrer dans la compétition électorale. Supposons qu'un candidat potentiel en x_M entre dans la compétition. Dans cette situation, selon le lemme A.1, il remporte cette dernière avec probabilité 1. Afin que ce dernier ne veuille pas entrer dans la compétition, il faut donc que son utilité espérée, égale à 0 -δ, soit inférieure à son utilité s'il n'entre pas, égale à $u(|x_M - x_G|)$. Ainsi la nécessité de la condition 3).

Il est facile de voir qu'ensemble les conditions 1), 2) et 3) sont suffisantes à l'existence d'un équilibre à deux positions sous le règle de Coombs et la règle de Bucklin. Un exemple est disponible auprès de l'auteur.

Preuve du Lemme 6 :

Soit un équilibre où un candidat est présent à chaque position. Supposons sans perte de généralité que $\pi_G \leq \pi_D$. Soit $u_i(x)$, l'utilité du candidat en x_i provenant de l'implémentation de la politique x. Dans cette situation, l'utilité du candidat G est égale à $Eu_G - \delta$ où $Eu_G = \pi_G u_G(x_G) + \pi_M u_G(x_M) + \pi_D u_G(x_D)$.

Supposons maintenant que le candidat en x_G dévie et ne se présente pas. Alors sous toutes les règles de vote, son utilité sera de $u_G(x_M)$ sachant que la candidat centriste remportera l'élection avec probabilité un en raison de sa position qui correspond à la médiane de l'électorat. De plus, comme u_i est une fonction concave, on sait que $u_i(Ex) \geq Eu_i$ où $Ex = \pi_G x_G + \pi_M x_M + \pi_D x_D$ représente l'espérance de la politique implémentée. Puisque $\pi_G \leq \pi_D$ et que $|x_M - x_G| = |x_M - x_D|$, alors on sait que $Ex \geq x_M$. De ce fait, on peut donc affirmer que $u_G(x_M) \geq u_G(Ex)$ en raison de la décroissance de u_G en x à partir de x_G.

Le candidat en x_G reçoit donc $Eu_G - \delta$ comme utilité s'il se présente et $u_G(x_M)$ s'il dévie. Puisque $\delta > 0$ et que la fonction d'utilité est concave, on a donc que, $u_G(x_M) \geq u_G(Ex) \geq Eu_G > Eu_G - \delta$. Le candidat en x_G est donc strictement mieux de dévier et de ne pas se présenter à l'élection, ce qui implique que la situation initiale n'est pas un équilibre.

Preuve de la Proposition 1 :

Premièrement, comme l'ensemble des équilibres à une position est le même pour toutes les règles de vote étudiées et que pour ces dernières il n'existe aucun équilibre à trois positions, c'est l'ensemble des équilibres à deux positions sous les différentes règles de vote qui déterminera laquelle peut supporter le plus de polarisation.

Avant de débuter la comparaison des équilibres à deux positions, il est aussi important de noter que l'ensemble des équilibres à une position est modéré (ou supporte moins de polarisation) que les équilibres à deux positions pour toutes les règles de vote étudiées dans ce mémoire. Comparons la deuxième condition nécessaire à l'existence d'un équilibre à une position (lemme 1) avec la deuxième condition des lemmes 3 (vote de pluralité), 4 (vote alternatif/système à deux tours) et 5 (règle de Coombs et règle de Bucklin), nécessaire à l'existence d'un équilibre à deux positions et qui est identique sous toutes les règles de vote étudiées dans le cadre de ce mémoire.

Voici la deuxième condition nécessaire pour un équilibre à une position :
$\delta > -\frac{1}{2}u({x_D}^{1p} - {x_G}^{1p})$

Voici la deuxième condition nécessaire pour un équilibre à deux positions :
$-\frac{1}{2}u({x_D}^{2p} - {x_G}^{2p}) \geq \delta$

Ici, $|{x_D}^{1p} - {x_G}^{1p}|$ représente la polarisation supportée par un équilibre à une position alors que $|{x_D}^{2p} - {x_G}^{2p}|$ représente le degré de polarisation pouvant être supporté sous un équilibre à deux positions. Plus la distance entre x_G et x_D est grande, plus l'équilibre est polarisé. Comparons donc la polarisation des deux types d'équilibres.

Pour un δ donné on sait que :
$-\frac{1}{2}u({x_D}^{2p} - {x_G}^{2p}) \geq -\frac{1}{2}u({x_D}^{1p} - {x_G}^{1p})$
$u({x_D}^{1p} - {x_G}^{1p}) \geq u({x_D}^{2p} - {x_G}^{2p})$

Comme $u' < 0$ cela implique que :

$|{x_D}^{2p} - {x_G}^{2p}| > |{x_D}^{1p} - {x_G}^{1p}|$

Donc, les équilibres à une position supportent moins de polarisation que les équilibres à deux positions. De ce fait, la polarisation entre les différentes règles de vote dépendra seulement des équilibres à deux positions.

Comparons maintenant les différents ensembles des équilibres à deux positions. Notons tout d'abord que deux paires de règles de vote partagent les mêmes conditions pour les équilibres à deux positions soit le vote alternatif et le système à deux tours ainsi que la règle de Coombs et la règle de Bucklin. Ainsi l'ensemble des équilibres à deux positions sous la règle de Coombs est identique à celui sous la règle de Bucklin. Par la même logique, l'ensemble des équilibres sous le vote alternatif est identique à celui sous le système à deux tours. Donc, les résultats trouvés pour l'une des deux règles de vote ayant un ensemble des équilibres à deux positions identique peuvent être directement transférés à l'autre règle de vote.

Commençons par comparer l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote de pluralité avec celui sous le vote alternatif. Après plusieurs calculs assez longs mais peu complexes on peut trouver que lorsqu'une paire est $\{x_G, x_D\}$ est supportée par un équilibre sous le vote alternatif, elle est également supportée par un équilibre sous le vote de pluralité. Cependant, l'inverse n'est pas vrai. On peut alors conclure que l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote alternatif (ou sous le système à deux tours), est inclus dans l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote de pluralité ($E_{VA} = E_{S2T} \subset E_{VP}$ où VA, S2T et VP signifient respectivement vote alternatif, système à deux tours et vote de pluralité).

Comparons ensuite l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote alternatif et sous la règle de Coombs. Après plusieurs calculs assez longs mais peu complexes on peut trouver que lorsqu'une paire est $\{x_G, x_D\}$ est supportée par un équilibre sous la règle de Coombs, elle est également supportée par un équilibre sous le vote alternatif. Cependant, l'inverse n'est pas vrai. On peut alors conclure que l'ensemble des équilibres à deux positions sous la règle de Coombs (ou sous la règle de Bucklin), est inclus dans l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote alternatif (ou sous le système à deux tours) ($E_{RB} = E_{RC} \subset E_{VA} = E_{S2T}$ où RB et RC signifient respectivement règle de Bucklin et règle de Coombs). Logiquement, on peut aussi affirmer que l'ensemble des équilibres à deux positions sous la règle de Coombs ou la règle de Bucklin est inclus dans celui sous le vote de pluralité ($E_{RC} = E_{RB} \subset E_{VP}$).

Le fait d'avoir trouvé que certains ensembles d'équilibres à deux positions sont inclus dans d'autres ne nous permet pas de conclure sur la modération (ou le support de la polarisation) des différentes règles de vote. Il faut maintenant regarder quelle règle de vote supporte les équilibres les plus extrêmes. Sachant que les deux premières conditions nécessaires à l'existence d'un équilibre à deux positions sous les différentes règles de vote sont les mêmes (première et deuxième condition des lemmes 3 (vote de pluralité), 4 (vote alternatif et système à deux tours) et 5 (règle de Coombs et règle de Bucklin), nous comparerons principalement la troisième condition sous chacune des règles de vote soit les contraintes nécessaires pour qu'un candidat potentiel en x_M ne veuille pas concourir.

Commençons par comparer le vote de pluralité avec le vote alternatif. On sait premièrement qu'il est impossible que l'ensemble des équilibres à deux positions sous le vote alternatif soit plus près de la médiane que celui sous le vote de pluralité car $E_{VA} \subset E_{VP}$.

Afin de savoir si le vote alternatif supporte moins de polarisation que le vote de pluralité, il faut savoir si la frontière commune de chacun des ensembles des équilibres à deux positions près de la médiane est la même. Si c'est le cas, comme $E_{VA} \subset E_{VP}$, alors le vote alternatif supporterait moins de polarisation que le vote de pluralité.

Soit une paire $\{x_G, x_D\}$ supportée par un équilibre sous le vote transférable unique qui est aussi supporté par un équilibre sous le vote de pluralité. Prenons une autre paire $\{x_G', x_D'\}$ aussi supportée par un équilibre sous le vote de pluralité et située plus près de la médiane que $\{x_G, x_D\}$. On peut alors montrer que la paire $\{x_G', x_D'\}$ est obligatoirement supportée par un équilibre sous le vote alternatif.

On sait que si la paire $\{x_G, x_D\}$ est supportée par un équilibre sous les deux règles de vote, cela veut dire qu'un candidat en x_M n'a pas intérêt à se présenter soit car il possède une probabilité nulle de remporter l'élection soit car son gain en utilité est plus faible que son coût de candidature. Dans le cas du vote alternatif, cela se traduit par trois cas possibles :

1. Le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité 1 lorsque la paire $\{x_G, x_D\}$ est supportée par un équilibre. Dans ce cas, on sait que le candidat centriste ne voudra pas dévier de sa stratégie de candidature car son gain en utilité lorsque $\{x_G', x_D'\}$ est supporté par un équilibre est toujours plus faible que celui qu'il obtient lorsque $\{x_G, x_D\}$ est supporté par un équilibre. Effectivement, comme son gain en utilité était déjà trop faible pour que ce dernier veuille dévier dans la situation où il remportait l'élection avec probabilité 1, il ne déviera pas non plus sachant que son gain en utilité diminue lorsque $\{x_G', x_D'\}$ est supporté par un équilibre. Dans cette situation, la paire $\{x_G', x_D'\}$ est donc supportée par un équilibre sous le vote alternatif.

2. Le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité positive mais plus faible que 1 lorsque $\{x_G, x_D\}$ est supporté par un équilibre. Cela implique que dans cette situation, le candidat en x_M est ex-aequo avec un ou deux candidats. Donc, lorsque $\{x_G', x_D'\}$

est supporté par un équilibre, la probabilité de victoire du candidat en x_M est égale à 0. En effet, comme la paire $\{x_G{}',x_D{}'\}$ est située plus près de la médiane que la paire $\{x_G,x_D\}$, le candidat centriste perd une partie des votes qu'il recevait au profit de ses deux adversaires ce qui explique ce résultat. Comme son gain en utilité dans cette situation est plus faible que lorsque $\{x_G,x_D\}$ est supporté par un équilibre, le candidat centriste ne souhaite pas concourir et ne dévie pas. Dans ce cas, $\{x_G{}',x_D{}'\}$ est supporté par un équilibre sous le vote alternatif.

3. Le candidat en x_M remporte l'élection avec probabilité nulle lorsque la paire $\{x_G,x_D\}$ est supportée par un équilibre. Dans cette situation, le centriste centriste possède aussi une probabilité nulle de remporter l'élection lorsque $\{x_G{}',x_D{}'\}$ est supporté par un équilibre. Comme le candidat en x_M n'influence pas le résultat de l'élection et devrait supporter le coût de candidature s'il se présentait, ce dernier ne souhaite pas dévier et concourir. Dans cette situation, la paire $\{x_G{}',x_D{}'\}$ est donc supportée par un équilibre sous le vote alternatif.

Ainsi, on peut conclure que $\{x_G{}',x_D{}'\}$ est toujours supporté par un équilibre sous le vote alternatif. Cela implique donc que la frontière près de la médiane est la même pour l'ensemble des équilibres à deux positions sous les deux règles de vote et donc comme $E_{VA} \subset E_{VP}$, on sait que le vote alternatif et par conséquent le système à deux tours supportent moins de polarisation que le vote de pluralité.

Continuons en comparant le vote alternatif avec la règle de Coombs. On sait premièrement qu'il est impossible que l'ensemble des équilibres à deux positions sous la règle de Coombs soit plus près de la médiane que celui sous le vote alternatif car $E_{RC} \subset E_{VA}$

Afin de savoir si la règle de Coombs supporte moins de polarisation que le vote alternatif, il faut savoir si la frontière commune de chacun des ensembles des équilibres à deux positions près de la médiane est la même. Si c'est le cas, comme $E_{RC} \subset E_{VA}$, alors la règle de Coombs supporterait moins de polarisation que le vote alternatif.

Soit la paire $\{x_G, x_D\}$ supportée par un équilibre sous la règle de Coombs qui est aussi supporté par un équilibre sous le vote alternatif. Prenons une autre paire $\{x_G{}', x_D{}'\}$ aussi supportée par un équilibre sous le vote alternatif et située plus près de la médiane que $\{x_G, x_D\}$. On peut alors montrer que $\{x_G{}', x_D{}'\}$ est obligatoirement supporté par un équilibre sous la règle de Coombs.

On sait que si la paire $\{x_G, x_D\}$ est supportée par un équilibre sous les deux règles de vote cela veut dire qu'un candidat en x_M n'a pas intérêt à se présenter soit car il a une probabilité nulle de remporter l'élection soit car son gain en utilité est plus faible que son coût de candidature. Dans le cas de la règle de Coombs, le candidat centriste remporte toujours l'élection lorsqu'il se présente. Nous nous retrouvons donc face à la même situation que le point 1 décrit dans la comparaison des équilibres sous le vote de pluralité et le vote alternatif. En effet, comme le gain en utilté du candidat en x_M est toujours plus élevé lorsque $\{x_G, x_D\}$ est supporté par un équilibre mais que ce dernier ne veut pas dévier, il ne souhaitera donc pas concourir lorsque $\{x_G{}', x_D{}'\}$ est supporté par un équilibre. Ainsi, on peut conclure que la paire $\{x_G{}', x_D{}'\}$ est toujours supportée par un équilibre sous la règle de Coombs. Cela implique donc que la frontière près de la médiane est la même pour les deux règles de vote et donc comme $E_{RC} \subset E_{VA}$, on sait que la règle de Coombs et par conséquent la règle de Bucklin supportent moins de polarisation que le vote alternatif et le système à deux tours.

Par les deux résultats obtenus, on peut aussi déduire que la règle de Coombs et la règle de Bucklin supportent moins de polarisation que le vote de pluralité. On retrouve donc les résultats finaux de la proposition 1.