



Processus aléatoires sur des arbres

Mémoire

Laurent Pelletier

Maîtrise en mathématiques
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© Laurent Pelletier, 2014

Résumé

En développant des outils pour étudier les chaînes de Markov réversibles ainsi qu'une classification des arbres par leur constante de branchement, on pourra traiter du problème du retour à l'origine d'une marche aléatoire sur un arbre. Ces mêmes outils nous permettront d'étudier la percolation sur les arbres. En particulier, il sera possible de relier explicitement la constante de branchement d'un arbre à la valeur critique pour la marche aléatoire biaisée et à la valeur critique de percolation.

Par la suite, on détaille comment en arriver à des bornes intéressantes pour deux valeurs critiques du processus de contact sur l'arbre homogène, un résultat de Pemantle. On généralise aussi un résultat de Schinazi qui nous permet de trouver une borne inférieure pour la valeur critique de survie du processus de contact sur le recouvrement universel d'un graphe fini.

Table des matières

Résumé	iii
Table des matières	v
Liste des figures	vii
Avant-propos	ix
Introduction	1
1 Réseaux électriques	3
1.1 Chaînes de Markov et graphes valués	3
1.2 Problème de Dirichlet	5
1.3 Fonctions et opérateurs	7
1.4 Énergie et principe de Rayleigh	9
1.5 Passage au cas infini	12
2 Constante de branchement	19
2.1 Mesure de l'accroissement	20
2.2 Croissance et constante de branchement	25
2.3 Arbres périodiques	28
3 Marche aléatoire et percolation sur l'arbre	33
3.1 Marche aléatoire sur l'arbre	33
3.2 Percolation	35
4 Processus de contact	43
4.1 L'arbre homogène	45
4.2 Recouvrement universel	53
Conclusion	61
Bibliographie	63

Liste des figures

1.1	Loi des réseaux en parallèle et en série	13
1.2	Les ensembles $\partial\bar{V}_k$	18
1.3	Graphe réduit	18
2.1	Arbre binaire et arbre \mathbb{T}^*	20
2.2	Arbre sphériquement symétrique avec $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1$ et $a_3 = 2$	26
2.3	Arbre de recouvrement d'un graphe orienté issu du sommet v'	29
4.1	Graphe biparti associé à une configuration dans \mathbb{T}^2	50
4.2	Représentation graphique du processus de contact sur \mathbb{Z}	55
4.3	Recouvrement universel du graphe biparti $K_{2,3}$	57

Avant-propos

Pour vous, les prochaines lignes représentent le début de la lecture de ce mémoire (ou la seule chose que vous en lirez). Pour moi, l'écriture de cet avant propos conclut 5 années d'études à l'Université Laval. Mes premiers remerciements vont à toutes les personnes extraordinaires que j'ai eu la chance de côtoyer durant mon passage au Département de mathématiques et statistique. La vie étudiante dynamique et l'ambiance chaleureuse m'ont fait vivre des moments mémorables et m'ont permis de garder le cap dans les moments plus difficiles. Je veux remercier plus particulièrement Jean Auger, Andréa Deschênes et Laurent Robert-Veillette avec qui j'ai partagé toute cette aventure. Andréa et Laurent ont d'ailleurs osé lire et corriger la gênante première version de mon mémoire.

Merci à mes parents qui m'ont toujours soutenu moralement et financièrement dans mes projets. Merci aussi à mes frères qui ont maintenant pris un coup de maturité tout en restant jeunes et fous.

Merci à mon superviseur, Claude Bélisle, pour ses conseils judicieux tant en mathématiques que pour le sport et la vie en général. J'en profite aussi pour saluer les professeurs du département qui ont, chacun à leur manière, eu une influence sur mon cheminement en mathématiques. Le personnel du département a aussi toujours été d'une grande aide pour organiser différentes activités et régler tous mes problèmes avec le sourire.

J'ai eu la chance d'avoir du financement au cours de mes études à la maîtrise, ce qui m'a permis de me consacrer à temps plein à mes travaux. Le Département de mathématiques et statistique m'a offert une bourse pour mes deux premières sessions à la maîtrise. J'ai d'ailleurs eu la chance d'assister de nombreux cours en tant qu'auxiliaire d'enseignement en plus de travailler au Centre d'Apprentissage et de Dépannage. Ces expériences furent extrêmement enrichissantes pour moi. Je remercie aussi le CRSNG de m'avoir octroyé une bourse de recherche pour ma deuxième année de maîtrise.

Introduction

L'importance de l'étude des graphes semble être une évidence de nos jours. On n'a qu'à penser à notre réseau social préféré ou au chemin optimal à prendre pour faire les courses du dimanche et un graphe apparaît sans prévenir dans notre tête. Une des disciplines qui a entretenu les liens les plus étroits avec la théorie des graphes est très certainement l'informatique. La théorie des graphes met à la disposition des informaticiens une panoplie de résultats et de techniques afin d'attaquer des problèmes d'algorithmique. Par exemple, le théorème Max-flow Min-cut (nous démontrerons une version de ce théorème au chapitre 2) est à la base d'un algorithme de pairage d'éléments bipartis. À l'inverse, la puissance des ordinateurs est très utile aux mathématiciens. Un des fruits les plus connus de cette collaboration est le théorème des quatre couleurs, démontré en 1976 à l'aide de l'ordinateur [AH76].

La théorie des probabilités a elle aussi été mêlée à la théorie des graphes. Il y a deux façons évidentes de mélanger probabilités et graphes. La première consiste à étudier des graphes dont l'origine ou la dynamique est aléatoire. De ce côté, la théorie des réseaux «small-world» a connu une popularité fulgurante au début du 21^e siècle. Cette théorie tente de décrire la structure et la dynamique d'un graphe représentant une population dont les individus se regroupent en cliques, mais dont chaque paire d'individus peut être reliée par un chemin assez court. Un autre angle de vue consiste à étudier certaines expériences aléatoires sur un graphe fixé. C'est ce qui nous intéressera plus particulièrement pour la suite, bien qu'on considérera quelques graphes aléatoires en cours de route.

L'objectif des trois premiers chapitres de ce mémoire est d'étudier la marche aléatoire et la percolation sur les arbres infinis, soit des graphes infinis sans cycle. Au premier chapitre, on explique le lien entre les chaînes de Markov réversibles et les réseaux électriques. Ce lien nous permettra d'avoir un nouveau point de vue sur la marche aléatoire sur un graphe et ainsi d'obtenir des résultats intéressants.

Par la suite, on voudra classifier les arbres d'une manière efficace. Cette classification, qui fera appel à la constante de branchement d'un arbre, nous permettra d'étudier ces graphes en groupes au lieu de les étudier un à un. Le troisième chapitre viendra terminer la discussion sur la marche aléatoire et la percolation en reliant directement ces deux sujets à la constante de branchement d'un arbre.

Au dernier chapitre, on étudiera le processus de contact, un modèle pour la propagation d'une maladie dans un graphe. Les outils pour étudier le processus de contact seront différents de ceux utilisés plus tôt et il sera nécessaire d'introduire quelques notions de théorie des martingales. On détaillera pour commencer une démonstration de Pemantle pour les valeurs critiques du processus de contact sur l'arbre homogène. Dans un deuxième temps, on explique une approche qui nous a permis de trouver une borne inférieure à la valeur critique de survie pour une famille d'arbres un peu plus généraux.

Chapitre 1

Réseaux électriques

La théorie des réseaux électriques apporte un point de vue élégant sur les chaînes de Markov réversibles. Les nouvelles idées issues de cette théorie mènent à des démonstrations simples de résultats plus difficiles à attaquer avec les outils classiques de la théorie des chaînes de Markov. Ces idées seront particulièrement utiles à l'étude de la marche aléatoire dans un graphe infini, le premier processus aléatoire que nous étudierons plus en détail.

Les outils développés dans cette section ont tous une motivation physique. Ces outils seront replacés dans un cadre mathématique approprié et une interprétation probabiliste sera faite aussi souvent que possible. Il existe d'ailleurs plusieurs approches à la construction de la fonction potentielle et du flot de courant, deux objets importants de ce chapitre. On donne ici celle qui donne le plus d'intuition en ce qui concerne notre objectif d'étudier les marches aléatoires. C'est l'approche privilégiée dans l'excellent livre de Doyle et Snell [DS84]. Il est toutefois possible de procéder en étudiant les arbres de recouvrement d'un graphe comme le fait Grimmett dans [Gri10]. Une autre référence pertinente est celle des notes de Pete [Pet13] qui met l'accent sur les liens entre les outils développés dans le cas discret et la théorie du potentiel classique.

Pour commencer, on étudiera seulement les graphes qui possèdent un nombre fini de sommets. Les outils développés seront ensuite utiles à l'analyse des graphes infinis par une limite de sous-graphes finis. Avant tout, on décrit le parallèle entre les chaînes de Markov réversibles et les graphes valués.

1.1 Chaînes de Markov et graphes valués

Définition. Une *chaîne de Markov* (homogène) sur un espace d'états dénombrable V avec loi initiale $\kappa = (\kappa_v : v \in V)$ et matrice stochastique $P = (p_{v,w})_{v,w \in V}$ est une suite de variables aléatoires $(X_n : n \geq 0)$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que

1. $\mathbb{P}(X_0 = v) = \kappa_v \quad \forall v \in V$;
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = w | (X_0, X_1, \dots, X_n) = (v_0, v_1, \dots, v_n)) = \mathbb{P}(X_{n+1} = w | X_n = v_n) \quad \forall n \geq 0$ et
 $(v_0, v_1, \dots, v_n, w) \in V^{n+2}$ tel que $\mathbb{P}((X_0, X_1, \dots, X_n) = (v_0, v_1, \dots, v_n)) > 0$;
3. $\mathbb{P}(X_{n+1} = w | X_n = v) = p_{v,w}$ pour tout $n \geq 0$ et $v, w \in V$.

On peut voir la chaîne de Markov comme une particule qui se déplace sur l'ensemble V . Elle prend tout d'abord position selon la loi κ . Si la particule se trouve en v , elle choisit sa prochaine destination selon la loi $(p_{v,w})_{w \in V}$, indépendamment de son passé et du temps.

La deuxième condition est appelée propriété de Markov et la troisième homogénéité dans le temps. De nombreux ouvrages traitent de la théorie des chaînes de Markov à temps discret. Les livres de Norris [Nor98] et Billingsley [Bil95] couvrent beaucoup plus que ce qui nous sera nécessaire.

Définition. Une *chaîne de Markov réversible* sur un espace d'états V est une chaîne de Markov pour laquelle il existe une distribution de probabilité π sur V avec la propriété que pour chaque $v, w \in V$,

$$\pi_v p_{v,w} = \pi_w p_{w,v}.$$

En d'autres mots, les échanges entre deux états sont égaux lorsque la chaîne a π pour loi initiale. Il est facile de montrer que si une chaîne est réversible par rapport à une distribution, alors cette distribution est stationnaire pour la chaîne, c'est à dire que $\pi P = \pi$. Le terme *réversible* vient du fait que si on prend π comme loi initiale, alors la chaîne de Markov induite par une inversion de temps a exactement les mêmes propriétés que la chaîne de Markov initiale.

Alternativement, on choisit un ensemble de sommets V et une fonction C qui associe à chaque couple de sommets $(v, w) \in V^2$ une valeur $C_{v,w} \geq 0$ de façon à ce que $C_{v,w} = C_{w,v}$. On donnera le nom de *graphe valué* à cette nouvelle construction. Le terme *graphe* est utilisé car il est facile de voir la construction comme un graphe $G = (V, E)$ où $E = \{(v, w) \in V^2 : C_{v,w} > 0\}$. Afin de mettre l'accent sur le choix de valuation, on écrira (V, C) pour décrire le graphe valué. Il n'y a aucune perte d'information puisque E est défini à partir de V et C . On considère des arêtes orientées même si $(v, w) \in E \Leftrightarrow (w, v) \in E$. La raison est qu'on voudra considérer des fonctions sur les arêtes qui décrivent un déplacement d'un sommet à un autre. Puisqu'il n'y a pas d'orientation naturelle dans un graphe, on aura besoin d'avoir des arêtes orientées pour clarifier le sens du déplacement. Les valuations associées à chacune des arêtes sont appelées *conductances* dans le contexte de la physique électrique.

À partir d'un graphe valué, il est possible de construire une distribution π et une matrice stochastique P associées à une chaîne de Markov réversible sur V en prenant $p_{v,w} = C_{v,w}/C_v$ et $\pi_v = C_v / \sum_{w \in V} C_w$ où

$C_w = \sum_{u \in V} C_{w,u}$. La distribution π est bel et bien réversible par rapport aux probabilités de transition puisque

$$\pi_v p_{v,w} = \frac{C_v}{\sum_{w \in V} C_w} \frac{C_{v,w}}{C_v} = \frac{C_w}{\sum_{w \in V} C_w} \frac{C_{w,v}}{C_w} = \pi_w p_{w,v}.$$

Inversement, on peut voir une chaîne de Markov réversible comme un graphe où les sommets sont les éléments de V et une arête σ allant de v à w est tracée si et seulement si $p_{v,w} > 0$. On prend par convention $C_{v,w} = \pi_v p_{v,w}$ mais la valuation $C_{v,w} = k \pi_v p_{v,w}$ serait un choix valable pour tout $k > 0$.

On évitera de parler des chaînes réversibles qui possèdent des probabilités de retour non nulle ($p_{v,v} > 0$) et des graphes pour lesquels $C_{v,v} > 0$. En imposant ces conditions, la correspondance tient toujours et nous permet de parler de «la» chaîne de Markov réversible associée à un graphe valué.

1.2 Problème de Dirichlet

À partir de maintenant, on travaillera sur $G = (V, C)$ un graphe valué en empruntant aussi les notations associées à la chaîne de Markov réversible associée. On veut donner un équivalent discret au problème de Dirichlet. Ce sera notre porte d'entrée pour introduire les concepts physiques reliés à l'électricité.

Définition. Une *fonction harmonique* h sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^d$ est une fonction $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Delta h = 0$ en tout point du domaine. De façon équivalente, h satisfait la propriété de la moyenne :

$$h(v) = \frac{1}{S_d} \int_{\partial B(v,r)} h d\mu = \frac{1}{V_d} \int_{B(v,r)} h d\sigma$$

pour tout $v \in U$ et $r > 0$ tel que $B(v,r) \subset U$ et où μ et σ sont respectivement les mesures de Lebesgue associées à la surface et à l'intérieur de $B(v,r)$. Les constantes S_d et V_d sont respectivement $\mu(\partial B(v,r))$ et $\sigma(B(v,r))$.

Étant donné un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction continue $f : \partial U \rightarrow \mathbb{R}$, le problème de Dirichlet classique demande de trouver une fonction continue $h : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit harmonique sur U et qui coïncide avec f sur ∂U . L'importance du problème de Dirichlet en physique (et par le fait même en mathématiques) est principalement due aux multiples applications de l'équation de Laplace. On pense entre autres à la propagation de la chaleur et au potentiel électrique. Afin d'étudier les mêmes phénomènes sur des structures discrètes, il est important de donner un équivalent naturel à la notion de fonction harmonique. La prochaine définition est inspirée de la propriété de la moyenne. On verra plus tard qu'il est aussi possible de relier cette définition à un opérateur apparenté au Laplacien.

Définition. Une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *harmonique* sur $W \subset V$ si

$$h(v) = \sum_{w \in V} h(w) \frac{C_{v,w}}{C_v} = \sum_{w \in V} h(w) p_{v,w} \quad \forall v \in W.$$

On se donne $W \subset V$, $W \neq V$ et une fonction $f : W^c \rightarrow \mathbb{R}$ qui fait office de condition au bord. Pour la version discrète au problème de Dirichlet, on veut trouver une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui soit harmonique sur W et qui coïncide avec f sur W^c .

Une façon de construire une telle fonction est de considérer le jeu suivant : un joueur débute à un sommet $v \in V$ et se déplace selon les probabilités de transitions induites par le graphe jusqu'à ce qu'il frappe l'ensemble W^c . À ce moment il empêche une somme correspondant à la valeur de la fonction f évaluée au point où il se trouve. Quel montant le joueur serait-il prêt à payer pour jouer sachant son point de départ ? Ce montant sera notre candidat pour $h(v)$.

Théorème 1 (Existence). *Soit $G = (V, C)$ un graphe valué fini et connexe, $W \subset V$, $W \neq V$ et $f : W^c \rightarrow \mathbb{R}$. Alors il existe une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ qui est harmonique sur W et qui coïncide avec f sur W^c .*

Démonstration. Au paragraphe précédent, on a eu l'idée de définir

$$h(v) = \mathbb{E}(f(X_{\tau_{W^c}}) | X_0 = v)$$

où $(X_n : n \geq 0)$ est la chaîne de Markov induite par le graphe valué et $\tau_{W^c} = \min\{n \geq 0 : X_n \in W^c\}$. On remarque facilement que la fonction h coïncide avec f sur W^c puisque dans le cas où $v \in W^c$, on a $\tau_{W^c} = 0$. De plus, la connexité du graphe et le nombre fini de sommets nous assurent que $\tau_{W^c} < \infty$ presque sûrement. On montre maintenant que h est harmonique sur W . En prenant $v \in W$, on peut écrire

$$\begin{aligned} h(v) &= \mathbb{E}(f(X_{\tau_{W^c}}) | X_0 = v) \\ &= \sum_{w \in V} \mathbb{E}(f(X_{\tau_{W^c}}) | X_0 = v, X_1 = w) \mathbb{P}(X_1 = w | X_0 = v) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{w \in V} \mathbb{E}(f(X_{\tau_{W^c}}) | X_0 = w) p_{v,w} \\ &= \sum_{w \in V} h(w) p_{v,w}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

La connexité du graphe est nécessaire à ce que W^c soit accessible à partir de tous les sommets. On a conditionné sur le premier pas pour trouver (1.1). Pour (1.2), on a utilisé la propriété de Markov et la définition du temps τ_{W^c} . \square

En utilisant une marche aléatoire sur le graphe, il a été possible de trouver une fonction harmonique qui satisfait le problème de Dirichlet. Par contre, rien ne nous assure pour l'instant que c'est la seule solution à notre problème.

Théorème 2 (Principe du Maximum). Soit $G = (V, C)$ un graphe valué connexe et $W \subset V$, $W \neq V$. Une fonction $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur W atteint son maximum (et son minimum) sur W^c .

Démonstration. Soit h une fonction harmonique sur W et supposons que $v \in W$ est un sommet qui maximise la fonction h . Comme $h(v) = \sum_w h(w)p_{v,w}$ et que $h(v)$ est un maximum, il est nécessaire que $h(w) = h(v)$ pour tout w adjacent à v puisque $h(v)$ est une moyenne pondérée de la valeur de h sur les sommets adjacents. Comme le graphe est connexe, on peut choisir un chemin $(v, v_1, v_2, \dots, v_n)$ où $v_i \in W$ pour $1 \leq i < n$ et $v_n \in W^c$. En répétant ce qui a été fait plus haut pour v avec v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , on montre que h est constante sur le chemin. Ainsi, le maximum est atteint sur W^c . \square

Corollaire 1 (Unicité). La solution à un problème de Dirichlet sur $G = (V, C)$ est unique.

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions h_1 et h_2 au même problème de Dirichlet. La fonction $h_1 - h_2$ est harmonique sur W et est solution au problème de Dirichlet avec $f \equiv 0$ sur W^c . La fonction $h_1 - h_2$ doit donc être nulle sur tous les sommets par le principe du maximum. \square

1.3 Fonctions et opérateurs

On décrit maintenant les concepts de *fonction potentielle* et de *courant* dans un cadre mathématique approprié. Fixons un graphe valué $G = (V, C)$ et sa chaîne de Markov associée. On travaillera avec deux espaces de Hilbert, soit

$$\ell^2(V) := \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad \ell^2(E) := \{\eta : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \eta_{v,w} = -\eta_{w,v} \quad \forall (v, w) \in E\}.$$

Les deux espaces décrivent respectivement les fonctions sur les sommets et les fonctions antisymétriques sur les arêtes. Pour simplifier la notation, on prendra $\eta_{v,w} = 0$ si v et w ne sont pas reliés par une arête. Les produits scalaires associés sont respectivement pour $f, g \in \ell^2(V)$ et $\theta, \eta \in \ell^2(E)$

$$(f, g)_C := \sum_{v \in V} f(v)g(v)C_v \quad \langle \theta, \eta \rangle_C := \frac{1}{2} \sum_{v, w \in V} \theta_{v,w} \eta_{v,w} / C_{v,w}.$$

L'opérateur de Markov $\mathcal{P} : \ell^2(V) \rightarrow \ell^2(V)$ est défini par

$$\mathcal{P}f(v) = \sum_{w \in V} f(w)C_{v,w}/C_v = \mathbb{E}(f(X_1)|X_0 = v).$$

On peut facilement réécrire la définition d'une fonction harmonique en utilisant cet opérateur. En fait, une fonction f est harmonique en $v \in V$ si $f(v) = \mathcal{P}f(v)$. Ainsi, en définissant le *Laplacien* comme $\Delta := \mathcal{P} - I$, on obtient une définition d'harmonicité analogue à celle du cas continu en demandant $\Delta h = 0$. Le gradient (∇) et la divergence (∇^*) donneront éventuellement un sens à l'analogie faite entre notre Laplacien discret et l'opérateur différentiel de deuxième ordre usuel. Ils établiront aussi un lien entre $\ell^2(V)$ et $\ell^2(E)$. On les définit respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}\nabla : \ell^2(V) &\rightarrow \ell^2(E) \text{ est défini par } \nabla f_{v,w} = (f(v) - f(w))C_{v,w}, \\ \nabla^* : \ell^2(E) &\rightarrow \ell^2(V) \text{ est défini par } \nabla^* \theta(v) = \sum_{w \in V} \theta_{v,w}/C_v.\end{aligned}$$

Proposition 1.

1. Le gradient et la divergence sont des opérateurs adjoints : $\langle \nabla f, \theta \rangle_C = \langle f, \nabla^* \theta \rangle_C$.
2. $\nabla^* \nabla f = \Delta f$.

Démonstration. Il s'agit de développer les expressions. □

Avec la deuxième partie de la proposition, on remarque qu'une fonction $f \in \ell^2(V)$ est harmonique en $v \in V$ si et seulement si $\nabla^* \nabla f(v) = 0$. Le parallèle avec le Laplacien usuel est à présent plus facile à faire. On a écrit $\mathcal{P} - I$ comme la composition de deux opérateurs à saveur différentielle qui jouent essentiellement le même rôle que dans le cas continu. On s'intéresse maintenant à un problème de Dirichlet moins général qui nous sera utile pour analyser le retour de la chaîne de Markov à son point de départ. De plus, cette simplification nous permet une analogie avec les réseaux électriques, d'où le choix des termes de la prochaine définition.

Définition. Soit S et P des sous-ensembles disjoints de V et $f : S \cup P \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \equiv a > 0$ sur S et $f \equiv 0$ sur P .

- La *fonction potentielle* ϕ entre S et P est la solution au problème de Dirichlet avec f comme condition sur $W^c = S \cup P$.
- Le *courant* associé à ϕ est la fonction $\theta \in \ell^2(E)$ définie par la relation $\theta = \nabla \phi$.
- Un *flot* S/P est une fonction $\eta \in \ell^2(E)$ telle que $\nabla^* \eta(v) = 0$ pour tout $v \in W$ et $\sum_{s \in S} \nabla^* \eta(s) C_s \geq 0 \geq \sum_{p \in P} \nabla^* \eta(p) C_p$.
- L'*intensité* d'un flot est $I(\eta) = \sum_{s \in S} \nabla^* \eta(s) C_s = - \sum_{p \in P} \nabla^* \eta(p) C_p$.

Par le résultat précédent, on remarque que le courant associé à une fonction potentielle doit être un flot S/P . L'égalité dans la définition de l'intensité du flot vient du fait que $\eta_{x,y} + \eta_{y,x} = 0$ et donc $\sum_{x,y \in V} \eta_{x,y} = 0$. En réorganisant la dernière somme, on trouve l'équation voulue.

Les ensembles S et P sont appelés *source* et *puits*. On peut s'imaginer que ces ensembles représentent les bornes auxquelles est appliquée une différence de potentiel (la valeur a). La fonction potentielle est la fonction harmonique associée. Avec cette image naïve des réseaux électriques, on peut voir un flot comme une façon de «transporter l'électricité» de la source vers le puits. Il existe plusieurs façons de faire le transport mais on en distingue une qu'on nomme le courant. La relation $\theta = \nabla \phi$

entre la fonction potentielle et le courant est ce qu'on appelle la loi d'Ohm en physique (que l'on voit habituellement sous la forme $\phi(v) - \phi(w) = R_{v,w} \theta_{v,w}$ avec $R_{v,w} = C_{v,w}^{-1}$). On remarque que dans le cas où $S = \{v_0\}$, le calcul de $I(\eta)$ se réduit à

$$I(\eta) = \sum_{v \in V} \eta_{v_0,v}. \quad (1.3)$$

Considérons le cas où $a = 1$. Notre fonction potentielle est unique et a la forme

$$\phi(v) = \mathbb{E}(f(X_{\tau_{S \cup P}}) | X_0 = v) = \mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}} \in S | X_0 = v),$$

où $\tau_{S \cup P}$ est le temps de frappe de $S \cup P = W^c$. Ainsi, la fonction potentielle représente la probabilité que la chaîne de Markov débutée en v atteigne la source avant le puits. On remarque que pour des ensembles S et P fixés, l'intensité du courant est proportionnelle à la différence de potentiel. Si ϕ_{a_1} et ϕ_{a_2} sont les fonctions potentielles associées respectivement aux différences de potentiel a_1 et a_2 , alors $a_2 \phi_{a_1} = a_1 \phi_{a_2}$. De plus, si θ_{a_1} et θ_{a_2} sont les courants associés, on utilise les définitions pour écrire

$$\begin{aligned} I(\theta_{a_1}) &= \sum_{s \in S} \nabla^* \theta_{a_1}(s) C_s \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{w \in V} (\phi_{a_1}(s) - \phi_{a_1}(w)) C_{s,w} \\ &= \frac{a_1}{a_2} \sum_{s \in S} \sum_{w \in V} (\phi_{a_2}(s) - \phi_{a_2}(w)) C_{s,w} \\ &= \frac{a_1}{a_2} I(\theta_{a_2}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il est donc toujours possible d'ajuster la différence de potentiel afin que le courant ait l'intensité voulue.

1.4 Énergie et principe de Rayleigh

À l'équilibre, les phénomènes physiques ont tendance à prendre des configurations ou des chemins qui minimisent l'énergie. On verra ici comment traduire cet énoncé dans notre contexte et quels outils mathématiques en découlent. Encore une fois, la physique ne sert que d'intuition et on décrit les objets dans un cadre mathématique approprié.

Définition. Soit $G = (V, C)$ un graphe valué et $\eta \in \ell^2(E)$. L'énergie de η est définie par

$$\varepsilon(\eta) = \langle \eta, \eta \rangle_C = \|\eta\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{v,w \in V} \eta_{v,w}^2 / C_{v,w}.$$

La proposition suivante nous sera utile à plusieurs reprises.

Proposition 2. Soit $f \in \ell^2(V)$ qui vaut a sur S et b sur P et soit η un flot S/P . Alors

$$\frac{1}{2} \sum_{v,w \in V} (f(v) - f(w)) \eta_{v,w} = (a - b)I(\eta).$$

Démonstration. On a que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{v,w \in V} (f(v) - f(w)) \eta_{v,w} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in V} f(v) \sum_{w \in V} \eta_{v,w} - \sum_{w \in V} f(w) \sum_{v \in V} \eta_{v,w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a \sum_{v \in S} C_v \nabla^* \eta(v) + b \sum_{v \in P} C_v \nabla^* \eta(v) \right) - \frac{1}{2} \left(a \sum_{w \in S} -C_w \nabla^* \eta(w) + b \sum_{w \in P} -C_w \nabla^* \eta(w) \right) \\ &= \frac{1}{2} (aI(\eta) - bI(\eta) + aI(\eta) - bI(\eta)) = (a - b)I(\eta). \end{aligned}$$

□

Théorème 3 (Principe de Thomson). Soit $S, P \subset V$ disjoints et $I > 0$. Le flot S/P d'intensité $I > 0$ d'énergie minimale est le courant d'intensité I .

Démonstration. Soit θ le courant d'intensité I associé à la fonction potentielle ϕ avec source S et puit P . Soit η un autre flot d'intensité I . Posons $\beta = \theta - \eta$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon(\eta) &= \varepsilon(\theta - \beta) \\ &= \varepsilon(\theta) - \sum_{v,w \in V} \theta_{v,w} \beta_{v,w} / C_{v,w} + \varepsilon(\beta) \\ &= \varepsilon(\theta) - \sum_{v,w \in V} (\phi(v) - \phi(w)) \beta_{v,w} + \varepsilon(\beta). \end{aligned}$$

La proposition précédente nous dit que la somme centrale vaut $aI(\beta)$ où a est la différence de potentiel nécessaire pour avoir un courant d'intensité I . Le terme $I(\beta)$ est quant à lui bien défini car on peut vérifier que la soustraction de deux flots est bel et bien un flot (en acceptant les flots d'intensité négative). Comme θ et η sont de même intensité, on trouve que $I(\beta) = 0$. Ainsi, le terme central est nul. Finalement, comme $\varepsilon(\beta) \geq 0$, on a $\varepsilon(\eta) \geq \varepsilon(\theta)$. □

On cherche ensuite à relier le calcul de l'énergie aux outils introduits plus tôt. Si ϕ est la fonction potentielle associée à la condition $f \equiv a$ sur S et $f \equiv 0$ sur P et si θ est son courant associé, la loi d'Ohm et la proposition 2 nous permettent d'écrire

$$\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{v,w} \theta_{v,w}^2 / C_{v,w} = \frac{1}{2} \sum_{v,w} (\phi(v) - \phi(w)) \theta_{v,w} = aI(\theta). \quad (1.5)$$

On remarque que dans le cas d'une différence de potentiel unité, l'énergie vaut l'intensité du courant. À l'inverse, si on impose un courant unitaire, l'énergie représente la différence de potentiel aux bornes. On a vu plus tôt (3.1) que l'intensité du courant était proportionnelle à la différence de potentiel, ce qui motive la définition suivante.

Définition. Soit $G = (V, C)$ un graphe valué et $S, P \subset V$ disjoints. La *conductance effective* entre S et P est définie par

$$C_{\text{eff}} = \frac{I(\theta)}{a}.$$

où θ est le courant associé à la différence de potentiel a .

La conductance effective représente donc la constante de proportionnalité qui relie la différence de potentiel à l'intensité du courant. Une grande conductance effective nous indique que l'intensité du flot est sensible à la différence de potentiel. De plus, il est possible de donner des interprétations intéressantes lorsqu'une intensité ou une différence de potentiel unité sont imposées.

Pour motiver le concept de conductance effective, on résout un problème qui nous sera utile pour étudier la récurrence de la chaîne de Markov induite par un graphe valué infini. Supposons que l'on débute notre chaîne de Markov en un sommet $v_0 \in V$. Quelle est la probabilité que la trajectoire revienne à son point initial avant de frapper l'ensemble $P \subset V$?

Pour répondre à la question, on considère le réseau électrique avec source $S = \{v_0\}$, puits P et différence de potentiel unité. Dans ce cas, on a $C_{\text{eff}} = I(\theta) = \varepsilon(\theta)$ suite à (1.5) et la définition de la conductance effective. Si $(X_n : n \geq 0)$ est la chaîne de Markov et $\tau_{S \cup P}$ le temps de frappe de $S \cup P$, on sait que l'unique fonction de voltage est décrite par

$$\phi(v) = \mathbb{E}(f(X_{\tau_{S \cup P}}) | X_0 = v) = \mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}} = v_0 | X_0 = v).$$

On pose $\tau_{S \cup P}^+ = \min\{n > 0 : X_n \in S \cup P\}$. La probabilité recherchée peut maintenant être écrite $\mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}^+} = v_0 | X_0 = v_0)$. L'astuce est ensuite de se projeter en avant d'un pas de temps en conditionnant sur le premier mouvement de la chaîne débutée en v_0 .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}^+} = v_0 | X_0 = v_0) &= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}^+} = v_0 | X_0 = v_0, X_1 = v) \mathbb{P}(X_1 = v | X_0 = v_0) \\ &= \sum_{v \in V} \mathbb{P}(X_{\tau_{S \cup P}} = v_0 | X_0 = v) C_{v_0, v} / C_{v_0} \\ &= \sum_{v \in V} \phi(v) C_{v_0, v} / C_{v_0} + \left(1 - \sum_{v \in V} \phi(v) C_{v_0, v} / C_{v_0} \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \sum_{v \in V} (\phi(v_0) - \phi(v)) C_{v_0, v} / C_{v_0} \\ &= 1 - \sum_{v \in V} \theta_{v_0, v} / C_{v_0} = 1 - \frac{I(\theta)}{C_{v_0}} = 1 - \frac{C_{\text{eff}}}{C_{v_0}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

On a fait apparaître un terme nul pour écrire (1.6). De plus, on reconnaît l'intensité du flot grâce à la simplification décrite en (1.3). Plus la conductance effective entre la source et le puits est petite, plus

les trajectoires ont tendance à revenir à la source. La conductance effective peut donc être vue comme une mesure de la «facilité» à passer d'un ensemble à l'autre.

Le prochain résultat semble intuitif lorsqu'on pense aux réseaux électriques. Ce résultat dit simplement qu'en augmentant la conductance de certaines arêtes, on augmente la conductance effective du réseau. C'est toutefois un résultat beaucoup moins intuitif lorsque replacé dans le contexte des chaînes de Markov. Il nous permettra par exemple d'ajouter ou de supprimer des arêtes dans le graphe en sachant quelle répercussion ce changement aura sur la probabilité de retour à l'origine.

Théorème 4 (Principe de Rayleigh). *Soit C et C' , deux valuations sur le même ensemble de sommets V et $S, P \subset V$ disjoints. Si $C_{v,w} \leq C'_{v,w}$ pour toute paire $v, w \in V$, alors $C_{\text{eff}} \leq C'_{\text{eff}}$.*

Démonstration. Soit θ et θ' les courants d'intensité 1 associés respectivement aux deux valuations. Dans ce cas, on sait par (1.5) que $C'_{\text{eff}} = 1/\varepsilon(\theta')$ et $C_{\text{eff}} = 1/\varepsilon(\theta)$. On peut relier les énergies des deux flots en utilisant le principe de Thomson :

$$\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{v,w} \theta_{v,w}^2 / C_{v,w} \geq \frac{1}{2} \sum_{v,w} \theta_{v,w}^2 / C'_{v,w} \geq \frac{1}{2} \sum_{v,w} (\theta'_{v,w})^2 / C'_{v,w} = \varepsilon(\theta').$$

On a utilisé le rapport entre les fonctions de conductance pour établir la première inégalité. L'expression résultante décrit l'énergie du flot unitaire θ sur le graphe valué par la fonction C' . Mais dans ce contexte, le principe de Thomson nous affirme que le flot θ' est celui qui minimise l'énergie, d'où la deuxième inégalité. \square

En pratique, lorsque nous voudrions calculer la conductance effective d'un graphe fini, on utilisera le Principe de Rayleigh pour fusionner des sommets en laissant la conductance entre ces deux sommets tendre vers l'infini. Ceci aura pour effet de créer des arêtes multiples entre deux sommets du graphe. Le prochain résultat nous permet de se ramener à des arêtes simples en laissant la conductance effective du graphe valué inchangée. La démonstration du prochain résultat n'est pas difficile et nécessiterait quelques justifications inutiles pour la suite. On omet donc cette démonstration.

Théorème 5 (Loi des réseaux en parallèle et en série). *Soit $G = (V, C)$ un graphe valué et $S, P \subset V$. Les deux opérations décrites à la figure 1.1 laissent la conductance effective entre S et P inchangée.*

1.5 Passage au cas infini

Dans le cas des graphes finis, il est clair que la chaîne de Markov associée reviendra éventuellement à son point de départ. Si le graphe valué considéré possède maintenant une infinité de sommets, le dernier énoncé peut être faux. Une question intéressante est de déterminer si la trajectoire de la chaîne de Markov reviendra nécessairement à son point d'origine.

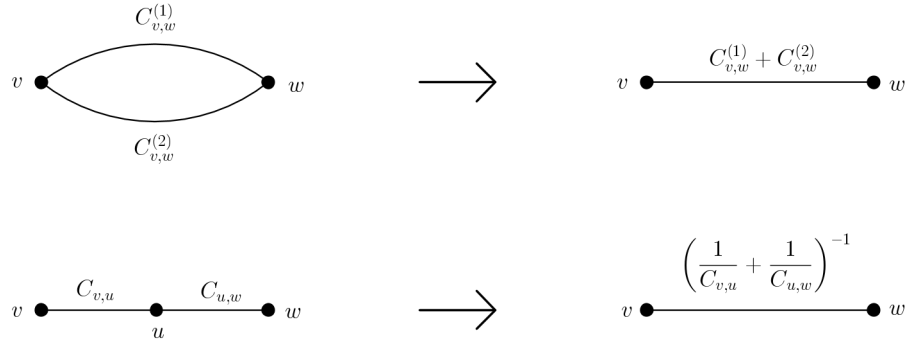


FIGURE 1.1: Loi des réseaux en parallèle et en série

Définition. Un état $v \in V$ de la chaîne de Markov $(X_n : n \geq 0)$ est dit *récurrent* si

$$\mathbb{P}(\exists n > 0 \text{ tel que } X_n = v | X_0 = v) = 1.$$

Un état qui n'est pas récurrent est dit *transitoire*.

Dans la théorie des chaînes de Markov, on montre que la récurrence est une propriété de classe. En d'autres mots, s'il existe $n, m > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_n = w | X_0 = v) > 0$ et $\mathbb{P}(X_m = v | X_0 = w) > 0$, alors v est récurrent si et seulement si w l'est. Dans notre contexte, si le graphe valué est connexe, la récurrence devient une propriété globale. On ne s'intéressera qu'aux graphes connexes puisque étudier la chaîne de Markov issue d'un sommet v dans un espace non connexe revient à analyser la composante connexe qui contient v . Il est donc possible se limiter à l'étude d'un seul point de départ et on parlera maintenant de la récurrence d'une chaîne de Markov sans ambiguïté.

Nous avons déjà développé des outils pour calculer la probabilité qu'une chaîne de Markov réversible à espace d'états fini revienne à l'origine avant de frapper un ensemble de sommets fixé. Si on approxime notre graphe infini par des sous-graphes de plus en plus gros, il serait peut-être possible d'observer une tendance qui nous indique si la chaîne est récurrente ou transitoire.

Les techniques utilisées ne s'appliqueront pas à tous les graphes infinis. Un obstacle majeur serait qu'un sommet $v \in V$ soit tel que $C_{v,w} > 0$ pour une infinité de sommets w . Dans le graphe, ce sommet serait relié à une infinité d'autres sommets du graphe. Étant donné un tel graphe, il serait difficile de l'approximer à l'aide de graphes finis. On demande donc que les graphes considérés soient *localement finis*, c'est à dire que chaque sommet ait un nombre fini de voisins.

Soit $G = (V, C)$ un graphe valué localement fini et connexe et $v_0 \in V$ le point de départ de la chaîne

de Markov. On choisit une suite $(V_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles finis de V de façon à ce que

$$v_0 \in V_1 \subset V_2 \subset \dots \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k = V. \quad (1.8)$$

À partir de ces sous-ensembles, on définit $\overline{V}_k = V_k \cup \{v \in V : \exists w \in V_k \text{ tel que } C_{v,w} > 0\}$. Il s'agit tout simplement de V_k auquel on ajoute les sommets adjacents. Comme le graphe est localement fini, les \overline{V}_k sont eux aussi finis. De plus, il est facile de voir que la suite \overline{V}_k satisfait les deux propriétés énoncées en 1.8. On peut finalement définir la suite de sous-graphes $(G_k)_{k \geq 1}$ par $G_k = (\overline{V}_k, C|_{\overline{V}_k \times \overline{V}_k})$.

Une façon simple et intuitive de construire une telle suite de sous-graphes est de définir V_k comme l'ensemble des sommets de V qui sont reliés à v_0 par un chemin de k arêtes ou moins. Pour étudier la récurrence de la chaîne $(X_n : n \geq 0)$, on considère la bordure des graphes finis $\partial \overline{V}_k = \overline{V}_k \setminus V_k$ et les temps de frappe $\tau_{v_0}^+$ et $\tau_{\partial \overline{V}_k}$ définis de la même manière que ce qui a été fait plus tôt. En utilisant cette notation, il est possible de retranscrire la définition de récurrence. Le point crucial est de remarquer qu'une trajectoire revient à son point initial en un temps fini si et seulement s'il existe une valeur de k pour laquelle $\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k}$. En termes d'ensembles de l'espace probabilisé, on écrit

$$\{X_n \text{ revient à } v_0\} = \{\exists k \text{ tel que } \tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k}\}.$$

Le fait que les ensembles V_k soient croissants nous assure que si une trajectoire revient à v_0 avant de quitter V_k , elle est aussi revenue à l'origine avant de quitter V_{k+1} . On a donc la chaîne d'inclusions

$$\{\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_1}\} \subset \{\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_2}\} \subset \{\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_3}\} \subset \dots.$$

Mais comme

$$\{\exists k \text{ tel que } \tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k}\},$$

la continuité d'une mesure nous donne que

$$\mathbb{P}(\exists k \text{ tel que } \tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k} | X_0 = v_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\tau_{v_0}^+ < \tau_{\partial \overline{V}_k} | X_0 = v_0).$$

Le terme à l'intérieur de la limite a déjà été étudié puisqu'il s'agit du problème de retour à l'origine dans un graphe fini. Il est possible d'exprimer la solution au problème en termes de conductance effective. On note $C_{\text{eff}}(G_k)$ la conductance effective associée au graphe G_k avec $S = \{v_0\}$ comme ensemble source et $P = \overline{V}_k \setminus V_k$ comme ensemble puits. L'équation (1.7) nous permet alors d'écrire

$$\mathbb{P}(X_n \text{ revient à } v_0 | X_0 = v_0) = 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{C_{\text{eff}}(G_k)}{C_{v_0}}. \quad (1.9)$$

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

Théorème 6. *La chaîne de Markov est récurrente si et seulement si*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_{\text{eff}}(G_k) = 0.$$

On remarque que la limite des conductances effectives ne dépend pas du choix de suite de sous-graphes puisque le côté gauche de l'équation (1.9) est indépendant de la suite. Il existe une autre façon de justifier l'égalité de la limite et on l'explique ici. Soit $G_k^* = (\overline{W}_k, C|_{\overline{W}_k \times \overline{W}_k})$ un autre choix de suite de sous-graphes. Alors pour des valeurs de k assez grandes, il existe $k_1 < k_2$ tels que $\overline{V}_{k_1} \subset \overline{W}_k \subset \overline{V}_{k_2}$. Sur le graphe G_k^* on considère les valuations $(C^{(n)})_{n \geq 0}$ définies par

$$C_{v,w}^{(n)} = \begin{cases} C_{v,w} & \text{si } v, w \in \overline{V}_{k_1} \\ C_{v,w} + n & \text{si } v \notin \overline{V}_{k_1} \text{ ou } w \notin \overline{V}_{k_1}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Par le principe de Rayleigh, on sait que $C_{\text{eff}}^{(n)}(G_k^*)$ est croissante en n et que $C_{\text{eff}}^{(0)}(G_k^*) = C_{\text{eff}}(G_k^*)$. De plus, si ϕ est la fonction potentielle associée à $G_{k_1} = (\overline{V}_{k_1}, C|_{\overline{V}_{k_1} \times \overline{V}_{k_1}})$ et ψ_n celle associée à $(\overline{W}_k, C^{(n)})$, alors lorsque $n \rightarrow \infty$,

$$\psi_n(v) \rightarrow \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v \in \overline{V}_{k_1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc que $C_{\text{eff}}^{(n)}(G_k^*) \uparrow C_{\text{eff}}(G_{k_1})$ et donc $C_{\text{eff}}(G_k^*) \leq C_{\text{eff}}(G_{k_1})$. En répétant la même démarche pour l'autre inclusion, on voit que les deux choix de suite de sous-graphes finis nous donnent la même conductance effective lorsque $k \rightarrow \infty$.

On va terminer le chapitre en donnant un exemple concret d'une preuve de récurrence de chaîne de Markov. Il est en général difficile d'évaluer exactement les conductances effectives des sous-graphes et une borne supérieure fera souvent l'affaire pour montrer la récurrence. Le problème est que si la suite ne tend pas vers 0, cela ne nous assure pas que la chaîne est transitoire puisque des bornes supérieures ont été prises. On développe donc un autre critère pour décrire les chaînes transitoires.

Définition. Un *flot* S/∞ est un flot qui n'a pas de puits.

L'approximation par une suite de graphes finis nous donne une suite de courants unitaires qui ont v_0 comme source et chacun un ensemble puits qui s'éloigne de l'origine à mesure que l'on avance dans la suite. Il est donc raisonnable de croire que cette suite de flots aura une limite qui est un flot $\{v_0\}/\infty$. On sait que $C_{\text{eff}}(G_k) = I(\theta^{(k)})/a$ pour $\theta^{(k)}$ le courant associé au graphe G_k pour une différence de potentiel a . En fixant une valeur quelconque pour la différence de potentiel, on distingue deux scénarios lorsqu'on laisse k augmenter : dans le cas récurrent, l'intensité du flot devra tendre vers 0 tandis que

dans le cas transitoire, l'intensité devra se stabiliser à une valeur positive. On formalise cette idée dans le prochain résultat.

Théorème 7. *La chaîne de Markov associée à un graphe connexe, infini et localement fini $G = (V, C)$ est transitoire si et seulement s'il existe un flot $\{v_0\}/\infty$ non-nul avec une énergie finie.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un flot $\{v_0\}/\infty$ non nul d'énergie finie qu'on note θ . Quitte à le multiplier par une constante, on suppose qu'il s'agit d'un flot unitaire. Lorsqu'on restreint θ à G_k , on trouve un flot $\{v_0\}/\partial\bar{V}_k$ unitaire. On note $\theta^{(k)}$ le courant unitaire associé au sous-graphe G_k . Le principe de Thomson nous assure que

$$\varepsilon(\theta^{(k)}) \leq \frac{1}{2} \sum_{v,w \in \bar{V}_k} \theta_{v,w}^2 / C_{v,w} \leq \varepsilon(\theta) < \infty.$$

Puisqu'on a fixé l'intensité à 1, on trouve que $\varepsilon(\theta^{(k)}) = 1/C_{\text{eff}}(G_k)$. Ainsi, $C_{\text{eff}}(G_k) \rightarrow 0$ et la chaîne est transitoire.

On tente maintenant de construire un flot non nul d'énergie finie comme une limite des flots sur les sous-graphes. Soit $\theta^{(k)}$ le courant unitaire associé au sous-graphe G_k . En supposant que la chaîne est transitoire, on sait que $\lim_{k \rightarrow \infty} C_{\text{eff}}(G_k) > 0$ et on peut donc trouver une constante $M > 0$ telle que $C_{\text{eff}}(G_k) \geq M$ pour toutes les valeurs de k . Ainsi, en utilisant la définition du courant, on peut écrire

$$|\theta_{v,w}^{(k)}| = |\phi^{(k)}(v) - \phi^{(k)}(w)| C_{v,w} \leq a \cdot C_{v,w} = C_{v,w} / C_{\text{eff}}^{(k)} \leq C_{v,w} / M.$$

Pour une arête fixée, la valeur de $\theta^{(k)}$ sur cette arête est donc bornée (du moment où elle est définie). On utilise ensuite un argument diagonal pour trouver une sous-suite de flots qui converge. Comme le graphe est localement fini, l'ensemble des arêtes (orientées) est dénombrable et on fixe une énumération $((v_i, w_i))_{i=1}^{\infty}$. Pour l'arête reliant v_1 à w_1 , on sait que la suite $(\theta_{v_1, w_1}^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ admet une sous-suite convergente. On choisit cette sous-suite de flots qu'on écrit $(\theta^{(k_1^1)})_{n=1}^{\infty}$. De la même façon, il est possible d'en extraire une sous-suite $(\theta^{(k_n^2)})_{n=1}^{\infty}$ pour laquelle la valeur de $\theta_{v_2, w_2}^{(k_n^2)}$ converge aussi lorsque $n \rightarrow \infty$ et ainsi de suite.

Après avoir fait la même procédure pour toutes les arêtes de l'énumération, on sait que la suite de flots unitaires $(\theta^{(k_n^i)})_{n=1}^{\infty}$ va converger pour toutes les arêtes du graphe. De plus, la limite doit nécessairement être un flot unitaire puisque tous les éléments de la suite le sont. Le flot limite ne peut pas avoir de puits car à partir d'un certain point dans la suite, toutes les arêtes adjacentes à un sommet fixé ont été énumérées et les flots suivants ont une divergence nulle en ce sommet.

Soit θ le flot limite. Il ne reste plus qu'à montrer que ce flot a une énergie finie. Dans le calcul suivant, si on considère $\theta_{v,w}^{(k)}$ lorsque $v \notin \bar{V}_k$ ou $w \notin \bar{V}_k$, alors on prend $\theta_{v,w}^{(k)} = 0$. On peut ainsi écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon(\theta^{(k_n)}) &= \frac{1}{2} \sum_{v,w \in V} \left(\theta_{v,w}^{(k_n)} \right)^2 / C_{v,w} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{v,w \in \bar{V}_m} \left(\theta_{v,w}^{(k_n)} \right)^2 / C_{v,w} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{v,w \in \bar{V}_m} (\theta_{v,w})^2 / C_{v,w} \quad (n \rightarrow \infty) \\ &\rightarrow \varepsilon(\theta) \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Il est ainsi possible de conclure en utilisant le fait que la chaîne est transitoire :

$$\varepsilon(\theta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon(\theta^{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/C_{\text{eff}}(G_{k_n}) < \infty.$$

□

Le terme *marche aléatoire sur un graphe* sera utilisé pour la chaîne de Markov induite par un graphe dont les arêtes ont toutes la même valuation. Le type de graphe le plus étudié est sans doute celui des treillis \mathbb{Z}^d . Le théorème de Pólya résout la question de récurrence sur ces graphes. La démonstration usuelle du théorème utilise un calcul exact des probabilités de retour à l'origine en tirant profit de la structure simple de ces graphes. Cette méthode a l'inconvénient de s'adapter difficilement à d'autres contextes. Il est par contre possible d'utiliser les théorèmes (6) et (7) pour en faire la démonstration. Nous allons seulement démontrer la récurrence de la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2 afin de d'utiliser certains outils développés au cours du chapitre. Une démonstration complète du résultat peut être trouvée dans [DS84].

Théorème 8 (Pólya). *La marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d est récurrente si d vaut 1 ou 2 et transitoire si $d \geq 3$.*

Démonstration (Récurrence de la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^2). On travaille sur le graphe $G = (\mathbb{Z}^2, C)$ où C vaut 1 lorsque deux sommets sont à une distance euclidienne de 1 et 0 sinon. On fixe $v_0 \in \mathbb{Z}^2$ notre point de départ pour la marche aléatoire. Pour notre suite de sous-graphes, on choisit les ensembles

$$V_1 = \{v_0\} \quad V_k = \{v \in \mathbb{Z}^2 : \text{le plus court chemin de } v \text{ à } v_0 \text{ compte au plus } k-1 \text{ arêtes}\}.$$

Les sommets de $\partial \bar{V}_k$ sont reliés par des traits rouges dans la figure 1.2 . On tente maintenant de calculer la conductance effective du graphe fini avec source v_0 et puits $\partial \bar{V}_k$. Un calcul exact n'est pas nécessaire et on se contente d'une borne supérieure. Pour ce faire, on considère les ensembles de sommets $\partial \bar{V}_m$ pour $m < k$. A priori, la valuation associée aux paires de sommets reliés par des traits rouge est nulle. De la même façon qu'en (1.10), on fait augmenter progressivement ces valuations. La conductance effective est ainsi augmentée et à la limite, on en vient à étudier le graphe décrit par la

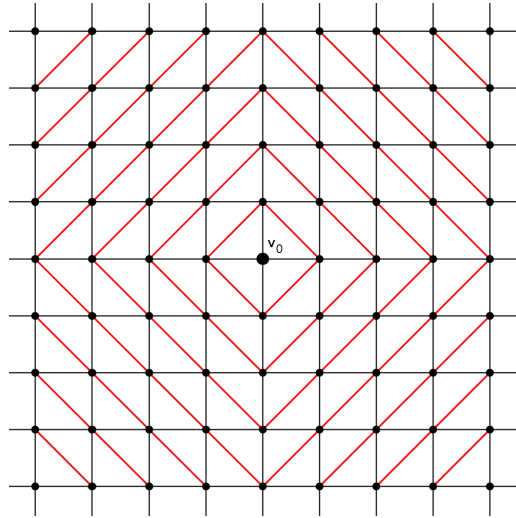


FIGURE 1.2: Les ensembles $\partial \bar{V}_k$

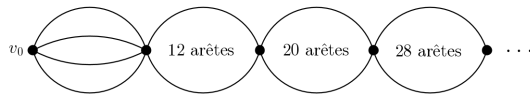


FIGURE 1.3: Graphe réduit

figure 1.3 puisque la fonction potentielle à la limite donnera la même valeur à tous les sommets de $\partial \bar{V}_m$. On remarque qu'exactly $8m + 4$ arêtes relient $\partial \bar{V}_m$ à $\partial \bar{V}_{m+1}$. À l'aide de la loi des réseaux en parallèle et à la loi des réseaux en série, on trouve que

$$C_{\text{eff}}(G_k) \leq \left(\sum_{m=0}^{k-1} \frac{1}{8m+4} \right)^{-1}.$$

En comparant avec la série harmonique, on trouve que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{8m+4} = \infty$ et donc que $C_{\text{eff}}(G_k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi, la marche aléatoire sur le graphe est récurrente. \square

Pour la suite, on s'intéressera à différents types de chaînes de Markov sur des arbres. Pour en arriver à des résultats généraux, une étude plus approfondie de la structure des arbres s'impose. C'est ce qui est au menu pour le prochain chapitre.

Chapitre 2

Constante de branchement

En théorie des graphes, on définit un arbre comme étant un graphe connexe qui ne possède pas de cycle. Autrement dit, étant donné deux sommets d'un arbre, il existe une seule et unique façon de passer de l'un à l'autre sans utiliser deux fois le même sommet, ce qu'on appellera un chemin simple. Cette structure peu complexe nous laisse espérer le meilleur en ce qui concerne l'étude des processus aléatoires. On fixe un sommet de l'arbre qu'on appelle la racine. On se représente ensuite l'arbre comme s'il pendait à partir de ce sommet. Une terminologie «familiale» sera à la fois intuitive et précise pour décrire les relations entre les sommets en voyant le graphe comme l'arbre généalogique de la descendance de la racine.

La première personne à décrire le lien entre la fonction potentielle et le courant d'un réseau électrique fut Gustav Kirchhoff au milieu du 19^e siècle. C'est d'ailleurs en étudiant les arbres de recouvrement d'un graphe qu'il fut capable de construire directement le courant, une méthode alternative à notre construction du premier chapitre. Francis Galton et Henry William Watson ont aussi utilisé les arbres au 19^e siècle afin d'étudier la survie des noms de famille [Ken66]. Leur idée est à l'origine de la théorie des processus de ramification et on appellera le plus simple de ces processus par le nom de Galton-Watson.

Étant donné une distribution de probabilité $\kappa = (\kappa_m : m \in \mathbb{Z})$ sur $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, on s'intéresse à l'évolution de la population dont chaque individu a, indépendamment des autres, un nombre aléatoire d'enfants selon la distribution κ . Plus formellement, on prend $(\xi^{n,m} : n \geq 0, m \geq 1)$ des variables aléatoires indépendantes de distribution κ et on considère le processus discret $(Z_n : n \geq 0)$ obtenu par $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{m=1}^{Z_n} \xi^{n,m}$. Il est possible de représenter graphiquement ce processus par un arbre dont le m^e sommet de la n^e génération a $\xi^{n,m}$ enfants. La variable Z_n représente dans ce cas le nombre d'individus dans la population à la n^e génération. Une question fondamentale est d'établir un critère sur la distribution afin de savoir si la population a une probabilité positive de survie et ainsi que l'arbre induit soit infini. Le critère s'avère assez intuitif : si $\mathbb{P}(\xi^{n,m} = 1) < 1$, le processus a une probabilité



FIGURE 2.1: Arbre binaire et arbre \mathbb{T}^*

positive de survie si et seulement si $\mathbb{E}(\xi^{n,m}) > 1$. On trouve la démonstration de ce résultat classique dans [Har63].

Comparons trois arbres à première vue assez différents, mais ayant comme caractéristique commune leur taux de croissance avec les générations. Le premier est l'arbre binaire, soit l'arbre enraciné dont chaque sommet possède 2 enfants. Cet arbre allie symétrie et régularité. Le deuxième arbre considéré a toujours, comme l'arbre binaire, 2^n sommets à la n^e génération. À chaque génération, ses sommets ont tous un seul enfant sauf celui le plus «à gauche» (voir figure (2.1)). Cet arbre, qu'on note \mathbb{T}^* , possède une certaine régularité mais aucune symétrie. Finalement, on considère un arbre issu d'un processus de Galton-Watson avec $\mathbb{E}(\xi^{n,m}) = 2$. Bien que l'arbre ait une structure d'origine aléatoire, il possède une certaine symétrie dans le sens où les descendances de deux sommets sont indépendantes et identiquement distribuées. De plus, l'espérance du nombre de sommets à la n^e génération de cet arbre est 2^n .

Tout dépendant de nos critères, on pourrait dire que deux de ces arbres sont totalement différents ou bien assez semblables. Notre intérêt est de savoir si différents modèles aléatoires (marche aléatoire, percolation...) auront le même comportement sur ces trois arbres. Dans ce chapitre, on tente de déterminer un critère intéressant qui nous permettrait d'étudier simultanément une famille d'arbres au lieu de toujours devoir étudier des arbres particuliers.

2.1 Mesure de l'accroissement

Dans ce chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à la structure d'un arbre. Les valuations seront ici un outil pour étudier cette structure. On préfère donc travailler avec $T = (V, E)$, un arbre avec ensemble de sommets V et ensemble d'arêtes E . Cet ensemble d'arêtes contient, comme au premier chapitre, des arêtes orientées telles que $(v, w) \in E \Leftrightarrow (w, v) \in E$. On fixe une racine $v_0 \in V$ qui induit un sens dans l'orientation (vers la racine ou l'inverse). Comme on a une orientation naturelle sur les arêtes, on préférera travailler avec $E^+ \subset E$, les arêtes orientées à l'inverse de la racine. Il sera ensuite facile d'étendre un flot construit sur E^+ à toutes les arêtes de E . On utilisera des lettres romaines pour dénoter les sommets et des lettres grecques pour dénoter les arêtes.

Le *degré* d'un sommet v , noté $|v|$, représente le nombre d'arêtes situées sur le chemin simple reliant v_0 à v . On écrira $v \rightarrow w$ pour dire que w est un *enfant* de v et \overleftarrow{v} pour identifier le *parent* de v . Formellement, $v \rightarrow w$ si $(v, w) \in E^+$ et $\overleftarrow{v} = w$ si $w \rightarrow v$. La *descendance* d'un sommet v , notée T^v est le sous-arbre de T enraciné en v qui a pour sommets les descendants de v , soit les sommets dont le chemin simple vers la racine de T passe par v . On utilisera le terme *feuille* pour un sommet sans enfants.

La structure simple des arbres permet une association naturelle entre les sommets et les éléments de E^+ . On associe au sommet v l'arête $\sigma \in E^+$ allant de \overleftarrow{v} à v . On écrira v_σ pour le sommet associé à l'arête σ et σ_v pour l'arête associée au sommet v . Cette association est presque bijective car seule la racine n'est pas associée à une arête. Par cette association, le degré d'une arête $\sigma \in E^+$ est défini par $|\sigma| = |v_\sigma|$. Si η est une fonction sur les arêtes, on écrira $\eta(\sigma) = \eta_{\overleftarrow{v_\sigma}, v_\sigma}$.

Une première tentative pour décrire le taux de croissance d'un arbre pourrait être de travailler avec S_n , l'ensemble des sommets de degré n et M_n , la cardinalité de S_n . Le but est de caractériser l'idée d'un «nombre moyen d'enfants par sommet» et pour ce faire, décrire la croissance exponentielle de M_n semble être une avenue intéressante. Ainsi, comme il n'est pas clair que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$ existe, on pourrait choisir

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} \quad \text{ou} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$$

comme mesure de la croissance. Cela semble être une bonne idée pour les premiers arbres qui nous viennent en tête : les arbres homogènes, ceux qui alternent périodiquement de nombre d'enfants à chaque génération, etc. Pour des arbres moins symétriques, les valeurs de M_n ne suffisent pas à décrire complètement l'allure de l'arbre. On pense à l'arbre \mathbb{T}^* par exemple.

Du point de vue de la croissance, l'arbre binaire et l'arbre \mathbb{T}^* sont indiscernables. Par contre, une étude rapide de ces deux arbres montre une différence fondamentale pour nous qui voulons étudier des processus aléatoires. En utilisant le théorème de Pólya dans le cas unidimensionnel, il est possible de montrer que la marche aléatoire est récurrente sur \mathbb{T}^* . Une analyse de l'arbre binaire montre que la marche aléatoire associée est transitoire. Il faut donc trouver une mesure de croissance plus adéquate.

Un problème classique en optimisation consiste à évaluer le flot de débit maximal pouvant circuler de la source vers le puits dans un graphe valué. Oublions pour un instant les outils développés au premier chapitre et considérons un réseau de tuyauterie avec des tuyaux de différentes grosseur (valuation) dans lequel on fait entrer de l'eau à partir d'un sommet (la source) vers un autre (le puits) où l'eau est évacuée. Quel est le débit d'eau maximal qu'il est possible de faire entrer à la source en s'assurant que les tuyaux n'explorent pas ? Il apparaît difficile de déterminer directement une telle quantité mais le

théorème Max-flow Min-cut donne une approche alternative à ce problème en proposant l'étude des coupes d'un graphe.

On donne une définition de coupe et une version du théorème Max-flow Min-cut adaptée à notre contexte. Le résultat original peut être trouvé dans [FF10]. Notre contexte est fortement inspiré de celui de Lyons dans [Lyo90] et [LPon]. On travaillera exclusivement avec l'ensemble E^+ mais ceci n'occasionne aucune perte d'information.

Définition. Une *coupe* d'un arbre $T = (V, E)$ est un ensemble fini d'arêtes $\Pi \subset E^+$ tel que chaque chemin simple de la racine vers l'infini doit passer par exactement un élément de Π . Étant donné une valuation C sur les arêtes, le C -poids d'une coupe est défini par $P_C(\Pi) = \sum_{\sigma \in \Pi} C(\sigma)$.

Étant donné η un flot $\{v_0\}/\infty$ et Π une coupe, on peut considérer la restriction de η à un graphe fini ayant pour puits l'ensemble $P = \{v_\sigma : \sigma \in \Pi\}$. Ce graphe fini est constitué de P et de tous les sommets de T dont le chemin simple vers la racine ne passe pas par une arête de la coupe. On trouve alors

$$I(\eta) = \sum_{v: v_0 \rightarrow v} \eta(\sigma_v) = \sum_{v \in P} \eta(\sigma_v) = \sum_{\sigma \in \Pi} \eta(\sigma) \quad (2.1)$$

où la deuxième égalité peut être déduite de l'égalité dans la définition de l'intensité d'un flot.

Théorème 9 (Max-flow Min-cut). *Soit $T = (V, E)$ un arbre infini mais localement fini avec une valuation C sur les arêtes. Alors*

$$\max\{I(\eta) : \eta \text{ un flot } \{v_0\}/\infty \text{ tel que } \eta(\sigma) \leq C(\sigma) \ \forall \sigma \in E^+\} = \inf\{P_C(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T\}.$$

Démonstration. On analysera seulement les flots dont la valeur sur les arêtes de E^+ est supérieure ou égale à 0. La raison est simple : les flots qui «remontent» vers la racine ne sont pas maximaux du point de vue de l'intensité. Si par exemple une arête $\sigma \in E^+$ issue de la racine était telle que $\eta(\sigma) < 0$, il serait possible de modifier le flot en annulant celui-ci sur σ et sur T^{v_σ} . Ceci aura pour effet de faire augmenter l'intensité du flot sans dépasser la valuation des arêtes. Pour les arêtes σ avec $|\sigma| > 1$, il est aussi possible de faire un ajustement, cette fois-ci sans modifier l'intensité du flot.

Fixons $\varepsilon > 0$, η un flot $\{v_0\}/\infty$ borné par la valuation et Π' une coupe telle que

$$P_C(\Pi') < \inf\{P_C(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T\} + \varepsilon.$$

On considère la restriction du flot au graphe fini induit par Π' . Par (2.1), on sait que $I(\eta) \leq P_C(\Pi')$. En laissant ε tendre vers 0, on obtient une des deux inégalités voulues. On construit maintenant un flot dont l'intensité est égale à l'infimum du poids des coupes. On pose

$$g(\sigma) = \min\{C(\sigma), \inf\{P_C|_{T^{v_\sigma}}(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T^{v_\sigma}\}\}.$$

L'idée est de distribuer le flot dans les arêtes selon leur valeur relative par la fonction g . Pour simplifier l'écriture et avoir l'intensité voulue, on pose $g_0 = \inf\{P_C(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T\}$. Pour une arête σ telle que $|\sigma| = 1$, on pose

$$\eta(\sigma) = g_0 \frac{g(\sigma)}{\sum_{|\omega|=1} g(\omega)}.$$

On remarque que $g_0 = \sum_{|\omega|=1} g(\omega)$ puisque chaque côté de l'équation compte l'infimum du poids des coupes de l'arbre T . Ainsi, $\eta(\sigma) = g(\sigma) \leq C(\sigma)$ pour les arêtes de degré 1. Supposons que $\eta(\sigma) \leq g(\sigma)$ pour toutes les arêtes de degré inférieur ou égal à n et soit $|v| = n$. Pour w tel que $v \rightarrow w$, on définit

$$\eta(\sigma_w) = \eta(\sigma_v) \frac{g(\sigma_w)}{\sum_{u:v \rightarrow u} g(\sigma_u)}.$$

Cette fois-ci, on a que $g(\sigma_v) \leq \sum_{u:v \rightarrow u} g(\sigma_u)$ puisque l'infimum du poids des coupes est pris sur un plus gros ensemble du côté gauche. Ainsi, en utilisant l'hypothèse d'induction on a que

$$\eta(\sigma_w) \leq g(\sigma_v) \frac{g(\sigma_w)}{\sum_{u:v \rightarrow u} g(\sigma_u)} = g(\sigma_w) \frac{g(\sigma_v)}{\sum_{u:v \rightarrow u} g(\sigma_u)} \leq g(\sigma_w) \leq C(\sigma_w).$$

En définissant η par induction sur le degré des arêtes et en l'étendant à E par antisymétrie, on trouve un flot v_0/∞ borné par la valuation. Son intensité est

$$I(\eta) = \sum_{|\sigma|=1} \frac{g(\sigma)}{\sum_{|\omega|=1} g(\omega)} g_0 = g_0.$$

□

Admettons qu'il existe un concept de «nombre moyen d'enfants par sommet» de l'arbre T et qu'un certain flot voyage de la racine vers l'infini. Lorsque le flot η arrive à un sommet, on peut s'imaginer que celui-ci sera redistribué dans un certain nombre d'arêtes en moyenne. L'idée est donc de considérer la valuation $C_\lambda(\sigma) = \lambda^{-|\sigma|}$. On simplifiera l'écriture du C_λ -poids en écrivant $P_{C_\lambda}(\Pi) = P_\lambda(\Pi)$. Pour une valeur fixée de λ , si les coupes de l'arbre ont un poids borné inférieurement, alors il existe un flot η tel que $\eta(\sigma) \leq C_\lambda(\sigma) \forall \sigma \in E^+$. Dans le cas contraire, il n'existe aucun flot de ce genre. Comme $P_\lambda(\Pi)$ est décroissant par rapport à λ pour une coupe fixée, le théorème Max-flow Min-cut nous permet d'énoncer la définition suivante.

Définition. La *constante de branchement* d'un arbre T est définie par

$$\begin{aligned} Br(T) &= \sup\{\lambda > 0 : \text{il existe } \eta \text{ un flot } \{v_0\}/\infty \text{ tel que } I(\eta) > 0 \text{ et } 0 \leq \eta(\sigma) \leq C_\lambda(\sigma) \forall \sigma \in E^+\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \inf\{P_\lambda(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T\} = 0\}. \end{aligned}$$

On verra au prochain chapitre qu'il est possible de relier la constante de branchement à la marche aléatoire et à la percolation sur un arbre. Le prochain résultat donne un peu d'intuition sur la valeur de $Br(T)$.

Proposition 3.

1. $1 \leq Br(T) \leq \infty$ pour tout arbre infini T .
2. La constante de branchement est indépendante du choix de la racine.
3. Si T_1 et T_2 sont deux arbres et qu'on fusionne leur racine pour créer l'arbre T , alors $Br(T) = \max\{Br(T_1), Br(T_2)\}$.
4. Soit Π une coupe de T . Alors $Br(T) = \max\{Br(T^{v\sigma}) : \sigma \in \Pi\}$.
5. $Br(T) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$ pour tout arbre infini T .

Démonstration. On donne des idées de démonstration pour les 4 premiers énoncés et une preuve complète pour le dernier.

1. Il est possible de construire un flot d'intensité non nulle borné par la valuation C_1 sur n'importe quel arbre infini. Il est aussi possible de construire un arbre dont la constante de branchement est infinie.
2. Si $\lambda < Br(T)$, alors on peut construire un flot borné par la valuation C_λ sur l'arbre translaté à l'aide d'un flot borné par C_λ sur T .
3. On utilise la définition de la constante de branchement.
4. À l'aide du deuxième énoncé, on peut montrer que $Br(T) \geq Br(T^v)$ pour tout sommet v . Supposons qu'il existe λ tel que $\max\{Br(T^{v\sigma}) : \sigma \in \Pi\} < \lambda < Br(T)$. Il est donc possible de trouver un flot η borné par la valuation C_λ . On considère ensuite le flot η restreint aux arbres $T^{v\sigma}$ pour les arêtes $\sigma \in \Pi$. Le flot η doit être non-nul sur au moins un de ces arbres, disons celui associé à $\omega \in \Pi$. En multipliant le flot par $\lambda^{|\omega|}$, on montre que $\lambda \leq Br(T^{v\omega})$.
5. Il est clair que l'ensemble des arêtes associées aux sommets de S_n est une coupe de l'arbre. Par abus de langage, on nommera cette coupe S_n .

$$\begin{aligned} Br(T) &= \inf\{\lambda > 0 : \inf\{P_\lambda(\Pi) : \Pi \text{ est une coupe de } T\} = 0\} \\ &\leq \inf\{\lambda > 0 : \inf\{P_\lambda(S_n) : n \geq 1\} = 0\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \inf\{M_n \lambda^{-n} : n \geq 1\} = 0\}. \end{aligned}$$

Ensuite, on peut montrer facilement que si $\lambda > \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$ alors $\inf\{M_n \lambda^{-n} : n \geq 1\} = 0$ tandis que si $\lambda < \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n \lambda^{-n} = \infty$ et donc $\inf\{M_n \lambda^{-n} : n \geq 1\} > 0$. Ainsi,

$$Br(T) \leq \inf\{\lambda > 0 : \inf\{M_n \lambda^{-n} : n \geq 1\} = 0\} = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}.$$

□

Définition. La *croissance* de l'arbre T , notée $Cr(T)$ est définie par $Cr(T) = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$.

Comme on pourrait l'espérer, la constante de branchement de l'arbre binaire est 2. C'est le cas puisque $\eta(\sigma) = 2^{-|\sigma|}$ est un flot qui est borné par la valuation C_λ si et seulement si $\lambda \leq 2$. De plus, on remarque que la croissance et la constante de branchement de cet arbre sont égales.

Il en est différemment pour \mathbb{T}^* . On a vu plus tôt que $Cr(\mathbb{T}^*) = 2$. Mais si on prend $\lambda > 1$, il est impossible de trouver un flot d'intensité non nulle et borné par la valuation C_λ . Ainsi, $Br(\mathbb{T}^*) = 1$ et pour cet arbre asymétrique, la croissance et la constante de branchement ne coïncident pas. En ce qui concerne notre troisième exemple, l'arbre issu d'un processus de Galton-Watson, il nous est impossible de déterminer la valeur de sa croissance ou de sa constante de branchement pour l'instant.

2.2 Croissance et constante de branchement

Définition. Un arbre T est *quasi-sphérique* si $Br(T) = Cr(T)$.

Étant donné un arbre infini T , le calcul de $Cr(T)$ s'avère souvent beaucoup plus facile que celui de $Br(T)$. On se demande donc sous quelle condition l'égalité entre ces deux constantes tient. On donnera ici deux conditions suffisantes. L'arbre binaire examiné plus tôt satisfait aux deux conditions qui seront présentées.

Définition. Un arbre est dit *sphériquement symétrique* si le nombre d'enfants d'un sommet dépend seulement de son degré.

La figure (2.2) montre un exemple d'arbre sphériquement symétrique. Pour un tel arbre, si a_n dénote le nombre d'enfants d'un sommet de la n^e génération, la suite $(M_n)_{n \geq 1} = (\prod_{k=0}^{n-1} a_k)_{n \geq 1}$ décrit complètement l'allure de l'arbre. Il semble donc raisonnable de croire que le calcul de la croissance sera suffisant pour connaître la constante de branchement.

Théorème 10. *Un arbre sphériquement symétrique est quasi-sphérique.*

Démonstration. On cherche à montrer que $Br(T) \geq Cr(T)$ puisque le cinquième item de la proposition 3 nous dit que $Cr(T) \geq Br(T)$ pour tous les arbres infinis. Supposons que $Cr(T) < \infty$ et prenons $\lambda < Cr(T)$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda + \varepsilon < \liminf_n M_n^{1/n}$. La fonction définie sur E^+ par $\eta(\sigma) = 1/M_{|\sigma|}$ est un flot puisque l'arbre T est sphériquement symétrique. On cherche à trouver une constante K_λ telle que

$$\eta(\sigma)\lambda^{|\sigma|} \leq K_\lambda, \quad \forall \sigma \in E^+.$$

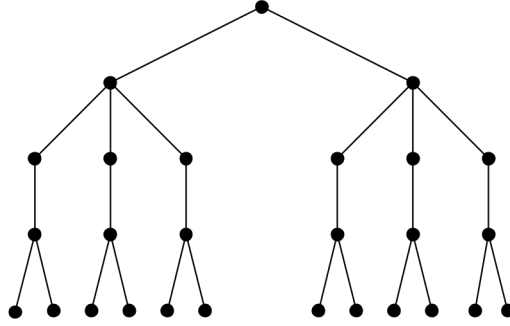


FIGURE 2.2: Arbre sphériquement symétrique avec $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

Ainsi, le flot η/K_λ sera borné par la valuation C_λ et on aura $Br(T) \geq \lambda \quad \forall \lambda < Cr(T)$. On considère

$$\limsup_{|\sigma| \rightarrow \infty} \eta(\sigma) \lambda^{|\sigma|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^n}{M_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{M_n^{1/n}} \right)^n.$$

Mais à partir d'un certain $N > 0$, on sait que $\lambda < M_n^{1/n} - \varepsilon$. La limite supérieure est bornée par 1 et il existe ainsi une constante K_λ qui fera l'affaire. Le cas $Cr(T) = \infty$ peut être traité de façon analogue. On obtient donc que $Cr(T) = Br(T)$ pour tous les arbres sphériquement symétriques.

□

Dans son article [Lyo90], Lyons donne deux conditions pour qu'un arbre soit quasi-sphérique. Notre deuxième condition est une de celles-ci. On l'appelle condition de sous-périodicité.

Définition. On dit que $T_1 = (V_1, E_1)$ est un *sous-arbre enraciné* de $T_2 = (V_2, E_2)$ s'il existe une fonction $F : V_1 \rightarrow V_2$ telle que

1. F est injective.
2. F envoie la racine de T_1 vers la racine de T_2 .
3. $F(v)$ est adjacent à $F(w)$ si et seulement si v est adjacent à w .

Si de plus F est bijective, alors on dira que T_1 et T_2 sont *isomorphes*.

Définition. Un arbre $T = (V, E)$ est *N-sous-périodique* (respectivement *N-périodique*) s'il existe une fonction $H : S_{N+1} \rightarrow S_0 \cup \dots \cup S_N$ telle que T^v est un sous-arbre enraciné (respectivement isomorphe) à $T^{H(v)}$ pour tout sommet $v \in S_{N+1}$.

Par récurrence, il est possible d'étendre la définition de H de façon à ce que T^v soit un sous-arbre enraciné (respectivement isomorphe) à $T^{H(v)}$ pour tout sommet $v \in \bigcup_{n=N+1}^{\infty} S_n$. Considérons l'arbre

décrivant les chemins simples issus de l'origine dans \mathbb{Z}^2 . La racine de l'arbre représente le chemin vide et chaque sommet de l'arbre représente un chemin dans \mathbb{Z}^2 issu d'un sommet fixé de \mathbb{Z}^2 . Les enfants d'un sommet de l'arbre représentent les extensions de ce chemin par un sommet. Cet arbre est 0-sous-périodique à cause de l'invariance sous translation de \mathbb{Z}^2 .

Théorème 11. *Soit T un arbre sous-périodique. Alors T est quasi-sphérique.*

Démonstration. On commence par montrer le résultat pour les arbres 0-sous-périodiques sans feuilles pour ensuite passer au cas général. L'objectif est de montrer qu'il n'y a aucun nombre réel entre $Br(T)$ et $Cr(T)$. Pour ce faire, on va montrer que pour une valeur fixée de λ , s'il existe une coupe Π telle que $P_\lambda(\Pi) < 1$ alors

$$\lambda \geq \limsup_n M_n^{1/n} \geq Cr(T). \quad (2.2)$$

Comme toutes les valeurs $\lambda > Br(T)$ satisfont la prémisse, on aura bien l'égalité $Br(T) = Cr(T)$.

Prenons une valeur de λ et une coupe Π qui satisfait $P_\lambda(\Pi) < 1$. Posons $d = \max\{|\sigma| : \sigma \in \Pi\}$. À partir de la coupe Π , on veut construire une coupe Π_n telle que si $\sigma \in \Pi_n$ alors $n < |\sigma| \leq n + d$ et qui satisfait aussi $P_\lambda(\Pi_n) < 1$. C'est ce qui nous permettra de démontrer (2.2).

On décrit ici une modification faite à Π pour obtenir une coupe Π' telle que $P_\lambda(\Pi') < 1$. En répétant cette modification, il sera possible d'obtenir Π_n . Soit ω un élément de Π et v_ω son sommet associé. Comme l'arbre est 0-sous-périodique, T^{v_ω} est un sous-arbre enraciné de T via une fonction F . Considérons \mathcal{A} , l'ensemble des arêtes de T^{v_ω} qui sont envoyées sur les éléments de Π via F . L'ensemble \mathcal{A} est une coupe de T^{v_ω} et on construit Π' en retirant ω pour la remplacer par l'ensemble \mathcal{A} . On peut écrire

$$\begin{aligned} P_\lambda(\Pi') &= \sum_{\sigma \in \Pi'} \lambda^{-|\sigma|} = \lambda^{-|\omega|} \cdot \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{A} \\ \sigma \neq \omega}} \lambda^{|\omega| - |\sigma|} + \sum_{\substack{\sigma \in \Pi \\ \sigma \neq \omega}} \lambda^{-|\sigma|} \\ &< \lambda^{-|\omega|} + \sum_{\substack{\sigma \in \Pi \\ \sigma \neq \omega}} \lambda^{-|\sigma|} \\ &= \sum_{\sigma \in \Pi} \lambda^{-|\sigma|} < 1. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $P_\lambda(\Pi) < 1$ pour les deux inégalités. En répétant successivement cette modification pour les arêtes de la coupe telles que $|\omega| \leq n$, on obtient la coupe Π_n . Mais Π_n a au minimum M_n éléments puisque T n'a pas de feuilles et le poids minimal de chacun de ses éléments est $\lambda^{-(n+d)}$. Ainsi, on a que

$$M_n \lambda^{-(n+d)} \leq P_\lambda(\Pi_n) < 1.$$

On trouve que $M_n^{1/n} < \lambda^{(n+d)/n}$ et en prenant la limite supérieure de chaque côté, on obtient

$$\limsup_n M_n^{1/n} \leq \limsup_n \lambda^{1+d/n} = \lambda.$$

Supposons maintenant que l'arbre T est N -sous-périodique mais qu'il n'a toujours pas de feuilles. On considère la famille d'arbres $\{T^v : |v| \leq N\}$. On construit l'arbre T^* en prenant tous les arbres de la famille en fusionnant leur racine en un sommet qui est vu comme la racine de T^* . L'arbre T^* est 0-sous-périodique, ne possède pas de feuilles et T est un sous-arbre enraciné de T^* . Par la première partie de la démonstration, on a que $Br(T^*) = Cr(T^*)$. Il est clair que $Cr(T) \leq Cr(T^*)$ et

$$Br(T^*) = Cr(T^*) \geq Cr(T) \geq Br(T). \quad (2.3)$$

Par la proposition 3, on a que $Br(T^*) = \max\{Br(T^v) : |v| \leq N\} = Br(T)$. Ainsi, $Br(T) = Cr(T)$ et il ne reste qu'à considérer des arbres qui possèdent des feuilles. Soit T un arbre N -sous-périodique. À chaque feuille, on ajoute un chemin de longueur infinie. L'arbre T^* ainsi construit n'a pas de feuilles et on a (2.3). Mais encore une fois, $Br(T) = Br(T^*)$ puisqu'un flot sur T^* doit être nul sur tous les chemins que nous avons ajoutés. \square

2.3 Arbres périodiques

On verra au prochain chapitre comment relier la constante de branchement d'un arbre à la marche aléatoire et à la percolation sur cet arbre. Une autre application de cette constante est celle du calcul de la dimension de Hausdorff de certains ensembles [Lyo90]. Il serait donc intéressant d'avoir des méthodes efficaces afin de calculer la constante de branchement de certains arbres.

Un calcul exact est hors d'atteinte pour la majorité des arbres puisque la constante de branchement est une propriété à l'infini. On tente donc de faire le calcul dans le cas des arbres N -périodiques puisque ceux-ci peuvent être décrits par un graphe fini.

Définition. Soit $G = (V', E')$ un graphe fini avec des arêtes orientées et possiblement des arêtes multiples ou des boucles. L'arbre de recouvrement du graphe G issu de $v' \in V'$ est l'arbre $T = (V, E)$ qui décrit les chemins issus de v' dans G .

Puisque le graphe fini peut comporter des arêtes multiples, il est important de mettre en évidence l'arête utilisée pour passer d'un sommet à un autre. Pour un chemin reliant v'_0 à v'_n , on écrit par exemple $(v'_0, \sigma'_0, v'_1, \sigma'_1, \dots, \sigma'_{n-1}, v'_n)$ où l'arête σ'_k va de v'_k à v'_{k+1} . Les sommets de l'arbre de recouvrement de G sont les chemins dans G avec $v'_0 = v'$. La racine est (v') et chaque sommet a pour enfant les extensions du chemin associé par une arête et un sommet. À la figure 2.3, on donne un exemple de graphe fini orienté et de son recouvrement dirigé. Ce dernier est infini puisqu'un cycle dans G est accessible à partir de v' . On suppose pour la suite que les recouvrements universels considérés sont

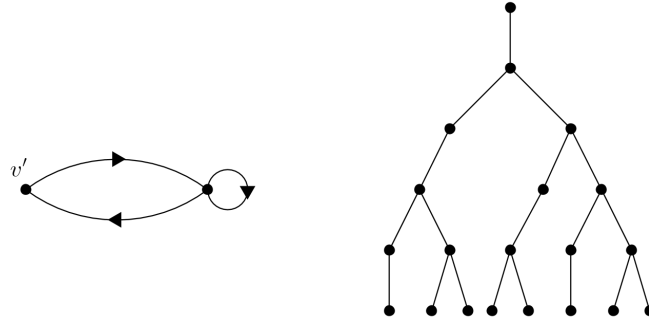


FIGURE 2.3: Arbre de recouvrement d'un graphe orienté issu du sommet v'

infinis.

Si un arbre est l'arbre de recouvrement d'un graphe fini G , toute l'information sur sa structure est contenue dans la matrice d'adjacence de G . C'est le cas des arbres N -périodiques. Étant donné $T = (V, E)$ un tel arbre, il est possible de construire $G = (V', E')$ de la façon suivante :

1. On prend $V' = \{v_0\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_N$.
2. Si $v, w \in \{v_0\} \cup S_1 \cup \dots \cup S_N$, et si $v \rightarrow w$, on trace une arête orientée de v vers w dans G .
3. Soit $v \in S_N$. Pour chaque $w \in S_{N+1}$ tel que $v \rightarrow w$, on trace une arête orientée de v vers $H(w)$ dans G , où H est la fonction introduite dans la définition d'arbre sous-périodique.

On peut vérifier que que T est bien l'arbre de recouvrement de G issu de v_0 . Comme l'arbre T est quasi-sphérique, on va tenter de calculer $Cr(T)$ à l'aide de la matrice d'adjacence de G qu'on note A . On sait que $(A^n)_{v,w}$ est le nombre de chemins de longueur n allant du sommet v au sommet w . Ainsi,

$$M_n = \mathbf{1}_{v_0} A^n \mathbf{1} \tag{2.4}$$

où $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^t$ et $\mathbf{1}_v = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ avec l'entrée non nulle correspondant à la position du sommet v . Les théorèmes suivants nous seront utiles pour étudier le comportement de M_n . Le premier est une des versions du théorème de Perron-Frobenius. On peut trouver ce résultat au deuxième chapitre de [BP94].

Théorème 12 (Perron-Frobenius). *Soit A une matrice dont toutes les entrées sont positives. Alors*

- le rayon spectral $\rho(A)$ est une valeur propre ;
- A possède un vecteur propre positif associé à $\rho(A)$;
- A^t possède un vecteur propre positif associé à $\rho(A)$;
- s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que A^n a des entrées strictement positives, alors le vecteur propre associé à $\rho(A)$ est unique et a des entrées strictement positives.

Théorème 13 (Gelfand). *Pour toute norme matricielle,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \rho(A).$$

Lorsque nous utiliserons ρ , ce sera pour désigner la plus grande valeur propre réelle d'une matrice à entrées positives.

Théorème 14. *Soit $G = (V', E')$ un graphe fini orienté qui possède un cycle et $v'_0 \in V'$ tel que chaque autre sommet de G est accessible à partir de v'_0 . Alors la constante de branchement de l'arbre de recouvrement de G est égale au rayon spectral de la matrice d'adjacence de G .*

Démonstration. Un tel arbre de recouvrement doit être N -périodique, où N est la longueur du plus long chemin dans G issu de v'_0 qui ne réutilise jamais la même arête. On a déjà vu que $M_n = \mathbf{1}_{v'_0} A^n \mathbf{1}$ où A est la matrice d'adjacence de G . Ainsi, on sait que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{1}_{v'_0} A^n \mathbf{1}|^{1/n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{1}_{v'_0}\|^{1/n} \|A^n\|^{1/n} \|\mathbf{1}\|^{1/n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n} = \rho \end{aligned}$$

avec la norme L^2 . On a donc que $Cr(T) \leq \rho$. On sait que ρ est une valeur propre de A et prenons un vecteur propre \mathbf{b} associé à ρ . Par le théorème (12), on sait qu'il existe $v' \in V'$ tel que $\mathbf{b}_{v'} > 0$. De plus, comme v' est accessible à partir de la racine, il existe $j > 0$ tel que $(A^j)_{v'_0, v'} > 0$. On prend $c > 0$ tel que $\mathbf{1} \geq c\mathbf{b}$. On peut alors écrire

$$M_{n+j} = \mathbf{1}_{v'_0} A^{n+j} \mathbf{1} \geq \mathbf{1}_{v'} A^n \mathbf{1} \geq \mathbf{1}_{v'} A^n c\mathbf{b} = c \mathbf{1}_{v'} \rho^n \mathbf{b} = c \mathbf{b}_{v'} \rho^n.$$

La première inégalité vient du fait que le côté gauche est égal au nombre de sommets de la $(n+j)$ ^e génération et que le côté droit représente la cardinalité du sous-ensemble des sommets de la $(n+j)$ ^e génération qui ont comme ancêtre commun un sommet de la j ^e génération dont le chemin associé se termine par v' . On remarque ensuite que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} M_{n+j}^{1/(n+j)} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (c \mathbf{b}_{v'} \rho^n)^{1/(n+j)} = \rho.$$

Ainsi, on trouve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n} = \rho.$$

Finalement, puisque l'arbre est quasi-sphérique, on a que $Br(T) = Cr(T) = \rho$. □

Étant donné un arbre N -périodique, le graphe fini que nous avons construit de façon à ce que l'arbre soit son recouvrement satisfait l'hypothèse de notre théorème. Pour des graphes finis de taille raisonnable, un logiciel comme MATLAB peut donner une approximation de la valeur propre ρ . Pour donner un exemple concret du calcul d'une constante de branchement, prenons l'arbre décrit à la figure 2.3. La matrice d'adjacence du graphe fini associé est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme $x^2 - x - 1$. La plus grande valeur propre est donc $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, le nombre d'or. On aurait aussi pu trouver explicitement la valeur des M_n qui correspondent aux termes de la suite de Fibonacci. Le calcul de la croissance nous aurait ensuite donné le même résultat.

Chapitre 3

Marche aléatoire et percolation sur l'arbre

3.1 Marche aléatoire sur l'arbre

Beaucoup de travail a été fait dans les premiers chapitres en ce qui concerne l'étude de la marche aléatoire sur un graphe, en particulier sur les arbres. Il ne reste plus qu'à relier rigoureusement la constante de branchement à la marche aléatoire.

On s'intéresse à une chaîne de Markov un peu plus générale que la marche aléatoire en considérant les valuations C_λ sur un arbre infini. On fera référence à cette chaîne de Markov sous le nom «marche aléatoire biaisée» et on la notera $(X_n^\lambda : n \geq 0)$ pour mettre en évidence le paramètre. En anglais, on utilise le nom «homesick random walk». En supposant que la chaîne se trouve en un sommet $v \neq v_0$ qui a k enfants notés v_1, v_2, \dots, v_k , les probabilités de transition sont

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}^\lambda = \leftarrow v \mid X_n^\lambda = v\right) = \frac{\lambda}{\lambda + k}, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1}^\lambda = v_i \mid X_n^\lambda = v\right) = \frac{1}{\lambda + k} \quad \forall i.$$

Ce processus sur l'arbre est évidemment relié à la constante de branchement par le choix des valuations. La marche aléatoire en est un cas particulier en prenant $\lambda = 1$. Plus la valeur de λ est grande, plus la tendance à revenir vers la racine est forte. On cherche la valeur $0 \leq \lambda_c \leq \infty$ pour laquelle la chaîne de Markov $(X_n^\lambda : n \geq 0)$ est transitoire lorsque $\lambda < \lambda_c$ et récurrente lorsque $\lambda > \lambda_c$. La valeur λ_c est appelée valeur critique et le changement de comportement autour de λ_c est appelé changement de phase. Déterminer le comportement de la chaîne lorsque $\lambda = \lambda_c$ est habituellement un problème difficile.

En utilisant le théorème Max-flow Min-cut et le théorème 7, on trouve un nouveau critère plus facilement applicable à l'analyse de la marche aléatoire biaisée. Pour une coupe Π d'un arbre T , on notera

$$|\Pi| = \min\{|\sigma| : \sigma \in \Pi\}.$$

Théorème 15. Soit $T = (V, C)$ un arbre valué. Si la chaîne de Markov induite est transitoire, alors pour toute suite de coupes $(\Pi_k)_{k \geq 1}$ telle que $|\Pi_k| \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_C(\Pi_k) = \infty.$$

À l'inverse, s'il existe des nombres strictement positifs t_n tels que $\sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty$ et

$$\inf_{\Pi} \left\{ \sum_{\sigma \in \Pi} t_{|\sigma|} C(\sigma) \right\} > 0$$

alors la chaîne induite est transitoire.

Démonstration. Supposons pour commencer que la chaîne de Markov est transitoire. Suite au théorème 7, on sait qu'il existe η un flot $\{v_0\}/\infty$ unitaire et d'énergie finie. De plus, pour toute coupe Π on sait que $1 = I(\eta) = \sum_{\sigma \in \Pi} \eta(\sigma)$ comme en (2.1). L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors

$$1 = \left(\sum_{\sigma \in \Pi} \eta(\sigma) \right)^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \Pi} \eta(\sigma)^2 / C(\sigma) \right) \left(\sum_{\sigma \in \Pi} C(\sigma) \right).$$

On se donne une suite de coupes $(\Pi_k)_{k \geq 1}$ telles que $|\Pi_k| \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Le premier terme du produit doit tendre vers 0 lorsque $k \rightarrow \infty$ puisque l'énergie totale du flot est finie. Comme le produit est borné inférieurement, on doit avoir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \Pi_k} C(\sigma) = \infty.$$

En assumant maintenant les hypothèses de la deuxième partie du théorème, le théorème Max-flow Min-cut nous assure qu'il existe un flot non nul η tel que $\eta(\sigma) \leq t_{|\sigma|} C(\sigma)$. Ainsi,

$$\varepsilon(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in E} \eta(\sigma)^2 / C(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{|\sigma|=n \\ \sigma \in E^+}} \eta(\sigma)^2 / C(\sigma) \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{\substack{|\sigma|=n \\ \sigma \in E^+}} \eta(\sigma) = I(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} t_n < \infty.$$

La dernière égalité est due au fait que S_n est une coupe de l'arbre et donc que $\sum_{\sigma \in S_n} \eta(\sigma) = I(\eta)$. Il existe donc un flot non nul d'énergie finie, ce qui assure que la chaîne est transitoire. \square

Théorème 16. Soit $T = (V, E)$ un arbre. La valeur critique pour la marche aléatoire biaisée est $\lambda_c = Br(T)$.

Démonstration. Prenons $\lambda > 0$ tel que la marche aléatoire biaisée sur l'arbre est transitoire et supposons qu'il existe une suite de coupes $(\Pi_k)_{k \geq 1}$ telles que $P_\lambda(\Pi_k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Il est clair que $|\Pi_k| \rightarrow \infty$ puisque dans le cas contraire, la convergence du poids vers 0 serait impossible. Mais ceci contredit la première partie du théorème 15, donc $\inf_{\Pi} P_\lambda(\Pi) > 0$. Ainsi, $\lambda \leq Br(T)$.

Supposons maintenant que $\lambda < Br(T)$. On choisit λ_1 tel que $\lambda < \lambda_1 < Br(T)$. En prenant $t_n = (\lambda/\lambda_1)^n$, on trouve

$$\inf_{\Pi} \left\{ \sum_{\sigma \in \Pi} t_{|\sigma|} C_{\lambda}(\sigma) \right\} = \inf_{\Pi} \left\{ \sum_{\sigma \in \Pi} C_{\lambda_1}(\sigma) \right\} > 0$$

en raison de notre choix de λ_1 . La deuxième partie du théorème précédent nous permet de conclure que la chaîne induite par C_{λ} est transitoire. \square

Les seuls arbres infinis pour lesquels la marche aléatoire pourrait être récurrente sont ceux dont la constante de branchement est 1. Il est impossible de dire en général si $(X_n^{Br(T)} : n \geq 0)$ est récurrente ou transitoire.

3.2 Percolation

La percolation n'est pas à proprement parler un processus aléatoire mais plutôt une expérience aléatoire que l'on exécute sur un graphe infini connexe. La percolation par les sites consiste à «élaguer» un graphe, terme qui sied bien à l'étude des arbres. Simultanément et indépendamment les uns des autres, chaque sommet du graphe est dit *ouvert* avec probabilité p ou *fermé* avec probabilité $1 - p$. En partant d'un sommet ouvert v on considère le sous-graphe formé des sommets accessibles par des chemins de sommets ouverts à partir de v . On appelle ce sous-graphe le *graphe élagué* en v .

Définition. Soit G un graphe infini connexe. On dit qu'il y a *percolation* au sommet v si v est ouvert et si le graphe élagué en v est de taille infinie.

Lorsque $p = 0$, le graphe élagué n'aura aucun sommet et la percolation est impossible. Lorsque $p = 1$, il y a nécessairement percolation à un sommet donné avec probabilité 1. Il existe donc une valeur intermédiaire autour de laquelle la probabilité de percolation devient positive.

Définition. La *probabilité critique de percolation* au sommet v d'un graphe G est définie par

$$p_c(G, v) = \inf \{ p \in [0, 1] : \mathbb{P}(\text{Percolation au sommet } v \text{ avec paramètre } p) > 0 \}.$$

Un autre type de percolation est souvent considéré, soit la percolation par les liens (on retire les arêtes au lieu des sommets). Dans le contexte des arbres, la relation entre les sommets et les arêtes fait que les deux types de percolation ont la même valeur critique et on étudiera ici la percolation par les sites. Pour l'instant, on s'intéressera seulement à la percolation à la racine (v_0). On verra que cette étude est suffisante pour caractériser la percolation à n'importe quel sommet.

Trouver la valeur critique de percolation pour un graphe donné est une question assez complexe. Trouver celle de \mathbb{Z}^2 a été une question ouverte pendant une vingtaine d'années avant que Harry Kesten démontre que $p_c = 1/2$ en 1982. La question est par ailleurs toujours ouverte pour \mathbb{Z}^3 . Certains

graphes dont la structure est simple nous permettent par contre plusieurs simplifications. Pour commencer, prenons un graphe qui allie régularité et simplicité de structure : un arbre n -aire. Il semble intuitif de dire que comme tous les sommets ont n enfants, la probabilité critique devrait se situer aux alentours de $p = 1/n$. Le prochain résultat montre que c'est effectivement le cas.

Proposition 4. *Si T est l'arbre n -aire, alors $p_c(T, v_0) = 1/n$.*

Démonstration. Prenons $p < 1/n$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{percolation}) &= \mathbb{P}(\text{Il y a un chemin simple infini à partir de } v_0 \text{ dans l'arbre élagué}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{Il y a un chemin de } v_0 \text{ à la } k^{\text{e}} \text{ génération dans l'arbre élagué}) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v \in S_k} \mathbb{P}(\text{Le chemin de } v_0 \text{ à } v \text{ est ouvert}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} n^k p^k = 0. \end{aligned}$$

On prend maintenant $p > 1/n$. Étant donné un sommet qui reste connecté à la racine dans l'arbre élagué, analysons sa progéniture. Ce sommet a initialement n enfants dans l'arbre n -aire mais ceux-ci font chacun partie de l'arbre élagué avec probabilité p , indépendamment les uns des autres. Sa progéniture dans l'arbre élagué suit donc une loi binomiale à n essais et de probabilité p . L'arbre élagué est ainsi un arbre issu d'un processus de Galton-Watson avec moyenne np conditionnellement à la survie de la racine. Ce processus a une probabilité positive de survie dans le cas où la moyenne de la distribution de progéniture est supérieure à 1, ce qui est le cas puisque $p > 1/n$. \square

On fait quelques remarques découlant de la démonstration précédente :

1. La première partie de la preuve suggère que la probabilité critique de percolation pourrait avoir un lien avec la notion de coupe. Il serait possible de remplacer «il existe un chemin de la racine vers la k^{e} génération» par «il existe un chemin de la racine vers la coupe Π » et laisser les coupes s'éloigner de la racine.
2. La probabilité critique de percolation d'un arbre n -aire coïncide avec la réciproque de sa constante de branchement.
3. Bien qu'étant fondamentalement aléatoires, les arbres de Galton-Watson s'analysent très bien conjointement avec la percolation.

Peut-on relier la percolation à la constante de branchement d'un arbre ? La réponse est positive et fait l'objet de notre prochain théorème. La constante de branchement et la valeur critique de percolation d'un arbre infini nous donnent donc la même information. Les prochains résultats sont issus des notes de Balister [Bal06] et de l'article de Lyons [Lyo90].

Théorème 17. *Soit $T = (V, E)$ un arbre infini mais localement fini. Alors $p_c(T, v_0) = 1/Br(T)$.*

Démonstration. Prenons $p < 1/\text{Br}(T)$. Alors $1/p > \text{Br}(T)$. Comme nous l'avons fait plus tôt pour S_n , on utilisera la notation de coupe pour parler des sommets associés aux éléments de la coupe. Puisque

$$\{\text{Percolation}\} \subset \{\Pi \text{ y a un chemin ouvert de } v_0 \text{ à } \Pi\}$$

pour toute coupe Π , alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Percolation}) &\leq \mathbb{P}(\Pi \text{ y a un chemin de } v_0 \text{ à } \Pi \text{ dans l'arbre élagué}) \\ &\leq \sum_{v \in \Pi} \mathbb{P}(\text{Le chemin de } v_0 \text{ à } v \text{ est ouvert}) \\ &= \sum_{v \in \Pi} p^{|v|} = P_{1/p}(\Pi). \end{aligned}$$

Comme $1/p > \text{Br}(T)$, il existe des coupes telles que $P_{1/p}(\Pi)$ est arbitrairement petit. La probabilité de percolation doit donc être nulle.

Supposons maintenant que $p > 1/\text{Br}(T)$. On peut trouver $\lambda < \text{Br}(T)$ et $\varepsilon > 0$ de façon à ce que $p = 1/\lambda + \varepsilon$. Ainsi, il existe un flot η d'intensité non nulle borné par la valuation C_λ . Quitte à le multiplier par un constante, on suppose que $\eta(\sigma)\lambda^{|\sigma|} \leq \varepsilon \quad \forall \sigma$. Soit $N > 0$. On note $p(v, N)$ la probabilité que v soit relié à S_N par un chemin ouvert dans l'arbre élagué. On va montrer par induction inverse que $p(v, N) \geq \eta(\sigma_v)\lambda^{|\sigma_v|}$ pour tout sommet $v \in S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_N$.

Si v est tel que $|v| = N$, $p(v, N)$ est tout simplement la probabilité que v soit ouvert, c'est à dire $p(v, N) = p > \varepsilon \geq \eta(\sigma_v)\lambda^{|\sigma_v|}$. Fixons maintenant $2 \leq n \leq N$ et supposons que l'affirmation est vraie pour les sommets de S_n . On prend un sommet $v \in S_{n-1}$ et on écrit

$$\begin{aligned} 1 - p(v, N) &= \mathbb{P}(\text{Aucun chemin ouvert de } v \text{ à } S_N) \\ &= \mathbb{P}\left(\{v \text{ est fermé}\} \cup \left(\bigcap_{w: v \rightarrow w} \{\text{Aucun chemin ouvert de } w \text{ à } S_N\}\right)\right). \end{aligned}$$

On utilise le principe d'inclusion-exclusion pour trouver

$$\begin{aligned} 1 - p(v, N) &= (1 - p) + \prod_{w: v \rightarrow w} (1 - p(w, N)) - (1 - p) \prod_{w: v \rightarrow w} (1 - p(w, N)) \\ &= (1 - p) + p \prod_{w: v \rightarrow w} (1 - p(w, N)). \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$1 - \frac{p(v, N)}{p} = \prod_{w: v \rightarrow w} (1 - p(w, N)).$$

On utilise ensuite l'hypothèse d'induction et le fait que $1 - x \leq \exp(-x)$ pour écrire

$$1 - \frac{p(v, N)}{p} \leq \prod_{w: v \rightarrow w} (1 - \eta(\sigma_w) \lambda^n) \leq \prod_{w: v \rightarrow w} \exp(-\eta(\sigma_w) \lambda^n) = \exp\left(\lambda^n \sum_{w: v \rightarrow w} -\eta(\sigma_w)\right) = \exp(-\eta(\sigma_v) \lambda^n).$$

Par la suite, on utilise le fait que $\exp(-x) \leq 1/(1+x)$ pour écrire

$$1 - \frac{p(v, N)}{p} \leq \exp(-\eta(\sigma_v) \lambda^n) \leq \frac{1}{1 + \eta(\sigma_v) \lambda^n} = 1 - \frac{\eta(\sigma_v) \lambda^n}{1 + \eta(\sigma_v) \lambda^n}.$$

De plus, comme $\forall \sigma, \eta(\sigma) \lambda^{|\sigma|} \leq \varepsilon$ et comme $|v| = n - 1$, on trouve que $\eta(\sigma_v) \lambda^{n-1} \lambda \leq \varepsilon \lambda$, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{p(v, N)}{p} \geq \frac{\eta(\sigma_v) \lambda^n}{1 + \eta(\sigma_v) \lambda^{n-1} \lambda} \geq \frac{\eta(\sigma_v) \lambda^n}{1 + \varepsilon \lambda} = \frac{\eta(\sigma_v) \lambda^n}{p \lambda}.$$

On a finalement $p(v, N) \geq \eta(\sigma_v) \lambda^{|\sigma_v|}$ et l'induction est vérifiée. Puisque le flot η est non trivial, il y a un sommet v_* tel que $|v_*| = 1$ et $\eta(\sigma_{v_*}) > 0$. Ainsi, $p(v_0, N) \geq p \cdot p(v_*, N) \geq p \eta(\sigma_{v_*}) \lambda > 0$ pour tout $N > 0$. On conclut que

$$\mathbb{P}(\text{Percolation}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\text{Il y a un chemin ouvert de } v_0 \text{ à } S_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} p(v_0, N) > 0.$$

□

On a déterminé que la valeur critique de percolation à la racine était tout simplement la réciproque de la constante de branchement. La proposition 3 nous affirme que la constante de branchement est indépendante du choix de racine. Ainsi, la probabilité critique de percolation est la même pour tous les sommets du graphe infini.

Corollaire 2. *Soit $T = (V, E)$ un arbre connexe, infini mais localement fini. Alors $p_c(T, v) = 1/Br(T)$ pour tout $v \in V$.*

3.2.1 Arbres de Galton-Watson

Le résultat précédent nous donne une façon alternative de calculer la probabilité critique de percolation d'un arbre en calculant sa constante de branchement. On utilise maintenant ce lien dans le sens inverse afin d'étudier les arbres issus d'un processus de Galton-Watson. On voudra trouver la constante de branchement d'un arbre issu du processus conditionnellement à la survie du processus.

Nous étudierons un processus de ramification un peu plus général qu'on appellera processus de Galton-Watson multi-type. C'est une généralisation naturelle du processus de Galton-Watson qui permet par exemple de pouvoir considérer une population avec des individus sexués. Supposons qu'il y a

r types d'individus dans notre population. Chaque type d'individus peut avoir des enfants de chacun de ces r types. Un individu de type i a des enfants selon une distribution $\kappa^{(i)}$. Cette distribution est définie sur \mathbb{N}^r et les distributions marginales de $\kappa^{(i)}$ sont les distributions du nombre d'enfants de chaque type d'un individu de type i . Le processus évolue comme dans le cas uni-type : les individus d'une génération fixée ont des enfants selon la distribution de leur type associé, indépendamment les uns des autres. On note le processus $\mathbf{Z}_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(r)})$ où $Z_n^{(i)}$ représente le nombre d'individus de type i au temps n . Les vecteurs seront notés en caractère gras pour plus de clarté. Le vecteur $\kappa = (\kappa^{(1)}, \kappa^{(2)}, \dots, \kappa^{(r)})$ sera appelé *distribution de progéniture du processus*.

Définition. La *matrice de progéniture* d'un processus de Galton-Watson multi-type avec distribution de progéniture κ est $M_\kappa = (\mathbb{E}(\xi_j^{(i)}) : 1 \leq i, j \leq r)$ avec $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_r^{(i)})$ un vecteur aléatoire de distribution $\kappa^{(i)}$. On dit que le processus est *régulier* s'il existe un $n \geq 0$ tel que toutes les composantes de M_κ^n sont strictement positives.

On pose $p_e^{(i)} = \mathbb{P}(\text{extinction} \mid Z_0 = \mathbf{1}_i)$ et $\mathbf{p}_e = (p_e^{(1)}, \dots, p_e^{(r)})$. Le théorème de Perron-Frobenius (théorème 12) est un outil important pour montrer que dans le cas d'un processus régulier, $\mathbf{p}_e < \mathbf{1}$ composante par composante si et seulement si la valeur propre maximale ρ_κ de la matrice de progéniture est supérieure à 1. Comme dans le cas uni-type, on peut se référer à [Har63] pour la démonstration. Un autre outil important est la fonction génératrice du processus et son lien avec la probabilité d'extinction.

Définition. La *fonction génératrice* d'un processus de Galton-Watson multi-type avec distribution de progéniture κ est la fonction $\mathbf{f}_\kappa(\mathbf{x}) = (f_{\kappa^{(1)}}(\mathbf{x}), \dots, f_{\kappa^{(r)}}(\mathbf{x}))$ où

$$f_{\kappa^{(i)}}(\mathbf{x}) = \mathbb{E} \left(x_1^{\xi_1^{(i)}} x_2^{\xi_2^{(i)}} \dots x_r^{\xi_r^{(i)}} \right)$$

pour $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \dots, \xi_r^{(i)})$ un vecteur aléatoire de distribution $\kappa^{(i)}$.

Il est facile de montrer que $\mathbf{p}_e = \mathbf{f}_\kappa(\mathbf{p}_e)$ en conditionnant sur la première génération. De plus, s'il existe $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tel que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, alors $\mathbf{x} \geq \mathbf{p}_e$. La probabilité d'extinction est donc le point fixe positif minimal de la fonction génératrice.

Théorème 18. Soit $(\mathbf{Z}_n : n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson multi-type régulier avec distribution de progéniture κ . Conditionnellement à la survie du processus, l'arbre qui consiste à relier chaque individu à ses enfants a presque sûrement une constante de branchement égale à ρ_κ , la valeur propre maximale de la matrice de progéniture M_κ .

Démonstration. On note T un arbre issu du processus de Galton-Watson. On verra que le choix du type de l'individu initial n'a pas d'importance pour le résultat. Par convention, posons $Br(T) = 0$ si T est fini. On commence par montrer que si $\mathbb{P}(Br(T) \geq \lambda) > 0$, alors $\mathbb{P}(Br(T) \geq \lambda \mid T \text{ est infini}) = 1$.

Débutons le processus avec un individu de type 1 et supposons que la valeur $\lambda > 0$ est telle que $\mathbb{P}(Br(T) \geq \lambda) > 0$. Comme $\{\text{extinction du processus}\} \subset \{Br(T) \geq \lambda\}^c$, on sait que la probabilité d'extinction $p_e^{(1)}$ satisfait

$$p_e^{(1)} \leq 1 - \mathbb{P}(Br(T) \geq \lambda) < 1. \quad (3.1)$$

Comme le processus est régulier, il existe un entier $n > 0$ tel que $\mathbb{P}(Z_n^{(j)} > 0 \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{1}_i) > 0 \forall 0 \leq i, j \leq r$. Ainsi, peu importe le type de l'individu de départ, il y a une probabilité positive que le processus compte un individu de type 1 au temps n . Par l'indépendance entre les individus et l'équation 3.1, la descendance de l'individu de type 1 a une probabilité positive d'être infinie. Ainsi $\mathbf{p}_e < \mathbf{1}$, composante par composante.

Posons

$$p_\lambda^{(i)} = \mathbb{P}(Br(T) < \lambda \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{1}_i)$$

et $\mathbf{p}_\lambda = (p_\lambda^{(1)}, \dots, p_\lambda^{(r)})$. Par le théorème 3, on sait que $Br(T) < \lambda$ si et seulement si $Br(T^\nu) < \lambda$ pour tout $\nu \in S_1$. On conditionne sur \mathbf{Z}_1 pour trouver

$$p_\lambda^{(i)} = \sum_{\eta \in \mathbb{N}^r} \mathbb{P}(Br(T^\nu) < \lambda \quad \forall \nu \in S_1 \mid \mathbf{Z}_1 = \eta) \mathbb{P}(\mathbf{Z}_1 = \eta \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{1}_i) \quad (3.2)$$

$$= \sum_{\eta \in \mathbb{N}^r} (p_\lambda^{(1)})^{\eta_1} (p_\lambda^{(2)})^{\eta_2} \dots (p_\lambda^{(r)})^{\eta_r} \mathbb{P}(\xi^{(i)} = \eta) \quad (3.3)$$

$$= f_{\kappa^{(i)}}(p_\lambda). \quad (3.4)$$

Le vecteur \mathbf{p}_λ est donc un point fixe de \mathbf{f}_κ et il est possible de montrer que $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_\lambda$ en utilisant une méthode analogue à celle de la page 19 des notes de Balister [Bal06]. Comme $\{\text{extinction du processus}\} \subset \{Br(T) < \lambda\}$, on a

$$\mathbb{P}(Br(T) \geq \lambda \mid T \text{ est infini}, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{1}_i) = \frac{1 - p_\lambda^{(i)}}{1 - p_e^{(i)}} = 1 \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

Pour déduire la constante de branchement de T , on utilise une idée semblable à ce qui a été fait dans la deuxième partie de la démonstration de la proposition 4. Soit ν , un sommet de type i de l'arbre T . Ce sommet a des enfants de chaque type selon la distribution $\kappa^{(i)}$. On élague maintenant l'arbre T pour obtenir l'arbre T' . Supposons que ν fasse partie de T' . Les enfants de ν font donc partie de T' avec probabilité p , indépendamment les uns des autres. On note $\kappa_*^{(i)}$ la distribution du nombre d'enfants de chaque type du sommet ν dans T' . Il n'y a aucune ambiguïté à désigner cette distribution par $\kappa_*^{(i)}$ puisque ν est un sommet arbitraire de type i . De plus, il est clair que la distribution des enfants d'un sommet de l'arbre T' est indépendante de celle des autres sommets de T' . Ainsi, T' est un arbre de Galton-Watson avec distribution de progéniture $\kappa_* = (\kappa_*^{(1)}, \kappa_*^{(2)}, \dots, \kappa_*^{(r)})$.

On en déduit que l'arbre T a une probabilité positive de percolation si et seulement si le processus de Galton-Watson avec distribution de progéniture κ_* a une probabilité positive de survie. Il est facile

de voir que $M_{\kappa_*} = pM_\kappa$ et donc que $\rho_{\kappa_*} = p\rho_\kappa$. On remarque aussi que le processus issu de κ_* est régulier puisque celui issu de κ est régulier. On note \mathbb{I}_A la fonction indicatrice de l'évènement A et on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T' \text{ est infini}) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{T' \text{ est infini}\}}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{T' \text{ est infini}\}}|T)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{P}(\text{Percolation à la racine}|T)).\end{aligned}$$

Si $p < 1/\rho_\kappa$, on a que $p\rho_\kappa = \rho_{\kappa_*} < 1$ et la probabilité de survie de T' est nulle par le théorème de survie du processus de Galton-Watson. Ainsi, $\mathbb{P}(\text{Percolation à la racine}|T)$ est presque sûrement 0 et donc $1/Br(T) = p_c(T) > p$. En laissant $p \uparrow 1/\rho_\kappa$, on a que $Br(T) \leq \rho_\kappa$ presque sûrement.

Si $p > 1/\rho_\kappa$, on sait que la probabilité de survie de l'arbre élagué est positive et $\mathbb{P}(\text{Percolation à la racine}|T)$ doit être strictement positive sur un ensemble de mesure non nulle. Il est donc nécessaire que $\mathbb{P}(Br(T) \geq 1/p) > 0$. Par ce qui a été dit plus tôt, $\mathbb{P}(Br(T) \geq 1/p) = 1$. En laissant $p \downarrow 1/\rho_\kappa$, on trouve que $Br(T) \geq \rho_\kappa$ presque sûrement, ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 3. *Soit T un arbre infini issu d'un processus de Galton-Watson uni-type avec distribution de progéniture κ . Alors presque sûrement $Br(T) = \mathbb{E}(\xi)$ pour ξ une variable aléatoire de distribution κ .*

Conjointement avec un résultat classique de convergence pour le processus, il est possible de pousser notre analyse de ces arbres encore plus loin. Ce résultat provient à l'origine de l'article de Kesten et Stigum [KS66] et on peut en trouver une démonstration élémentaire dans [KLPP97].

Théorème 19 (Kesten-Stigum). *Soit $(\mathbf{Z}_n : n \geq 0)$ un processus de Galton-Watson multi-type régulier tel que la valeur propre maximale associée ρ_κ est strictement supérieure à 1. Alors il existe une variable aléatoire scalaire W telle que*

$$\frac{\mathbf{Z}_n}{\rho_\kappa^n} \xrightarrow{p.s.} W\mathbf{b} \quad (n \rightarrow \infty)$$

pour \mathbf{b} le vecteur propre à gauche associé à ρ_κ . De plus, $\mathbb{P}(W > 0) > 0$ si et seulement si

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i,j=1}^r \kappa_j^{(i)} |\log \kappa_j^{(i)}| \right) < \infty.$$

En vue de ce résultat de convergence, il est clair que si on prend $\lambda > \rho_\kappa$, alors

$$\frac{\mathbf{Z}_n}{\lambda^n} \xrightarrow{p.s.} \mathbf{0} \quad (n \rightarrow \infty)$$

presque sûrement. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^r Z_n^{(i)} / \lambda^n = 0$ et donc $Cr(T) < \lambda$. Comme $M_n = \sum_{i=1}^r Z_n^{(i)}$ on a $Cr(T) \leq Br(T)$ presque sûrement pour un arbre de Galton-Watson étant donné la survie du processus. Conditionnellement à la survie, un arbre issu d'un processus de Galton-Watson est donc presque sûrement quasi-sphérique.

Chapitre 4

Processus de contact

Dans les deux derniers chapitres, la constante de branchement a été un outil de choix pour étudier divers processus aléatoires sur des arbres. Dans le présent chapitre, les idées reliées aux coupes et aux flots ne seront pas réutilisées. La théorie des martingales et la technique de couplage de processus seront ici nos principaux outils.

Le processus de contact fait partie d'une classe de processus appelée «systèmes de particules interagissantes». L'étude du sujet est relativement récente et le premier livre décrivant les techniques et des résultats généraux de ce domaine est celui de Liggett [Lig05]. Les systèmes de particules interagissantes sont des processus de Markov à temps continu qui décrivent un ensemble de particules dont l'état évolue selon un modèle probabiliste. Les processus prennent leurs valeurs dans un espace de configurations S^V où V est l'ensemble des sommets d'un graphe et S est un espace métrique compact représentant l'ensemble des états possibles d'un sommet. L'objectif n'est pas ici de discuter de l'existence ou de la construction de tels processus mais plutôt de décrire comment trouver des bornes pour la valeur critique de survie dans le cas du processus de contact.

Dans le cas qui nous intéresse, $S = \{0, 1\}$ et le graphe considéré sera un arbre $T = (V, E)$ localement fini avec des arêtes non-orientées. Comme dans les chapitres précédents, on fixe un sommet v_0 qu'on appelle la racine. Le processus de contact a été introduit afin d'étudier l'évolution d'une maladie dans une population. On notera $\eta \in \{0, 1\}^V$ une configuration du processus. Étant donné un sommet $v \in V$ on dira qu'il est infecté dans la configuration η si $\eta(v) = 1$ et sain si $\eta(v) = 0$. On aura souvent tendance à traiter η comme un sous-ensemble de V en désignant ainsi par η l'ensemble des sommets infectés. Le processus de contact sera décrit par $(Y_t : t \geq 0)$ où Y_t est la configuration au temps t .

Pour faire les choses comme Liggett, on décrit tout d'abord le processus par les taux de transition d'un état global à un autre. Étant donné une configuration η comptant un nombre fini de sommets infectés, il y a deux types de transitions possibles : soit une infection guérira, soit une infection en fera naître

une autre sur un site adjacent sain. La configuration η_v est identique à η sauf au sommet v où on a renversé sa valeur. Le taux de transition de η vers $\mu \in \{0, 1\}^V$, noté $q(\eta, \mu)$, est donné par

$$q(\eta, \eta_v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(v) = 1 \\ \lambda \cdot |\{w : w \sim v \text{ et } \eta(w) = 1\}| & \text{si } \eta(v) = 0 \end{cases}$$

où $w \sim v$ lorsque les sommets w et v sont adjacents dans le graphe et où λ est le paramètre d'infection. Le taux de transition est nul pour toutes les autres configurations. Si tous les sommets du graphe sont sains, tous les taux de transition sont nuls et le processus stagne. On dira que le processus s'éteint lorsqu'il atteint cette configuration. Le choix des taux de transition nous assure l'existence d'un unique processus de Markov issu des taux de transition si le nombre de voisins est borné dans le graphe (voir [Lig10]). Les graphes considérés ici satisferont cette condition. Le principal avantage de cette description est qu'elle nous permet d'écrire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(f(Y_{t+h}) | Y_t = \eta) - f(\eta)}{h} = \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) (f(\eta_v) - f(\eta)). \quad (4.1)$$

pour les fonctions $f : \{0, 1\}^S \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles le terme de droite converge. Par contre, il est assez difficile d'avoir de l'intuition avec cette description. Heureusement, il existe une façon équivalente et plus élémentaire de représenter le processus de contact. Étant donné une configuration finie de sommets infectés, la dynamique est la suivante :

1. Si $\eta(v) = 1$, alors l'infection au sommet v guérit après un temps exponentiel de paramètre 1 ;
2. Si $\eta(v) = 0$ alors le sommet v est infecté après un temps exponentiel de paramètre $\lambda \cdot |\{w : w \sim v \text{ et } \eta(w) = 1\}|$.

En utilisant cette description alternative du processus, il est possible de montrer que si le processus de contact débute avec un nombre fini de sommets infectés, le nombre de sommets infectés sera presque sûrement fini pour $0 \leq t < \infty$. On considérera toujours des configurations initiales qui comptent un nombre fini d'infections.

Pour le processus de contact, plusieurs valeurs critiques peuvent être étudiées et Pemantle en présente 5 dans son article [Pem92]. Nous nous intéresserons à deux valeurs critiques, soit λ_1 et λ_a , respectivement la valeur critique de survie globale et la valeur critique de survie locale. La notation est empruntée de l'article de Pemantle. Ces valeurs critiques sont définies par

$$\lambda_1 := \inf\{\lambda > 0 : \mathbb{P}(Y_t \neq \mathbf{0} \quad \forall t \geq 0) > 0\}; \quad (4.2)$$

$$\lambda_a := \inf\{\lambda > 0 : \mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} Y_t(v_0) = 1) > 0\}. \quad (4.3)$$

On débutera toujours le processus avec un nombre fini de sommets infectés. La valeur critique de survie locale semble donner un statut particulier à la racine mais il est facile de voir que λ_a ne dépend ni du choix de configuration initiale (finie), ni du choix de v_0 . Si $0 < \lambda_1 < \lambda_a < \infty$, le processus de

contact montre trois phases distinctes dans son comportement : aucune survie, une probabilité positive de survie globale sans survie locale puis une probabilité positive de survie locale. Nos bornes pour les valeurs critiques du processus sur l'arbre homogène de degré n montreront que $0 < \lambda_1 < \lambda_a$ pour $n \geq 5$. Dans le même article, Pemantle montre aussi que $\lambda_a < \infty$, ce qui permet de s'assurer de l'existence des trois phases sur l'arbre homogène. Un résultat plus fort de Pemantle montre que c'est aussi le cas pour $n = 3, 4$. Un résultat plus récent, dû à Liggett, [Lig96] montre que ce comportement a aussi lieu pour $n = 2$. Il s'agit d'une grande différence par rapport à \mathbb{Z}^d pour lequel les valeurs critiques λ_1 et λ_a coïncident toujours.

Dans la dernière partie du chapitre, on tentera de déterminer des bornes pour des arbres plus généraux que les arbres homogènes. En adaptant un résultat de Schinazi [Sch99], on trouve une borne inférieure pour λ_1 dans le cas des recouvrements universels de graphes finis.

4.1 L'arbre homogène

Les arbres homogènes sont des graphes sans cycle dont chaque sommet a le même nombre de voisins. En choisissant une racine pour un tel arbre, on remarque que tous les sommets ont le même nombre d'enfants sauf la racine qui en a un de plus. On notera \mathbb{T}^n l'arbre dont chaque sommet a $n + 1$ voisins. À noter que \mathbb{T}^2 n'est pas exactement l'arbre binaire, bien que tous deux aient la même constante de branchement. Pemantle donne les bornes suivantes pour le processus de contact dans [Pem92].

Théorème 20 (Pemantle). *Sur \mathbb{T}^n pour $n \geq 2$ on a les bornes suivantes pour les valeurs critiques du processus de contact :*

$$\frac{1}{n} \leq \lambda_1 \leq \frac{\sqrt{9 + 16/(n-1)} - 1}{2(n+1)} < \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \lambda_a < \infty.$$

Le reste de la section est dédié à la démonstration de ce théorème. Les techniques utilisées par Pemantle pour déterminer ces bornes sont principalement issues de la théorie des martingales. On fait donc un court rappel de quelques résultats importants de la théorie des martingales qui nous seront utiles pour la suite.

4.1.1 Théorie des martingales

Soit un processus stochastique $(X_t : t \geq 0)$. Il est implicite qu'un tel processus est construit sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La notion de martingale sert à caractériser les processus qui ont une tendance à la hausse, à la baisse ou au statu quo. On fait ici un survol rapide de quelques résultats importants de la théorie sans donner de démonstrations.

Définition. Une *filtration* sur l'espace (Ω, \mathcal{F}) est une famille de σ -algèbres $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ telle que si $s < t$ alors $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Définition. On dit que le processus $(X_t : t \geq 0)$ est *adapté* à la filtration \mathbb{F} si X_t est mesurable par rapport à \mathcal{F}_t pour tout $t \geq 0$.

Plusieurs filtrations feront qu'un processus est adapté. La *filtration naturelle* définie par $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$ est minimale sous l'inclusion. Une σ -algèbre \mathcal{F} sur Ω induit une relation d'équivalence sur Ω en rassemblant les éléments de Ω qui sont indiscernables par \mathcal{F} . À mesure que t augmente, la relation induite par une filtration devient plus fine et peut être vue comme l'information disponible à un observateur du processus jusqu'au temps t .

Définition. Soit $(X_t : t \geq 0)$ un processus à valeurs réelles défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit \mathbb{F} une filtration sur (Ω, \mathcal{F}) . On dit que $(X_t : t \geq 0)$ est une *sous-martingale* par rapport à la filtration \mathbb{F} si

1. $(X_t : t \geq 0)$ est adapté à la filtration \mathbb{F} ,
2. $\mathbb{E}(X_t^+) < \infty$,
3. $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ presque sûrement pour tout choix de $0 \leq s < t < \infty$.

où $X_t^+ = \max\{X_t, 0\}$. Une *sur-martingale* est un processus X_t tel que $-X_t$ est une sous-martingale. Si X_t est à la fois une sous-martingale et une sur-martingale, on dit que c'est une *martingale*.

Théorème 21 (Théorème de convergence). *Soit $(X_t : t \geq 0)$ une sous-martingale continue à droite telle que $\sup_t \mathbb{E}(X_t^+) < \infty$. Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existe presque sûrement.*

Dans notre cas, on utilisera le corollaire suivant :

Corollaire 4. *Une sur-martingale continue à droite à valeurs positives converge presque sûrement lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Étant donné deux valeurs de temps $s < t$ et l'information sur le processus jusqu'à s , si le processus est une sous-martingale alors l'espérance de sa valeur au temps t est supérieure à sa valeur (connue) au temps s . Qu'en est-il si on choisit des temps qui sont aléatoires au lieu de temps fixés ?

Définition. Un *temps d'arrêt* pour la filtration \mathbb{F} est une fonction $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ telle que

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

La σ -algèbre \mathcal{F}_τ associée au temps d'arrêt τ est définie par la relation suivante

$$A \in \mathcal{F}_\tau \Leftrightarrow A \in \sigma \left(\bigcup_{s \geq 0} \mathcal{F}_s \right) \text{ et } A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0.$$

Au premier chapitre, nos temps de frappe étaient des temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle de notre processus discret qui était la chaîne de Markov sur un graphe.

Théorème 22 (Optional Stopping Theorem). *Soit $(X_t : t \geq 0)$ une sous-martingale adaptée à $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ et ρ, τ deux temps d'arrêt tels que $\rho \leq \tau$. Alors*

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\rho) \geq X_\rho.$$

4.1.2 Démonstration du théorème de Pemantle

La théorie des martingales propose des outils intéressants pour s'attaquer à plusieurs problèmes en théorie des probabilités. Dans notre cas, on veut étudier la survie du processus de contact. Pour ce faire, on s'intéresse au poids

$$W(\eta) = ak(\eta) + bc(\eta)$$

où $k(\eta)$ est le nombre de sommets infectés de la configuration η et $c(\eta)$ le nombre de composantes connexes de sommets infectés dans la configuration η . Les valeurs $a, b > 0$ seront choisies plus tard de la façon la plus avantageuse possible. Il est clair que le processus de contact $(Y_t : t \geq 0)$ s'éteint si et seulement si le poids associé à Y_t devient nul.

Supposons que pour une certaine valeur d'intensité λ , il est possible de trouver des constantes a et b telles que

$$\sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) (W(\eta_v) - W(\eta)) < 0 \quad (4.4)$$

pour toute configuration η . On montre ici que $W(Y_t)$ doit être une sur-martingale.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}(W(Y_t) | \mathcal{F}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h}) | Y_0) - \mathbb{E}(W(Y_t) | Y_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{W(Y_{t+h}) - W(Y_t)}{h} \middle| Y_0 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\frac{W(Y_{t+h}) - W(Y_t)}{h} \middle| Y_t \right) \middle| Y_0 \right). \quad (4.6)$$

On a utilisé la linéarité de l'intégrale pour trouver (4.5) et on a conditionné sur la valeur du processus au temps t pour trouver (4.6). On aimerait échanger la limite et l'intégrale pour utiliser (4.1). Pour ce faire, on peut borner $W(Y_{t+h}) - W(Y_t)$ par un processus de Poisson en considérant le pire cas possible (borne maximale sur le saut de W et taux de renversement maximaux). On obtient

$$\mathbb{E} \left(\frac{W(Y_{t+h}) - W(Y_t)}{h} \middle| Y_t = \eta \right) \leq K(a, b, \lambda) k(\eta) \quad \forall \eta \in \{0, 1\}^S$$

où la constante $K(a, b, \lambda)$ ne dépend pas de la configuration. Il est ensuite possible de montrer que $k(\eta)$ est intégrable par rapport à la distribution du processus au temps t par une astuce semblable. Le

théorème de convergence dominée nous permet donc d'écrire

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}(W(Y_t) | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{W(Y_{t+h}) - W(Y_t)}{h} \middle| Y_t \right) \middle| Y_0 \right).$$

Mais comme (4.4) tient, la dérivée est toujours négative et $W(Y_t)$ est une sur-martingale. Ainsi, $\mathbb{E}(W(Y_t) | Y_0) \leq W(Y_0)$ pour toute valeur de $t > 0$. Par la propriété de Markov, $W(Y_t)$ est une sur-martingale. On peut donc appliquer le corollaire du théorème de convergence de la sous-section précédente. Celui-ci nous assure l'existence, presque sûrement, d'une limite pour le poids du processus. Si le processus de contact survit, il y aura des transitions à des valeurs de temps arbitrairement grandes. Le poids devra donc faire des sauts à ces mêmes valeurs de temps et le poids ne pourra converger. Ainsi, Y_t s'éteint presque sûrement puisque $W = 0$ est la seule valeur possible pour la convergence.

Il est difficile de faire le même raisonnement pour expliquer la survie du processus. On devra avoir une condition un peu plus forte. Supposons donc que pour certaines valeurs de λ , il est possible de trouver $a, b > 0$ de façon à ce que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h}) | Y_t = \eta) - W(\eta)}{h} \geq \varepsilon W(\eta)$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. On a ainsi que

$$\sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta_v) - W(\eta)}{W(\eta)} \geq \varepsilon. \quad (4.7)$$

Considérons $W^{-1}(Y_t)$. On voudrait montrer qu'il s'agit d'une sur-martingale lorsque W est assez élevé.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W^{-1}(Y_{t+h}) | Y_t = \eta) - W^{-1}(\eta)}{h} &= \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) (W^{-1}(\eta_v) - W^{-1}(\eta)) \\ &= \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta) - W(\eta_v)}{W(\eta)W(\eta_v)}. \end{aligned}$$

On considère $V_\eta^+ \subset V$, les sommets tels que $W(\eta_v) > W(\eta)$. Il est possible de trouver une borne maximale sur le saut de W en analysant le comportement de W dans les cas extrêmes. On note cette borne $B = B(a, b, n)$. Celle-ci est indépendante de l'état du processus. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W^{-1}(Y_{t+h}) | Y_t = \eta) - W^{-1}(\eta)}{h} &= \sum_{v \in V_\eta^+} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta) - W(\eta_v)}{W(\eta)W(\eta_v)} + \sum_{v \in V \setminus V_\eta^+} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta) - W(\eta_v)}{W(\eta)W(\eta_v)} \\ &\leq -\frac{1}{W(\eta) - B} \sum_{v \in V_\eta^+} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta_v) - W(\eta)}{W(\eta)} - \frac{1}{W(\eta) + B} \sum_{v \in V \setminus V_\eta^+} q(\eta, \eta_v) \frac{W(\eta_v) - W(\eta)}{W(\eta)}. \end{aligned}$$

On peut montrer que les deux sommes de la dernière ligne sont bornées par une constante indépendante de η . Ainsi, par (4.7), il existe une valeur $z > 0$ telle que si $W(\eta) > z$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W^{-1}(Y_{t+h})|Y_t = \eta) - W^{-1}(\eta)}{h} < 0. \quad (4.8)$$

Posons $\rho = \inf\{t \geq 0 : W(Y_t) \geq z + 2B\}$. C'est un temps d'arrêt pour le processus avec la filtration naturelle. Pour n'importe quelle configuration initiale avec un nombre fini de sommets infectés, l'événement $\{\rho < \infty\}$ a une probabilité positive. On s'intéresse maintenant au temps d'arrêt

$$\tau = \inf\{t \geq \rho : W(Y_t) \leq z + B\}.$$

Sur l'ensemble $\{\rho < \infty\} \in \mathcal{F}$, on sait que le processus $(J_t : t \geq 0)$ défini par $J_t = W^{-1}(Y_{\min\{\rho+t, \tau\}})$ est une sur-martingale. Mais si le temps d'arrêt τ était presque sûrement fini sur l'ensemble $\{\rho < \infty\}$, alors on aurait

$$\mathbb{E}(J_\tau | \mathcal{F}_0) \geq \frac{1}{z+B} > \frac{1}{z+2B} \geq J_0$$

ce qui contredit le théorème 22 avec la filtration naturelle associée à J . Ainsi, comme il y a une probabilité positive que le temps d'arrêt soit infini, le processus de contact a une probabilité positive de survie.

Il nous reste donc à déterminer les valeurs de λ pour lesquelles il sera possible de conclure à la mort ou la survie du processus. Le choix du poids W et la structure de l'arbre homogène facilitent la réécriture du terme de droite de l'équation (4.1). Les taux de renversement sont tous nuls, à part ceux associés aux sommets infectés de η et leurs voisins. Si on voit η comme un sous-ensemble de V , on peut séparer la somme de la façon suivante afin de faciliter le calcul :

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v) (W(\eta_x) - W(\eta)) \\ &= a \sum_{v \in \eta} q(\eta, \eta_v) (k(\eta_v) - k(\eta)) + b \sum_{v \in \eta} q(\eta, \eta_v) (c(\eta_v) - c(\eta)) \\ &+ a \sum_{\substack{v \notin \eta \\ v \sim \eta}} q(\eta, \eta_v) (k(\eta_v) - k(\eta)) + b \sum_{\substack{v \notin \eta \\ v \sim \eta}} q(\eta, \eta_v) (c(\eta_v) - c(\eta)). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le renversement d'une coordonnée dans la première somme correspond à la perte d'un sommet infecté. On a donc $q(\eta, \eta_v) = 1$ et $k(\eta_v) = k(\eta) - 1$. La somme vaut donc $-k(\eta)$. La situation est la même dans la deuxième somme mais on s'intéresse à la modification du nombre de composantes connexes. Tout dépendant de la configuration et du sommet retiré, $c(\eta_v)$ peut varier entre $c(\eta) - 1$ lors de la perte d'une infection isolée et $c(\eta) + n$ si tous les voisins de v étaient infectés. En fait, $c(\eta_v) = c(\eta) + |\{w \in \eta : w \sim v\}| - 1$. Dans une composante connexe de s sommets dans un arbre, il y a exactement $s - 1$ arêtes entre deux sommets infectés. Ainsi,

$$\sum_{v \in \eta} q(\eta, \eta_v) (c(\eta_v) - c(\eta)) = \sum_{v \in \eta} (|\{w \in \eta : w \sim v\}| - 1) = 2(k(\eta) - c(\eta)) - k(\eta) = k(\eta) - c(\eta).$$

Les deux sommes suivantes correspondent à l'infection d'un nouveau sommet. On a donc $k(\eta_v) = k(\eta) + 1$. Pour évaluer le troisième terme, il reste à calculer le nombre d'arêtes reliant un sommet

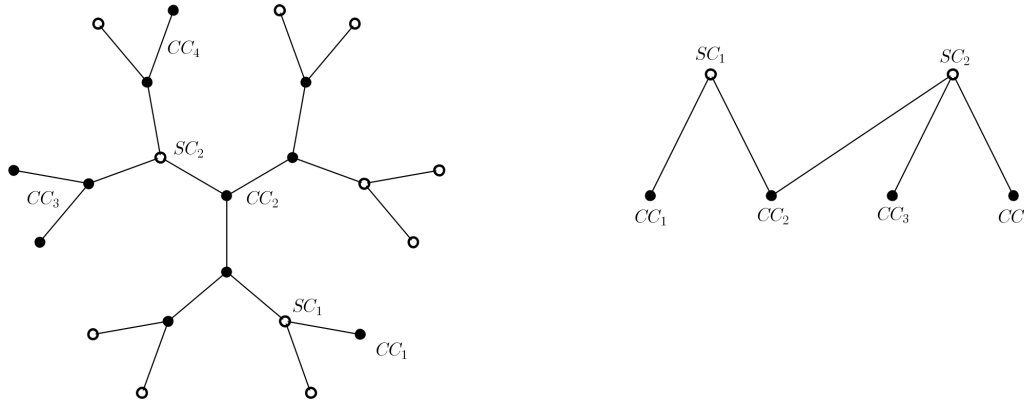


FIGURE 4.1: Graphe biparti associé à une configuration dans \mathbb{T}^2

infecté à un sommet non infecté. Les $k(\eta)$ sommets de la configuration sont tous reliés à $n + 1$ autres sommets. On vient tout juste de calculer le nombre d'arêtes reliant deux sommets infectés. En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\sum_{\substack{v \notin \eta \\ v \sim \eta}} q(\eta, \eta_v)(k(\eta_v) - k(\eta)) = \lambda (k(\eta)(n + 1) - 2(k(\eta) - c(\eta))) = k(\eta)(n - 1)\lambda + 2c(\eta)\lambda.$$

La dernière somme est la seule qu'il nous sera impossible d'évaluer exactement en fonction de $k(\eta)$ et $c(\eta)$. L'infection d'un sommet adjacent à la configuration peut seulement faire varier le nombre de composantes à la baisse. Ainsi, on peut borner supérieurement la somme par 0. Pour trouver une borne inférieure, on se représente la configuration à l'aide d'un graphe biparti. Les sommets du graphe sont de deux types (qui formeront la partition du graphe biparti) : les composantes connexes de sommets infectés ainsi que les *sommets de connexion*. Les sommets de connexion sont les sommets du graphe original qui ne sont pas infectés mais dont l'infection aurait pour effet de relier au moins deux composantes connexes. Dans le graphe biparti, une composante et un sommet de connexion sont reliés s'ils sont adjacents dans le graphe original. La situation est expliquée dans la figure 4.1 avec \mathbb{T}^3 . Les sommets infectés sont opaques tandis que les sommets sains sont vides. On note par CC_i les composantes connexes, SC_i les sommets de connexion et $SC = \{\text{sommets de connexion}\}$.

Seule une nouvelle infection sur un sommet de connexion aura un impact sur le nombre de composantes connexes. Le graphe biparti donne une image très claire de la situation. Si un sommet de connexion SC_i est infecté, il y a perte de $e(SC_i) - 1$ composantes connexes où $e(v)$ dénote le nombre d'arêtes adjacentes au sommet v du graphe biparti. Il est impossible qu'il existe un cycle dans le graphe biparti puisque celui-ci est issu d'une configuration sur un arbre. Mais si le nombre d'arêtes est supérieur ou égal au nombre de sommets, alors il y aura nécessairement un cycle. On doit donc

avoir que $|\{\text{arêtes du graphe biparti}\}| \leq c(\eta) + |SC| - 1$ et on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{v \in SC} (e(v) - 1) &= \sum_{v \in SC} e(v) - |SC| \\ &= |\{\text{arêtes du graphe biparti}\}| - |SC| \\ &\leq c(\eta) + |SC| - 1 - |SC| \\ &= c(\eta) - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, comme le taux de renversement en un sommet de connexion est d'au plus $(n+1)\lambda$, on peut borner inférieurement le dernier terme par $-(n+1)\lambda(c(\eta) - 1)$. Il est clair que k et c dépendent de la configuration initiale, on laissera donc tomber la dépendance à η dans l'écriture. On a maintenant des bornes pour la variation de l'espérance conditionnelle :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h})|Y_t = \eta) - W(\eta)}{h} \leq a[((n-1)\lambda - 1)k + 2c\lambda] + b[k - 2c] \quad (4.10)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h})|Y_t = \eta) - W(\eta)}{h} \geq a[((n-1)\lambda - 1)k + 2c\lambda] + b[k - (2 + (n+1)\lambda)c]. \quad (4.11)$$

Pour des valeurs de a, b et λ fixées, les bornes pour la dérivée de l'espérance conditionnelle sont linéaires en c et en k . De plus, comme $1 \leq c \leq k$, il nous suffit de vérifier que la borne est positive (respectivement négative) pour $c = 1$ et $c = k$. Les conditions à respecter seront beaucoup plus faciles à analyser avec $c = 0$. Pour (4.10), on trouve les deux conditions suivantes :

$$((n-1)\lambda - 1)a + b < 0, \quad (4.12)$$

$$((n+1)\lambda - 1)a - b < 0. \quad (4.13)$$

L'équation (4.13) est toujours vraie si $\lambda \leq 1/(n+1)$. Supposons que $\lambda > 1/(n+1)$. Alors $a < b/((n+1)\lambda - 1)$ et en substituant cette relation dans (4.12) on trouve

$$((n-1)\lambda - 1)a + b < \frac{(2n\lambda - 2)b}{(n+1)\lambda - 1}. \quad (4.14)$$

Ainsi, il est possible de faire un choix de constantes $a, b > 0$ de façon à ce que $W(Y_t)$ soit une surmartingale si $\lambda < 1/n$. Donc $\lambda_1 \geq 1/n$. Pour l'équation (4.11) on trouve les deux conditions suivantes :

$$((n-1)\lambda - 1)a + b > 0, \quad (4.15)$$

$$((n+1)\lambda - 1)a - (1 + (n+1)\lambda)b > 0. \quad (4.16)$$

Lorsque $\lambda \geq 1/(n-1)$, (4.15) est automatiquement vérifiée. On suppose donc $1/(n+1) < \lambda < 1/(n-1)$. Avec ce choix, il est possible de dire que

$$a > \frac{(n+1)\lambda + 1}{(n+1)\lambda - 1} b$$

à l'aide de la condition (4.16). En remplaçant dans l'équation (4.15), on trouve qu'il y aura une solution si

$$\frac{((n-1)\lambda - 1)((n+1)\lambda + 1)}{(n+1)\lambda - 1} + 1 > 0.$$

Ceci est équivalent à étudier l'équation quadratique $(n+1)\lambda^2 + \lambda - 2/(n-1)$ qui a une valeur strictement positive si

$$\lambda > \frac{\sqrt{1+8(n+1)/(n-1)} - 1}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{9+16/(n-1)} - 1}{2(n+1)}.$$

Il est possible de montrer que cette dernière valeur est bel et bien inférieure à $1/(n-1)$. Si $\lambda > (\sqrt{9+16/(n-1)} - 1)/2(n+1)$, on peut donc trouver des constantes $a, b > 0$ de façon à ce que les équations (4.15) et (4.16) soient vérifiées. Fixons des valeurs de a et b et posons $M(a, b, \lambda)$ comme le minimum des termes de gauche dans (4.15) et (4.16).

De cette façon, on remarque que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h})|Y_t = \eta) - W(\eta)}{h} \geq M(\lambda, a, b)k(\eta) > 0.$$

Mais comme $k(\eta) \geq c(\eta)$ et $a > b$, alors $\varepsilon = M(\lambda, a, b)/2a$ sera tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}(W(Y_{t+h})|Y_t = \eta) - W(\eta)}{h} \geq \varepsilon W(\eta).$$

Suite à ce qui a été fait plus tôt, ceci conclut la démonstration pour les bornes associées à λ_1 .

On montre maintenant comment en arriver à la borne inférieure pour λ_a . On utilise encore une fois une approche issue de la théorie des martingales. Comme on s'intéresse à la survie locale de l'infection à la racine, le poids choisi devra donner un statut particulier à la racine. On prend

$$W(Y_t) = \sum_{v \in Y_t} n^{-|v|/2}.$$

Pour une certaine valeur de $\lambda > 0$, si on réussit à montrer que $W(Y_t)$ est une sur-martingale, alors $W(Y_t)$ devra converger vers 0 presque sûrement. La survie locale est donc impossible puisque si la racine est infectée dans la configuration η , alors $W(\eta) \geq 1$. De la même façon que pour la borne inférieure à λ_1 , on écrit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \mathbb{E}(W(Y_t + h)|Y_t = \eta) \Big|_{h=0} &= \sum_{v \in \eta} q(\eta, \eta_v)(W(\eta_v) - W(\eta)) \\ &+ \sum_{v \in \eta} \sum_{\substack{w \sim v \\ w \notin \eta}} q(\eta, \eta_w)(W(\eta_w) - W(\eta)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

La première somme correspond à la guérison d'une infection. Les taux sont donc $q(\eta, \eta_v) = 1$ qui correspondent à la perte d'un sommet. On trouve

$$\sum_{v \in \eta} q(\eta, \eta_v)(W(\eta_v) - W(\eta)) = \sum_{v \in \eta} -n^{-|v|/2}. \quad (4.18)$$

Le deuxième terme correspond à l'infection d'un sommet. La plus grande valeur que peut prendre ce terme survient lorsque chaque sommet infecté est entouré de sommets sains. On a donc

$$\sum_{v \in \eta} \sum_{w \sim v} q(\eta, \eta_w)(W(\eta_w) - W(\eta)) \leq \sum_{v \in \eta} \left(\lambda n \cdot n^{-(|v|+1)/2} + \lambda n^{-(|v|-1)/2} \right). \quad (4.19)$$

Le premier élément dans la somme correspond à l'infection des enfants et le deuxième à celui du parent. On peut donc réécrire (4.17) en utilisant (4.18) et (4.19) pour trouver

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh} \mathbb{E}(W(Y_t + h) | Y_t = \eta) \Big|_{h=0} &\leq \sum_{v \in \eta} \left(-n^{-|v|/2} + \lambda n \cdot n^{-(|v|+1)/2} + \lambda n^{-(|v|-1)/2} \right) \\ &= \sum_{v \in \eta} n^{-|v|/2} \left(-1 + \lambda n^{1/2} + \lambda n^{1/2} \right) \\ &= (2\lambda \sqrt{n} - 1)W(\eta). \end{aligned}$$

Si $\lambda < 1/2\sqrt{n}$ alors $W(Y_t)$ est une sur-martingale et on a la conclusion désirée.

4.2 Recouvrement universel

Le travail fait jusqu'ici par rapport au processus de contact a donné des bornes intéressantes qui nous permettent même de distinguer un changement de phase dans le comportement du processus pour n assez grand. D'un autre côté, ce travail a été réalisé dans un cadre très précis et il n'est pas clair en quoi ces bornes peuvent être utiles pour étudier différents types d'arbres ou de graphes en général.

On explique ici comment il a été possible de trouver une borne inférieure à λ_1 pour une classe d'arbres plus généraux que les arbres homogènes. L'approche est complètement différente de celle utilisée par Pemantle et repose sur la comparaison du processus de contact avec un processus plus simple. La technique de couplage sera cette fois notre outil principal. Le théorème 24 est un résultat original dont l'idée est issue d'un résultat de Schinazi.

4.2.1 Couplage

Le principal obstacle à l'étude du processus de contact est le fait que les infections n'agissent pas de façon indépendante. L'évolution d'une infection est influencée par les infections environnantes puisque celles-ci peuvent empêcher la première de se propager sur un site déjà infecté. Il est donc difficile de décrire la dynamique du processus puisque celle-ci dépend grandement de la configuration des sommets infectés. Il a été possible de le faire dans la première section pour des arbres homogènes mais sans homogénéité, la tâche s'avère plus difficile.

Pourrait-on tirer des conclusions de l'étude d'un processus plus simple pour lequel il y a indépendance entre les infections ? Une autre idée intéressante serait d'étudier le processus de contact sur un sous-graphe du graphe original ou bien sur un graphe dans lequel le graphe original peut être plongé. Que pourrait-on en déduire sur les valeurs critiques ?

La technique de couplage est largement utilisée dans le domaine des systèmes de particules interagissantes. Elle consiste à construire deux processus $(Y_t^{(1)} : t \geq 0)$ et $(Y_t^{(2)} : t \geq 0)$ sur le même espace

probabilisé de façon à ce que $Y_t^{(2)} \leq Y_t^{(1)}$ composante par composante, presque sûrement pour toute valeur de t . Si le couplage est fait de façon à ce que le processus qui nous intéresse soit borné inférieurement ou supérieurement par un processus plus simple, les résultats sur ce dernier peuvent par exemple nous donner des bornes sur les valeurs critiques du premier.

Dans le cas du processus de contact, la «représentation graphique» est la meilleure façon de visualiser de quelle façon il est possible de faire un couplage de processus. Les livres de Grimmett [Gri10], de Liggett [Lig10] et de Schinazi [Sch99] décrivent cette construction et il est possible de s’y référer pour plus de détails. Nous avons décrit le processus de contact de deux façons différentes au début du présent chapitre. La première nous a été très utile afin d’utiliser les résultats de la théorie des martingales. La description à l’aide des lois exponentielles permet de son côté une visualisation plus simple du processus.

Considérons un graphe dans le plan. À chaque sommet, on ajoute une droite sortant du plan représentant le temps. Sur chacune de ces droites, on considère un processus de Poisson d’intensité 1 dont on marque les sauts d’une croix. Pour chaque sommet w adjacent à v , on considère un processus de Poisson d’intensité λ dont on marque chaque saut par une flèche pointant vers le sommet w sur la droite associée à v . Les croix marquent les guérisons et les flèches représentent les infections. La figure 4.2 illustre une réalisation du processus sur le graphe \mathbb{Z} . Étant donné une configuration initiale $\eta \subset V$, on dira que le sommet $v \in V$ est infecté au temps t s’il existe $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t$ et $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v$ tels que

1. $v_0 \in \eta$;
2. Il y a une flèche de v_i à v_{i+1} au temps t_{i+1} pour $0 \leq i \leq n-1$;
3. Il n’y a aucun croix sur les segments $\{v_i\} \times [t_i, t_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n$.

Cette construction coïncide exactement avec notre description du processus par des lois exponentielles. Pour la configuration initiale pour laquelle seuls les sommets -4 et 4 sont infectés, on peut visuellement suivre l’évolution de la propagation de l’infection à l’aide des lignes rouges dans la figure 4.2. Au temps t , deux sommets sont infectés : -5 et 2 . Pour une réalisation donnée (les flèches et les croix), il est possible de considérer simultanément un processus de contact avec une des modifications suivantes :

- Changement de la configuration initiale.
- Considérer le processus sur un sous-graphe.
- Abaisser le taux d’infection λ .

Pour considérer le processus sur un sous-graphe, il s’agit d’ignorer les droites verticales associées aux sommets qui n’en font pas partie. Si on veut abaisser le taux à une valeur $\lambda' < \lambda$, il s’agit de

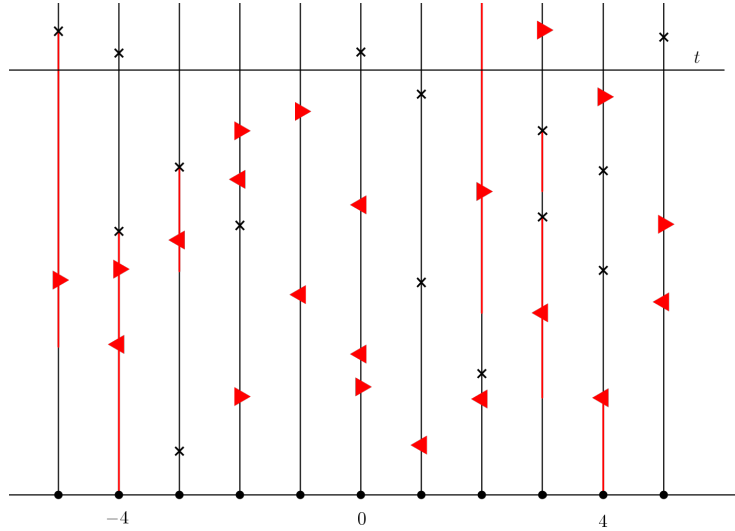


FIGURE 4.2: Représentation graphique du processus de contact sur \mathbb{Z}

garder indépendamment les flèches avec probabilité λ'/λ . Les infections d'un sommet à un de ses voisins constituent alors un processus de Poisson de paramètre λ' . Plusieurs propriétés intéressantes découlent de cette construction notamment les propriétés de dualité et d'additivité.

Mais ceci ne résout pas notre manque d'indépendance entre les infections. Pour briser cette dépendance, on admet la possibilité que plus d'une infection se trouve en un sommet. Cela aura pour effet d'éviter qu'une flèche ne soit ignorée. On formalise cette idée dans la prochaine section.

4.2.2 Processus de branchement

On introduit et on étudie ici le processus de branchement. Dans le cas précis des arbres qui sont des recouvrements universels de graphes finis, il sera possible de déterminer exactement la valeur critique de survie de ce processus.

Le processus de branchement prend des configurations $\eta \in \mathbb{N}^V$ et on le note par $(B_t : t \geq 0)$. Comme on laisse la possibilité que plusieurs infections se trouvent sur le même site, un renversement peut donc signifier l'ajout ou la perte d'une infection en un sommet. On note $q(\eta, \eta_v^+)$ le taux associé au passage de η à η_v^+ où l'état η_v^+ correspond à l'ajout d'une infection en v . On fait la même chose pour $q(\eta, \eta_v^-)$ qui correspond à la perte d'une infection en v . Comme pour le processus de contact, on débute par la définition à l'aide des taux de renversement :

$$q(\eta, \mu) = \begin{cases} \eta(v) & \text{si } \mu = \eta_v^- \\ \lambda \sum_{w:w \sim v} \eta(w) & \text{si } \mu = \eta_v^+ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, une infection meurt après un temps exponentiel de paramètre 1 et donne naissance à une nouvelle infection sur un site voisin fixé après un temps exponentiel de paramètre λ . Il est aussi possible de faire une représentation graphique du processus de branchement mais celle-ci nécessite d'équiper chaque sommet d'un nombre dénombrable de processus de Poisson. On aurait par exemple besoin de flèches et de croix bleues pour l'éventuelle deuxième infection se trouvant à un sommet fixé, de flèches et de croix vertes pour la troisième... Ainsi, on pourrait faire un couplage avec le processus de contact à l'aide de cette représentation graphique. Le processus de contact ne considérerait que les flèches rouges, associées à la première infection arrivée sur un sommet. Les deux processus peuvent donc cohabiter sur le même espace probabilisé (formellement, l'espace probabilisé sert à la construction des processus de Poisson) de façon à ce que le processus de branchement borne supérieurement le processus de contact en chaque sommet.

L'autre aspect important du processus de branchement est que deux infections d'une configuration évoluent indépendamment. Encore une fois, le processus sera difficile à analyser tout dépendant de la structure de l'arbre considéré. Comme à la section 2.3, on va tenter de se ramener à des arbres qui peuvent être décrits par un graphe fini.

Définition. Soit $G = (V', E')$ un graphe fini avec des arêtes non orientées. Le *recouvrement universel* de G basé en $v'_0 \in V'$ est l'arbre $T = (V, E)$ construit de la façon suivante :

1. La racine est $v_0 = (v'_0)$.
2. Les enfants de la racine $v_0 = (v'_0)$ sont les chemins (v'_0, w') pour $v'_0 \sim w'$ dans G .
3. Les enfants d'un sommet $v = (v'_0, v'_1, \dots, v'_n)$ pour $n \geq 1$ sont les chemins $(v'_0, v'_1, \dots, v'_n, w')$ où $v'_n \sim w'$ dans G et $w' \neq v'_{n-1}$.

Un exemple de recouvrement universel est donné par la figure 4.3. Étant donné le recouvrement universel d'un graphe, il existe une application naturelle $\pi : V \rightarrow V'$ qui associe $v = (v'_0, v'_1, \dots, v'_n)$ à v'_n . La particularité la plus importante de cette construction est qu'elle préserve la structure locale : si $v \in V$ a n voisins w_1, w_2, \dots, w_n , alors $\pi(v)$ a aussi n voisins w'_1, w'_2, \dots, w'_n et il est possible de les numérotter de façon à ce que $\pi(w_k) = w'_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Le lecteur familier avec la notion de revêtement universel verra un fort lien entre les deux notions. Le qualificatif universel vient du fait qu'un arbre peut être vu comme un espace topologique simplement connexe.

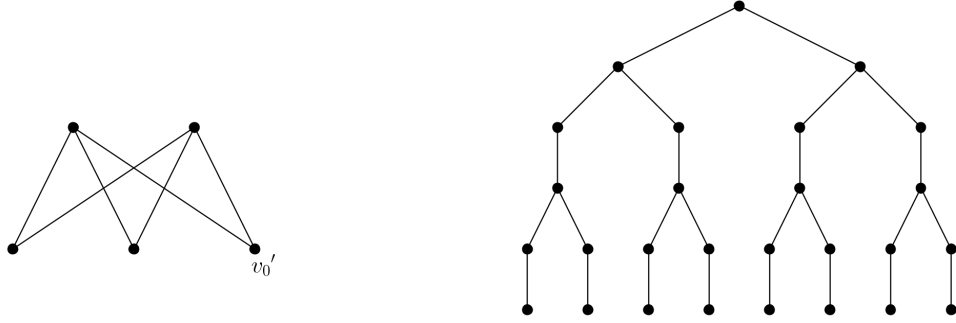


FIGURE 4.3: Recouvrement universel du graphe biparti $K_{2,3}$

Comme la structure locale est préservée, on a l'idée de considérer la fonction $K : \mathbb{N}^V \rightarrow \mathbb{N}^{V'}$ définie par

$$K(\eta) = \left(\sum_{v:\pi(v)=v'_1} \eta(v), \dots, \sum_{v:\pi(v)=v'_r} \eta(v) \right)$$

où $\{v'_1, v'_2, \dots, v'_r\} = V'$. Cette fonction est bien définie pour toutes les configurations qui comptent un nombre fini d'infections. Comme le recouvrement universel préserve la structure du graphe fini, on veut étudier $K(B_t)$ qui compte le nombre d'infections sur tous les sommets de V associés à un sommet $v' \in V'$.

Le théorème 24 relie la valeur critique de survie du processus de branchement sur un recouvrement universel à la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence du graphe G .

Théorème 23 (Schinazi). *Supposons qu'après un temps exponentiel de paramètre a , une particule se sépare en un nombre aléatoire $k \geq 0$ de particules avec probabilité f_k . Supposons aussi que $0 < f_0 + f_1 < 1$ et soit*

$$c = \sum_{k \geq 0} k f_k.$$

Posons Z_t comme le nombre de particules au temps t . Alors

$$\mathbb{P}(Z_t \geq 1, \forall t \geq 0) > 0 \text{ si et seulement si } c \geq 1.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(Z_t | Z_0 = 1) = e^{a(c-1)t} \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Notre démonstration du théorème 24 est une adaptation de la démonstration du théorème précédent. Il s'agit du théorème XI.I.I de [Sch99]. Le cadre de travail est légèrement différent mais la structure de la démonstration est la même.

Théorème 24. Soit T le recouvrement universel d'un graphe fini G avec matrice d'adjacence A . La valeur critique de survie pour le processus de branchement sur T est $1/\rho$ où ρ est la plus grande valeur propre de A .

Démonstration. On va observer $K(B_t)$ aux temps entiers. Étant donné une infection sur un sommet $v \in V$ tel que $\pi(v) = v'$, on s'intéresse à son évolution durant le prochain intervalle de temps de longueur 1. La progéniture de cette infection (vue sur V' via la fonction K) suit une certaine distribution de probabilité sur $\mathbb{N}^{V'}$ et est indépendante de l'évolution des autres infections. De plus, cette distribution est la même que pour une autre infection située sur un sommet $w \in V$ tel que $\pi(w) = v'$.

Le processus $(K(B_n) : n \geq 0)$ est donc un processus de Galton-Watson multi-type où les types correspondent aux éléments de V' . On remarque que ce processus a une probabilité positive de survie si et seulement si le processus de branchement a aussi une probabilité positive de survie. Notre objectif est donc d'étudier la matrice de progéniture de $K(B_n)$. Soit

$$D(t) = \mathbb{E}(K(B_t)|B_0).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale et en conditionnant sur B_t , on écrit

$$D'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\frac{K(B_{t+h}) - K(B_t)}{h} \middle| B_t \right) \middle| B_0 \right).$$

Comme précédemment, on veut utiliser le théorème de convergence dominée pour échanger limite et intégrale. On peut trouver la fonction intégrable dominante en faisant une l'analyse du terme intérieur dans un cas extrême (on considère seulement les naissances et tous les sommets ont un nombre de voisins maximal). Il est alors possible de se ramener à un processus de Poisson et de trouver une borne supérieure intégrable. Soit v'_1, v'_2, \dots, v'_r les sommets de G . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{K(B_{t+h}) - K(B_t)}{h} \middle| B_t = \eta \right) \\ &= \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v^+) (K(\eta_{v^+}) - K(\eta)) + \sum_{v \in V} q(\eta, \eta_v^-) (K(\eta_{v^-}) - K(\eta)) \\ &= \left(\sum_{v: \pi(v)=v'_i} \sum_{w \sim v} \lambda B_t(w) - \sum_{v: \pi(v)=v'_i} B_t(v) \right)_{i=1}^r \\ &= \lambda K(B_t)A - K(B_t) \end{aligned}$$

pour toute configuration η avec un nombre fini de sommets infectés. La matrice d'adjacence A apparaît puisque la structure locale du graphe G est préservée dans le recouvrement universel. On a donc trouvé que $D'(t) = D(t)(A\lambda - I)$. C'est un système d'équations différentielles linéaires avec solution

$$D(t) = \mathbb{E}(K(B_t)|B_0) = K(B_0)e^{(A\lambda - I)t}.$$

En évaluant au temps $t = 1$, on trouve que la matrice de progéniture du processus de Galton-Watson multi-type est $e^{(A\lambda - I)}$.

On veut donc savoir quand est-ce que la matrice $e^{(A\lambda - I)}$ a une valeur propre supérieure à 1. Comme A est une matrice symétrique puisque le graphe fini n'est pas orienté, $A\lambda - I$ est aussi symétrique. Elle est donc diagonalisable et on peut facilement calculer les valeurs propres de $e^{(A\lambda - I)}$. Celles-ci sont tout simplement e^{ρ_i} pour ρ_i une valeur propre de $A\lambda - I$. De plus, les multiplicités sont préservées.

Il faut finalement déterminer à quel moment $A\lambda - I$ possède une valeur propre réelle positive. Prenons α une valeur propre de A et v un vecteur propre associé à droite. Alors

$$(A\lambda - I)v = \alpha\lambda v - v = (\alpha\lambda - 1)v.$$

Si $\lambda > 1/\alpha$, alors $A\lambda - I$ possède une valeur propre positive. Mais on sait que la plus grande valeur propre de A est ρ et ainsi, $1/\rho$ est la valeur critique recherchée.

□

Le théorème précédent donne exactement la valeur critique de survie du processus de branchement sur un revêtement universel de graphe fini. Notre couplage avec le processus de contact nous permet alors d'énoncer le résultat suivant qui ne nécessite plus de démonstration.

Corollaire 5. *Soit T le recouvrement universel d'un graphe fini avec matrice d'adjacence A . Si ρ est la plus grande valeur propre de A et λ_1 est la valeur critique de survie du processus de contact sur T , alors on a*

$$\rho \leq \lambda_1.$$

Pour que le recouvrement universel de G soit un arbre infini, il faut que G possède au moins un cycle. Dans ce cas, le recouvrement est un arbre N -périodique où N dépend de G . Un autre fait intéressant est que l'arbre homogène \mathbb{T}^n est le recouvrement universel de K_{n+2} , le graphe complet à $n+2$ sommets. La plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence de K_{n+2} est $n+1$, ce qui nous donne une borne inférieure au processus de contact un peu plus faible que celle trouvée plus tôt dans ce chapitre.

Conclusion

Au premier chapitre, il a été possible de trouver des critères intéressants pour déterminer si une chaîne de Markov réversible sur un graphe est récurrente ou transitoire. Par la suite, on a concentré nos efforts sur l'étude des arbres. La constante de branchement s'est avérée une caractérisation intéressante de la croissance de ceux-ci. On en a eu la confirmation au troisième chapitre, puisqu'il a été possible de relier cette constante à la marche aléatoire sur un arbre et à la percolation sur un arbre.

Pour terminer, on a étudié le processus de contact sur les arbres. La théorie des martingales nous a permis de détailler la démonstration d'un théorème de Pemantle qui donne des bornes intéressantes pour les valeurs critiques de survie du processus sur l'arbre homogène. En considérant le processus de branchement, il a finalement été possible de donner une borne inférieure à la valeur critique de survie pour des arbres un peu plus généraux que les arbres homogènes.

Le croisement entre la théorie des graphes et la théorie des probabilités est vaste et remplie de questions intéressantes. Certains développements plus récents concernent l'étude du processus de contact sur des graphes de type «Small-World» et «Erdős-Rényi» qui servent principalement à décrire des populations. On peut aussi se demander si les valeurs critiques recherchées dans le cas des graphes infinis ont une signification lorsqu'on s'intéresse au temps de survie d'une maladie dans un graphe fini de même structure. Du côté des arbres, on pourrait aussi se demander si la constante de branchement peut être reliée à d'autres modèles stochastiques.

Bibliographie

- [AH76] Kenneth. APPEL et Wolfgang. HAKEN : Every Planar Map is Four Colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(5):711–712, 1976.
- [Bal06] Paul BALISTER : Branching Processes. *Lecture Note Series, IMS, NUS*, 2006.
- [Bil95] Patrick BILLINGSLEY : *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, troisième édition, 1995.
- [BP94] Abraham BERMAN et Robert J. PLEMMONS : *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, volume 9 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1994. Réimpression révisée de la version originale de 1979.
- [DS84] Peter G. DOYLE et James Laurie SNELL : *Random Walks and Electric Networks*, volume 22 de *Carus Mathematical Monographs*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984.
- [FF10] Lester Randolph FORD, Jr. et Delbert Ray FULKERSON : *Flows in Networks*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2010.
- [Gri10] Geoffrey GRIMMETT : *Probability on Graphs : Random Processes on Graphs and Lattices*, volume 1 de *Institute of Mathematical Statistics Textbooks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [Har63] Theodore Edward HARRIS : *The Theory of Branching Processes*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963.
- [Ken66] David G. KENDALL : Branching Processes Since 1873. *Journal of the London Mathematical Society*, s1-41(1):385–406, 1966.
- [KLPP97] Thomas KURTZ, Russell LYONS, Robin PEMANTLE et Yuval PERES : A Conceptual Proof of the Kesten-Stigum Theorem for Multi-Type Branching Processes. *In Classical and modern branching processes (Minneapolis, MN, 1994)*, volume 84 de *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 181–185. Springer, New York, 1997.

- [KS66] Harry KESTEN et Bernt P. STIGUM : A Limit theorem for Multidimensional Galton-Watson Processes. *Ann. Math. Statist.*, 37:1211–1223, 1966.
- [Lig96] Thomas M. LIGGETT : Multiple Transition Points for the Contact Process on the Binary Tree. *Ann. Probab.*, 24(4):1675–1710, 1996.
- [Lig05] Thomas M. LIGGETT : *Interacting Particle Systems*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Réimpression de la version originale de 1985.
- [Lig10] Thomas M. LIGGETT : *Continuous Time Markov Processes : An Introduction*, volume 113 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [LPon] Russell LYONS et Yuval PERES : *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, En préparation. Version à jour disponible au <http://mypage.iu.edu/~rdlyons/>.
- [Lyo90] Russell LYONS : Random Walks and Percolation on Trees. *Ann. Probab.*, 18(3):931–958, 1990.
- [Nor98] James R. NORRIS : *Markov Chains*, volume 2 de *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Réimpression de la version originale de 1997.
- [Pem92] Robin PEMANTLE : The Contact Process on Trees. *Ann. Probab.*, 20(4):2089–2116, 1992.
- [Pet13] Gábor PETE : Probability and Geometry on Groups. *Lecture Notes*, 2013.
- [Sch99] Rinaldo B. SCHINAZI : *Classical and Spatial Stochastic Processes*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.