

MOHAMED MOUINE

COMBINAISON DE DEUX MÉTHODES D'ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Mémoire présentée
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en informatique
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE ET DE GÉNIE LOGICIEL
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2011

© Mohamed Mouine, 2011

Résumé

L'objectif de ce travail est de mettre en place une méthode d'analyse de sensibilité paramétrable, pour qu'elle puisse être utilisée avec différentes méthodes d'aide à la décision multicritères, qui génère des résultats exacts en un temps raisonnable.

Afin d'atteindre notre objectif, nous avons utilisé une méthode d'analyse de stabilité de (Vetschera, 1986). Cette méthode a été présentée à l'origine pour Electre I, nous l'avons adapté à Electre II. Les résultats retournés par cette méthode avec Electre II seront utilisés pour l'analyse de sensibilité.

Nous avons expérimenté la méthode d'analyse de sensibilité de (Ben Mena, 2001). Cette méthode détermine la sensibilité des paramètres d'Electre III. Suite à plusieurs expérimentations à l'aide du logiciel MCDM, nous avons pu améliorer la méthode de Ben Mena. Nous avons adapté notre nouvelle méthode à Electre II.

À la fin, nous avons combiné les deux méthodes pour avoir une méthode d'analyse de sensibilité précise, rapide et qui ne demande pas une intervention humaine pour fixer les paramètres.

Avant-Propos

Je n'aurais su effectuer ma maîtrise sans l'aide et le soutien de plusieurs personnes, je tiens donc à les remercier. Tout d'abord, je remercie infiniment ma famille, en commençant par mes parents bien aimés, en passant par ma sœur Houda et son mari et arrivant à mon neveu Ahmed, pour leur patience et leur encouragement tout au long de mes années d'étude.

Je voudrais remercier aussi mon directeur de recherche, M. Luc LAMONTAGNE, pour son encadrement, ses suggestions, sa disponibilité et son support moral et financier durant ma maîtrise.

Je remercie également les professeurs M. François LAVIOLETTE et M. Sehl MELLOULI qui ont accepté d'évaluer ce mémoire.

Je ne peux terminer sans remercier mes amis ici au Canada Marouen, Taher, Aymen et Shedly et mes amis en Tunisie Sameh, Hafedh, Ahmed, Aymen pour leur aide respective et la motivation que chacun m'a apportée à sa manière.

Je remercie mon Dieu de m'avoir donné la force et les moyens et de m'avoir fait rencontrer toutes ces bonnes personnes pour arriver à mon but.

À mon Père, ma mère, ma sœur, mon amie Sameh, tous mes amis et surtout à mon neveu Ahmed âgé de deux ans à qui je souhaite toute la réussite du monde et qu'il dépasse le stade de son oncle ;-)

Table des matières

Résumé.....	i
Avant-Propos.....	ii
Table des matières.....	iv
Liste des tableaux.....	vi
Liste des figures.....	1
Chapitre 1 - Introduction.....	2
1.1 Contexte du travail.....	2
1.2 Objectif.....	3
1.3 Approche.....	3
1.4 Structure du mémoire.....	4
Chapitre 2 - Revue de la littérature.....	5
2.1 Principales approches de prise de décision.....	5
2.1.1 Approche classique (normative).....	5
2.1.2 Approche descriptive.....	6
2.1.3 Approche perspective.....	6
2.1.4 Approche constructive.....	6
2.2 Famille multicritère.....	7
2.2.1 Analyse multicritère.....	7
2.2.2 Critères.....	9
2.2.3 Tableau de performance.....	9
2.2.4 Surclassement.....	10
2.2.5 Concordance et discordance.....	10
2.2.6 Seuils.....	10
2.2.7 Degré de crédibilité.....	11
2.2.8 Distillation antagoniste (ascendante et descendante).....	11
2.3 Méthode ELECTRE I.....	12
2.4 Électre II.....	13
2.5 Électre III.....	14
2.6 Prométhée.....	15
2.6.1 Prométhée I : rangement partiel.....	18
2.6.2 Prométhée II : rangement total.....	18
2.7 Analyse de sensibilité et analyse de robustesse.....	19
2.7.1 Analyse de sensibilité.....	19
2.8 Analyse de robustesse.....	21
2.9 Entre analyse de robustesse et analyse de sensibilité :.....	23
2.10 Conclusion.....	24
Chapitre 3 - Banc d'essai MCDM.....	25
3.1 Introduction.....	25
3.2 Fonctionnement du logiciel.....	25
3.2.1 Tableau de performance.....	26
3.2.2 Méthodes d'aide à la décision multicritère.....	27
3.2.3 Analyse de sensibilité.....	27
3.2.4 Les entrées du logiciel.....	27

3.2.5	Les résultats	28
3.3	Démarche	28
3.3.1	Identification des paramètres	28
3.3.2	Chargement du tableau de performance	29
3.3.3	Interaction avec l'interface graphique	29
3.3.4	Analyse de sensibilité	30
3.4	Langage et environnement.....	31
3.5	Conclusion	32
Chapitre 4 - Analyse de sensibilité		32
4.1	Introduction.....	32
Chapitre 5 - Conclusion		74
Bibliographie		76
Annexe A		78
Annexe B		81
Annexe C		83

Liste des tableaux

Tableau 1 - Tableau de performance.....	10
Tableau 2 - Les six types de critères	15
Tableau 3 - Structure du tableau de performance	26
Tableau 4 - Résultats de l'analyse de sensibilité	31
Tableau 5 - Tableau de préférences (Maystre, Pictet, & Simos, 1994).....	36
Tableau 6 - Valeurs extrêmes des paramètres en utilisant la méthode de Ben Mena	37
Tableau 7 - Préordre suite à la distillation descendante	37
Tableau 8 - Préordre suite à la distillation ascendante.....	38
Tableau 9 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la méthode de Ben Mena	43
Tableau 10 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la nouvelle méthode (Ben Mena améliorée).....	43
Tableau 11 - Exemple d'utilisation d'Électre III pour ranger des fournisseurs	44
Tableau 12 - Préordre obtenu avec ÉlectreIII pour l'exemple 2.....	44
Tableau 13 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la méthode de Ben Mena (exemple 2)	45
Tableau 14 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la nouvelle méthode (Exemple 2).....	45
Tableau 15 - Les valeurs utilisées pour la comparaison dans l'exemple 1	47
Tableau 16 - Les valeurs utilisées pour la comparaison dans l'exemple 2	47
Tableau 17 - Tableau de performances (exemple1).....	66
Tableau 18 - surclassement par la méthode Électre II	66
Tableau 19 - Résultat du surclassement fort par Électre II (exemple 1).....	67
Tableau 20 - Résultat du surclassement faible par Électre II (exemple 1).....	68
Tableau 21 - Tableau de performances (exemple2).....	69
Tableau 22 - surclassement par la méthode Électre II (exemple 2)	70
Tableau 23 - Résultat du surclassement fort par Électre II (exemple 2).....	70

Liste des figures

Figure 1 - Les six types de critères.....	17
Figure 2 - Fonctionnement du logiciel MCDM.....	26
Figure 3 - Interface du logiciel MCDM après chargement des données	30
Figure 4 - Algorithme d'analyse de sensibilité de Ben Mena.....	35
Figure 5 - Schéma de l'algorithme de la version améliorée de la méthode ANALYSE-SENSIBILITE-BENMENA.....	40
Figure 6 - Version améliorée de l'algorithme de la méthode d'ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA.....	42
Figure 7 - Exemple de choix de point intermédiaire sur différents cas possibles d'intervalles	45
Figure 8 - Schématisation de la méthode de (Vetschera R , 1986)	49
Figure 9 - Schématisation de la méthode avec Électre II	56
Figure 10 - Raffinement des bornes de l'intervalle par la combinaison des deux méthodes	63
Figure 11 - Premier cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de concordance dans la méthode de Ben Mena.....	64
Figure 12 - Premier cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de discordance v_2 dans la méthode de Ben Mena.	64
Figure 13 - Deuxième cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de concordance dans la méthode de Ben Mena.....	65
Figure 14 - Deuxième cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de discordance dans la méthode de Ben Mena.....	66

Chapitre 1 - Introduction

1.1 Contexte du travail

Chaque jour, nous sommes confrontés à des situations où l'on doit prendre des décisions. Parmi ces situations, on note celles qui sont simples et qui impliquent une prise de décision facile dont la solution est évidente. D'autres sont toutefois complexes et la prise de décision dans ce contexte donne l'impression qu'il n'existe pas de meilleure solution.

Depuis les années 50, les recherches dans le domaine de l'aide à la décision visent principalement à optimiser les résultats de la décision obtenue. L'aide à la décision a connu plusieurs étapes dans son histoire. Les deux grandes familles sont l'aide à la décision monocritère et l'aide à la décision multicritères qui offre un contexte plus riche que la précédente.

Les formulations multicritères sont apparues afin de s'approcher de plus en plus de la réalité dans la modélisation des problèmes. L'utilisation du monocritère a connu du succès en pratique, mais est limité à l'optimisation d'une fonction économique ou à résoudre un programme mathématique. L'approche multicritères permet de surmonter cette lacune.

Pour illustrer la distinction entre les deux familles, prenons le problème de choix d'une voiture. En suivant une approche monocritère, la solution serait toujours la voiture la moins chère. Ce qui n'est pas une solution acceptable pour toute la famille.

Le premier souci du multicritère est de fixer les « actions » possibles. Dans notre exemple, la liste des actions est constituée de la liste des voitures qui nous plaisent et parmi lesquelles on doit choisir. La seconde étape est la sélection de critères qui seront pris en considération dans la prise de décision. Dans notre exemple, cela peut être le prix, la couleur, l'espace à l'intérieur, la consommation...

Ensuite, on doit choisir la méthode qu'on utilisera pour résoudre le problème de décision. Ces méthodes diffèrent chacune de l'autre dans leur mode de fonctionnement, dans les types de problèmes qu'elles permettent de résoudre et même les paramètres que leurs fonctions de décision utilisent.

Ces paramètres utilisés reflètent les préférences du décideur et alors influencent la solution obtenue. Pour vérifier que la solution obtenue est la meilleure, nous devons analyser la sensibilité de ces paramètres.

1.2 Objectif

Les paramètres utilisés dans la méthode d'aide à la décision multicritères représentent les préférences du décideur. Les valeurs de ces paramètres ne sont pas déterminées suite à des calculs mathématiques ou à des résultats scientifiques, mais selon les convictions subjectives du décideur. L'analyse de sensibilité est l'étude de la sensibilité du résultat suite à des variations effectuées sur les valeurs des paramètres que le décideur a fixés. Ces variations nous indiquent si les valeurs de ces préférences sont cohérentes ou non. Pour cette raison, l'analyse de sensibilité est d'une grande importance dans le processus d'aide à la décision multicritère. Le seul inconvénient de cette analyse est qu'elle est coûteuse en termes de temps de calcul et en termes d'exactitude.

Notre objectif est de mettre en œuvre une méthode d'analyse de sensibilité paramétrable pour qu'elle puisse être utilisée avec différentes méthodes d'aide à la décision multicritères et générer des résultats exacts en un temps raisonnable.

1.3 Approche

Pour atteindre les objectifs tracés dans ce travail, nous avons étudié une méthode d'aide à la décision qu'a été proposée par ben Mena (Ben Mena, 2001) pour Électre III. Après avoir implémenté cette méthode et appliqué le même algorithme à Électre II, nous avons utilisé des exemples réels pour noter les points forts et les points faibles de cette méthode. Suite à ces expérimentations, nous avons remarqué que cette méthode perd de son efficacité en termes d'exactitude et de temps de calcul lorsque la taille du problème s'accroît. Ceci est dû au choix arbitraire du champ de recherche des valeurs sensibles des paramètres. Pour contourner ce problème nous avons suivi la méthode appliquée par (Vetschera, 1986) sur Électre. Après quelques modifications apportées à celle-ci pour l'adapter à Électre II et Électre III, nous avons utilisé les résultats de cette dernière comme paramètre d'entrée de la méthode de (Ben Mena, 2001) pour éviter le choix arbitraire d'intervalle pour mener l'analyse de sensibilité. Nous avons

aussi apporté des modifications au module de recherche de la méthode de (Ben Mena, 2001) pour gagner en terme de temps et d'exactitude.

1.4 Structure du mémoire

Ce mémoire se divise en trois parties. La première partie est consacrée à la présentation de la revue de littérature du domaine de l'aide à la décision multicritères. Nous abordons en premier lieu les approches et les familles multicritères. Nous présentons ensuite les méthodes multicritères. On termine cette section par une description sommaire des principes de l'analyse de sensibilité et de l'analyse de robustesse.

La deuxième partie présente le banc d'essai MCDM. Nous décrivons dans cette section le fonctionnement du logiciel et comment l'utiliser avec un problème réel.

La troisième partie présente nos contributions. Nous allons tout d'abord proposer une méthode d'analyse de sensibilité sur laquelle nous nous sommes basées pour implémenter les différentes versions améliorées d'analyse. Nous terminons cette partie avec des exemples réels de résultats obtenus avec la version améliorée de l'algorithme.

Nous concluons ce mémoire par une synthèse du travail effectué et une suggestion de quelques pistes d'amélioration pour des travaux futurs.

Chapitre 2 - Revue de la littérature

Une décision n'est pas une solution qu'on met en évidence, mais plutôt une solution qu'on a choisie parmi d'autres. Donc tout revient à dire que prendre la bonne décision consiste à choisir la meilleure solution parmi toutes les solutions possibles.

Dans ce chapitre, nous présentons succinctement les concepts et techniques liés à notre projet d'analyse de sensibilité pour la prise de décision.

2.1 Principales approches de prise de décision

Dans le domaine de l'aide à la décision, l'analyste reçoit toutes les données de la part du décideur. Ces données ne forment pas forcément un problème bien structuré. Généralement, elles sont sous formes ambiguës (langage naturel). L'analyste doit représenter ces mêmes données d'une façon formelle. Donc, il doit passer de la situation problématique à un modèle d'aide à la décision avec une représentation mieux formalisée.

L'analyste se base sur des modèles formels de préférences et des valeurs du décideur. Il faut faire usage de rationalité dans la préférence des modèles qui vont être utilisés pour tirer des réponses aux problèmes de décision. Dans la littérature on trouve quatre approches reconnues qui sont décrites dans les prochains paragraphes.

2.1.1 Approche classique (normative)

Comme son nom l'indique, cette approche se base sur des normes. Les écarts par rapport à ces normes reflètent les erreurs ou les lacunes des décideurs qui doivent être aidés pour décider d'une manière rationnelle (Tsoukiàs, 2007). Cette approche est purement théorique, car il faut appliquer des normes aux données du problème et les conséquences de toutes actions possibles en bâtissant « une fonction d'utilité » (Tsoukiàs, 2003) pour identifier la solution qui devrait être appliquée.

2.1.2 Approche descriptive

Contrairement à la précédente, cette approche est de type empirique et non pas théorique. Tout de même, elle est dérivée des modèles de rationalité. Le principe de base de l'approche descriptive est d'appliquer des solutions qui ont été jugées réussies dans des problèmes similaires au problème traité.

2.1.3 Approche perspective

Nous pouvons nous trouver dans une situation où le décideur ne peut pas être associé à un modèle de rationalité plus ou moins près. La démarche de cette approche est de découvrir des modèles pour un client donné à partir de ses réponses à des questions relatives à la préférence. La validité d'un tel modèle est strictement locale, mais sa légitimation est claire : le client lui-même (Tsoukiàs, 2003).

2.1.4 Approche constructive

La réalité de l'aide à la décision est que très souvent le client n'a pas une idée très claire du problème, du moins pas suffisamment claire pour permettre l'identification d'un modèle de rationalité. Dans ce cas, nous avons à construire le problème et sa solution en même temps. Par conséquent, contrairement aux approches précédentes, dans cette approche il y aura une circulation de l'information dans les deux sens, « un processus d'apprentissage mutuel ». C'est cette approche que nous adoptons dans ce travail.

En utilisant cette approche, nous considérons que tout ce qui est en relation (concepts, modèles, procédures et résultats) est un outil qu'on utilisera pour nous aider à évoluer dans l'élaboration des résultats.

D'autre part, ces outils nous permettent et facilitent la communication avec les décideurs afin mieux en sortir, et connaître leurs convictions et leurs préférences.

Le but de la prise de décision constructive n'est pas de découvrir une vérité existante, externes aux acteurs impliqués dans le processus, mais de construire un « jeu de clés » qui ouvrira des portes pour les acteurs et leur permettre d'avancer, de progresser en fonction de leurs objectifs. (Roy, 1993).

2.2 Famille multicritère.

Dans la prise de décision impliquant de multiples critères, le problème de base énoncé par les analystes et les décideurs concerne la manière par laquelle la décision finale doit être faite. Dans de nombreux cas, toutefois, ce problème est posé dans le sens inverse : en supposant que la décision est rendue, comment est-il possible de trouver la base rationnelle à travers laquelle la décision a été prise ? Ou de manière équivalente, comment est-il possible d'évaluer le modèle de préférence des décideurs ? La philosophie de la désagrégation des préférences en matière d'analyse multicritère est d'évaluer les modèles de préférence, de déduire des structures données préférentielles et d'aborder le problème d'aide à la décision grâce à des modèles opérationnels dans le cadre ci-dessus.

2.2.1 Analyse multicritère

Sous le terme « analyse multicritère », deux approches de base ont été développées en impliquant :

- (a) un ensemble de méthodes ou de modèles permettant l'agrégation des critères d'évaluation multiples pour choisir une ou plusieurs actions à partir d'un ensemble A ,
- (b) une activité d'aide à la décision pour bien définir le décideur (individu, organisation, etc.).

Dans les deux cas, l'ensemble A des actions potentielles, ou les décisions, sont analysées en termes de critères multiples afin de modéliser tous les impacts possibles des conséquences ou des attributs liés à l'ensemble A .

(ROY, 1985) décrit une méthodologie générale de modélisation du processus décisionnel des problèmes, qui comprend quatre étapes commençant par la définition de l'objet de la décision et se terminant par l'activité d'aide à la décision. Les étapes sont décrites dans les paragraphes suivants.

Niveau 1. Ce niveau porte sur l'objet de la décision, y compris la définition de l'ensemble des actions potentielles A et la détermination d'une problématique sur A . Au niveau 1, (ROY, 1985) distingue quatre problématiques référentielles, mais chacune d'elles n'exclut pas nécessairement les autres. Ces problématiques peuvent être utilisées séparément ou de façon complémentaire dans toutes les phases du processus décisionnel.

Les quatre problématiques sont les suivantes:

- Problématique α . Le choix d'une action de l'ensemble A (choix).
- Problématique β . Le tri des actions dans des catégories bien définies qui sont données dans un ordre de préférence (tri).
- Problématique γ . Le classement des actions de la meilleure à la pire (classement).
- Problématique δ . La description des actions en termes de leurs performances sur les critères (description).

Niveau 2. Ce niveau porte sur l'analyse des conséquences et l'élaboration des critères. Au niveau 2, le processus de modélisation doit conclure sur une famille cohérente de critères $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Chaque critère est une non-diminution de la fonction réelle d'une valeur définit sur A , comme suit:

$$\begin{aligned} g_i : A &\rightarrow [g_i^*, g_i^*] \subset \mathcal{R} & (1) \\ a &\rightarrow g(a) \in \mathcal{R}, \end{aligned}$$

où :

- $[g_i^*, g_i^*]$: l'échelle d'évaluation des critères.
- g_i^* : le moins bon niveau de $i^{\text{ème}}$ critère.
- g_i^* : le meilleur niveau du $i^{\text{ème}}$ critère.
- $g_i(a)$: l'évaluation des performances pour l'action du $i^{\text{ème}}$ critère.

De cette définition, les situations préférentielles suivantes peuvent être déterminées:

$$g_i(a) > g_i(b) \Leftrightarrow a > b \text{ (l'action } a \text{ est préférée à l'action } b) \quad (2)$$

$$g_i(a) = g_i(b) \Leftrightarrow a \sim b \text{ (} a \text{ est indifférent de } b) \quad (3)$$

Niveau 3. Ce niveau porte sur la modélisation des préférences globales et les approches opérationnelles pour l'agrégation des performances.

Niveau 4. Ce niveau est pour l'aide à la décision, basée sur les résultats de niveau 3 et la problématique du niveau 1.

2.2.2 Critères

Dans l'analyse multicritère, quatre types de critères sont utilisés avec les propriétés suivantes:

- Critère mesurable : ce critère permet la comparaison préférentielle des intervalles de l'échelle d'évaluation. il se distingue des sous-types suivants :
 - Critère véritable (sans seuil),
 - Semi-critère (avec seuil d'indifférence)
 - Pseudo-critère (avec les seuils de préférence et indifférence).
- Critère ordinal : Il définit uniquement un ordre sur A . Ainsi, l'échelle d'évaluation est discrète (critère qualitatif : bon, très bon, excellent...).
- Critère probabiliste : Il vise le cas d'incertitude dans les performances des actions modélisées par des distributions de probabilité.
- Critère flou : Les performances des actions sont des intervalles d'échelle de l'évaluation des critères.

2.2.3 Tableau de performance

Chaque problème multicritère se constitue de deux grandes familles de données. La première famille est l'ensemble des valeurs des actions relatives aux critères et la deuxième est constituée des valeurs des paramètres liés à la méthode d'aide à la décision multicritère utilisée. Le tableau 1 donne un aperçu de la forme d'un tableau de performance. Dans ce tableau, l'expression $g_1(a_1)$ désigne la valeur de l'action a_1 par rapport au critère 1. Et les paramètres sont ceux de la méthode utilisée (préférence, indifférence,...).

Tableau 1 - Tableau de performance

Critères actions	→			Critère m
	Critère 1	Critère 2	...	
A1	$g_1(a_1) = 126$	$g_2(a_1) = 22.356$...	$g_m(a_1) = 25382.9$
A2	$g_1(a_2) = 243$	$g_2(a_2) = 24.312$...	$g_m(a_2) = 12846.32$
...
An	$g_1(a_n) = 62$	$g_2(a_n) = 32.029$...	$g_m(a_n) = 18645.7$
poisds	0.12	0.06	...	0.23
indifférence	14	1	...	200
Préférence	38	3.5	...	600
Véto	90	5	...	1300

2.2.4 Surclassement

La comparaison au sein d'un couple d'actions se fait en utilisant la notion de surclassement. Elle est dénotée par $\delta_j(a, b)$ ou $a S b$.

Une action a en surclasse une autre b si :

- a est au moins aussi bonne que b relativement à une majorité de critères,
- et ce sans être trop nettement plus mauvaise relativement aux autres critères.

2.2.5 Concordance et discordance

La concordance indique s'il y a suffisamment d'arguments pour admettre l'hypothèse que $a S b$. Elle est dénotée par $c_j(a, b)$. La discordance indique s'il y a une raison suffisante pour refuser cette hypothèse. Elle est dénotée par $d_j(a, b)$.

2.2.6 Seuils

Chaque critère j dans certaines méthodes, dont ELECTRE III, peut être accompagné de trois seuils (indifférence, préférence et veto respectivement q_j , p_j et v_j) permettant de définir des zones de préférence entre deux actions.

Les deux premiers seuils permettent de former un pseudo-critère.

- a et b sont indifférentes quant la différence entre les performances des deux actions est inférieure au seuil d'indifférence :

$$(a I b) \Leftrightarrow g_j(a) - g_j(b) \leq q_j(g_j(a))$$

- a est faiblement préférée à b quand la différence entre les performances des deux actions est comprise entre les seuils d'indifférence et de préférence :

$$(a Q b) \Leftrightarrow q_j(g_j(a)) \leq g_j(a) - g_j(b) \leq p_j(g_j(a))$$

- a est strictement préférée à b quand la différence entre les performances des deux actions est supérieure au seuil de préférence stricte :

$$(a P b) \Leftrightarrow p_j(g_j(a)) \leq g_j(a) - g_j(b)$$

2.2.7 Degré de crédibilité

Considérant les valeurs des indices de concordances et les indices de discordance, le degré de crédibilité indique si l'hypothèse de surclassement est plausible ou non. Il est noté $\delta_{(a,b)}$ et s'exprime sous la forme:

$$\delta_{(a,b)} = \begin{cases} C(a,b) & \text{si } \forall j, Dj(a,b) > C(a,b) \\ C(a,b) \cdot \prod_{j \in J} \frac{1 - Dj(a,b)}{1 - C(a,b)} & \text{sinon} \end{cases}$$

L'expression mathématique précédente signifie que pour une même paire d'actions :

- Si l'indice de concordance est supérieur ou égal à l'indice de discordance, alors le degré de crédibilité est égal à l'indice de concordance;
- Si l'indice de concordance est strictement inférieur à l'indice de discordance, alors le degré de crédibilité est égal à l'indice de concordance affaibli des indices de discordance.

2.2.8 Distillation antagoniste (ascendante et descendante)

La distillation descendante consiste en ceci. On extrait de A un sous-ensemble des meilleures actions potentielles en appliquant une règle de sélection relativement sévère. Dans ce sous-ensemble, on cherche à nouveau les meilleures actions, en appliquant cette fois une règle de sélection un peu moins sévère. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus dans le dernier sous-

ensemble, qu'une seule action ou des actions ne pouvant plus être départagées. Cette action ou ces actions constitue(nt) la première classe. En retirant de A la ou les actions de la première classe, on recommence une distillation qui fournira la deuxième classe. On procède de la même façon jusqu'à ce que l'on ait traité toutes les actions de A .

La distillation ascendante progresse évidemment dans l'autre sens : on détermine la dernière classe d'abord et on remonte dans le classement.

2.3 Méthode ELECTRE I

Cette méthode (Roy, 1968) est l'ancêtre de la famille ELECTRE. Elle répond à la problématique α et son but est de sélectionner un ensemble (réduit) d'actions parmi lesquelles se trouve le compromis recherché.

On construit la relation de surclassement comme suit. Les poids w_i normalisés (de somme égale à 1) sont fournis par le décideur et on suppose disposer des évaluations $g_i(a)$ de chaque critère i pour chaque action a .

On calcule l'indice de concordance pour chaque couple d'actions a et b en additionnant les poids des critères « favorables » à a :

$$C(a,b) = \sum_{j: g_j(a) \geq g_j(b)} w_j$$

On compare $C(a,b)$ à un seuil de concordance S_c qu'on doit fixer entre 0.5 et 1 : si $C(a,b) > S_c$, on envisagera que $a S b$.

Selon la prudence du décideur et le fait que les échelles g_i sont finies (qualitatives) à peu d'échelons (donc beaucoup d'ex-æquo possibles) ou au contraire infinies et très discriminantes, on utilisera une valeur de S_c plus ou moins grande. En pratique, les valeurs 0.6, 0.65, 0.7 et 0.75 sont les plus fréquentes. En cas d'incertitude, une analyse de sensibilité AS sur S_c permettra de faire évoluer la relation S .

Il est important de souligner qu'il faut calculer à la fois $C(a,b)$ et $C(b,a)$. On peut avoir $C(a,b) > S_c$ et $C(b,a) > S_c$ puisque $C(a,b) + C(b,a) \geq 1$. C'est généralement le cas lorsque S_c n'est pas trop grand et les deux actions sont ex-æquo sur plusieurs critères sans que sur les autres critères l'une d'entre elles accumule les avantages. Cette situation correspond bien à la notion d'indifférence.

Le cas contraire $C(a,b) \leq S_c$ et $C(b,a) \leq S_c$ correspond à une situation où les deux actions a et b diffèrent sur presque tous les critères sans que l'une d'entre elles ne l'emporte pour une coalition importante de critères. Cette situation correspond à la notion d'incomparabilité.

L'étape suivante concerne tous les couples (a,b) tels que $C(a,b) > S_c$ puisque, dans le cas contraire, on a définitivement $a S b$.

L'aspect « non-discordance » est le fait qu'on doit éviter les cas où, pour un certain critère, l'avantage de b sur a est tel qu'il peut affaiblir la relation $a S b$.

Le décideur doit préciser un seuil de veto S_{v_i} pour chaque critère i , c'est-à-dire un écart maximum entre les performances de a et b (en faveur de b) au-delà duquel on ne peut plus accepter $a S b$ quel que soient la relation de a avec les autres critères.

Si au moins un veto est violé, alors $b S a$, sinon la relation obtenue par la concordance ($a S b$) est maintenue.

2.4 Électre II

La méthode ELECTRE II (Roy & Bertier, 1971) est construite sur le même schéma qu'ELECTRE I, mais elle en diffère par quelques éléments :

- ELECTRE II répond à la problématique γ car l'exploitation de S fournit un rangement.
- Elle fait usage de deux relations de surclassement, une forte S_F et une faible S_f .
- La construction de ces deux relations se base sur 3 seuils de concordance $S_{c1} > S_{c2} > S_{c3}$ et 2 seuils de veto $S_{v1i} > S_{v2i}$ par critère.
- ELECTRE II réduit fortement l'indifférence en exigeant que $C(a,b) \geq C(b,a)$ comme condition nécessaire de surclassement de b par a .
- La relation S_F est utilisée prioritairement dans le processus de décision. La relation S_f n'intervient qu'en fin de travail pour raffiner le(s) classement(s) en départageant les actions qui, du point de vue de S_F , appartiennent à une même classe d'équivalence. L'utilisation de S_f à l'intérieur de chaque classe d'équivalence de chaque classement est identique à celle de S_F correspondante.

On utilise donc d'abord uniquement S_F pour construire deux rangements (pré-ordre totaux) intermédiaires : le rangement direct et le rangement indirect.

On commence par l'agrégation des éventuels circuits¹ ce qui nous permet de pouvoir décomposer le graphe obtenu en niveaux.

Le rangement direct consiste à attribuer un rang à chaque action. Ce rang est le rang du niveau auquel elle appartient : elle est en premier rang si elle n'est pas surclassée par d'autres actions.

Dans le rangement direct, une action est d'autant mieux classée si le nombre d'actions qui la surclasse tend vers 0. Pour le rangement indirect, le critère de classement n'est plus par combien d'actions a est surclassé, mais plutôt a surclasse combien d'action. Donc pour reprendre la même procédure réalisée avec le rangement direct, on doit commencer par inverser le sens des flèches dans le graphe de surclassement². Une action est bien classée selon ce rangement si elle en surclasse beaucoup d'autres et classée dernière si elle n'en surclasse aucune.

Pour conclure le processus de décision, on met en place un classement final en utilisant les rangs obtenus dans les rangements précédents.

2.5 Électre III

Électre III (Roy, 1978) est une méthode multicritère fondée sur une procédure de classement des alternatives, de la (des) meilleure (s) à la (aux) moins bonne(s). Le principe de la méthode Électre III repose sur la construction d'une hypothèse de surclassement entre les actions. Les actions sont en effet comparées par paires (a, b) . Chaque paire d'actions est caractérisée par une relation de surclassement $a S b$, avec $S = I$ (a et b sont indifférents), Q (a est faiblement préféré à b) ou P (a est strictement préféré à b). La relation de surclassement est déterminée en fonction de la différence entre les performances des actions et de la valeur donnée à des différents seuils.

Dans cette méthode, l'hypothèse de surclassement n'est pas entièrement acceptée ou rejetée (notion de flou). On évalue plutôt le degré de crédibilité (compris entre 0 et 1) de cette hypothèse, à travers deux indices: l'indice de concordance et l'indice de discordance.

Deux préclassements sont ensuite construits par le biais de deux procédures de distillations antagonistes (ascendante et descendante). Le croisement de ces deux préclassements aboutit à un classement final. Une analyse de sensibilité est ensuite réalisée pour juger de la stabilité des résultats suite à des variations de valeurs des paramètres du modèle.

¹ Un circuit d'actions est une suite de flèches dont les deux actions d'extrémité sont identiques.

² C'est un graphe orienté dont les sommets sont les actions. Chaque flèche allant de a vers b signifie que a surclasse b .

2.6 Prométhée

PROMETHEE (BRANS, VINCKE, & MARESCHAL, 1986) est l'acronyme de *Preference Ranking Organisation Method for Enrichment Évaluations*. Les méthodes Prométhée sont des méthodes de surclassement basées sur les théories de ROY (développeur des méthodes ELECTRE) et elles ont été développées par Jean-Pierre Brans et Philippe Vincke à partir du milieu des années 80. Depuis, elles ont fait l'objet de développements et d'adaptations complémentaires.

Il en existe 4 versions assez proches. Je ne présenterai ici que Prométhée I et II. Les 2 méthodes (Prométhée I et II) ont le même cheminement initial, mais leurs buts sont différents. Prométhée I permet de dégager des relations partielles de classement, alors que Prométhée II fournit un classement de toutes les actions.

Le cheminement commun aux deux méthodes est le suivant :

- a) On commence par attribuer un poids et un type à chaque critère. Le type de ce critère est en quelque sorte une fonction de préférence.
- b) PROMETHEE compare les actions deux à deux et mesure l'intensité de préférence $P(a,b)$ de l'une par rapport à l'autre sur chaque critère au moyen d'une fonction $p(d)$ où d représente la différence des évaluations $g(a)-g(b)$ sur le critère. Les six types de critères sont disponibles et présentés dans le Tableau 2.

Tableau 2 - Les six types de critères

Type I - Vrai critère	Dans ce cas, dès qu'il y a un écart, il y a préférence stricte pour l'action ayant l'évaluation la plus élevée. Si le décideur choisit le type I pour un critère particulier, il ne doit fixer aucun paramètre. <u>Vrai critère</u> : $p(d) = 0$ si $d \leq 0$ et $p(d) = 1$.
Type II- quasi-critère	Les actions a et b sont dans ce cas indifférents aussi longtemps que l'écart $d(a, b)$ ne dépasse pas un seuil q . Et au-delà de ce seuil, la préférence est stricte. Ici, il faut fixer le seuil d'indifférence q . <u>quasi-critère</u> : $p(d) = 0$ si $d \leq q$ et sinon $p(d) = 1$; q est le seuil

	d'indifférence.
Type III - critère à préférence linéaire	<p>Un tel critère permet au décideur de préférer progressivement a à b en fonction de l'écart observé entre g(a) et g(b). Le degré de préférence croit alors jusqu'à ce que le seuil p soit atteint, et au-dessus de ce seuil, la préférence est stricte. Dans ce cas, le seul paramètre à fixer est le seuil de préférence stricte p.</p> <p><u>Critère à préférence linéaire :</u></p> $p(d) = 0 \text{ si } d \leq 0, p(d) = \min(d/p, 1).$ <p>Sinon p est le seuil de préférence stricte.</p>
Type IV : critère à paliers	<p>Deux actions a et b sont ici considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre g(a) et g(b) ne dépasse pas q. Entre q et p, le degré de préférence est faible, et au-delà de p, la préférence devient stricte. Il y a donc ici deux paramètres à fixer.</p> <p><u>Critère à paliers :</u></p> $p(d) = 0 \text{ si } d \leq q, p(d) = 1/2 \text{ si } q < d \leq p \text{ et } p(d) = 1 \text{ sinon;}$ <p>q et p sont les seuils classiques</p>
Type V : critère préférence linéaire avec zone d'indifférence	<p>Dans ce cas-ci comme dans le précédent, a et b sont considérées comme indifférentes aussi longtemps que l'écart entre g(a) et g(b) ne dépasse pas q. Au-delà de ce seuil, le degré de préférence croit linéairement avec d jusqu'à atteindre un seuil de préférence stricte à partir de p. Ici encore, deux paramètres doivent être fixés.</p> <p>Critère mixte:</p> $p(d) = 0 \text{ si } d \leq q, p(d) = (d-q)/(p-q) \text{ si } q < d \leq p \text{ et } p(d) = 1 \text{ sinon}$ <p>on combine les deux précédents.</p>
Type VI : critère (inverse) gaussien	<p>Dans ce cas, le degré de préférence croit de façon continue en fonction d'un seul paramètre σ qui doit être fixé.</p> <p>Critère gaussien : $p(d) = 1 - \exp(-d^2/2\sigma^2)$ où σ^2 est un paramètre analogue à la variance d'une distribution normale.</p>

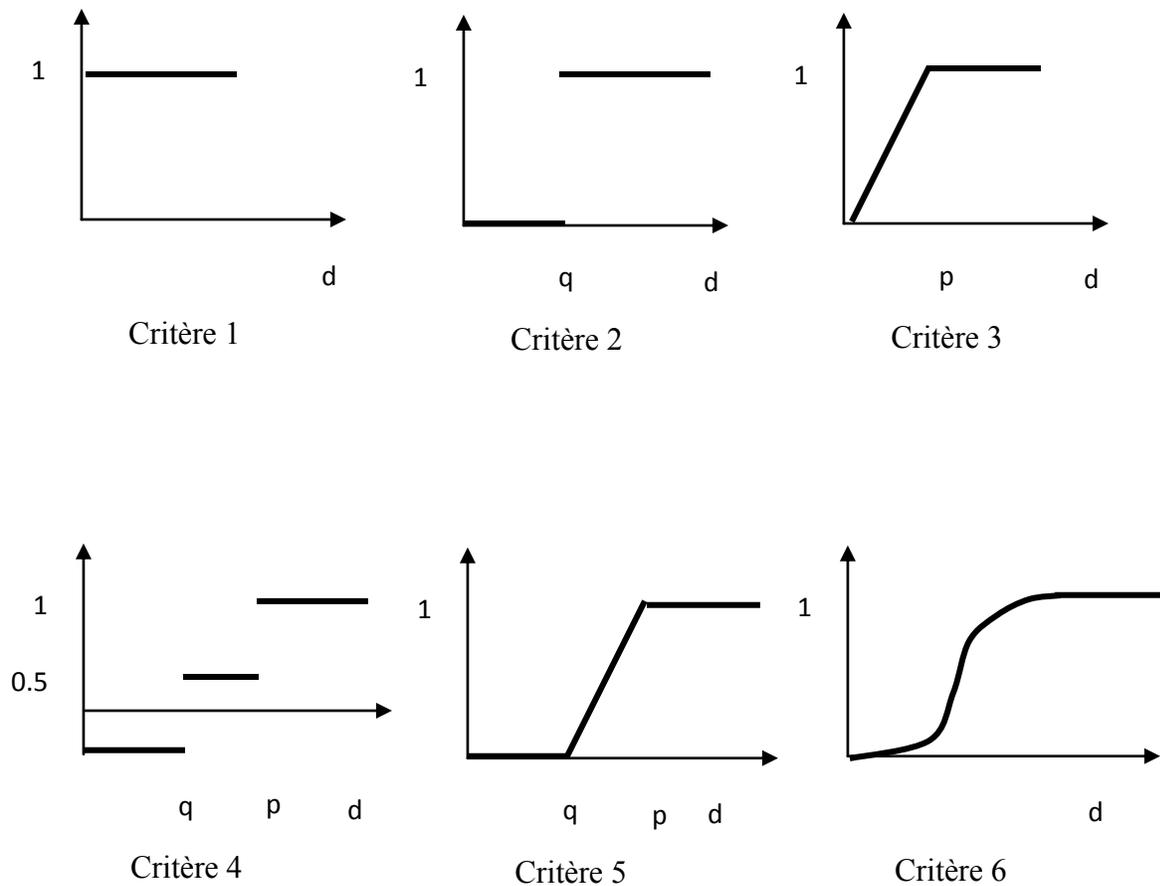


Figure 1- Les six types de critères

c) PROMÉTHÉE calcule ensuite un indicateur de préférence $\pi(a,b)$ comme la moyenne des intensités $P_c(a,b)$ éventuellement pondérées par l'importance w_c accordée au critère c par le décideur :

$$\pi(a,b) = \frac{\sum_c P_c(a,b) w_c}{\sum_c w_c}$$

Les indicateurs de préférence pour chaque couple sont calculés dans chaque sens ($\pi(a,b)$ et $\pi(b,a)$) et peuvent être représentés dans un graphe valué de surclassement. Ce graphe n'est pas exploité en tant que tel, mais au travers des flux sortants $\Phi^+(a)$ et entrants $\Phi(a)$ de chaque action a :

$$\Phi^+(a) = \sum_x \iota(a,x) \quad \text{et} \quad \Phi(a) = \sum_x \iota(x,a)$$

Les flux représentent donc l'intensité des avantages et des désavantages qu'une action a possède vis-à-vis de l'ensemble des autres actions candidates.

2.6.1 Prométhée I : rangement partiel

Les flux sortants et entrants permettent de ranger les actions de façon naturelle. Désignons par $(S^+; I^+)$ et $(S^-; I^-)$ les deux préordres induits par ces flux. On sait qu'une action est d'autant meilleure que son flux sortant est élevé, et que son flux entrant est faible.

Prométhée I construit un rangement partiel en prenant l'intersection des deux préordres (entrants et sortants).

$$\begin{cases} aP^{(1)}b \Leftrightarrow \begin{cases} aS^+b \text{ et } aS^-b \\ aS^+b \text{ et } aI^-b \\ aI^+b \text{ et } aS^-b \end{cases} \\ aI^{(1)}b \Leftrightarrow aI^+b \text{ et } aI^-b \\ aR^{(1)}b \text{ sinon} \end{cases}$$

où $(P^{(1)}; I^{(1)}; R^{(1)})$ désignent respectivement la préférence, l'indifférence et l'incomparabilité dans Prométhée I. Ainsi, avec ce rangement partiel, certaines actions restent incomparables.

2.6.2 Prométhée II : rangement total

Prométhée II construit un préordre total excluant l'incomparabilité et réduisant fortement l'indifférence. Il s'agit souvent d'un ordre total obtenu sur la base du flux net :

$$\Phi(a) = \Phi^+(a) - \Phi^-(a)$$

- $a P b$ ssi $\Phi(a) - \Phi(b) > 0$ et
- $a I b$ ssi $\Phi(a) = \Phi(b)$

où P et I désignent respectivement la préférence et l'indifférence au sens de Prométhée II.

2.7 Analyse de sensibilité et analyse de robustesse

2.7.1 Analyse de sensibilité

L'analyse de sensibilité est une notion indispensable dans l'utilisation efficace des modèles de décision quantitative, dont le but est d'évaluer la stabilité d'une solution optimale en vertu de changements dans les paramètres, l'impact du manque de maniabilité de certains paramètres, et la nécessité pour l'estimation précise des valeurs des paramètres.

Selon (INSUA, 1999), l'analyse de sensibilité vise à déterminer comment les résultats d'une analyse quantitative reposent sur les paramètres d'entrées. Plusieurs études ont décrit l'impact de l'analyse de sensibilité dans divers domaines; voir, par exemple, les études publiées par (Gál & Greenberg, 1997). Cependant, dans notre domaine, l'analyse de sensibilité est peut-être plus importante, car elle peut être le moyen d'expliquer au décideur les implications possibles des incohérences de ses jugements.

Ces idées sont bien illustrées par (Parnell, Jackson, C., Lehmkuhl, Jr., & A., 1999), qui présente une procédure simple d'analyse de sensibilité pour sélectionner une nouvelle technologie. Dans un contexte de grande incertitude, ils identifient un ensemble de scénarios pertinents et évaluent différentes alternatives avec une fonction additive de valeur pondérée.

Beaucoup d'autres recherches ont été réalisées sur l'analyse de sensibilité pour certains modèles de recherche opérationnelle et de sciences de gestion tels que la programmation linéaire, l'analyse des investissements et les modèles stochastiques. Par exemple, dans une approche d'analyse de sensibilité pour la programmation linéaire, (Wendell, 1992) a utilisé une approche de tolérance pour traiter les variations de plus d'un paramètre à la fois. Cet article montre comment développer cette région de la variabilité du rendement d'analyse de sensibilité ordinaire comme un cas particulier de l'approche de la tolérance. En outre, ce type d'analyse de sensibilité est considéré comme une étape de post-optimalité. Autrement dit, l'analyse est faite puis la décision optimale est déterminée. Cependant, la recherche sur l'analyse de sensibilité dans l'aide à la décision multicritères est limitée.

(Watson & Buede, 1987) illustre l'analyse de sensibilité dans une stratégie de modélisation de décision. (Evans, 1984) examine la sensibilité d'une décision optimale à l'évolution des probabilités des états de la nature et le développement « des domaines de confiance » pour borner les changements arbitraires des paramètres dans le vecteur de probabilité. (Abi-Zeid, Parent, &

Bobée, 2004) utilise l'analyse de sensibilité avec les modèles stochastiques afin de tenir compte de l'incertitude des paramètres et du modèle.

L'analyse de sensibilité peut être utilisée à de nombreuses fins. D'après (French, 2003) on peut l'utiliser pour:

- construire et explorer des modèles de conséquence;
- soutenir le déclenchement du jugement des entrées à l'analyse;
- développer des algorithmes efficaces de calcul;
- concevoir des expériences;
- guider la rédaction des conclusions, prévisions et décisions;
- explorer et établir un consensus;
- renforcer la compréhension.

La manière dont l'analyse de sensibilité est utilisée pour l'une de ces fins peut être inappropriée pour l'autre.

Dans la prise de décision, les pondérations attribuées à des critères de décision tentent de représenter l'importance réelle de ces critères. Lorsque les critères ne peuvent pas être exprimés en termes quantitatifs, il est difficile de représenter avec précision l'importance de ces critères. Le décideur peut prendre de meilleures décisions s'il peut déterminer l'importance de chaque critère. (Saltelli, Tarantola, & Chan, 1999) montrent l'apport de l'analyse de sensibilité dans le domaine de l'aide à la décision multicritère.

Dans le domaine d'aide à la décision multicritère, l'évaluation des données (le tableau de performance, les pondérations des critères, le type et les paramètres des fonctions de préférence) joue un rôle crucial. Les résultats obtenus par l'application d'une méthode multicritères d'aide à la décision sont fortement liés aux valeurs réelles attribuées à ces données (Woltersa & Mareschal, 1995).

Un problème crucial de l'aide à la décision multicritère est d'évaluer l'importance relative des différents critères. La plupart des méthodes exigent la définition de coefficients de pondération pour les critères et ces informations sont souvent difficiles à obtenir: parfois la définition du poids lui-même n'est pas très précise, pas plus que les valeurs données par un décideur. Ces paramètres

n'ont pas toujours une signification claire, mais ils influencent plus ou moins les résultats de l'analyse, en fonction de la méthode utilisée (Mareschal, 1988). Par contre, la vérification de la mesure dans laquelle la solution est dépendante et sensible à ces estimations aboutit presque toujours à une analyse de sensibilité brute. Les paramètres sont modifiés de façon plus ou moins arbitraire et les changements dans les résultats sont examinés. Cette procédure est souvent incomplète et insatisfaisante, et elle peut rapidement devenir fastidieuse et très coûteuse.

Dans ce travail, nous proposons une alternative à cette analyse de sensibilité fastidieuse et arbitraire. Nous définissons des intervalles de stabilité pour les paramètres des différents critères. Il s'agit des valeurs que le paramètre d'un critère peut prendre sans modifier les résultats donnés par la première série de paramètres, tous les autres paramètres étant maintenus constants.

Et pour cela, nous avons combiné deux travaux : ceux de (Vetschera, 1986) pour définir les intervalles de stabilités au sein desquels on fera varier les paramètres avec la méthode (Mena, 2001) que nous avons améliorée pour gagner en terme de mémoire et de temps de calcul. Ces méthodes seront présentées au chapitre 4.

En tout état de définition de l'analyse de sensibilité, le thème principal est la variation des variables d'entrée d'un modèle pour étudier leur effet sur les variables de sortie. Aucun analyste professionnel ne pourrait suivre la conduite de son travail sans avoir recours régulièrement à l'analyse de sensibilité. Mais il peut utiliser des terminologies différentes pour décrire les processus similaires: par exemple, l'analyse d'incertitude, l'analyse de la robustesse. En particulier, certains auteurs font une distinction entre l'analyse d'incertitude, par le fait que plusieurs entrées varient simultanément de façon corrélée, et l'analyse de sensibilité, lorsque les effets des variables d'entrée sont étudiés un à un. (French, 2003).

2.8 Analyse de robustesse

La question que posent fréquemment les décideurs par rapport à la méthode multicritère qu'ils utilisent est d'avoir une idée de la robustesse du résultat. C'est la raison pour laquelle l'étude de la sensibilité des méthodes multicritères fait partie des grands axes de recherche du domaine. Cette demande traduit la volonté de savoir dans quelle mesure une variation des données due par exemple à une erreur de mesure ou d'estimation, risque d'affecter le résultat donné par la méthode.

On trouve beaucoup de divergence dans la littérature concernant la définition de l'analyse de robustesse. Certains s'interrogent sur ce qui doit être robuste (Roy, 2002). D'autres pensent qu'il n'y a pas de définition unique de robustesse vu la diversité des situations (Vincke, 2003). Ce dernier propose un classement des types de problèmes de décision et des types d'incertitude avant de proposer différents types de robustesse qui pourraient être opérationnels.

Il arrive souvent dans l'aide à la décision que les valeurs des données utilisées dans les modèles et paramètres utilisés dans les méthodes sont mal déterminées. Plusieurs scénarios sont possibles pour les données et plusieurs valeurs sont plausibles pour les paramètres des méthodes. Le rôle du scientifique dans de telles situations est de fournir des informations sur la validité des solutions proposées pour différents ensembles de valeurs acceptables pour le modèle et la méthode. Les recherches menées par (Vincke, 1999) présentent un cadre théorique permettant de traiter ces questions.

Dans la formulation du problème, la famille de critères est construite de telle manière que l'avis du décideur est aussi bien représenté que possible, tandis que l'ensemble des versions est souvent au moins partiellement imposé par les conditions extérieures. En outre, le nombre de versions peut être infini (si les valeurs des paramètres sont définies par des intervalles) et les concepts de l'importance relative ou l'indépendance préférentiels ne sont pas faciles à transposer.

L'analyse de robustesse est une réponse populaire face aux difficultés à établir la valeur des paramètres des modèles d'aide à la décision, soit pour des décisions individuelles, soit pour des décisions de groupe.

(Dias, 2007) présente une discussion de trois rôles possibles de l'analyse de robustesse dans un processus décisionnel. En considérant les difficultés pour fixer la valeur des paramètres concernant les préférences dans les procédures, il examine les avantages potentiels du recours à l'analyse de robustesse pendant toute la durée du processus décisionnel en tant qu'outil pour guider le processus.

L'analyse de robustesse est souvent considérée comme un point de vue inverse de l'analyse de sensibilité, mais cela dépendra de la notion de l'analyse de robustesse qui est à l'étude. Pour plus de références et une classification des travaux de recherche sur la notion de robustesse, voir (Roy, 2007). La définition de conclusion robuste comme une affirmation qui est valable pour

l'ensemble des résultats compatibles avec les versions du modèle des différentes actions envisagées.

Le rôle de l'analyse de robustesse en aide à la décision ne semble pas avoir été beaucoup discuté jusqu'ici. On peut dire que le premier exemple de ce type d'approche se trouve dans (Roy & Bouyssou, 1993). Une telle approche peut être utile pour s'interroger sur la validité de la recommandation et la manière dont l'évaluation pourrait changer de version en version. De plus, elle permet d'identifier ses limites et d'enrichir les informations qui peuvent être fournies au décideur. Par exemple, plutôt que de dire que x est la meilleure alternative à un problème de choix, on peut informer le décideur que toutes les alternatives sont déclassées par x ou y, en expliquant quelles sont les principales différences entre les versions qui favorisent x et celles favorisant y, et en ajoutant que y est toujours un choix relativement bon, bien qu'il y ait des versions où x reçoit une mauvaise évaluation. Une autre possibilité est basée sur l'idée d'utiliser l'analyse de robustesse comme un outil pour guider le processus d'aide à la décision, c'est à dire, identifier quelles conclusions sont robustes pour une série de versions du modèle, tout au long du processus de décision.

Pour que la méthode soit dite robuste, il convient donc que cette variabilité ne soit pas trop importante, autrement dit que les résultats ne soient pas trop différents comme ce peut être le cas avec des procédures d'optimisation qui autorisent la présence de solutions très contrastées dans un proche voisinage de l'optimum (Roy, 2002).

2.9 Entre analyse de robustesse et analyse de sensibilité

Le processus d'aide à la décision ne s'arrête pas lorsqu'on a une réponse. Un bon processus d'aide à la décision doit, généralement, étudier la sensibilité des paramètres qui nous ont menés à cette réponse et la robustesse de la réponse en elle-même. À première vue, on peut se demander quelle est la différence entre les deux?

- L'analyse de sensibilité répond aux questions, que le décideur peut se poser, du genre: jusqu'à quel prix je peux payer tout en gardant cette même décision? Jusqu'à combien de

jours dans les délais de livraison puis-je négliger en gardant toujours le même fournisseur³? (prix et délais de livraison sont parmi les paramètres du problème de décision).

- L'analyse de robustesse répond aux questions du genre : est-ce que ce fournisseur est vraiment le meilleur? La réponse à une telle question, résultat d'une analyse de robustesse, peut être : ce fournisseur1 est la meilleure alternative, mais il y a aussi un deuxième choix (fournisseur2) qui surclasse aussi tous les autres fournisseurs. On peut répondre en expliquant quelles sont les principales différences entre les versions qui favorisent le fournisseur1 et celles favorisant le fournisseur2, et en ajoutant que le fournisseur2 est toujours un choix relativement bon.

2.10 Conclusion

La tâche du professionnel d'aide à la décision n'est pas si simple qu'elle ne le semble. Tout au long de ce chapitre, nous avons montré en détail le cheminement à suivre pour aboutir à une décision qu'on peut appeler robuste. Tout d'abord, le professionnel d'aide à la décision doit définir la problématique et aider le décideur à construire le problème. Ensuite, il doit choisir la méthode d'aide à la décision adéquate qu'il adoptera (selon le problème) et aider le décideur à donner des valeurs à ses paramètres (poids, préférence, indifférence...). Après avoir obtenu un classement à l'aide de cette dernière, une analyse de sensibilité s'impose pour s'assurer que les valeurs choisies des paramètres de la méthode ne sont pas très sensibles à la variation. Finalement, on doit s'assurer de la stabilité et de la robustesse de la solution trouvée en suivant une analyse de robustesse.

Dans le prochain chapitre, nous présentons l'application (MCDM) que nous avons réalisée pour mettre en œuvre notre méthode d'analyse de sensibilité et pour mener des expérimentations.

³ Fournisseur est choisie juste à titre d'exemple. Donc notre problème de décision ici est le choix d'un fournisseur.

Chapitre 3 - Banc d'essai MCDM

3.1 Introduction

Le logiciel MCDM (Multi Criteria Decision Making) est un logiciel qui permet l'automatisation du calcul des méthodes d'aide à la décision multicritère. Il a été développé en JAVA sous un environnement Éclipse par les chercheurs Irène Abi-Zeid et Luc Lamontagne (conjointement avec Oscar Nilo) du laboratoire CERMID.

La motivation initiale pour de notre projet de recherche était d'augmenter les méthodes d'analyse de sensibilité présentes dans le logiciel MCDM. Au début du projet, ce logiciel ne permettait que le calcul de la méthode Électre II définie dans le chapitre 2 et une analyse de sensibilité exhaustive pour cette dernière. Étant donné que l'objectif central de notre recherche est d'étudier l'analyse de sensibilité pour plusieurs méthodes de décision, dont la méthode Électre II, nous avons procédé à l'implémentation de 3 nouvelles méthodes qui sont Électre III, Prométhée I et Prométhée II décrites dans le chapitre 2.

Dans les prochaines sections, nous décrivons le tableau de performance, les méthodes d'aide à la décision multicritère et l'analyse de sensibilité avant de présenter le fonctionnement du logiciel MCDM et la démarche à suivre pour pouvoir l'exploiter convenablement.

3.2 Fonctionnement du logiciel

Le logiciel prend en entrée un tableau multicritères et les paramètres de préférence (poids, préférence, indifférence, veto) de la méthode de décision utilisée.

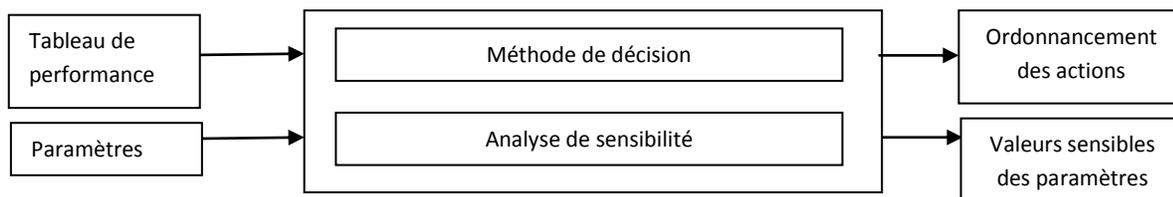


Figure 2 - Fonctionnement du logiciel MCDM

3.2.1 Tableau de performance

Dans un problème multicritère, les données sont les valeurs des actions par rapport aux critères. Ces valeurs constituent le tableau de performance dont la structure est présentée au Tableau 3.

Tableau 3 - Structure du tableau de performance

Critères actions	→	Critère 1	Critère 2	...	Critère M
A1	↓	val ₁₁	val ₁₂		val _{1m}
A2		val ₂₁	val ₂₂		val _{2m}
...			...		
An		val _{n1}	val _{n1}		val _{nm}

Un tableau de performance comporte les éléments suivants :

- Les actions (A_i): les actions qui sont considérées et que nous voulons classer
- Les critères (critère j) : les critères utilisés pour évaluer et classer les actions.
- Les évaluations (val_{ij}): la valeur de l'action i pour le critère j.
- Les poids : la pondération de chaque critère (son importance).

Les valeurs incluses dans ce tableau correspondent aux valeurs concrètes du problème. Ces valeurs sont variées et représentent des configurations quantitatives telles que le prix, la surface, les frais, etc.

3.2.2 Méthodes d'aide à la décision multicritère

La méthode qui était présente à l'origine dans le logiciel MCDM est la méthode Électre II. Pour le calcul de cette méthode, un tableau de performance est saisi par l'utilisateur dans un fichier texte qui sera par la suite chargé à partir du logiciel. Cette méthode évalue successivement les matrices de concordance, de discordance, de surclassement et elle génère le rangement final.

Nous avons ajouté en plus d'Électre II les méthodes Électre III, Prométhée I et Prométhée II. La méthode Électre III partage plusieurs classes de la méthode Électre II telles que le calcul de concordance et le calcul de discordance. Pour incorporer Électre III au logiciel MCDM, nous avons ajouté le calcul de degré de crédibilité, une notion de floue introduite avec Electre III. Nous avons également modifié les classes qui nous permettent de calculer le rangement final.

3.2.3 Analyse de sensibilité

Nous avons ajouté deux méthodes d'analyse de sensibilité pour Électre III. Les méthodes que nous avons implémentées ont été mises on œuvre afin de valider l'approche de ben Mena (Ben Mena, 2001) et de proposer des ajustements pour l'analyse de sensibilité d'Électre II et Électre III.

Tel que décrit au chapitre 2, l'analyse de sensibilité consiste à faire varier les paramètres de la méthode (poids, préférences, indifférence et veto) pour déterminer les valeurs de ces paramètres pour lesquelles les résultats de la méthode Électre III restent valides. Il est important de noter que les valeurs initiales des paramètres sont déterminées par le décideur et passées en paramètres au logiciel.

Le fonctionnement du logiciel relatif aux méthodes d'aide à la décision multicritère et leurs analyses de sensibilité sera décrit dans la section suivante.

3.2.4 Les entrées du logiciel

On appelle entrée du logiciel toutes les valeurs que l'utilisateur doit fournir relatives au tableau de performance et aux paramètres du problème. Des exemples d'entrées sont les évaluations, les

pois, les préférences, le seuil d'indifférence et le seuil de veto. Toutes ces valeurs et ces paramètres sont entrés dans deux fichiers textes différents.

Le logiciel utilise ces fichiers pour importer les données nécessaires au fonctionnement de la méthode choisie. Le nom du fichier est choisi par l'utilisateur et doit avoir l'extension correspondante aux fichiers d'entrée.

3.2.5 Les résultats

Après avoir effectué tous les calculs nécessaires, deux fichiers contenant les résultats obtenus seront générés :

- Les résultats de surclassement : Un fichier, ayant pour nom '*x_single.log*' où *x* est le nom du fichier d'entrées, contient les éléments suivants : le nom de la méthode utilisée, une copie du tableau multicritères, les matrices de concordance et de discordance, et le résultat de surclassement.
- Les résultats d'analyse de sensibilité : un fichier appelé '*x_sensitivity.log*'. présente les résultats d'analyse sous la forme d'un tableau qui contient *n* lignes et $2m$ colonnes⁴ avec *n* étant le nombre de critères du problème et *m* le nombre de paramètres de la méthode. Pour chaque critère, on aura la valeur minimum et la valeur maximum de chaque paramètre.

3.3 Démarche

3.3.1 Identification des paramètres

Pour commencer, il est nécessaire d'indiquer au logiciel MCDM le fichier contenant les paramètres. En fonction du choix de la méthode, le logiciel utilisera, de ce fichier, seulement les paramètres dont il a besoin pour exécuter cette méthode. On trouve également la description du tableau de performance (qui est contenu dans un autre fichier).

⁴ Le nombre de colonnes est deux fois le nombre des paramètres puisqu'on aura une valeur du minimum et une valeur du maximum de chaque paramètre.

3.3.2 Chargement du tableau de performance

Les données du tableau de performance sont entrées dans un fichier. En effet, ce dernier contient le nom, l'identificateur de chaque action et de chaque critère et les valeurs qui seront chargées par le logiciel.

Une fois le fichier contenant les paramètres chargés, le logiciel repère le nom du fichier du tableau des performances et procède à son chargement, puis il affiche son contenu.

3.3.3 Interaction avec l'interface graphique

Une fois l'application lancée, la première étape consiste à importer tout ce qu'on a déclaré précédemment (tableau de performance et paramètres) à l'aide du menu File>open de l'interface. À l'aide de la méthode choisie, dans le menu 'Decide', le logiciel reconnaitra les paramètres à utiliser dans le fichier précédemment sélectionné.

On aura alors le tableau de performance contenant les actions dans ses lignes et les critères dans ses colonnes. La valeur de l'évaluation est affichée à l'intersection des lignes et colonnes. Les détails de chaque case sont listés dans une zone conçue à cette fin directement au dessous du tableau de performance (voir Figure 3).

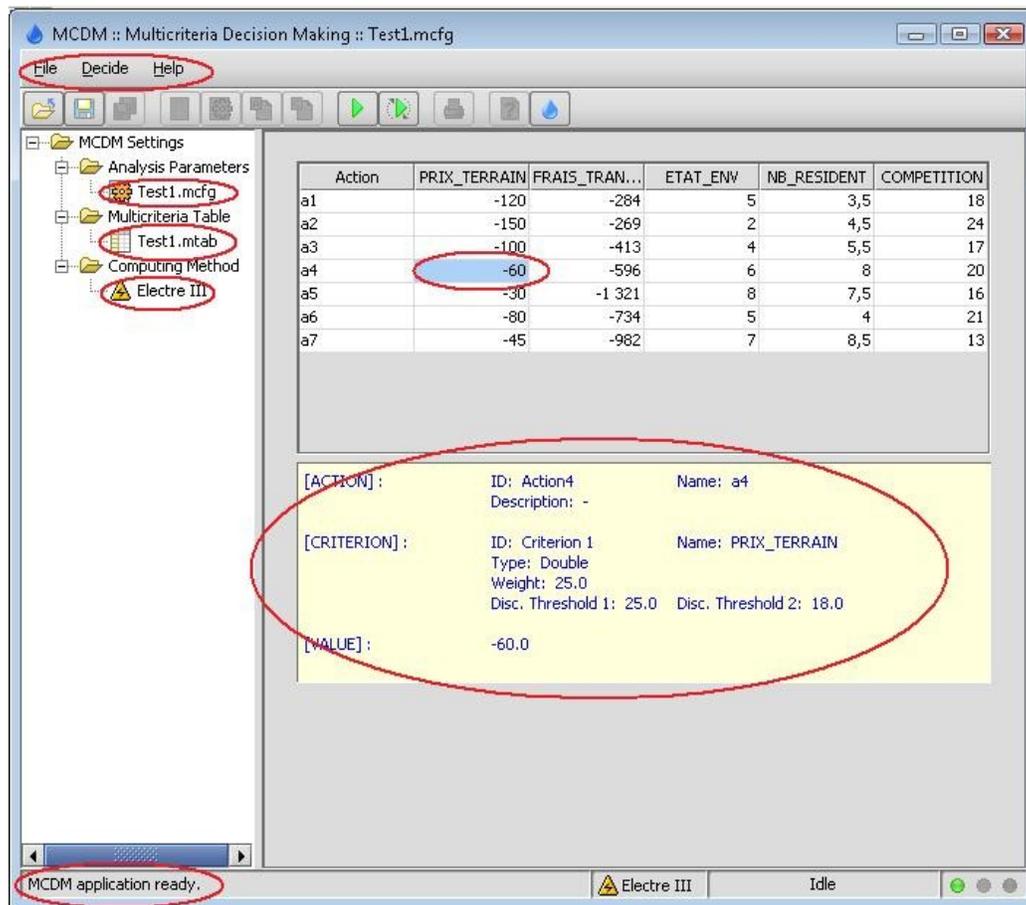


Figure 3 - Interface du logiciel MCDM après chargement des données

L'utilisateur peut maintenant démarrer le calcul de la méthode de décision. Le résultat est enregistré dans un fichier. On trouve aussi dans ce fichier tous les détails de l'exécution (voir Annexe A). Les préordres en question seront la toile de fond de l'analyse de sensibilité.

3.3.4 Analyse de sensibilité

Pour cette partie, un algorithme exhaustif était déjà présent dans le logiciel. Cet algorithme parcourt toutes les valeurs possibles jusqu'à ce que le préordre change. Une fois que le préordre change, il nous indique la dernière valeur pour laquelle il a fait l'analyse. L'inconvénient de cet algorithme est le temps de calcul qui est le plus long qu'il peut l'être. Nous avons ajouté des méthodes d'analyse de sensibilité dont nous avons besoin pour nos expérimentations avec Électre II et Électre III.

Après avoir exécuté la méthode d'aide à la décision multicritère, l'analyse de sensibilité consiste à donner les valeurs maximum et minimum des paramètres utilisés. Une variation de ces paramètres est faite pour déterminer dans quel intervalle de valeurs de paramètres le classement reste toujours le même.

Nous avons ajusté la méthode d'analyse de sensibilité de Ben Mena et nous l'avons implémenté pour la méthode Électre II. Nous avons implémenté également cette méthode d'analyse de sensibilité pour Électre III. Nous avons intégré la nouvelle méthode dans MCDM pour déterminer empiriquement si elle représente une amélioration de la méthode de Ben Mena. Ceci est présenté en détail au chapitre 4.

Le tableau des résultats obtenu par l'exécution de l'analyse de sensibilité est présenté dans la forme illustrée au Tableau 4.

[Pmin, Pmax] : les valeurs du poids qui n'influence pas le résultat du rangement obtenu.

[Qmin, Qmax] : les valeurs d'indifférence pour lesquelles le résultat reste le même.

[Pmin, Pmax] : les valeurs du paramètre préférence qui n'ont pas d'impact sur le rangement.

[Vmin, Vmax] : le rangement obtenu n'est pas sensible à ces valeurs du paramètre de Veto.

Tableau 4 - Résultats de l'analyse de sensibilité

Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	22,437	8,337	13,843	22,263	37,729	43,311	75,449	104,999
2	39,331	48,93	0,859	91,799	330,752	371,729	713,77	344,467
3	5,381	11,763	0,753	1,901	2,057	5	3	50
4	7,605	19,969	0,197	0,68	1,429	4,498	3,5	4,849
5	7,445	15,967	0	2,685	1,004	6,975	6,099	500

3.4 Langage et environnement

MCDM est programmé en langage JAVA. Ce langage a été choisi pour les avantages qu'il présente par rapport aux autres langages candidats. De ces avantages, on peut mentionner la portabilité, la fiabilité et l'orientation objet. L'environnement qui a été utilisé pour la

programmation du logiciel est Éclipse qui présente plusieurs avantages dont la gratuité (*open source*) et la disponible sur n'importe qu'elle plateforme. L'interface usager est programmée en Swing qui est une bibliothèque graphique qui fait partie du *package* de distribution du langage JAVA.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté notre banc d'essai MCDM. Nous avons repris ce logiciel, rajouté des nouvelles méthodes, modifier et utiliser des méthodes déjà existantes. Nous avons utilisé MCDM pour les expérimentations des approches théoriques proposées dans le chapitre 4 de ce mémoire.

Dans le prochain chapitre, nous allons détailler les approches étudiées. La première approche est celle de (Ben Mena, 2001). Nous avons apporté des modifications à cette méthode afin de l'améliorer. La deuxième méthode est celle de (Vetschera, 1986) qui était à l'origine une méthode utilisée avec Electre I. Mais nous allons adapter cette méthode pour l'appliquer sur la méthode Electre II.

Chapitre 4 - Analyse de sensibilité

4.1 Introduction

Après avoir retrouvé les résultats et les préordres finaux avec la méthode Électre III, vient le tour de l'analyse de sensibilité. Le rôle de l'analyse de sensibilité est de faire varier les paramètres un à la fois pour voir à quel niveau les résultats obtenus sont sensibles.

Rappelons que les paramètres dont il s'agit ne sont pas les valeurs du tableau multicritères, c.-à-d. les évaluations d'une action pour un critère. L'analyse de sensibilité porte plutôt sur les paramètres de la méthode de décision tels que les seuils de préférence et d'indifférence, la valeur

de veto et les poids des critères. Ces paramètres sont déterminés par le décideur. L'analyse de sensibilité vise à déterminer dans quelle mesure ces valeurs sont critiques et permettent d'aboutir à une solution robuste.

Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la méthode d'analyse de sensibilité d'Électre III proposée par Ben Mena (Ben Mena, 2001). Nous identifierons ses points forts et ses points faibles.

Nous commencerons par décrire le fonctionnement de cette méthode, les résultats obtenus suite aux expérimentations et le temps d'exécution. Sachant que la meilleure méthode d'analyse de sensibilité est celle qui donne des résultats précis, nous proposerons des modifications au fonctionnement de la méthode de (Ben Mena, 2001) afin d'améliorer les résultats.

Nous décrirons chaque changement appliqué à la méthode de (Ben Mena, 2001) et les raisons de ce changement. Par la suite, nous présenterons une analyse comparative des deux méthodes ainsi que les résultats obtenus de leur mise en œuvre.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la délimitation du champ de recherche des valeurs minimum et maximum de chaque paramètre de la méthode de Ben Mena par l'application de la méthode de (Vetschera, 1986) qui suggère des valeurs extrêmes différentes de celles fixées arbitrairement par (Ben Mena, 2001).

4.2 La méthode de Ben Mena

4.2.1 Fonctionnement

L'analyse de sensibilité en général consiste à faire varier, un à la fois, les paramètres (indifférence, préférence, veto, poids) pour trouver un intervalle dans lequel chaque paramètre peut varier sans affecter le préordre d'actions fourni par une méthode d'agrégation. Ainsi, une analyse de sensibilité permet de déterminer les valeurs minimum et maximum pour chaque paramètre. Cette opération est effectuée pour tous les paramètres de la méthode d'agrégation. Dans ce chapitre, nous considérons la méthode de décision Electre III pour ranger les actions.

4.2.2 Module de recherche des valeurs minimum et maximum des paramètres

Ben Mena propose une méthode d'analyse de sensibilité pour Électre III. Cette méthode permet à l'utilisateur de retrouver les intervalles dans lesquels si on réapplique Électre III on aura le même rangement initial. Le principe de base du module qui permet de trouver les valeurs minimums et

maximums (l'intervalle) est simple : pour trouver le maximum, il augmente la valeur du paramètre étudié jusqu'à avoir un changement dans le préordre obtenu par Électre III. Dans le cas de la recherche du minimum, c'est le même principe, mais il diminue la valeur du paramètre au lieu de l'augmenter.

Ce module doit être exécuté pour chaque paramètre. Le but de ce module est de trouver les valeurs minimales et maximales pour lesquelles les préordres changent, d'où apparaît le terme « analyse de sensibilité ».

Il peut y avoir des cas où cette valeur (maximale ou minimale) n'existe pas, c'est-à-dire que le préordre est insensible à l'augmentation ou à la baisse de ce paramètre. Pour cette raison on fixe une valeur qu'on appelle P_{extr} (voir section 4.2.4) qui sert de limite. L'idée est d'augmenter, si on cherche le maximum, la valeur du paramètre étudié jusqu'à ce que le préordre change ou bien on atteint P_{extr} . Même principe si on cherche le minimum, mais on diminue la valeur du paramètre au lieu de l'augmenter.

4.2.3 Algorithme d'analyse de sensibilité

L'algorithme, illustré à la Figure 4 décrit la manière avec laquelle l'analyse de sensibilité est menée.

Fonction ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA($T, Param, P_{extr}$) **retourne** une valeur réelle

Entrées:

T : un tableau de décision multicritères

$Param$: le paramètre étudié.

P_{extr} : une valeur extrême que le paramètre ne doit pas dépasser.

Variables locales

p : la valeur du paramètre étudié

$incr$: une variable d'incrément, initialisée à une valeur arbitraire.

ε : la valeur minimale d'incrément, initialisée à $Param/1000$.

$ordre_init$: le préordre initial établi par la méthode de décision.

$ordre_init \leftarrow$ Decision-ElectreIII(T)

```


$p \leftarrow \text{Param} + \text{incr}$



Tant que  $p < P_{extr}$  et  $\text{incr} > \varepsilon$  faire



    mettre  $Param$  à jour avec la nouvelle valeur  $p$  dans le tableau  $T$



Si  $\text{ordre\_init}$  différent de DECISION-ELECTREIII( $T$ ) alors



$\text{incr} \leftarrow \text{incr}/2$ ;



$p \leftarrow p - \text{incr}$ ;



    Sinon



$\text{incr} \leftarrow \text{incr}/2$ ;



$p \leftarrow p + \text{incr}$ ;



Si ( $P \geq P_{extr}$ ) alors



$p \leftarrow P_{extr}$



retourne  $p$


```

Figure 4 - Algorithme d'analyse de sensibilité de Ben Mena.

(Ben Mena, 2001) propose aussi la recherche de la valeur minimale qui se déroule de façon très similaire à ce qui vient d'être exposé. Voici les différences qui s'imposent néanmoins :

- On commence par soustraire la variable d'incrémentatation de la valeur initiale du paramètre ;
- s'il existe la moindre différence entre les préordres initiaux et les préordres obtenus suite à l'analyse de sensibilité, la variable d'incrémentatation, divisée par deux, est ajoutée à la dernière valeur prise par le paramètre étudié ;
- s'il n'existe pas la moindre différence entre les préordres, la variable d'incrémentatation, divisée par deux, est soustraite de la dernière valeur du paramètre ;
- une fois le résultat obtenu on passe à la recherche de la valeur maximale critique du paramètre suivant.

4.2.4 Valeurs extrêmes des paramètres

Pour que le calcul des valeurs extrêmes des paramètres soit exécuté dans des temps raisonnables, la fonction de sensibilité délimite le domaine de variation de chaque paramètre par des valeurs extrêmes P_{extr} , c'est-à-dire les valeurs que le paramètre P ne doit en aucun cas dépasser.

Ben Mena propose d'adopter les valeurs extrêmes suivantes :

- Poids: zéro et dix fois le poids initial.
- Seuils d'indifférence : zéro et la valeur du seuil de préférence.
- Seuils de préférence : le seuil d'indifférence et le seuil de veto.
- Seuils de veto : le seuil de préférence et dix fois sa valeur initiale.

4.2.5 Expérimentation

La fonction ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA a été implantée dans l'environnement MCDM et validée avec l'algorithme Electre III. Nous illustrons dans le

Tableau 5 un exemple du tableau de préférences et les valeurs des paramètres qui seront utilisés pour valider les calculs.

Tableau 5 - Tableau de préférences (Maystre, Pictet, & Simos, 1994)

Critères ↓ actions	Critère 1	Critère 2	Critère 3	Critère 4	Critère 5
A1	-120	-284	5	3,5	18

A2	-150	-269	2	4,5	24
A3	-100	-413	4	5,5	17
A4	-60	-596	6	8,0	20
A5	-30	-1321	8	7,5	16
A6	-80	-734	5	4,0	21
A7	-45	-982	7	8,5	13
Poids (Pd)	25	45	10	12	8
Indifférence (Q)	15	80	1	0,5	1
Préférence (P)	40	350	3	3,5	5
Veto (V)	100	850	5	4,5	8

Les valeurs extrêmes pour les paramètres de la méthode sont représentées dans le Tableau 6. Le lecteur pourrait se référer à la section 4.2.4 ci-dessus pour connaître l'origine de ces valeurs.

Tableau 6 - Valeurs extrêmes des paramètres en utilisant la méthode de Ben Mena

paramètres Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
Critère 1	0	250	0	40	15	100	40	1000
Critère 2	0	450	0	350	80	850	350	8500
Critère 3	0	100	0	3	1	5	3	50
Critère 4	0	120	0	3,5	0,5	4,5	3,5	45
Critère 5	0	80	0	5	1	8	5	8

Après l'exécution d'Électre III avec le logiciel MCDM pour ce problème, deux préordres sont générés : un premier avec la technique de distillation descendante (Tableau 7) et un second avec la technique de distillation ascendante (

Tableau 8).

Tableau 7 - Préordre suite à la distillation descendante

Classe	Actions
1	a4
2	a3, a7
3	a1, a2, a5, a6

Tableau 8 - Préordre suite à la distillation ascendante

Classe	Actions
1	a6
2	a5
3	a7
4	a3
5	a1, a2
6	a4

4.2.6 Discussion sur les résultats obtenus par l'analyse de sensibilité

Pour que les résultats d'une analyse de sensibilité soient exacts, il faut que le préordre ne soit pas sensible aux valeurs qui appartiennent à l'intervalle obtenu. Plus explicitement, si on change la valeur de n'importe quel paramètre par une valeur qui appartient à un des intervalles obtenus le préordre obtenu suite à ce changement doit être identique au préordre initial. De plus, il faut que le préordre soit sensible à toutes les valeurs qui n'appartiennent pas à ces intervalles. Ce qui n'est pas toujours le cas avec la méthode de Ben Mena.

Pour discuter les résultats obtenus par l'analyse de sensibilité avec la méthode de Ben Mena (voir Tableau 9 ci-dessous) nous nous sommes concentré sur les valeurs proches des valeurs des min et max obtenus. Nous avons choisi une valeur (proche) supérieure et une autre inférieure à chaque valeur obtenue et nous avons essayé la méthode Électre III suite à chaque choix. Les résultats que nous avons obtenus montrent que la méthode de Ben Mena n'est pas précise. Les préordres ne devraient pas changer tant qu'on est à l'intérieur de l'intervalle [min, max]. Ce qui n'est pas toujours le cas avec la méthode de Ben Mena. Nous avons remarqué que les intervalles obtenus par la méthode de Ben Mena ne suivent pas les règles citées ci-dessus.

4.2.7 Discussion sur le temps d'exécution

Pour le problème à cinq critères et sept actions décrit dans le

Tableau 5 précédent, et en utilisant la méthode Électre III, la moyenne du temps d'exécution pour cette méthode d'analyse de sensibilité est de 25 secondes. Durant ce temps d'exécution, la méthode ÉLECTRE III a été exécutée en moyenne 623 fois. Ces valeurs ont été estimées sur la base de dix résolutions du même problème avec le logiciel MCDM dans les mêmes conditions.

4.2.8 Améliorations possibles de cet algorithme

La méthode de Ben Mena nous permet de délimiter les intervalles à l'intérieur desquels les valeurs des paramètres ne causent pas de changement dans le préordre.

Tel qu'identifié dans nos expérimentations, une limitation de cette méthode réside au niveau de la précision des bornes des intervalles qu'elle génère.

Dans le but d'améliorer la performance de la méthode de Ben Mena, on va agir tout d'abord sur les parties suivantes de l'algorithme :

- Le module de recherche : les modifications apportées à ce module touchent principalement la détermination du pas pour effectuer la recherche, ainsi que son utilisation en gardant le même pas s'il n'y a pas changement de préordre. Ceci est dans le but de diminuer le temps d'exécution et de limiter le nombre d'appels à ÉLECTRE III.
- Le choix de la précision : les changements effectués à ce niveau permettent à l'utilisateur de fixer la précision qu'il veut atteindre.

4.3 Version améliorée de la méthode ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA

Tel que précisé dans la section précédente, les améliorations apportées sur la méthode Analyse-Sensibilité-benMena consistent à donner la liberté à l'utilisateur de fixer le niveau de précision qu'il veut atteindre et offrir la possibilité de diminuer le temps d'exécution de l'algorithme d'analyse de sensibilité.

4.3.1 Fonctionnement

Le fonctionnement de cette version est basé sur l'amélioration en termes d'exactitude des résultats, du temps de calcul et de gain de la mémoire. Ce faisant, nous avons gardé les valeurs extrêmes que peuvent atteindre les minimums et les maximums de l'intervalle dans lequel la

variation des valeurs du paramètre n'affectera pas le classement final tout en changeant la méthode de recherche.

4.3.2 Méthode de recherche

Pour définir la méthode de recherche des valeurs minimum et maximum des paramètres à utiliser, deux éléments doivent être déterminés.

Le premier concerne le pas avec lequel la recherche sera initialement exécutée (*incr*). Ce dernier, proportionnel à la valeur du paramètre à étudier, est déterminé en fonction du nombre de chiffres de la partie entière de celui-ci nommé A. Nous proposons que la valeur initiale attribuée au pas soit égale à $10^{(A-1)}$. Si nous prenons comme exemple un paramètre dont la valeur est égale à 3621.75, alors le nombre de chiffres de sa partie entière sera égal à 4 et la valeur du pas sera donc égale à 10^3 .

Nous commençons l'exécution de notre algorithme en utilisant le pas trouvé précédemment. Ce pas reste toujours le même tant que les préordres ne sont pas changés.

Si, après la comparaison des nouveaux préordres et les préordres initiaux, il n'y a aucune différence, on rajoute encore la même valeur, jusqu'à ce qu'on trouve une différence. On soustrait donc la valeur *incr* qu'on ajoutait divisé par dix. Prenant l'exemple d'un pas égal à 100, s'il n'y a aucune différence dans les préordres, alors on ajoute le même pas, sinon on soustrait un nouveau pas égal à 10. On continue donc à soustraire cette valeur jusqu'à ce que le préordre change de nouveau et on rajoute le 1/10 de cette valeur. On poursuit, ainsi de suite jusqu'à atteindre la précision fixée par l'utilisateur dans le fichier de configuration.

Pour retrouver la valeur minimale d'un paramètre, on applique exactement le même algorithme, sauf qu'on effectue une soustraction au lieu de l'addition.

4.3.3 Schéma de l'algorithme

Les variables utilisées dans l'algorithme sont :

- P: le paramètre étudié.
- Ps: le paramètre utilisé.
- Pas : le pas trouvé par la version améliorée de la méthode de Ben Mena.

- **Incr**: la variable d'incrémentation.
- **Prec** : le nombre de chiffres après la virgule (à préciser par l'utilisateur).
- **Pextr**: la valeur extrême que le paramètre P ne peut dépasser.
- **Pmax**: la valeur maximale que le paramètre P peut atteindre sans qu'une variation apparaisse dans le préordre établi par Électre III.

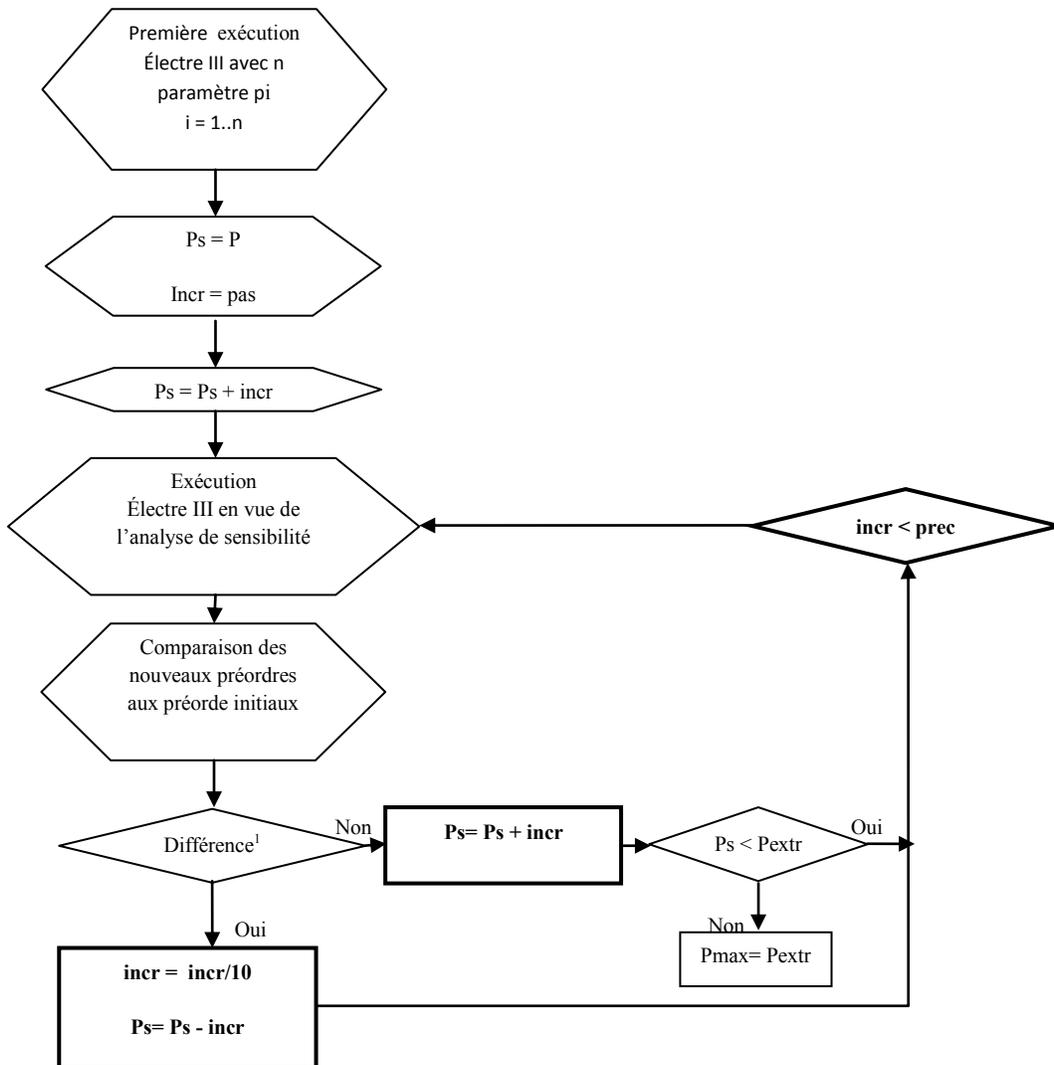


Figure 5 - Schéma de l'algorithme de la version améliorée de la méthode ANALYSE-SENSIBILITE-BENMENA

⁵ MCDM parcourt le rangement un niveau à la fois et compare les actions de chaque niveau. Si toutes les actions sont les mêmes pour tous les niveaux, alors il n'y a pas de différence entre les préordres.

Avant de présenter l'algorithme de la version améliorée de la méthode ANALYSE-SENSIBILITE-BENMENA (Figure 6), nous précisons que les modifications apportées touchent aux éléments mis en gras dans la Figure 5. Il s'agit de la variable de précision fixée par l'utilisateur et du module de recherche.

Fonction ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA-AMÉLIORÉ($T, Param, Pextr$) **retourne** une valeur réelle

Entrées:

- T : un tableau de décision multicritère
- $Param$: le paramètre étudié.
- $Pextr$: une valeur extrême que le paramètre ne doit pas dépasser.

Variables locales

- p : la valeur du paramètre étudié
- $incr$: une variable d'incrémentatation initialisée au pas.
- ε : la valeur minimale d'incrémentatation (précision) initialisée par l'utilisateur.
- $ordre_init$: le préordre initial établi par la méthode de décision.

$ordre_init \leftarrow$ Decision-ElectreIII(T)

$p \leftarrow$ Param(T) + $incr$

Tant que $p < Pextr$ **et** $incr > \varepsilon$ **faire**

- mettre $Param$ à jour avec la nouvelle valeur p dans le tableau T
- Si** $ordre_init$ différent de DECISION-ELECTREIII(T) **alors**
 - $incr \leftarrow incr/10$;
 - $p \leftarrow p - incr$;
- Sinon
 - $p \leftarrow p + incr$;

Si ($p \geq Pextr$) **alors**

- $p \leftarrow Pextr$

Retourne p

Figure 6 - Version améliorée de l'algorithme de la méthode d'ANALYSE-SENSIBILITÉ-BENMENA

4.3.4 Expérimentation

En comparant les deux méthodes, nous observons que les résultats de la méthode améliorée sont plus précis que ceux de la méthode de Ben Mena. La nouvelle méthode génère des intervalles qui ne contiennent que les valeurs qui gardent le même rangement initial. L'expérimentation que nous avons menée consiste à choisir une valeur intermédiaire, entre la valeur retournée par la méthode de Ben Mena et la valeur retournée par notre méthode. Et nous appliquons cette valeur à

la méthode Électre III pour comparer par la suite le rangement obtenu et le rangement initial. Nous détaillerons l'expérimentation dans la section 4.4.

De plus, cette méthode nécessite un temps d'exécution de 18 secondes et fait appel à ÉLECTRE III 382 fois comparativement à la méthode de Ben Mena qui a nécessité respectivement 25 secondes et 627 fois dans des conditions similaires.

4.4 Étude comparative

Pour comparer les deux méthodes d'analyse de sensibilité, on utilisera plusieurs exemples dont le premier est le même qui a été utilisé dans la section 4.2.5 ci-dessus.

Tout d'abord, nous générons les résultats d'analyse de sensibilité avec les deux méthodes d'analyse de sensibilité. Ensuite, nous comparons ces résultats en choisissant, à chaque fois, une valeur intermédiaire.

4.4.1 Résultats de l'analyse de sensibilité

Exemple 1 :

Les résultats de l'analyse de sensibilité des deux méthodes sont représentés dans les deux tableaux suivants (Tableau 9 et Tableau 10).

Tableau 9 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la méthode de Ben Mena

Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	22,437	28,337	13,843	22,263	37,729	43,311	75,449	104,999
2	39,331	48,93	0,859	91,799	330,752	371,729	713,77	1451,859
3	5,381	11,763	0,753	1,901	2,057	5	3	50
4	7,605	19,969	0,197	0,68	1,429	4,498	3,5	4,849
5	7,445	15,967	0	2,685	1,004	6,972	6,096	80

Tableau 10 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la nouvelle méthode (Ben Mena améliorée)

Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	22,424	28,333	13,848	22,269	37,728	43,297	75,472	105,048
2	39,307	48,941	0,859	91,752	330,962	371,509	714,061	1451,429

3	5,388	11,764	0,752	1,901	2,056	5	3	50
4	7,61	19,966	0,197	0,679	1,429	4,5	3,5	4,849
5	7,44	15,966	0	2,685	1	6,974	6,098	80

On remarque que les résultats ne sont pas les mêmes pour les deux méthodes. La différence apparaît au niveau de la précision. Ce qui nous mène à comparer les résultats pour en déduire la méthode la plus précise au niveau des valeurs minimum et maximum de chaque paramètre.

Exemple 2 :

Dans cet exemple (Tableau 11) nous voulons ranger cinq fournisseurs, en utilisant Électre III, du meilleur au pire en nous basant sur les critères prix, délais, frais de transport et la qualité de leurs produits.

Tableau 11 - Exemple d'utilisation d'Électre III pour ranger des fournisseurs

Critères → actions	Prix	Délais	Frais_Transport	Qualité (/10)
Fournisseur 1	-160.5	-3	-4.78	8
Fournisseur 2	-158.3	-7	-2.125	6
Fournisseur 3	-161.9	-4	-3.922	9
Fournisseur 4	-163	-2	-5.867	10
Fournisseur 5	-159	-6	-4.211	7.5
Poids (Pd)	40	15	25	20
Indifférence (Q)	1	1	1	1
Préférence (P)	3	4	3	3
Veto (V)	15	5	6	7

On a introduit cet exemple ci-dessus dans MCDM en utilisant la méthode Électre III et nous avons obtenu le rangement suivant (Tableau 12) :

Tableau 12 - Préordre obtenu avec ÉlectreIII pour l'exemple 2

Action	distillation descendante	Distillation ascendante
Fournisseur1	1	2

Fournisseur2	2	3
Fournisseur3	3	1
Fournisseur4	3	1
Fournisseur5	1	3

Dans les tableaux ci-dessous, on présentera le résultat de l'analyse de sensibilité de cet exemple.

Le premier tableau (

Tableau 13) contient les résultats de l'analyse de sensibilité obtenue par la méthode de Ben Mena.

Le deuxième tableau (Tableau 14) contient les résultats de l'analyse de sensibilité obtenus par notre méthode qui est une amélioration de Ben Mena.

Tableau 13 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la méthode de Ben Mena (exemple 2)

Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	39,492	97,239	0,554	1,11	2,068	3,079	3	150
2	4,175	15,503	0,737	3,999	3,886	5	4	50
3	23,608	43,251	0	1,06	2,307	3,097	3	60
4	3,613	20,363	0,823	1,952	2,85	7	3	70

Tableau 14 - Résultats de l'analyse de sensibilité avec la nouvelle méthode (Exemple 2)

Critères	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	39,456	97,232	0,56	1,11	2,07	3,08	3	150
2	0	15,504	0,74	4	3,89	5	4	50
3	23,617	43,256	0	1,05	2,31	3,09	3	60
4	0	20,355	0,83	1,95	2,85	7	3	70

4.4.2 Méthode utilisée pour la comparaison

Pour comparer les résultats des deux méthodes, et dans le cas où ces résultats ne sont pas les mêmes, nous considérerons une valeur x qui appartient à un intervalle et n'appartient pas à l'autre (voir Figure 7).

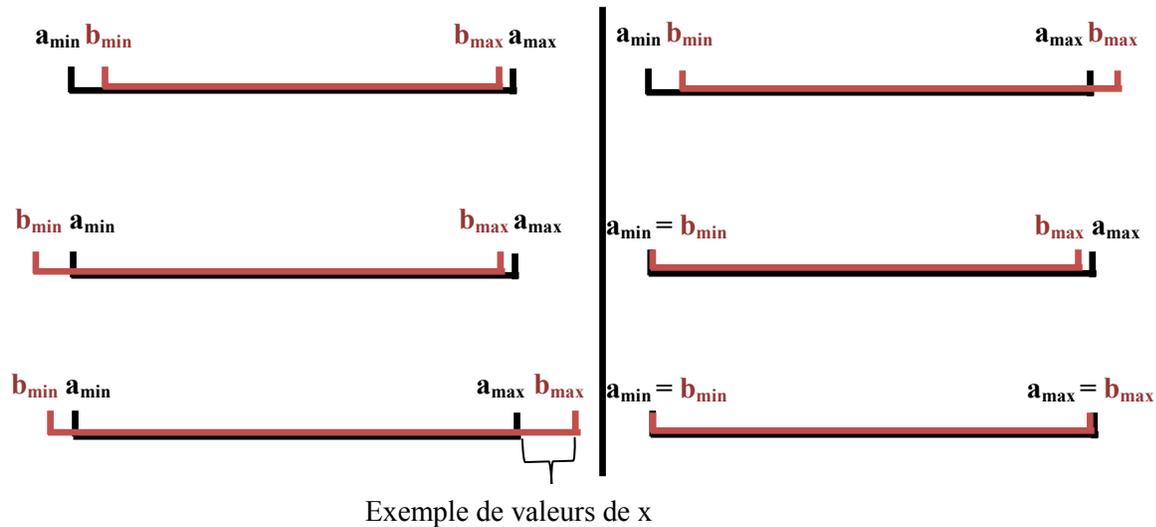


Figure 7 - Exemple de choix de point intermédiaire sur différents cas possibles d'intervalles

$[a_{\min} ; a_{\max}]$: l'intervalle obtenu par la méthode Ben Mena.

$[b_{\min} ; b_{\max}]$: l'intervalle obtenu par notre méthode.

Nous savons que toutes les valeurs appartenant aux intervalles fournis par une analyse de sensibilité doivent maintenir les mêmes préordres initiaux. Si la valeur intermédiaire choisie fait changer les préordres, alors elle ne doit pas appartenir à notre intervalle de sensibilité.

Par conséquent, dans le cas de la comparaison des maximums, si la valeur choisie de x fait changer le rangement, alors la valeur la plus petite est plus précise considérant que la valeur intermédiaire n'appartient pas à l'intervalle borné par cette dernière.

En appliquant le même principe aux minimums, nous considérons que la valeur la plus grande est la plus précise.

Les tableaux Tableau 15 et Tableau 16 représentent les valeurs de x retenues pour la comparaison.

Une case vide indique que nous n'avons pas comparé les résultats de ce paramètre étant donné que les deux méthodes ont donné la même valeur limite.

Tableau 15 - Les valeurs utilisées pour la comparaison dans l'exemple 1

Critère	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	22,425	28,335 (change) ⁶	13,847 (change)	22,268		43,298 (change)	75,471 (change)	105,03
2	39,315	48,935		91,753 (change)	330,960 (change)	371,510 (change)	714,060	1451,430 (change)
3	5,387 (change)							
4	7,609	19,967 (change)		0,680 (change)		4,499		
5	7,441				1,001	6,973	6,097 (change)	

Tableau 16 - Les valeurs utilisées pour la comparaison dans l'exemple 2

Critère	Pdmin	Pdmax	Qmin	Qmax	Pmin	Pmax	Vmin	Vmax
1	39,457	97,233 (change)	0,559					
2	0,1		0,739					
3	23,616 (change)	43,255				3,091 (change)		
4	0,1	20,356 (change)	0,829					

4.4.3 Résultats de la comparaison

⁶ (Change) : indique que cette valeur fait changer le préordre.

On considère que les résultats sont précis si est seulement si pour toutes valeurs appartenant à cet intervalle, les préordres sont les mêmes. Parmi les limites de la méthode de Ben Mena, les bornes de l'intervalle ne sont pas exactes. Ainsi, on peut trouver des valeurs, au sein de l'intervalle, qui ne maintiennent pas les mêmes préordres et dans d'autres cas, des valeurs n'appartenant pas à l'intervalle, mais gardent les mêmes préordres.

Toutes les valeurs des tableaux de comparaison ont été appliquées avec Électre III dans MCDM et montrent que les résultats obtenus par la méthode améliorée de Ben Mena sont exacts.

4.4.4 Autre amélioration possible

Après cette première amélioration apportée à l'algorithme d'analyse de sensibilité de la méthode de Ben Mena qui consiste à modifier son module de recherche, nous allons modifier un autre point faible de cette méthode qui se présente dans les valeurs extrêmes (voir section 4.2.4) fixées arbitrairement et qui peuvent influencer significativement le calcul en termes de temps d'exécution.

Dans la section suivante, nous allons proposer de limiter le champ de recherche de la méthode de Ben Mena en fixant des limites pour les intervalles dans lesquels on fera varier les paramètres.

4.5 Deuxième méthode d'analyse de sensibilité

4.5.1 Introduction

L'analyse de sensibilité est l'étude de la relation entre les paramètres fournis par l'utilisateur et les résultats obtenus. Cette analyse peut être décrite de deux manières. Une première consiste à faire varier les paramètres jusqu'à l'obtention des intervalles dans lesquels les préordres ne changent pas. C'est l'approche que nous avons préconisé plus haut. Une deuxième forme d'analyse de sensibilité consiste à faire un changement dans les préordres et de déterminer les valeurs minimum et maximum conduisant à ce changement. Cette dernière est aussi appelée l'analyse de stabilité.

On retrouve dans (Vetschera, 1986) un exemple de la deuxième approche avec Électre I dans le même but de trouver analytiquement les valeurs extrêmes des paramètres. Contrairement à ce qui a été étudié avec la méthode de Ben Mena (Ben Mena, 2001), il n'y a pas de variation des paramètres, mais plutôt une analyse des différents cas possibles des changements qui peuvent survenir dans les préordres et les valeurs conduisant à ces changements.

Une des limites de la méthode de Ben Mena précédemment étudiée est que l'on détermine arbitrairement les intervalles dans lesquels les paramètres peuvent varier. Dans cette section, nous nous inspirerons des travaux de Vetschera pour déterminer analytiquement des valeurs extrêmes qui remplaceront celles utilisées dans l'étude de la méthode comme décrite dans (Ben Mena, 2001). Nous espérons ainsi mieux borner l'espace de recherche de l'algorithme et ainsi améliorer son temps d'exécution.

4.5.2 Description de la méthode

4.5.2.1 Schématisation de la méthode d'analyse de sensibilité utilisée dans (Vetschera, 1986)

Soit le préordre final suivant (Figure 8) obtenu par Électre I:

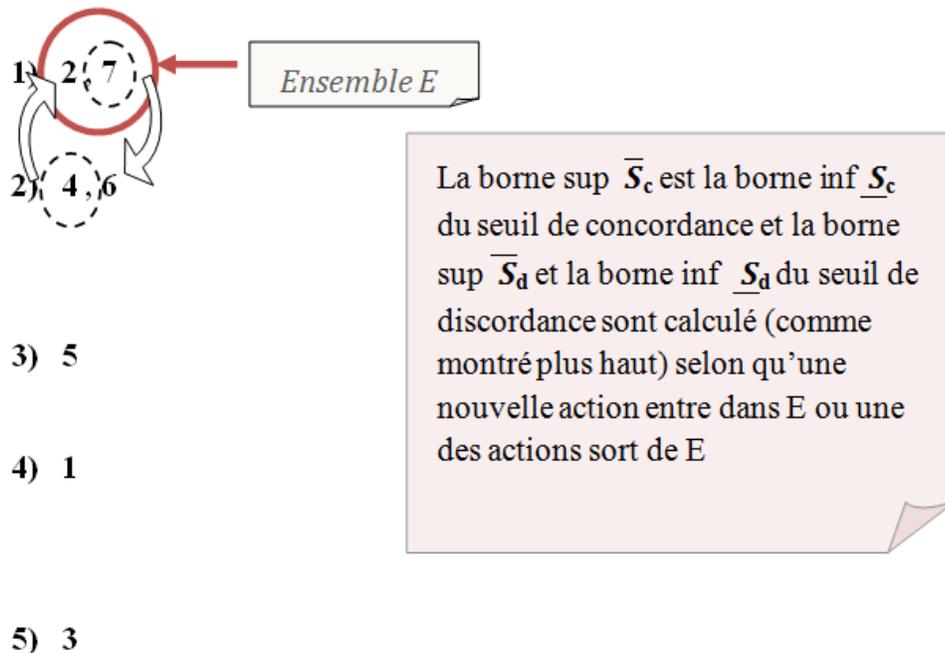


Figure 8 - Schématisation de la méthode de (Vetschera R , 1986)

Considérant qu'Électre I est une méthode qui traite la problématique de choix α , l'analyse de sensibilité selon la méthode de (Vetschera, 1986) s'intéresse essentiellement à l'ensemble E d'actions qui ne sont surclassées par aucune autre action.

4.5.2.2 Utilisation de la méthode avec Électre I

Cette méthode a été utilisée avec Électre I dans (Vetschera, 1986) pour retrouver les intervalles (le min et le max) des paramètres de préférence, d'indifférence et de poids dans lesquels le choix reste toujours le même.

Puisqu'Électre I est une méthode de choix, cette méthode s'intéresse seulement au premier niveau du rangement des actions.

Nous considérons un problème de décision impliquant la sélection d'une parmi n décisions, qui sont évalués en termes de m attributs. Sans perdre de généralité, nous supposons que pour tous les attributs ayant une valeur plus élevée représente une meilleure alternative. Une matrice B de taille $n * m$ contient les valeurs des attributs individuels pour chaque alternative. B_{ik} l'élément de la matrice qui représente la valeur de l'alternative i dans l'attribut k . On définit un vecteur G de poids g_k , indiquant l'importance du critère k pour le problème de décision. L'utilisateur doit également fournir deux autres valeurs subjectives: un S_c valeur seuil de concordance et un seuil de discordance S_d . Le but de ces valeurs sera expliqué au cours de l'algorithme.

Pour compenser l'échelle des différents attributs, tous les vecteurs d'attributs (la colonne de la matrice B) sont normalisés pour unité de longueur. Une matrice de données normalisées V est :

$$v_{ik} = \frac{b_{ik}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n b_{jk}^2}}$$

La méthode Électre I est basée sur le concept de relations de surclassement R . La relation iRj entre les alternatives i et j établit le fait que l'alternative i est considérée comme meilleur que j . La valeur $r_{ij} = 1$ sera utilisée pour indiquer que i surclasse j , tandis que $r_{ij} = 0$ sera utilisé pour indiquer que i ne surclasse pas j .

Le surclassement entre l'alternative i et j dans le sens de ELECTRE I est fondé sur deux exigences:

- i doit être mieux que j en un nombre suffisant de critères suffisamment important et
- i ne doit pas être bien pire que j dans les autres critères.

La première exigence est consignée dans un indice de concordance c_{ij} , le deuxième en un indice de discordance d_{ij} .

L'indice de concordance c_{ij} agrège des informations sur ces critères que l'alternative i est meilleure que j . On définit d'abord l'ensemble Z_{ij} comme l'ensemble de ces attributs dans laquelle i est meilleure que j :

$$Z_{ij} = \{k \mid v_{ik} \geq v_{jk}\}.$$

L'indice de concordance c_{ij} est la somme des poids de tous les critères appartenant à Z_{ij} tel que :

$$c_{ij} = \sum_{k \in Z_{ij}} g_k$$

L'indice de discordance contient des informations indiquant le surclassement de j par rapport à i dans leurs critères:

$$d_{ij} = \max_{k \notin Z_{ij}} [(v_{jk} - v_{ik}) \cdot g_k] / \max_k [(v_{jk} - v_{ik}) \cdot g_k]$$

Les deux valeurs de l'indice sont ensuite comparées avec les valeurs des seuils respectifs pour déterminer leur importance. Une valeur de concordance c_{ij} est jugée importante si

$$c_{ij} \geq s_c.$$

De même, l'indice de discordance d_{ij} doit être supérieur au seuil de discordance s_d c'est-à-dire :

$$d_{ij} \geq s_d$$

Ces deux valeurs sont combinées pour avoir la relation de surclassement r_{ij} définie comme suit :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_{ij} \geq s_c \text{ et } d_{ij} < s_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'ensemble E est l'ensemble qui contient les actions qui ne sont surclassées par aucune autre tel que :

$$E(R) = \{i \mid r_{ji} = 0 \forall j\}$$

Soit R_1 et R_2 deux relations de prédominance. R_1 et R_2 sont dites équivalentes SSI $E(R_1) = E(R_2)$

4.5.2.2.1 Analyse de sensibilité des seuils de concordance

Tout d'abord, on définit l'ensemble E comme étant l'ensemble des actions du premier rang du préordre. L'analyse de sensibilité des seuils de concordance se focalisera donc sur cet ensemble. Pour cela, on identifie les changements qui peuvent survenir dans ce dernier et on recherche les valeurs qui peuvent les causer.

Les deux cas possibles qui peuvent se présenter sont :

- Une action qui n'était pas dans l'ensemble E s'y retrouve.
- Une action qui était dans E n'y est plus.

Ces deux alternatives peuvent être étudiées séparément.

- **Nouvelle action qui s'ajoute dans E :**

Dans le cas où l'action i s'ajoute à l'ensemble E des actions au premier niveau du rangement, nous obtenons l'égalité suivante qui indique que i surclasse toutes les autres actions :

$$r_{ji} = 0 \quad \forall j$$

Or, le surclassement se répercute sur la concordance et sur la discordance comme suit :

$$r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < s_c \text{ ou } d_{ji} \geq s_d,$$

Prenant ces deux conditions séparément, on aura :

$$r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < s_c \quad \text{ou} \quad r_{ji} = 0 \Leftrightarrow d_{ji} \geq s_d.$$

Considérons premièrement la condition $d_{ji} \geq s_d$.

Pour des fins d'analyse, on suggère de créer un nouvel ensemble J tel que :

$$J(i) = \{j | d_{ji} < s_d, \forall i \in E\}.$$

Maintenant, considérons la deuxième condition. Afin de ramener une action i dans E, c_{ji} ne doit pas être significatif pour tous les j appartenant à J(i) défini précédemment. Il s'ensuit que nous devons trouver une nouvelle valeur $\bar{s}_c(i)$ de sorte que $\forall j \in J(i), \bar{s}_c(i) > c_{ji}$. Par conséquent :

$$\bar{s}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}.$$

Considérons maintenant la deuxième condition. Pour tout $i \in E \Rightarrow c_{ji} > s_c$. le premier changement dans l'ensemble E se produira à :

$$\bar{s}_c = \min_{i \in E} \bar{s}_c(i).$$

Cela définit une limite supérieure pour le seuil de concordance en dessous duquel aucun changement dans l'ensemble E ne se produira.

- **Exclusion d'une action de E :**

Nous abordons maintenant le cas où i ne fait pas partie de l'ensemble E .

D'après la section précédente, nous avons déterminé la relation de surclassement suivante:

$$i \in E \Leftrightarrow r_{ji} = 0 \quad \forall j$$

Pour exclure l'action i de E , on doit avoir une action j de sorte que j surclasse l'action i . Autrement dit, avoir une action j tel que $r_{ji} = 1$. Or, $r_{ji} = 1$ si $c_{ji} \geq s_c$ et $d_{ji} < s_d$.

Selon la première condition, afin de retirer l'action i de l'ensemble E , il faut que le seuil de concordance s_c diminue suffisamment pour que c_{ji} devienne supérieur au nouveau seuil de concordance s_c pour une certaine action j . Cela donne une limite inférieure pour s_c pour l'action i qui est défini comme suit :

$$\underline{s}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}$$

Le premier changement dans E se produira quand la première action est exclue. Une limite inférieure pour s_c est donc donnée par :

$$\underline{s}_c = \max_{i \in E} \underline{s}_c(i)$$

4.5.2.2.2 Analyse de sensibilité des seuils de discordance

La recherche du seuil de discordance suivra le même principe que celui suivi précédemment pour la recherche du seuil de concordance.

Pour cela, nous commençons par considérer une nouvelle action dans l'ensemble E .

- **Nouvelle action dans E :**

Comme nous avons défini précédemment, nous avons l'équivalence suivante :

$$i \in E \Leftrightarrow c_{ji} < s_c \text{ ou } d_{ji} \geq s_d.$$

On s'intéresse seulement aux i à l'extérieur de l'ensemble E , donc à l'ensemble J tel que :

$$J(i) = \{j \mid c_{ji} \geq s_c\}$$

Pour tous ces j , nous devons respecter $d_{ji} \geq s_d$. Sinon j surclasserait i .

i est donc introduit dans E lorsque s_d est réduit à :

$$\underline{s}_d(i) = \min_{j \in J(i)} d_{ji}$$

L'agrégation de tous les i mène à une borne inférieure de \underline{s}_d :

$$\underline{s}_d = \max_{i \in E} \underline{s}_d(i)$$

- **Exclusion d'une action de E :**

D'après ce qui précède, si $i \in E$ alors nous avons : $r_{ji} = 0 \forall j$.

Pour exclure une action de E , il faut que $r_{ji} = 1$. Or d'après la définition de r_{ij} , nous avons:

$$r_{ij}=1 \Leftrightarrow c_{ji} \geq s_c \text{ et } d_{ji} < s_d.$$

Considérons seulement l'ensemble $J(i) = \{j | c_{ji} \geq S_c\}$. Pour tout j appartenant à $J(i)$, d_{ji} est importante, sinon i sera surclassé par j .

Pour que i soit surclassé, il faut augmenter s_d de tel sorte que :

$$\bar{s}_d(i) = \min_{j \in J(i)} d_{ji}$$

La première augmentation sera faite quand :

$$\bar{s}_d = \min_{i \in E} \bar{s}_d(i)$$

4.5.3 Discussion par rapport à cette méthode

La méthode proposée par Vetschera est uniquement valide pour la méthode d'agrégation Electre I. Dans le présent travail, nous tenterons d'adapter cette méthode d'analyse de sensibilité à Électre II.

Nous avons gardé le même principe que celui de la méthode de Vetschera : faire varier le rangement pour retrouver la valeur du paramètre qui résulte de ce changement. L'adaptation est que, pour la méthode Électre II, on a 3 seuils de concordance pour tous les critères au lieu d'un seuil pour chaque critère dans Électre I. D'autre part, pour Électre II, on a deux seuils de discordance pour chaque critère et non pas un seul comme dans Électre I. Cette adaptation est décrite en détail dans la prochaine section.

4.6 Adaptation de l'analyse de stabilité pour Électre II

L'approche proposée par Vetschera est pour une méthode de choix. Notre objectif est de l'adapter et de l'utiliser avec une méthode de rangement. La différence entre les deux familles est que la

première ne s'intéresse qu'aux actions non surclassées, tandis que les méthodes de rangement mènent à un préordre sur toutes les actions. Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de Vetschera à Électre II. Pour arriver à nos fins, nous avons utilisé un algorithme récursif qui fait appel à cette méthode pour chaque niveau du rangement.

4.6.1 Application de la méthode pour Électre II

Nous abordons la méthode de (Vetschera, 1986) du point de vue d'Électre II. L'analyse de sensibilité dans une méthode de rangement doit porter sur tous les niveaux du préordre. Contrairement à l'application de cette méthode à Électre I qui ne s'intéresse qu'au noyau, c.-à-d. l'ensemble E , l'application de cette méthode à Électre II s'intéresse à tous les niveaux du préordre.

En effet, nous utiliserons la méthode de (Vetschera, 1986) d'une manière récursive. L'approche proposée est la suivante :

- On commence par effectuer les mêmes tâches qu'avec Électre I pour la totalité des actions du premier ordre (l'ensemble E).
- Une fois les bornes des seuils de concordance et de discordance déterminées pour ce niveau, on élimine les actions appartenant à l'ensemble E .
- On refait les deux mêmes étapes pour chacun des niveaux qui restent dans le classement des actions.

Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la Figure 9 qui illustre l'approche.

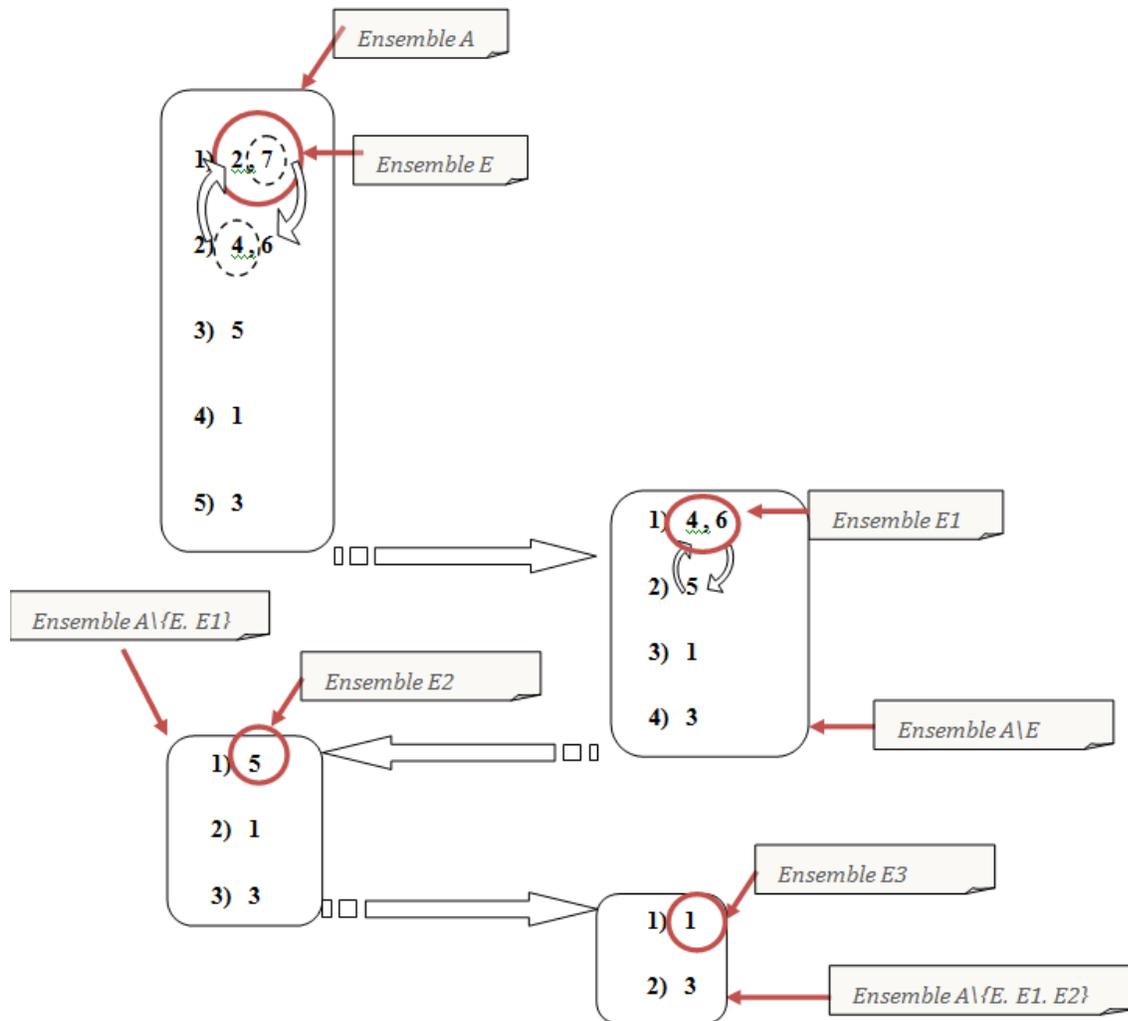


Figure 9 - Schématisation de la méthode avec Électre II

Voici quelques notations qui sont utilisées dans cette méthode :

- i surclasse $j \rightarrow \begin{cases} i \text{ aussi bon que } j \Rightarrow cij > sc \\ i \text{ ne doit pas être pire que } j \Rightarrow dij \leq sd \end{cases}$
- $c_{ij} = \frac{P^+(a_i, a_j) + P^-(a_i, a_j)}{P}$
- P^+ : la somme des poids des critères pour lesquels l'action a_i est préférée à l'action a_j .
- P^- : la somme des poids des critères pour lesquels l'action a_i est équivalente à l'action a_j .
- $d_{ij} = g_j(a_j) - g_j(a_i) ; j \in J(a_i, a_j)$

- J : l'ensemble des critères pour lesquels l'action a_j est préférée à l'action a_i .
- $S_{d(k)}$ le seuil de discordance pour le critère k .
- $r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } c_{ij} \geq S_c \text{ et } d_{ij} < S_d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $0 < v_1(j) < v_2(j) < E_j$.

Dans Électre II, nous avons trois seuils de concordance globaux c_1, c_2, c_3 tels que $0.5 < c_3 < c_2 < c_1 \leq 1$. Nous avons également deux seuils de discordance v_1 et v_2 pour chaque critère.

Tout au long de notre travail, nous utiliserons le classement final pour guider l'analyse de sensibilité.

- L'ensemble E contient les actions qui ne sont pas surclassées par d'autres actions. Il s'exprime comme suit :

$$E(R) = \{i \mid r_{ji} = 0 \forall j\}$$

- soit $R1$ et $R2$ deux relations de prédominance. $R1$ et $R2$ sont dites équivalentes si et seulement si $E(R1) = E(R2)$.

4.6.2 Analyse de sensibilité des seuils de concordance

La détermination des seuils de concordance nécessite une analyse de sensibilité basée sur les changements que peut subir l'ensemble E . Comme précédemment, il existe deux cas de changement soit a) une action qui n'était pas dans l'ensemble E et qui s'y retrouve ou b) une action qui était dans E et qui n'y est plus. Ces deux alternatives peuvent être étudiées séparément. On traitera également les cas de surclassement fort et surclassement faible.

4.6.2.1 Surclassement fort :

Nouvelle action dans E :

Nous commençons par analyser le cas où i fait partie de l'ensemble E . Nous obtenons l'égalité suivante :

$$r_{ji} = 0 \forall j$$

or dans Électre II (surclassement fort) $r_{ji} = 0 \forall j$ signifie que i n'est surclassé par aucune autre action d'où:

$$c_{ji} < c_1 \text{ ou } d_{ji} > v_2(j) \text{ et } c_{ji} < c_2 \text{ ou } d_{ji} > v_1(j)$$

donc on peut dire que :

$$r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < c_1 \text{ et } c_{ji} < c_2$$

Ou

$$r_{ji} = 0 \Leftrightarrow d_{ji} > v_2(j) \text{ et } d_{ji} > v_1(j)$$

Par la définition d'Électre II (section 2.4 ci-dessus), on sait que :

$$0 < v_1(j) < v_2(j) < E_j$$

Ainsi, pour que $r_{ji} = 0$, il suffit que :

$$d_{ji} > v_2(j)$$

Donc pour toutes les actions appartenant à E on a que $d_{ji} > v_2(j)$. Et dans le cas contraire, $d_{ji} \leq v_2(j)$ ce qui nous permet de définir un nouvel ensemble J tel que :

$$J(i) = \{j | d_{ji} \leq v_2(j), \forall i \in E\}$$

Afin de ramener i dans E , c_{ji} ne doit pas être significatif pour tous les j appartenant à $J(i)$

Or on a : $r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < c_1$ et $c_{ji} < c_2$ et par la définition d'Électre II on sait que $0.5 < c_3 < c_2 < c_1$

≤ 1 donc $r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < c_2$

Il s'ensuit que nous devons trouver une nouvelle valeur $\bar{c}_c(i)$ de sorte que :

$$\forall j \in J(i), c_{ji} < \bar{c}_c(i)$$

Par conséquent : $\bar{c}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}$

On étudie ici le cas d'une action qui n'appartient pas à E (l'ensemble des actions qui ne sont surclassées par aucune autre) mais qu'on veut ramener dans cet ensemble.

$$i \notin E \Rightarrow c_{ji} > c_2$$

Le premier changement dans l'ensemble E se produira à :

$$\bar{c}_2 = \min_{i \in E} \bar{c}_c(i)$$

Cela définit une limite supérieure pour le seuil de concordance c_2 en dessous duquel aucun changement dans l'ensemble E ne se produira.

Exclusion d'une action de E :

Dans cette section, i fait partie de l'ensemble E . Pour exclure i de E , on doit trouver au moins un j de sorte que $r_{ji} = 1$ (une action j qui surclasse i).

Pour que j surclasse i ($r_{ji} = 1$) il faut que :

$$c_{ji} \geq c_1 \text{ et } d_{ji} < v_2(j) \text{ ou } c_{ji} \geq c_2 \text{ et } d_{ji} < v_1(j)$$

Or par la définition d'Électre II on a : $0.5 < c_3 < c_2 < c_1 \leq 1$ donc on doit avoir au moins $c_{ij} \geq c_2$.

L'action i est retirée de E si s_c baisse suffisamment pour que c_{ji} devienne supérieur au nouveau seuil de concordance s_c pour un certain j . Cela donne une limite inférieure pour s_c en ce qui concerne i :

$$\underline{s}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}$$

Le premier changement dans E se produira quand la première action est exclue. Donc une baisse générale pour c_2 est donnée par :

$$c_2 = \max_{i \in E} \underline{s}_c(i)$$

4.6.2.2 Surclassement faible :

Nouvelle action dans E :

Supposant que i est une action qui n'est pas dans E pour laquelle on veut trouver les valeurs des seuils de concordance de telles sortes qu'elle devient dans l'ensemble E . Pour que i soit dans l'ensemble E il faut qu'elle ne soit surclassée par aucune autre action :

$$r_{ji} = 0 \quad \forall j$$

Dans Électre II (surclassement faible) $r_{ji} = 0 \quad \forall j$ signifie que:

$$c_{ji} < c_3 \text{ ou } d_{ji} > v_2(j)$$

alors pour que $r_{ji} = 0$ il suffit que $d_{ji} > v_2(j)$.

Donc pour toutes les actions appartenant à E on a que $d_{ji} > v_2(j)$. Et dans le cas contraire, $d_{ji} \leq v_2(j)$ ce qui nous permet de définir un nouvel ensemble J tel que :

$$J(i) = \{j | d_{ji} \leq v_2(j), \quad \forall i \notin E\}$$

Afin de ramener i dans E , c_{ji} ne doit pas être significatif pour tous les j appartenant à $J(i)$.

On sait que : $r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < c_3$ ou $d_{ji} > v_2(j)$ donc $r_{ji} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} < c_3$.

Il s'ensuit que nous devons trouver une nouvelle valeur $\bar{s}_c(i)$ de sorte que :

$$\forall j \in J(i), c_{ji} < \bar{s}_c(i)$$

Par conséquent : $\bar{s}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}$

Or $i \notin E \Rightarrow c_{ji} > c_3$ donc le premier changement dans l'ensemble E se produira à :

$$\bar{c}_3 = \min_{i \in E} \bar{s}_c(i)$$

Cela définit une limite supérieure pour le seuil de concordance c_3 en dessous duquel aucun changement dans l'ensemble E ne se produira.

Exclusion d'une action de E :

Dans cette section, i fait partie de l'ensemble E . Pour exclure i de E , on doit trouver au moins un j de sorte que $r_{ji} = 1$.

$$\text{Or, } r_{ji} = 1 \text{ si} \\ c_{ji} \geq c_3 \text{ et } d_{ji} < v_2(j)$$

L'action i est retirée de E si s_c baisse suffisamment pour que c_{ji} devienne supérieur au nouveau seuil de concordance s_c pour certain j . Cela donne une limite inférieure pour s_c en ce qui concerne i :

$$\underline{s}_c(i) = \max_{j \in J(i)} c_{ji}$$

Le premier changement dans E se produira quand la première action est exclue. Une baisse générale pour c_3 est donc donnée par :

$$\underline{c}_3 = \max_{i \in E} \underline{s}_c(i)$$

4.6.3 Analyse de sensibilité des seuils de discordance :

Après avoir traité les seuils de concordances dans la section précédente, on s'intéresse au seuil de discordance dans cette section. Comme précédemment, il existe deux cas de changement soit a) une action qui n'était pas dans l'ensemble E et qui s'y retrouve ou b) une action qui était dans E et qui n'y est plus. Ces deux alternatives peuvent être étudiées séparément. On traitera également les cas de surclassement fort et surclassement faible.

4.6.3.1 Surclassement fort :

Nouvelle action dans E :

Pour une action i qui appartient à l'ensemble E on doit avoir dans le cas du surclassement fort :

$$c_{ji} < c_1 \text{ ou } d_{ji} > v_2(j) \text{ et } c_{ji} < c_2 \text{ ou } d_{ji} > v_1(j)$$

Dans cette section on s'intéresse aux actions qui n'appartiennent pas à E et dont on veut trouver la première valeur du seuil de discordance qui permet qu'une de ces actions devienne un élément de E .

Soit J l'ensemble des actions qui n'appartiennent pas à E tel que :

$$J(i) = \{j \mid c_{ji} \geq c_1\}$$

Pour tous ces j on doit avoir :

$$d_{ji} \geq v_2(j)$$

sinon j surclasserait i . par conséquent i est donc introduit dans l'ensemble E lorsque $v_2(j)$ est réduit à :

$$v_2(j) = \min_{j \in J(i)} v_2(j)$$

On aura donc que la première valeur de v_2 qui nous intéresse est :

$$\underline{v}_2(j) = \max_{i \in E} v_2(j) \quad (i)$$

Exclusion d'une action de E :

On sait que si $i \in E$ alors i n'est surclassé par aucune autre action et donc $r_{ji} = 0 \forall j$.

Pour exclure i de l'ensemble E on doit avoir au moins un j pour lequel $r_{ji}=1$.

On sait que :

$$r_{ji}=1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$c_{ji} \geq c_1 \text{ et } d_{ji} < v_2(j) \text{ ou } c_{ji} \geq c_2 \text{ et } d_{ji} < v_1(j)$$

Sans perdre de généralité, considérons seulement l'ensemble $J(i) = \{j \mid c_{ji} \geq S_c\}$, alors pour tout j appartenant à $J(i)$, d_{ji} est importante, sinon i sera surclassé par j .

Pour que i soit surclassé, il faut augmenter la valeur du seuil de discordance $v_j(l)$ de telle sorte que :

$$\bar{v}_1(j)(i) = \min_{j \in J(i)} v_1(j)$$

Donc le premier changement dans l'ensemble E (une action de E quitte l'ensemble) se produira quand :

$$\bar{v}_1(j) = \min_{i \in E} \bar{v}_1(j)(i)$$

4.6.3.2 Surclassement faible:

Nouvelle action dans E :

Pour une action i qui appartient à l'ensemble E on doit avoir dans le cas du surclassement faible :

$$c_{ji} < c_3 \text{ ou } d_{ji} \geq v_2(j)$$

Dans cette section on s'intéresse aux actions qui n'appartiennent pas à E et dont on veut trouver la première valeur du seuil de discordance qui permet qu'une de ces actions devient un élément de E .

Soit donc J l'ensemble des actions qui n'appartiennent pas à E tel que :

$$J(i) = \{j \mid c_{ji} \geq c_1\}$$

Pour tous ces j on doit avoir :

$$d_{ji} \geq v_2(j)$$

Si j surclasserait i , par conséquent i est donc introduit dans E lorsque $v_2(j)$ est réduit à :

$$v_2(j) = \min_{j \in J(i)} v_2(j)$$

Exclusion d'une action de E :

D'après ce qui précède, si $i \in E$ alors nous avons : $r_{ji} = 0 \forall j$.

Pour exclure une action de E , il faut avoir au moins un j pour lequel $r_{ji} = 1$, or d'après la définition de r_{ij} , nous avons :

$$r_{ji}=1 \Leftrightarrow c_{ji} \geq c_3 \text{ et } d_{ji} < v_2(j)$$

Considérons seulement l'ensemble $J(i) = \{j \mid c_{ji} \geq S_c\}$, alors pour tout j appartenant à $J(i)$, d_{ji} est importante, sinon i sera surclassé par j . Pour que i soit surclassé par au moins une autre action, il faut augmenter les valeurs des seuils de discordance comme suit :

$$\bar{v}_2(j)(i) = \min_{j \in J(i)} v_2(j)$$

On obtiendra donc un premier changement dans E lorsque:

$$\bar{v}_2(j) = \min_{i \in E} \bar{v}_2(j)(i)$$

4.7 Combinaison des méthodes

Nous rappelons que l'approche que nous préconisons est itérative et vise à déterminer des seuils pour chacun des niveaux du préordre d'actions. Chaque itération de la méthode de cette analyse de stabilité avec ÉLECTRE II nous permet d'obtenir, pour chaque critère, deux valeurs pour les

seuils minimum et maximum de concordance et de discordance. Ces valeurs sont désignées par les variables \underline{S}_c , \bar{S}_c , $\underline{v}_2(j)$, $\bar{v}_2(j)$ et $\bar{v}_1(j)$. Et nous utilisons ces valeurs pour contraindre l'espace d'exploration de l'analyse de sensibilité.

Chaque itération correspond à un niveau du préordre et les résultats obtenus correspondent aux minimums et maximums de chacun des seuils pour ce niveau. Comme des valeurs de seuils sont déterminées à chaque niveau pour l'ensemble des critères, il faut trouver un moyen de combiner ces différentes valeurs. Et nous faisons appel à la méthode d'analyse de sensibilité de Ben Mena afin de raffiner les valeurs de ces seuils.

La Figure 10 est une représentation schématique de la combinaison des deux méthodes d'analyse de sensibilité qui montre que les valeurs obtenues par la méthode adaptée de Vetschera sont incluses dans l'intervalle des valeurs extrêmes fixées arbitrairement par la méthode de Ben Mena. Dans cette figure,

- $[\underline{P}_{extr}, \bar{P}_{extr}]$ sont les valeurs arbitraires extrêmes du paramètre étudié;
- $[\underline{S}, \bar{S}]$: l'intervalle obtenu par la méthode adaptée de Vetschera;
- $[P_{min}, P_{max}]$: l'intervalle obtenu par exploration à l'aide de l'analyse de sensibilité.

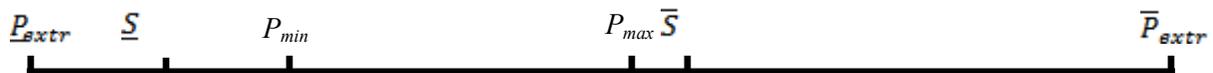


Figure 10 - Raffinement des bornes de l'intervalle par la combinaison des deux méthodes

Notre méthode est répétée itérativement pour chaque niveau du préordre. Un nombre, égal au nombre de niveaux du préordre, de valeurs max et min sont donc obtenu à la fin du processus. On doit choisir les valeurs qui seront prises en compte comme étant les valeurs de l'analyse de sensibilité de tout le préordre. Deux cas se présentent :

1^{er} cas : c'est le cas qui sera utilisé pour nos expérimentations et consiste à :

Choisir, pour chaque paramètre, l'intervalle qui est le résultat de l'union de tous les intervalles obtenus. D'où la borne inférieure de cet intervalle sera le plus petit des Min et la borne supérieure est la valeur la plus grande parmi les Max. Ces valeurs remplaceront les valeurs P_{extr} fixées arbitrairement par Ben Mena (vue dans la section 4.2.4).

Seuil de concordance :

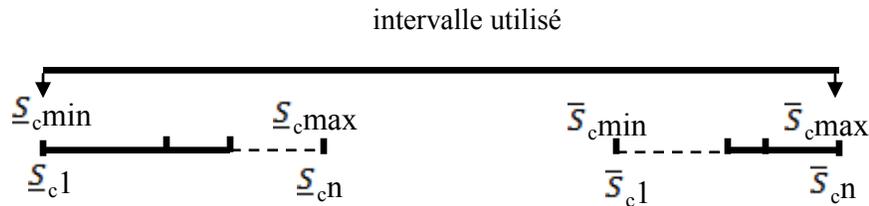


Figure 11 - Premier cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de concordance dans la méthode de Ben Mena.

Cet intervalle $[\underline{S}_{cmin}.. \bar{S}_{cmax}]$ sera utilisé comme paramètre d'entrée du seuil de concordance de la méthode de Ben Mena. La Figure 11 nous montre que la borne inférieure \underline{S}_{cmin} de l'intervalle choisit, dans ce premier cas, est la plus petite valeur parmi chaque borne inférieure retrouvée pour chacun des n niveaux ($\underline{S}_{c1}... \underline{S}_{cn}$). De même, la borne supérieure \bar{S}_{cmax} représente la plus grande valeur parmi les bornes supérieures.

Seuil de discordance :

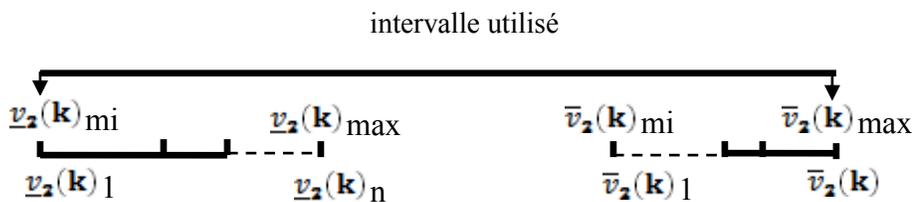


Figure 12 - Premier cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de discordance v_2 dans la méthode de Ben Mena.

De même pour l'intervalle des seuils de discordance (Figure 12), l'intervalle qui sera pris en considération dans ce premier cas est $[v_2(\mathbf{k})_{\min} .. \bar{v}_2(\mathbf{k})_{\max}]$. Ces valeurs sont la plus petite valeur du seuil minimum du paramètre v_2 et la plus grande valeur du même paramètre de discordance \bar{v}_2 .

2^{ème} cas :

Dans cette section on essayera d'expérimenter d'autre choix des valeurs des seuils, parmi les seuils que nous avons obtenus pour chaque niveau du préordre, pour fixer le seuil qui sera utilisé avec tout le préordre. L'intervalle qu'on utilisera est le résultat de l'intersection de tous les intervalles obtenus. D'où la borne inférieure de cet intervalle sera le plus grande des Min et la borne supérieure est la valeur la plus petite parmi les Max. Ces valeurs remplaceront les valeurs P_{extr} fixées arbitrairement par Ben Mena (vue dans la section 4.2.4).

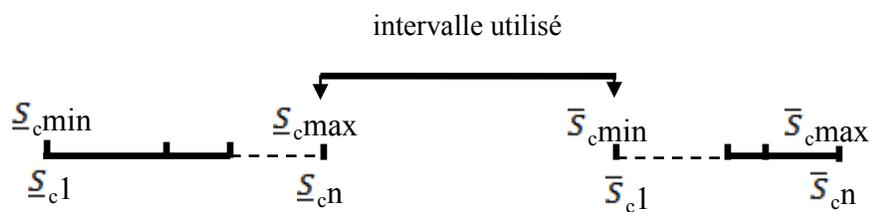


Figure 13 - Deuxième cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de concordance dans la méthode de Ben Mena.

Cet intervalle $[\underline{s}_{cmax}.. \bar{s}_{cmin}]$ sera utilisé comme paramètre d'entrée du seuil de concordance de la méthode de Ben Mena. La Figure 13 nous montre que la borne inférieure \underline{s}_{cmax} de l'intervalle choisit, dans ce deuxième cas, est la plus grande valeur parmi chaque borne inférieure retrouvée pour chacun des n niveaux ($\underline{s}_{c1}... \underline{s}_{cn}$). De même, la borne supérieure \bar{s}_{cmin} , qui est la borne supérieure de notre intervalle dans ce deuxième cas, représente la plus petite valeur parmi les bornes supérieures.

Pour le seuil de discordance, on suivra aussi le même choix que celui utilisé pour les seuils de concordance dans ce deuxième cas. La Figure 14 nous montre que l'intervalle des valeurs des seuils de discordance qui seront utilisés dans ce cas sont le résultat de l'intersection de tous les intervalles obtenus pour chaque niveau. D'où la borne inférieure $\underline{v}_2(\mathbf{k})_{max}$ de cet intervalle sera la plus grande valeur parmi tous les seuils de discordance et la borne supérieure $\bar{v}_2(\mathbf{k})_{min}$ est la plus petite valeur parmi tous les bornes supérieures des intervalles de discordance.

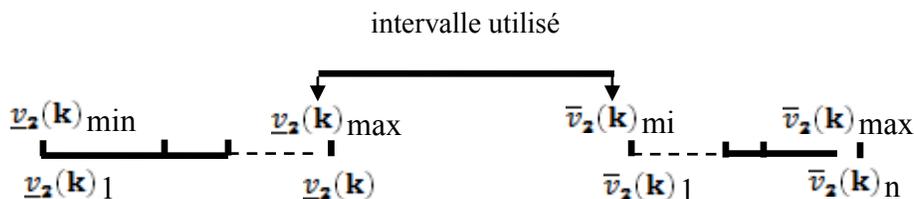


Figure 14 - Deuxième cas du choix de l'intervalle utilisé pour limiter la recherche du paramètre de discordance dans la méthode de Ben Mena.

4.8 Illustration de la méthode combinée

4.8.1 Exemple 1 :

Pour illustrer l'exécution de cette méthode que nous proposons (expliquée dans la section 4.6), nous avons utilisé le Tableau 17 ci-dessous pour mener nos essais. Les valeurs de concordance fixées par le décideur pour cet exemple sont : $c_3=0.5$; $c_2=0.6$; $c_1=0.75$

Tableau 17 - Tableau de performances (exemple1)

	g1	g2	g3	g4	g5
a1	90	-10	2	-9	3
a2	115	-12	0	-7	2
a3	75	-14	0	-10	1
a4	75	-8	2	-8	4
a5	120	-14	1	-11	2
a6	95	-8	1	-6	1
poids	0.3	0.3	0.1	0.1	0.2
V1	10	2	0	1	1
V2	20	4	1	2	2

Nous avons utilisé notre logiciel MCDM pour générer le classement des actions selon la méthode Électre II. Le résultat est affiché dans le Tableau 18. Pour alléger le texte, nous avons mis les tableaux qui contiennent les résultats du calcul de concordance et de discordance correspondant dans l'annexe B.

Tableau 18 - surclassement par la méthode Électre II

Action	surclassement		
	fort	faible	total
a1	2	2	3
a2	1	2	2
a3	3	3	4
a4	1	1	1
a5	1	2	2
a6	1	1	1

Nos expérimentations se décomposent en deux étapes. Dans la première étape, on détermine, selon la méthode de Vetschera (adapté pour Électre II), les intervalles des seuils pour les paramètres à chaque niveau du préordre. Ensuite, on retient un intervalle pour chaque paramètre en se basant sur les intervalles obtenus à chaque niveau. Dans une deuxième étape, on détermine les valeurs de seuils exactes, par exploration, à l'aide de l'analyse de sensibilité.

Étape 1 : Calcul de nouveaux seuils par analyse de stabilité

- Surclassement fort

Tableau 19 - Résultat du surclassement fort par Électre II (exemple 1)

rang	action
1	a2, a4, a5, a6
2	a1
3	a3

On doit procéder par niveau pour la recherche des seuils de concordance et de discordance qui mènent à ce qu'une action soit rajoutée à ce niveau, venant d'un niveau plus bas, ou bien une action soit supprimé de ce niveau est devient dans un autre niveau. La recherche des nouveaux seuils de concordance et de discordance minimaux et maximaux s'effectue comme suit :

Pour la première itération, on considère seulement les deux premiers rangs dans le préordre. L'ensemble $E1$ est l'ensemble des actions classées au premier rang. L'ensemble $J1$ est l'ensemble des actions classées au deuxième rang.

D'où :

$$E1 = \{ a2, a4, a5, a6 \} \text{ et } J1 = \{ a1 \}$$

Nous savons que pour le surclassement fort on a :

$$\bar{c}_2 = \min_{i \in E} \bar{S}_c(i) \quad \text{et} \quad c_2 = \max_{i \in E} \underline{S}_c(i)$$

Donc $\bar{c}_2 = \bar{S}_c(1) = 0.7$ et $c_2 = \underline{S}_c(5) = 0.3$ (voir Annexe B).

Deuxième itération : Pour cette itération, nous reprenons le rangement sans les actions classées au premier rang de tel sorte que les actions classées au deuxième rang deviennent au premier rang.

On définit donc l'ensemble $E2$ l'ensemble des actions classées au premier rang selon le nouveau rangement et l'ensemble $J2$ l'ensemble des actions classées au deuxième rang selon le nouveau

rangement. En se référant aux résultats du préordre du surclassement fort de cet exemple (Tableau 19) on aura :

$$E2 = \{a1\} \text{ et } J2 = \{a3\}$$

D'où les valeurs des seuils de concordance pour ce niveau sont :

$$\bar{c}_2 = \bar{S}_c(1) = 1 \text{ et } \underline{c}_2 = \underline{S}_c(3) = 0 \text{ (voir Annexe B)}$$

- Surclassement faible

Tableau 20 - Résultat du surclassement faible par Électre II (exemple 1)

rang	action
1	a4, a6
2	a1, a2, a5
3	a3

Nous suivons dans cette partie la même démarche que nous avons suivie dans la section précédente pour le surclassement fort. D'où nous aurons pour notre première itération dans l'ensemble $E1$ les actions qui sont classées au premier rang (voir Tableau 20) et dans l'ensemble $J1$ les actions qui sont classées au deuxième rang. D'où :

$$E1 = \{a4, a6\} \text{ et } J1 = \{a1, a2, a5\}$$

Dans la section 4.6.2.2 on a montré que :

$$\bar{c}_3 = \min_{i \in E} \bar{S}_c(i) \text{ et } \underline{c}_3 = \max_{i \in E} \underline{S}_c(i)$$

Donc pour cet exemple on a :

$$\bar{c}_3 = \bar{S}_c(5) = 0.6 \text{ et } \underline{c}_3 = \underline{S}_c(6) = 0.5 \text{ (voir Annexe B)}$$

Après avoir obtenu les valeurs des seuils pour ce niveau, on doit continuer le calcul des seuils des niveaux suivants. On suppose maintenant que notre préordre ne contient plus les actions classer dans le premier rang que nous avons déjà traité. Nous aurons aura donc un préordre qui contient dans son premier rang les actions $a1$, $a2$ et $a5$ et dans le deuxième rang, qui est le dernier dans cet exemple, l'action $a3$. On définit pour cette deuxième itération l'ensemble $E2$ qui contient les actions classées au premier rang et l'ensemble $J2$ contenant les actions du niveau suivant. On aura donc :

$$E2 = \{a1, a2, a5\} \text{ et } J2 = \{a3\}$$

D'après le calcul des seuils de concordance (Annexe B) on a :

$$\bar{c}_3 = \bar{S}c(3) = 0.9 \text{ et } \underline{c}_3 = \underline{S}c(1) = 0$$

Étape 2 : Dans cette étape, on utilise les valeurs précédemment obtenues, suite à l'analyse de stabilité, comme paramètre d'entrée pour notre méthode d'analyse de sensibilité. Ces valeurs remplaceront les valeurs que Ben Mena fixait arbitrairement (voir 4.2.4). Les seuils qui seront retenus sont les maximums des bornes supérieures et les minimums des bornes inférieures.

Suite à l'exécution de la méthode Electre II dans MCDM avec les nouveaux seuils obtenus suite à l'analyse de stabilité, nous obtenons les résultats suivants : C1 : [0.6; 1], C2 : [0 ; 0.7], C3 : [0 ; 0.9]

4.8.2 Exemple 2 :

À fin d'obtenir des résultats plus significatifs, on refait dans cette section la même étude comparative avec un autre tableau de taille différente du tableau de l'exemple 1 (voir Tableau 21).

Tableau 21 - Tableau de performances (exemple2)

Critères →	Prix	Délais	Frais_Transport	Qualité (/10)
actions				
Fournisseur 1	-160.5	-3	-4.78	8
Fournisseur 2	-158.3	-7	-2.125	6
Fournisseur 3	-161.9	-4	-3.922	9
Fournisseur 4	-163	-2	-5.867	10
Fournisseur 5	-159	-6	-4.211	7.5
Poids (Pd)	40	15	25	20
V1	1	1	1	1
V2	3	4	3	3

Le Tableau 22 contient le résultat de l'exécution de cet exemple par le logiciel MCDM pour la méthode Électre II. Le lecteur peut se référer à l'annexe C pour consulter les détails de cette exécution.

Tableau 22 - Surclassement par la méthode Électre II (exemple 2)

Action	Surclassement		
	fort	faible	Total
fournisseur1	3	3	4
fournisseur2	1	1	1
fournisseur3	1	2	2
fournisseur4	4	4	5
fournisseur5	2	3	3

Comme dans le premier exemple il y aura deux étapes dans notre expérimentation. La première étape consiste à calculer la valeur des seuils pour chaque niveau du préordre. La deuxième étape consiste à introduire les valeurs de seuils dans la méthode d'analyse de sensibilité pour déterminer les valeurs de seuils exactes.

Étape 1 : Calcul de nouveaux seuils par analyse de stabilité

- Surclassement fort

Tableau 23 - Résultat du surclassement fort par Électre II (exemple 2)

rang	action
1	a2, a3
2	a5
3	a1
4	a4

Pour le premier niveau, on appellera nos deux ensembles $E1$ et $J1$ qui contiendront respectivement les actions classées aux premiers et deuxièmes rangs. On aura donc:

$$E1 = \{a2, a3\} \text{ et } J1 = \{a5\}$$

Rappelons que pour le surclassement fort on a :

$$\bar{c}_2 = \min_{i \in E} \bar{S}_c(i) \quad \text{et} \quad c_2 = \max_{i \in E} \underline{S}_c(i)$$

Donc $\bar{c}_2 = \bar{S}_c(5) = 0.6$ et $\underline{c}_2 = \underline{S}_c(5) = 0.4$ (voir Annexe C).

Pour la deuxième itération, nous reprenons le rangement sans les actions classées au premier rang. On définit donc l'ensemble $E2$ et l'ensemble $J2$. En se référant au résultat du préordre du surclassement fort de cet exemple (Tableau 23), on aura :

$$E2 = \{a5\} \text{ et } J2 = \{a1\}$$

D'où les valeurs des seuils de concordance pour ce niveau sont :

$$\bar{c}_2 = \bar{S}_c(1) = 0,65 \text{ et } \underline{c}_2 = \underline{S}_c(5) = 0,35 \text{ (voir Annexe C)}$$

et finalement dans la dernière itération nos ensembles sont :

$$E3 = \{a1\} \text{ et } J3 = \{a4\}$$

Et les valeurs des seuils correspondantes à ce niveau sont :

$$\bar{c}_2 = \bar{S}_c(4) = 0,65 \text{ et } \underline{c}_2 = \underline{S}_c(1) = 0,35 \text{ (voir Annexe C)}$$

- Surclassement faible

rang	action
1	a2
2	a3
3	a1, a5
4	a4

Dans le calcul des seuils de concordance pour le surclassement faible on a vu que :

$$\bar{c}_3 = \min_{i \in E} \bar{S}_c(i) \text{ et } \underline{c}_3 = \max_{i \in E} \underline{S}_c(i)$$

Pour la première itération, on a $a2$ et $a3$ respectivement dans l'ensemble $E1$ et $J1$. En consultant les valeurs obtenues dans le calcul des seuils pour ces actions (Annexe C), on a :

$$\bar{c}_3 = \bar{S}_c(3) = 0.65 \text{ et } \underline{c}_3 = \underline{S}_c(2) = 0.35 \text{ (voir Annexe C)}$$

On doit maintenant calculer les seuils des niveaux suivants. On suppose maintenant que notre préordre ne contient plus les actions classées dans le premier rang qu'on a déjà traité. On aura donc l'action $a3$ dans l'ensemble $E2$ de cette deuxième itération et les actions $a1$ et $a5$ dans l'ensemble $J2$ contenant les actions du niveau suivant. On aura donc :

$$E2 = \{a3\} \text{ et } J2 = \{a1, a5\}$$

D'après le calcul des seuils de concordance (Annexe C) on a :

$$\bar{c}_2 = \bar{S}_c (1) = 0.55 \quad \text{et} \quad \underline{c}_3 = \underline{S}_c (3) = 0.45$$

Pour cette dernière itération, on considère les ensembles $E3$ et $J3$ tels que:

$$E3 = \{a1, a5\} \quad \text{et} \quad J3 = \{a4\}$$

Les valeurs des seuils relatifs à cette itération sont :

$$\bar{c}_2 = \bar{S}_c (4) = 0.65 \quad \text{et} \quad \underline{c}_3 = \underline{S}_c (3) = 0.35$$

Étape 2 :

Dans la première étape, nous avons déterminé les limites théoriques pour lesquels les valeurs des paramètres peuvent influencer le préordre. On exécute maintenant la méthode Electre II dans MCDM avec les nouveaux seuils obtenue suite à l'analyse de stabilité. Nous obtenons les résultats suivants :

$$C1 : [0.55; 1], \quad C2 : [0.5 ; 0.65], \quad C3 : [0 ; 0.6].$$

4.8.3 Observation :

Pour comparer le temps de calcul avec la méthode de Ben Mena, nous avons repris les mêmes exemples avec les deux méthodes. Le nombre d'itérations avec la méthode de Ben Mena pour le premier exemple est 114 itérations pour un temps moyen de 3.5 secondes. Avec la méthode combinée, le nombre d'itérations est 16 itérations avec un temps moyen inférieur à une seconde. Pour le deuxième exemple avec la méthode de Ben Mena, on observe 98 itérations pour un temps moyen de 2.7 secondes et pour la méthode combinée nous avons 14 itérations avec un temps moyen de moins d'une seconde.

l'analyse de sensibilité d'Électre II avec la méthode de Ben Mena en utilisant les paramètres extrêmes, fixés arbitrairement, pour limiter la recherche est beaucoup plus longue et traite un nombre d'itérations nettement plus grand que ceux observés avec la méthode combinée. Et aussi les résultats sont précis avec la méthode combinée ce qui n'est pas le cas de la méthode de Ben Mena. Cette différence est due au choix des valeurs extrêmes de la méthode de Ben Mena. Dans cette dernière, Ben Mena suggère que l'intervalle de recherche soit entre zéro et dix fois la valeur du paramètre. Les valeurs obtenues par la méthode de Veschera construisent des intervalles 20 fois plus petits que ceux de Ben Mena. Les valeurs des bornes des intervalles, obtenus par un

calcul théorique à l'aide de la méthode de Vetschera, sont très proches des valeurs obtenues par l'analyse de sensibilité. Les valeurs obtenues par la méthode de Veschera jouent le rôle des valeurs extrêmes dans la méthode combinée et limitent l'intervalle de recherche au sein duquel l'analyse de sensibilité est faite. Ces valeurs ne peuvent pas être fixées à l'avance pour tous les problèmes parce que (comme nous avons vu dans les deux exemples) ces valeurs changent d'un problème à l'autre d'où la nécessité de la combinaison des deux méthodes.

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord tenté avec succès d'améliorer la méthode de Ben Mena en modifiant le module de recherche pour obtenir une meilleure précision. En second lieu, pour diminuer le temps de calcul, nous avons diminué le champ de recherche. Pour cela, nous avons fait appel à la méthode (Vetschera, 1986) que nous avons adaptée à Électre II pour calculer des valeurs qui remplaceront les valeurs extrêmes fixées arbitrairement par Ben Mena.

Une étude comparative a été faite pour la méthode de (Ben Mena, 2001) avant et après modifications. Les résultats obtenus indiquent que la méthode améliorée est plus précise.

Une combinaison de la méthode améliorée avec la méthode (Vetschera, 1986) nous a permis de réduire le champ de recherche et ainsi le temps d'exécution.

Chapitre 5 - Conclusion

L'aide à la décision est un domaine très vaste et complexe. Aider un décideur à opter pour la meilleure solution dans un nouveau domaine est une tâche ardue. Il faut que le problème soit bien défini et que les préférences du décideur soient claires.

La première tâche du professionnel d'aide à la décision est de construire le problème. Ensuite, il faut extraire les préférences du décideur pour qu'il les utilise comme étant les paramètres de la méthode d'aide à la décision multicritère.

L'objectif de nos travaux était de mettre en place une méthode d'analyse de sensibilité paramétrable pour qu'elle puisse être utilisée avec différentes méthodes d'aide à la décision multicritères. Nous voulions également que cette analyse génère des résultats robustes en un temps raisonnable. Cette méthode analysera la sensibilité des valeurs des préférences acquises du décideur. Pour atteindre cet objectif, nous avons étudié quelques méthodes d'analyse de sensibilité. Nous avons aussi abordé le fonctionnement des principales méthodes d'aide à la décision multicritère.

Tout d'abord, nous avons étudié et implémenté dans un logiciel existant, MCDM, qui contenait déjà une méthode d'aide à la décision (Electre II), trois autres méthodes (Electre III, Prométhée I et Prométhée II).

Ensuite nous avons étudié la méthode de (Mena, 2001). Cette méthode était à l'origine une méthode d'analyse de sensibilité pour Electre III. Après quelques modifications, nous l'avons adaptée à Electre II. Ensuite, nous avons implémenté les deux versions dans MCDM.

Suite à plusieurs expérimentations, nous avons réussi à améliorer l'algorithme de la méthode de (Mena, 2001) pour le rendre plus rapide à l'exécution tout en donnant des valeurs exactes. Une portion de l'algorithme de la méthode de Ben Mena utilise des valeurs arbitraires, ce qui augmente considérablement le temps de calcul. Pour faire face à cette utilisation, nous avons utilisé la méthode de (Vetschera, 1986) pour fixer ces valeurs. La combinaison de ces deux

méthodes nous a permis d'obtenir une méthode rapide qui génère des résultats exacts, nous permettant de mesurer d'une manière précise la sensibilité des préférences du décideur.

Cependant, il reste des avenues de recherche pour poursuivre les travaux que nous avons déjà réalisés. Nous citons ici quelques pistes qui méritent d'être explorées :

- Adapter la méthode d'analyse de sensibilité que nous proposons dans ce mémoire à toutes les méthodes d'aide à la décision déjà présentes dans le MCDM. Notamment, il serait important de refaire ce travail pour les méthodes de la famille Prométhée.
- Comparer les résultats de notre méthode d'analyse de sensibilité aux résultats d'autres méthodes existantes.
- Analyser la robustesse des solutions retrouvées suite à l'application des méthodes d'aide à la décision multicritère.
- Concevoir un algorithme qui nous permettrait de proposer aux décideurs des valeurs de préférences selon la nature du problème étudié.

Bibliographie

Abi-Zeid, I., Parent, É., & Bobée, B. (2004). The stochastic modeling of low flows by the alternating point processes approach: methodology and application. *Journal of Hydrology* , pp. 41–61.

Ben Mena, S. (2001, janvier). Une solution informatisée à l'analyse de sensibilité d'Électre III. *Biotechnologie, Agronomie, Société et Environnement* , pp. 31-35.

Brans, J., Vincke, P., & Mareschal, B. (1986). How to select and how to rank projects: The PROMETHEE method. *European Journal of Operational Research* , pp. 228-238.

Dias, L. C. (2007). A note on the role of robustness analysis in decision-aiding processes. *ANNALES DU LAMSADE N°7*, pp. 53-70.

Evans, J. R. (1984). Sensitivity analysis in decision theory. *Decision Sciences, Volume 15, Issue 2* , pp. 239-247.

French, S. (2003). Modelling, making inferences and making decisions: The roles of sensitivity analysis . *TOP* , pp. 229-251.

Gál, T., & Greenberg, H. J. (1997). *Advances in sensitivity analysis and parametric programming*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Insua, D. R. (1999). Introduction to the Special Issue on Sensitivity Analysis. *JOURNAL OF MULTI-CRITERIA DECISION ANALYSIS* , pp. 117–118.

Mareschal, B. (1988). Weight stability intervals in multicriteria decision aid. *European Journal of Operational Research* , pp. 54-64 .

Maystre, L.-Y., Pictet, J., & Simos, J. (1994). *Méthodes multicritères Electre. Description, conseils pratiques et cas d'application à la gestion environnementale*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Mena, S. B. (2001). Méthodes multicritères d'aide à la décision : méthodes de surclassement. *Biotechnologie, Agronomie, Société et Environnement* , pp. 1-34.

Parnell, G. S., Jackson, J. A., C., B. R., Lehmkuhl, L. J., Jr., E., & A., J. (1999). R&D concept decision analysis: Using alternate futures for sensitivity analysis. *JOURNAL OF MULTI-CRITERIA DECISION ANALYSIS* , pp. 119-127.

Roy, B. (1968). Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE). *Revue Fran,caise d'Informatique et de Recherche Op'erationnelle 8* , pp. 57–75.

Roy, B. (1993). Decision science or decision-aid science? *European Journal of Operational Research* , Volume 66, Issue 2, pp. 184-203.

Roy, B. (1978). *Electre III: Un algorithme de classement fondé sur une représentation floue des préférences, en présence de critères multiples*. Cahiers CERO 20.

Roy, B. (2007). La robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision : Une préoccupation multi facettes. *Annales du LAMSADE n° 7*, pp. 209-231.

Roy, B. (1985). *Méthodologie Multicritère d'Aide à la décision*. Paris: ECONOMICA.

Roy, B. (2002). Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision? *Proceedings of 56th Meeting of the European Working Group Multiple Criteria Decision Aiding*. Coimbra, Portugal: Henggeler-Antunes, J. Figueira, and J. Clímaco, editors.

Roy, B., & Bertier, B. (1971). *La méthode ÉLECTE II: une méthode de classement en Présence de critères Multiples*. Groupe Metra.

Roy, B., & Bouyssou, D. (1993). *Aide multicritère à la décision : méthodes et cas*. Paris: Economica.*European Journal of Operational Research* , 281-290.

Annexe A

New Decisions Made With Method ELECTREIII -

For Multicriteria Table: Test2

---- The MCDM Multicriteria Table ----

	PRIX	DELAIS	FRAIS_TRANSPORT	QUALITE
fournisseur1	-160,5	-3	-4,8	8
fournisseur2	-158,3	-7	-2,1	6
fournisseur3	-161,9	-4	-3,9	9
fournisseur4	-163	-2	-5,9	10
fournisseur5	-159	-6	-4,2	7,5

---- The Concordance Matrix (PRIX) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	0,4	1	1	0,75
fournisseur2	1	1	1	1	1
fournisseur3	0,8	0	1	1	0,05
fournisseur4	0,25	0	0,95	1	0
fournisseur5	1	1	1	1	1

---- The Concordance Matrix (DELAIS) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	1	1	1	1
fournisseur2	0	1	0,333	0	1
fournisseur3	1	1	1	0,667	1
fournisseur4	1	1	1	1	1
fournisseur5	0,333	1	0,667	0	1

---- The Concordance Matrix (FRAIS_TRANSPORT) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	0,172	1	1	1
fournisseur2	1	1	1	1	1
fournisseur3	1	0,601	1	1	1
fournisseur4	0,957	0	0,528	1	0,672
fournisseur5	1	0,457	1	1	1

---- The Concordance Matrix (QUALITE) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	1	1	0,5	1
fournisseur2	0,5	1	0	0	0,75
fournisseur3	1	1	1	1	1
fournisseur4	1	1	1	1	1
fournisseur5	1	1	0,75	0,25	1

---- The Concordance Matrix ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	0,553	1	0,9	0,9
fournisseur2	0,75	1	0,7	0,65	0,95
fournisseur3	0,92	0,5	1	0,95	0,62
fournisseur4	0,689	0,35	0,862	1	0,518
fournisseur5	0,9	0,864	0,9	0,7	1

---- The Discordance Matrix (PRIX) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	0	0	0
fournisseur2	0	0	0	0	0
fournisseur3	0	0,05	0	0	0
fournisseur4	0	0,142	0	0	0,083
fournisseur5	0	0	0	0	0

---- The Discordance Matrix (DELAIS) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	0	0	0
fournisseur2	0	0	0	1	0
fournisseur3	0	0	0	0	0
fournisseur4	0	0	0	0	0
fournisseur5	0	0	0	0	0

---- The Discordance Matrix (FRAIS_TRANSPORT) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	0	0	0
fournisseur2	0	0	0	0	0
fournisseur3	0	0	0	0	0
fournisseur4	0	0,247	0	0	0
fournisseur5	0	0	0	0	0

---- The Discordance Matrix (QUALITE) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	0	0	0
fournisseur2	0	0	0	0,25	0
fournisseur3	0	0	0	0	0
fournisseur4	0	0	0	0	0
fournisseur5	0	0	0	0	0

---- Matrice de Crédibilité ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	0,553	1	0,9	0,9
fournisseur2	0,75	1	0,7	0	0,95
fournisseur3	0,92	0,5	1	0,95	0,62
fournisseur4	0,689	0,35	0,862	1	0,518
fournisseur5	0,9	0,864	0,9	0,7	1

----- Résultat de la Distillation descendante -----

Classe	Actions
1	a1, a5
2	a2
3	a3, a4

----- Résultat de la Distillation ascendante -----

Classe	Actions
1	a3, a4
2	a1
3	a2, a5

Annexe B

Les tableau du calcul de concordance est de discordance :

La matrice de concordance

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	1	0,6	1	0,4	0,7	0,3
a2	0,4	1	1	0,4	0,6	0,5
a3	0	0,1	1	0,3	0,4	0,2
a4	0,7	0,6	1	1	0,7	0,6
a5	0,3	0,6	0,9	0,3	1	0,6
a6	0,7	0,5	1	0,7	0,5	1

La matrice de discordance du critère (g1)

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	25	0	0	30	5
a2	0	0	0	0	5	0
a3	15	40	0	0	45	20
a4	15	40	0	0	45	20
a5	0	0	0	0	0	0
a6	0	20	0	0	25	0

La matrice de discordance du critère (g2)

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	0	0	2	0	2
a2	2	0	0	4	0	4
a3	4	2	0	6	0	6
a4	0	0	0	0	0	0
a5	4	2	0	6	0	6
a6	0	0	0	0	0	0

La matrice de discordance du critère (g3)

	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	0	0	0	0	0
a2	2	0	0	2	1	1
a3	2	0	0	2	1	1
a4	0	0	0	0	0	0
a5	1	0	0	1	0	0
a6	1	0	0	1	0	0

La matrice de discordance du critère (g4)						
	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	2	0	1	0	3
a2	0	0	0	0	0	1
a3	1	3	0	2	0	4
a4	0	1	0	0	0	2
a5	2	4	1	3	0	5
a6	0	0	0	0	0	0

La matrice de discordance du critère (g5)						
	a1	a2	a3	a4	a5	a6
a1	0	0	0	1	0	0
a2	1	0	0	2	0	0
a3	2	1	0	3	1	0
a4	0	0	0	0	0	0
a5	1	0	0	2	0	0
a6	2	1	0	3	1	0

Annexe C

Les Tableaux de calcul de concordance et de discordance (Électre II)

---- The MCDM Multicriteria Table ----

	PRIX	DELAIS	FRAIS_TRANSPORT	QUALITE
fournisseur1	-160,5	-3	-4,8	8
fournisseur2	-158,3	-7	-2,1	6
fournisseur3	-161,9	-4	-3,9	9
fournisseur4	-163	-2	-5,9	10
fournisseur5	-159	-6	-4,2	7,5

---- The Concordance Matrix ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	1	0,35	0,55	0,65	0,35
fournisseur2	0,65	1	0,65	0,65	0,65
fournisseur3	0,45	0,35	1	0,65	0,6
fournisseur4	0,35	0,35	0,35	1	0,35
fournisseur5	0,65	0,35	0,4	0,65	1

---- The Discordance Matrix (PRIX) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	2,2	0	0	1,5
fournisseur2	0	0	0	0	0
fournisseur3	1,4	3,6	0	0	2,9
fournisseur4	2,5	4,7	1,1	0	4
fournisseur5	0	0,7	0	0	0

---- The Discordance Matrix (DELAIS) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	0	1	0
fournisseur2	4	0	3	5	1
fournisseur3	1	0	0	2	0
fournisseur4	0	0	0	0	0
fournisseur5	3	0	2	4	0

---- The Discordance Matrix (FRAIS_TRANSPORT) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	2,655	0,858	0	0,569
fournisseur2	0	0	0	0	0

fournisseur3	0	1,797	0	0	0
fournisseur4	1,087	3,742	1,945	0	1,656
fournisseur5	0	2,086	0,289	0	0

---- The Discordance Matrix (QUALITE) ---

	fournisseur1	fournisseur2	fournisseur3	fournisseur4	fournisseur5
fournisseur1	0	0	1	2	0
fournisseur2	2	0	3	4	1,5
fournisseur3	0	0	0	1	0
fournisseur4	0	0	0	0	0
fournisseur5	0,5	0	1,5	2,5	0