

### Estimation efficace des paramètres de signaux d'usagers radio-mobile par traitement avec antenne-réseau

Thèse

**Emmanuel Racine** 

Doctorat en génie électrique Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Emmanuel Racine, 2013

## Résumé

Cette thèse aborde le problème d'estimation des paramètres de signaux d'usagers radio-mobile par traitement avec antenne-réseau. On adopte une approche de traitement théorique rigoureuse au problème en tentant de pallier aux limitations et désavantages des méthodes d'estimation existantes en ce domaine. Les chapitres principaux ont été rédigés en couvrant uniquement les aspects théoriques en lien aux contributions principales, tout en présentant une revue de littérature adéquate sur les sujets concernés. La thèse présente essentiellement trois volets distincts en lien à chacune des contributions en question. Suite à une revue des notions de base, on montre d'abord comment une méthode d'estimation exploitant des statistiques d'ordre supérieur a pu être développée à partir de l'amélioration d'un algorithme existant en ce domaine. On présente ensuite le cheminement qui a conduit à l'élaboration d'une technique d'estimation non linéaire exploitant les propriétés statistiques spécifiques des enveloppes complexes reçues, et ne possédant pas les limitations des algorithmes du second et quatrième ordre. Finalement, on présente le développement relatif à un algorithme d'estimation exploitant le caractère cyclostationnaire intrinsèque des signaux de communication dans un environnement asynchrone naturel. On montre comment un tel algorithme parvient à estimer la matrice de canal des signaux incidents indépendamment du caractère de corrélation spatiotemporel du bruit, et permettant de ce fait même une pleine exploitation du degré de liberté du réseau. La procédure d'estimation consiste en la résolution d'un problème de diagonalisation conjointe impliquant des matrices cibles issues d'une opération différentielle entre des matrices d'autocorrélation obtenues uniquement à partir de statistiques d'ordre deux. Pour chacune des contributions, des résultats de simulations sont présentés afin de confirmer l'efficacité des méthodes proposées.

## Abstract

This thesis addresses the problem of parameter estimation of radio signals from mobile users using an antenna array. A rigorous theoretical approach to the problem is adopted in an attempt to overcome the limitations and disadvantages of existing estimation methods in this field. The main chapters have been written covering only the theoretical aspects related to the main contributions of the thesis, while at the same time providing an appropriate literature review on the considered topics. The thesis is divided into three main parts related to the aforesaid contributions. Following a review of the basics concepts in antenna array processing techniques for signal parameter estimation, we first present an improved version of an existing estimation algorithm expoiting higher-order statistics of the received signals. Subsequently, we show how a nonlinear estimation technique exploiting the specific statistical distributions of the received complex envelopes at the array can be developed in order to overcome the limitations of second and fourth-order algorithms. Finally, we present the development of an estimation algorithm exploiting the cyclostationary nature of communication signals in a natural asynchronous environment. We show how such an algorithm is able to estimate the channel matrix of the received signals independently of the spatial or temporal correlation structure of the noise, thereby enabling a full exploitation of the array's degree of freedom. The estimation process is carried out by solving a joint diagonalization problem involving target matrices computed by a differential operation between autocorrelation matrices obtained by the sole use of second-order statistics. Various simulation experiments are presented for each contribution as a means of supporting and evidencing the effectiveness of the proposed methods.

# Table des matières

Ré	İsum	é
Ał	ostra	ct v
Ta	ble o	les matières vii
Li	ste d	es tableaux ix
Li	ste d	es figures xi
Li	ste d	es symboles xiii
Re	emer	ciements xxi
Int 2	trodu 1.1 1.2 1.3 1.4 Thé 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5 2.6 2.7 2.8	Inction1Les communications mobiles en 20131Bénéfices associés à l'utilisation d'antennes-réseaux2Enjeux et objectifs de la thèse4Résumé des chapitres6orie de base9Modélisation des signaux9Notions de base18Corrélation des signaux20Formation de voies25Estimation des DOAs28Algorithmes de pré-traitement34Simulations42Conclusion45
3	Stat 3.1 3.2 3.3 3.4	istiques d'ordre supérieur       47         Motivations       47         Algorithme EVESPA       48         Amélioration proposée       54         Conclusion       57
4	<b>App</b> 4.1 4.2	proches non linéaires       59         Motivations       59         Moyenne géométrique       60

	4.3Estimateur exponentiel	64 83
5	Synchronicité des signaux         5.1       Introduction	<b>85</b> 85 86 92 96 102
6	Algorithme JDDTM6.1Introduction	<ul> <li>103</li> <li>104</li> <li>106</li> <li>109</li> <li>115</li> <li>118</li> <li>131</li> </ul>
7	<ul> <li>Idées de recherche et de développements futurs</li> <li>7.1 Étude des performances d'algorithmes classiques dans un contexte de signali- sation asynchrone</li></ul>	<b>133</b> 133 134 135
Co	onclusion8.1Résumé des travaux et des contributions à la recherche8.2Suite logique des travaux et points importants à retenir	<b>139</b> 139 140
Bi	ibliographie	143
Α	Décomposition propre d'une matrice hermitienne         A.1 Généralités         A.2 Cas d'une matrice définie semi-positive	<b>151</b> 151 152
в	Développement du vecteur de pondération optimal	153
С	Conditions de détection avec lissage spatial conventionnel	157
D	Conditions de détection avec lissage spatial bidirectionnel	163
Ε	Idées de travaux diversE.1Modélisation FIR-MIMOE.2Analyse spectrale	<b>169</b> 169 179
$\mathbf{F}$	Articles publiés	187

## Liste des tableaux

2.1	Paramètres de simulation pour le cas de sources indépendantes	43
2.2 2.3	Paramètres de simulation pour le cas de sources concrentes	44
2.0	tillons	45
3.1	Paramètres de simulation pour l'estimation de DOAs à partir de l'algorithme EVESPA	53
3.2	Comparaison des principales étapes de calcul entre l'algorithme EVESPA original et la méthode alternative proposée dans cette thèse.	56
4.1	Évaluation de fonctions $f_g(\alpha, \sigma_{u_g})$ pour différents types de distributions d'enve- loppes complexes. Tous les symboles (valeurs prises par $u_g(t_k)$ ) pour les distribu- tions autres que coursiennes cont accumés ácuienchelles	67
4.2	Paramètres des sources pour les simulations numériques. Des niveaux de bruits identiques cont considérés pour chaque élément	70
4.3	Résultats d'estimation des paramètres de sources QPSK indépendantes à partir de l'estimateur exponentiel. Les résultats ont été compilés à partir de $S = 10$ réalisations de $K = 10^4$ échantillons chaqueo	79 81
	$\mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I}$	01
6.1	Evolution du nombre de DTM $D$ considérées pour la diagonalisation conjointe en fonction du facteur de suréchantillonnage $U$	114
6.2	Paramètres de simulation généraux pour l'estimation de DOAs à partir de l'algo- rithme JDDTM.	120
6.3	Résultats d'études statistiques sur l'estimation des DOAs des signaux par l'al- gorithme JDDTM (et Root-MUSIC). Les données sont obtenues considérant les paramètres du Tab. 6.2 avec $\tau_1 = 0.9T$ , $\tau_2 = 0.6T$ , $\beta_1 = 0.4$ , $\beta_2 = 0.8$ et $P = 5000$ .	100
6.4	Résultats d'études statistiques sont calculees à partir de $S = 1000$ essais	LZZ
~ -	partir de $S = 1000$ essais où à chaque fois $\{\tau_1/T, \tau_2/T, \beta_1, \beta_2\} \rightarrow \mathcal{U}(0, 1)$ 1	123
6.5	Paramètres de simulation pour l'étude de performance générale de l'algorithme JDDTM	124
6.6	Paramètres de simulation pour l'étude de comparaison entre l'algorithme JDDTM et EVESPA	129

# Liste des figures

1.1	Regard sur l'expansion du marché des communications mobiles aux États-Unis (détenteurs de licences CMRS) entre 1988 et 2012.	2
1.2	Principe de formation de voies où une antenne-réseau focalise son rayonnement en direction d'un usager particulier tout en possédant une réponse nulle en direction	
	des autres usagers.	5
2.1	Principe de démodulation de signaux passe-bande.	10
2.2	Réception d'un signal arbitraire $m$ par une antenne $i$ d'un réseau dans un espace à trois dimensions	11
2.3	Équivalence de notations avec décalage temporel considérant un élément de réfé-	11
	rence $q$	13
2.4	Réseau linéaire uniforme dans la plan $xy$ avec sources en champ lointain. L'élément 1 est considéré comme référence $(a - 1)$	1/
2.5	Réception des premier et second signaux d'un même groupe $g$ par un élément $q$ du réseau. Seuls les décalages temporels des enveloppes complexes sont indiqués. Les signaux reçus correspondent à ceux d'indice global $f(g,1)$ et $f(g,2)$ selon (2.47). En (a), l'enveloppe complexe mesurée en $\tilde{r}_g$ au temps $t$ est $u_g(t)$ . En (b), un changement de référence temporelle est effectué tel que l'enveloppe complexe captée	1.4
2.6	par l'élément $q$ au temps $t$ soit égale à $u_g(t)$	23
	pour le problème d'estimation spectrale, ce qui augmente la résolution	30
2.7	Sous-division d'un ULA selon une architecture de type "forward".	37
2.8 2.9	Sous-division d'un ULA selon une architecture de type "backward" Estimation des DOAs de sources indépendantes par les méthodes de Bartlett, Ca-	40
9 10	pon et MUSIC (pseudo-spectres normalisés).	43
2.10	MUSIC considérant un SNR de 10 dB.	44
2.11	Influence du nombre d'éléments et du nombre d'échantillons sur l'estimation des DOAs de sources indépendantes par MUSIC.	45
3.1	Application de EVESPA pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MU- SIC. $K = 2000$ et SNR = 0 dB	53
3.2	Application de EVESPA pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MU-	
	SIC. $K = 250$ et SNR = 0 dB	54

4.1	Positions des zéros de $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$ engendrés par une enveloppe complexe avec modulation OPSK	70
4.2	Ambiguïtés d'estimation possibles engendrées par une source $g$ avec sa propre fonc-	10
4.9	tion $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$ .	75
4.5	Ambiguites d estimation possibles engendrees par une source $g$ et une source $m$ de fonction $f(\zeta(\rho)a_m, \sigma_m)$ telle que $\sigma_m < \sigma_{u_a}$ .	76
4.4	Ambiguïtés d'estimation possibles engendrées par une source $g$ et une source $m$ de	
15	fonction $f(\zeta(\rho)a_m, \sigma_m)$ telle que $\sigma_m > \sigma_{u_g}$	77
4.0	$S = 10$ réalisations de $K = 10^4$ échantillons chacune	80
4.6	Estimation de l'angle $\phi$ des sources pour le premier écart type à partir de $H_2(\rho)$ .	01
4.7	$\mathcal{S} = 10$ realisations de $K = 10^{\circ}$ echantillons chacune sont considerées Estimation de l'angle $\phi$ des sources pour le second écart type à partir de $H_2(\phi)$ .	81
	$S = 10$ réalisations de $K = 10^4$ échantillons chacune sont considérées	82
4.8	Estimation de l'angle $\phi$ des sources pour le troisième écart type à partir de $H_2(\rho)$ .	00
	$\mathcal{S} = 10$ realisations de $\mathbf{K} = 10^{-1}$ echantmons chacune sont considerees	02
5.1	Exemple illustratif d'un train d'impulsions constituant une enveloppe complexe	07
5.2	S(t) que considerant des symboles reels et tous identiques	01
	du réseau (sans bruit) avec coefficients de canal $B_{i,1} = -0.8e^{-j0.2}$ and $B_{i,2} = 2e^{j0.5}$ .	
	On considère deux enveloppes complexes $(G = 2)$ de type BPSK où $u_g(t) = I_g(t) + iQ_g(t)$ et $Q_g(t) = 0 \forall g$	80
5.3	Tracé d'un signal $x_i(t_k)$ (300 points avec $T_s = T$ ) dans le plan complexe considérant	03
	la réception de deux enveloppes de puissances égales avec coefficients de canal	
	$B_{i,1} = 0.5e^{j_0.2}, B_{i,2} = 1.1e^{-j_2}$ et SNR de 15 dB. (a) et (b) : modulations BPSK. (c) et (d) : modulations QPSK. Graphes de gauche : signaux synchrones. Graphes	
	de droite : signaux asynchrones considérant deux ensembles distincts de délais	
	asynchrones, Ens. 1 : { $\tau_1 = 0.9T$ , $\tau_2 = 0.05T$ } et Ens. 2 : { $\tau_1 = 0.6T$ , $\tau_2 = 0.2T$ }.	
	le cas synchrone. Pour chaque modulation des séquences de symboles et de bruit	
	identiques sont considérées dans les deux cas.	94
5.4	Fonctions de mise en forme d'impulsion individuelles d'une enveloppe complexe hypothétique en (5.2) montrant les contributions de symboles consécutifs à la valeur	
	de $u_g(t)$ à un instant t donné. Des impulsions de largeur temporelle $W_g = 2.5T$	
	sont considérées pour cet exemple.	98
5.5	Echantillonnage et reconstruction d'une enveloppe complexe à partir d'une lon- gueur de canal estimée $\hat{L}$ donnée. (a) : Impulsions RC de largeur $W = 6T$ avec	
	facteur "roll-off" $\beta = 0.2$ , $\hat{L} = 1$ . (b) : Impulsions de types Hanning de largeur	
	W = T, L = 1. (c) : Même chose qu'en (a) avec $L = [W/T] = 6.$	99
6.1	Illustration du principe d'exploitation de diversité de phase d'échantillonnage consi-	
	dérant $G = 2$ enveloppes complexes reçues avec modulations BPSK $(Q_g(t) = 0 \forall g)$ of factour de suréchantillonnage $U = 2$	105
6.2	Principe de construction de matrices d'autocorrélation (instants d'échantillonnage)	100
	considérant un facteur de suréchantillonnage $U = 4$ , un délai maximum $\tau_{\text{max}} = T$	
6.3	et une durée d'observation de $P$ périodes de symbole	112 116
0.0	respresentation Senerate de la matrice 111 pour le critere a la citamatine de Q	110

- 6.6 Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général. On considère le cas où G = 2 avec trois ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.1, 0.4\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.8\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.6, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.5, 0.4\}$  et Ens. 3 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.1, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.5\}$ . . . . . . . . 126

- 6.9 Comparaison de performances entre l'algorithme JDDTM et EVESPA pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général où N = G = 4. On considère deux ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0, 0.2, 0.8, 0.5\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.7, 0.1, 0.8, 0.1\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.9, 0.4, 0.1, 0.4\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.8, 0.7, 0.2\}$ . 130
- 6.10 Comparaison de performances entre l'algorithme JDDTM et EVESPA pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général où N = G = 4. On considère deux ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.8, 0, 0.3, 0.5\}T$ et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.2, 0.6, 0.8\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.2, 0.1, 0.2, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.8, 0.8, 0.7, 0.6\}$ . 130

- E.4 Fonctions de mise en forme d'impulsion rectangulaire (W = T) et gaussienne  $(B_{\text{Gauss.,3 dB}} = \sqrt{\ln(2)/(2\pi)} \text{ Hz}).$  182

# Liste des symboles

Symbole	Description	Unités
$*,\dagger,\top,\#$	Opérateurs conjugaison, transposition-conjugaison, transposition et	
	pseudo-inverse de Moore-Penrose	
N	Nombre d'éléments du réseau	
M	Nombre de signaux incidents	
G	Nombre de groupes de signaux cohérents ou d'usagers	
$f_0$	Fréquence porteuse	Hz
$\omega_0$	Pulsation de la fréquence porteuse $(2\pi f_0)$	rad/s
$s_m(t)$	Enveloppe complexe reçue de la source $m$ au temps $t$	V
$T_{s}$	Période d'échantillonnage	$\mathbf{S}$
T	Période des symboles	$\mathbf{S}$
$oldsymbol{r}_m$	Vecteur position de la source $m$	m
ľ	Vecteur position d'un élément $i$ du réseau	m
$\Theta_m$	Phase de la porteuse du $m$ -ème signal incident	rad
$ au_{i_m}$	Délai de propagation d'une source $m$ vers un élément $i$ du réseau	$\mathbf{S}$
$ au_g$	Délai asynchrone de l'enveloppe complexe d'un usager $g$ au niveau du	$\mathbf{S}$
	réseau	
$\gamma_i$	Phase de l'oscillateur local propre à un élément $i$ du réseau	rad
$g_i(t)$	Signal RF reçu par un élément $i$ du réseau au temps $t$	V
$x_i(t)$	Signal reçu en bande de base par un élément $i$ du réseau au temps $t$	V
$n_i(t)$	Bruit en bande de base capté par un élément $i$ du réseau au temps $t$	V
С	Vitesse de propagation des ondes dans le milieu	m/s
$ heta_m$	Direction d'arrivée du signal propre à la source $m$	rad
d	Espacement inter-élément pour un réseau linéaire uniforme	m
$\lambda_0$	Longueur d'onde de la fréquence porteuse	m
$\beta_0$	Nombre d'onde propre à la fréquence porteuse $(2\pi/\lambda_0)$	$\mathrm{m}^{-1}$
$\phi_m$	Angle électrique du signal associé à la source $m$	rad
$oldsymbol{x}(t)$	Vecteur des signaux reçus en bande de base au temps $t$	V
$\boldsymbol{s}(t)$	Vecteur des enveloppes complexes reçues au temps $t$	V

Symbole Description

$oldsymbol{n}(t)$	Vecteur de bruit en bande de base au niveau des éléments du réseau au	V
	temps $t$	
$oldsymbol{x}_k$	Vecteur $\boldsymbol{x}(t)$ évalué au temps $t = kT_s \ (k \in \mathbb{N})$	V
$oldsymbol{s}_k$	Vecteur $\boldsymbol{s}(t)$ évalué au temps $t = kT_{\boldsymbol{s}} \ (k \in \mathbb{N})$	V
$oldsymbol{n}_k$	Vecteur $\boldsymbol{n}(t)$ évalué au temps $t = kT_{\mathfrak{s}} \ (k \in \mathbb{N})$	V
C	Matrice tenant compte des différences de phases entre les porteuses des	
	signaux incidents et les oscillateurs locaux des éléments, ou matrice de	
	coefficients avec l'emploi d'une modélisation de type FIR-MIMO	
$\boldsymbol{A}$	Matrice directionnelle du réseau	
$oldsymbol{a}_m$	Vecteur directif propre à la source $m$	
Γ	Matrice d'erreur et de distorsion	
$oldsymbol{C}_{xx}$	Matrice de covariance des signaux reçus	
$oldsymbol{R}_{xx}$	Matrice d'autocorrélation des signaux reçus	
$oldsymbol{R}_{ss}$	Matrice d'autocorrélation des enveloppes complexes reçues	
$oldsymbol{R}_{nn}$	Matrice d'autocorrélation du bruit	
$\delta_{p,q}$	Fonction impulsion de Kronecker	
$\delta(t)$	Fonction impulsion de Dirac	
$\sigma_{s_m}^2$	Puissance de l'enveloppe complexe de la source $m$	W
$\sigma_{n_i}^2$	Puissance du bruit au niveau d'un l'élément $i$ du réseau	W
K	Nombre d'échantillons	
$u_g(t)$	Enveloppe complexe reçue du $g$ -ième groupe au temps $t$	V
$I_g(t)$	Composante en phase de l'enveloppe complexe reçue du groupe $g$	V
$Q_g(t)$	Composante en quadrature de l'enveloppe complexe reçue du groupe $g$	V
$M_g$	Nombre de signaux appartenant au groupe $g$	
$ ilde{ au}_{g_\ell}$	Délai de propagation du signal de l'émetteur $g$ vers un objet réflecteur	$\mathbf{S}$
	agissant comme la $\ell\text{-}\mathrm{i}\mathrm{e}\mathrm{m}\mathrm{e}$ source du groupe	
$\alpha_{g_\ell}$	Coefficient de propagation propre au $\ell\text{-}\mathrm{i}\mathrm{e}\mathrm{m}\mathrm{e}$ signal du groupe $g$	
Ξ	Matrice des coefficients de propagation dans un environnement cohérent	
B	Matrice de canal généralisée	
$oldsymbol{b}_g$	Vecteur directif généralisé du groupe $g$	
$oldsymbol{u}(t)$	Vecteur des enveloppes complexes reçues au temps $t$ dans un environ-	V
	nement cohérent	
$oldsymbol{u}_k$	Vecteur $\boldsymbol{u}(t)$ évalué au temps $t = kT_{\mathfrak{s}} \ (k \in \mathbb{N})$	V
$oldsymbol{R}_{uu}$	Matrice d'autocorrélation des enveloppes complexes reçues dans un en-	
	vironnement cohérent	
$\sigma_{u_g}^2$	Puissance de l'enveloppe complexe du $g$ -ième groupe	W

w	Vecteur de pondération employé avec algorithmes de formation de voies	
$y_k(oldsymbol{w})$	Signal de sortie de l'antenne-réseau au temps $t = kT_s \ (k \in \mathbb{N})$ considé- rant un vecteur de pondération $\boldsymbol{w}$	V
$P(\boldsymbol{w})$	Puissance du signal de sortie de l'antenne-réseau considérant un vecteur de pondération $\boldsymbol{w}$	W
$ ho_{s_m}(oldsymbol{w})$	Rapport signal à bruit d'une source $m$ considérant un vecteur de pon- dération $\boldsymbol{w}$	
$ ilde{ ho}_{s_m}(oldsymbol{w})$	Rapport signal à interférence d'une source $m$ considérant un vecteur de pondération $\boldsymbol{w}$	
$reve{ ho}_{s_m}(oldsymbol{w})$	Rapport signal à interférence plus bruit d'une source $m$ considérant un vecteur de pondération $\boldsymbol{w}$	
${m V}_{\it f}$	Matrice des vecteurs de base du sous-espace fondamental (ou source)	
V <sub>k</sub>	Matrice des vecteurs de base du sous-espace nul (ou bruit)	
$oldsymbol{\Lambda}_{f}$	Matrice des valeurs propres associées aux vecteurs de base du sous- espace fondamental (ou source)	
$\mathbf{\Lambda}_k$	Matrice des valeurs propres associées aux vecteurs de base du sous- espace nul (ou bruit)	
$R_{rr}$	Matrice d'autocorrélation des signaux recus du groupe $q$	
$R_{ss_{-}}$	Matrice d'autocorrélation des enveloppes complexes recues du groupe $q$	
R	Nombre de sous-réseaux employés pour traitement avec lissage spatial	
L	Nombre d'éléments par sous-réseau pour traitement avec lissage spatial	
$\mathbf{X}_{r}^{f}(t_{k})$	Vecteur des signaux reçus en bande de base au temps $t = kT_s$ $(k \in \mathbb{N})$ par un sous-réseau $r$ avec application du lissage spatial de type "forward"	V
$\mathbf{X}_{r}^{b}(t_{k})$	Vecteur des signaux reçus en bande de base au temps $t = kT_s$ $(k \in \mathbb{N})$ par un sous-réseau $r$ avec application du lissage spatial de type "backward"	V
$\mathbf{A}_r$	Matrice directionnelle propre au sous-réseau $r$	
$\mathbf{n}_r(t_k)$	Vecteur de bruit en bande de base au niveau des éléments du sous-réseau $r$ au temps $t = kT_s$ $(k \in \mathbb{N})$	V
D	Matrice de déphasages électriques	
$R^{f}_{XX_{r}}$	Matrice de covariance lissée des signaux type "forward"	
$R^b_{XX_m}$	Matrice de covariance lissée des signaux de type "backward"	
$\widetilde{m{R}}_{xx}$	Matrice de covariance lissée ("forward" et "backward")	
J	Matrice miroir	
${oldsymbol{Q}}$	Matrice de coefficients employée pour exprimer la matrice de canal ${\boldsymbol B}$	
	à partir d'un ensemble de vecteurs de base du sous-espace fondamental	
Z	Matrice de permutation et de mise à l'échelle des colonnes	
χ	Base employée pour l'application de l'estimateur exponentiel	

Symbole	Description	Unités
v	Vecteur de pondération des signaux reçus employé pour l'application	
	de l'estimateur exponentiel	
$\zeta( ho)$	Fonction de balayage employée pour l'application de l'estimateur ex-	
	ponentiel	
$\mathcal{A}_g$	Alphabet des symboles propre à l'enveloppe complexe du groupe $g$	
$s_{g_\ell}$	$\ell\text{-}\mathrm{i\grave{e}me}$ symbole transmis propre à l'enveloppe complexe du groupe $g$	
$p_g(t)$	Fonction de mise en forme d'impulsion reçue du groupe $g$	
H	Matrice de réponse en symbole du système	
$\mathbf{S}_{g_k}$	Vecteur des symboles consécutifs reçus propre à l'enveloppe complexe	
	d'un usager $g$ au temps $t = kT_{\mathcal{S}} \ (k \in \mathbb{N})$	
$c_g$	Vecteur des coefficients propres à l'enveloppe complexe du groupe $g$	
	considérant une modélisation des signaux reçus de type FIR-MIMO	
$T_{\max_g}$	Etalement en délai maximal du canal de l'usager $g$	S
$L_g$	Longueur (ou mémoire) du canal de l'usager $g$	
$W_g$	Largeur temporelle de la fonction de mise en forme d'impulsion reçue	S
	du <i>g</i> -ième groupe de signaux	
$U_{2}$	Facteur de suréchantillonnage	
$\sigma^2_{\mathrm{sym}_g}$	Puissance des symboles de l'enveloppe complexe reçue du $g$ -ième	W
	groupe de signaux	
au	Délai général pour calculs d'autocorrélation	S
$\beta$ $\mathbf{D}$ $(t_{-})$	Facteur "roll-off" pour impulsions de type RC	
$oldsymbol{R}_{xx}(t, au)$	Matrice d'autocorrelation générale des signaux reçus evaluée à un temps t avec un délai $\tau$	
$\mathbf{B}$ $(t \ \tau)$	temps t avec un detai t	
$\mathbf{L}_{uu}(t, T)$	dans un environnement cohérent évaluée à un temps $t$ avec un délai	
	au	
$oldsymbol{B}_{max}^{(p,q)}$	Matrice d'autocorrélation $\mathbf{R}_{arr}(t \tau)$ évaluée en $t = nT/U$ et $\tau =$	
<b>LO</b> UL	aT/U	
$oldsymbol{R}_{uu}^{(p,q)}$	Matrice d'autocorrélation $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$ évaluée en $t = pT/U$ et $\tau =$	
uu	qT/U	
$\Delta \boldsymbol{R}_{rr}^{(p_1,p_2,q)}$	Matrice d'autocorrélation différentielle des signaux recus évaluées à	
	partir des matrices d'autocorrélation d'indices de phase $p_1$ et $p_2$ et	
	d'indice de délai q	
u	Indice maximal de la séquence de symboles consécutifs reçus formant	
	un vecteur $\mathbf{s}_k$ donné	
b	Indice minimal (en valeur absolue) de la séquence de symboles consé-	
	cutifs racus formant un vecteur S. donné	

À ma mère

All truth passes through three stages. First, it is ridiculed. Second, it is violently opposed. Third, it is accepted as being self-evident.

Arthur Schopenhauer, philosophe allemand (1788–1860)

## Remerciements

Je tiens sincèrement à remercier ma mère ainsi que ma belle compagne Crystal qui m'ont apporté soutien et encouragements constants dans les moments les plus difficiles de mon parcours doctoral. Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers tous ceux et celles qui ont participé de façon active à la vie du laboratoire et qui, indirectement, ont contribué et rendu possible la dépôt de ma thèse en 2013. Je fais particulièrement référence ici à des personnages comme Pascal, Mathieu, Bahareh, Louis-Philippe et bien d'autres. À cette liste je me dois également d'inclure Mario sans qui ma remise en question des principes électromagnétiques de base n'aurait pas été poussée aussi loin.

J'aimerais également porter une mention de remerciement spéciale à mes amis de longue date Bertrand et Michaël qui, bien que distants, ont été d'un support moral important tout au long de mes études. Je continue d'entretenir l'espoir que dans un avenir rapproché je puisse partager et développer avec eux des idées de projets bien particuliers visant un mieux-être de la collectivité.

En dernier lieu, je tiens à remercier personnellement mon directeur de thèse le professeur Dominic Grenier pour son support à tous les niveaux sans lequel le bon dénouement et l'achèvement de mon programme n'auraient pas été possible.

## Introduction

#### 1.1 Les communications mobiles en 2013

Aujourd'hui, l'intégration des technologies de communication mobile, et en général sans fil, est devenue essentielle au développement ainsi qu'au bon fonctionnement de nos sociétés contemporaines. Que ce soit à des fins ludiques, lucratives, scientifiques ou autres, ces technologies innovent en apportant fiabilité, efficacité et commodité à un nombre croissant d'applications diverses. Un des secteurs ayant connu une forte croissance depuis les dernières décennies est celui de la communication mobile, plus particulièrement cellulaire, où le développement des infrastructures s'étend maintenant à plusieurs régions du monde. À la fin de l'année 2011, on estimait que le nombre d'abonnés mobiles global atteignait 6 milliards, soit plus de 85% de la population mondiale [1]. Dans un même ordre d'idées, la Fig. 1.1 présente un aperçu intéressant de l'évolution du marché des communications mobiles aux États-Unis<sup>1</sup>, reflétant du même coup une tendance générale observée dans d'autres régions du monde. À titre indicateur, neuf des vingt plus importants marchés de télécommunications en terme de revenus en 2010 étaient des pays en développement ou des économies émergentes importantes telles la Chine, l'Inde, le Brésil et la Russie [1]. On explique ces observations en partie par le fait que ces pays aient été moins affectés par la crise économique de 2008. Dans l'ensemble, on estime que le marché des communications mobiles devrait continuer de croître dans les prochaines années malgré la présence d'indicateurs de saturation dans certaines régions.

<sup>1.</sup> Ces statistiques sont obtenues à partir de données de fournisseurs CMRS (Commercial Mobile Radio Service), englobant entre autres les familles PCS ("Personal Communications Services"), ESMR ("Enhanced Specialized Mobile Radio"), BRS ("Broadband Radio Service") et les détenteurs de permis de diffusion sur la bande de 700 MHz.





 ${\rm Figure}$  1.1 – Regard sur l'expansion du marché des communications mobiles aux États-Unis (détenteurs de licences CMRS) entre 1988 et 2012.

#### 1.2 Bénéfices associés à l'utilisation d'antennes-réseaux

Le déploiement des technologies sans fil de quatrième génération (4G LTE) dès l'année 2009 était une réponse naturelle visant à fournir une meilleure qualité de service (QoS, "Quality of Service") et à accommoder une demande croissante en matière d'applications multimédia [2, 3]. Actuellement, une part importante des travaux de recherche en matière de communication sans fil est destinée au développement et à l'intégration des systèmes pleinement 4G (LTE-Advanced) ainsi qu'à l'élaboration des futurs standards qui serviront de base aux systèmes de cinquième génération (5G) [4, 5]. On perçoit depuis plusieurs années l'utilisation d'antennes-réseaux <sup>2</sup> comme une solution potentielle permettant d'augmenter significativement

<sup>2.</sup> Connues également sous les noms d'antennes intelligentes ou antennes adaptatives.

les débits de transmission tout en préservant une QoS équivalente. Ces dernières consistent en groupements d'antennes à géométries prédéfinies à partir desquels des algorithmes de traitement de signal sophistiqués sont appliqués. Les principaux bénéfices associés à l'utilisation d'antenne-réseaux en communication mobile sont [6, 7, 8, 9, 10] :

- Réduction de l'interférence co-cannal (CCI, "Co-Channel Interference"). En communication mobile, la CCI est observée lorsque deux cellules radio employant une même fréquence porteuse ne sont pas suffisamment éloignées les unes des autres pour des puissances d'émission données. On montre alors que l'utilisation d'antennes-réseaux permet de réduire cette interférence lorsque les signaux désirés et interférents à un point donné possèdent des directions d'arrivée (DOAs, "Direction Of Arrivals") différentes. En mode transmission, un faisceau est émis en direction d'un usager particulier (directivité accrue en direction de l'usager) et réduit ainsi le niveau d'interférence en direction des autres usagers. En mode réception, l'antenne intelligente s'ajuste de façon a ce qu'un gain nul soit imposé en direction des usagers autres qu'un usager d'intérêt. Un tel ajustement implique cependant la connaissance des DOAs des signaux interférents.
- Réduction du délai d'étalement et de l'affaiblissement dû aux trajets multiples. La formation de faisceaux en des directions spécifiques et l'imposition de nuls en d'autres permet de diminuer significativement le délai d'étalement causé par la propagation des signaux dans un environnement à trajets multiples, d'où également une diminution de l'affaiblissement engendré par la réception simultanée de signaux plus ou moins déphasés entre eux. Différents traitements peuvent être appliqués pour ce faire, dont certains présentés en [7].
- Réduction du taux d'erreur binaire (BER, "Bit Error Ratio"). Une conséquence naturelle des premier et deuxième points mentionnés précédemment est la réduction du BER considérant un rapport signal à bruit (SNR, Signal-to-Noise Ratio) constant. Une telle amélioration implique une meilleure qualité de communication et peut également permettre un taux de transfert plus élevé.
- Efficacité spectrale et augmentation de la capacité. L'efficacité spectrale réfère au taux de transmission maximal pouvant être atteint par un système sur une largeur de bande donnée. La capacité d'un canal réfère quant à elle à la quantité d'information maximale pouvant être transmise de façon fiable dans un canal donné. Ainsi, à capacité constante, l'augmentation du nombre d'usagers en service pour un même BER augmente l'efficacité spectrale du système. Or, une meilleure qualité du signal résultant de la réduction de la CCI et de l'affaiblissement par trajets multiples (utilisation d'antennes-réseaux) permet de desservir un plus grand nombre d'usagers tout en maintenant une QoS équivalente. Il en résulte ainsi une augmentation de l'efficacité spectrale. Mentionnons également qu'un traitement par antenne-réseau permet également d'augmenter la capacité d'un canal par la voie de multiplexage spatial (techniques MIMO, "Multiple-Input Multiple- Output").

Extension de la zone de couverture. L'emploi d'antennes intelligentes peut également augmenter la superficie de la zone de couverture d'une station base via la directivité accrue obtenue par une utilisation conjointe de tous les éléments (ou antennes) du réseau. En [9], on montre que le gain G obtenu considérant un réseau de N éléments isotropes, une efficacité de rayonnement de 100% et un couplage mutuel nul entre les éléments s'exprime par :

$$G \approx N$$
.

Un tel résultat montre que le champ électrique émis et mesuré à une certaine distance d'une antenne-réseau émettrice est G fois plus élevé que celui qui serait mesuré à la même distance si un seul élément était employé. Il en résulte ainsi une possibilité d'extension de la zone de couverture. On montre également dans ce même ouvrage que le facteur d'extension (REF, "Range Extension Factor") est donné par :

$$\operatorname{REF} = N^{1/n}$$

où n représente un coefficient de perte propre au milieu de propagation. Une telle extension de couverture permet donc la réduction du nombre de stations de base impliquant à son tour une réduction des coûts d'installation et d'entretien.

Réduction des puissances d'émission. La directivité accrue en direction d'un usager permet une réduction de la puissance d'émission du mobile considéré, et par conséquent une diminution de l'intensité des champs rayonnés (préoccupations pour la santé). Une telle diminution de puissance impliquerait à son tour une longévité accrue des batteries, ou permettrait une réduction des dimensions physiques des appareils considérant l'emploi de batteries de taille réduite.

#### 1.3 Enjeux et objectifs de la thèse

On peut constater suite aux points abordés à la section précédente que plusieurs des bénéfices associés à l'utilisation d'antennes intelligentes reposent sur deux principes de base : l'estimation des DOAs et la formation de voies (de l'anglais "*beamforming*"). En effet, les performances d'une station de base munie d'une antenne-réseau reposent fondamentalement sur la faculté de cette dernière à focaliser son rayonnement en direction d'un usager particulier tout en minimisant l'énergie reçue ou émise en direction des autres usagers (cf. Fig. 1.2). Pour ce, la direction (ou plus généralement la signature spatiale) de l'usager désiré doit être a priori connue, ou encore celles associées aux autres usagers, ce qui permet l'ajustement du diagramme de rayonnement du réseau tel que ce dernier possède une réponse nulle en ces directions. Dans l'ensemble, un traitement optimal par antenne-réseau requiert donc une certaine connaissance des directions d'arrivée des signaux ou du canal des usagers, justifiant ainsi le présent travail de recherche.



 $\label{eq:Figure 1.2-Principe de formation de voies où une antenne-réseau focalise son rayonnement en direction d'un usager particulier tout en possédant une réponse nulle en direction des autres usagers.$ 

Le problème d'estimation des DOAs à partir d'une antenne-réseau, ou plus généralement celui de l'estimation des paramètres des sources, a reçu beaucoup d'attention dans la littérature et demeure encore aujourd'hui un sujet d'actualité. L'intérêt en ce domaine débuta avec le développement de la première antenne intelligente par General Electric dans les années 1960's, connue sous le nom de "sidelobe canceler" [11, 12]. Cette dernière possédait une antenne à gain élevé pour la réception d'un signal désiré, ainsi qu'une seconde antenne à gain plus faible pour l'annulation de lobes latéraux. Le principe consistait à effectuer une somme pondérée des sorties des deux antennes de telle sorte qu'un signal interférent soit complètement éliminé du signal sommé. Un autre type d'antenne adaptative fut développé par Widrow *et al.* dans la même période, mais utilisant cette fois un signal de référence et employant des déphaseurs RF afin de contrôler le diagramme de rayonnement du réseau [13]. De cette contribution naquit le concept de balayage électronique. S'en suivirent ensuite différentes contributions de plusieurs auteurs en ce domaine avec une emphase particulière sur l'aspect de détection et d'estimation des signaux, dont les mieux connues et les plus classiques sont l'estimateur de Capon [14] et l'algorithme MUSIC ("*MUltiple SIgnal Classification*") de Schmidt [15].

De nos jours, les bases d'opération d'une majorité des systèmes d'antennes intelligentes reposent toujours sur les principes classiques établis en cette période, à savoir le balayage électronique et les méthodes d'estimation du second-ordre à base de sous-espaces (e.g. MUSIC). On tire toutefois maintenant profit de la grande puissance de calcul des processeurs de signal numérique (DSPs) avec implémentation des algorithmes de traitement des signaux au niveau bande de base. La recherche en matière de méthodes d'estimation et de détection des signaux a pour sa part évoluée à partir des méthodes classiques <sup>3</sup> vers des algorithmes plus sophistiqués faisant appels à des statistiques d'ordre supérieur ou exploitant des propriétés bien spécifiques

<sup>3.</sup> On entend ici par méthodes classiques les méthodes du second-ordre à base de sous-espaces ayant été développées avant les années 1990's.

des signaux reçus.

Cette thèse présente une rétrospective des méthodes d'estimation les plus avancées et les plus populaires en la matière, avec comme objectif l'apport d'une contribution significative en ce domaine. Plus spécifiquement, on s'intéressera au développement d'algorithmes ne possédant pas les limitations des méthodes classiques (en lien au nombre de degrés de liberté du réseau) et n'impliquant pas de simplifications ou de suppositions trop contraignantes vis-à-vis la nature des signaux reçus. Ce dernier point fera d'ailleurs l'objet d'une étude approfondie avec une emphase particulière sur l'importance d'une modélisation initiale appropriée des signaux. Il sera entre autres montré comment certaines familles d'algorithmes exploitant des propriétés bien particulières des signaux reçus et donnant naissance à des possibilités de traitement des plus intéressantes négligent toutefois implicitement certaines caractéristiques intrinsèques propres aux signaux de communication, rendant du coup plus difficile et/ou complexe leur implémentation pratique. Ce travail de recherche se justifie donc en partie par le défi académique et mathématique qu'il représente ainsi que pour ses bénéfices potentiels dans l'implémentation de futurs systèmes d'antennes intelligentes tels que ceux mentionnés à la section 1.2.

#### 1.4 Résumé des chapitres

Les chapitres de cette thèse sont présentés par ordre chronologique d'avancement des travaux, et non par ordre de progression théorique logique de la matière (e.g. comme il est coutume de rencontrer dans un livre) bien que ceci soit néanmoins respecté en majeure partie. Il fut décidé d'adopter un tel style afin de mieux justifier et de donner au lecteur une meilleure compréhension du cheminement qui conduisit aux contributions principales. On notera également qu'aucun des chapitres n'est entièrement dédié à une revue complète de la littérature, car l'estimation des DOAs (ou celle des paramètres des sources) à partir d'une antenne-réseau est un sujet de recherche où subsiste une grande diversité au niveau traitement et hypothèses de travail, et dont une synthèse serait à la fois trop longue et quelque peu superflue. Une revue des méthodes d'estimation les plus populaires en lien aux contributions principales sera plutôt présentée au rythme de progression des travaux dans les chapitres appropriés.

Une attention particulière doit être accordée au chapitre 2 qui présente la théorie de base du traitement d'antenne (de l'anglais "array processing") de même qu'une revue de littérature des algorithmes les plus classiques en ce domaine. On y aborde le problème d'estimation des DOAs de façon formelle de même que les principes fondamentaux de la formation de voies. Le bon entendement de cette partie est essentiel à la compréhension des chapitres subséquents, et on y introduira par le fait même la plupart des notations qui seront employées dans le reste du document.

Le chapitre 3 traite pour sa part des méthodes d'estimation ayant recours à des statistiques d'ordre supérieur, plus spécifiquement les cumulants d'ordre quatre sur lesquels la majorité des efforts de recherche dans cette thèse fut consacrée. On y présentera une première contribution en lien à l'amélioration d'une procédure d'estimation existante tant au niveau de la complexité de calcul que des performances statistiques de l'estimateur.

Le chapitre 4 fait quant à lui suite aux développements du chapitre 3. On tente de pallier aux limitations et aux désavantages des méthodes d'estimation d'ordre supérieur par l'utilisation d'estimateurs non linéaires. Au final, on y présente une méthode d'estimation analytique complexe reposant sur l'évaluation de moments exponentiels et ne possédant pas les limitations principales des méthodes de second et quatrième ordre les plus populaires.

Au chapitre 5, on effectue un retour sur la modélisation en tenant compte de l'aspect de synchronisation des signaux et de son implication chez certaines familles d'algorithmes exploitant des propriétés statistiques bien spécifiques des signaux reçus, tels ceux discutés aux chapitres 3 et 4. On verra comment ce phénomène peut être modélisé correctement dans l'expression analytique des signaux reçus et comment il peut potentiellement être exploité à des fins de traitements plus efficaces tenant davantage compte des propriétés de transmission naturelle des signaux de communication.

Le chapitre 6 présente un algorithme d'estimation en lien direct avec la théorie du chapitre 5, et constitue la contribution principale de cette thèse. Essentiellement, on y verra comment des notions généralisées propres aux méthodes d'estimation du second et quatrième ordres peuvent être appliquées dans le contexte naturel de signaux asynchrones. Plusieurs discussions, exemples et comparaisons avec des méthodes d'approches différentes (mais pour le même objectif) seront également donnés.

Finalement, le chapitre 7 présente la conclusion générale des travaux sous forme de possibles idées et avenues de recherche intéressantes pouvant potentiellement donner suite à des travaux complémentaires. On y couvrira entre autres certains sujets connexes mais non directement lié au problème principal abordé dans cette thèse.

### Chapitre 2

## Théorie de base

Ce chapitre se veut une introduction générale à la théorie de base du traitement d'antenne qui sera d'usage dans tous les chapitres de cette thèse. Les principaux objectifs visés par cette section sont d'une part une couverture essentielle des algorithmes d'estimation théoriques classiques les plus populaires en la matière, et d'une autre l'introduction des principales notations qui seront employées dans les chapitres subséquents.

#### 2.1 Modélisation des signaux

La modélisation des signaux, ou en général l'élaboration d'un modèle de base dans toute recherche scientifique théorique, constitue l'aspect fondamental ayant l'incidence la plus directe sur la pertinence et la validité des résultats obtenus, quelle que soit leur nature. Une attention particulière a donc été accordée à cette section.

#### 2.1.1 Signaux passe-bande et enveloppe complexe

Il est coutume d'employer la notation passe-bande [16] pour représenter le signal radiofréquence (RF) g(t) émis par un émetteur donné. Un signal transmis peut ainsi être représenté par :

$$g(t) = \Re\{s(t)e^{j\omega_0 t}\},$$
(2.1)

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$  où  $f_0$  est la fréquence porteuse, et où s(t) représente l'enveloppe complexe du signal intelligible. Ce dernier peut à son tour être exprimé par :

$$s(t) = I(t) + jQ(t),$$
 (2.2)

où I(t) et Q(t) (réels) représentent respectivement les signaux en phase et en quadrature dont la forme temporelle exacte dépend de la constellation et du type de filtre de mise en forme d'impulsion (de l'anglais "*pulse shaping filter*") utilisé. De (2.1) et (2.2), on a donc :

$$g(t) = I(t)\cos(\omega_0 t) - Q(t)\sin(\omega_0 t).$$
(2.3)

Du côté récepteur, les signaux I(t) et Q(t) sont reconstitués au moyen d'un démodulateur en phase et en quadrature [17, 18] (ou démodulateur I-Q) dont le principe est illustré à la Fig. 2.1. À la sortie des mélangeurs, on a<sup>1</sup> :



FIGURE 2.1 – Principe de démodulation de signaux passe-bande.

$$A(t) = I(t)\frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega_0 t)\right) - Q(t)\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)$$
(2.4)

$$B(t) = Q(t)\frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\omega_0 t)\right) - I(t)\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t).$$
(2.5)

Considérant un filtrage passe-bas idéal, toute composante associée à la fréquence porteuse  $f_0$  disparaît, de sorte que seuls les termes I(t)/2 de A(t) et Q(t)/2 de B(t) sont présents à la sortie des filtres. Un gain K = 2 permet par la suite une mise à l'échelle des signaux afin d'en retrouver la forme originale. En terme d'entrée-sortie, l'opération de démodulation idéale peut donc être représentée par :

$$\Re\{s(t)e^{j\omega_0 t}\} \xrightarrow[\text{démod.}]{} s(t) , \qquad (2.6)$$

où s(t) = I(t) + jQ(t) est l'enveloppe complexe du signal originalement transmis. Cette dernière peut ensuite être échantillonnée à un taux  $1/T_s$  pour produire le signal discret  $s_k(t) = I(t_k) + jQ(t_k)$  où  $t_k = kT_s$  avec  $k \in \mathbb{N}$ .

#### 2.1.2 Environnement multi-usagers avec antenne-réseau

L'équation (2.6) est une représentation compacte et idéale du processus de restitution d'un signal en bande de base à partir d'un signal RF capté. Cette dernière est idéale en ce sens qu'un verrouillage de phase parfait sur la porteuse est réalisé au démodulateur, n'impliquant aucune rotation ou changement de phase du signal complexe s(t). La situation devient tout autre cependant en présence de plusieurs signaux RF incidents, et constitue généralement le

<sup>1.</sup> Usant des identités  $\sin^2(u) = \frac{1}{2} (1 - \cos(2u)), \cos^2(u) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2u))$  et  $\sin(u) \cos(v) = \frac{1}{2} (\sin(u+v) + \sin(u-v)).$ 

problème abordé par le traitement d'antenne. On considère à cet effet un ensemble de M signaux de même largeur de bande et de même fréquence porteuse  $f_0$  incidents sur un réseau d'antennes constitués de N éléments. L'émission de signaux distincts sur une même bande de fréquence est habituellement synonyme d'interférence indésirable au récepteur. Cependant, on compte ici sur la capacité de l'antenne-réseau à focaliser son rayonnement vers une source particulière afin de minimiser cette interférence et de permettre un fonctionnement multi-usagers, augmentant ainsi l'efficacité spectrale globale du système. Le problème devient alors celui de l'estimation des paramètres de propagation des sources afin d'exercer un contrôle précis du diagramme de rayonnement du réseau.

La Fig. 2.2 illustre un élément *i* d'un réseau quelconque en présence d'une source ponctuelle *m* dans un espace à trois dimensions. On justifie habituellement l'hypothèse de sources ponctuelles par le fait qu'une distance suffisamment grande sépare l'émetteur du récepteur, bien qu'en pratique ces dernières soient plutôt distribuées sur une certaine plage angulaire [19, 20, 21]. Cette hypothèse n'est cependant pas cruciale pour la suite des travaux et ne servira ici que temporairement afin de mettre en évidence certaines caractéristiques de propagation permettant d'établir un modèle théorique rigoureux de réception des signaux. Selon (2.1), le signal RF  $g_m(t)$  émis par cette dernière au point  $\mathbf{r}_m$  peut être exprimé en toute généralité par :



FIGURE 2.2 – Réception d'un signal arbitraire m par une antenne i d'un réseau dans un espace à trois dimensions.

$$g_m(t) = \Re\{s_m(t)e^{j(\omega_0 t + \Theta_m)}\}, \qquad (2.7)$$

où  $\Theta_m$  est la phase de la porteuse du signal m en ce point. Assumant une propagation sans

perte<sup>2</sup> en espace libre, le signal  $g_{i,m}(t)$  capté par l'élément *i* au point  $\mathbf{r}_i$  peut donc être exprimé par :

$$g_{i_m}(t) = g_m(t - \tau_{i_m}) = \Re\{s_m(t - \tau_{i_m})e^{j(\omega_0 t + \Theta_m - \omega_0 \tau_{i_m})}\},$$
(2.8)

avec

$$\tau_{i_m} = \frac{||\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_m||}{c} \tag{2.9}$$

où c représente la vitesse de propagation dans le milieu. Il devient intéressant à présent de déterminer l'expression du signal complexe  $s_{i_m}(t)$  obtenu après démodulation du signal incident à l'aide d'un montage semblable à celui de la Fig. 2.1, en considérant toutefois une phase arbitraire  $\gamma_i$  de l'oscillateur local (propre à l'élément *i* du réseau). Usant des mêmes identités trigonométriques, on montre que la relation entrée-sortie d'un processus de démodulation général considérant une phase de porteuse incidente  $\Theta_m$  et un angle d'oscillateur local  $\gamma$  est :

$$\Re\{s(t)e^{j(\omega_0 t+\Theta)}\} \xrightarrow[\text{démod.}]{} s(t)e^{j(\Theta-\gamma)} .$$
(2.10)

Ainsi,

$$\Re\{s_m(t-\tau_{i_m})e^{j(\omega_0t+\Theta_m-\omega_0\tau_{i_m})}\} \xrightarrow[demod]{\omega_0t+\gamma_i} s_m(t-\tau_{i_m})e^{j(\Theta_m-\omega_0\tau_{i_m}-\gamma_i)}.$$
(2.11)

Cette expression correspond à la contribution de la source m au signal reçu par l'élément i. Notant ce dernier par  $x_i(t)$  et considérant un ensemble de M sources dans l'espace, on obtient par le principe de superposition :

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t - \tau_{i_m}) e^{j(\Theta_m - \omega_0 \tau_{i_m} - \gamma_i)} + n_i(t) , \quad i \in \{1, 2..., N\}, \quad (2.12)$$

où on considère également la présence d'un bruit additif arbitraire  $n_i(t)$ . Cette relation constitue donc un modèle général des signaux reçus sous les hypothèses

- 1) de sources ponctuelles,
- 2) d'une propagation homogène, isotrope et sans perte,
- d'une démodulation "idéale" sans biais et sans distorsion différentielle d'amplitude ou de phase dans les branches I et Q,
- 4) d'éléments omnidirectionnels possédant un gain identique dans toutes les directions (ou du moins celles des sources en présence),
- 5) d'un couplage mutuel nul entre les éléments du réseau.

<sup>2.</sup> La supposition d'une propagation sans perte est une autre hypothèse dont les conséquences n'auront aucune incidence sur la véracité du modèle final des signaux reçus. Cette dernière n'est que temporairement adoptée ici afin de faire intervenir la notion de délais de propagation avec un maximum de convenance.
On peut également obtenir un modèle équivalent à (2.12) en considérant un élément de référence au niveau duquel les signaux incidents sont perçus avec un retard de propagation nul. Soit  $q \in \{1, 2, ..., N\}$  un tel élément. L'opération consiste alors à effectuer le remplacement  $t \to t + \tau_{q_m}$  en (2.8) et (2.11) pour ensuite obtenir une expression générale similairement à (2.12). Bien qu'à première vue il puisse sembler problématique d'associer à une valeur t un ensemble simultané de M valeurs  $t + \tau_{q_1}, t + \tau_{q_2}, \ldots, t + \tau_{q_M}$ , l'opération ne consiste ni plus ni moins qu'à exprimer les signaux incidents en terme de leur avance au point  $\mathbf{r}_q$ , et n'implique aucune perte de généralité du modèle tel qu'illustré à la Fig. 2.3.



FIGURE 2.3 – Équivalence de notations avec décalage temporel considérant un élément de référence q.

On peut ainsi réexprimer (2.8) et (2.11) par :

$$g_{i_m}(t) = g_m(t + \tau_{q_m} - \tau_{i_m}) = \Re\{s_m(t + \tau_{q_m} - \tau_{i_m})e^{j(\omega_0 t + \Theta_m - \omega_0(\tau_{i_m} - \tau_{q_m}))}\},$$
(2.13)

$$g_{i_m}(t) \xrightarrow[\text{démod.}]{} s_m(t + \tau_{q_m} - \tau_{i_m}) e^{j(\Theta_m - \omega_0(\tau_{i_m} - \tau_{q_m}) - \gamma_i)} .$$

$$(2.14)$$

Ainsi, un nouveau modèle des signaux reçus considérant un élément de référence q est obtenu par :

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t + \tau_{q_m} - \tau_{i_m}) e^{j(\Theta_m - \omega_0(\tau_{i_m} - \tau_{q_m}) - \gamma_i)} + n_i(t) , \quad \{i, q\} \in \{1, 2..., N\}.$$
(2.15)

#### 2.1.3 Réseau linéaire uniforme

Le réseau linéaire uniforme (ULA, "Uniform Linear Array") est le plus étudié dans la littérature étant donnée sa géométrie simple et le potentiel intéressant qu'il possède en matière de décorrélation des signaux, tel qu'il sera vu à la section 2.6. La Fig. 2.4 illustre un tel réseau considérant des éléments disposés sur l'axe x et des sources en champ lointain dans le plan xy. Il s'agit ici d'un scénario classique où on s'intéresse à la localisation de sources en azimut. On introduit ici la notation



FIGURE 2.4 – Réseau linéaire uniforme dans la plan xy avec sources en champ lointain. L'élément 1 est considéré comme référence (q = 1).

$$\Delta \tau_{i,q,m} = \tau_{i_m} - \tau_{q_m} , \ \{i,q\} \in \{1,2\dots,N\},$$
(2.16)

où q représente un élément de référence quelconque (on emploiera (2.15) pour obtenir un modèle général des signaux reçus). De par la géométrie du problème, on déduit que :

$$c\Delta\tau_{i,q,m} = (i-q)d\cos(\theta_m), \qquad (2.17)$$

qui correspond à la différence de longueur de trajet  $||\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_m|| - ||\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_m||$ . On peut ainsi réécrire (2.15) tel que :

$$x_{i}(t) = \sum_{m=1}^{M} s_{m}(t - \Delta \tau_{i,q,m}) e^{j(\Theta_{m} - \gamma_{i} - \omega_{0} \Delta \tau_{i,q,m})} + n_{i}(t)$$
  
= 
$$\sum_{m=1}^{M} s_{m} \left( t - \frac{(i-q)d\cos(\theta_{m})}{c} \right) e^{j(\Theta_{m} - \gamma_{i} - (i-q)\phi_{m})} + n_{i}(t), \qquad (2.18)$$

avec

$$\phi_m = \beta_0 d \cos(\theta_m) ,$$
  

$$\beta_0 = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} ,$$
(2.19)

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde de la porteuse.

## Hypothèse bande étroite

L'hypothèse bande étroite est très répandue dans la littérature car, comme il sera montré sous peu, elle permet d'exprimer les signaux reçus sous forme matricielle directement dans le domaine temporel. Dans le contexte du traitement d'antenne, cette hypothèse signifie que la variation du signal complexe en bande de base propre à chaque source est négligeable sur l'intervalle de temps de propagation d'un élément à l'autre du réseau. Formellement, elle signifie que :

$$s_m(t) \approx s_m\left(t \pm \max_{p,q} |\tau_{p_m} - \tau_{q_m}|\right) \forall m.$$
(2.20)

Cette condition assure donc la validité de l'hypothèse bande étroite, et demeure valide indépendamment de la géométrie du réseau. En termes simples, elle stipule simplement qu'un signal  $s_m(t)$  ne doit pas varier significativement pendant un temps égal à la différence de temps de propagation maximal du réseau (i.e. entre les éléments les plus éloignés). Dans le cas spécifique de l'ULA, la différence de temps de propagation est maximale entre les éléments 1 et N où un signal possédant une direction d'arrivée de 0° parcours alors une distance (N-1)d. L'hypothèse bande étroite sera donc vérifiée si :

$$s_m(t) \approx s_m\left(t - \frac{(N-1)d}{c}\right) \ \forall \ m \,.$$
 (2.21)

L'équation (2.18) se simplifie donc à :

$$x_i(t) = \sum_{m=1}^M s_m(t) e^{j(\Theta_m - \gamma_i - (i-q)\phi_m)} + n_i(t) , \qquad (2.22)$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \\ \vdots \\ x_{N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j(\Theta_{1}-\gamma_{1}-(1-q)\phi_{1})} & e^{j(\Theta_{2}-\gamma_{1}-(1-q)\phi_{2})} & \dots & e^{j(\Theta_{M}-\gamma_{1}-(1-q)\phi_{M})} \\ e^{j(\Theta_{1}-\gamma_{2}-(2-q)\phi_{1})} & e^{j(\Theta_{2}-\gamma_{2}-(2-q)\phi_{2})} & \dots & e^{j(\Theta_{M}-\gamma_{2}-(2-q)\phi_{M})} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j(\Theta_{1}-\gamma_{N}-(N-q)\phi_{1})} & e^{j(\Theta_{2}-\gamma_{N}-(N-q)\phi_{2})} & \dots & e^{j(\Theta_{M}-\gamma_{N}-(N-q)\phi_{M})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1}(t) \\ s_{2}(t) \\ \vdots \\ s_{M}(t) \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} n_{1}(t) \\ n_{2}(t) \\ \vdots \\ n_{N}(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \,.$$

$$(2.23)$$

Assumant un contrôle de phase précis des oscillateurs locaux tel que  $\gamma_i = \gamma \ \forall i$ , on a :

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} e^{-j(1-q)\phi_1} & e^{-j(1-q)\phi_2} & \dots & e^{-j(1-q)\phi_M} \\ e^{-j(2-q)\phi_1} & e^{-j(2-q)\phi_2} & \dots & e^{-j(2-q)\phi_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j(N-q)\phi_1} & e^{-j(N-q)\phi_2} & \dots & e^{-j(N-q)\phi_M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j(\Theta_1-\gamma)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j(\Theta_2-\gamma)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j(\Theta_M-\gamma)} \end{bmatrix}$$
$$\equiv \boldsymbol{AC}, \qquad (2.24)$$

et par conséquent :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t) \,. \tag{2.25}$$

La matrice A est appelée matrice directionnelle car cette dernière se compose de M vecteurs directifs propres à la direction d'arrivée des M fronts d'onde incidents. On a :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}_M \end{bmatrix}, \qquad (2.26)$$

avec  $[\boldsymbol{a}_m]_i = e^{-j(i-q)\phi_m}$ . On remarque ici que  $[\boldsymbol{a}_m]_i = (e^{-j\phi_m})^{i-q}$ , propriété étant due à la géométrie linéaire du réseau. On dit de ce fait que la matrice  $\boldsymbol{A}$  est de type Vandermonde car les éléments d'une même colonne correspondent à ceux obtenus d'une progression géométrique. Il est intéressant de constater que pour M = N, une matrice  $\boldsymbol{A}$  de ce type vérifie [22] :

$$\det\{\boldsymbol{A}\} = \left[\prod_{1 \le p < \ell \le M} \left(e^{-j\phi_p} - e^{-j\phi_\ell}\right)\right] \prod_{p=1}^M e^{-j(1-q)\phi_p}, \qquad (2.27)$$

où  $q \in \{1, 2, ..., N\}$  est l'indice de l'élément de référence. La matrice C renferme quant à elle l'information relative aux différences de phases entre les porteuses des signaux incidents et les oscillateurs locaux des démodulateurs du réseau. Cette dernière est parfois omise dans la littérature sans toutefois impliquer de complication ou causer de problème particulier pour le problème d'estimation des paramètres abordé dans cette thèse. Le modèle classique des signaux reçus couramment rencontré dans la littérature possède la forme [23, 24, 17, 25, 10] :

$$\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{A}|_{q=1})\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t), \qquad (2.28)$$

où

$$\boldsymbol{A}|_{q=1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_1} & e^{-j\phi_2} & \dots & e^{-j\phi_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-j(N-1)\phi_1} & e^{-j(N-1)\phi_2} & \dots & e^{-j(N-1)\phi_M} \end{bmatrix}.$$
 (2.29)

Un tel modèle s'obtient facilement en assumant qu'un signal  $g_{1_m}(t) = \Re\{s_m(t)e^{j\omega_0 t}\}$  en provenance d'une source m est incident à l'élément 1, en déduisant ensuite le signal capté aux autres éléments par un décalage temporel approprié de ce dernier, et en sommant ensuite l'expression générale obtenue pour tenir compte d'un total de M sources en présence. Ce faisant toutefois, on néglige implicitement la contribution des différences de phases entre les porteuses des signaux incidents et les oscillateurs locaux des démodulateurs, ce qui amène un conflit d'interprétation au niveau du vecteur  $\boldsymbol{x}(t)$ . Imaginons par exemple que les signaux transmis (et reçus)  $s_m(t) \forall m$  soient de type PAM ou BPSK sur l'axe réel. On a ainsi  $s_m(t) \in \mathbb{R} \forall m$ . L'équation (2.28) montre alors que la composante signal sur l'élément 1 (i.e.  $x_1(t) - n_1(t)$ ) est purement réelle. Puisque l'élément de référence,  $x_q(t) - n_q(t) \in \mathbb{R}$ . Un modèle selon l'équation (2.28) permettrait donc d'imposer librement le choix d'un élément du réseau pour lequel la composante signal ne possèderait aucune partie imaginaire. Or une telle chose est impossible puisque le vecteur  $\mathbf{x}(t)$  est une grandeur observable en lecture seule et dont la distribution statistique ne peut être imposée au récepteur. Le problème disparaît toutefois avec une modélisation selon (2.25) où la matrice C assure une distribution généralement complexe de la composante signal de tous les éléments du réseau indépendamment de q. L'objectif de l'élaboration quelque peu fastidieuse d'un modèle des signaux reçus en (2.12) et (2.15) tenant compte des phases des porteuses des signaux incidents ainsi que de celles des oscillateurs locaux au récepteur ne servait qu'à mettre à la lumière ce point particulier.

#### 2.1.4 Généralisations pour réseaux à géométrie arbitraire

Le modèle des signaux reçus pour un réseau à géométrie arbitraire ne diffère que légèrement de celui obtenu en (2.25) pour l'ULA. On montre à cet effet que la relation

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t) \,. \tag{2.30}$$

demeure valable pour tout type de réseau sous l'hypothèse bande étroite avec  $\gamma_i = \gamma \forall i$ , et ne se restreint pas non plus à un espace à deux dimensions avec sources en champ lointain. La démonstration peut s'effectuer directement de (2.12) et (2.15) en imposant  $s(t \pm \epsilon) \rightarrow s(t)$ (hypothèse bande étroite) et  $\gamma_i = \gamma \forall i$ . La différence principale avec l'ULA et le modèle de l'équation (2.25) réside dans la structure de la matrice **A** qui dépend directement de la géométrie du réseau ainsi que de la position des sources.

On peut compléter le modèle général (2.30) en tenant compte de possibles effets indésirables associés à la réception des signaux comme un couplage mutuel non nul entre les éléments du réseau, des gains d'amplification non identiques sur les branches I et Q et des signaux d'oscillateur local différents (en phase et en amplitude) au niveau des démodulateurs. Toujours sous l'hypothèse bande étroite, on montre alors que [25, 26, 27] :

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t) , \qquad (2.31)$$

où  $\Gamma$  est une matrice de distorsion complexe englobant ces effets indésirables <sup>3</sup>. Il est intéressant de constater ici que la matrice des phases différentielles C des signaux incidents ne peut être absorbée par  $\Gamma$ . Ceci s'explique simplement par le fait que cette dernière soit plutôt liée aux signaux, donc intervenant au niveau du vecteur s(t), et non aux éléments.

Un modèle discret peut quant à lui être obtenu par un échantillonnage synchrone à la sortie de tous les éléments du réseau (cf. Fig. 2.1). On a :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k \tag{2.32}$$

<sup>3.</sup> Bien que des phases d'oscillateurs locaux identiques  $\gamma_i = \gamma \forall i$  aient été considérées et incluses dans C en (2.24) pour le cas de l'ULA, on peut démontrer qu'en général ces dernières sont plutôt incluses dans  $\Gamma$  sous la forme d'une matrice diagonale permettant de tenir également compte de possibles différences d'amplitude. La matrice  $\Gamma$  n'est toutefois pas diagonale si un couplage mutuel non nul existe entre les éléments du réseau.

où on emploie l'indice k pour représenter une quantité échantillonnée à l'instant  $t_k = kT_s$  où  $k \in \mathbb{N}$  et où  $T_s$  représente la période d'échantillonnage. L'équation (2.32) sera donc employée pour un traitement numérique des signaux.

Mentionnons finalement que sous l'hypothèse plus générale de signaux à large bande, une modélisation matricielle des signaux reçus dans le domaine temporel semblable à (2.31) ne peut être effectuée car l'enveloppe complexe d'un signal donné n'est alors plus identique d'un élément à l'autre du réseau à un même instant t (on doit considérer tous les délais de propagation de façon intègre). Une des avenues de traitement possible et très populaire en ce domaine consiste alors à travailler dans le domaine des fréquences en calculant la transformée de Fourier de (2.15) (ou encore (2.12)) par rapport à t. On montre ainsi que les N équations obtenues peuvent être mises sous la forme [2] :

$$\boldsymbol{x}(\omega) = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A}(\omega) \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}(\omega) + \boldsymbol{n}(\omega) , \qquad (2.33)$$

où l'information relative aux délais de propagation des enveloppes complexes des sources est incluse dans  $A(\omega)$ . Ces derniers représentent donc des paramètres inconnus ajoutant une complexité supplémentaire au problème d'estimation. Or on démontre en [2, 6] et de façon plus formelle en [25] que tout problème d'estimation tel que celui des DOAs peut être ramené à un ensemble de problèmes à bande étroite où des algorithmes de traitement dérivés du modèle de l'équation (2.31) peuvent alors être appliquées. Pour cette raison, et vu les efforts de recherche soutenus en ce domaine, cette thèse abordera donc le problème d'estimation des paramètres des sources sous l'hypothèse bande étroite.

## 2.2 Notions de base

## 2.2.1 Matrice de covariance et représentation matricielle

Une des grandeurs les plus populaires de l'analyse retrouvée en abondance dans la littérature et figurant dans la quasi-totalité des développements qui seront présentés dans les chapitres subséquents est la matrice de covariance des signaux reçus, définie par :

$$\boldsymbol{C}_{xx}(t_k) = E\{\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_k^{\dagger}\} - E\{\boldsymbol{x}_k\} E\{\boldsymbol{x}_k^{\dagger}\} \equiv \boldsymbol{R}_{xx}(t_k) - E\{\boldsymbol{x}_k\} E\{\boldsymbol{x}_k^{\dagger}\}, \qquad (2.34)$$

où  $E\{\cdot\}$ , '†' et  $\mathbf{R}_{xx}(t_k)$  représentent respectivement l'opérateur espérance mathématique, la transposition-conjugaison et la matrice d'autocorrélation des signaux. Pour une durée d'observation limitée, il est commun d'assumer que les vecteurs  $\mathbf{s}(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  (et conséquemment  $\mathbf{x}(t)$ ) soient des processus stochastiques stationnaires, ou du moins cyclostationnaires de période  $T_s$  de telle sorte que la distribution statistique de  $\mathbf{x}(t_k)$  ne dépende pas de  $t_k$ . On fait également l'hypothèse logique que les vecteurs  $\mathbf{s}(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  sont centrés autour de zéro (i.e.  $E\{\mathbf{s}(t)\} = \mathbf{0}$  et  $E\{\mathbf{n}(t)\} = \mathbf{0}$ ) et généralement non corrélés entre eux. Ainsi :

$$\boldsymbol{C}_{xx}(t_k) = \boldsymbol{R}_{xx}(t_k) \equiv \boldsymbol{R}_{xx} = E\{\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_k^{\dagger}\}.$$
(2.35)

Sous l'hypothèse de signaux centrés, la matrice  $\mathbf{R}_{xx}$  correspond donc également à la matrice de covariance des signaux reçus. Par définition,  $\mathbf{R}_{xx}$  est hermitienne étant donné que  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx}^{\dagger}$ . On démontre en plus que cette dernière est définie semi-positive (i.e. ne possède pas de valeur propre négative) [17]. Considérant une corrélation nulle entre les enveloppes complexes et le bruit, on a  $E\{s_m(t_k)n_i^*(t_k)\} = 0 \forall \{m, i\}$  et un développement complet à partir de (2.32) montre que :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = E\left\{ (\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}_{k} + \boldsymbol{n}_{k})(\boldsymbol{s}_{k}^{\dagger}\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{n}_{k}^{\dagger}) \right\}$$
$$= \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}E\{\boldsymbol{s}_{k}\boldsymbol{s}_{k}^{\dagger}\}\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + E\{\boldsymbol{n}_{k}\boldsymbol{n}_{k}^{\dagger}\}$$
$$\equiv \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{R}_{nn}, \qquad (2.36)$$

où  $\mathbf{R}_{ss}$  et  $\mathbf{R}_{nn}$  sont les matrices d'autocorrélation des sources et du bruit, qui sont également hermitiennes. La structure précise de  $\mathbf{R}_{ss}$  dépend du degré de corrélation des sources, qui à son tour dépend de la nature des émetteurs ainsi que du milieu de propagation. Cet aspect sera discuté avec plus de détails à la section 2.3. Par ailleurs, il est communément admis que la composante bruit des signaux observables est indépendante d'un élément à l'autre du réseau. Ceci implique que  $E\{n_p(t_k)n_q^*(t_k)\} = \delta_{p,q}\sigma_{n_p}^2$  où  $\delta_{p,q}$  représente la fonction impulsion de Kronecker valant 1 lorsque p = q et 0 autrement, et où  $\sigma_{n_p}^2$  représente la puissance du bruit au niveau de l'élément p. Il s'ensuit que :

$$\boldsymbol{R}_{nn} = E\{\boldsymbol{n}_{k}\boldsymbol{n}_{k}^{\dagger}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{n_{1}}^{2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_{n_{2}}^{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n_{N}}^{2} \end{bmatrix}.$$
(2.37)

Dans le cas spécifique où  $\sigma_{n_i}^2 = \sigma_n^2 \forall i$ , on obtient simplement  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ . Cette dernière simplification est la plus couramment utilisée dans la littérature considérant que la plupart des antennes-réseau sont constituées d'éléments du même type où il est intuitivement justifiable d'assumer un bruit de même niveau.

## 2.2.2 Influence du nombre limité d'échantillons

Mentionnons finalement qu'en pratique, un calcul exact de  $\mathbf{R}_{xx}$  à partir d'un nombre limité K d'échantillons (ou d'épreuves) est impossible. On considère donc une estimation  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(K)$  de  $\mathbf{R}_{xx}$  de la forme :

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{x}_{k} \boldsymbol{x}_{k}^{\dagger} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}_{k} + \boldsymbol{n}_{k}) (\boldsymbol{s}_{k}^{\dagger} \boldsymbol{C}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{n}_{k}^{\dagger})$$

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} (\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}_{k} \boldsymbol{s}_{k}^{\dagger} \boldsymbol{C}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}_{k} \boldsymbol{n}_{k}^{\dagger} + \boldsymbol{n}_{k} \boldsymbol{s}_{k}^{\dagger} \boldsymbol{C}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{n}_{k} \boldsymbol{n}_{k}^{\dagger})$$

$$= \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{s}_{k} \boldsymbol{s}_{k}^{\dagger} \right) \boldsymbol{C}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \left( \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{s}_{k} \boldsymbol{n}_{k}^{\dagger} \right)$$

$$(2.38)$$

$$+ \left(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{n}_{k}\boldsymbol{s}_{k}^{\dagger}\right)\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \left(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\boldsymbol{n}_{k}\boldsymbol{n}_{k}^{\dagger}\right)$$
$$\equiv \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{R}}_{ss}(K)\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{R}}_{sn}(K) + \hat{\boldsymbol{R}}_{sn}^{\dagger}(K)\boldsymbol{C}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\Gamma}^{\dagger} + \hat{\boldsymbol{R}}_{nn}(K). \quad (2.39)$$

On note ainsi une différence importante par rapport à (2.36), car pour  $K < \infty$  on a alors  $\hat{R}_{sn}(K) \neq \mathbf{0}$  et les signaux apparaissent ainsi comme étant corrélés au bruit. La matrice  $\hat{R}_{nn}(K)$  est également non diagonale dans cette condition. Ces effets indésirables deviennent toutefois moins important avec des valeurs élevées de K. À la limite, toujours sous l'hypothèse de signaux stationnaires ergodiques (ou cyclostationnaires de période  $T_s$ ), on vérifie que :

$$\lim_{K \to \infty} \hat{\boldsymbol{R}}_{xx}(K) = \boldsymbol{R}_{xx} \,. \tag{2.40}$$

## 2.3 Corrélation des signaux

La corrélation des signaux est un phénomène généralement nuisible intervenant dans la plupart des systèmes de communication. En téléphonie mobile, ce dernier est engendré par les multiples réflexions des signaux sur le terrain et les bâtiments présents dans l'environnement, impliquant la réception simultanée de plusieurs copies plus ou moins atténuées et décalées en temps d'un même signal à la station de base. En [28], on présente une revue intéressante du problème occasionné par les trajets multiples des signaux pour différents systèmes de communications. On montre également comment, selon le cas à l'étude, certaines contremesures peuvent être appliquées afin de palier en partie au problème. Dans cette section, on verra comment la corrélation des signaux influe sur la structure du vecteur s(t) afin d'établir un modèle des signaux généralisé qui sera exploité dans la suite des développements.

## 2.3.1 Généralités

On définit ici la notion de sources corrélées inspirée d'un développement présenté en [24], section 5.1. Considérons à cet effet deux variables aléatoires indépendantes centrées  $u_1(t_k)$  et  $u_2(t_k)$  de variances unitaire ainsi qu'un vecteur  $s_k$  de la forme :

$$\mathbf{s}_{k} = \begin{bmatrix} s_{1}(t_{k}) \\ s_{2}(t_{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_{1}}u_{1}(t_{k}) \\ \sigma_{s_{2}}\left(\delta^{*}u_{1}(t_{k}) + \sqrt{1 - |\delta|^{2}}u_{2}(t_{k})\right) \end{bmatrix},$$
(2.41)

où  $\delta$  représente un indice de corrélation généralement complexe et de module inférieure ou égale à 1. Pour  $\delta = 0$ , on constate que  $s_2(t_k) = \sigma_{s_2}u_2(t_k)$ , et les signaux  $s_1(t_k)$  et  $s_2(t_k)$  sont donc indépendants. Pour  $|\delta| = 1$ , on remarque que  $s_2(t_k) = \sigma_{s_2}\delta^*u_1(t_k)$ , correspondant à une dépendance linéaire directe des deux sources, qui sont alors dites cohérentes ou parfaitement corrélées. Lorsque  $|\delta| \in ]0, 1[$ , l'enveloppe  $s_2(t_k)$  s'exprime à la fois à partir de  $u_1(t_k)$  et  $u_2(t_k)$ , et les sources sont alors dites partiellement corrélées. En général, on exprime le degré de corrélation des sources par :

$$E\{s_1(t_k)s_2^*(t_k)\} = \delta\sigma_{s_1}\sigma_{s_2}, \qquad (2.42)$$

un résultat qui s'obtient directement de (2.41). On montre également que :

$$\boldsymbol{R}_{ss} = E\{\boldsymbol{s}_k \boldsymbol{s}_k^{\dagger}\} = E\left\{ \begin{bmatrix} s_1(t_k) \\ s_2(t_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1^*(t_k) & s_2^*(t_k) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{s_1}^2 & \delta \sigma_{s_1} \sigma_{s_2} \\ \delta^* \sigma_{s_1} \sigma_{s_2} & \sigma_{s_2}^2 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

qui représente ici la structure exacte de la matrice de covariance des sources dans cette situation. On remarque que :

$$\det\{\mathbf{R}_{ss}\} = \sigma_{s_1}^2 \sigma_{s_2}^2 - \delta \delta^* (\sigma_{s_1} \sigma_{s_2})^2 = \sigma_{s_1}^2 \sigma_{s_2}^2 (1 - |\delta|^2) \,. \tag{2.44}$$

Le rang de la matrice de covariance des sources est donc diminué lorsque les enveloppes  $s_1(t_k)$ et  $s_2(t_k)$  sont cohérentes ( $|\delta| = 1$ ), mais non lorsque celles-ci sont partiellement corrélées, quoi que cette situation puisse entraîner un mauvais conditionnement de  $\mathbf{R}_{ss}$ . La corrélation des signaux peut donc entraîner des conséquences importantes au niveau traitement, ce qui sera discuté avec plus de détail aux sections 2.4 et 2.5. En général, considérant un nombre de sources M quelconque, un calcul de  $\mathbf{R}_{ss}$  selon (2.43) permettrait de constater que rang $\{\mathbf{R}_{ss}\} < M$  si au moins deux sources présentent une cohérence entre elles. D'autre part, si une corrélation parfaite existait entre toutes les sources, on déduirait également par un calcul semblable que rang $\{\mathbf{R}_{ss}\} = 1$ .

## 2.3.2 Corrélation des signaux par groupes

Comme mentionné précédemment, la présence de trajets multiples en communication radiomobile implique la réception simultanée de plusieurs fronts d'onde corrélés à la station de base. Assumant un certain nombre d'usagers G en onde pendant une période de temps donnée, on peut ainsi classifier les fronts d'onde incidents en G groupes propres à chaque usager. Les signaux associés à un usager g peuvent alors être présumés fortement corrélés entre eux, et peu ou nullement corrélés avec ceux d'un autre usager. La notion de signaux corrélés par groupes n'est pas nouvelle dans la littérature, et est entre autres exploitée en [29, 30, 31]. Cette dernière a également été exploitée dans la majorité des contributions de cette thèse, et sera donc présentée en détail dans cette section.

Les variables aléatoires  $u_1(t_k)$  et  $u_2(t_k)$  ont été introduites en (2.41) à titre explicatif, et leur propriété d'indépendance était essentielle à l'obtention de (2.43). Similairement, on notera par  $u_g(t)$  l'enveloppe complexe d'un signal incident associé à un usager particulier g capté au niveau du réseau au temps t. Puisque les usagers opèrent tous indépendamment les uns des autres, on aura :

$$E\{u_p(t)u_q(t)\} = 0 \ \forall \ \{t, p \neq q\}.$$
(2.45)

Notons toutefois qu'aucune contrainte n'est imposée ici sur la variance de  $u_g(t)$ , tel qu'il en était question en (2.41). On assumera par contre que  $E\{u_g(t)\} = 0 \forall g$  (signaux centrés), et en général on parlera de  $u_g(t)$  en tant qu'enveloppe complexe élémentaire du groupe g. Considérant qu'un nombre arbitraire  $M_g$  de signaux est associé à un groupe g donné, on aura :

$$\sum_{g=1}^{G} M_g = M \,. \tag{2.46}$$

Ainsi, l'indice global m du  $\ell$ -ième signal d'un groupe spécifique g sera :

$$m = f(g, \ell) = \sum_{p=1}^{g-1} M_p + \ell \ , \ \ell \in \{1, 2, \dots, M_g\}.$$
(2.47)

La Fig. 2.5 montre un scénario où l'élément de référence d'un réseau capte les premier et deuxième signaux d'un même groupe g sans trajet direct. Par souci de clarté, on représente uniquement les enveloppes complexes des signaux affectées de leurs délais correspondants. Bien qu'un seul émetteur soit présent dans l'espace, deux signaux sont néanmoins captés à l'antenne-réseau. On remarque l'introduction du délai  $\tilde{\tau}_{g_{\ell}}$  représentant le temps de propagation du signal de l'émetteur g vers un objet réflecteur agissant comme la  $\ell$ -ième source du groupe. Similairement à (2.9), on a

$$\tilde{\tau}_{g_{\ell}} = \frac{||\tilde{\boldsymbol{r}}_g - \boldsymbol{r}_{f(g,\ell)}||}{c}, \qquad (2.48)$$

où  $\tilde{r}_g$  représente le vecteur position de l'émetteur g. En (b), un changement de référence temporelle est effectué comme à la Fig. 2.3 de façon à ce que que l'enveloppe complexe reçue du premier signal du groupe g à l'élément q au temps t soit égale à  $u_g(t)$ . Ceci revient à effectuer le changement  $t \to t + \tilde{\tau}_{g_1} + \tau_{q_{f(g,1)}} \forall g$  et n'implique aucune perte de généralité au niveau de la modélisation (l'indice 1 est choisi de façon arbitraire ici sans justification physique particulière), comme discuté à la section 2.1.2. La Fig. 2.5 représente en soit un cas plus général de la situation présentée à la Fig. 2.3. Ici, les mêmes enveloppes complexes sont captées par tous les éléments du réseau au temps t si l'hypothèse bande étroite est respectée, soit si :

$$u_g(t) \approx u_g\left(t \pm \max_{1 \le p, q \le N} |\tau_{p_{f(g,\ell)}} - \tau_{q_{f(g,\ell)}}|\right) \forall \left\{g, 1 \le \ell \le M_g\right\}.$$
(2.49)

On remarque que cette relation ne fait intervenir que les délais de propagation  $\tau_{p_{f(g,\ell)}}$  des sources vers les éléments du réseau. Les délais  $\tilde{\tau}_{g_{\ell}}$  des émetteurs aux sources caractérisent pour leur part l'étalement en délai du système (de l'anglais "delay spread") [28]. Bien qu'une même enveloppe complexe en provenance d'une source donnée soit reçue simultanément par tous les éléments du réseau sous l'hypothèse bande étroite, ceci n'implique pas nécessairement que les enveloppes complexes reçues de tous les signaux d'un même groupe g soient simultanément identiques. Pour ce, l'étalement en délai du système doit être négligeable, ce qui sera vérifié à un élément donné i si :

$$u_g(t) \approx u_g(t + \tilde{\tau}_{g_p} + \tau_{i_{f(g,p)}} - \tilde{\tau}_{g_q} - \tau_{i_{f(g,q)}}) \,\forall \left\{ g, \{p,q\} \in \{1, 2, \dots, M_g\} \right\}.$$
(2.50)



FIGURE 2.5 – Réception des premier et second signaux d'un même groupe g par un élément q du réseau. Seuls les décalages temporels des enveloppes complexes sont indiqués. Les signaux reçus correspondent à ceux d'indice global f(g, 1) et f(g, 2) selon (2.47). En (a), l'enveloppe complexe mesurée en  $\tilde{r}_g$  au temps t est  $u_g(t)$ . En (b), un changement de référence temporelle est effectué tel que l'enveloppe complexe captée par l'élément q au temps t soit égale à  $u_g(t)$ .

Si en plus cette dernière équivalence est respectée pour tous les éléments, alors l'hypothèse bande étroite sera également respectée puisque cette dernière fait intervenir l'ensemble des éléments du réseau. L'étalement en délai d'un système est caractérisé d'une part par la géométrie du milieu, mais également par la largeur de bande des enveloppes  $u_g(t) \forall g$ . Mentionnons finalement que la réception d'un signal direct en provenance d'un émetteur g n'est qu'un cas spécifique de la Fig. 2.5 pour lequel  $\tilde{r}_g = r_{f(g,\ell)}$  où  $\ell$  est l'indice du signal en question au sein de ce groupe. Dans ce cas, on aurait donc  $\tilde{\tau}_{g_\ell} = 0$ .

L'hypothèse de délais d'étalement négligeables est communément admise dans la littérature vue ses implications intéressantes au niveau du vecteur des sources reçues. En pratique celle-ci se justifie si la largeur de bande d'un signal transmis est suffisamment faible dans un environnement à trajets multiples donné. Ceci est par ailleurs souvent vérifié pour les systèmes employant une modulation OFDM ("Orthogonal Frequency-Division Multiplexing") où plusieurs enveloppes complexes sont transmises simultanément sur différentes porteuses à un taux moins élevé (fréquence de symbole) que si toute l'information était véhiculée par une seule porteuse [32]. On admettra également ici l'hypothèse de délais d'étalement négligeables, impliquant ainsi qu'une même enveloppe  $u_g(t)$  soit simultanément captée par le réseau en provenance de toutes les sources d'un même groupe g. On définit ainsi un vecteur  $s_g(t_k)$  des sources reçues du groupe g au temps  $t_k$  tel que :

$$\boldsymbol{s}_g(t_k) = \begin{bmatrix} \alpha_{g_1} & \alpha_{g_2} & \dots & \alpha_{g_{M_g}} \end{bmatrix}^\top u_g(t_k) \equiv \boldsymbol{\alpha}_g u_g(t_k) , \qquad (2.51)$$

où  $\alpha_{g_{\ell}}$  est le coefficient de propagation propre au  $\ell$ -ième signal du groupe g. Une telle notation permet donc d'exprimer le vecteur  $s_k$  sous la forme :

$$\boldsymbol{s}_{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{1}(t_{k}) \\ \boldsymbol{s}_{2}(t_{k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}_{M}(t_{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\alpha}_{2} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{\alpha}_{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_{1}(t_{k}) \\ \boldsymbol{u}_{2}(t_{k}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_{G}(t_{k}) \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{u}_{k} \,.$$
(2.52)

De (2.32), on obtient donc :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{A} \boldsymbol{C} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{n}_k \equiv \boldsymbol{B} \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{n}_k \,, \qquad (2.53)$$

où  $B = \Gamma AC\Xi \in \mathbb{C}^{N \times G}$  représente une matrice de canal généralisée tenant à la fois compte de la géométrie du réseau, des paramètres de propagation des signaux ainsi que de possibles effets de démodulation indésirables au récepteur. On emploiera l'équation (2.53) pour la plupart des développements subséquents dans la thèse. Cette dernière constitue un modèle généralement valide des signaux reçus sous les hypothèses

- 1) de propagation à bande étroite,
- 2) d'étalement en délai négligeable<sup>4</sup>.

On peut ainsi ré-exprimer la matrice de covariance calculée en (2.36) par :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{E} \{ \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^{\dagger} \} \boldsymbol{B}^{\dagger} + \boldsymbol{E} \{ \boldsymbol{n}_k \boldsymbol{n}_k^{\dagger} \} = \boldsymbol{B} \boldsymbol{R}_{uu} \boldsymbol{B}^{\dagger} + \boldsymbol{R}_{nn} , \qquad (2.54)$$

<sup>4.</sup> L'équation (2.53) peut également être employée si les délais d'étalement sont non négligeables à condition d'y remplacer le vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  par un vecteur de sources général  $\boldsymbol{s}_k \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  dont les éléments ne sont pas nécessairement non corrélés entre eux. On obtiendra donc  $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k$ .

où l'on remarque que :

$$\boldsymbol{R}_{ss} = \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{R}_{uu} \boldsymbol{\Xi}^{\dagger} \,. \tag{2.55}$$

Étant donnée l'indépendance statistique des enveloppes complexes élémentaires de chaque groupe, on a :

$$\boldsymbol{R}_{uu} = E\{\boldsymbol{u}_{k}\boldsymbol{u}_{k}^{\dagger}\} = \begin{bmatrix} \sigma_{u_{1}}^{2} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_{u_{2}}^{2} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{u_{G}}^{2} \end{bmatrix}, \qquad (2.56)$$

où  $\sigma_{u_a}^2$  représente la puissance de l'enveloppe élémentaire du groupe g.

## 2.4 Formation de voies

La formation de voies est un procédé par lequel les signaux des différents éléments sont combinés afin de générer un signal de sortie  $y_k(w)$  défini par :

$$y_k(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^{\dagger} \boldsymbol{x}_k \,, \qquad (2.57)$$

où  $\boldsymbol{w}$  est un vecteur de pondération particulier choisi de façon à imposer certaines propriétés désirées au niveau du signal  $y_k(\boldsymbol{w})$ . Par exemple, pour une antenne-réseau présente à une station de base dans un lien de communicaton radio-mobile, il serait souhaitable d'obtenir un signal de sortie de la forme  $y(t_k) = cu_g(t_k)$  (ou  $y(t_k) = cs_m(t_k)$  selon le modèle employé), correspondant à l'enveloppe complexe d'un usager particulier. Le gain (ou directivité) du réseau est alors maximal dans la direction de l'usager et minimal (ou nul) en direction des autres sources qui sont alors vues comme interférences. On présente dans cette section une revue sommaire des principaux types de vecteurs de pondération. Une étude plus complète sur le sujet est présentée en [24].

On définit la puissance de sortie moyenne du réseau étant donné un vecteur de pondération  $\boldsymbol{w}$  par :

$$P(\boldsymbol{w}) = E\{|y_k(\boldsymbol{w})|^2\} = E\{y_k(\boldsymbol{w})y_k(\boldsymbol{w})^*\} = \boldsymbol{w}^{\dagger}\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{w}.$$
(2.58)

Vue la linéarité du modèle des signaux en (2.53), on peut exprimer le vecteur observable  $\boldsymbol{x}_k$ ou toute grandeur de même nature en terme des contributions individuelles de chaque source en présence. À cet effet, on notera par  $[\![h]\!]_{s_m(t_k)}$  et  $[\![h]\!]_{s_{\backslash m}(t_k)}$  les contributions respectives à une quantité h quelconque d'une source particulière m et de l'ensemble complémentaire des sources. Par exemple, on aura :

$$\boldsymbol{x}_{k} = [\![\boldsymbol{x}_{k}]\!]_{\boldsymbol{s}_{m}(t_{k})} + [\![\boldsymbol{x}_{k}]\!]_{\boldsymbol{s}_{\backslash m}(t_{k})} + [\![\boldsymbol{x}_{k}]\!]_{\boldsymbol{n}_{k}}$$
(2.59)

où  $[\![\boldsymbol{x}_k]\!]_{\boldsymbol{n}_k} = \boldsymbol{n}_k$ . De (2.58), on peut ainsi définir le rapport signal à bruit  $\rho_{s_m}(\boldsymbol{w})$ , signal à interférence (SIR, "Signal-to-Interference Ratio")  $\tilde{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w})$  et signal à interférence plus bruit (SINR, "Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio")  $\check{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w})$  d'une source particulière m étant donné un vecteur de pondération  $\boldsymbol{w}$  suivant :

$$\rho_{s_m}(\boldsymbol{w}) = \frac{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_m}}{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{\boldsymbol{n}}} = \frac{\boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_m} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\dagger} \boldsymbol{R}_{nn} \boldsymbol{w}}, \qquad (2.60)$$

$$\tilde{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w}) = \frac{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_m}}{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_{\backslash m}}} = \frac{\boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_m} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_{\backslash m}} \boldsymbol{w}}, \qquad (2.61)$$

$$\breve{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w}) = \frac{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_m}}{\llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_{\backslash m}} + \llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{\boldsymbol{n}}} = \frac{\boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_m} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\dagger} (\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_{\backslash m}} + \boldsymbol{R}_{nn}) \boldsymbol{w}}.$$
(2.62)

## 2.4.1 Vecteur de pondération conventionnel

Le vecteur de pondération conventionnel possède la forme [24] :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}) = \frac{1}{N} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}), \qquad (2.63)$$

où  $\mathbf{a}(\mathbf{\nu})$  représente un vecteur directionnel associé à une source hypothétique générale dont les paramètres de localisation sont spécifiés par le vecteur  $\mathbf{\nu}$ . Par exemple, dans un environnement à deux dimensions tel qu'illustré à la Fig. 2.4, on aura  $\mathbf{\nu} = \theta$ . Dans un environnement à trois dimensions avec sources en champ lointain, on aura  $\mathbf{\nu} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$  qui incluera des angles d'azimut et d'élévation généraux. Sans l'hypothèse de sources en champ lointain,  $\mathbf{\nu}$  aura simplement la forme d'un vecteur de localisation général  $\mathbf{r}$  (cf. Fig. 2.2). Assumant une calibration parfaite du réseau (i.e.  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{I}$ ), l'évaluation du signal de sortie conformément à (2.57) donne :

$$y(t_k) = \boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{x}_k = \left(\frac{1}{N}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})\right)^{\dagger} (\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k)$$
$$= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}_2 & \dots & \boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}_M \end{bmatrix} \boldsymbol{C}\boldsymbol{s}_k + \frac{1}{N}\boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{n}_k.$$
(2.64)

L'opération  $a^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})a_m$  représente un produit scalaire dont la valeur est maximale lorsque les vecteurs  $a^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})$  et  $a_m$  sont colinéaires, soit lorsque  $\boldsymbol{\nu} = c\boldsymbol{\nu}_m$  où c est une constante non nulle quelconque. Ainsi, pour  $\boldsymbol{\nu} = c\boldsymbol{\nu}_m$ , la contribution au signal de sortie d'une enveloppe  $s_m(t_k)$  se trouve accentuée par rapport à celles de sources situées en d'autres endroits de l'espace. Ce type de pondération permet donc de privilégier la réception de signaux en provenance d'une région particulière  $\boldsymbol{\nu}$  tout en atténuant dans une certaine mesure l'interférence générée par les autres sources.

#### 2.4.2 Vecteur de pondération annulateur

Considérons une source d'intérêt m et une source interférente i localisées en  $\nu_m$  et  $\nu_i$  respectivement. En assumant que  $\nu_m$  est connu, un vecteur de pondération conventionnel du type  $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \boldsymbol{\nu}_m/N$  permettrait donc d'accentuer significativement la puissance moyenne de

l'enveloppe  $s_m(t_k)$  captée par le réseau, comme discuté à la section 2.4.1. Si toutefois la source interférente est telle que  $\boldsymbol{\nu}_i \approx \boldsymbol{\nu}_m$ , on aura  $\boldsymbol{\nu}_m^{\dagger} \boldsymbol{\nu}_i \approx \boldsymbol{\nu}_m^{\dagger} \boldsymbol{\nu}_m$  et la contribution de l'enveloppe  $s_i(t_k)$  au signal de sortie deviendra presqu'aussi importante que celle du signal désiré. Le vecteur de pondération annulateur permet de remédier à ce problème en éliminant complètement l'influence d'une source interférente dont les paramètres de localisation sont distincts de ceux de la source d'intérêt. En considérant un total de P interférences, on cherche ainsi à résoudre :

$$\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}) = c \ , \ \boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}_{i_{p}}) = 0 \ , \ p \in \{1, 2, \dots, P\} \ , \ \neq 0 \,.$$
 (2.65)

On laisse ici tomber l'indice m afin de généraliser la procédure pour l'imposition d'un gain associée à une région  $\nu$  quelconque, qui idéalement correspondrait à celle d'une source d'intérêt donnée. Sous forme matricielle, on a donc :

$$\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}) & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}_{i_1}) & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}_{i_2}) & \dots & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}_{i_P}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$
  
$$\Rightarrow \boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{c}^{\top}. \qquad (2.66)$$

Comme P représente un entier arbitraire, une solution générale pour  $w(\nu)$  prendra la forme :

$$w(\nu) = (ZZ^{\dagger})^{-1}Zc^* = Z^{\#}c^*,$$
 (2.67)

où '#' représente l'opérateur pseudo-inverse de Moore-Penrose. Pour  $P \leq N - 1$ , où N - 1 représente le nombre de degrés de liberté du réseau, l'équation (2.66) peut être vérifiée et la contribution au signal de sortie de toutes les sources interférentes devient alors nulle. Pour  $P \geq N - 1$ , le vecteur  $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu})$  obtenu de (2.67) ne peut vérifier (2.66) où on observe alors que  $\sum_{p} |\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}_{i_{p}})| > 0$ . En général, l'inégalité sera d'autant plus importante que P > N - 1 sera élevé, mais la solution obtenue de (2.67) sera toujours optimale au sens des moindres carrés.

On comprend ainsi comment deux sources possédant des paramètres de localisation semblables (mais non identiques) peuvent être discriminées par formation de voies selon (2.66). Toutefois, il est possible de démontrer qu'en ces conditions, la norme du vecteur  $w(\nu)$  peut devenir arbitrairement élevée, impliquant à son tour une contribution importante du terme  $[\![P(w(\nu))]\!]_n = w^{\dagger}(\nu)R_{nn}w(\nu)$  à la puissance moyenne  $P(w(\nu))$  du signal de sortie de l'antenne-réseau. L'inadaptation au bruit du vecteur de pondération annulateur en fait donc son principal inconvénient, en plus d'avoir à connaître les paramètres de localisation des signaux interférents.

## 2.4.3 Vecteur de pondération optimal

Le vecteur de pondération optimal, également connu sous l'acronyme MVDR (de l'anglais "Minimum Variance Distortionless Response") [14] remédie aux problèmes occasionnés par les vecteurs de pondération conventionnel et annulateur en cherchant une solution non triviale au problème d'optimisation :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \arg\min_{\boldsymbol{w}} \left( \llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_{\backslash m}} + \llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \right), \qquad (2.68)$$

où *m* représente l'indice d'une source d'intérêt donnée. L'opération revient donc à maximiser le rapport signal à interférence plus bruit défini en (2.62). Sous l'hypothèse que le signal désiré est non corrélé aux signaux interférents, l'annexe B montre que la solution de l'équation (2.68) considérant une source d'intérêt de localisation arbitraire  $\boldsymbol{\nu}$  est de la forme :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}) = c \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})}, \qquad (2.69)$$

où c est une constante telle que  $\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}) = c$ . Puisque cette solution est obtenue sous l'hypothèse que le signal désiré est non corrélé aux signaux interférents avec un modèle <sup>5</sup> du type  $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k$  où  $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})$  prend idéalement une valeur parmi les colonnes de  $\boldsymbol{A}$ , on peut donc facilement obtenir une formulation équivalente considérant le modèle de signaux groupés de l'équation (2.53). On a alors :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{b}) = c \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}^{\dagger} \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{b}} , \quad \boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{b}) \boldsymbol{b} = c .$$
(2.70)

Ce type de vecteur de pondération permet donc de maximiser le rapport signal à interférence plus bruit  $\check{\rho}_{u_g}$  si  $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_g$  (i.e. la g-ième colonne de  $\boldsymbol{B}$ ) pour la discrimination optimale d'une enveloppe complexe élémentaire  $u_g(t_k)$  à partir des signaux reçus. Un tel traitement nécessite toutefois la connaissance de la matrice  $\boldsymbol{B}$ , ou du moins son estimation, chose à laquelle les chapitres 3 et 6 de la thèse sont consacrés.

## 2.5 Estimation des DOAs

On présente ici quelques uns des algorithmes d'estimation des directions d'arrivée de signaux à bande étroite les plus classiques de la littérature afin de donner au lecteur un aperçu des techniques de base en ce domaine et de mettre en évidence certaines des difficultés générales rencontrées dans ce type de problème pouvant justifier la recherche d'algorithmes plus sophistiqués. Le lecteur est invité à consulter [23, 33] pour une revue plus détaillée des différentes méthodes d'estimation classiques existantes.

L'information relative aux sources incidentes est contenue dans la matrice directionnelle A en (2.31). On assume généralement connue la forme analytique d'une colonne de A (en terme de  $\nu$ ) puisque celle-ci ne dépend que de la géométrie du réseau. Sous l'hypothèse de sources en champ lointain<sup>6</sup>, l'estimation des DOAs revient donc à l'estimation des colonnes de A. Or on montre qu'un tel processus est particulièrement sensible aux perturbations indésirables

<sup>5.</sup> Une modélisation du type  $x_k = As_k + n_k$  était également sous-entendue à la section 2.4.2, et est valide en assumant une calibration parfaite du réseau.

<sup>6.</sup> Cette hypothèse est communément admise dans la littérature et le sera également dans cette section.

induites par une matrice de distorsion  $\Gamma \neq \alpha I$  [26]. Pour le bien-fondé des explications données dans cette section, on assumera donc un modèle des signaux reçus de la forme :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k\,,$$

soit le cas d'un réseau parfaitement calibré avec matrice des phases différentielles C absorbée par  $s_k$ . Afin de simplifier davantage, on considérera également un espace limité à deux dimensions tel qu'illustré à la Fig. 2.4 où la DOA d'une source m ne sera spécifiée que par son angle d'arrivée  $\theta_m$ . Les principes d'estimation pourront toutefois être généralisés à un espace à trois dimensions sans problème.

#### 2.5.1 Estimateur de Bartlett

L'estimateur de Bartlett [34] ou estimateur conventionnel correspond à la puissance de sortie moyenne  $p(\theta)$  du réseau évaluée à partir d'un vecteur de pondération conventionnel de direction  $\theta$ . Selon (2.58) et (2.63), on a :

$$p(\theta) = \boldsymbol{w}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{w}(\theta) = \left(\frac{1}{N}\boldsymbol{a}(\theta)\right)^{\dagger}\boldsymbol{R}_{xx}\left(\frac{1}{N}\boldsymbol{a}(\theta)\right)$$
$$= \frac{1}{N^{2}}\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{a}(\theta) = \frac{1}{N^{2}}\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\left([\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} + \boldsymbol{R}_{nn}\right)\boldsymbol{a}(\theta), \qquad (2.71)$$

La puissance  $p(\theta)$  est également connue sous le nom de pseudo-spectre, car les DOAs des signaux exprimées sous forme de fonctions exponentielles complexes  $e^{-j(i-1)\phi_m}$  (cf. équation (2.29)) dans le cas d'un ULA sont homologues à des termes de pulsations distinctes, et leur estimation peut donc être vue comme un problème d'analyse spectrale. La Fig. 2.6 exemplifie cette analogie. Pour une matrice d'autocorrélation du bruit du type  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ , on a :

$$p(\theta) = \frac{1}{N^2} \boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta) [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}(\theta) + \frac{1}{N^2} \boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta) (\sigma_n^2 \boldsymbol{I}) \boldsymbol{a}(\theta) = \frac{1}{N^2} \boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta) [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} \boldsymbol{a}(\theta) + \frac{1}{N} \sigma_n^2.$$
(2.72)

L'égalité  $\mathbf{a}^{\dagger}(\theta)\mathbf{a}(\theta) = N$  provient du fait que, même pour un réseau à géométrie arbitraire, la matrice  $\mathbf{A}$  sera toujours telle que  $[\mathbf{A}]_{i,m} = e^{-jh(i,m)}$  où  $h(i,m) \in \mathbb{R}$ , car une telle valeur est suffisante pour tenir compte du déphasage complexe que subira un signal pendant un temps de propagation donné jusqu'à un élément du réseau. Ainsi, l'opération  $\mathbf{a}^{\dagger}(\theta)\mathbf{a}(\theta)$  revient à sommer le nombre d'éléments contenus dans  $\mathbf{a}(\theta)$ , i.e. N. Un tracé de  $p(\theta)$  en fonction de  $\theta$  permettra donc de détecter la présence de sources car celles-ci feront apparaître des maximums locaux en  $\theta \in \{\theta_m\}_{m=1}^M$  avec une amplitude variable en fonction de leur puissance respective. Comme  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\backslash \mathbf{n}}$  est définie semi-positive on a :

$$p(\theta) \ge \frac{1}{N} \sigma_n^2 \,. \tag{2.73}$$



FIGURE 2.6 – Mise en évidence de l'analogie entre le pseudo-spectre obtenu de (2.72) et le problème d'estimation spectrale. On considère ici un ULA en présence de M = 4 sources localisées en  $\theta_1 = 144^\circ$ ,  $\theta_2 = 108^\circ$ ,  $\theta_3 = 72^\circ$ et  $\theta_1 = 36^\circ$ . La variance du bruit est fixée à  $\sigma_n^2 = 1$ . On constate qu'une augmentation du nombre d'éléments du réseau correspond à une augmentation de la période d'intégration temporelle pour le problème d'estimation spectrale, ce qui augmente la résolution.

## 2.5.2 Estimateur de Capon

L'estimateur de Capon, proposé en [14] et aussi connu sous le nom d'estimateur MVDR, correspond à la puissance de sortie moyenne du réseau considérant cette fois un vecteur de pondération optimal d'angle  $\theta$ . À partir des équations (2.58) et (2.69), on obtient :

$$p(\theta) = \boldsymbol{w}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}\boldsymbol{w}(\theta)$$

$$= \left(c\frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}\right)^{\dagger}\boldsymbol{R}_{xx}\left(c\frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}\right)$$

$$= |c|^{2}\frac{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}{\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)\right)^{2}} = \frac{|c|^{2}}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta)\boldsymbol{R}_{xx}^{-1}\boldsymbol{a}(\theta)}.$$
(2.74)

On remarque ici qu'un calcul de  $p(\theta)$  n'est possible que si  $\mathbf{R}_{xx}^{-1}$  existe, soit lorsque rang $\{\mathbf{R}_{xx}\} = N$ .

## 2.5.3 MUSIC

MUSIC ("*MUltiple SIgnal Classification*") est sans aucun doute l'algorithme d'estimation de DOAs le plus connu en traitement d'antenne, ayant servi de base pour le développement de plusieurs algorithmes similaires subséquents [25]. L'algorithme fut développé par Schmidt en

1979 [15], mais une technique équivalente fut également développée en parallèle par Bienvenu (méthode du goniomètre) [35]. Étant donnée la présentation moins lourde et plus intuitive de ses résultats, le nom de Schmidt fut d'avantage retenu par la littérature populaire. Ce dernier est parfois même considéré comme l'auteur original de l'algorithme.

Considérons la décomposition en valeurs propres (EVD, "*EigenValue Decomposition*") de la matrice de covariance sans bruit. On a (cf. annexe A) :

$$\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{A}^{\dagger} = \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{\Lambda} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger}, \qquad (2.75)$$

où  $\llbracket V \rrbracket_{n}$  est unitaire. Cherchons maintenant à calculer rang  $\{\llbracket R_{xx} \rrbracket_{n}\}$ . En vertu de propriétés matricielles élémentaires, on a :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}\} = \operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}^{\dagger}\}$$
  
$$\leq \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}^{\dagger}\}\right)$$
  
$$= \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\}\right).$$
(2.76)

En général, l'inégalité rang{X}  $\leq$  min (rang{Y}, rang{Z}) pour un produit matriciel X = YZ quelconque n'est rencontrée qu'en des circonstances particulières lorsque par exemple Y ou Z possèdent au moins une ligne ou colonne complète de zéros. Par exemple :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \text{rang 1} \end{bmatrix}}_{\text{rang 1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \text{rang 1} \end{bmatrix}}_{\text{rang 1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \text{rang 0} \end{bmatrix}}_{\text{rang 0}}.$$

Ici, considérant la nature des matrices A et  $R_{ss}$ , cette possibilité sera écartée et on écrira :

$$\operatorname{rang}\{[\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\}\right).$$
(2.77)

En l'absence de corrélation entre les sources,  $\mathbf{R}_{ss}$  est diagonale et on aura rang $\{\mathbf{R}_{ss}\} = M$ . De plus, il est généralement souhaitable que la réponse spatiale  $\mathbf{a}(\mathbf{\nu})$  du réseau soit unique pour touts les paramètres de localisation  $\mathbf{\nu}$  possibles de l'espace. Ceci est entre autres le cas pour l'ULA où  $\mathbf{\nu} = \theta \in [0, 180^{\circ}[$ . Cette propriété implique que les colonnes de  $\mathbf{A}$  forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, et donc que rang $\{\mathbf{A}\} = \min(N, M)$ . Selon ces hypothèses, on aura donc :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{N}}\} = \min\left(\min(N, M), M\right) = \min(N, M).$$
(2.78)

Ainsi, pour M < N,  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\setminus \mathbf{n}}$  est singulière et possède de ce fait  $N - \operatorname{rang}\{[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\setminus \mathbf{n}}\} = N - \min(N, M)$  valeurs propres nulles. L'équation (2.75) peut donc être réécrite sous la forme :

$$\begin{split} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} &= \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{\Lambda} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} \\ &= \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} & \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{\Lambda}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} \\ \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} \end{bmatrix} \\ &= \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{\Lambda}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} , \end{split}$$
(2.79)

où  $\llbracket V_f \rrbracket_{n} \in \mathbb{C}^{N \times \min(N,M)}$  et  $\llbracket V_k \rrbracket_{n} \in \mathbb{C}^{N \times (N-\min(N,M))}$  sont des matrices dont les vecteurs colonnes sont associées aux valeurs propres non nulles et nulles de  $\llbracket R_{xx} \rrbracket_{n}$  respectivement. Ces derniers forment donc les vecteurs de base des sous-espaces fondamental (ou source) et nul (ou bruit) de  $\llbracket R_{xx} \rrbracket_{n}$ . On emploie ici l'indice k pour dénoter le noyau (de l'anglais "kernel") de  $\llbracket R_{xx} \rrbracket_{n}$ . Sachant par définition que les vecteurs propres d'une matrice hermitienne sont orthonormaux (cf. annexe A), on a :

$$\llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0} , \qquad (2.80)$$

d'où :

$$\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{A}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{f}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{f}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}.$$
(2.81)

Comme on assume toujours que les sources sont non corrélées (i.e. rang $\{R_{ss}\} = M$ ),  $R_{ss}$ possède donc  $M - \text{rang}\{R_{ss}\} = 0$  valeur propre nulle. Il n'existe donc aucun vecteur  $v \neq 0$ tel que  $R_{ss}v = 0$ . L'égalité  $AR_{ss}A^{\dagger}[V_k]_n = 0$  de (2.81) implique donc :

$$\boldsymbol{A}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \boldsymbol{a}_{m} = \boldsymbol{0} \ \forall \ m \in \{1, 2, \dots, M\}.$$

$$(2.82)$$

Ainsi, le produit  $[\![V_k]\!]^{\dagger}_{\backslash n} a(\theta)$  devient nul si  $\theta \in \{\theta_m\}_{m=1}^M$ . Il devient alors intuitif de formuler une expression du pseudo-spectre de la forme :

$$p(\theta) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\theta) [\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} \boldsymbol{a}(\theta)} = \frac{1}{\left|[\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} \boldsymbol{a}(\theta)\right|^{2}}, \qquad (2.83)$$

où les DOAs des signaux sont alors obtenues en localisant les maximums de cette fonction. Toutefois, un calcul de  $p(\theta)$  selon (2.83) implique la connaissance de  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\backslash n}$  afin d'effectuer la EVD nécessaire à l'obtention de  $[\![\mathbf{V}_k]\!]_{\backslash n}$ , alors qu'en pratique seule  $\mathbf{R}_{xx}$  est accessible. On remarque premièrement comme démontré à l'annexe A que :

$$\llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} & \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} \\ \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} \end{bmatrix} = \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} + \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{n}}^{\dagger} = \boldsymbol{I} . \quad (2.84)$$

Assumant une matrice d'autocorrélation du bruit du type  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{xx} &= [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} + \boldsymbol{R}_{nn} = [\![\boldsymbol{V}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{\Lambda}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} \end{aligned} \tag{2.85} \\ &= [\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{\Lambda}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} ([\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} + [\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger}) \end{aligned} \\ &= \left[ [\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} [\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} \right] \left[ [\![\boldsymbol{\Lambda}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \quad \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} \right] \left[ [\![\boldsymbol{V}_{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}^{\dagger} \right] \end{aligned} \\ &= \left[ \boldsymbol{V}_{f} \quad \boldsymbol{V}_{k} \right] \left[ \begin{matrix} \boldsymbol{\Lambda}_{f} \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\Lambda}_{k} \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} \\ \boldsymbol{V}_{k}^{\dagger} \end{matrix} \right] \end{aligned} \tag{2.86} \\ &= \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^{\dagger} . \end{aligned} \tag{2.87} \end{aligned}$$

Par correspondance, on note ainsi que :

$$\boldsymbol{V}_{f} = \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\backslash \boldsymbol{n}} , \quad \boldsymbol{V}_{k} = \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\backslash \boldsymbol{n}} ,$$
  
$$\boldsymbol{\Lambda}_{f} = \llbracket \boldsymbol{\Lambda}_{f} \rrbracket_{\backslash \boldsymbol{n}} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} , \quad \boldsymbol{\Lambda}_{k} = \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} .$$
  
(2.88)

Ainsi, sous la considération d'une matrice  $\mathbf{R}_{nn}$  de type  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ , les valeurs propres de  $\mathbf{R}_{xx}$  ne sont qu'augmentées d'une quantité  $\sigma_n^2$  par rapport à celles de  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{n}$  et les vecteurs propres demeurent inchangés. Le calcul de  $p(\theta)$  en (2.83) peut donc être effectué directement à partir de  $\mathbf{R}_{xx}$ , soit :

$$p(\theta) = \frac{1}{\left| \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{k}}^{\dagger} \boldsymbol{a}(\theta) \right|^{2}}, \qquad (2.89)$$

En général, on remarque que l'estimation des DOAs par MUSIC implique une indétermination du type 1/0 se traduisant par l'apparition d'une impulsion brusque en  $\theta \in \{\theta_m\}_{m=1}^M$ . On peut donc s'attendre à ce qu'une telle estimation possède une résolution supérieure à celles obtenues de (2.72) ou (2.74).

L'obtention de  $V_k$  prérequise à (2.89) n'est cependant pas aussi évidente que celle de  $\llbracket V_k \rrbracket_{n}$ . En effet, cette dernière correspond directement aux vecteurs propres associés aux valeurs propres nulles de  $\llbracket R_{xx} \rrbracket_n$ , alors que  $V_k$  correspond aux vecteurs propres associés à  $\Lambda_k = \sigma_n^2 I$ , devant ainsi être distinguée de  $\Lambda_f$ . Selon (2.88), cette distinction ne cause aucun problème car  $\Lambda_k$  s'identifie alors aux valeurs propres minimales de  $R_{xx}$ , de valeurs égales à  $\sigma_n^2$ . Toutefois, considérant une estimation  $\hat{R}_{xx}(K)$  selon (2.38) à partir d'un nombre fini d'échantillons, la matrice  $\hat{\Lambda}_k(K)$  quoique toujours diagonale, ne possède plus la forme idéale  $\sigma_n^2 I$ . L'estimation du nombre de sources par la distinction entre  $\hat{\Lambda}_f(K)$  et  $\hat{\Lambda}_k(K)$  devient donc plus difficile, particulièrement si la puissance des signaux reçus est faible par rapport à  $\sigma_n^2$ .

En général, le problème d'estimation du nombre de sources concerne un grand nombre d'algorithmes à haute résolution [24]. Nombreuses sont les méthodes consacrées à ce problème, dont les plus reconnues sont sans doute AIC ("Akaike's Information Criterion") [36] et MDL ("Minimum Description Length") [37]. En résumé, sous l'hypothèse de M < N signaux incidents non corrélés, une estimation  $\hat{M}$  de M est obtenue par :

$$\hat{M} = \arg\min_{m} \left( K(N-m) \log \left( \frac{f_1(m,K)}{f_2(m,K)} \right) + f_3(m,K) \right) ,$$
 (2.90)

 $\operatorname{avec}$  :

$$f_1(m,K) = \frac{1}{N-m} \sum_{i=m+1}^N \hat{\lambda}_i(K) \ , \ f_2(m,K) = \left(\prod_{i=m+1}^N \hat{\lambda}_i(K)\right)^{\frac{1}{N-m}} .$$
(2.91)

où  $\{\hat{\lambda}_i(K)\}_{i=1}^N$  représente les valeurs propres de  $\hat{R}_{xx}(K)$ . La distinction entre les critères AIC et MDL se joue au niveau de la fonction  $f_3(m, K)$  où

$$f_3(m,K) = \begin{cases} m(2N-m) & \text{pour AIC}, \\ m(2N-m)\log(K)/2 & \text{pour MDL}. \end{cases}$$
(2.92)

L'estimation de M repose donc essentiellement sur une discrimination empirique des valeurs propres de  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(K)$  à partir des moyennes arithmétique et géométrique  $(f_1(m, K) \text{ et } f_2(m, K))$ de ces dernières sur un intervalle discret dynamiquement variable. Une connaissance de  $\hat{M}$ permet par la suite la construction de  $\mathbf{V}_k$  à partir de  $\mathbf{V}$  (ou celle de  $\hat{\mathbf{V}}_k(K)$  à partir de  $\hat{\mathbf{V}}(K)$ ) rendant ainsi possible un calcul de  $p(\theta)$  selon (2.89). L'obtention de  $\mathbf{V}_k$  (ou  $\hat{\mathbf{V}}_k(K)$ ) peut toutefois être évitée en considérant un calcul de  $p(\theta)$  de la forme :

$$p(\theta) = \frac{1}{|\boldsymbol{v}_p^{\dagger} \boldsymbol{a}(\theta)|^2} \quad , \quad \lambda_p = \min_m(\lambda_m) \,. \tag{2.93}$$

Étant donnée l'hypothèse de M < N signaux non corrélés, le vecteur propre associé à la plus faible valeur propre de  $\mathbf{R}_{xx}$  est nécessairement une colonne de  $\mathbf{V}_k$ . Conformément à (2.82) et (2.88), ce dernier doit donc également vérifier  $\mathbf{v}_p^{\dagger} \mathbf{a}_m = 0 \forall m \in \{1, 2, \dots, M\}$ , justifiant ainsi son emploi en (2.93). Un calcul de  $p(\theta)$  selon (2.93) est donc équivalent à imposer un nombre de sources estimé  $\hat{M} = N - 1$  et maximise donc les chances de détection des DOAs. Toutefois, considérant une matrice estimée  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(K)$ , le pseudo-spectre obtenu en ces conditions peut parfois présenter d'importants maximums en des directions ne correspondant pas aux DOAs des signaux. On parle alors de sources fantômes qui biaisent la qualité des estimés.

## 2.6 Algorithmes de pré-traitement

L'hypothèse de signaux incidents non corrélés facilite grandement le problème d'estimation des DOAs, car celle-ci implique que rang $\{\mathbf{R}_{ss}\} = M$ . En fait, la matrice de covariance des sources peut également être de rang complet si les sources présentent une certaine corrélation entre elles, comme expliqué à la section 2.3. La situation dégénère toutefois si une cohérence existe entre certaines sources, où un pré-traitement doit alors être appliqué aux signaux reçus avant l'application d'un algorithme haute-résolution à base de sous-espaces tel MUSIC.

Pour mettre ce problème en évidence, considérons une modélisation semblable à celle de la section 2.5 (i.e.  $\Gamma = I$ ,  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 I$  et matrice C absorbée par  $\mathbf{s}_k$ ) avec signaux groupés selon (2.53). On a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{xx} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}^{\dagger} + \boldsymbol{R}_{nn} \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{R}_{uu}\boldsymbol{\Xi}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2}\boldsymbol{I} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \quad \boldsymbol{A}_{2} \quad \dots \quad \boldsymbol{A}_{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1} \quad \boldsymbol{0} \quad \dots \quad \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{\alpha}_{2} \quad \dots \quad \boldsymbol{0} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \dots \quad \boldsymbol{\alpha}_{G} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{u_G}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\dagger} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\alpha}_2^{\dagger} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \sigma_{u_G}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{\dagger} \\ \boldsymbol{A}_2^{\dagger} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_G^{\dagger} \end{bmatrix} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}$$

$$= \sigma_{u_1}^2 \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\dagger} \boldsymbol{A}_1^{\dagger} + \sigma_{u_2}^2 \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\alpha}_2^{\dagger} \boldsymbol{A}_2^{\dagger} + \dots + \sigma_{u_G}^2 \boldsymbol{A}_G \boldsymbol{\alpha}_G \boldsymbol{\alpha}_G^{\dagger} \boldsymbol{A}_G^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}$$

$$= \sum_{g=1}^G \boldsymbol{A}_g \boldsymbol{R}_{ss_g} \boldsymbol{A}_g^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I} ,$$

$$(2.95)$$

où la matrice de covariance des sources  $\mathbf{R}_{ss_g} = \sigma_{u_g}^2 \boldsymbol{\alpha}_g \boldsymbol{\alpha}_g^{\dagger}$  d'un groupe arbitraire g est une simple dyade de rang 1. On remarque ici que :

$$\boldsymbol{R}_{ss} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{ss_1} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_{ss_2} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{R}_{ss_G} \end{bmatrix}.$$
 (2.96)

On note également que la matrice A se compose d'une partition des matrices directionnelles individuelles  $\{A_g\}_{g=1}^G$  de chaque groupe. Comme en (2.77), on a :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{n}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\}\right).$$
(2.97)

Ici toutefois, on a :

$$\operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{\Xi}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{uu}\}\right) = \min\left(\min(M, G), G\right) = G, \quad (2.98)$$

car  $M \ge G$  (on doit avoir au moins un signal par groupe). Par conséquent :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}\}, \operatorname{rang}\{\boldsymbol{R}_{ss}\}\right)$$
$$= \min\left(\min(N, M), G\right) = \min(N, G).$$
(2.99)

Comme en (2.79), la EVD $[\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}$  s'exprime par :

$$\begin{split} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} &= \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A} \Xi \boldsymbol{R}_{uu} \Xi^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} = \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{\Lambda} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \llbracket \boldsymbol{V} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} & \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{\Lambda}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{n}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket \boldsymbol{V}_{f} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \\ \llbracket \boldsymbol{V}_{k} \rrbracket_{\boldsymbol{n}}^{\dagger} \end{bmatrix}.$$
(2.100)

Cette dernière possède ainsi rang{ $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\setminus \mathbf{n}}$ } = min(N, G) valeurs propres non nulles. On a  $[\![\mathbf{V}_f]\!]_{\setminus \mathbf{n}} \in \mathbb{C}^{N \times \min(N,G)}$  et  $[\![\mathbf{V}_k]\!]_{\setminus \mathbf{n}} \in \mathbb{C}^{N \times (N-\min(N,G))}$ , et on déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \Xi \mathbf{R}_{uu} \Xi^{\dagger} \mathbf{A}^{\dagger} \llbracket \mathbf{V}_{k} \rrbracket_{\backslash n} &= \mathbf{0} \,, \\ \Rightarrow \Xi^{\dagger} \mathbf{A}^{\dagger} \llbracket \mathbf{V}_{k} \rrbracket_{\backslash n} &= \mathbf{0} \,. \end{aligned}$$
(2.101)

Ce résultat s'explique du fait que rang $\{R_{uu}\} = G$ , et donc que d = 0 est l'unique solution admissible pour une équation du type  $R_{uu}d = 0$ . Considérant (2.94), on peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n}^{\dagger} \boldsymbol{A} \boldsymbol{\Xi} \boldsymbol{\Xi}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n} = \boldsymbol{0},$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{1} \boldsymbol{\alpha}_{1} & \boldsymbol{A}_{2} \boldsymbol{\alpha}_{2} & \dots & \boldsymbol{A}_{G} \boldsymbol{\alpha}_{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} \\ \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{2}^{\dagger} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_{G}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{G}^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n} = \boldsymbol{0},$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{1} \boldsymbol{\alpha}_{1} \boldsymbol{\alpha}_{1}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{2} \boldsymbol{\alpha}_{2} \boldsymbol{\alpha}_{2}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{2}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n} + \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{G} \boldsymbol{\alpha}_{G} \boldsymbol{\alpha}_{G}^{\dagger} \boldsymbol{A}_{G}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{k} \end{bmatrix}_{\backslash n} = \boldsymbol{0}.$$
(2.102)

Comme une matrice  $A_g \alpha_g \alpha_g^{\dagger} A_q^{\dagger} \forall g$  est hermitienne et définie semi-positive, on a :

$$d^{\dagger}A_{g}\alpha_{g}\alpha_{g}^{\dagger}A_{g}^{\dagger}d \ge 0 \ \forall \ d$$

L'unique issue possible en (2.102) est donc :

$$\boldsymbol{\alpha}_{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}_{g}^{\dagger}[\![\boldsymbol{V}_{k}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0} \;\forall \; g \,. \tag{2.103}$$

Cette relation indique que pour tout groupe unitaire (i.e. source indépendante avec  $\alpha_g = 1$ ),  $A_g$  est orthogonal à  $\llbracket V_k \rrbracket_n$ . Il donc possible de localiser une telle source par un balayage angulaire tel que réalisé par MUSIC en (2.89). Par contre, pour tout groupe g tel que  $M_g > 1$ ,  $\llbracket V_k \rrbracket_n$  est orthogonale à l'unique vecteur  $A_g \alpha_g \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ , et non à l'ensemble des  $M_g$  vecteurs directifs  $A_g$ . Il s'ensuit que l'estimation des DOAs de ces signaux est impossible par une simple projection du vecteur d'analyse  $a(\theta)$  sur les vecteurs de base du sous-espace orthogonal, car les vecteurs de coefficients de propagation  $\{\alpha_g\}_{g=1}^G$  sont généralement inconnus. Bien que ce problème soit ici mis en évidence dans le cas spécifique d'un traitement avec MUSIC, il est en fait commun à la plupart des algorithmes classiques du second ordre basés sur une décomposition en sous-espaces, comme ESPRIT [38] par exemple.

## 2.6.1 Méthodes structurées

Dans le cas d'un ULA en présence de sources indépendantes, un examen attentif montre qu'un élément  $[\mathbf{R}_{xx}]_{p,q}$  de la matrice de covariance des signaux ne dépend que de la différence p-q. Une telle matrice est dite Toeplitz, et implique que les éléments d'une même diagonale soient tous identiques. Cette propriété disparaît toutefois chez  $\mathbf{R}_{xx}$  en présence de sources partiellement corrélées ou cohérentes. Les méthodes structurées visent à redonner à  $\mathbf{R}_{xx}$  une forme Toeplitz idéale par moyennage pondéré des éléments des diagonales selon certains critères [24]. Toutefois, ces méthodes sont moins populaires et généralement moins efficaces que le lissage spatial (présenté ci-après), et pour cette raison leur principe ne sera pas expliqué en détails dans cette section.

## 2.6.2 Lissage spatial conventionnel

Le lissage spatial (de l'anglais "spatial smoothing") est un algorithme destiné à augmenter le rang de  $\mathbf{R}_{ss}$  lorsque celui-ci est dégénéré par la présence de sources cohérentes. Ce dernier est sans doute le plus populaire dans la littérature dû à son efficacité et à sa facilité d'application. Il sera d'ailleurs exploité (version bidirectionnelle) dans les chapitres 3 et 6 de la thèse avec le modèle des signaux groupés, et pour cette raison on en fera une présentation détaillée dans cette section.

Le lissage spatial a initialement été proposé par Evans *et al.* en [39], puis appliqué de façon plus formelle à l'estimation des DOAs de signaux cohérents par Shan et al. en [40]. Une version améliorée bidirectionnelle a ensuite été proposée par Pillai et Kwon en [41] et constitue encore aujourd'hui une référence en son domaine.

Le lissage spatial est applicable uniquement au cas de réseaux linéaires uniformes étant donnée la structure Vandermonde du vecteur directif lui étant associé. Une matrice A selon (2.29) sera donc assumée dans tous les développements.

## Lissage spatial conventionnel

Le principe du lissage spatial conventionnel (ou "forward") consiste à effectuer un groupement des éléments du réseau en R sous-réseaux, comme illustré à la Fig. 2.7. Étant donné un total de N éléments, on observe que :

$$R = N - L + 1, \qquad (2.104)$$

où L représente le nombre d'éléments par sous-réseau. En notant par  $\mathbf{x}_r^f(t_k)$  le vecteur des



FIGURE 2.7 – Sous-division d'un ULA selon une architecture de type "forward".

signaux reçus par un sous-réseau r donné, on a :

$$\boldsymbol{x}_{r}^{f}(t_{k}) = \begin{bmatrix} x_{r}(t_{k}) & x_{r+1}(t_{k}) & \dots & x_{r+L-1}(t_{k}) \end{bmatrix}^{\top}, \qquad (2.105)$$

qui correspond aux éléments  $r \ge r + L - 1 \det \mathbf{x}_k$ . Ces derniers peuvent également être exprimés sous forme matricielle à partir de (2.29) (ULA avec élément de référence q = 1) telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{r}^{f}(t_{k}) &= \begin{bmatrix} x_{r}(t_{k}) \\ x_{r+1}(t_{k}) \\ \vdots \\ x_{r+L-1}(t_{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j(r-1)\phi_{1}} & e^{-j(r-1)\phi_{2}} & \dots & e^{-j(r-1)\phi_{M}} \\ e^{-jr\phi_{1}} & e^{-jr\phi_{2}} & \dots & e^{-jr\phi_{M}} \\ \vdots \\ e^{-j(r+L-2)\phi_{1}} & e^{-j(r+L-2)\phi_{2}} & \dots & e^{-j(r+L-2)\phi_{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1}(t_{k}) \\ s_{2}(t_{k}) \\ \vdots \\ s_{M}(t_{k}) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} n_{r}(t_{k}) \\ n_{r+1}(t_{k}) \\ \vdots \\ n_{r+L-1}(t_{k}) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_{r} \mathbf{s}_{k} + \mathbf{n}_{r}(t_{k}) , \end{aligned}$$
(2.106)

où  $\mathbf{A}_r$  représente les lignes r à r + L - 1 de  $\mathbf{A}$ . Cette équation montre également que les vecteurs  $\mathbf{x}_1^f(t_k)$  et  $\mathbf{x}_R^f(t_k)$  sont de dimension L et correspondent bien aux éléments 1 à L et R à N de  $\mathbf{x}_k$ , respectivement. Par ailleurs, un examen attentif de  $\mathbf{A}_r$  montre que :

$$\mathbf{A}_{r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-j\phi_{1}} & e^{-j\phi_{2}} & \cdots & e^{-j\phi_{M}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(L-1)\phi_{1}} & e^{-j(L-1)\phi_{2}} & \cdots & e^{-j(L-1)\phi_{M}} \end{bmatrix} \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} e^{-j(r-1)\phi_{1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{-j(r-1)\phi_{2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{-j(r-1)\phi_{M}} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_{1}\mathbf{D}^{r-1}, \quad (2.107)$$

avec :

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} e^{-j\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-j\phi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-j\phi_M} \end{bmatrix}.$$
 (2.108)

La matrice D représente un opérateur de déphasage vérifiant :

$$D^{-1} = D^* = D^{\dagger} . (2.109)$$

On peut également calculer la matrice de covariance des signaux  $\mathbf{R}_{XX_r}^f$  associée à un sous-réseau r obtenue de (2.105). On montre usant de (2.108) et (2.109) que :

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_{r}}^{f} = E\left\{\boldsymbol{X}_{r}^{f}(t_{k})\left(\boldsymbol{X}_{r}^{f}(t_{k})\right)^{\dagger}\right\} = \boldsymbol{A}_{r}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{A}_{r}^{\dagger} + E\left\{\boldsymbol{n}_{r}(t_{k})\boldsymbol{n}_{r}^{\dagger}(t_{k})\right\}$$
$$= \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{r-1}\boldsymbol{R}_{ss}(\boldsymbol{D}^{r-1})^{\dagger}\boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{r-1}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{D}^{1-r}\boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2}\boldsymbol{I}, \qquad (2.110)$$

et correspond ainsi à l'intersection des lignes et colonnes r à r + L - 1 de  $\mathbf{R}_{xx}$  (on rappelle qu'on assume un bruit de type  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ ). Le lissage spatial dit conventionnel consiste au calcul d'une matrice  $\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^f$  obtenue par moyennage des R matrices  $\mathbf{R}_{xx_r}^f$  propre à chaque sous-réseau, soit :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{r}}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} (\boldsymbol{A}_{1} \boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{D}^{1-r} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I})$$

$$= \boldsymbol{A}_{1} \left( \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{D}^{1-r} \right) \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I}$$

$$\equiv \boldsymbol{A}_{1} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I}. \qquad (2.111)$$

On obtient ainsi une matrice de covariance lissée de dimensions  $L \times L \leq N \times N$  à partir de laquelle une estimation des DOAs des signaux peut être obtenue par application d'une méthode standard telle MUSIC. Si  $\mathbf{R}_{ss}$  est une matrice de rang déficient dû à la présence de sources cohérentes, l'annexe C montre comment le rang de  $\widetilde{\mathbf{R}}_{ss}^{f}$  peut être en partie restauré (rang{ $\widetilde{\mathbf{R}}_{ss}^{f}$ } > rang  $\mathbf{R}_{ss}$ ) par l'opération de moyennage en (2.111). Un résultat important montre que les conditions nécessaires et suffisantes à la localisation des  $M_{g}$  sources d'un groupe g donné sont :

$$R \ge M_g$$
,  $L \ge \sum_{i=1}^G \min(M_i, R) + 1$ , (2.112)

$$\Rightarrow N \ge 2M_g + \sum_{i \ne g} \min(M_i, M_g) \,. \tag{2.113}$$

Il s'agit en fait de la condition faisant en sorte que le rang de la matrice de covariance lissée  $\tilde{R}_{ss_g}^f$  du groupe g considéré soit complet, et de la condition assurant l'existence du sous-espace nul de  $[\![\tilde{R}_{xx}^f]\!]_{\backslash n}$  tel que que les vecteurs directifs  $A_g$  de ce groupe puissent y être orthogonaux lors du balayage par un vecteur d'analyse (ou autre technique de détection équivalente). De façon similaire, on montre également que les conditions nécessaires à la localisation des M sources considérant un nombre de groupes G quelconque sont :

$$R \ge \max_{g}(M_{g}) , \ L \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_{i}, R) + 1,$$
 (2.114)

$$\Rightarrow N \ge M + \max_{g}(M_g) \,. \tag{2.115}$$

#### 2.6.3 Lissage spatial bidirectionnel

Le lissage spatial bidirectionnel fut introduit par Pillai et Kwon en [41] et représente une version améliorée du lissage spatial conventionnel. On montre comment une matrice de covariance lissée de type "backward" peut également être prise en compte afin d'accélérer la décorrélation des signaux avec l'augmentation du nombre de sous-réseaux. La théorie présentée en [41] n'est toutefois valable que dans le cas spécifique où G = 1 (un seul groupe de sources cohérentes). Les développements effectués dans cette section permettront donc l'obtention de résultats plus généraux s'appliquant à un nombre de groupes G quelconque. La figure 2.8 illustre la



FIGURE 2.8 – Sous-division d'un ULA selon une architecture de type "backward".

décomposition du réseau selon une architecture de type "backward". On observe ainsi R sousréseaux de L éléments chacun tel qu'ici également :

$$R = N - L + 1, \qquad (2.116)$$

La différence essentielle pour ce type d'architecture réside au niveau analytique dans l'expression d'un vecteur  $\mathbf{x}_r^b(t_k)$ . On a :

$$\mathbf{x}_{r}^{b}(t_{k}) = \begin{bmatrix} x_{R-r+L}^{*}(t_{k}) & x_{R-r+L-1}^{*}(t_{k}) & \dots & x_{R-r+1}^{*}(t_{k}) \end{bmatrix}^{\top} .$$
(2.117)

Considérant l'expression de  $\mathbf{x}_{r}^{f}(t_{k})$  en (2.106), on remarque que :

$$\mathbf{x}_{r}^{b}(t_{k}) = \begin{bmatrix} x_{R-r+L}^{*}(t_{k}) \\ x_{R-r+L-1}^{*}(t_{k}) \\ \vdots \\ x_{R-r+1}^{*}(t_{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{R-r+L}(t_{k}) \\ \vdots \\ x_{R-r+2}(t_{k}) \\ x_{R-r+1}(t_{k}) \end{bmatrix}^{*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{R-r+1}(t_{k}) \\ x_{R-r+2}(t_{k}) \\ \vdots \\ x_{R-r+L}(t_{k}) \end{bmatrix}^{*}$$
$$= \mathbf{J} \big( \mathbf{x}_{R-r+1}^{f}(t_{k}) \big)^{*} = \mathbf{J} \big( \mathbf{A}_{R-r+1} \mathbf{s}_{k} + \mathbf{n}_{R-r+1}(t_{k}) \big)^{*}$$
$$= \mathbf{J} \big( (\mathbf{A}_{1} \mathbf{D}^{R-r}) \mathbf{s}_{k} + \mathbf{n}_{R-r+1}(t_{k}) \big)^{*} = \mathbf{J} \mathbf{A}_{1}^{*} \mathbf{D}^{r-R} \mathbf{s}_{k}^{*} + \mathbf{J} \mathbf{n}_{R-r+1}^{*}(t_{k}) , \qquad (2.118)$$

où J est une matrice miroir. Cette dernière est telle que pour une matrice formée par un ensemble de vecteurs  $\{\boldsymbol{w}_w\}_{w=1}^W$  quelconques :

$$\boldsymbol{J}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{1}^{\dagger}\\\boldsymbol{w}_{2}^{\dagger}\\\vdots\\\boldsymbol{w}_{W}^{\dagger}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{W}^{\dagger}\\\boldsymbol{w}_{W-1}^{\dagger}\\\vdots\\\boldsymbol{w}_{1}^{\dagger}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{1} \quad \boldsymbol{w}_{2} \quad \dots \quad \boldsymbol{w}_{W}\end{bmatrix}\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{W} \quad \boldsymbol{w}_{W-1} \quad \dots \quad \boldsymbol{w}_{1}\end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

On remarque en (2.118) que :

$$\begin{aligned} \mathbf{JA}_{1}^{*} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_{1}} & e^{-j\phi_{2}} & \dots & e^{-j\phi_{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j(L-1)\phi_{1}} & e^{j(L-1)\phi_{2}} & \dots & e^{j(L-1)\phi_{M}} \end{bmatrix}^{*} \\ &= \begin{bmatrix} e^{j(L-1)\phi_{1}} & e^{j(L-1)\phi_{2}} & \dots & e^{j(L-1)\phi_{M}} \\ e^{j(L-2)\phi_{1}} & e^{j(L-2)\phi_{2}} & \dots & e^{j(L-2)\phi_{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_{1}} & e^{-j\phi_{2}} & \dots & e^{-j\phi_{M}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-j(L-1)\phi_{1}} & e^{-j(L-1)\phi_{2}} & \dots & e^{-j(L-1)\phi_{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{j(L-1)\phi_{1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{j(L-1)\phi_{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j(L-1)\phi_{M}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}_{1} \mathbf{D}^{1-L}. \end{aligned}$$

$$(2.120)$$

Ainsi:

$$\boldsymbol{x}_{r}^{b}(t_{k}) = \boldsymbol{J}\boldsymbol{A}_{1}^{*}\boldsymbol{D}^{r-R}\boldsymbol{s}_{k}^{*} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{*}(t_{k}) = (\boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{1-L})\boldsymbol{D}^{r-R}\boldsymbol{s}_{k}^{*} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{*}(t_{k})$$
  
$$= \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{1-L+r-R}\boldsymbol{s}_{k}^{*} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{*}(t_{k}) = \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{r-N}\boldsymbol{s}_{k}^{*} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{*}(t_{k}).$$
(2.121)

Similairement à (2.110), la matrice de covariance des signaux propre à un sous-réseau r s'obtient directement en calculant :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_{r}}^{b} &= E\left\{\boldsymbol{X}_{r}^{b}(t_{k})\left(\boldsymbol{X}_{r}^{b}(t_{k})\right)^{\dagger}\right\} \\ &= \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{r-N}E\{\boldsymbol{s}_{k}^{*}\boldsymbol{s}_{k}^{\top}\}\boldsymbol{D}^{N-r}\boldsymbol{A}_{1} + \boldsymbol{J}E\{\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{*}\boldsymbol{n}_{R-r+1}^{\top}\}\boldsymbol{J} \\ &= \boldsymbol{A}_{1}\boldsymbol{D}^{r-N}\boldsymbol{R}_{ss}^{*}\boldsymbol{D}^{N-r}\boldsymbol{A}_{1} + \sigma_{n}^{2}\boldsymbol{I}. \end{aligned}$$
(2.122)

La matrice de covariance lissée de type "backward" est donc obtenue par un moyennage des R matrices  $R^b_{XX_r}$ , soit :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{b} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{r}}^{b} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} (\boldsymbol{A}_{1} \boldsymbol{D}^{r-N} \boldsymbol{R}_{ss}^{*} \boldsymbol{D}^{N-r} \boldsymbol{A}_{1} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I})$$

$$= \boldsymbol{A}_{1} \left( \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}^{r-N} \boldsymbol{R}_{ss}^{*} \boldsymbol{D}^{N-r} \right) \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I},$$

$$\equiv \boldsymbol{A}_{1} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{b} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I}, \qquad (2.123)$$

La stratégie du lissage spatial bidirectionnel consiste en l'emploi simultané des matrices lissées de type "forward" et "backward" pour définir une seule matrice de covariance lissée "forward-backward" (ou bidirectionnelle) de la forme :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} = \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^f + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^b) \,. \tag{2.124}$$

L'annexe D montre que  $\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^b = \mathbf{J}(\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^f)^* \mathbf{J}$ , et donc que  $\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}$  peut être obtenue uniquement à partir de  $\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^f$ . On montre également que la décorrélation et la détection de toutes les sources d'un groupe g quelconque peut être effectuée si :

$$R \ge \left\lceil \frac{M_g}{2} \right\rceil \quad , \quad L \ge \sum_{i=1}^G \min(M_i, 2R) + 1 \,, \tag{2.125}$$

$$\Rightarrow N \ge \frac{3M_g}{2} + \sum_{i \ne g} \min\left(M_i, 2\left\lceil \frac{M_g}{2} \right\rceil\right) \,. \tag{2.126}$$

De plus, on montre que la détection de l'ensemble des sources considérant un nombre de groupe arbitraire G est garantie si :

$$R \ge \left[\frac{1}{2}\max_{g}(M_{g})\right] , \ L \ge \sum_{i=1}^{G}\min(M_{i}, 2R) + 1,$$
 (2.127)

$$\Rightarrow N \ge M + \frac{1}{2} \max_{g}(M_g) \,. \tag{2.128}$$

Ces conditions sont beaucoup moins contraignantes que celles obtenues pour le lissage spatial conventionnel en (2.114). Par exemple, pour le cas d'un seul groupe (G = 1),  $N \ge 2M$ éléments sont nécessaires pour la détection de l'ensemble des sources avec le lissage spatial conventionnel alors que seulement 3M/2 le sont en utilisant le lissage spatial bidirectionnel. Ce dernier sera donc considéré dans les développements futurs de la thèse.

## 2.7 Simulations

On présente ici différentes simulations visant à mettre en évidence les particularités des techniques d'estimation classiques étudiées dans ce chapitre. Un accent particulier sera porté sur les avantages et désavantages de chacune de même que des limitations générales qui justifieront les méthodes de traitement alternatives développées dans les chapitres ultérieurs. Pour simplifier, on considérera comme à la section 2.5 un ULA avec un modèle des signaux reçus de la forme :

$$oldsymbol{x}_k = oldsymbol{A}oldsymbol{s}_k + oldsymbol{n}_k$$
 .

On assumera également que le bruit est indépendant et identiquement distribué (iid) pour chaque élément du réseau.

#### 2.7.1 Cas de sources indépendantes

On considère ici le cas de M sources indépendantes. Les paramètres numériques utilisés pour cette simulation sont présentés au Tab. 2.1, et les résultats sous forme graphique à la Fig. 2.9. On remarque dans ce cas d'application simple que MUSIC possède une résolution supérieure à celle des pseudo-spectres obtenus par les estimateurs de Bartlett et Capon. On note même qu'à plus faible SNR (défini ici par le rapport  $\sigma_{s_m}^2/\sigma_n^2$ ) ces derniers ne peuvent détecter toutes les sources en présence contrairement à MUSIC qui n'est pas affecté par la valeur de  $\sigma_n^2$  (dans un cas théorique idéal où le nombre d'échantillons  $K \to \infty$ ). Un nombre de sources estimé  $\hat{M} = N - 1$  est imposé pour MUSIC. Cette première simulation permet donc d'apprécier la supériorité notable des algorithmes à base de sous-espaces tel MUSIC par rapport à d'autres méthodes n'exploitant pas ces propriétés.

Paramètre	Valeur						
N	6						
K	$\infty$						
$\sigma_{s_m}^2 \; \forall \; m$	1						
$\beta_0 d$	$\pi$						
θ	$10^{\circ}$	$20^{\circ}$	$50^{\circ}$	$110^{\circ}$	$140^{\circ}$		

Tableau 2.1 – Paramètres de simulation pour le cas de sources indépendantes.



FIGURE 2.9 – Estimation des DOAs de sources indépendantes par les méthodes de Bartlett, Capon et MUSIC (pseudo-spectres normalisés).

## 2.7.2 Cas de sources cohérentes

On considère maintenant le cas de deux groupes de signaux cohérents. Les paramètres numériques de simulation sont présentés au Tab. 2.2. La Fig. 2.10 montre les pseudo-spectres obtenus considérant l'application de MUSIC ( $\hat{M} = N - 1$ ) avec lissage spatial bidirectionnel. On remarque que sans lissage spatial, aucune des sources des deux groupes n'est détectée. Pour R = 1 sous-réseau, seules les sources du groupe 1 sont correctement localisées puisque les conditions de détection de ce groupe sont satisfaites (i.e.  $R \ge 1$  et  $L \ge 5$  en (2.125)). Par contre les sources du groupe 2 ne peuvent être détectées car (2.125) montre que ceci nécessite

d'avoir  $R \ge 2$ . Pour R = 2 et R = 3, on voit que les pseudo-spectres obtenus permettent de localiser l'ensemble des sources en présence comme le prévoit (2.127).

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
N	8	K	$\infty$
$\sigma_{u_q}^2 \forall g$	1	$\beta_0 d$	$\pi$
$oldsymbol{ heta}_1$	$20^\circ$ $30^\circ$	$oldsymbol{lpha}_1$	1  0.5 + j0.5
$oldsymbol{ heta}_2$	$70^\circ$ $90^\circ$ $120^\circ$	$oldsymbol{lpha}_2$	1  -0.3 + j0.9  0.9 + j0.6

Tableau 2.2 – Paramètres de simulation pour le cas de sources cohérentes.



 ${\rm FIGURE}~2.10$  – Estimation des DOAs de sources cohérentes par lissage spatial bidirectionnel avec MUSIC considérant un SNR de 10 dB.

#### 2.7.3 Influence du nombre d'éléments et du nombre d'échantillons

On met ici en évidence l'influence du nombre d'éléments et du nombre d'échantillons sur la qualité d'estimation des DOAs de signaux indépendants. Le Tab. 2.3 montre les paramètres numériques considérés pour cette simulation. D'abord, pour  $K \to \infty$ , on constate qu'avec N > M (i.e. N = 5 et N = 6) les sources sont correctement détectées par MUSIC comme le prévoit la théorie. Pour  $N \leq M$ , le sous-espace nul des signaux n'existe pas car rang{ $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\backslash n}$ } = N. Il n'existe donc aucun vecteur d'analyse  $\mathbf{a}(\theta)$  en (2.93) tel que  $\mathbf{v}_p^{\dagger}\mathbf{a}(\theta) = 0$ . Les pics observés à la Fig. 2.11 dans cette condition ne correspondent donc pas à une valeur indéfinie du type

1/0, mais plutôt 1/ $\epsilon$  où  $\epsilon$  prend une valeur faible (mais non nulle) à proximité des DOAs des signaux.

Considérant maintenant le cas où K est fini avec N fixe, on remarque qu'une qualité d'estimés supérieure est obtenue avec des valeurs élevées de K. La Fig. 2.11 montre à cet effet S = 10calculs de pseudo-spectres pour chaque valeur de K considérée. Ici, les sources de même que le bruit sur chaque élément sont modélisés par des variables aléatoires gaussiennes. Il convient de mentionner que même si la puissance du bruit n'a aucune influence sur les vecteurs propres associés au sous-espace bruit de  $\mathbf{R}_{xx}$  en (2.88), cette dernière aura une influence non négligeable sur la EVD de  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(K < \infty)$  telle que considérée ici. La Fig. 2.11 montre également qu'un nombre d'échantillons plus élevé est nécessaire à la détection de sources rapprochées, comme celles situées en 30° et 40° par exemple.

Paramètre	Valeur					
SNR	$5 \mathrm{dB}$					
$eta_0 d$	$\pi$					
$oldsymbol{ heta}$	$30^{\circ}$	$40^{\circ}$	$60^{\circ}$	$90^{\circ}$		

Tableau 2.3 – Paramètres de simulation avec variation nombre d'éléments et du nombre d'échantillons.



FIGURE 2.11 - Influence du nombre d'éléments et du nombre d'échantillons sur l'estimation des DOAs de sources indépendantes par MUSIC.

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les principales notations mathématiques qui seront reprises ultérieurement dans la thèse ainsi que d'expliquer quelques-uns des principes de base formant la discipline du traitement d'antenne. Pour une revue plus complète des algorithmes et méthodes de traitement existants dans les domaines de la formation de voies et de l'estimation des DOAs, le lecteur est référé à [25, 23, 24]. Ce chapitre était également destiné à bien faire comprendre ainsi qu'à bien mettre en évidence les principales limitations propres aux algorithmes d'estimation classiques (i.e. vis-à-vis la corrélation des signaux et le degré de liberté du réseau), car ces dernières ont motivé en grande partie le développement des contributions de cette thèse qui sont présentées aux chapitres 3, 4 et 6.

## Chapitre 3

# Statistiques d'ordre supérieur

Ce chapitre aborde le problème d'estimation des paramètres des sources par l'emploi de statistiques d'ordre supérieur (HOS, "*Higher-Order Statistics*"). On présente la théorie et les développements relatifs à une première contribution en ce domaine, consistant en l'amélioration d'une méthode de traitement existante. Ce chapitre fera intervenir uniquement la notion de signaux groupés définie à la section 2.3.2. Pour la bonne compréhension des développements qui seront présentés, il convient donc de bien maîtriser les concepts de sous-espaces introduits à la section 2.5.3 de même que les développements relatifs au lissage spatial bidirectionnel de la section 2.6.3.

## 3.1 Motivations

Les algorithmes d'estimation du second ordre, quoiqu'efficaces, possèdent une limitation importante en regard du nombre de paramètres maximal pouvant être estimés à partir d'un nombre d'éléments N donné. Cette limite correspond au nombre de degrés de liberté du réseau, N-1, et intervient également au niveau du nombre de contraintes pouvant être imposées sur la réponse ou le diagramme de rayonnement du réseau (cf. section 2.4.2) en émission ou réception. Dans le cas de signaux cohérents, une limitation encore plus importante est rencontrée pour l'estimation des paramètres, où dans le pire des scénarios  $N \ge 3M/2$  éléments sont requis pour la détection de l'ensemble des sources (cas où G = 1). Pour pallier ou remédier en partie à de telles limitations, plusieurs algorithmes d'estimation ayant recours à des statistiques d'ordre supérieur ont été proposés dans la littérature. Non seulement ces algorithmes permettent-ils d'obtenir des gains en traitement, mais réussissent-ils également à effectuer l'estimation aveugle (de l'anglais "blind estimation") de la matrice  $\boldsymbol{B}$  à l'équation (2.53), chose étant par ailleurs impossible à partir de statistiques du second ordre seules (si les sources sont identiquement distribuées aux instants d'échantillonnage). Bien qu'on parle ici de statistiques d'ordre supérieur, la grande majorité des méthodes proposées se limite à des développements d'ordre quatre afin de limiter la complexité des opérations et la variance des estimés obtenus. Les discussions de ce chapitre seront donc également limitées à ce type de développements.

La littérature est particulièrement riche en matière d'algorithmes ayant recours à des statistiques d'ordre supérieur [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. Une revue des principes de base des méthodes les plus populaires en ce domaine ne sera pas présentée ici vue la portée limitée de ce document, mais le lecteur est quand même invité à se référer à ces travaux afin de se familiariser avec le type d'approche généralement rencontrée chez ces algorithmes. Dans ce chapitre, on retiendra davantage l'attention de l'algorithme EVESPA [42, 43] sur lequel une partie considérable des efforts de recherche a été investie. La théorie relative à cet algorithme sera présentée en détail et permettra par le fait même de mettre en évidence certaines caractéristiques des techniques d'estimation ayant recours à des statistiques d'ordre supérieur propres à la plupart des algorithmes de ce type.

## 3.2 Algorithme EVESPA

L'algorithme EVESPA a été introduit par Gönen et Mendel en [43] en tant que version étendue de l'algorithme VESPA ("Virtual-ESPRIT Algorithm") [49] s'appliquant au cas de signaux cohérents. L'algorithme a été exploité à la fois pour l'estimation des DOAs de signaux cohérents en [43] mais également pour la formation de voies optimale dans un même contexte en [42]. Le modèle des signaux considérés dans les deux cas est identique à celui des signaux groupés défini à la section 2.3.2, soit :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{n}_k \,. \tag{3.1}$$

Mentionnons ici que  $B \in \mathbb{C}^{N \times G}$  correspond à une matrice de canal arbitraire pour un réseau à géométrie quelconque non nécessairement calibré<sup>1</sup>. On a donc  $B = \Gamma AC\Xi$ .

## 3.2.1 Théorie

L'algorithme EVESPA exploite le cumulant d'ordre quatre sans délai de variables aléatoires complexes stationnaires et centrées défini par [49, 50] :

$$\operatorname{cum}(r_m(t), r_n(t), r_p(t), r_q(t)) = E\{r_m(t)r_n(t), r_p(t)r_q(t)\} - E\{r_m(t)r_n(t)\}E\{r_p(t)r_q(t)\} - E\{r_m(t)r_p(t)\}E\{r_n(t)r_q(t)\} - E\{r_m(t)r_q(t)\}E\{r_n(t)r_p(t)\}.$$
(3.2)

<sup>1.</sup> L'algorithme EVESPA défini en [43] nécessite qu'une certaine partie du réseau ait la forme d'un ULA afin de pouvoir appliquer le lissage spatial nécessaire à l'estimation subséquente des DOAs des signaux. La matrice  $\boldsymbol{A}$  incluse en  $\boldsymbol{B}$  ne peut donc prendre une forme arbitraire, et doit nécessairement posséder la structure Vandermonde sur un nombre minimal de lignes. Conséquemment, la matrice  $\boldsymbol{B}$  ne peut donc être de nature complètement arbitraire. Toutefois, on fera référence à l'algorithme EVESPA dans le contexte de ce chapitre non pas en tant que processus d'estimation des DOAs de signaux cohérents à partir de statistiques d'ordre supérieur comme voulu en [43], mais plutôt en tant que procédure d'estimation de  $\boldsymbol{B}$  elle-même. Cette dernière est d'ailleurs exploitée et décrite en détail en [42] plutôt qu'en [43].
On procède ensuite au calcul de deux matrices  $C_1$  et  $C_2$  définies par :

$$\boldsymbol{C}_{i} = \operatorname{cum}(x_{i}(t_{k}), x_{1}^{*}(t_{k}), \boldsymbol{x}_{k}, \boldsymbol{x}_{k}^{\dagger}) , \ i \in \{1, 2\},$$
(3.3)

où  $[C_i]_{m,n} = \operatorname{cum}(x_i(t_k), x_1^*(t_k), x_m(t_k), x_n^*(t_k))$ . Considérant une distribution gaussienne du vecteur  $\mathbf{n}_k$  et assumant que les sources élémentaires possèdent des cumulants d'ordre quatre non nuls (i.e.  $\gamma_{u_g} = \operatorname{cum}(u_g(t_k), u_g^*(t_k), u_g(t_k), u_g^*(t_k)) \neq 0 \forall g$ ), on montre en [42] que :

$$C_1 = B\Lambda B^{\dagger}$$
,  $C_2 = BD\Lambda B^{\dagger}$ , (3.4)

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale de dimensions  $G \times G$  telle que  $\Lambda_{gg} = \gamma_{u_g} |B_{1,g}|^2$ , et où Dest également diagonale et de dimensions  $G \times G$  telle que  $D_{gg} = B_{2,g}/B_{1,g}$ . L'hypothèse d'un bruit gaussien est cruciale pour l'obtention de (3.4), car on démontre que le cumulant d'ordre quatre d'une variable aléatoire gaussienne est nul. On déduit donc que l'algorithme EVESPA de même que tout algorithme d'estimation exploitant uniquement des statistiques d'ordre quatre ne peut s'appliquer au cas de sources gaussiennes. Cette limitation n'est cependant pas très contraignante considérant que les cumulants d'ordre quatre de la plupart des signaux de communication (e.g. signaux QAM ("Quadrature Amplitude Modulation") génériques) sont non nuls [43]. Par ailleurs l'élimination du bruit gaussien par la simple application de cumulants aux signaux observables constitue un avantage notable chez ce type d'algorithmes.

À partir de  $C_1$  et  $C_2$  en (3.4), on forme une matrice C telle que :

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ BD \end{bmatrix} \Lambda B^{\dagger} \equiv S \Lambda B^{\dagger}.$$
(3.5)

La décomposition en valeurs singulières (SVD) de C peut être exprimée sous la forme <sup>2</sup> :

$$\boldsymbol{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_1 & \boldsymbol{U}_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1^{\dagger} \\ \boldsymbol{V}_2^{\dagger} \end{bmatrix} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}_1^{\dagger}, \qquad (3.6)$$

où  $U_1 \in \mathbb{C}^{2N \times G}$ ,  $U_2 \in \mathbb{C}^{2N \times (2N-G)}$  et où  $\Sigma \in \mathbb{R}^{G \times G}$  est diagonale et de rang complet. Comme les colonnes de U sont orthonormales entre elles (définition de la SVD), on a  $U_1^{\dagger}U_2 = \mathbf{0}$ , ce qui implique également que  $C^{\dagger}U_2 = \mathbf{0}$ . Suivant (3.5), on a donc :

$$B\Lambda^* S^{\dagger} U_2 = \mathbf{0} \,. \tag{3.7}$$

Comme  $B\Lambda^*$  est de rang complet (i.e. G), cette équation implique que  $S^{\dagger}U_2 = 0$ . Considérant que  $U_1^{\dagger}U_2 = 0$ , il s'ensuit que S doit nécessairement pouvoir s'exprimer par une combinaison linéaire des vecteurs propres associés au sous-espace fondamental de C (i.e.  $U_1$ ), soit :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{T}^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{S} \boldsymbol{T} \,, \tag{3.8}$$

<sup>2.</sup> La décomposition en valeurs singulières d'une matrice  $X \in \mathbb{C}^{M \times N}$  est telle que  $X = USV^{\dagger}$ , où  $U \in \mathbb{C}^{M \times M}$  et  $V \in \mathbb{C}^{N \times N}$  sont des matrices unitaires (i.e.  $UU^{\dagger} = I$ ,  $U^{\dagger}U = I$ ,  $VV^{\dagger} = I$  et  $V^{\dagger}V = I$ ) et où  $S \in \mathbb{R}^{M \times N}$  est une matrice diagonale à valeurs non négatives. Par ailleurs, remarquons que  $XX^{\dagger} = USV^{\dagger}(USV^{\dagger})^{\dagger} = US^{2}U^{\dagger}$ . Il s'agit donc de la EVD de  $XX^{\dagger}$  où U est la matrice des vecteurs propres et  $S^{2}$  celle des valeurs propres correspondantes.

où T est une matrice non singulière de dimensions  $G \times G$ . Considérant la définition de S en (3.5), on peut également écrire :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} \\ \boldsymbol{U}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}, \qquad (3.9)$$

où les matrices  $\boldsymbol{U}_{11}$  et  $\boldsymbol{U}_{12}$  sont de dimensions  $N \times G$ . On remarque que l'équation (3.9) implique une invariance rotationnelle du même genre que celle exploitée par ESPRIT en [38]. On montre alors qu'il existe une matrice  $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_x^\top & \boldsymbol{F}_y^\top \end{bmatrix}^\top$  de rang G et de dimensions  $2G \times G$  telle que :

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} \\ \mathbf{U}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{F} = \mathbf{U}_{11} \mathbf{F}_x + \mathbf{U}_{12} \mathbf{F}_y = \mathbf{B} \mathbf{T} \mathbf{F}_x + \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{T} \mathbf{F}_y.$$
(3.10)

Comme **B** est de rang  $\min(N, G)$ , cette équation se réduit à :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{D}\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_y, \qquad (3.11)$$

d'où :

$$-F_x F_y^{-1} = T^{-1} DT \,. \tag{3.12}$$

Ainsi, les valeurs propres de  $-\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y^{-1}$  correspondent aux éléments diagonaux de  $\mathbf{D}$ . En représentant par  $\mathbf{E}$  la matrice des vecteurs propres de  $-\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y^{-1}$ , l'équation (3.12) montre qu'une solution générale pour  $\mathbf{E}$  est de la forme  $\mathbf{E} = (\mathbf{ZT})^{-1}$  où  $\mathbf{Z}$  est une matrice de permutation et de mise à l'échelle contenant uniquement un élément non nul par ligne et colonne. À partir de (3.8), on montre alors que :

$$U_1 E = STE = SZ^{-1}.$$
 (3.13)

Considérant le partitionnement de  $U_1$  en (3.9), on déduit aussi que :

$$U_{11}E = BZ^{-1}$$
,  $U_{12}ED^{-1} = BZ^{-1}$ . (3.14)

Ainsi, un estimé  $\hat{B} = BZ^{-1}$  de B peut être obtenu par la moyenne des deux expressions précédentes, soit :

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}^{-1} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{U}_{11}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{U}_{12}\boldsymbol{E}\boldsymbol{D}^{-1}), \qquad (3.15)$$

où  $\boldsymbol{D}$  et  $\boldsymbol{E}$  sont obtenus par la EVD de  $-\boldsymbol{F}_x \boldsymbol{F}_y^{-1}$ .

#### 3.2.2 Estimation des DOAs et formation de voies

Une fois l'estimation de  $\hat{B}$  réalisée, on peut procéder à la localisation des sources ou à la formation de voies selon le traitement désiré. Dans le premier cas, en assumant un réseau

parfaitement calibré  $(\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I})$ , on a :

$$B = A\Xi = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_G \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_1\alpha_1 & A_2\alpha_2 & \dots & A_G\alpha_G \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_G \end{bmatrix}.$$
(3.16)

La *g*-ième colonne de B (i.e.  $b_g$ ) correspond donc au produit  $A_g \alpha_g$  et contient toute l'information relative aux signaux du groupe *g*. Considérant (2.94) et (2.95), on peut donc définir une matrice de covariance pour les signaux de ce groupe tel que :

$$\boldsymbol{R}_{xx_g} = \boldsymbol{A}_g \boldsymbol{R}_{ss_g} \boldsymbol{A}_g^{\dagger} = \sigma_{u_g}^2 \boldsymbol{A}_g \boldsymbol{\alpha}_g \boldsymbol{\alpha}_g^{\dagger} \boldsymbol{A}_g^{\dagger} = \sigma_{u_g}^2 \boldsymbol{b}_g \boldsymbol{b}_g^{\dagger}.$$
(3.17)

La localisation des sources du groupe peut donc être effectuée considérant un ULA avec application du lissage spatial puisque rang{ $\mathbf{R}_{xx_g}$ } = 1. Étant données les  $M_g$  sources du groupe,  $3M_g/2$  éléments seraient donc nécessaires selon (2.125). Considérant l'estimation  $\hat{\mathbf{B}}$  de  $\mathbf{B}$  obtenue par EVESPA, la même procédure pourrait être appliquée en considérant toutefois une estimation  $\hat{\mathbf{R}}_{xx_g}$  de  $\mathbf{R}_{xx_g}$  de la forme :

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{xxg} = \hat{\boldsymbol{b}}_g \hat{\boldsymbol{b}}_g^{\dagger} \,. \tag{3.18}$$

La matrice  $\hat{\mathbf{R}}_{xxg}$  est donc égale à un facteur près à  $\mathbf{R}_{xxg}$  (i.e.  $\hat{\mathbf{R}}_{xxg} \propto \mathbf{R}_{xxg}$ ) dû à la structure particulière de  $\mathbf{Z}$  en (3.15) (i.e.  $\hat{\mathbf{b}}_g \propto \mathbf{b}_g$ ).

Par ailleurs, l'estimation de B en (3.15) permet également la formation de voies optimale selon la théorie de la section 2.4.3. En effet, le vecteur de pondération optimal d'un groupe gdonné s'obtient directement de (2.70) tel que :

$$\boldsymbol{w}_{g} = c \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{b}_{g}}{\boldsymbol{b}_{g}^{\dagger} \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{b}_{g}} \,\forall \, g \in \{1, 2, \dots, G\} \,.$$

$$(3.19)$$

Il devient donc possible d'estimer l'enveloppe complexe élémentaire de ce groupe à partir de (2.57). On aura :

$$u_g(t_k) \approx \boldsymbol{w}_g^{\dagger} \boldsymbol{x}_k \,, k \in \{1, 2, \dots, K\} \,. \tag{3.20}$$

Considérant l'estimation  $\hat{B}$ , le vecteur de pondération optimal prendra la forme :

$$\hat{\boldsymbol{w}}_g = \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \hat{\boldsymbol{b}}_g}{\hat{\boldsymbol{b}}_g^{\dagger} \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \hat{\boldsymbol{b}}_g} \,\forall \, g \in \{1, 2, \dots, G\}\,, \tag{3.21}$$

et est égal à un facteur complexe près à  $w_g$  puisque  $\hat{b}_g \propto b_g$ . L'estimation de l'enveloppe complexe du groupe g pourra ainsi être obtenue par :

$$\hat{u}_{g}(t_{k}) \approx \hat{\boldsymbol{w}}_{q}^{\dagger} \boldsymbol{x}_{k}, k \in \{1, 2, \dots, K\}.$$
 (3.22)

Ici toutefois, comme  $u_g(t)$  représente le signal intelligible transmis par l'usager g et destiné à être décodé au récepteur, il serait souhaitable que les échantillons estimés  $\{\hat{u}_g(t_k)\}_{k=1}^K$  n'aient pas subi de rotation dans le plan complexe afin de ne pas introduire d'erreur de détection des symboles. Autrement dit, on souhaite qu'idéalement  $\hat{u}_g(t_k)/u_g(t_k) \in \mathbb{R}$ . Or une telle rotation est presqu'inévitable étant donnée la nature de  $\mathbf{Z}$  en (3.15). Par chance, comme il est expliqué en [42], il est possible d'éliminer cette rotation indésirable à une ambiguïté de signe près sur la phase par la procédure décrite à la section III. C. de ce même article. Le lecteur y est donc référer au besoin.

Mentionnons finalement que le nombre de groupes estimé  $\hat{G}$  nécessaire à l'obtention de  $\hat{B}$  en (3.15) peut être obtenu en pratique de la même façon que  $\hat{M}$  à la section 2.5.3 pour le cas de sources indépendantes, car pour  $N \ge G$ ,  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\backslash \mathbf{n}}$  possède N - G valeurs propres nulles (i.e. rang $\{[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\backslash \mathbf{n}}\} = G$ ).

#### 3.2.3 Simulations

On considère dans cette section le problème d'estimation des DOAs décrit à la section précédente. Les paramètres numériques utilisés pour cet exemple sont donnés au Tab. 3.1. Les étapes de simulation sont :

- 1) Estimer les matrices  $C_1$  et  $C_2$  en (3.4) pour former  $C = \begin{bmatrix} C_1^\top & C_2^\top \end{bmatrix}^\top$ .
- 2) Effectuer la SVD de C. Former  $U_1$  à partir des G premières colonnes de la matrice des vecteurs singuliers de gauche, conformément à (3.6).
- 3) Partitionner la matrice  $U_1$  en deux sous-matrices  $U_{11}$  et  $U_{12}$  comme en (3.9). Effectuer la SVD de  $\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \end{bmatrix}$ . Former ensuite la matrice F à partir des G derniers vecteurs de la matrice des vecteurs singuliers de droite.
- 4) Partitionner la matrice  $\boldsymbol{F}$  de manière à ce que  $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_x^\top & \boldsymbol{F}_y^\top \end{bmatrix}^\top$ , où  $\boldsymbol{F}_x$  et  $\boldsymbol{F}_y$  sont de dimensions  $G \times G$ .
- 5) Effectuer la EVD de  $-\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y^{-1}$  telle que  $-\mathbf{F}_x \mathbf{F}_y^{-1} = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^{-1}$ .
- 6) Estimer  $\boldsymbol{B}$  selon (3.15).
- 7) Calculer  $\hat{\boldsymbol{R}}_{xx_q} \forall g$  selon (3.18).
- 8) Appliquer le lissage spatial (bidirectionnel) à  $\hat{R}_{xx_g} \forall g$ .
- 9) Estimer les DOAs par MUSIC.

Pour toutes les simulations, on considère un bruit gaussien de type  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$  et des sources BPSK équiprobables prenant des valeurs sur l'axe I de telle sorte que  $u_g(t_k) \in \{-\sigma_g, \sigma_g\} \forall g$ . De plus, on assumera G connu afin de mieux mettre en évidence les performances propres à l'algorithme dans un cas d'application plus idéal. La Fig. 3.1 illustre les S = 10 pseudospectres obtenus pour chaque groupe de signaux considérant 2000 échantillons et un SNR de 0 dB. Dans l'ensemble, on observe une bonne estimation des DOAs dans chacun des groupes.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
N	6	L	5
$\sigma_{u_q}^2 \forall g$	1	$\beta_0 d$	$\pi$
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{ heta}_1 & \boldsymbol{ heta}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 25^{\circ} & 40^{\circ} \\ 50^{\circ} & 80^{\circ} \\ 80^{\circ} & 110^{\circ} \\ 130^{\circ} & 140^{\circ} \end{bmatrix}$	$egin{bmatrix} oldsymbol{lpha}_1 & oldsymbol{lpha}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 0.3+j0.8 & -0.9+j0.3\\ 0.8-j0.5 & 0.9-j0.3\\ -0.5+j0.5 & 0.8-j0.7 \end{bmatrix}$

Tableau 3.1 – Paramètres de simulation pour l'estimation de DOAs à partir de l'algorithme EVESPA.



FIGURE 3.1 – Application de EVESPA pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MUSIC. K = 2000 et SNR = 0 dB.

La Fig. 3.2 pour sa part présente une simulation en tout point identique à l'exception d'un nombre d'échantillons K = 250 est employé. On constate cette fois une dégradation notable des performances en particulier au niveau du groupe 1 où une variance importante des estimés est observée. En général l'augmentation du nombre d'échantillons aide non seulement à la convergence plus nette des matrices  $\hat{C}_1(K)$  et  $\hat{C}_2(K)$  vers leur forme idéale donnée en (3.4), mais également à l'élimination du bruit. En diminuant K, on atteint vite un seuil où les phénomènes opposés deviennent prédominants et affectent ainsi plus sévèrement la qualité des estimés. Les algorithmes d'ordre supérieur ont le désavantage commun de converger plus lentement, induisant une variance plus élevée que les techniques du second-ordre pour un même nombre d'échantillons K. Toutefois, de tels algorithmes peuvent parfois présenter des avantages plus importants que leurs inconvénients comme il en a été discuté à la section 3.1. Par exemple, on voit dans le contexte de cette simulation que si l'estimation des DOAs des signaux avait été réalisée directement à partir de  $R_{xx}$  en appliquant une méthode classique du second ordre telle MUSIC ou ESPRIT, un total de N = 10 éléments aurait été nécessaire (voir (2.125) ou (2.127) avec  $M_q = 4 \forall g$ ) alors que seulement 6 suffisent avec EVESPA.



FIGURE 3.2 – Application de EVESPA pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MUSIC. K = 250 et SNR = 0 dB.

## 3.3 Amélioration proposée

On présente ici une amélioration de la procédure d'estimation de B en (3.15) ayant fait l'objet d'une première contribution.

#### 3.3.1 Théorie

Considérons d'abord l'expression de  $\mathbf{R}_{xx}$  avec un bruit de type  $\sigma_n^2 \mathbf{I}$ . De (2.54), on a :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = E\{\boldsymbol{x}_k \boldsymbol{x}_k^{\dagger}\} = \boldsymbol{B} E\{\boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_k^{\dagger}\} \boldsymbol{B}^{\dagger} + E\{\boldsymbol{n}_k \boldsymbol{n}_k^{\dagger}\}$$
$$\equiv \boldsymbol{B} \boldsymbol{R}_{uu} \boldsymbol{B}^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}, \qquad (3.23)$$

Rappelons ici que  $\mathbf{R}_{uu}$  est diagonale étant donnée l'indépendance des éléments de  $\mathbf{u}_k$  entre eux. De (2.85) et (2.86), on peut exprimer la EVD de  $\mathbf{R}_{xx}$  par :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = \boldsymbol{V}_{f} \boldsymbol{\Lambda}_{f} \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} , \qquad (3.24)$$

où  $V_f$  représente un ensemble de vecteurs de base du sous-espace source (ou fondamental). Suivant (3.23) et (3.24), il s'ensuit que B peut être exprimée à partir de  $V_f$  de façon telle que :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}_{f} \boldsymbol{Q} \,, \tag{3.25}$$

où  $Q \in \mathbb{C}^{G \times G}$  est une matrice de coefficients de rang complet<sup>3</sup>. On remarque en (3.25) que l'estimation de B revient à celle de Q puisque  $V_f$  peut facilement être obtenue par la EVD

<sup>3.</sup> Ceci est vrai selon les hypothèses de travail A1 à A4 en [42].

de  $\mathbf{R}_{xx}$ . Rappelant que  $\mathbf{V}_{f}^{\dagger}\mathbf{V}_{f} = \mathbf{I}$ , on peut former deux matrices  $\mathbf{C}_{1}^{\prime}$  et  $\mathbf{C}_{2}^{\prime}$  à partir de (3.4) de la façon suivante :

$$\boldsymbol{C}_{1}^{\prime} = \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} \boldsymbol{C}_{1} \boldsymbol{V}_{f} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q}^{\dagger} \quad , \quad \boldsymbol{C}_{2}^{\prime} = \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} \boldsymbol{C}_{2} \boldsymbol{V}_{f} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q}^{\dagger} \quad . \tag{3.26}$$

À ce point, on appliquera une procédure d'estimation semblable à celle de l'algorithme EVESPA original à la section 3.2.1, mais dans le but d'identifier Q plutôt que B. Considérons pour ce faire la SVD d'une matrice  $C' \in \mathbb{C}^{2G \times G}$  obtenue par la concaténation de  $C'_1$  et  $C'_2$ . On a :

$$\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}'_1 \\ \boldsymbol{C}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{Q} \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{Q}^{\dagger} \equiv \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{V}^{\dagger} , \qquad (3.27)$$

où la matrice U peut être partitionnée de telle sorte que :

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_s & \boldsymbol{U}_n \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{U}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{n_1} \\ \boldsymbol{U}_{n_2} \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

où  $\{U_{n_1}, U_{n_2}\} \in \mathbb{C}^{G \times G}$ . Puisque les G dernières rangées de  $\Sigma$  sont nulles, il s'ensuit de (3.27) que :

$$(\boldsymbol{C}')^{\dagger}\boldsymbol{U}_{n} = \boldsymbol{Q}^{\dagger}\boldsymbol{U}_{n_{1}} + \boldsymbol{D}^{*}\boldsymbol{Q}^{\dagger}\boldsymbol{U}_{n_{2}} = \boldsymbol{0}, \qquad (3.29)$$

ce qui implique :

$$-\boldsymbol{U}_{n_1}\boldsymbol{U}_{n_2}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{-\dagger}\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{Q}^{\dagger} \equiv \boldsymbol{H}.$$
(3.30)

Ainsi les valeurs propres de H doivent correspondre aux éléments de la matrice diagonale  $D^*$ . Si ces derniers sont distincts, il existe donc une correspondance unique entre  $V_H$ , la matrice des vecteurs propres de H, et  $Q^{-\dagger}$  telle que :

$$\boldsymbol{V}_H \boldsymbol{Z}^{\dagger} = \boldsymbol{Q}^{-\dagger} \,, \tag{3.31}$$

où Z est encore une fois une matrice de permutation et de mise à l'échelle contenant uniquement un élément non nul par ligne et colonne. Par conséquent, les colonnes de  $V_H^{-\dagger} = QZ$ correspondent à celles de Q à une permutation et une mise à l'échelle près et une estimation de B est directement obtenue suivant (3.25) par :

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{f}} \hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{f}} \boldsymbol{V}_{H}^{-\dagger} \,. \tag{3.32}$$

#### 3.3.2 Analyse et comparaisons

Le Tab. 3.2 résume les principales étapes de calcul propres à la procédure d'estimation alternative de  $\boldsymbol{B}$  et à l'algorithme EVESPA original. La complexité numérique a été évaluée en terme d'opérations en virgule flottante (FLOPS, "*FLoating point Operations Per Second*") en s'inspirant de la discussion présentée par Comon en [51], section 18.3.1. On assume que les SVD sont réalisées à partir de l'algorithme de Golub-Reinsch, impliquant que pour une matrice de dimensions  $M \times N$  la complexité de l'opération soit de  $O(2M^2N + 4MN^2 + 14N^3/3)$ . Les EVD possèdent quant à elles une complexité de  $O(4M^3/3)$  (matrice de dimensions  $M \times M$ ). On remarque que la procédure d'estimation alternative de B en (3.32) est significativement moins lourde au niveau calculatoire que celle de l'algorithme EVESPA original en (3.15). Ceci s'explique par le fait que les décompositions matricielles (EVD et SVD) associées à l'approche d'estimation proposée sont réalisées sur des matrices de dimensions généralement moins grandes que celles considérées dans l'algorithme original.

Étape	Algorithme EVESPA original	Ordre de complexité	Algorithme proposé	Ordre de complexité
1	$\begin{array}{c} \text{SVD de } \boldsymbol{C} \\ (2N \times N) \end{array}$	$30N^{3}$	$     EVD de \boldsymbol{R}_{xx} \\     (N \times N) $	$4N^{3}/3$
2	$\begin{array}{c} \text{SVD de} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_{11} & \boldsymbol{U}_{12} \end{bmatrix} \\ (N \times 2G) \end{array}$	$\begin{array}{r} 4N^2G + 16NG^2 \\ +112G^3 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{SVD de } \boldsymbol{C}' \\ (2G \times G) \end{array}$	$30G^3$
3	EVD de $-\boldsymbol{F}_x \boldsymbol{F}_y^{-1}$ $(G \times G)$	$4G^3/3$	$\begin{array}{c} \text{EVD de } \boldsymbol{H} \\ (G \times G) \end{array}$	$4G^3/3$
4	Estimation de $\boldsymbol{B}$	_	Estimation de $\boldsymbol{B}$	
5*	$     EVD de \boldsymbol{R}_{xx} \\     (N \times N) $	$4N^{3}/3$		
6*	Estimation de $\boldsymbol{B}$			
	Total	$\frac{94}{3}N^3 + \frac{340}{3}G^3 + \dots$		$\frac{4}{3}N^3 + \frac{94}{3}G^3$

\* : Étapes additionnelles requises pour la procédure d'amélioration des performances statistiques à partir de la matrice de covariance des signaux telle que décrite en [43]. Cette amélioration est appliquée par défaut dans les étapes 1 à 4 de la méthode proposée.

Tableau 3.2 – Comparaison des principales étapes de calcul entre l'algorithme EVESPA original et la méthode alternative proposée dans cette thèse.

Bien que cela n'est pas été mentionné à la section 3.2.1, on propose en [43] une étape supplémentaire suite à l'estimation de  $\boldsymbol{B}$  en (3.15) afin d'améliorer la qualité statistique des vecteurs directionnels généralisés. Le principe est décrit à la section IV. B. de ce même article et consiste à projeter chaque vecteur  $\hat{\boldsymbol{b}}_g$  dans le sous-espace source par l'opération :

$$\hat{\boldsymbol{b}}_{g}^{\prime} = \boldsymbol{V}_{f} \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} \hat{\boldsymbol{b}}_{g} \forall g , \qquad (3.33)$$

où  $\hat{b}'_g \forall g$  représentent les nouveaux vecteurs estimés. La justification d'une telle opération vient du fait que les éléments des matrices  $C_1$  et  $C_2$  en (3.4) obtenus par statistiques d'ordre quatre possèdent une variance plus élevée que ceux de la matrice de covariance des signaux pour un même nombre d'échantillons. Ainsi, la projection des vecteurs estimés dans le sousespace source obtenu par statistiques d'ordre deux est naturellement encline à produire des estimés possédant de plus faible variance que ceux obtenus directement de (3.15). Toutefois, cette opération nécessite en plus d'effectuer la EVD de  $\mathbf{R}_{xx}$ , et apparaît donc au Tab. 3.2 en tant qu'étape de calcul supplémentaire facultative. Par ailleurs, il est intéressant de constater que cette amélioration des estimés est appliquée par défaut par la procédure d'estimation alternative de  $\mathbf{B}$  en (3.32) puisqu'on projette dès l'équation (3.26) les colonnes de  $C_1$  et  $C_2$ dans le sous-espace source.

La procédure d'estimation de B décrite à la section 3.3 représente donc une amélioration de l'algorithme EVESPA original tant au niveau de la complexité de calcul qu'au niveau des estimés produits. Cet algorithme a donc été l'objet d'une contribution en [52] (voir annexe F) où on présente des simulations confirmant lesdits avantages de la méthode proposée par rapport à l'algorithme original.

## 3.4 Conclusion

Ce chapitre a abordé le problème d'estimation des paramètres des sources par l'emploi de statistiques d'ordre supérieur, ou plus spécifiquement de cumulants d'ordre quatre. On a présenté une première contribution en lien à l'amélioration de l'algorithme EVESPA tant au niveau de la complexité de calcul que des performances statistiques de l'estimateur. L'avantage principal de l'emploi de statistiques d'ordre supérieur en traitement d'antenne est de pouvoir effectuer l'estimation aveugle de la matrice de canal (i.e. B) indépendamment de la géométrie du réseau ou du degré de corrélation des sources (en autant que les colonnes de B demeurent linéairement indépendantes, ce qui impose également que  $G \leq N$ ), chose étant par ailleurs impossible par l'utilisation exclusive de statistiques d'ordre deux. La connaissance (ou l'estimation) de B est d'une grande utilité car un traitement subséquent des signaux de chacun des groupes peut alors être effectué de façon indépendante comme expliqué à la section 3.2.2.

## Chapitre 4

# Approches non linéaires

Ce chapitre aborde le problème d'estimation des paramètres des sources par l'emploi d'estimateurs non linéaires. On notera une différence particulière avec la théorie présentée aux chapitres 2 et 3, car on exploitera maintenant les distributions statistiques précises des signaux reçus. La nature des opérateurs considérés imposera également un traitement des signaux sous forme scalaire (non matricielle), une approche relativement peu rencontrée dans la littérature. On présentera différentes stratégies de traitement ayant fait l'objet d'études approfondies, dont la principale, l'estimateur exponentiel, fut retenue comme publication. La théorie présentée dans ce chapitre ne fera pas intervenir les notions de sous-espaces comme il en était question aux chapitres 2 et 3. Par contre, pour une compréhension optimale des concepts qui seront exposés, une maîtrise adéquate des opérateurs et notions statistiques de base sera nécessaire.

## 4.1 Motivations

L'emploi de statistiques d'ordre supérieur au chapitre 3 représentait un moyen efficace de pallier aux limitations propres aux algorithmes du second ordre. Ceci a donc motivé la recherche et le développement de plusieurs algorithmes en ce domaine comme discuté à la section 3.1. Les statistiques d'ordre supérieur sont en réalité un moyen d'obtenir un plus grand nombre d'informations (relations) faisant intervenir les paramètres des sources, et pouvant par la suite être traitées pour y extraire des grandeurs d'intérêt. Ceci est par exemple notable en (3.4) où les matrices  $C_1$  et  $C_2$  s'apparentent à deux matrices de covariance supplémentaires disponibles pour le traitement. Cependant, les méthodes d'ordre supérieur, bien qu'avantageuses à certains niveaux, sont pour la plupart également limités par le nombre de degrés de liberté du réseau en ce sens que le nombre de groupes maximal pouvant être détectés est égal à N. Ceci se remarque en (3.6) par exemple où la matrice  $\Sigma$  est de dimensions  $N \times N$  (au maximum) lorsque G = N. Une matrice B de dimensions  $N \times (G > N)$  ne peut donc être estimée à un facteur Z près selon (3.15) ou (3.32).

Un tel constat a donc motivé la recherche de traitements alternatifs visant à remédier à cette

limitation classique fréquemment rencontrée dans la littérature. On présentera dans ce chapitre une solution possible à ce problème par l'emploi d'estimateurs non linéaires exploitant les distributions statistiques précises des signaux reçus. La théorie s'y rattachant a été entièrement développée dans le cadre de cette thèse et n'a pas inspirée de travaux existants dans la littérature, du moins en ce qui attrait aux principes généraux d'estimation. Toutefois, on effectuera certains parallèles avec des méthodes existantes visant également à remédier au problème de limitation discuté ci-haut.

## 4.2 Moyenne géométrique

#### 4.2.1 Théorie

Tous les problèmes d'estimation de paramètres à partir d'observations modélisées en tant que variables aléatoires font ultimement intervenir l'espérance mathématique  $E\{\cdot\}$  afin d'y obtenir un ou plusieurs résultats déterministes représentant l'estimé d'un paramètre ou d'une grandeur d'intérêt quelconque. Numériquement, le principe consiste à calculer la moyenne arithmétique des observations indépendantes  $\{X_i\}_{k=1}^K$  d'une variable aléatoire X telle que :

$$\hat{S}_X(K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K X_k \,, \tag{4.1}$$

car il est bien connu qu'une telle opération est un estimateur non biaisé de  $E\{X\}$  [53] :

$$E\{X\} = \lim_{K \to \infty} \hat{S}_X(K) \,. \tag{4.2}$$

Il est intéressant de constater que le membre de droite de (4.1) peut être vu en tant qu'opération générale qui, pour  $K \to \infty$ , produit un résultat déterministe en fonction de la distribution statistique de X. Une telle observation amène également à se questionner à savoir si d'autres opérations sur les observations  $\{X_i\}_{k=1}^K$  différentes de la moyenne arithmétique pourraient également produire un résultat déterministe pouvant être exploité pour l'estimation des paramètres. Par exemple, on pourrait considérer la moyenne géométrique des réalisations  $\{X_i\}_{k=1}^K$ , soit :

$$\hat{P}_X(K) = \left(\prod_{k=1}^K X_k\right)^{\frac{1}{K}}.$$
(4.3)

Si le résultat issu d'une telle opération lorsque  $K \to \infty$  est déterministe, on aura :

$$E\left\{\lim_{K \to \infty} \hat{P}_X(K)\right\} = \lim_{K \to \infty} \hat{P}_X(K) .$$
(4.4)

Sans toutefois s'attarder à tenter de démontrer (4.4), on peut néanmoins exploiter son membre de gauche pour le problème qui nous concerne, soit l'estimation de  $\boldsymbol{B}$  à partir de  $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^K$  (où

 $K < \infty$ ). Suivant (2.53), on sait que :

$$x_{i}(t_{k}) \forall i \in \{1, 2, \dots, N\} = \begin{bmatrix} B_{i,1} & B_{i,2} & \dots & B_{i,G} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k} + n_{i}(t_{k})$$
$$= \sum_{g=1}^{G} B_{i,g} u_{g}(t_{k}) + n_{i}(t_{k}) .$$
(4.5)

Ainsi, on peut définir une moyenne géométrique

$$\hat{P}_{i}(K) = \left(\prod_{k=1}^{K} x_{i}(t_{k})\right)^{\frac{1}{K}} = \left(\prod_{k=1}^{K} \left[\sum_{g=1}^{G} B_{i,g} u_{g}(t_{k}) + n_{i}(t_{k})\right]\right)^{\frac{1}{K}} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$
(4.6)

Le problème consiste alors à évaluer (4.6) considérant les distributions statistiques des enveloppes  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$ . Comme il est naturel d'assumer que les types de modulations employés pour chaque usager sont connus, on peut donc également assumer connue la forme générale des distributions de  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$ , et donc du coup celles de  $\{x_i(t_k)\}_{i=1}^N$  (sans toutefois connaître les valeurs numériques et le nombre exacte de paramètres impliqués). En pratique, l'évaluation numérique de (4.6) aura la forme :

$$\hat{P}_i(K) = \left(x_i(t_1)x_i(t_2)\dots x_K(t_K)\right)^{\frac{1}{K}} \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$
(4.7)

Il est coutume d'assumer que la période d'échantillonnage  $T_s$  de x(t) est suffisamment grande pour assurer l'indépendance des échantillons temporels  $\{x_i(t_k)\}_{i=1}^N$  entre eux. Selon cette hypothèse, l'espérance mathématique de la moyenne géométrique des échantillons peut être exprimée par :

$$E\{\hat{P}_{i}(K)\} = E\left\{\left(x_{i}(t_{1})x_{i}(t_{2})\dots x_{i}(t_{K})\right)^{\frac{1}{K}}\right\}$$

$$= E\left\{x_{i}^{1/K}(t_{1})x_{i}^{1/K}(t_{2})\dots x_{i}^{1/K}(t_{K})\right\}$$

$$= E\left\{x_{i}^{1/K}(t_{1})\right\}E\left\{x_{i}^{1/K}(t_{2})\right\}\dots E\left\{x_{i}^{1/K}(t_{K})\right\}$$

$$= \left[E\left\{x_{i}^{1/K}(t_{k})\right\}\right]^{K} \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

$$(4.9)$$

L'évaluation analytique de  $E\{\hat{P}_i(K)\}$  peut donc être simplifiée en restreignant les calculs à l'évaluation de  $E\{x_i^{1/K}(t_k)\}$ , et en incorporant par la suite ce résultat en (4.9). L'expression analytique de  $E\{x_i^{1/K}(t_k)\}$  (en terme des paramètres inconnus des sources) peut facilement être obtenue en assumant connues les distributions statistiques de  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$  comme mentionnée précédemment. Plusieurs expériences ont été menées à cet égard et curieusement, d'importantes inconsistances ont été observées entre l'estimation numérique de  $E\{\hat{P}_i(K)\}$  en (4.8) et le résultat analytique prévu selon (4.9), et ce même en des circonstances d'évaluation les plus simples. Après investigation, il fut constaté que la loi de distribution des exposants  $(ab)^c = a^c b^c$  donne parfois lieu à des ambiguïtés lorsqu'implantée numériquement. Par exemple,

$$((-1)(-1))^{1/2} = (1)^{1/2} = 1$$
 (racine principale),

et par distribution de l'exposant :

$$((-1)(-1))^{1/2} = (-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = j^2 = -1$$
 (autre solution possible).

Des inconsistances peuvent donc être observées entre les évaluations numériques de (4.8) et (4.9) dues à la multiplicité des racines des échantillons complexes  $\{x_i(t_k)\}_{k=1}^K$ . Une alternative est de considérer l'évaluation de  $E\{\hat{P}_i(K)\}$  sous une forme condensée :

$$E\{\hat{P}_i(K)\} = E\left\{\left(\prod_{k=1}^K x_i(t_k)\right)^{\frac{1}{K}}\right\}.$$
(4.10)

Par ailleurs, on peut simplifier quelque peu le problème en considérant les parties réelles et imaginaires de  $\{x_i(t_k)\}_{k=1}^K$  séparément. On définira ainsi :

$$E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\} = E\left\{\left(\prod_{k=1}^{K} \Re\{x_i(t_k)\}\right)^{\frac{1}{K}}\right\},\qquad(4.11)$$

$$E\{\hat{P}_{i\Im}(K)\} = E\left\{\left(\prod_{k=1}^{K} \Im\{x_i(t_k)\}\right)^{\frac{1}{K}}\right\}.$$
(4.12)

#### 4.2.2 Cas de sources gaussiennes

Le cas de sources gaussiennes est particulièrement intéressant puisque la distribution statistique de  $x_i(t_k)$  en (4.5) sera également gaussienne (assumant un bruit gaussien). On a :

$$u_g(t_k) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{u_g}}{\sqrt{2}}\right) + j\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_{u_g}}{\sqrt{2}}\right) \,\forall g \,,$$

$$(4.13)$$

où une variance de  $\sigma_u^2/2$  est nécessaire selon chaque axe afin que  $E\{u_g(t_k)u_g^*(t_k)\} = \sigma_u^2$ . Selon (4.5) et rappelant que les enveloppes  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$  sont indépendantes entre elles, on montre que :

$$x_i(t_k) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_i) + j\mathcal{N}(0, \Sigma_i) \ \forall \ i ,$$
  

$$\Sigma_i = \sqrt{\sum_{g=1}^G \frac{\sigma_{u_g}^2}{2} |B_{i,g}|^2 + \frac{\sigma_n^2}{2}}.$$
(4.14)

où  $\sigma_n^2$  représente la puissance du bruit qui est assumé gaussien. Comme  $x_i(t_k)$  est identiquement distribué selon les axes réel et imaginaire, on aura  $E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\} = E\{\hat{P}_{i_{\Im}}(K)\}$ . À cet effet, on démontre que<sup>1</sup>:

$$E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\} = E\{\hat{P}_{i_{\Im}}(K)\} = \frac{\Sigma_{i}}{\sqrt{2}} \left(1 + (-1)^{1/K}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{K+1}{2K}\right)\right)^{K}, \qquad (4.15)$$

<sup>1.</sup> Ce résultat a été obtenu à l'aide du logiciel Maple<sup>®</sup> considérant la distribution statistique de  $x_i(t_k)$  en (4.14) et les définitions de  $E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\}$  et  $E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\}$  en (4.11) et (4.12).

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction Gamma d'Euler. Un tel résultat peut donc être exploité pour l'estimation des paramètres des sources, inclus à même  $\Sigma_i$ . On montre par ailleurs que :

$$\lim_{K \to \infty} E\{\hat{P}_{i_{\Re}}(K)\} = \lim_{K \to \infty} E\{\hat{P}_{i_{\Im}}(K)\} = \frac{\Sigma_i}{\sqrt{2e^{\gamma}}}, \qquad (4.16)$$

où  $\gamma \approx 0.5772$  est la constante d'Euler. La validité de (4.4) est donc démontrée dans le cas spécifique de sources gaussiennes avec séparation en parties réelle et imaginaire des signaux observables. Toutefois, une expression analytique générale pour (4.10) dans le cas complexe n'a pu être obtenue ici dû à la complexité du problème. Néanmoins, des expériences numériques ont été menées et semblent confirmer que (4.10) converge bel et bien vers une valeur déterministe pouvant être potentiellement exploitée pour l'estimation des paramètres.

Bien qu'intéressant, le cas de sources gaussiennes n'a pas été étudié davantage dans cette thèse puisqu'en pratique les distributions statistiques des signaux reçus ne sont pas gaussiennes, rendant ainsi (4.15) invalide. Cependant, il serait possible d'exploiter ces relations dans des applications où une telle modélisation des signaux est permise.

#### 4.2.3 Cas de sources QAM génériques

La plupart des signaux de communication font intervenir des modulations de type QAM (e.g. PAM, BPSK, QPSK, MQAM, etc.). Une telle particularité peut donc être exploitée pour l'estimation des paramètres des sources puisque la connaissance des formes précises des distributions statistiques des enveloppes complexes reçues devient alors justifiée.

Considérons premièrement le cas de sources BPSK équiprobables où  $u_g(t_k) \in \{-\sigma_g, \sigma_g\}$ . Simplifions en plus l'analyse en considérant provisoirement que  $B_{i,g} = 1 \forall \{i, g\}$  et  $n_i(t_k) = 0$  en (4.5). En assumant d'abord un seul groupe (G = 1), on montre que :

$$E\{\hat{P}_i(K)\} = \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + (-1)^{1/K}\right) \, \forall \, i \, .$$

Pour G = 2 groupes, une expression générale en terme de K est difficile à obtenir car le problème devient déjà trop complexe. Notons simplement à cet effet que dans un cas spécifique où K = 2,

$$E\{\hat{P}_i(2)\} = \frac{1}{8}(\sigma_1 + \sigma_2)(1+j) + \frac{1}{4}\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}(1+j) + \frac{1}{8}\operatorname{sign}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)(1+j),$$

où sign $(\cdot)$  est une fonction de signe définie pour un argument réel x telle que :

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$
(4.17)

On voit donc que même dans un cas d'applications les plus simples, l'évaluation analytique de  $E\{\hat{P}_i(K)\}$  en (4.10) est très difficile à réaliser. En pratique, les calculs deviendraient d'autant

plus laborieux considérant des distributions statistiques plus complexes (e.g. des modulations QAM générales), des coefficients de canal non unitaires de même qu'un bruit gaussien non nul. Pour cette raison, les efforts de recherche visant à exploiter la moyenne géométrique pour le problème d'estimation des paramètres des sources n'ont pas été poursuivis.

## 4.3 Estimateur exponentiel

#### 4.3.1 Principe général

On introduit ici la théorie relative à un estimateur de type exponentiel développé entièrement dans le cadre de cette thèse et faisant l'objet principal de ce chapitre. Débutons en considérant une fonction  $h(\mathbf{x}_k)$  de la forme :

$$h(\boldsymbol{x}_k) = \chi^{\boldsymbol{v}^{\dagger} \boldsymbol{x}_k} , \qquad (4.18)$$

où  $\chi$  et  $\boldsymbol{v}$  sont imposés à l'évaluation. Un développement de (4.18) montre que :

$$h(\boldsymbol{x}_{k}) = \chi^{v_{1}^{*}x_{1}(t_{k}) + v_{2}^{*}x_{2}(t_{k}) + \dots + v_{N}^{*}x_{N}(t_{k})}$$
  

$$\equiv \chi^{a_{1}u_{1}(t_{k}) + a_{2}u_{2}(t_{k}) + \dots + a_{G}u_{G}(t_{k}) + n(t_{k})}$$
  

$$= \chi^{a_{1}u_{1}(t_{k})}\chi^{a_{2}u_{2}(t_{k})} \dots \chi^{a_{G}u_{G}(t_{k})}\chi^{n(t_{k})}, \qquad (4.19)$$

avec

$$a_g = \boldsymbol{v}^{\dagger} \boldsymbol{b}_g \ , \ n(t_k) = \boldsymbol{v}^{\dagger} \boldsymbol{n}_k \,,$$
 (4.20)

car on rappelle que  $\boldsymbol{x}_k = \sum_g \boldsymbol{b}_g u_g(t_k) + \boldsymbol{n}_k$ . Les paramètres  $\{a_g\}_{g=1}^G$  peuvent être vus comme des paramètres généralisés des sources. On définit l'estimateur exponentiel à partir d'une formulation semblable telle que :

$$H(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)\boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{x}_{k}}\}$$

$$= E\{\chi^{\zeta(\rho)\boldsymbol{v}^{\dagger}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k}+\boldsymbol{n}_{k})}\}$$

$$= E\{\chi^{\zeta(\rho)\boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k}}\}E\{\chi^{\zeta(\rho)\boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{n}_{k}}\}$$

$$= E\left\{\prod_{g=1}^{G}\chi^{\zeta(\rho)a_{g}u_{g}(t_{k})}\right\}E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t_{k})}\}$$

$$= \left[\prod_{g=1}^{G}E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}u_{g}(t_{k})}\}\right]E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t_{k})}\}$$

$$(4.21)$$

$$\equiv \left[\prod_{g=1}^{G} f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})\right] g(\zeta(\rho), \sigma_n), \qquad (4.23)$$

où on suppose ici que les éléments du vecteur  $\mathbf{n}_k$  sont iid et possèdent une variance égale à  $\sigma_n^2$ . Les paramètres  $\rho$ ,  $\chi$  et  $\zeta(\cdot)$  sont imposés à l'évaluation, tout comme  $\mathbf{v}$  qui a une influence

directe au niveau des paramètres généralisés  $\{a_g\}_{g=1}^G$  des sources. On remarque que (4.21) s'apparente à la transformée caractéristique des signaux reçus car en réalité  $\chi^x = e^{x \ln(\chi)}$ . Cette dernière est définie par :

$$\Phi_X(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} , \ X \in \Re, \qquad (4.24)$$

et pour le cas d'une variable aléatoire complexe Z = X + jY (où  $\{X, Y\} \in \Re$ ) :

$$\Phi_X(\omega_x, \omega_y) = E\{e^{j(\omega_x X + \omega_y Y)}\}, \qquad (4.25)$$

où  $\{\omega_x, \omega_y\} \in \Re$  [55]. La définition de  $H(\rho)$  en (4.21) est différente de (4.25) en ce sens que les signaux complexes sont considérés intégralement à l'exposant. Comme  $\{\omega_x, \omega_y\} \in \Re$ , l'équation (4.21) n'est donc pas un cas spécifique de (4.25).

Les fonctions  $f_g(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  en (4.23) sont évaluées à l'aide de deux arguments chacune. Toutefois, à cause des produits  $\zeta(\rho)a_gu_g(t_k)$  et  $\zeta(\rho)n(t_k)$  en (4.22), on montrera que ces dernières ne sont fonction que des paramètres  $\zeta(\rho)a_g\sigma_{u_g}$  et  $\zeta(\rho)\sigma_n$  respectivement. L'évaluation d'une fonction  $f_g(\cdot)$  donnée dépend de la distribution statistique de l'enveloppe  $u_g(t_k)$ . Remarquons toutefois que pour le cas du bruit,

$$g(\zeta(\rho), \sigma_n) = E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t_k)}\}$$
  
=  $E\{\chi^{\zeta(\rho)(\Re\{n(t_k)\}+j\Im\{n(t_k)\})}\}$   
=  $E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t_k)\}}\}E\{\chi^{j\zeta(\rho)\Im\{n(t_k)\}}\},$  (4.26)

où la dernière égalité s'explique par le fait que les composantes des axes I et Q du bruit sont indépendantes. Assumant une distribution gaussienne symétrique des éléments de  $n_k$  (et donc de  $n(t_k)$ ), on aura, similairement à (4.14) :

$$n(t_k) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{\Sigma_n}{\sqrt{2}}\right) + j\mathcal{N}\left(0, \frac{\Sigma_n}{\sqrt{2}}\right) ,$$
 (4.27)

où :

$$\Sigma_n = \sigma_n^2 \sqrt{\sum_{i=1}^N |v_i|^2} \,. \tag{4.28}$$

Plus spécifiquement, les pdf's (fonctions de densité de probabilité, de l'anglais "Probability Density Functions") des parties réelle et imaginaire de  $n(t_k)$  sont données par :

$$f_{\Re\{n(t_k)\}}(x) = f_{\Im\{n(t_k)\}}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sum_n \sqrt{\pi}} e^{\frac{-2x^2}{\sum_n^2}}.$$
(4.29)

<sup>2.</sup> Il aurait été possible ici d'exprimer (4.21) directement en base e et d'omettre  $\chi$  par inclusion implicite en  $\zeta(\rho)$ . Toutefois, il fut préféré de présenter la théorie en conformité avec sa présentation en [54] où (4.21) est utilisée intégralement.

Comme les distributions de  $\Re\{n_i(t_k)\}$  et  $\Im\{n_i(t_k)\}$  sont identiques, on peut procéder uniquement à l'évaluation de  $E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t_k)\}}\}$  en (4.26) et évaluer l'expression résultante pour  $\zeta(\rho) \to j\zeta(\rho)$  afin d'obtenir  $E\{\chi^{\zeta(\rho)\Im\{n(t_k)\}}\}$ . On a donc :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t_k)\}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\zeta(\rho)x} f_{\Re\{n(t_k)\}}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\Sigma_n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\zeta(\rho)x} e^{\frac{-2x^2}{\Sigma_n^2}} dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\Sigma_n \sqrt{\pi}} \left(\frac{\Sigma_n}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{8}\zeta^2(\rho) \ln^2(\chi)\Sigma_n^2}\right) = e^{\frac{1}{8}\zeta^2(\rho) \ln^2(\chi)\Sigma_n^2}.$$
(4.30)

Ainsi :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)\Im\{n(t_k)\}}\} = E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t_k)\}}\}\Big|_{\zeta(\rho)\to j\zeta(\rho)} = e^{-\frac{1}{8}\zeta^2(\rho)\ln^2(\chi)\Sigma_n^2},$$
(4.31)

et donc :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t_k)}\} = E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t_k)\}}\}E\{\chi^{j\zeta(\rho)\Im\{n(t_k)\}}\}$$
$$= \left(e^{\frac{1}{8}\zeta^2(\rho)\ln^2(\chi)\Sigma_n^2}\right)\left(e^{-\frac{1}{8}\zeta^2(\rho)\ln^2(\chi)\Sigma_n^2}\right) = 1.$$
(4.32)

Ce résultat fort important montre qu'un bruit gaussien symétrique n'a aucune influence en (4.23), et que par conséquent  $H(\rho)$  est uniquement fonction des paramètres des sources. On aura donc :

$$H(\rho) = \prod_{g=1}^{G} f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g}).$$
(4.33)

On constate cependant que si l'enveloppe complexe d'un groupe g donné est également gaussienne et symétrique, on aura évidemment  $f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g}) = 1$  et  $H(\rho)$  ne pourra donc être exploité pour l'estimation de  $\mathbf{b}_g$ . Toutefois, il a été constaté que les fonctions  $f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g}) \forall g$ sont généralement non unitaires et non nulles si les distributions considérées sont celles de signaux QAM génériques. Le Tab. 4.1 présente certains cas d'évaluation de  $f_g(\cdot)$  pour différents types de distributions statistiques d'enveloppes complexes. Comme mentionné précédemment, on remarque que  $f_g(\alpha, \sigma_{u_g})$  ne dépend en réalité que du produit  $\alpha \sigma_{u_g}$ .

Le principe de l'estimateur exponentiel proposé dans cette section s'appuie sur le fait que  $H(\rho)$ n'est fonction que des paramètres des sources (et non ceux du bruit). Comme ce dernier s'exprime par le produit des fonctions  $\{f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})\}_{g=1}^G$ , il suffit qu'une seule de ces fonctions s'annule pour que  $H(\rho)$  s'annule également (à condition qu'il ne s'agisse pas d'une indétermination du type 0/0). Or une fonction  $f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$  ne dépend que du produit  $\zeta(\rho)a_g\sigma_{u_g}$ , et connaissant la forme générale de  $f_g(\cdot)$  par l'entremise de la connaissance des modulations des signaux, on peut donc déterminer analytiquement la ou les valeurs théoriques de  $\zeta(\rho)a_g\sigma_{u_g}$ permettant d'annuler  $f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$ . Ainsi, les solutions obtenues devront nécessairement être fonction du paramètre  $a_g\sigma_{u_g}$  propre au groupe g. En procédant par un balayage statistique unidimensionnel sur  $H(\rho)$  (en terme de  $\rho$ ), cette fonction deviendra nulle lorsque  $\rho$  prendra

Constellation	$u_g(t_k) \in$	$f_g(\alpha, \sigma_{u_g}) = E\{\chi^{\alpha u_g(t_k)}\}$
Gaussienne symétrique	$\Re + j \Re$	1
BPSK	$\{\pm\sigma_g\}$	$\frac{1}{2} \left( \chi^{\alpha \sigma_g} + \chi^{-\alpha \sigma_g} \right)$
QPSK	$\{\pm \frac{\sigma_g}{\sqrt{2}}, \pm j \frac{\sigma_g}{\sqrt{2}}\}$	$\frac{1}{4} \left( \chi^{(1+j)v} + \chi^{(-1+j)v} + \chi^{(1-j)v} + \chi^{(-1-j)v} \right),$ $v = \alpha \sigma_g / \sqrt{2}$
8PAM	$\frac{\sigma_g}{\sqrt{21}}\{-7, -5, -3, -1, \\ 1, 3, 5, 7\}$	$\frac{1}{8}\sum_{\ell=-3}^{4}\chi^{\frac{2\ell-1}{\sqrt{21}}\alpha\sigma_g}$
Uniforme carrée	$\sigma_g \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] + j\sigma_g \left[ \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$	$\begin{split} \frac{j(\chi^{(-1+j)v} + \chi^{(1-j)v} - \chi^{(1+j)v} - \chi^{(-1-j)v})}{6\alpha^2 \sigma_g^2 \ln^2(\chi)} , \\ v &= \sqrt{3} \alpha \sigma_g / \sqrt{2} \end{split}$

Tableau 4.1 – Évaluation de fonctions  $f_g(\alpha, \sigma_{u_g})$  pour différents types de distributions d'enveloppes complexes. Tous les symboles (valeurs prises par  $u_g(t_k)$ ) pour les distributions autres que gaussiennes sont assumés équiprobables.

une valeur qui annulera au moins une des fonctions  $\{f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})\}_{g=1}^G$ . Connaissant l'expression analytique exacte des zéros de ces dernières, il deviendra donc possible de déduire le paramètre  $a_g\sigma_{u_g} \forall g$  à partir des valeurs correspondantes de  $\rho$ .

Tel est le principe simplifié du processus d'estimation. Cependant la complexité d'application de l'algorithme dépend grandement des distributions statistiques des enveloppes complexes reçues (i.e. du type de modulation). Bien qu'une équation donnée  $f_g(\zeta(\rho)a_g\sigma_{u_g}) = 0$  puisse être résolue facilement la plupart du temps, des expériences ont montré que la solution fait souvent intervenir plus d'une valeur de  $\zeta(\rho)$ . De ce fait, lorsque  $H_i(\rho) = 0$ , il devient alors difficile de déterminer à laquelle de ces solutions  $\rho$  est associé afin d'en déduire correctement les paramètres d'un groupe. L'approche peut donc générer des ambiguïtés d'estimation. Toutefois, comme il sera montré à l'exemple d'application de la section 4.3.2, il est possible de lever ces ambiguïtés en exploitant le modèle des signaux ainsi qu'un choix judicieux de  $\zeta(\rho)$  pour le balayage.

Il a été mentionné au début du chapitre que le développement d'estimateurs non linéaires était motivé par les limitations inhérentes à la plupart des algorithmes du second et quatrième ordre exploitant un traitement matriciel des signaux. L'estimateur exponentiel proposé dans cette section permet de pallier à ces limitations en possédant les avantages suivants :

1) Un nombre théoriquement illimité de paramètres peut être estimé à partir de (4.33) puisque le principe d'annulation de  $H(\rho)$  demeure vrai indépendamment du nombre de groupes en présence.

- L'estimation peut être réalisée sans la connaissance préalable du nombre de groupes (i.e. G) qui est nécessaire chez les algorithmes exploitant les sous-espaces source et bruit des signaux reçus.
- 3) Tout bruit gaussien symétrique est naturellement filtré en (4.21).

Dans un même ordre d'idées que le deuxième point, il est même possible de restreindre le balayage (i.e. le domaine de  $\rho$ ) à une région spécifique propre à un groupe d'intérêt sans se soucier de l'influence des sources des autres groupes dans cette région. Ce principe est exploité à la section 4.3.2 où on applique la théorie au cas de sources QPSK. On ne donnera pas ici d'exemple d'application détaillé de l'algorithme car les procédures d'évaluations sont généralement assez complexes et très spécifiques aux distributions des enveloppes complexes considérées. On préfère ici expliquer la procédure d'estimation de façon générale et intuitive afin de donner une vue d'ensemble satisfaisante de la stratégie déployée ainsi que des différentes opérations impliquées pour l'estimation. Le lecteur est donc invité à se référer à cette annexe pour obtenir une meilleure compréhension de l'algorithme dans un contexte d'application spécifique.

#### 4.3.2 Application au cas de sources QPSK

On présente ici l'application de l'estimateur exponentiel introduit à la section précédente au cas de sources QPSK indépendantes. On considère pour ce faire un réseau d'antennes calibré formé de deux éléments. Une modélisation classique permet d'écrire que :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{n}_k \,, \tag{4.34}$$

où

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_1} & e^{-j\phi_2} & \dots & e^{-j\phi_G} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{u}_k = \begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \\ \vdots \\ u_G(t_k) \end{bmatrix} .$$
(4.35)

On emploie ici le vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  au lieu de  $\boldsymbol{s}_k$ , ce qui revient à imposer  $M_g = 1 \forall g$  et G = M. Le problème étudié est donc celui de l'estimation des paramètres de G sources à partir de N = 2 éléments. Afin d'obtenir l'expression analytique de  $f_g(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$  selon (4.23) (les coefficients  $a_g$  sont liés à  $\boldsymbol{A}$  selon le choix de  $\boldsymbol{v}$  en (4.21)), on doit d'abord connaître la distribution statistique des éléments de  $\boldsymbol{u}_k$ . Comme on considère des sources QPSK, on a :

$$u_g(t_k) = \Re\{u_g(t_k)\} + j\Im\{u_g(t_k)\} \forall g, \qquad (4.36)$$

avec les pdf's :

$$f_{\Re\{u_g(t_k)\}}(x) = f_{\Im\{u_g(t_k)\}}(x) = \frac{1}{2} \left( \delta(x - \sigma_{u_g}/\sqrt{2}) + \delta(x + \sigma_{u_g}/\sqrt{2}) \right).$$
(4.37)

Une enveloppe g prend donc des valeurs dans  $\frac{\sigma_{u_g}}{\sqrt{2}}\{-1, 1, -j, j\}$  de façon équiprobable, assurant que  $E\{|u_g(t_k)|^2\} = \sigma_{u_g}^2$ . Selon (4.23), on a :

$$f_{g}(\zeta(\rho)a_{g},\sigma_{u_{g}}) = E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}u_{g}(t_{k})}\} = E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}(\Re\{u_{g}(t_{k})\}+j\Im\{u_{g}(t_{k})\})}\}$$
$$= E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\Re\{u_{g}(t_{k})\}}\}E\{\chi^{j\zeta(\rho)a_{g}\Im\{u_{g}(t_{k})\}}\}.$$
(4.38)

Comme les distributions statistiques de  $\Re\{u_g(t_k)\}\$  et  $\Im\{u_g(t_k)\}\$  sont identiques, on peut procéder uniquement à l'évaluation de  $E\{\chi^{\zeta(\rho)a_g\Re\{u_g(t_k)\}}\}\$  et évaluer l'expression résultante pour  $\zeta \to j\zeta$  afin d'obtenir  $E\{\chi^{j\zeta(\rho)a_g\Im\{u_g(t_k)\}}\}$ . On a :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\Re\{u_{g}(t_{k})\}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\zeta(\rho)a_{g}x} f_{\Re\{u_{g}(t_{k})\}}(x) dx$$
  
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\zeta(\rho)a_{g}x} \delta(x - \sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^{\zeta(\rho)a_{g}x} \delta(x + \sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}) dx$$
  
$$= \frac{1}{2} (\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}}) + \frac{1}{2} (\chi^{-\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}}).$$
(4.39)

À partir de (4.38), on déduit que :

$$f_{g}(\zeta(\rho)a_{g},\sigma_{u_{g}}) = E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\Re\{u_{g}(t_{k})\}}\}\left(E\{\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\Re\{u_{g}(t_{k})\}}\}\Big|_{\zeta(\rho)\to j\zeta(\rho)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\chi^{\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}} + \chi^{-\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}})\frac{1}{2}(\chi^{(j\zeta(\rho))a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}} + \chi^{-(j\zeta(\rho))a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1}{4}(\chi^{(1+j)\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}} + \chi^{(1-j)\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}} + \chi^{(-1+j)\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}} + \chi^{(-1-j)\zeta(\rho)a_{g}\sigma_{u_{g}}/\sqrt{2}})$$

$$= f(\zeta(\rho)a_{g},\sigma_{u_{g}}). \qquad (4.40)$$

On considère ainsi une unique fonction  $f(\cdot)$  au lieu de G fonctions  $\{f_g(\cdot)\}_{g=1}^G$  puisque les enveloppes possèdent toutes un même type de distribution. Selon la théorie de l'estimateur exponentiel décrite à la section 4.3, on cherche maintenant les valeurs  $\zeta_0$  de  $\zeta(\rho)$  permettant d'annuler  $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$ . En solutionnant (4.40) en terme de  $\zeta(\rho)$ , on montre que :

$$\zeta_0 \in \left\{ \frac{\pi \ell}{a_g \sigma_{u_g} \sqrt{2} \ln(\chi)} , \frac{j \pi \ell}{a_g \sigma_{u_g} \sqrt{2} \ln(\chi)} \right\} , \ \ell \in \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$
(4.41)

Ainsi, on impose une fonction  $\zeta(\rho)$  de la forme :

$$\zeta(\rho) \in \left\{ \frac{\pi}{\rho\sqrt{2}\ln(\chi)} , \frac{j\pi}{\rho\sqrt{2}\ln(\chi)} \right\}, \qquad (4.42)$$

qui permet d'annuler  $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$  pour un entier  $k \in \mathbb{Z}$  donné lorsque :

$$\rho \in \frac{a_g \sigma_{u_g}}{1+2k} \{1, -j\} = \left\{ \dots, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{-3}, -a_g \sigma_{u_g}, a_g \sigma_{u_g}, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{3}, \dots \right\} \cup \left\{ \dots, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{-3j}, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{-j}, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{j}, \frac{a_g \sigma_{u_g}}{3j}, \dots \right\}.$$

$$(4.43)$$

La Fig. 4.1 présente un aperçu graphique de ces valeurs. On remarque par ailleurs qu'aucune des deux formulations possible en (4.42) offre un avantage particulier par rapport à l'autre. Ici, on choisit donc :

$$\zeta(\rho) = \frac{\pi}{\rho\sqrt{2}\ln(\chi)} \,. \tag{4.44}$$

En introduisant (4.44) en (4.40), on observe que :



FIGURE 4.1 – Positions des zéros de  $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g})$  engendrés par une enveloppe complexe avec modulation QPSK.

$$f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g}) = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{(1-j)\pi a_g \sigma_{u_g}}{2\rho}\right) + \cos\left(\frac{(1+j)\pi a_g \sigma_{u_g}}{2\rho}\right) \right) \,. \tag{4.45}$$

#### Estimation des puissances

Considérons maintenant un premier estimateur selon (4.21) tel que :

$$H_1(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)x_1(t_k)}\} = \prod_{g=1}^G f(\zeta(\rho), \sigma_{u_g}).$$
(4.46)

On impose ici  $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\top}$ , et puisque  $A_{1,g} = 1 \forall g$  selon (4.35), on a donc  $a_g = 1 \forall g$ en (4.40). En effectuant un balayage de  $H_1(\rho)$  selon  $\rho$ , on aura donc  $H_1(\rho) = 0$  lorsque  $\rho \in \sigma_{u_g}/(1+2k)\{1,-j\}$  en (4.43). On peut donc ici imposer  $0 < \rho \in \Re$  afin d'effectuer une recherche sur l'axe réel où  $H_1(\rho)$  s'annulera lorsque :

$$\rho \in \{\sigma_{u_g}, \frac{\sigma_{u_g}}{3}, \frac{\sigma_{u_g}}{5}, \ldots\} \forall g \in \{1, 2, \ldots, G\}.$$

On voit ici qu'il peut y avoir ambiguïté d'estimation, car si  $H_1(\rho)$  s'annule pour une valeur de  $\rho$  donnée, il sera impossible de déterminer à quelle valeur de l'ensemble cette dernière est associée. Pour éviter une telle ambiguïté, on pourrait limiter le domaine de recherche pour une source g en imposant  $\rho > \sigma_{u_g}/3$ . Par contre, considérant l'ensemble des sources, cette approche ne pourrait s'avérer fonctionnelle que si  $\min(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_G) > \max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_G)/3$ . De plus, aucune information sur la puissance des enveloppes complexes n'est a priori disponible pour établir de telles limites. La recherche d'une plage optimale pour  $\rho$  ne semble donc pas la meilleure stratégie.

On peut cependant remarquer que pour une source g, en supposant un balayage par valeurs croissantes de  $\rho$ , un dernier zéro de  $f(\zeta(\rho), \sigma_{u_g})$  est rencontré lorsque  $\rho = \sigma_{u_g}$  (voir équation (4.43)). Ainsi,  $H_1(\rho)$  devient assurément non nul si  $\rho > \max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_G)$ . De ce fait, en effectuant plutôt un balayage par valeurs décroissantes de  $\rho$ , le premier zéro de  $H_1(\rho)$  rencontré sera nécessairement positionné à une valeur correspondant à  $\max(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_G)$ . Il deviendra ainsi possible d'estimer la puissance de la source de puissance maximale, et ce sans ambiguïté. On peut ensuite poursuivre le balayage, où le zéro associé à l'écart type de chacune des sources sera toujours rencontré en premier (par rapport aux autres zéros générés par ces mêmes sources).

On peut toutefois envisager un problème ici si on suppose le cas de deux sources (G = 2)telles que  $\sigma_2 = \sigma_1/3$ . La valeur de  $\sigma_1$  pourra être estimée sans problème par la technique décrite précédemment. Par contre, cette même source génère également une ambiguïté en  $\rho = \sigma_1/3$ , qui correspond à l'écart type de la deuxième source. Il n'y aurait donc aucun moyen de déterminer si le zéro de  $H_1(\rho)$  en  $\rho = \sigma_1/3$  est dû à la présence d'une deuxième source ou non. On peut se tirer d'affaire ici en considérant que si un premier zéro de  $H_1(\rho)$  est rencontré en  $\rho = \sigma_1$  (écart type maximal des sources), alors forcément la fonction  $f(\zeta(\rho), \sigma_1)$ doit être présente en (4.46). Ainsi, en effectuant un deuxième balayage en considérant plutôt la fonction  $H_1(\rho)/f(\zeta(\rho), \sigma_1)$ , l'influence de la source 1 disparaît complètement. Donc si une source d'écart type  $\sigma_1/3$  (ou  $\sigma_1/5, \sigma_1/7$ , etc.) est bel et bien présente, alors  $H_1(\rho)/f(\zeta(\rho), \sigma_1)$ prendra quand même une valeur nulle en  $\rho = \sigma_1/3$  (ou en  $\rho = \sigma_1/5$ ,  $\rho = \sigma_1/7$ , etc.). On peut même répéter cette procédure lorsqu'une deuxième source est détectée, permettant ainsi d'éliminer son influence afin de détecter la présence éventuelle de sources de puissances encore plus faibles. Ceci amène donc à définir une fonction de balayage générale  $G_1(\rho)$  de la forme :

$$G_1(\rho) = \frac{H_1(\rho)}{\mu(\rho)} , \quad \mu(\rho) = \prod_{g \mid \sigma_{u_g} > \rho} f(\zeta(\rho), \sigma_{u_g}) , \quad (4.47)$$

où les écarts types des sources sont successivement estimés du plus élevé au plus faible. Une telle fonction permet donc d'obtenir la puissance de toutes les sources en présence ainsi que leur nombre exact lorsqu'éventuellement  $\rho \to 0$ . Toutefois, un problème additionnel s'impose. On sait que l'équation (4.47) doit être évaluée pour  $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  où  $\rho_{\max} \ge \max_g(\sigma_{u_g})$ . Cependant, une telle borne est a priori inconnue. Bien qu'il soit possible d'imposer  $\rho_{\max} \to \infty$ , une solution plus efficace peut être envisagée en exploitant les propriétés du signal  $x_1(t_k)$ . On sait selon le modèle des signaux à l'étude que :

$$\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_G^2 + \sigma_n^2, \qquad (4.48)$$

où on assume un bruit de variance  $\sigma_n^2$  au niveau de tous les éléments du réseau (les deux seuls). De ce fait :

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_G) \leqslant \sqrt{\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\}} \,. \tag{4.49}$$

On peut donc imposer une borne supérieure pour le balayage par :

$$\rho_{\max} = \alpha \sqrt{\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\}}, \qquad (4.50)$$

où  $\alpha$  est constante légèrement supérieure à l'unité. En ce qui concerne  $\rho_{\min}$ , on peut en imposer la valeur en considérant par exemple vouloir estimer la puissance et le nombre de sources qui possèdent au moins un certain pourcentage de la puissance du signal reçu  $x_1(t_k)$ . Le choix d'un tel pourcentage demeure quant à lui arbitraire. Il est intéressant de remarquer ici que pour  $\rho = 0$ , toutes les sources causent ambiguïté car il s'agit du cas spécifique où  $1 + 2k \rightarrow \infty$ en (4.43). En fait, on peut interpréter ceci en ce sens que des sources de puissance nulle sont détectées en ce point. Après tout, on peut toujours considérer que  $x_1(t_k)$  se compose d'une somme infinie de signaux de puissance nulle, en plus de ceux possédant une puissance non nulle. L'algorithme ne fait aucune distinction entre l'une ou l'autre de ces interprétations.

En pratique, la procédure d'évaluation consiste à évaluer  $H_1(\rho)$  en (4.46) pour des valeurs décroissantes de  $\rho$  partant de  $\rho_{\max}$  en (4.50). La position du premier zéro rencontré correspond donc sans ambiguïté à l'écart type de la (ou les) source(s) de puissance maximale, que l'on identifie par  $\hat{\sigma}_1$ . Idéalement, pour  $K \to \infty$ , on devrait poursuivre la recherche en considérant un estimateur  $G_1(\rho)$  selon (4.47) afin d'éliminer toute ambiguïté subséquente introduite par cette (ces) première(s) source(s). En pratique toutefois, cette approche n'est pas envisageable car l'estimateur  $\hat{H}_1(\rho, K)$  pour  $K < \infty$  ne s'annulera pas parfaitement en  $\rho = \sigma_1$  (ou en  $\rho = \hat{\sigma}_1$ ). Pour palier à ce problème, et dans le cadre de cet exemple, on limite la plage de recherche des écarts types à  $\rho \in ]\hat{\sigma}_1/3, \hat{\sigma}_1]$ . Ceci permet d'identifier sans ambiguïté toutes les sources ayant une puissance d'au moins  $\max_g(\hat{\sigma}_1^2)/9$  (un neuvième de la puissance estimée de la source de puissance maximale). En pratique, il est également justifié de vouloir s'intéresser aux sources possédant une puissance minimale par rapport à celle du signal reçu. Un tel intervalle est donc approprié pour ce faire. Cette procédure permet donc d'identifier P écarts types  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_P$  où  $P \leq G$ .

#### Estimation des DOAs

On s'intéresse maintenant à l'estimation des paramètres  $\{\phi_g\}_{g=1}^G$  en (4.35). On débute en posant  $v_1 = 0$  et  $v_2 = 1$  en (4.21) pour former un estimateur  $H_2$  de la forme :

$$H_2(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)x_2(t_k)}\} = \prod_{g=1}^G f(\zeta(\rho), e^{-j\phi_g}, \sigma_{u_g}).$$
(4.51)

On remarque maintenant que  $a_g = e^{-j\phi_g}$  puisque  $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{\top}$  et que  $A_{i,g} = e^{-j\phi_g}$  selon (4.35). Considérant la fonction de balayage  $\zeta(\rho)$  selon (4.44), on a donc  $H_2(\rho) = 0$  lorsque,

conformément à (4.43) :

$$\rho \in \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{1+2k}\{1,-j\} = \left\{ \dots, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{-3}, -e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}, e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{3}, \dots \right\} \cup \qquad (4.52) \\ \left\{ \dots, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{-3j}, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{-j}, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{j}, \frac{e^{-j\phi_g}\sigma_{u_g}}{3j}, \dots \right\} .$$

Comme on s'intéresse ici à l'estimation de  $\{\phi_g\}_{g=1}^G$  et que les écarts types  $\{\sigma_{u_g}\}_{g=1}^G$  peuvent être assumés connus de par la procédure décrite à la section précédente, on impose une valeur de  $\rho$  pour l'estimation de la DOA d'une source g au balayage telle que :

$$\rho = \sigma_{u_g} e^{-j\phi} , \ \phi \in [0, 2\pi[,$$
(4.53)

où un angle général  $\phi$  est maintenant considéré pour la détection. On remarque ici que  $\rho$  forme un cercle de rayon  $\sigma_{u_g}$  centré à l'origine dans le plan complexe, et que conformément à (4.43), une fonction  $f(\zeta(\rho), e^{-j\phi_g}, \sigma_{u_g})$  s'annule lorsque :

$$\rho = \sigma_{u_g} e^{-j\phi} \in \left\{ -e^{-j\phi_g} \sigma_{u_g}, e^{-j\phi_g} \sigma_{u_g}, \frac{e^{-j\phi_g} \sigma_{u_g}}{-j}, \frac{e^{-j\phi_g} \sigma_{u_g}}{j} \right\},$$

$$\Rightarrow \phi \in \left\{ \phi_g, -\phi_g, \phi_g + \pi/2, \phi_g - \pi/2 \right\}.$$

$$(4.54)$$

Ainsi, un balayage sur  $\phi \in [0, 2\pi[$  implique l'annulation de  $f(\zeta(\rho), e^{-j\phi_g}, \sigma_{u_g})$  en quatre endroits distincts, chose étant par ailleurs notable à la Fig. 4.1. En pratique, il devient donc impossible de déduire l'angle  $\phi_g$  à partir d'une valeur  $\phi$  annulant  $f(\zeta(\rho), e^{-j\phi_g}, \sigma_{u_g})$  puisqu'il y aura ambiguïté parmi quatre choix possible. De plus, si les sources avaient toutes la même puissance, un seul écart type (P = 1) serait détecté sur l'intervalle  $]\hat{\sigma}_1/3, \hat{\sigma}_1]$  comme décrit à la section précédente, et ce malgré le fait que plusieurs signaux soient présents. Un balayage sur  $\phi \in [0, 2\pi[$  impliquerait donc l'annulation de  $f(\zeta(\rho), e^{-j\phi_g}, \sigma_{u_g}) \forall g$  en au moins quatre endroits distincts puisque chacune des G sources générerait quatre ambiguïtés sur l'unique cercle de balayage. Un estimateur  $H_2(\rho)$  tel que défini en (4.51) n'est donc pas optimal pour l'estimation des angles électriques des sources. De ce fait, on considérera un estimateur  $H_3(\rho)$ plus général ayant la forme :

$$H_3 = E\{\chi^{\zeta(\rho)(v_1^*x_1(t_k) + v_2^*x_2(t_k))}\} = \prod_{g=1}^G f(\zeta(\rho)(v_1^* + v_2^*e^{-j\phi_g}), \sigma_{u_g}).$$
(4.55)

Les paramètres généralisés des sources peuvent être obtenus selon (4.21) et (4.35) et correspondent maintenant à  $\{a_g = \sigma_{u_g}(v_1^* + v_2^* e^{-j\phi_g})\}_{g=1}^G$ . Pour l'estimation de la DOA d'une source g, on effectue un balayage à partir de  $\zeta(\rho)$  en (4.44) comme à l'habitude, mais ici avec :

$$\rho = \sigma_{u_g}(v_1^* + v_2^* e^{-j\phi}) \equiv \sigma_{u_g} a \ , \ \phi \in [0, 2\pi[ \ . \tag{4.56})$$

En procédant ainsi,  $\rho$  forme maintenant un cercle de rayon  $\sigma_{u_g}|v_2|$  centré en  $\sigma_{u_g}v_1^*$  dans le plan complexe. Le choix d'une telle expression pour  $\rho$  se justifie comme en (4.53), où on lui attribue directement l'expression générale d'un paramètre généralisé. Ce fait implique du coup que  $f(\zeta(\rho)a_g, \sigma_{u_g}) = 0$  si  $\rho \in \{1, j\}a_g\sigma_{u_g}/\ell$  où  $\ell = 1 + 2k$  en (4.43). En pratique toutefois, en imposant  $\rho = a\sigma_{u_g}$  pour une source g donnée où  $\sigma_{u_g}$  est obtenu par la méthode décrite à la section 4.3.2, l'ensemble des G fonctions  $f(\cdot)$  en (4.55) s'en trouve affecté. Considérons l'une de ces fonctions, que l'on identifie avec l'indice  $m \in \{1, 2, \ldots, G\}$ . On a donc  $f(\zeta(\rho)a_m, \sigma_m) = 0$ si

$$\rho = a\sigma_{u_g} \in \left\{ \frac{a_m \sigma_m}{\ell}, \frac{j a_m \sigma_m}{\ell} \right\} , \quad \ell \in \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$$
$$\Rightarrow a \in \left\{ \frac{a_m \sigma_m}{\ell \sigma_{u_g}}, \frac{j a_m \sigma_m}{\ell \sigma_{u_g}} \right\} . \tag{4.57}$$

Par ailleurs, on a également  $H_3(\rho) = 0$  si le paramètre de balayage  $\rho$  (ou a, car en réalité seulement  $\phi$  est varié sur l'intervalle  $[0, 2\pi[)$  permet d'annuler une fonction  $f(\zeta(\rho), a_m, \sigma_m)$ associée à une source autre que la source d'intérêt g. Ce détail est donc non négligeable, et l'équation (4.57) devra constituer la base de tout raisonnement afin d'établir les contraintes nécessaires sur  $v_1$  et  $v_2$  permettant d'éviter toute ambiguïté d'estimation.

Considérons d'abord le cas où m = g. Selon l'équation (4.57), on aura  $H_3(\rho) = 0$  si :

$$a \in \left\{\frac{a_g}{\ell}, \frac{ja_g}{\ell}\right\} . \tag{4.58}$$

Le paramètre  $a = v_1^* + v_2^* e^{-j\phi}$  forme un cercle de rayon  $|v_2|$  centré en  $v_1^*$  dans le plan complexe. Un exemple d'ambiguïté causée par la source g avec sa propre fonction est montré à la Fig. 4.2. En supposant que  $a_g = a_1$ , on aura  $H_3(\rho) = 0$  lorsque  $a = a_1$ , mais comme  $a_4 = a_1/3$ , on aura également  $H_3(\rho) = 0$  lorsque  $a = a_4$ . Il sera donc impossible de savoir si le paramètre  $a_g$ de la source g correspond à  $a_1$  ou à  $a_4$ , et il y aura ambiguïté d'estimation. Le même scénario se produit pour les points  $a_2$  et  $a_3$ . Si par contre  $a_1 \neq a_g \neq a_2$  (ailleurs sur le cercle), aucune ambiguïté d'estimation n'est possible. En général toutefois, si on désire éviter toute ambiguïté possible sur l'ensemble du cercle de balayage, le cercle associé à a/3 ne doit pas être situé à l'intérieur du cercle de balayage ni avoir de point en commun avec ce dernier. Comme le cercle associé à a/3 possède un rayon de  $|v_2|/3$ , on doit donc avoir :

$$|v_1| - |v_2| > \frac{|v_1| + |v_2|}{3}$$
  
$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{1}{2}.$$
 (4.59)

La Fig. 4.2 montre également que le cercle de balayage ne doit pas avoir de point en commun avec les cercles associés à ja, -ja, ja/3 et -ja/3. Clairement, les cercles associés à ja/3et -ja/3 sont beaucoup plus loin du cercle de balayage que le cercle associé à a/3. Si ce dernier ne possède aucun point en commun avec le cercle de balayage (respect de l'équation



FIGURE 4.2 – Ambiguïtés d'estimation possibles engendrées par une source g avec sa propre fonction  $f(\zeta(\rho)a_g,\sigma_{u_g})$ .

(4.59)), il est donc impossible qu'une intersection soit possible entre les cercles associés à ja/3 et -ja/3. Le respect de l'équation (4.59) permet donc d'éviter toute intersection avec les cercles secondaires immédiats. En ce qui concerne les cercles associés à ja et -ja, on déduit facilement par géométrie qu'une intersection n'est possible que si  $|v_2|/|v_1| < \sqrt{2}/2 \approx 0.71$ . Donc encore une fois, le respect de (4.59) assure qu'aucune intersection ne soit possible à ce niveau. En général, on peut donc conclure que si aucune intersection n'est possible entre le cercle de balayage et un cercle quelconque situé sur l'axe  $\overline{Ov_1^*}$  et associé à un paramètre  $a/\ell$ , aucune intersection n'est possible entre les cercles associés à  $ja/\ell$  et  $-ja/\ell$ . Ce fait important permet d'éviter d'avoir à considérer le terme  $ja_m\sigma_m/(\ell\sigma_{u_g})$  en (4.57) afin de se concentrer uniquement sur les possibilités d'ambiguïté engendrées par l'intersection du cercle de balayage avec les autres cercles situés sur l'axe  $\overline{Ov_1^*}$ , et ce pour des sources m et g quelconques.

Considérons maintenant les fonctions d'indice  $m \neq g$  telles que  $\sigma_m < \sigma_{u_g}$ . Selon (4.57), en négligeant le terme  $ja_m\sigma_m/(\ell\sigma_{u_g})$  comme mentionné précédemment, on aura  $H_3(\rho) = 0$ lorsque :

$$a = \frac{a_m \sigma_m}{\ell \sigma_{u_g}} \,, \tag{4.60}$$

où  $\sigma_m/\sigma_{u_g} < 1$ . On désire toujours réaliser l'estimation de  $a_g$  à partir d'un balayage selon  $a = v_1^* + v_2^* e^{-j\phi}$  pour  $\phi \in [0, 2\pi[$ . On doit pour ce faire déterminer les contraintes à respecter

par rapport à  $v_1$  et  $v_2$  telles qu'un seul zéro soit rencontré en  $a = a_g$  sur tout le domaine de recherche ( $\phi \in [0, 2\pi[$ ). Une source m pour laquelle  $\sigma_m < \sigma_{u_g}$  possède un paramètre  $a_m = v_1^* + v_2^* e^{-j\phi_m}$  se situant sur un cercle de rayon  $|v_2|$  centré en  $v_1^*$  dans le plan complexe. Toutefois, conformément à (4.60), le domaine où  $H_3(\rho)$  peut s'annuler dû à une telle source mse réduit à un cercle centré en  $v_1^* \sigma_m / \sigma_{u_g}$  de rayon  $|v_2| \sigma_m / \sigma_{u_g}$ . Il pourra donc y avoir ambiguïté d'estimation si  $a_g$  se situe à l'intersection entre un tel cercle et le cercle de balayage (points  $a_1$  et  $a_2$  de la Fig. 4.3). Afin d'éviter toute intersection possible, on doit avoir :



FIGURE 4.3 – Ambiguïtés d'estimation possibles engendrées par une source g et une source m de fonction  $f(\zeta(\rho)a_m, \sigma_m)$  telle que  $\sigma_m < \sigma_{u_g}$ .

$$\begin{aligned} |v_1| - |v_2| &> |v_1| \frac{\sigma_m}{\sigma_{u_g}} + |v_2| \frac{\sigma_m}{\sigma_{u_g}} \\ \Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} &< \frac{\sigma_{u_g} - \sigma_m}{\sigma_{u_g} + \sigma_m} , \ \sigma_m < \sigma_{u_g} . \end{aligned}$$

$$\tag{4.61}$$

L'indice m est associé à toute source vérifiant  $\sigma_m < \sigma_{u_g}$ . Les plus grands des cercles d'ambiguïté de ces sources seront tous plus petits que le cercle de balayage. Clairement, on peut donc éviter toute ambiguïté si le cercle de balayage n'intercepte pas le plus grand de tous ces cercles. Cette condition s'exprime sous la forme :

$$\frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{\sigma_{u_g} - \sigma_p}{\sigma_{u_g} + \sigma_p} \quad , \quad \sigma_p = \max_m (\sigma_m | \sigma_m < \sigma_{u_g}) \,. \tag{4.62}$$

Finalement, on considère le dernier cas d'ambiguïtés possibles avec les sources d'indice  $m \neq g$ pour lesquelles  $\sigma_m > \sigma_{u_g}$ . Toujours selon (4.57), en ne considérant toujours pas le terme  $ja_m \sigma_m/(\ell \sigma_{u_g})$ , on a  $H_3(\rho) = 0$  lorsque :

$$a = \frac{a_m \sigma_m}{\ell \sigma_{u_g}},\tag{4.63}$$

Ici, les plus grands cercles d'ambiguïté associés aux sources m sont tous plus grands que le cercle de balayage. L'analyse se complexifie car afin d'éviter toute ambiguïté, on doit s'assurer que le cercle de balayage n'intercepte aucun des plus grands ni des plus petits cercles associés à ces sources. Comme en théorie  $\sigma_m/\sigma_{u_g} \in ]1, \infty[$ , il faut ainsi identifier les cercles immédiatement plus grands et immédiatement plus petits que le cercle de balayage afin d'obtenir les conditions à respecter sur  $v_1$  et  $v_2$ , et ce pour chaque source m. Afin de simplifier l'analyse, on suppose que tous les écarts types des sources sont compris dans l'intervalle  $]\max_g(\sigma_{u_g})/3, \max_g(\sigma_{u_g})]$ . Cette hypothèse s'avère appropriée considérant que les écarts types d'intérêt  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_P$ obtenus de  $H_1(\rho)$  à la section 4.3.2 sont également compris dans cet intervalle. De ce fait, le rapport  $\sigma_m/\sigma_{u_g}$  est compris dans l'intervalle ]1,3]. La Fig. 4.4 illustre un exemple d'ambiguïté d'estimation possible dans un tel contexte  $(a_1 \text{ et } a_2)$ . Afin d'éviter toute intersection avec les



FIGURE 4.4 – Ambiguïtés d'estimation possibles engendrées par une source g et une source m de fonction  $f(\zeta(\rho)a_m, \sigma_m)$  telle que  $\sigma_m > \sigma_{u_g}$ .

cercles d'ambiguïté plus grands que le cercle de balayage, ce dernier ne doit pas intercepter le plus petit de ces cercles. Cette condition sera vérifiée si :

$$|v_1| + |v_2| < |v_1| \frac{\sigma_p}{\sigma_{u_g}} - |v_2| \frac{\sigma_p}{\sigma_{u_g}}$$
  

$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{\sigma_p - \sigma_{u_g}}{\sigma_p + \sigma_{u_g}} , \quad \sigma_p = \min_m (\sigma_m | \sigma_m > \sigma_{u_g}) . \tag{4.64}$$

Toutefois, on doit également éviter toute intersection avec les cercles d'ambiguïté secondaires (plus petits que le cercle de balayage). Cette condition sera respectée si le cercle de balayage n'a aucun point en commun avec le plus grand de ces cercles. On doit donc avoir :

$$|v_1| - |v_2| > |v_1| \frac{\sigma_p}{3\sigma_{u_g}} + |v_2| \frac{\sigma_p}{3\sigma_{u_g}}$$
  
$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{3\sigma_{u_g} - \sigma_p}{3\sigma_{u_g} + \sigma_p} \quad , \quad \sigma_p = \max_m (\sigma_m | \sigma_m > \sigma_{u_g}) \,. \tag{4.65}$$

En traitant séparément les cas où m = g,  $m \neq g | \sigma_m < \sigma_{u_g}$  et  $m \neq g | \sigma_m > \sigma_{u_g}$ , on parvient ainsi à couvrir tous les scénarios d'ambiguïté possibles. En combinant les équations (4.59), (4.62), (4.64) et (4.65), on obtient finalement :

$$\frac{|v_2|}{|v_1|} < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma_{u_g} - \sigma_{p_1}}{\sigma_{u_g} + \sigma_{p_1}}, \frac{\sigma_{p_2} - \sigma_{u_g}}{\sigma_{p_2} + \sigma_{u_g}}, \frac{3\sigma_{u_g} - \sigma_{p_3}}{3\sigma_{u_g} + \sigma_{p_3}}\right) \equiv b,$$

$$p_1 = \max_m(\sigma_m | \sigma_m < \sigma_{u_g}) , \quad p_2 = \min_m(\sigma_m | \sigma_m > \sigma_{u_g}) , \quad p_3 = \max_m(\sigma_m | \sigma_m > \sigma_{u_g}) .$$
(4.66)

Cette condition assure ainsi aucune ambiguïté d'estimation possible lors du balayage à partir du paramètre a. On peut également imposer une contrainte supplémentaire pour le choix des constantes  $v_1$  et  $v_2$  en limitant la puissance du bruit générée par la formation du signal  $\mathbf{b}^{\dagger} \mathbf{x}_k = v_1^* x_1(t_k) + v_2^* x_2(t_k)$ . On choisit ici de faire en sorte que l'opération  $\mathbf{b}^{\dagger} \mathbf{x}_k$  génère un bruit de puissance identique à celui qui serait observé sur un élément arbitraire du réseau (i.e.  $\sigma_n^2$ ). Par ailleurs l'imposition d'un bruit plus faible impliquerait des coefficients  $v_1$  et  $v_2$  plus faibles en valeurs absolue, ce qui n'est pas nécessairement souhaitable. On aura donc :

$$\operatorname{Var}\{[\![\boldsymbol{b}^{\dagger}\boldsymbol{x}_{k}]\!]_{\boldsymbol{n}_{k}}\}\operatorname{Var}\{v_{1}^{*}n_{1}(t_{k})+v_{2}^{*}n_{2}(t_{k})\} = |v_{1}|^{2}\sigma_{n}^{2}+|v_{2}|^{2}\sigma_{n}^{2}=\sigma_{n}^{2}$$
  
$$\Rightarrow |v_{1}|^{2}+|v_{2}|^{2}=1.$$
(4.67)

En posant  $|v_2|/|v_1| = \alpha b$ , où  $\alpha$  est une constante inférieure à l'unité, on obtient finalement de (4.67) :

$$|v_1| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha b)^2}} , \ |v_2| = \frac{\alpha b}{\sqrt{1 + (\alpha b)^2}}.$$
 (4.68)

Comme les phases de  $v_1$  et  $v_2$  n'ont pas d'importance, on pose simplement  $v_1 = |v_1|$  et  $v_2 = |v_2|$ . Ces paramètres ne dépendent que de b, qui à son tour ne dépend que des écarts types des sources (cf. équation (4.66)). Une fois les estimés  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_P$  obtenus à partir de  $H_1(\rho)$  par la procédure décrite à la section 4.3.2, il devient donc possible de calculer b pour chacune des P sources, et de procéder à l'estimation des DOAs à partir de  $H_3(\rho)$  en (4.55) en considérant l'expression de  $\zeta(\rho)$  en (4.44) où  $\rho = \sigma_{u_g}(v_1^* + v_2^* e^{-j\phi})$  pour  $\phi \in [0, 2\pi[$ . Il faut effectuer un balayage pour chacune des P sources détectées en posant  $\sigma_{u_g} = \hat{\sigma}_p$  précédemment où  $p \in \{1, 2, \ldots, P\}$ . Cette procédure d'application de l'estimateur exponentiel est également présentée en [54] de façon plus condensée.

#### Simulations

On considère pour cet exemple les paramètres du Tab. 4.2. On adopte une procédure d'estimation identique à celle décrite précédemment, mais à une différence près. Des tests ont montré qu'un balayage à partir de  $H_3(\rho)$  pour l'estimation des angles  $\{\phi_g\}_{g=1}^G$  génère des résultats parfois bruités dû à une faible valeur de b en (4.66) (faible rayon de balayage). Pour cette raison, on considérera d'abord une estimation des angles  $\{\phi_g\}_{g=1}^G$  pour chacune des sources à partir de  $H_2(\rho)$ . Comme les résultats obtenus seront ambigüs (quatre ambiguïtés générées par

Source	σ	θ	SNR [dB]
1	3.1	$45^{\circ}$	12.8
2	2.0	$85^{\circ}$	10.9
3	1.3	$135^{\circ}$	9.1

Tableau 4.2 – Paramètres des sources pour les simulations numériques. Des niveaux de bruits identiques sont considérés pour chaque élément.

chaque source, cf. Fig. 4.1), on procédera subséquemment pour chaque source à l'évaluation de  $H_3(\rho)$  pour des valeurs de  $\rho$  correspondant à ces quatre ambiguïtés, et l'angle  $\phi$  en (4.56) pour lequel  $H_3(\rho)$  sera minimal sera considéré comme l'estimé non ambigü de  $\phi_g$ . Le résumé des opérations est :

- 1) Balayage avec  $H_1(\rho)$  où  $\rho \in ]0, \sqrt{\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\}} + \delta], \delta > 0$ . Estimation de l'écart type maximal des sources, noté  $\hat{\sigma}_1$ .
- 2) Balayage avec  $H_1(\rho)$  où  $\rho \in ]\hat{\sigma}_1/3, \hat{\sigma}_1]$ . Estimation des P écarts types  $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \ldots, \hat{\sigma}_P$ .
- 3) Pour p allant de 1 à P :
  - a) Balayage avec  $H_2(\rho)$  en posant  $\rho = \hat{\sigma}_p e^{-j\phi}$ ,  $\phi \in [0, \pi/2[$ . Comme chacune des sources produira quatre zéros sur le cercle de balayage complet ( $[0, 2\pi[)$ ), un des zéros devra nécessairement apparaître dans le premier cadrant, raison pour laquelle on limitera le balayage sur l'intervalle  $[0, \pi/2[$ . Estimation des Z angles ambigüs  $\hat{\phi}_{p_{1_{\text{Amb}}}}, \hat{\phi}_{p_{2_{\text{Amb}}}}, \dots, \hat{\phi}_{p_{Z_{\text{Amb}}}}$  propres à l'écart type  $\hat{\sigma}_p$  (par exemple, si trois sources possèdent un même écart type mais des DOAs différentes, on aura Z = 3 car trois zéros de  $H_2(\rho)$  seront observés sur  $\phi \in [0, \pi/2[$ ).
  - b) Calcul de  $v_1$  et  $v_2$ .
  - c) Pour z allant de 1 à Z :
    - i. Évaluation de  $H_3(\rho)$  où  $\rho = \hat{\sigma}_p(v_1^* + v_2^* e^{-j\nu}), \nu \in \left\{ \hat{\phi}_{p_{z_{Amb}}}, -\hat{\phi}_{p_{z_{Amb}}}, \hat{\phi}_{p_{z_{Amb}}} + \pi/2, \hat{\phi}_{p_{z_{Amb}}} \pi/2 \right\}$  (quatre ambiguïtés possible).
    - ii. Calcul de la DOA de la source courante à partir de l'angle  $\hat{\phi}_{p_z} = \nu_i$  pour lequel  $H_3(\rho)$  est minimal. Pour un ULA, on rappelle que  $\phi = \beta_0 d \cos(\theta)$  (cf. équation (2.19)).

Les Fig. 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 présentent des résultats de simulation obtenus considérant  $K = 10^4$ échantillons,  $\chi = 1.8$  et  $\alpha = 0.95$  en (4.68). On remarque une concordance importante entre les courbes estimées et les courbes théoriques exactes  $(K \to \infty)$ . Le Tab. 4.3 présente les résultats d'estimation sous forme numérique, où les DOAs estimées ont été obtenues à partir de  $H_3(\rho)$ (les Fig. 4.6, 4.7 et 4.8 ne concernent que l'estimation des angles  $\hat{\phi}_{p_{z_{Amb}}}$  ambigüs). On constate dans l'ensemble que tous les paramètres des sources sont correctement estimés. Chaque point des courbes non idéales présentées aux Fig. 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 est calculé à partir de  $K = 10^4$ échantillons. On présente ici l'ensemble des points obtenu bien qu'en réalité seulement une partie de ces derniers soit utile pour la localisation des minimums.

Cet exemple permet de démontrer la viabilité de l'estimateur exponentiel dans un contexte non idéal  $(K < \infty)$ . À partir d'un réseau à N = 2 éléments, on effectue ainsi l'estimation adéquate de six paramètres, chose étant impossible à partir d'un algorithme du second ordre avec traitement par sous-espaces. D'autres simulations sont présentés en [54] (traitant aussi le cas de sources QPSK) et montrent que l'estimation des DOAs des sources peut également être réalisée directement à partir de  $H_3(\rho)$  comme le veut la procédure originale.



FIGURE 4.5 – Estimation des écarts types des sources ( $\rho = \sigma$ ) à partir de  $H_1(\rho)$ . On considère S = 10 réalisations de  $K = 10^4$  échantillons chacune.



FIGURE 4.6 – Estimation de l'angle  $\phi$  des sources pour le premier écart type à partir de  $H_2(\rho)$ . S = 10 réalisations de  $K = 10^4$  échantillons chacune sont considérées.

Paramètre	Valeur exacte	Moy. des estimations	Écart type des estimations
$\sigma_1$	3.1	3.10	0.03
$\sigma_2$	2.0	2.02	0.03
$\sigma_3$	1.3	1.30	0.02
$\theta_1$	$45^{\circ}$	$44.51^{\circ}$	$0.22^{\circ}$
$\theta_2$	$85^{\circ}$	$85.35^{\circ}$	$0.46^{\circ}$
$ heta_3$	$135^{\circ}$	$131.85^{\circ}$	$6.04^{\circ}$

Tableau 4.3 – Résultats d'estimation des paramètres de sources QPSK indépendantes à partir de l'estimateur exponentiel. Les résultats ont été compilés à partir de S = 10 réalisations de  $K = 10^4$  échantillons chacune.



FIGURE 4.7 – Estimation de l'angle  $\phi$  des sources pour le second écart type à partir de  $H_2(\rho)$ . S = 10 réalisations de  $K = 10^4$  échantillons chacune sont considérées.



FIGURE 4.8 – Estimation de l'angle  $\phi$  des sources pour le troisième écart type à partir de  $H_2(\rho)$ . S = 10 réalisations de  $K = 10^4$  échantillons chacune sont considérées.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre s'est concentré sur quelques-unes des approches de traitement non linéaires qui ont été développées dans le cadre de cette thèse pour le problème d'estimation des paramètres des sources à partir d'une antenne-réseau. De telles méthodes sont généralement caractérisées par une complexité analytique élevée selon les modulations (ou plus spécifiquement les distributions statistiques) des enveloppes complexes reçues. Cependant, elles peuvent aussi présenter des avantages indéniables par rapport aux approches reposant sur un traitement purement matriciel des signaux reçus comme les méthodes du second et quatrième ordre présentées aux chapitres 2 et 3.

Mentionnons également que l'emploi de fonctions non linéaires semblables à (4.21) n'est pas nouveau dans la littérature. Plusieurs travaux ont été réalisés par exemple en exploitant la fonction caractéristique des signaux reçus afin d'en extraire les paramètres des sources [55, 56, 57]. Toutefois, la philosophie générale de ces algorithmes consiste habituellement à déterminer un ensemble de paramètres choisi de façon telle que la fonction caractéristique empirique (évaluée avec un nombre limité d'échantillons) des signaux reçus concorde le mieux possible avec sa forme analytique exacte obtenue par la connaissance des distributions statistiques des sources (en terme de paramètres généraux) [55]. L'originalité de l'estimateur exponentiel en (4.21) avec traitements subséquents réside d'une part au fait que les signaux reçus sont considérés directement sous leur forme complexe, ce qui permet l'élimination du bruit en (4.32), et de l'autre, à la stratégie d'estimation basée sur l'annulation de  $H(\rho) = 0$  par un balayage unidimensionnel selon  $\rho$ . Cet algorithme a donc été l'objet d'une publication en [54].
# Chapitre 5

# Synchronicité des signaux

On aborde dans ce chapitre un aspect bien particulier de la modélisation des signaux qui n'a pas été discuté jusqu'à maintenant, et qui demeure relativement peu populaire dans la littérature. Seules les notions de base introduites dans la première partie du chapitre 2 seront nécessaires pour la bonne compréhension des notions qui seront présentées. La complexité des développements sera substantiellement moins élevée que celle des chapitres précédents, dont notamment le chapitre 4.

# 5.1 Introduction

Les statistiques d'ordre supérieur étudiées au chapitre 3 constituaient une solution efficace au problème de limitation propre aux algorithmes du second ordre. De la même façon, les solutions proposées au chapitre 4 ayant recours à des estimateurs non linéaires ont été développées elles aussi afin de pallier aux limitations des algorithmes d'ordre supérieur présentés au chapitre 3. Ces deux avenues de traitement ont occupé la plus grande partie des travaux de recherche dans cette thèse puisqu'on les retrouve en abondance dans la littérature. Il était donc naturel et justifié de s'y aventurer également.

Il fut cependant remarqué à ce point dans l'avancement des travaux que le succès et l'efficacité de ces méthodes de traitement sont attribuables uniquement à une exploitation judicieuse des distributions statistiques des sources (ou plus spécifiquement des enveloppes complexes élémentaires de chaque groupe). Ceci est particulièrement évident en (3.3) où l'on obtient les matrices  $C_1$  et  $C_2$  en exploitant la propriété que le cumulant d'ordre quatre des enveloppes complexes est non nul, ou de façon plus marquée au chapitre 4 (cf. Tab. 4.1) où l'on dérive des expressions analytiques précises en exploitant les pdf's spécifiques des signaux reçus. L'exploitation des pdf's exactes des sources <sup>1</sup> est souvent rencontrée dans la littérature, et en particulier

<sup>1.</sup> Bien qu'on parle ici de la connaissance exacte des pdf's des sources, on entend plus exactement la connaissance de leurs formes analytiques générales où les valeurs numériques des paramètres les constituant sont pour leur part inconnus.

chez les algorithmes de traitement destinés aux signaux de communications, car le caractère numérique de ces derniers justifie des distributions statistiques d'enveloppes complexes telles que  $u_g(t_k) \in \mathcal{A}_g \forall g$  où  $\mathcal{A}_g$  est l'alphabet (ensemble des symboles) d'une enveloppe g donnée.

Ce chapitre est destiné au bien-fondé de cet aspect bien particulier de la modélisation, responsable et surtout nécessaire au bon fonctionnement d'une multitude d'algorithmes retrouvés en abondance dans la littérature. Les résultats (ou disons constats) issus de cette analyse seront directement exploités au chapitre 6 pour l'élaboration d'un algorithme d'estimation de  $\boldsymbol{B}$  unique en son genre.

# 5.2 Synchronicité des signaux

Bien que le caractère numérique des signaux de communication soit souvent exploité à des fins avantageuses, ces derniers demeurent fondamentalement analogiques. Peu de choses ont été dites jusqu'à maintenant sur la nature temporelle intrinsèque des enveloppes complexes élémentaires de chaque groupe, où même sur celle d'un signal passe-bande général tel qu'introduit en (2.1). On sait par contre qu'une telle enveloppe doit véhiculer l'information intelligible d'une source sous forme de symboles transmis et destinés à être décodés au récepteur. Plus spécifiquement, une enveloppe s(t) telle qu'introduite en (2.1) s'exprime par [58, 59, 60] :

$$s(t) = \sum_{\ell} s_{\ell} p(t - \ell T) , \qquad (5.1)$$

où  $\{s_\ell\}_\ell \in \mathcal{A} \in \mathbb{C}$  est la séquence des symboles transmis par l'émetteur, T est la période des symboles et  $p(\cdot) \in \mathbb{R}$  est une fonction de mise en forme d'impulsion (de l'anglais "*pulse* shaping function") propre au schéma précis de modulation employé. L'enveloppe complexe s(t) s'exprime donc par une somme de fonctions impulsionnelles décalées uniformément dans le temps, d'où la notion de "train d'impulsions" transmis par l'émetteur. La Fig. 5.1 illustre un exemple conceptuel d'une telle fonction. Dans le cadre de cette thèse, considérant un modèle des signaux groupés, on écrira que :

$$u_g(t) = \sum_{\ell} s_{g_{\ell}} p_g(t - \tau_g - \ell T) \ \forall \ g , \qquad (5.2)$$

où  $\{s_{g_\ell}\}_\ell \in \mathcal{A}_g \in \mathbb{C}$  représente cette fois la séquence des symboles transmis par l'usager g et  $p_g(\cdot) \in \mathbb{R}$  sa fonction de mise en forme d'impulsion correspondante. On assume ici un débit en bauds identique (1/T) pour tous les usagers. Le paramètre  $\tau_g$ , fondamentalement distinct des délais de propagation  $\{\tau_{i_m}\} \forall \{i, m\}$  d'un émetteur m à un élément i du réseau qui ont été introduits au chapitre 2, représente ici le délai asynchrone propre au groupe g et sa présence en (5.2) sera expliquée sous peu. On sait de (2.2) qu'une enveloppe  $u_g(t)$  donnée peut également s'exprimer par :

$$u_g(t) = I_g(t) + Q_g(t), (5.3)$$



FIGURE 5.1 – Exemple illustratif d'un train d'impulsions constituant une enveloppe complexe s(t) quelconque considérant des symboles réels et tous identiques.

où  $\{I_g(t), Q_g(t)\} \in \mathbb{R}$  sont les signaux modulants en phase et en quadrature propres à l'usager g. Par correspondance à (5.2), on déduit que :

$$I_g(t) = \sum_{\ell} \Re\{s_{g_\ell}\} p_g(t - \tau_g - \ell T) \ , \ Q_g(t) = \sum_{\ell} \Im\{s_{g_\ell}\} p_g(t - \tau_g - \ell T) \ .$$
(5.4)

On rappelle par ailleurs que l'expression de  $u_g(t)$  en (5.2) correspond à l'enveloppe complexe élémentaire d'un groupe g au temps t telle que reçue au niveau du réseau lui-même, et non au niveau de l'émetteur. Comme la procédure de mise en forme d'impulsion est effectuée à l'émetteur (en mode "uplink" pour un traitement à la réception), la fonction  $p_g(\cdot)$  en (5.2) correspond donc à la fonction d'impulsion reçue au niveau du réseau et est donc généralement différente de celle employée à l'émetteur puisqu'elle aura subi les effets de déformation potentiels du canal. Toutefois, si ce dernier est invariant en temps (i.e. sa fonction de transfert par rapport aux enveloppes transmises est indépendante du temps), la structure de la fonction reçue  $p_g(\cdot)$  sera également indépendante du temps (quoique de forme potentiellement différente de celle générée à l'émetteur) et le principe de sommation de fonctions identiques mais décalées entre elles en (5.2) demeurera valide. Plus spécifiquement, sous l'hypothèse d'invariance en temps du canal, la fonction  $p_g(t)$  correspondra simplement à la convolution entre la réponse impulsionnelle  $h_g(t)$  du canal de l'usager g et la fonction de mise en forme d'impulsion  $\tilde{p}_g(t)$ générée au niveau du mobile [61] :

$$p_g(t) = (h_g * \tilde{p}_g)(t) \forall g.$$
(5.5)

Cette hypothèse a été implicitement assumée jusqu'ici et dans les chapitre antérieurs, et sera également adoptée pour la suite des travaux. Une telle invariance en temps est d'ailleurs absolument nécessaire afin de pouvoir estimer l'espérance mathématique de fonctions faisant intervenir le vecteur des signaux reçus  $\boldsymbol{x}_k$  (e.g. la matrice de covariance) à l'aide de moyennages temporels.

En pratique, bien que le canal puisse être assumé invariant en temps, les réponses impulsionnelles associées aux trajets multiples d'un même groupe (cf. Fig. 2.5) pourront être différentes, ou plus spécifiquement non proportionnelles, si des distorsions non identiques sont induites au niveau d'un ou plusieurs trajets. Par exemple, deux trajets multiples issus d'un même usager pourront présenter des fonctions de mise en forme d'impulsion différentes au niveau du réseau si les matériaux ayant réfléchi les signaux possèdent des réponses en fréquences différentes sur la largeur de bande employée pour la transmission. Une telle situation impliquera que le vecteur des signaux reçus de ce groupe ne pourra être exprimé par  $b_g u_g(t)$  (i.e. à partir d'une unique enveloppe complexe  $u_g(t)$ ) et le modèle de l'équation (2.52) deviendra donc invalide. L'équation (5.5) devient également invalide dans ce cas puisque les signaux d'un même groupe ne sont plus associés à une même fonction <sup>2</sup> de mise en forme d'impulsion  $p_g(t)$ . On assumera dans cette thèse qu'une telle situation ne puisse être rencontrée, ou du moins aura des effets négligeables faisant en sorte que (2.52) demeure généralement valide.

#### 5.2.1 Signaux synchrones

La notion de synchronicité des signaux est quelquefois mal interprétée dans la littérature, ou du moins on lui donne parfois des définitions différentes selon le contexte à l'étude. Par exemple, en [62], la synchronisation d'un signal est réalisée lorsque ce dernier possède un délai d'arrivée nul (par rapport à une référence temporelle donnée). En [59, 63], celle-ci fait plutôt référence au contrôle de synchronisation des symboles dans des applications microcellulaires, et en [64] elle est associée aux bornes des intervalles de temps pendant lesquels la puissance du signal transmis pour chaque usager est maintenue constante, car on y présente un algorithme d'estimation exploitant des variations contrôlées de puissances émises par les mobiles et à laquelle on fera référence ultérieurement au chapitre 6.

La synchronicité des signaux dont il est question dans ce chapitre a trait au deuxième point mentionné précédemment concernant le timing<sup>3</sup> des symboles des enveloppes des usagers au niveau d'une antenne réceptrice. La Fig. 5.2 montre une comparaison entre des signaux synchrones et asynchrones. Par simplicité, on assume la présence de G = 2 groupes avec modulations BPSK sur l'axe I. On présente une illustration de l'équation (2.53) et son équivalent temporel continu  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Bu}(t) + \mathbf{n}(t)$  au niveau d'un élément *i* quelconque du réseau sans considération du bruit. D'abord, on peut clairement voir en (a) que les instants d'échantillonnage (considérant une période d'échantillonnage  $T_s = T$ ) coïncident parfaitement avec les instants des symboles des deux enveloppes. Ainsi, les éléments du vecteur  $\mathbf{u}_k$  prennent tous deux des valeurs parmi  $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\} \in \{-1, 1\}$ , soit les symboles idéaux transmis. Ceci se justifie par le fait que l'on considère comme fonctions de mise en forme d'impulsion  $p_1(\cdot)$  et  $p_2(\cdot)$ en (5.2) des fonctions RC ("Raised Cosine") respectant le critère de Nyquist [65]. Ce dernier

<sup>2.</sup> L'équation (5.5) pourrait cependant être modifiée en la rendant spécifique à un signal d'indice  $\ell \in \{1, 2, ..., M_g\}$  d'un groupe g donné.

<sup>3.</sup> Timing est bel et bien un mot français. Voir sa définition <u>ici</u>.

stipule simplement que pour une fonction de mise en forme d'impulsion  $p_{Nyquist}(t)$  donnée,



FIGURE 5.2 – Réception de signaux synchrones (a) et asynchrones (b) au niveau d'un élément *i* du réseau (sans bruit) avec coefficients de canal  $B_{i,1} = -0.8e^{-j0.2}$  and  $B_{i,2} = 2e^{j0.5}$ . On considère deux enveloppes complexes (G = 2) de type BPSK où  $u_g(t) = I_g(t) + jQ_g(t)$  et  $Q_g(t) = 0 \forall g$ .

$$p_{\text{Nyquist}}(kT) = \begin{cases} c \neq 0 & k = 0\\ 0 & k \neq 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad (5.6)$$

et implique donc un échantillonnage sans interférence inter-symbole (ISI, "InterSymbol Interference") à tous les instants t = kT. La Fig. 5.2 assume donc implicitement que le canal ne distorsionne pas les fonctions de mise en forme d'impulsion transmises (i.e.  $h_g(t) = \alpha_g \delta(t) \forall g$ en (5.5)).

On a ici affaire à des signaux synchrones car les instants des symboles des enveloppes complexes de chaque groupe au niveau du réseau sont parfaitement coïncidents les uns avec les autres. Ainsi, avec la bonne phase d'échantillonnage (considérant toujours  $T_s = T$ ), chaque élément du vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  peut prendre une valeur parmi un ensemble de symboles transmis idéaux (si respect du critère de Nyquist) à chaque instant  $t_k$ . Le principe se généralise pour tout nombre de groupe G en (5.2), et implique de ce fait que  $\tau_g = \tau \forall g$  dans cette même équation.

L'hypothèse de signaux synchrones est très fréquemment rencontrées dans la littérature. Elle se remarque particulièrement chez tous les algorithmes exploitant une modélisation du vecteur source  $u_k$  (ou  $s_k$  selon la notation choisie) où à chaque instant  $t_k$  lors de simulations numériques,  $[\boldsymbol{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$ . L'exploitation du caractère numérique des signaux transmis est devenue à ce point habituelle dans la littérature que l'imposition  $[\boldsymbol{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$  est souvent considérée sans même faire référence à, ou justifier l'hypothèse de signaux synchrones au préalable (voir par exemple [66] où l'on considère des sources BPSK prenant des valeurs parmi  $\{-1,1\}$ ). À cet effet plusieurs références supplémentaires seront données à la section 5.3.

L'imposition  $[u_k]_g \in \mathcal{A}_g \ \forall \ g$  à chaque instant  $t_k$  est parfaitement justifiée dans la mesure où les signaux reçus sont synchrones comme à la Fig. 5.2 (a). Des signaux synchrones sont tels que  $\tau_g = \tau \forall g$ . On définit le paramètre  $\tau_g$  ici en tant que le délai asynchrone du groupe g, et n'est pas à confondre avec les délais tempore ls  $\{\tau_{i_m}\} \forall \{i, m\}$  introduits<sup>4</sup> au chapitre 2. Par exemple, supposons que les enveloppes complexes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  de la Fig. 5.2 (a) soient associées à des trajets directs de deux usagers situés à une même distance d'une antenne réceptrice i dans un espace libre (donc sans réflexions multiples). Comme les usagers sont situés à une même distance de l'antenne réceptrice, les temps d'arrivée des signaux seront égaux ( $\tau_{i_1} = \tau_{i_2}$  selon les conventions de la Fig. 2.5). Toutefois, même si  $\tau_{i_1} = \tau_{i_2}$ , on pourra observer que  $\tau_1 \neq \tau_2$  en (5.2) si les phases des horloges de symboles des deux mobiles sont différentes. À l'inverse, dans un contexte semblable où les deux usagers seraient situés à des distances différentes de l'antenne réceptrice i, on aura  $\tau_{i_1} \neq \tau_{i_2}$  mais il sera quand même possible d'observer que  $\tau_1 = \tau_2$  en (5.2) si les phases des horloges de symboles des usagers sont ajustées adéquatement. Le délai asynchrone  $\tau_g$  d'une enveloppe complexe  $u_g(t)$  tient donc compte de la phase des instants des symboles au niveau du récepteur, et n'est donc pas uniquement associé au temps de propagation d'une onde dans l'espace. Pour des séquences de symboles transmises suffisamment longues, on remarque en (5.2) qu'un délai $\tau_g \geqslant T$  peut toujours être ramené à l'intervalle [0, T]. Ainsi, on aura :

$$\tau_g \in [0, T[ \forall g \in \{1, 2, \dots, G\} ].$$
 (5.7)

Les signaux reçus sont donc synchrones si  $\tau_g = \tau \forall g$ , et cette propriété particulière permet l'emploi d'un modèle numérique des signaux reçus tel que  $[\boldsymbol{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$ , à condition bien entendu que les fonctions de mise en forme d'impulsion respectent le critère de Nyquist et que la phase d'échantillonnage au niveau des éléments du réseau soit ajustée de façon appropriée comme à la Fig. 5.2 (a). On adopta l'hypothèse à la section 2.3.2 que les enveloppes complexes  $\{u_g(t)\}_{g=1}^G$  de chaque groupe sont indépendantes entre elles (i.e.  $E\{u_p(t)u_q(t)\} = \sigma_{u_p}^2 \delta_{p,q}$ ). Cette hypothèse est couramment employée dans la littérature et parfaitement justifiée puisqu'en pratique les usagers opèrent tous indépendamment les uns des autres. De la même façon, il est naturel d'assumer que les délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  des usagers soient aussi indépendants les uns des autres puisque les mobiles sont libres de transmettre de l'information à des instants arbitraires. Vue la nature continue de  $\tau_g \forall g$  en (5.7), il est donc impossible qu'un

<sup>4.</sup> On fait remarquer ici que des typographies différentes sont employées pour désigner les délais asynchrones introduits dans ce chapitre et les délais temporels dont il était question au chapitre 2. On emploie respectivement les notations  $\tau$  et  $\tau$  pour ce faire.

hasard naturel fasse en sorte que  $\tau_g = \tau \forall g$  pour la durée d'observation de  $\boldsymbol{x}(t)$ . De ce fait, il devient également injustifiable en de telles circonstances de donner à chaque élément  $[\boldsymbol{u}_k]_g$ de  $\boldsymbol{u}_k$  lors de simulations numériques des valeurs parmi l'ensemble  $\mathcal{A}_g$  des symboles transmis de cet usager. En pratique, l'hypothèse de signaux synchrones ne peut être valable que si

- un contrôle de phase précis des horloges de symboles est exercé pour chaque usager tel qu'une synchronicité parfaite des symboles soit observée au récepteur pour tous les signaux incidents<sup>5</sup>, et que
- 2) un recouvrement des instants des symboles est effectué au niveau du réseau à partir de l'unique observation du vecteur  $\boldsymbol{x}(t)$ .

Concernant le premier point, un tel contrôle peut uniquement être exercé en employant un signal de référence généré soit au niveau de la station de base, soit entre les mobiles entre eux, ou encore à partir d'une source externe comme une horloge satellite par exemple [67]. Dans le cas échéant, un tel signal pourrait également être employé pour le recouvrement des instants des symboles au second point. En général, on constate cependant que la synchronisation des signaux implique une complexité supplémentaire pour le système tant au niveau du traitement qu'au niveau hardware.

#### 5.2.2 Signaux asynchrones

La Fig. 5.2 (b) illustre pour sa part le cas de signaux asynchrones. On y considère les mêmes séquences de symboles et les mêmes coefficients de canal  $B_{i,1}$  et  $B_{i,2}$  qu'en (a). Les signaux sont dits asynchrones car  $\tau_1 \neq \tau_2$ , et de ce fait les instants des symboles de  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ ne coïncident plus entre eux. Ceci implique donc qu'à l'échantillonnage, indépendamment de la phase considérée, les éléments du vecteur  $u_k$  ne pourront en général prendre de valeurs parmi les alphabets des sources. Les valeurs exactes de  $u_1(t_k)$  et  $u_2(t_k)$  dépendront à la fois des séquences de symboles transmis, de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et également des fonctions de mise en forme d'impulsion  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  au niveau du réseau. La section 5.4 couvrira l'aspect de modélisation numérique du vecteur  $u_k$ .

En général, pour un ensemble de G groupes, les enveloppes complexes reçues seront dites asynchrones si  $\{\tau_g\}_{g=1}^G \notin \tau$ . Un tel scénario est donc naturellement prévisible dans un environnement où les usagers opèrent tous indépendamment les uns des autres en transmettant des données à des instants arbitraires. L'asynchronisme des signaux constitue donc une hypothèse de travail naturelle pour le développement d'algorithmes d'estimation robustes des paramètres des sources. Une telle hypothèse rend cependant imprévisible la distribution statistique du vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  aux instants d'échantillonnage  $\{t_k\}_{k=1}^K$  et le caractère numérique des signaux reçus ne peut donc plus être exploité aussi directement que dans le cas synchrone<sup>6</sup>.

<sup>5.</sup> À une distance limitée du réseau et pour un étalement en délai négligeable dans la cellule considérée, la synchronisation sera effectuée si les phases des horloges de symboles des mobiles sont identiques.

<sup>6.</sup> La distribution statistique des enveloppes  $\{u_g(t_k)\}_{k=1}^K$  est imprévisible car les délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ 

### 5.3 Implications au niveau traitement

Comme mentionné précédemment, l'hypothèse de signaux synchrones est très fréquemment rencontrée dans la littérature. Cette dernière se remarque souvent non pas au niveau des hypothèses de travail précédent l'élaboration d'un algorithme donné, mais plutôt de façon implicite lorsque, au niveau des simulations, on impose  $[\boldsymbol{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$  à chaque instant d'échantillonnage  $t_k$ . Ceci fut par exemple le cas ici même au chapitre 3 (cf. simulations à la section 3.2.3), où des sources BPSK modélisées par  $u_g(t_k) \in \{-\sigma_g, \sigma_g\} \forall g$  ont été considérées. Une modélisation du même type a également été exploitée au chapitre 4 (cf. Tab. 4.1) pour l'obtention de fonctions analytiques précises destinées à être employées pour le calcul de  $H(\rho)$  en (4.21).

Cette section présente une discussion concernant les conséquences de l'asynchronisme naturel des signaux au niveau des performances de certaines familles bien connues d'algorithmes exploitant une modélisation synchrone implicite.

D'abord, considérons le cas d'algorithmes exploitant des statistiques d'ordre supérieur. L'hypothèse de signaux synchrones est particulièrement conviviale dans cette situation puisque l'évaluation du cumulant d'une enveloppe complexe  $u_g(t_k)$  donnée (e.g. cum $(u_g(t_k), u_g^*(t_k), u_g(t_k), u_g(t_k))$  $u_q^*(t_k)$ ) pour l'obtention des expressions analytiques exactes de  $C_1$  et  $C_2$  en (3.4)) peut facilement être réalisée considérant que cette dernière prend des valeurs dans  $\mathcal{A}_q$  selon une distribution donnée (souvent équiprobable). Quelques exemples de tels algorithmes peuvent être consultés en [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48]. On y exploite dans chaque cas un modèle numérique où  $[u_k]_g \in \mathcal{A}_g \ \forall \ g$ , et ce sans aborder ou discuter de l'aspect de synchronicité des signaux reçus au préalable. La plupart de ces algorithmes exploitent le fait que les cumulants d'ordre supérieur des enveloppes complexes des sources sont non nuls (comme en (3.4)). Considérant des signaux asynchrones, les valeurs théoriques exactes de ces cumulants seront vraisemblablement différentes de celles obtenues dans un cas synchrone où  $[u_k]_q \in \mathcal{A}_q \ \forall g$ . Par contre, il est intuitif de croire que ces valeurs pourront également être différentes de zéro, sauf peut-être en des circonstances bien particulières pour des valeurs spécifiques de délais  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ . Ainsi, il est justifiable de croire que de tels algorithmes pourront s'avérer généralement fonctionnels dans un tel contexte. Il serait cependant intéressant d'étudier le comportement en performance des estimés obtenus (e.g.  $\hat{B}(K)$ ) avec de tels algorithmes puisque pour différentes valeurs de  $\{\tau_g\}_{q=1}^G$ , les cumulants des sources prendront des valeurs généralement différentes et seront susceptibles d'affecter le traitement de façon favorable ou non.

Une autre classe d'algorithmes est celle où on exploite les distributions statistiques précises des sources afin d'effectuer un traitement plus spécifique des signaux reçus. On rencontre souvent ce genre d'hypothèse de travail avec l'emploi d'estimateurs non linéaires tels ceux présentés au chapitre 4 [54], ou avec l'exploitation de la fonction caractéristique des signaux [68]. La

sont inconnus au récepteur. Dans le cas synchrone avec phase d'échantillonnage appropriée et fonctions de mise en forme d'impulsion respectant le critère de Nyquist, la distribution statistique d'une enveloppe  $u_g(t_k)$  devient simplement égale à celle des symboles transmis.

connaissance des pdf's des sources (en terme de leur forme analytique générale) se justifie facilement dans le cas synchrone où  $[\boldsymbol{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$  en assumant des distributions équiprobables de symboles transmis. Toutefois, dans le cas asynchrone, la connaissance des pdf's des sources implique également celle des délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  car ces derniers influent grandement les valeurs prises par  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$  à chaque instant d'échantillonnage comme en témoigne la Fig. 5.2 (b). Puisque ces derniers sont de nature aléatoire à chaque transmission<sup>7</sup>, une telle hypothèse de travail est donc difficilement justifiable en pratique.

Mentionnons en troisième lieu le cas important des algorithmes exploitant la propriété d'alphabet fini (FA, "Finite Alphabet") des enveloppes complexes reçues. Une description intuitive du principe de base exploité par de telles méthodes est donnée par Attux en [69] : "...we must not forget a most relevant prior information : the transmitted signals are digital in nature. Consequently, the samples associated with each source are restricted to a finite alphabet, which means that, in the absence of noise, the input vector [le vecteur  $\mathbf{x}_k$ ] also has a limited number of possible values.". Cette propriété se remarque très bien à la Fig. 5.2 (a) où  $\{u_1(t_k), u_2(t_k)\} \in \{-1, 1\}$ , faisant en sorte que  $x_i(t_k)$  ne prennent que quatre valeurs possibles dans le plan complexe, résultant de la somme de deux variables aléatoire binaires. En (b) cependant, les valeurs de  $u_1(t_k)$  et  $u_2(t_k)$  ne sont pas restreintes à  $\{-1, 1\}$ , car ailleurs qu'aux instants des symboles d'une enveloppe  $u_g(t)$  donnée, plus d'une fonction  $p_g(\cdot)$  en (5.2) est non nulle impliquant la contribution de plusieurs symboles consécutifs aux échantillons  $\{u_g(t_k)\}_{k=1}^K$ . De ce fait, les sources ne possèdent plus un alphabet idéal rendant possible l'imposition  $[\mathbf{u}_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$ ; les distributions statistiques des éléments de  $\mathbf{x}_k$  (avec ou sans bruit) deviennent ainsi plus complexes.

Le fondement des algorithmes exploitant la propriété d'alphabet fini des sources repose sur le fait que, étant donné  $[u_k]_g \in \mathcal{A}_g \forall g$ , un signal  $x_i(t_k)$  particulier produira un certain nombre de nuages de points lorsque tracé dans le plan complexe considérant un niveau de bruit raisonnable, et dont les centres seront particulièrement bien définis. Comme ces derniers sont directement liés aux coefficients de canal  $\{B_{i,g}\}_{g=1}^G$  de l'élément en question, il devient alors possible d'estimer la matrice B en procédant à l'estimation des centres observés au niveau des N plans complexes associés aux éléments de  $x_k$  en utilisant des algorithmes de classification standards ou des réseaux de neurones. Des algorithmes exploitant de tels principe d'estimation peuvent être consultés en [69, 70, 71, 72, 73].

La Fig. 5.3 présente le tracé d'un signal  $x_i(t_k)$  considérant 2 groupes de signaux comme à la Fig. 5.2. Dans le cas synchrone, on remarque facilement les nuages de points ainsi produits selon la modulation employée et les valeurs spécifiques des coefficients de canal. Dans le cas asynchrone, les nuages se déforment rapidement avec la disparité de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  et le principe de

<sup>7.</sup> On suppose toujours en réalité un cas général où vraisemblablement G > 1, car pour G = 1 une détection standard avec PLL et boucle de recouvrement des symboles pourrait facilement justifier la synchronicité de l'enveloppe complexe reçue (instants des symboles coïncidents aux instants d'échantillonnage si  $T_s = T$ ).



FIGURE 5.3 – Tracé d'un signal  $x_i(t_k)$  (300 points avec  $T_s = T$ ) dans le plan complexe considérant la réception de deux enveloppes de puissances égales avec coefficients de canal  $B_{i,1} = 0.5e^{j0.2}$ ,  $B_{i,2} = 1.1e^{-j^2}$  et SNR de 15 dB. (a) et (b) : modulations BPSK. (c) et (d) : modulations QPSK. Graphes de gauche : signaux synchrones. Graphes de droite : signaux asynchrones considérant deux ensembles distincts de délais asynchrones, Ens. 1 :  $\{\tau_1 = 0.9T, \tau_2 = 0.05T\}$  et Ens. 2 :  $\{\tau_1 = 0.6T, \tau_2 = 0.2T\}$ . Cercles noirs : positions théoriques exactes des centres des nuages de points dans le cas synchrone. Pour chaque modulation des séquences de symboles et de bruit identiques sont considérées dans les deux cas.

recherche de "centres" ainsi produits ne devient généralement plus applicable. Les algorithmes exploitant la propriété d'alphabet fini des sources ne peuvent donc s'avérer fonctionnels dans un tel contexte.

Bien qu'on rencontre plusieurs travaux dans la littérature où l'on exploite une modélisation synchrone des signaux reçus (souvent implicitement), la notion d'asynchronisme présentée dans ce chapitre n'est pas un nouveau concept en soit. Par exemple, un modèle littéralement identique à (5.2) est utilisé en [74] où l'on considère des délais relatifs inconnus entre les instants des symboles de chaque usager. En [59, 63], on relate directement la synchronisation des signaux aux timing des symboles reçus à l'antenne réceptrice. On montre clairement que dans le cas synchrone, les sources prennent des valeurs parmi leur alphabet respectif et rendent ainsi possible un traitement reposant sur la propriété d'alphabet fini. On justifie l'hypothèse de synchronicité des signaux par le fait que dans des applications micro-cellulaires à ciel ouvert ("*air interfaces*"), le timing des symboles peut être contrôlé avec efficacité. On ne donne cependant aucune information quant à comment une telle chose peut être réalisée en pratique avec les complexités additionnelles s'y rattachant telles que discutées à la section 5.2.1, ni de référence adéquate et plus détaillée à ce sujet.

On comprend maintenant bien comment le degré de synchronicité des signaux influe sur les performances des algorithmes d'estimation des paramètres des sources puisque leurs distributions statistiques aux instants d'échantillonnage sont fonction de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G.$  Les performances des algorithmes classiques du second ordre sont également affectées par cet attribut des signaux puisque les puissances apparentes des sources (i.e. leur variance telle que perçue aux instants d'échantillonnage) sont également des propriétés statistiques dépendant  $^8$  des délais  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ . Il a été mentionné au chapitre 2 que les performances des algorithmes d'estimation des DOAs étaient particulièrement sensibles aux déviations de la réponse spatiale du réseau par rapport au vecteur de localisation idéal  $a(\nu)$ . Ce phénomène est bien connu et a été largement étudié dans la littérature [25, 26, 27]. Ici, de la même façon, l'asynchronicité des signaux peut avoir des effets dévastateurs chez les algorithmes d'estimation exploitant un modèle implicite synchrone où  $[u_k]_g \in \mathcal{A}_g \ \forall g$ . Curieusement toutefois, la littérature ne semble présenter aucune étude concernant l'impact de cet aspect particulier des signaux au niveau des performances d'algorithmes exploitant une telle modélisation. La réalisation d'une telle étude pourrait donc s'avérer des plus utiles ne serait-ce que pour populariser davantage la considération de l'aspect de synchronicité des signaux, et permettrait de stimuler l'intérêt vers l'élaboration d'algorithmes d'estimation plus robustes. On pourrait également y établir un critère spécifique sur l'écart type des délais  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  en deçà duquel l'hypothèse de signaux synchrones pourrait être adoptée.

La notion d'asynchronicité des signaux n'est pas nouvelle dans la littérature et a déjà été considérée adéquatement pour le développement de certains algorithmes d'estimation. Toutefois, même à ce jour, cette dernière demeure peu populaire dans la littérature et s'avère pourtant des plus importante chez tous les algorithmes exploitant les propriétés statistiques des signaux reçus, ne serait-ce qu'au niveau de leur puissance.

<sup>8.</sup> Cet aspect sera élaboré en plus de détails au chapitre 6.

# 5.4 Modélisation

#### 5.4.1 Modélisation analogique directe

On peut tenir compte de l'aspect de synchronicité des enveloppes complexes reçues pour fins de simulations en employant (5.2) directement sous forme discrète. On a :

$$u_g(t_k) = \sum_{\ell} s_{g_\ell} p_g(t_k - \tau_g - \ell T) \forall g.$$
(5.8)

Ce type de modélisation est le plus direct et le plus fidèle équivalent de  $u_g(t)$ , et sera exploité au chapitre 6 pour l'élaboration d'un algorithme d'estimation aveugle à partir de statistiques d'ordre deux. Toutefois, ce modèle est quelque peu complexe à utiliser puisqu'il implique également la modélisation des fonctions de mise en forme d'impulsion  $\{p_g(\cdot)\}_{g=1}^G$ .

#### 5.4.2 Modélisation FIR-MIMO

Une alternative à l'équation (5.8) est l'emploi du modèle FIR-MIMO ("Finite Impulse Response Multiple-Input Multiple-Output"), très populaire dans la littérature non pas pour le problème d'estimation des DOAs ou des paramètres des sources étudié jusqu'ici dans cette thèse, mais plutôt chez les algorithmes d'estimation s'intéressant davantage à l'information transmise (symboles) d'un point à un autre sans égards aux paramètres de propagation physique comme tels [58]. On décrira brièvement ce modèle dans cette section puisqu'il permet de tenir compte de l'asynchronicité des signaux et puisqu'il interviendra également dans les développements relatifs au chapitre 6. Par sa description, on désire également montrer comment ce dernier se compare au modèle classique  $\mathbf{x}_k = \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{n}_k$  en (2.53) (ou (2.32)), car le traitement d'antenne et la conception de systèmes MIMO sont généralement perçus comme deux disciplines distinctes les unes des autres bien que toutes deux fassent intervenir un traitement des signaux reçus par un réseau d'antennes.

On considère ici une communication "uplink" (i.e. transmission des usagers vers la station de base munie d'un réseau d'antennes). D'abord, pour le cas d'un seul usager (SU-SIMO, "Single-User Single-Input Multiple-Output"), les signaux reçus à un instant  $t_k = t_0 + kT$  au niveau du réseau peuvent être exprimés par [58] :

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{s}_{1_k} + \boldsymbol{n}_k \,, \tag{5.9}$$

où  $H_1 \in \mathbb{C}^{N \times L_1}$  est une matrice de réponse en symboles du canal et  $\mathbf{s}_{1_k} \in \mathbb{C}^{L_1 \times 1}$  est un vecteur de  $L_1$  symboles consécutifs transmis (voir [58], équation (17)). Les vecteurs  $\mathbf{x}_k$  et  $\mathbf{n}_k$  sont exactement les mêmes qu'en (2.53) puisqu'il s'agit des mêmes signaux reçus. L'équation (5.9) demeure valable même si l'étalement en délai du système est non négligeable (contrairement à (2.53)) et représente une façon conviviale d'exprimer les signaux reçus en terme des symboles transmis par un usager donné. On peut alors s'intéresser à l'estimation de  $\mathbf{s}_{1_k}$  étant donné  $\mathbf{x}_k$ , car dans un contexte de communications il s'agit souvent de la principale grandeur d'intérêt. La matrice  $H_1$  tient compte (dépend) à la fois de la fonction de mise en forme d'impulsion  $p_1(\cdot)$ de cet usager ainsi que d'une phase d'échantillonnage arbitraire  $t_0$  au récepteur. Le modèle est donc généralement valable dans un contexte de signalisation asynchrone. En négligeant temporairement le bruit, la correspondance entre (2.53) et (5.9) pour le cas d'un seul usager (G = 1) est telle que :

$$\boldsymbol{x}_{k} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{1}(t_{k}) = \boldsymbol{H}_{1}\boldsymbol{s}_{1_{k}}$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} B_{1,1} \\ B_{2,1} \\ \vdots \\ B_{N,1} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{H}_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{1}}^{*} & c_{1_{2}}^{*} & \dots & c_{1_{L_{1}}}^{*} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{1}(t_{k})} \begin{bmatrix} s_{1_{k}} \\ s_{1_{k-1}} \\ \vdots \\ s_{1_{k-L_{1}+1}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{1}(t_{k})}$$

$$= \boldsymbol{b}_{1}\boldsymbol{c}_{1}^{\dagger}\boldsymbol{s}_{1_{k}}, \qquad (5.11)$$

où les coefficients  $\{c_\ell\}_{\ell=1}^{L_1}$  sont tels que  $c_1^{\dagger} \mathbf{s}_{1_k} = u_1(t_k)$ . Cette relation est ni plus ni moins qu'un moyen d'exprimer la valeur de l'enveloppe  $u_1(t_k)$  en terme d'une somme pondérée de symboles consécutifs transmis où le nombre de coefficients (dimension de  $\mathbf{s}_{1_k}$ ),  $L_1$ , représente la longueur (ou mémoire) du canal. Notons par ailleurs que les symboles  $\{s_{1_\ell}\}_\ell$  en (5.10) sont les mêmes qu'en (5.2). Pour bien comprendre la notion de mémoire du canal, considérons le cas de la Fig. 5.2 (a). Les instants des symboles coïncident aux instants d'échantillonnage et les fonctions  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  respectent le critère de Nyquist (aucune ISI). Ainsi, considérant l'une ou l'autre de ces enveloppes en (5.9), disons  $u_1(t)$  en imposant  $u_2(t) = 0$ , on aura  $L_1 = c_1 = 1$  car  $x_i(t_k)$ ne dépend que du symbole courant à l'instant  $t_k$   $(x_i(t_k) = B_{i,1}s_{1_k})$ . Par ailleurs, toujours pour le cas de la Fig. 5.2 (a) mais en supposant avoir une phase d'échantillonnage différente (ou de façon générale dans le cas asynchrone de la Fig. 5.2 (b)), les instants d'échantillonnage ne coïncident pas avec les instants des symboles de l'enveloppe en question (on néglige toujours  $u_2(t)$ ). Par conséquent, plusieurs symboles contribueront à la valeur de  $x_i(t_k)$  (zone d'ISI) tel que  $x_i(t_k) = B_{i,1} \boldsymbol{c}_1^{\dagger} \boldsymbol{s}_{1_k}$  où  $\boldsymbol{c}_1$  dépendra de la phase d'échantillonnage et de la nature de  $p_1(t)$ . La longueur du canal  $L_1$  dépendra pour sa part de la largeur temporelle de  $p_1(t)$  dans cet exemple spécifique. La dépendance de  $c_1$  envers  $t_0$  est omise en (5.10) et (5.11) afin d'alléger les notations.

On souhaite ici bien faire comprendre le fondement de l'équation (5.9) car on abordera maintenant un point important concernant la valeur théorique exacte de  $L_1$ . Dans la littérature, la mémoire d'un canal est souvent exprimée uniquement en fonction de l'étalement en délai relatif à la période des symboles de l'enveloppe considérée. Par exemple, Glisic en [75] (équation (6.27)) donne un bon exemple à cet égard :

$$L_1 = \left[\frac{T_{\max_1}}{T}\right] + 1, \qquad (5.12)$$



FIGURE 5.4 – Fonctions de mise en forme d'impulsion individuelles d'une enveloppe complexe hypothétique en (5.2) montrant les contributions de symboles consécutifs à la valeur de  $u_g(t)$  à un instant t donné. Des impulsions de largeur temporelle  $W_g = 2.5T$  sont considérées pour cet exemple.

où  $T_{\max_1}$  est l'étalement en délai maximal du système (toujours dans le cas d'un seul usager), et  $[\cdot]$  est la fonction partie entière. D'autres exemples de travaux où l'on exprime la mémoire du canal uniquement en fonction de l'étalement en délai peuvent être consultés en [76, 77, 78]. Selon (5.12), on déduit que pour  $T_{\max_1} = 0$  (e.g. un unique trajet direct),  $L_1 = 1$ . Cette situation pourrait correspondre par exemple au cas de la Fig. 5.2 (a) (en posant encore  $u_2(t) = 0$  pour simplifier) où, du fait que les instants des symboles et des échantillons soient coïncidents,  $x_i(t_k) = B_{i,1}s_{1_k}$  comme expliqué précédemment. Par contre pour une phase d'échantillonnage différente faisant en sorte que  $u_1(t_k) \notin \mathcal{A}_1$ , on a plutôt  $x_i(t_k) = B_{i,1} c_1^{\dagger} \mathbf{s}_{1_k}$ où  $\mathbf{s}_{1_k}$  est de dimension  $L_1 > 1$ . L'équation (5.12) prédit correctement la mémoire induite par les délais de propagation physiques du canal, mais néglige celle associée à l'ISI générée par les fonctions de mise en forme d'impulsion propres au signal transmis. Bien qu'à première vue il est parfaitement justifiable d'assumer que pour la réception d'un seul trajet direct une boucle de recouvrement des symboles standard puisse assurer que  $\tau_1 = 0$ , justifiant ainsi que  $L_1 = 1$ (pour des impulsions respectant le critère de Nyquist), la situation devient cependant tout autre en présence de trajets multiples et d'étalement en délai non négligeable où la superposition d'un trajet reçu reçue et de ses copies décalée en temps feront généralement en sorte que la mémoire due à l'ISI propre à la nature de l'enveloppe transmise interviendra en (5.9) et qu'il soit donc nécessaire de la considérer pour une modélisation adéquate de  $x_k$ .

La Fig. 5.4 montre que pour une fonction de mise en forme d'impulsion  $p_g(t)$  de largeur temporelle  $W_g$  donnée, jusqu'à  $[W_g/T]$  symboles consécutifs peuvent contribuer à la valeur de  $u_g(t)$  en (5.2) à un instant t donné. Ainsi, une longueur de canal suffisante pour représenter précisément les signaux reçus en provenance d'un usager particulier dans un contexte général



FIGURE 5.5 – Échantillonnage et reconstruction d'une enveloppe complexe à partir d'une longueur de canal estimée  $\hat{L}$  donnée. (a) : Impulsions RC de largeur W = 6T avec facteur "roll-off"  $\beta = 0.2$ ,  $\hat{L} = 1$ . (b) : Impulsions de types Hanning de largeur W = T,  $\hat{L} = 1$ . (c) : Même chose qu'en (a) avec  $\hat{L} = [W/T] = 6$ .

peut être obtenue par modification (5.12) comme suit :

$$L_1 = \left[\frac{T_{\max_1}}{T}\right] + \left[\frac{W_1}{T}\right], \qquad (5.13)$$

où  $W_1$  est la largeur temporelle de la fonction de mise en forme d'impulsion de cet usager (l'usager 1) au niveau du réseau. Afin de mieux comprendre l'implication de l'équation (5.13), la Fig. 5.5 montre un exemple de reconstruction d'une enveloppe complexe avec modulation BPSK à partir d'une longueur de canal estimée  $\hat{L}$  donnée. On affiche ici les fenêtres des symboles qui sont nécessaires afin de définir un "symbole transmis" à tout instant pour la formation d'un vecteur  $\mathbf{s}_k$  comme en (5.10) (on emploie ici une relation générale  $u(t_k) = \mathbf{c}^{\dagger} \mathbf{s}_k$ ). On peut considérer l'enveloppe complexe reçue de la Fig. 5.5 comme celle associée à un unique trajet direct. En (a), on remarque qu'en imposant  $\hat{L} = 1$  il est impossible de reconstituer adéquatement les échantillons  $u(t_k)$  car la largeur temporelle des impulsions des symboles est égale à W = 6T. En (b) par contre, pour des impulsions de largeur W = T, une mémoire de  $\hat{L} = 1$  suffit (en remplaçant  $T_{\max_1}$  par 0 et  $W_1$  par T en (5.13), on obtient  $L_1 = 1$ ). En (c), dans les mêmes conditions qu'en (a) mais pour  $\hat{L} = [W/T] = 6$ , on réussit à reconstituer adéquatement l'enveloppe reçue.

L'équation (5.13) donne une valeur suffisante de  $L_1$  afin de modéliser adéquatement les signaux reçus en provenance d'un usager donné. Cependant on remarque que la représentation de  $\mathbf{s}_1(t_k)$ en (5.10) n'est pas rigoureusement exacte, car la Fig. 5.4 montre que la valeur d'une enveloppe complexe à un temps arbitraire t ne dépend pas seulement des symboles courant et précédents, mais également des symboles futurs. La notation de l'équation (5.13) est employée ici car on la retrouve en abondance dans la littérature. Sa modification s'avérerait cependant nécessaire pour une juste représentation des signaux reçus.

Il est justifiable de se demander jusqu'à quel point la contribution du terme  $[W_1/T]$  à la mémoire du canal en (5.13) est importante, car même si la valeur de  $L_1$  augmente linéairement avec  $[W_1/T]$ , on ne peut a priori prétendre que l'énergie associée aux symboles supplémentaires ainsi considérés représente une fraction non négligeable de l'énergie totale de l'enveloppe complexe reçue. Une étude détaillée devra être effectuée à ce sujet afin d'obtenir une réponse claire à cette question. Il est évident cependant que le terme  $[W_1/T]$  sera d'autant moins négligeable que  $W_1$  sera élevé. Et à cet effet, mentionnons simplement qu'en pratique les fonctions de mise en forme d'impulsion des symboles peuvent s'étendre sur des intervalles allant jusqu'à 12 périodes de symboles [79]. Ainsi, il devient intuitif de croire que la mémoire  $[W_1/T]$  associée à l'ISI elle-même d'une enveloppe complexe reçue est non négligeable, et que cette dernière peut même s'avérer plus importante que sa contrepartie induite par le délai d'étalement maximal du canal. La section E.1 de l'annexe E présente une étude plus complète et plus approfondie à ce sujet qui pourrait donner lieu à une contribution intéressante en ce domaine.

En pratique, les fonctions de mise en forme d'impulsion sont implémentées numériquement aux moyens de filtres non causals<sup>9</sup> (les plus populaires étant les filtres RC [65] et gaussien [80]) avec un étalement temporel élevé (la plupart du temps W > T), car ceci améliore grandement l'efficacité spectrale du signal transmis. Il s'ensuit selon (5.13) que même sans réflexion multiple, la mémoire d'un signal reçu est généralement plus élevée que 1. Ainsi, une hypothèse de travail voulant qu'un canal donné soit sans mémoire <sup>10</sup> (une mémoire unitaire) peut facilement devenir injustifiée <sup>11</sup> même si le canal possède un étalement en délai négligeable.

<sup>9.</sup> Il s'agit ici d'un abus de langage car un filtre non causal est non réalisable en pratique. On sous-entend plutôt l'emploi de filtres causaux dont la sortie est retardée afin de simuler l'emploi de fonctions impulsionnelles prenant des valeurs non nulles pour t < 0.

<sup>10.</sup> On fait référence ici à la mémoire du canal par  $L_1$  en (5.13), tel qu'employée pour la modélisation de  $x_k$  en (5.9), même si le terme  $[W_1/T]$  dont dépend  $L_1$  n'est pas associé à un phénomène de propagation physique des signaux.

<sup>11.</sup> À moins d'assumer une synchronicité parfaite des symboles incidents et des instants d'échantillonnage avec fonctions de mise en forme d'impulsion reçues respectant le critère de Nyquist, comme à la Fig. 5.2 (a).

Ce type d'hypothèse est toutefois couramment rencontré dans la littérature puisqu'il permet des simplifications importantes pour le traitement subséquent des signaux [76, 78, 81, 82].

Mentionnons par ailleurs que bien que la considération de l'ISI propre à une enveloppe complexe au niveau de la mémoire du canal soit peu répandue dans la littérature, on retrouve cependant certains travaux en faisant état, comme par exemple [60].

L'extension de (5.9) au cas multi-usagers peut s'effectuer en exprimant d'abord le vecteur  $u_k$  par analogie à (5.10). On a :

$$\begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \\ \vdots \\ u_G(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^{\dagger} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}_2^{\dagger} & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{c}_G^{\dagger} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{1_k} \\ \boldsymbol{s}_{2_k} \\ \vdots \\ \boldsymbol{s}_{G_k} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{C} \boldsymbol{s}_k , \qquad (5.14)$$

où  $c_g \in \mathbb{C}^{L_g \times 1}$ , et où  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{C}^{(\sum_g L_g) \times 1}$  est la concaténation des séquences de symboles transmis de tous les usagers. La longueur de canal  $L_g$  pour chaque usager est obtenue par généralisation de (5.13):

$$L_g = \left\lceil \frac{T_{\max g}}{T} \right\rceil + \left\lceil \frac{W_g}{T} \right\rceil \,\forall g \,, \tag{5.15}$$

où  $T_{\max_g}$  est l'étalement en délai maximal du canal de l'usager g et  $W_g$  la largeur temporelle de sa fonction de mise en forme d'impulsion au niveau du réseau. Le vecteur des signaux reçus peut donc être exprimé par :

$$\boldsymbol{x}_{k} = \overbrace{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{u}(t_{k})}^{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{n}_{k}, \qquad (5.16)$$

avec

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \dots & \boldsymbol{H}_G \end{bmatrix}, \qquad (5.17)$$
$$\boldsymbol{H}_g = \boldsymbol{b}_g \boldsymbol{c}_g^{\dagger}.$$

Précisons ici que le vecteur  $\mathbf{s}_k$  en (5.16) est d'une nature complètement différente de  $\mathbf{s}(t_k) = \mathbf{s}_k$  en (2.32). Le modèle général de l'équation (5.16) est valide pour tout délai d'étalement, contrairement à (2.53) qui exige que ce dernier soit nul ou négligeable. Ce modèle implique cependant une propagation des signaux en bande étroite (puisqu'on y exprime les signaux reçus dans le domaine temporel sous forme matricielle compacte) et n'est valide que pour  $T_s = T$ , i.e. une période d'échantillonnage identique à la période des symboles (voir équation (17) en [58]). Une modélisation considérant une période d'échantillonnage  $T_s = T/U$  où  $0 < U \in \mathbb{N}$  est également possible comme expliqué en [58] (cf. Fig. 7). La philosophie consiste à considérer U séquences d'échantillons prises à la période des symboles et entrelacées entre elles. On obtient

ainsi U équations similaires à (5.16) mais avec des matrices de canal différentes pour chaque séquence considérée dû à leurs décalages temporels.

Le modèle des signaux reçus selon (5.16) est une alternative intéressante à (5.8) pour tenir compte de l'aspect de synchronicité général des enveloppes complexes reçues au niveau du réseau. Certaines précautions doivent cependant être prises notamment au niveau de l'estimation des longueurs de canal  $\{L_g\}_{g=1}^G$  afin d'assurer une juste représentation de l'information reçue.

# 5.5 Conclusion

Ce chapitre s'est concentré sur l'aspect de modélisation des enveloppes complexes reçues au niveau du réseau et de leur implication au niveau des distributions statistiques des éléments du vecteur  $\boldsymbol{x}_k$ . On a d'abord mis en évidence que l'assignation  $u_q(t_k) \in \mathcal{A}_q \; \forall \; g \; \text{comme hypothèse}$ de travail ou lors de l'évaluation des performances pour un algorithme donné à partir de simulations numériques impose implicitement une synchronicité parfaite des enveloppes reçues au niveau du réseau, ainsi qu'un recouvrement précis des instants des symboles à chaque élément. On a bien fait comprendre qu'une telle modélisation dans un contexte multi-usagers n'est possible que si un contrôle de phase précis des horloges de symboles est exercé pour chaque mobile à partir d'un signal de référence généré soit de façon externe, soit au niveau des mobiles eux-mêmes. On a ensuite porté une attention particulière sur le fait que dans un contexte de communication naturel (i.e. dépourvu de mécanisme de synchronisation), les enveloppes complexes reçues au niveau du réseau présentent plutôt un caractère asynchrone où leurs instants de symboles ne coïncident généralement pas entre eux. Une telle situation empêche l'emploi d'un modèle des signaux reçus où à chaque instant d'échantillonnage  $u_q(t_k) \in \mathcal{A}_q \; \forall \; g$ . Des discussions et analyses ont ensuite présentées afin d'expliquer et de bien mettre en évidence les conséquences qu'aurait un asynchronisme naturel des signaux au niveau des performances d'algorithmes d'estimation exploitant une modélisation implicite synchrone des enveloppes complexes recues.

Dans la première partie des travaux (i.e. chapitres 2 à 4), aucune importance ou préoccupation particulière n'a été accordée à la notion de synchronicité des signaux puisque cet aspect demeure encore aujourd'hui peu populaire dans la littérature. Ce dernier est toutefois d'une importance capitale vu ses implications directes au niveau des distributions statistiques des éléments du vecteur  $\boldsymbol{x}_k$ . L'analyse approfondie sur la modélisation des enveloppes complexes reçues au niveau du réseau telle que présentée dans ce chapitre a été un point tournant dans l'avancement des travaux, car des méthodes de traitement alternatives et innovatrices ont pu être envisagées afin d'exploiter l'asynchronisme naturel des signaux reçus, dont entre autres l'algorithme JDDTM présenté au chapitre 6.

# Chapitre 6

# Algorithme JDDTM

Ce chapitre est consacré à l'algorithme JDDTM ("Joint Diagonalization of Differential Target Matrices") qui a été développé entièrement dans le cadre de cette thèse en guise de dernière partie des travaux. Ce dernier est expliqué et présenté en détails en [83] (et également à l'annexe F). Pour cette raison et pour fins d'alléger la présentation, on n'expliquera ici que ses grandes lignes ainsi que les principes de base qui ont été exploités pour son développement.

La théorie présentée dans ce chapitre fera intervenir les notions des chapitres 2, 3 et 5 et agira de ce fait comme une rétrospective de plusieurs aspects ayant été couverts jusqu'à maintenant dans cette thèse.

# 6.1 Introduction

Suite aux discussions entourant l'aspect de synchronicité des signaux au chapitre 5, un questionnement s'impose quant au bien-fondé de la poursuite du développement d'algorithmes exploitant un modèle synchrone des signaux reçus où  $u_g(t_k) \in \mathcal{A}_g \forall g$ . Bien qu'une telle propriété offre des avantages indéniables au niveau traitement par les possibilités d'exploitation des distributions statistiques précises des sources qu'elle procure, elle ne peut toutefois être justifiée dans un contexte naturel où les usagers opèrent tous indépendamment les uns des autres de façon asynchrone.

Par ailleurs, une modélisation asynchrone des signaux ne pourrait guère être exploitée pour le développement d'algorithmes à base d'estimateurs non linéaires tels que ceux présentés au chapitre 4 car les pdf's des sources ne peuvent être a priori connues (car les délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  en (5.2) sont eux-mêmes inconnus).

Il a donc été envisagé de pouvoir exploiter une modélisation asynchrone des signaux avec l'exploitation de statistiques d'ordre supérieur par une stratégie similaire à celle présentée au chapitre 3, où seule la propriété  $\gamma_{u_g} = \operatorname{cum}(u_g(t_k), u_g^*(t_k), u_g(t_k), u_g^*(t_k)) \neq 0 \forall g$  aurait été exploitée sans nécessairement avoir recours à l'exploitation précise des distributions statistiques de  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$ . Toutefois, comme expliqué à la section 4.1, la motivation derrière l'emploi de statistiques d'ordre supérieur n'est que d'obtenir un plus grand nombre d'informations faisant intervenir les paramètres des sources par rapport à l'information disponible issue d'un traitement classique par statistiques d'ordre deux. Or, on sait de par les développements du chapitre 5 que la distribution statistique du vecteur  $u_k$  est fortement dépendante de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ . Il pourrait donc être envisageable d'exploiter de possibles variations statistiques des signaux reçus dans ce contexte sans avoir recours aux statistiques d'ordre supérieur. Ces dernières produisent d'ailleurs des variances d'estimés plus importantes qu'un traitement comparatif du second ordre pour un même nombre d'échantillons, comme expliqué au chapitre 3.

Telles sont donc les raisons qui ont motivé le développement de l'algorithme JDDTM, n'exploitant que des statistiques d'ordre deux, et permettant d'effectuer l'estimation aveugle de la matrice  $\boldsymbol{B}$  en exploitant la propriété d'asynchronisme naturel des enveloppes complexes reçues. Le fondement de l'algorithme repose sur une exploitation de la diversité de phase d'échantillonnage au récepteur, laquelle rend alors possible une exploitation de variations statistiques des signaux.

# 6.2 Diversité de phase d'échantillonnage

La Fig. 6.1 illustre le principe de diversité de phase d'échantillonnage au niveau d'un élément i quelconque du réseau. Pour le bien de l'exemple, on considère la réception de deux enveloppes complexes asynchrones de modulation BPSK comme à la Fig. 5.2 (b). Cependant, on effectue maintenant l'échantillonnage du vecteur  $\boldsymbol{x}(t)$  à la fréquence

$$\frac{1}{T_s} = \frac{U}{T} \quad , \quad 0 < U \in \mathbb{N} \,, \tag{6.1}$$

où U est le facteur de suréchantillonnage. Les données obtenues peuvent être vues comme U séquences d'échantillons distinctes prises à la période des symboles et possédant un décalage temporel de T/U entre elles. Un tel traitement s'avère intéressant car comme illustré à la Fig. 6.1, il devient possible d'exploiter les propriétés statistiques des signaux reçus vues par chacune des U séquences d'échantillons. Pour bien comprendre cet aspect important du traitement, revenons brièvement au cas de la Fig. 5.2 (a). Comme dans cette figure les instants des échantillons coïncident aux instants des symboles des deux enveloppes, la matrice de covariance des sources calculée selon (2.56) prendra la forme :

$$\boldsymbol{R}_{uu} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathrm{sym}_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{\mathrm{sym}_2}^2 \end{bmatrix},$$

où  $\sigma_{\text{sym}_g}^2$  représente la variance des symboles de l'enveloppe  $u_g(t)$  (pour cet exemple  $\sigma_{\text{sym}_1}^2 = \sigma_{\text{sym}_2}^2 = 1$ ). Dans le cas de la Fig. 6.1, considérant l'évaluation de  $\mathbf{R}_{xx_1}$ , on remarque que les instants d'échantillonnage sont près des instants des symboles de  $u_1(t)$  et un peu plus éloignés



FIGURE 6.1 – Illustration du principe d'exploitation de diversité de phase d'échantillonnage considérant G = 2enveloppes complexes reçues avec modulations BPSK ( $Q_g(t) = 0 \forall g$ ) et facteur de suréchantillonnage U = 2.

de ceux de  $u_2(t)$ . On a donc :

$$\boldsymbol{R}_{uu_1} = \begin{bmatrix} c_{1_1} \sigma_{\mathrm{sym}_1}^2 & 0\\ 0 & c_{1_2} \sigma_{\mathrm{sym}_2}^2 \end{bmatrix}$$

où  $1 > c_{1_1} \approx 1$  et où  $c_{1_2} < c_{1_1}$ . Pour la seconde séquence d'échantillons, le calcul de  $R_{xx_2}$ implique quant à lui que

$$\boldsymbol{R}_{uu_{1}} = \begin{bmatrix} c_{2_{1}}\sigma_{\mathrm{sym}_{1}}^{2} & 0\\ 0 & c_{2_{2}}\sigma_{\mathrm{sym}_{2}}^{2} \end{bmatrix}$$

où cette fois  $c_{2_1}$  est significativement plus faible que  $c_{1_1}$  car la séquence d'échantillons est presque 180° hors phase avec les instants des symboles de  $u_1(t)$  dans une région où les croisement par zéros sont plus fréquents. Ainsi, il s'ensuit que l'enveloppe  $u_1(t)$  apparaît avec une puissance beaucoup plus faible en  $\mathbf{R}_{xx_1}$  qu'en  $\mathbf{R}_{xx_2}$  où des changements moins importants sont observés pour  $u_2(t)$ . De telles observations sont spécifiques aux valeurs de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  considérées à la Fig. 6.1, mais montrent en général comment une diversité statistique des signaux reçus peut être obtenue par une variation de phase d'échantillonnage.

De telles variations statistiques peuvent également être obtenues avec des signaux synchrones. Par contre, comme il sera montré à la section 6.3.2, les matrices de covariance des sources ainsi obtenues pour chaque séquence d'échantillons deviennent simplement identiques entre elles à un facteur près dans le cas où des modulations identiques (fonctions de mise en forme d'impulsion  $\{p_g(\cdot)\}_{g=1}^G$  identiques) sont employées. Il n'y a alors aucune diversité statistique puisque les matrices de covariance des signaux reçus (sans bruit) de chaque séquence deviennent simplement proportionnelles entre elles.

# 6.3 Exploitation de la diversité de phase d'échantillonnage

### 6.3.1 Calcul d'autocorrélation

L'exemple donné à la section précédente faisait intervenir uniquement la puissance des enveloppes complexes perçues par chacune des séquences d'échantillons, car il s'agissait d'un concept simple et facile à interpréter. Dans ce chapitre, on considère plutôt un calcul d'autocorrélation général des signaux reçus tel que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{xx}(t,\tau) &= E\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\dagger}(t+\tau)\} \\ &= \boldsymbol{B}E\{\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{u}^{\dagger}(t+\tau)\}\boldsymbol{B}^{\dagger} + E\{\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{n}^{\dagger}(t+\tau)\} \\ &\equiv \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)\boldsymbol{B}^{\dagger} + \boldsymbol{R}_{nn}(t,\tau), \end{aligned}$$
(6.2)

où t et  $\tau$  sont imposés à l'évaluation. Remarquons ici la dépendance générale de  $\mathbf{R}_{uu}$  et  $\mathbf{R}_{nn}$  envers t et  $\tau$ , qui était pourtant omise en (2.35) de par l'hypothèse de stationnarité ou cyclostationnarité des signaux. Cette hypothèse permettait ainsi de dire que la distribution statistique de  $\mathbf{x}(t_k)$  ne dépend pas de  $t_k$ , et donc que  $E\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^{\dagger}\} = \mathbf{R}_{xx}(t_k) = \mathbf{R}_{xx}$ .

Il est bien connu que des signaux de communication définis selon (5.2) sont cyclostationnaires en t avec une période T (période des symboles) [84]. Cela signifie que la distribution statistique d'une enveloppe  $u_g(t)$  à un temps t est identique à celle de  $u_g(t + kT)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ . Ceci est facilement compréhensible si on imagine par exemple le cas de la Fig. 5.2 (a) où  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^2 \in \{-1,1\}$ . Ces derniers correspondent directement aux symboles transmis, et sont donc identiquement distribués dans le temps. En général, la même propriété est vérifiée même si les instants d'échantillonnage ne coïncident pas aux instants des symboles. Il s'agit d'une conséquence naturelle de (5.2)<sup>1</sup>.

<sup>1.</sup> Avec rigueur, pour assurer qu'une enveloppe  $u_g(t)$  donnée soit cyclostationnaire en t de période T, on doit avoir  $\ell \in ]-\infty, \infty[$  en (5.2) afin de s'assurer qu'un même nombre de fonctions  $p_g(\cdot)$  contribuent à la valeur de l'enveloppe complexe à tous les instants t + kT où  $k \in \mathbb{Z}$ . Ceci sera assumé vrai dans tous les développements relatifs à ce chapitre. Lors de simulations, on peut imposer cette propriété en générant un nombre suffisant

Des signaux de communication sont donc cyclostationnaires en t de période T. Ceci implique que les échantillons d'une séquence  $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^K$  prise à la période des symboles sont identiquement distribués entre eux (en assumant toutefois que le bruit est stationnaire ou cyclostationnaire en t de période  $T_s/k$  où k est entier). Par contre la distribution statistique spécifique de ces derniers dépendra de la phase d'échantillonnage considérée, comme illustré à la Fig. 6.1. Le paramètre t en (6.2) tient compte de cette dernière, et est donc présent à même  $\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)$ et  $\boldsymbol{R}_{nn}(t,\tau)$ . Le paramètre  $\tau$  est un délai d'autocorrélation général. Pour  $\tau = 0$ ,  $\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)$ représente simplement la matrice des puissances (variances) des enveloppes complexes reçues au temps t (mais également aux temps t + kT où  $k \in \mathbb{Z}$ ). Pour mieux comprendre l'effet d'une valeur générale  $\tau \neq 0$  en (6.2), on peut évaluer directement un élément  $[\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)]_{g,h}$  à partir de (5.2). En assumant des distributions de symboles de moyenne nulle (i.e.  $E\{s_{g_\ell}\} = 0 \forall \{g, \ell\}$ ), on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{uu}(t,\tau) \end{bmatrix}_{g,h} = E\{u_g(t)u_h^*(t+\tau)\}$$

$$= E\left\{ \left[ \sum_{\ell} s_{g_{\ell}} p_g(t-\tau_g-\ell T) \right] \left[ \sum_{r} s_{h_r}^* p_h(t+\tau-\tau_h-rT) \right] \right\}$$

$$= E\left\{ \sum_{\ell} \sum_{r} s_{g_{\ell}} p_g(t-\tau_g-\ell T) s_{h_r}^* p_h(t+\tau-\tau_h-rT) \right\}$$

$$= \sum \sum E\{s_{g_{\ell}} s_{h_r}^*\} p_g(t-\tau_g-\ell T) p_h(t+\tau-\tau_h-rT)$$
(6.3)

$$=\sum_{\ell}^{\ell} E\{s_{g_{\ell}}s_{g_{\ell}}^{*}\}\delta_{g,h}p_{g}(t-\tau_{g}-\ell T)p_{g}(t+\tau-\tau_{g}-\ell T)$$
(6.4)

$$= \sigma_{\operatorname{sym}_g}^2 \delta_{g,h} \sum_{\ell} p_g(t - \tau_g - \ell T) p_g(t + \tau - \tau_g - \ell T) , \qquad (6.5)$$

où  $\sigma_{\text{sym}_g}^2 = E\{s_{g_\ell}s_{g_\ell}^*\}$  est la variance des symboles de l'enveloppe  $u_g(t)$ , comme expliqué précédemment. Le passage de (6.3) à (6.4) se justifie par le fait que les symboles de deux enveloppes g et h distinctes sont indépendants entre eux (d'où le delta de Kronecker  $\delta_{g,h}$  en (6.4)), et que deux symboles distincts d'une même enveloppe g le sont également.

La matrice  $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$  est donc diagonale et réelle puisque  $\{p_g(\cdot)\}_{g=1}^G \in \Re$  en (5.2). Pour  $\tau = 0$ , on a :

$$[\boldsymbol{R}_{uu}(t,0)]_{g,g} = \sigma_{\text{sym}_g}^2 \sum_{\ell} p_g^2 (t - \boldsymbol{\tau}_g - \ell T) , \qquad (6.6)$$

qui est donc uniquement fonction de t si les délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  sont constants pour la période d'observation considérée. Pour  $\tau \neq 0$ ,  $[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{g,g}$  dépend à la fois de t et  $\tau$ . Conformément aux notions vues au chapitre 5, on sait qu'une fonction  $p_g(t)$  donnée est non nulle sur un intervalle de temps continu de largeur  $W_g$ . Ainsi, si  $\tau > W_g$ , on aura  $[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{g,g} = 0$ 

d'impulsions avant l'instant t = 0 où l'échantillonnage des signaux est considéré débuter, et même chose après le dernier échantillon prélevé.

car les fonctions  $p_g(\cdot)$  en (6.5) deviennent trop séparées en temps pour pouvoir se chevaucher pour au moins une valeur de  $\ell$  dans la sommation. Ceci correspond à une situation où le délai (i.e.  $\tau$ ) est trop élevé pour qu'une corrélation statistique existe entre une enveloppe complexe et sa copie décalée conjuguée. En général, on peut interpréter intuitivement  $\tau$  en (6.2) comme un paramètre de corrélation qui, pour une valeur suffisamment élevée, permet éventuellement d'annuler  $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$ . Cependant, une augmentation de  $\tau$  (ou diminution considérant un retard) n'implique pas nécessairement une diminution immédiate en amplitude d'un élément [ $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$ ]<sub>g,g</sub>, car le comportement exact de ce dernier dépend aussi de la nature de la fonction  $p_g(t)$  ainsi que du délai asynchrone  $\tau_g$ .

#### 6.3.2 Profil d'autocorrélation normalisé

On définit le profil d'autocorrélation normalisé (NAP, "Normalized Autocorrelation Profile") d'une enveloppe complexe reçue  $u_g(t)$  par :

$$\operatorname{NAP}_{g}(t,\tau) \triangleq \frac{E\{u_{g}(t)u_{g}^{*}(t+\tau)\}}{\sigma_{\operatorname{sym}_{g}}^{2}} = \frac{[\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)]_{gg}}{\sigma_{\operatorname{sym}_{g}}^{2}}.$$
(6.7)

Cette fonction dépend de t et  $\tau$ , et est normalisée <sup>2</sup> par  $\sigma_{\text{sym}_g}^2$  afin de pouvoir comparer différents types de modulations sur une même base indépendamment de la puissance des symboles reçus. La Fig. 4 en [83] (cf. annexe F) présente l'évaluation du NAP en fonction de t pour une enveloppe complexe donnée selon différents types de modulations et différentes valeurs de  $\tau$ .

Supposons que les enveloppes reçues par le réseau soient synchrones (i.e.  $\tau_g = \tau \forall g$ ) et possèdent toutes de mêmes fonctions de mise en forme d'impulsion (i.e.  $p_g(t) = p(t) \} \forall g$ ). On déduit alors aisément de (6.7) que  $\text{NAP}_g(t, \tau) = \text{NAP}(t, \tau) \forall g$ . Conséquemment, il s'ensuit que :

$$[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{gg} = \sigma_{\text{sym}_{g}}^{2} \text{NAP}(t,\tau) \forall g ,$$

ou encore :

diag{
$$\boldsymbol{R}_{uu}(t,\tau)$$
} = NAP $(t,\tau) \begin{bmatrix} \sigma_{\text{sym}_1}^2 & \sigma_{\text{sym}_2}^2 & \dots & \sigma_{\text{sym}_G}^2 \end{bmatrix}^\top$ . (6.8)

Ainsi, pour des valeurs  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\tau_1$  and  $\tau_2$  quelconques, deux matrices  $\mathbf{R}_{uu}(t_1, \tau_1)$  et  $\mathbf{R}_{uu}(t_2, \tau_2)$ seront toujours équivalentes à un facteur près et ne pourront générer de diversité statistique pouvant être exploitée pour un traitement subséquent.

Si les enveloppes reçues ne sont pas synchrones par contre ou possèdent des fonctions de mise en forme d'impulsion non identiques, des matrices  $\mathbf{R}_{uu}(t_1, \tau_1)$  et  $\mathbf{R}_{uu}(t_2, \tau_2)$  ne seront généralement pas proportionnelles entre elles et pourront alors être exploitées avantageusement comme il sera expliqué à la section 6.4.

<sup>2.</sup> On parle ici de normalisation par abus de langage, car la fonction  $\text{NAP}_g(t, \tau)$  n'est pas nécessairement bornée entre 0 et 1.

Il est intéressant de remarquer que des enveloppes complexes possédant de mêmes fonctions de mise en forme d'impulsion ne sont pas nécessairement identiquement modulées. Elles le seront seulement si leurs distributions de symboles sont également identiques. Deux enveloppes possédant des constellations différentes mais des fonctions de mise en forme d'impulsion identiques posséderont donc le même NAP si elles sont synchrones.

# 6.4 Procédure d'estimation

#### 6.4.1 Principe général

Jusqu'ici aucune information n'a été donnée pour expliquer comment exactement la diversité statistique des signaux reçus par le calcul de différentes matrices  $\{\mathbf{R}_{xx}(t,\tau)\}_{t,\tau}$  en (6.2) peut être exploitée pour l'estimation de  $\mathbf{B}$ . On emploiera pour ce faire une stratégie similaire à celle décrite à la section 3.3 concernant l'amélioration de l'algorithme EVESPA, mais plus généralisée. À la section 3.3, on s'intéressait à estimer une matrice  $\mathbf{Q}$  à partir de

$$oldsymbol{C}_1' = oldsymbol{Q} oldsymbol{\Lambda} oldsymbol{Q}^\dagger \ , \ oldsymbol{C}_2' = oldsymbol{Q} oldsymbol{D} oldsymbol{\Lambda} oldsymbol{Q}^\dagger \, ,$$

où  $C'_1$  et  $C'_2$  étaient connues. La solution idéale  $\hat{Q}$  était exprimée à partir de  $V_H^{-1}$ , l'inverse de la matrice des vecteurs propres d'une matrice H en (3.30). On pouvait vérifier que :

$$\boldsymbol{V}_{H}^{\dagger}\boldsymbol{C}_{1}^{\prime}\boldsymbol{V}_{H}=\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}^{-\dagger}\ ,\ \boldsymbol{V}_{H}^{\dagger}\boldsymbol{C}_{2}^{\prime}\boldsymbol{V}_{H}=\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}^{-\dagger}$$

où  $Z^{-1}\Lambda Z^{-\dagger}$  et  $Z^{-1}D\Lambda Z^{-\dagger}$  sont diagonales. La matrice  $V_H^{\dagger}$  permettait donc de solutionner le problème de diagonalisation conjointe des matrices  $C'_1$  et  $C'_2$ , et une solution idéale  $\hat{Q}$  était exprimée par l'inverse de cette dernière.

Cette philosophie de traitement est également au coeur de l'algorithme JDDTM. De façon plus formelle, le problème de diagonalisation conjointe (de l'anglais JD, "Joint Diagonalization") fait intervenir un ensemble de D matrices cibles

$$\{\boldsymbol{R}_d = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_d \boldsymbol{P}^\dagger\}_{d=1}^D \tag{6.9}$$

où les matrices  $\{\mathbf{R}_d\}_{d=1}^D$  sont connues et où  $\{\mathbf{\Lambda}_d\}_{d=1}^D$  sont diagonales. On s'intéresse alors à déterminer une matrice de diagonalisation V (aussi connue sous le nom de "joint diagonalizer" en anglais) telle que les matrices

$$\{\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}_{d}\boldsymbol{V}^{\dagger} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}_{d}\boldsymbol{P}^{\dagger}\boldsymbol{V}^{\dagger}\}_{d=1}^{D}$$

$$(6.10)$$

soient toutes diagonales. Si V existe, une estimation de P est alors obtenue par  $\hat{P} = V^{-1} = PZ$  où Z est une matrice de permutation et de mise à l'échelle des colonnes de nature identique à celle introduite à la section 3.2.1. De ce fait, on voit qu'il est nécessaire que P soit de rang complet en (6.9). La procédure d'estimation de Q à la section 3.3 était un cas spécifique du problème de diagonalisation conjointe pour D = 2.

Lorsque les matrices cibles sont obtenues en présence de bruit et/ou d'un nombre fini d'échantillons, ces dernières ne possèdent pas exactement la forme  $\mathbf{R}_d = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{P}^{\dagger} \forall d$  en (6.9) et on parle alors d'un problème de diagonalisation conjointe approximée (AJD, Approximate Joint Diagonalization"). Une matrice de diagonalisation optimale  $\mathbf{V}_{opt}$  est alors obtenue en minimisant certaines fonctions d'erreur comme par exemple la minimisation en amplitude des éléments extra-diagonaux de  $\mathbf{R}_d \forall d$ .

On a mentionné au chapitre 5 (section 5.4.2) que l'utilisation du modèle FIR-MIMO était une alternative à l'équation (5.8) pour tenir compte de l'aspect de synchronicité des enveloppes complexes reçues. Ce modèle a été considérablement étudié dans cette thèse et sera par d'ailleurs repris à la section E.1 de l'annexe E pour des idées de développements futurs. Son emploi pour le problème de diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles étudié dans cette section a également été envisagé, car considérant une fréquence d'échantillonnage  $1/T_s = U/T$  en (6.1), U équations similaires à (5.16) peuvent ainsi être formées en faisant intervenir à chaque fois les paramètres des signaux perçus indépendamment par chacune de ces U séquences. Toutefois, comme mentionné à la section 5.4.2 et par Paulraj en [58] (cf. Fig. 7), les matrices de canal ( $H(t_0)$  en (5.16)) obtenues pour chaque séquence seront généralement différentes de par la variation de phase d'échantillonnage (i.e.  $t_0$ ) entre chacune d'elles. Or, le modèle de l'équation (6.9) exige que seule la matrice diagonale  $\Lambda_d$  change (ou non) d'une matrice cible à l'autre, mais non P (qui correspondrait à une matrice de canal ici). On note par ailleurs que cette condition est satisfaite en (6.2) pour toute valeur<sup>3</sup> de t et  $\tau$ . Ainsi, le modèle FIR-MIMO ne se prête donc pas aussi bien au problème de diagonalisation conjointe de (6.9) que celui de l'équation (2.53). Pour cette raison, l'équation (2.53) sera considérée pour la suite des développements.

#### 6.4.2 Travaux antérieurs en lien au problème d'identification aveugle

La technique de diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles pour l'estimation des paramètres des sources (matrice B) est très populaire dans la littérature. Elle est le fondement de l'algorithme JADE ("Joint Approximate Diagonalisation of Eigen-matrices") en [85] où l'on exploite des statistiques d'ordre quatre pour la formation des matrices cibles. Elle est également exploitée par l'algorithme SOBI ("Second-Order Blind Identification") en [86] qui ne considère que des statistiques d'ordre deux. Les algorithmes JADE et SOBI sont les références classiques dans la littérature en matière d'algorithmes d'estimation aveugle exploitant la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles donné. Une revue de différents algorithmes et de l'importance du problème de diagonalisation conjointe pour l'estimation des paramètres des sources tel que considéré par JDDTM est présentée en [87].

Les problèmes d'estimation faisant intervenir la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles sont si fréquemment rencontrés dans la littérature que l'élaboration d'algorithmes

<sup>3.</sup> En négligeant cependant le bruit. Cet aspect sera traité en détails à la section 6.4.4.

destinés spécifiquement au problème de diagonalisation lui-même au niveau mathématique est devenu un sujet de recherche en soit [88, 89, 90, 91, 87, 92, 93, 94, 104]. De ce fait, on emploiera ici un algorithme de diagonalisation existant suite à la formation des matrices cibles pour l'estimation de  $\boldsymbol{B}$ .

L'algorithme JDDTM présenté dans ce chapitre est inspiré de SOBI et de ses variantes [86, 64, 95, 96, 97, 87], car on exploite uniquement les statistiques d'ordre deux des signaux reçus. Une différence fondamentale par contre réside au fait que l'on exploite ici la phase d'échantillonnage par le paramètre t en (6.2), alors que seul le délai  $\tau$  est considéré par ces algorithmes. De [86], équation (7), on considère des matrices cibles du type

$$\boldsymbol{R}(\tau) = E\{\boldsymbol{x}(t+\tau)\boldsymbol{x}^{\dagger}(t)\} \ , \ \tau \in \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_K\},\$$

en omettant ainsi la dépendance de  $\mathbf{R}(\tau)$  envers t. Une telle dépendance a toutefois déjà été considérée dans la littérature, notamment chez les algorithmes exploitant la propriété de non stationnarité des sources. Mentionnons à ce titre la famille d'algorithmes NSS-SD ("Nonstationary Source Separation Using Simultaneous Diagonalisation") [98, 99, 100] où, similairement à (6.2), on exploite à la fois t et  $\tau$  pour la formation des matrices cibles destinées à un problème de diagonalisation conjointe subséquent. Ici encore, une distinction importante entre ces algorithmes et l'approche proposée dans ce chapitre réside au fait que l'algorithme JDDTM ne procède pas à la diagonalisation conjointe immédiate des matrices d'autocorrélation issues de (6.2), mais plutôt à celle d'un ensemble de matrices cibles formées différentiellement à partir de ces dernières. Le processus exact de l'opération et la justification d'une telle approche seront expliqués à la section 6.4.4.

#### 6.4.3 Construction des matrices d'autocorrélation

Les matrices d'autocorrélation considérées par l'algorithme JDDTM sont directement issues de (6.2). Plus spécifiquement, considérant une période d'échantillonnage  $T_s = T/U$  en (6.1), on définira une matrice

$$\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \triangleq \mathbf{R}_{xx}(t = pT/U, \tau = qT/U)$$

$$\equiv \mathbf{B}\mathbf{R}_{uu}^{(p,q)}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{R}_{nn}^{(p,q)},$$

$$p \in \{0, 1, \dots, U-1\} , q \in \{0, 1, \dots, U\},$$
(6.11)

où l'instant t = 0 est considéré comme celui du premier échantillon. On limite ici  $\tau$  à une valeur maximale de T car comme expliqué précédemment, un élément  $[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{g,g}$  en (6.2) devient éventuellement nul avec l'augmentation de ce paramètre. L'imposition de  $\tau \in [0,T]$ sera considérée adéquate pour l'exploitation des statistiques des signaux, et permettra également de limiter la complexité du traitement. La Fig. 6.2 montre le principe de construction de matrices  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p,q\}$  en (6.11) considérant un facteur de suréchantillonnage U = 4. En géneral, la considération de U séquences d'échantillons et de U + 1 valeurs de délai permettra la formation de U(U + 1) matrice d'autocorrélation distinctes.



FIGURE 6.2 – Principe de construction de matrices d'autocorrélation (instants d'échantillonnage) considérant un facteur de suréchantillonnage U = 4, un délai maximum  $\tau_{max} = T$  et une durée d'observation de P périodes de symbole.

#### 6.4.4 Formation des matrices différentielles

On pourrait, à ce point, exploiter directement l'ensemble des matrices d'autocorrélation obtenues de (6.11) pour l'estimation de  $\boldsymbol{B}$  par diagonalisation conjointe. Toutefois, il serait d'abord nécessaire d'effectuer un traitement pour éliminer les matrices  $\boldsymbol{R}_{nn}^{(p,q)}$  en (6.11) afin de rendre le modèle compatible avec celui de (6.9). En [64, 86], et pour la plupart des variantes de SOBI, on effectue cette tâche en estimant d'abord la variance du bruit par une analyse des valeurs propres d'une ou plusieurs matrices  $\{\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,q)}\}_{p,q}$  en (6.11) (voir section 2.5.3), et en soustrayant ensuite la composante  $\sigma_n^2 \boldsymbol{I}$  de  $\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p,q\}$ . Cette approche fonctionne à condition que G < N (pour qu'au moins une valeur propre de  $\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p,q\}$  soit associée au bruit) et que  $\boldsymbol{R}_{nn}^{(p,q)} = \sigma_n^2 \boldsymbol{I}$ .

Pour pallier à de telles limitations, on considérera ici comme matrices cibles pour la diagonalisation conjointe non pas (6.11) directement, mais plutôt un ensemble de matrices différentielles formé à partir de matrices  $\{\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)}\}_{p,q}$  possédant un même délai d'autocorrélation (indice q). Rappelons d'abord que sous l'hypothèse d'un bruit stationnaire ou cyclostationnaire en t de période  $T_s/k$  où k est entier, on a :

$$\boldsymbol{R}_{nn}^{(p_1,q)} = \boldsymbol{R}_{nn}^{(p_2,q)} \,\forall \,\{p_1, p_2\} \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(6.12)

puisque  $n_k$  est identiquement distribué à tous les instants  $t_k$ . Ainsi, on peut définir une matrice d'autocorrélation différentielle de la forme :

$$\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)} \triangleq \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,q)} - \mathbf{R}_{xx}^{(p_2,q)} \qquad \mathbf{0}$$
  
=  $\mathbf{B} \left( \mathbf{R}_{uu}^{(p_1,q)} - \mathbf{R}_{uu}^{(p_2,q)} \right) \mathbf{B}^{\dagger} + \overbrace{\mathbf{R}_{nn}^{(p_1,q)} - \mathbf{R}_{nn}^{(p_2,q)}}^{\mathbf{0}}$   
=  $\mathbf{B} \Delta \mathbf{R}_{uu}^{(p_1,p_2,q)} \mathbf{B}^{\dagger}, \qquad (6.13)$ 

qui est maintenant compatible avec (6.9). On pourra donc employer un ensemble de matrices cibles selon (6.13) pour la diagonalisation conjointe. Les avantages d'une telle approche sont :

- 1) L'élimination du besoin d'estimation de la puissance du bruit (assumant que ce dernier est spatialement blanc<sup>4</sup> tel que  $\mathbf{R}_{nn}^{(p,q)} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$ ). Cette opération est nécessaire lorsque des matrices d'autocorrélation avec délais nuls (i.e.  $\mathbf{R}_{xx}(t,0) \forall t$ ) sont considérées dans l'ensemble des matrices cibles pour la diagonalisation conjointe (voir [64, 86]).
- 2) Une adaptabilité à pratiquement tout type de bruit indépendamment de son caractère de corrélation spatiotemporel.
- 3) La pleine exploitation du degré de liberté du réseau. Puisque la condition G < N assurant que la plus faible valeur propre de  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p,q\}$  soit associée au bruit n'est plus nécessaire (dû au point 1), jusqu'à G = N groupes de signaux peuvent ainsi être considérés.

Un examen attentif de (6.13) montre que  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)} = -\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_2,p_1,q)}$ . Ainsi, une seule de ces matrices est d'un intérêt potentiel pour un traitement subséquent. En général, parmi l'ensemble des U matrices d'autocorrélation obtenues aux phases d'échantillonnage  $p \in \{0, 1, \ldots, U-1\}$  en (6.11) pour un indice de délai q donné,  $U^2$  matrices d'autocorrélation différentielles  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$ peuvent être formées à partir de (6.13), mais seulement U(U-1)/2 matrices effectives seront retenues pour la diagonalisation conjointe. Ces dernières sont :

$$\left\{\Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}\right\}_{\substack{p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}\\ p_1 < p_2 \leq U-1}} p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}$$
(6.14)

pour une valeur de q donnée. Considérant les U + 1 valeurs possibles de q en (6.11), l'ensemble complet des matrices cibles différentielles (DTM, "Differential Target Matrices") devient :

$$\left\{\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}\right\}_{\substack{p_1 \in \{0,1,\dots,U-2\}\\p_1 < p_2 \leqslant U-1}}^{q \in \{0,1,\dots,U\}} \cdot (6.15)$$

Sachant que pour chaque valeur de délai, U(U-1)/2 matrices différentielles peuvent être formées aux différentes phases d'échantillonnage, le nombre total D d'éléments (matrices différentielles) en (6.15) considéré pour l'estimation de B par diagonalisation conjointe est :

$$D = \frac{1}{2}U(U-1)(U+1).$$
(6.16)

Le Tab. 6.1 montre l'augmentation rapide de D en fonction de U. On remarque qu'un facteur de suréchantillonnage  $U \ge 2$  est nécessaire pour l'application de l'algorithme.

#### 6.4.5 Diagonalisation conjointe

La littérature procure un large éventail de techniques de diagonalisation conjointe destinées au problème d'identification aveugle tel qu'étudié dans ce chapitre [88, 89, 90, 91, 87, 92, 93,

<sup>4.</sup> Un bruit blanc possède une variance infinie. Les références courantes à ce type de bruit dans la littérature spécifient simplement que ce dernier est non corrélé spatialement (e.g. entre deux éléments distincts du réseau) et/ou temporellement (en des instants différents du temps) mais possède une variance finie.

U	2	3	4	5	6
D	3	12	30	60	105

Tableau 6.1 – Évolution du nombre de DTM D considérées pour la diagonalisation conjointe en fonction du facteur de suréchantillonnage U.

94, 104]. La plupart de ces méthodes exige cependant que la matrice inconnue (ou matrice des paramètres)  $\boldsymbol{P}$  en (6.9) soit inversible, ce qui n'est pas le cas de  $\boldsymbol{B}$  en (6.13) puisque rang $\{\boldsymbol{B}\}$  = min(N, G). On peut toutefois ramener l'ensemble des matrices cibles à une forme compatible à (6.9) en se rappelant que les colonnes de  $\boldsymbol{B}$  appartiennent au sous-espace fondamental (cf. section 3.3). On a :

$$\Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_f^{(p_1, p_2, q)} & \boldsymbol{V}_k^{(p_1, p_2, q)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_f^{(p_1, p_2, q)} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\boldsymbol{V}_f^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger} \\ (\boldsymbol{V}_k^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger} \end{bmatrix}$$
$$= \boldsymbol{V}_f^{(p_1, p_2, q)} \boldsymbol{\Lambda}_f^{(p_1, p_2, q)} (\boldsymbol{V}_f^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger}, \qquad (6.17)$$

où  $V_f^{(p_1,p_2,q)} \in \mathbb{C}^{N \times G}$  représente un ensemble de vecteurs orthonormaux du sous-espace source <sup>5</sup>. De (6.13) et (6.17), on peut donc exprimer **B** en terme de  $V_f^{(p_1,p_2,q)}$  suivant :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}_{f}^{(p_{1}, p_{2}, q)} \boldsymbol{Q}^{(p_{1}, p_{2}, q)}, \qquad (6.18)$$

où  $\mathbf{Q}^{(p_1,p_2,q)} \in \mathbb{C}^{G \times G}$  est une matrice de coefficients du même type que celle introduite à la section 3.3. On remarque que les vecteurs de base  $\mathbf{V}_{f}^{(p_1,p_2,q)}$  du sous-espace source sont obtenus ici à partir d'une unique DTM  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  pour des valeurs de  $p_1$ ,  $p_2$  et q arbitraires. Il serait donc difficile de justifier en pratique laquelle des D matrices en (6.15) se prête davantage que les autres à un tel calcul. Idéalement, il serait souhaitable qu'un ensemble de vecteurs de base du sous-espace source soit obtenu non pas selon (6.17), mais par une utilisation conjointe des D matrices cibles en (6.15) (concaténées horizontalement pour former une seule matrice de dimensions  $N \times D$ ) peut être exprimée par :

$$\boldsymbol{USE}^{\dagger} = \text{SVD}\left[\left\{\Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(p_{1},p_{2},q)}\right\}_{\substack{p_{1}\in\{0,1,\dots,U^{-}\}\\p_{1}\in\{0,1,\dots,U^{-}2\}\\p_{1}< p_{2}\leqslant U-1}}^{q\in\{0,1,\dots,U^{-}2\}}\right]$$
$$= \left[\boldsymbol{U}_{f} \quad \boldsymbol{U}_{k}\right] \begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{f} \quad \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{f}^{\dagger}\\\boldsymbol{E}_{k}^{\dagger}\end{bmatrix}$$
$$= \boldsymbol{U}_{f}\boldsymbol{S}_{f}\boldsymbol{E}_{f}^{\dagger}, \qquad (6.19)$$

<sup>5.</sup> La dimension du sous-espace source estimé par une matrice  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  arbitraire en (6.15) sera généralement égale à G en des conditions asynchrones naturelles des signaux incidents, mais il est possible que certaines valeurs spécifiques de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  réduisent ce nombre. Cet aspect sera couvert avec plus de détails à la section 6.5.

où  $U_f \in \mathbb{C}^{N \times G}$  comme  $V_f^{(p_1, p_2, q)}$  en (6.17) puisque  $S_f$  est généralement de dimensions  $G \times G$ . Un ensemble plus représentatif des vecteurs de base du sous-espace source peut donc être obtenu en posant :

$$\boldsymbol{V}_{f} = \boldsymbol{U}_{f}. \tag{6.20}$$

Suite au calcule de  $V_{f}$ , on peut alors calculer B comme en (3.25) et (6.18) à partir des vecteurs de base du sous-espace source. On a :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}_{f}\boldsymbol{Q} \Rightarrow \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}, \qquad (6.21)$$

où Q est cependant inconnue. Un ensemble modifié des matrices cibles considérées pour le problème de diagonalisation conjointe peut donc prendre la forme :

$$\left\{ \boldsymbol{V}_{f}^{\dagger} \Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(d)} \boldsymbol{V}_{f} = \boldsymbol{Q} \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)} \boldsymbol{Q}^{\dagger} \right\}_{d=1}^{D}, \qquad (6.22)$$

car on rappelle que  $V_f^{\dagger}V_f = I$  (propriété de la SVD), et où on a la correspondance :

$$\left\{\Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(d)}, \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)}\right\}_{d=1}^{D} = \left\{\Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}, \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(p_1, p_2, q)}\right\}_{\substack{q \in \{0, 1, \dots, U\}\\ p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}\\ p_1 < p_2 \leq U-1}}^{q \in \{0, 1, \dots, U\}} .$$
(6.23)

Les D matrices cibles  $\{Q\Delta R_{uu}^{(d)}Q^{\dagger}\}_{d=1}^{D}$  en (6.22) sont de dimensions  $G \times G$ , et sont maintenant compatibles avec la forme générale de l'équation (6.9). Le problème d'estimation aveugle se réduit donc à l'estimation de  $Q \in \mathbb{C}^{G \times G}$  en (6.22), qui permet ensuite l'obtention de B selon (6.21). Plus spécifiquement, on aura :

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \hat{\boldsymbol{V}}_{f} \hat{\boldsymbol{Q}} , \qquad (6.24)$$

où  $\hat{V}_f$  est obtenue similairement à (6.20), et où  $\hat{Q}$  est obtenue par diagonalisation conjointe de (6.22) à partir d'un algorithme existant. On remarque qu'un traitement à partir de (6.22) est généralement moins complexe que la diagonalisation conjointe directe de (6.15) de par la dimension réduite des matrices cibles (i.e.  $G \times G$  plutôt que  $N \times N$ ), car  $G \leq N$ .

# 6.5 Conditions d'identifiabilité

L'identifiabilité de B à une permutation des colonnes et à un facteur de mise à l'échelle près est garantie à condition que l'ensemble des matrices cibles en (6.22) soit conjointement diagonalisable. Dans un tel cas, un estimé  $\hat{Q}$  de Q possède la forme :

$$\hat{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}\,,\tag{6.25}$$

où Z est une matrice de permutation et de mise à l'échelle des colonnes comme discuté à la section 6.4. Une telle matrice ne possède qu'un seul élément non nul par ligne et colonne. On dit alors que  $\hat{Q}$  est essentiellement égale à Q [86], et conséquemment on vérifie que  $\hat{B} = BZ$ 

en (6.24). On présentera dans cette section les conditions requises au niveau des propriétés des signaux reçus pour que l'identifiabilité de Q soit garantie.

Une première condition est que B soit de rang complet (i.e. rang $\{B\} = \min(G, N)$ ) afin que Q soit inversible en (6.21). Cette condition est essentielle pour l'application d'algorithmes de diagonalisation conjointe, comme expliqué à la section 6.4.5. L'hypothèse d'une matrice B de rang complet ne cause pas de problème particulier ici étant donné le caractère continu et quelque peu aléatoire des éléments  $B_{p,q} \forall \{p,q\}$  qui pourraient être observés en pratique. Une telle supposition est d'ailleurs couramment rencontrée dans la littérature.

Ayant rang{Q} = G (i.e. Q est inversible), on peut donc concentrer l'étude des conditions d'identifiabilité de Q à la structure particulière des matrices { $\Delta R_{uu}^{(d)}$ } $_{d=1}^{D}$  en (6.22). Il est premièrement nécessaire que ces dernières soient diagonales, comme requis par (6.9). Or cette condition est nécessairement respectée puisqu'une matrice  $R_{uu}(t,\tau)$  est toujours diagonale (voir (6.5)) et que  $\Delta R_{uu}^{(d)}$  s'exprime par une différence de deux de ces matrices. Les conditions complètes sur { $\Delta R_{uu}^{(d)}$ } $_{d=1}^{D}$  permettant d'identifier Q par diagonalisation conjointe s'avèrent cependant plus difficiles à déterminer. On trouve en [86, 87] certaines discussions à cet effet. Toutefois, c'est en [83] qu'on établit des conditions de détection plus robustes inspirées de critères définis en des travaux antérieurs, dont entre autres SOBI [86]. On montre que si une matrice  $M \in \mathbb{R}^{D \times G}$  est construite de manière telle que sa d-ième ligne correspond aux éléments diagonaux d'une d-ième matrice  $\Delta R_{uu}^{(d)}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} M_{d1} & M_{d2} & \dots & M_{dG} \end{bmatrix} = \operatorname{diag} \{ \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)} \}^\top ,$$
  
$$d \in \{1, 2, \dots, D\} ,$$
(6.26)

alors une matrice de diagonalisation de la forme  $\hat{Q}^{-1} = (QZ)^{-1}$  existe pour l'ensemble des matrices cibles en (6.22) si et seulement si

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1g} & \dots & M_{1G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{d1} & \dots & M_{dg} & \dots & M_{dG} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{D1} & \dots & M_{Dg} & \dots & M_{DG} \end{bmatrix} \leftarrow \operatorname{diag}\{\Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)}\}^{\top}$$

FIGURE 6.3 – Représentation générale de la matrice M pour le critère d'identifiabilité de Q.

$$\operatorname{rang}\left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{g_1} & \boldsymbol{m}_{g_2} \end{bmatrix} \right\} = 2 \ \forall \ 1 \leqslant g_1 \neq g_2 \leqslant G , \qquad (6.27)$$

où  $\boldsymbol{m}_g$  représente la g-ième colonne de  $\boldsymbol{M}$  (voir la Fig. 6.3 pour une représentation graphique de  $\boldsymbol{M}$ ). Le fondement de (6.27) est inspiré des conditions nécessaires à l'existence d'une solution unique pour un système d'équations donné, en raisonnant toutefois par rapport aux colonnes  $\{\boldsymbol{b}_g\}_{g=1}^G$  de  $\boldsymbol{B}$ . Pour  $D \ge G$ , (6.27) se réduit à rang $\{\boldsymbol{M}\} = G$ .

On a mentionné à la section 6.3.2 que des enveloppes complexes synchrones et identiquement modulées (i.e.  $p_g(t) = p(t)$ }  $\forall g$  en (5.2)) possèdent un même NAP et ne peuvent fournir la diversité statistique requise pour permettre l'estimation de **B** comme voulue dans ce chapitre. Il était possible de voir qu'en de telles conditions

diag{
$$\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$$
} = NAP $(t,\tau) \begin{bmatrix} \sigma_{\text{sym}_1}^2 & \sigma_{\text{sym}_2}^2 & \dots & \sigma_{\text{sym}_G}^2 \end{bmatrix}^\top$ ,

et par le fait même :

diag{
$$\mathbf{R}_{uu}^{(p,q)}$$
} = NAP( $t = pT/U, \tau = qT/U$ )  $\begin{bmatrix} \sigma_{\text{sym}_1}^2 & \sigma_{\text{sym}_2}^2 & \dots & \sigma_{\text{sym}_G}^2 \end{bmatrix}^\top$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}\{\Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(p_1,p_2,q)}\} &= \operatorname{diag}\{\boldsymbol{R}_{uu}^{(p_1,q)} - \boldsymbol{R}_{uu}^{(p_2,q)}\} \\ &= \left(\operatorname{NAP}(p_1T/U, qT/U) - \operatorname{NAP}(p_2T/U, qT/U)\right) \cdot \\ & \left[\sigma_{\operatorname{sym}_1}^2 \ \sigma_{\operatorname{sym}_2}^2 \ \dots \ \sigma_{\operatorname{sym}_G}^2\right]^\top. \end{aligned}$$

On remarque dans ce cas que les lignes de M (cf. (6.26)) sont toutes identiques à un facteur près, et même chose en conséquence pour ses colonnes  $\{m_g\}_{g=1}^G$ . On a donc rang $\{[m_{g_1} \ m_{g_2}]\} < 2$  en (6.27) et l'identification de Q devient impossible.

L'équation (6.27) représente un critère simple et général que doit respecter l'ensemble des matrices d'autocorrélation  $\{\Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)}\}_{d=1}^{D}$  pour garantir l'identifiabilité de  $\boldsymbol{Q}$ . Par ailleurs, aucun contrôle ne peut a priori être exercé sur les éléments de ces dernières puisqu'ils dépendent implicitement des délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{q=1}^G$  en (5.2), qui sont eux-mêmes inconnus. Cependant, étant donnée la nature continue et vraisemblablement aléatoire de  $\tau_g \forall g$ , l'occurrence d'un événement naturel faisant en sorte que  $\tau_g = \tau \forall g$  pour des enveloppes reçues identiquement modulées (ou en général une situation faisant en sorte que  $\text{NAP}_q(t,\tau) = \text{NAP}(t,\tau) \forall g$ considérant des fonctions réalistes  $\{p_g(t)\}_{q=1}^G$  retrouvées en pratique) est pratiquement nulle, rendant ainsi possible l'estimation de Q par diagonalisation conjointe de (6.22). Par contre, il pourrait être observé en des circonstances particulières que  $NAP_a(t, \tau) \approx NAP(t, \tau) \forall g$ , ce qui pourrait alors diminuer la qualité d'estimation de Q considérant des matrices cibles obtenues avec un nombre fini d'échantillons. Mentionnons cependant que les performances de tout algorithme d'estimation destiné au traitement de signaux asynchrones sont également affectées (à un degré défini) par la nature aléatoire de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  en (5.2). Ceci est même le cas pour les algorithmes classiques tels MUSIC ou ESPRIT mentionnés au chapitre 2. On a qu'à imaginer par exemple des enveloppes complexes reçues possédant une modulation RZ ("Return-to-Zero") où un symbole nul est inséré entre deux symboles de données consécutifs. Considérant un échantillonnage à la période des symboles<sup>6</sup>, si le délai asynchrone d'une enveloppe donnée est tel que les instants des symboles nuls coïncident avec les instants d'échantillonnage, l'enveloppe en question ne pourra être détectée et l'estimation des paramètres y étant associés ne sera alors pas possible.

# 6.6 Simulations

Lors de simulations, il est coutume de mesurer les performances d'algorithmes d'estimation aveugle à partir d'une mesure d'erreur entre la matrice des paramètres exacte  $\boldsymbol{B}$  (ici la matrice de canal) et son estimé  $\hat{\boldsymbol{B}}$  sans égard au contexte de propagation physique ou à la géométrie du réseau, car  $\boldsymbol{B}$  est souvent générée de façon aléatoire. L'indice de performance le plus populaire dans la littérature est le GRL ("global rejection level") introduit par Belouchrani *et al.* en [86]. Un critère similaire a également été considéré en [83] inspiré de [89] :

$$GRL = \left[\sum_{p=1}^{G} \left(\sum_{q=1}^{G} \frac{H_{pq}}{\max_k(H_{pk})} - 1\right) + \sum_{q=1}^{G} \left(\sum_{p=1}^{G} \frac{H_{pq}}{\max_k(H_{kq})} - 1\right)\right] / G^2, \quad (6.28)$$
$$H_{pq} = |[\hat{\boldsymbol{B}}^{\#}\boldsymbol{B}]_{pq}|^2 , \quad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{N \times G} , \quad N \ge G.$$

On montre par cette définition que si  $\hat{B}$  est essentiellement égale à B (i.e. si  $\hat{B} = BZ$  où Z est une matrice de permutation et de mise à l'échelle des colonnes), alors GRL = 0. Il devient donc possible d'effectuer des simulations en traçant l'évolution du GRL en fonction de paramètres indépendants (e.g. le SNR). Une faible valeur du GRL est alors indicateur d'une bonne performance d'estimation. Un tel indice de performance s'avère très pratique puisqu'il peut être appliqué à des matrices de canal de dimensions arbitraires.

Plusieurs simulations de l'algorithme JDDTM sont présentées en [83]. Ces dernières sont réalisées dans un contexte numérique général sans référence particulière à une application donnée (e.g. estimation des DOAs, formation de voies, etc.), et le GRL est employé comme critère de performance. On valide notamment l'efficacité de l'algorithme JDDTM considérant :

- différentes techniques de diagonalisation conjointe,
- l'effet des constellations des enveloppes complexes reçues,
- différents types de fonctions de mise en forme d'impulsion  $\{p_g(t)\}_{g=1}^G$ ,
- un nombre variable D de matrices cibles en (6.22) (variation de U),
- l'effet de distributions rapprochées (i.e.  $\text{NAP}_g(t, \tau) \approx \text{NAP}(t, \tau) \forall g$ ),
- un bruit à caractère spatiotemporel complexe.

<sup>6.</sup> Les algorithmes d'estimation de DOA classiques sont généralement appliqués considérant que  $T_s = T$  [23]. Ceci implique que les échantillons  $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^K$  soient identiquement distribués et permet l'estimation d'espérances mathématiques (e.g. le calcul de  $\boldsymbol{R}_{xx}$ ) par moyennages temporels.

Pour l'ensemble des simulations présentées dans cette section, on considère un bruit gaussien de type  $\sigma_n^2 I$  et un SNR défini par :

$$\mathrm{SNR} = rac{\sigma_{\mathrm{sym}}^2}{\sigma_n^2}$$

où  $\sigma_{\text{sym}_g}^2 \forall g = \sigma_{\text{sym}}^2$ . On assume également que les fonctions de mise en forme d'impulsion des enveloppes complexes reçues en (5.2) sont de type RC, soit [65] :

$$p_g(t) = \operatorname{sinc}(t/T) \frac{\cos(\pi\beta_g t/T)}{1 - (2\beta_g t/T)^2} \,\forall g \ , \ \beta_g \in [0, 1] \,.$$
(6.29)

#### 6.6.1 Estimation de DOAs de signaux groupés

Dans cette section, pour apporter une certaine diversité aux simulations effectuées en [83], on présente une application plus spécifique de l'algorithme JDDTM dans un contexte semblable à celui de la section 3.2.3 pour l'estimation de DOAs de signaux groupés. Le Tab. 6.2 présente les valeurs numériques des paramètres considérés pour cet exemple. Les performances de l'algorithme seront évaluées ici non pas à partir du GRL, mais directement à partir des erreurs d'estimation calculées par rapport aux valeurs exactes des paramètres des sources. On assume un modèle des signaux reçus de la forme :

$$oldsymbol{x}_k = oldsymbol{B}oldsymbol{u}_k + oldsymbol{n}_k = oldsymbol{A}oldsymbol{\Xi}oldsymbol{u}_k + oldsymbol{n}_k$$
 ,

où A correspond à la matrice directionnelle d'un ULA (cf. (2.29)). En ordre, l'estimation des DOAs à partir de l'algorithme JDDTM s'effectue par les étapes suivantes :

- 1) Calcul des U(U + 1) matrices d'autocorrélation selon (6.11) considérant un temps d'observation de PT secondes (P représente le nombre de périodes de symboles) et un facteur de suréchantillonnage U.
- 2) Formation des  $D = \frac{1}{2}U(U-1)(U+1)$  matrices cibles différentielles selon (6.13) et (6.15).
- 3) Adaptation des matrices cibles en (6.22) à partir de (6.15) et (6.20).
- 4) Estimation de Q par diagonalisation conjointe de (6.22) à partir d'un algorithme existant (on choisira U-WEDGE [88] ici, voir section 5.1 en [83] pour explications).
- 5) Estimation de  $\boldsymbol{B}$  selon (6.24).
- 6) Lissage spatial de la matrice de covariance estimée  $\hat{R}_{xxg} = \hat{b}_g \hat{b}_g^{\dagger}$  (voir (3.18)) de chaque groupe  $(g \in \{1, 2, ..., G\})$  et estimation des DOAs par un algorithme standard.

Les Fig. 6.4 et 6.5 présentent S = 10 pseudo-spectres obtenus par MUSIC considérant des SNRs de 10 dB et 0 dB respectivement. On impose également  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0.2T$ ,  $\beta_1 = 0.1$  et  $\beta_2 = 0.7$  en (5.8) et (6.29). On remarque que la variance des estimés demeure relativement faible même dans le cas de la Fig. 6.5 en partie à cause du processus d'annulation du bruit en (6.13). Ces résultats sont obtenus considérant un temps d'observation de P = 1000 périodes de symbole et un facteur de suréchantillonnage U = 3. Selon la convention de la Fig. 6.2, on

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	
N	6	L	5	
$\sigma_{\text{sym}_a}^2 \forall g = \sigma_{\text{sym}}^2$	1	$eta_0 d$	$\pi$	
$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 & \boldsymbol{\theta}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 25^{\circ} & 20^{\circ} \\ 65^{\circ} & 70^{\circ} \\ 100^{\circ} & 110^{\circ} \\ 125^{\circ} & 140^{\circ} \end{bmatrix}$	$egin{bmatrix} m{lpha}_1 & m{lpha}_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0.6 + j0.5 & 0.5 + j0.9 \\ 0.5 - j0.8 & -0.9 - j0.6 \\ -0.9 + j0.8 & 0.7 - j0.4 \end{bmatrix}$	

Tableau 6.2 – Paramètres de simulation généraux pour l'estimation de DOAs à partir de l'algorithme JDDTM.

déduit que les calculs d'estimation sont réalisés à partir d'un total de K = UP + 1 = 3001échantillons. Il est intéressant par ailleurs de remarquer que l'estimation des  $M_1 = M_2 = 4$ sources des deux groupes à partir de N = 6 éléments ne peut être possible par l'application directe d'une méthode classique d'ordre deux telle MUSIC. Pour ce faire, en procédant au lissage spatial de  $\mathbf{R}_{xx}$ , au moins N = 10 éléments seraient nécessaires (voir (2.125) ou (2.127)). L'estimation des DOAs des sources dans cet exemple pourrait aussi être réalisée à partir d'un algorithme d'ordre supérieur tel EVESPA, en procédant aux étapes décrites à la section 3.2.3. Des pseudo-spectres semblables à ceux des Fig. 6.4 et 6.5 pourraient alors être obtenus. Toutefois, l'algorithme JDDTM possède l'avantage de n'exploiter que les statistiques d'ordre deux des signaux reçus, ce qui contribue à diminuer la variance des estimés par rapport à un traitement reposant sur l'emploi de cumulants d'ordre quatre.



FIGURE 6.4 – Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MUSIC. Les courbes sont obtenues considérant P = 1000 périodes de symbole, un facteur de suréchantillonnage U = 3 et un SNR de 10 dB.

Bien que le tracé de pseudo-spectres permet d'apprécier rapidement la variance des estimés de DOAs dans un contexte donné, une telle approche n'est généralement pas optimale lorsqu'on


FIGURE 6.5 – Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de DOAs de signaux groupés avec MUSIC. Les courbes sont obtenues considérant P = 1000 périodes de symbole, un facteur de suréchantillonnage U = 3 et un SNR de 0 dB.

s'intéresse uniquement aux valeurs d'estimés pour fins d'analyses statistiques, car on doit alors implémenter un algorithme de recherche de maximums afin d'obtenir les valeurs d'abscisses correspondants. La littérature procure un large éventail d'algorithmes d'estimation permettant de pallier à cette difficulté en générant directement les valeurs d'estimés en sortie. Ceci est par exemple le cas de ESPRIT [38] et de Root-MUSIC [101] qui sont deux algorithmes très populaires en ce domaine. Dans ce dernier cas, on s'intéresse directement aux racines du dénominateur de (2.89) en terme de  $\theta$ , qui sont alors considérés comme les estimés des DOAs des signaux. La procédure ne fonctionne cependant qu'avec un ULA.

Les Tab. 6.3 et 6.4 présentent les résultats d'études statistiques sur l'estimation des DOAs réalisées à partir de JDDTM et Root-MUSIC. Pour faciliter les calculs, on assume que G et  $M_g \forall g$  sont connus. Le nombre de groupes G pourrait toutefois être estimé par une analyse des valeurs singulières de  $S_f$  en (6.19) avec des critères tels AIC ou MDL, et même chose au niveau de  $M_g \forall g$  à partir d'une analyse des valeurs propres de  $\tilde{R}^b_{xx_g} \forall g$  (lissage spatial bidirectionnel de  $R_{xx_g} \forall g$ ).

Le Tab. 6.3 montre les résultats d'estimation pour des SNRs de 10 dB et 0 dB en considérant des valeurs fixes de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  à chaque essai. Des estimés d'une bonne qualité sont obtenus pour les deux groupes et les deux niveaux de bruit considérés. Les écarts types sont généralement inférieurs à 1° avec un SNR de 10 dB, et inférieurs à 5° avec un SNR aussi faible que 0 dB par groupe. Le Tab. 6.4 montre pour sa part les résultats d'une étude semblable, mais où  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  prennent chacun une valeur aléatoire dans ]0,1[ à chaque essai. On modélise ainsi le caractère aléatoire des délais asynchrones  $\tau_1$  et  $\tau_2$  (assumés toutefois constants pendant les P périodes de symbole pour chaque essai) en tenant à la fois compte de l'ensemble des valeurs possibles de  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . On peut donc observer une diversité statistique favorable à l'estimation des paramètres pour certains essais, mais également une situation contraire lorsque les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont telles que NAP<sub>g</sub>(t,  $\tau$ )  $\approx$  NAP(t,  $\tau$ )  $\forall g$ . Les résultats du Tab. 6.4 montrent que les écarts types des estimés sont généralement plus élevés que ceux du Tab. 6.3, ce qui se justifie par l'explication précédente, et aussi par le fait que les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  du Tab. 6.3 ont été choisies de façon à assurer une diversité statistique minimale assurant des performances d'estimation convenables (i.e. détection de toutes les sources en présence avec discernement clair de leurs DOAs respectives à partir des pseudo-spectres obtenus de MUSIC après lissage spatial).

		SNR = 10  dB		SNR = 0 dB	
Paramètre	Valeur exacte	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type
$oldsymbol{ heta}_1$	$25^{\circ}$	$24.97^{\circ}$	$0.33^{\circ}$	$24.98^{\circ}$	$1.00^{\circ}$
	$65^{\circ}$	$64.99^{\circ}$	$0.24^{\circ}$	$65.00^{\circ}$	$0.64^{\circ}$
	$100^{\circ}$	$99.99^{\circ}$	$0.31^{\circ}$	$100.01^{\circ}$	$0.68^{\circ}$
	$125^{\circ}$	$125.00^{\circ}$	$0.29^{\circ}$	$125.02^{\circ}$	$0.61^{\circ}$
	$20^{\circ}$	$19.94^{\circ}$	$1.04^{\circ}$	$19.91^{\circ}$	$5.06^{\circ}$
$oldsymbol{ heta}_2$	$70^{\circ}$	$70.00^{\circ}$	$0.17^{\circ}$	$70.25^{\circ}$	$3.10^{\circ}$
	$110^{\circ}$	$110.01^{\circ}$	$0.16^{\circ}$	$110.23^{\circ}$	$2.89^{\circ}$
	$140^{\circ}$	$140.04^{\circ}$	$0.66^{\circ}$	$140.36^{\circ}$	$3.25^{\circ}$

Tableau 6.3 – Résultats d'études statistiques sur l'estimation des DOAs des signaux par l'algorithme JDDTM (et Root-MUSIC). Les données sont obtenues considérant les paramètres du Tab. 6.2 avec  $\tau_1 = 0.9T$ ,  $\tau_2 = 0.6T$ ,  $\beta_1 = 0.4$ ,  $\beta_2 = 0.8$  et P = 5000. Les moyennes statistiques sont calculées à partir de S = 1000 essais.

On remarque également qu'en général les estimés des DOAs du groupe 2 sont de moins bonne qualité que ceux du groupe 1 (écarts types plus élevés). Ceci s'explique en partie par les différences des vecteurs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  au Tab. 6.2 (de même que  $\theta_1$  et  $\theta_2$ ), mais également par des erreurs d'association possibles au niveau des colonnes de  $\hat{B}$  à chaque essai. En effet, lorsque la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles  $\{R_d = P\Lambda_d P^{\dagger}\}_{d=1}^D$  est possible (voir (6.9)), l'estimation de P est de la forme  $\hat{P} = V^{-1} = PZ$  où Z est une matrice de permutation et de mise à l'échelle des colonnes. Ainsi, en effectuant S essais d'estimation de B par l'algorithme JDDTM dans un contexte statistique donné, on obtient un ensemble  $\{\hat{B}_{s}(K) = B\hat{Z}_{s}(K)\}_{s=1}^{S}$  de matrices estimées <sup>7</sup> où  $\hat{Z}_{s}(K)$  ne possède pas une forme idéale (i.e. possède plus d'un seul élément non nul par ligne et colonne). Le problème d'association des

<sup>7.</sup> La structure exacte d'une matrice estimée  $\hat{B}_{s}(K)$  à un essai s donné n'est pas nécessairement de la forme  $\hat{B}_{s}(K)$ , mais cette représentation convient tout de même pour les explications relatives au problème d'association de colonnes dont il est question ici.

colonnes provient du fait que la g-ième colonne de  $\hat{B}_{s}(K)$  n'est pas toujours associée à un même groupe de signaux d'un essai à l'autre. Ainsi, lors de la compilation des statistiques en effectuant des simulation de Monte-Carlo, on ne peut toujours associer la g-ième colonne de  $\hat{B}_{s}(K)$  à un même groupe car on risque d'incorporer les paramètres d'un ou plusieurs groupes différents dans les calculs. Ceci introduit alors un biais qui se traduit par des diminutions ou inconsistances insoupçonnées au niveau des performances d'estimation. Ce phénomène est particulièrement notable pour de faibles valeurs de P ou de SNRs.

		SNR = 10  dB		SNR = 0 dB	
Paramètre	Valeur exacte	Moyenne	Écart type	Moyenne	Écart type
$oldsymbol{ heta}_1$	$25^{\circ}$	$24.95^{\circ}$	$0.59^{\circ}$	$25.01^{\circ}$	$1.58^{\circ}$
	$65^{\circ}$	$64.97^{\circ}$	$0.54^{\circ}$	$64.95^{\circ}$	$1.13^{\circ}$
	$100^{\circ}$	$100.02^{\circ}$	$0.64^{\circ}$	$100.04^{\circ}$	$1.27^{\circ}$
	$125^{\circ}$	$125.03^{\circ}$	$0.63^{\circ}$	$125.10^{\circ}$	$1.19^{\circ}$
	$20^{\circ}$	$20.85^{\circ}$	$6.25^{\circ}$	$25.93^{\circ}$	$15.29^{\circ}$
$oldsymbol{ heta}_2$	$70^{\circ}$	$70.57^{\circ}$	$4.53^{\circ}$	$73.22^{\circ}$	$13.92^{\circ}$
	$110^{\circ}$	$110.48^{\circ}$	$4.61^{\circ}$	$113.34^{\circ}$	$14.70^{\circ}$
	$140^{\circ}$	$140.17^{\circ}$	$4.50^{\circ}$	$141.02^{\circ}$	$9.67^{\circ}$

Tableau 6.4 – Résultats d'études statistiques sur l'estimation des DOAs des signaux par l'algorithme JDDTM (et Root-MUSIC). Les données sont obtenues considérant les paramètres du Tab. 6.2 avec P = 5000. Les moyennes statistiques sont calculées à partir de S = 1000 essais où à chaque fois  $\{\tau_1/T, \tau_2/T, \beta_1, \beta_2\} \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .

Pour pallier à ce problème, on doit idéalement d'abord obtenir  $\{\hat{B}_{s}(K)\}_{s=1}^{S}$ , et ensuite appliquer un algorithme de classement au niveau des colonnes de ces matrices de façon à les regrouper par degré de similarité selon un critère donné. Dans toutes les simulations Monte-Carlo présentées dans cette section, on a plutôt considéré une classification par similarité à  $b_1$ , la première colonne de B. Ainsi, à un essai s donné, la colonne de  $\hat{B}_s(K)$  étant la plus *rapprochée* de  $b_1$  était considérée comme l'estimé de ce vecteur. Cela permet donc également d'expliquer pourquoi les estimés des DOAs du groupe 2 au Tab. 6.4 sont en général de moins bonne qualité que ceux du groupe 1. En pratique cependant, B n'est pas disponible pour effectuer un tel classement. Néanmoins, il a été considéré adéquat d'adopter une telle stratégie ici pour le bien de la présentation, car les performances d'estimation auraient aussi dépendu de celles de l'algorithme de classement, ce qui n'aurait pas permis de bien mettre en évidence les performances propres à l'algorithme JDDTM seul. Mentionnons aussi qu'un tel problème ne se pose pas avec un indice de performance comme le GRL en (6.28), car ce dernier est indifférent à la mise à l'échelle et à la permutation des colonnes de la matrice estimée. C'est entre autres pour cette raison que ce dernier a été employé en [83].

#### 6.6.2 Étude de performance générale

On présente maintenant une étude de performance plus générale de l'algorithme JDDTM considérant l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  seule sans traitement subséquent. Les paramètres numériques considérés pour cet exemple sont présentés au Tab. 6.5. On emploiera le GRL en (6.28) comme indice de performance puisque ce dernier n'occasionne pas le problème de classement des colonnes lors de simulations Monte-Carlo comme expliqué précédemment. Le GRL est un indice global qui ne permet cependant pas d'apprécier la qualité d'estimation au niveau des colonnes individuelles de  $\boldsymbol{B}$ . Afin d'apporter une meilleure compréhension de cet indice et d'aider à son interprétation, considérons une matrice arbitraire  $\boldsymbol{B}$  de la forme :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
N	4	S	2000
U	3	P	2000
$B_{p,q} \forall \{p,q\}$ (à chaque essai)	$\mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$		

Tableau 6.5 – Paramètres de simulation pour l'étude de performance générale de l'algorithme JDDTM.

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0.63 + j0.91 & 0.26 - j0.16 & 0.92 + j0.31 \\ 0.81 - j0.03 & -0.80 + j0.83 & 0.93 - j0.93 \\ -0.75 + j0.60 & -0.44 + j0.58 & -0.68 + j0.70 \\ 0.83 - j0.72 & 0.09 + j0.92 & 0.94 + j0.87 \end{bmatrix}.$$
(6.30)

Il s'agit ici d'un cas où N = 4 et G = 3. Considérons maintenant une estimation  $\hat{B}$  de B et son GRL correspondant tels que :

$$\hat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 0.67 + j0.95 & 0.29 - j0.17 & 0.88 + j0.25 \\ 0.86 - j0.07 & -0.87 + j0.81 & 0.84 - j0.93 \\ -0.70 + j0.69 & -0.40 + j0.63 & -0.76 + j0.69 \\ 0.81 - j0.81 & 0 + j0.98 & 1. + j0.90 \end{bmatrix}, \quad (6.31)$$

$$\boldsymbol{B} \otimes \hat{\boldsymbol{B}} \approx \begin{bmatrix} 0.95 + j0.01 & 0.91 - j0.02 & 1.06 + j0.05 \\ 0.94 + j0.04 & 0.97 - j0.05 & 1.05 + j0.05 \\ 0.97 + j0.10 & 0.97 + j0.08 & 0.95 - j0.06 \\ 0.96 + j0.07 & 0.94 - j0.09 & 0.95 + j0.01 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

$$\Rightarrow \text{GRL} \approx 0.0024 \ (-26.2 \text{ dB}).$$

L'opérateur ' $\oslash$ ' représente la division élément par élément, et le GRL est calculé selon (6.28). Aucune permutation de colonne n'a été effectuée en générant la matrice estimée, ce qui implique que les éléments d'une même colonne de  $\boldsymbol{B} \oslash \hat{\boldsymbol{B}}$  devraient idéalement être identiques (pour une estimation parfaite où  $\hat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Z}$ ). On voit en (6.32) que ces derniers présentent une similitude considérable, impliquant de ce fait un GRL d'environ -26.2 dB. On sait en général que l'angle  $\nu$  formé par deux vecteurs **a** et **b** dans l'espace vérifie :

$$\cos(\nu) = rac{oldsymbol{a} \cdot oldsymbol{b}}{ab} = rac{oldsymbol{a}^{ op} oldsymbol{b}}{ab}$$

On peut donc définir une mesure semblable considérant les vecteurs  $\boldsymbol{b}_g$  et  $\hat{\boldsymbol{b}}_g$  telle que :

$$|\cos(\nu_g)| = \left| \frac{\boldsymbol{b}_g^{\dagger} \hat{\boldsymbol{b}}_g}{\boldsymbol{b}_g \hat{\boldsymbol{b}}_g} \right| \equiv e_g \,. \tag{6.33}$$

Idéalement,  $|\cos(\nu_g)| = 1 \forall g$ , signifiant que les vecteurs  $\boldsymbol{b}_g$  et  $\hat{\boldsymbol{b}}_g$  sont colinéaires. Considérant la matrice estimée  $\hat{\boldsymbol{B}}$  en (6.31), on vérifie ici que  $e_1 \approx 0.9993$ ,  $e_2 \approx 0.9979$  et que  $e_3 \approx 0.9978$ . Considérons à présent une autre estimation de  $\boldsymbol{B}$  en (6.30) et son GRL correspondant :

$$\begin{split} \hat{\boldsymbol{B}} &= \begin{bmatrix} 0.99 + 1.30 & 0.57 - 0.28 & 0.47 - 0.32 \\ 1.33 - 0.40 & -1.46 + 0.59 & 0.02 - 0.95 \\ -0.26 + 1.50 & -0.03 + 1.11 & -1.49 + 0.59 \\ 0.61 - 1.65 & -0.85 + 1.51 & 1.59 + 1.16 \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{B} & \otimes \hat{\boldsymbol{B}} \approx \begin{bmatrix} 0.68 + 0.03 & 0.48 - 0.05 & 1.03 + 1.36 \\ 0.56 + 0.15 & 0.67 - 0.30 & 1.00 + 0.96 \\ 0.47 + 0.42 & 0.53 + 0.38 & 0.56 - 0.25 \\ 0.55 + 0.30 & 0.44 - 0.31 & 0.67 + 0.08 \end{bmatrix}, \\ & \Rightarrow \text{GRL} \approx 0.1439 \ (-8.4 \text{ dB}). \end{split}$$

On a cette fois affaire à une estimation significativement moins bonne qu'en (6.31), avec un GRL d'environ -8.4 dB. Les éléments d'une même colonne de  $\boldsymbol{B} \oslash \hat{\boldsymbol{B}}$  présentent certaines similarités, mais de façon moins marquée qu'en (6.32). On vérifie cependant que  $e_1 \approx 0.9657$ ,  $e_2 \approx 0.8962$  et que  $e_3 \approx 0.8267$ , indiquant un degré de colinéarité substantiel entre les vecteurs estimés et ceux de (6.30).

Ces deux exemples d'estimation de B ont été donnés afin d'apporter une meilleure appréhension et de mieux illustrer la signification de performances d'estimation associées à des valeurs de GRL données. Les Fig. 6.6, 6.7 et 6.8 présentent maintenant des résultats de simulation considérant les paramètres du Tab. 6.5 pour des valeurs respectives de G = 2, G = 3 et G = 4. Chaque point est obtenu par compilation de résultats obtenus sur S = 2000 essais, où pour chacun d'eux l'algorithme JDDTM est appliqué sur un total de P = 2000 périodes de symbole. Les enveloppes complexes sont générées selon (5.2) en considérant les fonctions de mise en forme d'impulsion de l'équation (6.29). Des expériences sont réalisées considérant différentes valeurs de délais asynchrones  $\mathbf{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_G\}$  et de facteurs "roll-off"  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_G\}$ .

Comme on pouvait s'y attendre, on constate que les valeurs moyennes du GRL diminuent dans tous les cas avec l'augmentation du SNR sur la plage de valeurs considérées. Des barres d'erreur



FIGURE 6.6 – Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général. On considère le cas où G = 2 avec trois ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.1, 0.4\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.8\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.6, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.5, 0.4\}$  et Ens. 3 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.1, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.5\}$ .

donnent également un aperçu de la variance des estimés obtenus. Ces dernières possèdent une longueur de deux fois l'écart type mesuré en chaque point, excepté aux points avoisinants 0 où une troncation inférieure a été réalisée lorsque nécessaire (car GRL  $\geq 0$ ). On remarque que les valeurs de GRL obtenues pour G = 3 et G = 4 sont généralement plus élevées que celles obtenues pour G = 2, et que celles obtenues pour G = 4 sont aussi plus élevées (en général) que celles calculées avec G = 3. Il s'agit d'un phénomène normal et tout à fait prévisible ici, car dû au nombre fini P de périodes de symbole, une estimation  $\hat{\mathbf{R}}_{uu}(t,\tau,K)$  de  $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$ en (6.2) n'est pas parfaitement diagonale, et les termes extra-diagonaux ainsi produits créent un "bruit" additionnel pour le traitement. Ainsi, plus le nombre de groupes G est élevé, plus le "bruit" dû à la filtration statistique imparfaite des signaux vu par un groupe d'intérêt gdevient important, et plus les performances d'estimation deviennent ainsi réduites. Un temps d'observation PT plus long devient alors nécessaire pour préserver de mêmes performances d'estimation lorsque G augmente. Une valeur constante de P a été considérée pour les trois cas à l'étude ( $G \in \{2,3,4\}$ ) afin de mieux illustrer ce phénomène.

Des ensembles de paramètres  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\beta}$  distincts ont été considérés aux Fig. 6.6, 6.7 et 6.8 afin de mettre en évidence la variabilité des résultats d'estimation en fonction des distributions statistiques des enveloppes complexes reçues. Les ensembles no. 3 des Fig. 6.7 et 6.8 ont été choisis de façon à illustrer les performances de l'algorithme en contexte de distributions statistiques rapprochées (i.e.  $\operatorname{NAP}_g(t, \tau) \approx \operatorname{NAP}(t, \tau) \forall g$ ). On remarque facilement dans ces deux cas que



FIGURE 6.7 – Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général. On considère le cas où G = 3 avec trois ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0, 0.4, 0.6\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.5, 0.2, 0.9\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.4, 0.5, 0.9\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.2, 0.7, 0.7\}$  et Ens. 3 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.2, 0.1, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.8, 0.8, 0.7\}$ .

les performances d'estimation sont significativement moins bonnes que celles obtenues avec les ensembles 1 et 2. Les valeurs moyennes de GRL obtenues sont plus élevées, de même que leur variance correspondante. Il convient cependant de rappeler que même en contextes de distributions statistiques rapprochées, un GRL de moyenne et de variance arbitrairement faibles peut être atteint moyennant un temps d'observation PT suffisamment élevé. Des simulations sont réalisées en [83] à la section 5.6 à cet effet. Mentionnons également que l'estimation d'une matrice  $\boldsymbol{B}$  pour N = G comme considéré à la Fig. 6.8 est impossible avec des algorithmes d'estimation aveugle du second ordre tels SOBI [86] ou les méthodes proposées par Rong *et al.* en [64], car au moins une valeur propre des matrices d'autoccorélation (qui sont directement les matrices cibles pour ces algorithmes) doit être associée à la variance du bruit (de type  $\sigma_n^2 \boldsymbol{I}$ ) afin de pouvoir soustraire sa contribution aux matrices cibles avant l'opération de diagonalisation conjointe. L'élimination du bruit est effectuée naturellement par l'algorithme JDDTM en (6.13), et ce indépendamment du caractère de corrélation spatiotemporel de  $\boldsymbol{n}(t)$ , en autant que  $\boldsymbol{n}(t_k) = \boldsymbol{n}_k$  soit identiquement distribué à tous les instants  $\{t_k\}_{k=1}^{K=UP+1}$ .

#### 6.6.3 Comparaison à EVESPA

On présente maintenant une étude de comparaison entre l'algorithme EVESPA original (cf. section 3.2.1) et JDDTM afin de mieux mettre en évidence les avantages et inconvénients de



FIGURE 6.8 – Application de l'algorithme JDDTM pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général. On considère le cas où G = 4 avec trois ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.9, 0.4, 0.1, 0.4\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.8, 0.7, 0.2\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0, 0.2, 0.8, 0.5\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.7, 0.1, 0.8, 0.6\}$  et Ens. 3 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.2, 0.1, 0.2, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.8, 0.8, 0.7, 0.6\}$ .

chaque méthode. Les Fig. 6.9 et 6.10 présentent des résultats de simulation du même type que ceux de la section 6.6.2 considérant cette fois les paramètres du Tab. 6.6. Chaque point a donc été obtenu par compilation de résultats obtenus sur  $\mathcal{S} = 2000$  essais, où pour chacun d'eux les algorithmes JDDTM et EVESPA ont été appliqués sur un total de P = 2000 périodes de symbole. Les enveloppes complexes des sources ont été générées selon (5.2) en considérant des fonctions de mise en forme d'impulsion de type RC. Pour chaque figure, deux expériences ont été réalisées considérant différentes valeurs de délais asynchrones  $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_G\}$  et de facteurs "roll-off"  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_G\}$ . Il convient de rappeler ici que l'application de EVESPA ne nécessite qu'une seule séquence d'échantillons (pris à la période des symboles). Or, on doit suréchantillonner les signaux reçus à un facteur U pour l'application de JDDTM. Pour cette simulation, seule la première séquence d'échantillons (parmi les U) a été considérée pour EVESPA, qui était donc appliqué dans un contexte de signalisation asynchrone général. On aurait pu par contre appliquer l'algorithme sur chacune des U séquences et combiner les résultats obtenus pour générer une seule matrice estimée  $\hat{B}$ . Toutefois, une technique de combinaison spéciale aurait d $\hat{u}$  être développée dans ce cas puisque la matrice Z associée à l'estimation de B aurait été généralement différente d'une séquence à l'autre. Une simple moyenne des matrices obtenues pour chaque séquence aurait biaisé l'estimation advenant une permutation des colonnes différentes pour chaque matrice. Par ailleurs, des GRLs auraient aussi pu être calculés pour chaque matrice estimée, puis moyennés afin de produire un GRL

résultant qui aurait ensuite pu être comparé à celui produit par JDDTM. Cependant, une telle stratégie n'a pas été considérée ici puisque cette approche n'aurait pas eu comme objectif le calcul d'une matrice  $\hat{B}$  globale issue des matrices estimées au niveau de chacune des séquences, mais plutôt celui du calcul d'un GRL résultant qui n'aurait pas été associé à une matrice  $\hat{B}$  donnée. L'application de EVESPA a donc été réalisée à partir d'une seule séquence d'échantillons comme le veut la théorie originale.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
N	4	U	3
G	4	S	2000
$B_{p,q} \forall \{p,q\}$ (à chaque essai)	$\mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$	Р	2000

Tableau 6.6 – Paramètres de simulation pour l'étude de comparaison entre l'algorithme JDDTM et EVESPA.

On remarque à la Fig. 6.9 que les performances d'estimation de  $\boldsymbol{B}$  par JDDTM sont en tout point meilleures que celles obtenues par EVESPA, et ce même au niveau des écarts types du GRL. Ceci s'explique simplement par la convergence statistique plus rapide de JDDTM par rapport à EVESPA (pour un même nombre de périodes de symboles), car seules des statistiques d'ordre deux sont employées par JDDTM. D'autre part, la Fig. 6.10 présente une autre comparaison entre les deux algorithmes, mais cette fois en considérant d'autres ensembles de paramètres  $\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_G\}$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \beta_1, \dots, \beta_G\}$ . On remarque que JDDTM surclasse encore EVESPA pour le premier ensemble de paramètres. Par contre, au niveau du second, des distributions statistiques rapprochées d'enveloppes complexes reçues ont été simulées en donnant aux ensembles  $\tau$  et  $\beta$  des valeurs numériques semblables. On remarque dans ce cas que EVESPA affiche de meilleures performances que JDDTM, car comme expliqué à la section 6.5, il s'agit d'une situation où  $\text{NAP}_g(t,\tau) \approx \text{NAP}(t,\tau) \forall g$  et qui implique donc une faible diversité statistique ne pouvant alors plus être exploitée de façon aussi avantageuse par l'équation (6.13). Par contre, même dans un contexte tel que  $\operatorname{NAP}_q(t,\tau) \approx \operatorname{NAP}(t,\tau) \forall g$ où subsiste une faible diversité statistique des signaux, JDDTM peut tout de même parvenir à réaliser l'estimation aveugle de B, et ce à un degré de performance arbitraire moyennant une période d'observation PT suffisamment élevée (cf. [83], section 5.5).



FIGURE 6.9 – Comparaison de performances entre l'algorithme JDDTM et EVESPA pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général où N = G = 4. On considère deux ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0, 0.2, 0.8, 0.5\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.7, 0.1, 0.8, 0.1\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.9, 0.4, 0.1, 0.4\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.8, 0.7, 0.2\}$ .



FIGURE 6.10 – Comparaison de performances entre l'algorithme JDDTM et EVESPA pour l'estimation de la matrice  $\boldsymbol{B}$  dans un contexte numérique général où N = G = 4. On considère deux ensembles de paramètres distincts, Ens. 1 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.8, 0, 0.3, 0.5\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.4, 0.2, 0.6, 0.8\}$ , Ens. 2 :  $\boldsymbol{\tau} = \{0.2, 0.1, 0.2, 0.2\}T$  et  $\boldsymbol{\beta} = \{0.8, 0.8, 0.7, 0.6\}$ .

#### 6.7 Conclusion

Ce chapitre a été entièrement dédié à l'algorithme JDDTM, qui représente la contribution principale de cette thèse. Ce dernier fait suite logique aux développements relatifs au chapitre 5 concernant l'aspect de synchronicité des signaux dans un environnement multi-usagers. On a abord montré comment une diversité d'autocorrélation statistique des signaux reçus pouvait être obtenue en exploitant le caractère asynchrone naturel de ces derniers au moyen d'une variation de phase d'échantillonnage. On a ensuite expliqué comment l'exploitation d'une telle diversité statistique pouvait être envisagée pour l'estimation de la matrice de canal par la résolution d'un problème de diagonalisation conjointe. On a poursuivi en montrant comment des matrices cibles pour un tel traitement pouvaient être obtenues en considérant les différences entre des matrices d'autocorrélation évaluées à un même délai, mais à des phases différentes par rapport à l'instant du premier échantillon. On a finalement montré comment un ensemble de matrices cibles compatible à l'équation (6.9) pouvait être obtenu à partir de l'ensemble précédent, et comment cette opération contribuait également à diminuer la complexité du traitement. Des simulations ont ensuite été présentées pour confirmer l'efficacité et exemplifier les performances d'estimation de l'algorithme dans un contexte de signaux groupés.

Le développement de l'algorithme JDDTM a été grandement inspiré de travaux antérieurs dans la littérature, dont notamment SOBI [86] pour l'exploitation du délai d'autocorrélation et de l'estimation de la matrice du canal par diagonalisation conjointe, s-BIA [89] et U-WEDGE [88] pour la théorie propre au problème de diagonalisation conjointe en soit et l'élaboration de critères de performance tels le GRL, et également les méthodes d'estimation proposées par Rong *et al.* en [64] où l'on traite un problème semblable à celui abordé dans ce chapitre (et dans cette thèse en général). Les similarités dans ce dernier cas se limitent à la philosophie générale de traitement où la matrice de canal est estimée par la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles également obtenues à partir de statistiques d'ordre deux dans un contexte de signalisation multi-usagers. Les méthodes proposées en [64] n'exploitent que des délais d'autocorrélation nuls sans faire mention ni considérer l'aspect de synchronicité des signaux reçus. L'algorithme JDDTM innove et se distingue particulièrement des méthodes de traitement existantes dans la littérature de par :

- 1) La considération du caractère asynchrone naturel et de ses implications statistiques au niveau du modèle des signaux reçus.
- 2) L'estimation de *B* par la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles obtenu par différences de matrices d'autocorrélation évaluées à des délais identiques. Une telle approche rend l'algorithme applicable à pratiquement tout type de bruit indépendamment de son caractère de corrélation spatiotemporel tout en permettant une pleine exploitation du degré de liberté du réseau.

Il faut retenir de ce chapitre que le caractère asynchrone naturel des signaux incidents au niveau d'une antenne-réseau dans un environnement multi-usagers peut être exploité à des

fins avantageuses pour l'estimation des paramètres des sources, comme démontré ici avec l'algorithme JDDTM. Toutefois, ce même phénomène peut également être source de disparité notoire des performances d'estimation chez un algorithme donné puisque les délais asynchrones propres aux enveloppes complexes reçues ne peuvent être contrôlés (dans un environnement naturel sans mécanisme de synchronisation) ou a priori estimés au récepteur. Pour cette raison, le développement d'algorithmes d'estimation robustes tenant compte de cet aspect particulier des signaux pourrait être effectué en tentant de minimiser la variance des estimés qu'il engendre tout en tirant avantage de la diversité statistique qu'il procure.

## Chapitre 7

# Idées de recherche et de développements futurs

Ce chapitre présente quelques idées de recherche et de développements futurs pouvant potentiellement donner suite au problème principal étudié dans cette thèse et faire l'objet de contributions intéressantes. Bien que plusieurs idées de recherche ont été développées pendant la première partie des travaux (chapitres 2 à 4), on limitera ici la présentation à quelques concepts en lien à l'exploitation du caractère asynchrone des signaux reçus au niveau du réseau tel que présenté au chapitre 5.

### 7.1 Étude des performances d'algorithmes classiques dans un contexte de signalisation asynchrone

Comme expliqué en conclusion du chapitre 5, la considération du caractère asynchrone naturel des enveloppes complexes reçues au niveau de l'antenne-réseau et ses implications statistiques pour le problème d'estimation des paramètres des sources est très peu répandu dans la litté-rature. De ce fait, aucune attention n'a été accordé à cet aspect particulier de la modélisation pendant la première partie des travaux, et deux contributions ont ainsi été apportées en exploitant un modèle implicite synchrone des signaux reçus. Une telle modélisation est également rencontrée en abondance dans la littérature comme expliqué à la section 5.3, notamment chez les algorithmes exploitant un traitement par statistiques d'ordre supérieur ou la propriété d'alphabet fini des sources. On la rencontre également chez d'autres algorithmes exploitant le caractère numérique des signaux de communications <sup>1</sup>.

Il serait donc naturel et particulièrement intéressant d'étudier les performances d'algorithmes d'estimation classiques tels MUSIC, ESPRIT, JADE, SOBI et plusieurs autres dans un contexte

<sup>1.</sup> En général, voir [102] pour une discussion intéressante sur plusieurs aspects de modélisation propres aux algorithmes d'estimation du second ordre.

de signalisation asynchrone semblable à celui considéré au chapitre 6 pour le développement de l'algorithme JDDTM, car vu la faible popularité de cet aspect de la modélisation au niveau des signaux, de tels travaux ne semblent pas avoir été effectués. La procédure pour ce faire consisterait simplement à appliquer les dits algorithmes en générant les éléments du vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  non pas avec des distributions telles que  $u_g(t_k) \in \mathcal{A}_g \; \forall \; g$ , mais directement à partir de (5.2) avec  $\tau_q \sim \mathcal{U}(0,1) \forall g$ . On a montré au chapitre 5 (et aussi au chapitre 6) que les distributions statistiques des enveloppes complexes reçues aux instants d'échantillonnage sont fortement influencées par les fonctions de mise en forme d'impulsion  $\{p_g\}_{g=1}^G$  ainsi que les délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ . Ainsi, la puissance, les cumulants ou autres grandeurs statistiques des enveloppes reçues tels que perçus aux instants d'échantillonnage par le réseau seront également fonction de ces paramètres, comme expliqué au chapitre 5. De ce fait, les performances d'algorithmes exploitant un traitement à partir de la matrice de covariance des signaux par exemple seront également affectées à un certain degré (considérant un nombre fini d'échantillons) par les paramètres  $\{p_g\}_{g=1}^G$  et  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  dépendamment des calculs et du type de traitement mis à l'œuvre. Des études exhaustives de performance pourraient alors être réalisées et des bornes théoriques comme celle de Cramér–Rao pourraient même être dérivées dans la mesure du possible et comparées à leurs homologues obtenues dans un contexte de signalisation synchrone (qui n'est qu'un cas spécifique d'une modélisation asynchrone générale).

### 7.2 Traitement de signaux asynchrones par statistiques d'ordre supérieur

Le traitement des signaux asynchrones par statistiques d'ordre supérieur n'a pas été abordé aux chapitres 5 et 6, mais constituerait une suite logique et immédiate aux travaux de cette thèse et à l'algorithme JDDTM.

Il a été montré au chapitre 6 que le cas de sources stationnaires (i.e. impliquant que  $\operatorname{NAP}_g(t, \tau) = \operatorname{NAP}(t, \tau) \forall g$ ) ne peut être traité par l'algorithme JDDTM (ou par tout algorithme d'estimation aveugle n'exploitant que des statistiques d'ordre deux) car l'ensemble des matrices cibles ne peut être conjointement diagonalisé. Cependant, à la section 5.5 en [83], on montre que même dans un contexte de distributions statistiques rapprochées (i.e.  $\operatorname{NAP}_g(t, \tau) \approx \operatorname{NAP}(t, \tau) \forall g$ ), une qualité d'estimation arbitraire peut quand même être obtenue moyennant un temps d'observation PT suffisamment élevé.

Par ailleurs, on sait qu'un ensemble de matrices cibles conjointement diagonalisable pour l'estimation de B peut être obtenu à partir de statistiques d'ordre supérieur, et ce même en présence de signaux stationnaires. Une telle approche est entre autres exploitée par EVESPA en [42], mais de façon plus générale par JADE en [85]. Il serait donc intéressant de développer un algorithme semblable destiné au traitement de signaux asynchrones comme ceux considérés pour le développement d'algorithme JDDTM au chapitre 6 et de comparer les performances des deux algorithmes en fonction des distributions de  $\{\operatorname{NAP}_g(t,\tau)\}_{g=1}^G$ . On pourrait ainsi s'attendre à de meilleures performances que JDDTM lorsque  $\operatorname{NAP}_g(t,\tau) \approx \operatorname{NAP}(t,\tau) \forall g$ , mais possiblement à de moins bonnes performances lorsque la diversité statistique des enveloppes complexes devient suffisamment élevée pour permettre une diagonalisation conjointe adéquate de l'ensemble des matrices cibles à partir de statistiques d'ordre deux.

#### 7.3 Formation de voies

Un parallèle intéressant a été établi à la section 6.4 concernant l'emploi d'un modèle des signaux reçus selon une architecture de type FIR-MIMO ou une modélisation plus traditionnelle faisant intervenir directement l'expression des enveloppes reçues aux instants d'échantillonnage. Le point principal de cette discussion était de souligner le fait que, bien qu'une modélisation FIR-MIMO permette d'exprimer les signaux reçus directement en terme des symboles transmis, elle implique que les matrices de canal  $H(t_0)$  en (5.16) obtenues à chaque séquence d'échantillons soient généralement différentes à cause des variations de phase (i.e.  $t_0$ ) entre chacune d'elles. D'un autre côté, l'emploi d'un modèle classique selon (2.53) se prête beaucoup mieux au problème de diagonalisation conjointe comme considéré à la section 6.4 (dû à la matrice **B** demeurant constante indépendamment de la phase d'échantillonnage), mais n'est pas aussi pratique pour effectuer l'estimation des séquences de symboles transmis pour chaque usager. Un tel problème est par ailleurs couramment rencontré dans la littérature.

À cette fin, une approche comme celle considérée en [42] pourrait être envisagée, où les symboles de chaque usager sont estimés par formation de voies à partir d'un vecteur de pondération optimal de la forme :

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}_{g}} = c \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{b}_{g} \,, \, g \in \{1, 2, \dots, G\} \,,$$

$$(7.1)$$

où c est un facteur d'adaptation (voir (2.70)). Cependant, des signaux synchrones avec recouvrement parfaits des instants des symboles ( $T_s = T$ ) sont assumés en [42]. Par conséquent, les symboles reçus de chaque usager peuvent être estimés par :

$$\hat{u}_g(t_k) = \boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}^{\dagger} \boldsymbol{x}_k \ \forall \ g \in \{1, 2, \dots, G\},$$
(7.2)

car  $\{t_k\}_{k=1}^K$  correspondent directement aux instants des symboles (cf. Fig. 5.2 (a)). Le vecteur de pondération optimal en (7.1) est très bien connu dans la littérature car il permet de maximiser le SINR pour le cas de sources non corrélées (cf. annexe B). Cependant, sa définition n'est fondée que sur la matrice d'autocorrélation  $\mathbf{R}_{xx}$ , qui est une mesure statistique suffisante des signaux reçus (au second ordre) uniquement lorsque ceux-ci sont stationnaires. Il est par ailleurs intéressant de noter que les bénéfices associés à la formation de voies à partir d'une antenne-réseau sont souvent promus dans un contexte de communication radiomobile multi-usagers, impliquant naturellement l'emploi de signaux *cyclostationnaires*, comme discuté au chapitre 5. Or il a clairement été montré à la section 6.2 que la matrice de covariance des signaux reçus dans un contexte de signaux cyclostationnaires dépend fortement de la phase d'échantillonnage, que l'on note ici par  $t_0^2$ . Ainsi, un vecteur de pondération optimal considérant une phase d'échantillonnage arbitraire  $t = t_0$  prend la forme :

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_0) = c \boldsymbol{R}_{xx}^{-1}(t_0) \boldsymbol{b}_g \ , \ g \in \{1, 2, \dots, G\} \,.$$
 (7.3)

Dans le cas de signaux synchrones et d'enveloppes complexes identiquement modulées (i.e.  $p_g(t) = p(t) \forall g$  et  $\tau_g = \tau \forall g$  comme à la Fig. 5.2 (a)), on aura  $\boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_{0_a}) = \alpha_{a,b} \boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_{0_b})$ pour toutes valeurs de  $t_{0_a}$  et  $t_{0_b}$  et avec  $\alpha_{a,b} \in \mathbb{R}$  puisque les matrices  $\boldsymbol{R}_{uu}(t,0) \forall t$  sont identiques à un facteur réel (scalaire) près (voir équation (6.8)). Ainsi, considérant un bruit stationnaire, une matrice  $\boldsymbol{R}_{xx}(t_0)$  peut être employée avec toute valeur de  $t_0$  en (7.3) pour le calcul de  $\boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_0)$ , car  $\boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_{0_a}) \propto \boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_{0_b})$ . Par contre, les distributions statistiques des enveloppes complexes varieront significativement avec  $t_0$ .

Dans le cas de signaux asynchrones, les matrices  $\mathbf{R}_{uu}(t,0) \forall t$  ne sont plus identiques à un facteur (scalaire) près, et il en sera également de même pour des vecteurs de pondération optimaux calculés selon (7.3) pour différentes valeurs de  $t_0$ . Si on considère un facteur de suréchantillonnage U et un ensemble de matrice d'autocorrélation sans délai  $\{\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)}\}_{p=0}^{U-1}$  tel qu'en (6.11), il devient possible de calculer un vecteur de pondération optimal similairement à (7.1) pour chaque indice de phase p, tel que :

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}_{g}}^{(p)} = c(\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,0)})^{-1}\boldsymbol{b}_{g},$$
  

$$g \in \{1, 2, \dots, G\} , p \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(7.4)

et des estimés d'enveloppes complexes reçues pour chaque groupe peuvent alors être calculés selon :

$$\hat{u}_{g}^{(p)}(t_{k}) = (\boldsymbol{w}_{\text{opt}_{g}}^{(p)})^{\dagger} \boldsymbol{x}_{k}^{(p)}$$

$$g \in \{1, 2, \dots, G\} , p \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(7.5)

où  $\{\boldsymbol{x}_{k}^{(p)} = \boldsymbol{x}_{Uk+p}\}_{k=1}^{K}$  est l'ensemble des vecteurs observables considéré pour l'évaluation de  $\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,0)}$ . Un estimé de la séquence complète  $\{u_g(t_k)\}_{k=1}^{K}$  des échantillons de l'enveloppe complexe du *g*-ième groupe peut donc être obtenu par une reconstruction entrelacée des U séquences d'échantillons (chacune prise à la fréquence 1/T des symboles) tel que :

$$\{\hat{u}_g(t_0), \hat{u}_g(t_1), \ldots\} = \{\hat{u}_g^{(0)}(t_0), \hat{u}_g^{(1)}(t_0), \ldots, \hat{u}_g^{(U-1)}(t_0), \hat{u}_g^{(0)}(t_1), \hat{u}_g^{(1)}(t_1), \ldots\},$$
(7.6)

où en général  $\hat{u}_g(t_k) = \hat{u}_g^{(k\%U)}(t_{\lfloor k/U \rfloor})$  avec '%' représentant l'opérateur modulo. La procédure de reconstruction des enveloppes reçues à partir des équations (7.4), (7.5) et (7.6) est

<sup>2.</sup> Aux chapitres 5 et 6, on tenait compte de la phase d'échantillonnage au moyen des délais asynchrones  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  en (5.2). Ici toutefois, on emploiera directement  $t_0$  pour désigner cette dernière en assumant comme d'habitude des valeurs fixes de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  pendant la durée d'observation considérée. Il s'agit d'une notation équivalente n'impliquant aucune perte de généralité.

essentiellement identique à une procédure de reconstruction classique, à la différence que des vecteurs de pondération optimaux distincts sont considérés pour chacune des U séquences d'échantillons. Cette stratégie n'est qu'une seule façon parmi plusieurs d'effectuer l'estimation des échantillons d'enveloppes  $\{u_g(t_k)\}_{k=1}^K \forall g$  dans un contexte de signalisation asynchrone général. Une approche plus optimale pourrait possiblement être développée en faisant aussi usage des matrices  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p, q \neq 0\}$  en (6.11) puisque seuls des délais d'autocorrélation nuls sont considérés en (7.4). Il est également intéressant de mentionner que ce processus de reconstruction n'aurait pas à faire intervenir la fonction d'autocorrélation cyclique des enveloppes complexes reçues qui est fréquemment rencontrées chez les algorithmes de formation de voies adaptés au cas de signaux cyclostationnaires (voir [103] et références qui s'y trouvent).

Finalement, suite à l'estimation de  $\{u_g(t_k)\}_{k=1}^K \forall g$ , l'estimation des séquences de symboles transmis pour tous les usagers pourrait être effectuée à partir de techniques d'interpolation et de recouvrement des symboles conventionnelles.

# Conclusion

Le traitement de signaux reçus à partir d'une antenne-réseau, que ce soit pour l'estimation de la puissance, des DOAs, de la matrice de canal ou des séquences de symboles transmis, est un sujet de recherche qui a été grandement été étudié dans la littérature et qui continue de susciter un intérêt considérable encore aujourd'hui. L'évolution du traitement est passée des méthodes de pondération simples, suivis d'algorithmes du second ordre à base de sous-espaces, de techniques faisant appel à des statistiques d'ordre supérieur et d'algorithmes exploitant des propriétés statistiques bien particulières des signaux reçus. Cette thèse a abordé le problème d'estimation des paramètres de signaux d'usagers radio-mobiles par traitement avec antenne-réseau sous un angle général avec un accent particulier sur l'aspect de modélisation des enveloppes complexes reçues. Les chapitres ont été présentés par ordre chronologique d'avancement des travaux afin de donner au lecteur une meilleure image du parcours de recherche et de mieux justifier le cheminement qui a conduit aux contributions principales.

#### 8.1 Résumé des travaux et des contributions à la recherche

On a d'abord effectué au chapitre 2 un survol de la théorie de base dans le domaine du traitement d'antenne avec un accent particulier sur l'aspect de modélisation des signaux. On a par le fait même introduit la plupart des notations employées dans le document et on a mis en évidence les principales limitations associées aux méthodes d'estimations traditionnelles qui ont motivé les efforts de recherche et justifié les développements présentés dans les chapitres ultérieurs.

Au chapitre 3, on a traité du problème d'estimation des paramètres par l'emploi de statistiques d'ordre supérieur. On a présenté une version améliorée de l'algorithme EVESPA qui a été l'objet d'une première contribution en [52]. Les développements présentés dans cette partie de la thèse ont été d'une importance particulièrement significative pour la suite des travaux, car bien des concepts de traitement s'y rattachant ont été implicitement employés au premier stade de développement de l'algorithme JDDTM.

Au chapitre 4, on s'est intéressé à l'exploitation d'estimateurs non linéaires afin de pallier aux limitations engendrées par le nombre de degrés de liberté fini du réseau, qui sont également présentes chez les algorithmes d'estimation d'ordre supérieur. On a montré comment de telles approches sont généralement caractérisées par un traitement mathématique complexe en fonction des distributions statistiques des sources, mais peuvent toutefois procurer des avantages indéniables au niveau des limitations du traitement dans certains contextes. Les efforts de recherche en ce domaine ont permis de publier une autre contribution en [54] par le développement d'un algorithme d'estimation non linéaire ne possédant aucune limite théorique vis-à-vis le nombre de paramètres pouvant être estimés (puissances et DOAs des signaux).

Plus loin, au chapitre 5, une dimension particulière de la modélisation des signaux a été explorée par l'étude du synchronisme des enveloppes complexes reçues. Une telle recherche a été initiée en remarquant lors de simulations numériques que l'attribution de symboles idéaux aux enveloppes complexes reçues à chaque instant d'échantillonnage impliquait une synchronisation parfaite de ces dernières au niveau du réseau, ce qui ne pouvait être naturellement justifié dans un contexte multi-usagers où ces derniers opèrent indépendamment les uns des autres. Cette analyse a permis de bien mettre en évidence la variabilité de la distribution statistique du vecteur des signaux reçus échantillonnés en fonction de la phase d'échantillonnage ainsi que ses différentes implications au niveau traitement.

On a ensuite présenté au chapitre 6 un algorithme d'estimation inspiré directement des notions de modélisation vues au chapitre 5, et représentant la contribution principale de cette thèse. On a montré comment il était possible de générer une diversité statistique suffisante au niveau des signaux reçus par variation de phase d'échantillonnage afin de permettre une estimation de la matrice de canal par la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles obtenus uniquement à partir de statistiques d'ordre deux. L'innovation principale de la méthode proposée réside dans le principe de construction différentiel des matrices cibles, qui permet l'élimination de la matrice de covariance du bruit sans considération de son caractère de corrélation spatiotemporel, et qui permet par le fait même une pleine exploitation du nombre de degrés de liberté du réseau. Cet algorithme a été publié en [83].

En somme, cette thèse a permis de développer trois contributions en lien au problème d'estimation des paramètres des sources par traitement avec antenne-réseau. Ces dernières sont présentées dans leur ordre de développement respectif à l'annexe F.

#### 8.2 Suite logique des travaux et points importants à retenir

Quelques idées de développements futurs ont été présentées au chapitre 7 en guise d'une poursuite éventuelle des travaux. Ces dernières sont directement reliées aux notions de synchronicité des signaux et à l'aspect de modélisation vus au chapitre 5. La suite la plus logique et la plus immédiate des travaux consisterait sans doute à réaliser une étude des performances d'estimation d'algorithmes populaires existants dans un contexte de signalisation asynchrone naturel, comme décrit à la section 7.1. De telles études pourraient être réalisées rapidement puisqu'elles n'impliqueraient pas le développement de nouveaux processus d'estimation. La procédure consisterait simplement à appliquer les algorithmes en question tels qu'initialement développés par leurs auteurs en générant les éléments du vecteur  $\boldsymbol{u}_k$  à partir de (5.2) et en quantifiant les performance d'estimation résultantes.

Une suite intéressante des travaux pourrait également être envisagée par le développement d'un algorithme d'estimation d'ordre supérieur adapté au cas de signaux asynchrones, comme discuté à la section 7.2. Bien qu'il soit justifié de s'attendre à ce que la variance des estimés obtenus dans ce cas soit généralement plus élevée que celle obtenue d'un traitement comparatif du second ordre pour un même temps d'observation des signaux, il serait quand même intéressant d'étudier l'efficacité d'une telle approche et de comparer les performances obtenues à celles de JDDTM par exemple dans un contexte de distributions statistiques rapprochées des sources où NAP<sub>g</sub>(t,  $\tau$ )  $\approx$  NAP(t,  $\tau$ )  $\forall$  g.

Un autre volet intéressant de la recherche pourrait être exploré par le développement d'une technique de formation de voies exploitant le caractère asynchrone naturel des signaux incidents, comme expliqué à la section 7.3. On s'intéresserait ici non pas à la matrice de canal directement, mais à l'estimation des échantillons d'enveloppes complexes reçus pour chaque usager afin d'en reconstituer le message transmis. Une piste de développement initial est déjà donnée à cette fin à la section 7.3.

Les idées de développement présentées au chapitre section 7 ne sont que quelques exemples parmi une multitude de traitements possibles reposant sur l'exploitation du caractère asynchrone naturel des signaux incidents. D'autres idées pourraient également être envisagées, comme par exemple l'élaboration d'un algorithme d'estimation aveugle applicable en présence de délais d'étalement non négligeables, mais toujours sous l'hypothèse bande étroite, car peu de ce type d'algorithmes semblent avoir été proposés dans la littérature. Le développement d'un tel algorithme constituerait un défi de taille puisque les signaux d'un même groupe ne pourraient plus être exprimés à partir d'une unique enveloppe complexe  $u_q(t)$  à un instant t quelconque (cf section 2.3.2), et la structure des matrices d'autocorrélation résultantes deviendrait alors différente de (6.2) et (6.5). D'autres idées de traitement pourraient être envisagées par l'élaboration de techniques d'estimation reposant sur un échantillonnage asynchrone au niveau des éléments du réseau par exemple, ou encore à un échantillonnage à période non constante aux croisements par zéro d'un signal interférent indésirable. L'univers du traitement d'antenne est riche, et laisse place à l'élaboration d'une multitude de traitements possibles indépendamment de la nature ou de la complexité des opérations en jeu. Des techniques robustes et efficaces devront continuer d'être développées afin d'être intégrées à de futurs systèmes de communication visant à répondre aux besoins de plus en plus exigeants de nos sociétés contemporaines.

On doit retenir de cette thèse que la modélisation des signaux, ou en général l'élaboration

d'un modèle de base dans toute recherche scientifique théorique, constitue l'aspect fondamental ayant l'incidence la plus directe sur la pertinence et la validité des résultats obtenus, quelle que soit leur nature. Les travaux présentés dans ce document en témoignent. Les développements du chapitre 5 concernant l'aspect de synchronicité des signaux ont été un point tournant dans l'avancement des travaux, car ils ont permis d'apporter une contribution originale à la recherche et d'entrevoir plusieurs idées de développements futurs pouvant donner suite à d'autres contributions importantes. Mentionnons en dernier lieu que bien qu'un accent particulier aie été apporté à la dernière partie des travaux sur l'importance de la considération de l'aspect de synchronicité des signaux reçus au niveau de l'antenne-réseau, des méthodes de traitement des plus intéressantes peuvent toujours être développées sous l'hypothèse de signaux synchrones dans la mesure où cette dernière est adéquatement justifiée. Sur cette note, le soin est donc laissé à celui ou celle qui saura apprécier ce travail à un degré suffisant pour en développer et en approfondir encore davantage les concepts dans le but de faire progresser la discipline à la fois complexe et captivante du traitement d'antenne vers d'autres débouchés intéressants.

# Bibliographie

- [1] "Measuring the information society," International Telecommunication Union (ITU), Tech. Rep., 2012.
- T. Do-Hong, Wideband Direction-of-Arrival Estimation and Wideband Beamforming for Smart Antenna Systems, ser. Berichte Aus der Electrotechnik Series. Shaker Verlag GmbH, 2004.
- [3] "Long term evolution (LTE) : A technical overview," Motorola Inc., Tech. Rep., 2007.
- [4] G. A. Abed, M. Ismail, and K. Jumari, "The evolution to 4G cellular systems : Architecture and key features of LTE-Advanced networks," *Spectrum*, vol. 2, no. 1, 2012.
- [5] S. Patil, V. Patil, and P. Bhat, "A review on 5G technology," International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT), vol. 1, no. 1, 2012.
- [6] T. Do-Hong and P. Russer, "Signal processing for wideband smart antenna array applications," *Microwave Magazine*, *IEEE*, vol. 5, no. 1, pp. 57–67, 2004.
- [7] L. C. Godara, "Application of antenna arrays to mobile communications—Part II : Beamforming and direction-of-arrival considerations," *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 8, pp. 1195–1245, 1997.
- [8] J. C. Liberti and T. S. Rappaport, Smart antennas for wireless communications : IS-95 and third generation CDMA applications. Prentice Hall PTR, 1999.
- G. V. Tsoulos, "Smart antennas for mobile communication systems : Benefits and challenges," *Electronics & Communication Engineering Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 84–94, 1999.
- [10] F. B. Gross, Smart antennas for wireless communications with MATLAB. McGraw-Hill New York, 2005.
- [11] P. Howells, "Explorations in fixed and adaptive resolution at GE and SURC," Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, vol. 24, no. 5, pp. 575–584, 1976.
- [12] S. Applebaum, "Adaptive arrays," Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, vol. 24, no. 5, pp. 585–598, 1976.
- [13] B. Widrow, P. Mantey, L. Griffiths, and B. Goode, "Adaptive antenna systems," Proceedings of the IEEE, vol. 55, no. 12, pp. 2143–2159, 1967.
- [14] J. Capon, "High-resolution frequency-wavenumber spectrum analysis," Proceedings of the IEEE, vol. 57, no. 8, pp. 1408–1418, 1969.

- [15] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [16] L. Couch, Modern Communication Systems : Principles and Applications. Prentice Hall, 1995.
- [17] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, Statistical and adaptive signal processing : spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing. Artech House, 2005, vol. 46.
- [18] R. Hippenstiel, Detection Theory : Applications and Digital Signal Processing. CRC Press LLC, 2010.
- [19] Y. U. Lee, J. Choi, I. Song, and S. R. Lee, "Distributed source modeling and direction-ofarrival estimation techniques," *Signal Processing*, *IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 4, pp. 960–969, 1997.
- [20] S. Valaee, B. Champagne, and P. Kabal, "Parametric localization of distributed sources," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 43, no. 9, pp. 2144–2153, 1995.
- [21] H. Monjardin, D. H. Covarrubias-Rosales, and R. F. Nuñez, "A new proposal capon beamformer for angular spreads on distributed sources in a cellular environment," *Pro*gress In Electromagnetics Research C, vol. 6, pp. 167–177, 2009.
- [22] V. Olshevsky, Structured Matrices in Mathematics, Computer Science, and Engineering II: Proceedings of an AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, University of Colorado, Boulder, June 27-July 1, 1999, ser. Contemporary Mathematics Series. American Mathematical Society, 2001, no. v. 1.
- [23] J. Foutz, A. Spanias, and M. K. Banavar, "Narrowband direction of arrival estimation for antenna arrays," *Synthesis Lectures on Antennas*, vol. 3, no. 1, pp. 1–76, 2008.
- [24] L. C. Godara, Smart antennas. CRC Press LLC, 2004, vol. 15.
- [25] S. Chandran, Advances in Direction-of-arrival Estimation. Artech House, 2006.
- [26] C. See, "Sensor array calibration in the presence of mutual coupling and unknown sensor gains and phases," *Electronics letters*, vol. 30, no. 5, pp. 373–374, 1994.
- [27] H. Bertrand, D. Grenier, and S. Roy, "Experimental antenna array calibration with artificial neural networks," *Signal Processing*, vol. 88, no. 5, pp. 1152–1164, 2008.
- [28] A. Burr, "The multipath problem : An overview," in Multipath Countermeasures, IEE Colloquium on. IET, 1996, pp. 1–1.
- [29] R. W. Klukas and M. Fattouche, "Radio signal direction finding in the urban radio environment," in *Proceedings of the National Technical Meeting of The Institute of Na*vigation, VA (USA),, 1993, pp. 151–160.
- [30] D. Grenier, G. Delisle, and B. Philibert, "Identification superrésolutive de sources corrélées par décomposition de la base du sous-espace source estimé," TS. Traitement du signal, vol. 10, no. 1, pp. 3–13, 1993.
- [31] A. K. Marath, A. R. Leyman, and H. K. Garg, "DOA estimation of multipath clusters in WiMedia UWB systems," in Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop (SAM), 5th IEEE. IEEE, 2008, pp. 108–112.

- [32] R. Prasad, OFDM for Wireless Communications Systems, ser. The Artech House Universal Personal Communications Series. Artech House, 2004.
- [33] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research : the parametric approach," *Signal Processing Magazine*, *IEEE*, vol. 13, no. 4, pp. 67–94, 1996.
- [34] S. Bartlett, An Introduction to Stochastic Processes with Special Reference to Methods and Applications. University Press, 1956.
- [35] G. Bienvenu and L. Kopp, "Principe de la goniométrie passive adaptative," in 7-ième Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA. GRETSI, Groupe d'Études du Traitement du Signal et des Images, 1979.
- [36] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, 1974.
- [37] J. Rissanen, "Modeling by shortest data description," Automatica, vol. 14, no. 5, pp. 465–471, 1978.
- [38] R. Roy and T. Kailath, "ESPRIT—Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
- [39] J. Evans, J. Johnson, and D. Sun, "High resolution angular spectrum estimation techniques for terrain scattering analysis and angle of arrival estimation," in *Proc. 1st ASSP Workshop Spectral Estimation*, 1981, pp. 134–139.
- [40] T.-J. Shan, M. Wax, and T. Kailath, "On spatial smoothing for direction-of-arrival estimation of coherent signals," Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 33, no. 4, pp. 806–811, 1985.
- [41] S. U. Pillai and B. H. Kwon, "Forward/backward spatial smoothing techniques for coherent signal identification," Acoustics, Speech and Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 37, no. 1, pp. 8–15, 1989.
- [42] E. Gönen and J. M. Mendel, "Applications of cumulants to array processing—Part III : Blind beamforming for coherent signals," *IEEE transactions on signal processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2252–2264, 1997.
- [43] E. Gonen, J. M. Mendel, and M. C. Dogan, "Applications of cumulants to array processing—Part IV : Direction finding in coherent signals case," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 9, pp. 2265–2276, 1997.
- [44] L. De Lathauwer, J. Castaing, and J.-F. Cardoso, "Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures," *Signal Processing*, *IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 6, pp. 2965–2973, 2007.
- [45] P. Comon, "Blind channel identification and extraction of more sources than sensors," in SPIE's International Symposium on Optical Science, Engineering, and Instrumentation. International Society for Optics and Photonics, 1998, pp. 2–13.
- [46] G. Sun, "MPSK signals modulation classification using sixth-order cumulants," in *Image and Signal Processing (CISP)*, 2010 3rd International Congress on, vol. 9. IEEE, 2010, pp. 4404–4407.

- [47] N. Yuen and B. Friedlander, "DOA estimation in multipath : An approach using fourthorder cumulants," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 5, pp. 1253– 1263, 1997.
- [48] B. Porat and B. Friedlander, "Direction finding algorithms based on high-order statistics," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 9, pp. 2016–2024, 1991.
- [49] M. C. Dogan and J. M. Mendel, "Applications of cumulants to array processing—Part I : Aperture extension and array calibration," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 43, no. 5, pp. 1200–1216, 1995.
- [50] J. M. Mendel, "Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory : Theoretical results and some applications," *Proceedings of the IEEE*, vol. 79, no. 3, pp. 278–305, 1991.
- [51] P. Comon and C. Jutten, Handbook of Blind Source Separation : Independent Component Analysis and Applications, ser. Independent Component Analysis and Applications Series. Elsevier Science, 2010.
- [52] E. Racine and D. Grenier, "Improvement on EVESPA for beamforming and direction of arrival estimation," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2011, no. 1, p. 283020, 2011.
- [53] G. Dreyfus, *Apprentissage statistique*. Editions Eyrolles, 2008.
- [54] E. Racine and D. Grenier, "An exponential approach to signal parameter estimation," in Information Science, Signal Processing and their Applications (ISSPA), 2012 11th International Conference on. IEEE, 2012, pp. 561–566.
- [55] J. Salo, J. Eriksson, V. Koivunen, and P. Vainikainen, "Empirical characteristic function based estimation of multiple scattering channel parameters," in *Personal, Indoor and Mobile Radio Communications, 2006 IEEE 17th International Symposium on*. IEEE, 2006, pp. 1–5.
- [56] J. Eriksson and V. Koivunen, "Characteristic-function-based independent component analysis," *Signal Processing*, vol. 83, no. 10, pp. 2195–2208, 2003.
- [57] N. G. Ushakov, Selected topics in characteristic functions. De Gruyter Mouton, 1999.
- [58] A. J. Paulraj and C. B. Papadias, "Space-time processing for wireless communications," Signal Processing Magazine, IEEE, vol. 14, no. 6, pp. 49–83, 1997.
- [59] S. Talwar, M. Viberg, and A. Paulraj, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array—Part I : Algorithms," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 5, pp. 1184–1197, 1996.
- [60] P. McLane, "A residual intersymbol interference error bound for truncated-state Viterbi detectors," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 26, no. 5, pp. 548–553, 1980.
- [61] A. Goldsmith, Wireless Communications. Cambridge University Press, 2005.
- [62] A. Swindlehurst, "Synchronization and spatial signature estimation for multiple known co-channel signals," in Signals, Systems and Computers, 1995. 1995 Conference Record of the Twenty-Ninth Asilomar Conference on, vol. 1. IEEE, 1995, pp. 398–402.

- [63] S. Talwar and A. Paulraj, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array—Part II : Performance analysis," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 3, pp. 706–718, 1997.
- [64] Y. Rong, S. A. Vorobyov, A. B. Gershman, and N. D. Sidiropoulos, "Blind spatial signature estimation via time-varying user power loading and parallel factor analysis," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 53, no. 5, pp. 1697–1710, 2005.
- [65] J. Proakis and M. Salehi, *Digital Communications*, ser. McGraw-Hill higher education. McGraw-Hill Education, 2007.
- [66] P. Comon and M. Rajih, "Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function," *Signal Processing*, vol. 86, no. 9, pp. 2271–2281, 2006.
- [67] J. Camparo, R. Frueholz, and A. Dubin, "Demonstration of synchronization between two geosynchronous satellites without ground intervention," DTIC Document, Tech. Rep., 1996.
- [68] M. Rajih and P. Comon, "Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function : Influence of the knowledge of source PDF's," in *Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, 2005 1st IEEE International Workshop on. IEEE, 2005, pp. 133–136.
- [69] R. Attux, R. Suyama, R. Ferrari, C. Junqueira, R. Krummenauer, P. Larzabal, and A. Lopes, "A clustering-based method for DOA estimation in wireless communications," 2007.
- [70] F. Gu, H. Zhang, N. Li, and W. Lu, "Blind separation of multiple sequences from a single linear mixture using finite alphabet," in Wireless Communications and Signal Processing (WCSP), 2010 International Conference on. IEEE, 2010, pp. 1–5.
- [71] J. H. Manton and Y. Hua, "A randomised algorithm for improving source and channel estimates by exploiting the finite alphabet property," in Signals, Systems and Computers, 2000. Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on, vol. 2. IEEE, 2000, pp. 1582–1585.
- [72] J. D. Terry and D. B. Williams, "Convergence analysis of finite alphabet beamformers for digital cochannel signals," *Communications, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 6, pp. 929–939, 2003.
- [73] K. I. Diamantaras, "A clustering approach for the blind separation of multiple finite alphabet sequences from a single linear mixture," *Signal processing*, vol. 86, no. 4, pp. 877–891, 2006.
- [74] M. D. Zoltowski and J. Ramos, "Blind adaptive beamforming for narrowband co-channel digital communications signals in a multipath environment," in Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1995. ICASSP-95., 1995 International Conference on, vol. 3. IEEE, 1995, pp. 1745–1748.
- [75] S. Glisic, Advanced Wireless Communications : 4G Cognitive and Cooperative Broadband Technology. John Wiley & Sons, 2007.
- [76] T. Heikkinen and A. Hottinen, "Delay-differentiated scheduling in a fading channel," Wireless Communications, IEEE Transactions on, vol. 7, no. 3, pp. 848–856, 2008.

- [77] C. A. R. Fernandes, A. Kibangou, G. Favier, and J. a. C. Mota, "Identification of nonlinear MIMO radio over fiber uplink channels," in *Telecommunications Symposium*, 2006 *International*. IEEE, 2006, pp. 213–218.
- [78] T. Dubois, M. Crussiere, and M. Hélard, "On the use of time reversal for digital communications with non-impulsive waveforms," in *Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS), 2010 4th International Conference on.* IEEE, 2010, pp. 1–6.
- [79] T. S. Rappaport, Wireless communications : principles and practice. Prentice Hall PTR, 2002.
- [80] R. B. Staszewski and P. T. Balsara, All-digital frequency synthesizer in deep-submicron CMOS. Wiley-Interscience, 2006.
- [81] C. Knievel and P. A. Hoeher, "On particle swarm optimization for MIMO channel estimation," *Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 2012, p. 9, 2012.
- [82] C.-C. Hu and H.-Y. Yang, "Modified Gram-Schmidt-based antenna selection for MIMO systems in correlated channels," *Electronics letters*, vol. 46, no. 1, pp. 94–96, 2010.
- [83] E. Racine and D. Grenier, "Blind identification for communication signals : An approach exploiting sampling phase diversity," *REV Journal on Electronics and Communications*, vol. 2, no. 3–4, pp. 68–91, 2013.
- [84] W. A. Gardner, A. Napolitano, and L. Paura, "Cyclostationarity : Half a century of research," *Signal processing*, vol. 86, no. 4, pp. 639–697, 2006.
- [85] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-gaussian signals," in Radar and Signal Processing, IEE Proceedings F, vol. 140, no. 6. IET, 1993, pp. 362– 370.
- [86] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second-order statistics," *Signal Processing, IEEE Transactions* on, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, 1997.
- [87] F. J. Theis and Y. Inouye, "On the use of joint diagonalization in blind signal processing," in *Circuits and Systems, 2006. ISCAS 2006. Proceedings. 2006 IEEE International Symposium on.* IEEE, 2006, pp. 4–pp.
- [88] P. Tichavsky and A. Yeredor, "Fast approximate joint diagonalization incorporating weight matrices," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 3, pp. 878–891, 2009.
- [89] D.-Z. Feng, H. Zhang, and W. X. Zheng, "Bi-iterative algorithm for extracting independent components from array signals," *Signal Processing*, *IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 8, pp. 3636–3646, 2011.
- [90] X.-F. Xu, D.-Z. Feng, and W. X. Zheng, "An improved method for blind separation of complex-valued signals via joint diagonalization," in *Circuits and Systems (ISCAS)*, 2011 IEEE International Symposium on. IEEE, 2011, pp. 637–640.
- [91] G. Chabriel and J. Barrere, "A direct algorithm for nonorthogonal approximate joint diagonalization," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 60, no. 1, pp. 39–47, 2012.

- [92] A. Yeredor, "Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source separation," *Signal Processing*, *IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, 2002.
- [93] R. Vollgraf and K. Obermayer, "Quadratic optimization for simultaneous matrix diagonalization," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 54, no. 9, pp. 3270–3278, 2006.
- [94] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation," *The Journal of Machine Learning Research*, vol. 5, pp. 777–800, 2004.
- [95] A. C. Tang, M. T. Sutherland, and C. J. McKinney, "Validation of SOBI components from high-density EEG," *NeuroImage*, vol. 25, no. 2, pp. 539–553, 2005.
- [96] A. Yeredor, "TV-SOBI : An expansion of SOBI for linearly time-varying mixtures," in Proceedings of The 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA2003), 2003.
- [97] —, "Blind separation of gaussian sources via second-order statistics with asymptotically optimal weighting," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 7, no. 7, pp. 197–200, 2000.
- [98] S. Choi and A. Cichocki, "Blind separation of nonstationary sources in noisy mixtures," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 9, pp. 848–849, 2000.
- [99] —, "Blind separation of nonstationary and temporally correlated sources from noisy mixtures," in Neural Networks for Signal Processing X, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE Signal Processing Society Workshop, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 405–414.
- [100] K. Nordhausen, "On robustifying some second order blind source separation methods for nonstationary time series," *Statistical Papers*, pp. 1–16, 2012.
- [101] A. Barabell, "Improving the resolution performance of eigenstructure-based directionfinding algorithms," in Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'83., vol. 8. IEEE, 1983, pp. 336–339.
- [102] J. Villares and G. Vázquez, "The gaussian assumption in second-order estimation problems in digital communications," *Signal Processing*, *IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 10, pp. 4994–5002, 2007.
- [103] K.-L. Du and M. Swamy, "A class of adaptive cyclostationary beamforming algorithms," *Circuits, Systems & Signal Processing*, vol. 27, no. 1, pp. 35–63, 2008.
- [104] S. Dégerine, "Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés," in 18° Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 2001. GRETSI, Groupe d'Études du Traitement du Signal et des Images, 2001.
- [105] A. Taleb, "An algorithm for the blind identification of n independent signals with 2 sensors," in Signal Processing and its Applications, Sixth International, Symposium on. 2001, vol. 1. IEEE, 2001, pp. 5–8.
- [106] V. Zarzoso, A. Nandi, J. Igual-García, and L. Vergara-Domínguez, "Blind identification and equalization of MIMO FIR channels based on subspace decomposition and independent component analysis," in *Proc. 2nd IMA Int. Conf. on Mathematics in communications, University of Lancaster, UK*, 2002, pp. 16–18.

- [107] C. Tepedelenlioglu and R. Challagulla, "Low-complexity multipath diversity through fractional sampling in OFDM," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 52, no. 11, pp. 3104–3116, 2004.
- [108] J. Romano, R. Attux, P. Charles Cavalcante, and R. Suyama, Unsupervised Signal Processing: Channel Equalization and Source Separation. Taylor & Francis, 2011.
- [109] R. Tseng, A. S. Poon, and Y. Chiu, "A mixed-signal MIMO beamforming receiver," in Radio and Wireless Symposium, 2008 IEEE. IEEE, 2008, pp. 327–330.
- [110] J. Du, "Pulse shape adaptation and channel estimation in generalised frequency division multiplexing systems," Ph.D. dissertation, Norwegian University of Science and Technology, 2008.
- [111] R. L. Haupt, "The development of smart antennas," in Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE, vol. 4. IEEE, 2001, pp. 48–51.
- [112] C. B. Rodríguez-Estrello and F. A. C. Pérez, "An insight into the use of smart antennas in mobile cellular networks," 2011.
- [113] H. Bidgoli, The internet encyclopedia : G-O, ser. The internet encyclopedia : G-O. John Wiley & Sons Australia, Limited, 2004, no. v. 2.
- [114] M. Guizani, Wireless communications systems and networks, ser. Information Technology–Transmission, Processing, and Storage Series. Kluwer Academic Pub, 2004.
- [115] R. D. Gitlin, J. Hayes, and S. Weinstein, *Data communications principles*, ser. Applications of Communications Theory Series. Plenum Press, 1992.
- [116] M. Parker, Digital Signal Processing : A Practical Guide. Elsevier Science, 2010.
- [117] S. Dhanani and M. Parker, Digital Video Processing for Engineers : A Foundation for Embedded Systems Design. Elsevier Science, 2012.
- [118] L. Hanzo and T. Keller, OFDM and MC-CDMA : A Primer. John Wiley & Sons, 2007.
- [119] U. Mengali and A. D'Andrea, Synchronization Techniques for Digital Receivers, ser. Applications of Communications Theory. Springer, 1997.
- [120] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix computations. JHUP, 2012, vol. 3.
- [121] F. L. Alvarado, "The matrix inversion lemma," University of Wisconsin, Tech. Rep., 1999.

## Annexe A

# Décomposition propre d'une matrice hermitienne

#### A.1 Généralités

Une matrice  $\boldsymbol{A}$  est dite hermitienne si

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\dagger} . \tag{A.1}$$

Soit  $\lambda$  et  $\boldsymbol{v}$ , une valeur et un vecteur propre de  $\boldsymbol{A}$ . On a :

$$Av = \lambda v \,. \tag{A.2}$$

Démontrons d'abord que les valeurs propres de A sont réelles. En multipliant par la gauche par  $v^{\dagger}$ , on obtient :

$$\boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{v} \,. \tag{A.3}$$

On note premièrement que  $v^{\dagger}v \in \mathbb{R}$ . On remarque également que :

$$(\boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v})^{\dagger} = \boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v},$$
  
$$\Rightarrow \boldsymbol{v}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}.$$
(A.4)

Ainsi, puisque  $\{v^{\dagger}v, v^{\dagger}Av\} \in \mathbb{R}$ , on déduit facilement de (A.3) que  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On démontrera maintenant que les vecteurs propres de A sont orthonormaux. Réécrivons d'abord (A.2) pour faire intervenir l'ensemble de des valeurs et vecteurs propres.

$$\boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{V} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^{-1}, \qquad (A.5)$$

où  $\boldsymbol{v}_n$  est la *n*-ième colonne de  $\boldsymbol{V}$  et où  $[\boldsymbol{\Lambda}]_{n,n} = \lambda_n$ . Il s'agit ici de la forme très générale de la décomposition propre d'une matrice carrée quelconque. Pour démontrer l'orthonormalité des vecteurs propres de  $\boldsymbol{A}$ , on emploiera la décomposition de Schur qui permet d'exprimer une matrice carrée  $\boldsymbol{B}$  généralement complexe sous la forme [120] :

$$Q^{\dagger}BQ = T, \qquad (A.6)$$

où Q est une matrice unitaire (i.e.  $Q^{\dagger}Q = I$ ) et où T est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux correspondent aux valeurs propres de B. Dans le cas d'une matrice hermitienne A, on remarque que :

$$\boldsymbol{T}^{\dagger} = (\boldsymbol{Q}^{\dagger} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q})^{\dagger} = \boldsymbol{Q}^{\dagger} \boldsymbol{A}^{\dagger} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\dagger} \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{T} \,. \tag{A.7}$$

Or comme T est triangulaire supérieure, l'égalité  $T^{\dagger} = T$  implique donc que ses éléments extra-diagonaux soient nuls. La matrice T correspond donc à la matrice des valeurs propres de A. Comme Q est unitaire, on peut exprimer A par :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{T} \boldsymbol{Q}^{\dagger} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{T} \boldsymbol{Q}^{-1} \,. \tag{A.8}$$

Par correspondance à (A.1), comme  $T = \Lambda$ , on déduit que Q = V et que par conséquents les vecteurs propres d'une matrice hermitienne sont toujours orthonormaux.

#### A.2 Cas d'une matrice définie semi-positive

On peut exprimer (A.1) suivant :

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_1^{\dagger} + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_2^{\dagger} + \ldots + \lambda_N \boldsymbol{v}_N \boldsymbol{v}_N^{\dagger}.$$
(A.9)

Une matrice hermitienne A définie semi-positive satisfait

$$\boldsymbol{w}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} \ge 0 \;\forall\; \boldsymbol{w} \tag{A.10}$$

et implique que les valeurs propres  $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$  de  $\boldsymbol{A}$  soient non négative. Dans ce cas spécifique, on peut réécrire (A.9) de la façon suivante :

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^{\dagger} + \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^{\dagger} + \ldots + \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^{\dagger} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^{\dagger} \\ \boldsymbol{u}_2^{\dagger} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^{\dagger} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{L} \boldsymbol{L}^{\dagger}, \quad (A.11)$$

où  $\boldsymbol{u}_n = \sqrt{\lambda_n} \boldsymbol{v}_n$ . Toute matrice hermitienne  $\boldsymbol{A}$  définie semi-positive peut donc être exprimée sous la forme d'un produit  $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\dagger}$ , ce qui est par contre impossible autrement (i.e. si  $\boldsymbol{A}$  possède au moins une valeur propre négative).

## Annexe B

# Développement du vecteur de pondération optimal

On présente ici le développement du vecteur de pondération optimal inspiré de [17]. Comme décrit à la section 2.4.3, on cherche à déterminer un vecteur  $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m)$  solution de :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \arg\min_{\boldsymbol{w}} \left( \llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{s_{\backslash m}} + \llbracket P(\boldsymbol{w}) \rrbracket_{\boldsymbol{n}} \right). \tag{B.1}$$

Évidemment, on s'intéresse à une solution non triviale rendant minimale la contribution des interférences  $\mbox{m}$  autres que la source d'intérêt m. On remarque que ce problème d'optimisation revient à maximiser  $\check{\rho}_{s_m}(w)$  en (2.62). On a :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \arg \max_{\boldsymbol{w}} \left( \breve{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w}) \right) = \arg \max_{\boldsymbol{w}} \left( \frac{\boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_m} \boldsymbol{w}}{\boldsymbol{w}^{\dagger} \left( \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_{\backslash m}} + \boldsymbol{R}_{nn} \right) \boldsymbol{w}} \right) \,. \tag{B.2}$$

On peut obtenir les expressions équivalentes des matrices  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_m}$  et  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_{\backslash m}}$  à partir d'une décomposition générale de  $\mathbf{R}_{xx}$ . On a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}_{xx} &= E\left\{\left(\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})} + \left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})} + \boldsymbol{n}_{k}\right)\left(\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})} + \left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})} + \boldsymbol{n}_{k}\right)^{\dagger}\right\} \\ &= E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}^{\dagger}\right\} + E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}^{\dagger}\right\} \\ &+ E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}^{\dagger}\right\} + E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}^{\dagger}\right\} + R_{nn}, \end{aligned} \tag{B.3} \\ &\Rightarrow \left[\left[\boldsymbol{R}_{xx}\right]\right]_{s_{m}} = E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}^{\dagger}\right\} + E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}^{\dagger}\right\} \end{aligned}$$

+ 
$$E\left\{\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{n}(t_{k})}\left[\left[\boldsymbol{x}_{k}\right]\right]_{s_{m}(t_{k})}^{\dagger}\right\},$$
 (B.4)

$$\Rightarrow \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s \setminus m} = E \{ \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \setminus m}(t_k) \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \setminus m}^{\dagger}(t_k) \} + E \{ \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \in m}(t_k) \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \setminus m}^{\dagger}(t_k) \}$$
$$+ E \{ \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \setminus m}(t_k) \llbracket \boldsymbol{x}_k \rrbracket_{s \in m}^{\dagger}(t_k) \}.$$
(B.5)

Il est intéressant de remarquer qu'en général  $\mathbf{R}_{xx} \neq [\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_m} + [\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_{\backslash m}} + \mathbf{R}_{nn}$ , mais plutôt :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{s_m} + [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{s_{\backslash m}} - E\{[\![\boldsymbol{x}_k]\!]_{s_m(t_k)}[\![\boldsymbol{x}_k]\!]_{s_{\backslash m}(t_k)}^{\dagger}\} + \boldsymbol{R}_{nn}.$$
(B.6)

Le vecteur de pondération optimal est employé sous l'hypothèse que le signal désiré m est non corrélé aux interférences m [24, 17]. Ainsi, (B.6) devient :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{s_m} + [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{s_{\backslash m}} + \boldsymbol{R}_{nn}, \qquad (B.7)$$

 $\operatorname{avec}{}^1$  :

$$\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_m} = \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{a}_m^{\dagger}, \qquad (B.8)$$

$$\llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s \setminus m} = \llbracket \boldsymbol{A} \rrbracket_{s \setminus m} \llbracket \boldsymbol{R}_{ss} \rrbracket_{s \setminus m} \llbracket \boldsymbol{A} \rrbracket_{s \setminus m}^{\dagger} .$$
(B.9)

De (B.8), on peut donc réexprimer (B.2) selon :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \arg \max_{\boldsymbol{w}} \left( \frac{\sigma_{s_m}^2 |\tilde{\boldsymbol{w}}^{\dagger} \boldsymbol{a}_m|^2}{\boldsymbol{w}^{\dagger} ([\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{s_{\backslash m}} + \boldsymbol{R}_{nn}) \boldsymbol{w}} \right).$$
(B.10)

De par sa nature, la matrice  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_{\setminus m}} + \mathbf{R}_{nn}$  est hermitienne. Or, l'annexe A démontre que toute matrice hermitienne définie semi-positive peut être exprimée sous forme d'un produit  $\mathbf{LL}^{\dagger}$ . Comme  $\mathbf{R}_{xx}$  est toujours définie semi-positive [17], on peut reformuler (B.10) par :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \arg\max_{\boldsymbol{w}} \left( \frac{\sigma_{s_m}^2 |\boldsymbol{w}^{\dagger} \boldsymbol{a}_m|^2}{\boldsymbol{w}^{\dagger} ([\![\boldsymbol{L}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}} [\![\boldsymbol{L}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger}] \boldsymbol{w}} \right) \equiv \arg\max_{\boldsymbol{w}} \left( \frac{\sigma_{s_m}^2 |\boldsymbol{u}^{\dagger} \boldsymbol{v}|^2}{u^2} \right), \quad (B.11)$$

avec :

$$\boldsymbol{u}^{\dagger} = \boldsymbol{w}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} , \quad \boldsymbol{v} = \llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m} ,$$
  
$$\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger} = \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{s_{\backslash m}}^{-1} + \boldsymbol{R}_{nn} = \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} , \quad \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}| .$$
(B.12)

L'expression  $u^{\dagger}v$  au numérateur de (B.11) représente un produit scalaire vérifiant l'inégalité de Schwartz, c'est-à-dire :

$$|\boldsymbol{u}^{\dagger}\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| = u\boldsymbol{v}.$$
(B.13)

Cette borne informe simplement à l'effet que le produit scalaire de deux vecteurs  $\boldsymbol{u}$  et  $\boldsymbol{v}$  est maximal et égal à uv lorsque ceux-ci sont colinéaires. En introduisant cette valeur maximale en (B.11), on déduit que :

$$\max\left(\breve{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w})\right) = \max_{\boldsymbol{w}} \left(\frac{\sigma_{s_m}^2 |\boldsymbol{u}^{\dagger} \boldsymbol{v}|^2}{u^2}\right) \leqslant \sigma_{s_m}^2 \frac{(uv)^2}{u^2} = \sigma_{s_m}^2 v^2 \,. \tag{B.14}$$

En substituant v par son expression équivalente en (B.12), on obtient :

$$\max\left(\breve{\rho}_{s_m}(\boldsymbol{w})\right) = \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{v}^{\dagger} \boldsymbol{v} = \sigma_{s_m}^2 (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m)^{\dagger} (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m)$$
$$= \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{a}_m^{\dagger} (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger})^{-1} \boldsymbol{a}_m$$
$$= \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{a}_m^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m .$$
(B.15)

<sup>1.</sup> On emploi ici une modélisation du type  $x_k = As_k + n_k$  bien qu'en réalité la matrice A puisse être vue comme une matrice de canal généralisée non nécessairement équivalente à la matrice directionnelle du réseau. La structure précise de A n'interviendra d'ailleurs pas dans l'obtention du résultat final.

Conformément à (B.13), ce maximum est atteint lorsque u et v sont colinéaires, soit lorsque :

$$\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{v} ,$$

$$\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger} \boldsymbol{w} = \alpha (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m}) ,$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{w} = \alpha (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger})^{-1} (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m})$$

$$= \alpha (\llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger} \llbracket \boldsymbol{L}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{\dagger})^{-1} \boldsymbol{a}_{m} = \alpha \llbracket \boldsymbol{R}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m} . \quad (B.16)$$

La solution générale à l'équation (B.11) prend donc la forme :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = \alpha [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s \mid m, \boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m, \qquad (B.17)$$

où une valeur de  $\alpha$  peut être obtenue par imposition d'une contrainte du type  $\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}_m)\boldsymbol{a}_m = c$ . On aura :

$$\boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}_{m})\boldsymbol{a}_{m} = (\alpha [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m})^{\dagger} \boldsymbol{a}_{m} = c,$$
  
$$\Rightarrow \alpha = \frac{c}{\boldsymbol{a}_{m}^{\dagger} [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_{m}}.$$
(B.18)

L'expression définitive du vecteur de pondération optimal devient donc :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = c \frac{[\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m}{\boldsymbol{a}_m^{\dagger} [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m} \,. \tag{B.19}$$

Toutefois, la matrice  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m}, n\}}$  ne peut être calculée que si les paramètres  $\sigma_{s_m}^2$  et  $\mathbf{a}_m$  sont connus, ce qui n'est généralement pas le cas. En pratique, seule  $\mathbf{R}_{xx} = [\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{s_m} + [\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m}, n\}}$ (considérant des sources indépendantes) peut être estimée à partir des échantillons  $\{x_k\}_{k=1}^K$ . Or il est possible de montrer que (B.19) peut également être exprimée à partir de  $\mathbf{R}_{xx}$  sans la connaissance a priori de  $[\![\mathbf{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m}, n\}}$ . Considérons pour ce la formation de  $\mathbf{R}_{xx}$  selon (B.7) et (B.8). On a :

$$\boldsymbol{R}_{xx} = \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{a}_m \boldsymbol{a}_m^{\dagger} + [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}.$$
(B.20)

On aura maintenant recours au lemme d'inversion matricielle, qui est un outil fréquemment employé en algèbre linéaire et dont la démonstration est présentée en [121]. Ce dernier stipule que :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1},$$
 (B.21)

où A et C sont des matrices carrées de rang complet. En posant  $A = R_{xx}$ ,  $B = a_m$ ,  $C = -\sigma_{s_m}^2$ et  $D = a_m^{\dagger}$ , on obtient :

$$\llbracket \mathbf{R}_{xx} \rrbracket_{\{s_{\backslash m}, n\}}^{-1} = (\mathbf{R}_{xx} - \sigma_{s_m}^2 \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^{\dagger})^{-1}$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^{-1} - \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m ((-\sigma_{s_m}^2)^{-1} + \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m)^{-1} \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1}$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^{-1} - \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1}}{-\frac{1}{\sigma_{s_m}^2} + \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m}$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^{-1} + \frac{\sigma_{s_m}^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1}}{1 - \sigma_{s_m}^2 \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m} ,$$

$$= \left[ \mathbf{R}_{xx} \right]_{\{s_{\backslash m}, n\}}^{-1} \mathbf{a}_m = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m + \frac{\sigma_{s_m}^2 \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m}{1 - \sigma_{s_m}^2 \mathbf{a}_m^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m}$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m + (c' - 1) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m$$

$$= \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}_m , \qquad (B.23)$$

où  $c' = (1 - \sigma_{s_m}^2 \boldsymbol{a}_m^{\dagger} \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}_m)^{-1}$ . En introduisant (B.23) en (B.19), il s'en suit que :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m) = c \frac{[\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m}{\boldsymbol{a}_m^{\dagger} [\![\boldsymbol{R}_{xx}]\!]_{\{s_{\backslash m},\boldsymbol{n}\}}^{-1} \boldsymbol{a}_m} = c \frac{(c' \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}_m)}{\boldsymbol{a}_m^{\dagger} (c' \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}_m)} = c \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}_m}{\boldsymbol{a}_m^{\dagger} \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}_m}.$$
 (B.24)

Le vecteur  $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}_m)$  peut donc être obtenu directement à partir de  $\boldsymbol{R}_{xx}$ . Finalement, on peut formuler l'expression d'un vecteur de pondération général pour un paramètre de localisation arbitraire  $\boldsymbol{\nu}$  donné suivant :

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\nu}) = c \frac{\boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})}{\boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{R}_{xx}^{-1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu})} , \quad \boldsymbol{w}^{\dagger}(\boldsymbol{\nu}) \boldsymbol{a}(\boldsymbol{\nu}) = c .$$
(B.25)

On rappelle que ce résultat est optimal au sens du SINR seulement si une source localisée dans la région d'intérêt  $\nu$  est non corrélée aux autres sources.
### Annexe C

## Conditions de détection avec lissage spatial conventionnel

On analyse ici les conditions nécessaires à la détection des signaux considérant l'usage du lissage spatial conventionnel. On reprend les développements de la section 2.6.2 avec :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} = \boldsymbol{A}_{1} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f} \boldsymbol{A}_{1}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} \quad , \quad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{D}^{1-r} \, . \tag{C.1}$$

Le rang de la matrice de covariance lissée sans bruit  $[\![\widetilde{R}^f_{xx}]\!]_{\backslash n} = \widetilde{R}^f_{xx} - \widetilde{R}^f_{nn}$  est donné par :

$$\operatorname{rang}\{[\![\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}\} = \operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}_{1}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f}\boldsymbol{A}_{1}^{\dagger}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}_{1}\},\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f}\}\right)$$
$$= \min\left(\min(L, M),\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f}\}\right), \qquad (C.2)$$

avec

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f}\} = \operatorname{rang}\left\{\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}\boldsymbol{D}^{r-1}\boldsymbol{R}_{ss}\boldsymbol{D}^{1-r}\right\}.$$
(C.3)

Considérons d'abord le cas d'un seul groupe de signaux cohérents (i.e. G = 1 et  $M = M_1$ ). L'équation (2.95) montre que dans ce cas  $\mathbf{R}_{ss} = \sigma_{u_1}^2 \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{\alpha}_1^{\dagger}$  et donc ici que :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss} \boldsymbol{D}^{1-r} = \frac{\sigma_{u_{1}}^{2}}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{\alpha}_{1} (\boldsymbol{D}^{r-1} \boldsymbol{\alpha}_{1})^{\dagger} \equiv \frac{\sigma_{u_{1}}^{2}}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{\xi}_{r_{1}}^{f} (\boldsymbol{\xi}_{r_{1}}^{f})^{\dagger}, \quad (C.4)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f = \boldsymbol{D}^{r-1}\boldsymbol{\alpha}_1$ . La matrice  $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^f$  peut donc être exprimée par une somme de R dyades, et son rang est donc égal au nombre de dyades  $\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f(\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f)^{\dagger}$  linéairement indépendantes (si ce nombre est inférieur ou égal à  $M_1$ ). Or, deux dyades  $\boldsymbol{\xi}_{p_1}^f(\boldsymbol{\xi}_{p_1}^f)^{\dagger}$  et  $\boldsymbol{\xi}_{q_1}^f(\boldsymbol{\xi}_{q_1}^f)^{\dagger}$  sont linéairement dépendantes si et seulement si, pour  $p \neq q$ , il existe un scalaire  $\zeta \neq 0$  tel que :

=

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{p_1}^f &= \zeta \boldsymbol{\xi}_{q_1}^f ,\\ (\boldsymbol{D}^{p-1}\boldsymbol{\alpha}_1) &= \zeta (\boldsymbol{D}^{q-1}\boldsymbol{\alpha}_1) ,\\ \boldsymbol{D}^{p-1} &= \zeta \boldsymbol{D}^{q-1} ,\\ \boldsymbol{D}^{p-1} (\boldsymbol{D}^{q-1})^{-1} &= \zeta \boldsymbol{I} ,\\ \boldsymbol{D}^{p-q} &= \zeta \boldsymbol{I} ,\\ &\Rightarrow e^{-j(p-q)\phi_m} &= \zeta \;\forall \; m \in \{1, 2, \dots, M\} . \end{aligned}$$
(C.5)

On constate que cette égalité n'est vérifiée que si  $\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_m$ , ce qui impliquerait que toutes les sources soient localisées au même endroit dans l'espace, ce qui serait difficilement justifiable en pratique. On écartera donc cette possibilité en concluant que les R vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f$  (ou les R dyades  $\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f(\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f)^{\dagger}$ ) sont linéairement indépendants. Ainsi :

$$\operatorname{rang}\{\hat{R}_{ss}^f\} = \min(M, R) = \min(M_1, R),$$
 (C.6)

car on considère toujours un seul groupe de signaux et on rappelle que  $\tilde{R}_{ss}^{f}$  est de dimension  $M \times M$ . De (C.2), on obtient donc :

$$\operatorname{rang}\{[\![\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^f]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}}\} = \min\left(\min(L, M), \min(M, R)\right) = \min(L, M_1, R).$$
(C.7)

On cherche maintenant à déterminer les conditions nécessaires à la localisation des  $M_1$  sources à partir d'une méthode à haute résolution comme MUSIC. Comme discuté à la section 2.6, une première condition implique que le rang de la matrice de covariance des sources (i.e. rang{ $\tilde{R}_{ss}^{f}$ }) soit complet afin d'assurer l'orthogonalité de  $A_1$  aux vecteurs de base du sousespace orthogonal de  $\tilde{R}_{xx}^{f}$ . Considérant (C.6), on doit donc avoir :

$$R \ge M_1 \,. \tag{C.8}$$

Dans un deuxième temps, l'existence du sous-espace orthogonal de  $\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^{f}$  implique la singularité de  $[\![\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^{f}]\!]_{\backslash n}$ , n'étant vérifiée que si  $L > \operatorname{rang}\{[\![\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^{f}]\!]_{\backslash n}\}$  car  $[\![\widetilde{\mathbf{R}}_{xx}^{f}]\!]_{\backslash n}$  est de dimension  $L \times L$ . Selon (C.7) et (C.8), cette condition est vérifiée lorsque :

$$L \ge M_1 + 1. \tag{C.9}$$

Finalement, à partir de (2.104) et (C.8), on déduit que :

$$(N - R + 1) \ge M_1 + 1,$$
  

$$N \ge M_1 + R,$$
  

$$\Rightarrow N \ge 2M_1.$$
(C.10)

Ainsi, la localisation sans ambiguïté de  $M = M_1$  signaux cohérents nécessite un minimum de  $2M_1$  éléments, qui par ailleurs serait réduit à N = M + 1 si la cohérence de ces mêmes signaux

disparaissaient (i.e. rang{ $R_{ss}$ } = M). Il s'agit donc d'une limitation importante pour ce type de pré-traitement, qui possède néanmoins des avantages considérables dans le cas d'une forte corrélation (ou cohérence) des signaux. Les résultats présentés jusqu'ici sont essentiellement les mêmes que ceux obtenus en [40], et ne concernent que le cas spécifique où G = 1. En général, pour M < N, on remarque qu'une augmentation de G réduit le nombre d'éléments minimal requis à la localisation de l'ensemble des sources, augmentant ainsi le degré de liberté effectif du réseau. Il serait donc intéressant d'établir une relation semblable à (C.10), fonction de G, qui permettrait d'obtenir une valeur minimale de N telle qu'une valeur appropriée de Lpuisse être imposée au traitement. À cet effet, on remarque que l'équation (2.106) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{x}_{r}^{J}(t_{k}) = \mathbf{A}_{r} \Xi \boldsymbol{u}_{k} + \boldsymbol{n}_{r}(t_{k})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r_{1}} \quad \mathbf{A}_{r_{2}} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{r_{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{1} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\alpha}_{2} \quad \dots \quad \mathbf{0} \\ \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \boldsymbol{\alpha}_{G} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k} + \boldsymbol{n}_{r}(t_{k})$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{r_{1}} \boldsymbol{\alpha}_{1} \quad \mathbf{A}_{r_{2}} \boldsymbol{\alpha}_{2} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{r_{G}} \boldsymbol{\alpha}_{G} \end{bmatrix} \boldsymbol{u}_{k} + \boldsymbol{n}_{r}(t_{k}), \qquad (C.11)$$

où  $\mathbf{A}_{r_g}$  représente la sous-matrice allant des lignes  $r \ge r + L - 1$  et colonnes  $\sum_{i=1}^{g-1} M_i + 1 \ge \sum_{i=1}^{g} M_i$  de  $\mathbf{A}$ . Comme en (2.107), on voit ici que :

$$\mathbf{A}_{r_g} = \mathbf{A}_{1_g} \mathbf{D}_g^{r-1} \,, \tag{C.12}$$

où  $D_g$  représente la sous-matrice allant des lignes et colonnes  $\sum_{i=1}^{g-1} M_i + 1$  à  $\sum_{i=1}^{g} M_i$  telle que :

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_G \end{bmatrix}.$$
 (C.13)

L'inclusion de (C.11) et (C.12) en (2.110) implique donc :

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_{r}}^{f} = E\left\{\boldsymbol{X}_{r}^{f}(t_{k})\left(\boldsymbol{X}_{r}^{f}(t_{k})\right)^{\dagger}\right\} = \sum_{g=1}^{G} \boldsymbol{A}_{1_{g}}\boldsymbol{D}_{g}^{r-1}\boldsymbol{R}_{ss_{g}}\boldsymbol{D}_{g}^{1-r}\boldsymbol{A}_{1_{g}}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2}\boldsymbol{I}, \qquad (C.14)$$

où  $\mathbf{R}_{ss_g} = \sigma_{u_g}^2 \boldsymbol{\alpha}_g \boldsymbol{\alpha}_g^{\dagger}$ . Finalement, l'application du lissage spatial selon (2.111) donne :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{r}}^{f} = \frac{1}{R} \sum_{g=1}^{G} \boldsymbol{A}_{1_{g}} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{D}_{g}^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss_{g}} \boldsymbol{D}_{g}^{1-r} \boldsymbol{A}_{1_{g}}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I}$$
$$\equiv \sum_{g=1}^{G} \boldsymbol{A}_{1_{g}} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{g}}^{f} \boldsymbol{A}_{1_{g}}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I} \equiv \sum_{g=1}^{G} [ [\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx_{g}}^{f}]]_{\backslash n} + \sigma_{n}^{2} \boldsymbol{I}, \qquad (C.15)$$

avec :

$$[\![\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx_g}^f]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} = \boldsymbol{A}_{1_g} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^f \boldsymbol{A}_{1_g}^\dagger , \quad \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^f = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{D}_g^{r-1} \boldsymbol{R}_{ss_g} \boldsymbol{D}_g^{1-r} = \frac{\sigma_{u_1}^2}{R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\xi}_{r_1}^f (\boldsymbol{\xi}_{r_1}^f)^\dagger , \qquad (C.16)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_{r_g}^f = \boldsymbol{D}_g^{r-1} \boldsymbol{\alpha}_g$ . Comme on pouvait s'y attendre, le lissage spatial de  $\boldsymbol{R}_{xx}$  implique également celui de l'ensemble des matrices de covariance de chaque groupe. L'opération peut donc être vue comme un opérateur linéaire tel que :

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{L}^{f}\{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\} = \widetilde{\mathcal{L}}_{L}^{f}\{\boldsymbol{X}\} + \widetilde{\mathcal{L}}_{L}^{f}\{\boldsymbol{Y}\}, \qquad (C.17)$$

où  $\widetilde{\mathcal{L}}_{L}^{f}\{\cdot\}$  représente l'opération de lissage spatial de type "forward" permettant l'obtention d'une matrice de dimension  $L \times L$ , et où  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  sont des matrices carrées de dimensions supérieures ou égales à L. Il s'ensuit que les développements effectués précédemment concernant G = 1 où  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx_1}$  s'appliquent également à toute matrice  $\mathbf{R}_{xx_g}$ , du moins pour les équations (C.4) à (C.6). On déduit ainsi que :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{q}}^{f}\} = \min(M_{g}, R).$$
(C.18)

Considérons à présent  $\tilde{\boldsymbol{V}}_n^f$ , la matrice des vecteurs de base du sous-espace orthogonal de  $\tilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^f$ . De (C.15), similairement à (2.6), on observe que :

$$[\![\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f}]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} \widetilde{\boldsymbol{V}}_{n}^{f} = \sum_{g=1}^{G} \boldsymbol{A}_{1_{g}} \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{g}}^{f} \boldsymbol{A}_{1_{g}}^{\dagger} \widetilde{\boldsymbol{V}}_{n}^{f} = \boldsymbol{0},$$
  

$$\Rightarrow \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{g}}^{f} \boldsymbol{A}_{1_{g}}^{\dagger} \widetilde{\boldsymbol{V}}_{n}^{f} = \boldsymbol{0}.$$
(C.19)

La localisation de l'ensemble des sources d'un groupe g quelconque nécessite donc que  $\mathbf{A}_{1_g}^{\dagger} \tilde{\mathbf{V}}_n^f = \mathbf{0}$ , et n'est possible que lorsque  $\mathbf{R}_{ss_g}$  est de rang complet, i.e.  $M_g$ . Suivant (C.18), on déduit que cette condition est vérifiée lorsque :

$$R \ge M_g \,. \tag{C.20}$$

Par ailleurs, une deuxième condition implique l'existence de  $\tilde{V}_n^f$ , impliquant à son tour la singularité de  $[\![\tilde{R}_{xx}^f]\!]_{\backslash n}$ , soit :

$$L > \operatorname{rang}\{ [\![ \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} ]\!]_{\backslash \boldsymbol{n}} \} = \min \left( \min(L, M), \operatorname{rang}\{ \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f} \} \right), \qquad (C.21)$$

où cette dernière expression provient de (C.2). Or, considérant (2.96), (C.13) et (C.16), on a :

$$\begin{split} \tilde{R}_{ss}^{f} &= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} D^{r-1} R_{ss} D^{1-r} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \begin{bmatrix} D_{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{G} \end{bmatrix}^{1-r} \\ & \cdot \begin{bmatrix} R_{ss_{1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{ss_{2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{ss_{G}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{G} \end{bmatrix}^{1-r} \\ & = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \begin{bmatrix} D_{1}^{r-1} R_{ss_{1}} D_{1}^{1-r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2}^{r-1} R_{ss_{2}} D_{2}^{1-r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{G}^{r-1} R_{ss_{G}} D_{G}^{1-r} \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \tilde{R}_{ss_{1}}^{f} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{R}_{ss_{2}}^{f} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{R}_{ss_{G}}^{f} \end{bmatrix} . \end{split}$$
(C.22)

Sachant en général que le rang de toute matrice diagonale par bloc est égale à la somme des rangs des éléments (blocs) de la diagonale principale, et considérant le résultat obtenu en (C.18), on déduit que :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{f}\} = \sum_{g=1}^{G} \operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{g}}^{f}\} = \sum_{g=1}^{G} \min(M_{g}, R) \,. \tag{C.23}$$

En réintroduisant cette expression en (C.21), on obtient :

$$L > \min\left(\min(L, M), \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, R)\right), \qquad (C.24)$$

$$\Rightarrow L > \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, R), \qquad (C.25)$$

qui correspond donc à la condition requise à la singularité de  $[\![\widetilde{R}_{xx}^f]\!]_{\backslash n}$ . À première vue, un lecteur avisé trouvera difficile de justifier un tel résultat. Pour y arriver, il s'agit de procéder en deux étapes. Premièrement, en supposant que  $\min(L, M) = L$  en (C.24), on obtient une inégalité de la forme  $L > \min(L, \cdot)$ . Or, dans ce cas, on ne peut avoir  $\min(L, \cdot) = L$  car on obtiendrait L > L. On conclue donc que L est supérieur à la sommation de (C.24), aboutissant ainsi à (C.25). Dans un deuxième temps, on remarque que  $\sum_{i=1}^{G} \min(M_i, R)$  possède une valeur maximale égale à M, obtenue lorsque  $R \ge \max_g(M_g)$ . En supposant que  $\min(L, M) = M$ , on obtient donc  $L > \min(M, \cdot \leq M)$ , d'où (C.25). Les conditions nécessaires et suffisantes à la localisation des  $M_g$  sources d'un groupe g quelconque sont donc obtenues de (C.20) et (C.25), soit :

$$R \ge M_g \ , \ L-1 \ge \sum_{i=1}^G \min(M_i, R) \,, \tag{C.26}$$
$$(N-R) \ge \sum_{i=1}^G \min(M_i, M_g) \,,$$
$$N \ge \sum_{i \ne g} \min(M_i, M_g) + M_g + R \,,$$
$$\Rightarrow N \ge 2M_g + \sum_{i \ne g} \min(M_i, M_g) \,. \tag{C.27}$$

On observe ainsi que pour G = 1, l'équation (C.27) implique que  $N \ge 2M_1$  et correspond directement au résultat obtenu en (C.10). Pour M = G, on obtient  $N \ge M + M_g$ , où  $M_g =$  $1 \forall g$  étant donné M = G. Il s'agit donc bien de la condition nécessaire à la localisation de M sources indépendantes. Entre ces deux extrêmes, on obtient une valeur minimale de N se situant dans l'intervalle ]M + 1, 2M[. Par ailleurs, pour tout G, une borne inférieure pour Ls'obtient directement de (C.20) et (C.25) par :

$$L \ge M_g + \sum_{i \ne g} \min(M_i, M_g) + 1.$$
(C.28)

L'imposition d'une valeur de L vérifiant (C.28) permet donc la localisation sans ambiguïté des  $M_g$  sources d'un groupe g quelconque. En s'intéressant maintenant aux conditions requises à la localisation de l'ensemble des M sources, on doit avoir, conformément à (C.18) et (C.19) :

$$\operatorname{rang}\{\tilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^f\} = M_g \ \forall \ g \ ,$$
$$\Rightarrow R \ge \max_g(M_g) \ . \tag{C.29}$$

De plus, une deuxième condition implique l'existence de  $\tilde{V}_n^f$ , soit la singularité de  $[\![\tilde{R}_{xx}^f]\!]_{\backslash n}$ . Par combinaison des équations (C.25) et (C.29), on obtient donc :

$$R \ge \max_{g}(M_{g}) , \quad L-1 \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_{i}, R) ,$$
  

$$(N-R) \ge \sum_{i=1}^{G} \min\left(M_{i}, \max_{g}(M_{g})\right) ,$$
  

$$N \ge M+R ,$$
  

$$\Rightarrow N \ge M + \max_{g}(M_{g}) .$$
(C.30)

Cette condition est donc nécessaire à la localisation de l'ensemble des sources, où l'on y voit d'ailleurs une concordance rigoureuse avec (C.27).

### Annexe D

# Conditions de détection avec lissage spatial bidirectionnel

On analyse ici les conditions nécessaires à la détection des signaux considérant l'emploi du lissage spatial bidirectionnel. On débute en étudiant la structure de  $\tilde{R}_{ss}^b$  définie en (2.123). Considérant (2.96) et (C.13), on a :

$$\widetilde{R}_{ss}^{b} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} D^{r-N} R_{ss}^{*} D^{N-r} 
= \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \begin{bmatrix} D_{1}^{r-N} R_{ss_{1}}^{*} D_{1}^{N-r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2}^{r-N} R_{ss_{2}}^{*} D_{2}^{N-r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{G}^{r-N} R_{ss_{G}}^{*} D_{G}^{N-r} \end{bmatrix} 
= \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{ss_{1}}^{b} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{R}_{ss_{2}}^{b} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{R}_{ss_{G}}^{b} \end{bmatrix}.$$
(D.1)

Similairement à (C.23), on a :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^{b}\} = \sum_{g=1}^{G} \operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_{g}}^{b}\}.$$
 (D.2)

Par ailleurs, on remarque que :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^b = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{D}_g^{r-N} \boldsymbol{R}_{ss_g}^* \boldsymbol{D}_g^{N-r} = \frac{\sigma_{u_g}^2}{R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{D}_g^{r-N} \boldsymbol{\alpha}_g^* (\boldsymbol{D}_g^{r-N} \boldsymbol{\alpha}_g^*)^{\dagger}$$
$$\equiv \frac{\sigma_{u_g}^2}{R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\xi}_{r_g}^b (\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b)^{\dagger}, \qquad (D.3)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b = \boldsymbol{D}_g^{r-N} \boldsymbol{\alpha}_g^*$ . Comme vu à l'annexe C, le rang de  $\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^b$  est égal au nombre de vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b$  linéairement indépendants (si ce dernier est inférieur ou égal à  $M_g$ ). On note que la dépendance linéaire de deux vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^b$  et  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b$  existe si, pour  $p \neq q$  et  $\zeta \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_{pg}^{b} &= \zeta \boldsymbol{\xi}_{qg}^{b} ,\\ (\boldsymbol{D}_{g}^{p-N} \boldsymbol{\alpha}_{g}^{*}) &= \zeta (\boldsymbol{D}_{g}^{q-N} \boldsymbol{\alpha}_{g}^{*}) ,\\ \boldsymbol{D}_{g}^{p-N} &= \zeta \boldsymbol{D}_{g}^{q-N} ,\\ \boldsymbol{D}_{g}^{p-N} (\boldsymbol{D}_{g}^{q-N})^{-1} &= \zeta \boldsymbol{I} ,\\ \boldsymbol{D}_{g}^{p-q} &= \zeta \boldsymbol{I} ,\\ &\Rightarrow e^{-j(p-q)\phi_{g_{i}}} &= \zeta \ \forall \ i \in \{1, 2, \dots, M_{g}\} . \end{aligned}$$
(D.4)

Les vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^b$  et  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b$  sont donc linéairement dépendants si tous les angles  $\{\phi_{g_i}\}_{i=1}^{M_g}$  d'un même groupe g sont identiques. Comme on supposera logiquement que deux sources distinctes sont situées en des endroits différents de l'espace, l'égalité (D.4) sera écartée permettant ainsi de dire que l'ensemble des R vecteurs  $\{\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b\}_{r=1}^R$  sont linéairement indépendants, et du coup que :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^b\} = \min(M_g, R) \,. \tag{D.5}$$

L'introduction de cette expression en (D.2) permet donc d'écrire :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^b\} = \sum_{g=1}^G \min(M_g, R), \qquad (D.6)$$

qui est un résultat identique à celui obtenu pour  $\widetilde{\mathbf{R}}_{ss}^{f}$  en (C.23). Considérons maintenant la matrice de covariance lissée bidirectionnelle définie en (2.124). On a :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} = \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^f + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^b), \qquad (D.7)$$

Un développement à partir des équations (2.111) et (2.123) montre que :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} = \frac{1}{2} \left( (\boldsymbol{A}_1 \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^f \boldsymbol{A}_1^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{A}_1 \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^b \boldsymbol{A}_1^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}) \right) \\ = \boldsymbol{A}_1 \left( \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^f + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}^b) \right) \boldsymbol{A}_1^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I} \equiv \boldsymbol{A}_1 \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss} \boldsymbol{A}_1^{\dagger} + \sigma_n^2 \boldsymbol{I}.$$
(D.8)

Par ailleurs, mentionnons qu'une expression équivalente à  $\tilde{R}_{xx}$  peut également être obtenue à partir de l'unique matrice  $\tilde{R}_{xx}^{f}$ . En effet, remarquons d'abord à partir de (2.106), (2.107) et (2.118) que :

$$\boldsymbol{x}_{r}^{b}(t_{k}) = \boldsymbol{J} \left( \boldsymbol{x}_{R-r+1}^{f}(t_{k}) \right)^{*}.$$
 (D.9)

Ainsi, un calcul le  $\mathbf{R}^{b}_{XX_{r}}$  en (2.122) donne :

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_{r}}^{b} = E\left\{\boldsymbol{x}_{r}^{b}(t_{k})\left(\boldsymbol{x}_{r}^{b}(t_{k})\right)^{\dagger}\right\} = \boldsymbol{J}\left(E\left\{\boldsymbol{x}_{R-r+1}^{f}(t_{k})\left(\boldsymbol{x}_{R-r+1}^{f}(t_{k})\right)^{\dagger}\right\}\right)^{*}\boldsymbol{J}$$
$$= \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}_{R-r+1}}^{f}\right)^{*}\boldsymbol{J}, \qquad (D.10)$$

d'où :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{b} = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{r}}^{b} = \boldsymbol{J} \left( \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{R-r+1}}^{f} \right)^{*} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J} \left( \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R} \boldsymbol{R}_{xx_{r}}^{f} \right)^{*} \boldsymbol{J}$$
$$= \boldsymbol{J} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f})^{*} \boldsymbol{J} .$$
(D.11)

En reconsidérant l'équation (D.7), une expression équivalente pour  $\widetilde{\pmb{R}}_{xx}$  devient donc :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} = \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{b}) = \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f} + \boldsymbol{J} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx}^{f})^{*} \boldsymbol{J}).$$
(D.12)

Pour sa part, le rang de  $[\widetilde{R}_{xx}]_{n}$  évalué à partir de (D.8) donne :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} \rrbracket_{n}\} = \min\left(\operatorname{rang}\{\boldsymbol{A}_{1}\}, \operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}\}\right) = \min\left(\min(L, M), \operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}\}\right).$$
(D.13)

Conformément à (C.22) et (D.1), on a :

$$\widetilde{R}_{ss} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{ss_{1}}^{f} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{R}_{ss_{2}}^{f} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \widetilde{R}_{ss_{G}}^{f} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{ss_{1}}^{b} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{R}_{ss_{2}}^{b} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \widetilde{R}_{ss_{G}}^{b} \end{bmatrix} \\
= \begin{bmatrix} \widetilde{R}_{ss_{1}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{R}_{ss_{2}} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \widetilde{R}_{ss_{G}} \end{bmatrix}.$$
(D.14)

Ainsi :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}\} = \sum_{g=1}^{G} \operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}\}, \qquad (D.15)$$

où :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g} = \frac{1}{2} (\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^f + \widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}^b) \,. \tag{D.16}$$

De (C.16) et (D.3), on remarque que  $\widetilde{R}_{ss_g}$  peut se réécrire sous la forme :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ssg} = \frac{\sigma_{u_g}^2}{2R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\xi}_{r_g}^f (\boldsymbol{\xi}_{r_g}^f)^\dagger + \frac{\sigma_{u_g}^2}{2R} \sum_{r=1}^R \boldsymbol{\xi}_{r_g}^b (\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b)^\dagger = \frac{\sigma_{u_g}^2}{2R} \sum_{r=1}^R \left( \boldsymbol{\xi}_{r_g}^f (\boldsymbol{\xi}_{r_g}^f)^\dagger + \boldsymbol{\xi}_{r_g}^b (\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b)^\dagger \right), \quad (D.17)$$

où  $\boldsymbol{\xi}_{r_g}^f = \boldsymbol{D}_g^{r-1} \boldsymbol{\alpha}_g$  et  $\boldsymbol{\xi}_{r_g}^b = \boldsymbol{D}_g^{r-N} \boldsymbol{\alpha}_g^*$ . Ainsi, on constate que  $\tilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}$  se compose d'une somme de 2*R* dyades. Son rang est donc égal au nombre de dyades linéairement indépendantes entres elles. Il a déjà été démontré en (C.5) et (D.4) que pour  $p \neq q$ , la dyade  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f(\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f)^{\dagger}$  est linéairement indépendante à  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^f(\boldsymbol{\xi}_{q_g}^f)^{\dagger}$ , de même que  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^b(\boldsymbol{\xi}_{p_g}^b)^{\dagger}$  envers  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b(\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b)^{\dagger}$ . Toutefois, il s'avère également nécessaire de vérifier la dépendance linéaire de  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f(\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f)^{\dagger}$  envers  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b(\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b)^{\dagger}$ , ou plus simplement celle de  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f$  envers  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b$ , et ce pour toutes les combinaisons possibles de  $\{p,q\} \in \{1,2,\ldots,M_g\}$ . Considérant un scalaire  $\zeta \neq 0$ , les vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f$  et  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b$  seront linéairement dépendants si :

$$\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f = \zeta \boldsymbol{\xi}_{q_g}^b,$$

$$(\boldsymbol{D}_g^{p-1} \boldsymbol{\alpha}_g) = \zeta (\boldsymbol{D}_g^{q-N} \boldsymbol{\alpha}_g^*),$$

$$(\boldsymbol{D}_g^{q-N})^{-1} \boldsymbol{D}_g^{p-1} \boldsymbol{\alpha}_g = \zeta \boldsymbol{\alpha}_g^*,$$

$$\boldsymbol{D}_g^{N-q+p-1} \boldsymbol{\alpha}_g = \zeta \boldsymbol{\alpha}_g^*,$$

$$\begin{bmatrix} e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_1}} \boldsymbol{\alpha}_{g_1} \\ e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_2}} \boldsymbol{\alpha}_{g_2} \\ \vdots \\ e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_M}} \boldsymbol{\alpha}_{g_{M_g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta \boldsymbol{\alpha}_{g_1}^* \\ \zeta \boldsymbol{\alpha}_{g_2}^* \\ \vdots \\ \zeta \boldsymbol{\alpha}_{g_{M_g}}^* \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_v}} \boldsymbol{\alpha}_{g_v}}{\boldsymbol{\alpha}_{g_v}^*} = \frac{e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_w}} \boldsymbol{\alpha}_{g_w}}{\boldsymbol{\alpha}_{g_w}^*} \; \forall \; \{v,w\} \in \{1,2,\ldots,M_g\}. \quad (D.18)$$

Sachant que  $\alpha_{g_1} = 1 \forall g^1$ , on obtient donc :

$$\frac{e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_v}}\alpha_{g_v}}{\alpha_{g_v}^*} = e^{-j(N-q+p-1)\phi_{g_1}}.$$
(D.19)

En posant  $\alpha_{g_v} = \epsilon_{g_v} e^{j\gamma_{g_v}}$  où  $\epsilon_{g_v}$  et  $\gamma_{g_v}$  sont réels et en résolvant pour  $\phi_{g_v}$ , on déduit que :

$$\phi_{g_v} = \frac{2\gamma_{g_v} + (N - q + p - 1)\phi_{g_1}}{N - q + p - 1} \ \forall \ p \in \{1, 2, \dots, M_g\}.$$
(D.20)

On obtient ainsi une relation liant la direction d'arrivée du signal v d'un groupe g (i.e.  $\phi_{g_v}$ ) à son déphasage par rapport à l'enveloppe  $u_g(t_k)$  ainsi qu'à la direction d'arrivée du premier signal du même groupe. Or, ces trois paramètres sont physiquement indépendants les uns des autres de sorte qu'il soit injustifiable et quasi improbable qu'une telle situation soit rencontrée en pratique. De plus, on constate que l'équation (D.20) doit demeurer valide pour tous les signaux d'un même groupe, ce qui s'avère encore moins réaliste. Tout bien considéré, on dira donc que les vecteurs  $\boldsymbol{\xi}_{p_g}^f$  et  $\boldsymbol{\xi}_{q_g}^b$  sont généralement linéairement indépendants, et que par le fait même les 2R dyades de (D.17) le sont également. Ainsi :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss_g}\} = \min(M_g, 2R).$$
 (D.21)

L'introduction d'une telle expression en (D.15) permet donc de dire que :

$$\operatorname{rang}\{\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ss}\} = \sum_{g=1}^{G} \min(M_g, 2R), \qquad (D.22)$$

<sup>1.</sup> On considère que la première source (enveloppe complexe) de chaque groupe est une référence à partir de laquelle les autres sources du groupe (i.e.  $g_2, g_3, \ldots, g_{M_g}$ ) s'expriment par le biais de coefficients de propagation  $\alpha_{g_2}, \alpha_{g_3}, \ldots, \alpha_{g_{M_g}}$ .

et donc au niveau de (D.13) :

$$\operatorname{rang}\{\llbracket \widetilde{\boldsymbol{R}}_{xx} \rrbracket_{n}\} = \min\left(\min(L, M), \sum_{g=1}^{G} \min(M_g, 2R)\right).$$
(D.23)

Tentons maintenant d'obtenir les conditions nécessaires à la localisation des  $M_g$  sources d'un groupe g, et éventuellement celles permettant la localisation de l'ensemble des sources. D'abord, dans un cas comme dans l'autre, l'existence d'une matrice  $\tilde{V}_n$  est requise comme voulu en (2.103), et implique de ce fait la singularité de  $[\tilde{R}_{xx}]_{n}$ , soit que  $L > \operatorname{rang}\{[\tilde{R}_{xx}]_{n}\}$ . Considérant (D.13), par un raisonnement similaire à celui effectué en (C.25), on doit donc avoir :

$$L > \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, 2R)$$
. (D.24)

D'autre part, l'égalité  $\mathbf{A}_{1_g}^{\dagger} \widetilde{\mathbf{V}}_n = \mathbf{0}$  n'est possible que si  $\widetilde{\mathbf{R}}_{ss_g}$  est de rang complet (i.e.  $M_g$ ). De (D.21), cela implique donc que :

$$\min(M_g, 2R) = M_g ,$$
  

$$\Rightarrow R \ge \left\lceil \frac{M_g}{2} \right\rceil , \qquad (D.25)$$

où [x] correspond au plus petit entier supérieur ou égal à x. Par combinaison des équations (D.24) et (D.25), on déduit que :

$$L - 1 \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, 2R),$$
  

$$(N - R) \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, 2R),$$
  

$$N \ge \sum_{i \ne g} \min\left(M_i, 2\left\lceil \frac{M_g}{2} \right\rceil\right) + M_g + R,$$
  

$$\Rightarrow N \ge \frac{3M_g}{2} + \sum_{i \ne g} \min\left(M_i, 2\left\lceil \frac{M_g}{2} \right\rceil\right).$$
 (D.26)

On note ici que l'emploi d'une fonction seuil est nécessaire afin d'assurer que le produit 2Rdemeure pair (car R est entier) lorsque  $M_g$  est impair. Autrement, une erreur serait commise lorsque  $M_i = M_g + 1$  dans la sommation de (D.26). Cette dernière correspond donc à la borne inférieure pour N permettant la localisation des  $M_g$  sources d'un groupe g quelconque. D'autre part, la localisation de l'ensemble des sources implique que rang $\{\tilde{R}_{ss}\} = M$  soit, conformément à (D.22) :

$$\sum_{g=1}^{G} \min(M_g, 2R) = M,$$
  

$$\Rightarrow 2R \ge \max_g(M_g),$$
  

$$\Rightarrow R \ge \left\lceil \frac{1}{2} \max_g(M_g) \right\rceil.$$
 (D.27)

L'introduction d'une telle expression en (D.24) implique donc :

$$L - 1 \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, 2R),$$
  

$$(N - R) \ge \sum_{i=1}^{G} \min(M_i, 2R),$$
  

$$N \ge M + R,$$
  

$$\Rightarrow N \ge M + \frac{1}{2} \max_g(M_g).$$
(D.28)

On constate cette fois qu'une valeur impair de  $M_g$  n'a aucune influence en (D.28) car N doit par définition prendre une valeur entière. L'équation (D.28) est donc une relation plus générale que la borne inférieure obtenue en [41], n'étant valable que pour G = 1. En pratique, les équations (D.26) et (D.28) peuvent être exploitées afin d'imposer une valeur optimale de R (ou L) permettant la localisation d'un ou plusieurs groupes de signaux considérant une approximation ou estimation adéquate de  $M_g \forall g$ .

### Annexe E

### Idées de travaux divers

Cette annexe présente quelques idées de travaux divers non directement reliés au problème principal abordé dans cette thèse, mais pouvant potentiellement donner suite à des contributions intéressantes. On présente notamment une étude de modélisation plus détaillée sur la longueur du canal avec l'emploi d'un modèle des signaux reçus du type FIR-MIMO, ainsi que certaines considérations spectrales propres aux signaux passe-bandes.

### E.1 Modélisation FIR-MIMO

Certains développements intéressants ont été présentés à la section 5.4.2 concernant la modélisation FIR-MIMO des signaux reçus. Entre autre une attention particulière a été accordée au calcul de la longueur de canal exacte permettant de modéliser adéquatement les enveloppes complexes reçues au niveau du réseau. Une telle étude peut se justifier du fait que la littérature présente un éventail important de travaux fondés sur l'hypothèse de canaux sans mémoire<sup>1</sup> ou des expressions de cette dernière uniquement fonction de l'étalement en délai maximal du système [75, 76, 77, 78, 81, 82].

Dans cette section, on approfondira certains aspects de modélisation qui n'ont pas été présentés à la section 5.4.2. On présentera également une contrainte de modélisation particulière considérant le suréchantillonnage du vecteur des signaux reçus  $\boldsymbol{x}(t)$  ( $T_{s} < T$ ) qui n'a pas non plus été abordée aux chapitres 5 et 6.

<sup>1.</sup> On rappelle que l'hypothèse d'un canal sans mémoire peut être valide considérant des signaux reçus synchrones et un recouvrement parfait des instants des symboles, comme illustré à la Fig. 5.2 (a).

#### E.1.1 Longueur du canal

#### Généralités considérant une seule enveloppe reçue

Reprenons d'abord (5.11) dans le cas SU-SIMO (expression des signaux reçus à l'antenneréseau à un instant  $t_k = t_0 + kT$  dans le cas d'un seul usager). On avait :

$$\boldsymbol{x}_{k} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{1}(t_{k}) = \boldsymbol{H}_{1}\boldsymbol{s}_{1_{k}}$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{N1} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{H}_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{1}}^{*} & c_{1_{2}}^{*} & \dots & c_{1_{L_{1}}}^{*} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{1}(t_{k})} \begin{bmatrix} s_{1_{k}} \\ s_{1_{k-1}} \\ \vdots \\ s_{1_{k-L_{1}+1}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{u}_{1}(t_{k})}$$

$$= \boldsymbol{b}_{1}\boldsymbol{c}_{1}^{\dagger}\boldsymbol{s}_{1_{k}}, \qquad (E.2)$$

où on rappelle que le bruit était négligé pour fins d'analyse de la partie signal seulement. L'équation (E.2) est valide lorsqu'une seule enveloppe complexe est reçue au niveau du réseau et sous l'hypothèse bande étroite (car l'enveloppe  $u_1(t)$  est perçue au niveau de tous les éléments du réseau au temps t). On ne s'intéressera ici qu'à la modélisation de l'enveloppe  $u_1(t_k)$ en (E.1). De ce fait, pour alléger la présentation, on laissera tomber l'indice 1 dans tous les développements subséquents sachant toutefois qu'on ne considère qu'une seule enveloppe reçue. Les résultats obtenus pourront ensuite être généralisés pour un nombre arbitraire d'enveloppes reçues comme en (5.16). De (E.1), on écrira que :

$$u(t_k) = \boldsymbol{c}^{\dagger} \boldsymbol{s}_k = \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* & \dots & c_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ s_{k-1} \\ \vdots \\ s_{k-L+1} \end{bmatrix}.$$
 (E.3)

On exprime donc ici l'enveloppe reçu u(t) au temps  $t = t_k$  par une somme pondérée de L symboles consécutifs. Telle qu'elle toutefois, l'équation (E.3) est incorrecte, car comme mentionné à la section 5.4.2, la valeur exacte d'une enveloppe u(t) à un temps général t ne dépend pas uniquement du symbole courant  $s_k$  et des symboles précédents  $\{s_{k-\ell}\}_{\ell=1}^{L-1}$ , mais également d'un certain nombre de symboles futurs. Ceci est clairement visible à la Fig. 5.4 où l'énergie d'un symbole futur contribue à la valeur de u(t) au temps t. Le nombre exact de symboles futurs (et précédents) contribuant à la valeur de u(t) à un temps t dépend de la fonction de mise en forme d'impulsion p(t) reçue ainsi que de la phase d'échantillonnage. En général, on peut écrire que :

$$u(t_k) = \boldsymbol{c}^{\dagger} \boldsymbol{s}_k = \begin{bmatrix} c_1^* & c_2^* & \dots & c_L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{k+u} \\ \vdots \\ s_k \\ \vdots \\ s_{k-b} \end{bmatrix}, \quad (E.4)$$

où k + u et k - b sont les indices supérieur et inférieur des symboles consécutifs contribuant à la valeur de u(t) au temps  $t = t_k$ . Cette dernière s'exprime selon (5.2) par :

$$u(t) = \sum_{\ell} s_{\ell} p(t - \tau - \ell T), \qquad (E.5)$$

où  $\{s_{\ell}\}_{\ell}$  est la séquence des symbole transmis. Les vecteurs c et  $s_k$  en (E.4) contiennent L éléments, et on s'assure que :

$$L = u + b + 1 \leqslant \left\lceil \frac{W}{T} \right\rceil = L_{\max} , \qquad (E.6)$$

où W est la largeur temporelle de p(t) (cf. Fig. 5.4). L'équation (E.6) est donc compatible à (5.13) considérant qu'ici on assume la réception d'une seule enveloppe complexe (e.g. un trajet direct), impliquant un étalement en délai nul. La largeur temporelle d'une fonction p(t) peut être exprimée de façon plus générale en terme des bornes de l'intervalle où p(t) > 0. Selon les conventions de la Fig. E.1, on a :



FIGURE E.1 – Fonction de mise en forme d'impulsion p(t) arbitraire prenant une valeur nulle hors de l'intervalle  $]t_1, t_2[$ . Par convention, l'instant du symbole est imposé a t = 0. Ceci implique que  $p(0) \neq 0$  et par conséquent que  $t_1 \leq 0$  et  $t_2 \geq 0$ .

$$W = t_2 - t_1 . \tag{E.7}$$

Par ailleurs, la Fig. E.2 aide à visualiser comment u et b s'expriment en fonction de  $t_1$ ,  $t_2$  et le délai asynchrone  $\tau$  qui tient compte ici de la phase d'échantillonnage. En général, on a :

$$u = \begin{cases} \left\lceil \frac{-t_1 - d}{T} - \frac{1}{2} \right\rceil & t_1 + d < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}, \quad b = \begin{cases} \left\lceil \frac{t_2 + d}{T} - \frac{3}{2} \right\rceil & t_2 + d > \frac{T}{2} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}.$$
 (E.8)



FIGURE E.2 – Représentation des fonctions de mise en forme d'impulsion d'une enveloppe hypothétique u(t) selon (E.5). On y montre les instants des symboles (sommets) de même que les symboles qui contribuent à u(t) à l'instant  $t = t_k$ . Les fonctions de mise en forme d'impulsion sont telles que  $t_1 = -1.3T$  et  $t_2 = 2.25T$ .

Le paramètre d ne sert ici que de variable intermédiaire pour simplifier les calculs, et est directement lié à la phase d'échantillonnage (ou  $\tau$ ) :

$$d = \begin{cases} \tau + \frac{T}{2} & \tau \in \left[0, \frac{T}{2}\right], \\ \tau - \frac{T}{2} & \tau \in \left]\frac{T}{2}, T\right]. \end{cases}$$
(E.9)

Puisque  $\tau \in [0, T[$  (cf. (5.7)), d est restreint à l'intervalle  $\in ]0, T]$ . Il s'agit d'une convention faisant en sorte que parmi les limites (gauche et droite) d'une fenêtre de symbole donnée, seule celle de gauche soit considérée comme étant incluse dans la période du symbole en question. Pour bien interpréter la Fig. E.2, il faut imaginer que lors d'une variation de la phase d'échantillonnage, seuls les instants d'échantillonnage se déplacent sur l'axe des abscisses, et non les instants des symboles (ni leurs fenêtres correspondantes). L'instant  $t_k$  est donc toujours compris dans l'intervalle de la fenêtre propre au symbol  $s_k$  pour toutes les valeurs de  $\tau \in [0, T[$ (phase d'échantillonnage). Ainsi, sur la Fig. E.2, on a  $d \approx 0.7T$ . Considérant les valeurs de  $t_1 = -1.3T$  et  $t_2 = 2.25T$  des fonctions de mise en forme d'impulsion, on vérifie selon (E.8) que u = 1 et b = 2. Il s'agit des bornes sur les indices des symboles futurs et précédents en (E.4) qui contribuent (de façon non nulle) à la valeur de u(t) au temps  $t = t_k$ . On confirme bien à la Fig. E.2 que quatre symboles (i.e. symboles  $s_{k-2}$  à  $s_{k+1}$ ) ont une énergie non nulle au temps  $t_k$ . La mémoire du canal est donc égale à L = 4, et est donc égale à sa valeur maximale selon (E.6), car ici  $W = t_2 - t_1 = 3.55T$ .

Pour une autre phase d'échantillonnage, par exemple pour  $d \approx T$ , l'équation (E.8) prédit que u = 0 et b = 2, et on confirme bien à la Fig. E.2 que dans cette région, seuls les symboles  $s_{k-2}$ ,  $s_{k-1}$  et  $s_k$  possèdent une énergie non nulle. La longueur du canal est donc égale à 3. À l'opposé, lorsque  $d \approx 0$ , on a u = 1 et b = 1, et la longueur du canal est aussi égale à 3. Les

valeurs de u et b en (E.4) sont donc dépendantes de la phase d'échantillonnage.

Considérant la réception d'une seule enveloppe complexe au niveau du réseau tel que considéré ici, une détection standard avec PLL et boucle de recouvrement des symboles pourrait facilement justifier que L = 1 si les fonctions de mise en forme d'impulsion respectent le critère de Nyquist<sup>2</sup>. Or la réception d'une seule enveloppe complexe en pratique est une situation triviale dépourvue d'intérêt (du moins d'un point de vue traitement de signal pour le problème étudié dans cette thèse). On considère tout de même une telle situation pour la présente étude car les résultats obtenus dans ce contexte pourront être généralisés à un nombre arbitraire d'enveloppes complexes reçues. Dans un tel scénario, des valeurs imprévisibles de  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  en (5.2) ou des délais d'étalements non négligeables (permis avec une modélisation FIR-MIMO selon (5.16), mais non avec (2.53)) feront nécessairement en sorte que les instants d'échantillonnages ne pourront coïncider avec les instants des symboles de toutes les enveloppes reçues (e.g. comme à la Fig. 5.2 (b)). Cela justifie donc la présente étude considérant la réception d'une seule enveloppe complexe avec phase d'échantillonnage arbitraire.

Comme u et b sont fonction de  $\tau$ , qui est lui-même généralement inconnu, il serait souhaitable d'obtenir des bornes supérieures pour ces indices (eux-mêmes des bornes) qui puissent en être indépendantes. Intuitivement, selon la Fig. E.2, la valeur maximale de u est obtenue lorsque  $d \to 0$ , et celle de b est obtenue lorsque  $d \to T$ . En évaluant à partir de (E.8), on obtient :

$$u_{\max} = \left[\frac{-t_1}{T} - \frac{1}{2}\right] , \ b_{\max} = \left[\frac{t_2}{T} - \frac{1}{2}\right].$$
 (E.10)

Ces valeurs sont donc indépendantes de  $\tau$ . Il devient donc possible de remplacer u et b en (E.4) par  $u_{\text{max}}$  et  $b_{\text{max}}$  afin de garantir une représentation exacte de l'enveloppe complexe reçue indépendamment de la phase d'échantillonnage. Toutefois, la longueur du canal calculée selon (E.6) devient telle que :

$$L\Big|_{\substack{u=u_{\max}\\b=b_{\max}}} = L'_{\max} = \left\lceil \frac{-t_1}{T} - \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{t_2}{T} - \frac{1}{2} \right\rceil + 1 \in \{L_{\max}, L_{\max} + 1\}.$$
(E.11)

Bien qu'on aurait initialement pu penser que  $L'_{\text{max}} = L_{\text{max}}$ , ce résultat quelque peu différent s'explique par le fait que  $L'_{\text{max}}$  représente un nombre maximale d'éléments (des vecteurs cet  $\mathbf{s}_k$  en (E.4)) obtenu en fonction des bornes supérieures sur u et b considérant toutes les phases d'échantillonnage possible, alors que  $L_{\text{max}}$  représente le nombre de symboles maximal pouvant avoir une contribution non nulle à la valeur de u(t) à un temps  $t = t_k$  quelconque. Ceci implique donc que lorsque  $L'_{\text{max}} = L_{\text{max}} + 1$ ,  $c_1$  ou  $c_{L_{\text{max}}+1}$  sera égal à zéro en (E.4) si on modélise  $\mathbf{s}_k$  avec  $u = u_{\text{max}}$  et  $b = b_{\text{max}}$ . Dans le cas de la Fig. E.2, on vérifie que  $L'_{\text{max}} = L_{\text{max}}$ .

<sup>2.</sup> Ceci est une conséquence naturelle de (5.6). Les conventions générales adoptées dans ce chapitre veulent qu'en dehors de l'intervalle  $]t_1, t_2[$ , on ait p(t) = 0. Or ceci n'empêche toutefois pas que p(t) prenne une ou plusieurs valeurs nulles à l'intérieur de cet intervalle. Dans ce cas, et si de telles valeurs coïncident aux instants d'échantillonnage, la mémoire associée à cette fonction peut être négligée, et L peut donc être réduite par rapport à sa valeur prédite en (E.6). L'équation (E.6) donne une valeur suffisante pour L considérant des fonctions de mise en forme d'impulsion générales ne respectant pas nécessairement le critère de Nyquist.

Ceci n'est toutefois pas vrai en général, comme par exemple pour des valeurs de  $t_1 = -1.9T$  et  $t_2 = 2.7T$  ( $L'_{\text{max}} = 6$  et  $L_{\text{max}} = 5$ ).

### Erreur de modélisation

L'analyse de modélisation rigoureuse effectuée à la section précédente se justifie par le fait que des hypothèses de canal sans mémoire ou des expressions de cette dernière uniquement fonction de l'étalement en délai maximal du système sont encore rencontrées dans la littérature, et ce sans justification des raisons pour lesquelles la négligence de l'énergie propre à l'ISI d'un signal à des fins de modélisation serait acceptable. Bien que la sous-estimation de la longueur du canal (ou en général l'emploi d'indices de symboles inexacts pour la modélisation de  $\mathbf{s}_k$  en (E.4)) engendre inévitablement des erreurs de modélisation pouvant se traduire par de potentielles diminutions de performances dans un contexte pratique donné, il serait intéressant de savoir jusqu'à quel ordre de grandeur peuvent être de telles erreurs en fonction des paramètres des fonctions de mise en forme d'impulsion reçues. On peut définir un estimé de  $u(t_k)$  en (E.4) par :

$$\hat{u}(t_k) = \hat{\boldsymbol{c}}^{\dagger} \hat{\boldsymbol{s}}_k \,, \tag{E.12}$$

où  $\{\hat{c}, \hat{s}\} \in \mathbb{C}^{\hat{L} \times 1}$ . On suppose ainsi que des valeurs quelconques  $u = \hat{u}$  et  $b = \hat{b}$  sont imposées en (E.4) pour le calcul de  $\hat{s}$ . Il est intéressant de remarquer que, bien qu'on puisse effectuer une erreur en sous-estimant L, on peut également effectuer une erreur de modélisation en considérant une bonne valeur de L, mais de mauvaises bornes de symboles en (E.4). Par exemple, pour un entier non nul  $k \in \mathbb{Z}^*$ , des valeurs de  $\hat{u} = u + k$  et  $\hat{b} = b - k$  en (E.6) implique que  $\hat{L} = L$ , mais ne pourront permettre une modélisation adéquate de  $u(t_k)$ . Pour quantifier l'erreur de modélisation, on peut définir une erreur quadratique moyenne  $\mathcal{E}$  entre  $\hat{u}(t_k)$  et  $u(t_k)$  par :

$$\mathcal{E} = \sqrt{E\{|\hat{u}(t_k) - u(t_k)|^2\}}.$$
(E.13)

Un développement de l'espérance mathématique à l'intérieur de la racine carrée selon (E.4) et (E.12) donne :

$$\mathcal{E}^{2} = E\left\{ \left( \hat{u}(t_{k}) - u(t_{k}) \right) \left( \hat{u}(t_{k}) - u(t_{k}) \right)^{*} \right\}$$
  

$$= E\left\{ \left( \hat{c}^{\dagger} \hat{s}_{k} - c^{\dagger} s_{k} \right) \left( \hat{s}_{k}^{\dagger} \hat{c} - s_{k}^{\dagger} c \right) \right\}$$
  

$$= E\left\{ \hat{c}^{\dagger} \hat{s}_{k} \hat{s}_{k}^{\dagger} \hat{c} - \hat{c}^{\dagger} \hat{s}_{k} s_{k}^{\dagger} c - c^{\dagger} s_{k} \hat{s}_{k}^{\dagger} \hat{c} + c^{\dagger} s_{k} s_{k}^{\dagger} c \right\}$$
  

$$= \hat{c}^{\dagger} E\left\{ \hat{s}_{k} \hat{s}_{k}^{\dagger} \right\} \hat{c} - \hat{c}^{\dagger} E\left\{ \hat{s}_{k} s_{k}^{\dagger} \right\} c - c^{\dagger} E\left\{ \hat{s}_{k} \hat{s}_{k}^{\dagger} \right\} c - c^{\dagger} E\left\{ \hat{s}_{k} \hat{s}_{k}^{\dagger} \right\} c + c^{\dagger} E\left\{ s_{k} s_{k}^{\dagger} \right\} c .$$
(E.14)

On vérifie facilement que

$$E\{\boldsymbol{s}_{k}\boldsymbol{s}_{k}^{\dagger}\} = \sigma_{\text{sym}}^{2}\boldsymbol{I}_{L} , \quad E\{\hat{\boldsymbol{s}}_{k}\hat{\boldsymbol{s}}_{k}^{\dagger}\} = \sigma_{\text{sym}}^{2}\boldsymbol{I}_{\hat{L}} , \qquad (E.15)$$

car on fait l'hypothèse vraisemblable que les symboles  $\{s_\ell\}_\ell$  en (E.5) sont iid et possèdent une variance égale à  $\sigma_{\text{sym}}^2$ . On remarque cependant un problème en (E.14), car afin de pouvoir effectuer le produit  $\hat{\boldsymbol{s}}_k \boldsymbol{s}_k^{\dagger}$  pour le calcul de  $E\{\hat{\boldsymbol{s}}_k \boldsymbol{s}_k^{\dagger}\}$  (ou  $E\{\boldsymbol{s}_k \hat{\boldsymbol{s}}_k^{\dagger}\}$ ),  $\hat{\boldsymbol{s}}_k$  et  $\boldsymbol{s}_k$  doivent posséder le même nombre d'éléments, et on sait que  $\hat{\boldsymbol{s}}_k \in \mathbb{C}^{\hat{L} \times 1}$  et que  $\boldsymbol{s}_k \in \mathbb{C}^{L \times 1}$  où en général  $\hat{L} \neq L$ . Pour se tirer d'affaire, on peut définir un ensemble de nouveaux vecteurs possédant tous une dimension égale à  $\max(u, \hat{u}) + \max(b, \hat{b}) + 1$  tel que :

$$\hat{\boldsymbol{c}}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(u-\hat{u})\times 1} \\ \hat{\boldsymbol{c}} \\ \boldsymbol{0}_{(b-\hat{b})\times 1} \end{bmatrix} , \quad \hat{\boldsymbol{s}}'_{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(u-\hat{u})\times 1} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{k} \\ \boldsymbol{0}_{(b-\hat{b})\times 1} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{c}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(\hat{u}-u)\times 1} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0}_{(\hat{b}-b)\times 1} \end{bmatrix} , \quad \boldsymbol{s}'_{k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{(\hat{u}-u)\times 1} \\ \boldsymbol{s}_{k} \\ \boldsymbol{0}_{(\hat{b}-b)\times 1} \end{bmatrix} , \quad (E.16)$$

où en général un vecteur  $\mathbf{0}_{n \times 1}$  où  $n \leq 0$  est inexistant et ne possède aucun élément (dimension nulle). Les notations employées en (E.16) sont des formes générales tenant compte de toutes les valeurs possibles de  $u, b, \hat{u}$  et  $\hat{b}$ . On vérifie ici que :

$$(\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger}\hat{\boldsymbol{s}}'_{k} = \hat{\boldsymbol{c}}^{\dagger}\hat{\boldsymbol{s}}_{k} = \hat{\boldsymbol{u}}(t_{k}) , \ (\boldsymbol{c}')^{\dagger}\boldsymbol{s}'_{k} = \boldsymbol{c}^{\dagger}\boldsymbol{s}_{k} = \boldsymbol{u}(t_{k}) .$$
 (E.17)

Ainsi, on peut donc remplacer  $\hat{c}$ ,  $\hat{s}_k$ , c et  $s_k$  en (E.14) par  $\hat{c}'$ ,  $\hat{s}'_k$ , c' et  $s'_k$  en (E.16). On obtient donc :

$$\mathcal{E}^{2} = (\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} E\{\hat{\boldsymbol{s}}'_{k}(\hat{\boldsymbol{s}}'_{k})^{\dagger}\}\hat{\boldsymbol{c}}' - (\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} E\{\hat{\boldsymbol{s}}'_{k}(\boldsymbol{s}'_{k})^{\dagger}\}\boldsymbol{c}' - (\boldsymbol{c}')^{\dagger} E\{\boldsymbol{s}'_{k}(\hat{\boldsymbol{s}}'_{k})^{\dagger}\}\hat{\boldsymbol{c}}' + (\boldsymbol{c}')^{\dagger} E\{\boldsymbol{s}'_{k}(\boldsymbol{s}'_{k})^{\dagger}\}\boldsymbol{c}' . \quad (E.18)$$

Le premier terme de cette expression peut être évalué similairement à (E.15). On a :

$$E\{\hat{\mathbf{s}}'_{k}(\hat{\mathbf{s}}'_{k})^{\dagger}\} = E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k} \\ \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times(u-\hat{u})} & \hat{\mathbf{s}}^{\dagger}_{k} & \mathbf{0}_{1\times(b-\hat{b})} \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times(u-\hat{u})} & \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times\hat{L}} & \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times(b-\hat{b})} \\ \mathbf{0}_{\hat{L}\times(u-\hat{u})} & \sigma^{2}_{\text{sym}}\mathbf{I}_{\hat{L}} & \mathbf{0}_{\hat{L}\times(b-\hat{b})} \\ \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times(u-\hat{u})} & \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times\hat{L}} & \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times(b-\hat{b})} \end{bmatrix},$$
$$\Rightarrow (\hat{\mathbf{c}}')^{\dagger}E\{\hat{\mathbf{s}}'_{k}(\hat{\mathbf{s}}'_{k})^{\dagger}\}\hat{\mathbf{c}}' = \sigma^{2}_{\text{sym}}(\hat{\mathbf{c}}')^{\dagger}\hat{\mathbf{c}}'. \tag{E.19}$$

Pour le second terme, on a :

$$E\{\hat{\mathbf{s}}'_{k}(\mathbf{s}'_{k})^{\dagger}\} = E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times 1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k} \\ \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{s}^{\dagger}_{k} & \mathbf{0}_{1\times(\hat{b}-b)} \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times L} & \mathbf{0}_{(u-\hat{u})\times(\hat{b}-b)} \\ \mathbf{0}_{\hat{L}\times(\hat{u}-u)} & \sigma^{2}_{\text{sym}} \mathbf{I}_{\hat{L}\times L} & \mathbf{0}_{\hat{L}\times(\hat{b}-b)} \\ \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times L} & \mathbf{0}_{(b-\hat{b})\times(\hat{b}-b)} \end{bmatrix},$$
$$\Rightarrow (\hat{\mathbf{c}}')^{\dagger} E\{\hat{\mathbf{s}}'_{k}(\mathbf{s}'_{k})^{\dagger}\}\mathbf{c}' = \sigma^{2}_{\text{sym}}(\hat{\mathbf{c}}')^{\dagger}\mathbf{c}'. \qquad (E.20)$$

Le troisième terme de (E.18) est le transposé-conjugué du second. On a donc  $(\mathbf{c}')^{\dagger} E\{\mathbf{s}'_k(\hat{\mathbf{s}}'_k)^{\dagger}\}\hat{\mathbf{c}}' = \sigma_{\text{sym}}^2(\mathbf{c}')^{\dagger}\hat{\mathbf{c}}'$ . Le quatrième s'obtient de façon similaire au premier. On a :

$$E\{\mathbf{s}_{k}'(\mathbf{s}_{k}')^{\dagger}\} = E\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\hat{u}-u)\times 1} \\ \mathbf{s}_{k} \\ \mathbf{0}_{(\hat{b}-b)\times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{s}_{k}^{\dagger} & \mathbf{0}_{1\times(\hat{b}-b)} \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(\hat{u}-u)\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{0}_{(\hat{u}-u)\times L} & \mathbf{0}_{(\hat{u}-u)\times(\hat{b}-b)} \\ \mathbf{0}_{L\times(\hat{u}-u)} & \sigma_{\text{sym}}^{2} \mathbf{I}_{L} & \mathbf{0}_{L\times(\hat{b}-b)} \\ \mathbf{0}_{(\hat{b}-b)\times(\hat{u}-u)} & \mathbf{0}_{(\hat{b}-b)\times L} & \mathbf{0}_{(\hat{b}-b)\times(\hat{b}-b)} \end{bmatrix},$$
$$\Rightarrow (\mathbf{c}')^{\dagger} E\{\mathbf{s}_{k}'(\mathbf{s}_{k}')^{\dagger}\}\mathbf{c}' = \sigma_{\text{sym}}^{2}(\mathbf{c}')^{\dagger}\mathbf{c}'. \qquad (E.21)$$

Finalement, en réintroduisant (E.1.1), (E.1.1) et (E.1.1) en (E.18), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{2} &= \sigma_{\text{sym}}^{2} (\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} \hat{\boldsymbol{c}}' - \sigma_{\text{sym}}^{2} (\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} \boldsymbol{c}' - \sigma_{\text{sym}}^{2} (\boldsymbol{c}')^{\dagger} \hat{\boldsymbol{c}}' + \sigma_{\text{sym}}^{2} (\boldsymbol{c}')^{\dagger} \boldsymbol{c}' \\ &= \sigma_{\text{sym}}^{2} ((\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} \hat{\boldsymbol{c}}' - (\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} \boldsymbol{c}' - (\boldsymbol{c}')^{\dagger} \hat{\boldsymbol{c}}' + (\boldsymbol{c}')^{\dagger} \boldsymbol{c}') \\ &= \sigma_{\text{sym}}^{2} ((\hat{\boldsymbol{c}}')^{\dagger} - (\boldsymbol{c}')^{\dagger}) (\hat{\boldsymbol{c}}' - \boldsymbol{c}') \\ &= \sigma_{\text{sym}}^{2} (\hat{\boldsymbol{c}}' - \boldsymbol{c}')^{\dagger} (\hat{\boldsymbol{c}}' - \boldsymbol{c}') \\ &= \sigma_{\text{sym}}^{2} || \hat{\boldsymbol{c}}' - \boldsymbol{c}' ||^{2} , \end{aligned}$$
(E.22)

et par conséquent :

$$\mathcal{E} = \sigma_{\text{sym}} || \hat{\boldsymbol{c}}' - \boldsymbol{c}' || \,. \tag{E.23}$$

Une borne supérieure sur  $\mathcal{E}$  peut être calculée considérant le pire des scénarios où l'on imposerait des valeurs de  $\hat{u}$  et  $\hat{b}$  telles que  $\{-\hat{b}, -\hat{b}+1, \ldots, \hat{u}\}$  n'ait aucun élément en commun avec  $\{-b, -b+1, \ldots, u\}$ . Dans un tel cas, les deuxième et troisième termes de (E.14) deviennent nuls et on déduit que :

$$\mathcal{E} \leq \sigma_{\text{sym}} \sqrt{\hat{c}^{\dagger} \hat{c} + c^{\dagger} c}$$
. (E.24)

Rappelant que c est constant pour une phase d'échantillonnage  $t_0$  donnée, une borne inférieure sur  $\mathcal{E}$  est de la forme :

$$\mathcal{E} \ge \min_{\hat{\mathcal{C}}} \mathcal{E} \,. \tag{E.25}$$

Autrement dit, cette borne sera atteinte en cherchant une valeur de  $\hat{c}$  minimisant  $\mathcal{E}$  pour des valeurs de  $\hat{u}$  et  $\hat{b}$  données. Numériquement parlant, on peut obtenir une telle valeur optimale de  $\hat{c}$  considérant une approximation du type

$$u_g(t_k) \approx \hat{u}(t_k) = \hat{\boldsymbol{c}}^{\dagger} \hat{\boldsymbol{s}}_k \,.$$
 (E.26)

Considérant K échantillons, on a :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u(t_1) & u(t_2) & \dots & u(t_K) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{U}_K \in \mathbb{C}^{1 \times K}} \approx \hat{\boldsymbol{c}}^{\dagger} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{s}}_1 & \hat{\boldsymbol{s}}_2 & \dots & \hat{\boldsymbol{s}}_K \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{s}}_K \in \mathbb{C}^{\hat{L} \times K}}, \quad (E.27)$$

et donc :

$$\hat{\boldsymbol{c}}^{\dagger} \approx \boldsymbol{U}_K \hat{\boldsymbol{S}}_K^{\#}.$$
 (E.28)

Si  $K \ge L$ , la solution obtenue de (E.28) est optimale au sens des moindres carrés (par définition), et une estimation de  $u(t_k)$  minimisant  $\mathcal{E}$  peut donc être obtenue de (E.12). La Fig. E.3 présente l'estimation de  $\mathcal{E}$  pour une source u(t) de modulation QPSK considérant deux ensembles distincts de paramètres { $\tau, \beta, t_1, t_2$ }. On considère un paramètre  $\beta$  ici car une fonction de mise en forme d'impulsion p(t) de type RC est employée (voir équation (6.29)). Comme on pouvait s'y attendre, l'erreur diminue progressivement dans les deux cas jusqu'à ce que  $\hat{u} = u$  et  $\hat{b} = b$ , où alors  $\mathcal{E} = 0$ . L'erreur est d'autre part maximale lorsque les ensembles { $-\hat{b}, -\hat{b} + 1, \ldots, \hat{u}$ } et { $-b, -b + 1, \ldots, u$ } ont peu d'éléments en commun, soit ici lorsque  $\hat{L} = 1$ .

L'analyse de modélisation présentée dans cette section dépasse le cadre du problème principal étudié dans cette thèse. L'intérêt et la motivation pour la réalisation d'une telle étude ont émergés en tentant de trouver une technique optimale (ou conviviale) pour la modélisation de signaux asynchrones suite aux développements relatifs à l'estimateur exponentiel en [54]. Ceci a conduit à la lecture de [58] qui demeure même à ce jour une référence populaire en matière de modélisation des signaux. Pendant cette même période, une recherche approfondie dans la littérature n'a pas permis de trouver de travaux antérieurs où l'on présente une modélisation aussi détaillée (ou exacte) des signaux reçus en ce qui attrait à la longueur du canal que ce qui a été présenté dans cette section. Il serait donc intéressant et justifié de réaliser une étude d'impact au niveau des performances d'algorithmes d'estimation employant une modélisation FIR-MIMO sous-estimant L (e.g. canaux sans mémoire ou bornes u et b inexactes) en les appliquant simplement dans un contexte où les enveloppes complexes reçues sont modélisées à partir de leur équivalent en temps continu selon (E.5).

#### E.1.2 Suréchantillonnage considérant de multiples enveloppes reçues

Considérant un échantillonnage à la fréquence des symboles, l'expression des signaux reçus avec un nombre arbitraire M d'enveloppes complexes s'obtient directement de (5.16):

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{s}_k + \boldsymbol{n}_k \,, \tag{E.29}$$

où  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times \sum_m L_m}$  et  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{C}^{(\sum_m L_m) \times 1}$ . La dépendance des différentes grandeurs envers la phase d'échantillonnage  $t_0$  est omise ici afin d'alléger les notations. Ce modèle est valable pour tout délai d'étalement considérant une propagation à bande étroite et un canal invariant en temps ( $\mathbf{H} \equiv \text{cte}$ ). Il a été mentionné aux chapitres 5 et 6 qu'il était également possible d'exploiter une telle modélisation avec un taux d'échantillonnage de  $1/T_s = U/T$  où  $0 < U \in \mathbb{Z}$ . La stratégie (expliquée en [58], Fig. 7) consiste alors à considérer U séquences d'échantillons toutes prises à la fréquence des symboles et entrelacées entre elles comme à la Fig. 6.1. On



FIGURE E.3 – Estimation de l'erreur de modélisation  $\mathcal{E}$  selon (E.13) considérant une enveloppe complexe u(t) en (E.5) de modulation QPSK. On considère une fonction de mise en forme d'impulsion p(t) de type RC fenêtrée (rectangulaire) entre  $t_1$  et  $t_2$  ( $W = t_2 - t_1$ ). En (a) :  $\tau = 0.3T$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $t_1 = -4T$  et  $t_2 = 4T$ , impliquant que L = 8, u = 3 et b = 4. En (b) :  $\tau = 0.5T$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $t_1 = -T$  et  $t_2 = 5T$ , impliquant que L = 6, u = 0 et b = 5.

mentionne en [58] que ci-faisant, on obtient U équations similaires à (E.29) avec des matrices de canal différentes pour chaque phase mais où  $\boldsymbol{s}_k$  demeure constant puisque les symboles (ou

fenêtres) sont également constants pendant une période T entière. On a :

$$\boldsymbol{x}_{k}^{(p)} = \boldsymbol{H}^{(p)}\boldsymbol{s}_{k} + \boldsymbol{n}_{k}^{(p)} , \ p \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(E.30)

où par principe on considère un vecteur bruit généralement différent selon p. Ce dernier peut toutefois être identiquement distribué pour chaque phase d'échantillonnage tel que considéré au chapitre 7. On souhaite bien faire comprendre ici qu'ainsi écrite, l'équation (E.30) est inexacte car comme il en était question à la section E.1.1, u et b (et donc L) sont sujets à changement selon la phase d'échantillonnage. On a qu'à se référer aux exemples numériques qui ont été donnés suite à l'équation (E.9) pour s'en convaincre. De ce fait, les valeurs de  $\{u_m, b_m\}_{m=1}^M$ au niveau du vecteur  $\mathbf{s}_k$  en (E.30) devront généralement être variables en fonction de p afin d'assurer une juste représentation des enveloppes reçues. On a donc plutôt :

$$\boldsymbol{x}_{k}^{(p)} = \boldsymbol{H}^{(p)}\boldsymbol{s}_{k}^{(p)} + \boldsymbol{n}_{k}^{(p)} , \ p \in \{0, 1, \dots, U-1\}.$$
(E.31)

Toutefois, conformément à (E.8), on sait que  $\{u_m, b_m\}_{m=1}^M$  sont fonction de  $\{\tau_m\}_{m=1}^M$ , qui sont eux-mêmes inconnus à l'observation. Afin d'éviter de devoir tenir compte de cette dépendance au niveau du traitement, on peut employer un modèle similaire à (E.30) de la forme :

$$\boldsymbol{x}_{k}^{(p)} = \boldsymbol{H}^{(p)}\boldsymbol{s}_{k}' + \boldsymbol{n}_{k}^{(p)} , \ p \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(E.32)

où  $\mathbf{s}'_k$  est formé de la concaténation des vecteurs  $\{\mathbf{s}'_{1_k}, \mathbf{s}'_{2_k}, \dots, \mathbf{s}'_{M_k}\}$ , et où chaque vecteur  $\mathbf{s}'_{m_k} \in \mathbb{C}^{L'_{\max_m} \times 1}$  est formé des symboles d'indices  $k - b_{\max_m}$  à  $k + u_{\max_m}$  selon (E.10). Puisque les valeurs de  $u_{\max_m}$  et  $b_{\max_m}$  permettent de tenir compte de délais asynchrones  $\{\mathbf{\tau}_m\}_{m=1}^M \in [0, T[, \mathbf{s}'_k$  peut donc être considéré constant indépendamment de p (mais variable avec k). Cependant, puisque  $L'_{\max_m} \in \{L_{\max_m}, L_{\max_m} + 1\}$ ,  $\mathbf{s}'_k$  possédera généralement plus d'éléments que  $\mathbf{s}_k$ .

### E.2 Analyse spectrale

Dans cette section, bien qu'on s'éloignera encore davantage du problème principal étudié dans cette thèse, on présentera une analyse sur un aspect bien particulier des signaux qui fut découvert de façon inattendue pendant l'élaboration de l'algorithme JDDTM au chapitre 6, et ayant le potentiel de donner suite à des travaux de recherche intéressants. Plus spécifiquement, on s'intéressera ici à la notion de largeur de bande de signaux passe-bande tel que définit en (2.1). Bien qu'une telle étude puisse à première vue sembler triviale aux yeux d'un lecteur avisé, on verra comment une considération rigoureuse de la formulation des signaux peut mener à des résultats surprenants.

On s'intéresse plus spécifiquement à un signal RF transmis tel que formulé en (2.1). On a :

$$g(t) = \Re\{s(t)e^{j\omega_0 t}\} = I(t)\cos(\omega_0 t) - Q(t)\sin(\omega_0 t), \qquad (E.33)$$

où l'enveloppe s(t) s'exprime similairement à (E.5), c'est-à-dire :

$$s(t) = \sum_{\ell} s_{\ell} p(t - \ell T) \quad , \quad s_{\ell} \in \mathcal{A} \,. \tag{E.34}$$

On néglige ici tout délai asynchrone car ce dernier n'aura aucune influence au niveau des généralités qui seront étudiées dans cette section. On peut interpréter g(t) en (E.33) comme le signal RF mesuré directement au niveau de l'émetteur au temps t, et qui n'a donc pas encore subi de déformations potentielles dues au canal. Il serait également possible d'effectuer l'analyse à partir d'un signal RF reçu en considérant par exemple une formulation semblable avec fonction de mise en forme d'impulsion comme en (5.5). Un tel scénario serait d'ailleurs d'un plus grand intérêt pratique que l'étude du contenu fréquentiel du signal transmis, bien que cette dernière soit également importante. On justifie ici la considération de (E.33) et (E.34) par le fait que les propriétés et concepts qui seront observés dans ce cas pourront également être généralisés pour le cas d'un signal reçu s'exprimant de façon similaire à (E.33).

En général, la transformée de Fourier (TF) d'une fonction x(t) s'exprime par :

$$X(\omega) = \mathcal{F}_t\{x(t)\}(\omega) = \int_{\Re} x(t)e^{-j\omega t}.$$
 (E.35)

La TF de g(t) en (E.33) est donc donnée par :

$$G(\omega) = \mathcal{F}_t\{I(t)\cos(\omega_0 t)\}(\omega) - \mathcal{F}_t\{Q(t)\sin(\omega_0 t)\}(\omega).$$
(E.36)

Effectuons maintenant quelques calculs intermédiaires :

$$F_1(\omega) \equiv \mathcal{F}_t\{\cos(\omega_0 t)\}(\omega) = \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)),$$
  

$$F_2(\omega) \equiv \mathcal{F}_t\{\sin(\omega_0 t)\}(\omega) = j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)),$$
(E.37)

$$I(\omega) \equiv \mathcal{F}_t\{I(t)\}(\omega),$$
  

$$Q(\omega) \equiv \mathcal{F}_t\{Q(t)\}(\omega).$$
(E.38)

Usant du théorème de convolution, on peut donc dire que :

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} (I * F_1)(\omega) - \frac{1}{2\pi} (Q * F_2)(\omega)$$
  
=  $\frac{1}{2\pi} [\pi (I(\omega + \omega_0) + I(\omega - \omega_0))] - \frac{1}{2\pi} [j\pi (Q(\omega + \omega_0) - Q(\omega - \omega_0))]$   
=  $\frac{1}{2} (I(\omega + \omega_0) + I(\omega - \omega_0) - jQ(\omega + \omega_0) + jQ(\omega - \omega_0)).$  (E.39)

Par ailleurs, on sait que :

$$I(t) = \Re\{s(t)\} = \sum_{\ell} \Re\{s_{\ell}\} p(t - \ell T) , \quad Q(t) = \Im\{s(t)\} = \sum_{\ell} \Im\{s_{\ell}\} p(t - \ell T) .$$
(E.40)

Les TF des signaux I(t) et Q(t) peuvent donc s'exprimer par :

$$I(\omega) = \mathcal{F}_t\{I(t)\}(\omega) = \sum_{\ell} \Re\{s_\ell\} \mathcal{F}_t\{p(t-\ell T)\}, \qquad (E.41)$$

$$\mathbf{Q}(\omega) = \mathcal{F}_t\{Q(t)\}(\omega) = \sum_{\ell} \Im\{s_\ell\} \mathcal{F}_t\{p(t-\ell T)\}.$$
(E.42)

Par la propriété de translation temporelle, on sait que :

$$\mathcal{F}_t\{p(t-\ell T)\} = \mathcal{F}_t\{p(t)\}e^{-j\omega\ell T} = P(\omega)e^{-j\omega\ell T}.$$
(E.43)

Ainsi,

$$I(\omega) = P(\omega) \sum_{\ell} \Re\{s_{\ell}\} e^{-j\omega\ell T}$$
(E.44)

$$\mathbf{Q}(\omega) = P(\omega) \sum_{\ell} \Im\{s_{\ell}\} e^{-j\omega\ell T} \,. \tag{E.45}$$

En réintroduisant ces dernières expressions en (E.39), on trouve que :

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[ P(\omega + \omega_0) \sum_{\ell} \Re\{s_\ell\} e^{-j(\omega + \omega_0)\ell T} + P(\omega - \omega_0) \sum_{\ell} \Re\{s_\ell\} e^{-j(\omega - \omega_0)\ell T} \right]$$
$$-jP(\omega + \omega_0) \sum_{\ell} \Im\{s_\ell\} e^{-j(\omega + \omega_0)\ell T} + jP(\omega - \omega_0) \sum_{\ell} \Im\{s_\ell\} e^{-j(\omega - \omega_0)\ell T} \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[ P(\omega + \omega_0) \left( \sum_{\ell} \Re\{s_\ell\} e^{-j(\omega + \omega_0)\ell T} - j \sum_{\ell} \Im\{s_\ell\} e^{-j(\omega + \omega_0)\ell T} \right) + P(\omega - \omega_0) \left( \sum_{\ell} \Re\{s_\ell\} e^{-j(\omega - \omega_0)\ell T} + j \sum_{\ell} \Im\{s_\ell\} e^{-j(\omega - \omega_0)\ell T} \right) \right]$$
$$= \frac{1}{2\pi} \left[ P(\omega + \omega_0) \sum_{\ell} s_\ell^* e^{-j(\omega + \omega_0)\ell T} + P(\omega - \omega_0) \sum_{\ell} s_\ell e^{-j(\omega - \omega_0)\ell T} \right]. \quad (E.46)$$

Le contenu fréquentiel de g(t) dépend donc de p(t), de  $\omega_0$ , mais également de la séquence des symboles transmis  $\{s_\ell\}_\ell$ . Par conséquent ceci implique qu'en général la largeur de bande du signal transmis dépendra aussi de p(t) et  $\{s_\ell\}_\ell$  (puisque que  $\omega_0$  est associé à un harmonique pur qui ne fait que translater le spectre de s(t)). Or, il est couramment admis dans la littérature que la largeur de bande d'un tel signal est uniquement déterminée par les caractéristiques fréquentielles du filtre de mise en forme d'impulsion, i.e.  $P(\omega)$  [113, 114, 115, 116, 117, 118]. Afin de démontrer comment et pourquoi le spectre d'un signal transmis varie selon  $\{s_\ell\}_\ell$  en (E.46), on limitera ici notre étude au comportement de  $S(\omega)$  (la TF de s(t)) en fonction de p(t) et  $\{s_\ell\}_\ell$ . Suivant (E.44) et (E.45), on a :

$$S(\omega) = I(\omega) + jQ(\omega) = P(\omega) \sum_{\ell} \Re\{s_{\ell}\} e^{-j\omega\ell T} + jP(\omega) \sum_{\ell} \Im\{s_{\ell}\} e^{-j\omega\ell T}$$
$$= P(\omega) \sum_{\ell} s_{\ell} e^{-j\omega\ell T}.$$
(E.47)

Par conséquent :

$$|S(\omega)|^{2} = S(\omega)S^{*}(\omega) = P(\omega)\left(\sum_{\ell}s_{\ell}e^{-j\omega\ell T}\right)P^{*}(\omega)\sum_{m}s_{m}^{*}e^{j\omega mT}$$
$$= |P(\omega)|^{2}\sum_{\ell}\sum_{m}s_{\ell}s_{m}^{*}e^{-j\omega(\ell-m)T}.$$
(E.48)

Pour mieux comprendre l'effet de  $\{s_\ell\}_\ell$  au niveau du spectre de s(t), considérons le cas de signaux BPSK sur l'axe I (i.e.  $s_\ell \in \mathcal{A} = \{-1, 1\}$ ) avec fonction de mise en forme d'impulsion rectangulaire comme illustré à la Fig. E.4. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que la largeur de bande de ce signal soit très élevée de par le riche contenu fréquentiel de l'impulsion rectangulaire, et que par conséquent l'efficacité spectrale résultante soit faible. Supposons que la séquence des symboles transmis soit  $\{1, 1, \ldots, 1\}$  (des symboles identiques). Dans le domaine temporel, ceci implique donc que s(t) = I(t) + jQ(t) = I(t) + j(0) = I(t). Or ici I(t) est une somme de fonctions rectangulaires d'amplitude identiques espacées de T secondes entre elles (selon (E.40)), et est donc égale à 1. Du coup, ceci implique que  $S(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$  et que par conséquent la largeur de bande de s(t) soit nulle, procurant ainsi une efficacité spectrale infinie. Un tel résultat n'est cependant obtenu que lorsque  $s_\ell = \pm 1 \forall \ell$  (symboles identiques), ce qui n'est d'aucun intérêt pratique. Toutefois, cet exemple suffit à démontrer comment et jusqu'à quel point, par considérations purement mathématiques, le spectre de s(t) est dépendant de  $\{s_\ell\}_\ell$ .



FIGURE E.4 – Fonctions de mise en forme d'impulsion rectangulaire (W = T) et gaussienne  $(B_{\text{Gauss.,3 dB}} = \sqrt{\ln(2)/(2\pi)} \text{ Hz}).$ 

La Fig. E.6 présente l'évaluation de l'énergie spectrale normalisée de s(t) considérant toujours le cas de signaux BPSK, mais pour des séquences de symboles transmis alternatifs  $\{1, -1, 1, -1, ...\}$  de différentes longueurs. Pour une séquence de longueur  $\mathcal{L} = 1$ , on a simplement s(t) = p(t) et  $S(\omega)$  possède alors la forme d'un sinus cardinal. Pour des valeurs de  $\mathcal{L}$ plus élevées,  $S(\omega)$  possède moins d'énergie aux alentours de  $\omega = 0$  puisque la valeur moyenne des symboles tend vers 0 (on a toujours  $S(\omega) = 0$  pour  $\mathcal{L}$  pair). On remarque également que le lobe principal rétrécit avec l'augmentation de  $\mathcal{L}$ . Pour  $\mathcal{L} \to \infty$ , on vérifie que  $B_{3 \text{ dB}}T = 1$ .

La Fig. E.6 montre que  $S(\omega)$  dépend fortement de la séquence des symboles transmis  $\{s_\ell\}_\ell$ , et ne possède donc pas les mêmes propriétés que  $P(\omega)$ , la réponse fréquentielle du filtre de mise



FIGURE E.5 – Propriétés spectrales d'une enveloppe complexe s(t) avec modulation BPSK. À gauche, tracé de l'énergie spectrale normalisée pour différentes séquences de symboles transmis  $\{s_\ell\}_\ell = \{-(-1)^\ell\}_{\ell=1}^{\mathcal{L}}$  considérant  $\mathcal{L} \in \{1, 2, ..., 10\}$  et T = 1. À droite, produit  $B_{3 \text{ dB}}T$  en fonction de  $\mathcal{L}$ .

en forme d'impulsion. Toutefois, la densité spectrale de puissance de s(t) s'exprime par :

$$E\{|S(\omega)|^{2}\} = E\left\{|P(\omega)|^{2}\sum_{\ell}\sum_{m}s_{\ell}s_{m}^{*}e^{-j\omega(\ell-m)T}\right\} = |P(\omega)|^{2}\sum_{\ell}\sum_{m}E\{s_{\ell}s_{m}^{*}\}e^{-j\omega(\ell-m)T}$$
$$= |P(\omega)|^{2}\sum_{\ell}E\{s_{\ell}s_{\ell}^{*}\}e^{-j\omega(\ell-\ell)T} = |P(\omega)|^{2} = \mathcal{L}\sigma_{\rm sym}^{2}|P(\omega)|^{2}, \qquad (E.49)$$

où  $\sigma_{\text{sym}_1}^2$  est la puissance des symboles et  $\mathcal{L}$  est le nombre de symboles transmis, comme à la Fig. E.6. On constate donc que globalement, considérant une constellation  $\mathcal{A}$  centrée de symboles indépendants, la densité spectrale de puissance de s(t) est directement fonction de celle de p(t) (car  $E\{|P(\omega)|^2\} = |P(\omega)|^2\}$ ). Ceci rejoint la théorie voulant que seul p(t)spécifie le spectre (moyen) de l'enveloppe transmise s(t). Il est clair cependant que  $S(\omega)$  varie significativement en fonction de  $\{s_\ell\}_\ell$  (i.e.  $S(\omega)$  est aléatoire), et étonnamment on ne semble pas retrouver d'information à ce sujet dans la littérature. Des travaux intéressants pourraient être menés par exemple afin de caractériser l'écart type du spectre, ou sa variance, définie par :

$$\operatorname{Var}\{|S(\omega)|^{2}\} = E\left\{\left(|S(\omega)|^{2} - E\{|S(\omega)|^{2}\}\right)^{2}\right\} = E\left\{\left(|S(\omega)|^{2} - \mathcal{L}\sigma_{\operatorname{sym}}^{2}|P(\omega)|^{2}\right)^{2}\right\}.$$
 (E.50)

Cette dernière est fonction du nombre  $\mathcal{L}$  de symboles transmis, de leur distribution statistique, ainsi que de la fonction de mise en forme d'impulsion p(t). Il serait alors intéressant de tenter de déterminer une forme théorique optimale pour p(t) qui permettrait de minimiser Var $\{|S(\omega)|^2\}$ en des conditions données tout en respectant certaines contraintes spécifiques à la transmission. Afin de donner un meilleur aperçu de (E.50), la Fig. E.6 présente l'écart type ( $\sqrt{\text{Var}\{|S(\omega)|^2\}}$ ) de  $|S(\omega)|^2$  considérant une enveloppe s(t) de modulation BPSK (comme à la Fig. E.6) avec fonction de mise en forme d'impulsion gaussienne comme illustré à la Fig. E.4. Une telle fonction possède la forme analytique [80] :

$$p(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\pi t/\alpha)^2} , \qquad (E.51)$$

où le paramètre  $\alpha$  est lié à la largeur de bande 3 dB  $B_{\text{Gauss.,3 dB}}$  du filtre par :

$$\alpha = \frac{\sqrt{\ln(2)}T}{\sqrt{2}B_{\text{Gauss.,3 dB}}T},$$
(E.52)

et où  $B_{\text{Gauss.,3 dB}}T$  représente le produit temps-largeur de bande. La fonction p(t) est définie sur ] $-\infty, \infty$ [, mais décroît rapidement hors de l'intervalle  $t \in \left[\frac{-1}{2B_{\text{Gauss.,3 dB}}}, \frac{1}{2B_{\text{Gauss.,3 dB}}}\right]$ . Puisque  $B_{\text{Gauss.,3 dB}} = \sqrt{\ln(2)/(2\pi)}$  Hz  $\approx 0.33$  Hz à la Fig. E.4, p(t) est donc principalement non nulle dans l'intervalle [-1.5, 1.5]T.



FIGURE E.6 – Écart type de l'énergie spectrale et produit temps-largeur de bande d'une enveloppe complexe s(t) de modulation BPSK avec fonction de mise en forme d'impulsion gaussienne elle-même de largeur de bande  $B_{\text{Gauss.,3 dB}} = \sqrt{\ln(2)/(2\pi)}$ . Les calculs sont effectués considérant toutes les séquences possibles de tous les nombres  $\mathcal{L}$  de symboles transmis.

On voit à la Fig. E.6 que pour  $\mathcal{L} = 1$ , on a simplement  $\sqrt{\operatorname{Var}\{|S(\omega)|^2\}} = 0$  car  $|S(\omega)|^2 = |P(\omega)|^2$  et  $\mathcal{L}\sigma_{\operatorname{sym}}^2 = 1$  en (E.50) ( $\sigma_{\operatorname{sym}}^2 = 1$  étant donné l'ensemble  $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$  de symboles équiprobables). Par contre pour des valeurs croissantes de  $\mathcal{L}$ , l'écart type de  $|S(\omega)|^2$  semble étrangement non borné. Ceci semble le cas non seulement en  $\omega = 0$ , mais sur pratiquement toute la largeur de bande utile du signal transmis. On rappelle qu'on considère ici toutes les séquences possibles de symboles transmis pour des longueurs  $\mathcal{L} \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ . Les courbes sont donc exactes pour les valeurs de  $\mathcal{L}$  considérées. Le graphe de droite de la Fig. E.6 présente quant à lui l'évolution du produit temps-largeur de bande (son espérance mathématique) pour des critères de 3 dB, 6 dB, 10 dB, et 20 dB respectivement. Dans l'ensemble les valeurs semblent pour le moins stables mais présentent cependant des écarts types appréciables et constants avec  $\mathcal{L}$ .

L'étude des propriétés statistiques d'un signal transmis (s(t) en (E.34) ou plus généralement g(t) en (E.33)) dans le domaine des fréquences est un problème mathématique intéressant en soit, mais également très complexe. Une telle recherche pourrait avoir des implications potentielles par exemple dans le développement de critères d'optimalité pour la construction de filtres de mise en forme d'impulsion, car même actuellement de telles méthodes sont encore mal définies [110].

### Annexe F

## Articles publiés

Cette annexe contient les trois contributions qui ont été développées dans le cadre de la thèse. En ordre chronologique, ces dernières sont :

- 1) L'amélioration de l'algorithme EVESPA par le développement d'une procédure d'estimation alternative de la matrice de canal moins complexe au niveau calculatoire et générant des estimés de variance plus faible [52] (cf. chapitre 3).
- 2) Le développement d'un estimateur exponentiel exploitant les distributions statistiques particulière des signaux de communication afin de pallier au problème de limitation engendré par le nombre d'éléments fini du réseau chez la plupart des algorithmes exploitant un traitement purement matriciel des signaux reçus [54] (cf. chapitre 4).
- 3) Le développement de l'algorithme JDDTM, réalisant l'estimation aveugle de la matrice de canal à partir de la diagonalisation conjointe d'un ensemble de matrices cibles différentielles obtenues par statistiques d'ordre deux en exploitant l'asynchronisme naturel des signaux incidents au niveau du réseau [83] (cf. chapitres 5 et 6).

### Research Article

### **Improvement on EVESPA for Beamforming and Direction of Arrival Estimation**

#### **Emmanuel Racine and Dominic Grenier**

Department of Electrical and Computer Engineering, Laval University 1065, Avenue de la Médecine, Québec (QC), Canada G1V 0A6

Correspondence should be addressed to Emmanuel Racine, emmanuel.racine.2@ulaval.ca

Received 9 September 2010; Revised 18 January 2011; Accepted 22 February 2011

Academic Editor: Laurence Mailaender

Copyright © 2011 E. Racine and D. Grenier. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

This paper presents an alternative estimation procedure of the generalized steering matrix of the sources in EVESPA, suitable for both beamforming and direction of arrival estimation. It is shown how the estimation of such a matrix can be restricted to that of its corresponding coefficient matrix in the signal subspace, providing both performance enhancement and computational complexity reduction. Performance comparison through numerical simulations is presented to confirm the effectiveness of the proposed procedure.

### 1. Introduction

The EVESPA algorithm was introduced by Gönen et al. in [1] as an adapted version of VESPA to handle the case of coherent signals. Using fourth-order cumulants, this algorithm properly generates an unbiased estimation of the generalized steering matrix (GSM) B of the sources from which an analysis of the signal parameters can be performed for each coherent group in an independent fashion. The same estimation procedure is also undertaken in [2] as a means of computing the weights of an optimal beamformer capable of maximizing the signal-to-interference plus noise ratio (SINR) in a coherent environment. EVESPA has also been considered in [3] under a slight variation for the problem of direction of arrival (DOA) estimation in mobile communications, and in [4] where it was adapted for a twodimensional scenario. Steps 1 to 7 in [2] describe the EVESPA algorithm where the  $M \times G$  matrix **B** is considered in its whole. However, since the latter lies in the signal subspace, only the search of its corresponding  $G \times G$  coefficient matrix proves sufficient. In this paper, we present a new estimation procedure of **B** based on this principle which is shown to bring significant performance enhancement both in terms of computational complexity and quality estimation.

Throughout the paper, "\*" and "t" are, respectively, used as the conjugate and Hermitian transpose operators, and nonscalar quantities such as vectors and matrices are labeled in bold.

#### 2. Background Theory

In this section we recall the main guidelines of the EVESPA algorithm [1, 2], as it will be assumed that the reader has a sufficient knowledge on the matter. The signal model used in this paper is the same as that used by the original authors, namely,

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{n}_k,\tag{1}$$

where  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{u}_k$ , and  $\mathbf{n}_k$  are, respectively, the  $M \times 1$  vector of the received signals, the  $M \times G$  generalized steering matrix of the sources, the  $G \times 1$  elementary sources vector, and the  $M \times 1$  additive white Gaussian noise (AWGN) vector, which is assumed symmetric. Elements  $u_g(t_k)$ ,  $g \in \{1, 2, ..., G\}$ , of  $\mathbf{u}_k$  are modeled as uncorrelated zero-mean random processes, where *G* denotes the number of coherent groups of signals impinging on the *M*-element array. Without loss of generality, matrix **B** may be expressed as

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_G \end{bmatrix}, \quad (2)$$

where  $\mathbf{A}_g$  and  $\boldsymbol{\alpha}_g$  are the  $M \times p_g$  steering matrix and the  $p_g \times 1$  coefficients vector of the *g*-th coherent group. The total number of sources impinging on the array is thus  $\sum_{g=1}^{G} p_g$ . EVESPA may be suitable for any type of signals provided that a complex envelope of interest  $u_g(t_k)$  admits a nonzero fourth-order cumulant, that is,

$$\gamma_{4,g} = \operatorname{cum}\left(u_g(t_k), u_g^*(t_k), u_g(t_k), u_g^*(t_k)\right) \neq 0.$$
(3)

The algorithm proceeds to the evaluation of the two cumulant matrices:

$$\mathbf{C}_m = \operatorname{cum}\left(x_m(t_k), x_1^*(t_k), \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^{\dagger}\right), \quad m \in \{1, 2\}, \quad (4)$$

from which an estimation  $\hat{\mathbf{B}}$  of  $\mathbf{B}$  is obtained by following steps 1 through 7 in [2]. Upon calculation of  $\hat{\mathbf{B}}$ , whose columns match those of  $\mathbf{B}$  to within scale and permutation, one can freely proceed to beamforming or DOA estimation as described in [1, 2].

In the case of DOA estimation, the covariance matrix of the *g*-th coherent group of signals is first estimated as  $\hat{\mathbf{R}}_{xx_g} = \hat{\mathbf{b}}_g \hat{\mathbf{b}}_g^{\dagger}$ , where  $\hat{\mathbf{b}}_g$  is the *g*-th column of  $\hat{\mathbf{B}}$ . Spatial smoothing is then applied to  $\hat{\mathbf{R}}_{xx_g}$  in order to estimate the DOAs of that group. Any other DOA estimation algorithm could also be applied once  $\hat{\mathbf{B}}$  has been obtained from EVESPA.

In the case of beamforming, an optimum weight vector is initially computed as  $\mathbf{w}_{g,\text{opt}} = c_g \mathbf{R}_{xx}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_g$ , where  $\mathbf{R}_{xx}$  is the covariance matrix of the received signals, and where  $c_g = 1/(\hat{\mathbf{b}}_g^{\dagger} \mathbf{R}_{xx}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_g)$  is a constant ensuring a unit response in the "look" direction. This beamforming vector is then used to recover the elementary signal  $u_g(t_k)$  of that particular group. Here again, any other beamforming scheme can be implemented after estimation of **B**. One interesting example is that of the null steering beamformer [5], where the array response can be made null for all signals of a particular group instead of synthesizing nulls for each of these signals independently.

Note finally that although the EVESPA algorithm has been developed in a context of narrowband multipath propagation, its application remains valid in any environment provided that the received signals can be modeled as in (1), and that the appropriate requirements on **B**,  $\mathbf{u}_k$ , and  $\mathbf{n}_k$  be met. Those are essentially given by assumptions A1 through A6 in [1], but can be summarized in a more general way as follows.

(i) Elements  $u_g(t_k)$ ,  $g \in \{1, 2, ..., G\}$ , of  $\mathbf{u}_k$  are statistically independent and possess a nonzero fourth-order cumulant.

TABLE 1: Summary of the main computational steps involved in the original EVESPA and the proposed estimation procedure.

Step	Original EVESPA	Proposed procedure
1	SVD of C $(2M \times M)$	EVD of $\mathbf{R}_{xx}$ ( $M \times M$ )
2	SVD of $[\mathbf{U}_{11} \ \mathbf{U}_{12}](M \times 2G)$	SVD of $\mathbf{C}'$ (2 $G \times G$ )
3	EVD of $-\mathbf{F}_{x}\mathbf{F}_{y}^{-1}$ ( <i>G</i> × <i>G</i> )	EVD of <b>H</b> ( $G \times G$ )
4	Estimation of <b>B</b>	Estimation of <b>B</b>
5*	EVD of $\mathbf{R}_{xx}$ ( $M \times M$ )	_
6*	Estimation of <b>B</b>	

\*: Additional steps required for the covariance based improvement method in [1]. This improvement is applied by default in steps 1 to 4 of the proposed procedure.

- (ii) **B** has  $G \le M$  columns linearly independent from one another.
- (iii) The fourth-order cumulant of the noise vector  $\mathbf{n}_k$  is zero.

One interesting example of environment where the EVESPA algorithm may also be applied is that of narrowband near-field sources [6], where the signal model also finds its correspondence to (1). In this paper, though, we will focus on the description of an enhanced estimation procedure of **B** with the aim of improving performance for both beamforming and direction of arrival estimation in a coherent narrowband scenario, since each of these subjects were covered in [1, 2]. Note however that this estimation procedure is general, and may in fact be applied regardless of the type of subsequent processing.

#### 3. Proposed Estimation Procedure

Consider the covariance matrix of the received signals:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\left\{\mathbf{x}_{k}\mathbf{x}_{k}^{\dagger}\right\} = \mathbf{B}E\left\{\mathbf{u}_{k}\mathbf{u}_{k}^{\dagger}\right\}\mathbf{B}^{\dagger} + E\left\{\mathbf{n}_{k}\mathbf{n}_{k}^{\dagger}\right\}$$
$$\equiv \mathbf{B}\mathbf{R}_{uu}\mathbf{B}^{\dagger} + \sigma_{n}^{2}\mathbf{I},$$
(5)

where  $E\{\cdot\}$  denotes the expected value operator. Note that  $\mathbf{R}_{uu}$  is always diagonal since  $\mathbf{u}_k$  is a vector of zero-mean and uncorrelated elements. Expressing  $\mathbf{R}_{xx}$  in terms of its eigenvalue decomposition yields

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{E}_s^{\dagger} + \sigma_n^2 \mathbf{I},\tag{6}$$

where  $\mathbf{E}_s$  represents a set of orthonormal basis vectors of the signal subspace. From (5) and (6), it follows that **B** can be expressed in terms of  $\mathbf{E}_s$  such that

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}_{s}\mathbf{Q},\tag{7}$$

where **Q** is a  $G \times G$  coefficient matrix ensured to be full rank under assumptions A1 to A4 in [2]. In the same issue, it is also shown that matrices **C**<sub>1</sub> and **C**<sub>2</sub> of (4) evaluate to

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{B} \mathbf{\Lambda} \mathbf{B}^{\dagger}, \qquad \mathbf{C}_2 = \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{\Lambda} \mathbf{B}^{\dagger}, \qquad (8)$$

where  $\Lambda$  and  $\mathbf{D}$  are both full-rank diagonal matrices. Our alternative estimation procedure begins by forming the two  $G \times G$  matrices (recall from (7) that  $\mathbf{E}_s^{\dagger} \mathbf{B} = \mathbf{Q}$ , since  $\mathbf{E}_s^{\dagger} \mathbf{E}_s = \mathbf{I}$ )

$$\mathbf{C}_1' = \mathbf{E}_s^{\dagger} \mathbf{C}_1 \mathbf{E}_s = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{\dagger}, \qquad \mathbf{C}_2' = \mathbf{E}_s^{\dagger} \mathbf{C}_2 \mathbf{E}_s = \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{\dagger}, \quad (9)$$

where  $\mathbf{E}_s$  is obtained from the eigenvalue decomposition (EVD) of  $\mathbf{R}_{xx}$ . We now apply an estimation procedure similar to steps 2 through 7 in [2], but in the aim of identifying  $\mathbf{Q}$ . Consider for this the single value decomposition (SVD) of a  $2G \times G$  matrix  $\mathbf{C}'$  such that

$$\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' \\ \mathbf{C}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}\mathbf{D} \end{bmatrix} \mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{\dagger} \equiv \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^{\dagger}, \qquad (10)$$

where matrix **U** may be partitioned into

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s & \mathbf{U}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n_1} \\ \mathbf{U}_{n_2} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

and where  $U_{n_1}$  and  $U_{n_2}$  are both  $G \times G$ . Since the *G* last rows of  $\Sigma$  are zeros, it follows that

$$(\mathbf{C}')^{\dagger}\mathbf{U}_{n} = \mathbf{Q}^{\dagger}\mathbf{U}_{n_{1}} + \mathbf{D}^{*}\mathbf{Q}^{\dagger}\mathbf{U}_{n_{2}} = \mathbf{0}, \qquad (12)$$

which implies that

$$-\mathbf{U}_{n_1}\mathbf{U}_{n_2}^{-1} = \mathbf{Q}^{-\dagger}\mathbf{D}^*\mathbf{Q}^{\dagger} \equiv \mathbf{H}.$$
 (13)

Hence, the eigenvalues of **H** must match the diagonal elements of  $\mathbf{D}^*$ . If these elements are distinct, there exists a unique mapping between  $\mathbf{E}_H$ , the eigenvectors matrix of **H**, and  $\mathbf{Q}^{-\dagger}$  such that

$$\mathbf{E}_H \mathbf{Z}^{\dagger} = \mathbf{Q}^{-\dagger}, \tag{14}$$

where **Z** is a scale permutation matrix containing only one non-zero element per line and column. Therefore, the columns of  $\mathbf{E}_{H}^{-\dagger} = \mathbf{Q}\mathbf{Z}$  match those of **Q** to within scale and permutation and a straightforward estimation of **B** becomes

$$\widehat{\mathbf{B}} = \mathbf{E}_s \widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_H^{-\dagger}.$$
 (15)

### 4. Performance Comparison

4.1. Computational Complexity. Table 1 presents a summary of the main computational steps involved in both the original EVESPA and the proposed algorithm using their respective notations. It can be seen that the proposed procedure requires only one SVD, whereas two are required in the original EVESPA. Moreover, the only *M*-dependant decomposition involved in the proposed method is that of the initial EVD. Hence, as the number of sensors *M* increases for a fixed number of coherent groups *G*, there will obviously come a point where the proposed procedure outperforms the original EVESPA in terms of computational complexity. However, note that the final step of our proposed method involves the inverse of the nondiagonal matrix  $E_H$ , which for a minimum value of *G* represents a higher complexity operation than (25) in [2]. Thus, the gain in



FIGURE 1: Normalized execution time of the original EVESPA (solid lines) and the proposed estimation procedure (dashed lines) in terms of M and G.



FIGURE 2: Statistical performance comparison between the original and the proposed estimation procedures.

computational complexity of our proposed method does not appear evident for low values of M. In order to appreciate the computational complexity of each algorithm, Figure 1 displays their normalized average execution time curves for  $M \in \{2, 3, ..., 20\}$  and  $M \ge G \in \{2, 4, 8, 12\}$ , where each point was obtained from 20000 trials and randomly generated matrices  $C_1$ ,  $C_2$ , and  $R_{xx}$ . Note that even though the original EVESPA (without improvement) does not make

Groups	θ	α	Groups	θ	α
	$40^{\circ}$	0.2 + j0.8		50°	0.9 + j0.3
	68°	1		$70^{\circ}$	1
1	80°	0.8 - j0.5	2	90°	0.9 – <i>j</i> 0.3
	115°	0.75 + <i>j</i> 0.65		120°	0.8 + j0.7
	130°	0.8 - j0.2		135°	0.95
	45°	1		60°	0.3 – <i>j</i> 0.8
	65°	0.8 - j0.7		85°	0.4 + j0.9
3	85°	0.7 + j0.7	4	105°	0.8 + <i>j</i> 0.6
	$110^{\circ}$	0.65 - j0.8		118°	0.9 + j0.7
	125°	0.9 + j0.1		$140^{\circ}$	1

TABLE 2: Signal parameters used for the simulation of Figure 2.

use of  $\mathbf{R}_{xx}$ , its computation does not increase the complexity of the proposed method since it already represents an intermediate step in the evaluation of both  $\mathbf{C}_1$  and  $\mathbf{C}_2$ .

No improvement was considered for the original EVESPA. As expected, the performance of the proposed procedure is at its worse for low values of M and G where it is slightly outperformed by the original EVESPA. However, this situation quickly changes as M and G increase where the gain in computational complexity obtained with the proposed procedure becomes obvious. This could also have been predicted from Table 1. All in all, the proposed estimation procedure thus constitutes an improvement in terms of computational complexity over the original one.

4.2. Statistical Performance. Since  $\mathbf{E}_s$  can be estimated from second-order statistics, we now show that the proposed estimation procedure achieves a better statistical performance than the original EVESPA. Consider the complex angle  $\hat{\beta}_g(K)$  between  $\mathbf{b}_g$ , the *g*-th column of  $\mathbf{B}$ , and  $\hat{\mathbf{b}}_g(K)$ , the *g*-th column of  $\hat{\mathbf{B}}(K)$  and corresponding estimation of  $\mathbf{b}_g$  obtained from *K* snapshots from either the original EVESPA or the proposed algorithm. It follows that

$$\left|\cos\left(\widehat{\beta}_{g}(K)\right)\right| = \left|\frac{\mathbf{b}_{g}^{\dagger}\widehat{\mathbf{b}}_{g}(K)}{b_{g}\widehat{b}_{g}(K)}\right|.$$
(16)

Hence, under assumptions A1 to A4 in [2] and for  $G \le M$ , the MSE of this latter quantity can be computed as follow:

$$\mathrm{MSE}\left\{\left|\cos\left(\beta_{g}(K)\right)\right|\right\} = E\left\{\left(1 - \left|\cos\left(\beta_{g}(K)\right)\right|\right)^{2}\right\} \equiv e_{g}.$$
(17)

Ideally,  $|\cos(\beta_g(K))| = 1$  meaning that  $\mathbf{b}_g$  and  $\mathbf{b}_g(K)$  are collinear. Using such a performance criterion, the best algorithm is thus the one that maximizes  $E\{|\cos(\beta_g(K))|\}$  for all g and a given  $K < \infty$ . Taking the average of (17) over G, a global RMSE criterion can thus be defined as

$$E = \sqrt{\frac{1}{G} \sum_{g=1}^{G} e_g}.$$
 (18)

Figure 2 displays the RMSE curves of both the original EVESPA and the proposed algorithm obtained from 10000 runs of 50 snapshots for SNR values ranging from -10 dB to 12 dB. BPSK signals are considered using parameters of Table 2. The receiver consists of a ten-element uniform linear array (ULA) with equal power and independent AWGN on all elements. It can be seen that the proposed estimation procedure achieves a better performance than the original EVESPA for all SNRs, namely, because  $\mathbf{E}_s$  is estimated from second-order statistics which possess a lower variance than fourth-order statistics.

Note however that the use of second-order statistics as a means of improving the quality estimate of **B** was also considered in Section 4 of [1], corresponding to steps 5 and 6 of Table 1. Upon a first estimation  $\hat{\mathbf{B}}$  of **B**, a new estimation  $\hat{\mathbf{B}}'$  was computed such that  $\hat{\mathbf{B}}' = \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^{\dagger} \mathbf{B}$ . The performance of such an estimator would have been similar to that of the proposed estimation procedure in Figure 2. However, the computational complexity involved in a first evaluation of  $\hat{\mathbf{B}}$ from the original procedure followed by an additional EVD of  $\mathbf{R}_{xx}$  in order to compute  $\mathbf{E}_s$  would clearly become higher than that of the proposed algorithm. Hence, the latter does still represent an advantageous alternative in this context.

#### 5. Conclusion

In this paper, we have shown how the original EVESPA algorithm could be improved both in terms of computational complexity and statistical performance by restricting the estimation of **B** to that of its corresponding coefficient matrix in the signal subspace. The use of  $\mathbf{E}_s$  as estimated from second-order statistics ensures a gain in statistical performance while the reduced dimensions of **C**' through the use of **Q** accounts for a gain in computational complexity in a majority of scenarios.

#### References

- E. Gönen, J. M. Mendel, and M. C. Dogan, "Applications of cumulants to array processing—part IV: direction finding in coherent signals case," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2265–2276, 1997.
- [2] E. Gönen and J. M. Mendel, "Applications of cumulants to array

processing—part III: blind beamforming for coherent signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2252–2264, 1997.

- [3] H. Jiang, S. X. Wang, and H. J. Lu, "An effective direction estimation algorithm in multipath environment based on fourth-order cyclic cumulants," in *Proceedings of the 5th IEEE Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC '04)*, pp. 263–267, July 2004.
- [4] C. Jian, S. Wang, and L. Lin, "Two-dimensional DOA estimation of coherent signals based on 2D unitary ESPRIT method," in *Proceedings of the 8th International Conference on Signal Processing (ICSP '06)*, vol. 1, November 2006.
- [5] L. C. Godara, Smart Antennas, CRC Press LLC, Boca Raton, Fla, USA, 2004.
- [6] J. Liang and D. Liu, "Passive localization of mixed near-field and far-field sources using two-stage MUSIC algorithm," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 1, Article ID 5200332, pp. 108–120, 2010.
## AN EXPONENTIAL APPROACH TO SIGNAL PARAMETER ESTIMATION

Emmanuel Racine, Dominic Grenier

Laval University Electrical and Computer Engineering 1065 avenue de la Médecine, Canada, Québec (Québec), G1V 0A6

## ABSTRACT

This paper presents a general parameter estimation theory applicable in scenarios for which an observable signal expresses itself as a sum of independent random processes. The principle consists of evaluating the expected value of an exponential function of the observable signal, and finding the function parameter values for which the resulting expression vanishes. The proposed approach requires knowledge of the statistical distribution of the signals of interest, and may not apply to every type of signals. However, it proves immune to symmetric Gaussian noise (in the case of complex signals) and has the potential to identify more sources than sensors with no theoretical limit. An application example is provided as a means of evidencing the advantages of the theory.

## 1. INTRODUCTION

The problem of signal parameter estimation from the data collected at a group of sensors has been widely studied in the literature, and still continues to be a subject of interest to this day. Popular second-order based algorithms such as MUSIC [8] and ESPRIT [9] have been widely used in the literature, and inspired the work of many. Higher-order statistical algorithms exploiting cumulants have also been developed to overcome some of the limitations inherent to second-order statistics. A good example of such an algorithm can be found in [7], where more sources than sensors can be handled.

Another category of estimation algorithms are those exploiting the empirical characteristic function of the observable signals, commonly known as ECF-based algorithms. The general principle of these algorithms is to find an analytical expression for a CF that best matches the ECF based on the signal model [3]. The proposed estimation approach in this paper has a similarity with ECF-based algorithms in that an exponential function of the observed signal is also considered. However, we do not restrict ourselves to the definition of the CF for complex signals [5, 6]. Instead, the observable and generally complex signal is considered in its whole. Moreover, the estimation is based on finding the zeros of such an exponential function rather than a fit.

## 2. GENERAL CONCEPTS

Consider an observable signal x(t) of the form :

$$x(t) = \sum_{m} \alpha_m s_m(t) + n(t) , \qquad (1)$$

where the sources  $s_m(t)$  are assumed to be complex, stationary and independent zero-mean random processes, and where n(t) is a symmetric additive white Gaussian noise (AWGN). Let us consider a function  $H(\rho)$  such that :

$$H(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)x(t)}\}$$
  
=  $E\{\chi^{\zeta(\rho)\sum_{m}\alpha_{m}s_{m}(t)}\chi^{\zeta(\rho)n(t)}\}$   
=  $\left[\prod_{m} E\{\chi^{\zeta(\rho)\alpha_{m}s_{m}(t)}\}\right]E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t)}\}$   
=  $\left[\prod_{m} f_{m}(\zeta(\rho)\alpha_{m},\sigma_{m})\right]g(\zeta(\rho),\sigma_{n}),$  (2)

where  $\sigma_m$  and  $\sigma_n$  are the standard deviations of  $s_m(t)$ and n(t) respectively. The use of  $\chi$  as a general base is not a novel approach here since  $\chi^x = e^{x \ln(\chi)}$ . This notation has been chosen as a more compact way to introduce a general weight in the exponent. The presence of  $\chi$  as an argument of f and g has been omitted since it is not needed for an intuitive understanding of the proposed algorithm. The function  $\zeta(\rho)$  may be arbitrarily chosen, and due its product with both  $s_m(t)$  and n(t) in the above derivation,  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$  and  $g(\zeta(\rho), \sigma_n)$ will in fact only depend on  $\zeta(\rho)\alpha_m\sigma_m$  and  $\zeta(\rho)\sigma_n$ , respectively, which can be seen as single complex parameters. The consideration of  $\zeta(\rho)$  rather than a single parameter  $\zeta$  for example will be better understood in section 3. The analytical evaluation of the functions  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m)$ ,  $\sigma_m$ ) require knowledge of the source pdf's, something that will be assumed throughout the paper. However, evaluation of  $g(\zeta(\rho), \sigma_n)$  is readily possible considering the Gaussianity nature of the real and imaginary parts of n(t). We have :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t)}\} = E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t)\}+j\Im\{n(t)\}}\}$$
  
=  $E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t)\}}\}E\{\chi^{j\zeta(\rho)\Im\{n(t)\}}\}$  (3)

where the last equality follows from the fact that  $\Re\{n(t)\}\$  and  $\Im\{n(t)\}\$  are independent random variables. Using appropriate integration techniques, it can be shown that :

$$E\{\chi^{\zeta(\rho)\Re\{n(t)\}}\} = e^{\frac{1}{2}\ln(\chi)\zeta^2(\rho)\sigma_{n_r}^2}, \qquad (4)$$

where  $\sigma_{n_r}$  is the standard deviation of  $\Re\{n(t)\}$ . If  $\Im\{n(t)\}$  is identically distributed, then it follows from (3) and (4) that :

$$g(\zeta(\rho), \sigma_n) = E\{\chi^{\zeta(\rho)n(t)}\} = 1 \ \forall \ \sigma_n \ . \tag{5}$$

This result holds true as long as n(t) is a Gaussian and symmetric random process, i.e. having the same variance along both the real and imaginary axis. It hence cannot be true for real valued signals, where  $n(t) \in \Re$ . Under the symmetric assumption, (2) can be reduced to :

$$H(\rho) = \prod_{m} f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m) , \qquad (6)$$

which is a function depending solely on the sources parameters, considering that  $\chi$  and  $\zeta(\rho)$  are arbitrarily imposed for calculation. It must appear evident here that if a source  $s_m(t)$  is also Gaussian and symmetric, then  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m) = 1$  and no useful information can be derived from  $H(\rho)$  in regard to that source. Hence, symmetrical Gaussian sources are not suited for a parameter estimation algorithm exploiting (2). However, we have found that for many types of popular communication signals (e.g. BPSK, PAM, M-QAM, etc.),  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$ is non-unitary and thus renders the use of  $H(\rho)$  possible.

We propose the use of  $H(\rho)$  as a means of estimating the sources parameters in the following way. For a given  $\rho$ , it is clear from (6) that if at least one function  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$  vanishes,  $H(\rho)$  will also vanish assuming that  $|f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)| < \infty \forall m$ , which will be the case for finite values of  $\chi$  and  $\zeta(\rho)$ . Given the analytical expression of  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$ , its resolution with respect to  $\zeta(\rho)$ , if possible, will yield an expression directly dependent on  $\alpha_m \sigma_m$ , the generalized complex parameter of source m. Hence, by evaluating  $H(\rho)$  over a certain interval, the values  $\rho_0$  of  $\rho$  for which  $H(\rho_0) = 0$  can be directly used to recover the complex parameter(s) of the source(s) responsible for this vanishing condition.

Such is the general philosophy of the proposed estimation approach. There are in fact more considerations to be made in an actual implementation of the algorithm, which is always likely to be application dependent. The following example will help better understand the general explanations discussed in this introductory section.

#### 3. APPLICATION EXAMPLE

Consider the problem of signal parameter estimation of far field narrow-band independent QPSK sources using a two-elements antenna array. According to classical theory [4], observable signals for each element can be expressed as :

$$x_1(t_k) = \sum_{m=1}^{M} s_m(t_k) + n_1(t_k) ,$$

$$x_2(t_k) = \sum_{m=1}^{M} e^{-j\phi_m} s_m(t_k) + n_2(t_k) ,$$
(7)

where M represents the number of independent sources,  $t_k = kT$  represents a discrete sample time considering a symbol period T, and  $\phi_m$  represents the electrical angle of the *m*-th source. For this example, we will assume that  $n_1(t_k)$  and  $n_2(t_k)$  are both symmetric iid Gaussian random processes.

## 3.1. Theoretical derivations

The very first step in the implementation of the estimation process is the evaluation of  $f_m(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$  in (2). Since only QPSK sources are considered in this problem, each of the M functions will have a same structure that will be denoted as  $f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m)$ . Assuming equiprobable symbols, it can be shown that :

$$f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho)\alpha_m, \sigma_m) = E\{\chi^{\zeta(\rho)\alpha_m s_m(t)}\} = \frac{1}{4} \left(\chi^{(1+j)\mu} + \chi^{(1-j)\mu} + \chi^{(-1+j)\mu} + \chi^{(-1-j)\mu}\right),$$
(8)

with  $\mu = \zeta(\rho)\alpha_m\sigma_m/\sqrt{(2)}$ . Note that besides  $\chi$ , this function only depends on  $\zeta(\rho)\alpha_m\sigma_m$  as mentioned in section 1. The second step is to find whether or not  $f_{\text{QPSK}}$  can vanish by varying  $\zeta(\rho)$ . Solving  $f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho)\alpha_m,\sigma_m) = 0$  yields :

$$\zeta(\rho)\alpha_m \sigma_m \in \frac{\pi(1+2z)}{\sqrt{2}\ln(\chi)} \{1, j\}, \ z \in \mathbb{Z} .$$
 (9)

Hence, more than one value of  $\zeta(\rho)$  can nullify  $f_{\text{QPSK}}$ . This is a situation that has also been encountered with other types of signals. Note that  $\chi$  and  $\zeta(\rho)$  are the only two parameters to be arbitrarily set in the estimation process (see  $H(\rho)$  in (2)). If we let

$$\zeta(\rho) = \frac{\pi}{\rho\sqrt{2}\ln(\chi)} , \qquad (10)$$

then it can be seen from (9) that one of the functions  $f_{\rm QPSK}$  will vanish whenever

$$\rho \in \frac{\alpha_m \sigma_m}{1+2z} \{1, -j\} = \left\{ \dots, \frac{\alpha_m \sigma_m}{-3}, -\alpha_m \sigma_m, \alpha_m \sigma_m, \frac{\alpha_m \sigma_m}{3}, \dots \right\} \cup \quad (11) \\ \left\{ \dots, \frac{\alpha_m \sigma_m}{-3j}, \frac{\alpha_m \sigma_m}{-j}, \frac{\alpha_m \sigma_m}{j}, \frac{\alpha_m \sigma_m}{3j}, \dots \right\} .$$

This relation thus relates  $\rho$  to  $\alpha_m \sigma_m$ , and shall be directly exploited for all parameter estimations.

#### 3.1.1. Power estimation

The previous derivations were the initial straightforward and necessary steps in the application of the algorithm. Let us now exploit these relations and the theory of section 2 as a means of estimating the standard deviation  $\sigma_m$  of each of the *M* sources, in a first time. To this purpose, consider a function  $H_1(\rho)$  such that :

$$H_1(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)x_1(t_k)}\} = \prod_{m=1}^M f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho), \sigma_m) ,$$
(12)

where the last equality follows from (6) and the fact that  $\alpha_m = 1$  in this context according to (1). Considering a function  $\zeta(\rho)$  as in (10), we can see from (11) that if we restrict the values of  $\rho$  to real and positive numbers, the function  $f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho), \sigma_m)$  will be nullified (and so  $H_1(\rho)$ ) whenever

$$\rho \in \left\{\dots, \frac{\sigma_m}{5}, \frac{\sigma_m}{3}, \sigma_m\right\} . \tag{13}$$

Let

$$\rho_1 \in [\rho_{1_{\min}}, \rho_{1_{\max}}] \in \Re \tag{14}$$

be a search parameter. By plotting  $H_1(\rho_1)$ , one hence obtains direct information on the standard deviations of the sources. However, a given source is likely to create more than one zero in the range of interest<sup>1</sup>. It then becomes ambiguous to tell which value of the set in (13) a value  $\rho_{1_0}$  such that  $H_1(\rho_{1_0}) = 0$  has taken. We can however see from (13) that by increasing  $\rho_1$  beyond  $\sigma_m$ , no more zeros will be created by that *m*-th source. Hence, by evaluating  $H_1(\rho_1)$  for decreasing values of  $\rho_1$  starting from  $\rho_{1_{max}} > \max_m(\sigma_m)$ , the first value  $\rho_{1_0}$  of  $\rho_1$  encountered for which  $H_1(\rho_{1_0}) = 0$  will then unmistakeably correspond to the standard deviation of the most powerful source, which will be refered to as  $\sigma_1$ .

A value  $\rho_{1_{\max}} > \sigma_1$  may be obtained directly from  $x_1(t_k).$  We have :

$$\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_M^2 + \sigma_n^2, \Rightarrow \sigma_1 = \max_m(\sigma_m) \le \sqrt{\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\}}.$$
(15)

We can then impose :

$$\rho_{1_{\max}} = c_1 \sqrt{\operatorname{Var}\{x_1(t_k)\}} , \qquad (16)$$

where  $c_1 > 1$ .

The estimation of  $\sigma_m$  such that  $\sigma_m < \sigma_1$ , may be obtained by progressively decreasing the value of  $\rho_1$  from  $\sigma_1$ , and again noting the values of  $\rho_{1_0}$  for which  $H_1(\rho_{1_0}) =$ 0. A problem will however be encountered if  $\sigma_m = \sigma_1/\ell$ ,  $\ell \in \{1, 3, \ldots\}$ , because zeros at these positions will already be expected from the knowledge of  $\sigma_1$ . There thus appears to be no way to detect the presence of such sources by the sole observation of  $H_1(\rho_1)$ . From a theoretical point of view, this problem can be alleviated by, instead of  $H_1(\rho)$ , considering the zeros of a function  $G(\rho)$  such that :

$$G(\rho) = \frac{H_1(\rho)}{\nu(\rho)}, \ \nu(\rho) = \prod_{m \mid \sigma_m \ge \rho} f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho), \sigma_m) \ .$$
(17)

The estimation process begins by evaluating  $G(\rho_1)$  for decreasing values of  $\rho_1$  starting from  $\rho_{1_{\text{max}}}$  in (16). The first zero of  $G(\rho_1)$  will appear<sup>2</sup> when  $\rho_1 = \sigma_1$ , from which

point a function  $H_1(\rho_1)/f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho_1), \sigma_1)$  is now considered. If a zero is still observed at  $\rho_1 = \sigma_1$ , then  $\sigma_2 = \sigma_1$  (two sources have the same power) in which case a function  $H_1(\rho_1)/f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho_1), \sigma_1)^2$  is now considered. The process continues by further decreasing the value of  $\rho_1$ , where  $G(\rho_1)$  vanishes only when  $\rho_1 = \sigma_m$ . By the use of (17), the influence of a source is removed once it has been detected. For a low enough  $\rho_{1_{\min}}$ , this procedure will allow the determination of the number of sources in presence, as well as their corresponding power, no matter how small, with no theoretical limit on M.

It must however be understood that although theoretically sound, eq. (17) cannot be used in a practical scenario where  $H_1(\rho_1)$  is replaced by its corresponding empirical estimate  $\hat{H}_1(\rho_1)$ . This estimate will not perfectly vanish for  $\rho_1 = \sigma_m/\ell$ , unlike  $f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho_1), \sigma_m)$ , hence bringing enormous variance in  $\hat{G}(\rho_1)$ . As a practical solution, instead of alleviating the problem of ambiguities on a theoretical level, one can simply avoid them. Such an approach will be adopted in the scope of this example.

We know that  $\sigma_1$  can be correctly estimated by locating the first zero of  $H_1(\rho_1)$  encountered by progressively decreasing the value of  $\rho_1$  from  $\rho_{1_{\text{max}}}$ . From this estimate, we know that the next possible ambiguity for that source can only happen when  $\rho_1 = \sigma_1/3$ . If there exists a  $\sigma_m$ satisfying  $\sigma_1/3 < \sigma_m \leq \sigma_1$ , such a source can only create a first ambiguity at  $\sigma_m/3$ , which is located at or below  $\sigma_1/3$ . Hence, every zero of  $H_1(\rho_1)$  located in the range  $\sigma_1[1/3, 1]$  will correspond to the standard deviation of a source, with no ambiguity. For this power estimation procedure, we shall then impose :

$$\rho_{1_{\min}} = c_2 \frac{\sigma_1}{3} ,$$
(18)

where  $c_2 > 1$ . This approach allows the detection of sources whose power is higher than 1/9 that of the most powerful source. Note that it will not be able to detect the number of sources in that power range. For example, if the M sources have identical powers, only one zero of  $H_1(\rho_1)$ will be found in the interval  $[\rho_{1_{\min}}, \rho_{1_{\max}}]$ . The procedure allows to detect the number of distinct standard deviations in that range.

#### 3.1.2. Electrical angle estimation

It can be noted that only  $x_1(t_k)$  was used in the previous section for power estimation purposes. We will now see how both array outputs can be used in order to estimate each angle  $\phi_m$  in (7). Let us first concentrate on a pure theoretical approach, and define a function  $H_2(\rho)$  such that :

$$H_{2}(\rho) = E\{\chi^{\zeta(\rho)(v_{1}x_{1}(t_{k})+v_{2}x_{2}(t_{k}))}\}$$
  
=  $\prod_{m=1}^{M} f_{\text{QPSK}}(\zeta(\rho)(v_{1}+v_{2}e^{-j\phi_{m}}),\sigma_{m}), (19)$ 

where the last equality follows from (1), (6) and (7). Note that  $\alpha_m$  in (1) now corresponds to  $v_1 + v_2 e^{-j\phi_m}$  since it represents the coefficient of  $s_m(t_k)$  in the resulting signal

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>There will in fact be an infinity as  $\rho_{1_{\min}} \rightarrow 0$ .

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>From a rigorous point of view,  $G(\rho_1)$  never completely vanishes. We rather have  $\lim_{\rho_1 \to \sigma_m^+} G(\rho_1) = 0^+$ .

operation. Given the expression of  $\zeta(\rho)$  in (10),  $H_2(\rho)$  will vanish whenever (11) is satisfied. If we let

$$\rho_2 = \sigma_p \left( v_1 + v_2 e^{-j\phi} \right) \equiv \sigma_p \alpha \,, \ \phi \in ] - \pi, \pi] \,, \quad (20)$$

where p is the index of a source whose angle  $\phi_p$  is to be estimated, then following (11) the set of points  $\alpha$  for which  $H_2(\rho_2)$  vanishes can be expressed as :

$$\alpha \in \frac{\sigma_m \alpha_m}{\sigma_p (1+2z)} \{1, -j\}, \ z \in \mathbb{Z},$$
(21)

where  $m \in \{1, 2, ..., M\}$ . The estimation procedure of section 3.1.1 using eq. (17) has shown how  $\sigma_m$  could be obtained for all m. Hence, these parameters can be assumed to be known. In order to estimate the electrical angle of a source p, one has to evaluate  $H_2(\rho_2)$  according to (20), and identify the values  $\phi_0$  for which  $H_2(\rho_2) = 0$ . A graphical example is shown in Fig 1. The search do-



**Fig. 1**. Possible ambiguities on the estimation of a source parameter  $\alpha_p$  using (19).

main is represented by  $\alpha$  and consists of a circle of radius  $|v_2|$  centered at  $v_1$  in the complex plane, according to (20). We look for the source parameter  $\alpha_p$  which can be located anywhere on that circle. Suppose that there is only one source (M = 1). If  $\alpha_p$  is not located at  $P_1$  or  $P_4$ , then only one zero of  $H_2(\rho_2)$  will be observed along the path when  $\phi = \phi_p$  in (20). However, if  $\alpha_p = P_1$ for example, two zeros will be observed at  $\alpha \in \{P_1, P_2\}$ because  $P_2 = \alpha_p/3$  represents a point on the search domain where  $H_2(\rho_2)$  will vanish according to (21) (the case where m = p = 1 and 1 + 2z = 3). Considering that only one source is present, it would be possible to tell that  $\alpha_p$ is located at  $P_1$  because otherwise, if  $\alpha_p = P_2$ , no zero would be observed at  $P_1$ . When more than one source is present however, this situation yields ambiguity. The aim of this example is to show that a necessary condition to alleviate all possible ambiguity on the estimate of a parameter  $\alpha_p$ , is that the search circle  $\alpha$  does not intercept any other circle of that source, nor any circle associated with other sources. We will refer to these circles as ambiguity circles.

Fig. 1 only displays the search circle  $\alpha$  and the ambiguity circle associated with  $\alpha/3$ . A complete figure would show all possible ambiguity circles using (21), including those associated with  $\alpha/\ell$  and  $j\alpha/\ell$ , or more generally those associated with  $\alpha\sigma_m/(\ell\sigma_p)$  for any m, with

 $\ell \in \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$ . An ambiguity-free estimation requires that the search circle intercepts none of these circles. The problem consists in finding the appropriate constraints on  $v_1$  and  $v_2$  such that this condition be satisfied. As an initial attempt, one could set  $v_1 = 0$  such that every circle be centered at 0, and no intersections be possible. However, at least four zeros would be encountered for each source on the search circle when  $\alpha \in$  $\{\alpha_p, -\alpha_p, j\alpha_p, -j\alpha_p\}$ , according to (21). This is the situation where the search circle is coincident with three ambiguity circles, and is therefore not desirable. Thus, as a first condition, we must have

$$v_1 \neq 0 . \tag{22}$$

In order to establish the general necessary conditions on



**Fig. 2.** Analysis of ambiguity conditions. a) : Sources  $m|\sigma_m = \sigma_p$ . b) : Sources  $m|\sigma_m < \sigma_p$ . c) : Sources  $m|\sigma_m > \sigma_p$ .

 $v_1$  and  $v_2$  such that no ambiguity exists on the estimate of any source parameter  $\alpha_p$ , consider the situations depicted in Fig. 2. For the sake of convenience,  $v_1$  has been represented as a real parameter although this will not have any effect on the generality of the results to be obtained.

In case a), we consider the ambiguity circles of any source m such that  $\sigma_m = \sigma_p$ . The ambiguity circles associated with  $\alpha/3$ ,  $\alpha/5$ ,  $j\alpha/3$  and  $j\alpha/5$  are shown. By simple geometrical considerations, it can be noticed that ambiguity circles in quadrature with the search circle are always further away from the latter than their in line equivalents. Hence, the analysis can be restricted only on the ambiguity circles located on the  $\overline{Ov_1}$  axis. It is also evident from the drawings that if no intersection is possible with the ambiguity circle associated with  $\alpha/3$ , no intersection is possible with any subsequent ambiguity circles. Hence, a no intersection condition will be satisfied in this context if :

$$|v_1| - |v_2| > \frac{|v_1|}{3} + \frac{|v_2|}{3} ,$$
  
$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{1}{2} .$$
(23)

In case b), ambiguity circles of a source m such that  $\sigma_m < \sigma_p$  are considered. In this context,  $\sigma_m/\sigma_p < 1$  meaning that the largest ambiguity circle is smaller than the search circle. It is evident that if no intersection is possible between these two, no intersection will be possible with any other ambiguity circle as well. The no intersection condition can thus be expressed as :

$$|v_1| - |v_2| > |v_1| \frac{\sigma_{q_1}}{\sigma_p} + |v_2| \frac{\sigma_{q_1}}{\sigma_p} ,$$
  

$$\sigma_{q_1} = \max_m (\sigma_m | \sigma_m < \sigma_p) ,$$
  

$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{\sigma_p - \sigma_{q_1}}{\sigma_p + \sigma_{q_1}} .$$
(24)

In case c), the ambiguity circles of a source m such that  $\sigma_m > \sigma_p$  are considered. This case is a more complex one because the search circle can now lie between any two subsequent ambiguity circles. Instead of considering the problem in its most general form using arbitrary values of  $\ell$  in Fig. 2, let us simplify the analysis by considering only the estimation of parameters  $\alpha_p$  such that  $\sigma_p > \sigma_1/3$ , where  $\sigma_1 = \max_m(\sigma_m)$ . This is the restriction that also led to eq. (18), and which will be used in section 3.2.

In this case,  $\sigma_m/\sigma_p < 3$ , which means that the search circle will always be located between the two first (largest) ambiguity circles of any source m, and thus corresponds to the situation where  $\ell = 1$  in Fig. 2 c). A first condition to ensure that no estimation ambiguity occurs is that the search circle intercepts none of the secondary ambiguity circles associated with sources m. This condition will be met if the search circle does not intercept the largest of these circles (still smaller and located just left of the search circle on Fig. 2 c)). We must have :

$$|v_1| - |v_2| > |v_1| \frac{\sigma_{q_2}}{3\sigma_p} + |v_2| \frac{\sigma_{q_2}}{3\sigma_p} ,$$
  

$$\sigma_{q_2} = \max_m (\sigma_m | \sigma_m > \sigma_p) ,$$
  

$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{3\sigma_p - \sigma_{q_2}}{3\sigma_p + \sigma_{q_2}} .$$
(25)

A second condition is that the search circle intercepts none of the larger ambiguity circles associated with these same sources. This condition will be met if the search circle does not intercept the smallest of these ambiguity circles (still larger and located at the right of the search circle on Fig. 2 c)). We must have :

$$|v_1| + |v_2| < |v_1| \frac{\sigma_{q_3}}{\sigma_p} - |v_2| \frac{\sigma_{q_3}}{\sigma_p} ,$$
  

$$\sigma_{q_3} = \min_m (\sigma_m | \sigma_m > \sigma_p) ,$$
  

$$\Rightarrow \frac{|v_2|}{|v_1|} < \frac{\sigma_{q_3} - \sigma_p}{\sigma_{q_3} + \sigma_p} .$$
(26)

Cases a), b) and c) of Fig. 2 cover all possible ambiguity scenarios resulting from the implementation of eq. (19) and (20). Combining (3.1.2), (3.1.2), (3.1.2) and (3.1.2) we get :

$$\frac{|v_2|}{|v_1|} < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\sigma_p - \sigma_{q_1}}{\sigma_p + \sigma_{q_1}}, \frac{3\sigma_p - \sigma_{q_2}}{3\sigma_p + \sigma_{q_2}}, \frac{\sigma_{q_3} - \sigma_p}{\sigma_{q_3} + \sigma_p}\right)$$
$$\equiv b , \qquad (27)$$

which is the necessary condition on  $v_1$  and  $v_2$  to ensure an ambiguity-free estimation of any source parameter  $\alpha_p$ such that  $\alpha_p > \alpha_1/3$ . One could also set  $v_1$  and  $v_2$  such that the noise power of the resulting signal  $v_1x_1(t_k) + v_2x_2(t_k)$  in (19) be identical to that of  $n_1(t_k)$  and  $n_2(t_k)$ in (7). This leads to :

$$|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1. (28)$$

By combining (27) and (28) and letting  $|v_2|/|v_1| = c_3 b$ , where  $c_3 < 1$ , we finally get :

$$|v_1| = \frac{1}{\sqrt{1 + (c_3 b)^2}}, \ |v_2| = \frac{c_3 b}{\sqrt{1 + (c_3 b)^2}}.$$
 (29)

#### 3.2. Numerical validation

We consider 3 independent QPSK sources of standard deviations  $\sigma_1 = 3.1$ ,  $\sigma_2 = 2$  and  $\sigma_3 = 1.3$  respectively, and electrical angles  $\phi_1 = 30^\circ, \phi_2 = 120^\circ$  and  $\phi_3 =$ 50°. A base  $\chi = 1.8$  is used for all simulations, and the noise power is defined in terms of the mean power of the sources. The signal parameters are estimated by first applying the theory of section 3.1.1, which allows to identify P distinct standard deviations in the range  $\hat{\sigma}_1$  [1/3, 1]. For each of these values, one or more electrical angle estimates are then generated according to the theory of section 3.1.2. Fig. 3 displays 10 independent estimates of  $|H_1(\rho_1)|$ , each obtained with K = 5000 samples and a SNR of 15 dB. As expected, local minima are observed in the vicinity of the standard deviations of the sources. Fig. 4 displays the RMSE curves of the estimates obtained by varying K and the SNR over specific ranges. All points were obtained from the average of 1000 realizations. It can be noticed that a more important error is present in the electrical angle estimates. This is due to the fact that their estimation strongly relies on the standard deviation estimates of the sources, which are themselves obtained from a prior (imperfect) estimation.

#### 4. DISCUSSION AND CONCLUSION

The aim of this paper was to introduce an exponential approach to signal parameter estimation by considering the



**Fig. 3.** Estimation of the standard deviations of the sources from 10 independent trials.



**Fig. 4.** RMSE curves of the estimates. Variation of K: SNR = 15 dB. Variation of the SNR : K = 6000.

zeros of a resulting expected value exponential function rather than a fit with its theoretical exact form. The proposed definition differs from the characteristic function in that complex signals are treated as a whole rather than considering their real and imaginary parts separately. This operation allows the removal of the noise effect without a priori knowledge of its statistical distribution, as long as it remains Gaussian and symmetric. Much work still have to be done however in order to exploit the theory in the most effective way. The proposed approach in section 3 is one among many ways to apply the general theory in a given signal context, but may not be the optimal one.

## 5. REFERENCES

- Salo, J. et al., "Empirical Characteristic Function Based Estimation of Multiple Scattering Channel Parameters", *IEEE 17th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, 2006.
- [2] Erikssonng, J. and Koivunen, V., "Characteristic-Function-Based Independent Component Analysis", *Signal Processing*, Vol. 83, No. 10, Oct. 2003.
- [3] Ushakov, G., Selected Topics in Characteristic Functions, ser. Modern Probability and Statistics, VSP, The Netherlands, 1999.
- [4] Gross, F. B., Smart Antennas for Wireless Communication with MATLAB, McGraw-Hill, 2005.
- [5] Fang, K.-T., Symmetric Multivariate and Related Distributions, ser. Monographs on Statistics and Applied Probability, Chapman and Hall, 1990.
- [6] Bracewell, R. N., The Fourier Transform and Its Applications, McGraw-Hill, 1965.
- [7] De Lathauwer, L. et al., "ICA Techniques for More Sources Than Sensors", *Signal Processing Workshop on Higher-Order Statistics*, 1999.
- [8] Schmidt, R.O., "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *IEEE Transactions on Antennas ad Propagation*, Vol. 34, No. 3, March 1986.
- [9] Roy, R. and Kailath, T., "ESPRIT-Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech,* and Signal Processing, Vol. 37, No. 7, July 1989.

## Invited Article

## Blind Identification for Communication Signals: An Approach Exploiting Sampling Phase Diversity

## **Emmanuel Racine and Dominic Grenier**

Laboratoire de Radiocommunications et de Traitement du Signal, Laval University, Canada

Correspondence: Emmanuel Racine, emmanuel.racine.2@ulaval.ca

Manuscript communication: received 5 December 2012, accepted 18 March 2013

*Abstract*- This paper presents a second-order blind channel estimation algorithm for digital communication signals under natural asynchronous conditions where no synchronization exists between transmitting and receiving antennas. The approach exploits sampling phase diversity provided by the cyclostationary nature of the received signals as an advantageous means of constructing multiple sets of distinct autocorrelation matrices evaluated at equals time lags. Channel estimation is then performed via joint diagonalization of a set of differential autocorrelation target matrices, avoiding the need of noise power or statistical distribution estimation. A broad set of simulation experiments is presented in distinctive signal contexts as a means of supporting and evidencing the potential of the proposed estimation method.

*Keywords*- Array processing, signal model, blind identification, blind source separation, joint diagonalization, approximate joint diagonalization, cyclostationarity, synchronous signals, asynchronous signals

## **1** INTRODUCTION

Array processing techniques for communication signals have received considerable amount of attention over the past decades. The potential advantages of such techniques in communication systems have been widely discussed in numerous books and papers [1– 4] and are well known to the researchers in the field. Consistently, significant efforts have been invested in the development of parameter estimation algorithms which are expected to go hand-in-hand with future generations of wireless communication systems. Ranging from classical second-order algorithms [5, 6] to higher order cumulant-based approaches [7–10], encompassing spectral and non-linear statistical theories [11–15], the literature is filled with a diversity of estimation algorithms exploiting various statistical signal properties.

Particularly, the general blind source separation (BSS) problem has received significant attention since the contributions of JADE [16] and subsequently SOBI [17], where in the latter case a statistically more attractive approach exploiting second-order autocorrelation of the received signals at different time lags was proposed. The source signals and mixing matrix were then estimated after joint diagonalization (JD) of a set of resulting target matrices. This underlying philosophy has been a source of inspiration for many works to follow [18–22], and will also be exploited in this paper.

JADE-like algorithms also perform blind estimation from the joint diagonalization of a set of target matrices, which are however constructed from the higherorder moments of the received signals. These two types of similar processing techniques have given rise and motivated the development of high-performance JD algorithms to the point of becoming a research topic of its own [22–30] with particular dedication to the BSS problem.

In this paper, we develop a blind channel estimation algorithm for digital communication signals following the same philosophy. The procedure will basically consist of generating a set of Hermitian target matrices from second-order expectations of the received signals, then obtain an estimate of the mixing (or channel) matrix by solving an approximate joint diagonalization problem (AJD). The latter problem arises when considering non-ideal target matrices such as those obtained from a finite number of samples. A fundamental difference in our approach however is that instead of simply considering autocorrelation evaluations at different values of time lag as in [17, 19–21], we show that the cyclostationary nature of the received signals under natural asynchronous conditions can also be exploited to obtain similar statistical expectations at different time values, therefore providing additional autocorrelation matrices for the AJD problem. The operation is numerically achieved by computing statistics from multiple sets of baud-sampled sequences in an interleaved fashion, and is referred to as exploitation of sampling phase diversity.

The joint use of both time and delay for autocorrelation matrix computation in JD-based estimation algorithms has already been proposed in the literature, for example in the case of nonstationary source separation using simultaneous diagonalisation (NSS-SD) [31–33]. However, instead of solving the AJD problem considering the immediate set of autocorrelation matrices obtained as a preliminary step, we propose the construction of target matrices based on a differential formula between autocorrelation matrices evaluated at identical time lags. This approach, termed JDDTM referring to joint diagonalization of differential target matrices (DTM), offers various advantages such as robustness vis-à-vis noise statistical distributions as well as full exploitation of the array's degree of freedom. Details of the process will be further explained in Section 4. The latter approach for the construction of target matrices from exploitation of sampling phase diversity provided by the cyclostationary nature of communication signals in a general asynchronous context is the main contribution of the paper.

An interesting contrast is to be made between our said estimation approach and the work of Rong et al. in [18], which in some way has been developed in a similar practical context. The proposed approach is highly inspired from [17] and [34], with the fundamental difference of using only zero-lag autocorrelation matrices obtained by a controlled time-varying power loading scheme where users' transmit power is varied to provide the necessary autocorrelation diversity required for application of a JD process. The algorithm is efficient in both synchronous and asynchronous cases, and also applies to identically modulated signals. However, it does require a certain amount of coordination between user mobiles and the receiving array in order to correctly gauge the time intervals over which power is varied and estimation of the subblock autocorrelation matrices is performed. We wish to point out that one of the main objective of this paper was to develop a comparable blind estimation algorithm requiring no such synchronisation mechanism between emitting and receiving antennas. The necessary autocorrelation diversity is here obtained by direct exploitation of the cyclostationarity nature of communication signals under natural asynchronous propagation. It will be furthermore shown that variable power loading effects similar to those considered in [18] can be obtained in both synchronous and asynchronous cases by simply varying the sampling phase at which a zero-lag autocorrelation matrix is computed, without requiring true transmit power variation on the uplink.

A particular emphasis is brought on signal modeling in Section 2, especially for clearly evidencing the differences between synchronous and asynchronous signal models and their respective implications on the discrete-time expression of the received signal vector. Section 3 presents the general autocorrelation matrices construction principle based on exploitation of sampling phase diversity while Section 4 is concerned with the JD problem itself. The description of the DTM construction principle will also be presented therein, along with two distinct resolution approaches considering either the full or a restricted set of target matrices. Finally, Section 5 presents a wide range of simulation results and analysis under various signal conditions, including a comparative study of performance considering different AJD algorithms and a behavioural examination of performance under worst-case/unfavorable estimation conditions.

Throughout the paper, '\*', '†', ' $\top$ ' and '#' are respectively used to denote the conjugate, the conjugate transpose, the transpose and the MooreâĂŞPenrose pseudoinverse operator. An element *p* of a vector *a* will be represented by either  $a_p$  or  $[a]_p$  and likewise an element pq of a matrix *A* will be represented by  $A_{pq}$  or  $[A]_{pq}$ .

## **2** Signal Modeling

## 2.1 The Received Signal Vector

We consider a traditional uplink scenario in which a number of M co-channel signals impinge on a Nelement antenna array of arbitrary geometry. The timecontinuous received signal vector is given by:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}(t) + \boldsymbol{n}(t), \qquad (1)$$

where  $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$  is the array manifold matrix,  $s(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  is the received baseband source vector and n(t) is a general additive noise assumed stationary. Each element  $x_i(t)$  of x(t) is measured as the output of a quadrature demodulator [35] assuming ideal carrier phase recovery<sup>1</sup>. Note that eq. (1) implicitly assumes narrowband signal propagation with respect to the array dimensions.

As in [18], we consider a propagation environment in which frequency-selective effects (or delay spread) are negligible. This assumption is of crucial importance in order to obtain autocorrelation matrices having the necessary eigenstructure for a JD-based estimation approach. Assuming that communication is established with *G* independent users during a given observation time, the  $M \times 1$  vector s(t) can be linked with a  $G \times 1$ received baseband source signal vector u(t) for all *G* users such that:

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1(t) \\ \mathbf{s}_2(t) \\ \vdots \\ \mathbf{s}_G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\alpha}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\alpha}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\alpha}_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_G(t) \end{bmatrix}$$
(2)
$$\equiv \Xi u(t) ,$$
(3)

where  $\{\alpha_g \in \mathbb{C}^{M_g \times 1}\}_{g=1}^G$  are the complex multipath coefficient vectors of the *G* coherent groups of signals (a *g*-th group is comprised of the  $M_g$  impinging signals from user *g* such that  $\sum_{g=1}^G M_g = M$ ), and where  $\{u_g(t)\}_{g=1}^G$  are the corresponding received elementary baseband source signals assumed uncorrelated with

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Note that the notion of carrier phase recovery makes no particular sense in this context since the instantaneous carrier phase values of each impinging co-channel RF signals (from either independent users or reflected paths in the environment) at a precise receiving antenna location will generally not be identical. Consequently, a local oscillator (LO) may lock with at most one of these impinging carriers which would have to be tracked or distinguished from the received RF mixture. Achieving carrier frequency recovery on the other hand is a sufficient condition to ensure validation of eq. (1), where phase differences between RF signals and the LO simply induce fixed constellation rotations that can be absorbed in either A or s(t).

each other, i.e.  $E\{u_p(t)u_q(t)\} = \sigma_{u_p}^2(t)\delta_{p,q}$  where  $\delta_{p,q}$  is the Kronecker delta. Substituting (3) into (1) yields:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \Xi \mathbf{u}(t) + \mathbf{n}(t) \equiv \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{n}(t) , \qquad (4)$$

where  $B = A\Xi$  is called the generalized steering matrix (GSM) of the sources which, in addition to complex multipath coefficients, may also encompass the effects of amplitude and phase mismatches as well as mutual coupling between array elements. A model identical to (4) has also been considered in [36, 37], and will be used throughout the rest of the paper. The discrete-time equivalent of (4) is given by:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{n}_k \tag{5}$$

where index *k* denotes a measurement taken at time  $t = t_k = kT_s$  where  $T_s$  is the sampling period. Blind identification refers to the estimation of *B* given sole observation of vectors  $\{x_k\}_{k=1}^{K}$ .

#### 2.2 The Received Source Signals

2.2.1 Synchronous and Asynchronous Signal Modeling: The fundamental difference between the two types of modeling lies in the interpretation of the source signals  $u_g(t)$  in (4). The literature sometimes provides misleading or at least different definitions of the appellation depending on the problem at hand. For example, in [38], synchronisation is achieved when the received source signals have zero delay of arrival. In [39, 40], the same terminology refers to symbol timing control in microcell applications, and in [18], it refers to the boundaries of epochs over which user transmit powers are kept constant, with no regard to symbol timing.

Although these definitions are correctly adapted to the context of their respective problem, we aim in this section at giving a clearer understanding of the two types of signal models based on symbol as well as sampling timing considerations, which are shown to have a more profound impact on the statistical distribution of  $x_k$  in (5). Considering the case of generic QAMmodulated signals, a complex envelope  $u_g(t)$  can be expressed as [39, 41, 42]:

$$u_{g}(t) = \sum_{m} s_{g_{m}} p_{g}(t - \tau_{g} - mT),$$
 (6)

where  $\{s_{g_m}\}_m$  and  $p_g(t)$  are the zero-mean iid transmitted symbol sequence of a *g*-th user and its corresponding received pulse shaping function. Parameter *T* represents the symbol period assumed identical for all users. We refer to  $\tau_g$  in (6) as the asynchronous delay of the *g*-th user, and the sources are said to be baud-synchronized if  $\tau_g = \tau_0 \forall g$ .

Fig. 1 displays a comparison between synchronous and asynchronous signals. For simplicity, G = 2 users are considered with BPSK modulations and raised cosine (RC) impulse functions resulting from ideal matched filtering. The source signals are plotted in each case to better draw correspondences with the output signal  $x_i(t)$ , where *i* is the index of an arbitrary element of the array, but are otherwise unobservable in a practical context. Fig. 1 as well as autocorrelation

matrices  $R_{xx_1}$ ,  $R'_{xx_1}$  and  $R'_{xx_2}$  will also serve as a reference in Section 3 to detail the computation process of autocorrelation matrices in a more intuitive way. This section will only be concerned with the implications of both modelings in eq. (5).

Fig. 1 (a) depicts the case of synchronous signals. The symbol instants of all source signals are precisely coincident due to the equality  $\tau_1 = \tau_2$  in (6). This modeling has been and is still extensively used in the literature, and can be especially noticed for algorithms in which a numerical implementation of (5) is such that elements of vector  $u_k$  (or any equivalent received source signal vector) are given values at each time  $t_k$  among sets of ideally transmitted symbols (in the case where  $T_s = T$ ). For example, this approach has been particularly popular in BSS algorithms exploiting higherorder statistics (HOS) [7-10, 36, 43] of the received signals. It is also encountered in estimation theories exploiting non-linear operators such as the sources' characteristic function [13–15], and more importantly in algorithms relying on the finite alphabet (FA) property of the source signals  $[44-48]^2$ . In the latter case, the digital nature of the transmitted signals is efficiently exploited by noting that samples associated with each source are restricted to a finite alphabet. Consequently, elements of the received signal vector are also limited to a finite number of possible values (neglecting noise). The situation is clearly evidenced in Fig. 1 (a) where at each sampling instant, signal  $x_i(t)$  takes only four different values in either the I or Q branches, resulting from the summation of two binary random variables. Considering noise, four clusters would hence be produced in the complex plane of this *i*-th element from which center locations can be estimated and used to general estimation purposes.

From a practical point of view, it follows that the synchronous signal assumption which allows a convenient replacement of the source signal values at each sampling instant by a set of ideally transmitted symbols (for  $T_s = T$ ) can only be valid if

- Symbol clock phase can be precisely controlled for each user such that baud synchronicity is achieved for all impinging signals after down-converison and filtering at the antenna array<sup>3</sup>. Such a control can only be achieved using a synchronisation reference signal generated either from the base station (presumably), within mobile users themselves or from an external source (e.g. satellite clocks [49]).
- Accurate symbol timing recovery is performed at the receiving array from the sole observation of *x*(*t*) and/or the help of a synchronisation reference signal.

On the other hand, Fig. 1 (b) illustrates the case of asynchronous signals considering the same channel

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>References [7–10, 36, 43], [13–15] and [44–48] have been specially selected such that the reader finds explicit evidence of a numerical implementation of (5) in which elements of  $u_k$  are given values among ideal sets of transmitted symbols.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>From a limited distance of the array and under negligible delay spread, such an operation can be achieved if the transmitters have identical symbol clock phases.



Figure 1. Comparison between synchronous (a) and asynchronous (b) signal modeling, and illustration of source power variation obtained by sampling phases diversity (b). The noiseless received signal on a given *i*-th element is represented considering two BPSK sources with channel coefficients  $B_{i1} = -0.8e^{-j0.2}$  and  $B_{i2} = 2e^{j0.5}$ . A source signal is represented by  $u_g(t) = I_g(t) + jQ_g(t)$  where  $Q_g(t)$  is set to 0 in this particular example.

coefficients and transmitted symbol sequences as in (a). A sampling period of  $T_s = T/2$  is now considered but is only intended to better introduce the theory of Section 3. It can be observed that the symbol instants of the the source signals are now no longer coincident, which results from the condition  $\tau_1 \neq \tau_2$  in (6). A parameter  $\tau_g$  has been introduced in (6) as the asynchronous delay of a user g. However it is not to be confused with the actual time of arrival of a given signal to the receiver. For example, consider that sources  $u_1(t)$ and  $u_2(t)$  in Fig. 1 (b) correspond to complex envelopes of two distinct line-of-sight (LOS) signals from users located at an equal distance of the array. In such a situation, the received signals have identical time of arrivals. However, one may observe that  $\tau_1 \neq \tau_2$  if user symbol clocks have different phases. Conversely, received signals from two users located at different distances from the array (i.e. having different times of arrivals) may also be such that  $\tau_1 = \tau_2$  if appropriate conditions on symbol clock phases are satisfied (e.g. achieving synchronisation as in Fig. 1 (a)). A parameter  $\tau_g$  in (6) may therefore be interpreted as encompassing the effects of both signal time of arrival and symbol clock phase. We may impose:

$$\tau_g \in [0, T[ \forall g \in \{1, 2, \dots, G\} ,$$
 (7)

which is a restriction of sufficient flexibility to characterize the asynchronous nature of the sources given the statistical periodicity of (6) for minimal lengths of transmitted symbol sequences. Note that  $\tau_g$  is defined with respect to the first sampling instant (t = 0) of  $\mathbf{x}(t)$ , consistently with Fig. 1. A value of  $\tau_g = 0$  hence implies that the symbol instants of a *g*-th source signal are coincident with the sampling instants (in the specific case where  $T_s = T$ ).

The situation of Fig. 1 (b) is to be naturally expected in a co-channel communication system where independent users are likely to transmit data at arbitrary times from each other in an asynchronous fashion. Although the case of only two users is considered for simplicity, extension of the same principles apply to any number of impinging source signals. Even if  $T_s = T$ , it is important to note that under asynchronous conditions sampling instants of an observable signal  $x_i(t)$  will generally not coincide with the symbol instants of the sources<sup>4</sup>. Consequently elements of vector  $u_k$  in (5) cannot be given values among ideal sets of transmitted symbols at each discrete time  $t_k$ . The statistical distribution of  $u_g(t_k)$  strongly depends on  $\tau_g$ , and to better illustrate this dependency, Fig. 2 displays two scatter plots of  $x_i(t_k)$  from Fig. 1 considering both synchronous and asynchronous modelings, where in the latter case two different sets of asynchronous delays are considered. With the addition of noise, the clustering nature of  $x_i(t_k)$  is easily observed in (a). The property is quickly lost however in (b) as  $\tau_1 \neq \tau_2 \neq 0$ .

<sup>4</sup>This could also be the case for synchronous signals if  $\tau_g = \tau_0 \neq 0 \forall g \in \{1, 2, \dots, G\}$ .



Figure 2. Scatter plots of an observable signal  $x_i(t)$  sampled at the symbol rate considering synchronous (a) and asynchronous (b) source signals. Parameters identical to those of Fig. 1 are considered, with the addition of a noise of identical power in both cases. Asynchronous signals are modeled in (b) considering set 1: { $\tau_1 = 0.1T$ ,  $\tau_2 = 0.2T$ } and set 2: { $\tau_1 = 0.9T$ ,  $\tau_2 = 0.5T$ }. Theoretical exact cluster center locations are identified by black circles in (a) and reported in (b) for comparison.

2.2.2 FIR-MIMO Modeling: Asynchronous signals can be numerically modeled using (5) where elements of  $u_k$  are given values according to (6) for any  $t = t_k$ . Alternatively,  $x_k$  may also be expressed using the well known finite impulse response multiple-input multipleoutput (FIR-MIMO) signal model which is extensively used in blind identification problems involving both synchronous or asynchronous signals. We will now perform a brief review of the general underlying principles of this model in order to compare the advantages and disadvantages of the two types of modeling for the problem at hand. At the same time, we also wish to bridge a gap between the somewhat different mentalities existing within classical array processing and general MIMO systems concepts.

For convenience, we first consider the case of a single user, single transmit antenna and multiple receive antennas (SU-SIMO). The received signals for an uplink transmission considering a FIR signal model can be expressed at a time  $t_k = t_0 + kT$  such that:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{s}_{1_k} + \boldsymbol{n}_k \,, \tag{8}$$

where  $H_1 \in \mathbb{C}^{N \times L_1}$  is a symbol response channel matrix and  $s_{1_k} \in \mathbb{C}^{L_1 \times 1}$  is a vector of  $L_1$  consecutive transmitted symbols (see [41], eq. (17)). Vectors  $x_k$  and  $n_k$  are the same as in (5). The model of eq. (8) is not limited to zero delay spread (as it is (5), but not necessarily in (1)), and represents a convenient way of expressing the received signals in terms of the transmitted symbols of a particular user, or source, which are often the sole parameters of interest in a communication link. Matrix  $H_1$  accounts for both the pulse shaping waveform  $p_1(t)$  and the sampling phase (accounted for by  $t_0$ ) of the received signal, whereas these parameters are directly encompassed in  $u_k$  in (5). Neglecting noise, the correspondence between (5) (for a single user) and (8) is such that:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_1(t_k) = \boldsymbol{H}_1\boldsymbol{s}_{1_k}$$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ \vdots \\ B_{N1} \end{bmatrix}}^{H_{1}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1_{1}}^{*} & c_{1_{2}}^{*} & \dots & c_{1_{L_{1}}}^{*} \end{bmatrix}}_{u_{1}(t_{k})} \begin{bmatrix} s_{1_{k}} \\ s_{1_{k-1}} \\ \vdots \\ s_{1_{k-L_{1}+1}} \end{bmatrix}}_{u_{1}(t_{k})}$$
(9)

$$\equiv b_1 c_1^{\dagger} s_{1_k} , \qquad (10)$$

where coefficients  $\{c_p\}_{p=1}^{L_1}$  are such that  $c_1^{\dagger} s_{1_k} = u_1(t_k)$ for a given  $t_0$ . This relation is a simple means of expressing the value of an analogue source sample  $u_1(t_k)$ in terms of a weighted sum of consecutively transmitted symbols, where the number of coefficients (or dimension of  $s_{1_k}$ ),  $L_1$ , is known as the channel memory, or length. For example, in the case of Fig. 1 (a), sampling and symbol instants of the sources are coincident, and RC pulses respect the Nyquist criterion (no intersymbol interference (ISI) at the sampling instants). Therefore, for any of the two signals (say  $u_1(t)$ , assuming that  $u_2(t) = 0$ ,  $L_1 = c_1 = 1$ , implying that  $x_i(t_k) =$  $B_{i1}s_{1k}$ . Conversely, still in the case of Fig. 1 (a) but considering a different sampling phase, or in a general asynchronous condition such as Fig. 1 (b), sampling instants do no longer coincide with symbol instants of the sources. Hence,  $x_i(t_k) = b_1 c_1^{\dagger} s_{1_k}$  (neglecting  $u_2(t)$ ) with  $c_1$  depending on the sampling phase and the nature of the received pulse waveform  $p_1(t)$ , and  $L_1$ of time width the latter. The explicit dependency of  $c_1$ on  $t_0$  has been dropped in (9) and (10) for clarity.

We proceeded to this detailed description of the SU-SIMO signal model in order to underline an important point regarding the theoretical exact value of  $L_1$ . In the literature, channel memory is often solely related to the delay spread relative to the symbol period of a given signal. For example, Glisic in [50] (eq. (6.27)) derives a simple relation in this regard:

$$L_1 = \left[\frac{T_{\max_1}}{T}\right] + 1, \qquad (11)$$

where  $T_{\max_1}$  is the maximum delay spread among all multipaths (still considering a single user), and  $[\cdot]$  is the integer part function. Examples of recent works considering a similar definition can also be found in [51–53]. It follows from (11) that for  $T_{max_1} = 0$  (e.g. a direct LOS signal),  $L_1 = 1$ , which corresponds to the situation of Fig. 1 (a). However, for any different sampling phase or under asynchronous conditions, the latter equality no longer holds since energy from more than one symbol will contribute to the value of the considered source signal at all sampling instants. Eq. (11) correctly predicts the memory induced by the channel due to physical propagation (i.e. delay spread), but neglects the memory inherent to the pulse-shaped nature of the source signal itself which is directly involved in (10). Fig. 3 shows that for a pulse shaping function  $p_{q}(t)$  of width  $W_g$ , up to  $[W_g/T]$  consecutive symbols contribute to the value of  $u_{g}(t)$  in (6) at any time *t*. Therefore, a minimum and sufficient value of  $L_1$  may be obtained



Figure 3. Pulses of an arbitrary pulse-shaped received signal  $u_g(t)$  showing the contribution of consecutive symbols to the signal value at a time *t*. This example is for a pulse width of  $W_g = 2.5T$ .

by rewritting (11) such that:

$$L_1 = \left\lceil \frac{T_{\max_1}}{T} \right\rceil + \left\lceil \frac{W_1}{T} \right\rceil \,. \tag{12}$$

The total signal memory to be used in (10) for accurate modeling of the received signal possesses an upper bound depending on the maximum delay spread, but also on the particular shape of the received symbol pulses at the receiver. Note in general that the representation of  $s_1(t_k)$  in (9) is not rigorously exact considering that the value of a given source signal does not only depend on past but also on future symbols to be received (see Fig. 3). Nonetheless,  $s_1(t_k)$  would still form a set of  $L_1$  consecutively transmitted symbols and one could always consider a rectified representation of (8) by replacing  $x_k$  with an appropriate time-delayed version of itself such that  $[s_{1_k}]_1 = s_{1_k}$  in (9). It is interesting to note that given the fact that practical pulse shaping filters are implemented considering impulse responses having typical lengths of up to 12 symbol periods [54], channel memory due to the ISI nature of a source signal itself may account for a larger fraction of the total signal memory than its counterpart depending on the maximum delay spread. From such considerations, it also follows that the assumption of a memoryless channel ( $L_1 = 1$ ) can only hold under the synchronous case of Fig. 1 (a), or if  $W \leq T$ .

Extension of (8) to the multiple users case can be performed by first expressing vector  $u_k$  from analogy with (9) such that:

$$\begin{bmatrix} u_1(t_k) \\ u_2(t_k) \\ \vdots \\ u_G(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{\dagger}(t_0) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_2^{\dagger}(t_0) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & c_G^{\dagger}(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1_k} \\ s_{2_k} \\ \vdots \\ s_{G_k} \end{bmatrix}$$
$$\equiv C(t_0)s_k , \qquad (13)$$

where  $c_g(t_0) \in \mathbb{C}^{L_g \times 1} \forall g$ , and where  $s_k \in \mathbb{C}^{\left(\sum_g L_g\right) \times 1}$  is the concatenation of all users' transmitted symbol sequences. The channel length  $L_g$  for each user is obtained by (12) with substitution of an appropriate

index. The received signal vector is then given by:

$$\boldsymbol{x}_{k} = \overbrace{\boldsymbol{B} \underbrace{\boldsymbol{C}(t_{0})}_{\boldsymbol{u}(t_{k})} \boldsymbol{s}_{k}}^{\boldsymbol{H}(t_{0})} \boldsymbol{s}_{k} + \boldsymbol{n}_{k} , \qquad (14)$$

with

$$\boldsymbol{H}(t_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1(t_0) & \boldsymbol{H}_2(t_0) & \dots & \boldsymbol{H}_G(t_0) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{H}_g(t_0) = \boldsymbol{b}_g \boldsymbol{c}_g^{\dagger}(t_0).$$
(15)

Note that despite their similar notations,  $s_k$  in (14) is not to be confused with  $s(t_k)$  in (2). The general structure of the FIR-MIMO signal model of eq. (14) is valid for any delay spread under narrowband propagation and time-invariant channel assumptions, but is specific for a sample period of  $T_s = T$ . Modeling for higher sampling rates is possible as explained in [41] (Fig. 7). Considering an integer oversampling factor U such that  $T_s = T/U$ , the set of all samples can be viewed as U distinct baud-sampled sequences having different sampling phase  $t_0$ . Hence one obtains U matrix equations akin to (14) of the type  $\mathbf{x}_k^{(u)} = \mathbf{H}(t_0^{(u)})\mathbf{s}_k + \mathbf{n}_k^{(u)}$ for  $u \in \{1, 2, ..., U\}$  that can be used for subsequent processing<sup>5</sup>.

The second and more important point we wish to highlight in this analysis is related to the differences in using either of the two models in eq. (14) under oversampling conditions. The use of a FIR-MIMO signal model is a convenient way of expressing the observable outputs in terms of the transmitted symbol sequences of each user, but implies having to deal with a different channel matrix for each of the U sampling phases considered. On the other hand, the use of the classical model (5) allows the received signals to be expressed in terms of the complex envelopes of the sources, lacking an explicit reference to the transmitted symbols, but implies that matrix **B** to remain constant independently of the sampling phase since the latter is absorbed in  $u_k$ (the dependency of  $u_k$  on  $t_0$  has been omitted in (14) for brevity). This property will prove particularly useful for the problem at hand considering an estimation of the channel matrix obtained via JD where target matrices have to share a congruent form (e.g. see [24, 26]). For this reason, a modeling of  $x_k$  according to (5) will be retained for the rest of the paper instead of a FIR-MIMO equivalent in (14).

## **3** Exploiting Sampling Phase Diversity

This section describes how sampling phase diversity combined with the cyclostationarity nature of the received signals under natural asynchronous conditions can be exploited to construct a set of autocorrelation matrices suitable for a general BSS problem. Details about the specific JD operation for estimation of B will be given in Section 4.

As mentioned in the introductory section of the paper, the work of Rong *et al.* in [18] has also been

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Note that vector  $s_k$  remains constant for each sample sequence since data values are also constant over one symbol period [41].

developed in a context of wireless communications, where estimation of the channel matrix was performed considering a set of zero-lag autocorrelation matrices. Prior to undergoing any further analysis related to the current problem, we first wish to rectify a number of claims made by the same authors regarding some aspects of signal apprehension in a general wireless communication context.

On page 2, the authors advocate the use of zerolag autocorrelation matrices by describing some limitations inherent to SOBI-like algorithms where multiple autocorrelation evaluations of the received signals at non-zero lags are exploited. It is first claimed that application of the latter methods requires the existence of a long-time coherence of the source signals in order to obtain enough cross-covariance matrices for a joint diagonalization process and to guarantee identifiability. A confusion is made here by linking the existence of time-lag autocorrelation with the coherence time of a particular source signal, which is defined as a measure of characterization of the time varying nature of the channel due to the relative mobile velocity, and which is inversely proportional to the Doppler spread [54]. Nevertheless, the general idea here under the time-invariant assumption considered refers to the fact that large delay spreads are required in order to obtain sufficient cross-correlation for application of the said algorithms. Although such large delay spreads would indeed allow exploitation of larger lag autocorrelation evaluations, cross-correlation exists at a more fundamental level within the pulse-shaped nature of the received signals themselves and can be rightfully exploited even without delay spread (i.e. a coherent scenario).

Secondly, the authors also claim that communication signals sampled at the symbol rate are uncorrelated, and hence that higher lag autocorrelations cannot be exploited. This seemingly intuitive statement has its origins in the fact that the transmitted symbols  $\{s_{g_m}\}_m$ of each source signal in (6) are uncorrelated, and therefore that cross-correlation evaluated at time lags greater or equal than T is consequently nil. Such a reasoning is wrong considering that practical symbol pulse shaping waveforms temporally extend to much more than a symbol period, which is key to spectral efficiency (as explained in Section 2.2.2, see [54]). This implies that energy from a given symbol received at a time t contributes to the source signal value at times up to  $\pm W/2$  (for symmetric pulses of width W), thus yielding cross-correlation for any general value of W. Moreover, it will be shown that autocorrelation of a source signal at lags equal to integer values of the symbol period (but within  $\pm W$ ) is generally non-zero depending on the sampling phase of the considered signal.

Despite these odd claims however, the estimation principle of [18] based on AJD or on a PARAFAC analysis [55] from a set of zero-lag autocorrelation matrices remains nonetheless valid and practically functional. We will now proceed to the description and justification of the construction process of autocorrelation matrices to be considered in this paper and for subsequent processing in Section 4.

The received signal vector  $\mathbf{x}(t)$  in (4) is a cyclostationary random process of period T with respect to t, whereas a sequence  $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^K$  obtained by sampling of the same vector at a rate  $1/T_s = 1/T$  is a widesense stationary random process [41]. Such behaviour arise from the nature of  $u_g(t)$  in (6), where pulses of iid amplitudes equally spaced in time implies that the signal statistical properties vary cyclically over time.

The cyclostationary nature of communication signals has been widely studied in the literature and exploited to various estimation purposes. A review of popular algorithms and techniques will not be presented in this section but the reader is referred to [56] and references therein for a comprehensive coverage on the subject.

In this paper we consider a general array autocorrelation matrix of the form:

$$R_{xx}(t,\tau) = E\{x(t)x^{\dagger}(t+\tau)\}$$
  
=  $BE\{u(t)u^{\dagger}(t+\tau)\}B^{\dagger} + E\{n(t)n^{\dagger}(t+\tau)\}$   
=  $BR_{uu}(t,\tau)B^{\dagger} + R_{nn}(t,\tau)$ , (16)

which depends on both t and  $\tau$ . Note that since  $\{u_g(t)\}_{g=1}^G$  are independent random processes,  $R_{uu}(t,\tau)$  is always a diagonal matrix. To give a more intuitive picture of how the cyclostationarity property of the received signals under general asynchronous conditions is to be exploited via eq. (16), consider the computation of zero-lag autocorrelation matrices  $R_{xx_1}$ ,  $R'_{xx_1}$  and  $R'_{xx_2}$  of Fig. 1. Taking t = 0 as the time of the first sample in each cases, we have:

$$R_{xx_1} = R_{xx}(0,0) = BR_{uu}(0,0)B^{\dagger},$$
  

$$R'_{xx_1} = R'_{xx}(0,0) = BR'_{uu}(0,0)B^{\dagger},$$
  

$$R'_{xx_2} = R'_{xx}(T/2,0) = BR'_{uu}(T/2,0)B^{\dagger},$$

since noise is neglected and since an upsampling factor U = 2 is considered in (b). Under the synchronous conditions of case (a), sampling and symbol instants are coincident and consequently source signal values are restricted in  $\{-1,1\}$  with equal probability. Therefore, diag $\{\mathbf{R}_{uu}(0,0)\} = [\sigma_{sym_1}^2 \sigma_{sym_2}^2]^{\top}$  where  $\sigma_{sym_g}^2$  is the symbol power of the g-th source signal (in this case  $\sigma_{\text{sym}_1}^2 = \sigma_{\text{sym}_2}^2 = 1$ ). In (b), sampling and symbol instants of the sources are not coincident, and as a result  $u_g(t_k) \notin \{-1, 1\}^6$ . We now have diag $\{R'_{uu}(0, 0)\} =$  $[a_{1_1}\sigma_{\text{sym}_1}^2 \ a_{1_2}\sigma_{\text{sym}_2}^2]^{\top}$  where  $1 > a_{1_1} \approx 1$  since sampling instants are close to the symbol instants of  $u_1(t)$ , and where  $a_{1_2} < a_{1_1}$ . In the second sample sequence, diag{ $\mathbf{R}'_{uu}(T/2,0)$ } =  $[a_{2_1}\sigma^2_{\text{sym}_1} a_{2_2}\sigma^2_{\text{sym}_2}]^{\top}$  where this time  $a_{2_1}$  has a substantially lower value than  $a_{1_1}$  since the sample sequence is near  $180^{\circ}$  out of phase with the symbol instants of  $u_1(t)$  in a region where zerocrossings are most likely to occur. Consequently, it follows that signal  $u_1(t)$  appears with a significantly lower power in  $\mathbf{R}'_{xx_1}$  than in  $\mathbf{R}'_{xx_2}$ , whereas less importance changes are observed for  $u_2(t)$ . Although these observations are specific for the particular values of  $\tau_1$  and  $\tau_2$ 

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>The exact pdf of a sample  $u_g(t_k)$  could be obtained from  $p_g(t)$  considering the set of consecutive symbols having a non-zero contribution to the source signal at time  $t_k$ .

considered in Fig. 1 (b), this analysis demonstrates that exploitation of sampling phase diversity is a simple and advantageous way of obtaining source power diverseness without requiring the need of real transmit power variations from the mobiles as exploited in [18]. Power diversity can also be obtained in the synchronous case of Fig. 1 (a), but matrices { $\mathbf{R}_{uu}(t,0)$ }  $\forall t$  simply become scaled versions of each other if identically modulated signals are considered (i.e. if  $p_g(t) = p(t) \forall g$  in (6)).

In this example, the effects of sampling phase diversity are best emphasized considering the zero-lag autocorrelation (power) of the source signals. However, the principle directly extends to any general value of  $\tau$  in (16). To this point it is essential for a good understanding of the subsequent developments of the paper that one clearly distinguishes the separate effects of both t and  $\tau$  in  $\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$  (or equivalently  $\mathbf{R}_{xx}(t,\tau)$ ) from an intuitive point of view. Evaluation with respect to t yields a periodic function in T since signal values  $\{u_g(t+kT)\}_{k\in\mathbb{Z}}$  in (6) are identically distributed considering a sufficiently large transmitted symbol sequence. On the other hand, evaluation of  $R_{uu}(t, \tau)$  with respect to  $\tau$  represents the statistical correlation between u(t)and its delayed conjugate copy  $u^*(t + \tau)$ . As  $\tau$  increases (or decreases),  $R_{uu}(t, \tau)$  eventually goes to zero for any *t* due to the finite width of  $p_g(t) \forall g$ .

As a means of better characterizing and comparing the statistical properties of the received source signals, we define a normalized autocorrelation profile (NAP) for each particular envelope  $u_g(t)$  such that:

$$\mathrm{NAP}_{g}(t,\tau) \triangleq \frac{E\{u_{g}(t)u_{g}(t+\tau)\}}{\sigma_{\mathrm{sym}_{o}}^{2}} = \frac{[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{gg}}{\sigma_{\mathrm{sym}_{o}}^{2}}.$$
 (17)

A complete theoretical derivation of (17) under the most general signal conditions is presented in Appendix, along with some discussions about important practical results. The NAP is a real function periodic in t with period *T*, is independent of symbol power and provides insight as to how much autocorrelation diversity is to be obtained by sampling phase variation (when considered with respect to time). For example, Fig. 4 displays NAP evaluations for the most common pulseshaped signals (RC and Gaussian pulses) in a variety of conditions. It can be observed that the modulation parameters as well as the lengths and window types of pulse shaping functions have a marked effect on NAP diversity. Note that the normalization factor  $1/\sigma_{\text{sym}_a}^2$ in (17) could also be accounted for in B for each source signal as performed in [17]. We preferred however to adopt the actual notation to make a more intuitive distinction between channel and signal related properties.

The set of autocorrelation matrices to be considered for estimation of *B* via JD is directly obtained from (16) under general asynchronous signal conditions, where sampling phase variation is obtained by considering sets of distinct baud-sampled sequences from oversampling of x(t) as explained in Section 2.2.2. Although exploitation of time lags greater than the symbol period is possible, as previously mentioned, we will nonetheless impose  $\tau_{max} = T$  for numerical computations in (16) considering that autocorrelation is likely to further decrease with larger lags, and also to limit the number of possible target matrices from which estimation of B is to be performed. Considering an integer oversampling factor U, a set of autocorrelation matrices is obtained as:

$$\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \triangleq \mathbf{R}_{xx}(t = pT/U, \tau = qT/U)$$

$$\equiv \mathbf{B}\mathbf{R}_{uu}^{(p,q)}\mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{R}_{nn}^{(p,q)},$$

$$v \in \{0, 1, \dots, U-1\}, q \in \{0, 1, \dots, U\},$$
(18)

where time t = 0 is taken as the first sampling instant. Fig. 5 depicts the general computation process in case



Figure 5. Construction principle of autocorrelation matrices (sampling instants) considering an upsampling factor U = 4, a maximum time lag  $\tau_{max} = T$  and an observation time of *P* symbol periods.

where U = 4. In general, the combination of U different sampling phases and U + 1 distinct time lags allows the formation of U(U + 1) distinct autocorrelation matrices.

## **4** Performing JDDTM

#### 4.1 General Derivations

Given (18), estimation of **B** can be performed from (18) by standard JD techniques similar to those considered in [18–21]. Alternatively, it could also be performed by a parallel factor analysis (PARAFAC) as considered in [18]. However, in either case one would first have to eliminate the noise term  $\mathbf{R}_{nn}^{(p,q)}$  in (18) in order to obtain target matrices having the required eigenstructure. This process is carried on in the latter works by either assuming a temporally white noise<sup>7</sup>, implying that  $\mathbf{R}_{nn}^{(p,q)} = \mathbf{0} \forall q \neq 0$ , and/or performing noise variance estimation from an eigenvalue analysis of any  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)}$  and then subtracting an estimate  $\hat{\mathbf{R}}_{nn}^{(p,0)}$ from  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)} \forall p$ . The applicability of this approach is severely limited by the noise distribution, and it also

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>A white noise has an infinite variance. The commonly encountered references to such types of noise is a language abuse to specify that a noise of finite variance is uncorrelated either temporally (between samples measured at different times) and/or spatially (between samples measured at different locations, e.g. on different elements).

0.8

0.6

0.4

0.2

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5 L 0

0.8

0.6

0.4

0.2

0 L 0

0.9

0.8

0.7

0.6

0.5

0.4 L 0

3

2

0

**5.** 5

0.2

0.4

0.8

0.6

0 L 0

23

 $\tau = T/3$  $\tau=0$ RC pulses,  $\beta = 0$ , rectangular window RC pulses,  $\beta = 0$ , rectangular window ÷ . . . . . . . 0.8 0.6 0.4 = 0.8• W = 1T • W = 1T • • W = 2T0.2 • • • • W = 3T•••W = 3T- - W • • • • W = 127 • • W = 127 0'0 0.2 0.4 0.6 0.8 0.2 0.4 0.6 0.8 RC pulses, W = 6T, rectangular window RC pulses, W = 6T, rectangular window 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5  $\beta = 0.4$  $- - \beta = 0.4$ = 0.60.4  $-\beta = 0.8$  $- - \beta = 0.8$ 0.2 0.6 0.8 0 0.2 0.4 0.8 0.4 0.6 RC pulses,  $\beta = 0$ , Hanning window RC pulses,  $\beta=0,$  Hanning window 0.8 0.6 0.4 = 0.8- • W = 1T • W = 17 - W = 2TW = 270.2 •••• W = 3T• • • • W = 37• W = 67 • W = 62 • W 123 W 0 0.2 0.4 0.6 0.8 0.2 0.4 0.6 0.8 RC pulses, W = 6T, Hanning window RC pulses, W = 6T, Hanning window 0.9 0.8 0.7 0.6 0.5  $-\beta$ . . . .  $\beta = 0.6$ 0.4 = 0.8 \_ \_ \_ 0.2 0.4 0.6 0.8 0 0.2 0.4 0.6 0.8 Gaussian pulses, rectangular window Gaussian pulses, rectangular window 2.5  $\alpha = 0$ .  $\alpha = 0.5$ α = 1.2  $- - \alpha = 1.2$ - · - a :  $\alpha = 1$ • • • • • a : 2 . . . 1.5 0.5



Figure 4. NAPs of differently modulated signals evaluated at time lags  $\tau \in \{0, T/3, 2T/3\}$ . Curves are plotted as a function of  $t/T \in [0, 1]$  where t = 0 and t = T correspond to symbol instants. For convenience, a symbol period of T = 1 has been considered for Gaussian pulses.

0.6 0.8

0.4

0.2

0` 0

imposes additional constraints on the maximum number of source signals guaranteeing that at least one eigenvalue of  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)}$  be associated with noise variance. In order to circumvent such limitations, we will adopt in this paper an estimation approach of  $\mathbf{B}$  not directly drawn from (18), but rather based on a differential operation among appropriate matrices of the set. Recalling the stationary assumption on  $\mathbf{n}(t)$ , it follows that:

$$\mathbf{R}_{nn}^{(p_1,q)} = \mathbf{R}_{nn}^{(p_2,q)} \ \forall \ \{p_1, p_2\} \in \{0, 1, \dots, U-1\}, \quad (19)$$

since noise sample sequences are identically distributed<sup>8</sup> for any sampling phase index p. Therefore, we can define a differential autocorrelation matrix:

$$\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_{1},p_{2},q)} \triangleq \mathbf{R}_{xx}^{(p_{1},q)} - \mathbf{R}_{xx}^{(p_{2},q)}$$

$$= \mathbf{B} \big( \mathbf{R}_{uu}^{(p_{1},q)} - \mathbf{R}_{uu}^{(p_{2},q)} \big) \mathbf{B}^{\dagger} + \mathbf{R}_{nn}^{(p_{1},q)} - \mathbf{R}_{nn}^{(p_{2},q)}$$

$$\equiv \mathbf{B} \Delta \mathbf{R}_{uu}^{(p_{1},p_{2},q)} \mathbf{B}^{\dagger} , \qquad (20)$$

which now has a closer form to the ideal eigenstructure. The value of  $\Delta R_{uu}^{(p_1,p_2,q)}$  depends on the statistical nature of the source signals as well as asynchronous delays  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ , and is generally non-zero for  $p_1 \neq p_2$ . The advantages of adopting a differential approach of the kind are:

- 1) Elimination of the need for noise variance estimation (assuming a spatially white noise of the type  $\sigma_n^2 I$ , see [17, 18]). This operation is required when a zero-lag autocorrelation matrix is included in the set of target matrices.
- 2) Adaptability to virtually all types of noise distributions regardless of spatial or temporal correlation.
- 3) Exploitation of the complete degree of freedom of the array. Since the condition G < N ensuring that the lowest eigenvalue of  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)} \forall p$  be equal to the noise variance is no longer needed, up to G = N source signals can be considered.

Note that eq. (20) cannot be exploited under assumption of a stationary observable vector  $\mathbf{x}(t)$  (considering possible application of the algorithm in contexts other than digital communications), since it would imply that  $\mathbf{R}_{uu}^{(p_1,q)} = \mathbf{R}_{uu}^{(p_2,q)} \forall \{p_1, p_2\}$  and consequently that  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)} = \mathbf{0}$  in (20). The practicability of our approach relies on natural autocorrelation diversity provided by the cyclostationary nature of communication signals in a general asynchronous context where  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  is generally non-zero.

An examination of eq. (20) shows that  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)} = -\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_2,p_1,q)}$ . Hence either one of such matrices is of potential use for estimation of **B**. In general, among the set of *U* autocorrelation matrices obtained at different sampling phases *p* for each time lag *q*,  $U^2$  differential autocorrelation matrices  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  can be obtained from (20) but only U(U-1)/2 effective ones will be retained for the JD process:

$$\left\{\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}\right\}_{\substack{p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}\\p_1 < p_2 \leqslant U-1}} p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}$$
(21)

Considering the U + 1 distinct time lag values in (18), the maximum number of DTM *D* to be considered for estimation of **B** is hence given by:

$$D = \frac{1}{2}U(U-1)(U+1).$$
 (22)

Table I lists some evaluations of (22), and exemplifies

Table I Upsampling Factor U and Corresponding Maximum Number of DTM D

u	2	3	4	5	6
D	3	12	30	60	105

the rapid increase of *D* with *U*. It also follows from (22) that an upsampling factor  $U \ge 2$  is necessary for application of the algorithm.

The literature provides a wide spectrum of AJD techniques with a particular emphasis on the BSS problem [22–30] (more particularly, see [22] for a short summary of popular existing algorithms on the subject). Given a set  $\{R_d = Q\Lambda_d Q^{\dagger}\}_{d=1}^D$  of target matrices such that  $Q \in \mathbb{C}^{N \times N}$  and  $\Lambda_d \forall d$  is diagonal, the JD process consists in determining a joint diagonalizer V such that  $VR_d V^{\dagger} \forall d$  is also a diagonal matrix. An ideal solution has the form  $V = ZQ^{-1}$  where Z is a scale permutation matrix containing only one non-zero element per line and column. An estimation of Q is then obtained as  $\hat{Q} = V^{-1}$ .

When the set  $\{R_d\}_{d=1}^D$  is not composed of ideal eigenmatrices (e.g. the case of autocorrelation matrix estimates obtained by a finite number of samples), the operation is rather referred to as AJD. The differences between existing AJD algorithms essentially lie in the choice or implementation of an appropriate optimization criterion, the most popular being the minimization of the off-diagonal element amplitudes of the set  $\{VR_dV^{\dagger}\}_{d=1}^D$  [22, 25].

For convenience, most AJD algorithms assume that the mixing or channel matrix is full-rank and invertible. This is not the case for **B** in (21) since rank{**B**} = min(*N*, *G*). The set of matrices  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}$ can be adapted to such a compatible form by noting that the columns of **B** lies in the signal subspace. More specifically, expressing a given  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}$  in (21) in terms of its eigenvalue decomposition (EVD) yields:

$$\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s^{(p_1, p_2, q)} & \mathbf{E}_n^{(p_1, p_2, q)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_s^{(p_1, p_2, q)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_s^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger} \\ (\mathbf{E}_n^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger} \end{bmatrix}$$
$$= \mathbf{E}_s^{(p_1, p_2, q)} \mathbf{\Lambda}_s^{(p_1, p_2, q)} (\mathbf{E}_s^{(p_1, p_2, q)})^{\dagger}, \quad (23)$$

where  $E_s^{(p_1,p_2,q)} \in \mathbb{C}^{N \times G}$  represents a set of orthonormal basis vectors of the signal subspace<sup>9</sup>. From (20)

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>It is however sufficient for this property to be satisfied that n(t) be cyclostationary with t of period  $T_s = T/U$  such that it remains identically distributed at each sampling instant.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>The dimension of the signal subspace estimated from  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}$  in (21) is generally *G* under natural asynchronous conditions, but a finite set of specific values of  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  for identically modulated signals can reduce this number. These aspects are discussed in more details in Section 4.3.

and (23), it follows that *B* can be expressed in terms of  $E_s^{(p_1, p_2, q)}$  such that:

$$B = E_s^{(p_1, p_2, q)} Q^{(p_1, p_2, q)}, \qquad (24)$$

where  $Q^{(p_1,p_2,q)}$  is a  $G \times G$  coefficient matrix. Alternatively, a set of orthonormal basis vectors of the signal subspace may also be obtained not from a single, but from the joint use of all D matrices  $\Delta R_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  in (21) (considering all  $q \in \{0, 1, \ldots, U\}$ ). Such an approach is furthermore desirable considering the use of practical matrix estimates obtained by a finite number of samples where the choice of an optimal target matrix  $\Delta R_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  in (23) could be ambiguous. To this end, one can express the joint singular value decomposition (SVD) of the line-wise concatenation of all D target matrices such that:

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^{\dagger} = \mathrm{S}\mathrm{V}\mathrm{D}\left[ \left\{ \Delta \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}^{(p_{1},p_{2},q)} \right\}_{\substack{p_{1} \in \{0,1,\dots,U^{2}\}\\p_{1} \in \{0,1,\dots,U^{-2}\}\\p_{1} < p_{2} \leq U-1}} \right] \\ = \left[ \boldsymbol{U}_{s} \quad \boldsymbol{U}_{n} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{s} \quad \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{s}^{\dagger}\\ \boldsymbol{V}_{n}^{\dagger} \end{bmatrix} \\ = \boldsymbol{U}_{s}\boldsymbol{S}_{s}\boldsymbol{V}_{s}^{\dagger}, \qquad (25)$$

where  $U_s \in \mathbb{C}^{N \times G}$  as in (23) since  $S_s$  is generally  $G \times G$ . A more representative set of orthonormal basis vectors of the signal subspace may hence be taken as:

$$E_s = U_s \tag{26}$$

such that:

$$B = E_s Q \Rightarrow E_s^{\dagger} B = Q.$$
 (27)

The set of target matrices to be considered for JD is then be obtained as:

$$S_D \triangleq \left\{ \boldsymbol{E}_s^{\dagger} \Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(d)} \boldsymbol{E}_s = \boldsymbol{Q} \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)} \boldsymbol{Q}^{\dagger} \right\}_{d=1}^{D}, \quad (28)$$

where

$$\left\{ \Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(d)}, \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)} \right\}_{d=1}^{D} = \\ \left\{ \Delta \boldsymbol{R}_{xx}^{(p_1, p_2, q)}, \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(p_1, p_2, q)} \right\}_{\substack{q \in \{0, 1, \dots, U\}\\ p_1 \in \{0, 1, \dots, U-2\}\\ p_1 < p_2 \leq U-1}}$$
(29)

The BSS problem hence reduces to the estimation of  $Q \in C^{G \times G}$  (and subsequently B in (27)), which is nonsingular if B has full column rank. Note that this operation also reduces the computational complexity of the AJD operation given the generally reduced dimensions of  $Q_s \Delta R_{uu}^{(p_1, p_2, q)} Q_s^{\dagger}$  in (28). In essence, the procedure resembles the whitening process considered in [17] without however requiring Q to be unitary (only full-rank), a property that has been identified to restrict the performance of related BSS algorithms [57]. Upon obtaining an estimate  $\hat{Q}$  of Q by AJD of (28), an estimate  $\hat{B}$  of B is obtained as:

$$\hat{B} = E_s \hat{Q} . \tag{30}$$

#### 4.2 A Set of "More Representative" Target Matrices

Consider application of the algorithm with a very large oversampling factor U. The time  $T_s = T/U$  separating two samples is consequently very small, and as a result matrices  $\mathbf{R}_{uu}^{(p,q)}$  and  $\mathbf{R}_{uu}^{(p+1,q)}$  for  $p \leq U - 2$  in (18) take very similar values, implying that  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \approx \mathbf{R}_{xx}^{(p+1,q)}$  (refer to Figs. 1 (b) and 5). One therefore obtains  $\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(p,p+1,q)} \approx \mathbf{0}$  in (20) and likewise  $Q_s \Delta \mathbf{R}_{uu}^{(p,p+1,q)} \mathbf{Q}_s^{\dagger} \approx \mathbf{0}$  in (29). The set of target matrices to be considered for AJD thus encompasses a mixture of arbitrarily low-valued element matrices (of low relevance), as well as better conditioned matrices resulting from higher statistical diversity obtained at different sampling phases. A similar situation could also arise for a low value of U if appropriate conditions on  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  are satisfied for particular values of  $p_1$  and  $p_2$  in (21).

The work of Yeredor in [58] proves particularly useful in such a context since it allows the computation of two "*more representative*" matrices from the set of initial target matrices, which can then be considered for AJD. The procedure is shown to be optimal in the least-squares (LS) sense for target matrices of size of  $2 \times 2$ , and to yield fairly "good" results in larger scale problems such as herein considered (in general). Given its potential utility in (28), a brief description of the main guidelines of this procedure will now be presented.

The principle is inspired from [59], and based on the minimization of a direct least-squares (DLS) criterion defined as:

$$\mathcal{C}_{\text{DLS}}(\hat{Q}, \{\Delta \hat{R}_{uu}^{(d)}\}_{d=1}^{D}) \triangleq \sum_{d=1}^{D} ||\Delta R_{xx}^{(d)} - \hat{Q} \Delta \hat{R}_{uu}^{(d)} \hat{Q}^{\dagger}||_{F}^{2},$$
(31)

where  $|| \cdot ||_F$  denotes the Frobenius norm. Using the vector operator  $\text{vec}(\cdot) : \mathbb{C}^{N \times M} \to \mathbb{C}^{NM \times 1}$  and the Khatri-Rao product of two matrices (in this case defined as a matrix  $A \circ B = [a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2, \ldots]$  where ' $\otimes$ ' denotes the Kronecker product), it is shown that each term of the  $C_{\text{DLS}}$  sum can be equivalently expressed as:

$$||\Delta \mathbf{R}_{xx}^{(d)} - \hat{\mathbf{Q}} \Delta \hat{\mathbf{R}}_{uu}^{(d)} \hat{\mathbf{Q}}^{\dagger}||_{F}^{2} = ||\mathbf{m}_{d} - \hat{\mathbf{Q}} \hat{\mathbf{p}}_{d}||_{F}^{2}, \qquad (32)$$

where  $m_d = \text{vec}\{\Delta R_{xx}^{(d)}\}, \hat{Q} = \hat{Q}^* \circ \hat{Q}$ , and  $\hat{p}_d = \text{diag}\{\Delta \hat{R}_{uu}^{(d)}\}$ . The parameters  $\{\Delta \hat{R}_{uu}^{(d)}\}_{d=1}^{D}$  are generally not of interest in a BSS problem, and consequently minimization of (31) can be performed for each term of the sum with respect to  $\Delta \hat{R}_{uu}^{(d)}$  (or  $\hat{p}_d$  in (32)). We have:

$$\boldsymbol{m}_{d} - \hat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \hat{\boldsymbol{p}}_{d} = 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{p}}_{d} \approx \left( \hat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\dagger} \hat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}} \right)^{-1} \hat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\dagger} \boldsymbol{m}_{d} = \hat{\boldsymbol{\mathcal{Q}}}^{\#} \boldsymbol{m}_{d} ,$$
(33)

which is an optimal solution in the LS sense. Substituting (33) and (32) into (31), we get:

$$\mathcal{C}_{\text{DLS}}(\hat{Q}) = \sum_{d=1}^{D} ||\boldsymbol{m}_d - \hat{\mathcal{Q}}\hat{\mathcal{Q}}^{\#}\boldsymbol{m}_d||_F^2 = \sum_{d=1}^{D} ||\boldsymbol{P}^{\perp}(\hat{\mathcal{Q}})\boldsymbol{m}_d||_F^2,$$
(34)

where  $P^{\perp}(\hat{Q}) = I - \hat{Q}\hat{Q}^{\#}$  is Hermitian and idempotent (i.e.  $(P^{\perp}(\hat{Q}))^2 = P^{\perp}(\hat{Q})$ ). As a result, it follows that:

$$\mathcal{C}_{\text{DLS}}(\hat{\mathbf{Q}}) = \sum_{d=1}^{D} ||\mathbf{m}_{d}^{\dagger} \mathbf{P}^{\perp}(\hat{\mathbf{Q}}) \mathbf{m}_{d}||_{F}$$
  
= trace  $\left\{ \mathbf{P}^{\perp}(\hat{\mathbf{Q}}) \sum_{d=1}^{D} \mathbf{m}_{d} \mathbf{m}_{d}^{\dagger} \right\}$   
= trace  $\left\{ \mathbf{P}^{\perp}(\hat{\mathbf{Q}}) \mathbf{Y} \right\}$ . (35)

The EVD of Y in (35) can be expressed as:

$$Y = V\Lambda V^{\dagger} = \sum_{m=1}^{G^2} \lambda_m v_m v_m^{\dagger},$$
  

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots, \ge \lambda_{G^2} \ge 0,$$
(36)

where it is assumed that  $\hat{Q} \in \mathbb{C}^{G \times G}$  ( $\hat{G} = G$ ) such that  $m_d \in \mathbb{C}^{G^2 \times 1}$ . Yeredor then shows that a lower bound on  $C_{\text{DLS}}$  is given by:

$$\mathcal{C}_{\text{DLS}}(\hat{\boldsymbol{Q}}) \ge \sum_{m=G+1}^{G^2} \lambda_m \,. \tag{37}$$

The result follows from noting that rank{ $\hat{Q}$ } = rank{ $\hat{Q}$ }, and consequently that rank{ $P^{\perp}(\hat{Q})$ }  $\geq G^2 -$ rank{ $\hat{Q}$ }  $\equiv r$ . Recalling that the eigenvalues of an idempotent matrix are either 0 or 1, it follows that  $P^{\perp}(\hat{Q})$  can be expressed by its EVD such that  $P^{\perp}(\hat{Q}) = S(\hat{Q})S^{\dagger}(\hat{Q})$ , where  $S(\hat{Q}) \in \mathbb{C}^{G^2 \times r}$  satisfies  $S^{\dagger}(\hat{Q})S(\hat{Q}) = I$ . Combining those results and (36) in (35) yields:

$$C_{\text{DLS}}(\hat{\boldsymbol{Q}}) = \text{trace} \{ \boldsymbol{W}(\hat{\boldsymbol{Q}}) \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{W}^{\dagger}(\hat{\boldsymbol{Q}}) \}$$
$$= \sum_{m=1}^{G^2} \lambda_m \boldsymbol{w}_m^{\dagger}(\hat{\boldsymbol{Q}}) \boldsymbol{w}_m(\hat{\boldsymbol{Q}}) , \qquad (38)$$

where  $W(\hat{Q}) = S^{\dagger}(\hat{Q})V \in \mathbb{C}^{r \times G^2}$  and where  $w_m(\hat{Q})$  is the *m*-th column of  $W(\hat{Q})$ , satisfying  $||w_m(\hat{Q})|| \leq 1$ . Given  $||W(\hat{Q})||_F^2 = r$ , a minimum value of  $\mathcal{C}_{\text{DLS}}(\hat{Q})$  is obtained when the weights  $w_m^{\dagger}(\hat{Q})w_m(\hat{Q})$  of the last  $r \geq G^2 - G$  eigenvalues  $\lambda_m$  in (38) are equal to 1 (and the others zero), thus yielding (37). Further derivations in [58] show that this bound can almost always be reached for target matrices  $\{E_s^{\dagger} \Delta R_{xx}^{(d)} E_s\}_{d=1}^D$  of size 2 × 2 for any *D* if  $\hat{Q}$  is taken as the solution of the exact JD of matrices

$$S_2 \triangleq \left\{ \operatorname{unvec}\{v_1\}, \operatorname{unvec}\{v_2\} \right\}$$
(39)

from (36), where the inverse vector operator satisfies unvec{ $vec{X}$ } = X. For larger target matrices (G > 2), an estimate  $\hat{Q}$  likewise obtained is shown to be "*pretty good*", or can serve as an initial guess for a subsequent iterative AJD algorithm.

Estimation performance considering AJD of the full and the "more representative" sets of target matrices ( $S_D$ in (28) and  $S_2$  in (39)) will be compared in more details in Section 5.

## 4.3 Identifiability

The identifiability of *B* to within column scale and permutation is guaranteed provided that the set of target matrices  $\{Q \Delta R_{uu}^{(d)} Q^{\dagger}\}_{d=1}^{D}$  in (28) be jointly diagonalizable. In such a case, an estimate  $\hat{Q}$  of *Q* possesses the form:

$$\hat{Q} = QZ, \qquad (40)$$

where **Z** is a scale permutation matrix containing only one non-zero element per line and column (see Section 4.1).  $\hat{Q}$  is then said to be *essentially equal* to **Q** [17], and as a result we also have  $\hat{B} = BZ$  in (30). This section is intended at discussing the necessary conditions to guarantee identifiability of **B** given the general signal model of eqs. (4) and (6).

A first requirement is that B be full column rank such that Q be invertible in (27), and thus suitable for a JD process. The nonsingularity of the mixing (or channel) matrix is an assumption made in a majority of BSS algorithms, and brings no particular limitation given the continuous and somewhat arbitrary nature of coefficients  $[B]_{pq}$  that would arise in a practical situation.

Given  $rank{Q} = G$ , the study of identifiability conditions can be restricted to the particular structure of  $\{\Delta R_{uu}^{(d)} Q\}_{d=1}^{D}$  in (28). It is of course necessary that the latter matrices be diagonal, which is ensured by the uncorrelated assumption of the source signals, i.e.  $E\{u_p(t)u_q(t)\} = \sigma_{u_p}^2(t)\delta_{p,q}$ . Note also that the diagonal elements of  $R_{uu}(t,\tau)$  in (16) are real valued (see eq. (A.4) in Appendix), implying that  $\Delta R_{uu}^{(d)} \in$  $\mathbb{R}^{G \times G}$   $\forall$ *d*. Some general requirements on the source signals for identifiability of the mixing matrix in JDbased BSS algorithms are discussed in [22]. However, [17] gives a more rigorous criterion in this regard in the particular case where Q is unitary. Although this condition is not generally satisfied in (27), we will nontheless present a review of this criterion which will subsequently prove helpful in deriving the necessary identifiability conditions in the general case of eq. (28). It is shown in [17], eq. (21), that identifiability of a unitary Q to within column scale and permutation is possible if and only if

$$\exists d \mid [\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)}]_{pp} \neq [\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)}]_{qq} \; \forall \; p \neq q \;, \tag{41}$$

i.e. if there exists at least one matrix  $\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)}$ ,  $d \in \{1, 2, ..., D\}$ , having distinct diagonal elements. It can be shown however that this condition does not always yield accurate identifiability predictions in the most general cases, as it is sometimes too restrictive in regard of the structure of  $\{\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)}\}_{d=1}^{D}$ . For example, the set of target matrices

$$\left\{Q\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}Q^{\dagger}, Q\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}Q^{\dagger}, Q\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}Q^{\dagger}\right\}$$
(42)

is jointly diagonalizable in the sense of *essential equality* for any full-rank  $Q \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  (unitary or not) even if none

of the inner diagonal matrices satisfies (41). Otherwise, as shown in Appendix B of [17], eq. (41) correctly predicts a problem solvability for any unitary Q. In the context of this paper however, eq. (41) cannot apply since Q is generally not unitary, but it can nonetheless serve as a good starting point to derive a somewhat similar identifiability criterion for the set of DTM (28).

Consider in this vein any full-rank and non-unitary Q, and suppose that  $[\Delta R_{uu}^{(d)}]_{11} = 0 \forall d$ . Even if a given  $\Delta R_{uu}^{(d)}$  satisfies (41), there exists no possibility of identifying  $q_1$  (the first column of Q) to within an arbitrary non-zero scale factor since no information about this component is present in the set of target matrices. However, if Q was unitary, identifiability could still be possible considering the property of orthogonality between distinct lines and columns of a unitary matrix. Another example would be that of a set of target matrices of the form  $\{QDQ^{\dagger}, Q(\alpha D)Q^{\dagger}\}$ , where D satisfies (41). Identifiability of Q cannot be performed either unless the columns of Q are orthogonal, in which case the eigenvector matrix of either (if  $\alpha \neq 0$ ) target matrices can be taken as  $\hat{Q}$  and be *essentially equal* to Q.

From the latter considerations and accounting for the presence of arbitrary numbers of zeros in diag{ $\Delta R_{uu}^{(d)}$ }  $\forall d$  given the differential approach of eq. (20), a general identifiability criterion may now be formulated inspired from [17] for any full-rank  $Q \in \mathbb{C}^{G \times G}$  and diagonal  $\Delta R_{uu}^{(d)} \in \mathbb{R}^{G \times G}$  in (28). First let the *d*-th row of a matrix  $M \in \mathbb{R}^{D \times G}$  correspond to the diagonal elements of the *d*-th target matrix:

$$\begin{bmatrix} M_{d1} & M_{d2} & \dots & M_{dG} \end{bmatrix} = \operatorname{diag} \{ \Delta \boldsymbol{R}_{uu}^{(d)} \}^{\top} , \qquad (43)$$
$$d \in \{1, 2, \dots, D\} .$$

Then a non-zero joint diagonalizer of the form  $\hat{Q}^{-1} = (QZ)^{-1}$  exists for the set of target matrices (28) if and only if



Figure 6. Representation of matrix M with corresponding g-th column and d-th line.

$$\operatorname{rank}\left\{ \begin{bmatrix} m_{g_1} & m_{g_2} \end{bmatrix} \right\} = 2 \ \forall \ 1 \leq g_1 \neq g_2 \leq G \ , \qquad (44)$$

where  $m_g$  is the *g*-th column of M (refer to Fig. 6 for a structural representation). Note that this general compact-form identifiability condition does not impose a given  $\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)}$  to possess distinct diagonal elements as in (41), and also allows that a number of matrices  $\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)} = \mathbf{0} \forall d \in \{1, 2, \dots, d_c\}$  provided that a matrix M' constructed from  $\Delta \mathbf{R}_{uu}^{(d)} \forall d \in \{d_c + 1, d_c + 2, \dots, D\}$ 

satisfies (44). In the example of eq. (42), we have:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I,$$

which is full-rank and satisfies (44). An identical result would also be obtained if any number of zero matrices would be added in (42).

One also deduces from (44) that identifiability cannot be achieved if each component of Q is not adequately represented in (28), e.g. if  $m_g = 0$  for any g, or more generally if  $m_{g_1} = \alpha m_{g_2} \forall \{g_1, g_2\}$ . Interestingly, we note that for  $D \ge G$ , eq. (44) reduces to rank $\{M\} = G$ .

Although (44) gives the necessary and sufficient requirement on  $\{\Delta R_{uu}^{(d)}\}_{d=1}^{D}$  to guarantee identifiability (given rank $\{Q\} = G$ ), no general condition has yet been formulated with respect to the source model of eq. (6), which solely determines the structure of  $R_{uu}(t,\tau)$  in (16). Suppose in this regard that the sources are synchronous (considering any sampling phase or oversampling factor) and have identical pulse shaping functions, i.e.  $\tau_g = \tau_0$  and  $p_g(t) = p(t)\} \forall g$ . Hence  $NAP_g(t,\tau) = NAP(t,\tau) \forall g$  and it follows from (17) that

$$[\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)]_{gg} = \sigma_{\text{sym}_g}^2 \text{NAP}(t,\tau), \qquad (45)$$

and consequently

diag{
$$\mathbf{R}_{uu}(t,\tau)$$
} = NAP $(t,\tau)[\sigma_{\text{sym}_1}^2 \sigma_{\text{sym}_2}^2 \dots \sigma_{\text{sym}_G}^2]^\top$ .

Therefore, for any values of  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $\tau_1$  and  $\tau_2$ , the diagonals of matrices  $R_{uu}(t_1, \tau_1)$  and  $R_{uu}(t_2, \tau_2)$  are simply scaled versions of each other. Consequently, this will also be the case for the diagonals of matrices  $\Delta R_{uu}^{(p_1, p_2, q)} \forall \{p_1, p_2, q\}$  in (20), implying that rank  $\{[m_{g_1} \ m_{g_2}]\} < 2 \forall \{g_1, g_2\}$  and making identifiability of Q impossible. This is a situation where the statistical diversity of the sources cannot be exploited due to the likeness of their distributions, and it is well know in such contexts that BSS cannot be performed using only second-order statistics (SOS).

It must be understood from such considerations that our approach cannot apply in the case of synchronous signals when identical pulse shaping functions are considered. However, in a general asynchronous scenario where it is plausible to assume that  $\{\tau_g\}_{g=1}^G \sim \mathcal{U}(0,T)$ , a situation where  $\tau_g = \tau_0 \forall g$  (or generally any circumstance of conditions on  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  implying that NAP<sub>g</sub>( $t, \tau$ ) = NAP( $t, \tau$ )  $\forall g$ ) has a theoretically nil probability of occurrence. Nonetheless, there would still exist a non-zero probability that situations of closely distributed source signals (i.e. closely identical NAPs) be encountered since no control can be exerted on  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  (i.e. without synchronization). A study of estimation performance in such unfavorable conditions is presented in Section 5.5.

In order to further enhance autocorrelation diversity such that it does not only depend on  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ , it will be assumed that each source signal in (6) is modulated using one among a set of distinct predefined pulse shaping functions (i.e.  $p_g(t) \in \{p_s(t)\}_{s=1}^S \forall g$ ) at each

transmission block with no particular order or preference, and in an independent fashion for each user. This operation is accomplished on the mobile side only without requiring the use of synchronization signals and can be easily implemented by changing coefficients of a digital FIR pulse shaping filter from a set of predefined values stored in memory<sup>10</sup>. Considering that such set of coefficients be chosen randomly for each user from a finite set of possibilities, i.e.  $\{p_s(t)\}_{s=1}^{S<\infty}$ , there would still exist a probability that  $p_g(t) = p(t) \forall g$ , and that an unfortunate circumstance such as  $\tau_g \approx \tau_0 \forall g$  results in creating unfavorable identifiability conditions. However, such an occurrence will be much less likely to be observed than if identical pulse shaping functions were to be used for all users. The overall operation thus contributes to enhance autocorrelation diversity, but is not a necessary requirement for application of the algorithm considering that, as previously stated, the probability of occurrence of a natural event implying that  $\text{NAP}_g(t, \tau) = \text{NAP}(t, \tau) \forall g$  is theoretically nil.

Finally, let us now resume the most important assumptions made throughout the paper, which, in a similar vein, are also general requirements for identifiability.

- A narrowband signal context with respect to the array dimensions. This allows the time domain received signal vector to be expressed in a compact matrix form such as (1).
- A time-invariant channel. This important assumption implies that matrix *B* remains constant over time (implying slow or nil fading), and is a necessary condition for BSS algorithms relying statistical estimates obtained by time averages.
- There is negligible delay spread. This allows the received source signals  $u_g(t) \forall g \in \{1, 2, ..., G\}$  to be modeled as independent random processes, and is necessary so that  $R_{uu}(t, \tau)$  be diagonal in (16).
- Signals are transmitted from the mobiles to the receiving array in a baud-asynchronous fashion where, for the duration of the observation period,  $\tau_g \sim \mathcal{U}(0,T) \forall g$  where parameters  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  are independent of each other. Such asynchronous conditions are naturally likely to arise in practical scenario, but we recall that our estimation principle cannot apply under synchronous conditions  $(\tau_g = \tau_0 \forall g)$  if identical pulse shaping functions are considered for all users  $(p_g(t) = p(t) \forall g)$ .
- Matrix B ∈ C<sup>N×G</sup> has full column rank (which also implies that G ≤ N). This is a necessary condition to allow its identifiability via JD.
- The noise vector n(t) is a stationary random process, or at least cyclostationary in t with period T/(aU) where  $a \ge 1$  is an integer. This property is essential to obtain noise-free differential autocorrelation matrices  $\Delta R_{xx}^{(p_1,p_2,q)}$  in (20) which provide the necessary structure for a subsequent JD process.

## **5** Simulation Results

This section presents various simulation results intended to illustrate the performance behaviour of the proposed estimation algorithm in a broad variety of scenarios. It will be shown how by the sole use of SOS, blind identification of *B* can be achieved based on the DTM construction principle of eq. (20) using standard AJD techniques. The advantages of the latter principle will also be evidenced in cases of complex noise statistical distributions when a maximum number of users  $G_{\text{max}} = N$  is considered.

In essence, the algorithm proceeds in four main steps:

- 1) Given an integer oversampling factor U, compute  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)}$  for all p's and q's in (18).
- 2) Form the set of DTM from (20), (28) and (26).
- 3) Estimate *Q* by perform AJD on (28) using an appropriate existing algorithm.
- 4) Estimate *B* from (30).

Considering an observation time of *P* symbol periods, each of matrices  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)}$  in (18) are estimated by (refer to Fig. 5):

$$\hat{R}_{xx}^{(p,q)} = \frac{1}{k_{\max} + 1} \sum_{k=0}^{k_{\max}} x_{Uk+p} x_{Uk+p+q}^{\dagger}, \qquad (46)$$
$$k_{\max} = \left\lfloor \frac{UP - p - q}{U} \right\rfloor.$$

For simplicity, the received pulse shaping functions  $p_g(t) \forall g$  are considered to be ideal windowed (rectangular) RC pulse functions of width W = 6T (see eqs. (A.5) and (A.11) in Appendix) for all experiments. As explained in Section 4.3, each source signal is transmitted using one among a set of distinct predefined pulse shaping functions (i.e.  $p_g(t) \in \{p_s(t)\}_{s=1}^S$ ). These distinct functions will be generated in the present case considering a change of parameter  $\beta$ , leading to the definition of a vector  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_G]^{\top}$  representing the roll-off factors of each corresponding source signal. Likewise we also define a vector  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_G]^{\top}$  representing the corresponding asynchronous delays.

The performance index used in all experiments is a similar version of the global rejection level (GRL) introduced in [17]. In its original form we have:

$$E\{\operatorname{GRL}\} = \sum_{p \neq q} E\{|[\hat{\boldsymbol{B}}^{\#}\boldsymbol{B}]_{pq}|^2\} \ge 0.$$
(47)

The definition is based on the idea that a close estimate  $\hat{B}$  of B implies that  $\hat{B}^{\#}B \approx I$ , which in turn yields GRL  $\approx 0$ . This formulation, however, implies that larger column-sized matrices generate higher GRLs than smaller sized ones for equivalent quality estimates (say, the distribution of  $|[\hat{B}^{\#}B]_{pq}|^2$  for  $p \neq q$ ) since the net sum of all anti-diagonal elements is considered. In order to compare the estimation performance of differently sized channel matrix on a same basis, we define a modified and averaged version of the GRL

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>By changing the coefficients without affecting the number of symbol taps of a digital filter, the width of the transmit pulse shaping function remains constant and the operation brings literally no increase in hardware/implementation complexity.

inspired from [24] such that:

$$GRL = \left[\sum_{p=1}^{G} \left(\sum_{q=1}^{G} \frac{H_{pq}}{\max_{k}(H_{pk})} - 1\right) + \sum_{q=1}^{G} \left(\sum_{p=1}^{G} \frac{H_{pq}}{\max_{k}(H_{kq})} - 1\right)\right] / G^{2},$$

$$H_{pq} = \left|\left[\hat{\boldsymbol{B}}^{\#}\boldsymbol{B}\right]_{pq}\right|^{2}, \quad \boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{N \times G}, \quad N \ge G.$$

$$(48)$$

This new performance index goes to zero only if *B* is *essentially equal* to *B* (i.e. if  $\hat{B} = BZ$  where *Z* is a scale and column permutation matrix). The computation averaged over all  $G^2$  elements of  $\hat{B}^{\#}B$  now provides a better comparison basis<sup>11</sup>, and for this reason eq. (48) will be considered for all experiments.

The theoretical exact power definition of a received source signal is:

$$P_g = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |u_g(t)|^2 dt , \qquad (49)$$

and depends on the variance  $\sigma_{\text{sym}_g}^2$  of the transmitted symbol sequence as well as the pulse shaping function  $p_g(t)$ , as shown in Appendix. In all simulations however, we will more conveniently refer to the power of a received signal  $u_g(t)$  as the variance  $\sigma_{\text{sym}_g}^2$  of its corresponding symbol sequence. Such a designation (although inexact) will allow to better compare the estimation performance of differently distributed signals through the use of different pulse shaping functions, and will not impact on the generality of the observations to be made.

For all experiments, a SNR measure is defined as the ratio of mean source symbol power to mean noise power over all elements, that is:

$$SNR = \frac{N \sum_{g=1}^{G} \sigma_{sym_g}^2}{G \sum_{p=1}^{N} \sigma_{n_p}^2}.$$
 (50)

However, since equal source and noise powers will be considered in all cases, this expression reduces to  $\text{SNR} = \sigma_{\text{sym}}^2/\sigma_n^2$ . In experiments 1 to 5, a temporally and spatially white Gaussian noise will be considered to emphasize performance behaviour with respect to signal related aspects. A differently distributed noise (but sill Gaussian) will be considered in experiment 6.

Note also that in order to more conveniently evaluate the performance index of differently parametrized signals in various contexts, it will be assumed that Gis known. In practice however, an estimate of G can be obtained by application of the well known AIC [60] or MDL [61] detection criteria on the singular values of (25).

Note finally that a parameter S will be used in all experiments to denote the number of simulation runs used for averaging operations.

# 5.1 Experiment 1: Performance Comparison of Different AJD Algorithms

This first experiment is intended to compare the performance of different AJD algorithms in a same signal context. The literature provides a vast assortment of algorithms capable of solving the JD problem of eq. (28). In this section however, the following four algorithms will be considered:

- CVFFDIAG [25]. This algorithm represents an adaptation of the popular FFDIAG [29] to complexvalued problems. The authors propose a lowcomplexity iterative scheme having good performance and a relative ease of implementation.
- U-WEDGE [23]. This algorithm presents an interesting iterative approach based on exhaustive diagonalization using Gaussian iterations. It is notably popular in the literature and proves directly compatible with the set of target matrices in (28).
- s-BIA [24]. This AJD algorithm implements an original bi-iterative process inspired from ACDC [27]. The authors provide a comprehensive literature review along with various simulation results demonstrating the effectiveness of the proposed method.
- IDIEM [26]. This recent work presents an interesting direct (noniterative) solution to the AJD problem of a set of complex eigenmatrices. The algorithm has a low computational complexity and provides closed-form approximate solutions for the direct least-squares optimization criterion.

In this experiment, an array of N = 4 elements is considered along with G = 2 impinging BPSK-modulated signals and an upsampling factor U = 2. Fixed parameters  $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}^{\top}$  and  $\boldsymbol{\tau} = T \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}^{\top}$  are also considered. Fig. 7 displays the overall results for each algorithm considering both the full and "more representative" set of target matrices according to (28) and (39). Note however that the IDIEM algorithm already implements a computation of a "more representative" set of target matrices (also inspired from [58]), and for this reason only the full set of target matrices is considered in its case. Each point of the curves in Fig. 7 is generated from S = 500 simulation runs considering block lengths of P = 2000 symbol periods. Discontinuities represent a non convergence of the estimated solution for the considered algorithm, which happens as a joint diagonalizer estimate  $\hat{V}$  becomes close to singular, and is detected using a threshold on the norm of  $\hat{Q}$  in (30).

The first three graphs are generated considering fixed channel matrices (but different ones in each three cases), which is meant to better appreciate the behaviour of each algorithm in different numerical contexts. In (a) specifically, it can be seen that even at high SNRs CVFFDIAG, s-BIA and IDIEM converge to a non-optimal solution<sup>12</sup>, whereas U-WEDGE still achieves good performance. It can also be seen that the use of the "more representative" set of target matrices generally worsens performance in all cases, and at a

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Normalized performance criterions similar to (48) were also considered in [26].

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Convergence of AJD algorithms toward local extrema is a well known problem in the literature. See [27, 30].



Figure 7. Results of experiment 1. Three different fixed channel matrices are considered in (a), (b) and (c). In (d), elements of *B* are randomly generated at each simulation run from a complex Gaussian distribution.

higher degree at low SNRs. This somewhat counterintuitive observation can be explained from the fact that, although the use of eq. (39) significantly reduces the complexity of the AJD problem, the effective set reduction operation, from the standpoint of information theory, represents a simple loss of information. Although it was mentioned in [58] that the two "more representative" matrices could be either used for direct AJD or as an initial guess for a subsequent iterative algorithm, a general approach aiming at restricting the number of target matrices will always be subject to such a drawback. As observed in Fig. 7, the operation becomes more beneficial however as the SNR or more specifically the observation time PT increases, implying that the initial set of target matrices becomes closer to its ideal eigenstructure, but otherwise is not likely to bring improvement in performance.

Fig. 7 also shows that U-WEDGE clearly outperforms other algorithms for all SNR values in a consistent manner. This overall behaviour is confirmed in case (d) where matrix **B** is given a random value at each simulation run with  $B_{pq} \sim \mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$ . This

emphasises the fact that the choice of an appropriate AJD algorithm is an important factor in maximizing the output estimation performance. Other experiments and simulations have also shown that U-WEDGE provides the best overall performance among other algorithms, and for this reason it will be retained for the next experiments.

#### 5.2 Experiment 2: Effect of Signal Constellations

It was shown in Section 4.3 that in order to achieve blind identification, at least two source signals must have different NAPs. It can be seen from eq. (A.4) that a source NAP is independent of the symbol distribution. Hence this suggests that differently modulated signals (via different symbol distributions) should yield identical estimation performance if the same pulse shaping functions are used, even if from a statistical point of view, the signals are differently distributed. This experiment is meant to exemplify this behaviour. Fig. 8 displays simulation results obtained considering N = 4, G = 3, U = 3,  $\beta = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}^{\top}$ ,



Figure 8. Results of experiment 2. Estimation performance considering source signals having different constellations. AJD is performed using U- WEDGE.

 $\boldsymbol{\tau} = T \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$ , P = 2000 and S = 500. Elements of  $\boldsymbol{B}$  are also given random values at each simulation run as in experiment 1. We observe that identical performance is achieved in all cases, thus confirming that signal constellations have no effect on the average quality of estimate.

#### 5.3 Experiment 3: Effect of Pulse Shaping Functions

Autocorrelation diversity can be exploited if the received signals have different NAPs, which according to eq. (A.4) are a sole function of the source pulse shaping functions. This experiment is intended to exemplify the dependency of estimation performance on this particular signal aspect. More particularly, Fig. 4 shows that as  $\beta$  decreases in (A.11), a source NAP amplitude  $(\max_t(NAP(t,\tau)) - \min_t(NAP(t,\tau)))$  also decreases, hence impacting negatively on autocorrelation diversity. The tendency is particularly visible on the graphs of the first row of the same figure for large window lengths. Fig. 9 displays simulation results obtained for signals having different pulse shaping functions, which is modeled via changes in distribution of parameter  $\beta$ . An array of N = 6 elements is considered, along with G = 3 16-QAM modulated signals and an upsampling factor U = 3. In this experiment, B,  $\beta$  and  $\tau$  are given random values at each simulation run such that  $B_{pq} \sim \mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$ ,  $\beta_g \sim \mathcal{U}(0,\beta_{\max})$  and  $\tau_g \sim \mathcal{U}(0,T)$ . Calculations are performed considering P = 2000 symbol periods and S = 1500 trials. The performance dissimilarity for each set of parameter distribution is obvious. As intuitively expected, lower values of  $\beta$  decrease overall performance by providing less diversity between elements of diag{ $R_{uu}^{(p,q)}$ } in (18), which in turn impacts negatively in (20). Similar results could also have been obtained considering identical distribution of parameter  $\beta$  in all cases, but different distribution of window length W. This experiment emphasises the fact that the nature of the source pulse



Figure 9. Results of experiment 3. Performance comparison for source signals having different pulse shaping functions. AJD is performed using U- WEDGE.

shaping functions plays a significant role in optimizing estimation performance.

## 5.4 Experiment 4: Influence of the Number of the Target Matrices

This interesting experiment is meant to investigate the effect on estimation performance of the total number of target matrices considered for the AJD problem in eq. (28). The number of target matrices D is set by varying U according to (22). In this simulation, a five-element array is considered with G = 3 impinging QPSK signals. P = 2000 symbol periods are also used for calculation of estimated autocorrelation matrices, and results are averaged over S = 2000 simulation runs, where at each time  $B_{pq} \sim \mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$ ,  $\beta_g \sim \mathcal{U}(0,1)$  and  $\tau_g \sim \mathcal{U}(0,T)$ . Fig. 10 displays



Figure 10. Results of experiment 4. Effect of upsampling factor U on estimation performance. For each U the number of target matrices is given by (22). AJD is performed using U-WEDGE.

the experiment results considering the values of U

and D in Table I. For comparison, curves associated with the "more representative" set of target matrices have also been included. As in experiment 1, it can be seen that the set reduction consistently worsens performance over the considered SNR range, despite bringing significant gain in computational complexity (for the AJD problem) as U increases. Interestingly, it can be observed that an increase in the number of target matrices brings consistent improvement in performance (considering the full set), especially at low SNRs. This phenomenon is attributable to a better exploitation of signal statistics via multiple autocorrelation evaluations, and was also the main motivation in the development of [17]. However the gain in Fig. 10 reaches a finite limit as U increases and comes at the price of significant increases in computational complexity. At high SNRs, a less important gain is obtained for high numbers of target matrices, which could be intuitively predicted especially as *P* increases.

#### 5.5 Experiment 5: Effect of Close Distributions

This experiment is intended to examine the performance of the estimation procedure in a context of closely distributed signals. More particularly, we refer to closely distributed signals as signals having similar NAPs, where, to an extent, estimation of *B* via JD of (28) cannot be performed (see Section 4.3). In experiment 1 and 2, fixed parameters  $\beta$  and  $\tau$  were considered at all simulation runs and SNRs, and ensured that sources have different NAPs. In experiment 3 and 4, a more complete set of test conditions was considered where  $\beta$ and  $\tau$  were uniformly generated in continuous intervals at each simulation run. Overall estimation performance thus encompassed cases of closely distributed signals, but their effect could not be emphasized. In this experiment, in order to better examine the behaviour of estimation performance in this context, we consider a scenario where  $\beta$  and  $\tau$  are fixed at each simulation run but are progressively given values according to a parameter  $\kappa$ . For  $\kappa = 0$ , the values of  $\beta$  and  $\tau$  are imposed such that the sources have different NAPs. For  $\kappa = 1$ , we have  $\beta_g = \beta \forall g$  and  $\tau_g = \tau \forall g$ , implying that the sources be identically modulated and perfectly synchronous, thus having identical NAPs.

Simulations are performed considering an array of N = 4 elements, G = 2 BPSK-modulated signals and an upsampling factor U = 3. Three sets of parameter values for  $\beta$  and  $\tau$  are considered:

$$\left\{ \begin{array}{c} \overbrace{0}^{\beta_{0}} & \overbrace{0}^{\tau_{0}/T} & \overbrace{0}^{\kappa} \\ \hline 0 & 0.5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\kappa} \left\{ \begin{array}{c} \overbrace{0}^{\beta_{1}} & \overbrace{0}^{\tau_{1}/T} \\ \hline 0.4 \\ 0.4 \end{array} \right\} \xrightarrow{\kappa} \left\{ \begin{array}{c} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{array} \right\} , \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\kappa} \left\{ \begin{array}{c} 0.3 \\ 0.3 \end{array} \right\} , \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{array} \right\} \\
\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{array} \right\} , \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\kappa} \left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{array} \right\} , \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{array} \right\}$$
(51)

Fig. 11 (a) displays the performance curves obtained for the three sets considering P = 2000 symbol periods,



Figure 11. Results of experiment 5. (a): Estimation performance as the NAPs of two received signals progressively becomes identical. (b): Effect of the number of symbol periods on overall performance for  $\kappa = 0.\overline{8}$  in (a). AJD is performed using U-WEDGE.

S = 1000 simulation runs and a SNR of 10 dB. In each case good performance is obtained for almost all values of  $\kappa$  up to about 0.9. As  $\kappa$  increases, optimality is reached in the statistical distribution of the sources from points { $\beta_0, \tau_0$ } to { $\beta_1, \tau_1$ }, which explains the presence of GRL minima for the three curves at different locations. For  $\kappa = 1$ , sources have identical NAPs and the JD of (28) cannot be performed. The value of about -4 dB observed at this point has no particular meaning with regard to estimation performance.

The case of received source signals having identical NAPs has a zero probability of occurrence considering the time-continuous nature of  $\tau_g \forall g$  and the use of appropriate pulse shaping functions. However, situations of closely distributed received signals are likely to be encountered with a non-zero probability, and estimation performance may therefore be reduced. Fig. 11 (b) displays the performance curves obtained at  $\kappa = 0.\overline{8}$  considering the sets of parameters of eq. (51) as a function of the number of symbol periods *P*. As expected, the results show that good performance can

still be achieved in this context by considering larger observation times.

## 5.6 Experiment 6: Performance Assessment in Complex Noise Environments

This last experiment is intended to underline the advantages of the DTM construction principle explained in Section 4. The array's degree of freedom is now exploited to its full extent by considering multiple instances of scenarios for which N = G. A temporally Gaussian colored noise having the bell shape of Fig. 12 is also considered with a SNR measurement given by (50). The noise is however spatially white. In such conditions, noise variance estimation cannot be performed by performing an eigenvalue analysis of any zero-lag autocorrelation matrix estimate. Moreover, non-zero-lag autocorrelation matrices will not possess the required eigenstructure for AJD unless a sufficiently large time lag is considered (approximately 60T/U in the case of Fig. 12). Approaches where estimation of the mixing matrix is directly performed from the set of autocorrelation matrix estimates as in [18-21] can therefore not be applied. In this simulation, 16-QAM signals



Figure 12. Noise autocorrelation function at each sampling instant  $t_k = kT_s$  used in experiment 6.



Figure 13. Results of experiment 6. Estimation performance as a function of the number of symbol periods for different values of N and G considering a temporally colored noise of -5 dB. AJD is performed using U-WEDGE.

are considered with an upsampling factor U = 4. Fig. 13 presents the performance curves associated with different values of N = G as a function of *P* considering a mean SNR of -5 dB. The number of simulation runs is adjusted linearly in the interval from S = 4000 to S = 3000, where at each time  $B_{pq} \sim \mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)$ ,  $\beta_g \sim \mathcal{U}(0,1)$  and  $\tau_g \sim \mathcal{U}(0,T)$ . It can be observed that better performance is achieved for smaller number of sources, which is attributable to smaller average norms of matrices  $\hat{R}_{uu}(t,\tau)$  and from the AJD operation itself. As *P* increases, the GRL decreases in all cases and confirms the effectiveness of the noise cancellation process of eq. (20).

## **6** FUTURE WORKS

We have shown how the cyclostationary nature of communication signals in a general asynchronous context could be exploited to perform BSS considering the JD of a set of differential second-order autocorrelation matrices. However we have also shown in Section 4.3 that such an approach may be subject to irregular estimation performance given the random character of  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ in (6), implying unpredictable statistical distribution of the sources at each observation period (generally) and giving rise to potential unfavorable estimation conditions (similarity of the NAPs). Although identifiability of **B** to within a scale and permutation factor is still possible in such contexts provided that a sufficiently large number of sample is available, an interesting comparison could be made between estimation performance of the proposed method and that of a higherorder algorithm such as JADE [16] (or an equivalent algorithm considering a set of DTM as in (28)) possibly less prone to such performance variation. We wish to stress however that this change in statistical distribution of the sources due to unpredictable values of  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$ in (6) is an intrinsic property of asynchronous signals to which any algorithm would have to be subject to with a wide range of consequences on estimation performance depending on the type of processing at work.

Derivation of Cramér-Rao bounds considering either fixed or uniformly distributed values of  $\{\tau_g\}_{g=1}^G$  for specific families of pulse shaping functions would also constitute a yet complex but very interesting problem proving instrumental for performance benchmarking. Similarly, obtention of a lower bound on the GRL in terms of general estimation parameters such as *U* in experiment 4 would also prove useful. For length concerns, such analysis have not been included in the paper.

In another vein, an interesting parallel was made in Section 2.2.2 regarding expression of the received signal vector considering either a FIR-MIMO-based modeling or a traditional array processing signal model where the source vector directly encompasses the time-continuous expression of the source signals. The main point of this discussion was to underline the fact that although the use of a FIR-MIMO-based modeling is a convenient way of expressing the observable outputs in terms of the transmitted symbol sequences of each user, it implies having to deal with generally different channel matrices if oversampling techniques are to be exploited. On the other hand, the use of the classical signal model (4) implies that B remains constant with sampling phase but isn't as practical to recover the transmitted symbol sequence of each user. To this end however, an approach as considered in [36] may be employed where source symbol values for each user are recovered via beamforming<sup>13</sup> using an optimal weight vector of the form:

$$w_{\text{opt}_g} = c \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{b}_g , \ g \in \{1, 2, \dots, G\},$$
 (52)

where  $R_{xx}$  is the spatial autocorrelation matrix (obtained in the synchronous conditions of Fig. 1 (a)) and where *c* is an adaptive constant. Estimates of the source signals are then obtained as:

$$\hat{u}_g(t_k) = \boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}^{\dagger} \boldsymbol{x}_k \ \forall \ g \in \{1, 2, \dots, G\} , \qquad (53)$$

where  $\{t_k\}_{k=1}^K$  are symbol instants identical since no oversampling is considered in [36]. The optimum weight vector (52) is well known in the literature for maximizing the signal-to-interference plus noise ratio (SINR). However its definition given a desired array response vector solely relies on the spatial autocorrelation matrix (see [35]), which is a sufficiently representative statistical measure of the observed signals only under stationary conditions. It is worth noting that the benefits of smart antenna techniques through the use of beamforming for example are typically promoted in a context of wireless communications involving cyclostationary signals. We recall from Section 3 that  $\mathbf{x}(t_k)$  for  $t_k = t_0 + kT$  is a stationary random process, whereas x(t) is rather cyclostationary in t with period T. Hence a general zero-lag autocorrelation matrix  $\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(t) = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^{\dagger}(t)\}$  depends on t, or equivalently on the time reference  $t_0$  (or phase) of a set of sampling instants taken at the baud rate. In such conditions, an optimum weight vector could be obtained at any arbitrary time  $t = t_0$  similarly to (52) such that:

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}_g}(t_0) = c \boldsymbol{R}_{xx}^{-1}(t_0) \boldsymbol{b}_g \,, \, g \in \{1, 2, \dots, G\} \,.$$
 (54)

In the case of identically modulated and synchronous signals (i.e.  $p_g(t) = p(t)$  and  $\tau_g = \tau_0$ }  $\forall g$  as in Fig. 1 (a)), any  $w_{\text{opt}_g}(t_{0_a}) = \alpha_{a,b}w_{\text{opt}_g}(t_{0_b})$  where  $\alpha_{a,b}$  is a real constant since matrices  $\mathbf{R}_{uu}(t, 0) \forall t$  are simply scaled versions of each other due to source signals having identical NAPs (see Section 3). An autocorrelation matrix  $\mathbf{R}_{xx}(t_0, 0)$  may then be evaluated at any  $t_0$  for obtention of an optimum weight vector to be used in (53). However the statistical distribution of the source signals  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^G$  would indeed depend on  $t_0$ .

In a general asynchronous case, matrices  $\mathbf{R}_{uu}(t,0) \forall t$  are no longer scaled versions of each other and source signal estimates  $u_g(t_k)$  cannot be optimally recovered from a single weight vector. Considering the set of zero-lag autocorrelation matrices  $\{\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)}\}_{p=0}^{U-1}$  in (18), a distinct weight vector may then be computed for each sampling phase index p such that:

$$\boldsymbol{w}_{\text{opt}_{g}}^{(p)} = c(\boldsymbol{R}_{xx}^{(p,0)})^{-1}\boldsymbol{b}_{g},$$
  

$$g \in \{1, 2, \dots, G\}, \quad p \in \{0, 1, \dots, U-1\},$$
(55)

<sup>13</sup>Note that synchronous signals and perfect symbol timing recovery are assumed in [36].

and source signal estimates may then be obtained as:

$$\hat{u}_{g}^{(p)}(t_{k}) = (\boldsymbol{w}_{\text{opt}_{g}}^{(p)})^{\dagger}\boldsymbol{x}_{k}^{(p)}$$
  
$$\forall \ g \in \{1, 2, \dots, G\} \ , \ p \in \{0, 1, \dots, U-1\} \ ,$$
(56)

where  $\{\mathbf{x}_{k}^{(p)} = \mathbf{x}_{Uk+p}\}_{k=1}^{K}$  is the set of output vector samples considered for evaluation of  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,0)}$ . An estimate of the *g*-th source signal sequence  $\{u_{g}(t_{0}), u_{g}(t_{1}), \ldots\}$  could then be obtained from an interleaved reconstruction of its *U* baud-sampled sequence estimates  $\{\hat{u}_{g}^{(p)}(t_{k})\}_{p=0}^{U-1}$  such that:

$$\{\hat{u}_{g}(t_{0}), \hat{u}_{g}(t_{1}), \ldots\} = \{\hat{u}_{g}^{(0)}(t_{0}), \hat{u}_{g}^{(1)}(t_{0}), \ldots, \hat{u}_{g}^{(U-1)}(t_{0}), \hat{u}_{g}^{(0)}(t_{1}), \hat{u}_{g}^{(1)}(t_{1}), \ldots\},$$
(57)

where in general  $\hat{u}_g(t_k) = \hat{u}_g^{(k\%U)}(t_{\lfloor k/U \rfloor})$  with '%' denoting the modulo operator. The signal reconstruction procedure of eqs. (55), (56) and (57) is in essence identical to that of classical beamforming techniques, with the difference that a distinct weight vector is considered for each of U baud-sampled sequences. This strategy is one among multiple ways in which estimation of the source signals  $\{u_g(t_k)\}_{g=1}^{\tilde{G}}$  could be performed in a general asynchronous context upon estimation of Bin (30). For example, more effective techniques could potentially be developed by also making use of matrices  $\mathbf{R}_{xx}^{(p,q)} \forall \{p,q \neq 0\}$  in (18) since no time lag autocorrelation is exploited in (55). Interestingly, note that this general recovery scheme would not have to make use of cyclic autocorrelation evaluation of the received signals which is typical for most of cyclostationary beamformers (see [62] and references therein).

As a final step, transmitted symbol sequence estimation could be performed from the source estimates  $\hat{u}_g(t_k) \forall g$  in (57) considering standard interpolation and symbol recovery techniques given a sufficiently large oversampling factor *U*. An interesting study could then compare the performance of such a procedure with that of a typical blind symbol recovery MIMO technique.

## 7 Conclusion

We presented a blind channel estimation algorithm for pulse-shaped communications signals exploiting only SOS and requiring no particular synchronization between transmitting and receiving antennas. The main contribution of the paper is the joint exploitation of the cyclostationary property of the received signals in a general asynchronous context as a means of creating a set of differential autocorrelation matrices suitable for a JD process or equivalent processing. This operation was shown to eliminate the need of noise power or statistical distribution estimation, and its effectiveness was confirmed in a broad set of simulation experiments.

The aim of the paper was also to provide clearer explanations on the main distinctions between synchronous and asynchronous signal modelings and their respective implications on the statistical distribution of the received signal vector. We also aimed at giving a more intuitive understanding of the traditional/classical and FIR-MIMO-based signal models showing how they equivalently relate to each other via different expressions of the received source vector. The two approaches have their own distinct advantages and disadvantages for the general BSS problem in a context of digital communications which are subject to further comparative analysis.

## Appendix

This section provides the main theoretical derivations of a source NAP such as defined in (17). Applications to common practical pulse shaping functions are also presented along with a discussion of some important follow-up results.

## A.1 NAP derivation

A received source signal can be modeled similarly to (6) as an infinite pulse-shaped symbol stream of the form:

$$u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_m p(t - mT) , \qquad (A.1)$$

where  $\{s_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$  is an iid transmitted symbol sequence with zero-mean. Without loss of generality, no asynchronous delay is considered in this analysis since one may simply replace *t* by  $t - \tau_0$  to account for such a parameter. Assuming that the pulse shaping function p(t) is real and deterministic, the signal autocorrelation is obtained as:

$$\begin{aligned} R_{uu}(t,\tau) &= E\{u(t)u^*(t+\tau)\} \end{aligned} \tag{A.2} \\ &= E\left\{ \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} s_m p(t-mT)\right] \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^* p(t-nT+\tau)\right] \right\} \end{aligned} \\ &= E\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m s_n^* p(t-mT) \cdot p(t-nT+\tau)\right\} \end{aligned} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{s_m s_n^*\} p(t-mT) p(t-nT+\tau) \end{aligned}$$
$$&= \sigma_{\text{sym}}^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT) p(t-mT+\tau) , \tag{A.3}$$

where  $\sigma_{\text{sym}}^2 = E\{s_m s_m^*\} = \text{Var}\{s_m\}$  is the symbol variance, or power. The NAP of a source u(t) is obtained by the ratio of its autocorrelation  $R_{uu}(t, \tau)$  to its symbol power  $\sigma_{\text{sym}}^2$ , that is:

$$NAP(t,\tau) = \frac{R_{uu}(t,\tau)}{\sigma_{sym}^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p(t-mT)p(t-mT+\tau).$$
(A.4)



Figure 14. General pulse shaping function p(t) spanning W/T symbol periods.

This general-form solution can be simplified considering that practical pulse-shaping is achieved by convolving a symbol stream with a filter impulse response of finite duration. More specifically, we have:

$$p(t) = w(t)h(t) \tag{A.5}$$

where w(t) is a window function of finite duration and h(t) represents an ideal filter impulse response. Eq. (A.4) can therefore be simplified by limiting the summation bounds to finite values such that:

NAP
$$(t, \tau) = \sum_{m=b_{\ell}}^{b_u} p(t - mT) p(t - mT + \tau)$$
, (A.6)

where  $b_{\ell}$  and  $b_u$  depend on the nature of p(t) as well as the values of t and  $\tau$  to which NAP $(t, \tau)$  is evaluated. An examination of (A.4) shows that NAP $(t, \tau)$ is periodic in t with period T. Therefore, a complete characterisation is possible by restricting its evaluation to any time interval of width T. From the considerations of Fig. 14, which depicts an arbitrary pulse shaping function p(t) of width  $W = t_2 - t_1$ , evaluation of NAP $(t, \tau)$  in the interval  $t \in [0, T]$  for  $\tau \ge 0$  leads to:

$$b_{\ell} = -[t_2/T],$$
  
 $b_u = 1 - [t_1/T],$  (A.7)

which are simply the appropriate bounds on *m* implying that  $p(t - mT) \ge 0$  in  $t \in [0, T]$ . Substituting (A.7) into (A.6) yields:

$$NAP(t,\tau) = \sum_{m=-\lfloor t_2/T \rfloor}^{1-\lfloor t_1/T \rfloor} p(t-mT)p(t-mT+\tau), \quad (A.8)$$
$$t \in [0,T] , \ \tau \ge 0.$$

The latter equation has been used for the obtention of Fig. 4 using various combinations of w(t) and h(t) in (A.5). The NAP may also be obtained for any negative time lag considering the periodicity of NAP( $t, \tau$ ) and direct algebraic manipulations of (A.2). We have:

$$NAP(t, -\tau) = NAP(t - \tau + kT, \tau), \qquad (A.9)$$

where *k* is chosen such that  $t - \tau + kT \in [0, T]$ . Finally, let us recall that p(t) in (A.1) represents a general received pulse function. Although ideal functions were considered in Section 5 and for the obtention of Fig. 4, practical calculations should be performed considering an effective waveform  $\tilde{p}(t)$  taking into account channel

propagation characteristics. For example, in the case of a linear time-invariant (LTI) channel,

$$\tilde{p}(t) = p(t) \ast h_{\ell}(t) \tag{A.10}$$

where p(t) is the transmitted pulse and  $h_{\ell}(t)$  is the equivalent low-pass channel impulse response [63].

#### A.2 Raised cosine low-pass filter

The raised cosine low-pass filter has an impulse response of the form:

$$h(t) = \operatorname{sinc}(t/T) \frac{\cos(\pi \beta t/T)}{1 - (2\beta t/T)^2}$$
, (A.11)

where  $\beta \in [0,1]$  is the roll-off factor specifying the filter excess bandwidth. Fig. 4 suggests that as  $\beta \rightarrow 0$  and  $W \rightarrow \infty$ , NAP( $t, \tau$ ) tends toward a constant value, thus removing any potential autocorrelation diversity. In such conditions, the NAP evaluated from (A.4), (A.5) and (A.11) is given by:

$$\operatorname{NAP}_{\operatorname{RC}|_{\beta=0}}(t,\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(u-m)\operatorname{sinc}(u-m+v),$$
(A.12)

where u = t/T and  $v = \tau/T$ . This discrete autocorrelation function can be evaluated by taking the Fourier transform of both sides with respect to v. We have:

$$\mathcal{F}_{v}\{\operatorname{NAP}_{\operatorname{RC}|_{\beta=0}}(t,\tau)\}(\omega)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(u-m)\mathcal{F}_{v}\{\operatorname{sinc}(u-m+v)\}(\omega)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(u-m)[\operatorname{rect}(\omega,2\pi)e^{-j\omega(m-u)}]$$

$$=\operatorname{rect}(\omega,2\pi)e^{j\omega u}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}(u-m)e^{-j\omega m}$$

$$\equiv\operatorname{rect}(\omega,2\pi)e^{j\omega u}S(u,\omega). \quad (A.13)$$

Function  $S(u, \omega)$  corresponds to the discrete-time Fourier transform (DTFT) of sinc(u - m). From analogy with the time shift property<sup>14</sup> and recalling that sinc(t)is an even function, we have:

$$S(u,\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(m) e^{-j\omega m} e^{-j\omega u} = e^{-j\omega u} , \quad (A.14)$$

since  $sinc(m) = 0 \forall m \in \mathbb{Z}^*$ . Substituting back into (A.13), we get:

$$\mathcal{F}_{v}\{\operatorname{NAP}_{\operatorname{RC}|_{\beta=0}}(t,\tau)\}(\omega) = \operatorname{rect}(\omega,2\pi), \qquad (A.15)$$

and therefore:

$$\operatorname{NAP}_{\operatorname{RC}}_{|_{\beta=0}}(t,\tau) = \operatorname{sinc}(\tau/T). \quad (A.16)$$

A source NAP is hence independent of t under ideal cardinal sine pulse shaping. This represents a worst-case scenario where autocorrelation techniques via sampling phase diversity cannot be exploited.

<sup>14</sup>DTFT:  $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$ . Time shift property:  $x[n - n_0] \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega n_0}$ .

#### A.3 Gaussian low-pass filter

The Gaussian low-pass filter has an impulse response of the form:

$$h(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\pi t/\alpha)^2} \,. \tag{A.17}$$

Parameter  $\alpha$  is related to the 3-dB bandwidth *B* of the filter [64] by:

$$\alpha = \frac{\sqrt{\ln(2)T}}{\sqrt{2}BT} \tag{A.18}$$

where *BT* is the bandwidth-symbol time product. The impulse response extends to  $\pm \infty$ , but decays rapidly out of  $t \in \left[\frac{-1}{2B}, \frac{1}{2B}\right]$ . Therefore, calculations of Fig. 4 were performed considering a rectangular window of width 1/B in (A.5). The NAP of a Gaussian pulse-shaped signal (unwindowed) is given by:

$$\mathrm{NAP}_{\mathrm{Gauss}}(t,\tau) = \frac{\pi}{\alpha^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha^2} \left( (t-mT)^2 + (t-mT+\tau)^2 \right)},$$
(A.19)

where no equivalent closed-form solution could be found. However, as  $\alpha \to \infty$ , it is easily shown that NAP<sub>Gauss</sub>( $t, \tau$ )  $\to 0$ , a tendency that can also be observed in Fig. 4.

## Acknowledgement

The authors would like to thank the reviewers and the dedicated personnel of JEC for their useful comments and suggestions.

#### References

- A. Alexiou and M. Haardt, "Smart antenna technologies for future wireless systems: trends and challenges," *Communications Magazine*, *IEEE*, vol. 42, no. 9, pp. 90–97, 2004.
- [2] T. Do-Hong, Wideband direction of arrival estimation and wideband beamforming for smart antenna systems. Shaker Verlag GmbH, 2004.
- [3] F. B. Gross, Smart antennas for wireless communications with MATLAB. McGraw-Hill, 2005.
- [4] L. M. Correia, Mobile Broadband Multimedia Networks: Techniques, Models and Tools for 4G. Academic Press, 2006.
- [5] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 34, no. 3, pp. 276–280, 1986.
- [6] R. Roy and T. Kailath, "Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 7, pp. 984–995, 1989.
- [7] L. De Lathauwer, J. Castaing, and J.-F. Cardoso, "Fourthorder cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2965–2973, 2007.
- [8] P. Comon, "Blind channel identification and extraction of more sources than sensors," *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations VIII*, vol. 3461, pp. 2–13, 1998.
  [9] G. Sun, "MPSK signals modulation classification using
- [9] G. Sun, "MPSK signals modulation classification using sixth-order cumulants," in *Image and Signal Processing* (CISP), 2010 3rd International Congress on, vol. 9. IEEE, 2010, pp. 4404–4407.

- [10] N. Yuen and B. Friedlander, "Doa estimation in multipath: an approach using fourth-order cumulants," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 5, pp. 1253– 1263, 1997.
- [11] J. Krolik and D. Swingler, "Multiple broad-band source location using steered covariance matrices," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 10, pp. 1481–1494, 1989.
- [12] H. Yu, J. Liu, Z. Huang, Y. Zhou, and X. Xu, "A new method for wideband doa estimation," in Wireless Communications, Networking and Mobile Computing, 2007. WiCom 2007. International Conference on. IEEE, 2007, pp. 598–601.
- [13] A. Taleb, "An algorithm for the blind identification of N independent signals with 2 sensors," in *Signal Processing and its Applications, Sixth International, Symposium on.* 2001, vol. 1. IEEE, 2001, pp. 5–8.
- [14] P. Comon and M. Rajih, "Blind identification of underdetermined mixtures based on the characteristic function," Signal Processing, vol. 86, no. 9, pp. 2271–2281, 2006.
- [15] M. Rajih and P. Comon, "Blind identification of underdetermined mixtures based on the characteristic function: influence of the knowledge of source pdf's," in *Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing*, 2005 1st IEEE International Workshop on. IEEE, 2005, pp. 133–136.
  [16] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming
- [16] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-gaussian signals," in *Radar and Signal Processing*, *IEE Proceedings F*, vol. 140, no. 6. IET, 1993, pp. 362–370.
- [17] A. Belouchrani, K. Abed-Meraim, J.-F. Cardoso, and E. Moulines, "A blind source separation technique using second-order statistics," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 434–444, 1997.
- [18] Y. Rong, S. A. Vorobyov, A. B. Gershman, and N. D. Sidiropoulos, "Blind spatial signature estimation via time-varying user power loading and parallel factor analysis," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 5, pp. 1697–1710, 2005.
- [19] A. C. Tang, M. T. Sutherland, and C. J. McKinney, "Validation of SOBI components from high-density EEG," *NeuroImage*, vol. 25, no. 2, pp. 539–553, 2005.
- [20] A. Yeredor, "TV-SOBI: An expansion of SOBI for linearly time-varying mixtures," in Proceedings of The 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Source Separation (ICA2003), 2003.
- [21] —, "Blind separation of gaussian sources via secondorder statistics with asymptotically optimal weighting," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 7, no. 7, pp. 197–200, 2000.
- [22] F. J. Theis and Y. Inouye, "On the use of joint diagonalization in blind signal processing," in *Circuits and Systems*, 2006. ISCAS 2006. Proceedings. 2006 IEEE International Symposium on. IEEE, 2006, pp. 4–pp.
  [23] P. Tichavsky and A. Yeredor, "Fast approximate joint
- [23] P. Tichavsky and A. Yeredor, "Fast approximate joint diagonalization incorporating weight matrices," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 3, pp. 878– 891, 2009.
- [24] D.-Z. Feng, H. Zhang, and W. X. Zheng, "Bi-iterative algorithm for extracting independent components from array signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 8, pp. 3636–3646, 2011.
- vol. 59, no. 8, pp. 3636–3646, 2011.
  [25] X.-F. Xu, D.-Z. Feng, and W. X. Zheng, "An improved method for blind separation of complex-valued signals via joint diagonalization," in *Circuits and Systems (IS-CAS)*, 2011 IEEE International Symposium on. IEEE, 2011, pp. 637–640.
- [26] G. Chabriel and J. Barrere, "A direct algorithm for nonorthogonal approximate joint diagonalization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 60, no. 1, pp. 39–47, 2012.
- [27] A. Yeredor, "Non-orthogonal joint diagonalization in the least-squares sense with application in blind source sep-

aration," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 50, no. 7, pp. 1545–1553, 2002.

- [28] R. Vollgraf and K. Obermayer, "Quadratic optimization for simultaneous matrix diagonalization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 9, pp. 3270–3278, 2006.
- [29] A. Ziehe, P. Laskov, G. Nolte, and K.-R. Müller, "A fast algorithm for joint diagonalization with non-orthogonal transformations and its application to blind source separation," *The Journal of Machine Learning Research*, vol. 5, pp. 777–800, 2004.
- [30] S. Dégerine, "Sur la diagonalisation conjointe approchée par un critère des moindres carrés," in 18-Âlme Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 2001. GRETSI, Groupe dÉtudes du Traitement du Signal et des Images, 2001.
- [31] S. Choi and A. Cichocki, "Blind separation of nonstationary sources in noisy mixtures," *Electronics Letters*, vol. 36, no. 9, pp. 848–849, 2000.
- no. 9, pp. 848–849, 2000.
  [32] —, "Blind separation of nonstationary and temporally correlated sources from noisy mixtures," in *Neural Networks for Signal Processing X*, 2000. Proceedings of the 2000 IEEE Signal Processing Society Workshop, vol. 1. IEEE, 2000, pp. 405–414.
- [33] K. Nordhausen, "On robustifying some second order blind source separation methods for nonstationary time series," *Statistical Papers*, pp. 1–16, 2012.
- [34] M. Tsatsanis and C. Kweon, "Blind source separation of non-stationary sources using second-order statistics," in Signals, Systems & Computers, 1998. Conference Record of the Thirty-Second Asilomar Conference on, vol. 2. IEEE, 1998, pp. 1574–1578.
- [35] D. G. Manolakis, V. K. Ingle, and S. M. Kogon, Statistical and adaptive signal processing: spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering, and array processing. Artech House, 2005, vol. 46.
- [36] E. Gonen and J. M. Mendel, "Applications of cumulants to array processing—Part III: Blind beamforming for coherent signals," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2252–2264, 1997.
- [37] E. Gonen, J. M. Mendel, and M. C. Dogan, "Applications of cumulants to array processing—Part IV: Direction finding in coherent signals case," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 45, no. 9, pp. 2265–2276, 1997.
- [38] A. Swindlehurst, "Synchronization and spatial signature estimation for multiple known co-channel signals," in Signals, Systems and Computers, 1995. 1995 Conference Record of the Twenty-Ninth Asilomar Conference on, vol. 1. IEEE, 1995, pp. 398–402.
- [39] S. Talwar, M. Viberg, and A. Paulraj, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array—Part I: Algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, no. 5, pp. 1184–1197, 1996.
- [40] S. Talwar and A. Paulraj, "Blind separation of synchronous co-channel digital signals using an antenna array—Part II: Performance analysis," *IEEE Transactions* on Signal Processing, vol. 45, no. 3, pp. 706–718, 1997.
- [41] A. J. Paulraj and C. B. Papadias, "Space-time processing for wireless communications," Signal Processing Magazine, IEEE, vol. 14, no. 6, pp. 49–83, 1997.
- [42] P. McLane, "A residual intersymbol interference error bound for truncated-state viterbi detectors," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 26, no. 5, pp. 548–553, 1980.
- [43] B. Porat and B. Friedlander, "Direction finding algorithms based on high-order statistics," *IEEE Transactions* on Signal Processing, vol. 39, no. 9, pp. 2016–2024, 1991.
- [44] R. Attux, R. Suyama, R. Ferrari, C. Junqueira, R. Krummenauer, P. Larzabal, and A. Lopes, "A clustering-based method for DOA estimation in wireless communications," 2007.
- [45] F. Gu, H. Zhang, N. Li, and W. Lu, "Blind separa-

tion of multiple sequences from a single linear mixture using finite alphabet," in *Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, 2010 International Conference on. IEEE, 2010, pp. 1–5.

- [46] J. H. Manton and Y. Hua, "A randomised algorithm for improving source and channel estimates by exploiting the finite alphabet property," in Signals, Systems and Computers, 2000. Conference Record of the Thirty-Fourth Asilomar Conference on, vol. 2. IEEE, 2000, pp. 1582–1585.
- [47] J. D. Terry and D. B. Williams, "Convergence analysis of finite alphabet beamformers for digital cochannel signals," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 6, pp. 929–939, 2003.
- [48] K. I. Diamantaras, "A clustering approach for the blind separation of multiple finite alphabet sequences from a single linear mixture," *Signal processing*, vol. 86, no. 4, pp. 877–891, 2006.
- [49] J. Camparo, R. Frueholz, and A. Dubin, "Demonstration of synchronization between two geosynchronous satellites without ground intervention," DTIC Document, Tech. Rep., 1996.
- [50] S. Glisic, Advanced Wireless Communications: 4G Cognitive and Cooperative Broadband Technology. John Wiley & Sons, 2007.
- [51] T. Heikkinen and A. Hottinen, "Delay-differentiated scheduling in a fading channel," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 7, no. 3, pp. 848–856, 2008.
- [52] C. A. R. Fernandes, A. Kibangou, G. Favier, and J. C. Mota, "Identification of nonlinear mimo radio over fiber uplink channels," in *Telecommunications Symposium*, 2006 *International*. IEEE, 2006, pp. 213–218.
- [53] T. Dubois, M. Crussiere, and M. Hélard, "On the use of time reversal for digital communications with nonimpulsive waveforms," in *Signal Processing and Communication Systems (ICSPCS)*, 2010 4th International Conference on. IEEE, 2010, pp. 1–6.
- [54] T. S. Rappaport, Wireless communications: principles and practice. Prentice Hall, 2002.
- [55] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, 2000.
- [56] W. A. Gardner, A. Napolitano, and L. Paura, "Cyclostationarity: Half a century of research," *Signal processing*, vol. 86, no. 4, pp. 639–697, 2006.
- [57] J.-F. Cardoso *et al.*, "On the performance of orthogonal source separation algorithms," in *Proc. EUSIPCO*, vol. 94. Edinburgh, UK, 1994, pp. 776–779.
- [58] A. Yeredor, "On using exact joint diagonalization for noniterative approximate joint diagonalization," *Signal Processing Letters, IEEE*, vol. 12, no. 9, pp. 645–648, 2005.
- [59] A.-J. Van Der Veen, "Joint diagonalization via subspace fitting techniques," in Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001. Proceedings.(ICASSP'01). 2001 IEEE International Conference on, vol. 5. IEEE, 2001, pp. 2773–2776.
- [60] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, 1974.
- [61] J. Rissanen, "Modeling by shortest data description," *Automatica*, vol. 14, no. 5, pp. 465–471, 1978.
  [62] K.-L. Du and M. N. Swamy, "A class of adaptive cyclosta-
- [62] K.-L. Du and M. N. Swamy, "A class of adaptive cyclostationary beamforming algorithms," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 27, no. 1, pp. 35–63, 2008.
- [63] A. Goldsmith, Wireless Communications. Cambridge University Press, 2005.
- [64] R. Staszewski and P. Balsara, All-Digital Frequency Synthesizer in Deep-Submicron CMOS. Wiley-Interscience, 2006.



Emmanuel Racine was graduated in electromechanical engineering in 2007 from the Université du Québec en Abitibi-(UQAT), Témiscamingue Canada. He afterward received his M.Sc. degree in 2009 at Université Laval, Canada, where he studied the problem of direction of arrival (DOA) estimation using an antenna array within the Laboratoire de Radiocommunications et Traitement du Signal (LRTS). He pursued his Ph.D. studies in the same subject, also at

Université Laval, where he focused on exploiting intrinsic statistical signal properties for beamforming (BF) enhancement or general signal parameter estimation purposes. In particular, he developed algorithms based on higher-order statistics (HOS), nonlinear estimators and cyclostationary properties of communication signals.

Racine has contributed to the scientific community through publication of several journal and conference papers in his domain. He has also contributed to academic programs and university operations by working as teaching assistant and being tutor for a mentorship programme within the Ordre des ingénieurs du Québec (OIQ) in various disciplines.

Racine enjoys challenges and rigorous approaches to practical scientific problems. His main interest of research include signal processing and its applications, general electromagnetism and high frequency power system design.



**Dominic Grenier** received the M.Sc. and Ph.D. degrees in electrical engineering in 1985 and 1989, respectively, from the Université Laval, Quebec City, Canada.

From 1989 to 1990, he was a Postdoctoral Fellow in the radar division of the Defense Research Establishment in Ottawa (DREO), Canada. In 1990, he joined the Department of Electrical Engineering at Université Laval where he is currently a Full Professor since 2000. He was also co-editor for the Canadian

Journal on Electrical and Computer Engineering during 6 years.

He is recognized by the undergraduate students in electrical and computer engineering at Université Laval as the electromagnetism and RF specialist. His excellence in teaching has resulted in "Best Teacher Award" directly from student's associations many times, the SUMMA-teaching award from Engineering Faculty and the Excellence-teaching award from Université Laval in 2010; finally he received a special teaching recognition award in 2012 from "Ordre des ingénieurs du Québec" (OIQ). He obtained in 2009 one special fellowship for teaching from the Quebec Minister for education.

His research interests include inverse synthetic aperture radar imaging (ISAR), signal array processing for high resolution direction of arrivals, information fusion for identification, and reflectometry probes design and signal processing. He has many collaborations with Development and Research for Defence Canada (DRDC-V) center, and with industries under grants or contracts.

Prof. Grenier has 35 publications in refereed journals and 75 more in conference proceedings. In addition, more than 40 graduate students completed their thesis under his direction since 1992.

Prof. Grenier is a registered professional engineer in the Province of Quebec (OIQ), Canada.