

MARTIN F. GUAY

**ANALYSE CINÉMATO-STATIQUE D'UN DOIGT
SOUS-ACTIONNÉ À 3 DDL POUR UNE PROTHÈSE DE
MEMBRE SUPÉRIEUR**

Mémoire présenté

à la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en génie mécanique
pour l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

2012

Résumé

La main humaine possède une architecture qui lui permet d'être largement étalée, de se replier sur elle-même ou de se refermer sur un objet en adoptant la forme de celui-ci. La combinaison de tous ces éléments crée un mécanisme de 28 degrés de liberté si nous considérons l'action du poignet.

La perte d'un tel instrument est dramatique car la reproduction artificielle d'un mécanisme aussi complexe pose plusieurs problèmes. Le nombre de pièces mécaniques qui doivent être conçues et assemblées dans un volume très restreint, le poids d'un tel assemblage qui est d'autant plus important car le mécanisme est littéralement porté à bout de bras toute la journée et la source d'énergie suffisante pour l'opération de ce mécanisme pendant une période suffisante sont que quelques uns de ces problèmes.

Plusieurs solutions à la perte de la main ont été proposées par les chercheurs œuvrant dans le domaine de la prothèse . Ces solutions vont de la plus simple prothèse à crochet à une main robotisée mettant à profit les dernières avancées technologiques. Cependant, toutes ces solutions ont une chose en commun : elles ne remplacent pas parfaitement la main humaine.

Les mécanismes sous-actionnés s'avèrent une alternative intéressante. Un mécanisme sous-actionné possède au moins un actionneur qui agit sur plus d'une liaison mécanique. Ce type de mécanisme est parfait pour prendre la forme d'un objet autour duquel il se referme. La théorie du sous-actionnement nous permet de comprendre le fonctionnement de ce mécanisme.

Un doigt sous-actionné a été développé sur le principe du tendon et poulies et afin d'optimiser sa conception et de s'assurer d'obtenir une séquence de fermeture désirée,

un modèle mathématique du mécanisme a été élaboré. L'effet de la gravité est rajouté au modèle qui tient compte de l'orientation spatiale de la main.

Avant-propos

Zack : Is that the laser ? It's bitchin'.

Sheldon : Yes. In 1917, when Albert Einstein established the theoretic foundation for the laser in his paper "Zur Quantentheorie de Strahlung, his fondest hope was that the resultant device be bitchin'.

The Big Bang Theory, CBS

Quand je m'arrête et je pense au chemin que j'ai parcouru jusqu'à la rédaction de ce mémoire, je peux qualifier ce chemin comme étant très sinueux. Ce chemin a été tracé par les décisions que j'ai prises face aux choix que la vie m'offrait. Ainsi, la vie a fait de moi un homme riche.

Je suis riche d'avoir vécu des expériences que je chéris à travers des opportunités uniques que la chance m'a présentées. Ces expériences m'ont aussi permises de rencontrer des gens merveilleux de toutes les strates de la société dont certains que je suis privilégié d'appeler mes amis. C'est à travers ces amitiés que j'ai acquis mes connaissances et compétences qui font de moi l'homme que je suis.

Il y a d'abords ma famille. Ce sont ceux qui me supportent tous les jours à travers mes sautes d'humeur sans comprendre tout à fait ce que je fais et surtout pourquoi je

le fais. Ma famille est toujours là pour me ramener sur terre et me rappeler que rien n'est dramatique. "Nous arriveront tous à Noël en même temps."

Il y a bien sûr mon directeur de maîtrise, Clément Gosselin, qui m'a fait confiance après une rencontre brève un matin d'été lorsque j'eus l'idée de faire de la robotique. Il m'a intégré en son équipe et m'a ouvert les portes sur ce monde merveilleux qu'est la robotique.

Boris et Thierry qui m'ont soutenu avec leurs conseils et qui m'ont laissé faire mes erreurs sans trop me remettre sur le nez pour ensuite me diriger vers la bonne direction. Alex, Greg, Simon et Kaveh, mes compagnons, qui prennent toujours un peu de temps pour discuter et rigoler.

Louis-Alexis, Nicolas et Simon, mes compagnons de voyage, avec qui j'ai parcouru Munich, l'Autriche et Prague. Ce fut un voyage mémorable. Je nous souhaite d'autres expériences comme celle-la.

Les Matheux, mais surtout Ben, J-S, Denis et Simon-Olivier, qui sont des amis précieux pour non seulement les maths et les stats mais surtout pour discuter et rire.

Il faut que je mentionne aussi mes compagnons d'armes, vivants et morts. Ensemble, nous avons affronté des moments durs et bons. Mais c'est lorsque je me suis blessé que leur amitié a devenu vraiment significative pour moi. Je regrette toujours de ne pas avoir montré à quel point elle est précieuse. Cependant, je sais que c'est grâce à elle que je suis ici aujourd'hui à écrire un mémoire. Sans les membres de mon régiment, je ne m'en aurais pas sorti aussi bien. CHIMO! BEAVER BROTHERS!

Table des matières

Résumé	iii
Avant-propos	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	xi
Liste des figures	xiii
Introduction	1
1 La main humaine	5
1.1 L'anatomie de la main	6
1.1.1 Références	7
1.1.2 Généralités	8
1.1.3 Les doigts	9
1.1.4 Les os	10
1.1.5 Les articulations	11
1.1.5.1 Les liaisons métacarpo-phalangiennes	12
1.1.5.2 Les liaisons inter-phalangiennes	13
1.1.6 Les muscles	15
1.2 Les mouvements de la main	16
1.3 Modélisation de la main humaine	21
1.4 La main ACT	24
1.5 Conclusion	26

2	Les prothèses	29
2.1	Le crochet	34
2.2	La prothèse myoélectrique	38
2.2.1	Otto Bock	40
2.2.1.1	SensorHand	40
2.2.1.2	La main MichelAngelo	41
2.2.2	Touch Bionics	42
2.2.2.1	La main I-Limb	43
2.2.2.2	La main I-limb Pulse	45
2.2.3	La main Be-Bionic	46
2.2.4	La main SmartHand	46
2.2.5	Le projet DARPA Revolutionizing Prosthetics	48
2.2.5.1	La main Proto 2	49
2.2.5.2	La main Luke	51
2.2.5.3	La bras MPL	55
2.3	Conclusion	56
3	Théorie du sous-actionnement	57
3.1	Modèle statique de l'actionnement	58
3.1.1	Vecteur des couples d'entrée	59
3.1.2	Vecteur des vitesses angulaires	61
3.1.3	Visseur associé au point de contact i	61
3.1.3.1	Visseur associé au point de contact 1	61
3.1.3.2	Visseur associé au point de contact 2	62
3.1.3.3	Visseur associé au point de contact 3	64
3.1.4	Torseur associé au point de contact i	65
3.1.5	Expression des forces	68
3.1.5.1	Couples locaux	69
3.1.5.2	Forces de contact	69
3.2	Conclusion	70
4	Modélisation mathématique	73
4.1	Premier prototype	73
4.2	Deuxième prototype	81
4.3	Calcul de la matrice de transmission pour l'actionnement	83
4.4	Calcul de la matrice de transmission pour le rappel	86
4.5	Couples dus à l'actionnement et au rappel	89

4.5.1	Couples dus à l'actionnement	89
4.5.2	Couples dus au rappel	90
4.6	Couples dus à la gravité	91
4.6.1	Théorème de rotation d'Euler	91
4.6.1.1	Rotations d'Euler	92
4.6.1.2	Angles de Tait-Bryan	92
4.6.2	Effets de la gravité sur les liaisons rotoïdes	94
4.6.2.1	Liaison rotoïde entre les phalanges distale et médiane .	94
4.6.2.2	Liaison rotoïde entre les phalange médiane et proximale	96
4.6.2.3	Liaison rotoïde entre la paume et la phalange proximale	98
4.6.3	Le modèle	101
4.7	Conclusion	102
5	Résultats numériques	103
5.1	Deuxième prototype	104
5.1.1	Forces de contact	104
5.1.2	Séquence de fermeture	108
5.1.3	Forces de rappel	112
5.2	Conclusion	116
	Conclusion	119
	Bibliographie	123
	A Théorème de rotation d'Euler	127

Liste des tableaux

1.1	Les paramètres géométriques de la main selon la convention Denavit-Hartenberg	22
5.1	Paramètres physiques du 2 ^{ème} prototype.	104

Liste des figures

1.1	Qualificatifs d'orientation et plans de coupe (source : Wikipédia). . . .	7
1.2	La main humaine (source : Palm reading guide).	9
1.3	Notation de la main (source : CSSS d'Arthabaska-et-de-l'Érable). . . .	10
1.4	Les os de la main (source : Le dictionnaire visuel).	11
1.5	Les articulations du doigt (source : Wikipédia).	12
1.6	La main ACT (source : Laboratoire de neurobotique, Univ. of Washington).	25
1.7	L'index D2 en flexion (source : Laboratoire de neurobotique, Univ. of Washington).	25
2.1	Prothèse d'orteil datant de l'égypte antique (source : Wikipédia). . . .	30
2.2	Bras de fer du chevalier von Berlichen (source : Qwiki).	31
2.3	La main Sauerbruch (source : Deutsches Museum).	32
2.4	Jambes artificielles modernes pour le sprint (source : Wikipédia). . . .	33
2.5	Crochet et harnais (source : OPP, Sean McHugh).	34
2.6	Harold Russell, acteur et vétéran américain de la Deuxième Guerre Mon- diale (source : bob coburn/the kobal collection).	35
2.7	3 types de crochets disponibles (source : Hosmer Dorrance Corp.). . . .	36
2.8	Le crochet "Grip" (source : TRS inc.).	36
2.9	Le crochet "Grip" en action (source : TRS inc.).	37
2.10	La Sensor Hand d'Otto Bock avec et sans gant cosmétique (source : Otto Bock).	41
2.11	La main MichelAngelo d'Otto Bock avec et sans le gant cosmétique (source : Otto Bock).	42

2.12	Épeluchage d'une banane avec la main MichelAngelo (source : Otto Bock).	43
2.13	La main I-Limb (source : Touch Bionics).	43
2.14	La main I-Limb en action (source : Touch Bionics).	44
2.15	La main I-Limb Pulse (source : Touch Bionics).	45
2.16	La main I-Limb en action (source : Touch Bionics).	45
2.17	La main Be-Bionic (source : Be-Bionics).	46
2.18	La SmartHand (source : Lund University).	47
2.19	La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).	49
2.20	La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).	51
2.21	La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).	52
2.22	La main Luke (source : DEKA Research and Development).	53
2.23	La main Luke (source : DEKA Research and Development).	54
2.24	La main Luke (source : DEKA Research and Development).	54
2.25	La main MPL (source : Johns Hopkins University).	55
3.1	Modèle conceptuel d'un doigt à 3 phalanges.	59
3.2	Modèle statique d'un doigt à 3 phalanges.	60
3.3	Vitesses associées au premier point de contact.	62
3.4	Vitesses associées au deuxième point de contact.	63
3.5	Vitesses associées au troisième point de contact.	64
4.1	Premier prototype.	74
4.2	Géométrie du premier prototype.	75
4.3	Géométrie de la base.	77
4.4	Géométrie de la première phalange.	78
4.5	Géométrie de la deuxième phalange.	79
4.6	Deuxième prototype.	82
4.7	Modèle statique d'un doigt du deuxième prototype.	83
4.8	Rotation d'une articulation.	84
4.9	Changement d'orientation associé à la rotation d'une articulation.	87
4.10	La main et les repères spatiaux.	93
5.1	Force de contact sur la phalange proximale	106
5.2	Force de contact sur la phalange médiane	107
5.3	Domaine où le doigt est en équilibre statique	108
5.4	Domaine où le doigt est en équilibre statique	109
5.5	Domaine où le doigt est en équilibre statique	110

5.6	Séquence de fermeture du deuxième prototype	111
5.7	Séquence de fermeture sans les forces de rappel	112
5.8	Progression angulaire lors de la fermeture	113
5.9	Séquence de fermeture sans les forces de rappel et l'effet de la gravité .	113
5.10	Séquence de fermeture sans l'effet de la gravité	114
5.11	Différence entre le couple de rappel et le couple dû à la gravité	115
5.12	Séquence de fermeture avec $K=19$ N/mm et $y_0=14$ mm	116
5.13	Séquence de fermeture des angles avec $K=19$ N/mm et $y_0=14$ mm . . .	116

Introduction

Even if there is only one possible unified theory, it is just a set of rules and equations. What is it that breathes fire into the equations and makes a universe for them to describe ?

Stephen Hawking

Le monde de la prothèse, quoique très ancien, est en pleine effervescence. Les technologies qui sont disponibles aujourd'hui et l'évolution des systèmes de santé au niveau global sont des facteurs qui favorisent cette effervescence. Nous sommes loin de la jambe de bois et du crochet des marins du 17^{ème} siècle.

Nous développons présentement des matériaux qui s'intègrent parfaitement au corps humain et vont jusqu'à imiter certaines fonctions des tissus naturels. Ces matériaux peuvent respirer, s'intégrer au squelette humain, influencer les hormones ou servir de barrière entre le corps et les bactéries présentes dans l'environnement.

La fonction d'une prothèse est aussi diversifiée que la partie du corps humain qu'elle est destinée à remplacer. Sa fonction peut être simple et surtout cosmétique comme le

pavillon de l'oreille. Sa fonction peut être vitale et complexe comme dans le cas d'une hanche. Alors le développement technologique d'une catégorie de prothèse est lié à la complexité de sa fonction ou à son degré d'intégration au corps. Le développement n'est donc pas égal pour toutes les prothèses.

L'intégration de la robotique dans le monde de la prothèse a permis aux concepteurs de prothèses de s'attaquer aux fonctions plus complexes de certains éléments du corps humain. Nous parlons maintenant de prothèses intelligentes. Ainsi, il existe des prothèses auditives qui s'adaptent au bruit ambiant en amplifiant seulement les sons importants et des genoux intelligents qui anticipent l'intention de l'amputé en distinguant la marche sur le plat de l'escalade d'escalier.

Ces technologies sont très utiles. Cependant elles peuvent entraîner des coûts exorbitants et/ou peuvent être d'une complexité extrême ce qui peut se traduire en des problèmes d'intégration de systèmes, de fiabilité ou en un entraînement trop complexe afin d'utiliser cette technologie de façon efficace.

Le Laboratoire de robotique de l'Université Laval propose les mécanismes sous-actionnés comme compromis pour palier à la complexité et au coût. Les mécanismes sous-actionnés possèdent une intelligence mécanique présente dans leur conception qui leur permet de s'adapter à la forme de l'objet en contact et ce sans la participation de centre logique externe, comme le cerveau de l'utilisateur. Alors, pour que le mécanisme opère correctement, il n'y a aucun besoin de programmation, de capteurs ou de système logique pour la prise de décision.

En 2005, un premier prototype de prothèse de main a été réalisé au laboratoire. Ce prototype présente des lacunes sérieuses qui sont surtout reliées au frottement. Néanmoins, il est un excellent point de départ pour étudier l'intégration du sous-actionnement dans les prothèses pour membres supérieurs. Un deuxième prototype qui intègre un mécanisme amélioré promet des meilleures performances.

Le premier chapitre de ce mémoire présente la main humaine. Il est important de connaître en détail l'outil naturel, versatile mais complexe qu'est la main humaine. Il est important de définir cette complexité en explorant les différents mouvements qu'elle peut réaliser. Pour pouvoir définir ces mouvements ou plutôt poses, il est important de connaître des éléments de physiologie se rapportant à la main. Ainsi, le lien entre les

divers mouvements et l'ensemble des éléments de la main qui doivent être coordonnés pour les réaliser peut être établi.

Le deuxième chapitre présente les prothèses. Le corps humain est relativement fragile et le besoin de remplacer des éléments perdus afin de continuer à remplir une fonction de la société ne date pas d'hier. La science des prothèses est à la fois ancienne et récente car ce dernier siècle a vu des avancées extraordinaires dans le domaine. Les prothèses pour membres supérieures y sont abordées. Les prothèses les plus simples et les plus sophistiquées sont analysées car chacune présente des lacunes non-négligeables. Toutes les prothèses pour membres supérieures sont très loin de répondre au modèle standard : le bras humain. Chacune est donc le fruit d'une série de compromis.

Le troisième chapitre présente la théorie du sous-actionnement. Le sous-actionnement caractérise les mécanismes qui possèdent un plus grand nombre de degrés de liberté que de degrés d'actionnement. La formulation utilisée ici est celle présentée dans [?]. Le développement de cette théorie est important pour les mécanismes de sous-actionnement car elle permet d'exprimer mathématiquement le comportement d'un mécanisme sous-actionné. À partir du principe des puissances virtuelles, une matrice de transmission est développée. Cette matrice gère la distribution des forces d'actionnement vers les mécanismes sous-actionnés. Elle constitue l'intelligence mécanique du système. Avec l'aide d'une matrice jacobienne, un vecteur de forces de contact peut être calculé ou un vecteur de couples locaux aux liaisons mécaniques peut être déterminé.

Le quatrième chapitre présente un modèle cinémato-statique qui décrit le comportement du doigt du deuxième prototype réalisé au laboratoire. Ce modèle est issu de la théorie du sous-actionnement présentée au chapitre 3 et des travaux publiés par des membres du laboratoire sur l'intégration de plusieurs mécanismes de sous-actionnement. Deux matrices de transmission y sont explicitement calculées. Cependant, les effets de la gravité sur les couples locaux aux liaisons y sont également calculés. Ces effets, jusqu'ici ignorés, ont un impact certain sur les séquences de fermeture du doigt.

Le cinquième chapitre présente des simulations numériques réalisées à partir du modèle mathématique développé au chapitre 4. Dans ce chapitre, l'utilité d'avoir des expressions analytiques pour décrire les forces et couples agissant sur le prototype du doigt est apparente. Une étude de la stabilité de la prise du doigt y est réalisée. Un domaine de stabilité y est défini. Ensuite, la séquence de fermeture du doigt sans

contact extérieur est étudiée. Ces simulations peuvent être utiles pour effectuer des tâches d'optimisation dans la conception du doigt.

Chapitre 1

La main humaine

Ce chapitre présente la main humaine. Nous y découvrons la complexité et la versatilité de cet instrument distinct de l'humain. La physiologie de la main y est résumée afin de comprendre la complexité des mécanismes présents naturellement dans la main humaine et pourquoi la technologie peine à les reproduire. Ensuite, les différents mouvements de préhension sont présentés. Finalement, deux exemples de recherches sur la physiologie de la main sont introduits.

La main est un organe préhensile à doigts multiples. Elle est l'organe principal qui permet de manipuler l'environnement sans quoi l'interaction physique avec le dit environnement est très limitée sinon passive. La main permet deux catégories d'actions importantes. Elle permet de saisir des objets qui est une habileté plus connue sous

le terme anglophone "grasping". Cette habileté est dite grossière et se retrouve chez plusieurs espèces animales. La main permet également de manipuler un objet. Cette habileté, plus connue sous le nom de dextérité, est spécifique aux primates et donc aux humains.

L'homme est fasciné par ses mains depuis la nuit des temps. Il reconnaît l'outil extraordinaire qu'il a hérité de la nature. Le sens du toucher est associé aux mains. Le bout des doigts constitue d'ailleurs les surfaces les plus densément peuplées de terminaux nerveux du corps humain. Les mains jouent un rôle très important lors de moments intimes entre deux personnes. L'exploration du monde entourant l'enfant se fait à travers ses mains.

Le lien entre cet outil et l'intelligence a été étudié depuis la Grèce antique. Dans un de ses livres dédié aux sciences naturelles [?], Aristote argumente les pensées du philosophe Anaxagore en déclarant : "Anaxagore prétend que c'est parce qu'il a des mains que l'homme est le plus intelligent des animaux. Ce qui est rationnel plutôt, c'est de dire qu'il a des mains parce qu'il est intelligent."

Le débat était lancé. L'homme était-il devenu intelligent parce qu'il possédait des mains ou était-ce la réciproque ? La science ainsi que la théorie de l'évolution semble vouloir confirmer la conjecture d'Anaxagore. L'extraordinaire dextérité mécanique de la main humaine chez l'homo sapiens semble avoir été un facteur déterminant dans le développement d'un cerveau supérieur à celui des autres animaux. Il semble alors naturel que les ingénieurs soient fascinés par cet instrument versatile et précis. Cependant, la complexité de la main semble un obstacle majeur au développement d'un mécanisme artificiel qui puisse remplacer la perte d'une ou des mains.

1.1 L'anatomie de la main

La main humaine a une architecture lui permettant d'être largement étalée, de se refermer sur elle-même ou de se refermer sur un objet adoptant la forme de celui-ci. Il est donc très intéressant d'étudier chaque composant de cette architecture et son rôle.

1.1.1 Références

Afin de s'assurer d'éviter tous malentendus, l'anatomie comporte des conventions strictes. Nous en mentionnons quelques unes ici qui seront utilisées dans ce chapitre.

Les orientations dans le corps humain ainsi que les plans conventionnels du corps humain sont résumés par la figure ??.

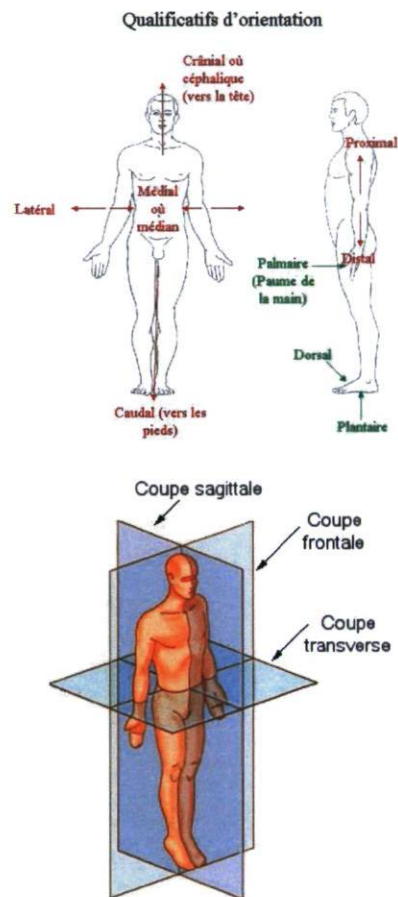


FIGURE 1.1 – Qualificatifs d'orientation et plans de coupe (source : Wikipédia).

Nous parlerons des mouvements suivants :

- la flexion : un mouvement consistant à diminuer l'angle entre deux os ;
- l'extension : un mouvement consistant à augmenter l'angle entre deux os ;
- l'abduction : un mouvement consistant à écarter un membre du plan sagittal du corps ;

- l'adduction : un mouvement consistant à rapprocher un membre du plan sagittal du corps ;
- la circumduction : un mouvement dans lequel l'extrémité distale d'un corps décrit un cercle. C'est une séquence continue de flexion, d'abduction, d'extension et d'adduction.

1.1.2 Généralités

La main humaine comprend une large paume et 5 doigts. Elle est attachée au reste du corps par une liaison appelée le poignet. Le dos de la main se nomme dorsum et le côté intérieur de la main est désigné comme étant la paume.

La paume est bordée latéralement par deux éminences ou saillies convexes : l'éminence thénar, sous le pouce et l'éminence hypothénar. La paume comporte trois rides profondes, présentes dès la naissance et un pli généralement présent :

- le pli palmaire inférieur ;
- le pli palmaire moyen ;
- le pli palmaire supérieur ;
- le pli hypothénarien ;

Ces plis sont des repères importants de la paume. La figure ?? démontre très bien que ces plis sont très apparents. Ils sont maintenus en dépression par des fibres linéaires les reliant à des structures profondes. Ces éminences et plis font que la paume reste concave pour toute les positions de la main.

Les doigts, sauf le pouce, présentent aussi trois plis palmaires :

- le pli digital distal qui forme la limite proximale de la pulpe ;
- le pli digital proximal qui forme la limite proximale de P2 (voir la sous-section ??) ;
- le pli digito-palmaire qui forme la limite proximale de P1 (voir la sous-section ??) ;

Ces plis ont la même fonction d'amarrage cutané que les plis de la paume.



FIGURE 1.2 – La main humaine (source : Palm reading guide).

1.1.3 Les doigts

Les cinq doigts de la mains sont :

- le pouce (D1) ;
- l'index (D2) ;
- le majeur (D3) ;
- l'annulaire (D4) ;
- l'auriculaire (D5) ;

Les noms des doigts sont couramment utilisés mais sont spécifiques au français. Les noms des doigts varient d'une langue à une autre. Afin de permettre à l'ensemble de la communauté scientifique de mieux travailler, des abréviations et une terminologie spécifiques leur ont été attribuées. La figure ?? résume cette notation ainsi que celle

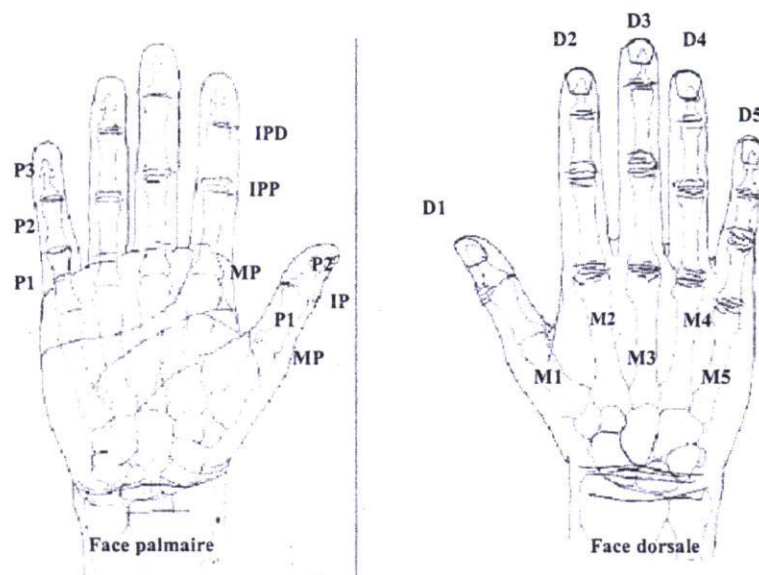


FIGURE 1.3 – Notation de la main (source : CSSS d'Arthabaska-et-de-l'Érable).

des os et des articulations dont la description suit dans les sous-sections suivantes.

1.1.4 Les os

La main humaine comporte 27 os. Ces os se distribuent en trois catégories principales :

- le poignet ou carpe qui comprend huit os qui sont alignés sur deux rangées :
 - la proximale qui comprend :
 - le scaphoïde ;
 - le semi-lunaire ;
 - le pyramidal ;
 - le pisiforme ;
 - la distale qui comprend :
 - le trapèze ;
 - le trapèzoïde ;
 - le grand os ;
 - l'os crochu ;
- la paume qui comprend cinq métacarpes, chacune correspondant à un doigt ;

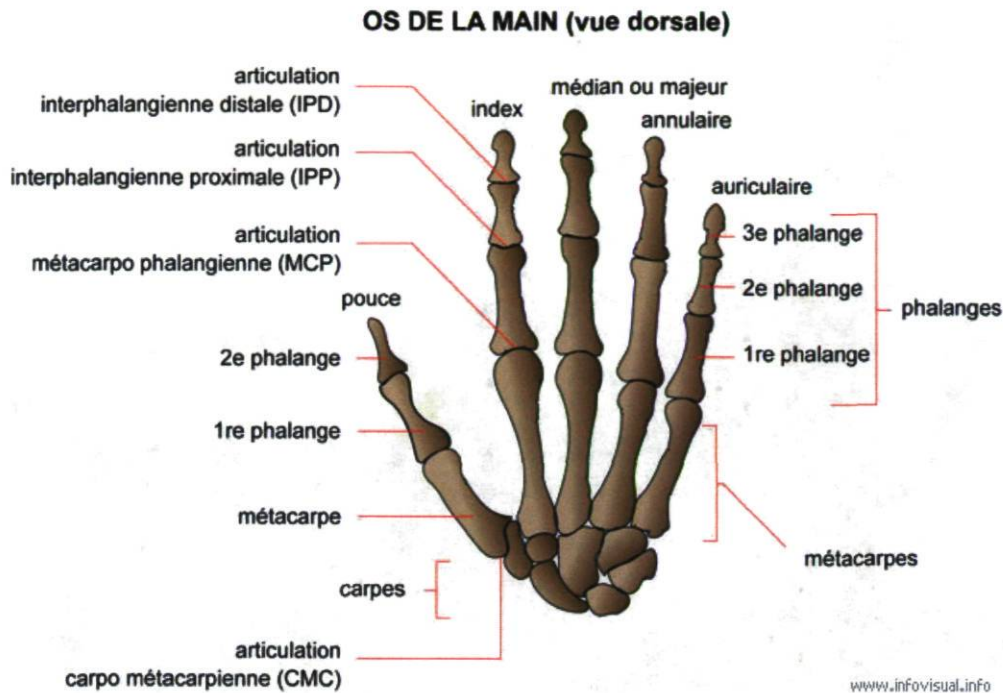


FIGURE 1.4 – Les os de la main (source : Le dictionnaire visuel).

- et les quatorzes phalanges.

Deux phalanges composent le pouce, notées P1 et P3 (voir figure ??). Trois phalanges composent chacun des autres doigts, notés P1, P2 et P3. Elles sont également connues, dans l'ordre, sous les noms de phalange proximale, phalange médiane et phalange distale. Très innervée, la phalange distale, comprenant l'ongle, possède une grande sensibilité et permet à l'humain de mieux ressentir son environnement (chaud, froid, textures, etc.)

1.1.5 Les articulations

La main humaine comporte les articulations suivantes :

- la liaison radio-carpienne
- les liaisons inter-carpiennes ;
- les liaisons carpo-métacarpiennes ;
- les liaisons inter-métacarpiennes ;

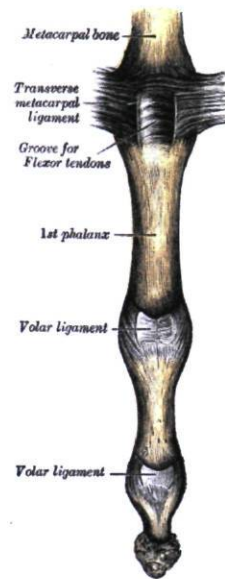


FIGURE 1.5 – Les articulations du doigt (source : Wikipédia).

- les liaisons métacarpo-phalangiennes (MP) ;
- les liaisons inter-phalangiennes (IP, IPP et IPD) ;

La figure ?? nous montre, du haut au bas, les articulations MP, IPP et IPD.

Toutes ces articulations, ensemble, permettent de réaliser des mouvements et des gestes complexes avec la main, dont sa fermeture en forme de poing. Nous nous concentrons sur les liaisons métacarpo-phalangiennes et inter-phalangiennes car elles sont celles qui régissent le mouvement des doigts en tant que tels.

1.1.5.1 Les liaisons métacarpo-phalangiennes

Les liaisons métacarpo-phalangiennes relient les métarpes aux phalanges proximales. Elle sont des liaisons de type condylien. C'est-à-dire que la liaison comporte une surface articulaire ovale formée par la forme arrondie de la métacarpe. Cette surface est reçue dans une cavité ellipsoïdale beaucoup plus étroite constituant le bout proximal de la première phalange. Ce dernier est prolongé du côté palmaire par le fibro-cartilage glénoïdien et peut être considéré comme étant une surface d'appoint. En extension, le fibro-cartilage glénoïdien est en contact avec la tête de la métacarpe. En flexion, le fibro-cartilage déborde la tête de la métacarpe lorsqu'elle pivote autour de sa charnière

et glisse sur la face antérieure de la métacarpe.

La forme convexe des métacarpes de la main varie de selon le doigt. La tête de l'index D1 et du majeur D2 sont nettement asymétriques ayant le côté externe aplati. L'auriculaire D5 présente une asymétrie inverse tandis que l'annulaire D4 est plus symétrique. Ces différences jouent un rôle important dans la flexion oblique des doigts.

Deux types de ligaments jouent un rôle important dans cette articulation. Le ligament métacarpo-glénoïdien contrôle les mouvements du fibro-cartilage glénoïdien et les deux ligaments latéraux qui maintiennent en contact les surfaces de l'articulation et limitent les mouvements.

Ceci résulte en une articulation de 2 degrés de liberté permettant les mouvements de flexion, d'extension, d'adduction, d'abduction ainsi que de circumduction. Les mouvements d'adduction et d'abduction sont limités et totalement absents lors de la flexion des doigts puisque l'insertion des ligaments est légèrement à l'arrière du centre de la tête de la métacarpe. Ces ligaments sont, par ailleurs détendus lors de l'extension mais tendus lors de la flexion.

En extension, le mouvement latéral possible est de l'ordre de 20° ou 30° de chaque côté. L'amplitude de la flexion est de 90° pour l'index D2 et croît pour chaque doigt. L'amplitude de l'extension active peut atteindre 30° ou 40° tandis que l'amplitude de l'extension passive peut atteindre 90° chez certains individus.

Quant aux doigts longs, les liaisons métacarpo-phalangiennes se comportent plus comme des liaisons de type ginglymoïdes similaires aux liaisons inter-phalangiennes.

1.1.5.2 Les liaisons inter-phalangiennes

Les liaisons inter-phalangiennes relient les phalanges des doigts. Sauf dans le cas du pouce, il y a deux types de liaisons inter-phalangiennes : les liaisons inter-phalangiennes proximales (IPP) qui joignent les phalanges proximale et médiane et les liaisons inter-phalangiennes distales (IPD) qui joignent les phalanges médiane et distale.

Les liaisons inter-phalangiennes sont des liaisons de type trochléen ou charnière. La tête de la phalange a la forme d'une poulie tandis que la base de la phalange

correspondante possède une crête de mousse séparant deux cavités glénoïdes creusées de façon à recevoir la poulie. Comme pour les liaisons métacarpo-phalangiennes, les liaisons inter-phalangiennes possèdent des fibro-cartilages glénoïdiens qui jouent le même rôle dans le mouvement de l'articulation. Elle possèdent également des ligaments phalango-glénoïdiens qui régissent les mouvements des fibro-cartilages glénoïdiens.

De plus, les liaisons inter-phalangiennes possèdent des ligaments latéraux. Cependant, ceux-ci se tendent beaucoup plus en flexion puisque la poulie s'élargit vers le côté palmaire. Les ligaments latéraux sont aussi tendus lors de l'extension. Alors la liaison inter-phalangienne proximale IPP est très stable latéralement ; il n'y a pas de mouvements latéraux passifs. La liaison inter-phalangienne distale IPD, quand à elle, présente des légers mouvements latéraux passifs.

Ceci résulte en une articulation à 1 degré de liberté permettant seulement les mouvements de flexion et d'extension.

L'extension active des liaisons inter-phalangiennes est quasi-nulle. L'extension passive est nulle pour les liaisons inter-phalangiennes proximales IPP mais d'environ 30° pour les liaisons inter-phalangiennes distales IPD. L'amplitude de la flexion des liaisons inter-phalangiennes proximales IPP dépasse 90° . Cette amplitude croît de doigt en doigt pour atteindre environ 135° pour l'auriculaire D5. Pour ce qui est des liaisons inter-phalangiennes distales IPD, l'amplitude de la flexion est inférieure à 90° et croît pour atteindre 90° pour l'auriculaire.

La flexion de chaque doigt ne s'effectue pas dans le même plan. La flexion de l'index D1 est dans le plan sagittal ce qui amène la phalange distale P3 vers l'éminence thénar. Les axes de flexion des autres doigts longs ne sont pas dans un plan sagittal mais dans une direction oblique, l'auriculaire ayant l'axe le plus oblique. Les axes de flexion des doigts longs convergent en un point situé à la gouttière du pouls. Ainsi, l'annulaire D4 et l'auriculaire D5 peuvent s'opposer de façon efficace au pouce D1.

Cet effet de convergence des axes de flexion est atteint par l'asymétrie présente à la tête des métacarpes (voir la sous-section ??) et l'asymétrie des têtes des phalanges ainsi que le rôle différentiel des ligaments latéraux.

1.1.6 Les muscles

Les muscles responsables du mouvement de la main sont habituellement regroupés en deux catégories : les muscles extrinsèques et les muscles intrinsèques. Ils se distinguent par la région anatomique où ils se trouvent. Les muscles extrinsèques sont des muscles longs. Le muscle lui-même se situe dans six compartiments distincts de l'avant-bras et il est lié par des tendons et des ligaments passant au poignet jusqu'à la paume, le dorsum ou aux phalanges.

Les muscles extrinsèques sont responsables de la flexions ou de l'extension du poignet ou des doigts. Il sont forts et produisent le mouvement grossier pour effectuer la saisie d'objets. Il y a quinze muscles extrinsèques :

- *flexor carpi radialis (FCRM)* : muscle fléchisseur radial du poignet ;
- *palmaris longus (PLM)* : muscle long palmaire ;
- *flexor carpi ulnaris (FCUM)* : muscle fléchisseur ulnaire du poignet ;
- *flexor digitorum superficialis (FDSM)* : muscle fléchisseur superficiel des doigts ;
- *flexor digitorum profundus (FDPM)* : muscle fléchisseur profond des doigts ;
- *flexor pollicis longus (FPLM)* : muscle long fléchisseur du pouce ;
- *extensor carpi radialis longus (ECRLM)* : muscle long extenseur radial du poignet ;
- *extensor carpi radialis brevis (ECRBM)* : muscle court extenseur radial du poignet ;
- *extensor carpi ulnaris (ECUM)* : muscle extenseur ulnaire du poignet ;
- *extensor digitorum (EDM)* : muscle extenseur des doigts ;
- *extensor pollicis longus (EPLM)* : muscle long extenseur du pouce ;
- *extensor pollicis brevis (EPBM)* : muscle court extenseur du pouce ;
- *extensor indicis (EIM)* : muscle extenseur de l'index ;
- *extensor digiti minimi (EDMM)* : muscle extenseur du petit doigt ;
- *abductor pollicis longus (APLM)* : muscle long abducteur du pouce.

Les muscles intrinsèques sont responsables des mouvements fins. Ces mouvements sont associés au doigté. Il y a dix-neuf muscles intrinsèques.

- *interossei palmares (IPM)* : 3 muscles interosseux palmaires ;
- *interossei dorsales (IDM)* : 4 muscles interosseux dorsales ;

- *lumbricales (LM)* : 4 muscles lombricaux ;
- *éminence thénar* : groupe des muscles du pouce formant une saillie arrondie :
 - *flexor pollicis brevis (FPBM)* : muscle court fléchisseur du pouce ;
 - *opponens pollicis (OPM)* : muscle opposant du pouce ;
 - *abductor pollicis brevis (APBM)* : muscle court abducteur du pouce ;
 - *adductor pollicis (APM)* : muscle adducteur du pouce ;
- *hypothénar* : groupe des muscles palmaires contrôlant le petit doigt :
 - *opponens digiti minimi (ODMM)* : muscle opposant du petit doigt ;
 - *flexor digiti minimi brevis (FDMM)* : muscle court fléchisseur du petit doigt ;
 - *adductor digiti minimi (ADMM)* : muscle adducteur du petit doigt ;
- *palmaris brevis (PBM)* : palmaire cutané ;

Ils se regroupent en trois catégories : les muscles de l'éminence thénar qui sont les muscles contrôlant le pouce, les muscles de l'hypothénar qui sont les muscles contrôlant le petit doigt et les muscles interosseux qui écartent ou rapprochent les autres doigts longs du doigt D3. Les muscles intrinsèques se retrouvent tous sur la face palmaire de la main et ce sont eux qui donnent la forme charnue de la paume.

Les muscles intrinsèques sont les muscles qui procurent l'aspect unique de la main humaine. Ceci est très apparent lors de l'observation d'une main comportant des muscles intrinsèques atrophiés. Ce sont ces muscles qui permettent l'opposition extrême du pouce (i.e. permettent au pouce et au petit doigt de se toucher).

Les phalanges ne comportent aucun muscle mais seulement des tendons et ligaments.

Pour plus de détails sur la physiologie fonctionnelle de la main humaine, le lecteur peut se référer aux textes [?], [?] et [?]. La référence [?] présente également un résumé sur la physiologie fonctionnelle de la main humaine.

1.2 Les mouvements de la main

Les quatre doigts longs (D2, D3, D4, D5) peuvent se replier sur la paume permettant ainsi la prise d'objet.

Le pouce (D1) qui est lié au trapézius (voir section??) est situé sur le côté, parallèle au bras. Il peut subir une rotation de 90° . M1 est le plus mobile des os métacarpiens. Il peut ainsi accomplir des mouvements qui s'apparentent à ceux d'une phalange.

Les cinq doigts n'ont pas la même importance pour la mécanique de la main. Nous distinguons trois zones :

I **le pouce** : le pouce a un rôle prépondérant dans l'utilisation de la main en raison de son opposabilité envers les doigts longs.

II **la zone des pinces** : cette zone comprend D2 et D3. Ils sont indispensables pour effectuer la pince bi-digitale (pince de précision) ainsi que pour effectuer la pince tri-digitale (pince de saisie des aliments) ;

III **la zone des prises** : cette zone comprend D4 et D5. Ils sont indispensables pour assurer la fermeté de la prise à pleine paume ou la poigne ;

Comme nous l'avons vu jusqu'à maintenant, l'architecture de la main est très complexe. Cela permet à celle-ci d'accomplir maintes tâches. La liste exhaustive de ces tâches s'avère très longue. Dans ce mémoire, nous ne présenterons que la préhension et ignorerons toutes les autres tâches ou actions possibles de la main (percussion, expression gestuelle, contact, etc.)

La préhension se divise en trois grands groupes : les prises proprement dites, les prises avec la pesanteur et les prises-plus-action.

- **les prises proprement dites** : ce groupe se divise également en trois et regroupe les prises ne nécessitant pas la gravité pour être accomplies.

A- **les prises ou pinces digitales** :

a- **les pinces bi-digitales** : il s'agit de la pince classique pouce-index. Elle comporte trois types selon la position d'opposition du pouce.

1- **la pince par opposition terminale** : la pince la plus fine et précise. Elle est utilisée pour saisir un objet de petit calibre comme une épingle. Le pouce D1 et l'index D2, ou parfois le majeur D3, s'opposent par l'extrémité de la pulpe. Cette pince peut faire appel à l'ongle afin de saisir des objets extrêmement fins comme une pièce de dix cents. Lors de l'exécution de la pince, la flexion est maximale nécessitant un jeu articulaire total et l'intégrité des groupes musculaires et tendons. Cette pince fait appel au

flexor digitorum profundus de l'index D2 et au *flexor pollicis longus* du pouce D1 qui stabilisent les phalanges distales en flexion.

- 2- **la pince par opposition subterminale** : c'est la pince la plus utilisée. Elle permet de saisir des objets plus grossiers. Le pouce D1 et l'index D2, ou autre doigt long, s'opposent par la face palmaire de la pulpe. Cette pince fait appel au *flexor digitorum superficialis* de l'index D2 qui stabilise en flexion la phalange médiane P2 ainsi que les muscles thénariens fléchisseurs de la phalange proximale P1 du pouce D1 : *flexor pollicis brevis*, *opponens pollicis*, *abductor pollicis brevis* et *adductor pollicis*.
 - 3- **la pince par opposition subtermino-latérale** : la pince utilisée pour tenir un ticket ou une carte de crédit. Moins précise et fine, cette pince est cependant solide et une alternative pour saisir divers objets, surtout lorsque les deux mouvements précédents ne sont pas physiquement réalisables. La face palmaire de la pulpe du pouce D1 s'appuie sur le côté externe de la phalange proximale P1 de l'index D2. Cette pince fait appel au *interosseus palmaris primus* pour stabiliser latéralement l'index D2 qui est également stabilisé par les autres doigts longs, ainsi que *flexor pollicis brevis*, *opponens pollicis* et *adductor pollicis*.
 - 4- **la préhension inter-digitale latéro-latérale** : la seule prise bi-digitale qui n'implique pas le pouce. C'est la prise typique du fumeur. Généralement, cette prise implique l'index D2 et le majeur D3. La force de la prise est faible et la prise est sans précision. Cette prise fait appel à l'*interosseus palmaris*.
- b- **les prises pluri-digitales** : comme le nom l'indique, ce sont les prises qui impliquent le pouce ainsi que deux, trois ou les quatre autres doigts. Ainsi ces prises sont plus fermes et stables que les précédentes.
- 1- **les prises tri-digitales** : cette prise implique le pouce D1, l'index D2 et le majeur D3. Elle est beaucoup utilisée par des civilisations qui ne connaissent pas l'utilisation des ustensiles pour porter les aliments à leur bouche. Elle est alors dite **prise tridigitale pulpaire**. Elle est aussi utilisée lorsque nous tenons une petite balle. Les pulpes du pouce D1, de l'index D2 et du majeur D3 sont en opposition contre l'objet. La prise tri-digitale permet aussi de tenir un crayon. La prise est pulpaire pour D1 et D2 mais latérale pour la phalange distale P3 du majeur D3.
 - 2- **les prises tétradigitales** : sont utilisées pour des objets plus importants

ou pour une prise plus ferme. La **prise tétradigitale pulpaire** peut être utilisée pour saisir un objet sphérique comme une balle de ping-pong. Le contact est pulpaire pour le pouce D1, l'index D2 et le majeur D3 mais latéral sur la phalange distale P3, pour l'annulaire D4, qui a pour rôle d'empêcher le glissement de la sphère hors de la prise. La **tétradigitale pulpo-latérale** est utilisée pour visser/dévisser un couvercle. Elle implique la pulpe et la face palmaire de la phalange proximale P1 du pouce D1. La **tétradigitale pulpaire pollici-tridigitale** est typiquement utilisée pour tenir un fusain ou un pinceau. L'archet de violon est maintenu avec cette prise. Elle implique la pulpe du pouce qui applique et maintient l'objet contre l'index D2, le majeur D3 et l'annulaire D4 qui sont presque en pleine extension.

- 3- **les prises pentadigitales** : qui emploient tous les doigts de la main. Nous parlons maintenant de saisir de gros objets sauf dans le cas de la **prise pentadigitale pulpaire** où les pulpes des doigts D1 D2 D3 et D4 ainsi que la face latérale de D5 sont en contact. La **prise pentadigitale pulpo-latérale** est utilisée pour saisir une balle de tennis par exemple. Les doigts D1 D2 D3 et D4 prennent contact sur toute leur surface palmaire, ce qui crée un enveloppement presque complet de l'objet, le pouce D1 étant en opposition aux trois doigts D2 D3 et D4. L'auriculaire D5 est en contact avec l'objet, par sa face externe, empêchant l'objet d'échapper à la prise. Puisque nous ne parlons pas de prise palmaire, le contact se fait de manière principale avec les doigts. Pour de gros objets hémisphériques, nous pouvons parler de **prise pentadigitale commissurale**. Le pouce D1 et l'index D2 sont largement étendus et écartés de façon à prendre contact avec toute leur surface palmaire. L'objet est maintenu par les autres doigts D3 D4 et D5. Finalement, il y a la **prise pentadigitale panoramique** qui permet de saisir des très gros objets plats. Les doigts sont en grand écart, le pouce en rétroposition et en sur-extension. Il est en opposition diamétrale à l'annulaire D4 avec lequel il forme un arc de 180°. L'index D2 et le majeur D3 font contact à l'intérieur et l'annulaire D5 ferme la prise formant un arc de 215° avec le pouce D1. L'efficacité de cette prise dépend principalement de l'action des articulations inter-phalangiennes et des muscles *flexores digitorum profundi*.

- B- **les prises palmaires** : sont les prises où la paume joue un rôle aussi important que les doigts. Elles se divisent en deux catégories selon l'utilisation du pouce ou

non.

a- **la prise digito-palmaire** : est la prise qui oppose la paume aux doigts longs. C'est la prise du levier ou du volant. Puisque le pouce n'est pas utilisé, la prise est plus ou moins ferme et ce, que dans le sens distal. Plus le diamètre de l'objet est important, moins la prise sera ferme. L'axe de la prise est perpendiculaire à l'axe de la main et ne suit pas la direction oblique de la gouttière palmaire ; oblique de la base de l'éminence hypothénar à la base de l'index D2.

b- **la préhension palmaire à pleine main** : est la prise force communément appelée la poigne. Elle est utile pour prendre des objets lourds et/ou volumineux. La main s'enroule entièrement autour d'un objet cylindrique. L'axe de l'objet prend la direction de l'axe de la gouttière palmaire. Ce dernier correspond à l'inclinaison de la crosse des outils et qui forment un angle de 100 à 110 degrés. La prise est optimale, plus ferme, lorsque le pouce D1 est en contact avec l'index D2. L'efficacité du pouce D1 est plus grande lorsque celui-ci est fléchi. Cette prise fait appel aux muscles *flexores digitorum superficialis* et *profondi* ainsi que *interossei palmares* qui assurent une flexion puissante des phalanges proximales P1 des doigts. Également, l'action de verrouillage du pouce D1 est assurée par tous les muscles de l'éminence thénar, *flexor pollicis brevis*, *opponens pollicis*, *abductor pollicis brevis* et *adductor pollicis*. Le *flexor pollicis longus* assure la flexion des phalanges médianes P2.

1- **la prise palmaire cylindrique** : afin de prendre des objets de diamètre important. Le verrouillage dépend de l'action de l'articulation métacarpo-phalangienne qui permet au pouce de former un cercle pour faire le tour de l'objet.

2- **les prises palmaires sphériques** : peuvent s'effectuer avec trois, quatre ou cinq doigts. Lorsque nous utilisons trois ou quatre doigts, le majeur D3 ou l'annulaire D4, selon le cas, prend contact latéral externe avec l'objet empêchant ce dernier de glisser de la prise. D3 est épaulé par D4 et D5 donnant ainsi une buttée contre l'action du pouce sur l'objet.

3- **la prise palmaire sphérique pentadigitale** : s'effectue avec les cinq doigts qui prennent contact avec l'objet avec leur face palmaire. Le pouce D1 s'oppose à l'annulaire D5. La prise est assurée distalement par l'index D2 et le majeur D3 et proximatement par l'éminence thénar et l'auriculaire D5.

C- **les prises centrées** : forment une symétrie autour d'un axe longitudinal qui

s'aligne généralement avec l'axe longitudinal de l'avant-bras. Généralement, l'objet est saisi de façon à ce qu'il devienne le prolongement de l'index D2. Nous pouvons penser à un tournevis ou un couteau. Lors de cette prise, l'index a un rôle directif. Ces prises nécessitent la flexion des doigts D3, D4 et D5, l'extension complète du doigt D2 et une légère opposition du pouce D1.

- **les prises avec la pesanteur** : nous considérons maintenant les prises où la pesanteur joue un rôle important pour la stabilité. Les prises précédentes sont réalisables en apesanteur tandis que les suivantes sont impossibles dans ces conditions. Les prises avec la pesanteur sont des situations où la main sert de support. La main peut être plate, paume vers le haut pour soutenir un plateau. La paume peut être creusée et prolongée par les doigts rapprochés pour contenir du liquide ou des grains. Cependant, la prise la plus utilisée est celle dite crochets ou un ou plusieurs doigts sont fléchis pour porter un seau ou une valise.
- **les prises-plus-actions** : sont les prises où la main agit en prenant. La liste non-exhaustive de ces prises inclut lancer une toupie, allumer un briquet, utiliser un aérosol, couper avec des ciseaux, manier les baguettes chinoises, etc.

Plus de détails sur ces mouvements de préhension et sur des mouvements plus complexes que la main peut accomplir sont présentés dans [?].

1.3 Modélisation de la main humaine

Maintenant que la physiologie de la main humaine est beaucoup plus claire, il est naturel de vouloir la modéliser numériquement afin de pouvoir en étudier le mouvement. Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce sens. Principalement, il y a les travaux [?], [?], [?] et [?] réalisés à la Politehnica University of Timisoara de Roumanie.

Dans [?], un modèle cinématique du majeur D3 est considéré. Afin de refléter la physionomie présentée dans ce chapitre, le mouvement du majeur D3 est modélisé avec une chaîne cinématique où :

- le poignet est une superposition de trois liaisons rotoïdes simples, disposées de façon orthogonale et agissant indépendamment, donnant les trois degrés de liberté

nécessaires ;

- la liaison métacarpo-phalangienne MCP est une superposition de deux liaisons rotoïdes simples, disposées de façon orthogonale et agissant indépendamment, produisant les deux degrés de liberté nécessaires ;
- la liaison inter-phalangienne proximale IPP est une liaison rotoïde simple ; et
- la liaison inter-phalangienne distale IPD est une liaison rotoïde simple.

Nous pouvons ainsi utiliser la convention de Denavit-Hartenberg et obtenir les paramètres géométriques qui sont reproduits au tableau ??, où les angles θ_{im} sont les angles associés au majeur D3.

Liaison	θ_i	L_i	d_i	α_i
1	θ_1	0	0	90
2	θ_2	0	0	90
3	θ_3	p	0	0
4	θ_{4m}	0	0	-90
5	θ_{5m}	f_{1m}	0	0
6	θ_{6m}	f_{2m}	0	0
7	θ_{7m}	f_{3m}	0	0

TABLE 1.1 – Les paramètres géométriques de la main selon la convention Denavit-Hartenberg

Ainsi, nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 n_x &= \cos \theta_1 [\cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sin \theta_2 \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
 &\quad + \sin \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \\
 n_y &= \sin \theta_1 [\cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sin \theta_2 \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
 &\quad - \cos \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \\
 n_z &= \sin \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \cos \theta_2 \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 o_x &= \cos \theta_1 [-\cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sin \theta_2 \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
 &\quad - \sin \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \\
 o_y &= \sin \theta_1 [-\cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) - \sin \theta_2 \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
 &\quad + \cos \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \\
 o_z &= -\sin \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) + \cos \theta_2 \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_x &= -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4) + \sin \theta_1 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\
a_y &= -\sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4) - \cos \theta_1 \cos(\theta_3 + \theta_4) \\
a_z &= -\sin \theta_2 \sin(\theta_3 + \theta_4)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
p_x &= [\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) + \sin \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4)] \\
&\quad [f_{1m} \cos \theta_5 + f_{2m} \cos(\theta_5 + \theta_6) + f_{3m} \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
&\quad + p [\cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3] \\
&\quad + \cos \theta_1 \sin \theta_2 [-f_{1m} \sin \theta_5 - f_{2m} \sin(\theta_5 + \theta_6) - f_{3m} \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
p_y &= [\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos(\theta_3 + \theta_4) - \cos \theta_1 \sin(\theta_3 + \theta_4)] \\
&\quad [f_{1m} \cos \theta_5 + f_{2m} \cos(\theta_5 + \theta_6) + f_{3m} \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
&\quad + p [\sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \sin \theta_3] \\
&\quad + \sin \theta_1 \sin \theta_2 [-f_{1m} \sin \theta_5 - f_{2m} \sin(\theta_5 + \theta_6) - f_{3m} \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
p_z &= \sin \theta_2 [\cos(\theta_3 + \theta_4) [f_{1m} \cos \theta_5 + f_{2m} \cos(\theta_5 + \theta_6) + f_{3m} \cos(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)] \\
&\quad + p \cos \theta_3] - \cos \theta_2 [-f_{1m} \sin \theta_5 - f_{2m} \sin(\theta_5 + \theta_6) - f_{3m} \sin(\theta_5 + \theta_6 + \theta_7)]
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Les équations ??, ?? et ?? définissent les vecteurs unitaires \mathbf{n} , \mathbf{o} et \mathbf{a} qui forment la base d'un repère situé au bout du doigt et qui déterminent l'orientation de ce dernier. L'équation ?? définit un vecteur de position \mathbf{p} qui détermine la position de l'origine de ce repère par rapport à la première liaison rotoïde située sur le poignet. Ces trois vecteurs décrivent donc le mouvement du majeur D3. Ce modèle est ensuite développé pour inclure les cinq doigts et codé dans un logiciel.

Pour que le modèle reproduise fidèlement les gestes de la main humaine, des contraintes sont insérées dans le modèle. Il y a trois types de contraintes : les limites de mouvement des doigts imposés par l'anatomie de la main, les limites imposées par les articulations lors du mouvement et les mouvements naturels de la main.

Les inégalités suivantes décrivent les limites de mouvement de la main :

- $-90^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$;
- $-15^\circ \leq \theta_2 \leq 15^\circ$;
- $-15^\circ \leq \theta_3 \leq 15^\circ$;
- $-15^\circ \leq \theta_{4m} \leq 15^\circ$;
- $0^\circ \leq \theta_{5m} \leq 90^\circ$;

- $0^\circ \leq \theta_{6m} \leq 110^\circ$; et
- $0^\circ \leq \theta_{7m} \leq 90^\circ$.

Les limites imposées par les articulations IPP ET IPD sont reproduites en imposant la contrainte suivante :

$$\theta_{IPD} = \frac{2}{3}\theta_{IPP}$$

où θ_{IPD} et θ_{IPP} sont respectivement les plages de mouvement des angles associés à l'articulation inter-phalangienne distale et l'articulation inter-phalangienne proximale.

Les travaux présentés dans la référence [?] présentent également un modèle dynamique de la main humaine. Il est simplifié en ne modélisant que la préhension. Plus spécifiquement, la prise d'un objet d'un gramme avec la prise pentadigitale pulpaire est simulée utilisant le logiciel Matlab. Ainsi, l'équipe roumaine est en mesure de déterminer les actionneurs les plus adaptés pour une prothèse qui présenterait les caractéristiques de la main humaine en préhension.

1.4 La main ACT

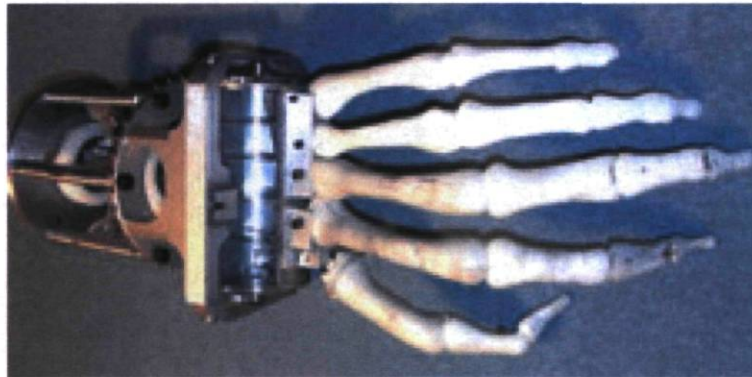


FIGURE 1.6 – La main ACT (source : Laboratoire de neurobotique, Univ. of Washington).

Tout ceci nous amène à la main ACT ou "Anatomically Correct Testbed" ou, le banc d'essai anatomiquement correct. Cette main, illustrée à la figure ??, est développée par le laboratoire de neurobotique de l'University of Washington à Seattle. Cette main est développée afin de répondre aux besoins suivants :

- un télémanipulateur qui imite parfaitement la dynamique active et passive de la main humaine pour des applications en prothèse ou en téléopération ;
- un banc d'essais pour explorer la complexité du contrôle neurologique des mouvements de la main humaine ;
- un modèle physique détaillé et fonctionnel de la main humaine afin de permettre aux neurochirurgiens et aux chirurgiens plastiques de développer et évaluer de nouvelles techniques chirurgicales de reconstruction de la main.

Leur but est de reproduire toutes les propriétés et les caractéristiques de la main qui affectent ses performances statiques et dynamiques. Ainsi ils utilisent des matériaux qui sont semblables en termes de masse, de résistance et d'élasticité pour approcher l'échelle et la géométrie des éléments naturels.



FIGURE 1.7 – L'index D2 en flexion (source : Laboratoire de neurobotique, Univ. of Washington).

Ils incorporent également les aspects neuro-musculo-squelettiques de l'anatomie de la main humaine qui sont cruciaux afin d'utiliser les signaux du corps humain. Ces aspects incluent les éléments suivants :

- les points d'insertion des tendons ;
- la forme générale des os ;
- les mécanismes d'extension ;
- la viscoélasticité passive des tendons ;

- la contraction musculaire ;
- l'emplacement des axes des articulations ;
- le débattement des articulations ; et
- la conservation de la taille générale et du poids.

Les interactions non-linéaires locales entre le débattement des muscles et celui de l'articulation est approché par les formes des os qui sont identiques aux os humains et les propriétés des gaines de tendons qui relient les actionneurs aux os du doigt. Ceci est illustré par la figure ?? qui compare l'index de la main ACT en flexion avec une main humaine.

Les auteurs espèrent ainsi pouvoir déterminer quelles fonctions biomécaniques et neurales sont requises afin de construire une main, robotique ou prothèse, capable de pleine dextérité. Pour plus de détails, ces travaux se retrouvent dans [?], [?], [?], [?] et [?].

1.5 Conclusion

La main et le cerveau sont deux éléments qui distinguent l'homme du reste du règne animal. Les évolutionnistes débattent toujours la question de savoir si la main est le résultat d'un cerveau développé ou si le cerveau est le résultat d'une main sophistiquée. Tout cela est le miroir de l'extraordinaire versatilité et complexité de la main humaine.

La main est un extraordinaire outils à 28 degrés de liberté, ayant la capacité de se régénérer, comprenant 27 os, 34 muscles et 3 groupes nerveux qui, avec l'aide de nombreux tendons, ligaments et articulations, sont orchestrés pour réaliser de nombreux mouvements grossiers mais aussi très délicats et précis.

Comme le témoignent les travaux pour reproduire fidèlement une main ou même de simplement de modéliser mathématiquement ses mouvements, la complexité de la main humaine défie la technologie moderne.

Chapitre 2

Les prothèses

Dans ce chapitre, les prothèses sont définies. Un bref historique y est présenté. Ensuite, l'attention est portée sur les deux catégories principales de prothèses pour membres supérieurs qui sont couramment utilisées : les crochets et les prothèses myoélectriques. Finalement, une liste sommaire de la nouvelle génération de prothèses pour membres supérieurs est présentée accompagnée d'un aperçu de la direction de la recherche actuelle.

Ce qui suit se veut une mise à jour et un complément de [?].

Aujourd'hui, la population générale est familière avec les prothèses. Le vieillissement de la population, les droits humains et la technologie sont des facteurs qui ont poussé les gouvernements à développer leur système de santé de façon à ce que la population

jouisse d'une meilleure qualité de vie et à ce que les personnes avec déficience physique soient plus intégrées dans la société. Cependant, il existe un malentendu en ce qui constitue une prothèse ou une orthèse.

Une orthèse est un dispositif qui :

- compense pour une fonction absente ou déficitaire ;
- assiste une structure articulaire ou musculaire ; ou
- stabilise un segment corporel pendant une phase de réadaptation ou de repos.



FIGURE 2.1 – Prothèse d'orteil datant de l'égypte antique (source : Wikipédia).

Cependant, une prothèse est un dispositif destiné à remplacer un membre, un organe ou une articulation. Elles peuvent être internes ou externes. Plusieurs exemples peuvent nous venir en tête : cœur artificiel, œil de verre, implants dentaires, appareils auditifs, etc. Une prothèse efficace répond d'une façon optimale aux critères suivants :

- fiabilité ;
- pour une tâche similaire, la prothèse ne doit pas demander d'effort considérablement supplémentaire (i.e. efforts physiques, poids de la prothèse, courbe d'apprentissage, ...);
- esthétique et fonctionnalité.

Le désir de remplacer un membre perdu n'est pas nouveau. Même si les moyens

techniques étaient restreint, les mieux nantis de l'antiquité se sont munis de prothèses primitives comme en témoigne la figure ??.

La figure ?? montre une prothèse de membre supérieur réalisée au 16^{ème} siècle pour le chevalier et mercenaire Götz von Berlichen. Il a perdu son bras droit lors du siège de la ville de Landshut en Bavière en 1504, [?], [?] et [?]. Un boulet de canon a tourné son épée contre lui le blessant sérieusement. Il s'est fait fabriquer un bras mécanique en acier pour remplacer son bras. Ce bras mécanique est très avancé pour son temps. La prothèse ressemble à un gant de fer, qui était très commun à cette époque, et des engrenages dans les doigts permettent de configurer les doigts de façon arbitraire. Berlichen pouvait tenir divers objets allant de la plume à son épée. Ainsi, il poursuivit ses activités militaires jusqu'en 1544 lorsqu'il se retira pour vivre en paix jusqu'à sa mort en juillet 1562.

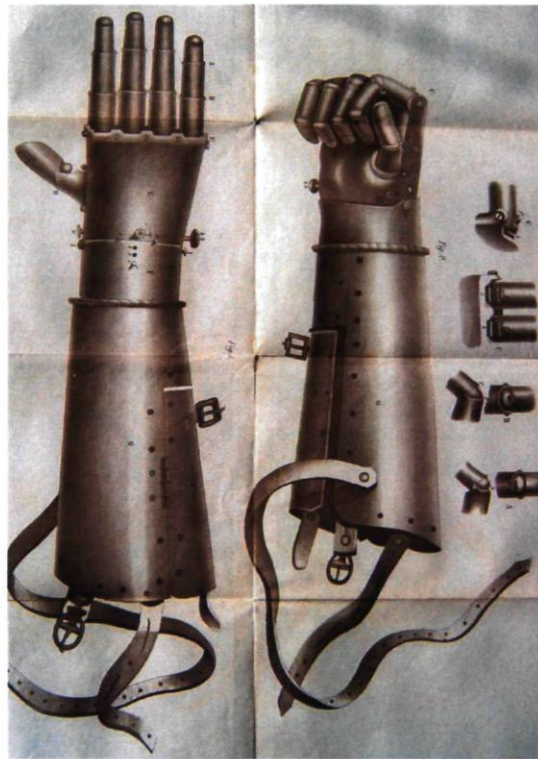


FIGURE 2.2 – Bras de fer du chevalier von Berlichen (source : Qwiki).

Nous rappelons que c'est à cette époque que nous retrouvons les corsaires et leurs jambes de bois et crochets. Quoique rudimentaires et à fonction très limitée, ces accoutrements constituent des prothèses. Bien sûr, la personne les portant doit avoir au préalable survécu à l'amputation ce qui n'était pas évident avec les moyens médicaux

et l'hygiène de l'époque.

Les prothèses ont connu de grandes avancées avec la Première Guerre Mondiale. Cette guerre a pris une ampleur jamais vue jusqu'alors. Des millions de soldats y ont pris part résultant en des millions de morts. Plus important pour ce propos, la Première Guerre Mondiale résulte aussi en plusieurs millions d'invalides. Les techniques en médecine traumatique avaient avancé et ainsi sauvé beaucoup de vies au prix de la perte de membres.

Ces survivants invalides étaient nombreux et ne pouvaient être ignorés par la classe dirigeante aussi facilement qu'auparavant. De plus, ces invalides formaient une grande partie de la population active de l'époque durement affectée par les morts au combat. Ainsi, le moteur économique de plusieurs pays industrialisés était compromis. Ce fait, combiné aux changements politiques conséquents à la guerre qui se soucient des besoins du peuple, amène plus d'attention pour réhabiliter les invalides afin qu'ils puissent tenir un emploi et fonder une famille



FIGURE 2.3 – La main Sauerbruch (source : Deutsches Museum).

En 1916 le Dr Ferdinand Sauerbruch construit la main Sauerbruch. La main Sauerbruch est représentée dans la figure ???. Cette main bouge en allongeant le bras. Cependant, elle produit une pince de faible intensité, [?].

Après la Deuxième Guerre Mondiale, la technologie permet d'incorporer des moteurs

électriques dans certaines prothèses. Nous voyons l'entrée de la robotique dans le monde de la prothèse. Avec la miniaturisation, des circuits logiques sont intégrés dans les prothèses les rendant plus intelligentes, plus réactives dans leurs fonctions. Très vite, les termes cyborg et homme/femme bionique se mêlent puisque la personne déficiente est maintenant vue comme partiellement humaine, partiellement machine. La figure ?? illustre bien ce fait. Le comité international olympique avait d'ailleurs disqualifié le sud-africain Oscar Pistorius, le "blade runner", car le comité jugeait que ses prothèses lui conférait un avantage en compétition [?].



FIGURE 2.4 – Jambes artificielles modernes pour le sprint (source : Wikipédia).

2.1 Le crochet

En 1812, un dentiste de Berlin, Peter Baliff, a l'idée d'utiliser ce qui restait du corps de l'invalidé pour actionner la prothèse, [?]. Il conçoit un système de harnais qui s'attache autour du tronc et qui est relié à la prothèse. Ainsi, nous obtenons le premier système d'actionnement par le corps. Par la suite, ce système de harnais est vite amélioré et prend la forme que nous connaissons aujourd'hui. Le système consiste en un câble reliant le mécanisme à un harnais passant autour de l'épaule opposée de l'invalidé. Le reste du système de sangles ainsi que de la coquille sont présents pour assurer le port et la stabilité de la prothèse. La figure ?? illustre un amputé portant le système à harnais.

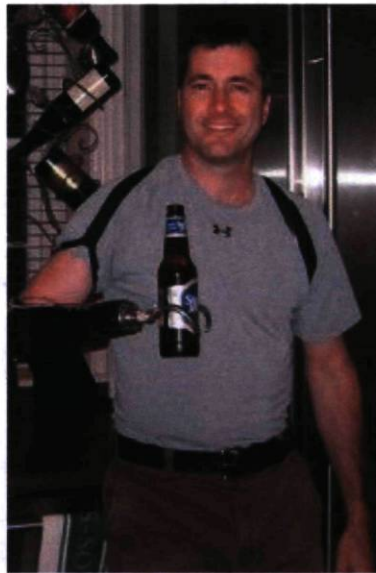


FIGURE 2.5 – Crochet et harnais (source : OPP, Sean McHugh).

Le câble est mis sous tension mécanique en arrondissant le dos ou en mettant le bras en extension tout en l'éloignant du tronc. Habituellement, l'extrémité consiste en un crochet ou une pince. Ce système ne possède qu'un degré de liberté. Pendant près de 80 ans en Amérique du Nord, le crochet principalement utilisé était le crochet de type Trautman qui a été breveté en 1912 et qui a été modifié légèrement au cours de ces années. La modification notable a été apportée par l'armée américaine, après la Seconde Guerre Mondiale, qui a ajouté deux dépressions afin de tenir une cigarette sans qu'elle fut écrasée comme illustré à la figure ?? . La figure ?? illustre différents types de crochets disponibles mais qui sont tous issus de la même technologie.



FIGURE 2.6 – Harold Russell, acteur et vétéran américain de la Deuxième Guerre Mondiale (source : bob coburn/the kobal collection).

Ce concept est dit "ouverture volontaire" puisque le mouvement volontaire du corps est nécessaire pour ouvrir la pince et un élastique a pour tâche de refermer le crochet. Ainsi la force de la prise est gérée par la force de l'élastique et la tension du câble pour empêcher l'écrasement d'un objet déformable. Ce fait paraît anodin, mais la position globale du corps a un grand impact sur cette tension. Il est impossible de maintenir une force de retenue constante en amenant un sandwich vers la bouche car le levier nécessaire pour accomplir cette tâche (garder le dos bien rond) disparaît lorsque la pince est près de la bouche. De plus, ce crochet ne maintient pas de façon sécuritaire un objet comme un verre ou une bouteille.

Afin de remédier à ces lacunes, un amputé a conçu le crochet "Grip", figure ??, vers la fin des années 90, [?]. Un mécanisme inversé simple permet la venue d'une pince à fermeture volontaire. Ainsi, l'amputé a le plein contrôle de la force de prise. D'ailleurs, cette force est maintenant très considérable puisque ce sont les muscles du dos qui la génèrent. Sa forme en "C", qui rappelle le profil d'une main saine prête à saisir un objet, est conçue pour effectuer une prise cylindrique. La figure ?? illustre le crochet "Grip" effectuant cette prise et montre sa stabilité. Un autre ajout important est la forme des bouts de la pince. Ils sont conçus pour s'emboîter l'un dans l'autre. Ainsi la prise bi-digitale a plus de force. Ceci s'inspire de l'effet des coussinets des doigts lors de cette prise.



FIGURE 2.7 – 3 types de crochets disponibles (source : Hosmer Dorrance Corp.).

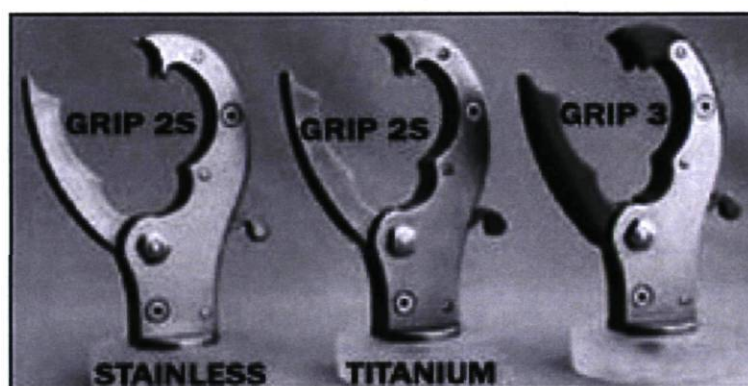


FIGURE 2.8 – Le crochet "Grip" (source : TRS inc.).

Une mise à jour de la conception du crochet de type Trautman a été effectuée récemment par le biais du projet "The Open Prosthetics Project". Un sommaire du projet se retrouve dans [?]. Ce projet piloté par Jonathan Kruniholm, un vétérinaire américain de la dernière guerre d'Irak, ingénieur et amputé, vise à démocratiser la prothèse en mettant sur pied un forum public qui sert à partager les différents concepts et idées. Ainsi, Kruniholm espère fouetter les entreprises à mieux développer leur produit.

Avec l'aide d'inventeurs, d'ingénieurs et surtout à partir des commentaires des utilisateurs de longue date du système, ils ont amélioré le système de "back lock" qui consiste à convertir le poids de l'objet en force de préhension de la pince. Ainsi, l'utilisateur n'a pas à déployer autant d'effort pour effectuer la tâche. Ce principe mécanique se retrouve dans les pinces à glace utilisées autrefois.

De plus, ils incorporent des matériaux modernes plus résistants mais également lé-

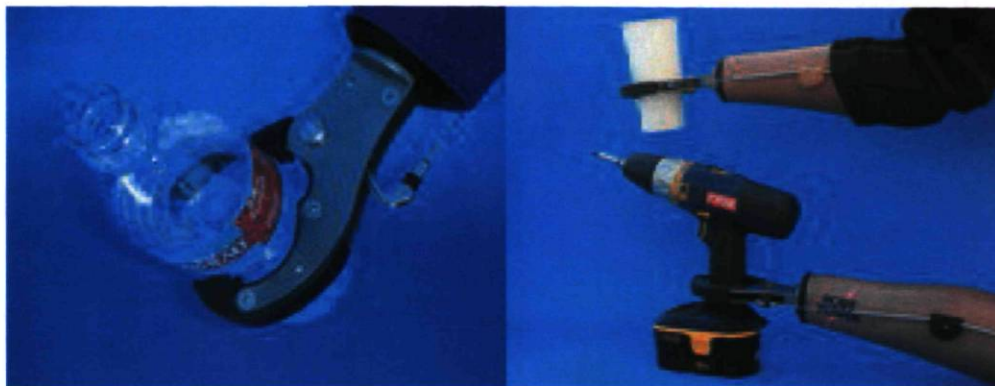


FIGURE 2.9 – Le crochet "Grip" en action (source : TRS inc.).

gers comme le titane. Ils ont renforcé les liaisons rotoïdes qui à la longue tendaient à flancher. Finalement, des dents entrecroisées permettant d'agripper les objets fermement se situent au bout des pinces.

Le système de crochet (Tautman, Grip et autres) est simple et robuste expliquant ainsi sa longévité. Sa conception est simple et nécessite peu d'éléments mobiles. Ce système peut donc être renforcé pour effectuer des tâches qui demandent de la force et de la résistance. Puisque nous ne parlons que d'éléments mécaniques, ce système est idéal pour un environnement poussiéreux ou mouillé. Grâce à la proprioception, au fil de l'utilisation, l'amputé devient extrêmement habile avec sa prothèse. Entre autres, il sent l'ouverture de la pince par la pression du harnais. Un avantage non-négligeable est le faible coût à l'achat, d'opération et de réparation.

Cependant, ce système présente des désavantages très considérables. L'aspect inesthétique est un obstacle majeur. Ce facteur est majeur lors de l'utilisation des crochets qui fait ressortir la déficience. Ensuite il y a le harnais qui constitue un obstacle majeur. Le harnais est ajusté de façon à avoir une prétension au repos afin de maximiser la force utilisée. Ceci restreint les mouvements du corps et après quelques temps, l'amputé adopte inconsciemment une posture avec les épaules vers le devant. De plus, le port du harnais ne s'intègre pas facilement avec le port de certains vêtements.

Ayant seulement un 1 degré de liberté, la fonction restaurée par ce système peut être considérée trop restreinte pour le port de cette prothèse. Il faut mentionner que parfois l'opération du système demande des contorsions inusitées et alors la réalisation d'une tâche anodine devient un sport. Par exemple, ouvrir une porte en tournant une

poignée ronde est un exploit. Finalement, nous savons que le contrôle d'un membre se situe dans l'hémisphère du cerveau du côté opposé. Ainsi, l'amputé doit accomplir une tâche requérant toujours les deux hémisphères.

Puisque le système harnais et crochet est toujours populaire en Amérique du Nord, le "Open Prosthetics Project" entend poursuivre ses innovations du système. Par exemple, ils essaient de développer un T-shirt dans lequel le harnais serait intégré et qui serait 100% lavable à la machine.

2.2 La prothèse myoélectrique

Dudley Childress a écrit un article en 1985 qui décrit l'histoire de la prothèse myoélectrique, [?]. La prothèse myoélectrique a été inventée par Reihold Reiner en 1948. La première prothèse disponible commercialement a été conçue et lancée par l'URSS en 1964. Le développement et la popularité de la prothèse myo-électrique s'est fait surtout en Europe. L'Amérique du Nord n'a adopté que récemment cette prothèse.

Les raisons pour cela sont :

- les éléments de la prothèse myo-électrique étaient très fragiles et ne fonctionnaient pas toujours ;
- les électrodes étaient extrêmement affectées par les conditions météorologiques, par exemple l'humidité relative ;
- la prothèse était très lourde à porter et ce poids était généralement soutenu à l'avant-bras ;
- la prothèse demandait un système d'alimentation (les piles) qui était encombrant, lourd et qui offrait une courte autonomie ;
- la prise était lente ;
- la prothèse ne pouvait pas être utilisée dans un environnement poussiéreux ou mouillé ;
- la prothèse demandait un long apprentissage ;
- la prothèse était très couteuse à l'achat et à l'entretien ;

L'histoire de la prothèse myoélectrique et son développement jusqu'aux années 90

est décrite en détail dans [?].

Ces idées préconçues persistent toujours. De plus, la plupart des amputations du membre supérieur découlant d'un accident sont liées au travail. Ainsi la plupart des amputés sont des gens travaillant dans les professions plus manuelles dont plusieurs fermiers. Ils ne sont pas familiers avec la technologie de pointe en robotique et informatique. La majorité d'entre eux veulent retourner à leur occupation manuelle le plus rapidement possible. Ils sont donc plus enclins à opter pour une prothèse plus simple et robuste.

La prothèse myoélectrique commercialisée aujourd'hui est le produit d'avancées technologiques minimisant de façon considérable ces inconvénients et présente des avantages sur la prothèse actionnée par le corps faisant pencher la balance en sa faveur :

- son port ne requiert pas de harnais compliqué et restrictif ;
- sa force de prise est plus grande et peut être facilement modulée pour une prise délicate ;
- son opération est plus intuitive par l'utilisation d'un groupe musculaire naturellement lié à la tâche ;
- le port et l'utilisation de la prothèse myo-électrique est beaucoup plus esthétique.

Ce dernier point est très important. Quoique la vanité est un trait de personnalité non négligeable, l'amputé acceptant son état ne désire tout de même pas mettre en évidence sa déficience.

La prothèse myoélectrique n'utilise donc pas le corps humain comme moyen d'actionnement mais des moteurs électriques. Cependant, le corps humain est toujours utilisé pour contrôler l'action de la prothèse. Des signaux électro-myographiques qui sont des micro-potentiels créés à la surface de la peau par la contraction volontaire de muscles résiduels de l'amputé sont captés avec l'aide d'électrodes.

Les signaux électro-myographiques proviennent de la dépolarisation ainsi que de la repolarisation des cellules musculaires pendant l'activité musculaire. Ces signaux se situent entre 5 et 20 mV. Les électrodes sont placées sur la peau de façon à capter les signaux électro-myographiques de deux muscles antagonistes. C'est-à-dire des muscles dont le mouvement induit par l'un est freiné par l'autre. Ces muscles doivent être choisis

en prenant soin que les signaux de l'un ne nuise pas aux signaux de l'autre.

Les électrodes mesurent le potentiel sur la surface de la peau. Il existe plusieurs systèmes utilisant ces signaux et qui opèrent ensuite les moteurs électriques selon la logique du contrôle. Cependant, ces systèmes ont un point en commun qui est que le contrôle n'opère pas d'une manière volontaire. L'électrode doit mesurer un signal correspondant à un potentiel minimum pour que le contrôle active le moteur électrique. De plus, les électrodes ne mesurent que les activités neurologiques efférentes. Elles ne retournent aucun signal afférent au cerveau qui pourrait informer l'amputé de la force de la prise, la position des doigts, la texture de l'objet, etc. Cependant des recherches en ce sens sont en cours. Plus de détails sur les signaux électromyographiques et leur utilisation se trouvent dans [?] et [?].

Les sous-sections suivantes présentent les prothèses myoélectriques qui sont présentement disponibles et les plus fréquentes sur le marché nord-américain. Leurs caractéristiques sont énumérées. Cette liste est non-exhaustive.

2.2.1 Otto Bock

Otto Bock est une compagnie de prothèse allemande. Elle a été fondée par Otto Bock en 1919 pour répondre aux besoins des soldats blessés lors de la Première Guerre Mondiale. Elle est présente dans plusieurs pays dans le monde dont le Canada. Elle est un chef de file dans la vente et l'innovation des prothèses, [?].

2.2.1.1 SensorHand

Présentement disponible chez Otto Bock, la main SensorHand SPEED permet une prise rapide et précise permettant la prise d'objets fragiles ou même des contenants de liquide. Elle a une vitesse maximale de fermeture de 300 mm/s. Cette main est contrôlée par un microprocesseur. Elle peut être utilisée avec un ou deux sites myoélectriques. De plus, Otto Bock y a incorporé l'AutoGrasp qui est un système de contrôle empêchant un objet de glisser par la surveillance et la correction active de la force de prise. Ainsi, la main peut effectuer une prise jusqu'à 100 N.



FIGURE 2.10 – La Sensor Hand d’Otto Bock avec et sans gant cosmétique (source : Otto Bock).

Comme nous le remarquons à la figure ??, la prothèse ne comporte que trois doigts, soit D1, D2 et D3. En se référant à la section ??, ceux-ci, constituant les zones I et II, permettent la plupart des prises de type pince. Il est à noter que le mouvement de D2 et D3 sont totalement liés et qu’il n’y a aucune liaison mécanique s’apparentant aux articulations inter-phalangiennes. La forme des doigts est conçue au préalable afin de convenir à la plupart des situations possibles.

Un gant cosmétique complète la prothèse lui donnant une forme humaine incluant les doigts D4 et D5. Ces derniers sont passifs.

2.2.1.2 La main MichelAngelo

La nouvelle génération de prothèse chez Otto Bock est la main MichelAngelo avec un poids de seulement 400 g. Elle ouvre à une vitesse de 408 mm/s et possède une force de prise évaluée à 120 N. Toujours contrôlée par un microprocesseur avec le système AutoGrasp, Otto Bock y a intégré le système de communication AXON-BUS.

Cette main présente cinq doigts pouvant travailler indépendamment les uns des autres. Cependant, la prothèse possède uniquement les liaisons mécaniques correspondant aux articulations MCP. Les doigts prennent une forme pré-conçue et fixe afin de fonctionner de façon optimale. Les axes de rotation des liaisons mécaniques des doigts longs ne sont pas coplanaires afin de reproduire un mouvement d’adduction et d’abduc-



FIGURE 2.11 – La main MichelAngelo d’Otto Bock avec et sans le gant cosmétique (source : Otto Bock).

tion des doigts lors de l’ouverture et la fermeture de la main. Le pouce est orientable manuellement afin de reproduire le mouvement d’opposition du pouce humain.

Cependant, puisque cette prothèse est protégée par une marque commerciale et nouvellement disponible sur le marché, les détails sur son fonctionnement sont imprécis. Mais, comme le confirme la figure ??, la main MichelAngelo ressemble de plus en plus et agit comme une main naturelle. La figure ?? démontre sa précision et sa naturalité.

2.2.2 Touch Bionics

Touch Bionics est une compagnie qui se spécialise dans la production de prothèses de membres supérieurs opérées électriquement. Son siège social se situe en Écosse. Ses produits découlent de travaux en réhabilitation et prothèses réalisés par le système de santé écossais, qui ont débuté en 1963. Touch Bionics est devenue une compagnie



FIGURE 2.12 – Épeluchage d'une banane avec la main MichelAngelo (source : Otto Bock).



FIGURE 2.13 – La main I-Limb (source : Touch Bionics).

commerciale en se détachant du système de santé écossais en 2003.

Touch Bionics est la première compagnie à commercialiser une main bionique comprenant des doigts articulés, [?].

2.2.2.1 La main I-Limb

La main I-limb a été lancée en 2007. Cette prothèse a été choisie par les forces armées américaines afin de répondre aux besoins de leurs vétérans. Elle ressemble beaucoup à une main humaine et présente des mouvements naturels. Elle est le résultat d'une technologie de pointe en génie mécanique et en génie des matériaux par son plastique très résistant. La main I-limb est légère et très esthétique.

Nous voyons sur la photo de gauche de la figure ?? que la main I-limb est une construction modulaire. Ainsi, si un seul doigt est abimé, il peut être simplement remplacé sans toucher au reste de la main, abaissant ainsi les coût d'entretien.

La main I-limb est opérée par un système de contrôle hautement intuitif qui comporte deux entrées produites par les sites myoélectriques. Toutes les articulations des doigts humains y sont représentées par des liaisons mécaniques sauf les articulations IPD. Cependant, seules les liaisons mécaniques correspondant aux articulations MCP sont actionnées par un moteur électrique. Les liaisons mécaniques, correspondant aux articulations IPP, sont mécaniquement liées à celles correspondant aux articulations MCP par un mécanisme de couplage. L'indépendance du mouvement des doigts ainsi que leur capacité à s'adapter à l'objet à prendre sont obtenus grâce à la détection du calage d'un moteur par le système de contrôle. Ce principe est démontré par la figure ??.

Le pouce possède deux positions, adoptées manuellement, afin de correspondre à la capacité d'opposition naturelle du pouce humain. Ainsi, la main I-limb peut effectuer les mouvements suivants :

- tenir une clé (la prise bi-digitale par opposition subtermino-latérale) ;
- la poigne de force ;
- la prise de précision (la pince bi-digitale par opposition terminale) ;
- pointer de l'index (impoli, en public).



FIGURE 2.14 – La main I-Limb en action (source : Touch Bionics).



FIGURE 2.15 – La main I-Limb Pulse (source : Touch Bionics).

2.2.2.2 La main I-limb Pulse

En 2010, Touch Bionics lance sa main I-limb Pulse, figure ??, qui se veut la version améliorée et de technologie avancée de la main I-limb. L'appellation "pulse" vient de la nouvelle technologie pulsative qui permet une prise plus ferme. Lors de la prise d'un objet, l'utilisateur a le choix d'une fermeture contrôlée ou d'utiliser l'effet de pulsation, des pulsations électroniques de hautes fréquences envoyées aux doigts. Cet effet permet la prise d'un objet de 90 kg. Cette force de prise est également possible grâce à un châssis et des liaisons mécaniques en aluminium. Cette évolution de la prothèse nous rapproche d'une main répondant vraiment aux besoins des travailleurs manuels.



FIGURE 2.16 – La main I-Limb en action (source : Touch Bionics).

La main I-limb Pulse intègre également la technologie bluetooth facilitant la communication avec le logiciel Biosim qui accompagne la main. Ce logiciel permet de personnaliser les stratégies de contrôle de la main et des prises. Ainsi l'utilisateur peut

facilement exécuter les prises qui lui sont plus utiles sans s'encombrer de celles qui lui sont inutiles. De plus, la main I-limb Pulse effectue la prise tri-digitale pulpaire ou tri-pode. La figure ?? montre la main I-limb pulse effectuant une prise bi-digitale délicate mais précise.

2.2.3 La main Be-Bionic

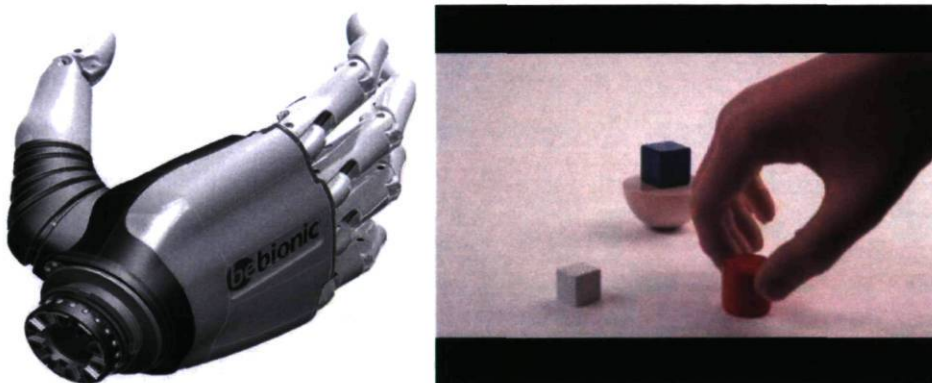


FIGURE 2.17 – La main Be-Bionic (source : Be-Bionics).

La main Be-Bionic, lancée au printemps 2010, est conçue par RSLSteeper, [?]. Tout comme Touch Bionics, cette compagnie de Grande-Bretagne, possédant un siège corporatif aux États-Unis, est le produit du NHS, National Health Service. Sa main est peu connue et son lancement a surpris la communauté. Comme le démontre la figure ??, la main Be-Bionic ressemble à la I-limb et semble présenter les mêmes fonctionnalités à peu de différences près. La différence notable est que la main Be-Bionic est offerte au coût très peu élevé de \$11,000 US.

2.2.4 La main SmartHand

Le projet SmartHand est un projet de l'Union européenne et a pour but le développement d'une main artificielle pouvant servir de substitut à une main humaine, [?].

Le projet interdisciplinaire intègre des recherches en sciences des matériaux, en



FIGURE 2.18 – La SmartHand (source : Lund University).

biotechnologie, en neurosciences et en technologies de l'information. À cela s'ajoute les dernières avancées en nanobioscience et en sciences cognitives afin de créer une prothèse de main artificielle intelligente présentant les capacités de base d'une main humaine.

La main SmartHand trouve sa genèse dans plusieurs projets académiques :

- le projet Artificial Hand, de l'université de Lund, qui était concentré sur la biocompatibilité ;
- le projet de CyberHand, du ARTS lab de la Scuola Superiore Sant'Anna, qui était concentré sur la bio-mécatronique ; et,
- le système FreeHand qui se concentre sur les enregistrements des influx nerveux ainsi que les stimulations.

Le projet regroupe donc plusieurs partenaires académiques et économiques de différentes parties de l'Europe :

- l'université de Lund, Suède ;
- la Scuola Superiore Sant'Anna, Pise, Italie ;
- l'université d'Aalborg, Danemark ;
- l'université de Tel-Aviv, Israël ;
- l'institut Tyndell, Cork, Irlande ;
- Össur, Islande ;
- SciTech Link HB, Suède ;

En 2009, un patient ayant perdu sa main en raison d'un cancer des os, a reçu la main

SmartHand après une opération chirurgicale délicate où les médecins lui ont implanté des capteurs/émetteurs aux terminaux nerveux de l'avant-bras. La main SmartHand, illustrée à la figure ??, est la première prothèse de la main qui, non seulement reçoit des signaux du corps, mais renvoie des signaux au cerveau afin de redonner des sensations dans les doigts et la main à son utilisateur.

À cette fin, la SmartHand est dotée de 40 capteurs et 4 moteurs. Il y a donc des doigts couplés, les doigts D3, D4 et D5. La main exploite la sensation fantôme que les amputés ressentent généralement après l'amputation. L'utilisation du sens haptique est plus intuitif pour le patient. De plus, les recherches indiquent que l'exploitation des sensations de fantôme par la stimulation nerveuse aide grandement à réduire l'inconfort produit par celles-ci.

La conception de la SmartHand rendra les habilités les plus complexes possibles. Le mouvement de la main, basée sur des moteurs indépendants, rend possible un mouvement plus individuel des doigts ainsi que certaines prises auparavant impossibles. Cette main aura des capacités sensorielles qui aideront à la modulation de la force de prise et qui permettront à la prothèse d'être vraiment une partie intégrale du corps de l'utilisateur.

2.2.5 Le projet DARPA Revolutionizing Prosthetics

En 2005, DARPA, la Defense Advanced Research Projects Agency, mandatait le lieutenant colonel Geoffrey Ling, un chirurgien de l'armée américaine, pour mettre sur pied un projet ayant pour objectif de rétablir les habiletés physiques et augmenter la qualité de vie des soldats américains blessés au combat, [?]. Ce mandat était la réponse du gouvernement américain envers le nombre grandissant de blessés sérieux que les forces américaines encourageaient lors des opérations en Irak et en Afghanistan ainsi qu'aux critiques populaires sur le traitement des vétérans de la guerre du Vietnam et de la première guerre du Golfe Persique.

La décision de se concentrer sur la technologie des prothèses de membres supérieurs et d'ignorer les prothèses pour membres inférieurs a été prise lors de l'établissement des objectifs de ce projet. Certains chercheurs décrivent la technologie des prothèses pour

membres inférieurs comme étant du 21^{ème} siècle et celle des prothèses pour membres supérieurs comme étant de la préhistoire. Il était clair qu'il fallait actualiser la technologie des prothèses pour membres supérieurs et pour ce faire, il fallait des avancées technologiques dans plusieurs domaines ce qui se traduit par un gros montant d'investissement de la part du gouvernement américain.

2.2.5.1 La main Proto 2

L'APL, l'Applied Physics Laboratory, de Johns Hopkins University a été sélectionné pour réaliser ce projet. Afin de mener à bien ce projet et intégrer les différents aspects multidisciplinaires, l'APL s'est associé à plus de 30 organisations dont le RIC, le Rehabilitation Institute de Chicago, ainsi qu'Otto Bock.

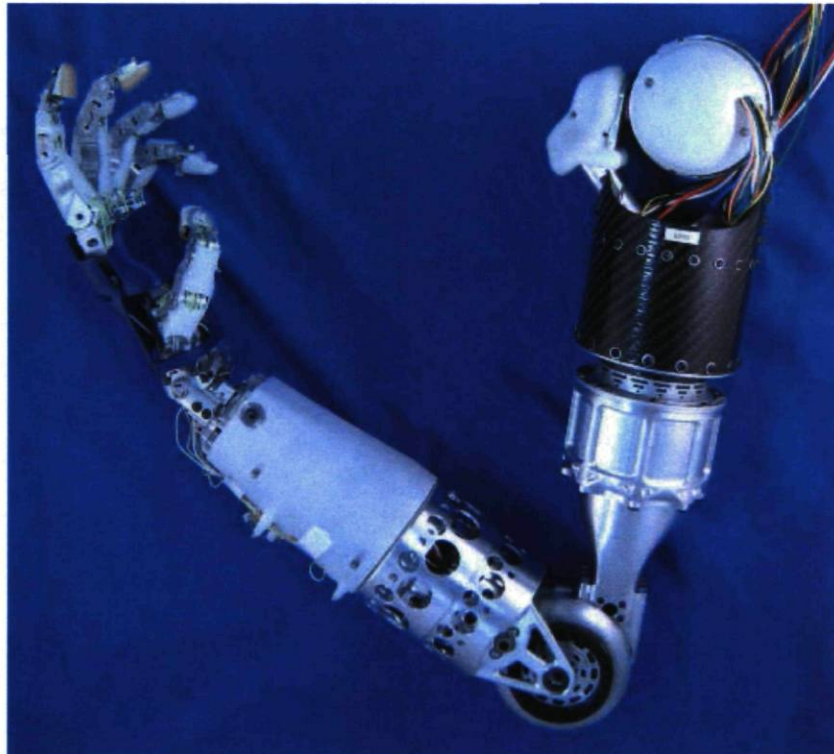


FIGURE 2.19 – La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).

L'objectif du projet de l'APL est de produire en 4 ans une prothèse pour membre supérieur complètement intégrée neurologiquement au patient. Cette prothèse doit remplacer complètement les fonctions motrices et sensorielles d'un membre supérieur amputé.

La possibilité de "se connecter" au système neurologique du corps humain afin de vraiment contrôler la prothèse avec la pensée représente la moitié du problème se présentant aux chercheurs. L'autre moitié est la mécanique pouvant accomplir la volonté de ce système nerveux. Cependant le Lt. Col. Ling dirige déjà le programme HAND, Human-Assisted Neural Devices, à DARPA, [?]. Le but du programme HAND est de développer des interfaces entre l'humain et la machine qui lisent directement les signaux du cerveau pour ensuite les transformer en commandes pour l'ordinateur.

Les scientifiques travaillant sur ce programme ont été les premiers à démontrer que les signaux neurologiques du cerveau peuvent être acquis, décodés et utilisés afin de contrôler un système périphérique. Ils ont atteint cette étape importante en ayant un singe immobilisé qui contrôle un bras robotique avec des implants crâniens afin de lui amener de la nourriture à sa bouche. Plus de détails sur les interfaces entre le cerveau et la machine se trouvent dans [?], [?], [?], [?], [?] et [?].

Pour que la prothèse puisse fonctionner comme un bras naturel, APL doit concevoir :

- un concept modulaire imitant le membre naturel de 22 degrés de liberté et plus afin de satisfaire toute la gamme de degrés d'amputation du membre supérieur ;
- un système intelligent qui anticipe l'intention du patient afin de conduire à un contrôle qui est naturel ;
- une apparence et une exécution naturelle en termes de :
 - anthropomorphisme, vitesse, dextérité et force ;
 - accomplissement des activités quotidiennes ;
- des méthodes d'intégration neurales afin de répondre à toute la gamme de blessures et le degré d'envahissement qui leur correspond ;
- un système sensoriel qui puisse reproduire :
 - la proprioception ;
 - le toucher ;
 - la température ;
 - les vibrations ;
- un système d'alimentation qui puisse pourvoir à au moins 24 heures d'utilisation normale ;
- des composants mécaniques qui sont :
 - résistantes ;
 - tolérantes envers l'environnement d'opération (poussière, humidité, etc.) ;
 - durables pour au moins 10 ans ;

- une prothèse qui peut être portée pour une durée minimale de 18 heures sans effets physiques adverses.

Leurs recherches se concentrent surtout sur les stratégies de contrôle neurales. Idéalement, en utilisant la prothèse, un patient peut enfiler une aiguille, utiliser un clavier d'ordinateur, jouer du piano.

Le résultat de ce projet ambitieux est la main Proto 2 qui est illustrée aux figures ?? à ??. La main possède 21 actionneurs et 25 degrés de liberté. Elle pèse 9 lbs., un peu plus que le poids standard d'un bras féminin.

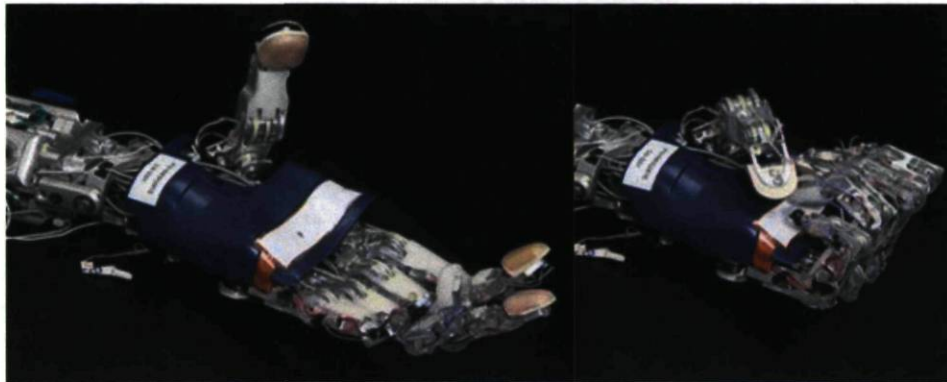


FIGURE 2.20 – La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).

La main Proto 2 se contrôle avec l'aide de IMES, Implantable MyoElectric Sensors, qui détectent les activités musculaires résiduelles et transmettent, sans fil, des commandes au bras. Une bobine de fil dans la prothèse alimente les IMES et capte les signaux pour les acheminer à la puce qui décode les commandes. Un système pneumatique, à base de peroxyde d'hydrogène qui réagit avec de l'iridium comme catalyseur, produit de la vapeur faisant bouger les actionneurs. La vapeur est ensuite "transpirée" par les pores du bras Proto 2.

2.2.5.2 La main Luke

Étant donné la taille ambitieuse du programme Revolutionizing Prosthesis 2009 ainsi que l'urgence créée par les besoins des vétérans américains des guerres d'Iraq et d'Afghanistan, DARPA a décidé de créer le programme Revolutionizing Prosthetics 2007. Ici, le but est de développer en deux ans une prothèse qui va améliorer les capacités d'une prothèse destinée à remplacer un membre supérieur et offrant plus de possibilités



FIGURE 2.21 – La main PROTO 2 (source : Johns Hopkins University).

que les prothèses actuellement disponibles.

Le projet a été confié à la firme DEKA Research and Development Corp. connue pour le système de transport personnel Segway. Leur tâche consiste à combiner les meilleures technologies disponibles présentement avec les développements technologiques de court-terme et les incorporer dans une prothèse de bras reliée neurologiquement au patient amputé. La contrainte la plus importante de ce projet est que la prothèse doit être telle que l'amputé se lève le matin, enfile la prothèse avec la même aisance qu'un vêtement et il est prêt pour sa journée.

Le résultat est présenté aux figures ?? à ?? . La prothèse possède 18 degrés de liberté. La main peut effectuer 6 prises prédéfinies. Le port de la prothèse n'implique aucune chirurgie après l'amputation. Le contrôle du bras se fait au moyen de manettes dont une dans le soulier. Le retour sensoriel se fait au moyen d'un tacteur, un petit vibreur en contact avec la peau.

Contrairement aux attentes générales pour un mécanisme ultra-moderne comme le bras Luke, la charpente de ce dernier n'est pas en titane. À la stupéfaction des ingénieurs travaillant sur le projet, leurs calculs démontrent que pour atteindre la résistance matérielle nécessaire, l'utilisation du titane rendrait le bras plus lourd puisque les composantes de la charpente devraient être renforcées. Les concepteurs ont plutôt opté pour

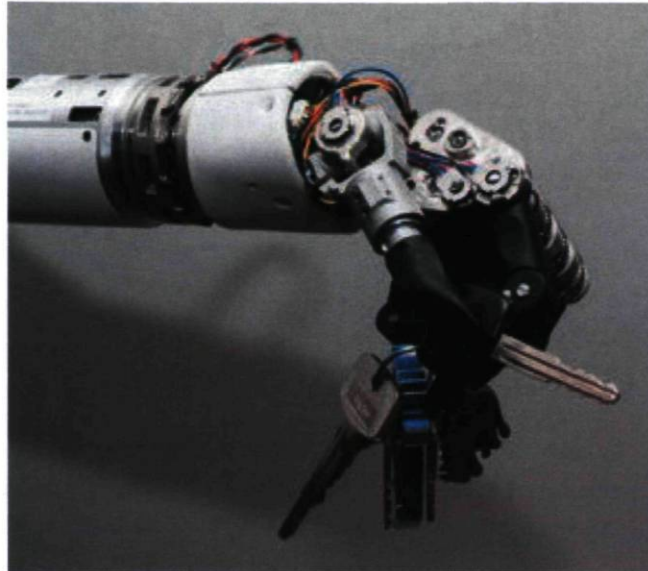


FIGURE 2.22 – La main Luke (source : DEKA Research and Development).

l'aluminium.

Le port de la prothèse est très confortable grâce à six pochettes intérieures qui se gonflent ou se dégonflent indépendamment pour maintenir la prothèse stable. Cette stabilité provient de la technologie du Segway et est basée sur une série de gyroscopes.

Le Lt. Col. Ling affirme que le bras Luke a atteint tous les objectifs du programme Revolutionizing Prosthetics 2007. Le bras subit présentement des tests cliniques au RIC et dans des centres de réhabilitation pour vétérans.

Cependant, le bras Luke présente certaines lacunes. Entre autres, l'actionneur du poignet est trop gros pour être adapté sur un bras pour un amputé ayant un avant-bras résiduel. L'adaptation pour un amputé ayant un avant-bras résiduel ne fait pas partie des critères du programme mais la portion de ces amputés est supérieure à celle des amputés au-dessus du coude.

Il a été rapporté que les mouvements du bras sont saccadés rendant les actions du bras dénaturées. Son coût, qui n'a pas encore été divulgué, risque d'être exorbitant, rendant le port du bras exclusif aux amputés munis de bonnes assurances médicales. Toutefois, ces lacunes ne font pas partie non plus des critères du programme.



FIGURE 2.23 – La main Luke (source : DEKA Research and Development).



FIGURE 2.24 – La main Luke (source : DEKA Research and Development).

Plus de détails sur le fonctionnement de DARPA et les bras du programme Revolutionizing Prosthetics se retrouvent dans [?] et [?].

2.2.5.3 La bras MPL

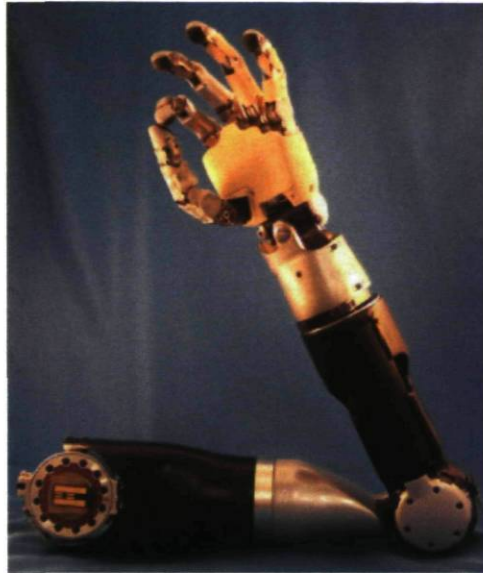


FIGURE 2.25 – La main MPL (source : Johns Hopkins University).

Le bras du laboratoire APL est également au stade des études cliniques, sous la forme d'un troisième et ultime prototype. Ce prototype, que nous pouvons voir à la figure ??, est connu sous le nom de bras MPL, Modular Prosthetic Limb. Ce bras possède 22 degrés de liberté qui incluent le mouvement indépendant des doigts. Il pèse 9 lbs et permet de soulever une charge de 50 lbs.

Le bras MPL se démarque du bras PROTO 2 notamment parce qu'il contient des éléments électroniques plus raffinés, des actuateurs plus efficaces et le système d'alimentation est de plus petite taille que l'on retrouve dans le bras PROTO 2.

Le système de contrôle est basé sur un réseau micro-électronique implanté au cerveau qui enregistre les signaux nerveux et les transmet au bras. Le bras MPL intercepte les signaux provenant du cerveau, interprète le mouvement voulu du patient et commande les actionneurs afin d'effectuer ce mouvement. Il renvoie également au cerveau de l'information sur le monde extérieur au moyen des 80 capteurs situés sur le bout des doigts et la paume de la main.

Le programme a l'intention de fournir le bras à cinq patients au cours des deux prochaines années.

DARPA a lancé le programme Histology for Interface Stability afin de palier les lacunes des interfaces actuelles cerveau et ordinateurs. Le programme durera trois ans et comporte trois phases de développement. Le programme a pour but de développer des IMES (Injectable Myoelectric Sensors ou capteurs myoelectriques injectables) qui ont une durée de vie dépassant 70 ans et qui permettent d'enregistrer et de communiquer plus d'informations. La technologie actuelle des IMES n'a que 2 ans de durée de vie.

2.3 Conclusion

La perte d'un membre signifie habituellement un obstacle à l'autonomie d'une personne. Alors, depuis les temps les plus anciens, l'homme a cherché à appliquer les technologies à sa disposition pour palier à cette perte.

Les avancées technologiques dans le domaine de la prothèse sont souvent liées aux conflits armés d'importance. D'ailleurs, l'accessibilité des prothèses à la masse populaire est liée au massacre sans précédent dû à la Grande Guerre. Aujourd'hui, nous sommes témoins d'avancées provenant d'importants programmes de recherches soutenus par le gouvernement américain ou par l'Union Européenne qui visent la réinsertion des vétérans blessés des conflits en Iraq et en Afghanistan.

Cependant, la technologie moderne peine encore à palier les divers problèmes de conception d'une main artificielle. Ces problèmes sont autant des problèmes de conception mécanique que des problèmes d'interface neurologique. Les prothèses qui sont proposées par les laboratoires s'intègrent de plus en plus au reste du corps de l'amputé. Elle opèrent par la pensée en interagissant avec les nerfs résiduels. Ces mains sophistiquées sont toutefois très fragiles, d'une durabilité limitée et ne peuvent pas agir dans un environnement où il y a la présence d'eau ou de poussière et ce, sans oublier les coûts exorbitants qui leur sont attachés.

Chapitre 3

Théorie du sous-actionnement

Nous présentons ici certains des résultats retrouvés dans [?]. Ces résultats constituent la base essentielle pour le modèle mathématique proposé pour le prototype du doigt destiné à la prothèse. Nous avons repris ces résultats et nous les avons adaptés pour le cas spécifique d'un doigt anthropomorphique qui comporte trois phalanges reliées par trois liaisons rotoïdes. Nous nous sommes aussi permis de nous attarder à certaines relations et transformations afin de les expliciter. Nous nous sommes également permis d'ignorer certaines relations inutiles pour le modèle.

Nous avons vu dans les chapitres précédents la complexité du problème de remplacer une main humaine par un système mécanique. Bien sûr, ce système mécanique risque d'être fort complexe. Cependant la beauté et l'ingéniosité d'un mécanisme se trouve

rarement dans sa complexité mais dans ses éléments d'apparence simple mais qui sont clés dans le travail du mécanisme.

Les mécanismes sous-actionnés font partie de cette catégorie. Ils sont des mécanismes intelligents qui permettent le mouvement indépendant de plusieurs liaisons mécaniques avec un nombre réduit d'actionneurs. Cependant, ils possèdent plus de degrés de liberté que de degrés d'actionnement ce qui simplifie le mécanisme. Ils sont donc une solution potentielle afin de réduire la complexité d'une prothèse pour un membre supérieur tout en conservant certaines fonctions.

Pour le reste de ce mémoire, nous allons discuter d'un doigt sous-actionné qui est un mécanisme à trois degrés de liberté, les liaisons rotoïdes faisant office d'articulations, mais d'un degré d'actionnement, le câble faisant office de tendon. Ainsi, nous éliminons un nombre important d'actionneurs requis pour opérer le doigt sans perdre la capacité du doigt de s'adapter à la forme de l'objet avec lequel il est en contact.

3.1 Modèle statique de l'actionnement

Nous avons un doigt composé de trois phalanges de longueurs différentes. Pour des fins de simplification, les mouvements du doigt sont restreints dans un plan. Ainsi, nous ne considérons pas les mouvements d'abduction et d'adduction. D'ailleurs, ces derniers ne sont pas présents dans nos prototypes. Les phalanges du doigt sont liées par des liaisons rotoïdes. Comme le démontre la figure ??, chaque mouvement de phalange est déterminé par un mécanisme de transmission. La position de la phalange est décrite relativement à la phalange qui la précède.

Nous utilisons le principe des puissances virtuelles pour écrire l'égalité suivante :

$$\mathbf{t}^T \boldsymbol{\omega}_a = \sum_{i=1}^3 \boldsymbol{\xi}_i \circ \boldsymbol{\zeta}_i \quad (3.1)$$

où \mathbf{t} est le vecteur des couples d'entrée qui proviennent de l'actuateur ainsi que, dans certains cas, des ressorts de torsion qui agissent comme le rappel et qui sont situés dans les liaisons rotoïdes, $\boldsymbol{\omega}_a$ est le vecteur des vitesses angulaires associées aux liaisons rotoïdes, $\boldsymbol{\xi}_i$ est le visseur associé au point de contact i et $\boldsymbol{\zeta}_i$ est le torseur associé au point de contact i et \circ représente la produit réciproque dans le plan associé à la théorie

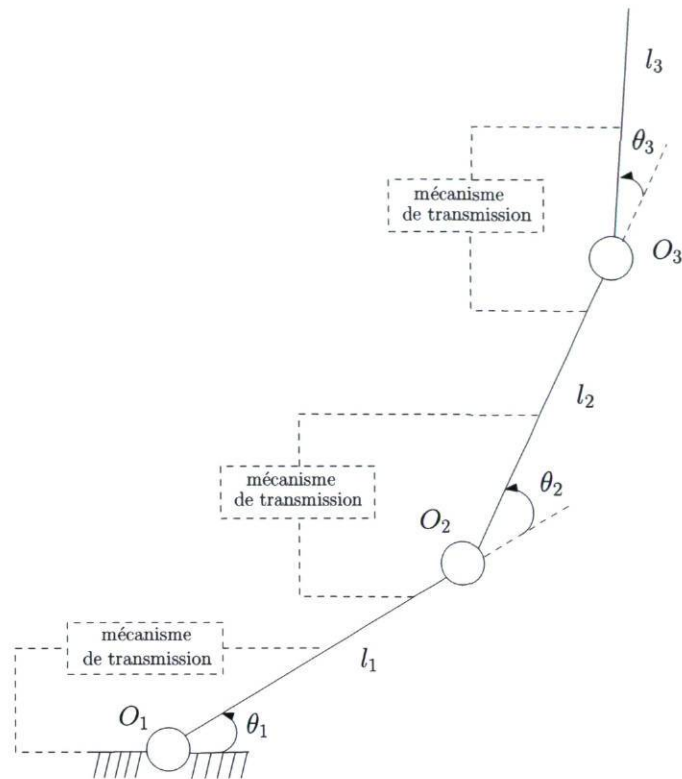


FIGURE 3.1 – Modèle conceptuel d'un doigt à 3 phalanges.

des visseurs. La figure ?? présente le modèle statique du doigt et les différentes variables utilisées pour l'analyse cinématique.

3.1.1 Vecteur des couples d'entrée

Explicitement, le vecteur \mathbf{t} est écrit ainsi :

$$\mathbf{t} := \begin{bmatrix} T_a \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

où T_a est le module du couple d'actionnement qui est appliqué à la base du doigt. Les valeurs pour T_2 et T_3 sont fixées selon les trois situations suivantes :

1- Chaque articulation est actionnée directement : Les valeurs de T_2 et T_3 correspondent aux modules des couples individuellement appliqués par les moteurs

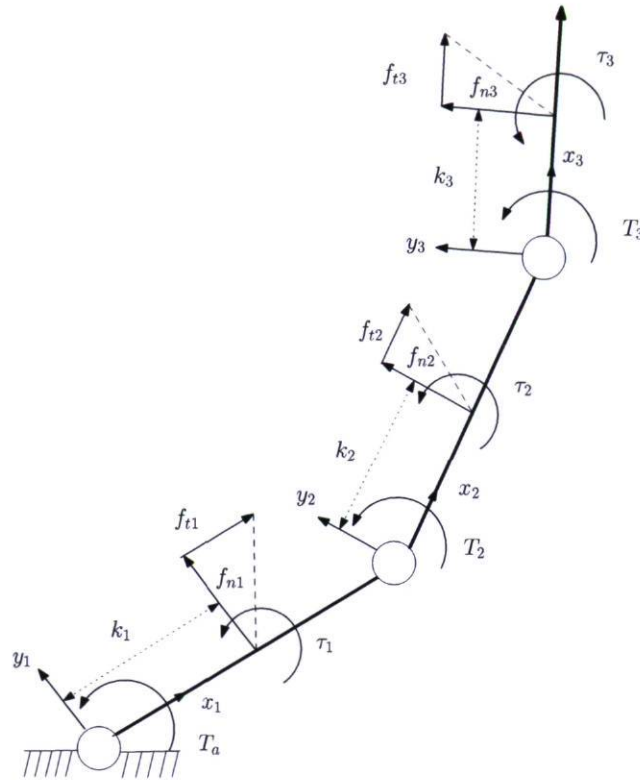


FIGURE 3.2 – Modèle statique d'un doigt à 3 phalanges.

aux liaisons rotoïdes 2 et 3, et, T_a est le module du couple appliqué par le moteur à l'articulation 1.

2- Des ressorts en torsion qui agissent comme rappel sont présents aux liaisons rotoïdes 2 et 3 : Les valeurs de T_2 et T_3 correspondent aux modules des couples individuellement appliqués par les ressorts à l'articulation : $T_i = -K_i \Delta\theta_i$ où K_i est la raideur du ressort de l'articulation i et $\Delta\theta_i$ est la différence angulaire de l'articulation i relativement à sa position de référence. Le vecteur \mathbf{t} s'écrit donc :

$$\mathbf{t} := \begin{bmatrix} T_a \\ -K_2 \Delta\theta_2 \\ -K_3 \Delta\theta_3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3- Le doigt est simplement sous-actionné : Les valeurs de T_2 et T_3 sont nulles car il n'y a aucun couple appliqué directement à ces liaisons rotoïdes. Leur mouvement est donc seulement dû au couple appliqué à la base et au mécanisme de transmission. Le

vecteur \mathbf{t} s'écrit donc :

$$\mathbf{t} := \begin{bmatrix} T_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

3.1.2 Vecteur des vitesses angulaires

Le vecteur des vitesses angulaires associées aux liaisons rotoïdes, $\boldsymbol{\omega}_a$, est composé des modules des vitesses angulaires associées aux liaisons rotoïdes 2 et 3 et de la vitesse angulaire virtuelle obtenue en imposant le couple d'actionnement à la base du doigt. $\boldsymbol{\omega}_a$ s'écrit de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\omega}_a := \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.1.3 Visseur associé au point de contact i

Le visseur associé au point de contact i , $\boldsymbol{\xi}_i$, est composé de la vitesse angulaire de la phalange i , ω_i , et des composantes en x et y , selon le repère global, de la vitesse de la phalange i au point de contact i . Ce visseur s'exprime comme suit :

$$\boldsymbol{\xi}_i := \begin{bmatrix} \omega_i \\ v_i^x \\ v_i^y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

3.1.3.1 Visseur associé au point de contact 1

Considérons le visseur associé au point de contact 1, $\boldsymbol{\xi}_1$, illustré à la figure ???. Nous faisons l'hypothèse que ce point de contact est situé sur la phalange proximale. Par définition, le visseur est composé du module de la vitesse angulaire de la phalange proximale, ω_1 , et des composantes en x et y , selon le repère global, de la vitesse au point de contact 1. Alors, il est évident que :

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1; \quad (3.7)$$

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_1. \quad (3.8)$$

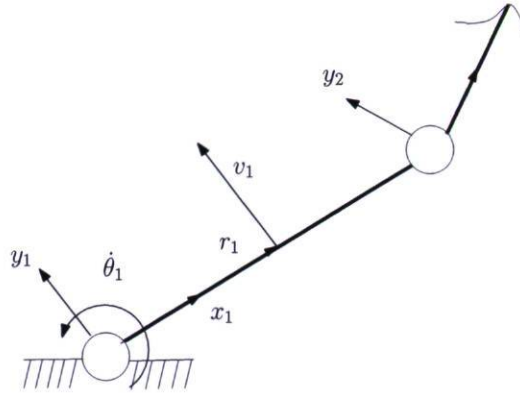


FIGURE 3.3 – Vitesses associées au premier point de contact.

Le vecteur \mathbf{r}_1 représente le vecteur reliant l'origine globale O_1 au point de contact 1 et,

$$\mathbf{E} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

est une matrice qui effectue l'application du produit croisé sur le vecteur \mathbf{r}_1 .

Finalement, nous définissons le visseur d'articulation associé au point d'origine O_1 et en rapport au point de contact 1 comme :

$$\xi_1^{O_1} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E}\mathbf{r}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

ce qui nous donne le visseur associé au point de contact 1 :

$$\xi_1 := \dot{\theta}_1 \xi_1^{O_1}. \quad (3.11)$$

3.1.3.2 Visseur associé au point de contact 2

Maintenant nous pouvons étendre ce dernier développement au visseur associé au point de contact 2, ξ_2 . Nous faisons maintenant l'hypothèse que ce point de contact est situé sur la phalange médiane. Le développement dans ce cas-ci est un peu plus complexe car, comme illustré à la figure ??, les vitesses associées au point de contact 2 dépendent de la rotation de deux corps : la phalange proximale et la phalange médiane. Alors, nous écrivons que :

$$\omega_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2; \quad (3.12)$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{\theta}_1 \mathbf{E}\mathbf{r}_2^{O_1}) + (\dot{\theta}_2 \mathbf{E}\mathbf{r}_2^{O_2}). \quad (3.13)$$

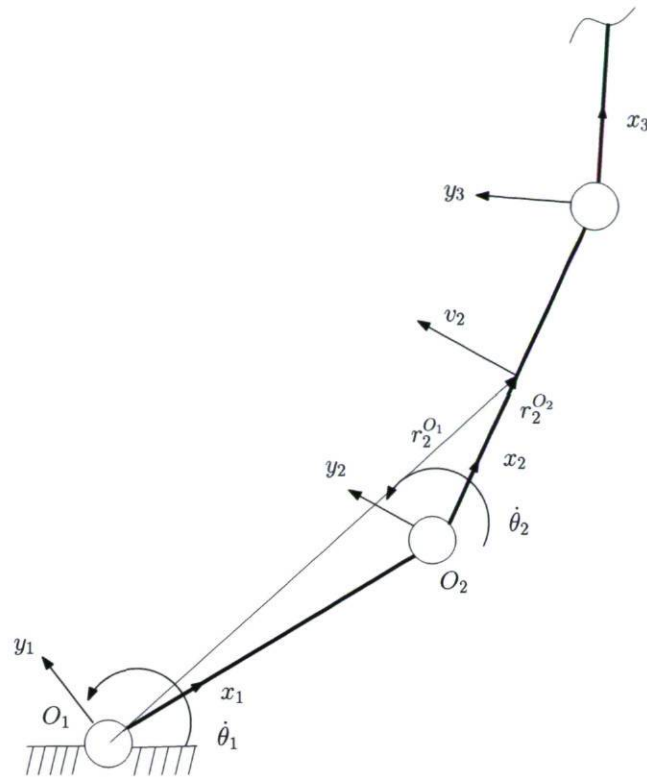


FIGURE 3.4 – Vitesses associées au deuxième point de contact.

Le vecteur $\mathbf{r}_2^{O_k}$ relie l'origine locale O_k ($k = 1, 2$) au point de contact 2. Comme pour le cas du point de contact 1, nous obtenons le visseur suivant :

$$\xi_2 := \sum_{k=1}^2 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_k \\ -\dot{\theta}_k r_{2y}^{O_k} \\ \dot{\theta}_k r_{2x}^{O_k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^2 \dot{\theta}_k \begin{bmatrix} 1 \\ -r_{2y}^{O_k} \\ r_{2x}^{O_k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^2 \dot{\theta}_k \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E} \mathbf{r}_2^{O_k} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Finalement, nous définissons le visseur de l'articulation associé au point de d'origine O_k et en rapport au point de contact 2 comme suit :

$$\xi_2^{O_k} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{E} \mathbf{r}_2^{O_k} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Ce qui nous donne le torseur associé au point de contact 2 :

$$\xi_2 := \sum_{k=1}^2 \dot{\theta}_k \xi_2^{O_k}. \quad (3.16)$$

3.1.3.3 Visseur associé au point de contact 3

Maintenant nous pouvons encore étendre le développement au visseur associé au point de contact 3, ξ_3 , qui est le plus complexe des trois cas comme illustré à la figure ???. Les vitesses associées dépendent maintenant de la rotation de trois corps : la phalange proximale et la phalange médiane et la phalange distale. Cependant, comme nous avons pu noter lors du développement dans le cas du point de contact 2, ce cas-ci s'écrit comme les cas précédents et ce, en ajoutant des termes pour tenir compte de la phalange supplémentaire. Nous faisons maintenant l'hypothèse que ce point de contact est situé sur la phalange distale et nous écrivons que :

$$\omega_3 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3; \quad (3.17)$$

$$\mathbf{v}_2 = (\dot{\theta}_1 \mathbf{E} \mathbf{r}_3^{O_1}) + (\dot{\theta}_2 \mathbf{E} \mathbf{r}_3^{O_2}) + (\dot{\theta}_3 \mathbf{E} \mathbf{r}_3^{O_3}). \quad (3.18)$$

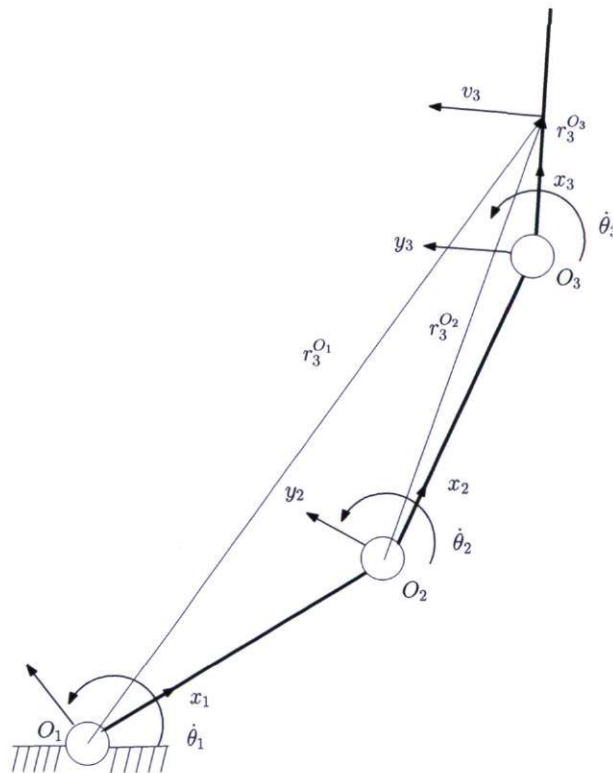


FIGURE 3.5 – Vitesses associées au troisième point de contact.

Comme dans les cas précédents, le vecteur $\mathbf{r}_3^{O_k}$ relie l'origine locale O_k ($k = 1, 2, 3$)

au point de contact sur la 3^{ème} phalange. Nous obtenons alors le visseur suivant :

$$\boldsymbol{\xi}_3 := \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \dot{\theta}_k \\ -\dot{\theta}_k r_{3y}^{O_k} \\ \dot{\theta}_k r_{3x}^{O_k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \dot{\theta}_k \begin{bmatrix} 1 \\ -r_{3y}^{O_k} \\ r_{3x}^{O_k} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \dot{\theta}_k \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{Er}_3^{O_k} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Finalement, nous définissons le visseur de l'articulation associé au point d'origine O_k et en rapport au point de contact 3 comme suit :

$$\boldsymbol{\xi}_3^{O_k} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{Er}_3^{O_k} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Ce qui nous donne le visseur associé au point de contact 3 :

$$\boldsymbol{\xi}_3 := \sum_{k=1}^3 \dot{\theta}_k \boldsymbol{\xi}_3^{O_k}. \quad (3.21)$$

Maintenant, nous pouvons expliciter ce visseur de façon plus générale :

$$\boldsymbol{\xi} := \sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \boldsymbol{\xi}_i^{O_k}. \quad (3.22)$$

C'est-à-dire que le visseur associé au point de contact i est la somme des produits des visseurs de liaisons rotoïdes par rapport aux origines locales O_k ($k = 1, \dots, i$), $\boldsymbol{\xi}_i^{O_k}$, et du module de la vélocité angulaire de la phalange associée selon son repère local, $\dot{\theta}_k$. De façon explicite, pour chaque point de contact, un par phalange :

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\xi}_1^{O_1} \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\xi}_2^{O_1} + \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\xi}_2^{O_2} \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\xi}_3 = \dot{\theta}_1 \boldsymbol{\xi}_3^{O_1} + \dot{\theta}_2 \boldsymbol{\xi}_3^{O_2} + \dot{\theta}_3 \boldsymbol{\xi}_3^{O_3} \quad (3.25)$$

3.1.4 Torseur associé au point de contact i

Nous considérons maintenant le torseur, $\boldsymbol{\zeta}_i$. Ce torseur est composé de la force tangentielle f_{ti} , de la force normale f_{ni} et du couple τ_i appliqués au point de contact i .

Ce torseur s'exprime comme suit :

$$\zeta_i := \begin{bmatrix} f_{ti} \\ f_{ni} \\ \tau_i \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Nous pouvons aussi écrire ce torseur ainsi :

$$\zeta_i = f_{ti}\mathbf{x}_i^* + f_{ni}\mathbf{y}_i^* + \tau_i\mathbf{z}_i^*. \quad (3.27)$$

où

- $\mathbf{y}_i^* = [\mathbf{y}_i^T \ 0]^T$ est le torseur unitaire qui représente une force pure dans la direction \mathbf{y}_i ;
- $\mathbf{x}_i^* = [\mathbf{x}_i^T \ 0]^T$ est le torseur unitaire qui représente une force pure dans la direction \mathbf{x}_i ;
- $\mathbf{z}_i^* = [0 \ 0 \ 1]^T$ est le torseur unitaire qui représente un couple pur dans la direction \mathbf{z}_i .

Si nous considérons le cône de frottement appliqué à la $i^{\text{ème}}$ phalange, et nous considérons le cas de l'équilibre limite, nous avons que :

$$f_{ti} = \pm\mu_i f_{ni}, \quad (3.28)$$

et dans ce cas μ_i est le coefficient de frottement statique pour le $i^{\text{ème}}$ point de contact.

En généralisant, nous obtenons $\mathbf{f}_t = \boldsymbol{\mu}\mathbf{f}_n$, où

$$\mathbf{f}_t := \begin{bmatrix} f_{t1} \\ f_{t2} \\ f_{t3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_n := \begin{bmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ f_{n3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\mu} := \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Ici, le paramètre μ_i peut être négatif et ne représente pas nécessairement le coefficient de frottement statique. La matrice $\boldsymbol{\mu}$ est simplement la relation entre les vecteurs \mathbf{f}_t et \mathbf{f}_n .

De même, les couples τ_i peuvent être mis en relation avec un vecteur de force \mathbf{f}_n avec l'équation $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta}\mathbf{f}_n$, où :

$$\boldsymbol{\tau} := \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_n := \begin{bmatrix} f_{n1} \\ f_{n2} \\ f_{n3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} := \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Nous pouvons donc écrire le torseur ζ_i ainsi :

$$\zeta_i = f_i (\mathbf{y}_i^* + \mu_i \mathbf{x}_i^* + \eta_i \mathbf{z}_i^*). \quad (3.31)$$

Nous reprenons l'expression de droite de l'équation (??) et insérons les résultats (??) et (??),

$$\xi \circ \zeta_i = \sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \xi_i^{O_k} \circ f_i (\mathbf{y}_i^* + \mu_i \mathbf{x}_i^* + \eta_i \mathbf{z}_i^*) \quad (3.32)$$

$$= f_i \left(\sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \mathbf{r}_i^{O_k T} \mathbf{x}_i^* - \mu_i \sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \mathbf{r}_i^{O_k T} \mathbf{y}_i^* + \eta_i \sum_{k=1}^i \dot{\theta}_k \right). \quad (3.33)$$

Alors l'équation ?? devient :

$$\mathbf{t}^T \boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{f}^T (\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{f}^T (\mathbf{J} \mathbf{T} \boldsymbol{\omega}_a) \quad (3.34)$$

où nous définissons \mathbf{J} comme la somme suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 - \mu \mathbf{J}_2 + \eta \mathbf{J}_3 \quad (3.35)$$

et où nous définissons les matrices :

$$\mathbf{J}_1 := \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_2^{O_1 T} \mathbf{x}_2 & k_2 & 0 \\ \mathbf{r}_3^{O_1 T} \mathbf{x}_3 & \mathbf{r}_3^{O_2 T} \mathbf{x}_3 & k_3 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{J}_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_2^{O_1 T} \mathbf{y}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_3^{O_1 T} \mathbf{y}_3 & \mathbf{r}_3^{O_2 T} \mathbf{y}_3 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{J}_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

où k_1 , k_2 et k_3 sont définis à la figure ??.

La matrice \mathbf{J} dépend de l'endroit des points de contact des phalanges (matrice \mathbf{J}_1), des coefficients de friction (matrice \mathbf{J}_2) et de l'orientation relative des phalanges (matrice \mathbf{J}_3).

La matrice de transmission, \mathbf{T} , dépend du mécanisme de transmission. Elle établit la distribution du couple d'actionnement sur chaque liaison rotoïde. Elle est le lien entre

le vecteur des vitesses angulaires et le vecteur des dérivées temporelles des coordonnées articulaires des liaisons rotoïdes :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{T}\boldsymbol{\omega}_a \quad (3.39)$$

ou explicitement :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Il est à noter que dans le cas où le doigt est complètement actionné, la matrice de transmission devient la matrice identité de dimension 3.

L'équation clé de la matrice de transmission est donc :

$$\dot{\theta}_1 = X_1\dot{\theta}_a + X_2\dot{\theta}_2 + X_3\dot{\theta}_3 \quad (3.41)$$

où les coefficients X_i dépendent du système mécanique utilisé pour mettre en oeuvre le sous-actionnement.

3.1.5 Expression des forces

En appliquant le principe du travail virtuel, l'équation (??) mène à l'équation suivante qui nous permet de calculer les forces de contact à partir des couples d'actionnement :

$$\mathbf{f} = \mathbf{J}^{-T}\mathbf{T}^{-T}\mathbf{t}. \quad (3.42)$$

L'équation (??) a du sens car les matrices \mathbf{J} et \mathbf{T} sont toujours inversibles,

$$\det(\mathbf{T}) = X_1 \neq 0 \quad (3.43)$$

car \mathbf{T} est définie ainsi (équation ??), et, si nous négligeons f_{ti} ,

$$\det(\mathbf{J}_1) = \prod_{i=1}^3 k_i \neq 0 \quad (3.44)$$

si toutes les phalanges sont en contact et l'on fait l'hypothèse que $\eta_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$ ou

$$\det(\mathbf{J}_3) = 1 \neq 0, \quad (3.45)$$

si les phalanges ne sont pas en contact et que $\eta_i = 1$ pour $i = 1, 2, 3$.

3.1.5.1 Couples locaux

Ce dernier cas est intéressant car dans ce cas, les phalanges ne sont pas en contact avec un objet extérieur. Alors nous redéfinissons le vecteur des forces de contact comme étant le vecteur des couples aux liaisons rotoïdes :

$$\boldsymbol{\tau} := \mathbf{f} \quad (3.46)$$

et l'équation (??) devient

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{T}^{-T} \mathbf{t} \quad (3.47)$$

avec ici $\mathbf{J} = \mathbf{J}_3$ car les matrices \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 sont des matrices nulles puisque nous supposons ici qu'il n'y a aucun contact.

\mathbf{J} est alors la matrice qui transforme les couples dans le domaine global, τ_i ($i=1,2,3$), en couples locaux, τ_i^* ($i=1,2,3$) :

$$\boldsymbol{\tau}^{*T} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{J} \quad (3.48)$$

ou

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau}^*. \quad (3.49)$$

τ_i^* est une variable importante car elle représente le couple à la $i^{\text{ème}}$ liaison rotoïde. Nous substituons l'équation (??) dans l'équation (??) et nous obtenons :

$$\mathbf{J}^{-T} \boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{T}^{-T} \mathbf{t} \quad (3.50)$$

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{t}. \quad (3.51)$$

Ainsi l'application de l'équation (??) avec l'expression spécifique de la matrice de transmission pour le mécanisme étudié résulte en une expression analytique des couples locaux appliqués aux liaisons rotoïdes.

3.1.5.2 Forces de contact

Un autre cas intéressant est le cas où le doigt est en contact avec un objet. Nous voulons déterminer les forces de contact entre chaque phalange et l'objet. Nous débutons encore avec l'équation (??). Afin de solutionner cette équation, nous devons trouver une expression pour la matrice \mathbf{J} qui est spécifique au doigt que nous étudions.

Pour des fins de simplifications, nous faisons l'hypothèse que la matrice $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ ou explicitement, les surfaces de l'objet et du doigt sont lisses ce qui signifie que les forces tangentielles sont négligeables. De même, nous faisons l'hypothèse que la matrice $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ ce qui signifie que le contact des phalanges avec l'objet ne crée pas de couples. Ainsi, l'équation (??) devient :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1. \quad (3.52)$$

De plus, nous faisons l'hypothèse que le contact avec chaque phalange se fait au milieu de celles-ci :

$$k_i = \frac{l_i}{2} \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.53)$$

L'expression $\mathbf{r}_j^{O_i^T} \mathbf{x}_j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$, représente le vecteur de position du contact j sur la phalange j par rapport à la liaison i qui est orthogonal à la force normale de contact j . Alors, pour un doigt à trois phalanges nous avons :

$$\mathbf{J} := \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_2 + l_1 \cos \theta_2 & k_2 & 0 \\ k_3 + l_2 \cos \theta_3 + l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) & k_3 + l_2 \cos \theta_3 & k_3 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Maintenant, en appliquant l'équation (??) ainsi que l'expression de la matrice de transmission spécifique pour le mécanisme étudié, nous pouvons obtenir une expression analytique pour les forces de contact.

3.2 Conclusion

Un mécanisme sous-actionné possède un degré de liberté plus important que le degré d'actionnement. Ce mécanisme possède donc au moins un actionneur qui agit sur plus d'une liaison mécanique. Ces mécanismes permettent donc de réduire le nombre d'actionneurs nécessaires pour la tâche réduisant du même coup la complexité de la commande nécessaire pour le fonctionnement tout en ne sacrifiant pas de degrés de liberté.

La théorie du sous-actionnement développée dans des laboratoires de robotique à travers le monde nous permet de comprendre le fonctionnement de ce mécanisme.

Son intelligence provient de sa matrice de transmission qui détermine la distribution des couples d'actionnement aux liaisons mécaniques. Les mécanismes sous-actionnés s'avèrent donc une alternative intéressante afin de simplifier des mécanismes complexes tout en augmentant leur fiabilité ainsi qu'à réduire les coûts de production.

Chapitre 4

Modélisation mathématique

Nous présentons ici deux modèles cinémato-statiques basés sur les développements présentés au chapitre ?? ainsi que sur les travaux publiés par des membres du Laboratoire de robotique de l'université Laval [?], [?] et [?]. Le premier modèle cinémato-statique décrit le comportement d'un doigt du premier prototype réalisé en 2005 tandis que le deuxième modèle décrit le comportement d'un doigt du prototype de la prothèse de main Laval réalisée en 2010 et celui-ci inclut les effets de la gravité sur les liaisons mécaniques.

4.1 Premier prototype

Un premier prototype a été réalisé avec les travaux présentés dans [?] et est le point de départ des ces travaux-ci. Il s'agit d'une main anthropomorphique sous-actionnée.

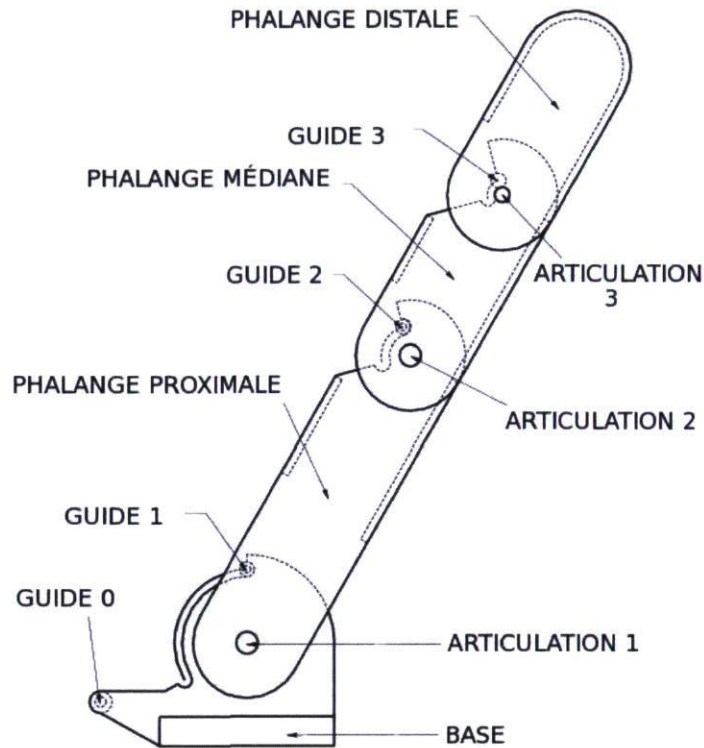


FIGURE 4.1 – Premier prototype.

Cette main possède 15 degrés de liberté et 1 degré d'actionnement. Elle est conçue de sorte que sa position neutre soit celle de la main ouverte et de sorte qu'avec l'actionnement la main se referme pour saisir un objet. Le sous-actionnement qui est implanté dans les doigts et dans la paume fait en sorte que la main se ferme en adoptant la forme de l'objet. Ceci nous évite de concevoir une prise pour des objets de formes prédéfinies. Alors le sous-actionnement admet la prise d'un plus grand ensemble d'objets sans planification.

La figure ?? présente le mécanisme du doigt. L'actionnement du doigt est fourni par un câble fixé à la phalange distale et qui passe le long du doigt en son entier à travers des guides jusqu'à la base du doigt. Ce câble est mis sous tension mécanique et celle-ci induit une force sur des guides fixés aux phalanges. Ces guides sont fixés à une phalange. La force induite crée un couple qui actionne la liaison rotoïde. Le couple produit est donc fonction de la tension dans le câble et de la position du guide à partir du centre de la liaison rotoïde. Le câble d'actionnement est idéalisé comme étant rigide. Nous négligeons donc tout étirement de celui-ci.

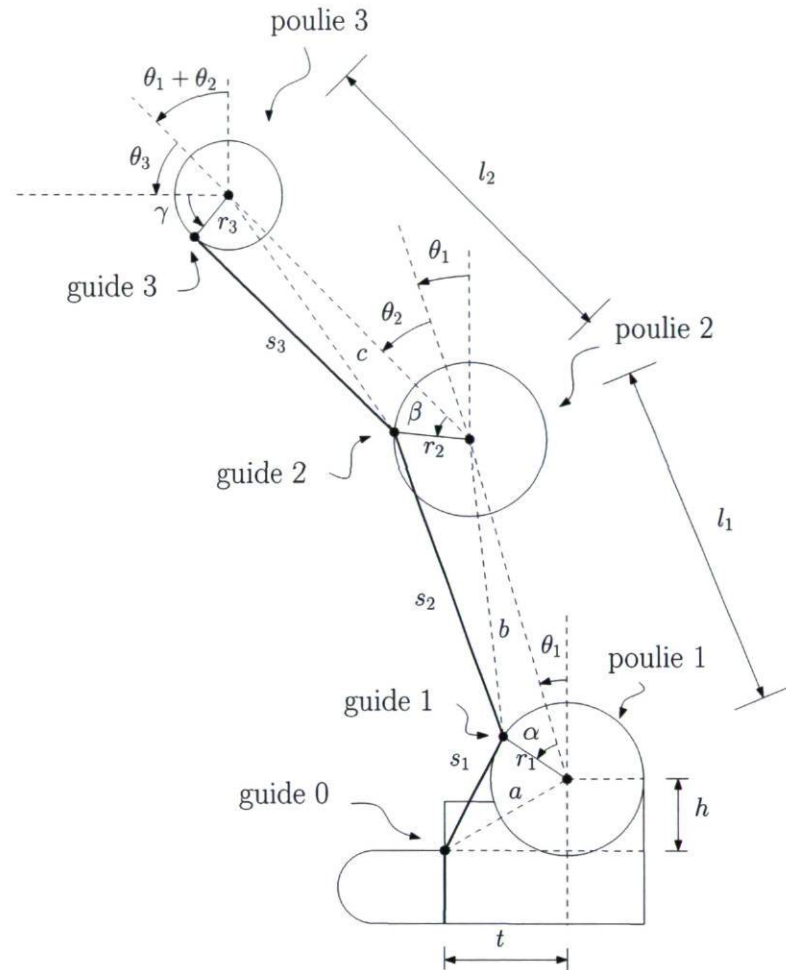


FIGURE 4.2 – Géométrie du premier prototype.

Le retour, ou la force qui ramène le doigt à la position neutre, est assuré par des ressorts en torsion fixés aux liaisons rotoïdes.

La figure ?? est un schéma du mécanisme. Le doigt est constitué de trois liaisons rotoïdes. Ces liaisons sont idéalisées comme étant des poulies ayant comme rayon, r_i , $i = 1, 2, 3$, la distance la plus courte entre le guide et le centre de la liaison. Nous avons les longueurs des phalanges, l_i , $i = 1, 2, 3$, ainsi que les longueurs constantes :

- h : la distance verticale entre le $guide_0$ et le centre de la première liaison rotoïde ;
- t : la distance horizontale entre le $guide_0$ et le centre de la première liaison rotoïde ;
- a : la distance entre le $guide_0$ et le centre de la première liaison rotoïde ;
- b : la distance entre le $guide_1$ et le centre de la deuxième liaison rotoïde ;

- c : la distance entre le *guide*₂ et le centre de la troisième liaison rotoïde ;

Nous avons également les angles constants suivant :

- α : l'angle formé par la ligne longitudinale reliant les centres de la première et la deuxième liaison rotoïde et le rayon reliant le centre de la première liaison rotoïde et le *guide*₁ ;
- β : l'angle formé par la ligne longitudinale reliant les centres de la deuxième et la troisième liaison rotoïde et le rayon reliant le centre de la deuxième liaison rotoïde et le *guide*₂ ;
- γ : l'angle formé par la ligne longitudinale ayant pour origine le centre de la troisième liaison rotoïde et le rayon reliant le centre de la troisième liaison rotoïde et le *guide*₃ ;

Il est simple de se convaincre que ces distances sont constantes car l_1 , r_1 et b forment un triangle. Puisque que l_1 , r_1 et α sont constants, b doit être constant. La constance de a et c se démontrent de façon similaire.

Finalement, nous avons les variables suivantes :

- θ_i : les variables articulaires du doigt, $i = 1, 2, 3$;
- s_i : la longueur du tendon entre le *guide* _{$i-1$} et le *guide* _{i} , $i = 1, 2, 3$;

Notre but est de bâtir la matrice de transmission pour ce mécanisme. Pour cela, nous débutons par établir la relation élémentaire suivante :

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 \quad (4.1)$$

où s est la distance totale parcourue par le tendon du *guide*₃ jusqu'à l'actionneur, et s_0 est la distance parcourue par le tendon entre le *guide*₀ et l'actionneur.

La distance s varie tandis que s_0 est constante. Alors, la dérivée par rapport au temps de l'équation (??) est :

$$\dot{s} = \dot{s}_1 + \dot{s}_2 + \dot{s}_3. \quad (4.2)$$

Cette relation reflète le fait que la réduction totale du parcours du tendon, comme par l'enroulement du tendon autour d'une bobine, correspond à la réduction des distances entre chacun des guides du système. Nous voulons donc obtenir des expression pour les

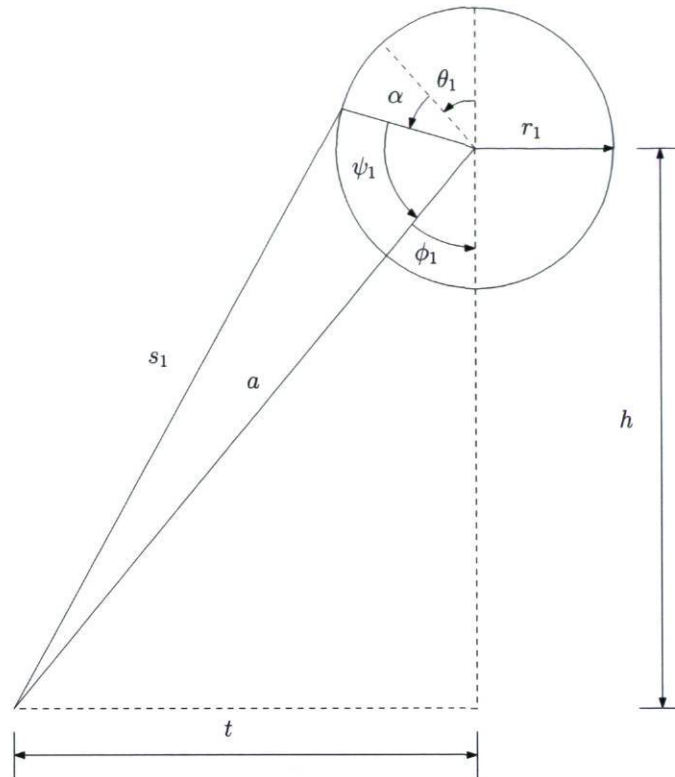


FIGURE 4.3 – Géométrie de la base.

$s_i, i = 1, 2, 3.$

La figure ?? montre la première liaison rotoïde avec la base du doigt. Deux autres angles y sont illustrés et que nous définissons ψ_1 comme étant l'angle entre a et r_1 et ϕ_1 étant l'angle entre a et la verticale passant par le centre de la liaison rotoïde.

Ceci nous permet d'établir la relation suivante :

$$\theta_1 + \alpha + \psi_1 + \phi_1 = \pi. \quad (4.3)$$

Et alors, la dérivée par rapport au temps nous permet d'établir que :

$$\dot{\psi}_1 = -\dot{\theta}_1. \quad (4.4)$$

L'angle ψ_1 nous permet d'établir une relation entre s_1 et le changement angulaire de la liaison rotoïde, $\dot{\theta}_1$. En invoquant la loi des cosinus, nous écrivons :

$$s_1^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \psi_1. \quad (4.5)$$

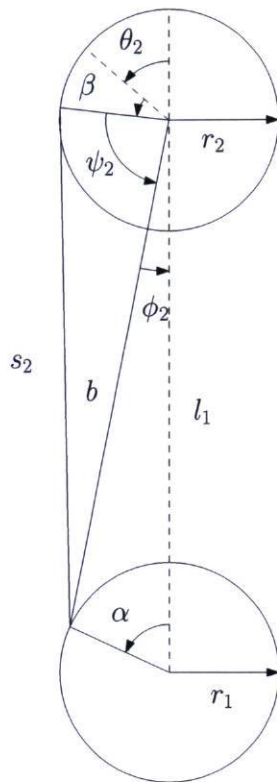


FIGURE 4.4 – Géométrie de la première phalange.

Ensuite, nous dérivons l'équation (??) et nous obtenons l'expression suivante :

$$2s_1\dot{s}_1 = -2\dot{\psi}_1 ar_1 \sin \psi_1 \quad (4.6)$$

et en utilisant la relation (??) :

$$\dot{s}_1 = \left(\frac{ar_1 \sin \psi_1}{s_1} \right) \dot{\theta}_1. \quad (4.7)$$

La figure ?? montre les deux premières liaisons rotoïdes. De façon similaire au cas précédent, nous définissons ψ_2 comme étant l'angle entre b et r_2 et ϕ_2 étant l'angle entre b et la ligne longitudinale reliant les centres de la première et la deuxième liaison rotoïde.

Ceci nous permet d'établir la relation suivante :

$$\theta_2 + \beta + \psi_2 + \phi_2 = \pi \quad (4.8)$$

et en dérivant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\dot{\psi}_2 = -\dot{\theta}_2. \quad (4.9)$$

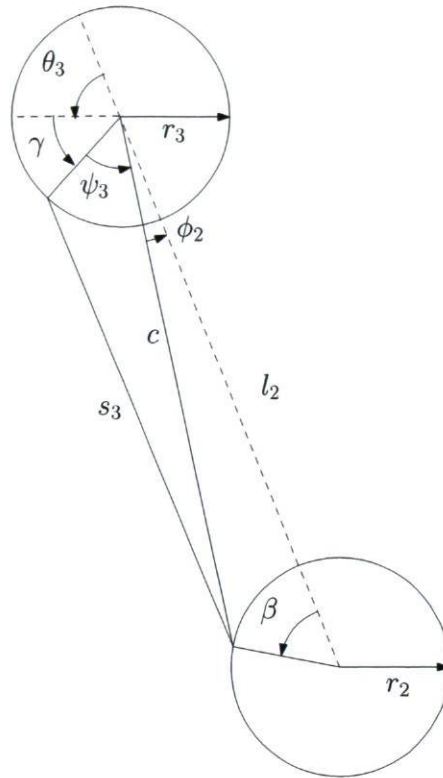


FIGURE 4.5 – Géométrie de la deuxième phalange.

L'angle ψ_2 nous permet d'établir une relation entre s_2 et le changement angulaire de la liaison rotoïde, $\dot{\theta}_2$. En invoquant la loi des cosinus, nous écrivons :

$$s_2^2 = b^2 + r_2^2 - 2br_2 \cos \psi_2. \quad (4.10)$$

Ensuite, nous dérivons l'équation (??) et nous obtenons l'expression suivante :

$$2s_2\dot{s}_2 = -2\dot{\psi}_2 br_2 \sin \psi_2 \quad (4.11)$$

et en utilisant la relation (??) :

$$\dot{s}_2 = \left(\frac{br_2 \sin \psi_2}{s_2} \right) \dot{\theta}_2. \quad (4.12)$$

La figure ?? montre les deux dernières liaisons rotoïdes. Comme dans les cas précédents, nous définissons ψ_3 comme étant l'angle entre c et r_3 et ϕ_3 étant l'angle entre c et la ligne longitudinale reliant les centres de la deuxième et la troisième liaison rotoïde.

Ceci nous permet d'établir la relation suivante :

$$\theta_3 + \gamma + \psi_3 + \phi_3 = \pi \quad (4.13)$$

et alors, la dérivée par rapport au temps nous permet d'établir que :

$$\dot{\psi}_3 = -\dot{\theta}_3. \quad (4.14)$$

L'angle ψ_3 nous permet d'établir une relation entre \dot{s}_3 et le changement angulaire de la liaison rotoïde, $\dot{\theta}_3$. En invoquant la loi des cosinus, nous écrivons :

$$s_3^2 = c^2 + r_3^2 - 2cr_3 \cos \psi_3. \quad (4.15)$$

Ensuite, nous dérivons l'équation (??) et nous obtenons l'expression suivante :

$$2s_3\dot{s}_3 = -2\dot{\psi}_3cr_3 \sin \psi_3 \quad (4.16)$$

et en utilisant la relation (??) :

$$\dot{s}_3 = \left(\frac{cr_3 \sin \psi_3}{s_3} \right) \dot{\theta}_3. \quad (4.17)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (??) en utilisant les expressions trouvées en (??), (??) et (??) :

$$\dot{s} = \left(\frac{ar_1 \sin \psi_1}{s_1} \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{br_2 \sin \psi_2}{s_2} \right) \dot{\theta}_2 + \left(\frac{cr_3 \sin \psi_3}{s_3} \right) \dot{\theta}_3. \quad (4.18)$$

Il ne reste plus qu'à établir une expression pour \dot{s} . Puisque \dot{s} correspond à la vitesse d'actionnement, nous posons que :

$$\dot{s} = \left(\frac{ar_1 \sin \psi_1}{s_1} \right) \dot{\theta}_a. \quad (4.19)$$

Ainsi, nous avons une relation complète entre les vitesses angulaires à chaque liaison rotoïde et la vitesse angulaire d'actionnement :

$$\left(\frac{ar_1 \sin \psi_1}{s_1} \right) \dot{\theta}_a = \left(\frac{ar_1 \sin \psi_1}{s_1} \right) \dot{\theta}_1 + \left(\frac{br_2 \sin \psi_2}{s_2} \right) \dot{\theta}_2 + \left(\frac{cr_3 \sin \psi_3}{s_3} \right) \dot{\theta}_3. \quad (4.20)$$

Et ainsi, nous réécrivons cette dernière équation pour obtenir une expression de forme similaire à l'équation clé (??) :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_a - \left(\frac{s_1 br_2 \sin \psi_2}{s_2 ar_1 \sin \psi_1} \right) \dot{\theta}_2 - \left(\frac{s_1 cr_3 \sin \psi_3}{s_3 ar_1 \sin \psi_1} \right) \dot{\theta}_3. \quad (4.21)$$

Nous déduisons donc que :

$$X_1 = 1 \quad (4.22)$$

$$X_2 = - \left(\frac{s_1 b r_2 \sin \psi_2}{s_2 a r_1 \sin \psi_1} \right) \quad (4.23)$$

$$X_3 = - \left(\frac{s_1 c r_3 \sin \psi_3}{s_3 a r_1 \sin \psi_1} \right) \quad (4.24)$$

Ainsi, la matrice de transmission que nous cherchions pour ce mécanisme s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & - \left(\frac{b s_1 \sin \psi_2}{a s_2 \sin \psi_1} \right) \left(\frac{r_2}{r_1} \right) & - \left(\frac{c s_1 \sin \psi_3}{a s_3 \sin \psi_1} \right) \left(\frac{r_3}{r_1} \right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La matrice donnée à l'équation (??) démontre bien que nous sommes en présence d'un mécanisme de type tendon et poulies comme ceux traités dans [?]. La transmission de force entre chaque phalange correspond au ratio de rayon des poulies multiplié par un coefficient. Cependant, les ratios de transmission des mécanismes de ce type étudiés dans [?] et de celui du deuxième prototype étudié plus loin sont constants. Dans le présent cas, nous voyons que s_i et ψ_i varient dans le temps. Ici, les forces de rappel qui sont fournies par les ressorts de torsion sont ignorées car, par conception, elles sont négligeables comparé aux forces d'actionnement.

Alors, nous déduisons que les couples d'actionnement varient grandement lors de la séquence de fermeture. Des essais en laboratoire de ce mécanisme démontrent que son opération nécessite une grande force initiale pour cette fermeture. De plus, il a été observé sur le prototype que les guides qui sont constitués de tiges de métal produisaient une force de frottement non-négligeable. Finalement, les ressorts de torsion rendaient l'assemblage pénible et long.

4.2 Deuxième prototype

Afin de remédier aux faiblesses du premier prototype, un deuxième prototype a été développé. Le système de guides a été remplacé par un système de poulies. La figure ??

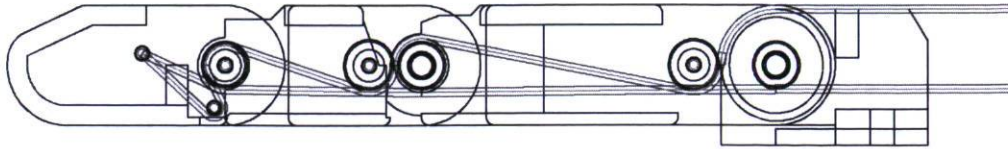


FIGURE 4.6 – Deuxième prototype.

illustre le système tendon et poulies que nous avons utilisé. Nous voyons qu'il y a deux poulies à chaque liaison rotoïde. Il y a une poulie principale et une poulie auxiliaire.

Le câble pour l'actionnement est toujours fixé à la phalange distale et passe le long du doigt jusqu'à la base. À chaque liaison rotoïde, le câble est passé de sorte qu'il soit entre les deux poulies. La poulie auxiliaire maintient l'orientation du câble autour de la poulie principale contrôlant ainsi le couple induit. Ainsi, les couples appliqués aux liaisons rotoïdes sont constants et leur amplitude dépend toujours de la tension du câble mais aussi des rayons des poulies principales. Le rapport de couples entre les liaisons n'est donc fonction que des rayons des poulies principales rendant le contrôle de la séquence de fermeture facile.

Le retour est aussi assuré par un tendon. Ce dernier est également fixé à la phalange distale et passe jusqu'à la base du doigt mais du côté opposé par rapport au câble d'actionnement. Cependant, le câble de retour est fixé à la base du doigt. Il passe aussi à travers un réseau de poulies qui est moins élaboré que celui pour l'actionnement. Il est important ici de noter que les poulies principales des deux systèmes de sous-actionnement quoique situées au même endroit peuvent être de rayons différents. Afin d'assurer le mouvement, le câble de retour est élastique. Celui-ci est donc fixé sous pré-tension lorsque le doigt est à sa position neutre. La force de retour est produite par l'énergie potentielle emmagasinée dans le câble élastique lorsque celui-ci est allongé par la flexion du doigt.

Comme dans le cas de l'actionnement, les couples aux liaisons rotoïdes sont des fonctions de la force de rappel et des rayons des poulies principales. Le ratio des couples

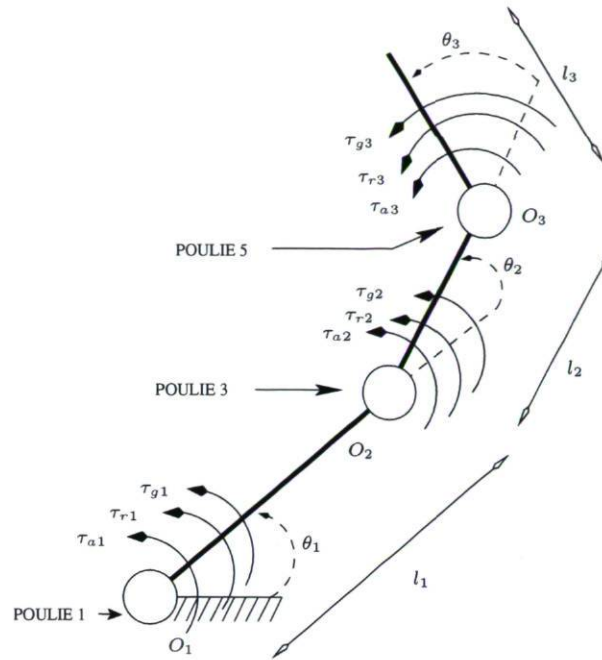


FIGURE 4.7 – Modèle statique d'un doigt du deuxième prototype.

est donc simple car il n'est également fonction que des rayons des poulies principales. Nous avons donc un système de retour simple à contrôler et à concevoir et simple à construire. Lors d'essais en laboratoire, le prototype de ce doigt a démontré que la friction dans les systèmes de sous-actionnement est réduite de façon significative.

Comme illustré à la figure ??, nous avons un système où les couples d'entrée de l'actionnement et de rappel sont distribués aux articulations et combinés aux couples induits par la gravité formant ainsi un système de trois couples locaux par articulation.

4.3 Calcul de la matrice de transmission pour l'actionnement

Afin de modéliser les couples aux liaisons rotoïdes avec l'aide de la méthode développée dans [?], qui a été généralisée dans [?] et décrite spécifiquement pour notre application dans le chapitre ??, nous devons trouver la matrice de transmission spécifique à notre prototype.

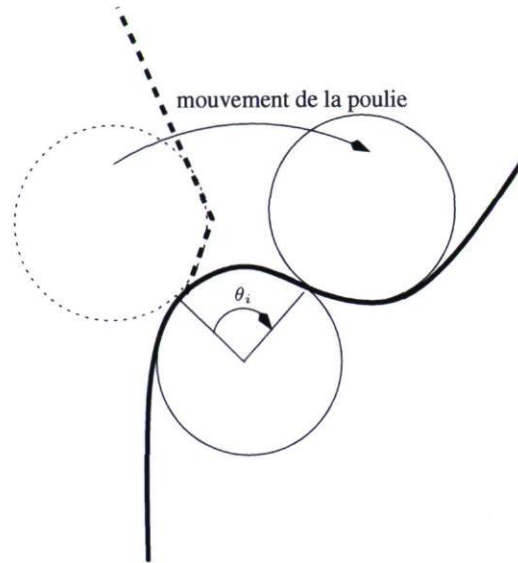


FIGURE 4.8 – Rotation d’une articulation.

Nous avons défini la matrice de transmission comme étant l’application linéaire qui transforme le vecteur des vitesses angulaires, ω_a , en le vecteur de la dérivée par rapport au temps des coordonnées articulaires,

$$\dot{\theta} = \mathbf{T}\omega_a \quad (4.26)$$

ou explicitement

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_a \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Ce système représente les trois égalités suivantes :

$$\dot{\theta}_1 = X_1\dot{\theta}_a + X_2\dot{\theta}_2 + X_3\dot{\theta}_3, \quad (4.28)$$

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2, \quad (4.29)$$

$$\dot{\theta}_3 = \dot{\theta}_3. \quad (4.30)$$

Nous voyons tout de suite que l’équation (4.28) est la seule relation à résoudre car les équations (4.29) et (4.30) sont des relations triviales.

La figure 4.8 illustre la rotation d’une articulation et son effet sur le tendon entre la poulie principale et la poulie auxiliaire. Ce mouvement résulte en une élongation

du tendon, x_i , d'amplitude du rayon de la poulie principale multiplié par la rotation angulaire de la liaison rotoïde :

$$x_i = r_{ia}\Delta\theta_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.31)$$

Puisque nous avons opté pour un mécanisme de tendon et poulie, l'amplitude totale de l'élongation du tendon pour tout le système est la rotation angulaire de la liaison d'actionnement multiplié par le rayon de la poulie principale de la première liaison rotoïde :

$$x = r_{1a}\Delta\theta_a. \quad (4.32)$$

À travers toute cette étude, nous faisons l'hypothèse que le tendon pour l'actionnement est rigide. Alors l'élongation totale du système correspond à la somme des élongations encourues à chacune des liaisons rotoïdes :

$$x = x_1 + x_2 + x_3. \quad (4.33)$$

Nous prenons l'équation (??) et insérons les relations (??) et (??) et nous obtenons,

$$r_{1a}\Delta\theta_a = r_{1a}\Delta\theta_1 + r_{3a}\Delta\theta_2 + r_{5a}\Delta\theta_3. \quad (4.34)$$

Maintenant, nous récrivons l'équation (??) sous une forme différentielle :

$$r_{1a}\dot{\theta}_a = r_{1a}\dot{\theta}_1 + r_{3a}\dot{\theta}_2 + r_{5a}\dot{\theta}_3 \quad (4.35)$$

et nous réorganisons le résultat (??) pour obtenir une forme similaire à l'équation (??) :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_a - \frac{r_{3a}}{r_{1a}}\dot{\theta}_2 - \frac{r_{5a}}{r_{1a}}\dot{\theta}_3. \quad (4.36)$$

Du résultat (??) en comparaison avec l'équation (??), nous déduisons que :

$$X_1 = 1, \quad (4.37)$$

$$X_2 = -\frac{r_{3a}}{r_{1a}}, \quad (4.38)$$

$$X_3 = -\frac{r_{5a}}{r_{1a}}. \quad (4.39)$$

Nous appliquons alors la définition de la matrice de transmission (??) et nous obtenons la matrice de transmission pour l'actionnement,

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r_{3a}}{r_{1a}} & -\frac{r_{5a}}{r_{1a}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Alors concrètement, nous voyons par la matrice (??) que la force d'actionnement est distribuée aux différentes liaisons rotoïdes avec des ratios constants. Ces ratios sont les rayons de la poulie à liaison rotoïde divisée par le rayon de la poulie de la liaison proximale.

Ce résultat correspond au résultat général pour les matrices de transmission pour des mécanismes à poulies et tendons présenté dans [?] et [?].

Pour un mécanisme sous-actionné à trois phalanges et de type poulie et tendons type, nous avons la matrice de transmission suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r_2}{r_1} & -\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Pour le deuxième prototype, nous avons $r_1 = r_{1a}$, $r_2 = r_{3a}$, $r_3 = r_{3a}$, et $r_4 = r_{5a}$. Alors la matrice (??) s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r_{3a}}{r_{1a}} & -\frac{r_{3a} r_{5a}}{r_{1a} r_{3a}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

et après les simplifications nous obtenons bien la matrice (??).

4.4 Calcul de la matrice de transmission pour le rappel

Pour poursuivre la modélisation du système, nous devons maintenant exprimer la matrice de transmission pour les forces de rappel qui permettent au doigt de retrouver

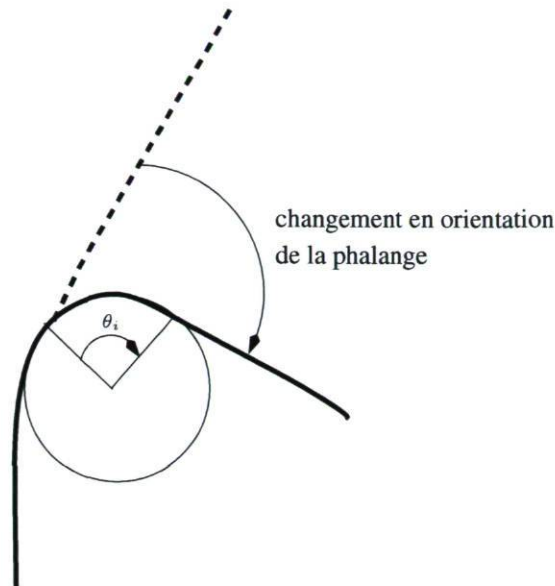


FIGURE 4.9 – Changement d’orientation associé à la rotation d’une articulation.

sa forme neutre, l’extension.

Comme à la section ??, nous sommes encore en présence d’un mécanisme de sous-actionnement du type poulie et tendons. Les différences majeures avec le mécanisme d’actionnement résident en le fait que la force de retour découle de l’élongation d’un élastique et que le mécanisme ne comprend pas de poulies auxiliaires aux liaisons rotoïdes. Cependant, les poulies principales ne sont pas nécessairement de même dimension que celles du mécanisme d’actionnement.

Le développement effectué à la section ?? est donc aussi valide pour le mécanisme de rappel et l’équation (??) est la relation à satisfaire puisque les équations (??) et (??) sont toujours triviales.

La figure ?? illustre la rotation de la liaison rotoïde et son effet sur le tendon qui passe autour de la poulie principale lors de la rotation de la liaison rotoïde. Ce mouvement résulte en une élongation du tendon, x_i , d’amplitude du rayon de la poulie principale multiplié par la rotation angulaire de la liaison rotoïde :

$$x_i = r_{ib} \Delta \theta_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.43)$$

De plus l’amplitude totale de l’élongation du tendon pour tout le système est la rota-

tion angulaire de la liaison d'actionnement multiplié par le rayon de la poulie principale de la première liaison rotoïde :

$$x = r_{1b}\Delta\theta_a. \quad (4.44)$$

Nous faisons l'hypothèse que le tendon est rigide, alors l'élongation totale du système correspond à la somme des élongations encourues à chacune des liaison rotoïdes :

$$x = x_1 + x_2 + x_3. \quad (4.45)$$

Nous prenons l'équation (??) et y insérons les relations (??) et (??) et nous obtenons,

$$r_{1b}\Delta\theta_a = r_{1b}\Delta\theta_1 + r_{3b}\Delta\theta_2 + r_{5b}\Delta\theta_3. \quad (4.46)$$

Maintenant, nous récrivons l'équation (??) sous une forme différentielle :

$$r_{1b}\dot{\theta}_a = r_{1b}\dot{\theta}_1 + r_{3b}\dot{\theta}_2 + r_{5b}\dot{\theta}_3 \quad (4.47)$$

et nous réorganisons le résultat (??) pour obtenir une forme similaire à l'équation (??) :

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_a - \frac{r_{3b}}{r_{1b}}\dot{\theta}_2 - \frac{r_{5b}}{r_{1b}}\dot{\theta}_3. \quad (4.48)$$

Du résultat (??) en comparaison de l'équation (??), nous déduisons que :

$$X_1 = 1, \quad (4.49)$$

$$X_2 = -\frac{r_{3b}}{r_{1b}}, \quad (4.50)$$

$$X_3 = -\frac{r_{5b}}{r_{1b}}. \quad (4.51)$$

Nous appliquons alors la définition (??) et nous obtenons la matrice de transmission pour l'actionnement,

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{r_{3b}}{r_{1b}} & -\frac{r_{5b}}{r_{1b}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

4.5 Couples dus à l'actionnement et au rappel

Maintenant que nous avons les matrices de transmission (??) et (??) nous pouvons les utiliser et les appliquer aux résultats de la sous-section ???. Notre but est de trouver la solution de l'équation :

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{t}. \quad (4.53)$$

Comme présenté dans [?], nous pouvons, dans un premier temps, résoudre cette équation pour les forces d'actionnement, en un deuxième temps, la résoudre et trouver une expression pour les couples dus à la gravité et en faire la somme afin d'obtenir une expression analytique pour tout le système.

4.5.1 Couples dus à l'actionnement

Pour l'actionnement, le vecteur \mathbf{t}_a est tout simplement exprimé comme suit :

$$\mathbf{t}_a = \begin{bmatrix} F_a r_{1a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

où le couple d'actionnement est la tension du câble multipliée par le rayon de la première poulie. Maintenant, il suffit de substituer les expressions (??) et (??) dans l'équation (??) et, après simplifications, nous obtenons :

$$\boldsymbol{\tau}_a = \begin{bmatrix} F_a r_{1a} \\ F_a r_{3a} \\ F_a r_{5a} \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Nous voyons ici que les expressions dans le vecteur en (??) répondent aux objectifs de conception du deuxième prototype. C'est-à-dire que si la tension du câble est constante, les couples locaux seront constants. Les couples aux liaisons articulaires ne sont pas fonction de la configuration du doigt puisque qu'ils ne sont pas fonction de $\theta_i, i = 1, 2, 3$.

4.5.2 Couples dus au rappel

Comme pour l'actionnement, le vecteur \mathbf{t}_r du rappel est simplement exprimé comme suit :

$$\mathbf{t}_r = \begin{bmatrix} F_r r_{1b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

où le couple de rappel est la tension du câble de retour multiplié par le rayon de la première poulie. Cependant cette tension F_r est fonction de l'étirement du câble de retour puisque ce dernier est élastique.

Nous utilisons donc la loi de Hooke pour exprimer la force de rappel :

$$F_r = -Ky \quad (4.57)$$

où K est la raideur et y est l'élongation. Une valeur d'élongation initiale, y_0 , est incluse dans l'expression pour l'élongation y car l'élastique possède une tension initiale. L'élongation résiduelle due au mouvement du doigt s'exprime selon l'équation suivante :

$$y - y_0 = r_{1b}\theta_1 + r_{3b}\theta_2 + r_{5b}\theta_3. \quad (4.58)$$

Nous combinons ensuite les expressions (??) et (??) pour obtenir une expression pour la force de rappel :

$$F_r = -K(y_0 + r_{1b}\theta_1 + r_{3b}\theta_2 + r_{5b}\theta_3). \quad (4.59)$$

L'équation (??) comporte un signe négatif afin de refléter l'action de la force de rappel qui opposée au mouvement du doigt.

Maintenant, il suffit de substituer les expressions (??) et (??) dans l'équation (??). Ainsi, nous obtenons une expression pour le vecteur de couples dus au rappel :

$$\boldsymbol{\tau}_r = \begin{bmatrix} -Kr_{1b}(y_0 + r_{1b}\theta_1 + r_{3b}\theta_2 + r_{5b}\theta_3) \\ -Kr_{3b}(y_0 + r_{1b}\theta_1 + r_{3b}\theta_2 + r_{5b}\theta_3) \\ -Kr_{5b}(y_0 + r_{1b}\theta_1 + r_{3b}\theta_2 + r_{5b}\theta_3) \end{bmatrix}. \quad (4.60)$$

4.6 Couples dus à la gravité

La difficulté dans la modélisation de l'effet de la gravité sur les liaisons rotoïdes réside dans le fait que le couple est une composante locale du produit vectoriel de la distance du centre de masse à la liaison considérée et de la force de gravité. Cette dernière est toujours dans le sens d'un vecteur unitaire vertical dirigé vers le bas mais le vecteur de bras de levier change de direction selon la configuration du doigt.

Nous devons donc situer le doigt et, en particulier, chaque phalange spatialement selon le repère global. Pour ce faire, nous faisons appel aux angles de Tait-Bryan, un cas spécial des angles d'Euler.

Nous débutons par présenter le théorème de rotation d'Euler qui nous permet l'utilisation des angles de Tait-Bryan pour représenter de façon efficace et mathématique les rotations des liaisons rotoïdes du doigt.

4.6.1 Théorème de rotation d'Euler

Le théorème de rotation d'Euler énonce que toute rotation arbitraire peut être décrite par trois paramètres. Nous exprimons le théorème de façon formelle ainsi :

Théorème 1 (de rotation d'Euler). *Pour toute rotation $\mathbf{Q} \in SO(3)$,*

a) *(Existence)*

Il existe un triplet $(\varphi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ tel que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)$.

b) *(Unicité)*

Soit (φ, θ, ψ) et $(\varphi', \theta', \psi') \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ tels que $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi) = \mathbf{Q}_y(\varphi')\mathbf{Q}_x(\theta')\mathbf{Q}_z(\psi')$, alors $\theta = \theta'$. Si $\theta \neq 0, \pi$, alors $\varphi = \varphi'$ et $\psi = \psi'$.

c) *Si nous posons que $\mathbf{Q} = [\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3]$, alors θ est l'angle entre \mathbf{i}_3 et l'axe des z , et si $\theta \notin \{0, \pi\}$, alors φ est l'angle de projection de \mathbf{i}_3 sur le plan xy et de l'axe des x , plus $\frac{\pi}{2}$.*

La preuve du théorème ainsi qu'une définition sommaire du groupe de rotation $SO(3)$ se trouvent dans L'Annexe ??.

Le théorème d'Euler démontre que nous pouvons décrire toute rotation avec trois paramètres. Si nous décrivons mathématiquement cette rotation avec une matrice de rotation, celle-ci peut toujours être décomposée en un produit de trois matrices de rotation dites élémentaires. C'est-à-dire que chaque matrice de rotation décrit une rotation autour d'un seul axe. Les trois paramètres de ces matrices élémentaires, trois angles, sont connus sous le nom d'*angles d'Euler*.

Les angles d'Euler nous permettent de représenter l'orientation d'un repère en vertu d'un repère global qui est fixe.

Les angles sont définis de façon à ce qu'une rotation anti-horaire de ces angles soit définie comme étant positive selon la règle de la main droite. φ et ψ prennent les valeurs de 0 à 2π radians, ce dernier non-inclus, et θ prend les valeurs de 0 à π radians inclusivement.

4.6.1.1 Rotations d'Euler

Les rotations d'Euler sont définies comme étant le mouvement obtenu lors du changement d'un angle d'Euler tout en maintenant les autres constants. Ces rotations sont connues sous le nom de précession, nutation et rotation propre.

4.6.1.2 Angles de Tait-Bryan

La figure ?? illustre une autre convention où les trois matrices de rotation élémentaires correspondent à trois axes différents. Cette convention est connue sous le nom d'angles Tait-Bryan et est très utilisée dans le domaine de l'aérospatiale. Elle est obtenue en considérant les trois rotations suivantes :

$$\mathbf{Q}_z(\psi) := \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{Q}_y(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}, \text{ et} \quad (4.62)$$

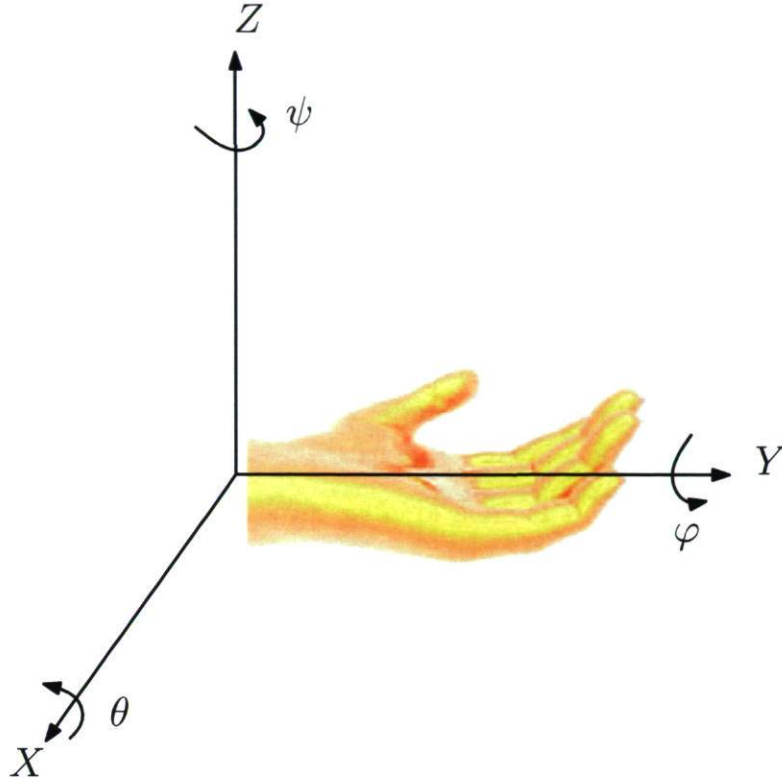


FIGURE 4.10 – La main et les repères spatiaux.

$$\mathbf{Q}_x(\theta) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (4.63)$$

Ainsi nous obtenons la matrice de rotation suivante qui correspond à la convention XYZ :

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \varphi \cos \psi + \sin \theta \sin \psi & \cos \theta \sin \varphi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

4.6.2 Effets de la gravité sur les liaisons rotoïdes

Il est bien connu qu'en mécanique classique, la force de gravité est exprimée de façon générale par le vecteur suivant :

$$\mathbf{F}_g := -mg\mathbf{e}_3 \quad (4.65)$$

où \mathbf{e}_3 est un vecteur unitaire de base dans le repère global qui est dirigé en direction inverse du champs gravitationnel. Le scalaire $-mg$ est l'amplitude de cette force. C'est-à-dire la masse du solide multipliée par l'accélération gravitationnelle terrestre, g . Nous pouvons donc exprimer le vecteur de la force de gravité pour un solide i ainsi :

$$\mathbf{F}_{gi} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_i g \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Le signe négatif devant l'amplitude fait référence au fait que la force de gravité agit vers le bas ou dans le sens négatif du vecteur de base \mathbf{e}_3 . Bien sûr ce fait est constant pour toutes les orientations possibles du solide considéré. Ici nous allons considérer les centres de masse des phalanges du doigt.

4.6.2.1 Liaison rotoïde entre les phalanges distale et médiane

Nous débutons par considérer la phalange distale. Le problème est relativement simple puisqu'il y a qu'un centre de masse à considérer. Le centre de masse est situé à une distance c_{m3} du centre de la liaison rotoïde entre les phalanges médiane et distale. Nous avons le vecteur suivant pour exprimer cette distance dans le système de référence local R_3 :

$$\mathbf{c}_{m3} := \begin{bmatrix} 0 \\ c_{m3} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Nous savons que le couple dû à la gravité au centre de masse c_{m3} est le résultat du produit vectoriel des vecteurs \mathbf{c}_{m3} et \mathbf{F}_{g3} . Cependant, ces deux vecteurs sont exprimés selon deux repères différents. Nous devons donc modifier l'un de ces vecteurs pour l'exprimer dans le repère du second.

C'est ici que les angles de Tait-Bryan nous sont utiles. Nous savons que nous pouvons modifier le vecteur choisi en appliquant à celui-ci la matrice de l'équation (??) et nous obtiendrons le vecteur exprimé dans le système de repère approprié.

Il est utile d'exprimer le vecteur de la force de gravité, \mathbf{F}_{g3} , dans le repère local R_3 car nous désirons obtenir le couple qui est appliqué sur la liaison rotoïde et donc nous désirons obtenir un couple exprimé dans le système de référence local. De plus les paramètres de l'application \mathbf{Q} sont tout simplement l'orientation spatiale du centre de la liaison rotoïde reliant les phalanges médiane et distale. Ici,

$$\theta^* = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (4.68)$$

Nous appliquons alors la matrice de rotation, \mathbf{Q} , exprimée dans l'équation (??) sur le vecteur \mathbf{F}_{g3} pour obtenir son expression dans le repère R_3 :

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{g3}]_3 &= \mathbf{Q}[\mathbf{F}_{g3}]_0 \\ &= \begin{bmatrix} -m_3g \sin \varphi \\ m_3g \cos \varphi \sin(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ -m_3g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Nous voyons immédiatement que le vecteur de la force de gravité exprimé dans le repère local de la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane ne dépend pas du paramètre d'orientation ψ . Ce fait est très normal puisque la matrice de rotation $\mathbf{Q}_z(\psi)$ telle qu'exprimée par l'équation (??) n'a pas d'effet sur les vecteurs orientés dans la même direction que le vecteur de base \mathbf{e}_3 .

Ensuite, il ne nous reste qu'à faire le produit vectoriel entre le vecteur du bras de levier du centre de masse et le vecteur de la force de gravité qui sont maintenant exprimés dans le même de repère. En utilisant les équations (??) et (??), nous trouvons :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}_3]_3 &= [\mathbf{c}_{m3}]_3 \times [\mathbf{F}_{g3}]_3 \\ &= \begin{bmatrix} -m_3c_{m3}g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 \\ m_3c_{m3}g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Puisque nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que celui exprimé par la première entrée du vecteur

de l'équation (??). L'autre entrée exprime un couple qui n'agit pas dans l'axe de mouvement de cette liaison et qui ne dépend que du paramètre φ . Si nous considérons le doigt dans le plan, cet effet serait nul.

Nous avons donc une expression pour le couple résultant de la force de gravité agissant sur la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane :

$$\tau_3 = -m_3 c_{m3} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (4.71)$$

4.6.2.2 Liaison rotoïde entre les phalange médiane et proximale

Nous portons maintenant notre attention à la liaison rotoïde reliant les phalanges médiane et proximale. Nous avons maintenant deux centres de masse à considérer. Le cas du centre de masse c_{m2} et son effet sur la liaison rotoïde se calcule de la même façon que décrite ci-haut à la sous-section ??. Cependant, dans ce cas-ci, le vecteur de la force de gravité doit être exprimé dans le repère local de la liaison rotoïde reliant les phalanges médiane et proximale où,

$$\theta^{**} = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 \quad (4.72)$$

et le vecteur de gravité est maintenant exprimé comme suit :

$$[\mathbf{F}_{g2}]_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Nous appliquons alors la matrice de rotation, \mathbf{Q} , exprimée dans l'équation (??) sur le vecteur \mathbf{F}_{g2} pour obtenir son expression dans le repère R_2 :

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{g2}]_2 &= \mathbf{Q}[\mathbf{F}_{g2}]_0 \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 g \sin \varphi \\ m_2 g \sin \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \\ -m_2 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Ensuite, il ne nous reste qu'à faire le produit vectoriel entre le vecteur du bras de levier du centre de masse et le vecteur de la force de gravité qui sont maintenant

exprimés dans le même repère. En utilisant les équations (??) et (??), nous trouvons :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}_2^*]_2 &= [\mathbf{c}_{m2}]_2 \times [\mathbf{F}_{g2}]_2 \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 c_{m2} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ m_2 c_{m2} g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Puisque nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que celui exprimé par la première entrée du vecteur de l'équation (??). L'autre entrée exprime un couple qui n'agit pas dans l'axe de mouvement de cette liaison. Nous avons donc une expression partielle pour le couple résultant de la force de gravité agissant sur la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane :

$$\tau_2^* = -m_2 c_{m2} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2). \quad (4.76)$$

L'expression, qui complète l'équation (??), pour exprimer le couple résultant de la force de gravité agissant sur la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane provient de l'effet dû au centre de masse c_{m3} situé sur la phalange distale. Ici, nous devons trouver une expression pour le vecteur du bras de levier du centre de la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane et du centre de masse c_{m3} exprimé dans le repère R_2 .

Cet effet se traduit par un couple et un moment. Le couple est tout simplement celui exprimé par l'équation (??) rencontrée à la sous-section ?? :

$$\tau_2^{**} = -m_3 c_{m3} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (4.77)$$

Il faut ensuite y additionner l'effet du vecteur de la force de gravité dû à l'isolement de la phalange qui est à une distance l_2 du centre de la liaison rotoïde :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}_2^{***}]_2 &= [\mathbf{l}_2]_2 \times [\mathbf{F}_{g3}]_2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_3 g \sin \varphi \\ -m_3 g \sin \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \\ -m_3 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -m_3 l_2 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \\ 0 \\ m_3 l_2 g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Une fois de plus, nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que celui exprimé par la première entrée du vecteur de l'équation (??) :

$$\tau_2^{***} = -m_3 l_2 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2). \quad (4.79)$$

Alors, l'expression complète de l'effet de la gravité sur la liaison rotoïde reliant les phalanges proximale et médiane est simplement la somme des équations (??), (??) et (??) :

$$\begin{aligned} \tau_{g2} &= -\cos(\varphi) ([m_2 g c_{m2} \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)] \\ &+ [m_3 g (c_{m3} \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ &+ l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2))]) \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.6.2.3 Liaison rotoïde entre la paume et la phalange proximale

Finalement, nous portons notre attention à la liaison rotoïde reliant la paume et la phalange proximale. C'est le cas le plus compliqué des trois liaisons rotoïdes car nous avons maintenant trois centres de masse à considérer. Cependant, cette complexité réside seulement en le nombre d'expressions que nous obtenons ainsi que les étapes pour les obtenir. Les premières étapes sont identiques à celles décrites dans les deux sous-sections précédentes.

Dans le cas du centre de masse c_{m1} , le vecteur de la force de gravité doit être exprimé dans le système local de la liaison rotoïde reliant la paume et la phalange proximale. Le vecteur de gravité est exprimé comme suit :

$$[\mathbf{F}_{g1}]_1 = \begin{bmatrix} -m_1 g \sin \varphi \\ m_1 g \sin \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ -m_1 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Ensuite, nous calculons le produit vectoriel entre le vecteur du bras de levier du centre de masse et le vecteur de la force de gravité qui sont maintenant exprimés dans

le même repère. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}_1^*]_1 &= [\mathbf{c}_{m1}]_1 \times [\mathbf{F}_{g1}]_1 \\ &= \begin{bmatrix} -m_1 c_{m1} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ 0 \\ m_1 c_{m1} g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Puisque nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que :

$$\tau_1^* = -m_1 c_{m1} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1). \quad (4.83)$$

Afin d'exprimer le couple résultant de la force de gravité agissant sur la liaison rotoïde reliant les phalanges proximale et médiane, nous devons trouver une expression pour le vecteur du bras de levier du centre de la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane et du centre de masse c_{m2} exprimé dans le repère R_1 .

Cet effet se traduit par un couple et un moment. Le couple est tout simplement l'équation (??) rencontré à la sous-section ?? :

$$\tau_1^{**} = -m_2 c_{m2} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2). \quad (4.84)$$

Il faut ensuite y additionner l'effet du vecteur de la force de gravité dû à l'isolement de la phalange qui est à une distance l_1 du centre de la liaison rotoïde. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\tau}_1^{***}]_1 &= [\mathbf{l}_1]_1 \times [\mathbf{F}_{g2}]_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_2 g \sin \varphi \\ -m_2 g \sin \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ -m_2 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -m_2 l_1 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ 0 \\ m_2 l_1 g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Une fois de plus, nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que celui exprimé par la première entrée du vecteur de l'équation (??) :

$$\tau_1^{***} = -m_2 l_1 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1). \quad (4.86)$$

Nous nous tournons maintenant sur l'effet dû au centre de masse c_{m3} situé sur la phalange distale. Ici, nous devons trouver une expression pour le vecteur de distance du centre de la liaison rotoïde reliant les phalanges distale et médiane et du centre de masse c_{m3} exprimé dans le repère R_1 .

Cet effet se traduit par un couple et deux moments. Le couple est tout simplement l'équation (??) rencontré à la sous-section ?? :

$$\tau_1^{****} = -m_3 c_{m3} g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3). \quad (4.87)$$

Il faut ensuite y additionner l'effet du vecteur de la force de gravité dû à l'isolement de la phalange qui est à une distance l_2 du centre de la liaison rotoïde reliant les phalanges médianes et distales. Cela correspond à l'expression (??) trouvée précédemment :

$$\tau_1^{*****} = -m_3 g \cos \varphi l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2). \quad (4.88)$$

Il faut ensuite y additionner l'effet du vecteur de la force de gravité dû à l'isolement de la phalange qui est à une distance l_1 du centre de la liaison rotoïde. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} [\tau_1^{*****}]_1 &= [\mathbf{l}_1]_1 \times [\mathbf{F}_{g3}]_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} m_3 g \sin \varphi \\ -m_3 g \sin \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ -m_3 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -m_3 l_1 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1) \\ 0 \\ m_3 l_1 g \sin \varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.89)$$

Une fois de plus, nous avons à l'origine du repère local une liaison rotoïde idéale, le couple agissant sur celle-ci ne peut être que celui exprimé par la première entrée du vecteur de l'équation (??) :

$$\tau_1^{*****} = -m_3 l_1 g \cos \varphi \cos(\theta_0 + \theta_1). \quad (4.90)$$

Alors, l'expression complète de l'effet de la gravité sur la liaison rotoïde reliant la paume et la phalange proximale est simplement la somme des équations (??), (??),

(??), (??), (??) et (??), soit :

$$\begin{aligned}
\tau_{g1} &= \cos(\varphi)([m_1 g c_{m1} \cos(\theta_0 + \theta_1)] \\
&+ [m_2 g (c_{m2} \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) + l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1))] \\
&+ [m_3 g (c_{m3} \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + l_2 \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) \\
&+ l_1 \cos(\theta_0 + \theta_1))]).
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Finalement, nous réunissons les expressions (??), (??) et (??) en un vecteur qui est exprimé comme suit :

$$\boldsymbol{\tau}_g = g \cos \varphi \mathbf{C} \mathbf{L} \mathbf{m} \tag{4.92}$$

où,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0 + \theta_1) & \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 0 & \cos(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix} \tag{4.93}$$

est la matrice de la configuration du doigt,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} c_{g1} & l_1 & l_1 \\ 0 & c_{m2} & l_2 \\ 0 & 0 & c_{m3} \end{bmatrix} \tag{4.94}$$

est la matrice des paramètres géométriques, et,

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \tag{4.95}$$

est le vecteur formé par la masse de chaque phalange.

4.6.3 Le modèle

Nous avons maintenant tous les ingrédients qui nous permettent de former une expression analytique pour les couples locaux à chaque liaison rotoïde. Comme mentionné plus haut, [?] montre que l'expression globale peut s'exprimer comme étant la somme des résultats (??), (??) et (??).

Donc, les couples locaux à chaque liaison rotoïde du deuxième prototype du doigt sont donnés par :

$$\boldsymbol{\tau}^* = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_r + \boldsymbol{\tau}_g \tag{4.96}$$

4.7 Conclusion

Dans le cadre de ce projet, un doigt sous-actionné a été développé. Le concept de son mécanisme est basé sur le principe du tendon et poulies. Afin d'optimiser la conception de ce doigt et de s'assurer d'obtenir une séquence de fermeture désirée, un modèle mathématique a été élaboré à partir de la théorie du sous-actionnement. Les effets de deux tendons, l'un actionnant le doigt et l'autre le ramenant à sa position neutre, sont découplés en les traitant chacun comme des mécanismes sous-actionnés indépendants et distincts.

Ainsi, deux matrices de transmission ont été déterminées. Par la conception du mécanisme, la matrice de l'actionnement est indépendante de la configuration du doigt distribuant ainsi un rapport constant du couple d'actionnement aux articulations.

Ensuite, les couples d'actionnement et de rappel ont été additionnés avec les couples qui ont été déterminés pour l'effet de gravité donnant un couple total à chaque articulation.

Chapitre 5

Résultats numériques

L'utilité d'un modèle mathématique réside en les prédictions qu'il permet de faire. Dans ce chapitre, nous reprenons les résultats du chapitre ?? et, avec l'aide du logiciel Matlab, nous effectuons des simulations numériques afin d'obtenir les caractéristiques du mécanisme du deuxième prototype.

TABLE 5.1 – Paramètres physiques du 2^{ème} prototype.

	i	r_{ia} (mm)	r_{ib} (mm)	l_i (mm)	m_i (kg)	c_{gi} (mm)
Proximal	1	6	2,95	45	0,0087	21,65
Median	2	2,75	2,75	25	0,005	9,19
Distal	3	1,5	2	n/a	0,0045	10,85

5.1 Deuxième prototype

5.1.1 Forces de contact

Nous utilisons les résultats présentés dans la sous-section ?? pour déterminer les situations où l'on obtient les conditions nécessaires pour une prise stable. Ici bien sûr, nous ne parlons pas d'une prise ferme et entière d'un objet puisque nous n'analysons qu'un doigt isolé. Nous parlons plutôt d'une prise stable où le doigt est en équilibre statique comme étant défini dans [?]. Pour qu'il y ait équilibre statique, les phalanges en contact avec un objet doivent correspondre à une force de contact positive. Le cas échéant, lorsque la phalange n'est pas en contact avec un objet, elle doit correspondre à une force nulle.

Un programme Matlab a été écrit pour déterminer les configurations où les forces de contact sont positives. Le couple d'actionnement est unitaire puisque nous ne voulons que déterminer les zones positives et négatives. L'amplitude de la force n'a pas d'importance ici. De plus, les forces de friction sont négligées. Dans ces simulations, les angles θ_2 et θ_3 sont variés de -180° à 180° . L'angle θ_1 est négligé car, dans le cas présent, il n'intervient pas dans la détermination des forces de contact. Cela nous est très utile car nous pouvons aisément présenter visuellement les forces de contact en fonction de deux paramètres.

Nous étudions la force de contact sur la première phalange avec la figure ?. Nous y voyons deux zones où la force de contact est négative. Le fait qu'il y ait deux zones négatives ainsi que leur position dans le domaine n'est pas surprenant car la fonction déterminant la force de contact à la phalange proximale est paire. C'est-à-dire que

$$f_1(-x) = f_1(x).$$

$$f_1(\theta_2, \theta_3) = \frac{1}{k_1} - \frac{r_{3a}(k_2 + l_1 \cos \theta_2)}{k_1 k_2 r_{1a}} + \frac{r_{5a}(k_2 l_2 \cos \theta_3 + l_1 l_2 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - k_2 l_1 \cos(\theta_2 + \theta_3) - k_2 k_3 l_2 \cos \theta_3)}{k_1 k_2 k_3 r_{1a}} \quad (5.1)$$

Nous voyons dans l'équation (??) que cette fonction est une somme de cosinus qui est la fonction paire typique. Il est donc normal de trouver une symétrie dans le domaine $\theta_2, \theta_3 \in [-180^\circ, 180^\circ]$. De plus cette symétrie est nécessaire pour préserver la continuité du domaine.

Comme le montre bien le contour présenté au bas de la figure ??, la zone où la force de contact à la première phalange est négative forme donc une ellipse aplatie désaxée dont le centre se situerait près du point $[\pm 180^\circ, 0^\circ]$. Son grand axe est à environ 42° de l'horizontale. Elle se situe entre les points $[\pm 180^\circ, \pm 70^\circ]$ et les points $[30^\circ, -120^\circ]$ et $[-30^\circ, 120^\circ]$.

Nous concluons alors que la phalange proximale perd son équilibre statique lorsque la phalange médiane est à un angle léger et que la phalange distale est à un angle très prononcé.

La figure ?? présente la force de contact sur la phalange médiane pour le domaine $\theta_2, \theta_3 \in [-180^\circ, 180^\circ]$. Le résultat est plus aisé à analyser car la fonction déterminant la force de contact à la phalange médiane est indépendante de la variable θ_2 . Ceci est évident après avoir examiné l'équation ?? et nous pouvons également constater que nous sommes toujours en présence d'une fonction paire :

$$f_2(\theta_2, \theta_3) = \frac{-r_{5a} l_2 \cos \theta_3 + k_3 (r_{3a} - r_{5a})}{k_2 k_3 r_{1a}}. \quad (5.2)$$

La zone où la force de contact est négative est un rectangle. Pour $\theta_2 \in [-180^\circ, 180^\circ]$, la force de contact est négative si $\theta_3 \in [-70^\circ, 70^\circ]$. Alors, la phalange médiane ne sera pas en équilibre statique si l'angle de la phalange distale n'est pas prononcé.

Finalement, la phalange distale est toujours en équilibre statique lorsqu'elle est en

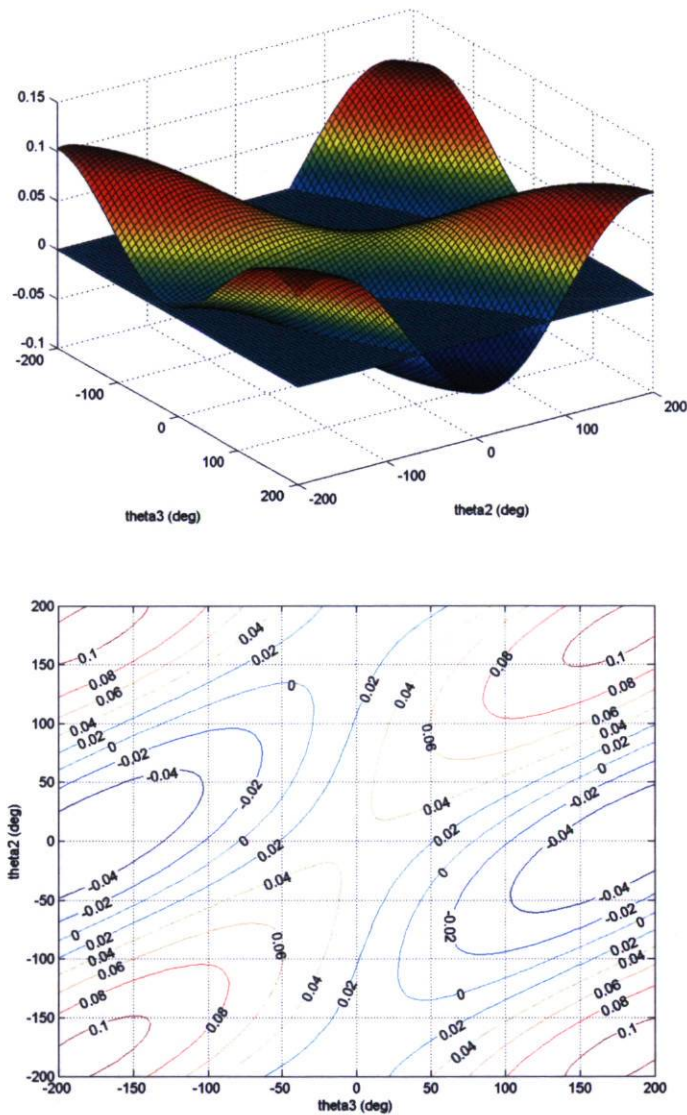


FIGURE 5.1 – Force de contact sur la phalange proximale

contact. Nous pouvons le constater avec l'équation ?? :

$$f_3(\theta_2, \theta_3) = \frac{r_{5a}}{k_3 r_1 a}. \quad (5.3)$$

Finalement, la figure ?? résume l'information que nous avons recueillie dans les figures ?? et ??.

Nous y voyons le domaine où le doigt est en équilibre statique c'est-à-dire les zones en blanc. Les quatre zones représentent ensemble environ 38% du domaine complet. De

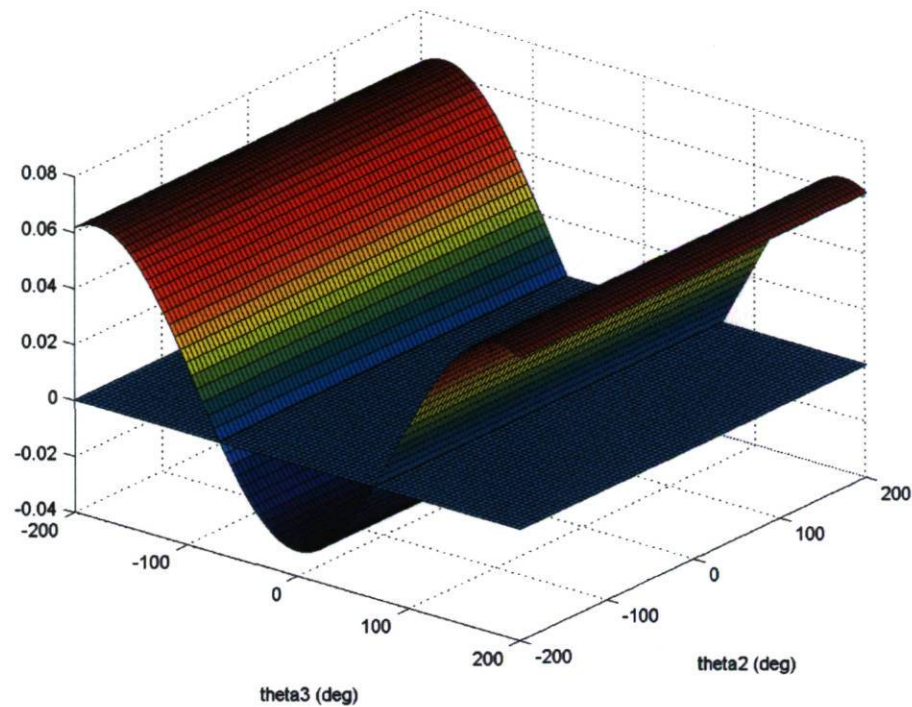


FIGURE 5.2 – Force de contact sur la phalange médiane

plus, en vertu de la continuité du domaine, les quatre zones forment en fait un polygone délimitant ainsi un domaine connexe simple où le doigt est en équilibre statique. En trois dimensions, où l'on prend compte de la variable θ_1 , le domaine est également connexe simple.

La figure ?? montre une vue amplifiée de la zone d'opération actuelle du doigt. C'est-à-dire que nous prenons compte des contraintes physiques du doigt :

$$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.4)$$

$$0 \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.5)$$

$$0 \leq \theta_3 \leq \frac{\pi}{2} \quad (5.6)$$

Avec les contraintes ci-haut, le pourcentage de la zone de stabilité statique par rapport au domaine d'opération tombe à 22%. Cependant nous voyons que la condition

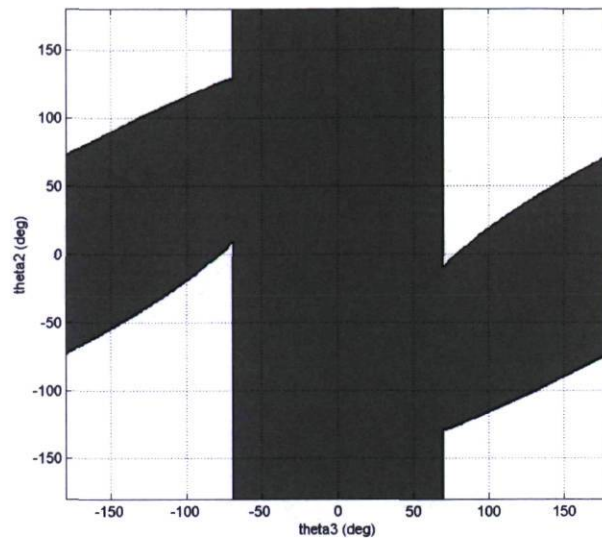


FIGURE 5.3 – Domaine où le doigt est en équilibre statique

pour atteindre l'équilibre statique requiert simplement que l'angle de la liaison rotoïde distale soit plus prononcé que 70° . Ceci est en négligeant la zone où la phalange médiane forme un angle léger et que la phalange distale forme de 80° à 90° (en bas et à droite de la figure ??). Toujours en négligeant cette zone, le domaine où le doigt est en équilibre statique est un cuboïde.

Les résultats de cette sous-section sont cohérents avec les résultats sur l'équilibre statique pour des mécanismes à tendon et poulie présentés dans le chapitre 3 de [?]. La figure ?? montre le domaine où ce mécanisme est en équilibre statique. Quoiqu'ici, la zone d'équilibre statique représente 59% du domaine, nous reconnaissons la similarité avec les résultats présentés dans la figure ??.

5.1.2 Séquence de fermeture

La question principale à laquelle nous tentons de répondre avec le modèle mathématique que nous avons développé dans le chapitre ?? consiste à savoir si nous pouvons prédire la séquence de fermeture du doigt. Ainsi, nous pouvons concevoir un doigt, autrement dit ses poulies, qui fermera selon la séquence souhaitée sans avoir à bâtir différents doigts. C'est-à-dire que pour le deuxième prototype, nous voulons que la pha-

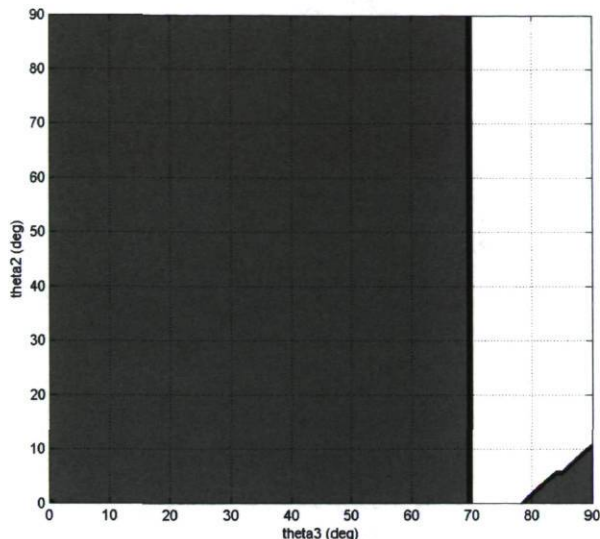


FIGURE 5.4 – Domaine où le doigt est en équilibre statique

lange proximale se ferme complètement (à 90°), puis la phalange médiane et finalement la phalange distale.

Un script Matlab a été écrit afin de reproduire numériquement cette fermeture. La figure ?? montre qu'en utilisant les paramètres physiques présentés au tableau ??, nous obtenons la séquence de fermeture voulue. Nous augmentons le couple d'actionnement progressivement afin d'éviter les effets dynamiques. Au départ, tous les couples locaux aux liaisons rotoïdes sont négatifs. Ceci est dû aux effets du couple de rappel et de la gravité. Cependant, grâce aux butées, le doigt ne bouge pas.

Lorsque le couple d'actionnement atteint les environs de 4,5 Nm, le couple local dans la liaison rotoïde proximale devient positif entraînant ainsi un mouvement de la phalange proximale. Puisque les couples locaux aux liaisons rotoïdes médiane et distale sont négatifs, seulement la liaison rotoïde proximale bouge.

Lorsque le couple d'actionnement atteint les environs de 9 Nm et en faisant l'hypothèse que $\theta_1 = 90^\circ$, le couple local de la liaison rotoïde médiane devient positif entraînant le mouvement de la phalange médiane. Toutefois, le couple local de la liaison rotoïde distale est toujours négatif et donc, toujours grâce aux butées, les phalanges proximales et distales ne bougent pas.

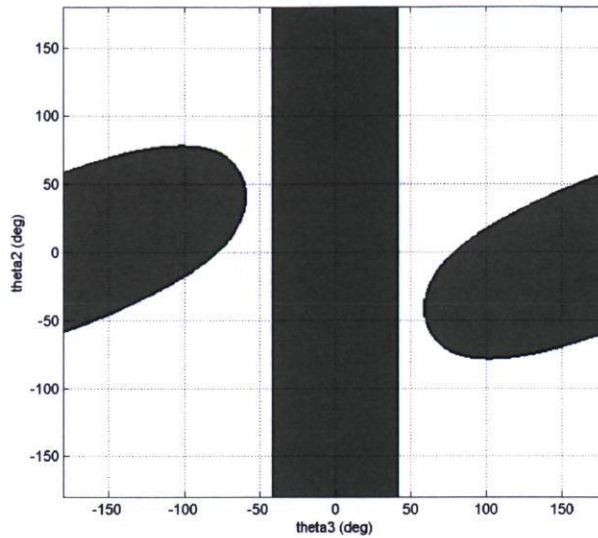


FIGURE 5.5 – Domaine où le doigt est en équilibre statique

Finalement, lorsque le couple d'actionnement atteint les environs de 14 Nm, tout en faisant les hypothèses que $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$, le couple local à la liaison rotoïde distale devient positif entraînant le mouvement de celle-ci. Encore grâce aux butées, les phalanges proximale et médiane sont immobiles. Seule la phalange distale est en mouvement.

Nous avons donc la séquence de fermeture désirée avec les paramètres présentés au tableau ??.

La figure ?? présente la simulation d'une séquence de fermeture sans les forces de rappel. Nous pouvons constater qu'ici la séquence de fermeture est inversée. La phalange distale est la première à être en mouvement suivie de la phalange médiane et finalement la phalange proximale. Les forces de rappel jouent donc un rôle important dans la détermination de la séquence de fermeture.

Intuitivement, nous savons immédiatement que, puisque le couple dû aux forces de rappel est nul, le couple d'actionnement nécessaire pour le mouvement sera moindre. Ici, le couple d'actionnement nécessaire pour entraîner le mouvement de la phalange distale est autour de 0,2 Nm. De plus, la figure ?? démontre que les mouvements des phalanges ne sont pas successifs. La phalange médiane commence son mouvement autour de 0,4 Nm quand l'angle $\theta_3 = 39^\circ$. La phalange distale n'a donc pas encore atteint sa butée.

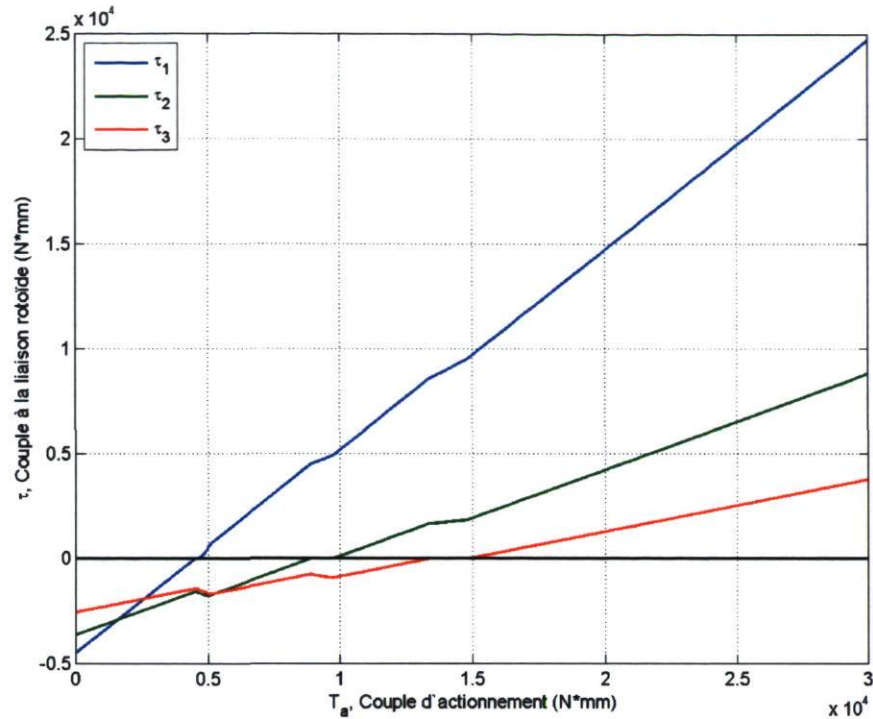


FIGURE 5.6 – Séquence de fermeture du deuxième prototype

Finalement, autour de 0,7 Nm, la phalange proximale se met en mouvement et alors, pour un moment, toutes les phalanges sont en mouvement.

Les séquences de fermeture présentées aux figures ?? et ?? ont été observées en laboratoire après la construction du doigt prototype. La figure ?? illustre l'importance d'inclure les effets de la gravité dans le modèle. Nous pouvons voir qu'en tenant seulement compte du couple d'actionnement, toutes les phalanges sont en mouvement dès le départ. Ce qui ne correspond pas à la réalité. Il est inconcevable que la liaison rotoïde proximale bouge en même temps que la liaison rotoïde distale quand la première doit supporter le poids de tout le doigt.

De plus, nous observons que les pentes des courbes présentées sont constantes. Nous voyons avec l'équation ?? que ça devrait être en fait le cas. Les courbes de la figure ?? démontrent l'effet de la gravité par l'irrégularité de la pente des courbes. Cependant, ces changements de pente se font progressivement jusqu'au point où les phalanges atteignent leur butée.

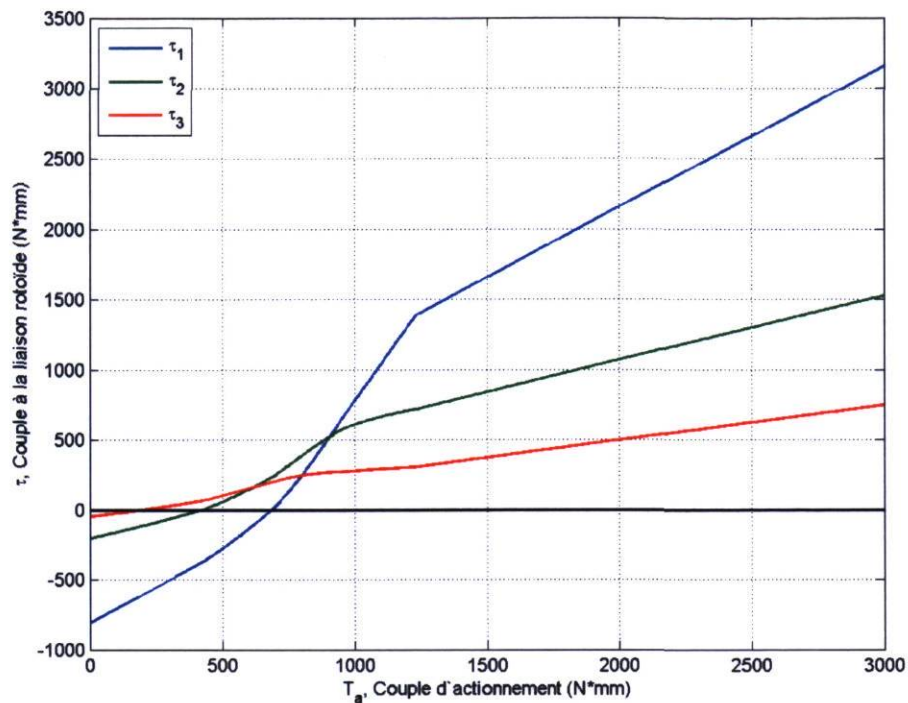


FIGURE 5.7 – Séquence de fermeture sans les forces de rappel

Nous pouvons comparer ces effets sur la pente en examinant la figure ???. Cette figure simule l'effet des forces de rappel sur la séquence de fermeture sans les effets dus à la gravité. Ici, les changements de pentes sont abrupts. Il faut comprendre que les forces de rappel sont en fonction de la configuration du doigt. Alors, nous pouvons observer sur la figure ??? ainsi que la figure ??? que ces changements abrupts des pentes correspondent au début de mouvement d'une des trois phalanges.

5.1.3 Forces de rappel

Une autre question qui peut être résolue avec l'aide du modèle est quel type d'élastique est nécessaire pour atteindre nos objectifs de conception. C'est-à-dire quelle est la raideur, K , et quelle est l'élongation initiale, y_0 .

Afin d'obtenir une valeur optimale pour ces paramètres, il y a plusieurs situations à considérer. Nous allons débiter par considérer la situation où la face palmaire du doigt

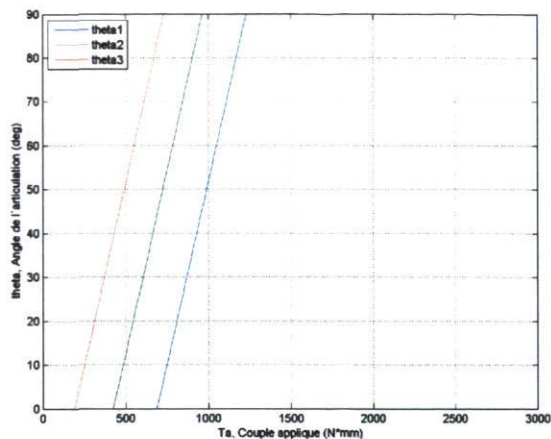


FIGURE 5.8 – Progression angulaire lors de la fermeture

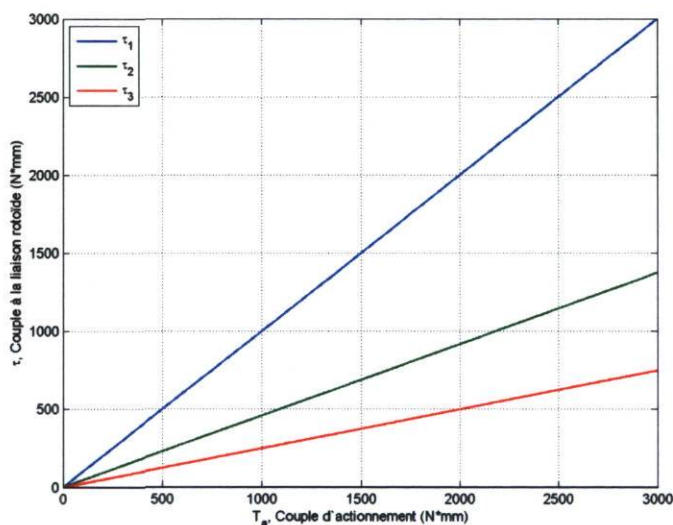


FIGURE 5.9 – Séquence de fermeture sans les forces de rappel et l'effet de la gravité

est placée de façon à faire face au sol et que le doigt est à plat (i.e. $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0^\circ$). Nous allons omettre toute force d'actionnement. Ainsi, la force de gravité agit comme une force d'actionnement qui tente de fléchir le doigt.

Un des objectifs de conception est de concevoir le doigt tel que dans ces conditions, le doigt reste plat. Alors, nous devons établir la force de rappel minimum nécessaire pour que le doigt reste en extension.

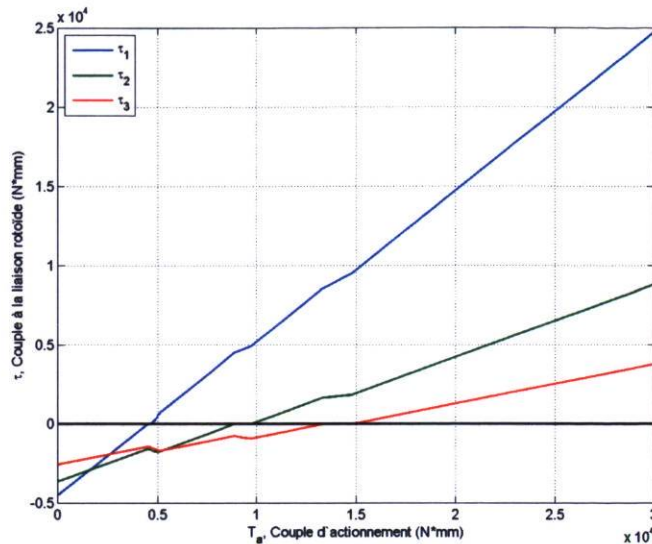


FIGURE 5.10 – Séquence de fermeture sans l’effet de la gravité

Une simulation numérique a été effectuée avec l’aide du modèle et du logiciel Mat-Lab. La figure ?? nous montre les résultats. Pour chaque liaison rotoïde, en variant les coefficients K et y_0 , les couples de rappel et dus à la gravité ont été calculés et ensuite soustraits. Dans le cas des trois liaisons, nous obtenons une relation inversement proportionnelle pour les coefficients K et y_0 . Ceci correspond aux équations suivantes pour cette configurations spécifique :

$$-Kr_{1b}y_0 = \tau_{g1} \quad (5.7)$$

$$-Kr_{3b}y_0 = \tau_{g2} \quad (5.8)$$

$$-Kr_{5b}y_0 = \tau_{g3} \quad (5.9)$$

où τ_{g1} , τ_{g2} et τ_{g3} sont trois constantes distinctes.

Après une inspection initiale nous constatons que les résultats de la première phalange sont les plus contraignants. Ceci est normal car la liaison proximale doit supporter le poids de tout le doigt tandis que les autres liaisons ne subissent les effets qu’une partie du poids total.

Nous avons alors une relation entre les coefficients K et y_0 afin d’atteindre un des

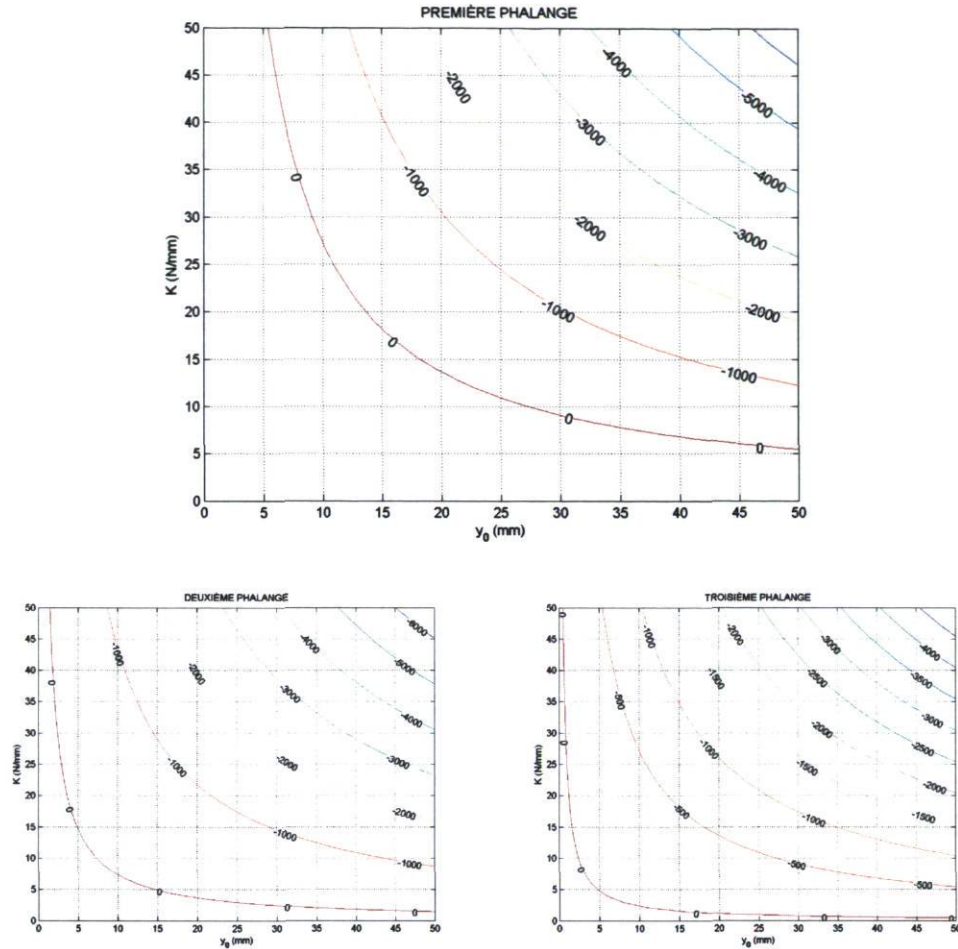


FIGURE 5.11 – Différence entre le couple de rappel et le couple dû à la gravité

objectifs de conception du doigt sous-actionné. Après avoir choisi une valeur pour K et y_0 à la frontière de la figure ?? où le couple $\tau_{g1} = 0$ pour la liaison proximale, nous les utilisons dans le programme de MatLab utilisé à la sous-section ?? et nous obtenons les figures ?? et ??.

Nous voyons qu'avec ces valeurs, nous satisfaisons également le premier objectif de conception qui est celui de la séquence de fermeture voulue pour ce prototype.

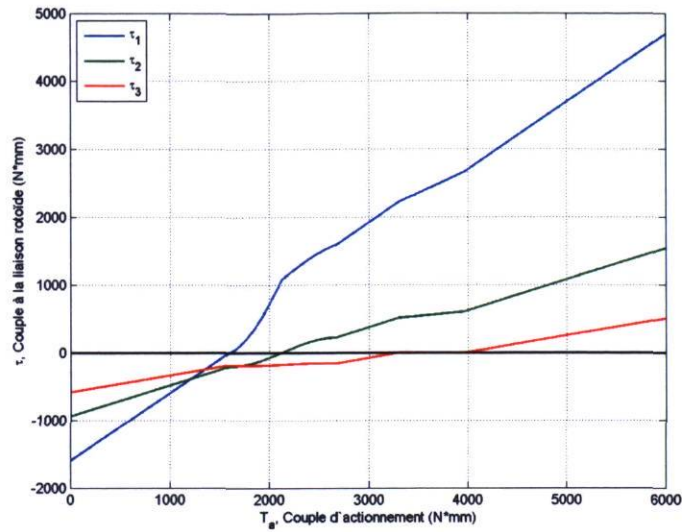


FIGURE 5.12 – Séquence de fermeture avec $K=19$ N/mm et $y_0=14$ mm

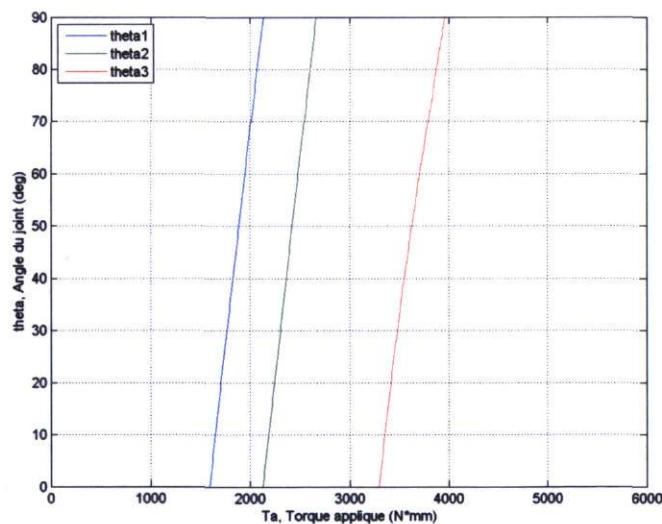


FIGURE 5.13 – Séquence de fermeture des angles avec $K=19$ N/mm et $y_0=14$ mm

5.2 Conclusion

Le modèle mathématique conçu pour le mécanisme de la deuxième prothèse démontre qu'il existe un domaine connexe simple, de dimension 3, dans lequel le doigt se trouve en équilibre statique. Ce domaine présente les caractéristiques attendues pour

ce genre de mécanisme sous-actionné.

De plus, le modèle démontre que le prototype proposé se comporte comme nous le désirons. Une simulation de la séquence de fermeture du doigt a été effectuée et nous avons obtenu la séquence désirée : successivement la fermeture complète de la liaison proximale suivie de la fermeture complète de la liaison médiane suivie de la fermeture complète de la liaison distale.

Le modèle démontre l'importance d'inclure les effets de la gravité en comparant une fermeture simplement avec l'actionnement avec ce qu'on observe avec le prototype en laboratoire. Finalement, le modèle permet de déterminer les forces de rappel afin de répondre aux objectifs de conception.

Conclusion

Stephanie : So, how was your day ?

Leonard : Y'know, I'm a physicist -
I thought about stuff.

Stephanie : That's it ?

Leonard : I wrote some of it down.

The Big Bang Theory, CBS

Le chapitre 1 a démontré la complexité du problème de remplacer une main humaine. Physiologiquement, la main humaine possède une architecture incroyable qui lui permet d'être versatile. Cependant, les muscles intrinsèques de la main ne sont pas seuls responsables des mouvements de la main. Les muscles extrinsèques, ceux localisés dans l'avant-bras, ont un rôle important dans les mouvements des doigts. Ces muscles sont nombreux et le plus petit mouvement nécessite la coordination de plusieurs d'entre-eux incluant les muscles intrinsèques qui ont pour rôle le contrôle de précision.

L'architecture squelettique de la main peut être relativement aisée à comprendre et à reproduire. Cependant, le moteur de ce mécanisme naturel, les muscles, et sa transmission, les tendons, sont très complexes et la technologie de remplacement n'est pas au point. De plus, le centre de contrôle qui pourrait régir tout le système mécanique est loin d'être au point. Il nécessite un système logique d'une grande complexité. Sa

tâche est de carrément remplacer le cerveau humain ou, plus simplement mais tout aussi complexe, d'acquérir les signaux du cerveau, les interpréter et envoyer les ordres aux éléments du système mécanique.

Le chapitre 2 a démontré les ratés liés aux différentes tentatives de concevoir un mécanisme qui pourrait complètement remplacer la main humaine. Le but ultime des concepteurs de ce mécanisme est ambitieux. La prothèse qui remplacerait la main doit carrément accomplir toutes les tâches que celle-ci peut accomplir. Pour ce faire, elle ne doit pas demander d'effort supplémentaire à l'effort que nécessite la main naturelle. Ceci veut dire que la prothèse soit confortable et son temps d'utilisation soit compatible avec le train de vie de l'amputé sans entretiens excessifs. Sa fiabilité doit être sans reproche sous des conditions environnementales diverses : grands froids, grandes chaleurs, pluie, boue, poussière, etc.

Comme si ces contraintes de conception ne posent pas un assez grand défi mécanique, la prothèse de main parfaite doit être esthétiquement plaisante et capable d'une symbiose parfaite avec le reste du corps de l'amputé. Ceci implique également que ce dernier puisse utiliser rapidement la prothèse avec une grande aisance.

Diverses approches ont été explorées afin de palier aux obstacles menant à la prothèse parfaite. Naturellement, ces approches ont toutes en commun l'utilisation du compromis. Toutes les prothèses proposées n'atteignent pas les objectifs de conception mais essaient plutôt de satisfaire le plus grand nombre possible de caractéristiques d'utilisation.

Ces dernières années, nous avons vu apparaître une nouvelle génération de prothèses intelligentes qui ont l'aspect naturel d'une main humaine. Elles effectuent également des mouvements plus ou moins naturels incluant le mouvement des cinq doigts séparément et peuvent effectuer plus ou moins cinq prises naturelles. Tout cela est commandé par le cerveau de l'amputé. Et les centres de recherche ainsi que les fabricants de ces prothèses promettent d'autres générations de prothèses technologiquement plus avancées et plus intégrées au reste du corps humain.

Cependant, l'industrie est consciente que plusieurs utilisateurs restent fidèles aux technologies simples comme le crochet opéré par le corps. Ce système mécanique est très fiable, robuste et présente une grande flexibilité d'opération en parlant d'environnement

de travail. Son utilisation est relativement simple et le système est toujours prêt à être utilisé. Il ne nécessite que très peu d'entretien et son coût est très bas.

Alors la prothèse sophistiquée n'est pas toujours la réponse aux besoins des amputés. Il faut prendre en compte que la plupart des amputés qui sont appelés à utiliser une prothèse pour améliorer leur condition de vie sont habituellement des travailleurs manuels. Ils désirent habituellement revenir rapidement à leurs activités sans faire trop de compromis. Le crochet répond habituellement bien à ces critères.

Cependant, la recherche d'une technologie sophistiquée est importante pour atteindre une prothèse optimale et n'est donc pas superflue.

Les mécanismes sous-actionnés sont utiles pour simplifier les mécanismes complexes tout en conservant leurs fonctions. Cependant, pour optimiser les fonctions de ces mécanismes, il est utile de comprendre leur fonctionnement. Le chapitre 3 a présenté la théorie du sous-actionnement qui permet de modéliser mathématiquement les mécanismes de sous-actionnement. Nous pouvons déterminer ainsi les forces de contact produits par le doigt et les couples auxquels sont soumises les liaisons mécaniques.

La théorie présentée permet de motiver le modèle mathématique spécifique à un prototype proposé d'un doigt pour une prothèse pour membre supérieur. Le chapitre 4 présente ce modèle qui tient compte d'un système d'actionnement, d'un système de rappel et les effets de la gravité sur le doigt sous-actionné proposé. Les couples locaux d'actionnement reposent sur une matrice de transmission des couples très simple. Le couple d'actionnement est transmis à chaque liaison selon des rapports constants de poulies dans le système.

Le couple de rappel est un peu plus compliqué car la force de rappel dépend de l'élongation du câble élastique donc dépend de la configuration. Cependant, la matrice de transmission se comporte de la même façon que celle associée à l'actionnement. Les effets de la gravité sont incorporés en calculant cinématiquement les effets des centres de gravité de chaque phalange sur chaque liaison. Ces effets sont modulés par un angle de roulis afin de tenir compte de l'orientation de la main dans l'espace.

Le modèle mathématique du doigt prototype est la combinaison linéaire de ces couples sur chaque liaison rotoïde. Cela nous donne une expression analytique relative-

ment simple avec laquelle nous pouvons travailler.

Ce travail est exposé dans le chapitre 5. Avec le modèle acquis au chapitre 4 et en utilisant le logiciel MatLab, un domaine connexe simple, de dimension 3, a été déterminé dans lequel le doigt se trouve en équilibre statique. Ce domaine est spécifique pour le prototype proposé mais présente les caractéristiques attendues pour ce genre de mécanisme sous-actionné.

Ensuite, le modèle a démontré que le prototype proposé se comporte comme nous le désirons. Une simulation de la séquence de fermeture du doigt a été effectuée et nous avons obtenu la séquence désirée : successivement la fermeture complète de la liaison proximale suivie de la fermeture complète de la liaison médiane suivie de la fermeture complète de la liaison distale.

Nous avons aussi démontré l'importance d'inclure les effets de la gravité en comparant une fermeture simplement avec l'actionnement avec ce qu'on observe avec le prototype en laboratoire. Finalement, nous avons calculé des paramètres pour les forces de rappel afin de répondre aux objectifs de conception.

Ainsi, nous avons démontré le potentiel d'un mécanisme sous-actionné pour remplacer un doigt dans une prothèse pour membre supérieur. Nous avons évité l'utilisation de deux actionneurs supplémentaires et d'un système logique électronique tout en préservant l'action et le contrôle de toutes les liaisons rotoïdes. Il faut être conscient que des actionneurs et un système de contrôle impliquent un surplus de poids lié notamment au système d'alimentation, circuit et capteurs qu'ils nécessitent et que nous évitons.

Le coût d'implantation de ce mécanisme est bas. Nous avons donc une prothèse qui se présente comme une alternative entre le crochet et les prothèses myoélectriques.

Cependant, pour parvenir à utiliser ces mécanismes de façon optimale, il faut comprendre leur fonctionnement. Ceci est atteint en obtenant des expressions mathématiques qui décrivent leur comportement pour être ensuite optimisées. Nous avons tenté ici de comprendre les expressions déjà proposées en les utilisant pour développer quelques autres expressions utiles que nous avons proposées. Il reste tout de même de grands trous théoriques non seulement dans la théorie du sous-actionnement mais également dans l'analyse de la prise d'objet ainsi que dans la manipulation.

Bibliographie

- [1] Aristote. *De Partibus Animalium*. Smithsonian Books, New York, NY, 2009.
- [2] J.-M. Thomine R. Tubiana. *La main, Anatomie fonctionnelle et examen clinique*. Masson, Paris, France, 1990.
- [3] F. Martini. *Fundamentals of Anatomy and Physiology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
- [4] A.I. Kapandji. *Physiologie Articulaire*. Éditions Maloine, Paris, France, 2005.
- [5] F. Routhier. Analyse d'un mécanisme à cinq barres pour la conception d'une prothèse de la main. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 1996.
- [6] D. Dragulescu and L. Ungureanu. The modeling process of a human hand prosthesis. In *Proceedings of the 4th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, SACI'07*, Timisoara, Roumanie, 17-18 mai 2007.
- [7] L. Ungureanu and A. Stanciu. Modeling the motion of the human hand. In *11th International Conference on Vibration Engineering*, Timisoara, Roumanie, 27-30 septembre 2005.
- [8] L. Ungureanu D. Dragulescu and A. Stanciu. Modeling the motion of the human middle finger. In *Proceedings of the 2nd Romanian-Hungarian Joint Symposium on Applied Computational Intelligence*, Timisoara, Roumanie, 12-14 mai 2005.
- [9] D. Dragulescu and L. Ungureanu. Human hand modeling. In *Al II-lea Simpozion International de Mecanica Teoritica si Aplicata*, Iasi, Roumanie, 28-30 octobre 2005.

- [10] A. Stanciu L. Ungureanu, D. Dragulescu and M. Sodinca. The dynamic study of the palm-middle finger system. In *Proceedings of the 3rd Romanian-Hungarian Joint Symposium on Applied Computational Intelligence*, Timisoara, Roumanie, 25-26 mai 2006.
- [11] R. Lin B. T. Dellon A. D. Deshpande, R. Balasubramanian and Y. Matsuoka. Understanding variable moment arms for the index finger mcp joints through the act hand. In *2nd IEEE/RAS-EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechanics, IEEE BIOROB'08*, Scottsdale, AZ, 19-22 octobre 2008.
- [12] L. Chang and Y. Matsuoka. A kinematic thumb model for the act hand. In *The Proceedings of the IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, ICRA 2006*, Orlando, FL, 15-19 mai 2006.
- [13] M. Weissert M. Vande Weghe, M. Rogers and Y. Matsuoka. The act hand : Design of the skeletal structure. In *The Proceedings of the IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, ICRA 2004*, Nouvelle-Orléans, LA, 26 avril - 1 mai 2004.
- [14] J. Imbriglia S. Bidic and Y. Matsuoka. An anatomical hand for instruction and simulation. In *58th Annual American Society for Surgery of the Hand Meeting*, Chicago, IL, 18-20 septembre 2003.
- [15] M. Vande Weghe D.D. Wilkinson and Y. Matsuoka. An extensor mechanism for an anatomical robotic hand. In *The Proceedings of the IEEE Intl. Conference on Robotics and Automation, ICRA 2003*, Taipei, Taiwan, 14-19 septembre 2003.
- [16] D. T. Zabecki. Gotz von berlichingen. *Military History*, August 2000.
- [17] D. Atkins R. Meier III. *Functional Restoration of Adults and Children Upper Extrimity Amputation*. Demos Medical, New York, NY, 2004.
- [18] D. Childress H. Herr, G. Whiteley. *Biologically Inspired Intelligent Robots*. SPIE Press, Bellingham, WA, 2003.
- [19] C.Jones and C. Wilson. Defining advantage and athletic performance : The case of oscar pistorius. *European Journal of Sport Science*, March 2009.
- [20] TRS inc. About trs. <http://www.oandp.com/products/trs/about/>, June 2011.
- [21] S. Baykin. With open-source arms. *Scientific American*, October 2008.
- [22] D.S. Childress. Historical aspects of powered limbs prosthesis. *Clinical Prosthetics and Orthotics*, vol. 9, no. 1, pp. 2-13, 1985.
- [23] A. Troiano E. Merlo R. Merletti, A. Botter and M.A. Minetto. Technology and instrumentation for detection and conditioning of the surface electromyographic signal : State of the art. *Clinical Biomechanics*, August 2008.

- [24] Otto Bock. Otto bock, quality for life. <http://www.ottobock.com>, June 2011.
- [25] Touch Bionics. Touch bionics, transforming the everyday lives of extraordinary people. <http://www.touchbionics.com>, June 2011.
- [26] Be-Bionic. bebionic - a new generation of fully articulating myo-electric hands. <http://www.bebionic.com>, June 2011.
- [27] SmartHand. The smart bio-adaptive hand prosthesis. <http://www.elmat.lth.se/smarthand/>, June 2011.
- [28] M. Belfiore. *The Department of Mad Scientists ; How DARPA Is Remaking Our World, from the Internet to Artificial Limbs*. Smithsonian Books, New York, NY, 2009.
- [29] R.E. Crist J.E. O'Doherty D.M. Santucci D.F. Dimitrov P.G. Patil C.S. Henriquez J.M. Carmena, M. Lebedev and M. Nicolelis. Learning to control a brain-machine interface for reaching and grasping by primates. *PLOS Biology*, November 2003.
- [30] J.E. O'Doherty M. Zacksenhouse C.S. Henriquez J.C. Principe M. Lebedev, J.M. Carmena and M. Nicolelis. Cortical ensemble adaptation to represent velocity of an artificial actuator controlled by a brain-machine interface. *Journal of Neuroscience*, May 2005.
- [31] M. Lebedev and M. Nicolelis. Brain-machine interfaces : Past, present and future. *TRENDS in Neurosciences*, September 2006.
- [32] N.R. Anderson J.A. Wilson M.D. Smyth J.G. Ojemann R.W. Moran J.R. Wolpaw G. Schalk, K.J. Miller and E.C. Leuthardt. Two-dimensional movement control using electrocorticographic signals in humans. *Journal of Neural Engineering*, January 2008.
- [33] M.C. Spalding A.S. Withford M. Velliste, S. Perel and A.B. Schwartz. Cortical control of a prosthetic arm for self-feeding. *Nature* 453, June 2008.
- [34] S.I. Perlmutter C.T. Moritz and E.E. Fetz. Direct control of paralyzed muscles by cortical neurons. *Nature* 456, December 2008.
- [35] J. Fischman. Bionics. *National Geographic*, January 2010.
- [36] L. Birglen, T. Laliberté, and C.M. Gosselin. *Underactuated Robotic Hands*. Springer, Berlin, Germany, 2008.
- [37] L.A. Allen-Demers and C. Gosselin. Kinematic design of an ejection-free underactuated anthropomorphic finger. In *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2009*, Kobe, Japan, 12-17 mai 2009.

- [38] T. Laliberté M. Baril, F. Guay and C. Gosselin. Towards the design of a prosthetic underactuated hand. In *Proceedings of the 1st International Workshop on Underactuated Grasping, UG2010*, Montréal, Canada, 19 août 2010.
- [39] C. Gosselin F. Pelletier and T. Laliberté. An anthropomorphic underactuated hand with 15 dofs and a single actuator. In *Proceedings of the 2008 International Conference on Robotics and Automation, ICRA 2008*, Pasadena, CA, 19-23 mai 2008.

Annexe A

Théorème de rotation d'Euler

En géométrie, pour tout espace de dimension trois, le déplacement d'un solide tel qu'il existe un point sur ce solide étant immobile est équivalent à une rotation autour d'un axe passant par ce point appelé pôle eulérien. Cette rotation peut également se composer de plusieurs rotations combinées de façon que le déplacement résultant est équivalent. L'ensemble des rotations d'un solide dans un espace de trois dimensions possède donc une structure algébrique appelée groupe. Nous avons alors un groupe des rotations mieux connu sous l'acronyme $SO(3)$.

En algèbre linéaire, il est équivalent d'affirmer que dans un espace de trois dimensions deux repères cartésiens ayant un point d'origine commun sont liés par une rotation autour d'un axe fixe. De plus, le produit de deux matrices de rotation, donc appartenant au groupe $SO(3)$, est également une matrice de rotation. Le groupe $SO(3)$ est fermé sous la multiplication. Toute matrice de rotation qui n'est pas la matrice identité

ne possède qu'une valeur propre réelle qui est 1. Le vecteur propre associé est orienté le long de l'axe de rotation liant les deux systèmes.

Le théorème de rotation d'Euler, qui suit et qui est prouvé ci-bas, affirme que toute rotation d'un solide dans un espace de trois dimensions peut être déterminée avec l'aide de seulement trois paramètres. Ces trois paramètres sont uniques. Finalement, le théorème fait le lien entre ces paramètres et la détermination des matrices de rotation.

Théorème (de rotation d'Euler). *Pour toute rotation $\mathbf{Q} \in SO(3)$,*

a) *(Existence)*

Il existe un triplet $(\varphi, \theta, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ tel que $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_3(\varphi)\mathbf{Q}_1(\theta)\mathbf{Q}_3(\psi)$.

b) *(Unicité)*

Soit (φ, θ, ψ) et $(\varphi', \theta', \psi') \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ tels que $\mathbf{Q}_3(\varphi)\mathbf{Q}_1(\theta)\mathbf{Q}_3(\psi) = \mathbf{Q}_3(\varphi')\mathbf{Q}_1(\theta')\mathbf{Q}_3(\psi')$, alors $\theta = \theta'$. Si $\theta \neq 0, \pi$, alors $\varphi = \varphi'$ et $\psi = \psi'$.

c) *Si nous posons que $\mathbf{Q} = [\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3]$, alors θ est l'angle entre \mathbf{i}_3 et l'axe des z , et si $\theta \notin \{0, \pi\}$, alors φ est l'angle de projection de \mathbf{i}_3 sur le plan xy et de l'axe des x , plus $\frac{\pi}{2}$.*

Démonstration.

(Existence) Nous posons $\mathbf{Q} = [\mathbf{i}_1 \ \mathbf{i}_2 \ \mathbf{i}_3]$ où les vecteurs \mathbf{i}_1 , \mathbf{i}_2 et \mathbf{i}_3 forment une base orthonormée pour un espace vectoriel de dimension 3. Nous avons aussi les vecteurs :

$$\mathbf{e}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

qui forment la base orthonormée usuelle pour \mathbb{R}^3 . Nous posons également que le point d'origine des deux espaces vectoriels coïncident.

Nous voyons qu'il y a trois situations possibles :

- $\mathbf{i}_3 \neq \pm \mathbf{e}_3$;
- $\mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3$;
- $\mathbf{i}_3 = -\mathbf{e}_3$.

Nous définissons donc, selon la situation, le vecteur suivant :

$$\mathbf{n} := \begin{cases} \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3|} & \text{si } \mathbf{i}_3 \neq \pm \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{i}_1 & \text{si } \mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3 \\ -\mathbf{i}_1 & \text{si } \mathbf{i}_3 = -\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Ainsi défini, le vecteur \mathbf{n} est un vecteur unitaire et toujours perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_3 , tout comme le vecteur \mathbf{e}_1 . Il y a donc toujours un angle $\varphi \in [0, 2\pi)$ tel qu'une rotation de cet angle φ autour de \mathbf{e}_3 applique le vecteur \mathbf{n} sur \mathbf{e}_1 . De plus, cette rotation laisse le vecteur \mathbf{e}_3 invariant. Nous avons donc :

$$\mathbf{n} = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{e}_3. \quad (\text{A.2})$$

Par construction, les vecteurs unitaires \mathbf{e}_3 et \mathbf{i}_3 sont perpendiculaires au vecteur \mathbf{n} . Il existe donc un angle $\theta \in [0, \pi]$ tel qu'une rotation de cet angle θ autour de \mathbf{n} applique le vecteur \mathbf{e}_3 sur \mathbf{i}_3 . La restriction de l'angle θ au domaine $[0, \pi]$ et non à celui vu précédemment, $[0, 2\pi)$, est dû au fait que le vecteur \mathbf{n} est construit par le produit vectoriel du vecteur \mathbf{e}_3 par le vecteur \mathbf{i}_3 (équation??).

La rotation d'angle θ autour de \mathbf{n} est produite par l'application $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)$. Nous avons donc que :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_3 &= \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)\mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{n} &= \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)\mathbf{n} = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires \mathbf{i}_1 et \mathbf{n} sont perpendiculaires au vecteur \mathbf{i}_3 . Il existe donc un angle $\psi \in [0, 2\pi)$ tel qu'une rotation d'angle ψ autour de \mathbf{i}_3 applique le vecteur \mathbf{n} sur le vecteur \mathbf{i}_1 . La rotation d'angle ψ autour de \mathbf{i}_3 est produite par l'application $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)\mathbf{Q}_x(-\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)$. Nous avons donc que :

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 &= \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)\mathbf{Q}_x(-\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)\mathbf{n} = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{i}_3 &= \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)\mathbf{Q}_x(-\theta)\mathbf{Q}_y(-\varphi)\mathbf{i}_3 = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Ces deux dernières équations signifient que les deux matrices, \mathbf{Q} et $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)$ ont les vecteurs colonnes \mathbf{i}_1 et \mathbf{i}_3 en commun. De plus, les matrices \mathbf{Q} et $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)$ appartiennent au groupe spécial orthogonal $SO(3)$. Alors ces matrices sont orthogonales et donc ont des vecteurs colonnes orthogonaux entre eux et de norme 1. Tout cela

implique que les matrices \mathbf{Q} et $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi)$ ont le même vecteur colonne \mathbf{i}_2 et donc :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi). \quad (\text{A.3})$$

(Unicité) Soit (φ, θ, ψ) et $(\varphi', \theta', \psi') \in [0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$ et nous posons que :

$$\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi) = \mathbf{Q}_y(\varphi')\mathbf{Q}_x(\theta')\mathbf{Q}_z(\psi'). \quad (\text{A.4})$$

Nous multiplions l'équation ?? à gauche par $\mathbf{Q}_y(-\varphi')$ et à droite par $\mathbf{Q}_z(-\psi')$ qui nous donne :

$$\mathbf{Q}_y(\varphi - \varphi')\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi - \psi') = \mathbf{Q}_x(\theta'). \quad (\text{A.5})$$

Or, nous savons que :

$$\mathbf{Q}_x(\theta')\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta' \\ \cos \theta' \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

et que :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_y(\varphi - \varphi')\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi - \psi')\mathbf{e}_3 &= \mathbf{Q}_y(\varphi - \varphi')\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{e}_3 \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi - \varphi') & -\sin(\varphi - \varphi') & 0 \\ \sin(\varphi - \varphi') & \cos(\varphi - \varphi') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\varphi - \varphi') \sin \theta \\ -\cos(\varphi - \varphi') \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Donc, par l'équation ??, nous pouvons écrire que :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin \theta' \\ \cos \theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\varphi - \varphi') \sin \theta \\ -\cos(\varphi - \varphi') \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Par hypothèse, $\theta \geq 0$, $\theta' \in [0, \pi]$ et nous savons que la fonction cosinus est bijective sur $[0, \pi]$, alors l'équation ?? nous permet de conclure que $\theta = \theta'$.

De plus, si $\theta \neq 0, \pi$, l'équation ?? nous permet aussi de conclure que $\sin(\varphi - \varphi') = 0$ et que $\cos(\varphi - \varphi') = 1$ et donc que l'angle $\varphi - \varphi'$ est un multiple de 2π . Mais puisque par hypothèse, $0 \leq \varphi, \varphi' < 2\pi$ nous avons que $\varphi = \varphi'$.

Finalement, par ces derniers arguments l'égalité $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi) = \mathbf{Q}_y(\varphi')\mathbf{Q}_x(\theta')\mathbf{Q}_z(\psi')$ est donc équivalente à l'égalité $\mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi) = \mathbf{Q}_y(\varphi)\mathbf{Q}_x(\theta)\mathbf{Q}_z(\psi')$ et donc nous concluons que $\mathbf{Q}_y(\psi) = \mathbf{Q}_y(\psi')$. L'hypothèse que $0 \leq \psi, \psi' < 2\pi$ nous force alors de conclure que $\psi = \psi'$.

(c) Nous posons que $\theta \neq 0, \pi$. Alors le vecteur $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3}{|\mathbf{e}_3 \times \mathbf{i}_3|}$ est perpendiculaire aux vecteurs \mathbf{i}_3 et \mathbf{e}_3 . Nous définissons alors θ comme étant l'angle de rotation autour de \mathbf{n} qui amène \mathbf{e}_3 sur \mathbf{i}_3 . θ est donc, par définition, l'angle entre \mathbf{e}_3 et \mathbf{i}_3 .

Soient P_{xy} , le plan xy et P_3 , le plan contenant les vecteurs \mathbf{e}_3 et \mathbf{i}_3 . Ainsi, le vecteur \mathbf{n} est dans le plan P_{xy} puisqu'il est par construction perpendiculaire au vecteur \mathbf{e}_3 et est normal au plan P_3 . La projection du vecteur \mathbf{i}_3 dans le plan xy est donc à la fois dans le plan P_3 et le plan P_{xy} et est donc à un angle de $\frac{\pi}{2}$ du vecteur \mathbf{n} . Nous définissons φ comme étant l'angle entre les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{n} .

□

