

VINCENT VEILLEUX

**Modèle de Ruijsenaars-Schneider supersymétrique  
et superpolynômes de Macdonald**

Mémoire présenté  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de maîtrise en physique  
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

Faculté des sciences et de génie  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2008

©Vincent Veilleux, 2008

# Résumé

Le modèle de Ruijsenaars-Schneider trigonométrique (tRS) quantique est un problème à  $N$  corps relativiste intégrable qui généralise le modèle de Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique (tCMS). Les fonctions propres du modèle tRS sont les polynômes de Macdonald. La limite non relativiste qui relie les modèles tRS et tCMS est la même qui lie les polynômes de Macdonald et de Jack, les fonctions propres du modèle tCMS. Le but de ce mémoire est d'explorer la possibilité d'étendre le succès obtenu avec l'extension supersymétrique du modèle tCMS au modèle tRS. Le cas échéant, les superpolynômes de Macdonald pourraient être définis. Dans l'approche considérée, obtenir un coproduit diagonal de l'algèbre de Hecke est essentiel, mais n'a pas été possible pour  $N > 2$ . On présente donc les résultats partiels connus pour le cas supersymétrique à deux et trois variables ainsi que la nature des obstacles qui, jusqu'à maintenant, ont empêché d'obtenir la généralisation voulue.

# Abstract

The trigonometric Ruijsenaars-Schneider model (tRS) is a relativistic  $N$ -body integrable system generalizing the trigonometric Calogero-Moser-Sutherland (tCMS). The eigenfunctions of the tRS model are the Macdonald polynomials. The tRS model is related to the tCMS model in the non-relativistic limit. This limit is also the one between the Macdonald and Jack polynomials, the eigenfunctions of the tCMS model. The goal of this work is to extend the success obtained with the supersymmetric tCMS model to the RS model. If this was achieved, the Macdonald superpolynomials could be defined. In the approach we have considered, finding the diagonal coproduct of the Hecke algebra is essential, but could not be done with  $N > 2$ . Hence, we present the partial results obtained for the supersymmetric RS model in two and three variables along with the obstacles that prevented us from getting the complete generalization that was to be found initially.

# Avant-propos

Maintenant que tire à sa fin ce long projet, le temps est venu de prendre un moment pour regarder en arrière et mesurer le chemin parcouru. D'emblée, je ne peux m'empêcher de penser à tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'achèvement de ce travail. Sans eux, les deux dernières années n'auraient été qu'un pâle reflet de ce qu'elles ont été.

D'abord, je veux remercier mon directeur, Pierre Mathieu, pour avoir accepté de diriger mes travaux, pour sa patience, sa compréhension et sa disponibilité. Je veux également remercier mon codirecteur, Patrick Desrosiers, pour sa générosité en temps, en idées et en encouragements. Il a su faire beaucoup même s'il n'a pas toujours pu être présent. Merci aussi à notre collaborateur, Luc Lapointe, pour les discussions et les présentations qu'il a données.

Je ne pourrais passer sous silence la contribution des autres étudiants du groupe, Jean-François Brière, Pierre-Luc Lavertu et Émilie Guay, tant pour l'aide qu'ils m'ont apportée que pour l'équilibre psychologique qu'ils m'ont permis de préserver. Pour cela, un grand merci!

Enfin, je veux remercier chaleureusement ma femme, Andréanne, pour sa confiance, son aide et son support indéfectible. Merci également pour m'avoir aidé à corriger ce manuscrit. Les derniers, mais non les moindres, je tiens à remercier mes parents pour leurs encouragements, ainsi que pour la persévérance et l'amour de la connaissance qu'ils m'ont transmis.

Je remercie également le CRSNG de m'avoir octroyé une bourse au cours de l'année 2007-2008.

*À ma petite Drew.*

*«There are things known and things  
unknown and in between are the doors»  
Jim Morrison*

# Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Avant-propos	iv
Table des matières	vi
Liste des tableaux	viii
Table des figures	ix
Introduction	1
<b>1 Les modèles Calogero-Moser-Sutherland quantiques (CMS)</b>	<b>4</b>
1.1 Notions préliminaires	4
1.2 Les modèles Calogero-Moser-Sutherland	6
1.2.1 Le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique (tCMS)	7
1.2.2 L'intégrabilité dans le cas trigonométrique	8
1.3 Les fonctions propres du modèle tCMS	11
1.3.1 Les partitions	12
1.3.2 Les fonctions symétriques	13
1.3.3 Les polynômes de Jack	16
1.3.4 Les polynômes de Jack non symétriques	18
<b>2 Le modèle tCMS supersymétrique (stCMS)</b>	<b>20</b>
2.1 La supersymétrie	20
2.2 La construction du modèle stCMS	22
2.2.1 L'intégrabilité du modèle stCMS	24
2.3 Les fonctions propres du modèle stCMS	27
2.3.1 Les superpartitions	27
2.3.2 Les superfonctions symétriques	29
2.3.3 Les superpolynômes de Jack	34

<b>3</b>	<b>Le modèle de Ruijsenaars-Schneider (RS)</b>	<b>37</b>
3.1	Le modèle de RS classique . . . . .	38
3.2	Le modèle de RS quantique . . . . .	39
3.3	Le modèle RS quantique trigonométrique (tRS) . . . . .	41
3.3.1	La limite non relativiste . . . . .	42
3.4	Les fonctions propres du modèle tRS . . . . .	43
3.4.1	Les polynômes de Macdonald . . . . .	43
3.4.2	Le modèle tRS et les polynômes de Macdonald . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Le modèle de Ruijsenaars-Schneider supersymétrique (stRS)</b>	<b>46</b>
4.1	L'approche usuelle de supersymétrisation . . . . .	46
4.2	L'approche par symétrisation des polynômes non symétriques . . . . .	47
4.2.1	Le modèle stRS à deux variables . . . . .	49
4.3	Le modèle stRS à trois variables . . . . .	53
4.3.1	La recherche d'un coproduit . . . . .	54
	<b>Conclusion</b>	<b>56</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Algorithme <i>MAPLE</i> : le coproduit de l'algèbre de Hecke</b>	<b>62</b>

# Liste des tableaux

1.1	<i>Sommes de puissances : <math> \lambda  \leq 3</math> en <math>N = 3</math> variables</i>	14
1.2	<i>Fonctions symétriques monomiales : <math> \lambda  \leq 3</math> en <math>N = 3</math> variables</i>	15
1.3	<i>Fonctions de Schur : <math> \lambda  \leq 3</math> en <math>N = 3</math> variables</i>	16
1.4	<i>Polynômes de Jack pour <math> \lambda  \leq 3</math> dans la base des fonctions monomiales</i>	17
1.5	<i>Limites des polynômes de Jack pour différentes valeurs de <math>\beta</math></i>	18
2.1	<i>Superpartitions de poids <math> \Lambda  &lt; 3</math> pour chaque secteur fermionique</i>	28
2.2	<i>Superfonctions monomiales pour <math> \Lambda  &lt; 3</math> en 3 variables</i>	31
2.3	<i>Superfonctions élémentaires pour <math> \Lambda  &lt; 3</math> en 3 variables</i>	32
2.4	<i>Superfonctions sommes de puissances pour <math> \Lambda  &lt; 3</math> en 3 variables</i>	33
2.5	<i>Superpolynômes de Jack pour <math> \Lambda  &lt; 3</math> dans la base des superfonctions monomiales</i>	35



# Table des figures

1.1	<i>Diagramme de la partition <math>(5, 3, 3, 1)</math> et de sa partition conjuguée</i>	12
2.1	<i>Diagramme de la superpartition <math>\Lambda = (3, 1, 0; 4, 3, 3, 1)</math></i>	29

# Introduction

Pour un physicien, résoudre exactement un problème est généralement un accomplissement hors du commun. Au cours du siècle dernier, de nombreux chercheurs en sont venus à la conclusion que les systèmes dynamiques exactement résolubles sont très rares, même lorsqu'ils sont en apparence simples. On peut penser, par exemple, au célèbre attracteur de Lorenz [30] en théorie du chaos classique, où même une modélisation simplifiée de la convection donne lieu à une évolution imprévisible. Dans cette perspective, on comprend pourquoi la découverte de systèmes dynamiques intégrables comprenant  $N$  particules interagissant via un potentiel à longue portée a eu un aussi grand impact. En effet, il est clair qu'on ne s'attend pas à pouvoir connaître parfaitement l'évolution d'un tel système. Ces systèmes exceptionnels ont été découverts à la fin des années 1960, suivant une période où les méthodes perturbatives ont pris de plus en plus d'importance en physique. Des théories comme l'électrodynamique quantique, dont le succès est en grande partie attribuable aux méthodes d'approximation, permettent d'atteindre des résultats d'une grande précision. Malgré cela, la découverte des systèmes intégrables a suscité un grand intérêt en physique mathématique.

On considère généralement que c'est en 1967 que l'histoire des systèmes intégrables a débuté. En effet, à ce moment, certains systèmes intégrables étaient connus, par exemple,  $N$  oscillateurs harmoniques découplés et  $N$  particules interagissant ponctuellement par paire [35]. Par contre, on ne connaissait pas de système intégrable avec une interaction à longue portée. En 1967, Gardner et al. [22] découvrent une méthode d'intégration des équations différentielles. Cette découverte est faite dans le cadre de la résolution de l'équation de Korteweg-de Vries (KdV). L'année suivante, Lax reformule la méthode sous forme algébrique [29]. C'est cette formulation qui est très largement utilisée pour prouver l'intégrabilité des problèmes à  $N$  corps. On nomme cette méthode *méthode de déformation isospectrale* ou simplement *méthode de Lax*.

En 1969, Calogero résout un problème à trois corps sur la ligne [6]. Il s'agit de trois particules identiques interagissant par paires via un potentiel en  $1/r^2$ . Peu après, il prouve que le modèle correspondant, mais cette fois à  $N$  particules, est également inté-

grable. Il n'utilise pas la méthode de Lax pour prouver l'intégrabilité ; il trouve plutôt une base complète de solutions à l'équation de Schrödinger. Puis, en 1971, Sutherland étudie un problème semblable, mais où les particules interagissent sur un cercle [50]. Toutes ces découvertes sont d'abord faites dans un formalisme quantique. Les versions classiques viennent plus tard, en 1975, avec les travaux de Moser [36]. C'est également lui qui établit clairement le parallèle entre la solubilité de l'équation de KdV et l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens à  $N$  corps. Conséquemment, il est le premier à appliquer la méthode de Lax à la preuve de l'intégrabilité d'un système intégrable.

Les travaux de ces trois pionniers des systèmes intégrables ont été très influents en physique comme en mathématiques. Désormais, une famille complète de systèmes intégrables est nommée modèles Calogero-Moser-Sutherland (CMS). De nombreux physiciens se sont également penchés sur les applications des modèles CMS. On retrouve des applications en théorie du chaos quantique, en physique de l'état solide et même dans l'étude des trous noirs. On pourra consulter les références [11] et [54] pour en connaître davantage sur les applications des modèles CMS. On y trouvera également une liste d'articles pertinents.

Depuis ces découvertes, les modèles CMS ont suscité un grand engouement pour le domaine des systèmes intégrables et de cela ont découlé d'importantes généralisations. D'abord, au début des années 1980, Olshanetsky et Perelomov montrent que tant les versions classiques que quantiques de ces modèles sont associées aux réseaux des racines des algèbres de Lie et que, par conséquent, ils font partie d'une classe encore plus grande de systèmes intégrables [39, 40]. En ce qui concerne ce travail, la découverte du modèle de Ruijsenaars-Schneider (RS) [43, 44, 45] revêt une importance particulière. Il s'agit d'une généralisation relativiste des modèles CMS. L'invariance relativiste étant un incontournable des lois de la nature, cela en fait un modèle particulièrement intéressant.

Au tournant des années 1990, Stanley a publié un article important sur les propriétés des polynômes de Jack [48]. Peu de temps après, en 1992, Forrester découvre que ces polynômes sont les fonctions propres du modèle de Sutherland [20]. Toutefois, à ce moment, on ne connaît pas de formule explicite pour les polynômes de Jack. La recherche de l'expression explicite de ces polynômes a mené à l'élaboration du formalisme des opérateurs de création des polynômes de Jack par Lapointe et Vinet [28]. On s'aperçoit également que les fonctions propres du modèle RS sont les polynômes de Macdonald [31, 33] grâce à un rapprochement entre l'hamiltonien de ce système et les opérateurs de Macdonald [26]. Ces découvertes ont mis davantage en lumière le lien important entre la théorie des fonctions symétriques et les systèmes intégrables.

Le succès grandissant de la recherche sur les systèmes intégrables accompagné de

l'effervescence entourant la supersymétrie a stimulé l'intérêt entourant les généralisations supersymétriques de ces modèles. En effet, découverte au milieu des années 1970, la supersymétrie s'est rapidement imposée en physique théorique et particulièrement en théorie des cordes. Les premiers à proposer l'étude d'une version supersymétrique des modèles CMS sont Freedman et Mende [21]. Dès lors, beaucoup de travaux ont été faits en ce sens, mais c'est en 2001, avec les travaux de Desrosiers, Lapointe et Mathieu [11], qu'une étude exhaustive de cette extension supersymétrique a été complétée. Ces travaux ont donné lieu à la découverte des superpolynômes de Jack [12, 13, 16], des généralisations des polynômes de Jack contenant des variables grassmanniennes. Dans la foulée de ces succès, la théorie des superfonctions symétriques a également été développée [15].

C'est une telle généralisation que ce travail se propose de reproduire, mais cette fois, avec le modèle de Ruijsenaars-Schneider. L'atteinte de cet objectif pourrait permettre de définir les superpolynômes de Macdonald, des généralisations des solutions du modèle RS, les polynômes de Macdonald. L'approche utilisée sera cependant différente de celle de Desrosiers et al. [11]. On utilisera ici des notions de la théorie des polynômes non symétriques afin de construire les solutions attendues du modèle RS supersymétrique. Cela nécessite l'obtention d'une représentation spéciale de l'algèbre de Hecke, une représentation sous forme de coproduit.

Ce mémoire se veut donc une synthèse de la théorie sous-jacente à la recherche d'une version supersymétrique du modèle Ruijsenaars-Schneider ainsi qu'un compte-rendu des obstacles rencontrés dans les diverses avenues qui ont été explorées. D'abord, le premier chapitre présente une brève introduction des modèles CMS et de leurs solutions en portant une attention particulière au cas dit trigonométrique. Un survol de la théorie des fonctions symétriques et des partitions d'entiers accompagne cette introduction. Le deuxième chapitre s'attarde au modèle CMS trigonométrique supersymétrique. On y présente la méthode de supersymétrisation utilisée ainsi que les généralisations respectives des divers concepts présentés au premier chapitre. Au chapitre suivant, on amorce l'étude du modèle de Ruijsenaars-Schneider dans ses versions classique et quantique. On porte une attention particulière à ses limites classique et non relativiste, ainsi qu'au lien qui existe avec les modèles CMS. De plus, on y introduit brièvement les polynômes de Macdonald, les solutions du modèle tRS. Enfin, au dernier chapitre, on présente les approches considérées dans le but d'obtenir la version supersymétrique du modèle RS. On concentre notre attention sur le cas à deux et trois variables et on discute des difficultés rencontrées.

# Chapitre 1

## Les modèles Calogero-Moser-Sutherland quantiques (CMS)

Les modèles Calogero-Moser-Sutherland sont des systèmes unidimensionnels de  $N$  particules sans spin interagissant par paires qui sont dits complètement intégrables. Ils existent à la fois dans leur formulation classique et quantique. Ce sont des systèmes hamiltoniens pour lesquels il existe  $N$  quantités conservées fonctionnellement indépendantes qui commutent entre elles. On dira donc que ces systèmes sont intégrables au sens de Liouville. Dans ce chapitre, les diverses formes des modèles Calogero-Moser-Sutherland seront présentées, sans toutefois être toutes étudiées en détail. La discussion portera exclusivement sur les modèles quantiques et plus particulièrement sur le cas dit trigonométrique. L'accent sera mis sur la notion d'intégrabilité et sur les fonctions propres associées à l'hamiltonien, les polynômes de Jack. Pour une étude détaillée de la contrepartie classique des modèles traités dans ce chapitre, on pourra se référer à [39].

### 1.1 Notions préliminaires

Puisque les systèmes hamiltoniens quantiques sont généralement définis à partir des quantités de la théorie classique, il convient d'amorcer ce chapitre par un bref survol de notions élémentaires de mécanique hamiltonienne classique.

Tout d'abord, on définit un système hamiltonien à  $N$  corps général en une dimension par les  $N$  positions  $x_i$  et les  $N$  moments canoniquement conjugués  $p_i$ . En général, l'hamiltonien s'écrira comme la somme des énergies cinétiques des particules individuelles et de leurs énergies potentielles

$$H = \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i^2}{2m} + U(x_i) \right) + \sum_{i < j} V(x_i - x_j), \quad (1.1)$$

où  $U$  est un potentiel externe, qu'en général on prendra égal à zéro, et  $V$  un potentiel d'interaction par paires. L'évolution du système est donnée par cet hamiltonien via les équations du mouvement

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \{p_i, H\} \quad , \quad \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{x_i, H\}. \quad (1.2)$$

Ici,  $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$  et  $\{, \}$  est le crochet de Poisson que l'on définit comme

$$\{A, B\} = \sum_i \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right). \quad (1.3)$$

On entend par intégrale du mouvement une quantité telle que  $\{A(t), H\} = \frac{\partial A(t)}{\partial t}$ . Bien sûr, si  $A$  ne dépend pas explicitement du temps, son crochet de Poisson avec l'hamiltonien est nul. Ainsi, tel que mentionné précédemment, un système hamiltonien sera dit complètement intégrable s'il existe  $N$  intégrales du mouvement fonctionnellement indépendantes telles que

$$\{H_n, H_m\} = 0, \quad 1 \leq n, m \leq N, \quad (1.4)$$

l'hamiltonien faisant bien sûr partie de l'ensemble des  $H_n$ .

Maintenant, pour faire le passage d'un système hamiltonien classique à un système quantique, il faut remplacer le crochet de Poisson par le commutateur de la façon usuelle

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [A, B], \quad (1.5)$$

où  $A$  et  $B$  deviennent, dans la représentation de Heisenberg, des opérateurs dépendants du temps. Cette identification étant équivalente à  $p_i \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$ , l'hamiltonien est également un opérateur dans cette représentation où la dynamique est décrite par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = H \Psi(x, t) \quad \text{où} \quad H = -\frac{\hbar^2}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i < j} V(x_{ij}), \quad (1.6)$$

où  $x_{ij} \equiv x_i - x_j$  et  $\partial_{x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ .  $\Psi(x, t)$  est une fonction d'onde telle que  $\Psi^* \Psi \prod_{i=1}^N dx_i$  est la probabilité que le système se trouve dans le volume  $\prod_{i=1}^N dx_i$  de l'espace de



configuration au temps  $t$ . De façon comparable au cas unidimensionnel, l'hypothèse de la séparation des variables transforme l'équation différentielle en un problème aux valeurs propres. Les états stationnaires du système sont les fonctions propres de  $H$  auxquelles correspondent les valeurs propres, l'énergie des différents états. Toutefois, l'intégrabilité d'un tel système repose sur la possibilité de trouver  $N$  intégrales du mouvement et non pas sur la solubilité de l'équation différentielle définie par (1.6). Il s'avère tout de même que le fait qu'un système soit intégrable est tout à fait exceptionnel. Parmi ces cas hors du commun, il existe une classe de systèmes qui sont typiques des systèmes intégrables connus, ce sont les modèles Calogero-Moser-Sutherland [7, 36, 51, 54].

## 1.2 Les modèles Calogero-Moser-Sutherland

On considère généralement que les modèles Calogero-Moser-Sutherland regroupent cinq modèles qui se distinguent par le potentiel d'interaction de leur hamiltonien (1.1). Les systèmes hamiltoniens résultants sont tous intégrables. Ce sont des potentiels d'interaction par paires  $V(x)$  qui dépendent de l'inverse de la distance séparant les particules.

$$V(x) = \begin{cases} \text{I} & \frac{g}{x^2} \\ \text{II} & \frac{ga^2}{\sinh^2 ax} \\ \text{III} & \frac{ga^2}{\sin^2 ax} \\ \text{IV} & ga^2 \wp(x|\omega_1, \omega_2) \\ \text{V} & \frac{g_1}{x^2} + g_2 x^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

où  $g, g_1, g_2$  et  $a$  sont des constantes.  $\wp(x|\omega_1, \omega_2)$  est la fonction de Weierstrass, une fonction elliptique doublement périodique (de périodes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) à partir de laquelle on peut retrouver, pour des limites particulières, les cas I, II et III. On peut la définir en faisant intervenir les autres fonctions elliptiques de Weierstrass, les fonctions  $\zeta$  et  $\sigma$  :

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= x \prod_{m,n \neq 0} \left(1 - \frac{x}{\omega_{mn}}\right) \exp \left\{ \frac{x}{\omega_{mn}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\omega_{mn}}\right)^2 \right\} & \zeta(x) &= \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \\ \wp(x|\omega_1, \omega_2) &= -\zeta'(x) & \omega_{mn} &= m\omega_1 + n\omega_2 \quad m, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (1.8)$$

À noter, les potentiels I, II, III et IV sont dits respectivement rationnel, hyperbolique, trigonométrique et elliptique. Le cas V est dit rationnel avec confinement harmonique. Il ne peut pas être obtenu comme une limite du cas IV, mais on le mentionne tout de même, le cas V étant le premier à avoir été considéré historiquement [7]. On note également qu'à partir du cas trigonométrique on obtient le cas hyperbolique en posant  $a \rightarrow ia$  et le cas rationnel en posant  $a \rightarrow 0$ . Ces modèles intégrables peuvent être reformulés en

termes des réseaux des racines d'algèbres de Lie, ils font donc partie d'une famille de modèles plus généraux. Cette connexion ne sera pas abordée dans ce texte, cependant, une discussion détaillée en est faite dans [40]. Dorénavant, la discussion ne portera que sur le cas trigonométrique.

### 1.2.1 Le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique (tCMS)

Le cas trigonométrique des modèles CMS ou modèle de Sutherland [52] est défini par l'hamiltonien

$$H_{\text{trig}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{g\pi^2}{L^2} \sum_{i>j} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_{ij}\right)}, \quad (1.9)$$

où la notation  $x_{ij} \equiv x_i - x_j$  a été utilisée. Le système est constitué de  $N$  particules qui interagissent sur un cercle de circonférence  $L$  via un potentiel en  $1/r^2$ , où  $r$  est mesuré le long du cercle. On obtient le potentiel effectif total entre la particule  $i$  et la particule  $j$  en tenant compte de la distance  $r_{ij}$  dans le sens horaire et anti-horaire, et ce, après avoir effectué un, deux ou plusieurs tours complets<sup>1</sup>. La relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x_{ij} + nL)^2} = \frac{\pi^2}{L^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x_{ij}\right)} \quad (1.10)$$

permet donc d'obtenir l'expression simple du potentiel dans (1.9). À noter, dorénavant on choisira les unités telles que  $\hbar = 1$ . Afin de s'assurer que le système soit stable et n'ait pas d'état lié, on écrira  $g = \beta(\beta - 1)$ , *i.e.*  $g \geq -\frac{1}{4}$ . Ainsi, les particules se repoussent et la dynamique du système n'est pas triviale [6, 7, 28]. On peut également réécrire l'hamiltonien sous une forme semi-positive [11] :

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N A_i^\dagger A_i + E_0 \quad (1.11a)$$

$$A_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j} + i\beta \frac{\pi}{L} \sum_{i \neq j} \cot \left[ \frac{\pi}{L} x_{ij} \right] \quad (1.11b)$$

$$E_0 = \frac{1}{6} \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \beta^2 N(N^2 - 1). \quad (1.11c)$$

Par analogie avec le problème de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique, on nomme  $A_j$  l'opérateur d'annihilation et on trouve une expression pour la fonction d'onde

<sup>1</sup>On peut obtenir le même résultat en incluant le cercle dans un plan et en mesurant la distance entre la particule  $i$  et  $j$  en ligne droite de la façon habituelle.



de l'état fondamental en imposant la condition  $A_j \psi_0 = 0$ . On obtient ainsi [51] :

$$\psi_0(x) = \prod_{i < j} \left| \sin \frac{\pi}{L} x_{ij} \right|^\beta. \quad (1.12)$$

Il est intéressant de remarquer que pour  $\beta = 1$  on retrouve l'état fondamental pour  $N$  particules fermioniques et que pour  $\beta = 0$  on retrouve celui de  $N$  particules bosoniques [11, 51]. Ainsi, la statistique est en lien avec la constante de couplage et peut donc être fractionnaire [28].

### 1.2.2 L'intégrabilité dans le cas trigonométrique

On sait que pour qu'un système soit intégrable on doit pouvoir trouver  $N$  intégrales du mouvement. Évidemment, il est essentiel d'avoir une procédure systématique pour générer ces quantités. Il est possible, par exemple, d'employer l'approche qu'on utilise généralement dans le cas classique, la méthode de Lax [29], et de l'adapter au cas quantique. Cependant, ce ne sera pas la méthode présentée ici. L'approche préconisée sera plutôt celle des opérateurs de Dunkl. Cette procédure pour trouver les intégrales du mouvement dans le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique fait appel à des opérateurs différentiels contenant des opérateurs d'échange. Il s'agit d'une version modifiée de la méthode de Polychronakos [42] présentée par Lapointe et Vinet [28].

Reprenant les résultats de la dernière section, on écrit la fonction d'onde du système comme  $\Psi(x) = \psi_0(x)\phi(x)$ , où  $\phi(x)$  est symétrique afin que les états excités aient la même statistique que l'état fondamental. Cette observation est cruciale. Plus généralement, le fait que la factorisation de l'état fondamental assure que  $\phi(x)$  appartient à l'espace des fonctions symétriques permettra éventuellement de connaître la forme exacte des solutions en termes de fonctions symétriques connues. On réécrit donc l'équation de Schrödinger pour  $\phi(x)$  :

$$H' \phi(x) = E' \phi(x) \quad (1.13)$$

où les nouvelles quantités sont données par [11] :

$$H' = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 \psi_0^{-1} (H - E_0) \psi_0 \quad E' = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 (E - E_0). \quad (1.14)$$

Si on fait maintenant le changement de coordonnées  $z_i = e^{\frac{2\pi i x_i}{L}}$  on peut réécrire  $H'$  comme suit

$$H' = \sum_{i=1}^N \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_{ij}} \left( z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - z_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right). \quad (1.15)$$

On remarque que  $H'$  est invariant sous l'échange de  $z_i$  et de  $z_j$ . En fait, de façon plus générale, il est invariant sous l'action du groupe symétrique  $S_N$ , le groupe des permutations d'un ensemble. L'action du groupe symétrique sur un ensemble de variables  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  est générée par les opérateurs d'échange  $K_{ij}$ . Les différents opérateurs d'échange génèrent par action successive l'ensemble des éléments du groupe symétrique. L'action de  $K_{ij}$  sur une fonction est simplement d'échanger  $z_i$  et  $z_j$

$$K_{ij}f(z_i, z_j) = f(z_j, z_i)K_{ij}. \quad (1.16)$$

Voici quelques-unes de leurs propriétés :

$$K_{ij}^2 = 1 \quad (1.17a)$$

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (1.17b)$$

$$K_{ij}^\dagger = K_{ij} \quad (1.17c)$$

$$K_{ij}K_{jk} = K_{ik}K_{ij} = K_{kj}K_{ik}. \quad (1.17d)$$

Dans le but de prouver l'intégrabilité de ce modèle, il est crucial de s'apercevoir que  $H'$  peut être réécrit en termes d'opérateurs de Dunkl. Les opérateurs de Dunkl sont des opérateurs différentiels contenant des opérateurs d'échange. On utilisera les opérateurs de Dunkl covariants [19, 28] qu'on définit par

$$D_i = z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \beta \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{z_i}{z_{ij}} (1 - K_{ij}). \quad (1.18)$$

Ces opérateurs ne commutent pas entre eux [28] :

$$[D_i, D_j] = \beta(D_j - D_i)K_{ij} \quad (\text{non-commutativité}) \quad (1.19a)$$

$$K_{ij}D_i = D_jK_{ij} \quad (\text{covariance}). \quad (1.19b)$$

En termes des opérateurs de Dunkl, l'hamiltonien (1.15) s'écrira comme la somme des carrés des opérateurs  $D_i$  [28] :

$$H' = \Pi_K \left( \sum_{i=1}^N D_i^2 \right) \quad (1.20)$$

où  $\Pi_\epsilon(\mathcal{O})$  signifie que l'opérateur  $\mathcal{O}$  est projeté sur un espace invariant sous l'action de  $\epsilon$ . Cela revient, dans le cas présent, à contraindre les opérateurs de Dunkl à n'agir que sur des fonctions symétriques, *e.g.*

$$\Pi_K(K_{ij}) = 1. \quad (1.21)$$

Ayant maintenant écrit l'hamiltonien  $H'$  sous une forme plus facilement utilisable, il suffira, pour prouver l'intégrabilité du modèle Calogero-Moser-Sutherland, d'une part

d'introduire l'ensemble des quantités  $H_{(k)}$

$$H_{(k)} = \Pi_K \left( \sum_{i=1}^N D_i^k \right) \quad (1.22)$$

où  $H_{(2)} = H'$ . Par la suite, on devra prouver que

$$[H_{(k)}, H_{(l)}] = \left[ \Pi_K \left( \sum_{i=1}^N D_i^k \right), \Pi_K \left( \sum_{j=1}^N D_j^l \right) \right] = 0 \quad 1 \leq k, l \leq N. \quad (1.23)$$

Tout d'abord, utilisant la covariance des  $D_i$  ainsi que la propriété des projections [10]

$$[\Pi_K(A), \Pi_K(B)] = \Pi_K([A, B]) \quad \text{si} \quad [K_{ij}, A] = [K_{ij}, B] = 0, \quad (1.24)$$

on pourra factoriser l'opérateur de projection dans (1.23) pour obtenir

$$[H_{(k)}, H_{(l)}] = \Pi_K \left( \left[ \sum_{i=1}^N D_i^k, \sum_{j=1}^N D_j^l \right] \right) = 0 \quad 1 \leq k, l \leq N. \quad (1.25)$$

On peut montrer que cette propriété est satisfaite en s'inspirant d'une preuve semblable présentée dans [42]. D'abord, on a

$$\begin{aligned} [D_i^n, D_j] &= \sum_{k=0}^{n-1} D_i^k [D_i, D_j] D_i^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} D_i^k (\beta(D_j - D_i) K_{ij}) D_i^{n-k-1} \\ &= \beta \left( D_j^n + \sum_{k=1}^{n-1} D_i^k D_j^{n-k} - D_i^n - \sum_{m=1}^{n-1} D_i^m D_j^{n-m} \right) K_{ij} \\ &= \beta(D_j^n - D_i^n) K_{ij}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

et donc,

$$\begin{aligned} [H_{(n)}, H_{(m)}] &= \Pi_K \left( \sum_{i,j} [D_i^n, D_j^m] \right) = \Pi_K \left( \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{m-1} D_j^k [D_i^n, D_j] D_j^{m-k-1} \right) \\ &= \Pi_K \left( \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{m-1} D_j^k \beta(D_j^n - D_i^n) K_{ij} D_j^{m-k-1} \right) \\ &= \beta \Pi_K \left( \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{m-1} (D_j^k K_{ij} D_j^{m+n-k-1} - D_j^{k+n} K_{ij} D_j^{m-k-1}) \right) \\ &= \beta \Pi_K \left( \sum_{i,j} \left( \sum_{k=0}^{m-1} - \sum_{k=m}^{m+n-1} \right) D_j^k K_{ij} D_j^{m+n-k-1} \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Étant donné qu'un commutateur est antisymétrique par rapport à ses deux arguments, on doit pouvoir écrire

$$[H_{(n)}, H_{(m)}] = \frac{1}{2}([H_n, H_m] - [H_m, H_n]). \quad (1.28)$$

Ainsi, on obtient

$$[H_{(n)}, H_{(m)}] = \frac{\beta}{2} \Pi_K \left( \sum_{i,j} \left( \sum_{k=0}^{m-1} - \sum_{k=m}^{m+n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n}^{m+n-1} \right) D_j^k K_{ij} D_j^{m+n-k-1} \right) = 0, \quad (1.29)$$

ce qui prouve que les quantités conservées sont en involution. Enfin, puisque les  $H_{(n)}$  sont de la forme

$$H_{(n)} = \sum_{i=1}^N (z \partial_{z_j})^n + \text{termes d'ordre inférieur en dérivées}, \quad (1.30)$$

les quantités conservées sont clairement fonctionnellement indépendantes. On a donc montré qu'il existe  $N$  quantités conservées, incluant l'hamiltonien, qui commutent entre elles et sont fonctionnellement indépendantes, ce qui prouve l'intégrabilité du modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique.

Si le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique est intégrable, c'est qu'on peut résoudre les équations du mouvement et connaître l'évolution du système, *i.e.* on peut, en principe, connaître les solutions. Par contre, en général, un système intégrable peut avoir des solutions très difficiles à trouver, si bien que souvent on ne les connaît pas. Dans la prochaine section, on cherchera les solutions, ou états excités du système, dans le cas du modèle tCMS.

### 1.3 Les fonctions propres du modèle tCMS

Les résultats de la section précédente permettent de prouver que le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique est intégrable. On s'intéressera maintenant aux fonctions propres de l'hamiltonien, les états excités du système. Ces fonctions sont des polynômes en  $z_i$  qui ont la propriété d'être invariants sous l'action du groupe symétrique, *i.e.* ce sont des fonctions symétriques. Il s'agit là d'une conséquence directe de la factorisation de l'état fondamental dans la construction de l'hamiltonien modifié  $H'$  (1.15). En fait, l'étude de la base de la théorie des fonctions symétriques permet de voir le lien qui existe entre le modèle tCMS et les polynômes de Jack, des polynômes symétriques dépendant rationnellement d'un paramètre.

### 1.3.1 Les partitions

Le concept de partition est omniprésent dans la théorie des fonctions symétriques. Ainsi, il est pertinent de débiter par un bref survol de la terminologie et des quantités qui sont rattachées aux partitions. Cette section et la suivante s'inspirent principalement du livre de I. G. Macdonald [33].

Une partition est une séquence d'entiers non négatifs ordonnés

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n) \quad \text{tels que} \quad \lambda_{i+1} \leq \lambda_i \quad \forall i > 0. \quad (1.31)$$

On ne distingue pas les partitions qui ne diffèrent que par le nombre de zéros. La longueur de  $\lambda$ ,  $l(\lambda)$ , est le nombre de parties qu'elle contient, *i.e.* le nombre de  $\lambda_i$  non nuls. La somme des parties est nommée poids de  $\lambda$  et est notée  $|\lambda|$ . On parle souvent des partitions d'un entier  $n$ , *i.e.* l'ensemble des partitions telles que  $|\lambda| = n$ . On note le nombre d'éléments de cet ensemble  $p(n)$  et on aura, par exemple, pour  $n = 4$  cinq partitions

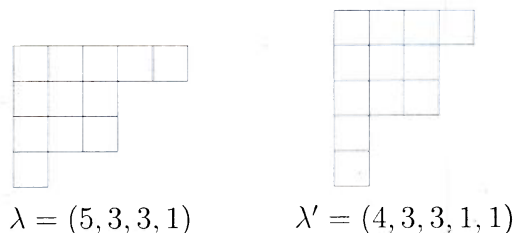
$$(4) \quad (3, 1) \quad (2, 2) \quad (2, 1, 1) \quad (1, 1, 1, 1). \quad (1.32)$$

On peut connaître le nombre de partitions d'un entier  $n$  quelconque à l'aide de la fonction génératrice du nombre de partitions

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m}. \quad (1.33)$$

On représente fréquemment les partitions par leur diagramme. Le diagramme de  $\lambda$  est un ensemble de boîtes tel que la première rangée contient  $\lambda_1$  boîtes, la deuxième  $\lambda_2$  boîtes, *etc.* Par exemple, la figure 1.1 présente le diagramme de la partition  $(5, 3, 3, 1)$ . On définit également la partition conjuguée  $\lambda'$  dont le diagramme est obtenu en faisant une réflexion le long de la diagonale principale du diagramme de  $\lambda$ .

FIG. 1.1 – Diagramme de la partition  $(5, 3, 3, 1)$  et de sa partition conjuguée



De nombreuses quantités de nature combinatoire peuvent être définies à partir des

partitions et de leurs diagrammes, parmi celles-là, deux seront utiles

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i = \sum_{i \geq 1} \binom{\lambda_i}{2} \quad (1.34a)$$

$$z_\lambda = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} m_i! \quad (1.34b)$$

où  $m_i$  est la multiplicité de  $i$  dans  $\lambda$ . Également, il s'avérera souvent essentiel d'ordonner les partitions entre elles. Pour ce faire, il existe différentes définitions. L'ordre de dominance est l'ordre qu'on considérera ici. On dira que  $\lambda \geq \mu$  dans l'ordre de dominance si

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i \quad \forall i. \quad (1.35)$$

L'ordre de dominance est partiel, c'est-à-dire que certaines partitions sont incomparables selon cet ordre, par exemple :  $(4, 3, 1)$  et  $(5, 1, 1, 1)$ . Cependant, l'ordre de dominance est total pour toute partition de poids inférieur ou égal à cinq.

### 1.3.2 Les fonctions symétriques

Les fonctions symétriques sont des polynômes en  $n$  variables qui demeurent invariants lorsqu'on permute n'importe quelles de leurs variables. On note l'espace de tous les polynômes avec coefficients entiers en  $N$  variables  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N]$ . Le sous-espace des polynômes invariants sous l'action du groupe symétrique, *i.e.* invariant sous permutation de ses variables, est noté  $\Sigma_N = \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$ . Évidemment, si on note l'espace des fonctions symétriques homogènes de degré  $k$   $\Sigma_N^k$ , on aura :

$$\Sigma_N = \bigoplus_{k \geq 0} \Sigma_N^k \quad (1.36a)$$

$$\Sigma_N^n \otimes \Sigma_N^m = \Sigma_N^{n+m}. \quad (1.36b)$$

$\Sigma_N^k$  étant un espace vectoriel, tout polynôme de cet espace admet une décomposition dans une base d'éléments linéairement indépendants. C'est donc dire qu'en vertu de (1.36a), on pourra décomposer tout polynôme symétrique dans une base de polynômes symétriques. On va maintenant s'intéresser à certaines de ces bases.

Tout d'abord, la base la plus simple est celle des fonctions dites sommes de puissances (voir tableau 1.1). Comme leur nom l'indique, il s'agit d'additionner chaque variable élevée à une puissance donnée

$$p_{(r)}(z_1, \dots, z_N) = \sum_{i=1}^N z_i^r, \quad p_\lambda = p_{(\lambda_1)} p_{(\lambda_2)} \dots p_{(\lambda_n)}, \quad (1.37)$$



où  $\lambda$  est une partition. L'ensemble des sommes de puissances  $p_\lambda(z_1, \dots, z_N)$  telles que  $|\lambda| = n$  forme une base de l'espace des fonctions symétriques de degré  $n$  avec coefficients rationnels  $\mathbb{Q}[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$ . En effet, lorsqu'on multiplie plusieurs sommes de puissances entre elles, les monômes peuvent avoir des coefficients entiers plus grands que 1 et il devient nécessaire d'avoir des coefficients fractionnaires. Par exemple,

$$m_{(1,1)} = \frac{1}{2}p_{(1)}^2 - \frac{1}{2}p_{(2)}. \quad (1.38)$$

On utilisera également la base des fonctions symétriques monomiales (voir tableau 1.2).

TAB. 1.1 – Sommes de puissances :  $|\lambda| \leq 3$  en  $N = 3$  variables

Poids ( $ \lambda $ )	$\lambda$	$p_\lambda(z)$
1	(1)	$z_1 + z_2 + z_3$
2	(1, 1)	$z_1^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + z_2^2 + 2z_2z_3 + z_3^2$
	(2)	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
3	(1, 1, 1)	$z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1^2z_3 + 3z_1z_2^2 + 6z_1z_2z_3 + 3z_1z_3^2$ $+ z_2^3 + 3z_2^2z_3 + 3z_2z_3^2 + z_3^3$
	(2, 1)	$z_1^3 + z_1^2z_2 + z_1^2z_3 + z_1z_2^2 + z_2^3 + z_2^2z_3 + z_1z_3^2 + z_2z_3^2 + z_3^3$
	(3)	$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$

Avant de définir celles-ci, on doit d'abord définir un monôme en termes d'une composition d'entiers. Une composition d'entiers  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est une séquence d'entiers qui, contrairement à une partition, n'est pas dans un ordre précis. Un monôme en termes d'une composition est donné par le produit de l'ensemble des variables élevées à la puissance correspondante dans la composition

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_N^{\alpha_N}. \quad (1.39)$$

La fonction symétrique monomiale associée à la partition  $\lambda$  est la somme sur les permutations distinctes des parties de  $\lambda$

$$m_\lambda(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \text{perm. distinctes}}} \omega(z^\lambda). \quad (1.40)$$

Par construction, ces polynômes sont clairement symétriques. En fait, il s'agit simplement d'additionner à un monôme donné tous les monômes distincts pouvant être

TAB. 1.2 – Fonctions symétriques monomiales :  $|\lambda| \leq 3$  en  $N = 3$  variables

Poids ( $ \lambda $ )	$\lambda$	$m_\lambda(z)$
1	(1)	$z_1 + z_2 + z_3$
2	(1, 1)	$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$
	(2)	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
3	(1, 1, 1)	$z_1 z_2 z_3$
	(2, 1)	$z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_3 + z_1 z_2^2 + z_1 z_3^2 + z_2 z_3^2$
	(3)	$z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$

obtenus par permutation de ses variables. D'autre part, on remarque qu'il y a un lien entre les fonctions symétriques monomiales et les sommes de puissances. On a que

$$m_{(n)} = p_n. \quad (1.41)$$

Si au lieu de choisir la fonction symétrique monomiale associée à la partition de poids  $n$  la plus élevée dans l'ordre de dominance, on choisit la plus basse, on obtient

$$m_{(1^n)} = e_n; \quad (1.42)$$

où la partition  $(1^n)$  est la partition contenant  $n$  parties égales à 1 et  $e_n(z)$  est la fonction symétrique élémentaire. On définit la fonction symétrique élémentaire comme la somme des monômes homogènes de degrés  $n$  formés à partir de  $n$  des  $N$  variables

$$e_n(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ i_j \in \{1, \dots, N\}}} z_{i_1} \dots z_{i_n}. \quad (1.43)$$

Puisque les fonctions symétriques font partie d'un espace vectoriel, il est naturel de définir un produit scalaire. Celui-ci est défini de telle sorte que les sommes de puissances soient orthogonales

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}. \quad (1.44)$$

On note qu'il existe une famille de fonctions symétriques bien connue, les fonctions de Schur, qui sont orthonormales par rapport au produit scalaire (1.44). On les définit comme un quotient de fonctions antisymétriques  $a_\lambda(z_1, \dots, z_N)$

$$s_\lambda(z_1, \dots, z_N) = \frac{a_{\lambda+\delta}(z_1, \dots, z_N)}{a_\delta(z_1, \dots, z_N)} \quad (1.45)$$

où  $\delta = (N-1, \dots, 2, 1, 0)$ . La fonction complètement anti-symétrique  $a_\lambda(z)$  est définie de façon analogue à la fonction monomiale symétrique

$$a_\lambda(z_1, \dots, z_N) = \sum_{\omega \in S_N} \pi(\omega) \omega(z^\lambda), \quad (1.46)$$



où  $\pi(\omega) = (-1)^r$  est la parité de  $\omega$  et  $r$  le nombre minimal de générateurs devant agir successivement pour obtenir  $\omega$ .  $a_\delta$  est communément appelé déterminant de Vandermonde. On trouve quelques exemples des premières fonctions de Schur au tableau (1.3). Les notions de base sur les fonctions symétriques de la présente section permettront de

 TAB. 1.3 – Fonctions de Schur :  $|\lambda| \leq 3$  en  $N = 3$  variables

Poids ( $ \lambda $ )	$\lambda$	$s_\lambda(z)$
1	(1)	$z_1 + z_2 + z_3$
2	(1, 1) (2)	$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$
3	(1, 1, 1) (2, 1) (3)	$z_1 z_2 z_3$ $z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_3 + z_1 z_2^2 + z_1 z_3^2 + z_2 z_3^2 + 2z_1 z_2 z_3$ $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_3 + z_1 z_2^2 + z_1 z_3^2 + z_2 z_3^2 + z_1 z_2 z_3$

définir d'autres fonctions symétriques plus générales dont les coefficients dépendent de paramètres indéterminés. Les premières sont les polynômes de Jack qui feront l'objet de la prochaine section et qui seront très importants dans l'étude des solutions du modèle tCMS.

### 1.3.3 Les polynômes de Jack

Les polynômes de Jack  $J_\lambda(z_1, \dots, z_N; \beta)$  sont des polynômes symétriques dont les coefficients dépendent rationnellement d'un paramètre noté  $\beta$ . Ils appartiennent donc à l'espace  $\mathbb{Q}(\beta)[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$  et non pas à  $\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$  comme les fonctions symétriques de la section précédente.

Une première définition, de nature combinatoire, caractérise les polynômes de Jack comme étant les seuls polynômes qui respectent les deux conditions suivantes :

$$J_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\mu\lambda}(\beta) m_\mu \quad (\text{triangularité}) \quad (1.47a)$$

$$\langle J_\lambda, J_\mu \rangle_\beta = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \mu \quad (\text{orthogonalité}) \quad (1.47b)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$  est une généralisation du produit scalaire (1.44) que l'on définit en termes du paramètre  $\beta$

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_\beta = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda! \beta^{l(\lambda)}. \quad (1.48)$$

Dans le cas qui nous concerne, l'intérêt des polynômes de Jack réside dans le fait qu'on peut montrer qu'ils sont les seules fonctions propres linéairement indépendantes de l'hamiltonien  $H'$  [10, 48]. Ainsi, on donnera une deuxième définition, de nature physique, des polynômes de Jack :

$$H' J_\lambda(z; 1/\beta) = \epsilon_\lambda J_\lambda(z; 1/\beta) \quad (\text{fonction propre de } H') \quad (1.49a)$$

$$J_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda} c_{\mu\lambda}(\beta) m_\mu \quad (\text{triangularité}) \quad (1.49b)$$

$$\text{où } \epsilon_\lambda = \sum_j \lambda_j (\lambda_j + \beta(N + 1 - 2j)).$$

Les polynômes de Jack  $J_\lambda(z; 1/\beta)$  pourront donc être définis de façon physique comme les seuls polynômes qui sont fonctions propres de  $H'$  et qui se décomposent de façon triangulaire dans la base des fonctions symétriques monomiales. On remarque que la propriété de triangularité fixe la normalisation des polynômes de Jack. On qualifie de moniques les polynômes de Jack dont la normalisation est telle que le coefficient du plus grand monôme est un. Quelques exemples des polynômes de Jack les plus simples exprimés dans la base des fonctions symétriques monomiales sont donnés au tableau 1.4. On remarquera la triangularité des décompositions qui y sont présentées.

Fait intéressant, les polynômes de Jack, pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ , se ramènent à différentes bases de l'espace des polynômes symétriques comme l'indique le tableau 1.5. Les polynômes de Jack sont eux-mêmes une base de l'espace  $\mathbb{Q}(\alpha)[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$ .

TAB. 1.4 – Polynômes de Jack pour  $|\lambda| \leq 3$  dans la base des fonctions monomiales

Poids ( $ \lambda $ )	$\lambda$	$J_\lambda(z; 1/\beta)$
1	(1)	$m_{(1)}$
2	(1, 1)	$m_{(1^2)}$
	(2)	$m_{(2)} + \frac{2\beta}{\beta+1} m_{(1^2)}$
3	(1, 1, 1)	$m_{(1^3)}$
	(2, 1)	$m_{(2,1)} + \frac{6\beta}{2\beta+1} m_{(1^3)}$
	(3)	$m_{(3)} + \frac{3\beta}{\beta+2} m_{(2,1)} + \frac{6\beta^2}{(\beta+1)(\beta+2)} m_{(1^3)}$

TAB. 1.5 – Limites des polynômes de Jack pour différentes valeurs de  $\beta$ 

	Limite	Base correspondante
$J_\lambda(z; 1/\beta)$	$\beta \rightarrow 1$	$s_\lambda(z)$
	$\beta \rightarrow 0$	$m_\lambda(z)$
	$\beta \rightarrow \infty$	$e_\lambda(z)$

### 1.3.4 Les polynômes de Jack non symétriques

Les polynômes de Jack non symétriques, introduits dans [41] et spécialisés au cas des algèbres de Lie  $A_{N-1}$  dans [25], sont considérés comme ayant une importance théorique aussi grande que les polynômes symétriques. On ne fera pas ici le détail de la théorie de ces polynômes, on énoncera plutôt un certain nombre de résultats qui seront utiles ultérieurement.

Il s'avérera donc utile de définir les polynômes de Jack non symétriques, une nouvelle famille de polynômes orthogonaux liés aux polynômes de Jack définis à la section 1.3.3. Ils sont indicés par des compositions plutôt que des partitions et, par un processus de symétrisation approprié, on peut s'en servir pour construire les polynômes de Jack usuels. On les définit comme les seules fonctions linéairement indépendantes telles que, pour une composition  $\alpha$ , on a

$$E_\alpha = z^\alpha + \sum_{\mu < \alpha} c_{\mu\alpha}(\beta) z^\mu \quad (1.50)$$

$$\langle E_\alpha, E_\mu \rangle_\beta \propto \delta_{\alpha,\mu}, \quad (1.51)$$

où l'ordre entre les compositions est l'ordre de Bruhat, défini comme suit.

Soit  $\alpha$  et  $\gamma$  deux compositions. On peut remettre ces deux compositions en ordre décroissant et ainsi obtenir des partitions que l'on note  $\alpha^+$  et  $\gamma^+$ . Ces réarrangements sont obtenus en échangeant successivement les éléments des compositions, ainsi, on a

$$\alpha^+ = w_\alpha \alpha \quad \text{et} \quad \gamma^+ = w_\gamma \gamma \quad \text{où} \quad w_\alpha, w_\gamma \in S_N. \quad (1.52)$$

Les décompositions de  $w_\alpha$  et  $w_\gamma$  en des produits de générateurs ne sont pas uniques. Cependant, leurs décompositions réduites, celles qui font intervenir le moins de générateurs, sont uniques. On dira que  $\alpha \geq \gamma$  dans l'ordre de Bruhat si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \alpha^+ &> \gamma^+ \quad \text{dans l'ordre de dominance, ou} \\ \alpha^+ &= \gamma^+ \quad \text{et} \quad w_\alpha^r \leq w_\gamma^r, \end{aligned} \quad (1.53)$$

où on entend par  $w_\alpha^r < w_\gamma^r$  que la décomposition réduite de  $w_\alpha$ ,  $w_\alpha^r$ , est une sous-séquence de  $w_\gamma^r$ .

Si on additionne l'action de tous les éléments du groupe symétrique sur un polynôme de Jack non symétrique  $E_{\alpha^+}(z; \beta)$ , on obtient une combinaison linéaire qui respecte la définition des polynômes de Jack usuels et qui, par construction, est symétrique. Explicitement, on a [13, 25]

$$J_{\alpha^+}(z; \beta) \propto \sum_{\omega \in \mathcal{S}_N} K_{\omega} E_{\alpha^+}(z; \beta). \quad (1.54)$$

Cette approche pour obtenir les polynômes de Jack est très puissante et peut se généraliser à d'autres cas que nous considérerons dans les prochains chapitres. Notamment, cette méthode fournit une excellente procédure pour trouver l'extension supersymétrique des polynômes dont la version non symétrique est connue.

# Chapitre 2

## Le modèle tCMS supersymétrique (stCMS)

Dans ce chapitre, nous allons présenter la structure de la généralisation du modèle présenté au chapitre 1. On ajoutera aux  $N$  variables bosoniques ( $z_i$ ) du modèle tCMS  $N$  variables grassmanniennes ( $\theta_i$ ), c'est-à-dire anticommutatives. On construira le modèle de telle sorte qu'il présente  $\mathcal{N} = 2$  supersymétries, *i.e.* qu'il existe deux charges fermioniques  $Q$  qui commutent avec l'hamiltonien. On verra comment, à partir d'un certain nombre de contraintes, on arrivera à obtenir un modèle qui est l'extension naturelle du modèle tCMS, au sens où dans la limite où les variables fermioniques (anticommutatives) sont nulles le modèle se ramène au modèle tCMS. Par la suite, on pourra définir les fonctions propres de ce modèle supersymétrique comme étant l'extension des polynômes Jack. Le contenu de ce chapitre est tiré principalement de [11]. On trouvera dans [9] une bonne introduction à la mécanique quantique supersymétrique et dans [47] une introduction à la supersymétrie en général.

### 2.1 La supersymétrie

Au chapitre 1, la dynamique quantique des systèmes à  $N$  corps a été introduite en mettant l'accent sur la notion d'intégrabilité. On présente donc maintenant la notion de supersymétrie du point de vue de la dynamique des systèmes à  $N$  corps en mentionnant particulièrement ce qu'on entend par système intégrable supersymétrique.

La supersymétrie est une opération de symétrie qui envoie un état bosonique vers un état fermionique et vice-versa. Cette transformation est induite par un opérateur fermionique, qu'on nomme charge supersymétrique ( $Q$ ),

$$Q|F\rangle = |B\rangle \text{ et } Q|B\rangle = |F\rangle. \quad (2.1)$$

On dira d'un système qu'il est supersymétrique si sa dynamique demeure inchangée par une telle transformation, c'est-à-dire que la charge commute avec l'hamiltonien. En général, on dira qu'un système dynamique possède  $\mathcal{N}$  supersymétries s'il existe  $\mathcal{N}$  charges telles que

$$Q^i Q^j = -Q^j Q^i \quad (\text{anticommutativité}) \quad (2.2a)$$

$$(Q^i)^2 = 0 \quad (\text{nilpotence}) \quad (2.2b)$$

$$\dot{Q}^i = [Q^i, \mathcal{H}] = 0. \quad (\text{conservation}) \quad (2.2c)$$

Il est clair que pour qu'un système dynamique soit supersymétrique, il doit incorporer des degrés de liberté bosoniques et fermioniques. Conséquemment, la supersymétrie reliant des états de spins différents, elle est intrinsèquement une symétrie des systèmes quantiques. Pour un système à  $N$  corps, on a  $2N$  variables bosoniques, *i.e.*  $(x, p)$ . Un système à  $N$  corps supersymétrique aura, en plus,  $2N$  variables fermioniques s'ajoutant aux  $2N$  variables bosoniques. Ces degrés de liberté fermioniques seront représentés par des variables grassmanniennes  $(\theta_i, \theta_i^\dagger)$ . Ils obéissent à une algèbre de Clifford

$$\{\theta_i, \theta_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (2.3)$$

où  $\{, \}$  est l'anticommutateur. Bien sûr, puisqu'il s'agit de variables fermioniques, leurs anticommutateurs sont nuls

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\theta_i^\dagger, \theta_j^\dagger\} = 0. \quad (2.4)$$

On choisira une représentation différentielle de l'algèbre des variables de Grassmann, c'est-à-dire qu'on aura

$$\theta_i^\dagger = \frac{\partial}{\partial \theta_i}. \quad (2.5)$$

Ce choix pour  $\theta_i^\dagger$  est naturel, on remarque d'ailleurs qu'il s'agit d'une représentation analogue à celle de  $p$  en termes de la dérivée par rapport à  $x$ . Le fait que les variables de Grassmann anticommutent implique qu'elles ne peuvent être présentes qu'à la première puissance dans un monôme ( $\theta_i^2 = 0$ ). Une autre conséquence est l'équivalence de la différentiation et de l'intégration

$$\int d\theta_i \theta_j = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j = \delta_{ij}. \quad (2.6)$$

L'ajout de degrés de liberté fermioniques fait en sorte qu'un système intégrable supersymétrique n'aura pas que  $N$  quantités conservées, mais bien  $2N$ . En effet, il faut chercher  $2N$  quantités bosoniques, lesquelles auront  $2N$  contreparties fermioniques.

## 2.2 La construction du modèle stCMS

En mécanique quantique supersymétrique à une dimension, il est possible de reconstruire le potentiel d'un système intégrable supersymétrique si on connaît son état fondamental [9]. Connaissant l'état fondamental du modèle tCMS on pourra ainsi construire son extension supersymétrique en imposant quelques contraintes simples.

On considérera un modèle à  $\mathcal{N} = 2$  supersymétries dont l'hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H} = \{Q, Q^\dagger\}. \quad (2.7)$$

Cette forme pour l'hamiltonien assure la commutativité d'au moins deux charges supersymétriques par construction si  $(Q)^2 = (Q^\dagger)^2 = 0$ . Afin que les charges respectent cette contrainte et sachant que l'on peut écrire l'hamiltonien tCMS sous une forme semi-positive (1.11), on propose une forme simple pour les charges [11],

$$Q = \sum_{i=1}^N \theta_i^\dagger A_i(x, p), \quad Q^\dagger = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i^\dagger(x, p). \quad (2.8)$$

On doit imposer

$$[A_i(x, p), A_j(x, p)] = [A_i^\dagger(x, p), A_j^\dagger(x, p)] = 0 \quad (2.9)$$

afin que les charges soient nilpotentes, tel que requis. L'hamiltonien devient donc

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^N A_i^\dagger A_i + \sum_{i,j=1}^N \theta_i^\dagger \theta_j [A_i(x, p), A_j^\dagger(x, p)] \right). \quad (2.10)$$

Puisqu'on traite ici de systèmes non relativistes, on sait que l'hamiltonien contiendra un terme quadratique en  $p$ , le terme d'énergie cinétique. Ainsi, on pourra spécifier davantage la forme des charges supersymétriques en faisant l'hypothèse

$$A_i(x, p) = p_i - i\Phi_i(x) \quad (2.11)$$

et puisque les  $A_i$  et  $A_i^\dagger$  doivent commuter entre eux, on doit avoir

$$\Phi_i(x) = \partial_{x_i} W(x). \quad (2.12)$$

On appelle  $W(x)$  le prépotentiel. L'hamiltonien prend maintenant la forme

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (p_i^2 + (\partial_{x_i} W(x))^2 + \partial_{x_i}^2 W(x)) - \sum_{i,j=1}^N \theta_i \theta_j^\dagger \partial_{x_i} \partial_{x_j} W(x). \quad (2.13)$$

Le membre de gauche de (2.13) est l'hamiltonien d'un système à  $N$  corps dont le potentiel serait donné par  $\sum_i ((\partial_{x_i} W(x))^2 + \partial_{x_i}^2 W(x))$ . On dira donc que (2.13) est une extension supersymétrique de ce modèle.



Le fait de définir l'hamiltonien comme l'anticommutateur de deux charges permet d'obtenir deux états fondamentaux donnés par

$$Q\psi_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad Q^\dagger\tilde{\psi}_0(x) = 0. \quad (2.14)$$

Si on définit les vides fermioniques  $|0\rangle$  et  $|\tilde{0}\rangle$  comme les états contenant respectivement aucun et  $N$  fermions, on aura

$$\theta_i^\dagger |0\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \theta_i |\tilde{0}\rangle = 0. \quad (2.15)$$

On interprétera  $\theta_i$  et  $\theta_i^\dagger$  respectivement comme les opérateurs de création et d'annihilation des fermions. Ainsi, on pourra écrire simplement les deux états fondamentaux comme le produit des états fondamentaux bosonique et fermionique

$$\psi_0(x) = e^{W(x)} |0\rangle \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_0(x) = e^{-W(x)} |\tilde{0}\rangle. \quad (2.16)$$

On remarque que si l'état fondamental normalisable d'un système non supersymétrique est connu, il suffit de procéder à l'identification

$$W(x) = \ln(\psi_0(x)) \quad (2.17)$$

afin d'en obtenir l'extension supersymétrique. C'est la méthode qu'on privilégiera ici puisque nous connaissons déjà l'état fondamental du modèle tCMS dont on cherche l'extension supersymétrique. On aura donc

$$W(x) = \beta \sum_{i < j} \ln \left| \sin \frac{\pi}{L} x_{ij} \right|. \quad (2.18)$$

Il suffit maintenant de remplacer ce résultat dans (2.13). Pour ce faire, on utilisera les résultats intermédiaires suivants

$$\partial_{x_k} W(x) = \frac{\beta\pi}{L} \sum_{i \neq k} \cot \frac{\pi}{L} x_{ki} \quad (2.19a)$$

$$\partial_{x_j} \partial_{x_k} W(x) = -\frac{\beta\pi^2}{L^2} \sum_{i \neq k} \left( 1 + \cot^2 \frac{\pi}{L} x_{ki} \right) (\delta_{jk} - \delta_{ij}) \quad (2.19b)$$

$$\sum_{j,k} \theta_j \theta_k^\dagger \partial_{x_j} \partial_{x_k} W(x) = -\frac{\beta\pi^2}{L^2} \sum_{j < k} \left( 1 + \cot^2 \frac{\pi}{L} x_{jk} \right) \theta_{jk} \theta_{jk}^\dagger \quad (2.19c)$$

$$\begin{aligned} \sum_k (\partial_{x_k} W(x))^2 &= \frac{\beta\pi^2}{L^2} \sum_k \left( \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq k} \cot \frac{\pi}{L} x_{ki} \cot \frac{\pi}{L} x_{kj} \right) \\ &= \frac{\beta\pi^2}{L^2} \left( \sum_{k \neq j} \cot^2 \frac{\pi}{L} x_{kj} + 2 \sum_{k < i < j} \left[ \cot \frac{\pi}{L} x_{ki} \cot \frac{\pi}{L} x_{kj} - \left( \cot \frac{\pi}{L} x_{ki} - \cot \frac{\pi}{L} x_{kj} \right) \cot \frac{\pi}{L} x_{ij} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.19d)$$



En utilisant l'identité

$$\cot \frac{\pi}{L} x_{ki} - \cot \frac{\pi}{L} x_{kj} = \left[ 1 + \cot \frac{\pi}{L} x_{ki} \cot \frac{\pi}{L} x_{kj} \right] \tan \frac{\pi}{L} x_{ij}, \quad (2.20)$$

on obtient finalement

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i < j} \frac{\beta(\beta - 1 + \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger)}{\sin^2(\pi x_{ij}/L)} - \left( \frac{\beta\pi}{L} \right)^2 \frac{N(N^2 - 1)}{6}. \quad (2.21)$$

On peut simplifier ce résultat si on remarque que

$$1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger = 1 - (\theta_i - \theta_j)(\partial_i - \partial_j) = \kappa_{ij}, \quad (2.22)$$

où  $\kappa_{ij}$  est l'analogie de l'opérateur d'échange  $K_{ij}$  mais agissant sur les variables de Grassmann. On note qu'il agit indifféremment sur  $\theta_i$  et  $\theta_i^\dagger$ , c'est-à-dire que

$$\kappa_{ij} f(\theta_i, \theta_j, \theta_i^\dagger, \theta_j^\dagger) = f(\theta_j, \theta_i, \theta_j^\dagger, \theta_i^\dagger) \kappa_{ij}. \quad (2.23)$$

Si, de façon analogue au cas non supersymétrique, on fait le changement de variables  $z_i = e^{2\pi i x_i/L}$  et qu'on conjugue par l'état fondamental, on obtient l'hamiltonien supersymétrique transformé ( $\mathcal{H}'$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &= \sum_{i=1}^N (z_i \partial_{z_i})^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_{ij}} (z_i \partial_{z_i} - z_j \partial_{z_j}) - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{z_{ij}^2} (1 - \kappa_{ij}) \\ &= H' - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{z_{ij}^2} (1 - \kappa_{ij}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

On a donc obtenu l'extension supersymétrique voulue du modèle tCMS. À présent, on cherchera à savoir si ce modèle supersymétrique conserve la propriété d'intégrabilité du modèle tCMS. La prochaine section donne une façon directe de généraliser la preuve de l'intégrabilité du modèle tCMS au modèle stCMS. Dans la section suivante, les solutions de ce modèle seront étudiées, ce qui permettra de définir les notions de superpartition et de superpolynôme symétrique, des généralisations des partitions et des polynômes symétriques respectivement.

### 2.2.1 L'intégrabilité du modèle stCMS

De façon analogue au cas du modèle tCMS, l'intégrabilité peut être démontrée via une extension appropriée du formalisme de Lax [29]. Cependant, comme on l'a fait au chapitre 1, on procédera plutôt par la méthode des opérateurs de Dunkl qu'on adaptera

au cas supersymétrique. De la même façon que pour le modèle tCMS, on définira des opérateurs de Dunkl en termes desquels on pourra écrire l'hamiltonien  $\mathcal{H}'$ .

Tout d'abord, introduisons un nouvel opérateur d'échange,

$$\mathcal{K}_{ij} \equiv \kappa_{ij} \otimes K_{ij} = \kappa_{ij} K_{ij} \quad \text{où} \quad [\kappa_{ij}, K_{ij}] = 0. \quad (2.25)$$

L'action de  $\mathcal{K}_{ij}$  est simplement l'action simultanée de  $\kappa_{ij}$  sur les variables  $\theta_i$  et de  $K_{ij}$  sur les variables  $z_i$ . Puisque  $\mathcal{K}_{ij}$  a les mêmes propriétés que les autres opérateurs d'échange, *i.e.* il respecte les axiomes de l'algèbre du groupe symétrique, il constitue une représentation de  $S_N$ . Une telle représentation formée du produit direct de deux copies de l'algèbre agissant sur deux sous-espaces est dite représentation coproduit de l'algèbre.  $\mathcal{K}_{ij}$  est donc un générateur de  $S_N$  dans cette représentation coproduit. On doit noter également que ce coproduit est particulier puisque son action est d'échanger les variables  $i$  et  $j$  simultanément dans les deux ensembles de variables et non pas n'importe quelle paire de variables indépendamment dans chacun des ensembles. On dira qu'un tel coproduit est diagonal.

On note que si une fonction  $\mathcal{F}_{\mathcal{K}}$  est invariante sous l'action de  $\mathcal{K}_{ij}$ , alors l'action de  $\kappa_{ij}$  est équivalente à l'action de  $K_{ij}$  sur celle-ci

$$\kappa_{ij} K_{ij} \mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \mathcal{F}_{\mathcal{K}} \quad \Rightarrow \quad K_{ij} \mathcal{F}_{\mathcal{K}} = \kappa_{ij} \mathcal{F}_{\mathcal{K}}. \quad (2.26)$$

En termes de la projection sur un espace invariant, telle que définie à la section 1.2.2, on écrira

$$\Pi_{\mathcal{K}}(K_{ij}) = \kappa_{ij}. \quad (2.27)$$

On définira également l'hamiltonien  $\mathcal{H}_K$  dans lequel on substitue simplement l'opérateur  $\kappa_{ij}$  pour  $K_{ij}$

$$\mathcal{H}_K = H' - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{z_{ij}^2} (1 - K_{ij}). \quad (2.28)$$

On retrouvera alors, en termes de projection, les hamiltoniens stCMS et tCMS

$$\Pi_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}_K) = \mathcal{H}' \quad (2.29a)$$

$$\Pi_K(\mathcal{H}_K) = H'. \quad (2.29b)$$

On introduit maintenant de nouveaux opérateurs de Dunkl à partir des opérateurs de Dunkl covariants définis précédemment (1.18)

$$\mathcal{D}_i = D_i + \frac{\beta}{2} \left( \sum_{j < i} K_{ij} - \sum_{j > i} K_{ij} \right). \quad (2.30)$$

Ces opérateurs ont, entre autres, la propriété de commuter entre eux. Ainsi, on les nomme opérateurs de Dunkl commutatifs. Ils satisfont les propriétés suivantes :

$$K_{i,i+1}\mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{D}_i K_{i,i+1} = -\beta \quad (\text{algèbre de Hecke dégénérée}) \quad (2.31a)$$

$$[\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] = 0 \quad (\text{commutativité}) \quad (2.31b)$$

$$[\mathcal{D}_i, \mathcal{H}_K] = 0 \quad (\text{conservation}). \quad (2.31c)$$

On pourra maintenant écrire l'hamiltonien  $\mathcal{H}_K$  en termes de ce nouvel opérateur de Dunkl

$$\sum_{i=1}^N (\mathcal{D}_i)^2 = \mathcal{H}_K + 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 E_0. \quad (2.32)$$

Une simple projection sur l'espace invariant sous l'action de  $\mathcal{K}_{ij}$  permet donc de retrouver l'hamiltonien supersymétrique  $\mathcal{H}'$

$$\Pi_{\mathcal{K}} \left( \sum_{i=1}^N (\mathcal{D}_i)^2 \right) = \mathcal{H}' + 2 \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 E_0, \quad (2.33)$$

où  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental du modèle tCMS (1.11).

Étant donnée la commutativité des opérateurs  $\mathcal{D}_i$  et la propriété des projections (1.24), on trouve directement les  $N$  premières quantités conservées du modèles stCMS,

$$\mathcal{H}_{(n)} = \Pi_{\mathcal{K}} \left( \sum_{i=1}^N (\mathcal{D}_i)^n \right) \quad , \quad [\mathcal{H}_{(n)}, \mathcal{H}_{(m)}] = 0 \quad 1 \leq n, m \leq N, \quad (2.34)$$

où  $\mathcal{H}_{(2)} = \mathcal{H}'$ . Ces quantités sont des généralisations directes des quantités conservées  $H_{(n)}$  du modèle tCMS (1.22). On peut également définir un deuxième ensemble de quantités conservées bosoniques, cette fois en termes d'opérateurs de Dunkl et de variables fermioniques,

$$\mathcal{I}_{(n)} = \Pi_{\mathcal{K}} \left( \sum_{\omega \in S_n} \mathcal{K}_{\omega} \left( \theta_i \theta_i^{\dagger} \mathcal{D}_i^n \right) \right) \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.35)$$

On peut montrer à l'aide des propriétés des opérateurs de Dunkl covariants et de celles des projections que ces quantités commutent entre elles. Ce résultat n'est cependant pas trivial, on pourra trouver le détails de la preuve dans [13]. On peut également construire  $2N$  quantités conservées fermioniques qui ne commutent cependant pas entre elles :

$$\mathcal{Q}_{(n)} = \dot{\Pi}_{\mathcal{K}} \left( \sum_{\omega \in S_n} \mathcal{K}_{\omega} \left( \theta_i \mathcal{D}_i^n \right) \right) \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (2.36a)$$

$$\mathcal{Q}_{(n)}^{\dagger} = \Pi_{\mathcal{K}} \left( \sum_{\omega \in S_n} \mathcal{K}_{\omega} \left( \theta_i^{\dagger} \mathcal{D}_i^n \right) \right) \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (2.36b)$$

L'anticommutateur des quantités conservées  $\mathcal{Q}_{(1)}$  et  $\mathcal{Q}_{(1)}^\dagger$  génère l'hamiltonien,

$$\{\mathcal{Q}_{(1)}, \mathcal{Q}_{(1)}^\dagger\} = \mathcal{H}_{(2)}, \quad (2.37)$$

celles-ci sont donc les charges supersymétriques du modèle. Évidemment, il est clair que cela devait être le cas puisque les charges supersymétriques sont conservées par construction.

## 2.3 Les fonctions propres du modèle stCMS

Au chapitre 1, l'obtention des solutions du modèle tCMS a été facilitée par l'étude de la théorie des fonctions symétriques. En transformant l'hamiltonien, il a été possible de faire le rapprochement avec un opérateur dont les fonctions propres sont des fonctions symétriques connues. Dans le cas du modèle stCMS, c'est la recherche des solutions qui a été l'élément déclencheur et qui a permis de jeter les bases de la théorie des superfonctions symétriques [11, 12, 13, 15]. On définira donc de nouvelles quantités, les superpolynômes de Jack, des généralisations des polynômes de Jack (1.47). Ces fonctions de variables à la fois commutatives et anticommutatives appartiennent à l'espace des superfonctions symétriques, des fonctions invariantes sous l'échange simultané des variables commutatives entre elles et des variables anticommutatives entre elles. À noter, ces fonctions ne sont pas supersymétriques, au sens où elles ne sont pas invariantes sous l'échange des degrés de liberté bosoniques et fermioniques et vice-versa. Dans la foulée, on sera amené à définir le concept de superpartition, analogue au concept de partition. On fera également un bref survol de la théorie des superfonctions symétriques de façon à être en mesure de présenter une définition claire des superpolynômes de Jack.

### 2.3.1 Les superpartitions

Une superpartition est une séquence d'entiers constituée de deux secteurs, un antisymétrique (fermionique) et un symétrique (bosonique). Le premier contient une partition strictement décroissante et le deuxième contient une partition usuelle telle que définie à la section 1.3.1. On notera une superpartition par une lettre grecque majuscule et on sépare les deux secteurs par un point-virgule

$$\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_N) = (\Lambda^a; \Lambda^s)$$

telle que  $\Lambda_i^a > \Lambda_{i+1}^a \geq 0$  et  $\Lambda_i^s \geq \Lambda_{i+1}^s \geq 0$ . (2.38)

On dira d'une superpartition dont la partie antisymétrique contient  $m$  éléments, qu'elle appartient au secteur à  $m$  fermions et on le notera ainsi :  $\bar{\Lambda} = m$ . La longueur de  $\Lambda$ ,  $l(\Lambda)$ , est définie simplement comme le nombre total de parties dans la superpartition, *i.e.*  $l(\Lambda) = \bar{\Lambda} + l(\Lambda^s)$ . Le poids de  $\Lambda$ ,  $|\Lambda|$ , est défini tout aussi simplement  $|\Lambda| = |\Lambda^a| + |\Lambda^s|$ .

Le nombre de superpartitions de poids  $|\Lambda| = n$  appartenant au secteur à  $m$  fermions est notée  $Sp(n|m)$ . On peut facilement trouver la fonction génératrice de  $Sp(n|m)$ , puisqu'il s'agit simplement du produit des fonctions génératrices du nombre de partitions strictement décroissantes de longueur  $m$  et des partitions usuelles de longueur  $N - m$  exactement, on a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} Sp(n|m)x^n = \left( \frac{x^{m(m-1)/2}}{(x)_m} \right) \left( \frac{x^{N-m}}{(x)_{N-m}} \right), \quad (2.39)$$

où  $(x)_m \equiv \prod_{i=1}^m (1 - x^i)^{-1}$ . Pour obtenir le nombre total de superpartitions pour un poids  $n$ ,  $Sp(n)$ , on peut sommer l'expression précédente sur toutes les valeurs de  $m$  et de  $N - m$ , on obtient ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty} Sp(n)x^n = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + x^n}{1 - x^n} \right). \quad (2.40)$$

Bien sûr, pour un poids donné il y a toujours plus de superpartitions que de partitions puisque les partitions sont des superpartitions dans le secteur à zéro fermion. On retrouve au tableau 2.1 les superpartitions de poids inférieur à trois.

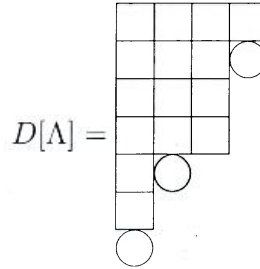
TAB. 2.1 – *Superpartitions de poids  $|\Lambda| < 3$  pour chaque secteur fermionique*

$ \Lambda $	$Sp( \Lambda )$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
0	2	(0)	(0; 0)	
1	4	(1)	(0; 1) (1; 0)	(1, 0; 0)
2	8	(2) (1, 1)	(2; 0) (1; 1) (0; 2) (0; 1, 1)	(2, 0; 0) (1, 0; 1)

À chaque superpartition correspond une seule partition  $\Lambda^*$  telle que toutes les parties sont remises dans l'ordre et où le point-virgule est éliminé. On définit également la partition encadrée  $C[\Lambda]$ , qui, comme la partition  $\Lambda^*$ , est constituée des parties de  $\Lambda$  remises dans l'ordre, mais où les parties fermioniques sont encadrées. On a, par exemple,

$$(1, 0; 1, 1) \rightarrow (\textcircled{1}, 1, 1, \textcircled{0}) \quad \text{où on considère } \textcircled{i} > i. \quad (2.41)$$

Tout comme les partitions usuelles, les superpartitions sont souvent représentées par leur diagramme.  $D[\Lambda]$  est le diagramme de la partition  $\Lambda^*$  construit de la façon habituelle,

FIG. 2.1 – Diagramme de la superpartition  $\Lambda = (3, 1, 0; 4, 3, 3, 1)$ 

mais auquel on ajoute un cercle à chaque rangée représentant une partie provenant de  $\Lambda^a$ . La figure 2.1 illustre le diagramme de la superpartition  $(3, 1, 0; 4, 3, 3, 1)$ .

On doit également définir l'ordre entre les superpartitions. On pourrait choisir l'ordre de dominance comme on l'a fait pour les partitions, mais cet ordre ne convient pas pour définir la théorie des superpolynômes symétriques. L'ordre voulu est donné en termes de l'ordre de Bruhat sur les compositions d'entiers (voir section 1.3.3). On introduit la composition  $\Lambda^c$ , qu'on obtient en remplaçant le point-virgule de  $\Lambda$  par une virgule. On dira alors que  $\Lambda \geq \Omega$  si, et seulement si,  $\Lambda^c \geq \Omega^c$  dans l'ordre de Bruhat [15].

### 2.3.2 Les superfonctions symétriques

On entend par superfonction symétrique, une fonction  $f(z_1, \dots, z_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$  qui demeure invariante sous l'échange simultané des variables bosoniques  $(z_i)$  et des variables fermioniques  $(\theta_i)$  entre elles. Soit  $\mathcal{F}$ , une superfonction symétrique, alors

$$\mathcal{K}_{ii+1}\mathcal{F} = K_{ii+1}\kappa_{ii+1}\mathcal{F} = \mathcal{F}, \quad 1 \leq i \leq N-1. \quad (2.42)$$

Il est important de noter ici que  $\mathcal{F}$  n'est pas une fonction supersymétrique. Ce qu'on entend généralement par fonction supersymétrique est une fonction de deux ensembles distincts de variables commutatives  $\{x_i\}$  et  $\{y_i\}$  qui est invariante sous des permutations indépendantes des  $x_i$  et des  $y_i$  entre elles. De plus, une fonction supersymétrique est indépendante de  $t$  si on pose  $x_1 = y_1 = t$  [49].

Quant à elles, les superfonctions symétriques généralisent les fonctions symétriques, mais elles ne sont pas doublement symétriques. C'est à dire qu'elles sont invariantes sous des permutations correspondantes des deux ensembles de variables, par exemple,  $z_i \leftrightarrow z_j$  simultanément à  $\theta_i \leftrightarrow \theta_j$ . On dira donc qu'elles sont invariantes sous l'action du



coproduit diagonal du groupe symétrique,  $S_N^{\text{diag}}$  (voir section 2.2.1). Également, à la différence des fonctions supersymétriques, une superfonction symétrique est fonction d'un ensemble de variables commutatives et d'un ensemble de variables anticommutatives. Il est particulièrement intéressant de remarquer que l'ajout de variables anticommutatives force une symétrie mixte des variables bosoniques de façon à ce que la fonction soit globalement symétrique. Une superfonction symétrique simple montrant cette propriété serait par exemple :

$$\theta_1 \theta_2 (z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1). \quad (2.43)$$

De façon analogue aux fonctions symétriques, on note l'espace formé par les superfonctions symétriques  $\mathcal{P}_N^{\text{diag}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_N, \theta_1, \dots, \theta_m]^{S_N^{\text{diag}}}$ . Bien sûr, comme il s'agit de polynômes, si on définit  $\mathcal{P}_{(n|m)}^{\text{diag}}(\mathbb{Z})$  comme étant l'espace des superfonctions symétriques homogènes de degré  $n$  dans les variables commutatives et de degré  $m$  dans les variables anticommutatives, on aura naturellement

$$\mathcal{P}_N^{\text{diag}} = \bigoplus_{n,m \geq 0} \mathcal{P}_{(n|m)}^{\text{diag}}. \quad (2.44)$$

Comme dans le cas des fonctions symétriques, les éléments de  $\mathcal{P}_N^{\text{diag}}$  pourront se décomposer dans des bases d'éléments linéairement indépendants de l'espace. Entre autres, les bases des superfonctions symétriques monomiales, élémentaires et somme de puissances sont des généralisations directes des quantités correspondantes dans le cas usuel.

On définira d'abord les superfonctions symétriques monomiales. De façon analogue aux fonctions symétriques, les superfonctions symétriques monomiales seront indicées par une superpartition. On les obtient en faisant la somme de tous les monômes de degré  $\bar{\Lambda}$  dans les variables  $\theta_i$  multipliés par la fonction monomiale antisymétrique dans les variables  $z_i$  correspondantes et la fonction symétrique monomiale dans les variables  $z_j, j \neq i$ . Dorénavant, afin de simplifier la notation, on écrira  $f(z, \theta)$  plutôt que  $f(z_1, \dots, z_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$ . Explicitement, on a

$$m_{\Lambda}(z, \theta) = \sum_{\substack{i_1 < i_2 < \dots < i_m \\ \{i_1, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, N\}}} \theta_{i_1} \dots \theta_{i_m} a_{\Lambda^a}(z_{i_1}, \dots, z_{i_m}) m_{\Lambda^s}(\{z\} / \{z_{i_1}, \dots, z_{i_m}\}), \quad (2.45)$$

où  $a_{\lambda}(z)$  est la fonction monomiale antisymétrique définie à la section 1.3.2. On remarquera que cette définition montre clairement l'antisymétrie des variables  $z_i$  indicées par les variables du secteur fermionique et la symétrie de celles du secteur bosonique. Également, dans le cas où la superpartition appartient au secteur à zéro fermion, il est clair que la superfonction symétrique monomiale est simplement la fonction symétrique monomiale  $m_{\Lambda^s}(z)$ . On retrouve au tableau 2.2 les premières superfonctions symétriques monomiales.

TAB. 2.2 – Superfonctions monomiales pour  $|\Lambda| < 3$  en 3 variables

Poids $ \Lambda $	Secteur $\bar{\Lambda}$	Superpartition $\Lambda$	Superfonction monomiale $m_\Lambda(z, \theta)$
0	1	(0; 0)	$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$
1	1	(0; 1)	$\theta_1(z_2 + z_3) + \theta_2(z_1 + z_3) + \theta_3(z_1 + z_2)$
		(1; 0)	$\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \theta_3 z_3$
	2	(1, 0; 0)	$\theta_1 \theta_2 (z_1 - z_2) + \theta_1 \theta_3 (z_1 - z_3) + \theta_2 \theta_3 (z_2 - z_3)$
2	1	(0; 1, 1)	$\theta_1(z_2 z_3) + \theta_2(z_1 z_3) + \theta_3(z_1 z_2)$
		(0; 2)	$\theta_1(z_2^2 + z_3^2) + \theta_2(z_1^2 + z_3^2) + \theta_3(z_1^2 + z_2^2)$
		(1; 1)	$\theta_1 z_1(z_2 + z_3) + \theta_2 z_2(z_1 + z_3) + \theta_3 z_3(z_1 + z_2)$
		(2; 0)	$\theta_1 z_1^2 + \theta_2 z_2^2 + \theta_3 z_3^2$
	2	(1, 0; 1)	$\theta_1 \theta_2 (z_1 - z_2) z_3 + \theta_1 \theta_3 (z_1 - z_3) z_2 + \theta_2 \theta_3 (z_2 - z_3) z_1$
		(2, 0; 0)	$\theta_1 \theta_2 (z_1^2 - z_2^2) + \theta_1 \theta_3 (z_1^2 - z_3^2) + \theta_2 \theta_3 (z_2^2 - z_3^2)$

La base des superfonctions symétriques élémentaires est une base multiplicative, i.e.  $e_\Lambda = e_{\lambda_1} \dots e_{\lambda_N}$ . Ainsi, on définira les superfonctions symétriques élémentaires bosoniques et fermioniques de façon à généraliser cette propriété dans le cas d'une base indicée par une superpartition. On a,

$$e_n(z) = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, N\} \\ \#J=n}} z_{j_1} \dots z_{j_n} \quad (2.46a)$$

$$\tilde{e}_n(z, \theta) = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, N\}/i \\ \#J=n}} \theta_i z_{j_1} \dots z_{j_n} \quad (2.46b)$$

$$\text{avec } e_0(z) = 1 \quad \text{et} \quad \tilde{e}_0(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i, \quad (2.46c)$$

où  $\#J$  désigne la cardinalité du sous-ensemble  $J$ . On remarque que la superfonction symétrique élémentaire bosonique est simplement la fonction symétrique élémentaire définie précédemment (voir section 1.3.2). On peut donc écrire, en termes des superfonctions symétriques élémentaires bosoniques et fermioniques, la superfonction symétrique élémentaire  $e_\Lambda(z, \theta)$ ,

$$e_\Lambda(z, \theta) = \prod_{i=1}^{\bar{\Lambda}} \tilde{e}_{\Lambda_i} \prod_{j=\bar{\Lambda}+1}^{l(\Lambda)} e_{\Lambda_j}. \quad (2.47)$$

Il faut mentionner que, par convention, le produit des quantités anticommutatives se fait de gauche à droite, c'est-à-dire que chaque terme dans le produit est placé à droite du



précédent. Avec cette définition, on obtient une généralisation naturelle du lien entre les fonctions symétriques monomiales et élémentaires,

$$e_n(z) = m_{(1^n)} \quad \text{et} \quad \tilde{e}_n(z, \theta) = m_{(0; 1^n)}. \quad (2.48)$$

On retrouve au tableau 2.3 les premières superfonctions symétriques élémentaires.

TAB. 2.3 - Superfonctions élémentaires pour  $|\Lambda| < 3$  en 3 variables

Poids $ \Lambda $	Secteur $\bar{\Lambda}$	Superpartition $\Lambda$	Superfonction élémentaires $e_\Lambda(z, \theta)$
0	1	(0; 0)	$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$
1	1	(0; 1)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1 + z_2 + z_3)$
		(1; 0)	$\theta_1(z_2 + z_3) + \theta_2(z_1 + z_3) + \theta_3(z_1 + z_2)$
	2	(1, 0; 0)	$\theta_1(\theta_2 + \theta_3)(z_2 + z_3) + \theta_2(\theta_1 + \theta_3)(z_1 + z_3) + \theta_3(\theta_1 + \theta_2)(z_1 + z_2)$
2	1	(0; 1, 1)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1 + z_2 + z_3)^2$
		(0; 2)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)$
		(1; 1)	$(z_1 + z_2 + z_3)[\theta_1(z_2 + z_3) + \theta_2(z_1 + z_3) + \theta_3(z_1 + z_2)]$
		(2; 0)	$\theta_1 z_2 z_3 + \theta_2 z_1 z_3 + \theta_3 z_1 z_2$
	2	(1, 0; 1)	$(z_1 + z_2 + z_3)[\theta_1(\theta_2 + \theta_3)(z_2 + z_3) + \theta_2(\theta_1 + \theta_3)(z_1 + z_3) + \theta_3(\theta_1 + \theta_2)(z_1 + z_2)]$
		(2, 0; 0)	$\theta_1(\theta_2 + \theta_3)z_2 z_3 + \theta_2(\theta_1 + \theta_3)z_1 z_3 + \theta_3(\theta_1 + \theta_2)z_1 z_2$

La dernière base qu'on considérera ici, la base des superfonctions symétriques sommes de puissances, est également une base multiplicative. On introduira donc les sommes de puissances fermioniques et bosoniques,

$$p_n(z) = \sum_{i=1}^N z_i^n \quad (2.49a)$$

$$\tilde{p}_n(z, \theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i z_i^n \quad (2.49b)$$

$$\text{où } p_0(z) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{p}_0(z, \theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i. \quad (2.49c)$$

Encore une fois, on remarque que la superfonction somme de puissances bosonique est en fait la  $n$ ème fonction somme de puissance usuelle (voir section 1.3.2). On peut

maintenant définir la superfonction somme de puissances  $p_\Lambda(z, \theta)$ . On a

$$p_\Lambda(z, \theta) = \prod_{i=1}^{\bar{\Lambda}} \tilde{p}_{\Lambda_i} \prod_{j=\bar{\Lambda}+1}^{l(\Lambda)} p_{\Lambda_j}. \quad (2.50)$$

On retrouve, encore une fois, les relations entre les sommes de puissances et les fonctions symétriques monomiales qui se généralisent aux superfonctions

$$m_{(n)} = p_n \quad \text{et} \quad m_{(n;0)} = \tilde{p}_n. \quad (2.51)$$

Des exemples des premières superfonctions sommes de puissances se retrouvent au tableau 2.4.

TAB. 2.4 – *Superfonctions sommes de puissances pour  $|\Lambda| < 3$  en 3 variables*

Poids $ \Lambda $	Secteur $\bar{\Lambda}$	Superpartition $\Lambda$	Superfonction somme de puissances $p_\Lambda(z, \theta)$	
0	1	(0; 0)	0	
1	1	(0; 1) (1; 0)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1 + z_2 + z_3)$ 0	
	2	(1, 0; 0)	0	
2	1	(0; 1, 1)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1 + z_2 + z_3)^2$	
		(0; 2)	$(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$	
		(1; 1)	$(\theta_1 z_1 + \theta_2 z_2 + \theta_3 z_3)(z_1 + z_2 + z_3)$	
		(2; 0)	0	
	2	(1, 0; 1)		$[\theta_1 \theta_2 (z_1 - z_2) + \theta_2 \theta_3 (z_2 - z_3) + \theta_1 \theta_3 (z_1 - z_3)](z_1 + z_2 + z_3)$
			(2, 0; 0)	0

Enfin, les superfonctions symétriques, faisant intervenir le concept central de superpartition, sont des extensions naturelles des fonctions symétriques. En effet, les bases de l'espace des superfonctions symétriques présentées ici sont des généralisations directes de leurs contreparties dans le cas usuel et les liens entre elles se généralisent directement. D'autre part, de nombreuses relations combinatoires ainsi que d'autres familles de polynômes, *e.g.* les polynômes de Jack, ont des extensions directes dans le cadre du formalisme des superfonctions symétriques. Les superpolynômes de Jack font d'ailleurs l'objet de la prochaine section.

### 2.3.3 Les superpolynômes de Jack

Les superpolynômes de Jack apparaissent naturellement dans l'étude de l'extension supersymétrique du modèle tCMS. Ces polynômes sont les seules fonctions propres linéairement indépendantes de l'hamiltonien  $\mathcal{H}'$  (2.24). Comme dans le cas des polynômes de Jack, il n'y a pas qu'une seule façon de définir les superpolynômes de Jack. Il y aura, encore une fois, une définition physique et une définition combinatoire.

La première définition qu'on donnera ici est une généralisation directe de la définition combinatoire des polynômes de Jack (1.47). Les quantités du cas non supersymétrique sont simplement remplacées par les quantités appropriées dans le superspace. Les superpolynômes de Jack sont les seules superfonctions linéairement indépendantes telles que [13]

$$J_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega < \Lambda} c_{\Omega\Lambda}(\beta) m_\Omega \quad (\text{triangularité}) \quad (2.52a)$$

$$\langle J_\Lambda, J_\Omega \rangle_\beta \propto \delta_{\Lambda,\Omega} \quad (\text{orthogonalité}), \quad (2.52b)$$

où le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$  est défini comme

$$\langle p_\Lambda, p_\Omega \rangle_\beta = z_\Lambda \beta^{-l(\Lambda)} \delta_{\Lambda,\Omega}. \quad (2.53)$$

$z_\Lambda$  est défini de façon analogue à  $z_\lambda$  (1.34) mais où  $\lambda$  est remplacé par  $\Lambda^s$

$$z_\Lambda = z_{\Lambda^s} = \prod_i i^{m_i} m_i!. \quad (2.54)$$

La deuxième définition est de nature physique et fait donc intervenir les quantités conservées du modèle stCMS, dont l'hamiltonien. On dira que les superpolynômes de Jack sont les seules superfonctions linéairement indépendantes telles que [13]

$$\mathcal{H}_{(2)} J_\Lambda = \epsilon_\lambda J_\Lambda, \quad \mathcal{I}_{(1)} J_\Lambda = \alpha_\lambda J_\Lambda \quad \text{et} \quad J_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega < \Lambda} c_{\Omega\Lambda}(\beta) m_\Omega, \quad (2.55)$$

où  $\mathcal{H}_{(2)}$  et  $\mathcal{I}_{(1)}$  ont été définis précédemment aux équations (2.34) et (2.35). Les valeurs propres peuvent être calculées explicitement, cependant, leurs formes étant compliquées, on ne les écrira pas ici (voir [13]). Le tableau 2.5 rassemble les premiers polynômes de Jack exprimés dans la base des superfonctions monomiales.

Tel que mentionné à la fin du chapitre 1, la connaissance des polynômes de Jack non symétriques permet une construction alternative directe des superpolynômes de Jack. En effet, il est clair qu'en multipliant un polynôme de Jack non symétrique par

TAB. 2.5 – Superpolynômes de Jack pour  $|\Lambda| < 3$  dans la base des superfonctions monomiales

Poids $ \Lambda $	Secteur $\bar{\Lambda}$	Superpartition $\Lambda$	Superpolynômes de Jack $J_\Lambda(z, \theta)$
0	1	(0; 0)	$m_{(0;0)}$
1	1	(0; 1)	$m_{(0;1)}$
		(1; 0)	$m_{(1;0)} + \frac{\beta}{1+\beta} m_{(0;1)}$
	2	(1, 0; 0)	$m_{(1,0;0)}$
2	1	(0; 1, 1)	$m_{(0;1,1)}$
		(1; 1)	$m_{(1;1)} + \frac{2\beta}{\beta+1} m_{(0;1,1)}$
		(0; 2)	$m_{(0;2)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(1;1)} + \frac{2\beta}{\beta+1} m_{(0;1,1)}$
		(2; 0)	$m_{(2;0)} + \frac{\beta}{\beta+2} m_{(0;2)} + \frac{2\beta}{\beta+2} m_{(1;1)} + \frac{2\beta^2}{(\beta+1)(\beta+2)} m_{(0;1,1)}$
	2	(1, 0; 1)	$m_{(1,0;1)}$
		(2, 0; 0)	$m_{(2,0;0)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(1,0;1)}$

un monôme de variables grassmanniennes de longueur  $\bar{\Lambda}$ , on peut symétriser à l'aide du coproduit diagonal du groupe symétrique  $\mathcal{K}_\sigma$  pour obtenir une base de  $\mathcal{P}^{S_N^{\text{diag}}}$ . En appliquant le processus de symétrisation, on obtient l'expression des superpolynômes de Jack en termes des polynômes de Jack non symétriques [13]

$$J_\Lambda(z, \theta; 1/\beta) = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{f_{\Lambda^s}} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \theta_1 \dots \theta_m E_{((\Lambda^a)^R, (\Lambda^s)^R)}(z; 1/\beta). \quad (2.56)$$

La composition  $(\lambda)^R$  est obtenue en écrivant  $\lambda$  dans l'ordre inverse et  $f_{\Lambda^s}$  est une constante donnée par

$$f_{\Lambda^s} = \prod_i m_i! \quad (2.57)$$

avec  $m_i$  la multiplicité de  $i$  dans  $\Lambda^s$ . On peut montrer que, pour toute superpartition  $\Lambda$ , cette construction mène exactement aux superpolynômes de Jack définis par (2.5) [13]. Ainsi, tel qu'annoncé à la fin du chapitre 1, la connaissance des polynômes de Jack non symétriques permet une construction directe des superpolynômes de Jack via une symétrisation appropriée.

Dans les sections précédentes, on a obtenu une généralisation supersymétrique des modèles Calogero-Moser-Sutherland. On a donc un modèle quantique et supersymétrique de  $N$  particules interagissant entre elles pour lequel on connaît toutes les solutions exactement. À présent, il est raisonnable de se demander s'il n'existe pas un système intégrable qui incorporerait également l'invariance relativiste. En effet, l'intérêt de trouver un tel modèle réside dans le fait que, désormais, il est entendu que

l'interaction entre particules élémentaires, spécialement à de hautes énergies, respecte toujours l'invariance relativiste. On s'attarde donc, au chapitre suivant, au modèle de Ruijsenaars-Schneider, une généralisation dite relativiste des modèles CMS. L'approche consistant à trouver une version supersymétrique de ce modèle d'une manière analogue à celle qui a permis d'obtenir le modèle *stCMS* est sans doute la plus prometteuse.

## Chapitre 3

# Le modèle de Ruijsenaars-Schneider (RS)

Le modèle Ruijsenaars-Schneider [44, 45] forme une généralisation à un paramètre des modèles CMS et en particulier du modèle tCMS étudié au chapitre 1. On dira qu'il s'agit d'une extension relativiste des modèles CMS puisque, entre autres, il intègre un opérateur de «boost» qui génère les transformations de Lorentz en plus du générateur des translations habituel. Ces deux opérateurs et l'hamiltonien réalisent ensemble l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré, le groupe de symétrie de l'espace de Minkowski. Ce modèle, formulé classiquement au départ, peut être quantifié. C'est ce processus de quantification ainsi que le modèle résultant dont on traitera principalement. Pour ce faire, il sera d'abord utile d'introduire brièvement les quantités associées au modèle RS classique. Dès lors, on procédera à la quantification, pour ensuite étudier la limite qui relie le modèle RS et les modèles CMS ainsi que leurs fonctions propres respectives. Dans cette optique, une section sera réservée à l'introduction des polynômes de Macdonald qui, comme on le verra, sont reliés aux fonctions propres du modèle RS.

### 3.1 Le modèle de RS classique

Classiquement, la dynamique des particules du modèle Ruijsenaars-Schneider est générée par les trois opérateurs  $H$ ,  $P$  et  $B$  :

$$H = mc^2 \sum_{i=1}^N \cosh \bar{\gamma}_i \prod_{j \neq i} f(\bar{q}_{ij}), \quad (3.1a)$$

$$P = mc \sum_{i=1}^N \sinh(\bar{\gamma}_i) \prod_{j \neq i} f(\bar{q}_{ij}), \quad (3.1b)$$

$$B = -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^N \bar{q}_i \quad (3.1c)$$

où  $\bar{\gamma}_i = \sinh^{-1}(p_i/mc)$  est la rapidité de la particule  $i$  et  $\bar{q}_i = mcx_i \cosh(\bar{\gamma}_i)$  est sa coordonnée canoniquement conjuguée.  $(\bar{q}_i, \bar{\gamma}_i)$  sont les coordonnées naturelles pour décrire la dynamique du système, cependant, on préférera réécrire le tout en termes de  $\gamma_i = mc\bar{\gamma}_i$  et  $q_i = \bar{q}_i/mc$ . De cette façon, les coordonnées  $(q_i, \gamma_i)$  ont respectivement les dimensions d'une position et d'une quantité de mouvement, ce qui rendra la limite non relativiste plus directe.  $f(mcq_{ij})$  est ici la fonction potentielle du système. Dans le cas de  $N$  particules relativistes libres, *i.e.*  $f(mcq_{ij}) = 1$ , on voit aisément que  $H$ ,  $P$  et  $B$  forment l'algèbre de Poincaré :

$$\{H, P\} = 0, \quad \{H, B\} = P, \quad \{P, B\} = H/c^2. \quad (3.2)$$

On peut montrer qu'afin de préserver l'invariance relativiste pour une fonction potentielle  $f(mcq_{ij})$  paire, la contrainte  $\{H, P\} = 0$  impose l'équation fonctionnelle [44]

$$\sum_{i=1}^N \partial_j \prod_{k \neq j} f^2(mcq_{ij}) = 0. \quad (3.3)$$

Cette équation est satisfaite pour tout  $N$  si  $f^2(mcq_{ij})$  a la forme suivante :

$$f^2(mcq_{ij}) = a + b \wp(mcq_{ij}|\omega_1, \omega_2) \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

On choisira les constantes  $a$  et  $b$  de façon à rendre le lien plus évident avec le modèle quantique,

$$f^2(mcq_{ij}) = \sigma^2(\mu)[\wp(\mu|\omega_1, \omega_2) - \wp(mcq_{ij}|\omega_1, \omega_2)] \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (3.5)$$

où la fonction  $\sigma$  de Weierstrass est définie par (1.8). De cette façon, les limites de  $\wp(mcq_{ij}|\omega_1, \omega_2)$  seront les cas particuliers rationnel (I), hyperbolique (II) et trigonométrique (III), comme dans le cas des modèles CMS. Dans ces cas,  $f(mcq_{ij})$  prend donc

les formes suivantes [27] :

$$f(mcq_{ij}) = \begin{cases} \text{I} & \left(1 - \frac{\mu^2}{(mcq_{ij})^2}\right)^{1/2} & \omega_1 = \infty, \omega_2 = i\infty, \\ \text{II} & \left(1 - \frac{\sinh^2 \nu \mu}{\sinh^2(\nu mcq_{ij})}\right)^{1/2} & \omega_1 = \infty, \omega_2 = i\pi/2\nu, \\ \text{III} & \left(1 - \frac{\sin^2 \nu \mu}{\sin^2(\nu mcq_{ij})}\right)^{1/2} & \omega_1 = \pi/2\nu, \omega_2 = i\infty. \end{cases} \quad (3.6)$$

Afin de prouver que ce système est intégrable, Ruijsenaars et Schneider introduisent  $2N$  quantités :

$$S_k = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=k}} \exp\left(\sum_{i \in I} \gamma_i/mc\right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} f(mcq_{ij}), \quad 1 \leq k \leq N, \quad (3.7a)$$

$$\text{et } S_{k-N} = S_k S_N^{-1}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \text{où } S_0 \equiv 1. \quad (3.7b)$$

La dernière relation montre qu'en fait, seules  $N$  des  $2N$  quantités sont indépendantes. Puisqu'on peut réécrire  $H$  et  $P$  en termes des  $S_k$  comme suit :

$$H = (S_1 + S_{-1})/2 \quad P = (S_1 - S_{-1})/2, \quad (3.8)$$

la preuve de l'intégrabilité repose sur l'involutivité des  $S_k$  *i.e.*,  $\{S_k, S_l\} = 0$ , ainsi que sur leur indépendance fonctionnelle. L'indépendance des  $S_k$  est une conséquence directe du fait qu'elles sont toutes de degrés différents dans les rapidités. L'involutivité, quant à elle, peut être prouvée en montrant que les  $S_k$  sont dépendantes d'un autre ensemble de quantités, les  $H_k$ , telles que  $H_k = \frac{1}{k} \text{Tr}(L^k)$ , où  $L$  est une matrice hermitique  $N \times N$ . Cette procédure revient en fait à utiliser la méthode de Lax [29], ce qui n'est pas l'approche privilégiée dans ce mémoire, conformément à ce qui a été mentionné précédemment. En fait, l'accent étant mis sur les systèmes intégrables quantiques, on montrera dans la prochaine section qu'il existe une quantification du modèle RS dont l'intégrabilité a comme corollaire l'intégrabilité du modèle classique.

## 3.2 Le modèle de RS quantique

On s'affaira maintenant à construire une quantification du modèle RS de telle sorte que l'invariance relativiste soit préservée et que les intégrales du mouvement quantifiées commutent entre elles. Afin d'obtenir un modèle quantique convenable, les opérateurs impliqués devront également être hermitiques. Suivant la procédure de quantification canonique, on fait les remplacements suivants (les quantités avec un accent circonflexe sont les quantités quantifiées) :

$$\gamma_j \rightarrow \hat{\gamma}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad \{, \} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [, ] \quad (3.9)$$



On introduit ensuite un ansatz pour la forme des quantités conservées quantiques [45],

$$\hat{S}_k = \sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ji})^{1/2} \exp \left( \sum_{i \in I} \hat{\gamma}_i / mc \right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ij})^{1/2} \quad (3.10)$$

où  $h(mcq_{ij})$  est une fonction méromorphe. On remarque que, dans la limite classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ), à partir des intégrales  $\hat{S}_k$  quantiques on retrouve les intégrales  $S_k$  classiques (3.7a), tel que requis. La factorisation de  $f(mcq_{ij})$  en  $h(mcq_{ij})^{1/2}$  et  $h(mcq_{ji})^{1/2}$ , permet de définir des  $\hat{S}_k$  hermitiques en prenant  $h(mcq_{ij}) = \overline{h(mcq_{ji})}$ . Pour conserver l'intégrabilité dans le passage vers le modèle quantique, il est impératif qu'il existe un  $h(mcq_{ij})$  tel que  $[\hat{S}_k, \hat{S}_l] = 0$ . On peut montrer que cette contrainte mène à l'équation fonctionnelle suivante pour  $h(mcq_{ij})$  [45] :

$$\sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \left( \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ji}) h(mcq_{ij} - i\hbar/mc) - \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ij}) h(mcq_{ji} - i\hbar/mc) \right) = 0 \quad (3.11)$$

$\forall N > 1, \quad \forall k \in \{1 \dots N\}.$

Également, il faut que la contrainte de commutativité soit équivalente à la contrainte d'involutivité dans la limite classique. Cela est en effet le cas, puisque  $\exp \left( \sum_{i \in I} \hat{\gamma}_i / mc \right)$  est le produit des générateurs de translation de tous les  $q_i$ . On pourra donc, dans la limite classique, réécrire (3.11) de la façon suivante :

$$\sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \left( \left( 1 - \frac{i\hbar}{mc} \sum_{i \in I} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) - \left( 1 + \frac{i\hbar}{mc} \sum_{i \in I} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ij}) h(mcq_{ji}). \quad (3.12)$$

Ainsi, au premier ordre en  $\hbar$ , (3.11) devient

$$\sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \left( \sum_{i \in I} \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} h(mcq_{ij}) h(mcq_{ji}) = 0. \quad (3.13)$$

En se restreignant à  $k = 1$  et en posant  $f^2(mcq_{ij}) = h(mcq_{ij})h(mcq_{ji})$ , on obtient directement l'équation fonctionnelle (3.3). Cela implique également que l'on doit avoir

$$h(mcq_{ij})h(mcq_{ji}) = a + b \wp(mcq_{ij} | \omega_1, \omega_2). \quad (3.14)$$

L'existence d'une quantification du modèle RS classique nécessite l'existence d'une fonction  $h(mcq_{ij})$  qui respecte la dernière relation ainsi que (3.11). On peut montrer que

$$h(mcq_{ij}) = \frac{\sigma(mcq_{ij} + \mu)}{\sigma(mcq_{ij})} \quad \mu \in \mathbb{C} \quad (3.15)$$

satisfait ces conditions. En fait, avec la relation

$$\frac{\sigma(x+\mu)\sigma(x-\mu)}{\sigma^2(x)\sigma^2(\mu)} = \wp(\mu|\omega_1, \omega_2) - \wp(x|\omega_1, \omega_2), \quad (3.16)$$

(3.15) et  $f^2(mcq_{ij}) = h(mcq_{ij})h(mcq_{ji})$ , on retrouve immédiatement (3.5). De plus, on choisit  $\mu$  purement imaginaire ( $\mu \rightarrow i|\mu| \equiv ig$ ), ce qui implique que  $h(mcq_{ij}) = \overline{h(mcq_{ji})}$  puisque la fonction  $\sigma$  est impaire.

Exactement comme dans le cas classique, on peut maintenant écrire  $\hat{H}$  et  $\hat{P}$  en termes des intégrales du mouvement  $\hat{S}_k$  :

$$\hat{H} = \frac{mc^2}{2}(\hat{S}_1 + \hat{S}_{-1}), \quad \hat{P} = \frac{mc}{2}(\hat{S}_1 - \hat{S}_{-1}), \quad (3.17)$$

tandis que  $\hat{B}$  s'écrit de la même façon qu'auparavant, c'est-à-dire  $\hat{B} = -m \sum_{i=1}^N q_i$ . Avec le choix de  $\mu$  imaginaire, il est clair que ces opérateurs sont hermitiques, puisque les  $\hat{S}_k$  le sont. De plus, ils forment toujours l'algèbre de Poincaré, mais où le crochet de Poisson est remplacé par le commutateur. Puisque l'indépendance fonctionnelle des  $\hat{S}_k$  suit d'un argument identique à celui du cas classique, on a donc démontré l'intégrabilité du modèle RS quantique.

Si dans la limite classique toutes les quantités quantiques se ramènent aux quantités classiques, l'intégrabilité classique sera un corollaire de l'intégrabilité quantique. Puisque de (3.11) on obtient (3.3) et que  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hat{S}_k = S_k$ , il est clair que  $\hat{H}, \hat{P}, \hat{B} \rightarrow H, P, B$ , et qu'ainsi l'intégrabilité du modèle RS classique est prouvée. Il s'agit du résultat annoncé à la fin de la section précédente.

### 3.3 Le modèle RS quantique trigonométrique (tRS)

On spécialisera maintenant les résultats de la section précédente au cas trigonométrique. De cette façon, il sera possible de faire le lien avec le modèle tCMS et d'étudier les fonctions propres qui seront liées à une généralisation des polynômes de Jack, les polynômes de Macdonald.

Dans le cas trigonométrique, la fonction  $h(mcq_{ij})$  prend la forme suivante

$$\lim_{\substack{\omega_1 = \pi/2\nu \\ \omega_2 = i\infty}} (h(mcq_{ij})) = \frac{\sin \nu(q_{ij} + ig/mc)}{\sin \nu q_{ij}}, \quad (3.18)$$

où on a utilisé la propriété suivante de la fonction  $\sigma$

$$\sigma(\alpha x|\omega_1, \omega_2) = \alpha \sigma(x|\omega_1/\alpha, \omega_2/\alpha). \quad (3.19)$$

Ainsi, l'hamiltonien est donné via (3.17) et (3.10) par

$$\hat{H}_{trig} = \frac{mc^2}{2} \sum_{i=1}^N \left( \bar{W}_i(q_{ij}) \exp\left(\frac{\hat{\gamma}_i}{mc}\right) W_i(q_{ij}) + W_i(q_{ij}) \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}_i}{mc}\right) \bar{W}_i(q_{ij}) \right), \quad (3.20a)$$

$$\text{où } W_i(q_{ij}) \equiv \prod_{j \neq i} \left( \frac{\sin \nu(q_{ij} + ig/mc)}{\sin \nu q_{ij}} \right)^{1/2}. \quad (3.20b)$$

### 3.3.1 La limite non relativiste

On veut faire le lien entre le modèle tRS et le modèle tCMS. Ces deux modèles doivent être équivalents dans la limite  $c \rightarrow \infty$ , la limite non relativiste. On obtiendra cette correspondance en prenant la série de Taylor des exponentielles et de  $W(q_{ij})$  et en prenant soin de soustraire la contribution de l'énergie de masse des particules,  $Nmc^2$ . De façon à simplifier le calcul, on va commuter l'exponentielle du premier terme à droite et celle du deuxième à gauche. Ainsi, l'hamiltonien pourra être écrit en termes des deux développements en séries suivants :

$$\exp\left(\pm \frac{\hat{\gamma}_i}{mc}\right) \simeq 1 \pm \frac{\hat{\gamma}_i}{mc} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\hat{\gamma}_i}{mc}\right)^2 + \dots \quad (3.21)$$

$$W_i(q_{ij} - i\hbar/mc) \bar{W}_i(q_{ij}) \simeq \prod_{j \neq i} \left( 1 + \frac{g(g - \hbar)}{2m^2 c^2} \frac{\nu^2}{\sin^2(\nu q_{ij})} + \dots \right), \quad (3.22)$$

où les relations (1.8) ont été utilisées pour parvenir au deuxième développement. Lorsque l'on multiplie ces séries pour obtenir le terme à l'intérieur de la somme de (3.20a), les termes d'ordre  $c^{-1}$  s'annulent et il ne reste que des termes d'ordre  $c^0$  et  $c^{-2}$ . Enfin, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} (\hat{H}_{trig} - Nmc^2) &= \frac{mc^2}{2} \sum_{i=1}^N \left( 2 + \left(\frac{\hat{\gamma}_i}{mc}\right)^2 + \sum_{j \neq i} \frac{g(g - \hbar)}{m^2 c^2} \frac{\nu^2}{\sin^2(\nu q_{ij})} \right) - Nmc^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{g(g - \hbar)}{m} \sum_{j > i} \frac{\nu^2}{\sin^2(\nu q_{ij})}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le facteur  $\nu$  a les dimensions inverses d'une longueur, on le choisira égal à  $\pi/L$ . On remarque que la constante de couplage  $\beta$  a des dimensions d'énergie si  $g$  a les dimensions d'une action et que ses valeurs sont contraintes par  $\beta \geq -\hbar^2/4m$ , la même contrainte que l'on avait imposée dans notre traitement du modèle tCMS (voir section 1.2.1). Si on choisit les unités telles que  $\hbar = m = 1$ , on trouve

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (\hat{H}_{trig} - Nmc^2) = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{g(g - 1)\pi^2}{L^2} \sum_{j > i} \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{L}(q_{ij}))}, \quad (3.24)$$

ce qui est exactement l'hamiltonien du modèle tCMS tel que donné à l'équation (1.9).

À l'aide des mêmes développements en séries (3.21), on peut facilement montrer que  $\hat{P}$  a pour limite non relativiste l'opérateur  $P$  du modèle tCMS. Seuls les termes d'ordre  $c^{-1}$  contribuent à la limite et on a directement

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \hat{P} = -i\hbar \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad (3.25)$$

ce qui est bien le générateur de translation usuel. Quant à lui, l'opérateur  $\hat{B}$  n'est bien entendu défini que dans un contexte de mécanique relativiste.

Ayant maintenant bien établi le lien entre les modèles CMS et RS trigonométriques, on s'intéressera aux fonctions propres de ce dernier modèle. On doit s'attendre à ce que les fonctions propres du modèle tRS généralisent les polynômes de Jack et qu'elles soient liées à ceux-ci dans la même limite que les hamiltoniens.

## 3.4 Les fonctions propres du modèle tRS

Comme dans le cas du modèle tCMS, la façon la plus directe de trouver les fonctions propres de l'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{trig}}$  (3.20a) est de le transformer de façon à l'écrire en termes d'opérateurs dont les fonctions propres sont connues. C'est de cette façon qu'on pourra montrer que les fonctions propres du modèles tRS sont reliées à des fonctions symétriques bien connues, les polynômes de Macdonald. On s'attardera d'abord à la définition des polynômes de Macdonald ainsi qu'à quelques-unes de leurs propriétés qui seront utiles.

### 3.4.1 Les polynômes de Macdonald

Les polynômes de Macdonald sont des fonctions symétriques qui dépendent rationnellement de deux paramètres. Ils sont introduits et étudiés en détails dans [33]. On se contentera ici d'une description sommaire de leurs propriétés.

Les polynômes de Macdonald, notés  $P_\lambda(p, t)$ , appartiennent à l'espace  $\mathbb{Q}(p, t)[z_1, \dots, z_N]^{S_N}$  des polynômes symétriques en  $N$  variables dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de  $p$  et de  $t$ . Ils sont définis comme étant les seuls polynômes symétriques

linéairement indépendants qui possèdent les propriétés suivantes :

$$P_\lambda(p, t) = m_\lambda + \sum_{\mu \leq \lambda} v_{\lambda\mu}(p, t) m_\mu \quad (\text{triangularité}) \quad (3.26a)$$

$$\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{p,t} = 0 \quad \text{si } \lambda \neq \mu \quad (\text{orthogonalité}). \quad (3.26b)$$

Ici,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p,t}$  est un produit scalaire défini de telle sorte que les sommes de puissances soient orthogonales

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{p,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - p^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}. \quad (3.27)$$

Avec le produit scalaire ainsi défini, on remarque que, dans la limite  $p = t$ , on retrouve le produit scalaire (1.44). Puisque les fonctions de Schur se décomposent de façon triangulaire dans la base des monômes, les polynômes de Macdonald se ramènent donc aux fonctions de Schur dans la limite  $p = t$ . Également, si on pose  $p = t^\alpha$  et qu'on prend la limite  $t \rightarrow 1$ , on obtient

$$\frac{1 - t^{\alpha\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}} \rightarrow \alpha \quad \text{pour } \lambda_i \geq 1. \quad (3.28)$$

Dans cette limite on retrouve donc le produit scalaire (1.48). Ainsi, les polynômes de Macdonald ont comme limite les polynômes de Jack lorsqu'on pose  $p = t^\alpha$  et qu'on fait tendre  $t \rightarrow 1$ .

Les polynômes de Macdonald sont les fonctions propres simultanées d'un ensemble d'opérateurs

$$D_N^r = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ \#I=r}} t^{r(r-1)/2} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j} \prod_{i \in I} \tau_{p, z_i}, \quad 1 \leq r \leq N, \quad (3.29)$$

les opérateurs de Macdonald. Dans l'expression précédente,  $\tau_{p, z_i}$  est l'opérateur de dilatation dont l'action est de multiplier la variable  $z_i$  par  $p$

$$\tau_{p, z_i} f(z_1, \dots, z_N) = f(z_1, \dots, pz_i, \dots, z_N). \quad (3.30)$$

Ainsi, s'il est possible de réécrire l'hamiltonien tRS en termes des opérateurs de Macdonald, on pourra déterminer que les solutions sont proportionnelles aux polynômes de Macdonald.

### 3.4.2 Le modèle tRS et les polynômes de Macdonald

Afin d'obtenir les fonctions propres du modèle tRS et d'établir le lien entre celles-ci et les polynômes de Macdonald, on considère d'abord les intégrales du mouvement

quantiques  $\hat{S}_k$  dans le cas trigonométrique, *i.e.*

$$\hat{S}_k = \sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \left( \frac{\sin \nu(q_{ij} - ig/mc)}{\sin \nu q_{ij}} \right)^{1/2} \exp \left( \sum_{i \in I} \hat{\gamma}_i/mc \right) \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \left( \frac{\sin \nu(q_{ij} + ig/mc)}{\sin \nu q_{ij}} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

Si on effectue les changements de paramètres  $p = e^{-2\nu/mc}$ ,  $t = p^g$  et le changement de variables  $z_j = e^{2\nu i q_j}$  pour ensuite conjuguer le résultat précédent avec

$$\Delta = \prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{(z_j/z_k; p)_\infty}{(tz_j/z_k; p)_\infty}, \quad (3.32)$$

où  $(a; q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i)$ , on obtient alors [26]

$$\hat{S}'_k = \Delta^{-1/2} \hat{S}_k \Delta^{1/2} = t^{k(k-N)/2} \sum_{\substack{I \subset \{1 \dots N\} \\ \#I=k}} \prod_{\substack{i \in I \\ j \notin I}} \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j} \prod_{i \in I} \tau_{p, z_i}. \quad (3.33)$$

Ainsi, on pourra réécrire les intégrales du mouvement  $\hat{S}'_k$  en fonction des opérateurs de Macdonald comme suit

$$\hat{S}'_k = t^{-k(N-1)/2} D_N^k(p, t). \quad (3.34)$$

L'hamiltonien du modèle RS quantique s'écrivant en termes des  $\hat{S}_k$ , l'hamiltonien conjugué  $H'_{RS}$  s'écrira en termes des opérateurs de Macdonald également. Après réarrangement, on trouve

$$H'_{RS} = \Delta^{-1/2} H_{RS} \Delta^{1/2} = mc^2 t^{-(N-1)/2} D_N^1(p, t). \quad (3.35)$$

Comme les opérateurs de Macdonald sont simultanément diagonalisés par les polynômes de Macdonald  $P_\lambda(p, t)$ , on aura

$$H'_{RS} P_\lambda(p, t) = mc^2 t^{-(N-1)/2} \epsilon_\lambda(p, t) P_\lambda(p, t), \quad (3.36)$$

où la valeur propre  $\epsilon_\lambda(p, t)$  peut être trouvée dans [33]. Enfin, puisque l'hamiltonien tRS, comme dans le cas tCMS, peut être réécrit en termes d'un opérateur dont les fonctions propres sont connues grâce à la théorie des fonctions symétriques, toutes les solutions du modèle sont désormais connues.

Dès lors, le modèle tRS est complètement résolu et on sait que ses solutions s'écrivent en termes de généralisations des solutions du modèle tCMS. Il y a donc lieu de se demander s'il existe également une extension supersymétrique au modèle tRS comme c'est le cas pour le modèle tCMS. L'exploration de cette possibilité est le sujet du dernier chapitre. Ce chapitre forme le coeur du travail qui a été entrepris.



# Chapitre 4

## Le modèle de Ruijsenaars-Schneider supersymétrique (stRS)

On présentera, au cours de ce chapitre, les progrès vers l'obtention d'une version supersymétrique du modèle de Ruijsenaars-Schneider ainsi que les obstacles qui ont empêché de résoudre complètement ce problème complexe. On commencera par discuter de l'approche qui consiste à obtenir des charges supersymétriques nilpotentes pour le modèle RS, une démarche analogue à celle employée au chapitre 2. On verra pourquoi cette démarche n'a pas connu de succès pour ensuite explorer la seconde approche de supersymétrisation, celle faisant intervenir la théorie des polynômes non symétriques. On introduira une méthode pour obtenir les superpolynômes de Macdonald moyennant la connaissance du coproduit de l'algèbre de Hecke. Un tel coproduit n'étant pas connu pour un nombre arbitraire d'éléments, on étudiera les cas à deux et trois variables du modèle de Ruijsenaars-Schneider supersymétrique.

### 4.1 L'approche usuelle de supersymétrisation

Au chapitre 2, on a obtenu une version supersymétrique du modèle tCMS en supposant l'existence de charges supersymétriques de la forme

$$Q = \sum_{i=1}^N \theta_i^\dagger A_i(x, p) \quad Q^\dagger = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i^\dagger(x, p), \quad (4.1)$$

et en termes desquelles l'hamiltonien CMS s'écrit

$$\mathcal{H} = \{Q, Q^\dagger\}. \quad (4.2)$$

On cherchera donc à écrire l'hamiltonien RS quantique sous une forme semi-positive. Si on définit les opérateurs

$$A_i = W_i(q_{ij})\exp(\gamma_i/2mc) - \bar{W}_i(q_{ij})\exp(-\gamma_i/2mc) \quad (4.3a)$$

$$A_i^\dagger = \exp(-\gamma_i/2mc)\bar{W}_i(q_{ij}) - \exp(\gamma_i/2mc)W_i(q_{ij}), \quad (4.3b)$$

où  $W_i(q_{ij})$  est définie à la section 3.3.1, on pourra écrire l'hamiltonien RS sous une forme semi-positive

$$\hat{H}_{trig} = \frac{mc^2}{2} \left( \sum_{i=1}^N A_i A_i^\dagger + 2 \cosh(g/mc) \right). \quad (4.4)$$

Pour pouvoir procéder comme dans le cas du modèle tCMS, il faut que les charges supersymétriques soient nilpotentes, ce qui requiert

$$[A_i, A_j] = [A_i^\dagger, A_j^\dagger] = 0. \quad (4.5)$$

Malheureusement, comme on peut le vérifier, les opérateurs définis par (4.3) ne respectent pas cette propriété. Il faut donc se tourner vers une autre approche de supersymétrisation du modèle de Ruijsenaars-Schneider. La prochaine section explore une possibilité faisant intervenir les notions qui ont été vues dans les chapitres précédents sur les polynômes non symétriques. Cette approche vise à obtenir une version supersymétrique de l'hamiltonien RS à l'aide de la supersymétrisation des polynômes de Macdonald non symétriques, tel que suggéré dans [18].

## 4.2 L'approche par symétrisation des polynômes non symétriques

Afin de supersymétriser le modèle de Ruijsenaars-Schneider, on cherchera à utiliser le fait qu'on connaît les solutions de ce dernier, les polynômes de Macdonald, et qu'on connaît les polynômes de Macdonald non symétriques [8]. En effet, comme pour les superpolynômes de Jack, un processus de symétrisation approprié permettrait, en principe, de construire les superpolynômes de Macdonald. Cette symétrisation ne s'effectue pas à l'aide des éléments du groupe symétrique, mais plutôt à l'aide des éléments de l'algèbre de Hecke, une généralisation à un paramètre de  $S_N$ . Les axiomes définissant l'algèbre de Hecke sont les suivants :

$$T_{\sigma_i}^2 = \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) T_{\sigma_i} \quad (\text{Générateur au carré}) \quad (4.6a)$$

$$T_{\sigma_i} T_{\sigma_j} T_{\sigma_i} = T_{\sigma_j} T_{\sigma_i} T_{\sigma_j} \quad (\text{Relation d'entrelacement}) \quad (4.6b)$$

$$T_{\sigma_i} T_{\sigma_j} = T_{\sigma_j} T_{\sigma_i} \quad \text{si } |i - j| \geq 2 \quad (\text{Commutativité}). \quad (4.6c)$$



Ici,  $T_{\sigma_i}$  est un générateur de l'algèbre de Hecke, lequel correspond au générateur  $\sigma_i$  du groupe symétrique (dont la réalisation est l'opérateur d'échange  $K_{i+1}$ ). Il est également clair que dans la limite  $t \rightarrow 1$ , ces axiomes définissent le groupe symétrique. Ainsi, la généralisation de la relation (2.56) pour les polynômes de Jack fera intervenir les polynômes de Macdonald non symétriques  $F_\lambda(z; p, t)$  ainsi que les éléments de l'algèbre de Hecke  $T_\omega$ . On a donc [34]

$$P_\lambda(z; p, t) \propto \sum_{\omega \in S_N} T_\omega F_\lambda(z; p, t). \quad (4.7)$$

Les polynômes de Macdonald non symétriques sont définis comme les fonctions propres simultanées des opérateurs de Cherednik. Ceux-ci sont définis par [4]

$$\begin{aligned} Y_i &= t^{1-i} T_{\sigma_i} \dots T_{\sigma_{N-1}} \omega T_{\sigma_1}^{-1} \dots T_{\sigma_{i-1}}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \omega &\equiv \sigma_{N-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 \tau_{p, z_1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Explicitement, on a [37]

$$Y_i F_\alpha(z; p, t) = \epsilon_i^\alpha F_\alpha(z; q, t), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.9a)$$

$$F_\alpha(z; p, t) = z^\alpha + \sum_{\gamma < \alpha} c_{\alpha\gamma}(p, t) z^\gamma, \quad (4.9b)$$

où  $\alpha$  est une composition et où l'ordre considéré est l'ordre de Bruhat (voir section 1.3.4).

Pour passer au cas supersymétrique, on supposera une relation semblable faisant cette fois intervenir la représentation coproduit de l'algèbre de Hecke<sup>1</sup>. Il s'agit d'une représentation dans laquelle deux copies de l'algèbre de Hecke agissent simultanément sur deux sous-espaces, dans le cas présent, l'espace des variables commutatives et l'espace des variables grassmanniennes. Toutefois, ce coproduit doit être la généralisation de  $\mathcal{K}_{\sigma_i}$ , le coproduit diagonal du groupe symétrique (voir section 2.2.1). Le coproduit  $\mathbb{T}_{\sigma_i}$  doit donc respecter  $\lim_{t \rightarrow 1} \mathbb{T}_{\sigma_i} = \sigma_i \otimes \sigma_i$ .

On définira les superpolynômes de Macdonald en utilisant la relation analogue dans le cas des superpolynômes de Jack (2.56), mais où la symétrisation se fait à l'aide du coproduit de l'algèbre de Hecke :

$$P_\Lambda(z, \theta; p, t) \propto \sum_{\omega \in S_N} \mathbb{T}_\omega \theta_i \dots \theta_m F_{((\Lambda^\alpha)^R, (\Lambda^s)^R)}(z; p, t). \quad (4.10)$$

<sup>1</sup>La validité de cette hypothèse demeure à prouver. Cependant, elle s'inscrit dans le cadre de l'hypothèse générale de ce travail, c'est-à-dire que le lien entre le modèle tRS et stRS est analogue à celui existant entre les modèles tCMS et stCMS. Comme une telle relation existe pour les superpolynômes de Jack [13], on suppose qu'elle existe également dans notre cas.

De façon générale, les éléments de l'algèbre, dans la représentation coproduit, pourront s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de produits directs des éléments de l'algèbre de Hecke usuelle. En définissant  $(T_{\omega_i} \otimes T_{\omega_j})(T_{\omega_k} \otimes T_{\omega_l}) = T_{\omega_i}T_{\omega_k} \otimes T_{\omega_j}T_{\omega_l}$  on peut définir le produit de deux éléments dans cette représentation simplement à partir des axiomes de l'algèbre (4.6). Ainsi, lorsqu'on recherche une représentation coproduit, on peut supposer que les générateurs sont donnés par une combinaison linéaire générale

$$\mathbb{T}_{\sigma_i} = \sum_{\omega_j, \omega_k \in S_N} a_{ijk} T_{\omega_j} \otimes T_{\omega_k}. \quad (4.11)$$

Cependant, puisqu'il doit s'agir d'une représentation de l'algèbre de Hecke, si on substitue cet ansatz dans les axiomes (4.6), on trouve un système d'équations pour les coefficients  $a_{ijk}$ . Bien sûr, il existera, en général, de nombreuses solutions à un tel système d'équations. Cependant, comme mentionné précédemment, on recherche ici un coproduit de l'algèbre de Hecke qui, dans la limite où  $t \rightarrow 1$ , redonne le coproduit du groupe symétrique. Ainsi, les générateurs  $\mathbb{T}_{\sigma_i}$  doivent avoir pour limite  $\sigma_i \otimes \sigma_i$ . Il est clair que cette restriction s'applique de telle sorte que le modèle ainsi trouvé soit bien une généralisation du modèle stCMS.

Dans les faits, un tel système d'équations devient très rapidement difficile à résoudre. En effet, l'augmentation du nombre de variables ( $N$ ) entraîne la croissance du nombre de générateurs ( $N - 1$ ) et du nombre d'éléments ( $N!$ ). Cela augmente dramatiquement le nombre d'équations et d'inconnues, si bien qu'un tel coproduit n'est toujours pas connu pour tout  $N$ . Ainsi, on débutera par l'étude du cas  $N = 2$ .

### 4.2.1 Le modèle stRS à deux variables

Dans ce cas restreint, il n'y a que deux éléments dans l'algèbre, l'identité et un seul générateur,  $T_{\sigma_1}$ . L'ansatz du coproduit le plus général pour  $N = 2$  est donné par

$$\mathbb{T}_{\sigma_1} = a_{122} T_{\sigma_1} \otimes T_{\sigma_1} + a_{121} T_{\sigma_1} \otimes \mathbb{I} + a_{112} \mathbb{I} \otimes T_{\sigma_1} + a_{111} \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}, \quad (4.12)$$

où  $\mathbb{I}$  est l'identité, ou élément neutre, et où l'algèbre de Hecke comprend uniquement les éléments  $\{\mathbb{I}, T_{\sigma_1}\}$ . En remplaçant cette expression dans les axiomes de l'algèbre de

Hecke, on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 a_{111}^2 + \frac{a_{112}^2}{t} + \frac{a_{121}^2}{t} + \frac{a_{122}^2}{t^2} &= \frac{1}{t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) a_{111} \\
 a_{122}^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right)^2 + 2a_{111}a_{122} + 2a_{112}a_{121} + 2a_{122}(a_{112} + a_{121}) \left(1 - \frac{1}{t}\right) &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) a_{122} \\
 a_{112}^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{a_{122}^2}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right) + 2a_{111}a_{112} + \frac{2}{t}a_{121}a_{122} &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) a_{112} \\
 a_{121}^2 \left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{a_{122}^2}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right) + 2a_{111}a_{121} + \frac{2}{t}a_{112}a_{122} &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) a_{121}. \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Comme il s'agit de quatre équations du deuxième degré dans les coefficients, on obtient seize solutions. On voit immédiatement que les deux dernières équations sont identiques si  $a_{112} = a_{121}$ . Ainsi, il ne nous reste que 3 équations distinctes en présupposant cette dernière égalité. En fait, on prendra désormais pour acquis que  $a_{ijk}$  est symétrique sous l'échange des deux derniers indices. Malgré cette simplification, il reste encore plusieurs solutions. Cependant, une seule solution a pour limite, lorsque  $t \rightarrow 1$ , le coproduit de l'algèbre du groupe symétrique,  $\sigma_1 \otimes \sigma_1$ . Cette solution est donnée par

$$\mathbb{T}_{\sigma_1} = \frac{1}{1+t} (2tT_{\sigma_1} \otimes T_{\sigma_1} - (t-1)T_{\sigma_1} \otimes \mathbb{I} - (t-1)\mathbb{I} \otimes T_{\sigma_1} + (t-1)\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}). \quad (4.14)$$

On considérera donc deux réalisations concrètes (différentielles) de l'algèbre de Hecke, une agissant sur les variables  $z_i$  et une autres agissant sur les variables  $\theta_i$ . Dans ces réalisations, les générateurs sont donnés par

$$\begin{aligned}
 T_{z_i} &= 1 + \frac{1}{t} \left( \frac{tz_i - z_{i+1}}{z_i - z_{i+1}} \right) (K_{i,i+1} - 1), \\
 T_{\theta_i} &= 1 - \left( \theta_i - \frac{\theta_{i+1}}{t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} - \frac{\partial}{\partial \theta_{i+1}} \right). \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Les opérateurs  $T_{z_i}$  sont généralement nommés opérateurs de Demazure-Luzstig dans les références scientifiques [34, 37]. On peut facilement montrer que ces opérateurs respectent bien les axiomes de l'algèbre de Hecke (4.6). De plus, dans la limite  $t \rightarrow 1$ , ils deviennent respectivement  $K_{i,i+1}$  et  $\kappa_{i,i+1}$ , les réalisations du groupe symétrique considérées précédemment. En termes de ces opérateurs, le coproduit de l'algèbre de Hecke (4.14) est représenté de façon concrète dans le superespace de la façon suivante :

$$\mathbb{T}_1 = \frac{1}{1+t} (2tT_{z_1} \otimes T_{\theta_1} - (t-1)T_{z_1} \otimes 1 - (t-1)1 \otimes T_{\theta_1} + (t-1)1 \otimes 1). \quad (4.16)$$

Maintenant que le coproduit a été obtenu, il est, en principe, possible d'obtenir les solutions du modèle Ruijsenaars-Schneider supersymétrique à deux variables, en

présument qu'il s'agisse bien des superpolynômes de Macdonald définis par (4.10). Si cette hypothèse est correcte, on devrait pouvoir construire l'hamiltonien du modèle supersymétrique de telle sorte qu'il s'agisse d'une extension de l'hamiltonien tRS connu. En effet, l'hamiltonien tRS peut s'écrire en termes des opérateurs de Macdonald (voir 3.4.2), et ceux-ci peuvent s'écrire en termes des opérateurs de Cherednik de la façon suivante [4]<sup>2</sup>

$$D_N^1 = \Pi_K \left( t \sum_{i=1}^N Y_i \right). \quad (4.17)$$

Dans le cas où  $N = 2$ , on a, plus précisément,

$$\mathcal{H}_{\text{tRS}} \propto \Pi_K (t(Y_1 + Y_2)) = D_2^1 \quad (4.18a)$$

$$\text{où } Y_1 = T_{z_1} \tau_{p,z_2} K_{12} \quad \text{et} \quad Y_2 = \frac{\tau_{p,z_2}}{t} K_{12} (1 - t + tT_{z_1}). \quad (4.18b)$$

Dans la dernière expression, on a utilisé la relation  $T_{z_i}^{-1} = (1 - t + tT_{z_i})$ . On utilisera cette formulation de l'hamiltonien comme point de départ et on restreindra son action aux fonctions invariantes sous l'action du coproduit  $\mathbb{T}_1$ .

Si on impose qu'une fonction  $f$  appartienne à  $V$ , où  $V$  est l'espace des fonctions invariantes sous l'action du coproduit, *i.e.*  $\mathbb{T}f = f$ , on trouve directement que  $f$  doit respecter

$$\mathbb{I} \otimes Tf = T \otimes \mathbb{I}f \quad \leftrightarrow \quad T_{z_1}f = T_{\theta_1}f. \quad (4.19)$$

On impose donc que l'action des deux générateurs soit la même sur une fonction  $f \in V$  et on obtient une identification pour l'action de l'opérateur d'échange sur une fonction appartenant à  $V$  :

$$K_{12}f = \left( 1 + t \frac{z_1 - z_2}{tz_1 - z_2} (T_{\theta_1} - 1) \right) f. \quad (4.20)$$

On sait que l'on peut réécrire l'hamiltonien tRS en termes des opérateurs de Dunkl lorsqu'on se limite à l'espace des fonctions invariantes sous l'action du groupe symétrique. De la même façon, on écrira l'hamiltonien stRS ( $N = 2$ ) en termes des opérateurs de Dunkl et de l'identification obtenue pour  $K_{12}$  en se limitant cette fois à l'espace  $V$ . On a

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1|_V &= \left( \frac{tz_1 - z_2}{z_1 - z_2} \right) \tau_{p,z_1} + \left( \frac{z_1 - tz_2}{z_1 - z_2} \right) \tau_{p,z_2} \\ &\quad - \frac{t(t-1)(p-1)z_1z_2}{(tz_1 - pz_2)(z_1 - z_2)} \tau_{p,z_2} \left( \theta_1 - \frac{\theta_2}{t} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} - \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

<sup>2</sup>L'approche qui est décrite ici pour obtenir l'extension supersymétrique de l'hamiltonien tRS ( $N = 2$ ) est principalement tirée de [18].

On voit qu'il s'agit de l'opérateur de Macdonald  $D_2^1$  auquel est ajouté un terme comprenant des variables fermioniques. Il s'agit là du premier critère à respecter pour l'extension supersymétrique de l'hamiltonien RS, c'est-à-dire que dans la limite  $\theta_i \rightarrow 0$ , on doit retrouver  $H_{RS}$ .

Pour vérifier si cet hamiltonien est vraiment l'hamiltonien sRS ( $N = 2$ ), il faut aussi qu'en posant  $p = t^{1/\beta}$ , puis en prenant la limite  $t \rightarrow 1$ , on obtienne l'hamiltonien stCMS. Cela est essentiel, car cette limite est celle qui relie les polynômes de Macdonald et les polynômes de Jack.

Pour prendre la limite de (4.21), on ne garde que les termes au plus d'ordre  $(t-1)^2$  et on utilise la représentation différentielle des opérateurs  $\tau_{p,z_i}$ , i.e. :

$$\tau_{p,z_i} = e^{(p-1)z_i\partial_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p-1)^n}{n!} z_i^n \partial_i^n \quad (4.22)$$

$$\text{où } p = t^{1/\beta} \simeq 1 + \frac{(t-1)}{\beta} + \frac{(t-1)^2}{2\beta} \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (4.23)$$

$$\text{donc } \tau_{p,z_i} \simeq 1 + \frac{(t-1)}{\beta} z_i \partial_i + \frac{(t-1)^2}{2\beta^2} ((1-\beta)z_i \partial_i + z_i^2 \partial_i^2). \quad (4.24)$$

En utilisant ces développements en série autour de  $t = 1$ , on pourra premièrement prendre la limite de l'hamiltonien RS ( $N = 2$ ), i.e. du terme sans variables fermioniques dans  $\tilde{M}_1|_V$ . On trouve

$$\lim_{t \rightarrow 1} (M_1|_{S_N}(p = t^{1/\beta})) = 2 + \frac{(t-1)}{\beta} (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + \beta) + \frac{(t-1)^2}{2\beta^2} H$$

$$\text{où } H \equiv \left( \frac{2\beta}{z_{12}} (z_1^2 \partial_1 - z_2^2 \partial_2) + z_1^2 \partial_1^2 + z_2^2 \partial_2^2 + (1-\beta)(z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2) \right). \quad (4.25)$$

En manipulant le résultat précédent, on peut réécrire  $H$  de la façon suivante

$$H = (z_1 \partial_{z_1})^2 + (z_2 \partial_{z_2})^2 + \beta \frac{z_1 + z_2}{z_{12}} (z_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_2}). \quad (4.26)$$

Comme il se doit, cette expression est exactement celle de l'hamiltonien  $H'$  du modèle tCMS (1.15).

En ce qui concerne le terme contenant les variables fermioniques de  $\tilde{M}_1|_V$ , on voit immédiatement que le numérateur est d'ordre  $(t-1)^2$ , la limite est donc directe et on obtient, finalement,

$$\lim_{t \rightarrow 1} (\tilde{M}_1|_V(p = t^{1/\beta})) = 2 + \frac{(t-1)}{\beta} (z_1 \partial_1 + z_2 \partial_2 + \beta) +$$

$$\frac{(t-1)^2}{2\beta^2} \left( (z_1 \partial_{z_1})^2 + (z_2 \partial_{z_2})^2 + \beta \frac{z_1 + z_2}{z_{12}} (z_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{z_2}) - 2\beta \frac{z_1 z_2}{(z_1 - z_2)^2} (1 - \kappa_{12}) \right). \quad (4.27)$$



Encore une fois, on voit bien que la limite de  $\tilde{M}_1|_V$ , à l'ordre  $(t-1)^2$ , redonne bien l'hamiltonien stCMS (2.24) pour  $N=2$ . La limite reliant les deux modèles est donc celle attendue.

Ensuite, puisqu'il s'agit de l'hamiltonien d'un système intégrable supersymétrique à deux corps, on doit également obtenir quatre quantités bosoniques conservées. Il y a bien sûr l'hamiltonien lui-même et  $\tau_{p,z_1}\tau_{p,z_2}$  puisque l'hamiltonien est une fonction rationnelle homogène des  $z_i$ . Il devrait y avoir aussi deux quantités conservées non triviales contenant des variables fermioniques et qui sont spécifiques au modèle supersymétrique. L'existence de ces quatre quantités garantirait l'intégrabilité de ce modèle supersymétrique pour  $N=2$  variables, qu'il soit ou non la bonne extension du modèle de Ruijsenaars-Schneider. Malheureusement, ces deux quantités conservées qui seraient, en principe, des généralisations des quantités conservées  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  du modèle stCMS n'ont pas été trouvées. Au cours de la recherche de ces quantités, la principale hypothèse était la présence d'un facteur  $\tau_{p,z_i}^\alpha$  en plus du facteur  $\theta_i\theta_j^\dagger$ . Divers tests ont été effectués au moyen du logiciel *MAPLE*, sans succès jusqu'à présent.

### 4.3 Le modèle stRS à trois variables

Malgré le fait que l'approche empruntée pour le cas  $N=2$  ne permette pas d'arriver à un modèle qui soit, de façon certaine, la bonne extension du modèle RS, il n'en demeure pas moins que c'est cette méthode qu'on tentera d'appliquer au cas  $N=3$ . Initialement, l'idée derrière cette façon de faire était simplement de pouvoir montrer que l'approche de la section précédente pour  $N=2$ , bonne ou mauvaise, ne pouvait être étendue à  $N>2$ , rendant ainsi inutile de poursuivre les efforts dans ce sens.

Dans le but de généraliser l'extension supersymétrique obtenue pour le modèle de Ruijsenaars-Schneider de deux à trois variables, la première étape est d'obtenir le coproduit de l'algèbre de Hecke pour  $N=3$ . Cette étape, en apparence simple, est toutefois beaucoup plus ardue que prévu. En effet, en procédant par substitution d'un coproduit général dans les axiomes de l'algèbre de Hecke ((4.11) et (4.13)), on obtient un système d'équations significativement plus imposant que dans le cas  $N=2$ . Il y a deux raisons principales qui font du cas  $N=3$  un problème beaucoup plus difficile. D'abord, la présence de trente-six termes indépendants dans la combinaison linéaire la plus générale pour le coproduit. Ensuite, le fait qu'avec deux générateurs la relation d'entrelacement n'est pas trivialement satisfaite. En effet, on remarque que dans le cas  $N=2$ , cet axiome de l'algèbre de Hecke n'ajoute aucune contrainte, ce qui n'est pas le cas pour  $N=3$ .

### 4.3.1 La recherche d'un coproduit

La solution a été recherchée à l'aide d'un programme écrit à l'aide du langage de programmation *MAPLE* (voir l'appendice A) et en utilisant l'environnement *ACE*<sup>3</sup>. Il s'avère essentiel de se restreindre à la base aux solutions qui ont la bonne limite lorsque  $t \rightarrow 1$ , *i.e.* le coproduit diagonal du groupe symétrique. En effet, puisqu'il s'agit d'un système de quarante-deux équations du deuxième degré et de vingt et une équations du troisième degré dans les coefficients  $a_{ijk}$ , il y aurait  $2^{42} \times 3^{21}$  solutions. Cela est énorme et ne peut pas être obtenu dans un temps raisonnable par un ordinateur conventionnel<sup>4</sup>. En fait, il est devenu clair que le simple fait d'écrire le système d'équations, sans même tenter de le résoudre, est une tâche à peine réalisable pour un ordinateur conventionnel.

En premier lieu, l'ansatz pour le coproduit (4.11) a été précisé davantage. En effet, en plus de considérer la symétrie sous l'échange des deux derniers indices de  $a_{ijk}$ , on a inclus un facteur  $(t - 1)$  dans tous les coefficients devant devenir nuls lorsqu'on prend la limite vers le coproduit du groupe symétrique. On a

$$\mathbb{T}_{\sigma_i} = a_{iii}T_{\sigma_i} \otimes T_{\sigma_i} + \sum_{\substack{\omega_j, \omega_k \in \mathcal{S}_3 \\ \omega_j \neq \omega_k \text{ si } \omega_j = \sigma_i}} (t - 1)a_{ijk}T_{\omega_j} \otimes T_{\omega_k}. \quad (4.28)$$

De cette façon, on réduit considérablement les solutions possibles (probablement à une seule, si la solution est unique comme pour le cas  $N = 2$ ). Malgré tout, même si la solution est cernée plus précisément, le problème demeure très exigeant sur le plan informatique. À ce jour, il n'a pas été possible de résoudre ce système d'équations, que ce soit en toute généralité ou en utilisant les simplifications mentionnées plus haut.

Une autre approche de résolution de ce problème a été tentée après avoir constaté la grande difficulté que présentait une solution générale. En effet, un autre programme *MAPLE* a été écrit pour permettre de simplement tester des hypothèses sur la forme du coproduit. De cette façon, il est possible de réduire le nombre coefficients à déterminer par *MAPLE*, en supposant, par exemple, que certains sont identiques ou tout simplement nuls. En employant cette méthode, tout porte à croire que chaque générateur contient au plus dix coefficients nuls, sur un total de vingt et un coefficients. Toutes les possibilités n'ont cependant pas été essayées, car il y en a  $\binom{21}{10} = 352\,716$  par générateur, donc  $\binom{21}{10}^2$  si on considère que les deux générateurs sont indépendants. Toutes les hypothèses testées avec dix coefficients nuls n'ont donné aucune solution ou une solution triviale (une solution triviale est, par exemple, une solution où les deux générateurs sont

<sup>3</sup>Algebraic Combinatorics Environnement. Voir [55].

<sup>4</sup>L'ordinateur qu'on qualifie de conventionnel est ici un PC avec processeur Intel®Core2Duo cadencé à 2.13GHz et disposant de 2Go de mémoire RAM. La version de *MAPLE* qui a été utilisée est *MAPLE V Release 5*.



identiques). Le programme n'a pas été en mesure de tester des hypothèses contenant moins de coefficients nuls.

# Conclusion

Initialement, le projet devait permettre de découvrir une extension supersymétrique du modèle Ruijsenaars-Schneider et, advenant une réussite, permettre de définir les superpolynômes de Macdonald comme les fonctions propres de ce modèle. Cet objectif, bien qu'ambitieux, s'appuie sur le succès obtenu dans un projet similaire concernant l'extension supersymétrique des modèles Calogero-Moser-Sutherland. Ce mémoire trace la route empruntée pour parvenir à un tel objectif en s'appuyant principalement sur les liens entre les modèles Calogero-Moser-Sutherland et le modèle Ruijsenaars-Schneider. Cependant, les efforts pour obtenir la généralisation supersymétrique voulue n'ont pas abouti. La question même de l'existence d'une telle généralisation demeure toujours en suspens.

La recherche du modèle de Ruijsenaars-Schneider supersymétrique s'est effectuée selon deux approches. La première consiste à calquer la procédure de supersymétrisation du modèle tCMS, présentée à la section 2.2. Cependant, il s'avère qu'il n'est pas possible de définir la version supersymétrique de l'hamiltonien RS comme l'anticommutateur de deux charges supersymétriques nilpotentes (voir section 4.1). La seconde approche fait intervenir la théorie des polynômes non symétriques. En effet, moyennant la connaissance du coproduit de l'algèbre de Hecke, on peut définir une extension de l'hamiltonien RS en présumant que les fonctions propres de ce modèle sont les superpolynômes de Macdonald définis par (4.10). Cependant, il n'est pas encore clair qu'il s'agisse bien de l'extension recherchée, même si elle a les bonnes limites. En effet, il demeure à vérifier que le modèle ainsi défini est intégrable et que les superpolynômes de Macdonald en sont bien les solutions. D'autre part, même si on parvenait à vérifier ces deux hypothèses, encore faudrait-il connaître le coproduit de l'algèbre de Hecke pour toutes valeurs de  $N$ , alors que même dans le cas où  $N = 3$ , ça n'a pas été possible. Il s'agit là sans doute du plus gros obstacle rencontré au cours de ce projet. En soi, il justifie sans doute l'abandon de cette approche.

Il demeure toutefois un certain nombre de choses qui peuvent encore être tentées. D'abord, il serait pertinent de déterminer sans équivoque si le modèle RS supersymé-

trique à  $N = 2$ , tel que défini à la section 4.2.1, est intégrable. De façon plus générale, on peut constater que les fonctions propres de  $\tilde{M}_1|_V$  ne sont pas symétriques. Incidemment, il ne s'agit pas des superpolynômes de Macdonald qu'on a définis. Si le modèle est intégrable, est-ce que les fonctions propres de  $\tilde{M}_1|_V$  ont des propriétés intéressantes? Sinon, est-il possible de définir un modèle qui aurait les superpolynômes de Macdonald comme fonctions propres? Le cas échéant, s'agirait-il de la généralisation du modèle RS recherchée? D'autre part, puisqu'il semble que prouver l'existence ou la non-existence d'un coproduct de l'algèbre de Hecke soit extrêmement difficile au point de vue informatique, il y a lieu de se demander : 1) s'il ne serait pas envisageable d'utiliser un super-ordinateur pour résoudre le cas  $N = 3$  et ainsi possiblement prouver qu'il n'existe pas de coproduct pour  $N > 2$ ; ou 2) s'il ne serait pas possible de prouver un résultat similaire par des moyens purement algébriques.

Dans l'éventualité où de telles entreprises ne seraient pas envisageables ou n'aboutiraient pas, une autre piste s'appuyant sur la théorie des solitons pourrait être envisagée. On sait depuis longtemps que les pôles des solutions de l'équation de Korteweg-de Vries se meuvent selon les mêmes équations du mouvement que les particules dans le modèle Calogero-Moser-Sutherland [1]. Bien qu'il s'agisse d'un sujet très intéressant, le lien entre les solitons et les systèmes intégrables à  $N$  corps n'a pas été abordé au cours de ce mémoire. Cependant, récemment, un lien entre les solutions de l'équation Sine-Gordon et le modèle Ruijsenaars-Schneider [2] a été découvert. Ainsi, il pourrait être possible d'étudier la version supersymétrique de l'équation sine-Gordon dans le but de découvrir l'extension supersymétrique du modèle Ruijsenaars-Schneider.

# Bibliographie

- [1] H. Airault, H. P. McKean et J. Moser, *Rational and Elliptic Solutions to the Korteweg-de Vries Equation and a Related Many-Body Problem*, Commun. Pure Appl. Math. **30** 1, 95, (1977).
- [2] O. Babelon et D. Bernard, *The Sine-Gordon Solitons as an N-Body Problem*, Phys. Lett. **B317**, 363 (1993).
- [3] T. H. Baker et P. J. Forrester, *Symmetric Jack Polynomials from Non-Symmetric Theory*, Annals of Combinatorics, **3**, 159 (1999).
- [4] T. H. Baker C. F. Dunkl et P. J. Forrester, *Polynomial Eigenfunctions of the Calogero-Sutherland-Moser Models with Exchange Terms*, Dans : [54], p.37-51.
- [5] H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov et A. Morozov, *The Ruijsenaars-Schneider Model in the Context of Seiberg-Witten Theory*, Nucl. Phys. **B558**, 371 (1999).
- [6] F. Calogero, *Solution of a Three-Body Problem in One Dimension*, J. Math. Phys. **10**, 2191 (1969).
- [7] F. Calogero, *Solution of the One-Dimensional N-Body Problem with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials*, J. Math. Phys. **12**, 419 (1971).
- [8] I. Cherednik, *Nonsymmetric Macdonald Polynomials*, Int. Math. Res. Not. **10**, 483 (1995).
- [9] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Phys. Rept. **251**, 267 (1995).
- [10] P. Desrosiers, *Les modèles Calogero-Moser-Sutherland supersymétriques et les superpolynômes de Jack*, Mémoire, Université Laval (2001).
- [11] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Supersymmetric Calogero-Moser-Sutherland Models and Jack Superpolynomials*, Nucl. Phys. **B606**, 547 (2001).
- [12] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Jack superpolynomials, superpartition ordering and determinantal formulas*, Commun. Math. Phys. **233**, 383 (2003).
- [13] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Jack polynomials in superspace*, Commun. Math. Phys. **242**, 331 (2003).

- [14] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Symmetric functions in Superspace*, ArXiv : math /0412306v1 (2004).
- [15] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Classical Symmetric functions in Superspace*, J. Algebr. Comb. **24**, 209 (2006).
- [16] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Orthogonality of Jack polynomials in Superspace*, Adv. Math. **212**, 361 (2007).
- [17] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Specialization and Normalization of Jack polynomials in Superspace*, (à paraître).
- [18] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu, *Exploratory Analysis toward the construction of the Supersymmetric Ruijsenaars-Schneider Model Using Hecke Algebra : the  $N = 2$  case*, Non publié, (2000 ?).
- [19] C. F. Dunkl, *Differential-Difference Operators associated to Reflection Groups*, Trans. Am. Math. Soc. **311**, 167 (1989).
- [20] P. J. Forrester, *Selberg Correlation Integrals and the  $1/r^2$  Quantum Many-Body Systems*, Nucl. Phys. **B388**, 671 (1992).
- [21] D. Z. Freedman et P. F. Mende, *An Exactly Solvable  $N$ -Particle Model in Supersymmetric Quantum Mechanics*, Nucl. Phys. **B344**, 317 (1990).
- [22] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal et R. M. Miura, *Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation* Phys. Rev. Lett. **19**, 1095, (1967).
- [23] H. Jack, *A Class of Symmetric Polynomials with a Parameter*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A69**, 1 (1970).
- [24] H. Jack, *A Surface Integral and Symmetric Functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **A69**, 347 (1972).
- [25] F. Knop et S. Sahi, *A Recursion and a Combinatorial Formula for Jack Polynomials*, Invent. Math. **128**, 9 (1997).
- [26] H. Konno, *Relativistic Calogero-Sutherland model : spin generalization, quantum affine symmetry and dynamical correlation functions*, J. Phys. **A29**, L191 (1996).
- [27] L. Lapointe, *Intégrabilité des systèmes Calogero-Moser et de Ruijsenaars-Schneider*, Non publié (1996).
- [28] L. Lapointe et L. Vinet, *Exact Operator Solution of the Calogero-Sutherland Model*, Comm. Math. Phys. **178**, 425 (1996).
- [29] P. D. Lax, *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*, Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467 (1968).
- [30] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, J. Atmos. Sci. **20**, 130 (1963).
- [31] I. G. Macdonald, *A New Class of Symmetric Functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 20ème Séminaire Lotharingien, **372/S20**, 131 (1988).

- [32] I. G. Macdonald, *Schur Functions : Theme and Variations*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, Actes 28ème Séminaire Lotharingien, **498/S27**, 5 (1992).
- [33] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2ème édition, Clarendon Press, (1995).
- [34] D. Marshall, *Symmetric and Nonsymmetric Macdonald Polynomials*, Annals of Combinatorics **3**, 385 (1999).
- [35] J. B. McGuire, *Study of Exactly Soluble One-Dimensional N-Body Problems*, J. Math. Phys. **5**, 622 (1964).
- [36] J. Moser, *Three Integrable Hamiltonian Systems Connected With Isospectral Deformations*, Adv. Math. **16**, 197 (1975).
- [37] A. Nishino, H. Ujino et M. Wadati, *An Algebraic Approach to the Non-symmetric Macdonald Polynomials*, Nucl. Phys. **B558**, 589 (1999).
- [38] S. Odake et R. Sasaki, *Calogero-Moser-Sutherland Systems, Ruijsenaars-Schneider-van Diejen Systems and Orthogonal Polynomials*, Prog. Theor. Phys. **114**, 1245 (2005).
- [39] M. A. Olshanetsky et A. M. Perelomov, *Classical Integrable Finite-Dimensional Systems Related to Lie Algebras*, Phys. Rept. **71**, 313 (1981).
- [40] M. A. Olshanetsky et A. M. Perelomov, *Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebras*, Phys. Rept. **94**, 313 (1983).
- [41] E. Opdam, *Harmonic Analysis for Certain Representations of Graded Hecke Algebras*, Acta Math. **175**, 75 (1995).
- [42] A. P. Polychronakos, *Exchange Operator Formalism for Integrable Systems of Particles*, Phys. Rev. Lett. **69**, 703 (1992).
- [43] S. N. M. Ruijsenaars, *A Positive Energy Dynamics and Scattering Theory for Directly Interacting Relativistic Particles*, Ann. Phys. **126**, 399 (1980).
- [44] S. N. M. Ruijsenaars et H. Schneider, *A New Class of Integrable Systems and Its Relation to Solitons*, Ann. Phys. **170**, 370 (1986).
- [45] S. N. M. Ruijsenaars, *Complete Integrability of Relativistic Calogero-Moser-Sutherland Systems and Elliptic Function Identities*, Commun. Math. Phys. **110**, 191 (1987).
- [46] B. S. Shastry et B. Sutherland, *Super Lax Pairs and Infinite Symmetries in the  $1/r^2$  System*, Phys. Rev. Lett. **70** (26), 4029, (1993).
- [47] M. F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, Phys. Rept. **128**, 39, (1985).
- [48] R. P. Stanley, *Some Combinatorial Properties of Jack Symmetric Functions*, Adv. Math. **77**, 76 (1989).
- [49] J. R. Stembridge, *A Characterization of Supersymmetric Polynomials*, J. Alg. **95**, 439 (1985).

- [50] B. Sutherland, *Quantum Many-Body Problem in One Dimension : Ground State*, J. Math. Phys. **12**, 246 (1971).
- [51] B. Sutherland, *Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension*, Phys. Rev. **A4**, 2019 (1971).
- [52] B. Sutherland, *Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II*, Phys. Rev. **A5**, 1372 (1972).
- [53] J. F. Van Diejen, *On the Diagonalization of Difference Calogero-Sutherland Systems*, q-alg/9504012, (1995).
- [54] J. F. Van Diejen et L. Vinet, (eds.), *Calogero-Moser-Sutherland Models*, Berlin-Heidelberger-New York : Springer (2000).
- [55] S. Veigneau, *ACE an Algebraic Combinatorics Environment for the computer algebra system MAPLE*, User's Reference Manual Version 3.0, (1998).



# Annexe A

## Algorithme *MAPLE* : le coproduit de l'algèbre de Hecke

On présente dans cet appendice l'intégrale du programme *MAPLE* ayant servi à écrire et résoudre le système d'équations permettant de trouver le coproduit de l'algèbre de Hecke<sup>1</sup>. Le programme a pu être vérifié dans le cas où  $N = 2$ , à la fois dans le cas du coproduit du groupe symétrique et de l'algèbre de Hecke. Dans le cas où  $N = 3$ , le coproduit du groupe symétrique a été obtenu, mais pas celui de l'algèbre de Hecke.

```
with(HEKA):with(SG):with(SGA):  
  
> seq2lin:=proc(J,S)  
> local out,k,l;  
> out:=0;  
> for k in S do  
> for l in S do  
> if coeff(J[1],k)=0 or coeff(J[2],l)=0 then  
> else  
> out:=out+coeff(J[1],k)*coeff(J[2],l)*[k,l];  
> fi;  
> od;od;  
> out;end;
```

---

<sup>1</sup>Quelques modifications mineures doivent être apportées au programme afin d'obtenir les coproduits du groupe symétrique. Des ajustements mineurs peuvent également être apportés afin de trouver le coproduit pour  $N = 2$ . On pourra se référer au manuel de l'environnement *ACE* [55].

```

> coproduit_alg_Hecke := proc(n)
> global CL,cd,cg,sol,cgb,S,eq,eqb,vars,coefficient;
> local i,j,k,l,m,X,g,p,q;
> S:=NULL;
> for g from 1 to n! do
> S:=S,A[op(op(g,ListPerm(n)))]);
> od;
>
> eq:=NULL;eqb:=NULL;vars:=NULL;
>
> for i from 1 to n-1 do
>
>   for l from 1 to n! do
>     for j from 1 to n! do
>
>       CL[i,l,j]:=[a[i,l,j]*S[l],S[j]]:
>
>       if j<l then
>         else
>         vars:=vars,a[i,l,j];
>         fi;
>
>       if j<l then
>         CL[i,l,j]:=eval(CL[i,l,j],a[i,l,j]=a[i,j,l]);
>         fi;
>
>     od;
>   od;
> od;
>
> for i from 1 to n-1 do
>
>
> #####
> cg[i]:=0;
> for m from 1 to n! do
>   for j from 1 to n! do
>     for k from 1 to n! do
>       for l from 1 to n! do

```

```

>
>   cg[i]:=cg[i]+
>seq2lin([CL[i,m,j][1]&?*CL[i,k,l][1],CL[i,m,j][2]&?*CL[i,k,l][2]], [S]);
>
>   od;
>   od;
>   od;
>   od;
> cg[i]:=eval(cg[i],[q1=1,q2=-1/t]);
>
> #####
>
>
> for j from 1 to n! do
>   for k from j to n! do
>
>
>   if j=1 and k=1 then
>     eq:=eq,coeff(cg[i],[S[j],S[k]])=1/t+(1-1/t)*a[i,j,k];
>
>   else
>     eq:=eq,coeff(cg[i],[S[j],S[k]])=(1-1/t)*a[i,j,k];
>
>   fi;
>
>   od;
>   od;
>
> ##### Braid relation #####
> if n>2 and i<=(n-2) then
> print(n,i);
>
>   for m from 1 to n! do
>
>     for j from 1 to n! do
>
>       cgb[i,m,j]:=0;
>
>       for k from 1 to n! do
>         for l from 1 to n! do

```

```

>     for p from 1 to n! do
>         for q from 1 to n! do
>
>             cgb[i,m,j]:=cgb[i,m,j]+
>seq2lin([CL[i,m,j][1]&?*CL[i+1,k,1][1]&?*CL[i,p,q][1],CL[i,m,j][2]&?*
>CL[i+1,k,1][2]&?*CL[i,p,q][2]], [S])
>-seq2lin([CL[i+1,m,j][1]&?*CL[i,k,1][1]&?*CL[i+1,p,q][1],CL[i+1,m,j][2]&?*
>CL[i,k,1][2]&?*CL[i+1,p,q][2]], [S]);
>
>
>         cgb[i,m,j]:=eval(cgb[i,m,j],[q1=1,q2=-1/t]);
>
>     od;
> od;
> od;
> od;
> od;
> od;
> od;
>
>
> for l from 1 to n! do
> for k from 1 to n! do
>
>     coefficient[l,k]:=0;
>
>     for m from 1 to n! do
>         for j from 1 to n! do
>
>             coefficient[l,k]:=coefficient[l,k]+coeff(cgb[i,m,j],[S[l],S[k]]);
>
>         od;
>     od;
>
>     eqb:=eqb,coefficient[l,k];
>
> od;
> od;
>
> fi;
> #####

```

```
> od;
>
>
> sol:=solve(subs({a[1,1,1]=(t-1)*a[1,1,1],a[1,1,2]=(t-1)*a[1,1,2],
a[2,5,6]=(t-1)*a[2,5,6],a[2,6,6]=(t-1)*a[2,6,6],
a[2,4,5]=(t-1)*a[2,4,5],a[2,4,6]=(t-1)*a[2,4,6],
a[2,5,5]=(t-1)*a[2,5,5],a[2,3,3]=(t-1)*a[2,3,3],
a[2,3,4]=(t-1)*a[2,3,4],a[2,3,5]=(t-1)*a[2,3,5],
a[2,3,6]=(t-1)*a[2,3,6],a[2,2,6]=(t-1)*a[2,2,6],
a[2,2,5]=(t-1)*a[2,2,5],a[2,2,3]=(t-1)*a[2,2,3],
a[2,1,1]=(t-1)*a[2,1,1],a[2,1,2]=(t-1)*a[2,1,2],
a[2,1,3]=(t-1)*a[2,1,3],a[2,1,4]=(t-1)*a[2,1,4],
a[2,1,5]=(t-1)*a[2,1,5],a[2,1,6]=(t-1)*a[2,1,6],
a[2,2,2]=(t-1)*a[2,2,2],a[2,2,4]=(t-1)*a[2,2,4],
a[1,6,6]=(t-1)*a[1,6,6],a[1,5,6]=(t-1)*a[1,5,6],
a[1,5,5]=(t-1)*a[1,5,5],a[1,4,4]=(t-1)*a[1,4,4],
a[1,4,5]=(t-1)*a[1,4,5],a[1,4,6]=(t-1)*a[1,4,6],
a[1,2,5]=(t-1)*a[1,2,5],a[1,2,6]=(t-1)*a[1,2,6],
a[1,3,3]=(t-1)*a[1,3,3],a[1,3,4]=(t-1)*a[1,3,4],
a[1,3,5]=(t-1)*a[1,3,5],a[1,3,6]=(t-1)*a[1,3,6],
a[1,2,3]=(t-1)*a[1,2,3],a[1,2,4]=(t-1)*a[1,2,4],
a[1,1,3]=(t-1)*a[1,1,3],a[1,1,4]=(t-1)*a[1,1,4],
a[1,1,5]=(t-1)*a[1,1,5], a[1,1,6]=(t-1)*a[1,1,6]}},{eq,eqb}},{vars});
>
> print(sol);
>
> end;
```