

MERLANO ARTURO

**OPTIMISATION DE LA DISPONIBILITÉ DES SYSTÈMES ASSUJETTIS À LA
MAINTENANCE IMPARFAITE**

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

Département de génie mécanique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2008

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la modélisation et à l'optimisation d'une stratégie de maintenance, dite imparfaite, pour un système dont les caractéristiques opérationnelles se dégradent avec l'âge et avec l'usage. Ce type de stratégies a suscité, au cours de la dernière décennie, beaucoup d'intérêt au niveau de la recherche autant sur le plan fondamental qu'appliqué.

Pour chaque système on connaît la distribution des durées de vie, des durées de réparation et de remplacement, ainsi que le taux de réduction de l'âge ou du taux de panne du système suite à chaque action de maintenance préventive imparfaite. Après chaque réparation, l'âge du système est réduit d'une certaine fraction et son temps de réparation augmente d'une autre fraction.

Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Dans le cadre de cette étude, on s'est basé principalement sur les travaux de Wang et Pham pour développer deux modèles d'optimisation qui intègrent les variables de décision T et k (variables qui définissent la stratégie), les coûts et les durées associées aux actions de maintenance préventive et corrective, les distributions des durées de vie et de réparation, les paramètres α et β inhérents au processus de quasi-renouvellement et enfin la limite budgétaire L_0 et le seuil de disponibilité requis A_0 .

Le premier modèle permet de déterminer le couple (T^*, k^*) qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini $L(T, k; \alpha, \beta)$ tout en respectant un seuil de disponibilité A_0 . Le deuxième modèle vise à déterminer le couple (T^*, k^*) qui maximise la disponibilité stationnaire $A(T, k; \alpha, \beta)$ en respectant une limite budgétaire L_0 . Il s'agit de deux modèles de programmation non linéaire mixte.

Des procédures de calcul, exploitant le logiciel MAPLE, ont été mises au point pour traiter les différents modèles de programmation mathématique (avec et sans contraintes). Les modèles proposés pourront servir de base au développement de nouvelles stratégies de maintenance.

Abstract

I have focused my work in the modeling and the optimization of a maintenance service strategy, called imperfect, which operational characteristics degrade because of age or usage. In the last decade, this type of strategies has aroused a lot of interest at the research level as well as at the application level.

For every system one knows the distribution of life span, the length of repairing and also the age reduction rate or failure rate that follows every imperfect preventive maintenance action. After every repairing, the age of the system is reduced by some fraction and its repairing time augments by another fraction.

Several models are offered in literature. For this particular research however, I have mainly used the studies of Wang and Pham which are aimed to develop two models of optimization which include the variables of decision T and k (variables which define strategy), the costs and durability linked to the preventive and corrective maintenance actions, the life span and repairing time distributions, the parameters α and β inherent to the quasi-renewal processes, and finally the budget limit B and the availability threshold requested A_0 . The first model allows to determine the couple (T^*, k^*) which minimizes the medium total cost by time unit on an infinite horizon $L(T, k; \alpha, \beta)$ while respecting an availability threshold A_0 . The second model aims to determine the couple (T^*, k^*) which maximizes the stationary availability $A(T, k; \alpha, \beta)$ by respecting a budget limit L_0 . It is about two models of mixed not linear programming.

I have developed calculation procedures, exploiting software package MAPLE, to manage the different mathematical programming models (with and without restraint). These models are offered to serve as a basis for the development of new maintenance services strategies.

Avant-propos

Entreprendre des études représente toujours un défi. Il y a des hauts et des bas, des moments d'illumination et des moments où l'on se demande quoi faire. Ce mémoire symbolise, en quelque sorte, l'accomplissement de ce défi. Cette page est pour moi, l'occasion de remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné à chacun des moments passés à l'université Laval.

D'abord, j'aimerais remercier mon directeur de recherche, monsieur Daoud Ait-Kadi, pour m'avoir permis de travailler avec lui. Monsieur Ait-Kadi : merci d'avoir eu confiance en moi. Votre encadrement, votre soutien et votre amitié ont été fondamentaux pour moi, autant sur le plan professionnel que personnel. J'admire votre générosité et votre capacité d'aborder la connaissance, en montrant la complexité de façon si simple.

À ma femme et à mon fils, merci pour leur compréhension et leur soutien, qui ont été une source permanente de motivation. Merci pour autant d'heures qu'on n'a pas pu partager en famille.

Merci à mes parents pour leur soutien inconditionnel, à mes sœurs et leurs familles, pour être là et m'encourager.

Je tiens particulièrement à remercier mon amie, Véronique Marcotte, pour les longues heures de lecture à mon côté, en corrigeant mon français imparfait, mais aussi en m'encourageant à continuer.

Merci à chacune et chacun de mes collègues à l'université Laval, des gens ouverts et généreux avec qui je partage les séminaires, les groupes d'étude, ou tout simplement un café quand on a besoin de discuter.

*À Sebastian et Monica, dont leur soutien m'a
été indispensable.*

Table des matières

RÉSUMÉ.....	II
ABSTRACT	III
AVANT-PROPOS.....	IV
TABLE DES MATIÈRES.....	6
LISTE DE TABLEAUX	8
LISTE DE FIGURES	9
INTRODUCTION.....	10
1. PREMIER CHAPITRE : CADRE CONCEPTUEL.....	13
1.1 INTRODUCTION	13
1.2 LA FIABILITÉ D'UN SYSTEM	13
1.3 LA DISPONIBILITÉ D'UN SYSTÈME	18
1.3.1 Mesures de disponibilité.....	20
1.3.2 Autres mesures de disponibilité.....	22
1.4. CONCEPTS DE LA MAINTENANCE	25
1.4.1 Maintenabilité d'un système.....	25
1.4.2 Définition de Maintenance	26
1.4.3 Types de maintenance	27
1.4.4 Objectif de la fonction de maintenance	27
1.4.5 Approche de modélisation de la maintenance imparfaite.....	31
1.4.5.1 Modèle de (p-q)	32
1.4.5.2 Approche pt, qt - Modèle de Block.....	34
1.4.5.3 Approche utilisant des nouveaux facteurs d'amélioration	35
1.4.5.4 Approche utilisant l'âge virtuel	37
1.4.5.5 Approche basé sur les chocs et le dommage cumulé.....	39
1.4.5.6 Approche des facteurs (α, β).....	40
1.4.5.7 Approche de modelisation dans le cas d'un système multi composants	41
1.5 GÉNÉRALITÉS SUR LE PROCESSUS DE QUASI-RENOUVELLEMENT	42
1.5.1 Définition.....	42
1.5.2 Fonction de quasi-renouvellement	42
2. CHAPITRE II : PREMIER MODÈLE	
STRATÉGIE DE MAINTENANCE IMPARFAITE UTILISANT LE PROCESSUS DE QUASI RENOUVELLEMENT.	44
2.1 INTRODUCTION	44
2.2 DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE.....	44
2.3 NOTATIONS.....	46
2.4 VARIABLES DE DÉCISION	46
2.5 HYPOTHÈSES DE MODÉLISATION.....	46

2.6 EXEMPLE NUMÉRIQUE.....	49	
2.7 CONCLUSION.....	60	
3. CHAPITRE 3 : DEUXIÈME MODÈLE		
STRATÉGIE DE MAINTENANCE IMPARFAITE UTILISANT LE REMPLACEMENT PÉRIODIQUE DE TYPE BLOC		62
3.1 INTRODUCTION	62	
3.2 DÉVELOPPEMENT DU MODÈLE	64	
3.3 NOTATIONS.....	66	
3.4 VARIABLES DE DECISION	67	
3.5 HYPOTHÈSES DE MODELISATION.....	67	
3.6 EXEMPLE NUMÉRIQUE.....	70	
3.7 CONCLUSION	75	
CONCLUSION GÉNÉRALE	76	
BIBLIOGRAPHIE	77	
ANNEXE A : CALCULS POUR LE MODÈLE 1	83	
ANNEXE B : CALCULS POUR LE MODÈLE 2	89	

Liste de tableaux

Table 1.0- Relations entre les quatre caractéristiques $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ et $r(t)$	17
Table 1.1- Paramètres d'importance dans un processus de quasi-renouvellement	42
Table 2.0-Valeurs de l , k et t par rapport a un niveau de disponibilite requis.....	55
Table 2.1-Valeurs de a , k et t par rapport a une condition de coût requis.	58
Table 2.2-Valeurs de u , d , par rapport aux valeurs de k et t	59
Table 3.0- Valeurs de l , k et t par rapport a un niveau de disponibilite requis.....	72

Liste de figures

Figure 1.0- Fonction de fiabilité.....	14
Figure 1.1- Allure de la fonction de distribution $f(t)$	14
Figure 1.2- Allure du taux de panne.....	16
Figure 1.3- Processus de détermination de $f(t)$ à partir de données disponibles.....	18
Figure.1.4- Grandeurs associées à la mesure de la disponibilité.....	19
Figure.1.5-Système cyclique.....	22
Figure.1.6-Expressions du MTBF et MTTR.....	26
Figure 1.7-Types de maintenance.....	27
Figure 1.8-Classification de la maintenance selon le degré de restauration du système.....	30
Figure 1.9-Influence de la maintenance parfaite, imparfaite et minimal sur le taux de panne.....	31
Figure 1.10- Approches de modélisation de stratégies de maintenance avec actions imparfaites.....	34
Figure 1.11- Profil de l'âge virtuel en fonction du temps d'opération.....	38
Figure 2.0-Schéma du modèle.....	45
Figure 2.1- Coût total de maintenance pour le couple (t, k) optimal.....	51
Figure 2.2- Disponibilité à l'optimum.....	52
Figure 2.3-Modèle d'optimisation du coût assujetti a une contrainte de disponibilité.....	54
Figure 2.4- Coût par rapport à la disponibilité (A) requis.....	56
Figure 2.5 Modèle d'optimisation de la disponibilité assujettie à une contrainte de budget.....	57
Figure 2.6 Disponibilite par rapport au cout requis.....	58
Figure 2.7- Valeurs de D et de U pour le couple $(k$ et $T)$	59
Figure 3.0-Modèle mathématique.....	65
Figure 3.1- Disponibilité correspondant au couple optimal (k, T)	71

Introduction

Dans ce mémoire on traite de la modélisation et de l'optimisation d'une stratégie de maintenance dite imparfaite (voir Wang et Pham [66]) pour un système dont les caractéristiques opératoires se dégradent avec l'âge et avec l'usage. Cette stratégie suggère qu'à chaque fois que le système tombe en panne, son âge s'est réduit d'une certaine valeur α et le temps pour effectuer une réparation imparfaite augmente d'une certaine fraction β . Également, dans cette stratégie le système sera remplacé préventivement soit à la panne suivante après la dernière réparation imparfaite k ou bien à un âge déterminé T . Ce type de stratégies a suscité, au cours de la dernière décennie, beaucoup d'intérêt dans le domaine de la recherche autant sur le plan fondamental qu'appliqué.

Nous nous sommes basés principalement sur les travaux de Sang-Chin et Chung-Ching et sur ceux de Wang et Pham pour développer deux nouveaux modèles d'optimisation qui intègrent les variables de décision T et k (variables qui définissent la stratégie), les coûts et les durées associées aux actions de maintenance préventive et corrective, les distributions de durées de vie et de réparation, les paramètres α et β inhérents au processus de quasi-renouvellement et enfin la limite budgétaire L_0 et le seuil de disponibilité requis A_0 .

Plusieurs modèles traitant de ce type de stratégies ont été proposés dans la littérature. Mentionnons, principalement, le modèle de Nakagawa et Shunji [46]. Le modèle suggère d'effectuer une réparation à la panne. Si la durée de réparation est supérieure à une durée fixée a priori, le système défaillant est remplacé par un système neuf. Le modèle permet de déterminer, analytiquement, la durée optimale de réparation. Cette durée est celle qui minimise le coût total moyen englobant les coûts de réparation et de remplacement par des systèmes neufs.

Yosef [75] propose un modèle d'optimisation de la maintenance qui tient compte des coûts sur tout le cycle de vie du système; Bruns [14] propose une stratégie qui permet de

sélectionner l'action de maintenance à entreprendre à la panne. Ce modèle a été conçu pour des systèmes dont le processus de dégradation est Markovien.

Kabak [31] propose un modèle d'optimisation de la disponibilité d'un système dont les durées de vie sont distribuées suivant une loi exponentielle et dont la durée de réparation est constante. Pour un nombre de cycles prédéterminé, le modèle fournit la variation de la disponibilité et permet d'obtenir le temps moyen de bon fonctionnement et le temps moyen de réparation qui minimisent le coût total d'exploitation du système. Le modèle permet d'effectuer une analyse de sensibilité.

Pour l'optimisation de la disponibilité des systèmes assujettis à différentes politiques de maintenance imparfaite, mentionnons principalement, les travaux de Chan et Downs [19], Natarajan et Subramanian [58], Chan et Shaw [17] et Zhao [76]. Wang et Pham [67] [68] se sont particulièrement intéressés au sujet de la disponibilité. Ils ont développé des modèles d'optimisation des coûts, pour différentes stratégies de maintenance dépendant de l'âge et de la durée d'utilisation du système. Wang et Pham [69] ont également développé des modèles d'optimisation de la disponibilité pour des systèmes multi composants.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la modélisation et à l'optimisation d'une stratégie de maintenance, dite imparfaite, pour un système dont les caractéristiques opérationnelles se dégradent avec l'âge et avec l'usage. On suppose que la distribution des durées de vie, des durées de réparation et de remplacement, ainsi que le taux de réduction de l'âge ou du taux de panne du système après chaque action de maintenance préventive imparfaite sont connus.

La méthodologie adoptée pour la réalisation de ce mémoire comprend l'analyse des plus récents travaux publiés sur les stratégies de remplacement préventif utilisant la maintenance imparfaite. L'accent a été mis sur les articles qui proposent des outils permettant de modéliser les stratégies de maintenance visant l'optimisation de la disponibilité sous des contraintes de budget, ou la minimisation du coût sous des contraintes de disponibilité.

Dans le premier chapitre, on présente les concepts de fiabilité, de disponibilité, de maintenance et des processus de quasi-renouvellement. Ces concepts sont exploités dans l'élaboration des stratégies de maintenance proposées dans ce mémoire. On s'est basé sur le travail d'Ait-Kadi [6] et des références bibliographiques publiées sur le sujet.

Les deuxième et troisième chapitres sont consacrés à la présentation des deux modèles proposés développés dans cette recherche. Pour chacun de ces modèles, nous rappelons les concepts théoriques et précisons les hypothèses de modélisation. Des résultats numériques obtenus à partir de chacun des modèles sont également présentés et commentés. Finalement, nous présentons une brève analyse des résultats obtenus et une conclusion générale assortie de quelques recommandations.

1. Premier Chapitre : Cadre Conceptuel

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous rappellerons les concepts de fiabilité, de disponibilité, de maintenance et des processus de quasi-renouvellement. Ces concepts seront exploités dans l'élaboration des stratégies de maintenance proposées dans ce mémoire. On se basera sur le travail d'Ait-Kadi [6] et des références bibliographiques publiées sur le sujet.

1.2 La fiabilité d'un system $R(t)$

La fiabilité est la probabilité que le système réalise la fonction pour laquelle il a été conçu, dans des conditions données et dans un intervalle de temps donné $[0, t]$.

Elle est définie comme suit :

$$\begin{aligned} R(t) &= P(x > t) \\ &= \int_t^{\infty} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.0)$$

Où x est la durée de vie du système, et $f(x)$ est la fonction de densité associée aux durées de vie du système ($\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$).

La fonction $R(t)$ est une fonction décroissante.

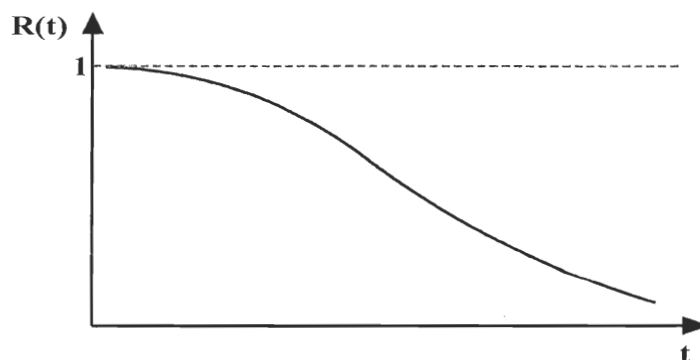


Figure 1.0- Fonction de fiabilité

La fonction de distribution de probabilité associée aux durées de vie est donnée par :

$$\begin{aligned} F(t) &= P(x \leq t) \\ &= \int_0^t f(x) dx \end{aligned} \quad (1.1)$$

La fonction $F(t)$ est une fonction croissante.

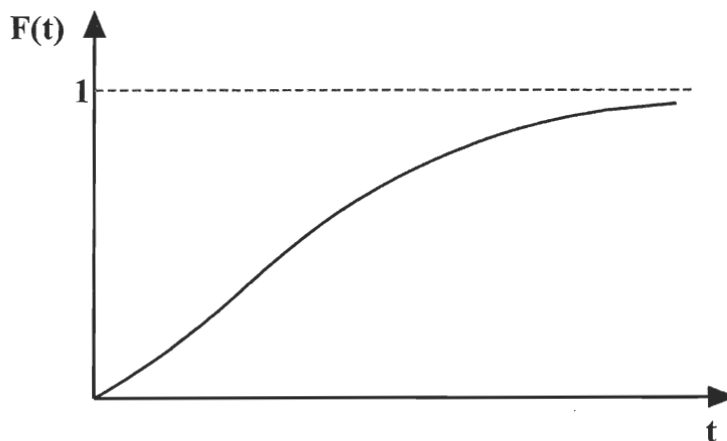


Figure 1.1- Allure de la fonction de distribution $F(t)$

Pour un système ne pouvant occuper qu'un des deux états (opération –hors d'usage) on a :

$$R(t) + F(t) = 1 \quad \text{et ce } \forall t \geq 0 \quad (1.2)$$

Une autre fonction aussi importante que les deux premières, est la fonction *taux de panne* $r(t)$. Cette fonction s'exprime comme suit :

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.3)$$

D'autre part, le taux de panne peut être déterminé à partir de l'une des trois grandeurs : $F(t)$, $R(t)$ et $f(t)$.

La figure 1.2 présente l'allure générale de taux de panne ainsi que les causes qui expliquent l'allure de chacun des tronçons de la courbe.

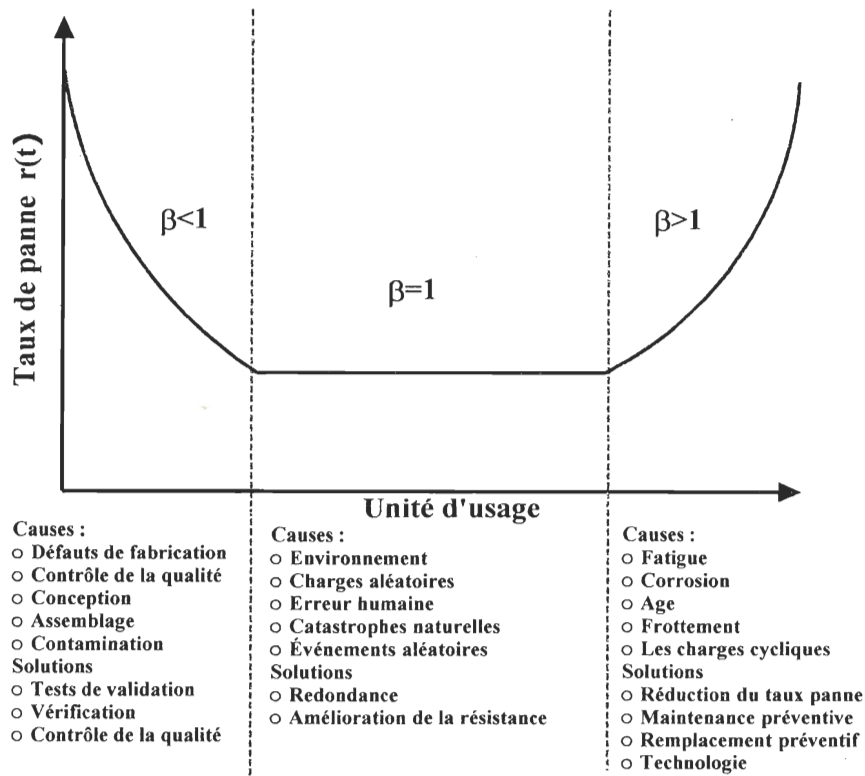


Figure 1.2- Allure du taux de panne (Ait-Kadi [6])

Dans la figure 1.2 on observe aussi l'allure de la fonction $r(t)$ selon les valeurs du paramètre β .

L'équation (1.3) devient :

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta}{\eta} \left[\frac{t - \alpha}{\eta} \right]^{\beta-1} \text{ pour } t > \alpha \quad (1.4)$$

Avec α le paramètre de position.

- Si $\beta < 1$: $r(t)$ décroît en fonction de t (où β est un paramètre de forme).
- Si $\beta = 1$: $r(t)$ est constamment égal à $\frac{1}{\eta}$ (où η est un paramètre d'échelle).
- Si $\beta > 1$: $r(t)$ croît en fonction du temps.

Il importe de mentionner que la loi de dégradation d'un système est complètement définie par la connaissance d'une des quatre caractéristiques $R(t)$, $F(t)$, $r(t)$ ou $f(t)$. Le tableau 1.0 résume les relations entre les différentes fonctions

Table 1.0- Relations entre les quatre caractéristiques $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ et $r(t)$

	$f(t)$	$F(t)$	$R(t)$	$r(t)$
$f(t)$	-	$\int_0^t f(x)dx$	$\int_t^\infty f(x)dx$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$
$F(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	-	$1 - F(t)$	$\frac{\frac{dF(t)}{dt}}{1 - F(t)}$
$R(t)$	$-\frac{dR(t)}{dt}$	$1 - R(t)$	-	$-\frac{\frac{dR(t)}{dt}}{R(t)}$
$r(t)$	$r(t)e^{-\int_0^t r(x)dx}$	$1 - e^{-\int_0^t r(x)dx}$	$e^{-\int_0^t r(x)dx}$	-

Ainsi, commençant par exemple $f(t)$ on peut déduire :

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx; R(t) = \int_t^\infty f(x)dx \text{ et } r(t) = \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$$

La figure (1.3) représente les processus déterminateurs de paramètres de fiabilité.

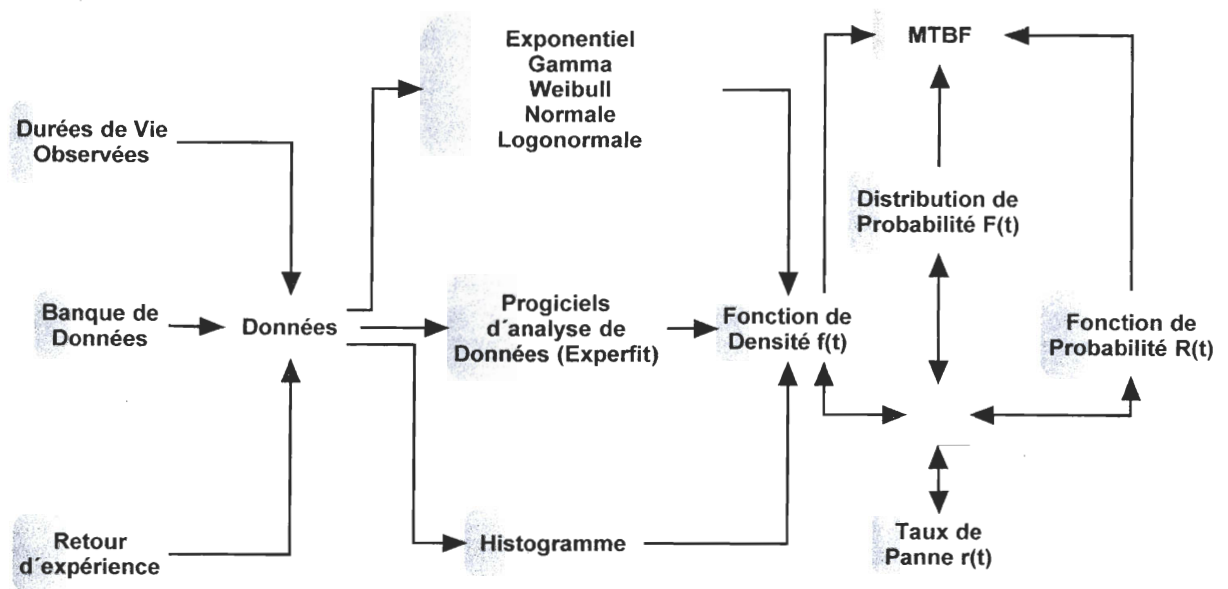


Figure 1.3- Processus de détermination de $f(t)$ à partir de données disponibles

1.3 La disponibilité d'un système

Selon la norme **NFX60-500** (Terminologie relative à la fiabilité, maintenabilité, disponibilité -octobre 1988), la disponibilité est l'aptitude d'une entité à être en état d'accomplir une fonction requise dans des conditions données, à un instant donné ou pendant un intervalle de temps donné, en supposant que l'approvisionnement des moyens extérieurs nécessaires de la maintenance soit assuré.

La disponibilité est directement influencée par le temps de diagnostic, par le temps de réparation et par le temps de détection ou de localisation de la panne. Pour certains systèmes complexes, la localisation du défaut n'est pas évidente.

Les grandeurs associées à la mesure de la disponibilité sont :

- Le temps moyen de bon fonctionnement (MTBF : Mean Time Between Failure).

- Le temps moyen jusqu'à la première défaillance (MTTF : Mean Time to First Failure).
- La moyenne des temps techniques de réparation (MTTR : Mean Time To Repair).
- La proportion de temps moyen d'indisponibilité (MDT: Mean Down Time).
- Le temps de fonctionnement après réparation (MUT : Mean Up-Time).

Le MUT est différent du MTFF, car lors d'une remise en service, tous les composants défaillants ne sont pas remis à neufs nécessairement. La figure 1.4 situe les différents temps qui interviennent dans l'évaluation de la disponibilité.

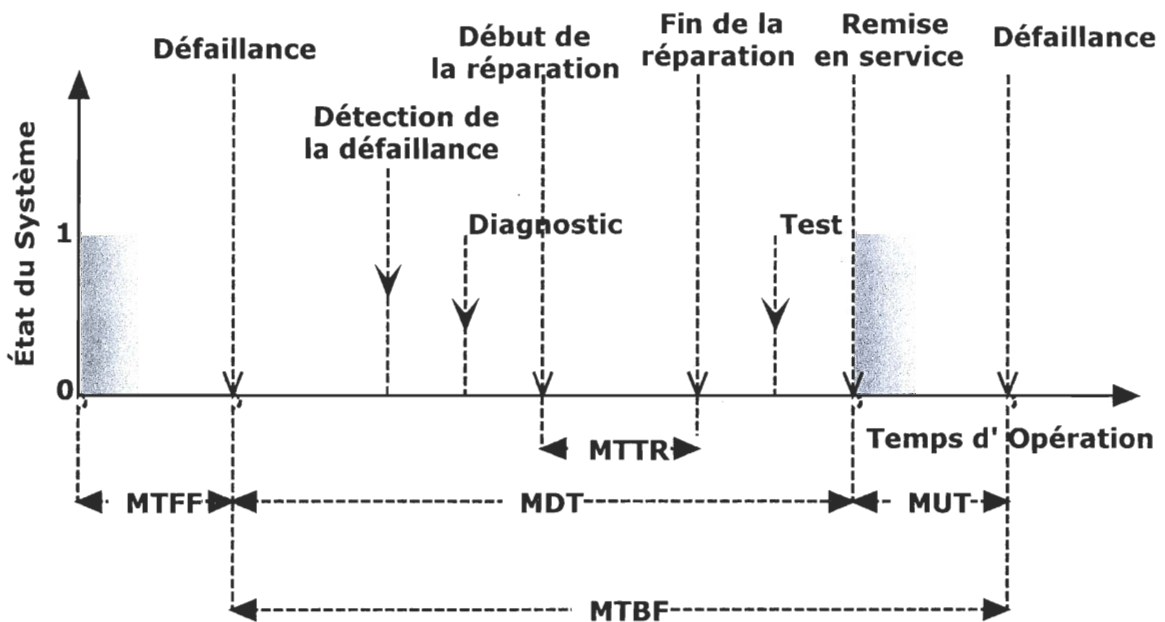


Figure.1.4- Grandeurs associées à la mesure de la disponibilité

1.3.1 Mesures de disponibilité

On distingue trois mesures de disponibilité :

La disponibilité instantanée $A(t)$:

C'est la probabilité que le système soit en état d'opération à l'instant (t) et ce, indépendamment des états précédents. Elle est définie comme suit :

$$A(t) = P\{X(t) = 1\} = E[X(t)] \quad (1.5)$$

Où

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si le système est en opération à l'instant } (t) \\ 0 & \text{Si le système est hors d'usage à l'instant } (t) \end{cases}$$

La disponibilité dans un intervalle $[0, T]$ ($\overline{AV}(T)$): Est donnée par :

$$\overline{AV}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt \quad (1.6)$$

La disponibilité stationnaire ou "Uptime Ratio" (UTR):

C'est la proportion du temps moyen de bon fonctionnement, sur un horizon infini. Elle est aussi connue comme la disponibilité asymptotique :

$$UTR = \lim_{T \rightarrow \infty} (\overline{AV}(T)) \quad (1.7)$$

Si $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \alpha$, on peut montrer que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} AV(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(t) dt = \alpha \quad (1.8)$$

Alors,

$$UTR = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) \quad (1.9)$$

On peut montrer, qu'en régime permanent,

$$UTR = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR} \quad (1.10)$$

Ou encore:

$$UTR = \frac{1}{1 + \frac{MTTR}{MTBF}} \quad (1.11)$$

La proportion de temps où le système n'est pas disponible DTR (Down Time Ratio) est donnée par :

$$DTR = 1 - UTR \quad (1.12)$$

$$DTR = \frac{MTTR}{MTBF + MTTR} \quad (1.13)$$

S'il est possible de distinguer les temps actifs de réparation, des intervalles d'inactivité, dus au support logistique, on pourrait réécrire l'expression du UTR de la façon suivante [37] (voir figure 1.4) :

$$UTR = \frac{MTTF}{MTTF + MTTR + MTTS} \quad (1.14)$$

Par définition la MTTF est donnée par:

$$MTTF = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad (1.15)$$

Ces relations supposent que le système fonctionne d'une manière continue.

1.3.2 Autres mesures de disponibilité

Disponibilité par cycles multiples

Dans le cas où le système fonctionne d'une manière cyclique, alors la disponibilité d'un tel système s'écrit :

$$A(n) = E \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n (X_i + Y_i)} \right\} \quad (1.16)$$

Où X_i est le temps d'opération, Y_i est le temps de réparation et n est le nombre de cycles. On a affaire à un processus de renouvellement avec alternance. (Alternating Renewal Process) tel que défini par Kabak [31]

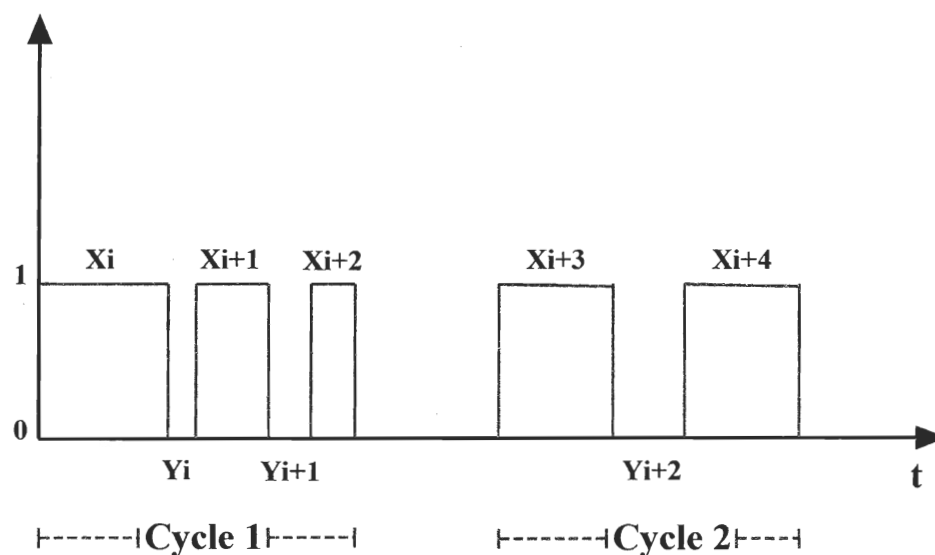


Figure.1.5-Système cyclique

Il s'agit d'équipements qui n'opèrent pas de manière continue. À titre d'exemple nous pouvons citer, les générateurs électriques utilisés dans de grandes embarcations. Lorsque ces dernières quittent le port, le premier générateur est en fonctionnement (1). Après quelques heures, ce générateur est éteint et le deuxième générateur se met en marche(2). On alterne ainsi les générateurs.

Disponibilité dans le cas d'une sollicitation aléatoire (Lee [36])

Considérons un système réparable qui doit accomplir certaines tâches qui se présentent de façon aléatoire dans un processus déterminé. Les exemples de ce type de disponibilité c'est le cas par exemple :

- Des systèmes de contrôle de trafic aérien.
- D'un véhicule militaire qui doit prendre part à la bataille.
- D'une machine distributrice de boissons.

La disponibilité pour ce type de systèmes est donnée par :

$$A(t_1, t_2, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k \left[\frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \exp[-(\alpha + \beta) \cdot (t_i - t_{i-1})] \right] \quad (1.17)$$

Où (t_1, t_2, \dots, t_k) sont les instants où les demandes arrivent et α, β sont les paramètres d'une distribution exponentielle pour des systèmes (on-off)

Disponibilité pour une mission de durée $(MA_0(T_0, t_f))$ Birolini [10]

La disponibilité de mission représente une bonne mesure d'efficacité pour les applications, où un certain temps de réparation est toléré.

Cette disponibilité permet d'affirmer que, dans une mission, la probabilité que pendant le temps total d'opération T_0 , chaque panne qui se présente, pourra être réparée dans un temps déterminé t_f .

Pour calculer cette disponibilité on considère tous les cas de défaillances possibles 1,2, ..., de plus, on suppose que le système continue d'opérer jusqu'à la fin de la mission, pour arriver à T_0 .

Alors,

$$MA_0(T_0, t_f) = 1 - F(T_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n(T_0) - F_{n+1}(T_0))(G(t_f))^n \quad (1.18)$$

Où, $F_n(T_0) - F_{n+1}(T_0)$ est la probabilité que pendant le temps total d'opération on ait n défaillances et $G(t_f)$ corresponde à la fonction de distribution associée aux durés de réparation.

Si nous posons $F_1(t) = F(t)$ pour $t \leq T_0$ et $(G(t_f))^n$ probabilité que tous les temps des n réparations sont inférieures à t_f ; et en considérant le cas particulier dans lequel le taux de panne est constant, nous obtenons:

$$F_n(T_0) - F_{n+1}(T_0) = \frac{(\lambda T_0)^n}{n!} e^{-\lambda T_0} \quad (1.19)$$

Si on remplace (1.21) dans (1.20) on obtient:

$$MA_0(T_0, t_f) = e^{-\lambda T_0(1-G(t_f))} \quad (1.20)$$

1.4. CONCEPTS DE LA MAINTENANCE Ait-Kadi et Najahi [5] [44]

1.4.1 Maintenabilité d'un système

La maintenabilité est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est accomplie dans des conditions données, avec des procédures et des moyens prescrits.

L'aptitude d'un équipement à être entretenu facilement peut s'exprimer, entre autres, par un MTTR faible. Cet indicateur représente le temps moyen d'immobilisation entre la détection et la remise en service de l'équipement.

Si on considère que T_r est la variable aléatoire associée à la durée de réparation et que $h(\cdot)$ est sa fonction de densité alors, la probabilité que cette durée de vie soit comprise entre t et $(t + \Delta t)$ est donnée par :

$$h(t)\Delta t = Pr\{t < T_r \leq (t + \Delta t)\} \quad (1.21)$$

La fonction de distribution associée aux durées de réparation est :

$$H(t) = Pr\{T_r \leq t\} = \int_0^t h(x)dx \quad (1.22)$$

Donc, les expressions du MTBF et du MTTR :

$$MTBF = \int_0^{\infty} t.f(t)dt = \int_0^{\infty} R(t)dt \quad (1.23)$$

Et

$$MTTR = \int_0^{\infty} t.h(t)dt \quad (1.24)$$

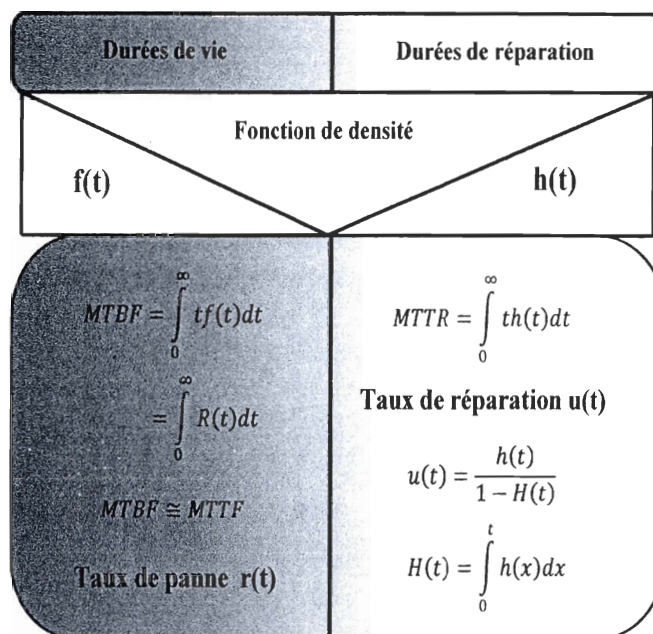


Figure.1.6-Expressions du MTBF et MTTR

1.4.2 Définition de Maintenance

Selon la norme NF X 60-010 (Document énonçant les modes opératoires, les ressources et la séquence des activités liées à la maintenance d'un bien-1994), la maintenance peut être définie comme l'ensemble des moyens et de leur mise en œuvre destiné à maintenir ou rétablir un bien dans un état, ou dans des conditions données de sûreté de fonctionnement, pour accomplir une fonction requise. Ces activités sont une combinaison d'activités techniques, administratives et de management. C'est parce que les systèmes se dégradent que l'on fait appel à la maintenance.

La maintenance ne se limite pas seulement aux actions de contrôle et aux inspections, mais s'étend aux ajustements, aux remplacements préventifs et aux exigences pour la gestion des pièces de recharge nécessaires.

1.4.3 Types de maintenance Ait-Kadi et Najahi [5] [44]

Les programmes de maintenance sont élaborés en fonction des modes de défaillances, des moyens disponibles pour assurer la maintenance et des conséquences des défaillances. On distingue trois types de maintenance (figure 1.7)

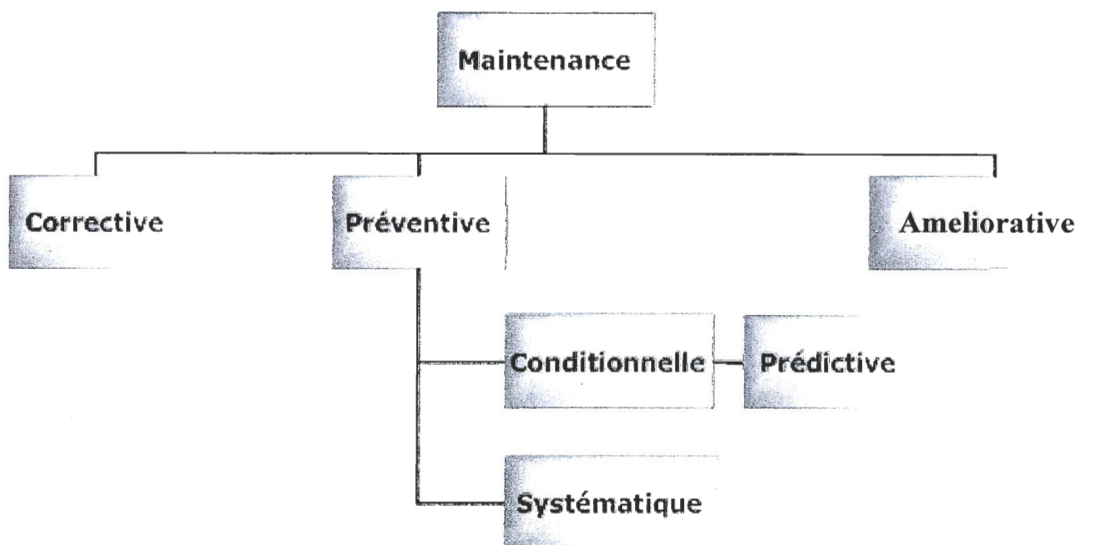


Figure 1.7-Types de maintenance

1.4.4 Objectif de la fonction de maintenance

L'objectif primaire du service de maintenance est d'augmenter la disponibilité de l'outil de production et ce à un coût global minimal. Ainsi, les activités de maintenance doivent être optimisées en fonction de critères économiques, techniques, de sécurité, etc. Le service de maintenance doit se doter de moyens pour réaliser les mandats suivants :

- Contribuer à assurer la production prévue tout en respectant les délais et les plans de production. Pour ce faire, la maintenance doit garantir la disponibilité des équipements en planifiant les interventions et en utilisant des moyens d'exécution appropriés pour minimiser le temps d'immobilisation de l'outil de production. Dans ce contexte, les responsabilités de la maintenance comprennent les améliorations

apportées aux équipements pour accroître la productivité en augmentant la fiabilité, la disponibilité et la maintenabilité des équipements.

- Contribuer à la rentabilité des opérations de l'entreprise en minimisant les coûts de la maintenance. Pour cela, la maintenance doit établir des devis, analyser les coûts de maintenance, faire des choix judicieux des méthodes de remplacement et des interventions pour éliminer les gaspillages.
- Contribuer à la maîtrise des risques d'accidents qui peuvent se produire lors des interventions de maintenance. Pour cela, les opérations de maintenance sont analysées pour déterminer le niveau de compétence des intervenants et les précautions à prendre avant d'intervenir. Ainsi, des modifications sont apportées aux équipements et des mesures de sécurité sont formalisées, telles que les méthodes de travail, les consignes de sécurité, les permis de feu, etc.
- Contribuer à la préservation de l'environnement en s'assurant du respect des normes et règlements sur le contrôle des polluants, des rejets de contaminants, etc.

Les objectifs de la maintenance peuvent être résumés dans les points suivants :

- Prolonger la durée de vie utile des équipements et ce au plus bas coût possible ;
- Assurer la qualité et la quantité de produits fabriqués (ou services) tout en respectant les délais ;
- Optimiser les actions de maintenance ;
- Contribuer à la création et au maintien de la sécurité au travail ;
- Préserver et respecter l'environnement.

Les principales tâches associées à la fonction maintenance sont :

- L'organisation de l'atelier de maintenance ;
- La mise en place et la gestion des méthodes de travail ;
- Le suivi technique des installations ;
- La gestion du portefeuille des travaux ;
- La gestion des pièces de rechange ;
- La gestion des outillages et appareils de mesure ;
- La gestion des ressources humaines (recrutement, formation, etc.) ;
- La gestion des contrats de sous-traitance et de partenariats avec les fournisseurs ;
- L'exécution et le contrôle des activités de maintenance.

Pour Wang et Pham [70] la maintenance peut être classée selon le degré de restauration d'un système ou d'une partie du système (voir figure 1.8) :

- Maintenance parfaite : L'action de maintenance restaure le système à l'état neuf (as good as new).
- Maintenance minimale : L'action de maintenance ramène le système à l'état d'opération sans affecter son taux de panne (as bad as old).
- Maintenance imparfaite : L'action de maintenance ne restaure pas le système à l'état initial (as good as new) mais le rajeunit. Normalement un système soumis à ce type de maintenance est restauré à l'état entre comme neuf et mauvais comme usagé.

Une action de maintenance imparfaite peut soit maintenir le taux de défaillance du système (réparation minimal) ou bien, le dégrader d'avantage. La figure 1.8 distingue les impacts possibles d'une action de maintenance.

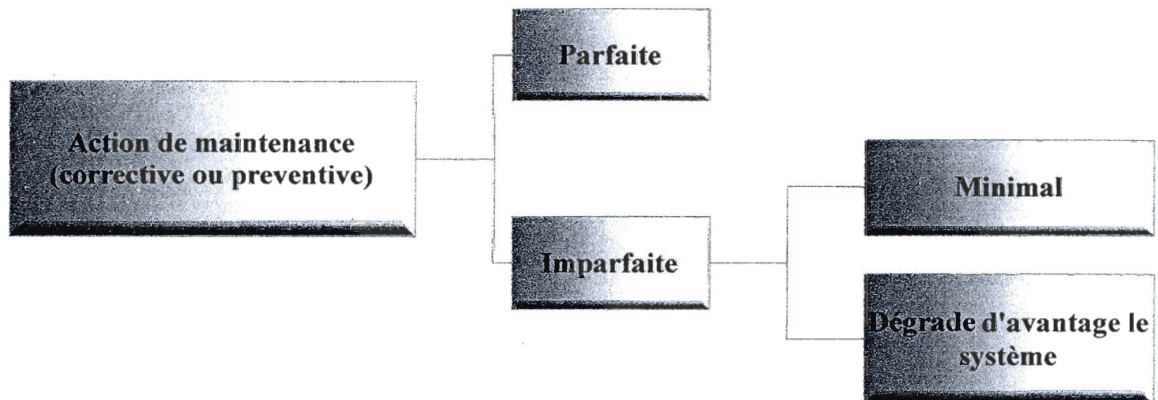


Figure 1.8-Classification de la maintenance selon le degré de restauration du système

Selon Brown et Proschan [13] une réparation imparfaite peut résulter :

- De la réparation d'une mauvaise pièce ;
- De la réparation partielle de la composante responsable de la défaillance ;
- De la réparation complète ou partielle de la composante responsable de la défaillance à de composantes adjacentes;
- De l'évaluation incorrecte de l'inspection d'un élément ou d'un système ;

D'autres causes ont été mentionnées par Nakagawa et Yasui [49], notamment :

- Les défaillances et défauts non détectés lors d'une inspection ou de la maintenance;
- Les erreurs humaines (mauvais ajustements, procédures incorrectes ou incomplètes) ;
- L'emploi de pièces de rechange de mauvaise qualité ou défectueuses.

Les politiques de maintenance basées sur des inspections programmées ou projetées, dépendent de l'âge du système. De l'âge, dépendra l'intervalle de temps entre les inspections. Plus l'âge est avancé, plus l'intervalle d'inspection sera petit.

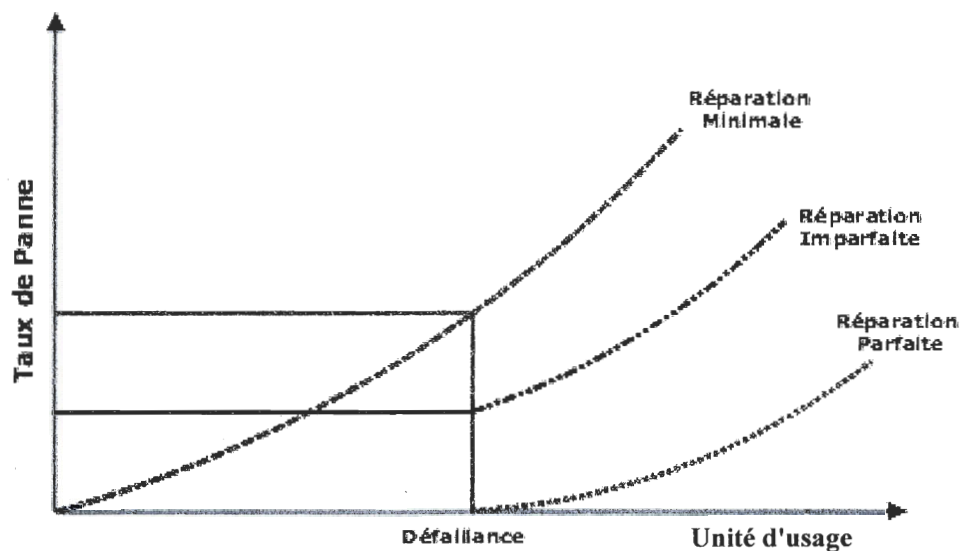


Figure 1.9-Influence de la maintenance parfaite, imparfaite et minimal sur le taux de panne

1.4.5 Approche de modélisation de la maintenance imparfaite

Plusieurs approches sont proposées dans la littérature pour modéliser des stratégies de maintenance dont les actions sont soit parfaites ou imparfaites.

Dans ce qui suit, nous présenterons les principales approches publiées dans la littérature (Voir figure 1.10)

1.4.5.1 Modèle de (p-q) de Nakagawa [47]

Selon Nakagawa [47] après chaque action de maintenance préventive, il existe deux possibilités : que l'unité soit ramenée à un état neuf (maintenance préventive parfaite) ou que l'unité soit ramenée à l'état précédant la maintenance (maintenance préventive minimale).

L'auteur appelle p ($0 \leq p \leq 1$) à la probabilité d'une maintenance préventive parfaite et q (avec $q = 1 - p$), à la probabilité d'une maintenance minimale. Ainsi, ces deux types de maintenance sont deux cas particuliers de la maintenance préventive imparfaite qui ont lieu lorsque :

$p = 1$ pour le premier cas (maintenance préventive parfaite) ou

$p = 0$ pour le deuxième cas (maintenance préventive minimale)

D'autre part, Brown et Proschan [13] malgré qu'ils reprennent la même approche, ils se distinguent de Nakagawa car ils parlent plutôt de maintenance corrective imparfaite. Ces auteurs considèrent que le temps est négligeable et ils définissent la distribution de durée de vie d'un système assujéti à une maintenance corrective de la façon suivante :

Si $F(\cdot)$ désigne la distribution de la probabilité associée aux durées de vie, $r(\cdot)$, la fonction taux de panne et p la probabilité que l'action de maintenance soit parfaite, alors, la distribution de durées de vie devient :

$$F_p(t) = 1 - (1 - F(t))^p$$

Et son taux de défaillance correspondant est égal à $r_p(t) = p \times r(t)$, où $r_p = \frac{f_p}{R_p}$, et $f_p = \frac{dF_p}{dt} = p \cdot f(1 - F)^{p-1}$, $R_p = 1 - F_p = (1 - F)^p$, alors son expression de taux de panne deviens :

$$r_p = p \times r$$

En utilisant le résultat précédent, Fontenot et Proschan [26] et Wang et Pham [64] obtiennent des politiques pour la maintenance imparfaite optimale de type périodique pour un système considéré comme une seule entité.

Lim [40] a étendu le travail de Brown et de Proschan en proposant un nouveau modèle de réparation imparfaite bayésienne, où la probabilité de réparation parfaite p , est considérée comme une variable aléatoire.

En assumant que p suit à priori une distribution $\Pi(p)$, on dérive la distribution associée aux durées entre deux réparations successives parfaites et ses taux de panne correspondants.

Li et Shaked [38] présentent un modèle de maintenance avec réparation imparfaite. Ils ont déterminé le nombre des défaillances par différentes stratégies de maintenance préventive. L'approche bayésienne suppose que les paramètres sont distribués suivant une loi de probabilité à priori.

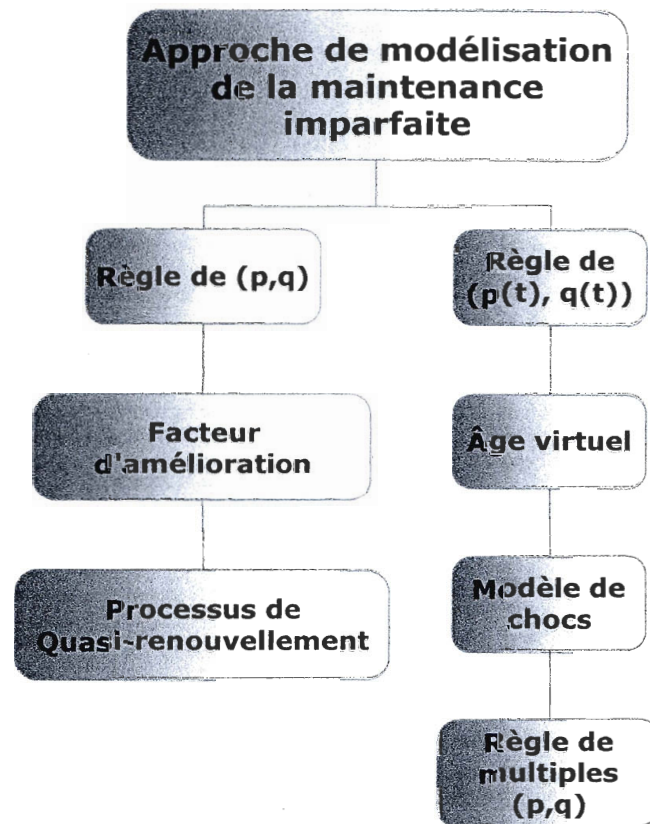


Figure 1.10- Approches de modélisation de stratégies de maintenance avec actions imparfaites

1.4.5.2 Approche $p(t), q(t)$ - Modèle de Block

Le modèle de Brown et de Proschan [13] a été étendu par Block et al. [11] en considérant que p et q dépendent de l'âge du système à maintenir.

$$q(t) = 1 - p(t) \quad \forall t > 0 \quad (1.25)$$

La distribution modifiée $F_p(\cdot)$ des durées de vie, s'écrit :

$$F_p(t) = 1 - \exp\left(\int_0^t \frac{p(x)}{1 - F(x)} dx\right) \quad (1.26)$$

Et le taux de panne correspondant est donné par :

$$r_p(t) = \frac{\frac{d}{dt}(F_p(t))}{1 - F_p(t)} = p(t)r(t) \quad (1.27)$$

Block et al. [12] proposent une politique générale de maintenance préventive, dépendante de type âge, où ils remplacent l'unité fonctionnelle quand celle dernière atteint un âge (T). Si ce composant tombe en panne à un âge $y < T$, il est soit remplacé par un neuf, avec une probabilité $p(t)$ soit il subit une réparation minimale qui est effectuée avec une probabilité $q(t)$.

Le coût de la n ième réparation minimale est une fonction $c_i(y)$, qui dépend de l'âge y et du nombre de réparations. Le processus se régénère après chaque remplacement par du neuf.

Les modèles précédents assumaient que la durée de vie d'une réparation est négligeable. Iyer [27] propose une stratégie pour une réparation imparfaite de remplacement type âge avec réparation imparfaite et de durée de réparation non négligeable.

Makis et Jardine [42] ont proposé une stratégie de maintenance imparfaite que tient compte à la fois de l'âge (t) du système à la panne et du nombre de défaillances.

1.4.5.3 Approche utilisant des nouveaux facteurs d'amélioration

Malik [43] est le premier à introduire le concept du facteur d'amélioration dans la modélisation des stratégies de maintenance imparfaite. Selon Malik, la maintenance réduit l'âge du composant d'un facteur α défini à l'avance.

Si $\alpha = 0$ Réparation minimale

Si $\alpha = 1$ Remise à neuf

Le degré d'amélioration du taux de panne correspond au facteur d'amélioration α .

Malik suppose que l'augmentation de l'âge ou du temps d'usage fait en sorte que, les systèmes requièrent une maintenance plus fréquente. Les intervalles successifs de maintenance préventive diminuent alors pour maintenir le taux de panne du système à un niveau désiré ou en-dessous. Il propose un algorithme qui permet de calculer les intervalles successifs de maintenance préventive.

Lie et Chun [39] proposent un modèle mathématique pour déterminer les intervalles de maintenance préventive successifs. Malik soutient que le jugement d'un expert était toujours nécessaire pour calculer le facteur d'amélioration.

Suresh et Chaudhuri [60] en utilisant les ensembles flous et le facteur d'amélioration ont proposé un modèle de maintenance préventive (PM) qui permet de garantir un niveau de fiabilité ou un taux de panne acceptable.

En utilisant le facteur d'amélioration et en considérant un horizon de planification fini, Jayabalan et Chaudhuri [30] introduisent un algorithme de ramification ou de bifurcation pour diminuer le coût total moyen pour un modèle de maintenance visant maintenir un seuil de fiabilité donné. Ainsi, ils parlent de politiques de maintenance parfaites pour un système à l'augmentation le temps moyen de fonctionnement et au taux de panne fixe.

Chan et Shaw [17] suggèrent que le taux de panne soit réduit après chaque action de maintenance préventive et, cette réduction dépend de l'âge du système et d'actions de maintenances préventives effectuées. Ils proposent deux types de réductions du taux de panne :

- Réduction constante du taux de panne : après chaque action de maintenance préventive, le taux de panne $r(t)$ est réduit d'une quantité constante Δr .

- Réduction proportionnelle du taux de panne: Après chaque maintenance préventive, le taux de panne est réduit proportionnellement à la valeur du taux de panne que le système avait avant la maintenance préventive.

Doyen et Gaudoin [24] introduisent le concept de l'intensité de défaillance ; le degré de régularité à laquelle se présentent la panne avant de la première maintenance correctif est une fonction continue dans le temps. L'effet de réparation est caractérisé par le changement induit en intensité à la défaillance, l'effet de la réparation est caractérisé par une réduction de l'intensité de la défaillance.

1.4.5.4 Approche utilisant l'âge virtuel (figure 1.11)

Kijima et al. [32] ont développé un modèle de réparation imparfaite en utilisant le concept de l'âge virtuel d'un système réparable. Si le système à l'âge virtuel $V_{n-1} = y$ immédiatement après la $(n - 1)^{\text{ième}}$ réparation, le $n^{\text{ième}}$ instant de défaillance X_n est tel

$$Pr\{X_n \leq x / V_{n-1} = y\} = \frac{F(x + y) - F(y)}{1 - F(y)} \quad (1.28)$$

Où $F(x)$ est la fonction de distribution associée aux durées de vie du système.

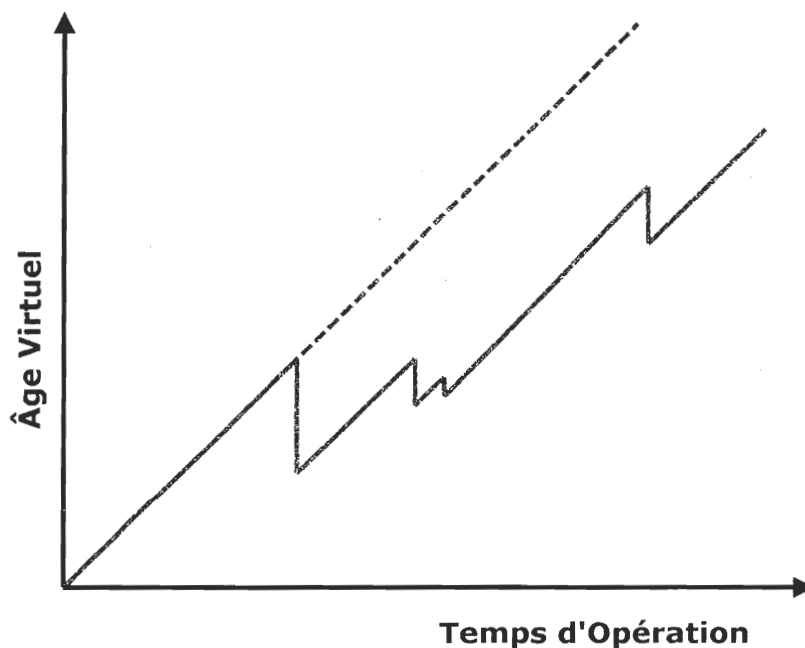


Figure 1.11- Profil de l'âge virtuel en fonction du temps d'opération

Si V_{n-1} est l'âge du système à la $(n-1)^e$ réparation et si la n réparation survient après X_n unités de temps de fonctionnement, alors, l'âge du V_n du système après la n^{ieme} réparation est donné par :

$$V_n = V_{n-1} + A_n X_n \quad (1.29)$$

$$0 \leq A_n \leq 1,$$

$A_n = 0$, correspond à la réparation parfaite

$A_n = 1$, correspon à une réparation minimale à la panne

Kijima [33], propose une extension du modèle précédent. Il propose le modèle suivant :

$$V_n = A_n(V_{n-1} + X_n) \quad (1.30)$$

La réduction porte sur l'âge du système à la panne et pas seulement sur X_n

Uematzu et Nishida [61] considèrent un modèle plus général, où ils incluent les deux modèles précédents de Kijima comme cas particuliers. Ils obtiennent quelques propriétés de basse associées au processus de défaillance.

1.4.5.5 Approche basé sur les chocs et le dommage cumulé

Pour les systèmes assujettis à des chocs, la défaillance se produit lorsque le dommage cumulé (chaque choc cause un dommage d'intensité aléatoire) excède un certain seuil.

Kijima et Nakagawa proposent dans [34], une stratégie de maintenance périodique imparfaite pour un système assujetti à des chocs dont l'occurrence et l'intensité sont aléatoires.

La maintenance préventive est imparfaite dans le sens où chaque action réduit le niveau de dommage de $100(1 - b)\%$, ($0 \leq b \leq 1$) du dommage total. Si $b = 1$ la maintenance préventive est minimale, et si $b = 0$ l'action de maintenance préventive coïncide avec la maintenance préventive parfaite.

Kijima et Nakagawa [35], proposent un autre modèle de chocs avec une politique de maintenance préventive séquentielle, en émettant l'hypothèse que cette maintenance est imparfaite dans la mesure où la quantité de dommages après la $k^{\text{ième}}$ maintenance préventive devient $b_k Y_k$ avec Y_k la quantité de dommage avant la $k^{\text{ième}}$ maintenance préventive. Cela signifie que la $k^{\text{ième}}$ maintenance préventive réduit la quantité Y_k de dommages à $b_k Y_k$, où b_k s'appelle facteur d'amélioration.

Ils supposent en outre que le système est soumis aux chocs qui arrivent selon un processus de Poisson. $p(z)$, est la probabilité qu'un choc d'intensité Z provoque la défaillance du système.

Dans ce modèle la maintenance préventive est effectuée à des intervalles fixes x_k pour $k = 1, 2, \dots, N$. Le système est remplacé à la $n^{\text{ième}}$ défaillance. Une réparation minimale est effectuée pour les $(n-1)^{\text{e}}$ défaillance.

Finkelstein [25] considère un système soumis à des chocs dont l'occurrence et l'intensité sont aléatoires avec une probabilité $p(z)$ dépendant de l'âge du système.

1.4.5.6 Approche des facteurs (α, β)

Wang et Pham, [62][67], ont construit un modèle reposant sur l'hypothèse suivante : Si $\{Y_i\} \forall i \geq 1$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors les durées inter-défaillances sont définies par :

$$X_i = \alpha^{i-1} Y_i, \forall i \geq 1$$

Où α est un paramètre réel strictement positif. Le taux de panne est défini comme suit :

$$\lambda_t = \frac{1}{\alpha^{N_t}} \lambda \left(\frac{t - T_{N_t}}{\alpha^{N_t}} \right)$$

L'efficacité de la maintenance dépend ici du paramètre α au sens où, selon la valeur prise par α , les durées inter-défaillances seront de plus en plus grandes, de plus petites ou de même loi :

- $\alpha > 1$: la maintenance est plus que parfaite au sens où le système après les actions de maintenance est meilleur que neuf ($X_{i+1} > X_i$). C'est ce qui arrive par exemple quand on remplace des composants usages par des composants neufs issus d'une technologie plus performante. Dans ce cas, la fiabilité du système croît.
- $\alpha = 1$: la maintenance est parfaite.
- $\alpha \in]0, 1[$: les X_i sont de plus en plus petits, donc la fiabilité du système décroît; on sait simplement que l'efficacité de la maintenance est moins bonne que dans le cas précédent.

Wang et Pham [70] ont travaillé sur l'optimisation de la politique de maintenance, le but est de planifier les dates de maintenances préventives de façon à optimiser les coûts assujettis à des contraintes de disponibilité, Cela ne peut se faire si les paramètres du modèle α et λ , sont supposés connus.

Wang et Pham [67] sont allés encore plus loin, en suggérant d'une part que le temps de réparation n'est pas négligeable et que le temps de la réparation suivante sera augmenté d'un multiple β par rapport au temps de la réparation précédente avec $\beta \geq 1$. En d'autres termes, le temps de réparation augmente chaque fois avec le nombre de réparations. Yang et Lin [74] ont appliqué cette méthode.

1.4.5.7 Approche de modélisation dans le cas d'un système multi composants avec dépendance stochastique

Shaked et Shanthikumar [53], introduisent le concept multi-varié de la maintenance imparfaite. Ils considèrent la stratégie de maintenance imparfaite des systèmes dont les composants ont des durées de vie dépendant et sont soumis à des réparations imparfaites s'ils ne sont pas changés.

Pour chaque composant la réparation est imparfaite conformément à la règle de (p, q) . En supposant que n composants du système commencent à fonctionner en même temps $t = 0$ et que seulement une à la fois puisse tomber en panne.

Ils établissent la distribution des temps des défaillances suivant des composants de fonctionnement après une réparation minimale ou parfaite. Ils ont aussi dérivé la densité des temps de vie qui résulte des composants et d'autres quantités statistiques d'intérêt, à partir desquels on peut obtenir la distribution des temps de vie du système. Sheu et Griffith [54] ont étendu ce travail.

1.5 GÉNÉRALITÉS SUR LE PROCESSUS DE QUASI-RENOUVELLEMENT (Wang et Phan [65])

1.5.1 Définition

Étant donné $\{N(t), t > 0\}$ un processus continu et X_n qui représente le temps entre le $(n - 1)^{\text{ième}}$ et le $n^{\text{ième}}$ événement de ce processus avec $n \geq 1$. En considérant la séquence des variables aléatoires non négatives $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$, on peut dire, que ce processus est un processus de quasi-renouvellement, avec paramètre α et premier intervalle d'arrivée X_1 , avec $X_1 = Z_1, X_2 = \alpha Z_2, X_3 = \alpha^2 Z_3, \dots$, où Z_1 est (i.id), et $\alpha > 0$ (constante).

Si $\alpha = 1$, le processus de quasi-renouvellement sera un processus de renouvellement traditionnel.

Pour ce processus de quasi-renouvellement, Wang et Phan dans [65], obtiennent les valeurs de la fonction de densité de probabilité $f_1(x)$, de la fonction de densité cumulative $F_1(x)$, de la fonction de survie $S_1(x)$, et du taux de panne $r_1(x)$ de la variable aléatoire X_1 , ainsi que la moyenne $E(X_n)$ et la variance $Var(X_n)$ (Voir table 1.1).

Table 1.1- Paramètres d'importance dans un processus de quasi-renouvellement

$f_1(x)$	$F_1(x)$	$S_1(x)$	$r_1(x)$	$E(X_n)$	$Var(X_n)$
$\alpha^{1-n} f_1(\alpha^{1-n} x)$	$F_1(\alpha^{1-n} x)$	$s_1(\alpha^{1-n} x)$	$\alpha^{1-n} r_1(\alpha^{1-n} x)$	$\alpha^{1-n} E(X_1)$	$\alpha^{2n-2} Var(X_1)$

1.5.2 Fonction de quasi-renouvellement

Pour un processus de quasi renouvellement avec paramètre α et X_1 , Wang et Phan [70], on déterminé le nombre total de renouvellements $N(t)$ dans $[0, t]$:

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow SS_n \leq t \quad (1.31)$$

SS_n est l'instant du $n^{\text{ième}}$ renouvellement

Alors :

$$SS_n = \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \alpha^{i-1} Z_i \quad (1.32)$$

Avec $n \geq 1$

Nous aurons :

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{SS_n \leq t\} - P\{SS_{n+1} \leq t\} \end{aligned}$$

$$P\{SS_n \leq t\} - P\{SS_{n+1} \leq t\} = G^{(n)}(t) - G^{(n+1)}(t) \quad (1.33)$$

Où $G^{(n)}(t)$ est le produit de convolution de $G(\cdot)$ avec elle même .

La valeur moyenne de $N(t)$ est définie comme la fonction de quasi-renouvellement $M(t)$.

D'où

$$M(t) = E[N(t)] \quad (1.34)$$

La dérivée de $M(t)$ correspond à la densité de quasi-renouvellement $m(t)$.

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N(t) = n)$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n[G^n(t) - G^{n+1}(t)]$$

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n(t) \quad (1.35)$$

2. Chapitre II : Premier Modèle

Stratégie de maintenance imparfaite utilisant le processus de quasi renouvellement.

2.1 Introduction

Chaque fois que le système tombe en panne, son âge est réduit d'une certaine valeur et le temps pour effectuer une réparation imparfaite augmente d'une certaine fraction. Dans ce modèle, le système sera remplacé préventivement soit à la panne suivante après la dernière réparation imparfaite ou bien à un âge déterminé.

2.2 Développement du modèle

Dans ce modèle, la réparation imparfaite est traitée de la manière suivante :

On suppose tout d'abord que l'unité est imparfaitement réparée au moment de la $i^{\text{ième}}$ défaillance, avec un coût $c_f + (i - 1)c_v$

Avec $i \leq k - 1$, où k et i sont des entiers, c_f et c_v étant respectivement le coût fixe de réparation et l'augmentation de coût. $(k-1)$ étant le nombre de réparations avant de procéder au renouvellement

Supposons que la durée de vie pour une nouvelle unité est x_1 et que la première réparation imparfaite est y_1 , les deux étant des variables aléatoires, le système ayant un temps de vie moyen μ et une moyenne de temps de réparation η . Le temps de vie de l'unité après la première réparation imparfaite et le deuxième temps de réparation imparfaite se convertissent respectivement en αx_1 et βy_1 avec un temps de vie moyen $\alpha\mu$ et une moyenne de temps de réparation $\beta\eta$, cela signifie que le temps de réparation augmente

puisque le nombre de réparations augmente aussi avec une valeur $\beta (\geq 1)$ cela veut dire que le temps de vie de l'unité diminue de $\alpha (0 < \alpha < 1)$ après chacune des réparations imparfaites réalisées.

On suppose qu'à l'instant $t=0$, le système est à l'état neuf. Si après x_1 unités de temps, le système tombe en panne et que le temps pour effectuer une réparation imparfaite est y_1 alors, selon le processus de quasi renouvellement, la prochaine réparation aura lieu après x_2 unités de temps et la durée de réparation sera y_2 . X_2 et y_2 sont tel que :

$$X_2 = \alpha X_1; 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$Y_2 = \beta Y_1; \beta \geq 1$$

La $(k-1)^{\text{e}}$ réparation aura lieu après un fonctionnement $X_{k-1} = \alpha^{k-2} X_1$

De même que : $Y_{k-1} = \beta^{k-2} Y_1$

$$x_2 = \alpha x_1; x_3 = \alpha^2 x_1; x_4 = \alpha^3 x_1; \dots x_k = \alpha^{k-1} x_1; x_{k-1} = \alpha^{k-2} x_1$$

$$y_2 = \beta y_1; y_3 = \beta^2 y_1; y_4 = \beta^3 y_1; \dots y_k = \beta^{k-1} y_1; y_{k-1} = \beta^{k-2} y_1$$

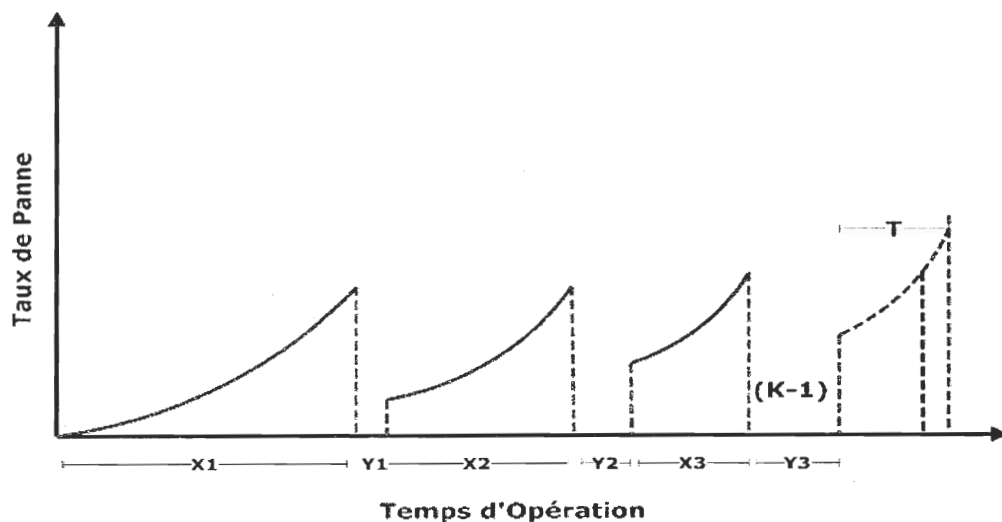


Figure 2.0-Schéma du modèle

2.3 Notations

$A(T,k;\alpha,\beta)$	=	Disponibilité moyenne.
c_f	=	Coût fixe pour effectuer une réparation à la panne.
c_v	=	Coût variable par réparation imparfaite.
c_p	=	Coût associé à une action de maintenance imparfaite.
c_{fr}	=	Coût d'une réparation. $C_{fr} = C_f + (i - 1)C_v$
$L(T, k; \alpha, \beta)$	=	Coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini
$f_1(t)$	=	Fonction de densité de probabilité associé aux durées de vie du système à l'état neuf.
$F_1(t)$	=	Fonction de distribution.
$r_1(t)$	=	Taux de panne du système n'ayant pas subis de réparations.
$R_1(t)$	=	$\int_0^t r_1(x) dx$
$s_1(t)$	=	Fonction de fiabilité, $s_1(t) = 1 - F_1(t)$
p	=	Probabilité que la maintenance effectuée soit parfaite.
q	=	Probabilité que la maintenance effectuée soit imparfaite; $p + q = 1$
μ	=	Durée de vie moyenne du système.
η	=	Durée de réparation moyenne.
α	=	Facteur de réduction de l'âge du système $0 \leq \alpha \leq 1$
β	=	Facteur d'augmentation des durées de réparation $\beta \geq 1$

2.4 Variables de décision

T = Âge fixe dans lequel une unité est soumise à la maintenance préventive $T > 0$.

k = Nombre de réparations imparfaites avant d'effectuer la remise à neuf du système

2.5 Hypothèses de modélisation

Quelques considérations sont à prendre en compte pour le modèle:

- Le système est mis en opération l'instant $t = 0$;
- La stratégie est évaluée pour un horizon infini ;
- Le taux de panne de l'unité est continu et croissant ;
- La fonction de distribution $F_1(t)$ associé aux durées de vie est connue ;
- Les durées de réparation ne sont pas négligeables.

Le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini $L(T, k; \alpha, \beta)$ est donné par :
(Wang et Pham [70])

$$L(T, k; \alpha, \beta) = \frac{C(T, k; \alpha, \beta)}{D(T, k; \alpha, \beta)} \quad (2.0)$$

Où $C(T, k; \alpha, \beta)$ est le coût total moyen sur un cycle de renouvellement de durée $D(T, k; \alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} C(T, k; \alpha, \beta) &= c_f + (c_f + c_v) + \dots + [c_f + (k - 2)c_v] + c_p \cdot s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) \\ &\quad + c_{fr} \cdot F_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) \\ &= (k - 1)c_f + \frac{(k - 1) \cdot (k - 2)}{2} c_v + c_p \cdot s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) + c_{fr} \cdot F_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Et

$$\begin{aligned}
 D(T, k; \alpha, \beta) &= E \left[\sum_{i=1}^{k-1} (\alpha^{i-1} x_1 + \beta^{i-1} y_1) \right] + T \cdot s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) + \alpha^{i-1} \int_0^T f_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} x \right) dx \\
 &= \frac{\mu(1 - \alpha^{k-1})}{1 - \alpha} + \frac{\eta(1 - \beta^{k-1})}{1 - \beta} + \int_0^T s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} x \right) dx \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Par conséquent, Le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini est donné par :

$$\begin{aligned}
 L(T, k; \alpha, \beta) &= \frac{\left((k-1)c_f + \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{2} c_v + c_p \cdot s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) + c_{fr} \cdot F_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} T \right) \right)}{\frac{\mu(1 - \alpha^{k-1})}{1 - \alpha} + \frac{\eta(1 - \beta^{k-1})}{1 - \beta} + \int_0^T s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} x \right) dx} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

À partir des expressions (2.1) et (2.2) on a dérivé l'expression de la disponibilité stationnaire du système $A(T, k; \alpha, \beta)$:

$$A(T, k; \alpha, \beta) = \frac{U(T, k; \alpha, \beta)}{D(T, k; \alpha, \beta)} \quad (2.4)$$

Et

$$\begin{aligned}
 U(T, k; \alpha, \beta, p) &= \mu + \alpha\mu + \dots + \alpha^{k-2}\mu + \int_0^T \bar{F}_p(t) dt \\
 &= \frac{\mu(1 - \alpha^{k-1})}{1 - \alpha} + \int_0^T s_1(\alpha^{1-k}t) dt \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Selon le modèle de Nakagawa [52], $F_p(t) = 1 - (1 - F_1(t))^p$; Block et al [11]. proposent: $F_p(t) = 1 - \exp \left[\int_0^t \frac{p(x)}{1 - F_1(x)} dx \right]$

Et finalement, la disponibilité moyenne est exprimée par la relation suivante :

$$A(T, k; \alpha, \beta) = \frac{\frac{\mu(1 - \alpha^{k-1})}{1 - \alpha} + \int_0^T s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} t \right) dt}{\frac{\mu(1 - \alpha^{k-1})}{1 - \alpha} + \frac{\eta(1 - \beta^{k-1})}{1 - \beta} + \int_0^T s_1 \left(\frac{1}{\alpha^{k-1}} x \right) dx} \quad (2.6)$$

2.6 Exemple numérique

On a pris les mêmes paramètres et fonctions que ceux utilisés par Wan et Pham. La durée de vie du système suivant une distribution de Weibull de paramètres λ et Θ ,

$$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\Theta}$$

$$\lambda = 1, \Theta = 2, c_f = \$1, c_v = \$0.06, c_p = \$10, c_{fr} = \$12, \alpha = 0.95, \beta = 1.05, \eta = 0.03$$

Par la distribution de Weibull, la durée de vie moyen (μ) est donné par :

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \Gamma \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) \quad (2.7)$$

Où, la fonction Gamma est:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty X^{p-1} e^{-x} dx \quad (2.8)$$

$$\Gamma(1.5) = 0.88623 \text{ Unités de temps (voir table)}$$

Ensuite on cherche à déterminer le taux de panne ($r_1(t)$) comme suit,

$$r_1(t) = \theta \lambda (\lambda t)^{\theta-1} \quad (2.9)$$

$$\text{Pour } \theta = 2 \text{ et } \lambda = 1 \quad r_1(t) = 2t$$

On insère toutes les valeurs des paramètres du modèle dans l'équation (2.6), avec $k \geq 2; T > 0$

$$L(T, k; \alpha, \beta) = \frac{\left((k-1) + \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{2} 0.06 - 2 \cdot \exp \left[-(0.95^{(1-k)} T)^2 \right] + 12 \right)}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)} x)^2] dx}$$

Rapelons que les deux variables de décision sont T et k.

La solution optimale générée par le progiciel MAPLE est donnée ci desous

$$k^* = 12.150048$$

$$T^* = 0,23642932$$

Le coût total moyenne par unité de temps sur un horizon infini est donné par :

$$L(0,2364,12; 0.95,1.05) = 2.9684 \text{ \$/Par unité de temps.}$$

D'après les résultats obtenus, nous avons confirmé l'applicabilité et la pertinence du modèle développé par Pham et Wan. En plus, en introduisant le concept de disponibilité et les calculs pour l'obtenir nous avons constaté que le modèle est flexible ce qui nous a permis d'utiliser les mêmes paramètres proposés par les auteurs dans nos calculs.

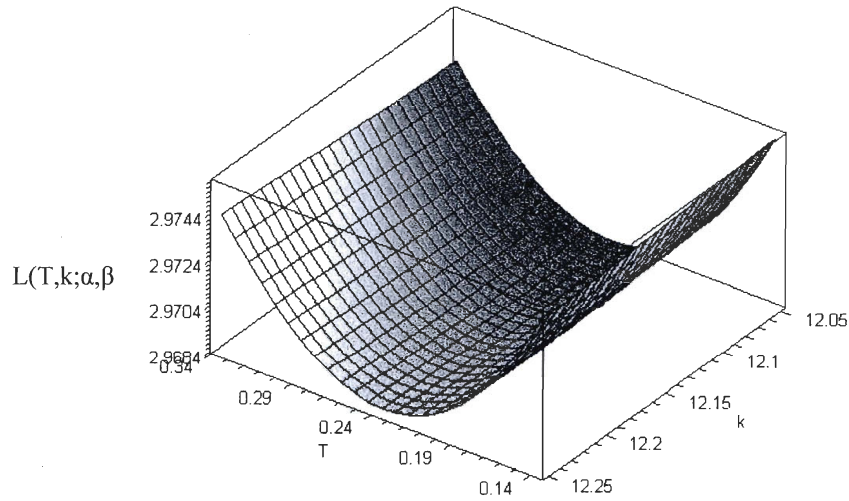


Figure 2.1- Coût total de maintenance pour le couple (T, k) optimal

Dans notre exemple, on peut observer qu'aux 11 premières défaillances, l'unité sera imparfaitement réparée à un coût de 1 \$. À partir de la onzième réparation imparfaite, l'unité devra être remplacée préventivement à l'âge de 0.23 unité de temps à un coût de 10\$, ou bien être remplacée au moment de la défaillance numéro 12 à un coût de 12\$. En considérant uniquement la maintenance, le coût total serait de 2.968 \$/heure.

Cette situation se produit lorsqu'on cherche à déterminer la couple (T^*, k^*) que minimise le coût total moyen par unité de temps sans tenir compte le modèle de disponibilité (Voir figure 2.1).

En utilisant le progiciel MAPLE nous avons également obtenu le couple (T^*, k^*) qui maximise la disponibilité stationnaire

$$A(T, k; \alpha, \beta) = \frac{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}t)^2] dt}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}x)^2] dx}$$

$$k^* = 2.$$

$$T^* = 4.752525381$$

$$A^*(t^*, k^*, \alpha^*, \beta^*) = 0.9829365$$

Dans le modèle de disponibilité et pour obtenir la valeur de .98, on impose qu'après la première défaillance, une réparation parfaite soit réalisée à un coût de 1\$. Après cette réparation, Le système peut être remplacé préventivement à 4.7 unités de temps à un coût de 10\$, ou bien remplacée à la deuxième défaillance à un coût de 12\$.

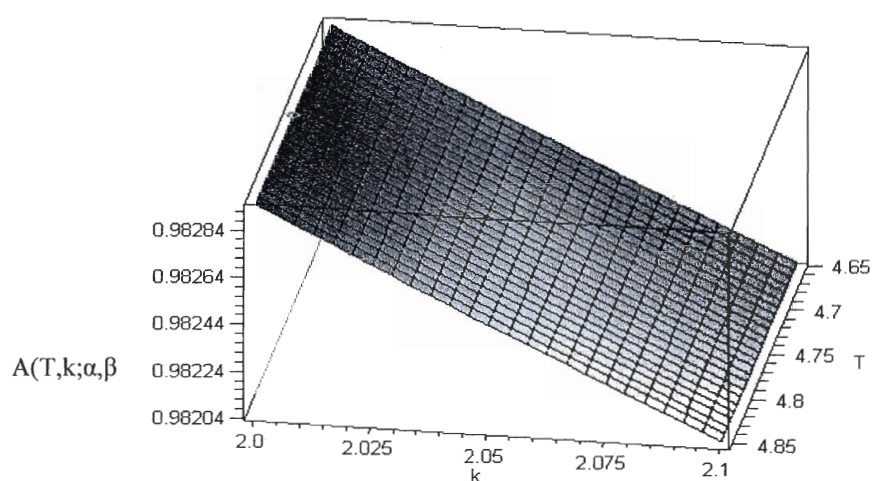


Figure 2.2- Disponibilité à l'optimum

Wan en Phan ont déterminé le couple optimal (T^*, k^*) qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Nous avons établi l'expression de la disponibilité stationnaire du système lorsque la stratégie de maintenance par Wan et Pham est adoptée.

Nous allons tenter de résoudre les deux problèmes d'optimisation suivants :

Problème 1, déterminer le couple (T^*, k^*) , qui permet de minimiser le coût total moyen par unité de temps $L(T, k; \alpha, \beta)$, tout en respectant un seuil de disponibilité stationnaire requise A_0

Minimiser

$$L(T, k; \alpha, \beta) = \frac{\left((k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \cdot 0.06 - 2 \cdot \exp\left[-(0.95^{(1-k)}T)^2\right] + 12 \right)}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}x)^2] dx}$$

Sujet à :

$$A(T, k; \alpha, \beta) = \frac{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}t)^2] dt}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}x)^2] dx} \geq A_0$$

$$T > 0$$

$$k \geq 2$$

A_0 étant une constante qui représente la disponibilité requise.

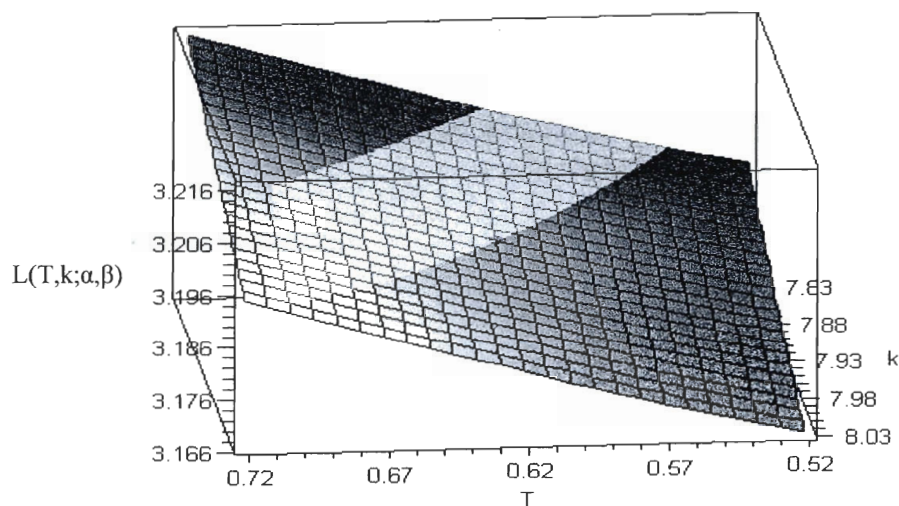
En utilisant le logiciel Maple (voir annexe A), nous avons obtenus les résultats suivants :

$$k^* = 7.929714$$

$$T^* = 0.621353$$

$$L(T^*, k^*, \alpha, \beta) = 3.1903 \text{ (voir table 2.0)}$$

A_0 été fixé à 96%



**Figure 2.3-Modèle d'optimisation de coût assujetti a une contrainte de disponibilité
 $A_0 = 0.96$**

Dans le modèle de minimisation de coûts intégrant une condition de disponibilité donnée et tenant compte de la durée de vie utile du système de 0.88 unité de temps, la disponibilité doit se situer entre 96% et 97 % comme exigence réelle, avec un coût total entre 3 et 4\$/heure. Le nombre de défaillances (k) doit être compris entre 4.5 et 7.9 et le temps pour le remplacement préventif sera situé entre 0.6 et 1.5 unité de temps. (Voir table 2.0)

Table 2:0-Valeurs de L, k et T par rapport à un niveau de disponibilité requis

$A_0(\%)$	$L(T, k; \alpha, \beta)$	K^*	T^*
$A_0=0$			
60	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
70	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
80	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
90	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
91	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
92	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
93	2.96843184415310192	12.1500490316858141	0.236429281642348360
94	2.96843184415309480	12.1500483654868461	0.236429314745429414
95	2.97186426709138108	11.5115548221811236	0.269681913799555804
96	3.19030689158448188	7.92971422792760361	0.621353400382520884
97	4.13280782515451328	4.58415901119109214	1.533485207576616550
98	6.47521575716161824	2.36519724138328424	2.710453981757016350
98.1	6.77981204257130000	2.22963416655579830	2.788734699792164920
98.19	7.06157947472569792	2.11784693890119691	2.852415088815992632
98.199	7.09012	2.10716700077959995	2.858447488405754020
98.1999	7.09298	2.10612188248774768	6.045646955847169940
98.19999	7.0932	2.106015	6.42057
98.199999	7.0933	2.106004	6.45808
98.2	-	-	-
99	-	-	-
100	-	-	-

Les données obtenues dans la table 2.0 et représentées dans la figure 2.3 montrent le comportement du coût de maintenance par rapport à la valeur de disponibilité requise. Comme une valeur de disponibilité supérieure à .90 est requise, le coût de maintenance augmente de façon exponentielle. Ce ci nous témoigne l'utilité du model dans le cas des systèmes très sensibles, où un changement minimal résulte extrêmement représentatif dans

leur fonctionnement. C'est le cas des systèmes militaires, des services de santé, d'énergie et des télécommunications.

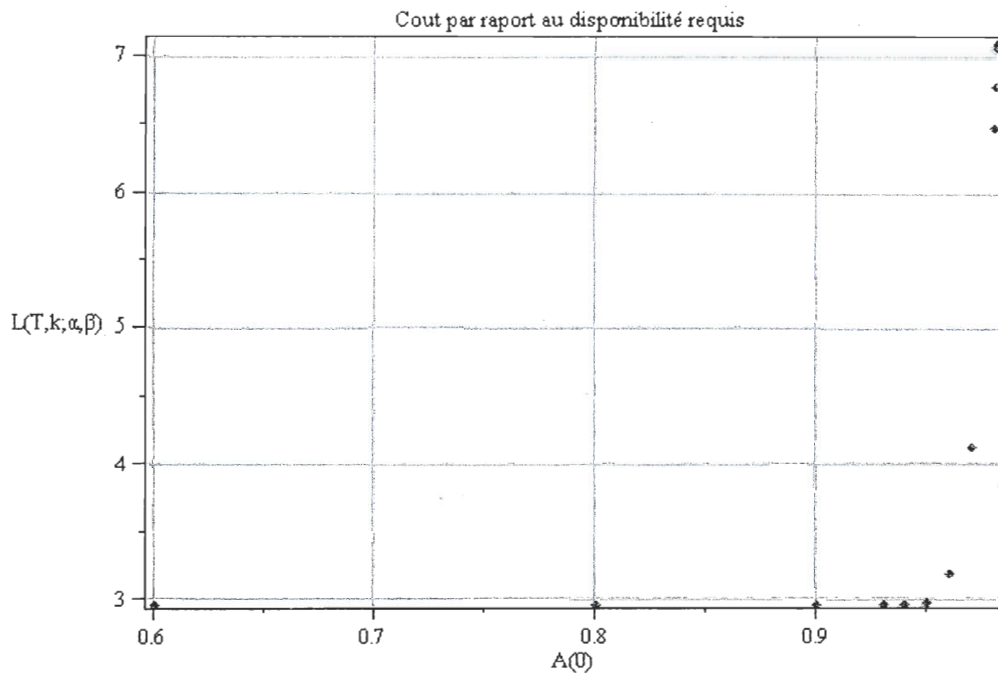


Figure 2.4- Coût par rapport à la disponibilité (A) requis.

Problème 2, déterminer le couple optimal (T^*, k^*) qui permet de maximiser la disponibilité stationnaire du système tout en respectant un limite budgétaire.

Maximiser :

$$\begin{aligned}
 & A(T, k; \alpha, \beta) \\
 &= \frac{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}t)^2] dt}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)}x)^2] dx}
 \end{aligned}$$

Sujet à :

$$L(T, k; \alpha, \beta)$$

$$= \frac{\left((k-1) + \frac{(k-1) \cdot (k-2)}{2} 0.06 - 2 \cdot \exp \left[-(0.95^{(1-k)} T)^2 \right] + 12 \right)}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{(1-k)})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{(k-1)} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T \exp[-(0.95^{(1-k)} x)^2] dx} \leq L_0$$

$T > 0$ et $k \geq 2$.

$L_0 = 0$ = Constante qui représente le budget disponible par cycle de renouvellement.

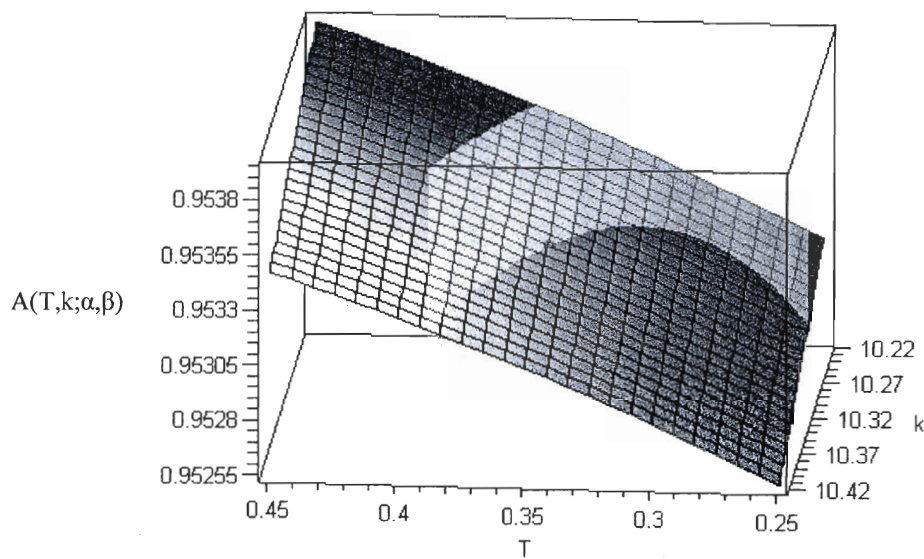


Figure 2.5 Modèle d'optimisation de la disponibilité assujettie a une contrainte de budget $L_0 = 3$

À l'égard du modèle de maximisation de la disponibilité soumise à une condition de coût et en considérant le temps de vie utile moyenne, nous devons obtenir, comme dans le cas précédent, le coût maximum requis (4 \$/heure), qui correspond à 96.9 % de disponibilité.

Table 2.1-Valeurs de A, k et T par rapport à une condition de coût requis.

$L_0(\$/h)$	$A(T, k; \alpha, \beta)$	K	T
2	-	-	-
3	.953292777	10.32209	.3494813
4	.969118917	4.855941	1.421765
5	.974478901	3.379666	2.125812
6	.978368641	2.614974	2.564567
7	.981705147	2.141272	2.839149
7.1	.982021083	2.103498	2.860516
7.2	.982334542	2.067082	2.880997
7.3	.982645664	2.031951	2.900637
7.4	.982936566	2.0	4.770321
7.5	.982936566	2.0	4.782492
7.6	-	-	-

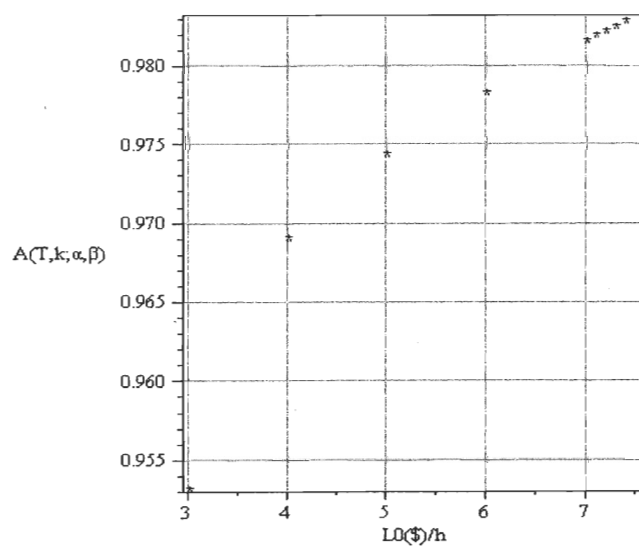
**Figure 2.6 Disponibilité par rapport au coût requis**

Table 2.2-Valeurs de U, D, par rapport aux valeurs de k et T.

$U(T, k; \alpha, \beta)$	$D(T, k; \alpha, \beta)$	K	T
7.052457021	7.397996798	10.32209	.3494813
3.897544659	4.021740352	4.855941	1.421765
2.820514236	2.894382038	3.379666	2.125812
2.224796544	2.273985940	2.614974	2.564567
1.843624522	1.877981913	2.141272	2.839149
1.812826212	1.846015558	2.103498	2.860516
1.783078399	1.815143731	2.067082	2.880997
1.754327435	1.785310304	2.031951	2.900637
1.728145579	1.758145579	2.0	4.770321
1.728145579	1.758145579	2.0	4.782492

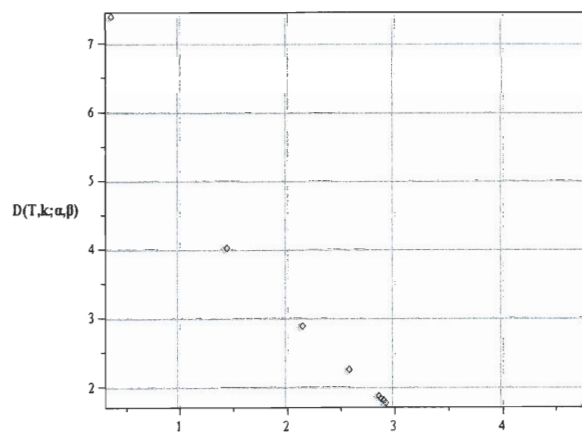
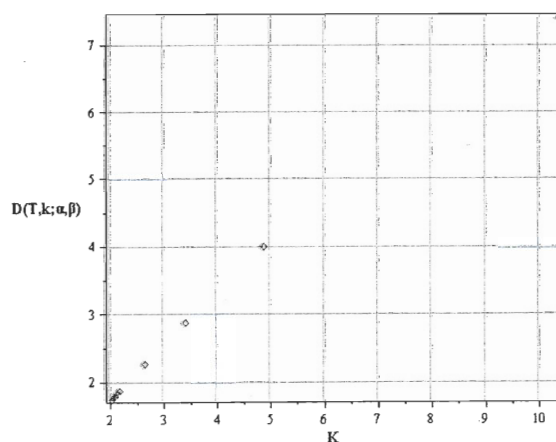
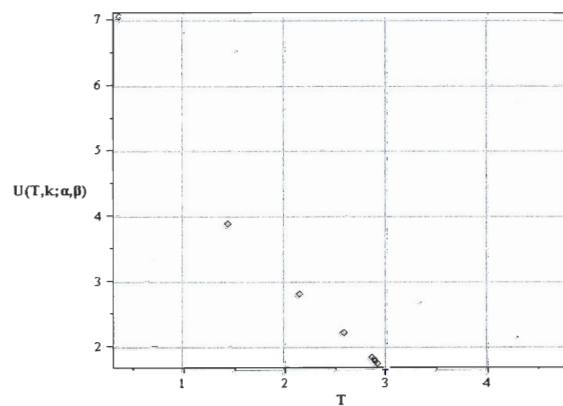
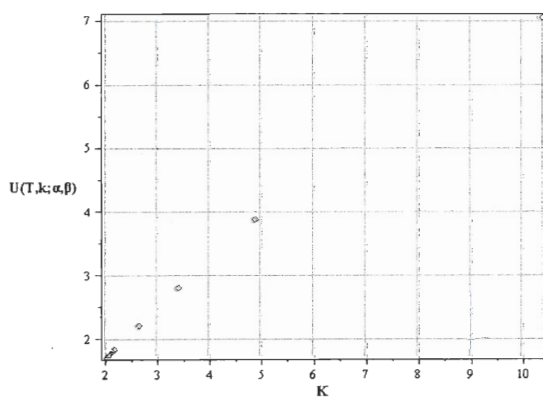


Figure 2.7- Valeurs de D et de U pour le coupe (k, T)

L'analyse de la sensibilité représenté dans la figure 2.7 et la table 2.2 montre que les variables de décision k et T ont le même comportement par rapport à $D(T,k; \alpha, \beta)$ et $U(T,k; \alpha, \beta)$. Cela veut dire que la variation de k et de T ont aussi le même degré d'influence dans le calcul du temps moyen du bon fonctionnement dans un cycle de quasi renouvellement et dans le calcul du temps moyen de réparation ou de maintenance dans le même cycle de quasi renouvellement.

2.7 Conclusion

Le modèle de maintenance que nous présentons dans ce chapitre ne sera appliqué aux systèmes qu'au début de leur vie utile, ou bien s'ils ne requièrent pas un nombre important de réparations, ou encore si ces réparations ne sont pas complexes.

À l'égard de l'exemple numérique, nous voyons que ce modèle peut initialement s'appliquer à des systèmes où un changement minimal de leur disponibilité à une influence importante. Nous citons à titre d'exemple les systèmes de défense, d'énergie et de télécommunications. Cette appréciation se fonde sur les résultats obtenus dans les tables 2.0 et 2.1. Lorsqu'on passe de 96 % à 98 % de disponibilité, nous remarquons que le coût de maintenance totale par heure a presque doublé.

D'autre part, dans le modèle de minimisation de coûts par rapport à une condition de disponibilité donnée, en tenant compte de la durée de vie utile du système de 0.88 unité de temps, la disponibilité doit se trouver entre 96% et 97 % comme exigence réelle, avec un coût total d'entre 3 à 4\$/heure. Le nombre de défaillances (k) doit être entre 7.9 et 4.5 et le temps pour le remplacement préventif sera placé entre 0.6 à 1.5 unités de temps (Voir figure 2.3).

À l'égard du modèle de maximisation de la disponibilité soumise à une condition de coût et en considérant la durée de vie utile moyen, nous devons obtenir, comme dans le cas

précédent, un coût maximum de 4 \$/ qui correspond à 96.9 % de disponibilité (voir figure 2.5).

3. Chapitre 3 : Deuxième Modèle

Stratégie de maintenance imparfaite utilisant le remplacement périodique de type bloc

3.1 Introduction

Les modèles de maintenance préventive périodique, aussi connus comme modèles de remplacement de bloc, sont spécifiquement utilisés pour l'analyse des systèmes électroniques complexes et électriques. (Nakagawa [52]).

Les politiques de maintenance périodique imparfaite ont largement été étudiées. Citons principalement, les travaux de Welker (1959) et Drenick (1960). (Barlow et Hunter [8]).

La stratégie de remplacement de type Bloc, suggère d'effectuer les remplacements à la panne et à tous les T unités de temps est ce indépendamment de l'âge et de l'état de l'équipement. (Ait-Kadi D. et Cléreoux [1]).

Une autre politique de maintenance préventive périodique est celle développée par Barlow et Hunter [8], et qui consiste à effectuer des remplacements périodiques avec une réparation minimale après défaillance. L'unité dans ce cas, est remplacée à des instants prédéterminés kT ($k = 1, 2 \dots$), et les défaillances sont corrigées par des réparations minimales. Dans ce type de politiques, il existe une politique où l'unité est toujours remplacée aux seuls instants kT ($k = 1, 2 \dots$). Si une panne se produit, le système est laissé tel quel, et la pièce n'est pas remplacée.

Le concept de réparation minimale et de maintenance imparfaite sont de plus en plus intégrés et utilisés dans la formulation de nouvelles politiques de maintenance. Liu et al. [41], étendent ces deux concepts à une politique dans laquelle un système ou une unité reçoivent une maintenance préventive imparfaite à toutes les T unités de temps. Après avoir présenté des défaillances, celles-ci sont assujetties à des réparations minimales, l'unité est remplacée lorsque son âge atteint $(A + 1)T$ unités de temps. Dans cette politique de

maintenance, les variables de décision sont A et T . Lorsque $A = 0$, cela signifie que l'unité sera remplacée chaque fois qu'elle a opéré par T unités de temps et ne recevra aucune maintenance imparfaite. Il est clair que cette politique se transforme en politique de remplacement périodique avec une réparation minimale après avoir présenté la défaillance si $A = 0$.

Cox [22] étend la politique de remplacement de bloc, ainsi, lorsqu'une défaillance se présente juste avant un remplacement préventif prévu à un instant T , l'unité sera laissée de côté jusqu'au prochain remplacement préventif.

Nakagawa dans [48], apporte des variantes intéressantes. Dans le modèle qu'il développe, l'unité est remplacée à des intervalles kT ($k = 1, 2 \dots$) indépendamment de son âge. Une unité en panne, reste dans cet état jusqu'au prochain remplacement programmé. En 1981 Nakagawa [50] présente trois modifications à ce type de politique offrant des alternatives qui prennent en compte des considérations pratiques. Nakagawa [51] présente un autre modèle dans lequel les remplacements sont programmés dans des intervalles kT ($k = 1, 2 \dots$) et après une défaillance, le système est corrigé par une réparation minimale. Si le nombre total de défaillances est égal ou supérieur à une valeur prédéterminée, on pourra effectuer le remplacement de l'unité dans l'intervalle suivant programmé, dans le cas contraire aucune maintenance n'est effectuée.

Ait-Kadi et Cléroux [1], présentent un modèle de remplacement où l'intervalle $[(k - 1)T, kT]$ est divisé en trois parties $[(k - 1)T, kT - \delta_1]$, $[kT - \delta_1, kT - \delta_2]$ et $[kT - \delta_2, kT]$ en suggérant de changer l'élément qui tombe en panne par un nouveau, si la panne arrive dans le premier sous-intervalle, par un usagé, âgé de T , si la panne arrive dans le deuxième sous-intervalle, et finalement, si la panne arrive dans le troisième sous-intervalle, le composant reste inactif jusqu'au prochain remplacement programmé. Dans leurs travaux publiés Ait-Kadi et al. [2] et [3], proposent d'autres modèles de remplacement périodique.

Chun [21] étudie la manière de déterminer le nombre parfait de maintenances préventives périodiques dans un intervalle fini. Dagpunar. et Jack [23] déterminent le nombre parfait de

maintenances préventives imparfaites pour un intervalle fini dans lequel une réparation minimale est réalisée chaque fois qu'une défaillance se présente entre les maintenances préventives. Wang Pham [68] étendent la politique de remplacement de bloc à un cas plus général.

Sheu et al. [57] présentent trois modèles de maintenance préventive périodique qui maximisent la disponibilité de systèmes réparables. Ils présentent aussi, trois types de maintenance préventive qui sont, la maintenance préventive imparfaite (IPM), la maintenance préventive parfaite (PPM) et la maintenance préventive ratée (FPM).

3.2 Développement du modèle

Dans cette politique de maintenance, l'unité est sujette à une maintenance imparfaite qui est réalisée à des intervalles prédéterminés de temps kT ($k = 1, 2, 3 \dots$) indépendamment de l'historique de défaillances de l'unité. En outre, elle est réparée imparfaitement dès l'apparition d'une panne (T est constante).

Considérons un nouveau système qui commence à opérer au temps $t = 0$ et on suppose que ce système est réparé imparfaitement dès qu'il tombe en panne. Le coût de la i défaillance est donné par : $c_f + (i - 1)c_v$

Si et seulement si $1 \leq i \leq k - 1$; où k est un entier positif.

La réparation est imparfaite dans la mesure où les temps successifs d'opération d'un système sont indépendants et décroissent d'une fraction $(1 - \alpha)$. Les temps successifs de réparation sont eux aussi indépendants et augmentent d'un facteur $(\beta - 1)$, où $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 1$. Il est important de noter que le coût de réparation augmente d'un facteur c_v à chaque nouvelle réparation imparfaite réalisée.

Désignons par X_1 , la variable aléatoire, le premier temps de l'opération avec une moyenne μ_1 , le deuxième temps d'opération sera une autre variable aléatoire αX_1 avec une moyenne $\alpha\mu_1$, par conséquent le $k^{\text{ième}}$ temps d'opération sera $\alpha^{k-1}X_k$ avec une moyenne égal à $\alpha^{k-1}\mu_1$, où la constante $\alpha < 1$. Ceci signifie que les temps d'opération diminuent avec l'augmentation du nombre de réparations imparfaites, où les X_i étant indépendants et identiquement distribués (i.i.d).

$$x_2 = \alpha x_1; x_3 = \alpha^2 x_1; x_4 = \alpha^3 x_1; \dots x_k = \alpha^{k-1} x_1; x_{k-1} = \alpha^{k-2} x_1 \quad (3.0)$$

Sur la $(k-1)$ réparation imparfaite, le système est maintenu préventivement sur les intervalles $T, 2T, 3T, \dots$ et ce à un coût c_p où $T > 0$. La maintenance préventive est imparfaite dans la mesure où lorsque l'action de maintenance a été effectuée, le système se trouve comme neuf (as good as new) avec une probabilité p (maintenance préventive parfaite) et comme vieux (as bad as old) avec une probabilité $q = 1 - p$ (maintenance préventive minimale).

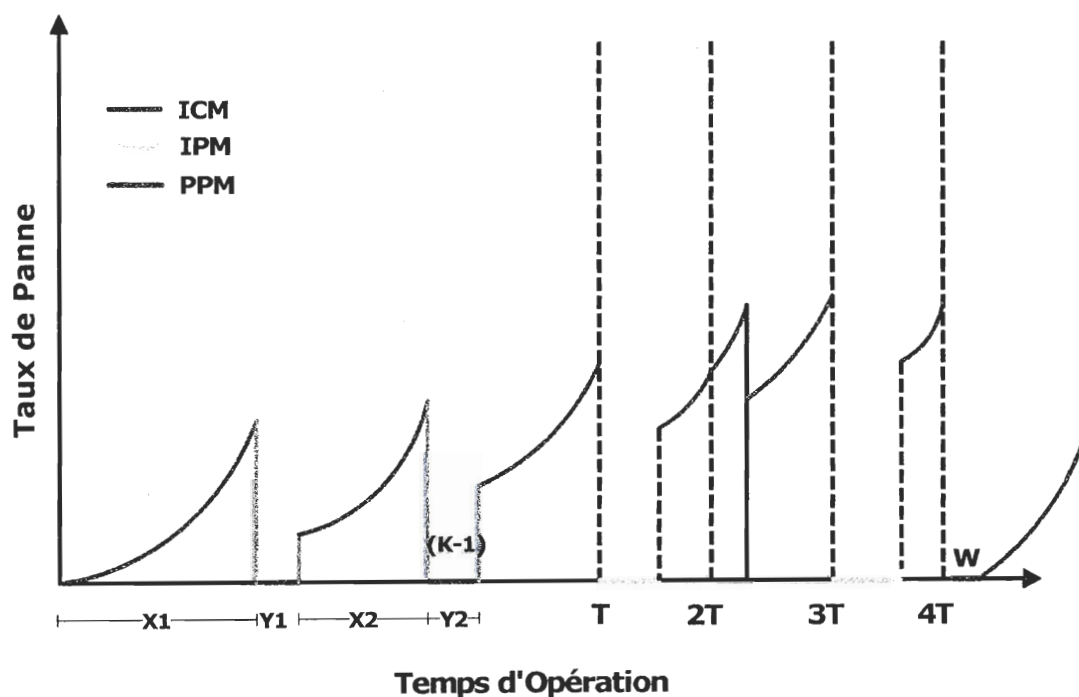


Figure 3.0-Modèle mathématique

Supposons maintenant que le temps pour effectuer la maintenance préventive parfaite soit une variable aléatoire W avec une moyenne w , et que le temps pour effectuer la maintenance préventive minimale est négligeable. Si une défaillance se présente entre les instants mT ($m = 1, 2, 3 \dots$) on effectuera une réparation imparfaite à un coût c_{fr} avec un temps de réparation négligeable. les temps successifs de réparation d'un système sont indépendants et décroissent d'une fraction $(1 - \lambda)$, où $0 < \lambda \leq 1$. Pour une maintenance préventive parfaite à mT , le processus de maintenance se répète. (Voir figure 3.0)

3.3 Notations

- A = Disponibilité Moyenne.
- A_0 = Valeur de disponibilité requise.
- c_f = Coût fixe pour effectuer une réparation à la panne.
- c_v = Coût variable par réparation imparfaite
- c_p = Coût de la maintenance préventive.
- $c_{fr} =$ Coût d'une réparation $C_{fr} = C_f + (i - 1)C_v$
- F_i = Fonction de distribution $(i - 1)$ réparation imparfaite, où $i = 1, 2, 3..$
- $G_n(t)$ = Convolution de $F_1, F_2, \dots F_n$.
- $M(t)$ = Fonction de renouvellement d'un processus de quasi-renouvellement.
- $m(t)$ = Densité de renouvellement d'un processus de quasi-renouvellement
- α = Facteur de réduction de l'âge du système $0 \leq \alpha \leq 1$
- β = Facteur d'augmentation des durées de réparation $\beta \geq 1$
- μ_1 = Temps de vie utile.
- η_1 = Temps de réparation pour la première panne.
- L = Coût de maintenance asymptotique.
- D = Durée d'un cycle de renouvellement.
- C = Coût de la maintenance totale pour un cycle de renouvellement.

3.4 Variables de décision

- T = Temps de maintenance préventive.
- k = Nombre de réparations imparfaites.

3.5 Hypothèses de modélisation

Il existe quelques considérations en commun pour les modèles proposés:

- L'horizon d'opération projeté est infini.
- Le taux de défaillance du système et le dures de vie son indépendants.
- Le taux de panne du système est non décroissant.
- L'unité commence à opérer à l'instant $t = 0$ (cas d'un système neuf).

D'après les travaux de Wang et Pham [65], considérons un processus continu $\{N(t), t \geq 0\}$, avec une variable aléatoire X_n qui correspond au temps entre le $(n - 1)$ ième et le n ième événement de ce processus ($n \geq 1$).

La dérivée de la fonction de renouvellement, qui on a traite dans le premier model, est connue comme la densité de renouvellement :

$$m(t) = \dot{M}(t) \quad (3.1)$$

Les temps entre les maintenances préventives parfaites consécutives, constituent un cycle de renouvellement. En utilisant la théorie classique de renouvellement, le coût de maintenance durable par unité de temps, ou de coût moyen $L(T, k)$, est égal au coût de maintenance par cycle de renouvellement $C(T, k)$ divisé par la durée d'un cycle de renouvellement $D(T, k)$.

$$L(T, k; \alpha, \beta, p) = \frac{C(T, k; \alpha, \beta, p)}{D(T, k; \alpha, \beta, p)} \quad (3.2)$$

Où,

$$C(T, k; \alpha, \beta, p) = (k-1)c_f + \frac{(k-1)(k-2)}{2}c_v + \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} p [ic_p + c_{fr}M(iT)] \quad (3.3)$$

et

$$D(T, k; \alpha, \beta, p) = \frac{\mu_1(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha} + \frac{\eta_1(1-\beta^{k-1})}{1-\beta} + \sum_{i=1}^{\infty} (w+iT)pq^{i-1} \quad (3.4)$$

Par conséquent le coût de maintenance moyen par unité de temps ou taux de coût est égal à:

$$\begin{aligned} L(T, k; \alpha, \beta, p) &= \frac{(k-1)c_f + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)c_v + c_p p^{-1} + p c_{fr} \sum_{i=1}^{\infty} q^{i-1} M(iT)}{\frac{\mu_1(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha} + \frac{\eta_1(1-\beta^{k-1})}{1-\beta} + \frac{T}{p} + w} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Où $M(T)$ est la fonction de renouvellement d'un processus de quasi- renouvellement avec paramètre λ et la première distribution du temps d'inter arrivées de $F_1(\alpha^{1-k}t)$

Pour la disponibilité nous nous servons de la même théorie de renouvellement qui nous permet d'obtenir :

Avec

$$U(T, k; \alpha, \beta, p) = \frac{\mu_1(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha} + \frac{T}{p} \quad (3.6)$$

et,

$$A(T, k; \alpha, \beta, p) = \frac{\frac{\mu_1(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha} + \frac{T}{p}}{\frac{\mu_1(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha} + \frac{\eta_1(1-\beta^{k-1})}{1-\beta} + \frac{T}{p} + w} \quad (3.7)$$

Considérons un exemple dans lequel la distribution normale est IFR (taux de panne croissant). Nous supposons que le temps de vie est X_1 pour une nouvelle unité. Quand une réparation suit une distribution normale avec une moyenne μ et une variance σ^2 , la $(k - 1)$ réparation au moment de la défaillance, la fonction de densité de probabilité du temps de vie de cette unité sera alors:

$$f_1(x) = \alpha^{1-k} f_1(\alpha^{1-k} x) \quad (3.8)$$

En se basant sur la théorie de quasi-renouvellement, la fonction de quasi-renouvellement d'un processus de quasi-renouvellement avec paramètre λ et la première distribution de temps d'inter-arrivée $\alpha^{1-k} f_1(\alpha^{1-k} x)$ est :

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n(t) \quad (3.9)$$

On obtient alors :

$$G^n(t) = P\{SS_n \leq t\} \quad (3.10)$$

Où SS_n est une variable aléatoire qui a une fonction de distribution normale avec une moyenne cumulative :

$$\mu \alpha^{k-1} (1 - \lambda^n) / (1 - \lambda) \quad (3.11)$$

Et une variance :

$$\sigma^2 \alpha^{2k-2} (1 - \lambda^{2n}) / (1 - \lambda^2) \quad (3.12)$$

Par conséquent, la fonction de quasi-renouvellement est donnée par :

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} G^n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{SS_n \leq t\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\left[t - \frac{\mu \alpha^{k-1} (1 - \lambda^n)}{1 - \lambda} \right] / \sqrt{\frac{\sigma^2 \alpha^{2k-2} (1 - \lambda^{2n})}{1 - \lambda^2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Où Φ est le cdf normal standard.

Il y a différentes approches de la valeur Φ . Une des plus utilisées est celle de Zelen et Severo (1964), qui a été analysée par Johnson et Kotz, [70] et qui s'exprime par :

$$\Phi(x) = 1 - (0.4361836t - 0.1201676t^2 + 0.9372980t^3)(\sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \tag{3.14}$$

Où :

$$t = (1 + 0.33267x)^{-1} \tag{3.15}$$

Nous notons que dans ce cas, l'erreur de $\Phi(x)$, pour $x \geq 0$ est plus petite de 10^{-5} .

Si $x < 0$, il est important de tenir en compte de :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x) \tag{3.16}$$

De cette façon, nous pourrons calculer la valeur de $\Phi(x)$ pour le cas de $x < 0$.

3.6 Exemple numérique

Considérons les données suivantes que nous substituons dans l'équation 3.5.

$\lambda = 0.95, \mu = 10, c_f = \$1, c_v = \$0.06, c_p = \$3, c_{fr} = \$4, \alpha = 0.95, \beta = 1.05, \eta = 0.9, w = 0.2, \sigma = 1, p = 0.95, A_0 = 0.94$

Il s'agit alors de :

Minimiser

$L(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95)$

$$= \frac{k + 0.03(k-1)(k-2) + \frac{41}{19} + 3.8 \sum_{i=1}^{\infty} 0.05^{i-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{iT - 200 \times 0.95^{k-1}(1-0.95^n)}{\sqrt{\frac{0.95^{2k-2}(1-0.95^{2n})}{0.0975}}} \right)}{200(1-0.95^{k-1}) + 18(1.05^{k-1} - 1) + \frac{T}{0.95} + 0.2}$$

Sujet à :

$$A(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95) = \frac{200(1-0.95^{k-1}) + \frac{T}{0.95}}{200(1-0.95^{k-1}) + 18(1.05^{k-1} - 1) + \frac{T}{0.95} + 0.2} \geq 0.94$$

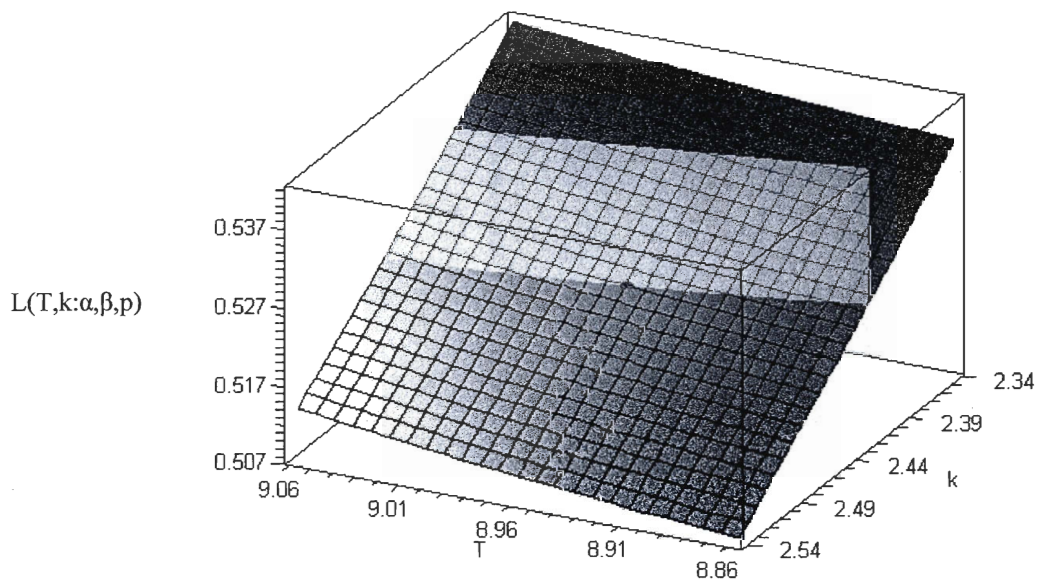


Figure 3.1- Disponibilité correspondant au couple optimal (k, T)

En utilisant le logiciel Maple, on peut résoudre le problème de maximisation de la disponibilité lorsque $T > 0$ et $k = 2,3,4 \dots$ et $k^* = 2.4$; $T^* = 8.9$ (voir annexe B).

Après calcul, on trouve :

$$L(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95) = \$0.5240 \text{ par unité de temps.}$$

$$\text{Et la disponibilité est : } A(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95) = 0.94$$

Ces résultats montrent que la politique de maintenance imparfaite est obtenue pour les deux premières défaillances de l'unité à un coût de 1 \$ pour la première et de 1.06 \$ pour la deuxième. Aussi, la maintenance préventive imparfaite pour chaque tranche de 8.9 unités de temps a un coût de 3 \$. Il faut en outre réparer l'unité, au coût de 4 \$, lorsque la défaillance se produit entre les maintenances préventives.

Dans les calculs effectués, nous avons travaillé avec 5 itérations pour i et jusqu'à 30 pour n . Dans cette expérience nous n'arrivons pas aux valeurs exactes proposées par les auteurs, cela peut être dû au nombre d'itérations réalisées, mais aussi au type d'algorithme que chaque programme impose. Cependant, après l'exercice quelques solutions réalisables ont été obtenues (Voir table 3.0).

Table 3.0- Valeurs de L, k et T par rapport à un niveau de disponibilité requis.

i	n	T	k	$L(T, k; \alpha, \beta, p)$
1	1	-	-	-
1	2	-	-	-
1	3	8.984	2.447	0.50
1	4	7685.7	2	0.23×10^{-5}
1	5	-	-	-
1	6	-	-	-
1	7	2904635.58	2	0.10×10^{-4}
1	8	-	-	-

Continuation Table 3.0

1	9	157704.478	2	0.2312×10^{-5}
1	10	54.95	8	0.3580
2	1	-	-	-
2	2	3069	2	0.37×10^{-2}
2	3	-	-	-
2	4	7415158.53	2	0.258×10^{-5}
2	5	-	-	-
2	6	1007289.51	170	0.178×10^{-3}
2	10	4642.920	2	0.9020×10^{-5}
2	20	79.47	9.9	0.5212
2	30	1372379.11	2	0.8575×10^{-4}
3	1	8.74274	2.39858	0.2282
3	2	1158961.669	173	0.144×10^{-3}
3	3	8.95742	2.44	0.52
3	4	-	-	-
3	5	-	-	-
3	6	8829011.82	2	0.30×10^{-5}
3	7	-	-	-
3	8	3450339.60	2	0.99×10^{-5}
3	9	-	-	-
3	10	-	-	-
3	20	6327144.05	2	0.126×10^{-4}
4	1	3.74	2.39	0.2283
4	2	3309	2	0.3485
4	3	8.957	2.4419	0.5240
4	4	16.369	3.73	0.40408
4	5	5003828.759	2	0.45921×10^{-5}
4	6	981205.96	169	0.182×10^{-3}
4	7	-	-	-
4	8	-	-	-

Continuation Table 3.0

4	10	51.55	7.722	0.39075201
5	1	8.742	2.39	0.228314
5	2	5631.375	2	0.2050×10^{-2}
5	3	8.9574	2.44	0.5240
5	4	-	-	-
5	5	134680.27	131.87	0.90×10^{-3}
5	6	974557	169	0.1837×10^{-3}
5	10	16542.81	2	0.2535×10^{-2}

D'une manière égale nous avons pu proposer le problème dual :

Maximiser :

$$A(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95) = \frac{200(1 - 0.95^{k-1}) + \frac{T}{0.95}}{200(1 - 0.95^{k-1}) + 18(1.05^{k-1} - 1) + \frac{T}{0.95} + 0.2}$$

Sujet à :

$$L(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95)$$

$$= \frac{k + 0.03(k-1)(k-2) + \frac{41}{19} + 3.8 \sum_{i=1}^{\infty} 0.05^{i-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{iT - 200 \times 0.95^{k-1}(1 - 0.95^n)}{\sqrt{\frac{0.95^{2k-2}(1 - 0.95^{2n})}{0.0975}}} \right)}{200(1 - 0.95^{k-1}) + 18(1.05^{k-1} - 1) + \frac{T}{0.95} + 0.2}$$

$$L(T, k; 0.95, 1.05, 0.95, 0.95) \leq 0.2$$

$$T > 0$$

$$k = 2, 3, 4 \dots$$

3.7 Conclusion

Dans l'analyse du deuxième modèle, la difficulté a été de mener à bien le calcul mathématique de la fonction de renouvellement. Cette fonction a présenté un comportement instable, cependant quelques itérations ont pu être réalisées (voir table 3.0).

Comme pour le modèle précédent, il est nécessaire d'analyser les résultats obtenus à la lumière de la durée de vie utile du système, et ceci pour s'assurer que ceux-ci aient du sens. Dans le cas de l'expérience réalisée, par exemple, on a pu constater l'importance fondamentale des paramètres de performance du système à évaluer avant qu'un modèle précis d'optimisation ne soit appliqué. De même, il est important de développer des algorithmes qui facilitent le calcul de la fonction de renouvellement.

Finalement, notre travail met en évidence la complexité qui a trait à l'élaboration de modèles mathématiques d'optimisation pour des systèmes multi-composants qui sont ceux qui s'approchent le plus des systèmes réels.

Conclusion Générale

La problématique abordée dans cette recherche porte sur l'optimisation de la disponibilité et le calcul du coût moyen optimal de maintenance des systèmes soumis à des défaillances aléatoires et dont les caractéristiques se dégradent avec l'âge et l'usage.

L'analyse a porté sur la mesure de la disponibilité, un champ très vaste lié à la maintenance préventive et périodique.. Deux modèles très pertinents ont été soigneusement étudiés et documentés couvrant tenu de leurs caractéristiques, ces deux modèles se différencient quand il s'agit de les appliquer pour analyser les systèmes. Les uns s'adaptent mieux aux systèmes de défense, d'énergie et de télécommunication et les autres connus comme modèles de remplacement de bloc, sont spécifiquement utilisés pour l'analyse des systèmes électroniques complexes et des systèmes électriques.

Pour couvrir ces deux modèles, nous avons choisi méticuleusement tous les paramètres de performance à partir de cas d'application tirés de la bibliographie. Des résultats sous différentes formes (graphiques et textes) ont pu ainsi être établis et des conclusions tirées. En outre, à partir de l'étude de la sensibilité de la variation des différents paramètres, nous avons pu établir des domaines de variation et déceler certaines lacunes dans le deuxième modèle. Ceci témoigne de la fragilité de la fonction de renouvellement. Cette fonction a présentée lors des calculs un comportement instable qu'il serait utile de reprendre et d'en faire un cas pour une étude approfondie et ainsi de développer des algorithmes qui facilitent son calcul.

Finalement, cette étude a mis en évidence la complexité pour l'élaboration de modèles mathématiques d'optimisation pour des systèmes multi-composants afin de représenter avec fidélité des systèmes réels.

Bibliographie

- [1] Ait-Kadi D. et Cléroux R. « Optimal block replacement policies with multiple choice at failure ». *Naval Research Logistics* 35:99-110 (1988).
- [2] Ait-Kadi D, Beaucaire C. et Cléroux R « A periodic maintenance model with used equipment and random minimal repair ». *Naval Research Logistics* 37:855-865 (1990).
- [3] Ait-Kadi D. et Cléroux R. « Replacement strategies with mixed corrective actions at failure ». *Comput. Operat. Res.* 18, 141-149. (1991).
- [4] Ait-Kadi D. , Notes de cours, « Optimisation des systèmes » Université Laval. (2006).
- [5] Ait-Kadi D., Notes de cours, « La Gestion de la Maintenance : Concept, outils et stratégie d'implantation ». Université Laval. (2006).
- [6] Ait-Kadi D., Notes de cours, « Fiabilité des systèmes ». Université Laval. (2006).
- [7] Atiquzzaman M. et Sayeed M. A. « Computation Availability of crossbar systems in a non-uniform traffic environment » *Microelectronics and Reliability* 34/12 pp. 1931–1937(1994).
- [8] Barlow R.E. et Hunter L.C. « Optimum preventive maintenance policies ». *Operations Research* 8:90-100 (1960).
- [9] Barlow R.E. et Proschan F. « Mathematical theory of reliability » J. Wiley & Sons New York. (1965).
- [10] Birolini A. « Reliability Engineering: Theory and Practice » Springer 5ed. Pg 173-178(2007).
- [11] Block H., Borges W. et Savist T. « Age dependent minimal repair » *Journal of Applied Probability* 22:370-385 (1985).
- [12] Block H., Borges W. et Savist T. « A general age replacement model with minimal repair ». *Naval Research Logistics, an International journal* 35/5:365-372 (1988).
- [13] Brown M. et Proschan F. « Imperfect repair » *Journal of Applied Probability* 20:851-859 (1983).
- [14] Bruns P. « Optimal maintenance strategies for systems with partial repair options and without assuming bounded costs » *European Journal of Operational Research* 139 pp.146-165. (2002).

- [15] Canfield R. « Cost optimization of periodic preventive maintenance ».IEEE Transactions on Reliability R-35/1:78-81(1986).
- [16] Castillo, E., Conejo A.J., Pedregal, P., García, R. and Alguacil, N « Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science ». Pure and Applied Mathematics Series, Wiley, New York. (2002).
- [17] Chan J.K. et Shaw L. « Modeling repairable systems with failure rates that depend on age & maintenance ».IEEE Transactions on Reliability R-42/:566-570(1993).
- [18] Chan J.K. et Kim J. « On availability of Bayesian imperfect repair model » Statistics & Probability Letters 53/2:181-187 (2001).
- [19] Chan P.K.W. et Downs T. « Two criteria for preventive maintenance » IEEE Transactions on Reliability R-27:272-273. (1978).
- [20] Cheng H. Liang H. «Availability allocation and multi-objective optimization for parallel-series systems »European Journal of Operational Research 180/3:1231-1244. (2007).
- [21] Chun Y.H. « Optimal number of periodic preventive maintenance operations under warranty ». Reliability Engineering & System Safety 37/3:223-225(1992).
- [22] Cox D.R. « Renewal Theory »Methuen, London (1962).
- [23] Dagpunar J.S. et Jack N. « Preventative maintenance strategy for equipment under warranty ». Microelectronics and Reliability 34/6:1089-1093(1994).
- [24] Doyen L. et Gaudoin O. « Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age » Reliability Engineering and System Safety 84/1:45-56 (2004).
- [25] Finkelstein M. « Imperfect repair models for systems subject to shocks ».Applied Stochastic Models & Data Analysis 13/3-4:385-390(1997).
- [26] Fontenot R. et Proschan F. « Some imperfect maintenance models » Abdel Hamed MS., Cinlar E, Quinn J.Reliability Theory and Models Academic press, Orlando Fla.(1984).
- [27] Iyer S. «Availability results for imperfect repair ». Sankhya: The Indian Journal of statistics 54/2, B: 249-259(1992).
- [28] Jason W. R. « Optimal-maintenance modeling on finite time with technology replacement and changing repair costs » Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. (2000).

- [29] Jaturonnate J., Murthy D.N.P et Boondiskulchok R. «Optimal preventive maintenance of leased equipment with corrective minimal repairs ». *European Journal of Operational Research* 174:201-215. (2006).
- [30] Jayabalan V. et Chaudhuri D. « Optimal maintenance and replacement policy for a deteriorating system with increased mean downtime ». *Naval Research Logistics, An International journal* 39:67-78 (1995).
- [31] Kabak I.W. « System availability and some design implications » *Operational Research* 17:827-837. (1969).
- [32] Kijima M. Morimura H. et Suzuki Y. « Periodical replacement problem without assuming minimal repair ». *European Journal of Operational Research* 37/2:194-203(1988).
- [33] Kijima M. « Some results for repairable system with general repair ». *Journal of Applied Probability* 26:89-102(1989).
- [34] Kijima M. et Nakagawa T. « Accumulative damage shock model with imperfect preventive maintenance ». *Naval Research Logistics, An International journal* 38/2:145-156(1991).
- [35] Kijima M. et Nakagawa T. « Replacement policies of a shock model with imperfect preventive maintenance ». *European Journal of Operational Research* 57/100-110(1992).
- [36] Lee K.W. «Stochastic models for random-request availability» *IEEE Transactions on Reliability*, 49/1: pg 180 – 84.
- [37] Lewis, E.E. « Introduction to Reliability Engineering, » John Wiley & Sons, (1987).
- [38] Li H. et Shaked M. « Imperfect Repair models with preventive Maintenance » *Journal of Applied Probability* 40/4:1043-1050 (2003).
- [39] Lie C. et Chun Y. « An algorithm for preventive maintenance policy » *IEEE Transactions on Reliability* R-35/1:71-75 (1986).
- [40] Lim J. « Bayesian imperfect repair model » *Communications in Statistics-Theory and Methods* 27/4:965-984. (1998).
- [41] Liu X.G., Makis V. et Jardine A.K.S. « A replacement model with overhauls and repairs ». *Naval Research Logistics* 42:1063-1079 (1995).
- [42] Makis V. et Jardine A. « Optimal replacement of a system with imperfect repair ». *Microelectronics and Reliability* 31/2-3:381-388 (1991).
- [43] Malik M. « Reliable preventive maintenance policy » *AIIE Transactions* 11/3:221-228 (1979).

- [44] Najahi Y. « Outils d'aide à l'implantation d'un système de gestion de la maintenance ». Université Laval. (2006).
- [45] Nakagawa T. et Goel A.L. « A note on availability for a finite interval » IEEE Transactions on Reliability R-22:271-272. (1973).
- [46] Nakagawa T. et Shunji O. « The optimum repair limit replacement policies » Operational Research Quarterly Vol.25, No.2 1974, pp.311-317. (1974).
- [47] Nakagawa T « Optimum policies when preventive maintenance is imperfect » IEEE Transactions on Reliability R-28/4:331-332(1979).
- [48] Nakagawa T. «A summary of imperfect maintenance policies with minimal repair ». RAIRO Recherche Operationnelle 14:249-255 (1980).
- [49] Nakagawa T. et Yasui K. « Optimum policies for a system with imperfect maintenance » IEEE Transactions on Reliability R-36/5:631-633. (1987).
- [50] Nakagawa T. « A summary of periodic replacement with minimal repair at failure ». Journal of Operations Research Society of Japan 24:213-228.
- [51] Nakagawa T. « Periodic and sequential preventive maintenance policies ». Journal of applied Probability 23/2:536—542
- [52] Nakagawa T. « Maintenance Theory of Reliability ». Springer (2005).
- [53] Shaked M. et Shanthikumar J.G. « Multivariate imperfect repair ». Operations Research 34:437-448 (1986).
- [54] Sheu S.H. et Griffith W.S. « Multivariate imperfect repair ». Journal of applied probability 29/4:947-956 (1992).
- [55] Sheu SH, Kuo C.M. et Nakagawa T. « Extended optimal age replacement policy with minimal repair ».RAIRO Recherche Operationnelle 27/3:337-351 (1993).
- [56] Sheu SH, Griffith W. et Nakagawa T « Extended optimal replacement model with random minimal repair costs ». European Journal of Operational Research 85:636-649. (1995).
- [57] Sheu S.H., Lin Y.B. et Liao G. L. « Optimum policies for a system with general imperfect maintenance ».Reliability Engineering and System Safety 91:362-369(2006).
- [58] Subramanian R. Natarajan R. « Two-unit redundant system with different types of failure and 'imperfect repair' » Microelectronics and Reliability 30/4:697-699. (1990).

- [59] Süleyman Ö. « Optimal maintenance policies in random environments » *European Journal of Operational Research* 82 283-294. (1995).
- [60] Suresh P. et Chaudhuri D. « Preventive maintenance scheduling for a system with assured reliability using fuzzy set theory ». *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering* 1/4:497-513 (1994).
- [61] Uematzu K. et Nishida T. « One- unit system with a failure rate depending upon the degree of repair ». *Mathematica Japonica* 32/1:139-147(1987).
- [62] Wang H. et Pham H. « Accumulative damage shock model with imperfect preventive maintenance ». *Naval Research Logistics, an International journal* 38:145-156(1996).
- [63] Wang H.Z. et Pham H. « Optimal age-dependent preventive maintenance policies with imperfect maintenance » *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering* 3/2:119-135. (1996).
- [64] Wang H.Z. et Pham H. « Optimal maintenance policies for several imperfect maintenance models » *International Journal of Systems Science* 27/6:119-135. (1996).
- [65] Wang H.Z. et Pham H. « A quasi renewal process and its application in the imperfect maintenance. » *International Journal of Systems Science* 27/10:1055-1062. (1996).
- [66] Wang H.Z. et Pham H. « Imperfect Maintenance » *European Journal of Operational Research* 94:425-438. (1996).
- [67] Wang H. et Pham H. « Availability and optimal maintenance of series system subject to imperfect repair » *International Journal of Plant Engineering and Management* 2 (1997).
- [68] Wang H.Z. et Pham H. « Some maintenance models and availability with imperfect maintenance in production systems » *Annals of Operations Research* 91:305-318. (1999).
- [69] Wang H.Z. et Pham H. « Availability and maintenance of series systems subject to imperfect repair and correlated failure and repair » *European Journal of Operational Research* 174:1706-1722. (2006).
- [70] Wang H.Z. et Pham H. « Reliability and Optimal Maintenance » *Springer Series* (2006).
- [71] Wenyu S. et Ya-Xiang Y. « Optimization Theory and methods Nonlinear Programming », Springer Science (2006).
- [72] Whitaker L. et Samaniego F. « Estimating the reliability of systems subject to imperfect repair ». *Journal of American Statistical Association* 84/405:301-309 (1989).
- [73] Wu S. et Clements-Croome D. « Optimal Maintenance policies under different operational schedules » *IEEE Transactions on Reliability*, Vol 54, No.2 pp.338-346.(2005).

[74] Yang S.et Lin T. « On the application of quasi renewal theory in optimization of imperfect maintenance policies ».Proceedings of 2005 Annual Reliability and Maintainability Symposium pp.410-415(2005).

[75] Yosef S. « An optimal maintenance model for life cycle costing analysis » Reliability Engineering 3 pp.173-177. (1982).

[76] Zhao M. « Availability for repairable components and series system » IEEE Transactions on Reliability R-43/2:329-334. (1994).

Annexe A : Calculs pour le modèle 1

Optimisation de la disponibilité pour le modèle 1

En utilisant le logiciel Maple, on peut résoudre l'équation non linéale comme suit :

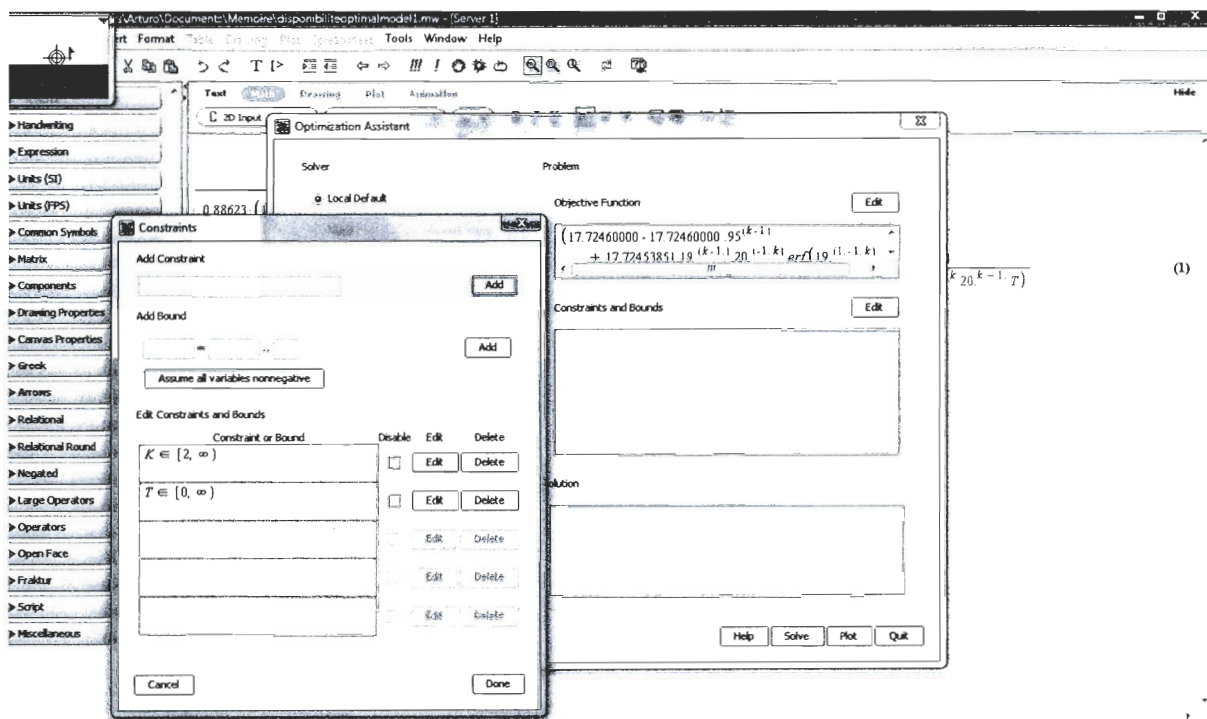
$$\begin{aligned} & \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^{1-k} \cdot t)^2} dt \right) / \\ & \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^{k-1} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^{1-k} \cdot x)^2} dx \right) \\ & (17.72460000 - 17.724600000 \cdot 95^{k-1} \\ & + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-k} \cdot 20^{k-1} \cdot T)) \\ & (17.12460000 - 17.724600000 \cdot 95^{k-1} + 0.60000000001 \cdot 05^{k-1} \\ & + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-k} \cdot 20^{k-1} \cdot T)) \end{aligned}$$

On introduit l'équation de la disponibilité :

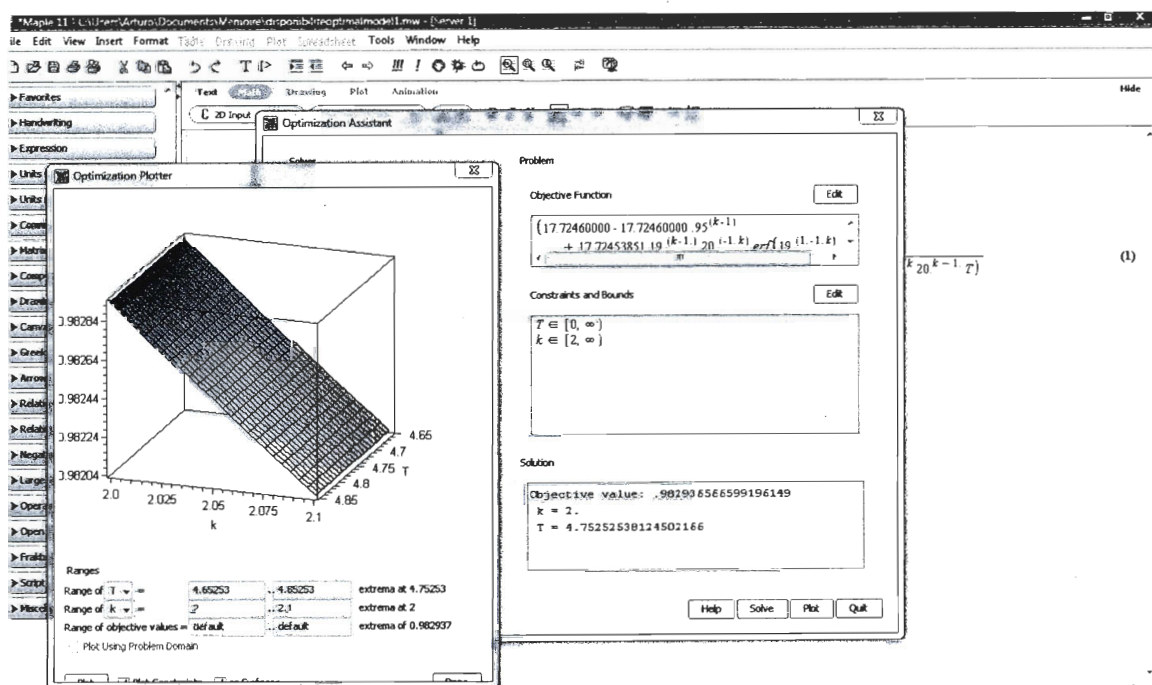
The screenshot shows the Maple software interface. The main workspace contains the following equation, labeled (1):

$$\frac{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^{1-k} \cdot t)^2} dt}{\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^{k-1} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^{1-k} \cdot x)^2} dx} \cdot \frac{17.72460000 - 17.724600000 \cdot 95^{k-1} + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-k} \cdot 20^{k-1} \cdot T)}{17.12460000 - 17.724600000 \cdot 95^{k-1} + 0.60000000001 \cdot 05^{k-1} + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-k} \cdot 20^{k-1} \cdot T)}$$

Après cela, on utilise l'assistant d'optimisation. Tout de suite on introduit la fonction objective et les contraintes :



Et on obtient aussi les valeurs d'optimisation et la graphique respective.



Optimisation du coût du modèle 1

On répète la même procédure que dans la première partie, mais avec l'équation de coût suivante :

$$\left((k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \cdot 0.06 - 2 \cdot e^{-(0.95^1 - k \cdot T)^2} + 12 \right) \left/ \left(\frac{0.88623(1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^{k-1} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right) \right.$$

$$\left(k + 11 + 0.03000000000(k-1)(k-2) - 2e^{-(0.95^1 - k)^2 T^2} \right) \left/ \left(17.12460000 - 17.72460000 \cdot 0.95^{k-1} + 0.6000000000 \cdot 1.05^{k-1} + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-1 \cdot k} 20^{k-1} \cdot T) \right) \right.$$

On introduit l'équation de coût :

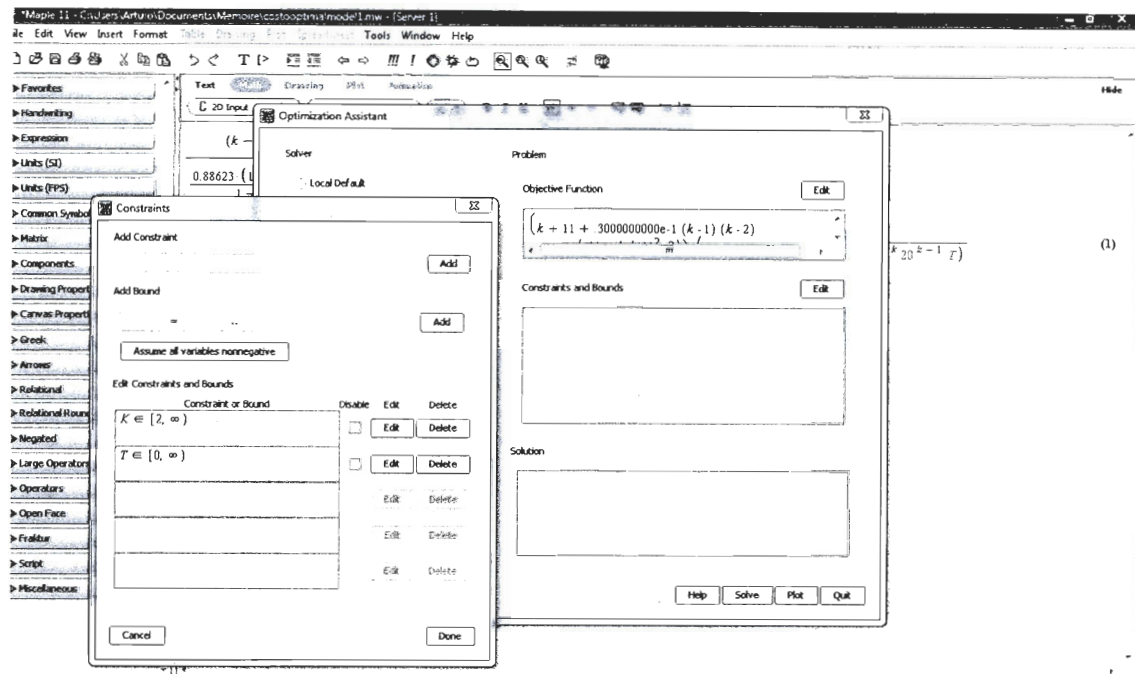
The screenshot shows the Maple 11 software interface. The main window displays the following mathematical expression, which is the cost equation derived from the text above:

$$\frac{(k-1) + \frac{(k-1)(k-2)}{2} \cdot 0.06 - 2 \cdot e^{-(0.95^1 - k \cdot T)^2} + 12}{\frac{0.88623(1 - 0.95^{k-1})}{1 - 0.95} + \frac{0.03(1.05^{k-1} - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx}$$

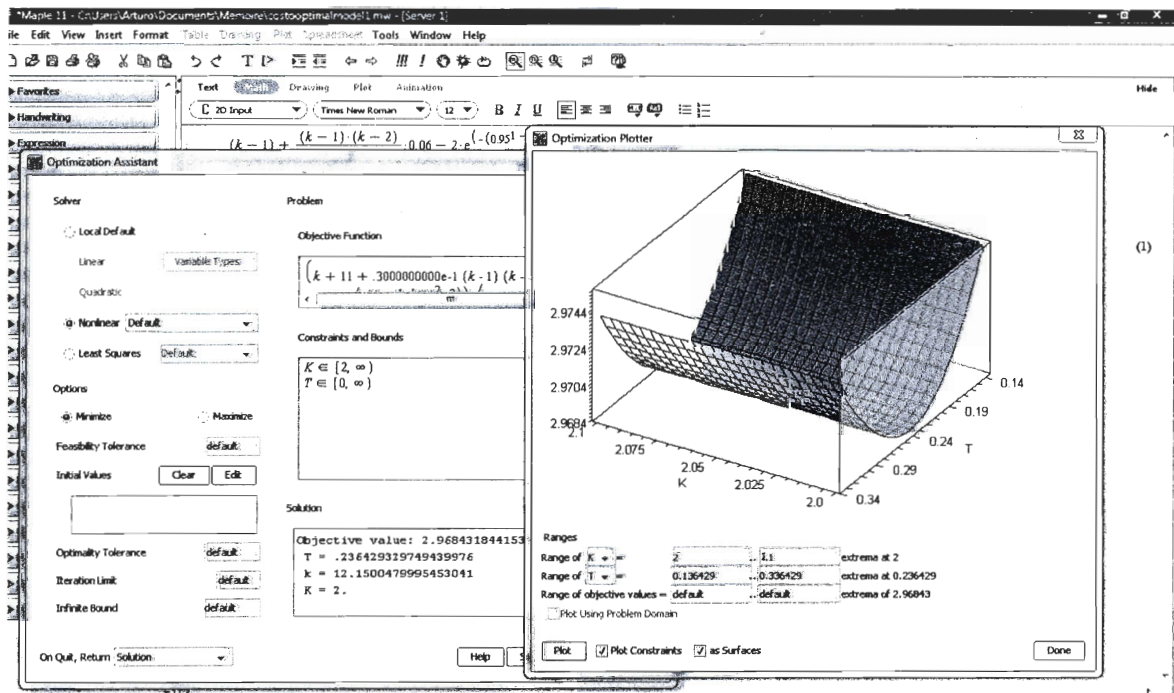
$$\frac{k + 11 + 0.03000000000(k-1)(k-2) - 2e^{-(0.95^1 - k)^2 T^2}}{17.12460000 - 17.72460000 \cdot 0.95^{k-1} + 0.6000000000 \cdot 1.05^{k-1} + 17.7245385119 \cdot 20^{-1 \cdot k} \operatorname{erf}(19^{1-1 \cdot k} 20^{k-1} \cdot T)} \quad (1)$$

The interface includes a menu bar (File, Edit, View, Insert, Format, Table, Drawing, Plot, Spreadsheet, Tools, Window, Help), a toolbar with various icons, and a left-hand sidebar with categories like Favorites, Handwriting, Expression, Units, etc. The main workspace shows the equation being entered, with the final result labeled as (1).

Ensuite, on introduit les contraintes :



Et on obtient la valeur optimale et le graphique comme suit :



Optimisation de la disponibilité assujettie à une contrainte de coût

Maintenant, on introduit la fonction de disponibilité assujettie à une contrainte de coût.

Fonction objective :

$$\left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot t)^2} dt \right) / \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^k - 1 - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right)$$

Contrainte de coût :

$$\left((k - 1) + \frac{(k - 1) \cdot (k - 2)}{2} \cdot 0.06 - 2 \cdot e^{-(0.95^1 - k \cdot T)^2} + 12 \right) / \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^k - 1 - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right)$$

On introduit les valeurs de la fonction objective et les différentes contraintes :

The screenshot shows the Microsoft Excel Solver interface. The Solver Parameters dialog box is open, and the Solver Options dialog box is also visible. The Solver Parameters dialog shows the objective function and constraints. The Solver Options dialog shows the optimization assistant and various options.

Solver Parameters:

- Set Objective: $\left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot t)^2} dt \right) / \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^k - 1 - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right)$
- To: **Max Of**
- By Changing Variable Cells: k
- Subject to the Constraints:
 - $k \in [2, \infty)$
- Assume all variables nonnegative
- Select a Solving Method: **GRG Nonlinear engine**
- Options: **Make Unconstrained Variables Non-Negative** (checked)
- Help: **Help on Solver Problems**

Solver Options:

- Optimization Assistant: **Optimization Assistant** (checked)
- Iterations: **12**
- Maximum Time: **1**
- Maximum Iterations: **100**
- Maximum Time Per Iteration: **0.1**
- Resolution: **0.000001**
- Help: **Help on Solver Options**

Problem:

Objective Function: $\left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot t)^2} dt \right) / \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^k - 1 - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right)$

Constraints and Bounds:

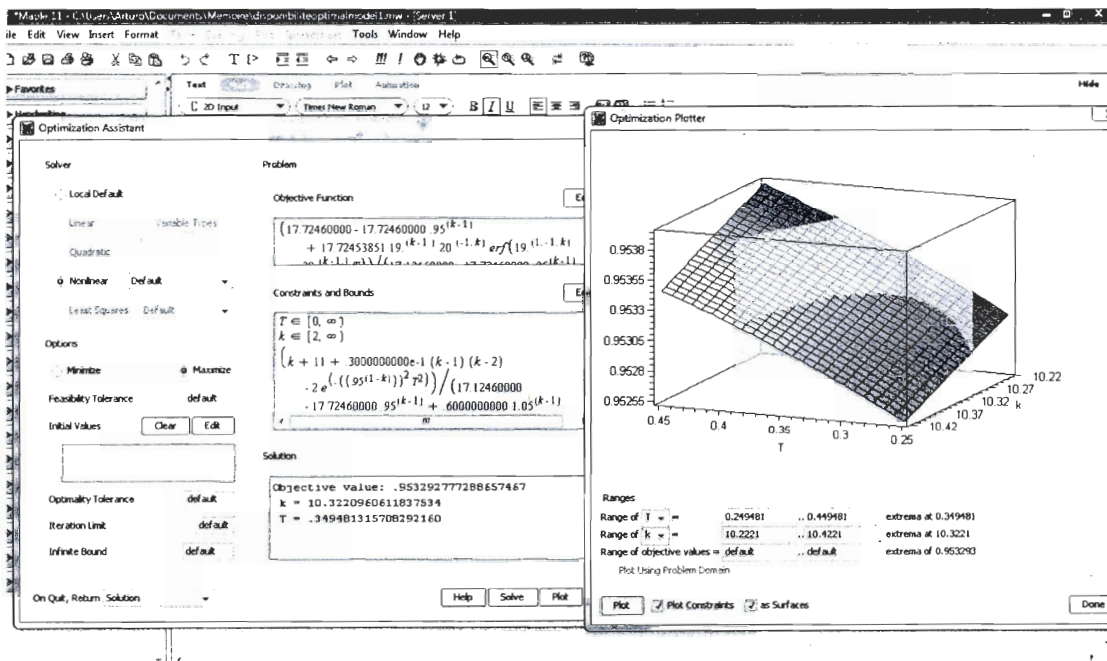
Constraint or Bound	Disable	Edit	Delete
$T \in [0, \infty)$	<input type="checkbox"/>	Edit	Delete
$k \in [2, \infty)$	<input type="checkbox"/>	Edit	Delete
$\left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot t)^2} dt \right) / \left(\frac{0.88623 \cdot (1 - 0.95^k - 1)}{1 - 0.95} + \frac{0.03 \cdot (1.05^k - 1 - 1)}{1.05 - 1} + \int_0^T e^{-(0.95^1 - k \cdot x)^2} dx \right)$	<input type="checkbox"/>	Edit	Delete
	<input type="checkbox"/>	Edit	Delete
	<input type="checkbox"/>	Edit	Delete

Solution:

Iteration Limit: **default**

Infinite Bound: **default**

On obtient la valeur de disponibilité optimale sous la condition de coût pré établi :

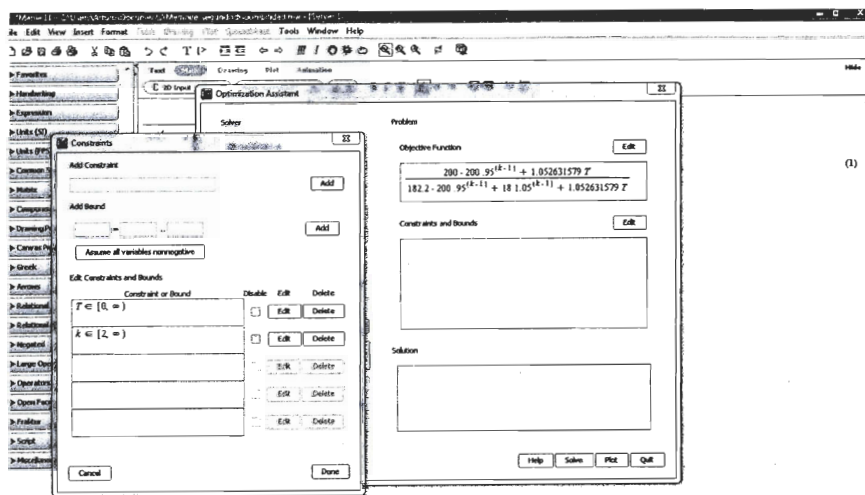
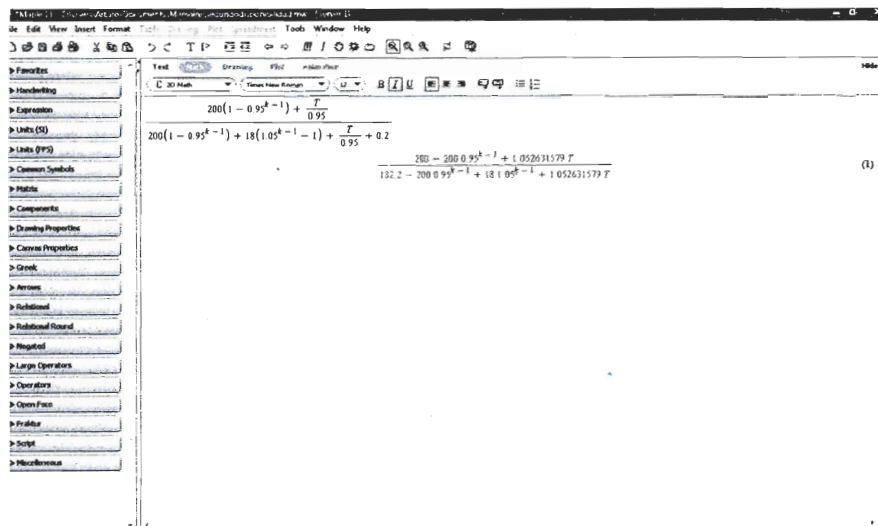


Annexe B : Calculs pour le modèle 2

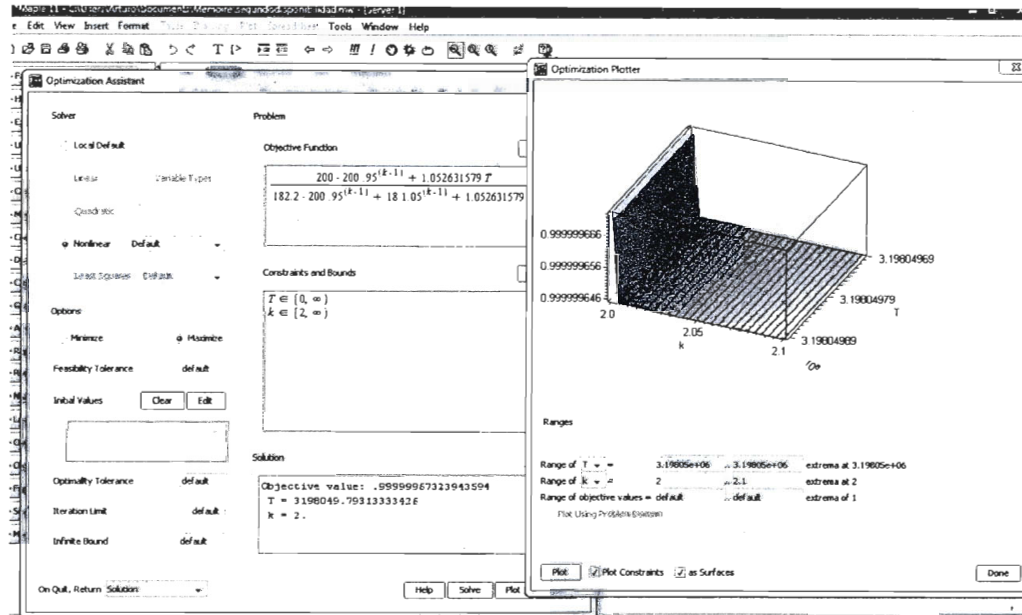
Optimisation de la disponibilité

De la même façon qu'avec le modèle 1, on utilise le logiciel Maple pour réaliser les calculs d'optimisation.

D'abord on introduit la fonction objective et certaines conditions :

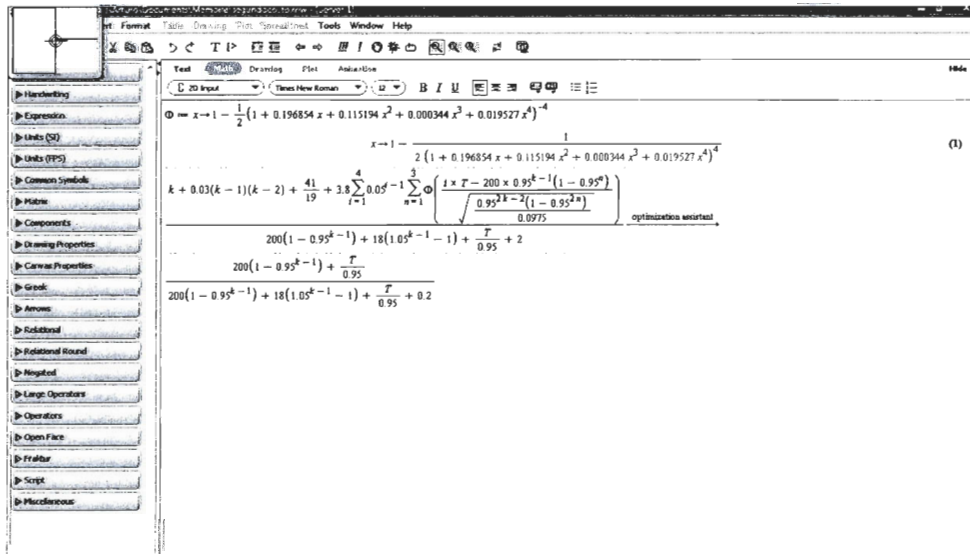


On obtient la valeur optimale de la disponibilité et son graphique.



Optimisation de coût assujettis à une contrainte de disponibilité

On introduit comme fonction objective l'équation de coût et comme contrainte, la fonction de la disponibilité



De la même façon on l'a fait avec le logiciel Mathematica :

The screenshot shows the Mathematica 6.0 interface. The main window displays the following code and results:

```

x[x_] := (1 - 1/2 (1 + 0.196854 x + 0.115194 (x)^2 + 0.000344 (x)^3 + 0.019527 (x^4))^-4)

k = 3
3

T = 7.2870
7.287

k + 0.05 (k - 1) (k - 2) + (41/19) + 3.8 Sum_{i=1}^k 0.05^{i-1} Sum_{n=1}^3 x [ (1 - 100 * 0.95^{k-1} (1 - 0.90^n)) / (0.95^2 k - 2 (1 - 0.90^2 n)) ]
-----
200 (1 - 0.95^{k-1}) + 18 (1.05^{k-1} - 1) + T / 0.95 + 0.2
0.56818
    
```

On the right side, there are several palettes open:

- Algebraic Manipulation:** Expand[e], ExpandAll[e], Factor[e], Together[e], Apart[e], Cancel[e], Simplify[e], FullSimplify[e], FunctionExpand[e], TrigExpand[e], TrigFactor[e], TrigReduce[e], ExpToTrig[e], TrigToExp[e], PowerExpand[e], ComplexExpand[e].
- Basic Math:** Mathematical symbols and functions.
- Basic Typesetting:** Symbols and characters for typesetting.

On obtient la valeur de coût minimale assujéti à la disponibilité attendue et le graphique suivant :

The screenshot shows the Optimization Solver and Plotter interface. The Solver window displays the following information:

Problem

Objective Function: $k + 3e-1 k(k-2) + 14.12781974 - 1.900000000$

Constraints and Bounds:

$$T \in [0, \infty)$$

$$k \in [2, \infty)$$

$$\leq (200 - 200 \cdot 95^{(k-1)} + 1.052631579 T) / (182.2 - 200 \cdot 95^{(k-1)} + 18 \cdot 1.05^{(k-1)} + 1.052631579 T)$$

Solution

Objective value: .524079503965229953
 T = 8.95748711677411436
 k = 2.4419864059150881

The Optimization Plotter shows a 3D surface plot of the objective function over the range of k and T. The axes are labeled k, T, and the objective value. The plot shows a surface with a minimum point. The ranges for the variables are:

Range of T = 8.85749 to 9.05749 (extrema at 8.95749)
 Range of k = 2.34199 to 2.54199 (extrema at 2.44199)
 Range of objective values = default to default (extrema of 0.52408)