



La fonction de profondeur de Tukey

Mémoire

Mouhamadou Moustapha Cisse

Maîtrise en mathématiques - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

© Mouhamadou Moustapha Cisse, 2019

Résumé

Dans ce mémoire nous définissons la fonction de profondeur de Tukey d'une mesure positive et finie sur \mathbb{R}^d . Par la suite nous étudions les propriétés de cette fonction, notamment les propriétés de continuité et de convexité. Notre objectif est d'établir une caractérisation d'une mesure par sa fonction de profondeur. Plus précisément, étant donné μ et ν deux mesures de Borel positives et finies sur \mathbb{R}^d , a-t-on $\mu = \nu$ si μ et ν ont la même fonction de profondeur ?

En utilisant des propriétés de la fonction de profondeur, nous établissons une caractérisation lorsque la mesure satisfait certaines propriétés géométriques. Par la suite, nous présentons quelques approches afin de calculer la fonction de profondeur d'une mesure. Enfin nous prouvons le théorème de caractérisation d'une mesure discrète par sa fonction de profondeur de Tukey.

Abstract

In this memoir we define the Tukey depth function of a positive finite measure on \mathbb{R}^d . Then we study the properties of this function, in particular the properties of continuity and convexity. We seek to establish a characterization of a measure by its depth function. That is, given μ, ν finite positive measures on \mathbb{R}^d , do we have $\mu = \nu$ if μ and ν have the same Tukey depth function ?

We use the properties of the depth function to establish such a characterization when the measure satisfies certain geometric properties. Then we exhibit some approaches for computing the Tukey depth function. Finally we prove the theorem of characterisation of a discrete measure by its Tukey depth function.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	v
Remerciements	vi
Introduction	1
1 Propriétés de la fonction de profondeur de Tukey	2
1.1 Définitions et première propriété	2
1.2 Minimum ou infimum ?	3
1.3 Propriétés de D^μ et D_*^μ	6
2 Théorèmes de caractérisation	15
2.1 Régions où D^μ est constant	15
2.2 Ensemble convexe sans "coin"	17
2.3 Mesures invariantes par rotation	20
3 Calcul de la fonction de profondeur	23
3.1 Exemples de calculs simples	23
3.2 Calcul de la fonction de profondeur	27
3.3 Exemples de calculs avec les algorithmes mentionnés	32
4 Théorème de caractérisation dans le cas discret : Preuve de Koshevoy	35
4.1 Notation	35
4.2 Résultat de Koshevoy	36
Conclusion	39
Bibliographie	40

Liste des figures

1.1	La mesure de tout demi-plan fermé passant par $(0,1)$ est strictement positive.	4
1.2	La mesure μ est nulle au voisinage de 0 mais D^μ ne l'est pas.	9
2.1	Le point β est un coin de l'ensemble convexe C , mais α n'est pas un coin.	18
3.1	La profondeur au point (x_0, y_0) est l'aire minimale du triangle colorié	23
3.2	Courbes de ∂D_t	24
3.3	La profondeur au point (x_0, y_0) est l'aire minimale du triangle colorié	25
3.4	Courbes ∂D_t	25
3.5	Courbes de ∂D_t pour $t = 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$	26
3.6	La profondeur au point (x_0, y_0) est la probabilité du demi-plan H'	27
3.7	Fonction de profondeur de la loi normal standard.	27
3.8	La différence entre α_A et α_B est supérieure à π	29
3.9	Illustration du calcul des n_i	29
3.10	Principe de l'algorithme dans le cas $k = d - 1$	31
3.11	Quelques courbes de niveaux du nuage de points.	33
3.12	Courbe de niveau $t = 1$ du jeu de données.	34

Remerciements

Je remercie vivement mon superviseur, le professeur Thomas J Ransford. Je lui suis reconnaissant pour le savoir, la méthodologie de recherche et la rigueur qu'il m'a transmis. Son sens de l'écoute et sa disponibilité m'ont offert un cadre de travail agréable . De plus il m'a appuyé financièrement.

Je remercie également le Département de mathématiques et de statistique pour la qualité des cours enseignés, les tâches d'auxiliaires d'enseignement qui m'ont offert de l'expérience, les bourses et la sympathie des membres.

Le soutien et les encouragements de ma famille et de mes amis ont constitué un apport considérable dans la réalisation de ce travail. Je suis également reconnaissant envers mes professeurs de l'université Cheikh Anta Diop au Sénégal.

Je remercie l'Université Laval pour la bourse qu'elle m'a octroyée et la qualité des ressources présentes dans la bibliothèque.

Finalement, je remercie les examinateurs du document pour leur lecture attentive et leurs suggestions pertinentes.

Introduction

La médiane d'une série statistique unidimensionnelle est la valeur qui divise cette série en deux parties de même cardinalité. Elle est donc centrée au milieu du jeu de données. Comment définir la notion de médiane en dimension supérieure à 1 ?

En 1975, John William Tukey [18] proposa la fonction de profondeur de Tukey pour mesurer la centralité d'un point dans l'espace euclidien par rapport à un nuage de données. La profondeur d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ par rapport à une mesure de Borel finie et positive est la plus petite mesure portée par un demi-plan fermé passant par x . C'est ce qui explique l'appellation fonction de profondeur associé au demi-plan pour désigner la fonction de profondeur de Tukey. La suggestion de Tukey permet de généraliser la notion de médiane et de *fonction de répartition empirique* à des données multivariées. En 1998, Struyf et Rouseeuw [17] ont montré de façon algorithmique que la fonction de profondeur de Tukey caractérise la mesure empirique d'un ensemble de données multivariées. La fonction de profondeur de Tukey a suscité un grand intérêt suite aux travaux de Liu, Parelius et Singh [10] qui ont montré l'importance de cette fonction en inférence statistique non paramétrique. De plus Donoho et Gasko [3] ont montré que cette fonction fournit des estimateurs robustes. Dans cette lancée, Koshevoy [7] a prouvé que la fonction de profondeur de Tukey caractérise une mesure discrète. Beaucoup d'algorithmes sont également développés afin d'optimiser le calcul explicite de cette fonction.

Dans le chapitre 1, nous définissons la profondeur de Tukey et présentons ses propriétés. Nous observons particulièrement les propriétés de continuité et de convexité. Dans le chapitre 2, nous montrons d'abord que les régions où cette fonction est constante sont de mesures nulles. Ensuite nous établissons des résultats de caractérisation en imposant certains critères géométriques sur la mesure. Dans le chapitre 3, nous nous intéressons au calcul de la fonction de profondeur de Tukey et illustrons quelques algorithmes. Enfin dans le chapitre 4, nous démontrons le résultat de caractérisation d'une mesure discrète par sa fonction de profondeur de Tukey.

Chapitre 1

Propriétés de la fonction de profondeur de Tukey

Notation. On désigne la sphère unité de \mathbb{R}^d par \mathbb{S}^{d-1} . La boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$ est notée $B(x,r)$.

Dans ce chapitre, μ est une mesure de Borel positive et finie sur \mathbb{R}^d .

1.1 Définitions et première propriété

Nous allons définir explicitement la fonction de profondeur de Tukey.

Définition 1.1.1. Soit $d \geq 1$. On appelle demi-espace ouvert de \mathbb{R}^d un ensemble de la forme

$$H := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x \rangle < c\},$$

où $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ et $c \in \mathbb{R}$. On notera l'ensemble des demi-espaces ouverts de \mathbb{R}^d par $\Pi(\mathbb{R}^d)$ ou simplement Π s'il n'y a pas risque de confusion.

Définition 1.1.2. La fonction de profondeur de Tukey de μ est la fonction $D^\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$D^\mu(x) := \inf \{\mu(H) : H \in \Pi, x \in H\}.$$

Une première propriété d'invariance affine découle de cette définition.

Proposition 1.1.1. *La fonction D^μ est invariante par transformation affine.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une transformation affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} D^{\mu \circ f}(x) &= \inf\{\mu(f(H)) : x \in H\} \\ &= \inf\{\mu(H') : x \in f^{-1}(H')\} \\ &= \inf\{\mu(H') : f(x) \in H'\} \\ &= (D^\mu \circ f)(x). \end{aligned}$$

□

1.2 Minimum ou infimum ?

Dans le calcul de D^μ , il est possible de considérer les mesures des demi-espaces fermés.

Théorème 1.2.1. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$\begin{aligned} D^\mu(x_0) &= \inf\{\mu(H) : H \in \Pi, x_0 \in H\} \\ &= \inf\{\mu(\overline{H}) : H \in \Pi, x_0 \in \overline{H}\} \\ &= \inf\{\mu(\overline{H}) : H \in \Pi, x_0 \in \partial H\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Désignons par $D_1(x_0)$, $D_2(x_0)$, $D_3(x_0)$ les infima ci-dessus. Il suffit de montrer que $D_1(x_0) \leq D_2(x_0) \leq D_3(x_0) \leq D_1(x_0)$.

Premièrement montrons que $D_1(x_0) \leq D_2(x_0)$. Soit $H \in \Pi$ avec $x_0 \in \overline{H}$. On peut prendre une suite $(H_n)_n$ dans Π telle que $H_n \searrow \overline{H}$. Pour tout $n \geq 1$, on a $x_0 \in H_n$. Ceci implique que $\mu(H_n) \geq D_1(x_0)$. En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ on obtient $\mu(\overline{H}) \geq D_1(x_0)$. Comme H est quelconque, on a : $D_1(x_0) \leq D_2(x_0)$.

Clairement, on a $D_2(x_0) \leq D_3(x_0)$.

Soit $H \in \Pi$ avec $x_0 \in H$. Soit $H' \in \Pi$ le demi-espace tel que $x_0 \in \partial H'$ et $\overline{H'} \subset H$. On a $\mu(H) \geq \mu(\overline{H'}) \geq D_3(x_0)$. Comme H est quelconque, on a $D_3(x_0) \leq D_1(x_0)$. □

La proposition suivante montre que l'infimum peut être calculé sur les demi-espaces dont la frontière a une masse centrée en un seul point.

Notation. Étant donné $x \in \mathbb{R}^d$, on écrit $\Pi_x := \{H \in \Pi : x \in \partial H\}$.

Proposition 1.2.2 ([15], Proposition 3.). *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$D^\mu(x_0) = \inf\{\mu(\overline{H}), H \in \Pi_{x_0} : \mu(\partial H \setminus \{x_0\}) = 0\}.$$

Remarque 1.2.1. Lorsque μ est une mesure discrète à support fini, l'infimum est pris sur un nombre fini de valeurs et donc on a un minimum.

Remarque 1.2.2. En général, aucun des infima du Théorème 1.2.1 n'est atteint. Par exemple soit μ la mesure définie sur \mathbb{R}^2 par : $\mu = m + \delta_{(0,2)}$, où m est la mesure de Lebesgue définie sur $[0,1] \times \{0\}$ et $\delta_{(0,2)}$ est la mesure de Dirac en $(0,2)$ (voir Figure 1.1). Soit $x_0 = (0,1)$. On a

$$D^\mu(x_0) = 0 \text{ alors que, } \begin{cases} \mu(H) > 0 & \forall H \in \Pi(\mathbb{R}^2) \text{ avec } x_0 \in H \\ \mu(\overline{H}) > 0 & \forall H \in \Pi(\mathbb{R}^2) \text{ avec } x_0 \in \overline{H} \end{cases}.$$

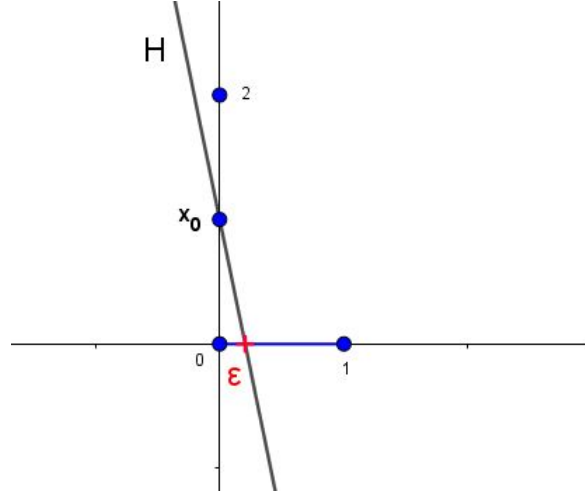


FIGURE 1.1 – La mesure de tout demi-plan fermé passant par $(0,1)$ est strictement positive.

Par contre nous allons montrer que l'infimum

$$\inf \{ \mu(H) : H \in \Pi_{x_0} \} \tag{1.1}$$

est toujours atteint, bien que sa valeur puisse différer de $D^\mu(x_0)$.

Définition 1.2.1. On appelle *régularisation semi-continue inférieure* de D^μ la fonction $D_*^\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$D_*^\mu(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{y \in B(x,r)} D^\mu(y).$$

Remarque 1.2.3. On peut définir une topologie sur Π via l'identification :

$$(u,c) \in \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \leftrightarrow H := \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x \rangle < c \} \in \Pi.$$

Ainsi si $H_n := \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle u_n, x \rangle < c_n \}$ ($n \geq 1$), on a

$$H_n \rightarrow H \Leftrightarrow (u_n \rightarrow u \text{ et } c_n \rightarrow c).$$

Lemme 1.2.3. Soit $H_n \in \Pi$ ($n \geq 1$).

- (i) Si $H_n \rightarrow H_0$ dans Π , alors pour tout compact $K \subset H_0$, il existe n_0 tel que $K \subset H_n$ pour tout $n \geq n_0$.
- (ii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ fixé et $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^d$. Si $H_n \in \Pi_{x_n}$ pour tout $n \geq 1$ et si $x_n \rightarrow x_0$, alors il existe une sous-suite $(n_j)_{j \geq 1}$ et un demi-espace $H_0 \in \Pi_{x_0}$ tels que $H_{n_j} \rightarrow H_0$.

Démonstration. (i) Procédons par l'absurde. Si $K \not\subset H_n$ pour une infinité de n , alors il existe n_j, x_{n_j} tels que $x_{n_j} \in K \setminus H_{n_j}$. Comme K est compact, quitte à remplacer la suite $(x_{n_j})_j$ par une sous-suite, on peut supposer que $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in K$. Aussi $x_{n_j} \notin H_{n_j}$. Ceci implique que $\langle u_{n_j}, x_{n_j} \rangle \geq c_{n_j}$. En faisant tendre $n_j \rightarrow \infty$, on obtient $\langle u_0, x_0 \rangle \geq c_0$. Donc $x_0 \notin H_0 \supset K$. Cela conduit à une contradiction.

- (ii) Soit $H_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u_n, x \rangle < c_n\}$ tels que $x_n \in \partial H_n$. On a $\langle u_n, x_n \rangle = c_n$. Comme $(u_n)_n \subset \mathbb{S}^{d-1}$, qui est compact, il existe $(n_j)_j, u_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ tels que $u_{n_j} \rightarrow u_0$. Ainsi $c_{n_j} = \langle u_{n_j}, x_{n_j} \rangle \rightarrow \langle u_0, x_0 \rangle$. Donc $H_{n_j} \rightarrow H_0$. De plus, $\langle u_0, x_0 \rangle = c_0$, donc $x_0 \in \partial H_0$ et on a $H_0 \in \Pi_{x_0}$.

□

Théorème 1.2.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

- (i) L'infimum en 1.1 est atteint et

$$\min\{\mu(H) : H \in \Pi_{x_0}\} = D_*^\mu(x_0).$$

- (ii) Si $H_0 \in \Pi_{x_0}$ et $\mu(H_0) = D_*^\mu(x_0)$ alors

$$D^\mu(x) \leq D_*^\mu(x_0) \quad \forall x \in H_0.$$

Démonstration. (i) Soit $H \in \Pi_{x_0}$. Comme $x_0 \in \partial H$, il existe $(y_n)_n \subset H$ telle que $y_n \rightarrow x_0$. Donc $\mu(H) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} D^\mu(y_n) \geq D_*^\mu(x_0)$. Ceci implique que

$$D_*^\mu(x_0) \leq \inf\{\mu(H) : H \in \Pi_{x_0}\}. \quad (1.2)$$

D'autre part, on peut prendre une suite $(x_n)_n, x_n \rightarrow x_0$ telle que $D^\mu(x_n) \rightarrow D_*^\mu(x_0)$. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite positive telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Pour tout $n \geq 1$, il existe $H_n \in \Pi_{x_n}$ telle que :

$$\mu(\overline{H_n}) \leq D^\mu(x_n) + \varepsilon_n.$$

On a $H_n \in \Pi_{x_n}$ et $x_n \rightarrow x_0$. Donc d'après le Lemme 1.2.3 (ii), il existe une sous-suite $(H_{n_j})_j$ et un demi-espace $H_0 \in \Pi_{x_0}$ tels que $H_{n_j} \rightarrow H_0$. Étant donné un compact $K \subset H_0$ le Lemme 1.2.3 (i) assure qu'il existe n_0 telle que $K \subset H_{n_j}$ pour tout $n_j \geq n_0$. Ceci implique que

$$\mu(K) \leq \mu(H_{n_j}) \leq D^\mu(x_{n_j}) + \varepsilon_{n_j} \quad (n_j \geq n_0).$$

Lorsque $n_j \rightarrow \infty$, on déduit que $\mu(K) \leq D_*^\mu(x_0)$. Cette inégalité est vraie pour tout compact $K \subset H_0$. Ainsi, on a

$$\mu(H_0) \leq D_*^\mu(x_0). \quad (1.3)$$

D'après 1.2 et 1.3, on a :

$$D_*^\mu(x_0) = \min \{ \mu(H) : H \in \Pi_{x_0} \}.$$

(ii) Si $H_0 \in \Pi_{x_0}$ et $\mu(H_0) = D_*^\mu(x_0)$, alors, pour tout $x \in H_0$, on a

$$D^\mu(x) \leq \mu(H_0) = D_*^\mu(x_0).$$

□

1.3 Propriétés de D^μ et D_*^μ

Intéressons-nous aux propriétés de continuité de D^μ et D_*^μ .

Définition 1.3.1. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *semi-continue inférieurement* si l'une des conditions suivantes équivalentes est satisfaite :

- $\forall t \in \mathbb{R} : G_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ est ouvert dans \mathbb{R}^d .
- $\forall t \in \mathbb{R} : F_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq t\}$ est fermé dans \mathbb{R}^d .

Définition 1.3.2. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est *semi-continue supérieurement* si l'une des conditions suivantes équivalentes est satisfaite :

- $\forall t \in \mathbb{R} : G_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < t\}$ est ouvert dans \mathbb{R}^d .
- $\forall t \in \mathbb{R} : F_t = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq t\}$ est fermé dans \mathbb{R}^d .

Théorème 1.3.1. D^μ et D_*^μ possèdent les propriétés suivantes.

- (i) D^μ est semi-continue supérieurement.
- (ii) D_*^μ est semi-continue inférieurement.
- (iii) $D_*^\mu(x) \leq D^\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et on a égalité au point x_0 si et seulement D^μ est continue en x_0 .

Démonstration. (i) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $G_t = \{x \in \mathbb{R}^d : D^\mu(x) < t\}$ est ouvert. Soit $x_0 \in G_t$. Alors il existe $H \in \Pi$, $x_0 \in H$ telle que $\mu(H) < t$. Ainsi $D^\mu(x) \leq \mu(H) < t$ pour tout $x \in H$. Donc $x_0 \in H \subset G_t$. Ceci implique que G_t est ouvert.

(ii) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $G_t = \{x \in \mathbb{R}^d : D_*^\mu(x) > t\}$ est ouvert. Soit $x_0 \in G_t$.

$$\begin{aligned}
D^\mu(x_0) > t &\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{y \in B(x_0, r)} D^\mu(y) > t \\
&\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ et } r_0 > 0 : \inf_{y \in B(x_0, r_0)} D^\mu(y) > t + \varepsilon \\
&\Rightarrow D^\mu(y) > t + \varepsilon \quad \forall y \in B(x_0, r_0) \\
&\Rightarrow B(x_0, r_0) \subset G_t.
\end{aligned}$$

Donc G_t est ouvert.

(iii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On a $\inf_{y \in B(x_0, r)} D^\mu(y) \leq D^\mu(x_0)$ pour tout $r > 0$. Ceci implique que $D_*^\mu(x_0) \leq D^\mu(x_0)$. Si $D_*^\mu(x_0) = D^\mu(x_0)$, alors les propriétés de semi-continuité impliquent que

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} D^\mu(x) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} D_*^\mu(x) \geq D_*^\mu(x_0) = D^\mu(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} D^\mu(x).$$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} D^\mu(x) = D^\mu(x_0)$ et D^μ est continue en x_0 . Réciproquement, si D^μ est continue en x_0 , alors

$$D_*^\mu(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{y \in B(x_0, r)} D^\mu(y) = \lim_{y \rightarrow x_0} D^\mu(y) = D^\mu(x_0).$$

□

Corollaire 1.3.2. D^μ est continue dans un ensemble dense de \mathbb{R}^d .

Démonstration. Ce résultat est vrai pour toute les fonctions semi-continues supérieurement [13]. □

Nous donnons à présent une condition suffisante pour la continuité de D^μ en un point.

Théorème 1.3.3. Si $\mu(\partial H) = 0$ pour tout $H \in \Pi_{x_0}$, alors D^μ est continue en x_0 .

Démonstration. D'après le Théorème 1.2.4, il existe $H_0 \in \Pi_{x_0}$ telle que $\mu(H_0) = D_*^\mu(x_0)$. Comme $\mu(\partial H_0) = 0$, on a

$$D^\mu(x_0) \leq \mu(\overline{H_0}) = \mu(H_0) = D_*^\mu(x_0).$$

D'après le Théorème 1.3.1, D^μ est continue en x_0 . □

Corollaire 1.3.4. On a les résultats suivants.

- (i) Si $\mu(A) = 0$ pour tout sous-espace affine de dimension $d-1$, alors D^μ est continue sur \mathbb{R}^d .
En particulier, si μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue alors D^μ est continue sur \mathbb{R}^d .

(ii) Si $\mu(A) = 0$ pour tout sous-espace affine de dimension $d - 2$, alors D^μ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus S$, où S est une union au plus dénombrable de sous-espaces affines de dimension $d - 1$. En particulier, ce résultat est vrai si $d = 2$ et μ n'a pas de masse ponctuelle.

Démonstration. (i) C'est clair d'après le Théorème 1.3.3.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$ et prenons des ensembles distincts $H_1, H_2, \dots, H_n \in \Pi$ tels que $\mu(\partial H_j) > \varepsilon$. Pour tout $j \neq k$, l'ensemble $\partial H_j \cap \partial H_k$ est contenu dans un ensemble de dimension $d - 2$. Ceci implique que $\mu(\partial H_j \cap \partial H_k) = 0$. Par conséquent

$$n\varepsilon \leq \sum_{j=1}^n \mu(\partial H_j) \leq \mu(H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n) \leq \mu(\mathbb{R}^d) < \infty.$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{H \in \Pi : \mu(\partial H) \geq \varepsilon\}$ est fini. Donc l'ensemble $\{H \in \Pi : \mu(\partial H) > 0\}$ est au plus dénombrable. Posons $S = \cup \{\partial H : H \in \Pi, \mu(H) > 0\}$. Alors S est une réunion au plus dénombrable de sous-espaces de dimension $d - 1$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus S$

$$\mu(\partial H) = 0 \quad \forall H \in \Pi_x.$$

D'après le Théorème 1.3.3, D^μ est continue en x_0 .

□

Nous présentons aussi une condition nécessaire pour la continuité de D^μ en un point.

Théorème 1.3.5. *Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on a*

$$D^\mu(x_0) - D_*^\mu(x_0) \geq \mu(\{x_0\}).$$

Donc si D^μ est continue en x_0 , alors $\mu(\{x_0\}) = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la proposition 1.2.2, il existe $H \in \Pi_{x_0}$ telle que $\mu(\overline{H}) \leq D^\mu(x_0) + \varepsilon$ et $\mu(\partial H \setminus \{x_0\}) = 0$. Comme $D_*^\mu(x_0) \leq \mu(H)$, on a :

$$D_*^\mu(x_0) \leq \mu(\overline{H}) - \mu(\partial H) = \mu(\overline{H}) - \mu(\{x_0\}) \leq D^\mu(x_0) + \varepsilon - \mu(\{x_0\}).$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, donc $D^\mu(x_0) - D_*^\mu(x_0) \geq \mu(\{x_0\})$.

□

Remarque 1.3.1. Il est possible d'avoir $D^\mu(x_0) > D_*^\mu(x_0)$ alors que μ est nul au voisinage de x_0 (voir Figure 1.2). Considérons le carré ouvert $N = (-1, 1) \times (-1, 1)$ de \mathbb{R}^2 et V le cercle de centre $(0, 0)$ inscrit dans le carré de côté 1. Soit μ la mesure telle que $\mu(\{(-1, -1)\}) = \mu(\{(-1, 1)\}) = \mu(\{(1, 1)\}) = \mu(\{(1, -1)\}) = 1$ et $\mu = 0$ sinon.

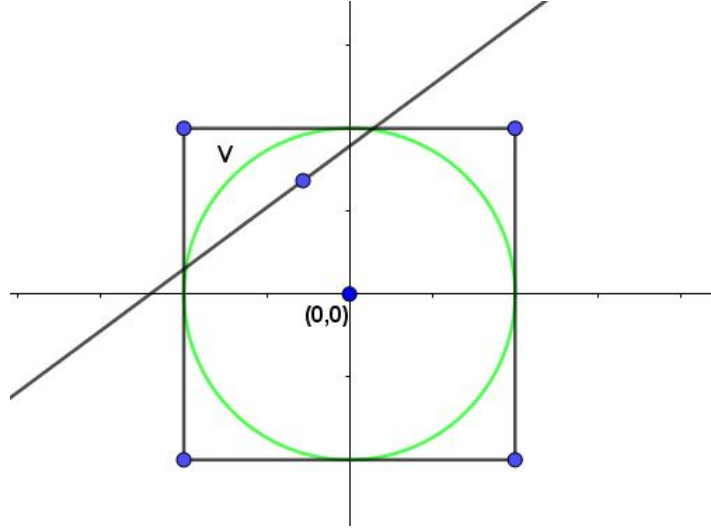


FIGURE 1.2 – La mesure μ est nulle au voisinage de 0 mais D^μ ne l'est pas.

On a $\mu(V) = 0$, mais

$$D^\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in N \setminus \{(0,0)\}, \\ 2 & \text{si } x = (0,0). \end{cases}$$

Examinons le comportement de D^μ et D_*^μ par rapport à la convergence faible des mesures.

Définition 1.3.3 ([1]). Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesures de Borel positives et finies sur \mathbb{R}^d . On dit que $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers μ et on écrit $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ si l'une des conditions équivalentes est réalisée :

- $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ pour toute fonction continue et bornée sur \mathbb{R}^d .
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$ pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^d$.
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$ pour tout ouvert $G \subset \mathbb{R}^d$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ pour tout ensemble de Borel $B \subset \mathbb{R}^d$ avec $\mu(\partial B) = 0$.

Théorème 1.3.6. Soit $(\mu_n)_n$ une suite de mesure de Borel positives et finies sur \mathbb{R}^d . Supposons que $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$. Alors

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} D^{\mu_n}(x) \leq D^\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
- (ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} D_*^{\mu_n}(x) \geq D_*^\mu(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
- (iii) Si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un point de continuité de D^μ alors $D^{\mu_n}(x_0) \rightarrow D^\mu(x_0)$.

Démonstration. (i) Soit $H \in \Pi_x$. Alors, pour tout n , on a : $D^{\mu_n}(x) \leq \mu_n(\overline{H})$. Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} D^{\mu_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{H}) \leq \mu(\overline{H}).$$

L'inégalité est vraie pour tout $H \in \Pi_x$, donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} D^{\mu_n}(x) \leq D^\mu(x)$.

(ii) Pour tout n , choisissons $H_n \in \Pi_x$ telle que : $\mu_n(H_n) = D_*^\mu(x)$. Soit (n_k) une sous-suite telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} D_*^{\mu_{n_k}}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} D_*^{\mu_n}(x)$. D'après le Lemme 1.2.3 et quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que $H_{n_k} \rightarrow H_0 \in \Pi_x$. Considérons un compact $K \subset H_0$. Prenons U un voisinage ouvert de K telle que \bar{U} soit un sous-ensemble compact de H_0 . D'après le Lemme 1.2.3, $\bar{U} \subset H_{n_k}$ pour k assez grand. Ainsi on a :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_*^{\mu_n}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} D_*^{\mu_{n_k}}(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(H_{n_k}) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(U) \geq \mu(U) \geq \mu(K).$$

L'inégalité est vraie pour tout compact $K \subset H_0$. Donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} D_*^{\mu_n}(x) \geq \mu(H_0) \geq D_*^\mu(x).$$

(iii) Si $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est un point de continuité, $D_*^\mu(x_0) = D^\mu(x_0)$. D'après (i) et (ii), on a $D^{\mu_n}(x_0) \rightarrow D^\mu(x_0)$. □

La fonction de profondeur présente également des propriétés de convexité.

Théorème 1.3.7. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les ensembles suivants sont convexes :*

$$\{x : D^\mu(x) \geq t\}, \quad \{x : D^\mu(x) > t\}, \quad \{x : D_*^\mu(x) \geq t\}, \quad \{x : D_*^\mu(x) > t\}.$$

Démonstration. Soit $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^d$ tels que $D^\mu(x_0) \geq t$ et $D^\mu(x_1) \geq t$. Prenons $y = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Soit $H \in \Pi$ telle que $y \in H$. Alors soit $x_0 \in H$ ou $x_1 \in H$ car $\mathbb{R}^d \setminus H$ est convexe. Ainsi $\mu(H) \geq D^\mu(x_0) \geq t$. Ainsi, pour tout $H \in \Pi$ tel que $y \in H$, on a $\mu(H) \geq t$. Donc $D^\mu(y) \geq t$, et $\{x : D^\mu(x) \geq t\}$ est convexe.

Comme $\{x : D^\mu(x) > t\} = \bigcup_{s > t} \{x : D^\mu(x) \geq s\}$, on déduit la convexité du deuxième ensemble.

Aussi

$$\begin{aligned} \{x : D_*^\mu(x) > t\} &= \bigcup_{s > t} \text{int} \{x : D^\mu(x) \geq s\}, \\ \{x : D_*^\mu(x) \geq t\} &= \bigcap_{s < t} \{x : D_*^\mu(x) > s\} \end{aligned}$$

Ceci implique la convexité des autres ensembles. □

Remarque 1.3.2. (i) Dans la suite, nous écrivons $D_t^\mu := \{x : D^\mu(x) \geq t\}$, ou simplement D_t lorsqu'il n'y a pas risque de confusion.

(ii) Pour tout $t > 0$, l'ensemble D_t représente l'ensemble des points dont la centralité est supérieure à t . Ainsi D_t peut être interprété comme un quantile multivarié d'ordre t .

Nous pouvons écrire D_t comme l'intersection des demi-espaces dont la mesure de leur complémentaire est inférieure à t .

Notation. Étant donné $x \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathbb{S}^{d-1}$, on écrit $H[x,u] := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u,y \rangle < \langle u,x \rangle\}$.

Proposition 1.3.8 ([15]). *Pour tout $t > 0$, on a*

$$\begin{aligned} D_t &= \cap\{H; H \in \Pi : \mu(H^c) < t\}, \\ &\subset \cap\{\overline{H}; H \in \Pi : \mu(\overline{H}^c) < t\}. \end{aligned}$$

Démonstration. D'abord montrons que

$$D_t \subset \cap\{H; H \in \Pi : \mu(H^c) < t\}. \quad (1.4)$$

Soit $x_0 \in D_t$. Soit $H \in \Pi$ tel que $\mu(H^c) < t$. On procède par l'absurde. Supposons que $x_0 \notin H$. Alors il existe $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $H[x_0,u] \subset H^c$. Il s'ensuit que $\mu(H[x_0,u]) \leq \mu(H^c) < t$. Ceci est impossible car $D^\mu(x_0) \geq t$. Donc on a (1.4).

Montrons l'inclusion \supset . A nouveau, on procède par l'absurde. Soit $x_0 \in \cap\{H; H \in \Pi : \mu(H^c) < t\}$. Supposons qu'il existe $H_0 \in \Pi_{x_0}$ tel que $\mu(\overline{H_0}) < t$. Posons $H := \overline{H_0}^c$. Alors H est un demi-espace ouvert et $\mu(H^c) = \mu(\overline{H_0}) < t$. Donc $x_0 \in H$. Ceci est contradictoire avec la définition de H . \square

Comme μ est une mesure finie, la relation d'inclusion présente dans la Proposition 1.3.8 est en fait une égalité.

Proposition 1.3.9. *Pour tout $t > 0$, on a*

$$D_t = \{\overline{H}; H \in \Pi : \mu(\overline{H}^c) < t\}.$$

Démonstration. Nous avons déjà l'inclusion \subset d'après la Proposition 1.3.8. Montrons l'inclusion \supset . Soit $x_0 \in \{\overline{H}; H \in \Pi : \mu(\overline{H}^c) < t\}$. Supposons que $x_0 \notin D_t$. Alors il existe $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que $\mu(\overline{H[x_0,u]}) < t$. Considérons la suite $(H_n)_n$ de demi-espaces définie par $H_n = H[x_0, u - 1/n]$. Posons $H[x_0, u] = H$. On a $H_n \searrow \overline{H}$. Comme μ est finie, on a $\lim_n \mu(H_n) = \mu(\overline{H}) < t$. Ainsi, il existe n_0 tel que $\mu(H_{n_0}) < t$. Prenons $H' := H_{n_0}^c$. Il s'ensuit que $\mu(H'^c) < t$ et H' est fermé, donc $x_0 \in H'$. Ceci est impossible avec la définition de H' . \square

Regardons le comportement de D^μ à l'infini.

Théorème 1.3.10.

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} D^\mu(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} D_*^\mu(x) = 0.$$

Démonstration. Soit $R > 0$. Pour tout $|y| \geq R$, on a $D^\mu(y) \leq \mu(\{x : |x| \geq R\})$. Ainsi

$$0 \leq \sup_{|x| \geq R} D_*^\mu(x) \leq \sup_{|x| \geq R} D^\mu(x) \leq \mu(\{x : |x| \geq R\}).$$

Comme μ est une mesure finie, on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mu(\{x : |x| \geq R\}) = 0.$$

Donc $\lim_{R \rightarrow \infty} D^\mu(x) = 0$. □

Corollaire 1.3.11. *La fonction de profondeur D^μ atteint son maximum sur \mathbb{R}^d , et si $D^\mu \neq 0$, alors l'ensemble où le maximum est atteint est compact et convexe.*

Démonstration. Prenons $t^* = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} D^\mu(x)$. Si $t^* = 0$, alors $D^\mu = 0$. Sinon $\{x : D^\mu(x) = t^*\} =$

$\bigcap_{0 < t < t^*} \{x : D^\mu(x) \geq t\}$. Donc cet ensemble est compact et convexe car c'est égal à l'intersection d'une famille emboîtée d'ensembles compacts et convexes. □

Remarque 1.3.3. Nous écrirons t^* pour designer le maximum de D^μ et D_{t^*} l'ensemble où D^μ atteint ce maximum. Si D^μ atteint son maximum en un seul point, alors ce point de maximum est appelé la *médiane de Tukey*. Sinon la *médiane de Tukey* est définie comme le centre de gravité de D_{t^*} .

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour avoir au moins un point de maximum.

Théorème 1.3.12 ([15]). *Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Supposons qu'il existe un ensemble $J = \{u_1, \dots\} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ tel que*

$$\begin{cases} \forall j : \mu(\overline{H[x_0, u_j]}) = D^\mu(x_0), \\ \cup_{j \in J} \overline{H[x_0, u_j]} = \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Alors x_0 est un point de maximum.

Démonstration. Supposons que $D^\mu(x_0) < \max_{x \in \mathbb{R}^d} D^\mu(x)$. Alors il existe x_1 tel que $D^\mu(x_1) > D^\mu(x_0)$. Comme $\cup_j \overline{H[x_0, u_j]} = \mathbb{R}^d$, il existe $u_{(1)} \in J$ tel que $x_1 \in \overline{H[x_0, u_1]}$. Il s'ensuit que $\overline{H[x_1, u_1]} \subset \overline{H[x_0, u_1]}$. Ainsi on a

$$D^\mu(x_1) \leq \mu(\overline{H[x_1, u_1]}) \leq \mu(\overline{H[x_0, u_1]}) = D^\mu(x_0).$$

Ceci conduit à une contradiction. □

Remarque 1.3.4. Remarquons que nous n'avons pas besoin de plus de $d + 1$ vecteurs dans l'ensemble J .

Nous avons déjà $\max_x D^\mu(x) \leq \mu(\mathbb{R}^d)$. Grâce à la proposition suivante, nous obtenons aussi une borne inférieure pour la valeur maximale de la fonction de profondeur.

Proposition 1.3.13 ([15]). *Nous avons*

$$\max_x D^\mu(x) \geq \frac{\mu(\mathbb{R}^d)}{d + 1}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons les boules fermées $B_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq n\}$. Comme $\cup_n B_n \nearrow \mathbb{R}^d$, on a $\mu(B_n) \nearrow \mu(\mathbb{R}^d)$. Ainsi il existe une boule B telle que $\mu(B) > \mu(\mathbb{R}^d) - \varepsilon$. D'après la Proposition 1.3.9, on a

$$\emptyset = D_{t^* + \varepsilon} = \{\overline{H}; H \in \Pi : \mu(\overline{H}^c) < t^* + \varepsilon\}.$$

Posons $\mathcal{C} = \{B \cap \overline{H} : H \in \Pi, \mu(\overline{H}^c) < t^* + \varepsilon\}$. La collection \mathcal{C} est non vide car l'ensemble $\{H \in \Pi : \mu(\overline{H}^c) < t^* + \varepsilon\}$ est non vide. Ainsi \mathcal{C} est une collection infinie d'ensembles compacts et convexes dans \mathbb{R}^d avec $\cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. D'après le Théorème de Helly [19], il existe des ensembles C_1, \dots, C_{d+1} dans \mathcal{C} tels que $\cap_{j=1}^{d+1} C_j = \emptyset$. Ainsi $\cup_{j=1}^{d+1} C_j^c = \mathbb{R}^d$. Pour tout j , on a

$$\mu(C_j^c) = \mu((B \cap \overline{H}_j)^c) = \mu(B^c \cup \overline{H}_j^c) \leq \mu(B^c) + \mu(\overline{H}_j^c) < t^* + 2\varepsilon.$$

Finalement $\mu(\mathbb{R}^d) \leq \sum_{j=1}^{d+1} \mu(C_j^c) < (d+1)(t^* + 2\varepsilon)$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on conclut que $t^* \geq \mu(\mathbb{R}^d)/(d+1)$. \square

Remarque 1.3.5. Ce résultat a été obtenu la première fois dans le cas de \mathbb{R}^2 par Neumann [11] puis généralisé par Rado [12] sans mentionner la notion de profondeur. Dans l'étude des propriétés de la fonction de profondeur, Donoho et Gasko [3] ont redécouvert et prouvé ce résultat.

Lorsque, μ s'annule sur les hyperplans, le maximum de la fonction de profondeur peut être calculé exactement.

Proposition 1.3.14 ([15]). *Si pour tout demi-espace H , on a $\mu(\partial H) = 0$, alors*

$$t^* = \max_x D^\mu(x) \leq \mu(\mathbb{R}^d)/2.$$

En particulier si μ est une mesure de probabilité, alors le maximum de la fonction de profondeur est au plus $1/2$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\begin{aligned} D^\mu(x_0) &= \inf\{\mu(\overline{H}) : H \in \Pi_{x_0}\} \\ &= \inf_{H \in \Pi_{x_0}} \min\{\mu(\overline{H}), \mu(-\overline{H})\}. \end{aligned}$$

Comme $\overline{H} \cap (-\overline{H}) = \partial H$, on a $\mu(\mathbb{R}^d) = \mu(\overline{H}) + \mu(-\overline{H}) - \mu(\partial H)$. Donc on a $\mu(-\overline{H}) = \mu(\mathbb{R}^d) - \mu(\overline{H})$. Par conséquent $\min\{\mu(\overline{H}), \mu(-\overline{H})\} \leq \mu(\mathbb{R}^d)/2$. \square

Cette borne peut être atteinte. Par exemple, lorsque μ est la loi normale standard multivariée $N_d(0, I)$, on a $D^\mu(0) = 1/2$.

Nous allons montrer que cette borne est atteinte pour une famille de mesures.

Définition 1.3.4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On dit que μ est *angulairement symétrique autour de x_0* si $\mu(x_0 + C) = \mu(x_0 - C)$ pour tout ensemble C de la forme $\{\lambda x : x \in B \cap \mathbb{S}^{d-1}, \lambda > 0\}$, avec B un ensemble de Borel.

Proposition 1.3.15 ([15]). *Si pour tout demi-espace H , on a $\mu(\partial H) = 0$, et si μ est angulairement symétrique autour d'un point x_0 alors*

$$\max_x D^\mu(x) = D^\mu(x_0) = \mu(\mathbb{R}^d)/2.$$

Démonstration. Par invariance, on peut supposer que $x_0 = 0$. Soit $u \in \mathbb{S}^{d-1}$. Posons $B := \{v \in \mathbb{S}^{d-1} : \langle u, v \rangle > 0\}$ et $H := H[0, u] = \{\lambda x, x \in B, \lambda > 0\}$. Comme μ est angulairement symétrique, on a $\mu(H) = \mu(-H)$. De plus $\mu(\partial H) = 0$. On en déduit que $2\mu(H) = \mu(H) + \mu(-H) = \mu(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mu(H) = \mu(\mathbb{R}^d)/2$. Ceci est vrai pour tout demi-espace $H \in \Pi_0$. Par conséquent

$$D^\mu(0) = \mu(\mathbb{R}^d)/2 = \max_x D^\mu(x).$$

□

Chapitre 2

Théorèmes de caractérisation

Dans ce chapitre, μ est une mesure de Borel positive et finie sur \mathbb{R}^d .

2.1 Régions où D^μ est constant

Dans cette section, nous cherchons à obtenir de l'information sur μ à partir de la connaissance de D^μ . Nous montrons que si D^μ est constante sur un ensemble, alors cet ensemble est de mesure nulle.

Lemme 2.1.1. *Supposons que D^μ est constante sur $B(x_0, 3r)$. Alors, pour tout $y \in B(x_0, r)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un demi-espace $H \in \Pi_y$ tel que :*

$$\mu(\overline{H} \cap B(x_0, r)) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $H \in \Pi_y$ tel que $\mu(\overline{H}) < D^\mu + \varepsilon$. Comme $y \in \partial H$, on peut écrire H sous la forme $\{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x - y \rangle < 0\}$. Posons $y' := y - 2ru$ et $H' := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x - y' \rangle < 0\}$. Alors on a $y' \in B(x_0, 3r)$ et $H' \in \Pi_{y'}$. Ainsi

$$\mu(\overline{H'}) \geq D^\mu(y') = D^\mu(y).$$

De plus $H' = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x - y \rangle < -2r\} \subset H$. Ceci implique que

$$\mu(\overline{H} \setminus \overline{H'}) = \mu(\overline{H}) - \mu(\overline{H'}) < D^\mu + \varepsilon - D^\mu = \varepsilon.$$

Par ailleurs $\overline{H'} \cap B(x_0, r) = \emptyset$. En effet pour tout $z \in B(x_0, r)$, si $z \notin H$ alors $z \notin H'$. Et si $z \in H$ alors $\langle u, z - y \rangle < 0$. Supposons que $z \in H'$. Cela implique $\langle u, z - y \rangle < -2r$. Et on a $|y - z| \times |u| = |y - z| > 2r$, ce qui est impossible. Donc

$$\mu(\overline{H} \cap B(x_0, r)) = \mu((\overline{H} \setminus \overline{H'}) \cap B(x_0, r)) + \mu(\overline{H'} \cap B(x_0, r)) \leq \mu(\overline{H} \setminus \overline{H'}) < \varepsilon.$$

□

Lemme 2.1.2. Soit $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{R}^d$. Posons $\bar{y} := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$, et soit A le sous-espace affine engendré par les vecteurs $\{y_1, \dots, y_k\}$, c'est-à-dire

$$A := \left\{ \bar{y} + \sum_{j=1}^k \lambda_j y_j : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors il existe $\rho > 0$ tel que chaque $H \in \Pi_{\bar{y}}$ satisfasse

$$\partial H \supset A \quad \text{ou} \quad H \supset A \cap B(y_j, \rho) \quad \text{pour au moins un } j.$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que $\bar{y} = 0$. Par l'absurde, supposons le résultat faux. Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe $H_n \in \Pi_0$ tel que

$$\partial H_n \not\supset A \quad \text{et} \quad H_n \not\supset A \cap B(y_j, 1/n) \quad (j = 1, \dots, k).$$

Comme $\partial H_n \not\supset A$, il vient que $H_n \cap A$ est un demi-espace dans A . Écrivons

$$H_n \cap A = \{x \in A : \langle u_n, x \rangle < 0\},$$

avec $u_n \in A$ et $\|u_n\| = 1$. Pour tout j , on a $H_n \not\supset A \cap B(y_j, \frac{1}{n})$. Ceci implique qu'il existe $y_{j_n} \in A \cap B(y_j, \frac{1}{n})$ tel que $y_{j_n} \notin H_n$, c'est-à-dire $\langle u_n, y_{j_n} \rangle \geq 0$. De plus, la suite (u_n) est bornée, donc il existe $u \in A$ et une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge vers u . Comme $y_{j_n} \rightarrow y_j$, on obtient $\langle u, y_j \rangle \geq 0$ pour tout j . Mais

$$\sum_{j=1}^k \langle u, y_j \rangle = k \langle u, \bar{y} \rangle = 0.$$

Ce qui implique $\langle u, y_j \rangle = 0$ pour tout j . Or les (y_j) engendrent A . Ainsi $\langle u, x \rangle = 0$ pour $x \in A$. En particulier $\langle u, u \rangle = 0$. On obtient une contradiction avec le fait que $\|u\| = 1$. \square

Théorème 2.1.3. Soit $U := \{x \in \mathbb{R}^d : D^\mu \text{ est constante dans un voisinage de } x\}$. Alors

$$\mu(U) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que, si D^μ est constante dans $B(x_0, 3r)$, alors on a $\mu(B(x_0, r)) = 0$.

Supposons que D^μ est constante dans $B(x_0, 3r)$. Posons $S := \text{supp } u \cap B(x_0, r)$. Supposons que $S \neq \emptyset$. Soit A le sous-espace affine engendré par S . Considérons un sous-ensemble $\{y_1, \dots, y_k\}$ de S qui engendre A . On définit $\bar{y} := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j$. Alors $\bar{y} \in B(x_0, r)$ (par convexité). Choisissons ρ comme au Lemme 2.1.2. On peut décroître ρ tel que $B(y_j, \rho) \subset B(x_0, r)$ pour tout j . Posons

$\varepsilon := \min_j \mu(B(y_j, \rho))$. Alors $\varepsilon > 0$, car chaque $y_j \in S \subset \text{supp } u$. D'après le Lemme 2.1.1, il existe $\bar{H} \in \Pi_{\bar{y}}$ tel que $\mu(\bar{H} \cap B(x_0, r)) < \varepsilon$. Par le choix de ρ , on a deux cas possibles

$$\partial H \supset A \quad \text{ou} \quad H \supset A \cap B(y_j, \rho) \text{ pour au moins un } j.$$

Premier cas : Si $\partial H \supset A$, alors

$$\mu(B(y_1, \rho)) \leq \mu(B(x_0, r) \cap A) \leq \mu(B(x_0, r) \cap \bar{H}) < \varepsilon.$$

Ceci est une contradiction avec la définition de ε .

Deuxième cas : Si $H \supset A \cap B(y_j, \rho)$, alors :

$$\mu(B(y_j, \rho)) = \mu(B(y_j, \rho) \cap A) \leq \mu(B(x_0, r) \cap \bar{H}) < \varepsilon.$$

Ceci est une contradiction avec la définition de ε . Par conséquent

$$S = \emptyset \quad \text{et} \quad \mu(B(x_0, r)) = 0.$$

□

Nous déduisons le résultat suivant.

Corollaire 2.1.4.

$$D^\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0.$$

Remarque 2.1.1. La réciproque du Théorème 2.1.3 n'est pas vraie en générale. Si B est une boule ouverte, il est possible d'avoir $\mu(B) = 0$, tandis que D^μ et D_*^μ ne sont pas constants sur B . En effet, en reprenant l'exemple de la Remarque 1.3.1, où V désigne une boule ouverte, on a

$$D^\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bar{N}^c, \\ 1, & x \in \bar{N} \setminus \{(0,0)\}, \\ 2, & x = (0,0), \end{cases} \quad D_*^\mu(x) = \begin{cases} 0, & x \in N^c, \\ 1, & x \in N. \end{cases}$$

2.2 Ensemble convexe sans "coin"

Nous allons présenter un autre moyen d'obtenir de l'information sur μ à partir de la connaissance de D^μ . Cette méthode est motivée par le résultat suivant.

Théorème 2.2.1. Soit $t \in \mathbb{R}$ et C l'un des ensembles convexes suivants :

$$\{x : D^\mu(x) \geq t\}, \quad \{x : D^\mu(x) > t\}.$$

Soit $x_0 \in \partial C$. Supposons qu'il existe un unique $H \in \Pi_{x_0}$ tel que $H \cap C = \emptyset$. Alors,

$$\mu(H) = D_*^\mu(x_0) \leq t.$$

Démonstration. Nous avons une inégalité clé :

$$D_*^\mu(x_0) \leq t \leq D^\mu(x_0). \quad (2.1)$$

En effet comme $x_0 \in \partial C$, il existe $(y_n) \subset C$ et $(z_n) \subset \mathbb{R}^d \setminus C$ telles que $\lim_n y_n = \lim_n z_n = x_0$. Ainsi pour tout n , $D^\mu(y_n) \geq t$ et $D_*^\mu(z_n) \leq t$. Comme D^μ est semi-continue supérieurement et D^μ semi-continue inférieurement, on en déduit que

$$D_*^\mu(x_0) \leq t \leq D^\mu(x_0).$$

Par ailleurs, d'après le Théorème 1.2.4, il existe $H_0 \in \Pi_{x_0}$ tel que $\mu(H_0) = D_*^\mu(x_0)$. Et on a $D^\mu(x) \leq D_*^\mu(x_0)$, pour tout $x \in H_0$. D'après les inégalités en 2.1, on a alors

$$D_*^\mu(x) \leq D^\mu(x) \leq t \quad (x \in H_0).$$

Par conséquent $H_0 \cap C = \emptyset$. Or, on a supposé que H est unique. Donc $H = H_0$ et $\mu(H) = \mu(H_0) = D_*^\mu(x_0) \leq t$. \square

Définition 2.2.1. Soit C un ensemble convexe de \mathbb{R}^d . On dit que x_0 est un coin si

$$\begin{cases} x_0 \in \partial C & \text{et} \\ \text{il existe } H_1, H_2 \in \Pi_{x_0}, H_1 \neq H_2 \text{ telle que } H_1 \cap C = H_2 \cap C = \emptyset. \end{cases}$$

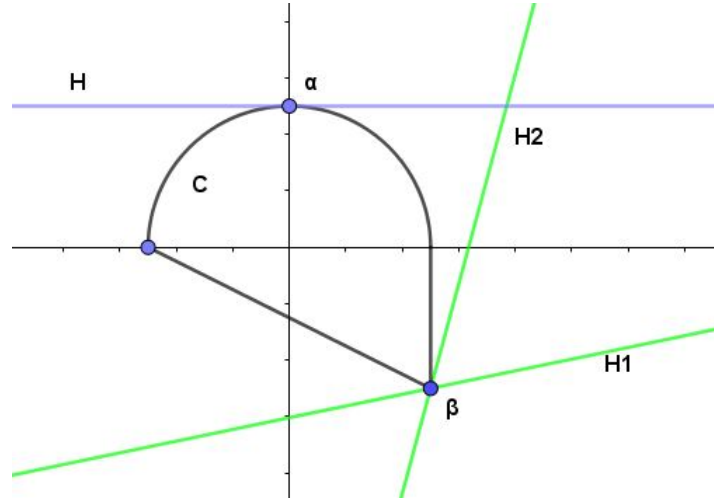


FIGURE 2.1 – Le point β est un coin de l'ensemble convexe C , mais α n'est pas un coin.

Lemme 2.2.2. Soit σ une mesure de Borel signée sur \mathbb{R}^d . Supposons que $\sigma(H) = 0$ pour tout $H \in \Pi$ tel que $0 \in \overline{H}$. Alors $\sigma = c\delta_0$, où $c \in \mathbb{R}$ et δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Démonstration. Soit L un sous-espace de dimension 1 de \mathbb{R}^d . On désigne $\pi_L : \mathbb{R}^d \rightarrow L$ la projection orthogonale de \mathbb{R}^d sur L . Soit σ_L la mesure de Borel signée sur \mathbb{R}^d définie par

$$\sigma_L(B) = \sigma(\pi_L^{-1}(B \cap L)) \quad (B \subset \mathbb{R}^d, B \text{ ouvert}).$$

Clairement $\text{supp } \sigma_L \subset L$. De plus, si I est un intervalle semi-infini inclus dans L tel que $0 \notin \bar{I}$, alors $\pi_L^{-1}(I)$ est un demi-espace H dans \mathbb{R}^d telle que $0 \notin \bar{H}$. Ceci implique que $\sigma_L(I) = \sigma(H) = 0$. Ainsi il existe $c_L \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma_L = c_L \delta_0$. Calculons la transformée de Fourier $\hat{\sigma}$ de σ .

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et L le sous-espace engendré par ξ . Alors on a

$$\hat{\sigma}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} d\sigma(x) = \int e^{-i\pi_L(x) \cdot \xi} d\sigma(x).$$

En effet $\pi_L(x) = \langle x, \frac{\xi}{\|\xi\|} \rangle \frac{\xi}{\|\xi\|} = \langle x, \xi \rangle \frac{\xi}{\|\xi\|^2}$. Ceci implique que $\langle \pi_L(x), \xi \rangle = \langle x, \xi \rangle$. Ainsi

$$\hat{\sigma}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} d\sigma_L(x) = c_L.$$

Donc $\hat{\sigma}(r\xi) = c_L$, pour tout $r > 0$. En faisant tendre $r \rightarrow 0^+$, on a $\hat{\sigma}(0) = c_L$ par continuité de $\hat{\sigma}$. Par conséquent c_L est indépendant de L . Ce qui implique que $\hat{\sigma}$ est constant et $\sigma = c\delta_0$. \square

Théorème 2.2.3. Soit μ_1, μ_2 deux mesures de Borel positives et finies sur \mathbb{R}^d telles que $D^{\mu_1} = D^{\mu_2} = D$. Supposons de plus qu'il existe $t_0 > 0$ tel que :

- (i) l'ensemble $\{x : D(x) \geq t_0\}$ possède un seul point et
- (ii) pour chaque $t < t_0$, l'ensemble $\{x : D(x) > t\}$ ne possède pas de coins.

Alors $\mu_1 = \mu_2$.

Démonstration. Par hypothèse $\{x : D(x) \geq t_0\}$ contient un seul point. Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que ce point est 0. Ainsi $D(x) < t_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Soit $H \in \Pi$ tel que $0 \notin \bar{H}$. Prenons $t := \sup_{x \in \partial H} D(x)$. Comme D est semi-continue supérieurement et tend vers 0 à l'infini, ce suprémum est atteint en un point $x_0 \in \partial H$. Par ailleurs $0 \notin \bar{H}$, ce qui implique que $t < t_0$. Posons $C := \{x : D(x) > t\}$. Par hypothèse C est un ensemble convexe sans coins. De plus $H \cap C = \emptyset$. On a deux cas possibles.

Premier cas : $\partial H \cap \partial C \neq \emptyset$.

Soit $x_1 \in \partial H \cap \partial C$. Alors par le Théorème 2.2.1,

$$\mu_1(H) = D_*^{\mu_1}(x_1) \leq t \text{ et } \mu_2(H) = D_*^{\mu_2}(x_1) \leq t.$$

Ainsi

$$\mu_1(H) = \mu_2(H).$$

Deuxième cas $\partial H \cap \partial C = \emptyset$.

Dans ce cas, il existe un unique translaté H' de H tel que $H' \cap C = \emptyset$ et $\partial H' \cap \partial C \neq \emptyset$. Soit $x_2 \in \partial H' \cap \partial C$ (on rappelle que C n'a pas de coins). Par le Théorème 2.2.1 :

$$\mu_1(H') = D_*^{\mu_1}(x_2) \leq t \text{ et } \mu_2(H') = D_*^{\mu_2}(x_2) \leq t.$$

Par ailleurs

$$\mu_1(\overline{H}) \geq D(x_0) = t \quad \text{et} \quad \mu_2(\overline{H}) \geq D(x_2) = t \quad (\text{car } x_0 \in \partial H).$$

Mais comme $\overline{H} \subset H'$, on en déduit que

$$\mu_1(H') = \mu_1(\overline{H}) = t = \mu_2(H') = \mu_2(\overline{H}).$$

En particulier $\mu_1(\overline{H}) = \mu_2(\overline{H})$. On a montré que, étant donné $H \in \Pi$ tel que $0 \notin \overline{H}$, on a au moins l'une des égalités

$$\mu_1(H) = \mu_2(H) \quad \text{ou} \quad \mu_1(\overline{H}) = \mu_2(\overline{H}).$$

En fait on peut montrer que la première égalité est toujours vraie. En effet, soit $(H_n) \subset \Pi$ telle que $\overline{H_n} \subset H$ et $H_n \nearrow H$. On a l'un des deux cas suivants

$$\mu_1(H_n) = \mu_2(H_n) \quad \text{pour une infinité de } n,$$

$$\mu_1(\overline{H_n}) = \mu_2(\overline{H_n}) \quad \text{pour une infinité de } n.$$

Posons $\sigma := \mu_1 - \mu_2$. Alors σ est une mesure de Borel signée sur \mathbb{R}^d telle que $\sigma(H) = 0$ pour tout $H \in \Pi$ et $0 \notin \overline{H}$. D'après le Lemme 2.2.2 $\sigma = c\delta_0$, où $c \in \mathbb{R}$. Ce qui revient à dire $\mu_1 = \mu_2 + c\delta_0$. Finalement

$$\begin{aligned} D(0) &= \inf \left\{ \mu_1(\overline{H}), H \in \Pi_0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \mu_2(\overline{H}) + c, H \in \Pi_0 \right\} \\ &= D(0) + c. \end{aligned}$$

Ceci implique que $c = 0$ et donc, $\mu_1 = \mu_2$. □

2.3 Mesures invariantes par rotation

Nous allons présenter un résultat de caractérisation d'une mesure par sa fonction de profondeur.

Définition 2.3.1. Soit μ une mesure de Borel positive et finie. On dit que μ est *invariante par rotation* si pour toute rotation $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ autour de 0, on a

$$\mu(R^{-1}(B)) = \mu(B) \quad (B \subset \mathbb{R}^d).$$

Lemme 2.3.1. Soit μ une mesure invariante par rotation. Alors, pour toute rotation autour de 0, on a

$$D^\mu(Rx) = D^\mu(x) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
D^\mu(Rx) &= \inf \{ \mu(H) : H \in \Pi, Rx \in H \} \\
&= \inf \{ \mu(H) : H \in \Pi, x \in R^{-1}(H) \} \\
&= \inf \{ \mu(R^{-1}(H)) : H \in \Pi, x \in R^{-1}(H) \} \\
&= \inf \{ \mu(H') : H' \in \Pi, x \in H' \} \\
&= D^\mu(x).
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.3.2. *Soit μ une mesure invariante par rotation. Si le suprémum*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} D^\mu(x)$$

est atteint, alors μ est un multiple de δ_0 (et donc le suprémum vaut 0).

Démonstration. Soit $t_0 = \sup_{x \neq 0} D^\mu(x)$. On a $D^\mu(x) \leq t_0$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi, $D_*^\mu(0) \leq t_0$. Par le Théorème 1.2.4, il existe $H \in \Pi_0$ tel que $\mu(H) \leq t_0$. Comme μ est invariante par rotation, $\mu(H) \leq t_0$ pour tout $H \in \Pi_0$. Supposons que le suprémum $\sup_{x \neq 0} D^\mu(x)$ est atteint, c'est-à-dire il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $D^\mu(x_0) = t_0$. Prenons $H_0 \in \Pi_0$ tel que $x_0 \in H_0$. Soit H'_0 le translaté de H_0 tel que $x_0 \in \partial H'_0$. On a alors $\mu(\overline{H'_0}) \geq D^\mu(x_0) = t_0$ et $\overline{H'_0} \subset H_0$. Ceci implique que

$$\mu(H_0 \setminus \overline{H'_0}) = \mu(H_0) - \mu(\overline{H'_0}) \leq t_0 - t_0 = 0.$$

En utilisant l'invariance par rotation de μ , on a alors

$$\mu(R^{-1}(H_0 \setminus H'_0)) = 0 \quad \text{pour toute rotation } R \text{ autour de } 0.$$

Mais comme on peut recouvrir $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec un nombre dénombrable de bandes $R_n^{-1}(H_0 \setminus \overline{H'_0})$, on conclut que

$$\mu(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = 0 \quad \text{et donc} \quad \mu = c\delta_0.$$

□

Nous obtenons un théorème de caractérisation.

Théorème 2.3.3. *Soit μ_1, μ_2 deux mesures de Borel positives sur \mathbb{R}^d telles que $D^{\mu_1} = D^{\mu_2}$. Si μ_1 est invariante par rotation, alors $\mu_1 = \mu_2$.*

Remarque 2.3.1. On ne présume pas μ_2 est invariante par rotation, ceci sera une conséquence du théorème.

Démonstration. On a deux cas :

Premier cas : $\mu_1 = c\delta_0$ pour un $c \geq 0$.

Alors

$$D^{\mu_1}(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $D^{\mu_2}(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Donc d'après le Théorème 2.1.3, $\mu_2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) = 0$. Ceci implique que $\mu_2 = b\delta_0$.

Comme $D^{\mu_1}(0) = D^{\mu_2}(0)$, on en déduit que $b = c$ et $\mu_1 = \mu_2$.

Deuxième cas : μ_1 n'est pas un multiple de δ_0 .

Soit $t_0 := \sup_{x \neq 0} D^{\mu_1}(x)$. Nous allons montrer que les conditions (i) et (ii) du Théorème 2.2.3 sont satisfaites.

Vérifions d'abord (i). Par le Lemme 2.3.2, la valeur $\sup_{x \neq 0} D^{\mu_1}(x)$ n'est pas atteinte. D'autre part le Corollaire 1.3.11 assure que $D^{\mu_1}(x)$ atteint son maximum sur \mathbb{R}^d . Par conséquent, D^{μ_1} atteint son maximum uniquement en 0 et $D^{\mu_1}(0) \geq t_0$. Ainsi

$$\{x : D^{\mu_1}(x) \geq t_0\} = \{0\}.$$

Vérifions (ii). Soit $t < t_0$. Par le lemme 2.3.1 l'ensemble $\{x : D^{\mu_1}(x) \geq t\}$ est invariant par rotation. Et par le Théorème 1.3.7, cet ensemble est convexe. Par conséquent il s'agit de $\{0\}$, \mathbb{R}^d ou une boule centrée en 0. Le cas $\{0\}$ est impossible, car pour tout $t < t_0$, il existe $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que $D^{\mu_1}(x) > t$. Comme \mathbb{R}^d ou une boule n'ont pas de coins, on peut appliquer le Théorème 2.2.3. On conclut que $\mu_1 = \mu_2$. \square

Remarque 2.3.2. Dans [6], les auteurs établissent un résultat de caractérisation en imposant que les courbes de niveaux D_t soit lisses en tout point, c'est-à-dire n'ont pas de coins. Cette condition est très forte. D'ailleurs Gijbels et Nagy [5] ont construit des distributions (combinaisons de distributions gaussiennes, distribution à symétrie centrale,...) qui ne vérifient pas cette exigence. Néanmoins, les distributions à symétrie elliptiques satisfont la condition. Or une distribution à symétrie elliptique est une transformation affine d'une distribution invariante par rotation. Ainsi, grâce à l'invariance affine de D^μ notre résultat généralise dans un certain sens le théorème de caractérisation établi en [6].

Chapitre 3

Calcul de la fonction de profondeur

3.1 Exemples de calculs simples

Dans cette section, les exemples sont tirés de [15]. Dans les sections 3.1.1 - 3.1.3, on suppose que μ est une mesure uniforme sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$.

Il est possible de définir une fonction de profondeur pour une mesure μ positive (pas nécessairement finie) comme suit :

$$D^\mu(x) := \begin{cases} \inf\{\mu(H) : H \in \Pi, x \in H\} & \text{si il existe } H \in \Pi_x \text{ tel que } \mu(H) < \infty, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.1.1 Mesure uniforme sur un cadran

Par invariance affine, on peut prendre le premier cadran $E = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Soit $(x_0, y_0) \in E$. Soit ∂H_θ une droite passant par (x_0, y_0) et qui fait un angle $\theta > \pi/2$ avec l'axe des x . Soit H_θ le demi-plan inférieur.

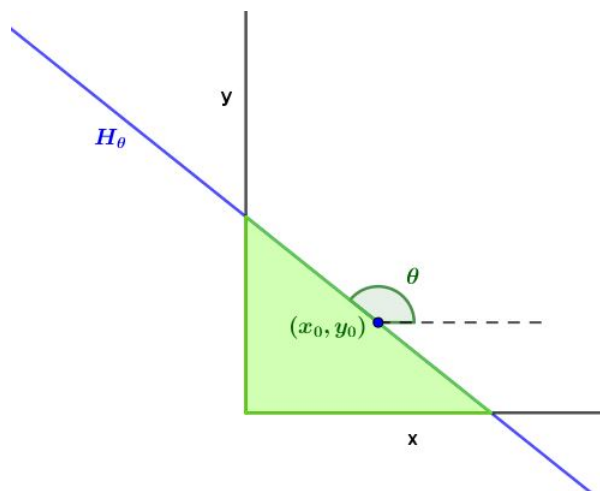


FIGURE 3.1 – La profondeur au point (x_0, y_0) est l'aire minimale du triangle colorié

Ainsi $D^\mu(x_0, y_0)$ est la valeur minimale de

$$\mu(H_\theta) = \text{aire}(H_\theta \cap E) = -(x_0 \tan \theta - y_0)^2 / (2 \tan \theta).$$

La valeur de θ minimisant cette valeur est $\theta = \arctan(-y_0/x_0)$. Donc on a

$$D^\mu(x_0, y_0) = 2x_0 y_0.$$

De plus, pour tout $t > 0$,

$$D_t = \{(x, y) \in E : y \geq t/2x\}.$$

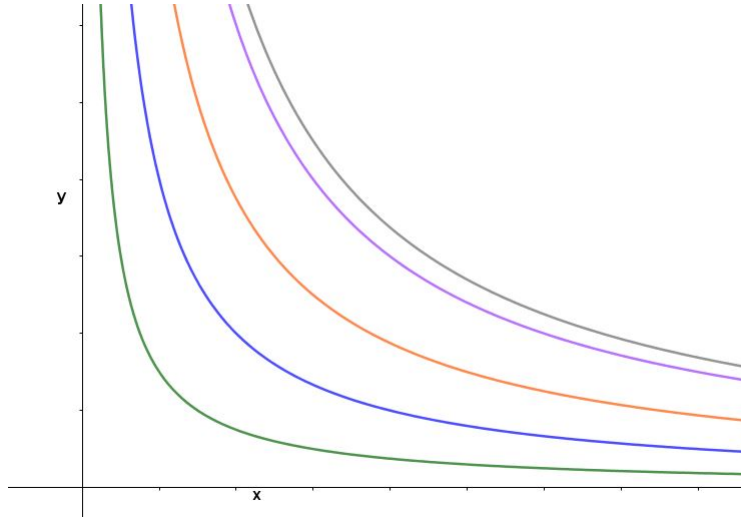


FIGURE 3.2 – Courbes de ∂D_t

En appliquant une transformation affine, on peut obtenir la valeur de la fonction de profondeur pour d'autres ensemble formés par deux demi-droites ayant la même origine.

3.1.2 Mesure uniforme dans un triangle

Soit E le triangle équilatéral de sommets $(-1,0)$, $(1,0)$ et $(0, \sqrt{3})$ et μ la mesure uniforme sur E . Pour faciliter le calcul et en raison de la symétrie, on peut se limiter à la région

$$\Delta = \{(x, y) \in E : x \geq 0, y \geq 0, x + y\sqrt{3} \leq 1\}.$$

Soit $(x_0, y_0) \in \Delta$. Considérons une droite ∂H_θ passant par (x_0, y_0) et qui fait un angle $\theta < \pi/2$ avec l'axe des x . Soit H_θ le demi-plan inférieur.

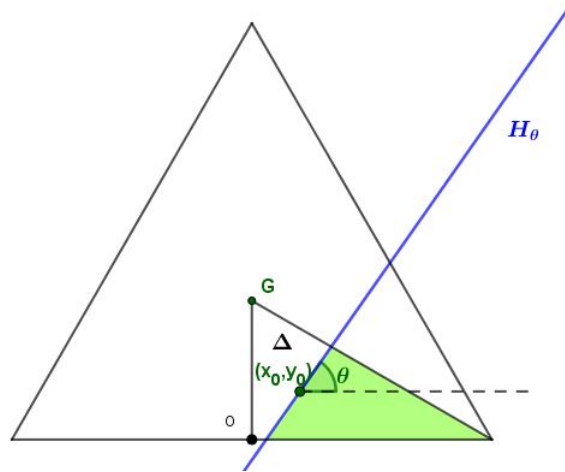


FIGURE 3.3 – La profondeur au point (x_0, y_0) est l'aire minimale du triangle colorié

Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mu(H_\theta) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{aire}(H_\theta \cap \Delta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \left[\frac{y_0 + (1-x_0)\tan\theta}{\tan\theta} \right] \left[\frac{y_0 + (1-x_0)\tan\theta}{1 + \sqrt{3}\tan\theta} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{(y_0 + (1-x_0)\tan\theta)^2}{\sqrt{3}\tan\theta + \tan^2\theta}. \end{aligned}$$

La valeur de θ minimisant cette valeur est $\theta = \arctan(y_0\sqrt{3}/(\sqrt{3} - x_0\sqrt{3} - 2y_0))$. Donc on a

$$D^\mu(x_0, y_0) = \frac{2}{3} (y_0\sqrt{3}(1-x_0) - y_0^2) \quad (x_0, y_0) \in \Delta.$$

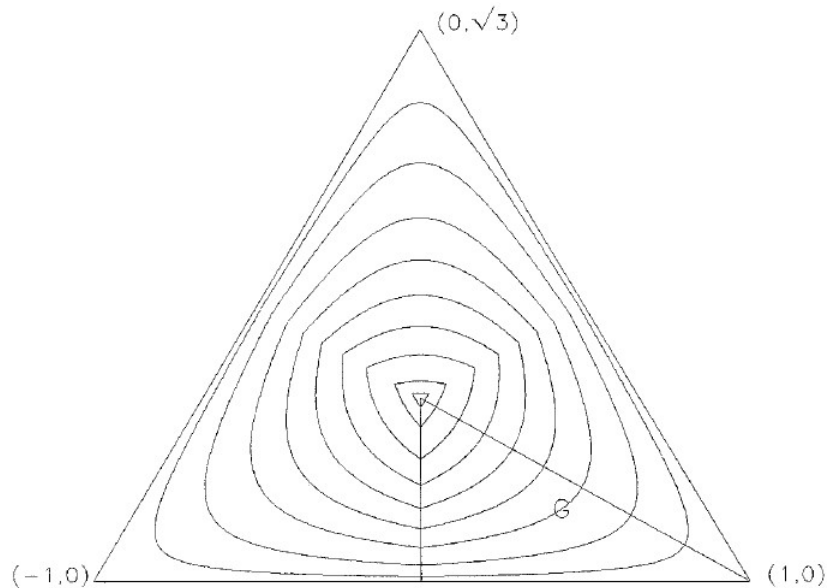


FIGURE 3.4 – Courbes ∂D_t .

Pour calculer la valeur de la fonction de profondeur dans un autre triangle, on peut utiliser une transformation affine. Notons dans cet exemple que $t^* = 4/9$ et ce maximum est atteint au point $(0, 1/\sqrt{3})$ qui correspond au centre de gravité du triangle.

3.1.3 Mesure uniforme dans un carré

Posons $E := [0, 1] \times [0, 1]$. Soit $(x_0, y_0) \in E$. Soit ∂H_θ une droite passant par (x_0, y_0) et qui fait un angle $\theta > \pi/2$ avec l'axe des x . Soit H_θ le demi-plan inférieur. On a

$$D^\mu(x_0, y_0) = \min\{\text{aire}(H_\theta \cap E), \text{aire}(-H_\theta \cap E)\}.$$

En s'inspirant de l'exemple de la section 3.1.1, on a

$$D^\mu(x_0, y_0) = (x'_0 \tan \theta - y'_0)^2 / (2 \tan \theta)$$

avec $x'_0 = \min\{x, 1 - x\}$ et $y'_0 = \min\{y, 1 - y\}$. De plus pour tout $t > 0$, on a

$$D_t = \{(x, y) \in E : \min\{x, 1 - x\} \min\{y, 1 - y\} \geq t/2\}.$$

Nous avons alors $t^* = 1/2$ et la médiane de Tukey est le point $(1/2, 1/2)$.

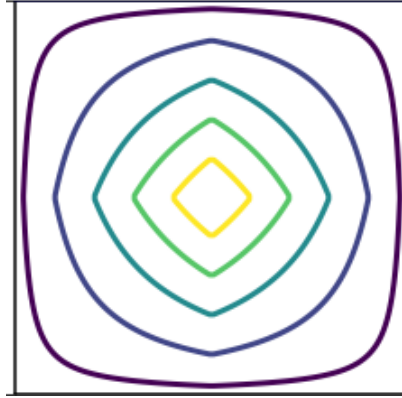


FIGURE 3.5 – Courbes de ∂D_t pour $t = 0.01, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$.

3.1.4 Loi normale

Supposons que $\mu = \mathcal{N}_2(0, I)$. Sa densité s'écrit $f(x, y) = (2\pi)^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/2)$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soit T la tangente au cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Alors si H est le demi-plan de frontière T ne contenant pas ce cercle, on a $D^\mu(x_0, y_0) = \mu(H)$.

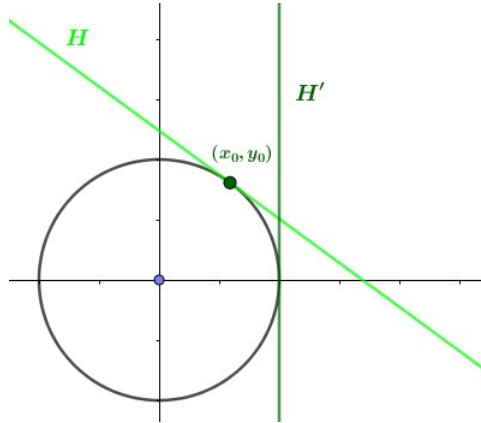


FIGURE 3.6 – La profondeur au point (x_0, y_0) est la probabilité du demi-plan H' .

Ainsi on peut écrire $D^\mu(x_0, y_0) = \mu(H')$ avec $H' = \{(x, y) : x \geq \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\}$. Finalement $D^\mu(x_0, y_0) = 1 - \Phi(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ où Φ est la fonction de répartition de μ . De plus

$$D_t = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq (\Phi^{-1}(1 - t))^2\}.$$

On a $t^* = 1/2$ et la médiane de Tukey est le point $(0, 0)$.

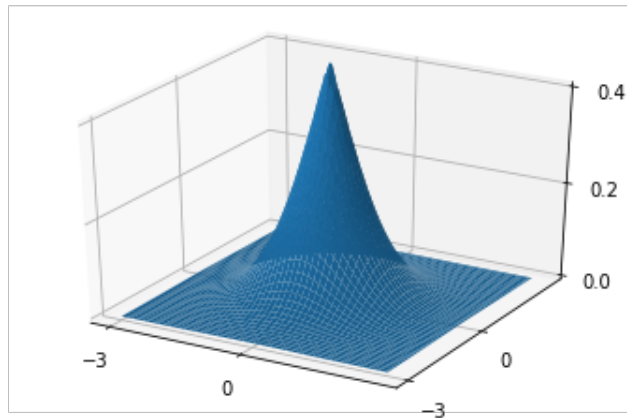


FIGURE 3.7 – Fonction de profondeur de la loi normal standard.

3.2 Calcul de la fonction de profondeur

Lorsque $d > 2$, le calcul exact de la fonction de profondeur de Tukey d'une mesure devient difficile car on a souvent besoin d'explorer tous les demi-espaces possibles. Ainsi, beaucoup de chercheurs s'intéressent à ce calcul, surtout dans le cas d'une mesure de probabilité.

Généralement on ne cherche pas à calculer la fonction de profondeur d'une mesure de probabilité, mais plutôt la fonction de profondeur de sa mesure empirique associé à un nuage de points.

Définition 3.2.1. Soit P est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un échantillon obtenu à partir de P . La mesure de probabilité empirique associée à X , notée P_n^X , ou P_n s'il n'y a pas ambiguïté est définie par

$$P_n(A) = \#(A \cap \{x_1, \dots, x_n\})/n.$$

Ainsi, la fonction de profondeur de P_n est

$$\begin{aligned} D^{P_n}(x) = D^P(x|X) &:= \frac{1}{n} \min_{H \in \Pi_x} \#\{H \cap X\} \\ &= \frac{1}{n} \min_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \#\{i : \langle u, x_i \rangle \geq \langle u, x \rangle\}. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques approches qui permettent de calculer la fonction de profondeur de Tukey d'une mesure empirique.

3.2.1 Algorithmes de calcul exact dans \mathbb{R}^2

En 1996, Rousseeuw et Ruts [14] proposent un algorithme qui calcule exactement la fonction de profondeur pour un nuage de points de \mathbb{R}^2 . L'algorithme est écrit en Fortran et possède une complexité de $O(n \log(n))$. L'approche utilisée est la suivante. Notons d'abord que, par invariance affine, on peut se restreindre au calcul de la fonction de profondeur au point 0. De plus, quitte à ajouter le nombre d'occurrences de 0 dans X à la fonction de profondeur en 0, on peut supposer que les x_i sont différents de 0 pour tout i .

- Calculons les vecteurs $u_i := \frac{x_i}{\|x_i\|}$
- Calculons les angles $\alpha_i = \widehat{(Ox, u_i)}$. Les coordonnées x_i ne seront pas utilisés dans le reste des calculs.
- Trions les angles en ordre croissant. On peut supposer qu'on aura après le tri

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n.$$

Remarquons que, si la différence minimale entre deux angles consécutifs est supérieure à π , par exemple $\alpha_{10} - \alpha_9 > \pi$ alors les autres points du jeu de données sont nécessairement situés sous la droite de vecteur directeur α_9 . Ainsi $0 \notin \text{conv}(X)$. On déduit que $D(0) = 0$ et le calcul est terminé.

- Si la différence minimale n'est pas supérieure à π , posons

$$n_i = \#\{j : \alpha_i \leq \alpha_j < \alpha_i + \pi\}.$$

Ce nombre désigne le nombre de points situés entre les demi-droites (O, u_i) et $(O, -u_i)$. On obtient finalement

$$D(0) = \min_i \{\min\{n_i, n - n_i\}\}.$$

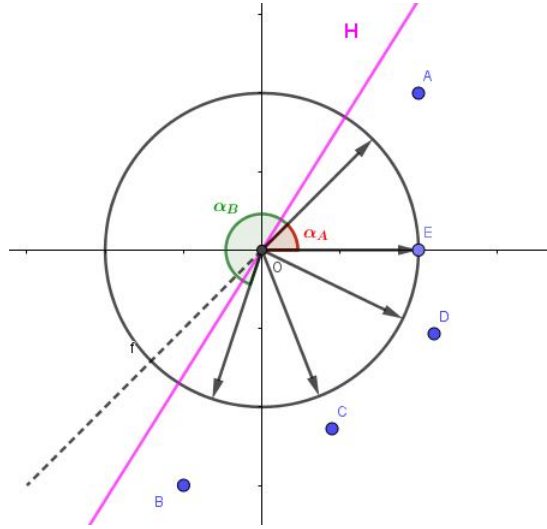


FIGURE 3.8 – La différence entre α_A et α_B est supérieure à π .

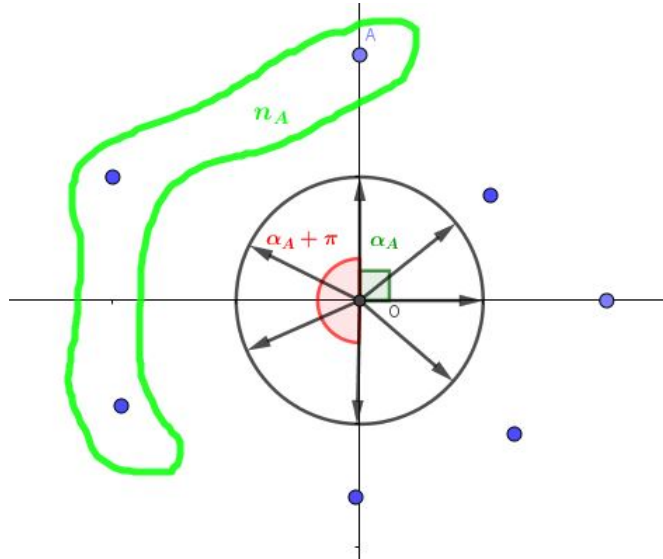


FIGURE 3.9 – Illustration du calcul des n_i .

- Remarque 3.2.1.** (i) En 1998, Rousseeuw et Struyf [16] proposent un algorithme de calcul exact de la fonction de profondeur dans \mathbb{R}^3 et un algorithme de calcul approximatif lorsque la dimension est supérieure à 3.
- (ii) En s’inspirant de ces algorithmes, Jean-Claude Massé et Jean-François Plante ont implémenté la fonction *depth calculation* du package *depth* du logiciel R. Cette fonction calcule exactement la fonction de profondeur en un point en dimension 2 ou 3, et effectue un calcul approximatif pour les dimensions supérieures à 3.

3.2.2 La profondeur de Tukey aléatoire

Dans [2], les auteurs essaient de déterminer un nombre suffisant de demi-espaces afin d'avoir une bonne approximation de la fonction de profondeur de Tukey de la mesure empirique P_n .

Définition 3.2.2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et ν la distribution uniforme sur la sphère unité \mathbb{S}^{d-1} . La fonction de profondeur de Tukey aléatoire de P basé sur k vecteurs aléatoires choisis avec ν est définie par

$$D_{k,\nu}^P(x) = \min\{P(\overline{H}[x, v_i]), i = 1, \dots, k\}, x \in \mathbb{R}^d,$$

avec v_1, \dots, v_k sont des vecteurs indépendants et identiquement distribués selon ν .

Notons que lorsque k augmente, la ressemblance entre $D_{k,\nu}^P$ et D^P augmente. L'objectif est de trouver un k optimal qui approxime bien D^P . Le calcul difficile de D^P rend inintéressant de sélectionner k en comparant la différence entre D^P et $D_{k,\nu}^P$. Les auteurs proposent donc de se restreindre au cas où P est une distribution elliptique avec paramètre de centralisation c et matrice de dispersion Σ . Dans ce cas D^P est une fonction monotone de la fonction

$$D^M(x) := \frac{1}{1 + (x - c)^t \Sigma^{-1} (x - c)},$$

appelée fonction de profondeur de Mahalanobis. Donc plus k est grand, plus $D_{k,\nu}^P$ se comporte comme une fonction monotone de D^M . A partir d'un nombre k_0 de vecteurs, cette ressemblance commence à se stabiliser. Ainsi $D_{k_0,\nu}^P$ sera une bonne approximation de D^P . En travaillant avec la loi standard multivariée, une loi de Cauchy multivariée avec marginales indépendantes et une loi double exponentielle avec marginales indépendantes, les auteurs montrent qu'on peut prendre $k_0 = 36$ pour calculer D^{P_n} lorsque la taille du jeu de données est inférieure à 1000 .

3.2.3 Calcul de la fonction de profondeur en réduisant la dimension

Par invariance affine, on a

$$D^P(x|\{x_1, \dots, x_n\}) = D^P(0|\{x_1 - x, \dots, x_n - x\})$$

Ainsi on peut se limiter au calcul de la fonction de profondeur au point d'origine.

Dans [4], les auteurs proposent des algorithmes qui permettent de calculer exactement la fonction de profondeur. Ces algorithmes sont basés sur l'approche suivante :

- (i) Choisissons une liste d'indices de k éléments ($1 \leq k \leq d - 1$) de X . Notons I_k la liste des indices choisis et $X_{I_k} = \{x_j : j \in I_k\}$ le sous-ensemble créé.
- (ii) Projétons X sur l'ensemble orthogonal à $\text{span}(X_{I_k})$. On répartit ainsi le nuage de points initial entre les deux sous-espaces orthogonaux.

- (iii) Dans chaque sous espace, on calcule la fonction de profondeur au point 0 associé au nuage de points qui s'y trouve. Ensuite on effectue la somme des valeurs trouvées.
- (iv) Enfin, pour un entier k fixe, la fonction de profondeur est exactement égal au minimum de la valeur calculée précédemment pour toutes les listes d'indices de longueurs k possibles ([4], Théorème 2).

Ainsi on obtient trois algorithmes en prenant $k \in \{d - 1, d - 2, 1\}$

Premier cas : $k = d - 1$. Pour cet algorithme, on considère les hyperplans constitués par $d - 1$ points de X linéairement indépendants. Pour chaque hyperplan, les points sont projetés sur la droite orthogonale a cet hyperplan. Ainsi on réduit la dimension à 1. Pour chaque hyperplan, la complexité de l'algorithme est de l'ordre de $O(n)$. Comme il y a $\binom{n}{d-1}$ sous-ensembles de $d - 1$ points, la complexité de l'algorithme est $\binom{n}{d-1}O(n) = O(n^d)$.

Deuxième cas : $k = d - 2$. Ici les points sont projetés dans un espace de dimension 2. Puis on utilise l'algorithme de Rousseeuw et Ruts. Comme il y a $\binom{n}{d-2}$ sous-ensembles de $d - 2$ points, la complexité de l'algorithme est $\binom{n}{d-2}O(n \log(n)) = O(n^{d-1} \log(n))$.

Troisième cas : $k = 1$. On utilise un algorithme récursif. Pour chaque élément x_i les points de X sont projetés sur l'hyperplan orthogonal à x_i . On répète la procédure avec le nuage de points obtenus précédemment. Ainsi à chaque étape, la dimension est réduite d'une unité. La récursion s'arrête lorsqu'on arrive à la dimension 2. C'est alors qu'on utilise l'algorithme de Rousseeuw et Ruts. La complexité de l'algorithme est la même que pour le cas précédent.

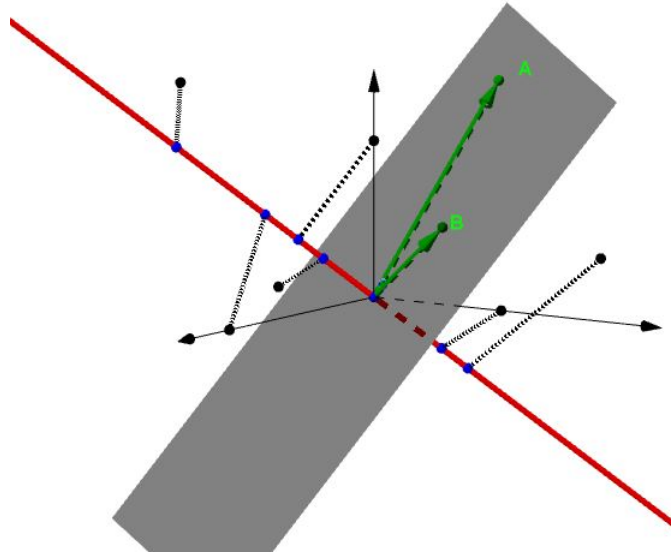


FIGURE 3.10 – Principe de l'algorithme dans le cas $k = d - 1$.

Remarque 3.2.2. La fonction `depth.wm` du package R `TukeyRegion` calcule la fonction de profondeur d'un nuage de points est basée sur ces trois algorithmes.

3.3 Exemples de calculs avec les algorithmes mentionnés

Les calculs suivants ont été réalisés grâce au logiciel R. D'abord nous utilisons l'algorithme de Rousseeuw-Ruts pour calculer la valeur de la fonction de profondeur de Tukey au point (0,0) par rapport à un échantillon de taille 250. Ensuite, nous comparons ce résultat avec la valeur obtenue en prenant uniquement 36 directions comme proposé en [2].

```
library(mvtnorm)
library(depth)
#utilisation de l'algorithme Rousseeuw-Ruts
set.seed(0)
x = rmvnorm(n=250, mean=c(1,1))
u=c(0,0)
depth(u,x,method="Tukey",approx = FALSE)

## [1] 0.064

#utilisitaion de 36 directions
depth(u,x,method = "Tukey", approx = TRUE,ndir =36)

## [1] 0.064
```

Il est également possible de calculer la médiane de Tukey et de tracer les courbes de niveaux.

```
#calcul de la mediane
med(x,method = "Tukey")

## $median
## [1] 0.9918554 0.9886319
##
## $depth
## [1] 0.468

#tracé des courbes de niveaux
isodepth(x,dpth = seq(1,100,by = 10))
```

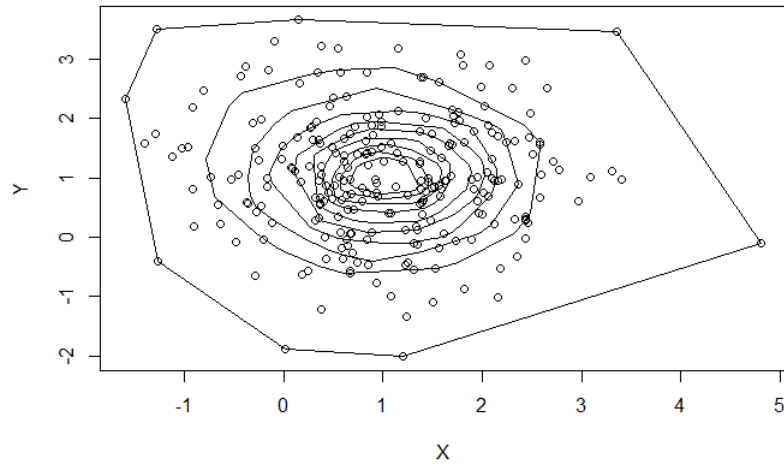


FIGURE 3.11 – Quelques courbes de niveaux du nuage de points.

Les algorithmes proposés en [4] permettent de réaliser des calculs similaires pour les plus grandes dimensions. De plus on peut tracer les courbes de niveaux. Illustrons cela avec un nuage de points dans \mathbb{R}^3 .

```

set.seed(1)
X=matrix(rnorm(27),ncol = 3)
uu=c(0,0,0)
library(ddalpha)
depth.halfspace(uu,X)

## [1] 0.1111111

library(TukeyRegion)
#calcul de la médiane de Tukey
TukeyMedian(X)$barycenter

## Status:1
## Status:0
## [1] 0.33579119 0.07985185 0.24895367

#courbe de niveau pour t=1
t=1
Tr=TukeyRegion(X,t,retFacets = TRUE)

```

```
## Status:0

summary(Tr) #description de la courbe de niveau

## Object of class 'TukeyRegion':
##
## Input data is a 9x3 matrix
## Required depth level is 1
##
## 10 halfspaces define the region
##
## The region has 7 vertices and 10 facets
```

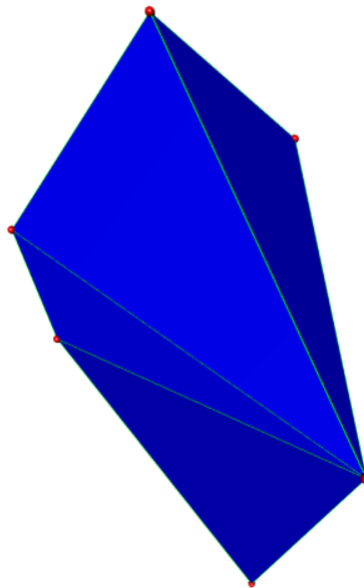


FIGURE 3.12 – Courbe de niveau $t = 1$ du jeu de données.

Chapitre 4

Théorème de caractérisation dans le cas discret : Preuve de Koshevoy

Une mesure discrète est entièrement caractérisée par sa fonction de profondeur. Ce résultat est dû à Koshevoy [7].

Théorème 4.1. *Soit $\mu = (M, X)$ et $\nu = (N, Y)$ deux mesures discrètes à support fini telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$: $D^\mu(x) = D^\nu(x)$. Alors $\mu = \nu$.*

Dans cette section, nous présentons la preuve de ce résultat en utilisant la preuve de Koshevoy.

4.1 Notation

Soit μ une mesure à support fini. Posons $\text{supp}\mu = X = \{x_1, \dots, x_m\}$. On peut caractériser μ par la paire (M, X) où

$$M = \{\mu(x_1), \dots, \mu(x_m)\} = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}.$$

Alors, pour tout demi-espace $H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle u, x \rangle < c\}$, on a :

$$\mu(H) = \sum_{i: x_i \in H} \mu_i = \sum_{i: \langle u, x_i \rangle < c} \mu_i.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} D^\mu(x) &= \inf\{\mu(\overline{H}) : H \in \Pi, x_0 \in \partial H\} \\ &= \inf_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \left\{ \sum_{i: \langle u, x_i \rangle \leq \langle u, x \rangle} \mu_i \right\} \\ &= \min_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \left\{ \sum_{i: \langle u, x_i \rangle \leq \langle u, x \rangle} \mu_i \right\}. \end{aligned}$$

4.2 Résultat de Koshevoy

Lemme 4.2.1. Soit $\mu = (M, X)$ une mesure discrète. Soit $x \in X$ et $H \in \Pi$ un demi-espace tel que

$$\begin{cases} x \in \partial H & \text{et} \\ \mu(\overline{H}) = \sum_{i: x_i \in \overline{H}} \mu_i = D^\mu(x). \end{cases}$$

Alors, pour tout $x' \in X \cap \overline{H} \setminus \{x\}$ on a : $D^\mu(x') \leq D^\mu(x) - \mu(x)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $x' \in X \cap \overline{H} \setminus \{x\}$ tel que $D^\mu(x') \geq D^\mu(x) - \mu(x)$. Comme $\mu(H) \leq D^\mu(x) - \mu(x)$, on a nécessairement $x' \in \partial H$. Il existe $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ tel que

$$\begin{aligned} H &= \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle < u \cdot x\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y - x' \rangle < 0\} \\ &= \{x' + z, z \in \mathbb{R}^d : \langle u, z \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons le demi-espace

$$H_\varepsilon := \{x' + z, z \in \mathbb{R}^d : \langle u + \varepsilon(x - x'), z \rangle < 0\}.$$

Clairement $x' \in \overline{H}_\varepsilon$ et, pour

$$0 < \varepsilon < \min_{x_i \in X \setminus (X \cap H)} \frac{\langle u, x_i - x' \rangle}{|\langle x_i - x', x - x' \rangle|},$$

on a

$$x' \in X \cap \overline{H}_\varepsilon \subset X \cap \overline{H} \setminus \{x\}.$$

En effet, comme $\langle u, x \rangle = \langle u, x' \rangle$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\langle x - x', u + \varepsilon(x - x') \rangle = \varepsilon \langle x - x', x - x' \rangle > 0$. Ainsi $x = x' + (x - x') \notin \overline{H}_\varepsilon$. Et si $y \in X \setminus (X \cap \overline{H})$, on a

$$\langle y - x', u + \varepsilon(x - x') \rangle = \langle y - x', u \rangle + \varepsilon \langle y - x', x - x' \rangle.$$

Deux cas sont alors possibles :

- Premier cas : $\langle y - x', x - x' \rangle \geq 0$.
Comme $\langle y - x', u \rangle > 0$, on a forcément $\langle y - x', u + \varepsilon(x - x') \rangle > 0$
- Deuxième cas : $\langle y - x', x - x' \rangle < 0$.

On a

$$\begin{aligned} &\langle y - x', u \rangle + \varepsilon \langle y - x', x - x' \rangle \\ &= \langle y - x', u \rangle - \varepsilon |\langle y - x', x - x' \rangle| \\ &> \langle y - x', u \rangle - \min_{x_i \in X \setminus (X \cap H)} \frac{\langle u, x_i - x' \rangle}{|\langle x_i - x', x - x' \rangle|} |\langle y - x', x - x' \rangle| \\ &> \langle y - x', u \rangle \left(1 - \frac{|\langle y - x', x - x' \rangle|}{\langle y - x', u \rangle} \min_{x_i \in X \setminus (X \cap H)} \frac{\langle u, x_i - x' \rangle}{|\langle x_i - x', x - x' \rangle|} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour ce choix de ε , on a $\langle y - x', u + \varepsilon(x - x') \rangle > 0$ dans les deux cas. On déduit que $y = x' + (y - x') \notin X \cap \overline{H}_\varepsilon$. Donc $X \cap \overline{H}_\varepsilon \subset X \cap \overline{H} \setminus \{x\}$. Ceci implique que

$$\mu(\overline{H}_\varepsilon) \leq \mu(\overline{H} \setminus \{x\}) = D^\mu(x) - \mu(x).$$

Par conséquent,

$$D^\mu(x') \leq \mu(\overline{H}_\varepsilon) \leq D^\mu(x) - \mu(x).$$

Cela conduit à une contradiction. □

Démonstration du Théorème 4.1. Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\min_{x_i \in X} D^\mu(x_i) \leq \min_{y_j \in Y} D^\nu(y_j).$$

Soit $x_0 \in X$ le point de minimum. Considérons $H \in \Pi_{x_0}$ tel que $D^\mu(x_0) = \mu(\overline{H})$. Comme $D^\mu(x_0) = D^\nu(x_0)$, on a

$$\nu(\overline{H}) = \sum_{j: y_j \in Y} \nu_j \geq D^\mu(x_0) = \mu(x_0). \quad (4.1)$$

Pour tout $y \in Y$, on a $D^\mu(y) = D^\nu(y) > 0$, donc $Y \cap \overline{H} \subset \partial H$ (car $\mu(H) = 0$). Soit $y \in Y \cap \overline{H}$, $y \neq x_0$. Alors on peut trouver, comme dans la preuve du Lemme 4.2.1, un demi-espace H_ε , de sorte que

$$y \in \overline{H}_\varepsilon \quad \text{et} \quad X \cap \overline{H}_\varepsilon \subset X \cap \overline{H} \setminus \{x_0\}.$$

Ceci implique que

$$D^\nu(y) = D^\mu(y) \leq \mu(\overline{H}_\varepsilon) \leq \mu(\overline{H} \setminus \{x_0\}) = \mu(x_0) - \mu(x_0) = 0.$$

On obtient une contradiction. Par conséquent, $Y \cap \overline{H} = \{x_0\}$. Et d'après les résultats de 4.1, on a

$$\nu(x_0) = \nu(\overline{H}) = \mu(x_0).$$

De plus, on a

$$\min_{x_i \in X} D^\mu(x_i) = \min_{y_j \in Y} D^\mu(y_j).$$

On procède maintenant par induction. Posons $m = |M|$ et $n = |N|$. Soit $X' = \{x_{(1)}, \dots, x_{(m)}\}$ un réarrangement de X et $Y' = \{y_{(1)}, \dots, y_{(n)}\}$ un réarrangement de Y tels que

$$D^\mu(x_{(i)}) \leq D^\mu(x_{(i+1)}) \quad \text{et} \quad D^\nu(y_{(j)}) \leq D^\nu(y_{(j+1)}) \quad \text{pour tout } i < m \text{ et } j < n.$$

Soit $k \geq 1$. Supposons que, pour tout $l \leq k$, on a $x_{(l)} = y_{(l)}$ et $\mu(x_{(l)}) = \nu(y_{(l)})$. Montrons que $x_{(k+1)} = y_{(k+1)}$ et $\mu(x_{(k+1)}) = \nu(y_{(k+1)})$. Pour cela, il suffit de prouver que $x := x_{k+1}$ satisfait

$$\mu(x) \leq \nu(x) \leq \mu(x).$$

Soit $H' \in \Pi_x$ tel que $\mu(\overline{H'}) = D^\mu(x)$. D'après le Lemme 4.2.1, pour tout $x' \in X \cap \overline{H'} \setminus \{x\}$, on a

$$D^\mu(x') \leq D^\mu(x) - \mu(x) < D^\mu(x) = D^\mu(x_{(k+1)}).$$

Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence on a

$$x' \in Y \quad \text{et} \quad \mu(x') = \nu(x').$$

Autrement dit $\mu(\overline{H'} \setminus \{x\}) = \nu(X \cap \overline{H'} \setminus \{x\}) = D^\mu(x) - \mu(x)$. Mais comme $D^\mu(x) = D^\nu(x) \leq \nu(Y \cap \overline{H'})$, $Y \cap \overline{H'}$ contient des points supplémentaires qui ne sont pas dans $X \cap \overline{H'} \setminus \{x\}$ de masse totale au moins $\mu(x)$. C'est-à-dire, il existe

$$Y'' \subset (Y \cap \overline{H'}) \setminus (X \cap \overline{H'} \setminus \{x\}) \text{ tel que } \nu(Y'') \geq \mu(x).$$

Soit $y \in Y''$, $y \neq x$. Montrons que $D^\mu(y) \leq D^\mu(x) - \mu(x)$. Si $D^\mu(y) > D^\mu(x) - \mu(x)$, alors on aurait nécessairement $y \in \partial H'$ (car $\mu(H') = D^\mu(x) - \mu(x)$). On considère à nouveau un demi-espace H'_ε . On a alors

$$y \in \overline{H'_\varepsilon} \quad \text{et} \quad \overline{H'_\varepsilon} \cap X \subset \overline{H'} \cap X \setminus \{x\}.$$

Ceci implique que

$$D^\mu(y) \leq \mu(H'_\varepsilon) \leq \mu(\overline{H'} \cap X \setminus \{x\}) \leq D^\mu(x) - \mu(x).$$

C'est contraire à notre hypothèse. Donc on a bien

$$D^\mu(y) \leq D^\mu(x) - \mu(x) < D^\mu(x_{(k+1)}).$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence $y \in X$. Cela conduit à une contradiction avec la définition de Y'' . On a donc $Y'' = \{x\}$ et $\nu(x) \geq \mu(x)$. Réciproquement, soit $H'' \in \Pi_x$ tel que $\nu(\overline{H''}) = D^\nu(x)$. En répétant la même démarche, on montre que $\mu(x) \geq \nu(x)$. Par conséquent $\mu(x) = \nu(x)$. L'hypothèse de récurrence est vraie au rang supérieur. On en déduit que $X = Y$ et $\mu = \nu$. \square

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté les principales propriétés de la fonction de profondeur de Tukey. Ces propriétés font de la fonction de profondeur de Tukey la meilleure représentation des quantiles multivariés malgré l'introduction d'autres types de fonctions de profondeur [20]. De plus son calcul est désormais facile grâce aux algorithmes développés. Par ailleurs la fonction de profondeur de Tukey peut être utilisée en intelligence artificielle comme outil de classification [9].

La caractérisation d'une mesure discrète par sa fonction de profondeur est prouvée par le résultat de Koshevoy. Dans [8] Koshevoy établit également une caractérisation pour une mesure absolument continue à condition que la fonction $x \mapsto \exp(\langle p, x \rangle)$ soit intégrable par rapport à cette mesure pour tout $p \in \mathbb{R}^d$. Ce résultat utilise des propriétés avancées des projections de *lift-zonoid*. Dans le cas général, nous avons établi un résultat de caractérisation pour une mesure invariante par rotation dont les courbes de niveau n'ont pas de coins. Cette dernière hypothèse est restrictive. Une preuve basée sur les courbes de niveau sera donc limitée à certains cas. Afin d'avoir un théorème plus général, nous pourrions peut-être utiliser le résultat de Koshevoy dans le cas discret et des résultats sur la convergence de mesures.

Bibliographie

- [1] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, second edition, 1999.
- [2] J.A. Cuesta-Albertos and A. Nieto-Reyes. The random Tukey depth. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(11) :4979 – 4988, 2008.
- [3] David L. Donoho and Miriam Gasko. Breakdown properties of location estimates based on halfspace depth and projected outlyingness. *Ann. Statist.*, 20(4) :1803–1827, 12 1992.
- [4] Rainer Dyckerhoff and Pavlo Mozharovskyi. Exact computation of the halfspace depth. *Computational Statistics & Data Analysis*, 98 :19 – 30, 2016.
- [5] Irène Gijbels and Stanislav Nagy. On smoothness of tukey depth contours. *Statistics*, 50 (5) :1075–1085, 2016.
- [6] Linglong Kong and Yijun Zuo. Smooth depth contours characterize the underlying distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(9) :2222–2226, 2010.
- [7] Gleb A. Koshevoy. The Tukey depth characterizes the atomic measure. *Journal of Multivariate Analysis*, 83(2) :360 – 364, 2002.
- [8] Gleb A. Koshevoy. Lift-zonoid and multivariate depths. In *Developments in Robust Statistics*, pages 194–202. Springer, 2003.
- [9] Tatjana Lange, Karl Mosler, and Pavlo Mozharovskyi. Fast nonparametric classification based on data depth. *Statistical Papers*, 55(1) :49–69, 2014.
- [10] Regina Y. Liu, Jesse M. Parelius, and Kesar Singh. Multivariate analysis by data depth : descriptive statistics, graphics and inference. *Ann. Statist.*, 27(3) :783–858, 06 1999.
- [11] Bernhard H. Neumann. On an invariant of plane regions and mass distributions. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4) :226–237, 1945.
- [12] Richard Rado. A theorem on general measure. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4) :291–300, 1946.

- [13] Thomas Ransford. *Potential Theory in the Complex Plane*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1995.
- [14] Peter J. Rousseeuw and Ida Ruts. Algorithm as 307 : Bivariate location depth. *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, 45(4) :516–526, 1996.
- [15] Peter J. Rousseeuw and Ida Ruts. The depth function of a population distribution. *Metrika*, 49 :213–244, 1999.
- [16] Peter J. Rousseeuw and Anja Struyf. Computing location depth and regression depth in higher dimensions. *Statistics and Computing*, 8(3) :193–203, 1998.
- [17] Anja Struyf and Peter J Rousseeuw. Halfspace depth and regression depth characterize the empirical distribution. *Journal of multivariate analysis.-New York, NY*, 69 :135–153, 1999.
- [18] John W. Tukey. Mathematics and the Picturing of Data. In *International Congress of Mathematicians 1974*, volume 2, pages 523–532, 1974.
- [19] Frederick A. Valentine. *Convex sets*, volume 99. McGraw-Hill New York, 1964.
- [20] Yijun Zuo and Robert Serfling. General notions of statistical depth function. *Ann. Statist.*, 28(2) :461–482, 2000.