

QUENTIN RAJON

# CALCUL DE CAPACITÉS

Thèse présentée  
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval  
dans le cadre du programme de doctorat en mathématiques  
pour l'obtention du grade de Philosophiæ doctor (Ph.D.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE  
UNIVERSITÉ LAVAL  
QUÉBEC

2010

©Quentin Rajon, 2010

# Résumé

La capacité d'un ensemble est une notion qui, bien que très fortement motivée par la physique, intervient naturellement dans de très nombreuses branches de l'analyse mathématique, comme l'analyse complexe, la théorie du potentiel et des équations aux dérivées partielles ou dans l'approximation rationnelle. Cette thèse se concentre sur les capacités définies par des intégrales à noyaux. Le premier chapitre se veut un bref rappel des concepts fondamentaux en théorie du potentiel ainsi que des outils nécessaires pour la suite de cette thèse. Les deuxième et troisième chapitres de la thèse énoncent les principes des algorithmes de calcul de la capacité dans les cas généraux et pondérés respectivement et contiennent également des preuves rigoureuses de convergence desdits algorithmes. Le quatrième et dernier chapitre de la thèse énonce quelques versions modifiées des méthodes de calculs de la capacité et contient de nombreux exemples illustrés par des tableaux et des graphiques. On y remarque également que les moyens mis en oeuvre pour approximer la capacité permettent d'estimer le support et le potentiel à l'équilibre.

Cette thèse est le résultat d'un travail réalisé conjointement avec les professeurs T. Ransford et J. Rostand et qui est publié dans [RRR1] et [RRR2].

# Avant-propos

J'aimerais avant toute chose remercier le professeur Thomas Ransford pour m'avoir soutenu et encadré tout au long de ma thèse. J'aimerais également remercier le professeur Jérémie Rostand pour m'avoir encadré et conseillé, notamment pour la partie informatique de la thèse. Le professeur Robert Guénette m'a également beaucoup aidé à résoudre certains problèmes rencontrés lors des calculs informatiques et je tiens à le remercier pour son aide. Je n'aurais jamais réussi à profiter pleinement de l'équipement informatique sans avoir eu l'aide de Michel Lapointe que je tiens également à remercier sincèrement. J'aimerais remercier tout le Département de mathématiques et de statistique de l'Université Laval ainsi que l'Institut des sciences mathématiques (ISM) pour leur soutien et leur générosité. Merci notamment au directeur du Département Roger Pierre ainsi qu'à Sylvie Drolet. Enfin j'aimerais souligner la très grande générosité d'Hydro-Québec à mon égard à travers l'attribution d'une bourse de 3<sup>e</sup> cycle.

# Table des matières

Résumé	ii
Avant-propos	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vi
Table des figures	vii
Introduction	1
<b>1 Résultats préliminaires en théorie du potentiel</b>	<b>3</b>
1.1 Noyaux, potentiels et énergie . . . . .	3
1.2 Mesures d'équilibre et capacité . . . . .	6
<b>2 Algorithmes de calcul</b>	<b>10</b>
2.1 Programmation quadratique . . . . .	11
2.1.1 Borne supérieure pour la capacité . . . . .	12
2.1.2 Borne inférieure pour la capacité . . . . .	14
2.1.3 Mesures uniformément parfaites . . . . .	17
<b>3 Capacité pondérée</b>	<b>19</b>
3.1 Position du problème et introduction à la capacité pondérée . . . . .	19
3.2 Borne supérieure pour la capacité pondérée . . . . .	20
3.3 Borne inférieure pour la capacité pondérée . . . . .	22
<b>4 Algorithmes de calcul et simulations numériques</b>	<b>28</b>
4.1 Algorithmes et potentiels discrets . . . . .	28
4.1.1 Algorithmes adaptatifs . . . . .	28
4.1.2 Potentiels discrets . . . . .	30
4.2 Simulations numériques . . . . .	32
4.2.1 Capacité logarithmique . . . . .	33
4.2.2 Capacité hyperbolique . . . . .	35



4.2.3	Capacité Newtonienne et de Riesz . . . . .	37
4.2.4	Capacité pondérée . . . . .	39
4.2.5	Le cas de la dimension 2 . . . . .	42
4.2.6	Algorithmes modifiés . . . . .	44
	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Liste des tableaux

4.1	$E = [-1, 1]$ avec $\kappa(x, y) = \log 1/ x - y $ . . . . .	34
4.2	$E = [-2, -1] \cup [1, 2]$ avec $\kappa(x, y) = \log 1/ x - y $ . . . . .	35
4.3	$E = [-1/4, 1/4]$ et $\kappa(x, y) = \log \left  \frac{1-x\bar{y}}{x-y} \right $ . . . . .	36
4.4	$E = [-1/4, 0] \cup [i/4, (1+i)/4]$ et $\kappa(x, y) = \log \left  \frac{1-x\bar{y}}{x-y} \right $ . . . . .	37
4.5	$E = [0, 1]$ et $\kappa(x, y) =  x - y ^{-1/2}$ . . . . .	38
4.6	$\Sigma = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $w(x) = e^{- x }$ . . . . .	40
4.7	$\Sigma = [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$ avec $w(x) = 1 - x^2$ . . . . .	40
4.8	$\Sigma = [-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ avec $w(x) = 1 - x^2$ . . . . .	41
4.9	$\Sigma = [0, 1]$ avec $w(x) = e^{-x}$ . . . . .	42
4.10	$\Sigma = [0, 3]$ avec $w(x) = e^{-x}$ . . . . .	42
4.11	$\Sigma = [0, 1/4]^2$ avec $w = 1$ et $\kappa(x, y) = \log 1/ x - y $ . . . . .	43
4.12	$\Sigma = [0, 1/4]^2$ avec $w = \exp(-\max\{x, y\})$ et $\kappa(x, y) = \log 1/ x - y $ . . .	44
4.13	$\Sigma = [0, 3]$ avec $w(x) = e^{-x}$ , version adaptative . . . . .	46
4.14	$\Sigma = [0, 1/4]^2$ avec $w = 1$ , version adaptative . . . . .	47
4.15	$\Sigma = [0, 1/4]^2$ avec $w(x, y) = e^{-\max\{x, y\}}$ , version adaptative . . . . .	47
4.16	$\Sigma = [-4/5, 4/5]$ avec $w(x) = 1 - x^2$ , version adaptative . . . . .	48
4.17	$\Sigma = [-4/5, 4/5]$ avec $w(x) = 1 - x^2$ , estimation du support . . . . .	49
4.18	$\Sigma = [0, 3]$ avec $w(x) = e^{-x}$ , version du minorant . . . . .	50
4.19	$\Sigma = [-4/5, 4/5]$ avec $w(x) = 1 - x^2$ , version du minorant . . . . .	50

# Table des figures

4.1	Graphique de $\text{cap}_K([0, 1])$ pour $\alpha \in (0, 1)$ . . . . .	39
4.2	Graphique représentatifs des «potentiels discrets» sur $[0, 3]$ . . . . .	45
4.3	Charge de $\mu_{2^6}$ sur $[0, 3]$ . . . . .	45
4.4	Graphiques représentatifs des «potentiels discrets» sur $[0, 4/5]$ . . . . .	48

# Introduction

La théorie du potentiel est née avec l'étude de la gravitation par Newton au XVII<sup>e</sup> siècle, qui s'intéressait principalement aux forces mutuelles engendrées par deux points matériels ou par deux petites masses. Ces forces sont proportionnelles au produit des masses et inversement proportionnelles au carré de la distance qui les sépare. Les travaux majeurs du XVIII<sup>e</sup> siècle sur le sujet de l'attraction engendrée par des masses sont sans aucun doute dus à Lagrange, Legendre et Laplace, ce dernier ayant compris que la gravitation pouvait être dérivée d'un «potentiel scalaire», fonction décrivant l'action des masses, et donnera son nom à l'équation fondamentale de la théorie. Il faut cependant attendre le XIX<sup>e</sup> siècle et Green pour voir apparaître pour la première fois la terminologie de «fonction de potentiel», ce que Gauss appellera lui-même tout simplement un «potentiel». Aujourd'hui, la théorie a évolué et la théorie du potentiel s'est considérablement généralisée, que ce soit du point de vue de ses applications ou tout simplement d'un point de vue théorique. Depuis le milieu du XX<sup>e</sup> siècle, la théorie du potentiel est axiomatisée en ce sens que les potentiels sont des fonctions définies par des concepts beaucoup plus abstraits et permettent de résoudre une gamme d'équations différentielles plus vastes que la seule équation de Laplace, ce que l'on doit en grande partie à Brelot. Cependant, ce dernier s'est uniquement intéressé au cas des équations elliptiques et il faut attendre Bauer dans les années 60 pour étendre la théorie au cas parabolique. S'il devait y avoir une conclusion à cette histoire, elle serait probablement donnée par l'approche probabiliste de la théorie du potentiel, dont les héros sont certainement Levy, Doob, Hunt et peut-être même Kakutani, celle-ci s'étant révélée très fructueuse bien que peut-être un peu difficile à aborder.

La théorie du potentiel n'est cependant pas uniquement un outil que l'on doit appliquer à la physique. Elle est une discipline en soi et est très fortement connectée à plusieurs domaines des mathématiques, l'analyse complexe évidemment, mais également la théorie de l'approximation pour les plus importants. Le concept de capacité y est très présent et si l'histoire débute une nouvelle fois avec la capacité newtonienne, elle est loin de s'y arrêter. Cependant, nous allons seulement considérer dans cette thèse



les capacités définies par des noyaux, c'est-à-dire définies à partir d'une quantité de la forme  $\iint H(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$  où  $H$  vérifiera quelques propriétés très générales.

En théorie de l'approximation, il est connu que les points de Fekete d'un compact  $K$ , ces points minimisant une certaine moyenne géométrique de distance, sont dans un certain sens les meilleurs points pour l'interpolation polynômiale sur  $K$ . Une interprétation, peut-être un peu erronée, de ces points serait de les voir comme des objets ponctuels identiquement chargés et s'étant déplacés sur  $K$  jusqu'à atteindre un état d'équilibre électrique. Il est peut-être un peu moins connu qu'ils permettent également de donner des informations sur la norme  $L_p$  des polynômes moniques sur un compact  $K$ . En fait, c'est la capacité de  $K$  qui y joue véritablement un rôle. D'une même façon, la capacité d'un compact connexe  $K$  du disque unité  $\mathbb{D}$  est, comme on le verra, très clairement reliée au module de  $\mathbb{D} \setminus K$ . Finalement, les ensembles de capacité nulle, sont dans un sens, ceux sur lesquels les potentiels peuvent prendre des valeurs infinies. Il semble donc que la capacité soit une façon de «mesurer» les ensembles compacts particulièrement intéressante du point de vue de l'analyse complexe et de la théorie du potentiel. Il est donc tout à fait naturel de vouloir l'évaluer ou l'approximer, ce qui s'avère être une tâche ardue dans la très grande majorité des cas. Les points de Leja, que l'on peut voir comme une approximation des points de Fekete cités plus haut, sont difficiles à calculer en général malgré le fait qu'ils soient définis de façon récursive. Il semble également que l'algorithme qui permet de les calculer ne soit pas numériquement stable. D'un point de vue théorique, la méthode semble également être limitée dans les informations qu'elle donne, ne permettant pas, par exemple, de donner de bornes et se «contentant» de converger théoriquement vers la valeur souhaitée.

Le but de cette thèse est donc de créer des algorithmes de calcul de la capacité d'un ensemble compact  $K$  pour une définition la plus générale possible de la capacité. On aimerait principalement être capable de donner des bornes rigoureuses sur  $\text{cap}(K)$  et qui convergent vers ladite valeur. On voudrait également avoir un estimé sur la vitesse de convergence des suites mises en jeu. Déterminer le potentiel d'équilibre et la répartition des charges à l'équilibre sont également des problèmes dignes d'intérêt, mais sur lesquels nous n'avons pas choisi de concentrer nos efforts. Pourtant, on verra que les méthodes développées dans cette thèse répondent parfaitement non seulement aux premières questions posées, et ce pour une très vaste gamme de capacités, mais qu'elles permettent également d'obtenir beaucoup d'informations sur la charge à l'équilibre ainsi que sur les potentiels d'équilibre, même si ce n'était pas leur vocation.

# Chapitre 1

## Résultats préliminaires en théorie du potentiel

### 1.1 Noyaux, potentiels et énergie

Ce chapitre se veut un rappel des notions de théorie du potentiel ainsi que des notions utiles dans la suite de la thèse.

Pour nous, un potentiel sur un espace métrique  $(X, \rho)$  sera une application définie sur  $X$  par intégrale à partir d'un certain noyau  $\kappa(x, y)$ . On rencontrera dans cette thèse plusieurs types de noyaux, dépendant tous d'une métrique  $\rho$ .

La première façon de rencontrer de tels noyaux est de trouver les solutions fondamentales de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0$$

dans  $X = \mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne. Si on ne considère que les solutions radiales de cette équation, c'est à dire les solutions invariantes par rotation autour de l'origine, on trouve les solutions  $\varphi(x) = \varphi(r) = \log 1/r$  pour  $n = 2$  et  $\varphi(x) = \varphi(r) = r^{2-n}$  si  $n > 2$  où  $r = \|x\|$ . Les noyaux pour  $\mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne seront alors

$$\kappa(x, y) := \begin{cases} \|x - y\|^{2-n} & \text{si } n > 2 \\ \log \frac{1}{\|x - y\|} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Nous ne nous restreindrons pas à ces seuls noyaux dans cette thèse mais il serait bon de les garder en tête puisque ce sont ceux les plus courants. Nous considérerons



plutôt qu'un noyau sur un espace métrique  $(X, \rho)$  est du type  $\kappa(x, y) = H(\rho(x, y))$  où  $H : (0, +\infty) \rightarrow [0, \infty)$  est une application semicontinue inférieurement et décroissante. On définit alors  $H$  au point 0 par  $H(0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$  avec éventuellement  $H(0) = +\infty$ . Par extension, on parlera de noyau aussi bien pour parler de  $H$  que pour  $\kappa$  lorsque le contexte sera clair.

Dans le deuxième chapitre de la thèse on considérera des noyaux «pondérés» par une certaine fonction  $w$  semicontinue supérieurement. Pour des raisons de simplicité nous ne considérerons que le noyau logarithmique sur  $\mathbb{C}$  c'est à dire que  $\kappa$  sera de la forme  $\kappa(x, y) := \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)}$ .

Par convention tout ce qui aura trait à un noyau général sera indexé par  $H$  et tout ce qui aura trait au cas pondéré sera indexé par  $w$ . Sauf mention contraire, lorsqu'aucun noyau ne sera précisé, il sera implicite que l'on travaillera avec le noyau logarithmique  $\kappa(x, y) := \log \frac{1}{|x-y|}$ .

**Définition 1.1.1.** Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique et  $H$  un noyau. Le *potentiel*  $U_\sigma$  de la mesure de probabilité  $\sigma$  est défini par

$$U_\sigma(x) := \int_X H(\rho(x, y)) d\sigma(y).$$

On définit également l'*énergie*  $I_H(\sigma)$  de la mesure  $\sigma$  comme étant

$$I_H(\sigma) := \iint_{X^2} H(\rho(x, y)) d\sigma(x) d\sigma(y) = \int_X U_\sigma(x) d\sigma(x).$$

Enfin, l'*énergie mutuelle* des mesures  $\sigma, \mu$  sur  $X$  est définie par

$$I_H(\sigma, \mu) := \iint_{X^2} H(\rho(x, y)) d\sigma(x) d\mu(y).$$

Si  $w$  est un poids et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{C}$ , la  $w$ -*énergie* de  $\mu$  est définie par

$$I_w(\mu) := \iint \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu(z) d\mu(t) = I(\mu) + 2 \int Q d\mu$$

où  $Q := \log 1/w$ .

Pour le reste de la thèse, si  $F$  est un fermé de  $X$ , alors  $\mathcal{P}(F)$  désignera l'ensemble des mesures de probabilité sur  $F$  et  $\mathcal{P}_e^H(F)$  désignera l'ensemble des mesures de probabilité sur  $F$  de  $H$ -énergie finie. On utilisera la même notation pour  $I_H$  en tant que forme bilinéaire et  $I_H$  en tant que forme quadratique lorsque le contexte sera suffisamment clair pour le permettre.

On remarque que, quel que soit le noyau, pondéré ou non,  $I_H$  est toujours symétrique d'après le type de noyau que l'on considère. On a donc la proposition suivante.

**Proposition 1.1.2.** Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique et soit  $F$  un ensemble fermé de  $X$ . Soit  $H$  un noyau (pondéré ou non) et soit  $I_H$  l'énergie associée. Alors  $I_H$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathcal{P}_e^H(F)$ .

*Démonstration.* La preuve réside dans la remarque précédente et le Théorème de Fubini.  $\square$

**Définition 1.1.3.** Sous les mêmes hypothèses on va dire que  $H$  est *défini positif* si la forme bilinéaire  $I_H : \mathcal{P}_e^H(F)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$I_H(\sigma, \mu) := \int_X U_\sigma(x) d\mu(y) = \iint_{X^2} H(\rho(x, y)) d\sigma(x) d\mu(y)$$

est définie positive.

Ainsi, si  $H$  est défini positif, alors  $\sqrt{I_H}$  est une norme sur  $\mathcal{P}_e^H(F)$  d'après le Théorème de Cauchy–Schwarz.

**Exemples :**

1. Considérons  $X = \mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne et  $H(t) = t^{-p}$ . Alors  $\kappa(x, y) = \|x - y\|^{-p}$  est un noyau défini positif pour  $0 < p < n - 2$  [Lan, p.79]. Ce noyau est appelé noyau de Riesz et porte le nom de noyau de Newton si  $p=n-2$ .
2. Considérons  $X = \mathbb{R}^2$  également muni de la métrique euclidienne. Alors  $\kappa(x, y) = \log(1/|x - y|)$  n'est pas un noyau défini positif. Il suffit en effet de considérer la mesure de Lebesgue  $d\theta$  sur le cercle unité  $\mathbb{T}$ . On a  $I_H(d\theta) = 0$  alors que  $d\theta \neq 0$ .
3. En revanche, si on se restreint à  $X = \mathbb{D}$ , le noyau logarithmique de l'exemple précédent est bien défini positif [Lan, p. 79].
4. Finalement, si  $X = \mathbb{D}$ ,  $H = -\log$  et  $\rho(z, w) := \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right|$ , alors  $\kappa(z, w) = \log \left| \frac{1-z\bar{w}}{z-w} \right|$  est également un noyau défini positif sur  $X$  [SafTot, p.129].

Nous travaillerons beaucoup avec le noyau logarithmique dans cette thèse et il est donc normal de savoir quand celui-ci est défini positif. C'est l'objet du théorème suivant.

**Théorème 1.1.4.** [Lan, p.80] *Le noyau logarithmique est défini positif sur l'espace vectoriel des mesures signées de masse totale 0.*

*Il est également défini positif sur l'espace vectoriel des mesures supportées dans  $\mathbb{D}$ .*

Cette thèse s'intéresse à plusieurs notions de convergence. Nous allons créer des suites de mesures sur des compacts  $K$  dont les énergies vont converger vers l'énergie minimale



de  $K$ . Il est naturel de comparer ce type de convergence avec ceux que l'on connaît déjà. Notamment, un des types de convergence naturel à étudier lorsqu'il s'agit de suite de mesures de probabilité est sans aucun doute la convergence faible étoile. Nous aurons donc besoin des résultats suivants.

**Proposition 1.1.5.** [Car, p.15] *Les noyaux que nous considérons ont les propriétés de semicontinuité inférieure suivantes :*

1.  $U_\mu(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} U_\mu(x)$ .
2. Si  $\mu_n \rightarrow \mu$  faiblement\*, alors  
 $U_\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} U_{\mu_n}(x)$  et  
 $I(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(\mu_n)$ .

On peut généraliser la dernière assertion de cette proposition au cas pondéré. Pour cela nous avons besoin du théorème préliminaire suivant.

**Théorème 1.1.6.** [SafTot, p.4] *Soit  $\mu_n$  une suite de mesures de probabilité toutes à support dans un compact  $K \subset \mathbb{C}$  et supposons que  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ . Soit  $Q$  une fonction semicontinue inférieurement sur  $K$ . Alors*

$$\int Q d\mu \leq \liminf \int Q d\mu_n.$$

La dernière assertion du théorème 1.1.5 s'étend au cas pondéré de la façon suivante.

**Proposition 1.1.7.** *Soient  $\mu$  et  $\mu_n$  des mesures supportées par un même compact  $K \subset \mathbb{C}$  et soit  $w$  une fonction de poids sur  $K$ . Supposons que  $\mu_n$  converge faiblement\* vers  $\mu$ . Alors*

$$I_w(\mu) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I_w(\mu_n).$$

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le Théorème 1.1.6, la dernière assertion de la proposition 1.1.5 et d'utiliser la propriété de sous-additivité de la liminf.  $\square$

## 1.2 Mesures d'équilibre et capacité

Nous voulons étudier la convergence d'une suite de mesures supportées par un même compact  $K$  et dont les énergies convergent vers l'énergie minimale de  $K$ . La raison principale pour laquelle cette question nous intéresse tant réside dans les chapitres 2 et 3. Nous y construirons en effet de telles suites pour une vaste gamme de compacts  $K$ . A priori ce type de convergence semble être très faible mais nous allons voir qu'il est au moins aussi fort que la convergence faible\*. C'est l'objet du théorème suivant.

**Lemme 1.2.1.** Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique, soit  $K$  un compact de  $X$  et soit  $H$  un noyau sur  $X$ . Posons

$$I_H(K) := \inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I_H(\mu)$$

et supposons qu'il existe une unique mesure  $\nu_K \in \mathcal{P}(K)$  telle que  $I_H(\nu_K) = I_H(K)$ .

Soit  $\mu_n$  une suite de mesures de probabilité positives telles que  $I_H(\mu_n) \rightarrow I_H(\nu_K)$ . Alors

$$\mu_n \xrightarrow{w^*} \nu_K.$$

*Démonstration.* Supposons le contraire. Puisque  $\mu_n$  est bornée, par le Théorème de Banach–Alaoglu on peut en extraire une sous suite  $\mu_{n_k}$  convergeant faiblement\* vers une certaine mesure de probabilité, disons  $\sigma$ , avec  $\sigma \neq \nu_K$ . Par le lemme 1.1.5, et par unicité de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_H(\mu_n)$  on en déduit que  $I_H(\nu_K) = \lim_{k \rightarrow +\infty} I_H(\mu_{n_k}) \geq I_H(\sigma)$ . Par définition et unicité de  $\nu_K$ , on doit alors avoir  $\sigma = \nu_K$ , ce qui est une contradiction. Ainsi  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \nu_K$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

**Définition 1.2.2.** La mesure  $\nu_K$  est appelée *mesure d'équilibre* ou *mesure extrémale* pour  $K$ .

Il est facile de se convaincre de l'existence d'une telle mesure en utilisant les mêmes idées que dans la preuve du lemme 1.2.1. En effet, choisissons une suite  $\mu_n$  telle que  $I_H(\mu_n) \rightarrow I_H(K)$ . Une telle suite existe par définition de  $I_H(K)$ . De plus par le Théorème de Banach–Alaoglu, on peut en extraire une sous suite convergente, disons  $\mu_{n_k}$  et notons  $\nu$  sa limite. Par la troisième assertion de la proposition 1.1.5 on obtient  $I_H(\nu) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} I_H(\mu_{n_k}) = I_H(K)$ . Or, par définition de  $I_H(K)$  on doit avoir  $I_H(\nu) \geq I_H(K)$ , ce qui termine la preuve. Il est à noter que les mêmes idées fonctionnent dans le cas pondéré.

**Définition 1.2.3.** Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique et  $H$  un noyau sur  $X$ . Soit  $K$  un compact de  $X$ . On définit sa *H-capacité*, notée  $\text{cap}_H(K)$ , par

$$\text{cap}_H(K) := 1/I_H(K) = \left( \inf_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I_H(\mu) \right)^{-1}.$$

**Remarque :** On dira qu'une propriété est vraie quasi-partout (q.p.) sur  $X$  si elle est vraie partout sauf peut être sur un ensemble borélien de capacité nulle.

**Théorème 1.2.4** (Frostman). Soit  $E$  un compact de  $X$  tel que  $\text{cap}_H(E) > 0$ . Soit  $\nu$  la mesure d'équilibre de  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} U_\nu(x) &\geq 1/\text{cap}_H(E) && \text{q.p. sur } E, \\ U_\nu(x) &\leq 1/\text{cap}_H(E) && \text{sur } \text{supp } \nu. \end{aligned}$$

En particulier, l'égalité suivante est vraie quasi-partout sur  $\text{supp } \nu$  :

$$U_\nu = 1/\text{cap}_H(E).$$

Pour une démonstration de ce résultat dans le cas logarithmique, on réfère le lecteur à [Ran, p.59]. La démonstration dans le cas général se traite de la même façon. Il existe une version de ce théorème adaptée au cas pondéré. Avant de le citer nous devons cependant définir la notion de poids admissible.

**Définition 1.2.5.** Une fonction  $\omega$  est un poids admissible pour un ensemble fermé  $\Sigma$  si

- $\omega$  est semicontinue supérieurement,
- l'ensemble  $\{z \in \Sigma, \omega(z) > 0\}$  est de capacité logarithmique positive,
- $|z|\omega(z) \rightarrow 0$  lorsque  $z \rightarrow \infty$  dans le cas où  $\Sigma$  est non borné.

**Théorème 1.2.6** (Mhaskar–Saff, [SafTot] p.27). *Soit  $w$  un poids admissible sur un ensemble fermé  $\Sigma$  et soit*

$$I_w(\Sigma) := \left\{ \inf_{\mu} I_w(\mu), \mu \in \mathcal{P}(\Sigma) \right\}.$$

Alors les propriétés suivantes sont vérifiées.

1.  $I_w(\Sigma) < \infty$ .
2. Il existe une mesure  $\mu_w \in \mathcal{P}(\Sigma)$ , telle que  $I_w(\Sigma) = I_w(\mu_w)$ .
3.  $-\infty < I(\mu_w) < \infty$  où  $I$  est l'énergie logarithmique.
4.  $S_w := \text{supp } \mu_w$  est un ensemble compact.
5. Si l'on pose  $F_w := I_w(\Sigma) - \int Q d\mu_w$ , alors

$$U_{\mu_w}(z) + Q(z) \geq F_w$$

est vérifiée quasi-partout sur  $\Sigma$ .

6. L'inégalité

$$U_{\mu_w}(z) + Q(z) \leq F_w$$

est vérifiée pour tous les  $z \in S_w$ .

7. En particulier on a l'égalité suivante quasi-partout sur  $S_w$

$$U_{\mu_w}(z) + Q(z) = F_w.$$

La mesure  $\mu_w$  est appelée *mesure d'équilibre* ou *mesure extrême* associée à  $w$ . La constante  $F_w$  est la *constante de Robin modifiée* pour  $w$ .



Ce théorème est évidemment un équivalent du Théorème de Frostman dans le cas pondéré. Pour le cas des noyaux de Newton, logarithmique ou hyperbolique, on peut améliorer un peu le Théorème de Frostman pour avoir l'inégalité inférieure non pas sur  $\text{supp } \nu$  mais bien sur  $E$  tout entier. On ne peut malheureusement pas espérer un tel résultat dans le cas pondéré. Il nous apparaîtra que le fait d'avoir égalité seulement sur le support d'équilibre dans le Théorème de Frostman puisse entraîner certains problèmes et avoir de fâcheuses conséquences. On verra cependant qu'il existe des approches au calcul de la capacité qui ne nécessitent aucune connaissance *a priori* sur le support d'équilibre.

**Proposition 1.2.7.** *Soit  $(H_n)$  et  $H$  des noyaux tels que  $H_n \uparrow H$ . Soient  $E_n$  et  $E$  des compacts de  $X$  tels que  $E_n \downarrow E$ . Alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{H_n}(E_n) = \text{cap}_H(E).$$

*Démonstration.* Il est clair que  $\text{cap}_{H_n}(E_n)$  est décroissante et satisfait  $\text{cap}_{H_n}(E_n) \geq \text{cap}_H(E)$  pour tout  $n$ . Il suffit donc de montrer que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{H_n}(E_n) \leq \text{cap}_H(E)$ .

Soit  $n$  fixé et soit  $\nu_n$  la  $H_n$ -mesure d'équilibre du compact  $E_n$ . Alors on a que  $\nu_n$  est une mesure de probabilité sur  $E_n$  satisfaisant  $I_{H_n}(\nu_n) = 1/\text{cap}_{H_n}(E_n)$  d'après le Théorème 1.2.4. Par le Théorème de Banach-Alaoglu on sait qu'il existe une sous suite  $\nu_{n_j}$  de  $\nu_n$  convergeant faiblement\* vers une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $E$ . Pour chaque  $m$  on a donc, par la proposition 1.1.5

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{H_n}(\nu_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} I_{H_m}(\nu_n) \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} I_{H_m}(\nu_{n_j}) \geq I_{H_m}(\mu).$$

En laissant  $m$  tendre vers  $\infty$  on obtient  $\limsup_{n \rightarrow \infty} I_{H_n}(\nu_n) \geq I_H(\mu)$ . De plus,  $I_H(\mu) \geq 1/\text{cap}_H(E)$  par définition de la capacité. On a donc bien  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{H_n}(E_n) \leq \text{cap}_H(E)$  comme annoncé.  $\square$

Il existe une version équivalente de ce théorème dans le cas pondéré. Elle est énoncée ci-dessous.

**Théorème 1.2.8.** *[SafTot, p.64] Soient  $w, w_1, \dots$  des poids tels que  $w_n \downarrow w$  et soit  $E$  un compact. Alors  $\text{cap}_{w_n}(E) \rightarrow \text{cap}_w(E)$ .*



# Chapitre 2

## Algorithmes de calcul

On trouve dans l'article [RanRos] plusieurs méthodes pour calculer la capacité d'un ensemble compact du plan complexe. Les auteurs se focalisent uniquement sur le cas du potentiel logarithmique et obtiennent des bornes rigoureuses ainsi qu'un estimé pour la vitesse de convergence des suites impliquées. La méthode principale est basée sur le principe du minimax et fonctionne pour des ensembles ayant la propriété de Hölder. Malheureusement les techniques mises en jeu utilisent implicitement le fait que les potentiels vérifient un principe du maximum fort et cette condition est nécessaire à la convergence des algorithmes. Cette technique de calcul serait tout à fait généralisable aux poids qui nous intéressent à la seule condition qu'ils vérifient bien un principe du maximum fort. Il serait même possible d'appliquer ces méthodes à des poids vérifiant un principe du maximum faible, mais il faudrait alors connaître le support de la mesure d'équilibre, ce qui revient dans un certain sens, à connaître une partie de la réponse au problème posé. C'est pour cette raison que le Théorème de Frostman est, dans le cas général, un peu moins fort que dans les cas Newtonien et hyperbolique et c'est également pour cette raison que nous avons décidé de ne pas présenter cette méthode dans la thèse. Dans le même article, T. Ransford et J. Rostand proposent cependant une méthode alternative pour le calcul de la capacité, sans pour autant donner d'estimé sur la vitesse de convergence, le tout étant surtout laissé à l'état d'ébauche et ne fournissant qu'une borne inférieure pour la capacité logarithmique. Dans ce chapitre, nous allons reprendre la méthode proposée en lui donnant un sens rigoureux, notamment en estimant sa vitesse de convergence et nous allons montrer qu'elle s'applique à tous les noyaux que nous considérons, qu'ils vérifient ou non un principe du maximum et ce, même sans requérir d'information sur le support de la mesure d'équilibre. Nous allons également proposer une toute nouvelle méthode du calcul de la capacité, basée sensiblement sur le même principe et permettant de donner des bornes supérieures pour la capacité. On verra une nouvelle fois qu'il n'y aura nul besoin de connaître le support de la mesure

d'équilibre ou quelconque information sur le compact considéré. En fait, il sera même formidable de remarquer que le théorème ne requiert pratiquement aucune hypothèse.

## 2.1 Programmation quadratique

Soit  $(X, \rho)$  un espace métrique,  $H$  un noyau et  $E$  un compact de  $X$ . Notre but est de trouver un moyen d'approximer supérieurement et inférieurement la capacité de  $E$ . Soient  $\mu_i$  des mesures de probabilité et soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$ , où  $\Delta_n := \{\lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$ . Alors la mesure  $\mu$  définie par

$$\mu := \sum_i \lambda_i \mu_i$$

est une mesure de probabilité sur  $E$ . On a notamment

$$\inf_{\tau \in P(E)} I_H(\tau) \leq I_H(\mu).$$

Avant d'aller plus loin il est important de remarquer que la forme quadratique  $I_H$  évaluée en  $\mu$  a une écriture matricielle simple. En effet,

$$\begin{aligned} I_H(\mu) &:= \int_X \int_X \kappa(x, y) d\left(\sum_i \lambda_i \mu_i\right)(x) d\left(\sum_j \lambda_j \mu_j\right)(y) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j \int_X \kappa(x, y) d\mu_i(x) d\mu_j(y) \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j I_H(\mu_i, \mu_j). \end{aligned}$$

que l'on peut récrire

$$I_H(\mu) = \lambda^t B \lambda$$

où  $B$  est la matrice symétrique réelle définie par  $B_{i,j} := I_H(\mu_i, \mu_j)$ .

Posons alors  $Q(B) := \inf_{h \in \Delta_n} h^t B h$ . On vient de montrer grâce aux remarques précédentes que

$$1/\text{cap}_H(E) \leq Q(B).$$

Intuitivement, on aimerait dire que  $Q(B)$  se rapproche de l'énergie d'équilibre si l'on découpe  $E$  par des boréliens de plus en plus fins. Nous verrons un peu plus loin que c'est effectivement le cas si on impose quelques conditions relativement faibles sur  $\mu$ . Notre prochaine étape sera de trouver une borne inférieure pour  $1/\text{cap}_H(E)$  dans le même ordre d'idée que celle que l'on vient de calculer.

Il est clair que, pour toute paire  $(x, y) \in E^2$ , on a  $H(\rho(x, y)) \geq H(\text{diam}(E))$  et donc que  $\text{cap}_H(E) \leq 1/H(\text{diam}(E))$ . Cette estimation est relativement grossière, mais c'est pourtant le point de départ de la construction d'une suite décroissant vers la capacité.

### 2.1.1 Borne supérieure pour la capacité

Le théorème suivant est une généralisation de la remarque précédente.

**Théorème 2.1.1.** *Soit  $H$  un noyau et  $E$  un compact de  $X$ . Soient  $F_1, \dots, F_n$  des compacts de  $X$  tels que  $E \subset \bigcup_1^n F_j$ . Définissons la matrice  $A$  par*

$$A_{ij} := H(\text{diam}(F_i \cup F_j)).$$

Alors  $\text{cap}_H(E) \leq 1/Q(A)$ .

On remarquera au passage que, si  $F_1, \dots, F_n$  et  $\widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_m$  sont deux recouvrements de  $E$  et que si tout  $\widetilde{F}_j$  est contenu dans un  $F_i$ , alors les matrices  $A$  et  $\widetilde{A}$  associées à ces recouvrements vérifient  $Q(A) \leq Q(\widetilde{A})$ .

*Démonstration.* Soit  $G_1, \dots, G_n$  une partition de  $E$  par des boréliens telle que  $G_j \subset F_j$  pour tout  $j$ . Soit  $\nu$  la mesure d'équilibre pour  $E$  et posons  $\lambda_j := \nu(G_j)$ . On a clairement  $\lambda_j \geq 0$  pour tout  $j$  et  $\sum_1^n \lambda_j = 1$ . De plus

$$\begin{aligned} Q(A) &\leq \sum_{i,j} A_{i,j} \lambda_i \lambda_j = \sum_{i,j} \int_{G_i} \int_{G_j} H(\text{diam}(F_i \cup F_j)) d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \sum_{i,j} \int_{G_i} \int_{G_j} H(\rho(x, y)) d\nu(x) d\nu(y) \\ &= I_H(\nu), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat en inversant chacun des termes de l'inégalité.  $\square$

On peut donner une application immédiate de ce théorème.

**Corollaire 2.1.2.** *Soient  $E$  et  $F$  deux compacts distincts de  $X$ , soit  $H$  strictement décroissante et soit  $K = E \cup F$ . Alors*

$$\frac{H(\text{diam}(E)) + H(\text{diam}(F)) - 2H(\text{diam}(E \cup F))}{H(\text{diam}(E))H(\text{diam}(F)) - H(\text{diam}(E \cup F))^2} \geq \text{cap}_H(K).$$

*Démonstration.* On applique le théorème avec  $E = F_1$  et  $F = F_2$ . Posons  $H_e := H(\text{diam}(E))$ ,  $H_f := H(\text{diam}(F))$  et  $H_{ef} := H(\text{diam}(E \cup F))$ . Soit  $q(x) = x^2(H_e + H_f - 2H_{ef}) + 2x(H_{ef} - 2H_f) + H_f$ . Alors  $Q(A) = \inf_{x \in [0,1]} q(x)$ . Puisque  $H$  est décroissante,  $H_e + H_f - 2H_{ef} > 0$  car  $E$  et  $F$  sont distincts et les calculs qui suivent sont directs.  $\square$



On peut remarquer que ce résultat fournit une borne non triviale dans le cas où  $H$  est positif. En effet, une majoration naturelle serait

$$\text{cap}_H(K) \leq \text{cap}_H(E) + \text{cap}_H(F) \leq 1/H(\text{diam}(E)) + 1/H(\text{diam}(F)).$$

Or, si  $H$  est positif, on a également

$$\frac{H(\text{diam}(E)) + H(\text{diam}(F)) - 2H(\text{diam}(E \cup F))}{H(\text{diam}(E))H(\text{diam}(F)) - H(\text{diam}(E \cup F))^2} \leq \frac{H(\text{diam}(E)) + H(\text{diam}(F))}{H(\text{diam}(E))H(\text{diam}(F))}.$$

En effet, posons  $x := H(\text{diam}(E))$ ,  $y := H(\text{diam}(F))$  et  $z := H(\text{diam}(E \cup F))$ . Puisque  $H$  est décroissante et que  $E$  et  $F$  sont distincts on a  $0 < z \leq x$  et  $z \leq y$ . L'inégalité ci-dessus est alors, sous ces conditions, équivalente aux suites d'inégalités

$$\begin{aligned} \frac{x + y - 2z}{xy - z^2} \leq \frac{x + y}{xy} &\Leftrightarrow (x + y - 2z)xy \leq (x + y)(xy - z^2) \\ &\Leftrightarrow x^2y + xy^2 - 2zxy \leq x^2y + xy^2 - xz^2 - yz^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2xy - xz - yz \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x(y - z) + y(x - z). \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant vraie, ceci prouve bien notre inégalité de départ.

Le résultat suivant est un résultat de convergence pour  $Q(A)$ .

**Théorème 2.1.3.** *Soit  $H$  un noyau et soit  $E$  un compact de  $X$ . Soient  $F_1, \dots, F_n$  des compacts de  $X$  tels que  $E \subset \bigcup_1^n F_j$  et  $E \cap F_j \neq \emptyset$  pour tout  $j$ . Définissons la matrice  $A$  comme dans le théorème précédent. Alors*

$$|\text{cap}_H(E) - 1/Q(A)| \leq \epsilon(d),$$

où  $d := \max_j \text{diam}(F_j)$  et  $\epsilon(t)$  est une fonction dépendant seulement de  $H, E$  et tendant vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0.

*Démonstration.* Pour  $s > 0$  définissons  $H_s(t) := H(s + t)$ . Alors  $H_s \uparrow H$  lorsque  $s \downarrow 0$ . Ainsi grâce à la proposition 1.2.7 nous savons que  $\text{cap}_{H_s}(E) \rightarrow \text{cap}_H(E)$  lorsque  $s \rightarrow 0$ . Il suffit donc de prouver que

$$1/\text{cap}_{H_{2d}}(E) \leq Q(A) \leq 1/\text{cap}_H(E),$$

où  $d := \max_j \text{diam} F_j$ .

De plus, l'inégalité de droite étant l'objet du théorème précédent, il suffit de démontrer celle de gauche.

Pour chaque  $j$  fixons  $x_j \in E \cap F_j$ . Pour tout  $i, j$  on a alors

$$\text{diam}(F_i \cup F_j) - 2d \leq \text{dist}(F_i, F_j) \leq \rho(x_i, x_j).$$

Etant donné  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$ , posons  $\mu := \sum_j \lambda_j \delta_{x_j}$  où  $\delta_{x_j}$  est la mesure de Dirac en  $x_j$ . Ainsi  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $E$  et on a

$$\begin{aligned}
1/\text{cap}_{H_{2d}}(E) &\leq \iint H_{2d}(\rho(x, y)) d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \sum_{i,j} H_{2d}(\rho(x_i, x_j)) \lambda_i \lambda_j \\
&= \sum_{i,j} H(\rho(x_i, x_j) + 2d) \lambda_i \lambda_j \\
&\leq \sum_{i,j} H(\text{diam}(F_i \cup F_j)) \lambda_i \lambda_j \\
&= \sum_{i,j} A_{i,j} \lambda_i \lambda_j.
\end{aligned}$$

En minimisant maintenant sur tout les  $n$ -uplets  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$  on trouve le résultat.

□

Ce résultat est intéressant en ce sens qu'il donne un moyen de calculer la capacité en n'utilisant que des considérations métriques et sans ne jamais utiliser de mesure. On verra plus loin que si les premières estimations via cette méthode sont relativement peu précises, la vitesse de convergence vers la capacité ne semble pas si mauvaise. On verra également qu'il sera possible d'extrapoler des valeurs respectables via cette méthode. D'un point de vue théorique il est également intéressant de remarquer que très peu de conditions sont nécessaires pour que le théorème s'applique. En effet, aucune condition sur le compact  $E$  ou sur l'espace métrique  $X$  ne sont demandées. On verra dans la section suivante sur la borne inférieure que des théorèmes pourtant plus naturels demandent eux-mêmes des hypothèses un peu plus fortes.

## 2.1.2 Borne inférieure pour la capacité

Nous avons montré en introduction de la section le résultat suivant.

**Théorème 2.1.4.** *Soit  $H$  un noyau et  $E$  un compact de  $X$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures de probabilité sur  $E$  et soit  $B$  la matrice définie par  $B_{ij} := \iint \kappa(x, y) d\mu_i d\mu_j$ . Alors  $1/Q(B) \leq \text{cap}_H(E)$ .*

Ce résultat a une application intéressante immédiate.

**Corollaire 2.1.5.** Soient  $H$  un noyau et  $F_1, \dots, F_n$  des compacts de  $(X, \rho)$  vérifiant  $\text{cap}_H(F_j) > 0$  pour tout  $j$ . Soit  $E = \bigcup_j F_j$  et soit  $C$  la matrice définie par  $C_{ij} := H(\text{dist}(F_i, F_j))$  si  $i \neq j$  et  $C_{jj} := \text{cap}_H(F_j)$ . Alors  $1/Q(C) \leq \text{cap}_H(E)$ .

*Démonstration.* Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  les mesures d'équilibre respectives de  $F_1, \dots, F_n$ . Il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.1.4 et de remarquer que  $\iint_{X^2} H(\rho(x, y)) d\mu_i(x) d\mu_j(y) \leq H(\text{dist}(F_i, F_j))$  pour tout  $i \neq j$ .  $\square$

Montrons à présent un résultat de convergence pour  $Q(B)$ .

**Théorème 2.1.6.** Soit  $H$  un noyau tel que  $H(\rho(x, y))$  soit défini positif et supposons de plus que  $H$  soit continue et satisfasse  $\limsup_{t \rightarrow 0} H(t)/H(2t) < \infty$ . Soit  $E$  un compact de  $X$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures à support compact sur  $X$  telles que

$$E \subset \bigcup_1^n \text{supp } \mu_j \quad \text{et} \quad E \cap \text{supp } \mu_j \neq \emptyset \quad (j = 1, \dots, n).$$

Alors, avec la matrice  $B$  définie comme précédemment, on a

$$|\text{cap}_H(E) - 1/Q(B)| \leq \frac{\max_j I_H(\mu_j)}{H(d)} \epsilon(d),$$

où  $d := \max_j \text{diam}(\text{supp } \mu_j)$  et  $\epsilon(t)$  est une fonction dépendant seulement de  $H, E$  et telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$ .

*Démonstration.* On va montrer que

$$-\epsilon(d) \leq \text{cap}_H - 1/Q(B) \leq \frac{I_0}{H(d)} \epsilon(d),$$

où  $I_0 := \max_j I_H(\mu_j)$  et  $d, \epsilon$  sont définis dans l'énoncé. Puisque  $I_0 \geq H(d)$ , ceci donne même un peu plus que le résultat souhaité.

Commençons par démontrer l'inégalité de gauche. Posons  $F_j := \text{supp } \mu_j$  pour  $j = 1, \dots, n$ , et soit  $A$  la matrice des diamètres définie dans la section précédente. Puisque  $A_{ij} \leq B_{ij}$  il est clair que  $Q(A) \leq Q(B)$  et  $\text{cap}_H(E) - 1/Q(A) \leq \text{cap}_H(E) - 1/Q(B)$ . Par le Théorème 2.1.3, on a  $-\epsilon(d) \leq \text{cap}_H - 1/Q(A)$  où  $\epsilon(d)$  est une fonction vérifiant les propriétés énoncées, ce qui termine la démonstration de l'inégalité.

Démontrons à présent l'inégalité de droite. Soit  $\nu$  la mesure d'équilibre de  $E$  et soit  $G_1, \dots, G_n$  une partition de  $E$  par des boréliens vérifiant  $G_j \subset \text{supp } \mu_j$  pour tout  $j$ . On a clairement  $\nu(G_j) \geq 0$  pour tout  $j$  et  $\sum_1^n \nu(G_j) = 1$ . Ainsi

$$Q(B) \leq \sum_{i,j} \nu(G_i) \nu(G_j) B_{ij}.$$



Estimons à présent le terme de droite. Soit  $J := \{(i, j) : \text{dist}(G_i, G_j) \leq 3d\}$ . Si  $(i, j) \in J$  alors  $\rho(x, y) \leq 5d$  for tout  $x \in G_i$  et  $y \in G_j$ . En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz on obtient également  $B_{ij} \leq I_0$  pour tout  $i, j$  et donc

$$\sum_{(i,j) \in J} B_{ij} \nu(G_i) \nu(G_j) \leq \iint_{\rho(x,y) \leq 5d} I_0 d\nu(x) d\nu(y) \leq \frac{I_0}{H(5d)} \iint_{\rho(x,y) \leq 5d} \kappa(x, y) d\nu(x) d\nu(y).$$

Si  $(i, j) \notin J$ , alors  $\rho(x, y) \geq 3d$  pour tout  $x \in G_i$  et  $y \in G_j$ . De plus, puisque l'inégalité  $B_{ij} \leq H(\text{dist}(G_i, G_j))$  est vérifiée pour tout  $i, j$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \notin J} B_{ij} \nu(G_i) \nu(G_j) &\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} H(\text{dist}(G_i, G_j)) d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \iint_{\rho(x,y) \geq 3d} H(\rho(x, y) - 2d) d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \iint_{\rho(x,y) \geq 3d} (H(\rho(x, y) - 2d) - \kappa(x, y)) d\nu(x) d\nu(y) + \frac{1}{\text{cap}_H(E)} \end{aligned}$$

et en combinant les deux estimés on obtient

$$Q(B) \leq \frac{1}{\text{cap}_H(E)} + \frac{I_0}{H(5d)} \epsilon_1(d) + \epsilon_2(d),$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_1(d) &:= \iint_{\rho(x,y) \leq 5d} \kappa(x, y) d\nu(x) d\nu(y), \\ \epsilon_2(d) &:= \iint_{\rho(x,y) \geq 3d} (H(\rho(x, y) - 2d) - \kappa(x, y)) d\nu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Les deux fonctions  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  tendent vers 0 avec  $d$ . Pour  $\epsilon_1$  c'est une conséquence directe du Théorème de la convergence dominée. Pour la deuxième c'est également une conséquence du Théorème de la convergence dominée. En effet, si  $\rho(x, y) \geq 3d$ , alors  $\rho(x, y) - 2d \geq \rho(x, y)/3$ . En utilisant le fait que  $\limsup_{t \rightarrow 0} H(t)/H(2t) < \infty$  on peut affirmer que  $H(\rho(x, y) - 2d) \leq AH(\rho(x, y))$  pour une certaine constante  $A$ .

Finalement, on note que  $H(d)/H(5d) = O(1)$  lorsque  $d \rightarrow 0$  et  $I_0 \geq H(d)$  comme remarqué plus tôt. Ainsi

$$\text{cap}_H(E) - 1/Q(B) \leq \frac{I_0}{H(d)} O(\epsilon_1(d) + \epsilon_2(d))$$

ce qui donne la borne souhaitée.  $\square$

### 2.1.3 Mesures uniformément parfaites

Le Théorème 2.1.6 montre la convergence de  $Q(B)$  vers  $1/\text{cap}_H$  à condition que  $\max_j I_H(\mu_j) = O(H(d))$  lorsque  $d \rightarrow 0$ . On doit naturellement se demander comment faire un choix des mesures  $\mu_j$  suffisamment judicieux pour être sous cette condition. Supposons que  $E$  supporte “naturellement” une mesure de probabilité  $\sigma$ , par exemple la mesure de Lebesgue de dimension 2 si  $E$  est un carré, la mesure d’angle si  $E$  est un cercle ou la mesure de Cantor–Lebesgue si  $E$  est l’ensemble triadique de Cantor. Une approche possible est de trouver un recouvrement de  $E$  par des boules, disons  $B_1, \dots, B_n$  de diamètre  $d$  telles que  $\sigma(B_j) > 0$ . On peut alors définir les mesures  $\mu_j$  du Théorème 2.1.6 par  $\mu_j := \frac{1}{\sigma(B_j)}\sigma|_{B_j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Les mesures étant supportées par  $E$ , le Théorème 2.1.4 nous permet d’obtenir directement une borne inférieure pour la capacité. Pour que cette méthode conduise à un “bon” choix des  $\mu_j$  en ce sens que l’on obtiendrait la convergence dans le Théorème 2.1.6, il suffit qu’il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que

$$I_H(\sigma_{x,r}) \leq \gamma H(r), \quad (2.1)$$

pour  $x \in E$  et  $0 < r < \text{diam } E$  où on a posé  $\sigma_{x,r} := \frac{1}{\sigma(B(x,r))}\sigma|_{B(x,r)}$ . Une telle mesure est dite *uniformément parfaite pour  $E$* .

**Corollaire 2.1.7.** *Soit  $H$  un noyau tel que  $H$  soit défini positif et supposons de plus que  $H$  soit continue et satisfasse  $\limsup_{t \rightarrow 0} H(t)/H(2t) < \infty$ . Soit  $E$  un compact de  $X$  ayant  $\nu$  pour mesure d’équilibre et soit  $\sigma$  une mesure uniformément parfaite pour  $E$ . Alors*

$$I(\nu) = \inf\{I(\mu) : \mu \in P(E), \mu \ll \sigma\}.$$

*Démonstration.* Il suffit d’appliquer le Théorème 2.1.6 où chaque  $\mu_j$  est construite par la méthode décrite ci-dessus. Chacune des mesures étant absolument continue par rapport à  $\sigma$ , toute combinaison convexe de ces mesures le sera également, ce qui démontre le résultat.  $\square$

Il est à noter que ce résultat ne donne aucune information sur le lien entre  $\nu$  et  $\sigma$  et s’il semble naturel de se demander si  $\nu \ll \sigma$ , il faut avoir conscience que cela est faux en général. Il existe d’ailleurs des cas où  $\sigma \perp \nu$ . Un cas notable est celui de l’ensemble triadique de Cantor  $E \subset \mathbb{R}^2$  pour la capacité logarithmique. Si  $\sigma$  est la mesure de Cantor–Lebesgue sur  $E$ , alors un argument d’échelle sur la façon dont est construite  $\sigma$  permet de montrer que  $\sigma$  est uniformément parfaite sur  $E$ . D’un autre côté, Makarov et Volberg ont montré que la mesure d’équilibre  $\nu$  de  $E$ , était concentrée sur un ensemble

de dimension de Hausdorff strictement plus petite que celle de  $E$  ([MarGar, p.315]), ce qui implique que  $\nu \perp \sigma$ .

# Chapitre 3

## Capacité pondérée

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment obtenir des bornes rigoureuses pour la capacité d'un ensemble compact dans un espace métrique  $X$  quelconque. Il est également intéressant de se poser la question du calcul de la capacité en présence d'un champ extérieur. Cette théorie est sans aucun doute motivée par la physique mais il est également important de remarquer que ces capacités interviennent naturellement dans l'étude des polynômes orthogonaux et dans la théorie de l'approximation rationnelle en général. D'un point de vue purement mathématique il est peut-être un peu présomptueux, et pourtant pas tout-à-fait faux, d'affirmer que l'approche de la théorie du potentiel pondéré est plus naturelle que celle du cas classique. [SafTot, chap.0]

Le but de ce chapitre est de généraliser au cas pondéré les techniques de calcul décrites précédemment. Pour des raisons volontaires de simplicité le noyau  $\kappa(x, y)$  sera de la forme  $-\log(|x - y|w(x)w(y))$  sur  $\mathbb{C}$  où  $w$  sera une fonction vérifiant quelques propriétés naturelles.

### 3.1 Position du problème et introduction à la capacité pondérée

Soit  $\Sigma$  un ensemble fermé de  $\mathbb{C}$  (non nécessairement compact). Un rappelle qu'un poids admissible sur  $\Sigma$  est une fonction semicontinue supérieurement  $w$  définie sur  $\Sigma$  et positive. Si  $\Sigma$  est non borné on requiert également que  $|z|w(z) \rightarrow 0$  au voisinage de l'infini, ou, autrement dit, que  $w(z) = o(1/|z|)$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ . Pour la suite on ne travaillera qu'avec des poids admissibles et on parlera seulement de poids pour alléger le texte On va définir  $Q_w$  par  $Q_w := \log(1/w)$ .



Etant donnée une mesure borélienne de probabilité sur  $\Sigma$  on définit sa  $w$ -énergie par

$$I_w(\mu) := \iint \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu(z)d\mu(t).$$

Les conditions sur  $w$  nous assurent de l'existence de l'intégrale et que  $I_w(\mu) \in (-\infty, \infty]$ . La dénomination de *capacité en présence d'un champ extérieur* se justifie en écrivant l'intégrale comme

$$I_w(\mu) := \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\mu(z)d\mu(t) + 2 \int Q_w d\mu$$

lorsque les deux intégrales existent et sont finies. Cette condition n'est en fait pas restrictive d'après le Théorème 1.2.6.

**Définition 3.1.1.** Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids sur  $\Sigma$ . On définit la  $w$ -capacité de  $\Sigma$ , notée  $C_w(\Sigma)$ , par

$$\log 1/C_w(\Sigma) := \inf\{I_w(\mu) : \mu \in \mathcal{P}(\Sigma)\}.$$

Remarquons la différence de notation entre la capacité pondérée par  $w$ , notée  $C_w$  ou  $C$  si le contexte est suffisamment clair et la capacité générale définie par le noyau  $H$  que l'on note  $\text{cap}_H$ . Remarquons également que  $\frac{1}{\text{cap}_H} = \log \frac{1}{C_w}$ , ce qui permet d'établir un lien entre les deux définitions de la capacité.

## 3.2 Borne supérieure pour la capacité pondérée

Le théorème suivant est le pendant du Théorème 2.1.1 dans le cas de la capacité pondérée.

**Théorème 3.2.1.** Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids sur  $\Sigma$ . Soit  $F_1, \dots, F_n$  des sous-ensembles fermés de  $\mathbb{C}$  recouvrant  $\Sigma$ . Soit  $M_j := \max_{F_j} w$ . Définissons la matrice  $A$  de la façon suivante

$$A_{ij} := \log \frac{1}{\text{diam}(F_i \cup F_j)M_iM_j}. \quad (3.1)$$

Alors  $C_w(\Sigma) \leq \exp(-Q(A))$ .

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que pour toute paire  $(z, t) \in F_i \times F_j$  l'inégalité suivante est vraie :

$$|z-t|w(z)w(t) \leq \text{diam}(F_i \cup F_j)M_iM_j.$$

On effectue ensuite les mêmes calculs que pour le Théorème 2.1.1, ce qui termine la preuve.  $\square$

On remarque que  $Q(A)$  jouit encore de la propriété de croissance déjà énoncée dans le chapitre précédent, à savoir que, si  $F_1, \dots, F_n$  et  $\widetilde{F}_1, \dots, \widetilde{F}_m$  sont deux partitions de  $\Sigma$  et que tout  $\widetilde{F}_j$  est inclus dans un  $F_i$ , alors les matrices associées, respectivement  $A$  et  $\widetilde{A}$  vérifient  $Q(A) \leq Q(\widetilde{A})$ .

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $\Sigma$  un compact de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids sur  $\Sigma$ . Soient  $F_1, \dots, F_n$  des compacts de  $\mathbb{C}$  tels que  $\Sigma \subset \bigcup_1^n F_j$  et  $\Sigma \cap F_j \neq \emptyset$  pour tout  $j$ . Définissons la matrice  $A$  comme précédemment. Alors*

$$|C_w(\Sigma) - \exp(-Q(A))| \leq \epsilon(d),$$

où  $d := \max_j \text{diam } F_j$  et  $\epsilon$  est une fonction dépendant seulement de  $(\Sigma, w)$  et telle que  $\epsilon = o(1)$  en 0.

*Démonstration.* Pour chaque  $j$  fixons un point  $z_j \in \Sigma \cap F_j$ . Remarquons que pour tout  $i, j$  on a

$$|z_j - z_i| \geq \text{dist}(F_i, F_j) \geq \text{diam}(F_i \cup F_j) - 2d \quad \text{et} \quad \max_{F_j} w \leq w_d(z_i) \quad (3.2)$$

où  $w_d(z) := \max\{w(t) : t \in \Sigma, |z - t| \leq d\}$ .

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$  et posons  $\mu := \sum_j \lambda_j \delta_{z_j}$ . Alors  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\Sigma$  et on a clairement

$$\begin{aligned} \log 1/C_{w_d}^{2d}(\Sigma) &\leq \iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d)w_d(z)w_d(t)} d\mu(z)d\mu(t) \\ &\leq \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \log \frac{1}{\text{diam}(F_i \cup F_j) M_i M_j} \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j A_{ij}, \end{aligned}$$

où  $C_{w_d}^{2d}$  est la capacité définie par le noyau  $\log \frac{1}{|z-t|+2d}$  à la place de  $\log \frac{1}{|z-t|}$  et où le poids est  $w_d$  et où  $M_j := \max_{F_j} w$ .

En minimisant sur  $\Delta_n$  on en déduit que

$$\log 1/C_{w_d}^{2d}(\Sigma) \leq Q(A).$$

On a donc réussi à montrer que

$$C_w(\Sigma) \leq \exp(-Q(A)) \leq C_{w_d}^{2d}(\Sigma).$$



Il suffit maintenant de prouver que  $\lim_{d \rightarrow 0} C_{w_d}^{2d}(\Sigma) = C_w(\Sigma)$ . Il est clair que  $d \mapsto C_{w_d}^{2d}$  est une fonction croissante. Il suffit donc de montrer que  $\limsup_{d \rightarrow 0} C_{w_d}^{2d}(\Sigma) \leq C_w(\Sigma)$ . Pour tout  $d > 0$ , choisissons  $\nu_d$  une mesure de probabilité sur  $\Sigma$  telle que

$$\iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d)w_d(z)w_d(t)} d\nu_d(z)d\nu_d(t) < \log 1/C_{w_d}^{2d}(\Sigma) + d.$$

Par compacité de  $\Sigma$  il existe une suite  $d_n \rightarrow 0$  telle que  $\nu_{d_n}$  converge faiblement\* vers une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\Sigma$ . Pour chaque  $m$  nous avons

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d_n)w_{d_n}(z)w_{d_n}(t)} d\nu_{d_n}(z)d\nu_{d_n}(t) \\ \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d_m)w_{d_m}(z)w_{d_m}(t)} d\nu_{d_n}(z)d\nu_{d_n}(t) \\ \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d_m)w_{d_m}(z)w_{d_m}(t)} d\nu(z)d\nu(t) \end{aligned}$$

Puisque l'intégrande est minorée on peut appliquer le lemme de Fatou. En laissant  $m$  tendre vers l'infini, on trouve alors

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \iint \log \frac{1}{(|z-t|+2d_n)w_{d_n}(z)w_{d_n}(t)} d\nu_{d_n}(z)d\nu_{d_n}(t) \\ \geq \iint \log \frac{1}{|z-w|w(z)w(t)} d\nu(z)d\nu(t) \\ \geq \log(1/C_w(\Sigma)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} C_{w_{d_n}}^{2d_n}(\Sigma) \leq C_w(\Sigma)$  tel qu'annoncé.

□

### 3.3 Borne inférieure pour la capacité pondérée

Encore une fois, les résultats énoncés ici sont les analogues de ceux énoncés au chapitre précédent, l'idée étant toujours de minimiser l'énergie sur un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(E)$  en espérant avoir une bonne approximation.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids sur  $\Sigma$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures de probabilité sur  $\Sigma$  et définissons la matrice  $B$  par*

$$B_{ij} := \iint \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_i(z)d\mu_j(t).$$

Alors

$$\exp(-Q(B)) \leq C_w(\Sigma).$$

*Démonstration.* Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Delta_n$  et posons  $\mu := \sum_j \lambda_j \mu_j$ . Alors  $\mu$  est clairement une mesure de probabilité sur  $\Sigma$ . On a donc

$$\log(1/C_w(\Sigma)) \leq I_w(\mu) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \iint \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_i(z) d\mu_j(t) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j B_{ij}.$$

□

**Lemme 3.3.2.** *Pour tout  $i, j$  on a  $2B_{i,j} \leq I_w(\mu_i) + I_w(\mu_j)$ .*

*Démonstration.* Posons  $\sigma := \mu_i - \mu_j$ . Alors par le Théorème 1.1.4 on sait que

$$0 \leq \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\sigma(z) d\sigma(t).$$

Ainsi

$$2I_1(\mu_i, \mu_j) \leq I_1(\mu_i) + I_1(\mu_j)$$

et donc

$$2I_1(\mu_i, \mu_j) + 2 \int Q_w d\mu_i + 2 \int Q_w d\mu_j \leq I_1(\mu_i) + 2 \int Q_w d\mu_i + I_1(\mu_j) + 2 \int Q_w d\mu_j$$

qui est bien le résultat annoncé. □

**Théorème 3.3.3.** *Soit  $\Sigma$  un compact de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids sur  $\Sigma$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures de probabilité à support compact sur  $\mathbb{C}$  telles que  $\Sigma \subset \bigcup_1^n \text{supp } \mu_j$  et  $\Sigma \cap \text{supp } \mu_j \neq \emptyset$  pour tout  $j$ . Soit  $B$  la matrice définie plus haut. Alors*

$$|C_w(\Sigma) - \exp(-Q(B))| \leq \frac{\max_j I_w(\mu_j)}{\log 1/d} \epsilon(d), \quad (3.3)$$

où  $d := \max_j \text{diam } F_j$  et  $\epsilon = o(1)$  en 0 et dépendant seulement de  $\Sigma$  et  $w$ .

*Démonstration.* La démonstration de la borne inférieure pour  $C_w(\Sigma)$  est semblable en tout point à celle du chapitre précédent.

Posons  $I_0 := \max_j I_w(\mu_j)$  et démontrons alors la borne supérieure. On peut naturellement supposer que  $C_w(\Sigma) > 0$  et que  $I_0 < \infty$  sinon le résultat est trivial. On peut également supposer que  $d < 1$  est suffisamment petit pour que  $I_0 > 0$ , quitte à en choisir un plus petit pour être sous ces conditions. On va également supposer dans un premier temps que  $w$  est continue et strictement positive et on verra par la suite que l'on peut lever cette condition.

Soit  $\mu_w$  la mesure d'équilibre pour  $(\Sigma, w)$ , et soit  $G_1, \dots, G_n$  des boréliens formant une

partition de  $\Sigma$  et vérifiant  $G_j \subset \text{supp } \mu_j$  pour chaque  $j$ . Alors clairement  $(\mu_w(G_1), \dots, \mu_w(G_n)) \in \Delta_n$  et donc

$$Q(B) \leq \sum_{i,j} B_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j).$$

Il reste maintenant à estimer le membre de droite. Définissons  $J := \{(i, j) : \text{dist}(G_i, G_j) \leq 3d\}$ .

Si  $(i, j) \in J$  alors  $|z - t| \leq 5d$  pour tous les  $z \in G_i$  et  $t \in G_j$ . Par le lemme précédent on sait que  $B_{ij} \leq \frac{1}{2}(I_w(\mu_i) + I_w(\mu_j)) \leq I_0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in J} B_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j) &\leq \iint_{|z-t| \leq 5d} I_0 d\mu_w(z) d\mu_w(t) \\ &\leq \frac{I_0}{\log 1/(5d\|w\|_\infty^2)} \iint_{|z-t| \leq 5d} \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t). \end{aligned}$$

Il est clair que la dernière intégrale tend vers 0 avec  $d$  à cause du Théorème de la convergence dominée. On a donc un estimé pour  $\sum_{(i,j) \in J} B_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j)$  de la forme

$$\sum_{(i,j) \in J} B_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j) \leq \frac{I_0}{\log 1/d} \epsilon_0(d)$$

où  $\epsilon(d) = o(1)$  en 0.

Supposons à présent que  $(i, j) \notin J$ . Alors  $|z - t| \geq 3d$  pour tout  $z \in G_i$  et tout  $t \in G_j$ . De plus  $B_{ij} \leq \log \left( \frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j) m_i m_j} \right)$  pour tout  $i, j$  où  $m_j := \inf_{G_j} w$ . On obtient alors les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \notin J} B_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j) &\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j) m_i m_j} d\mu_w(z) d\mu_w(t) \\ &\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j) w(z) w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + \epsilon_1(d) \\ &\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + \epsilon_1(d) + \epsilon_2(d) \\ &\leq I_w(\mu_w) + \epsilon_1(d) + \epsilon_2(d) + \epsilon_3(d) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_1(d) &:= 2 \sup\{|\log(w(z)) - \log(w(z'))| : |z - z'| \leq d\}, \\ \epsilon_2(d) &:= \iint_{|z-t| \geq 3d} \log \frac{|z-t|}{|z-t| - 2d} d\mu_w(z) d\mu_w(t), \\ \epsilon_3(d) &:= - \iint_{|z-t| \leq 5d} \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t). \end{aligned}$$



Il est facile de remarquer que chacun de ces termes tend vers 0 quand  $d \rightarrow 0$ , le premier par continuité uniforme et les autres par le Théorème de la convergence dominée. Pour le terme  $\epsilon_2$  la domination peut se faire par exemple  $|\log(x)| + |\log(x-1)|$ .

En combinant ces estimés on obtient

$$Q(B) \leq \log(1/C_w(\Sigma)) + \frac{I_0}{\log 1/d} \epsilon_0(d) + \sum_1^3 \epsilon_k(d).$$

Remarquons que puisque  $I_0 \geq \log(1/d) + O(1)$  au voisinage de 0, chacun des termes  $\epsilon_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  peut être “absorbé” dans le  $\epsilon_0$ . On a donc réussi à démontrer le théorème dans le cas des poids  $w$  continus et strictement positifs.

Supposons finalement que  $w$  soit un poids quelconque. Puisque  $w$  est au moins semi-continu supérieurement, on peut trouver une suite de poids  $w_k$  continus et strictement positifs tels que  $w_k \downarrow w$  simplement. Soit  $B_k$  la suite des matrices associées à chacun des  $w_k$ . On a alors  $I_{w_k}(\mu_j) \leq I_0$ . Par la preuve du cas précédent on a

$$C_{w_k} - \exp(-Q(B_k)) \leq \frac{I_0}{\log 1/d} \epsilon_k(d),$$

où  $\epsilon_k(t) = o(1)$  au voisinage de 0. Chacune des entrées de la matrice  $B_k$  est croissante en  $k$  et par le lemme 3.3.2 on sait qu’elles sont toutes bornées par  $I_0$ . On en conclut donc que  $\lim_{k \rightarrow \infty} Q(B_k) = Q(B)$  grâce au premier Théorème de Dini. En utilisant le Théorème 1.2.8, on a  $C_{w_k}(\Sigma) \rightarrow C_w(\Sigma)$  lorsque  $k \rightarrow \infty$ , ce qui conclut la démonstration du théorème.  $\square$

Encore une fois, ce théorème nous donne des informations intéressantes si on trouve une suite de mesures qui permet à  $I_0/\log(1/d)$  de rester bornée. En pratique on utilise souvent des mesures de Lebesgue.

Dans le cas des poids continus, il existe une version un peu modifiée permettant d’éviter des calculs d’intégrales.

**Théorème 3.3.4.** *Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids continu sur  $\Sigma$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures de probabilité supportées par  $G_1, \dots, G_n \subset \Sigma$  respectivement. Définissons  $m_j := \inf_{G_j} w$  et la matrice  $D$  par*

$$D_{ij} := \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\mu_i(z) d\mu_j(t) - \log(m_i m_j)$$

Alors

$$\exp(-Q(D)) \leq C_w(\Sigma).$$



La démonstration du théorème est évidente et ne requiert d'ailleurs pas la continuité de  $w$  mais seulement le fait que les infimums sur les  $G_i$  soient finis.

**Théorème 3.3.5.** *Soit  $\Sigma$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{C}$  et soit  $w$  un poids continu sur  $\Sigma$ . Soient  $\mu_1, \dots, \mu_n$  des mesures de probabilité supportées par  $G_1, \dots, G_n$  respectivement. Supposons que  $\Sigma \subset \bigcup G_j$  et que  $\mu_i(G_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . Définissons  $m_j := \inf_{G_j} w$  et la matrice  $D$  par*

$$D_{ij} := \iint \log \frac{1}{|z-t|} d\mu_i(z) d\mu_j(t) - \log(m_i m_j)$$

Alors

$$|C_w(\Sigma) - \exp(-Q(D))| \leq \frac{\max_j I_w(\mu_j)}{\log 1/d} \epsilon(d) + 2\omega_d(Q_w), \quad (3.4)$$

où  $\omega_d(f) := \sup\{|f(z) - f(t)|, |z - t| \leq d\}$ ,  $d := \max_j \text{diam}(G_j)$  et  $\epsilon = o(1)$  en 0 et dépend seulement de  $\Sigma$  et  $w$ .

Avant d'en arriver à démontrer ce théorème nous devons énoncer et démontrer le lemme suivant.

**Lemme 3.3.6.** *Sous les hypothèses du théorème précédent, pour tout  $i, j$  on a*

$$2D_{i,j} \leq I(\mu_i) + I(\mu_j) + 4\omega_d(Q_w).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} 2D_{i,j} &= 2I(\mu_i, \mu_j) + 2Q_w(m_i) + 2Q_w(m_j) \\ &\leq I(\mu_i) + I(\mu_j) + 2Q_w(m_i) + 2Q_w(m_j) \\ &\leq I_w(\mu_i) + I_w(\mu_j) + 2 \left( Q_w(m_i) - \int_{G_i} Q_w d\mu_i \right) + 2 \left( Q_w(m_j) - \int_{G_j} Q_w d\mu_j \right) \\ &\leq I_w(\mu_i) + I_w(\mu_j) + 4\omega_d(Q_w). \end{aligned}$$

□

*Démonstration du Théorème 3.3.5.* Il suffit de reprendre la démonstration du Théorème 3.3.3 en la modifiant très légèrement. Grâce au lemme 3.3.6, en posant  $\omega_d = \omega_d(Q_w)$  et en gardant les mêmes notations on a que

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in J} D_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j) &\leq \iint_{|z-t| \leq 5d} I_0 d\mu_w d\mu_w + 2\omega_d \\ &\leq \frac{I_0}{\log 1/(5d\|w\|_\infty^2)} \iint_{|z-t| \leq 5d} \log \frac{1}{|z-t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + 2\omega_d. \end{aligned}$$

Supposons à présent que  $(i, j) \notin J$ . Alors  $|z - t| \geq 3d$  pour tout  $z \in G_i$  et tout  $t \in G_j$ . De plus  $D_{ij} \leq \log\left(\frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j)m_i m_j}\right)$  pour tout  $i, j$  où  $m_j := \inf_{G_j} w$ . On obtient alors les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j) \notin J} D_{ij} \mu_w(G_i) \mu_w(G_j) &\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j)m_i m_j} d\mu_w(z) d\mu_w(t) \\
&\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{\text{dist}(G_i, G_j)w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + \epsilon_1(d) \\
&\leq \sum_{(i,j) \notin J} \int_{G_i} \int_{G_j} \log \frac{1}{|z - t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t) + \epsilon_1(d) + \epsilon_2(d) \\
&\leq I_w(\mu_w) + \epsilon_1(d) + \epsilon_2(d) + \epsilon_3(d)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\epsilon_1(d) &:= 2 \sup\{|\log(w(z)) - \log(w(z'))| : |z - z'| \leq d\}, \\
\epsilon_2(d) &:= \iint_{|z-t| \geq 3d} \log \frac{|z - t|}{|z - t| - 2d} d\mu_w(z) d\mu_w(t), \\
\epsilon_3(d) &:= - \iint_{|z-t| \leq 5d} \log \frac{1}{|z - t|w(z)w(t)} d\mu_w(z) d\mu_w(t).
\end{aligned}$$

Le reste de la preuve est semblable à celle du Théorème 3.3.3.  $\square$

Ce théorème est donc un théorème de convergence dans le cas où le poids est continu. On sait en effet que  $w$  est alors uniformément continu puisque  $\Sigma$  est compact, le module de continuité  $\omega_d(Q_w)$  tendant alors vers 0 avec  $d$ . Il peut sembler beaucoup plus restrictif que la version intégrale que l'on obtient au Théorème 3.3.3 mais ce n'est pas tout à fait vrai puisqu'en pratique on peut toujours se ramener sous ces conditions et c'est d'ailleurs toujours ce que l'on fait, même dans le cas intégral.

# Chapitre 4

## Algorithmes de calcul et simulations numériques

### 4.1 Algorithmes et potentiels discrets

#### 4.1.1 Algorithmes adaptatifs

Dans ce chapitre on se propose de présenter les algorithmes décrits dans les chapitres précédents ainsi que des versions *adaptatives* qui, si elles ne sont pas justifiées rigoureusement, permettent souvent en pratique d'obtenir les mêmes résultats en effectuant un nombre significativement plus faible de calculs. Rappelons brièvement le fonctionnement des algorithmes.

#### **Algorithme 1, borne inférieure pour la capacité :**

Le premier algorithme permet comme on l'a vu de calculer une borne inférieure pour la capacité d'un ensemble  $K$ . L'idée est de découper  $K$  en  $n$  sous ensembles  $F_1, \dots, F_n$  de sorte à placer sur chacun des «morceaux»  $F_j$  une mesure de probabilité  $\lambda_j$  d'énergie finie. En pratique, nous choisissons presque toujours des mesures de Lebesgue normalisées. Ainsi toute combinaison convexe des  $\lambda_j$  est une mesure de probabilité d'énergie finie, il existe une combinaison convexe minimale pour l'énergie et c'est celle que nous retenons. On l'appelle  $\mu_n$ . On découpe ensuite  $K$  en  $n + 1$  sous ensembles et on réitère le procédé. On a donc une certaine suite  $\mu_n$  qui sous certaines conditions déjà mentionnées aux Théorèmes 2.1.6 et 3.3.3 vérifie  $I(\mu_n) \rightarrow I(\nu_K)$ . On a vu au lemme 1.2.1 que cela impliquait notamment  $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$ . On est en droit de penser que pour  $n$  suffisa-



ment grand, les ensembles qui ne sont pas chargés par  $\mu_n$  ne seront pas chargés par  $\mu$  et inversement. En théorie on sait très bien que ces assertions sont indépendantes mais il n'est quand même pas déraisonnable de penser ainsi, du moins pour  $n$  suffisamment grand.

**Algorithme 2, version adaptative :**

Soit  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_p\}$  et  $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_q\}$  deux partitions de  $K$ . On va dire que  $\mathcal{F}$  est *plus fine* que  $\mathcal{G}$  si tout  $F_i \in \mathcal{F}$  est inclus dans un et un seul élément  $G_j \in \mathcal{G}$ , on note alors  $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ . L'idée de cet algorithme est de "découper" judicieusement  $K$  à chaque étape  $n$  par une partition  $\mathcal{F}(n)$  de sorte que  $\mathcal{F}(n)$  vérifie les hypothèses du Théorème 2.1.6 et que  $\mathcal{F}(n) \preceq \mathcal{F}(n-1) \preceq \dots \preceq \mathcal{F}(1)$ . Avec la remarque formulée plus haut, on peut se permettre de ne pas considérer les éléments d'une partition à l'ordre  $n$  qui n'ont pas été chargés à l'ordre  $n-1$ . Ainsi, si  $\mathcal{F}(n-1)$  contient  $p$  ensembles non chargés par  $\mu_{n-1}$  et si  $\text{card } \mathcal{F}(n) = q$ , cette méthode permet de sauver  $2pq - p^2$  calculs et la matrice  $B$  des énergies à l'étape  $n$  n'est pas d'ordre  $q^2$  mais d'ordre  $(q-p)^2$ . Le temps de calcul nécessaire à la minimisation de la forme quadratique associée à  $B$  est lui-même significativement diminué. En pratique, si on travaille sur  $\mathbb{R}^s$  on découpe  $K$  en  $q = 2^{sn}$  ensembles à l'étape  $n$  et le gain apparaît alors vraiment intéressant très rapidement.

**Algorithme 3, version adaptative rigoureuse :**

La méthode adaptative décrite précédemment semble fonctionner sur plusieurs exemples mais on verra que ce n'est pas toujours le cas. Elle est très clairement non rigoureuse et il n'y a rien *a priori* qui nous permet de penser qu'elle est théoriquement justifiée. On voit également que la pierre angulaire de la méthode est l'obtention d'une borne supérieure pour le support de la mesure d'équilibre. Si on est capable de fournir une telle borne à l'étape  $n$ , alors il apparaît que l'on sera capable d'effectuer une discrimination sur les  $F_j$  afin de les considérer ou non dans le calcul de la matrice  $B$ . Une autre approche reposerait sur la connaissance supposée d'une fonction  $h_n$  vérifiant  $h_n \leq U_{\nu_K}$  (respectivement  $h_n \leq U_{\nu_K} + Q_w$ ) à chaque étape  $n$ . Cherchons donc à déterminer une telle suite de fonctions  $h_n$ .

**Théorème 4.1.1.** *Soit  $K$  un compact d'un espace métrique  $(X, \rho)$  et soit  $H$  un noyau sur  $X$ . Soit  $B$  la matrice définie au chapitre 2. Soit  $h$  une fonction vérifiant  $h \leq U_{\nu_K}$  sur  $K$ . Alors  $\text{supp } \nu_K \subset h^{-1}((-\infty, Q(B)])$ .*

Ce résultat peut également être modifié pour s'énoncer dans le cas pondéré.

**Théorème 4.1.2.** *Soit  $\Sigma$  un fermé de  $\mathbb{C}$ . Soit  $B$  la matrice définie dans le chapitre 3. Soit  $h$  une fonction vérifiant  $h \leq U_{\nu_w} + Q_w$  sur  $\Sigma$ . Alors  $\text{supp } \nu_w \subset h^{-1}((-\infty, Q(B)])$ .*

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas non pondéré, l'autre étant semblable. D'après



le Théorème 2.1.4, on sait que  $I(\nu_K) \leq Q(B)$  et par le Théorème de Frostman, on sait que

$$U_{\nu_K} \leq I(\nu_K) \quad \text{sur } \text{supp } \nu_K.$$

De plus, par notre hypothèse sur  $h$ , on a  $h \leq I(\nu_K)$  sur  $K$ . En combinant ces deux remarques on peut affirmer que  $\text{supp } \nu_K \subset h^{-1}((-\infty, Q(B)))$ .  $\square$

D'après les Théorèmes 4.1.1 (respectivement 4.1.2), la connaissance d'une telle suite  $h_n$  permet d'estimer une borne supérieure de  $\text{supp } \nu_K$ . Il suffit alors de ne plus considérer les  $F_j$  tels que  $F_j \cap h_n^{-1}((-\infty, Q(B))) = \emptyset$  aux itérations suivantes de l'algorithme.

### 4.1.2 Potentiels discrets

On se propose à présent de trouver une version discrète et matricielle du Théorème de Frostman. L'intérêt est de montrer que les algorithmes développés permettent de trouver des fonctions vérifiant une propriété proche de celle du potentiel d'équilibre recherché.

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $C$  une matrice symétrique réelle d'ordre  $n$ . Si  $v \in \Delta_n$  est tel que  $Q(C) = v^t C v$ , alors en posant  $P = C v$  on a*

★  $P_k \geq Q(C)$  pour tout  $k$ ,

★  $P_k = Q(C)$  si  $v_k \neq 0$ .

où  $P_k$  et  $v_k$  représentent respectivement la  $k$ -ième composante des vecteurs  $P$  et  $v$ .

*Démonstration.* Définissons  $I(x)$  pour tout vecteur  $x$  par  $I(x) = x^t C x$ . Pour la suite on va noter  $C_i$  la  $i$ -ème ligne de la matrice  $C$ .

Soit  $E_1 := \{i : C_i v < Q(C)\}$ , supposons que  $E_1$  soit non vide. Alors on peut trouver un certain entier  $n_0$  tel que  $E_1 = \{i : C_i v \leq Q(C) - \frac{1}{n_0}\} \neq \emptyset$ .

De plus, puisque  $v^t C v = Q(C)$ , on peut trouver un certain ensemble d'indices  $E_2 \neq \emptyset$  tel que  $E_2 \cap E_1 = \emptyset$  et  $C_i v > Q(C) - \frac{1}{2n_0}$  pour tout  $i$  dans  $E_2$ . Définissons  $a := \sum_{i \in E_2} v_i$  qui n'est pas nul par définition de  $E_2$ . Soit  $u$  un vecteur stochastique (dont seules les coordonnées dans  $E_1$  peuvent être non nulles) et définissons  $\sigma$  par

$$\sigma = u - v'/a,$$

où  $v'$  est le vecteur obtenu de  $v$  en égalant à 0 toutes les coordonnées de  $\{1, 2, \dots, n\} \setminus E_2$ .

Ainsi, pour tout  $a > t > 0$ , le vecteur  $v_t$  défini par  $v_t := v + t\sigma$  est stochastique et on a

$$\begin{aligned}
I(v_t) - I(v) &= 2t\sigma^t C v + t^2 I(\sigma) \\
&= 2t (\sigma^t C v + O(t)) \\
&= 2t \left( u^t C v - \frac{1}{a} v^t C v + O(t) \right) \\
&\leq 2t \left( Q(C) - \frac{1}{n_0} - Q(C) + \frac{1}{2n_0} + O(t) \right).
\end{aligned}$$

Pour  $t$  assez petit, le membre de droite est négatif, ce qui nous donne  $I(v_t) < I(v)$  et qui est une contradiction. Ainsi  $E_1 = \emptyset$ , ce qui conclut la démonstration de la première partie du théorème.

Montrons à présent la deuxième partie du théorème. Soit  $S$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $v_i \neq 0$ . Supposons qu'il existe un certain ensemble  $N \neq \emptyset$  d'indices  $j$  tel que  $v_j > Q(C)$  pour tout  $j \in N$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $v_j \geq Q(C) + \epsilon$  pour tout  $j \in N$ , soit  $K = S \cap N$  et posons  $m(K) = \sum_{i \in K} v_i$ . On a alors

$$\begin{aligned}
Q(C) = v^t C v &= \sum_{i=1}^n v_i C_i v = \sum_{i \in K} v_i C_i v + \sum_{i \in S \setminus K} v_i C_i v \\
&\geq (Q(C) + \epsilon) m(K) + (1 - m(K)) Q(C) \\
&\geq Q(C) + \epsilon m(K),
\end{aligned}$$

ce qui n'est possible que si  $m(K) = 0$ , c'est à dire si  $K = \emptyset$ , ce qui contredit l'hypothèse de départ et achève la démonstration du théorème.  $\square$

### Remarque :

Les matrices  $A$  et  $B$  définies dans les chapitres 1 et 2 vérifient le Théorème 4.1.3.

On a vu qu'il pouvait être intéressant de trouver un minorant pour le potentiel d'équilibre aux Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2. Un peu dans le même ordre d'idée que le Théorème de Frostman discret ci-dessus, il peut sembler relativement naturel de considérer une version discrète des potentiels. La conjecture suivante suggère donc d'étudier une version discrète des potentiels pour déterminer le minorant cherché aux Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2.

**Conjecture 4.1.4.** *Soit  $K$  un compact de  $(X, \rho)$  et  $H$  un noyau. Soit  $\mathcal{F} := \{F_1, \dots, F_q\}$  une partition de  $K$ . Soit  $A$  la matrice des diamètres associée à la partition  $\mathcal{F}$  et  $v$  un vecteur stochastique tel que  $Q(A) = v^t A v$ . Définissons  $h : K \rightarrow \mathbb{R}$  par  $h(x) := A_j v$  si  $x \in F_j$ , où  $A_j$  est la  $j$ -ième ligne de la matrice  $A$ . Alors  $h \leq U_{\nu_K}$ .*

Cette conjecture est motivée par plusieurs simulations numériques. Si elle était vérifiée, elle permettrait de donner une borne supérieure rigoureuse du support de la mesure d'équilibre en utilisant les algorithmes développés dans cette thèse et le Théorème 4.1.1. Elle s'avérerait d'un formidable intérêt si elle était vérifiée car ce serait l'un des premiers résultats permettant à notre connaissance d'affirmer avec certitude qu'un point de  $K$  n'est pas dans le support de  $\nu_K$ .

## 4.2 Simulations numériques

Dans les algorithmes que l'on a développés apparaît la minimisation d'une forme quadratique sur les compacts  $\Delta_n$  qui, en pratique, est une opération relativement gourmande en termes de calculs et de temps. Il existe des exemples de matrices  $h$  où le calcul de  $Q(h)$  revient à résoudre un système linéaire ce qui permet de considérablement diminuer le temps de calcul. Un tel résultat est contenu dans la proposition suivante.

**Proposition 4.2.1.** *Supposons que  $h$  soit une matrice définie positive d'ordre  $n > 0$ . Soit  $\mathbf{1}$  le vecteur d'ordre  $n$  dont toutes les composantes sont égales à 1. Alors*

$$Q(h) \geq \frac{1}{\mathbf{1}^t h^{-1} \mathbf{1}},$$

avec égalité si et seulement si les composantes de  $h^{-1}\mathbf{1}$  sont positives.

*Démonstration.* Soit  $\sigma := h^{-1}\mathbf{1}$  et  $s := \mathbf{1}^t \sigma$ . Remarquons que  $s = \mathbf{1}^t h^{-1} \mathbf{1} > 0$ , car  $h^{-1}$  est définie positive. Un calcul simple montre que

$$\lambda^t h \lambda = (\lambda - \sigma/s)^t h (\lambda - \sigma/s) + 1/s \quad (\lambda \in \Delta_n).$$

Puisque  $h$  est définie positive, le premier terme du membre de droite est positif et égal à zéro si et seulement si  $\lambda = \sigma/s$ . Ainsi  $Q(h) \geq 1/s$ , avec égalité si et seulement si  $\sigma/s \in \Delta_n$ , ce qui est équivalent à  $h^{-1}\mathbf{1} \geq 0$ .  $\square$

Les simulations numériques de cette section ont été réalisées sur un Dell Precision T7400n. L'ordinateur a 64GB de mémoire de 800MHz FB-DIMM et deux processeurs 4 coeurs 64 bit Intel Xeon X5482 de 3.20GHz avec une mémoire cache L2 de 6MB cadencée à 1600MHz. Toutes les simulations à l'exception de celles de la sous-section 4.2.3 ont été effectuées sous Matlab 7.7, les minimisations quadratiques ayant été effectuées avec la fonction «quadprog» utilisant l'option «medium scale». Dans la section 4.2.3, les programmes ont été écrits en C++. Les calculs d'algèbre linéaire ont été réalisés en



utilisant le module Lapack de la librairie MKL 10.1.2.024 d'Intel. Quand les minimisations n'ont pas été possibles via un système linéaire, la fonction QPSolve de Open-Maple 13 a été utilisée.

Les dernières lignes des tableaux suivants sont toutes des extrapolations réalisées à l'aide des colonnes dans lesquelles elles figurent. Pour ce faire nous avons utilisé le  $\epsilon$ -algorithme de Wynn [GRS]. Cet algorithme permet en effet de donner une approximation de la limite d'une suite de nombres réels

### Le $\epsilon$ -algorithme

Pour les besoins de cette thèse nous voulons connaître la limite d'une suite à partir de quelques-unes de ses valeurs  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ . En pratique on sait que cela est impossible mais nous allons décrire un algorithme qui permet de donner une bonne approximation de la limite. Pour être plus précis et exact nous allons en fait trouver une limite possible compte tenu des variations de la suite.

L'algorithme que nous nous proposons d'utiliser est le  $\epsilon$ -algorithme. Ce dernier est basé sur la création d'un tableau, appelé le  $\epsilon$ -tableau. L'indice  $k$  indique la colonne et l'exposant  $j$  indique la ligne de l'entrée  $\epsilon_k^{(j)}$  dans le  $\epsilon$ -tableau. On définit ensuite les valeurs du tableau récursivement, de la façon suivante. On initialise des valeurs  $\epsilon_{-1}^{(j)}$  à 0 et on pose  $\epsilon_0^{(j)} = s_j$ . On itère ensuite les valeurs de  $\epsilon$  en posant

$$\epsilon_{k+1}^{(j)} := \epsilon_{k-1}^{(j+1)} + [\epsilon_k^{(j+1)} - \epsilon_k^{(j)}]^{-1}.$$

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$  où  $c_k$  est défini par  $s_n = \sum_{k=0}^n c_k$ , autrement dit  $c_0 = s_0$  et  $c_k = s_k - s_{k-1}$ . Le fait remarquable de l'algorithme est que les entrées des colonnes paires dans le  $\epsilon$ -tableau sont des approximants de Padé de la fonction  $f$ , c'est-à-dire qu'elles sont du type

$$\epsilon_{2k}^{(j)} = \frac{P(1)}{Q(1)},$$

où  $\deg(Q) \leq k$  et  $\deg(P) \leq k + j$  pour certains polynômes  $P$  et  $Q$ . Cette remarque est bien entendu soumise à condition qu'un tel approximant de Padé existe et que les entrées du tableau ne donnent pas lieu à une division par zéro.

On comprend donc comment le  $\epsilon$ -algorithme accélère la convergence de la suite  $s_0, s_1, \dots$ , surtout dans le cas où  $f$  est méromorphe. Cependant, dans notre cas, ceci est purement empirique.

### 4.2.1 Capacité logarithmique

Le noyau logarithmique n'est pas défini positif sur  $\mathbb{C}$  tout entier et le théorème 2.1.6 ne s'applique donc pas. Cependant il s'applique à un facteur d'échelle près puisque le noyau logarithmique est bien défini positif sur  $\mathbb{D}$ .

Commençons le plus simplement possible avec l'exemple de la capacité du segment  $E = [-1, 1]$  pour le noyau  $\kappa(x, y) = \log(1/|x - y|)$ . Nous savons que  $C(E) = 1/2$ .

TABLE 4.1 -  $E = [-1, 1]$  avec  $\kappa(x, y) = \log 1/|x - y|$

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	Temps $Q(B)$	Temps $Q(A)$
$2^8$	0.499550896773533	0.526170422000453	< 1s	< 1s
$2^9$	0.499775368464270	0.515286740060108	< 1s	< 1s
$2^{10}$	0.499887664304483	0.508846854544483	3.7s	3.7s
$2^{11}$	0.499943827177516	0.505075444975881	28s	27s
$2^{12}$	0.499971912346653	0.502888440586767	4m	4m
$2^{13}$	0.499985955863600	0.501631776324353	31m5s	31m12s
$2^{14}$	0.499992977824456	0.500915709565080	4h	4h
Extrapol	0.500000000021055	0.499999737129364		

Le premier exemple est très concluant, avec une vitesse de calcul très rapide à de faibles ordres tout en ayant une bonne précision. Les calculs à des ordres élevés permettent d'avoir une précision remarquable dans des temps relativement faibles. De plus, l'extrapolation fournit 10 bonnes décimales de la capacité à partir des bornes inférieures et 3 à partir des bornes supérieures. Il est donc normal de conjecturer que la précision est plus faible avec l'algorithme des diamètres qu'avec celui des énergies. Les temps de calcul, quant à eux, semblent tout à fait identiques d'une méthode à l'autre. Cela n'est pas surprenant compte tenu de la simplicité de l'exemple et des calculs impliqués dans les deux méthodes.

Un deuxième exemple sera celui d'une union d'intervalles disjoints. On a choisi ici  $E = [-2, -1] \cup [1, 2]$  et on sait que  $C(E) = \sqrt{3}/2 \approx 0.866025403784439$  (c.f. [Ran, p.136]).

Une nouvelle fois, la méthode des énergies semble plus intéressante d'un point de vue de la précision que celle des diamètres. On est capable grâce à celle-ci d'obtenir deux décimales de  $C(E)$  en moins d'une seconde, 4 décimales à l'ordre  $2^{14}$  en 2h45 et une extrapolation des bornes inférieures donne jusqu'à 9 bonnes décimales. Dans le même



TABLE 4.2 –  $E = [-2, -1] \cup [1, 2]$  avec  $\kappa(x, y) = \log 1/|x - y|$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	Temps $Q(B)$	Temps $Q(A)$
$2^8$	0.864579467359713	0.905179717664007	< 1s	< 1s
$2^9$	0.865301799679150	0.889181370614140	< 1s	< 1s
$2^{10}$	0.865663404492013	0.879562940350825	2.6s	4.6s
$2^{11}$	0.865844345103015	0.873857669903261	19s	28s
$2^{12}$	0.865934857230836	0.870514718993518	2m43	4m4s
$2^{13}$	0.865980125581431	0.868577251224373	21m29s	31m25s
$2^{14}$	0.866002763300639	0.867465194610520	2h44m38s	4h1m48s
Extrapol	0.866025403959878	0.866025185178160		

temps, on est seulement capable d'obtenir 2 bonnes décimales et d'en extrapoler 6 avec l'algorithme des diamètres. Les temps sont comparables au cas du segment précédent en ce qui concerne la méthode des diamètres, ce qui est tout à fait normal puisque le temps de création des matrices n'a aucune raison d'être véritablement différent. Celle des énergies semble quant à elle plus rapide, ce qui peut sembler un peu surprenant et on verra que ce n'est en fait que très rarement le cas.

## 4.2.2 Capacité hyperbolique

Passons à présent à des exemples non euclidiens. Dans cette section on va considérer que  $X$  est le disque unité complexe  $\mathbb{D}$  et que  $\rho$  est la distance pseudo-hyperbolique sur  $\mathbb{D}$ , c'est à dire

$$\rho(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|,$$

et donc  $\kappa(x, y) = \log \left| \frac{1 - x\bar{y}}{x - y} \right|$ . Si  $E$  est un compact connexe de  $\mathbb{D}$ , alors  $C(E) = r$ , où  $\log(1/r)$  est le *module* du domaine doublement connexe  $\mathbb{D} \setminus E$ . C'est à dire que  $r$  est l'unique nombre tel qu'il existe une application conforme de  $\mathbb{D} \setminus E$  sur  $\mathbb{D} \setminus \bar{\mathbb{D}}_r$  définie de sorte que  $\partial\mathbb{D}$  corresponde à  $\partial\mathbb{D}$  et  $\partial E$  à  $\partial\mathbb{D}_r$  (où  $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ ).

### Segment

Comme premier exemple considérons le cas du segment  $E = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ . En utilisant la méthodes des transformations conformes décrites ci-dessus, il est possible d'avoir une



formule explicite pour la capacité de  $E$ . La valeur de la capacité est donnée par

$$C_h([-L, L]) = (k^{-1}(L^2))^{1/4},$$

où  $k$  est la *fonction elliptique* définie par

$$k(q) := 4\sqrt{q} \prod_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} \right)^4,$$

et  $k^{-1}$  est la réciproque de  $k$ . Pour plus de détails, se référer à [Neh, p.293–295]. En particulier, si  $L = \frac{1}{4}$ , on trouve

$$C_h\left(\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right) = (k^{-1}(1/16))^{1/4} \approx 0.12506114718856.$$

Pour appliquer notre méthode à cette exemple on a choisi de découper  $E$  en  $n$  segments de longueurs pseudo-hyperboliques égales supportant chacun des mesures de Lebesgue normalisées. Les intégrales doubles sont calculables symboliquement pour cet exemple, ce qui permet d'alléger considérablement les temps de calcul et d'avoir une plus grande fiabilité au niveau des bornes.

TABLE 4.3 –  $E = [-1/4, 1/4]$  et  $\kappa(x, y) = \log \left| \frac{1-x\bar{y}}{x-y} \right|$

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	Temps $Q(B)$	Temps $Q(A)$
$2^8$	0.124953288614548	0.131495130458940	< 1s	< 1s
$2^9$	0.125007213094260	0.128817812591542	< 1s	< 1s
$2^{10}$	0.125034178962227	0.127233996994999	5s	5s
$2^{11}$	0.125047662783606	0.126306899252162	49s	46s
$2^{12}$	0.125054404913800	0.125769615114029	5m49s	6m
Extrapol	0.125061147196796	0.125066466221734		

On voit clairement sur le tableau 4.3 que les temps de calcul des deux bornes sont comparables. Pour  $n = 2^{12}$ , les bornes supérieure et inférieure coïncident sur trois décimales et les valeurs extrapolées coïncident sur cinq décimales. On remarque en fait que la valeur extrapolée pour la borne inférieure est même fiable jusqu'à dix décimales!

### Segments euclidiens parallèles

Considérons pour notre deuxième exemple le cas d'un ensemble disconnexe. Pour ne pas répéter l'exemple du cas euclidien nous avons choisi cette fois deux segments euclidiens

qui ne sont pas supportés par la même droite. Nous travaillerons avec le compact  $E := [-\frac{1}{4}, 0] \cup [\frac{i}{4}, \frac{1}{4} + \frac{i}{4}]$  dont nous ne connaissons pas la capacité.

Pour utiliser l'algorithme on a découpé le segment  $[-\frac{1}{4}, 0]$  en segments de longueurs pseudo-hyperboliques égales. De même, pour  $[\frac{i}{4}, \frac{1}{4} + \frac{i}{4}]$ , on a divisé  $[0, \frac{1}{4}]$  en segments de même longueurs pseudo-hyperboliques, et on a translaté cet ensemble de  $i/4$ . Une fois de plus, les mesures utilisées sont des mesures de Lebesgue normalisées sur chacun des éléments de la partition. Lors de la construction de la matrice  $B$  nous avons calculé la première intégrale symboliquement et la seconde a été calculée numériquement avec Matlab. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4.

TABLE 4.4 –  $E = [-1/4, 0] \cup [i/4, (1+i)/4]$  et  $\kappa(x, y) = \log \left| \frac{1-x\bar{y}}{x-y} \right|$

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.153549994838924	0.160787867048081	18s	< 1s
$2^9$	0.153622185205796	0.157892021788785	1m12s	< 1s
$2^{10}$	0.153658289079808	0.156150192944051	4m52s	6s
$2^{11}$	0.153676343103900	0.155116322488275	19m55s	47s
$2^{12}$	0.153685370625969	0.154510067947591	1h22m32s	6m3s
Extrapol	0.153694398507919	0.153700868498885		

Les temps de calcul nécessaires pour les bornes supérieures sont comparables à ceux du cas précédent. Cependant, ceux de la borne inférieure sont considérablement plus longs. Cela est du au fait qu'une partie des calculs a été effectuée de façon numérique. Pour  $n = 2^{12}$  les bornes supérieures et inférieures pour la capacité coïncident à deux décimales et la différence entre les valeurs extrapolées est inférieure à  $10^{-5}$ . La valeur exacte de la capacité ne nous est pas connue, mais on peut supposer à la vue des exemples précédents et à venir que la valeur extrapolée à partir des bornes inférieures est plus proche de la bonne valeur de la capacité.

### 4.2.3 Capacité Newtonienne et de Riesz

Les simulations présentées ici sont celles de J. Rostand présentées dans l'article [RRR2]. Pour les exemples de cette section on a choisi de prendre  $X := \mathbb{R}^3$  et  $H(t) := t^{-\alpha}$  où  $\alpha \in (0, 3)$ . Ainsi  $\text{cap}_H$  est la capacité de Riesz et le cas  $\alpha = 1$  correspond tout simplement à la capacité Newtonienne classique.



TABLE 4.5 –  $E = [0, 1]$  et  $\kappa(x, y) = |x - y|^{-1/2}$ 

$n$	LB : $Q(B)^{-1}$	UB : $Q(A)^{-1}$	LB time	UB time
$2^{10}$	0.381364771045	0.401053376713	< 1s	< 1s
$2^{11}$	0.381372325052	0.395264387349	< 1s	< 1s
$2^{12}$	0.381376103065	0.391182431674	< 1s	< 1s
$2^{13}$	0.381377992324	0.388302742089	< 1s	< 1s
$2^{14}$	0.381378937016	0.386270313602	4.7s	4.5s
$2^{15}$	0.381379409378	0.384835316943	25.5s	25.1s
$2^{16}$	0.381379645562	0.383821813491	2m45s	2m45s
$2^{17}$	0.381379763655	0.383105813912	19m49s	20m28s
$2^{18}$	0.381379822699	0.382599883234	3h25m31s †	3h25m12s †
Extr.	0.381379881751	0.381379881719		

### Intervalle

Soit  $E = [0, 1]$  vu comme intervalle de l'axe des  $x$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $\alpha \in [1, 3)$  on a  $\text{cap}_H(E) = 0$  et donc on va seulement considérer  $\alpha \in (0, 1)$ .

Afin de calculer  $\text{cap}_H(E)$  on a découpé  $E$  en des segments de longueurs égales et on a décidé une fois encore de choisir des mesures de Lebesgue normalisées sur chacun des éléments de la partition. Les calculs d'intégrales ont été réalisés symboliquement.

Puisque la partition de  $E$  est symétrique par rapport au centre de  $E$ , il existe un vecteur symétrique  $\lambda \in \Delta_n$  pour lequel  $Q(A)$  est atteint et même chose pour  $Q(B)$ . On peut donc réduire la taille des matrices  $A$  et  $B$  d'un facteur 2.

Le tableau 4.5 présente les bornes supérieures et inférieures obtenues pour différentes valeurs de  $n$  dans le cas du segment  $[0, 1]$  pour  $\alpha = 1/2$ .

Pour toutes les valeurs de  $n$  sur cet exemple,  $Q(A)$  et  $Q(B)$  sont calculables via un système linéaire (c.f. Proposition 4.2.1).

Une fois de plus on observe que les bornes inférieures convergent plus rapidement que les bornes supérieures. Si on interpole les deux suites par une courbe de la forme  $A +$

†. A la ligne  $n = 2^{18}$ , le problème demande 66.1GB de mémoire. Puisque la mémoire disponible n'est que de 64GB on a dû utiliser de la mémoire virtuelle. Les temps indiqués sont les temps réels auquel on a soustrait le temps d'accès à la mémoire virtuelle.



$Be^{-Cn}$ , on trouve  $C \approx 0.50$  pour la borne supérieure et  $C \approx 1$  pour la borne inférieure. Ainsi la méthode des énergies (borne inférieure) semble fournir de meilleurs estimés pour la capacité que la méthode des diamètres (borne supérieure). Même si les bornes supérieures et inférieures ne semblent pas très proches l'une de l'autre, leur extrapolation l'est beaucoup plus, la différence entre les deux était d'environ  $3 \times 10^{-11}$ . Il est donc très raisonnable de penser que  $\text{cap}_H([0, 1]) \approx 0.381379881751$  et que les dix premières décimales sont bonnes.

A présent fixons  $n = 2^{15}$  et laissons  $\alpha$  parcourir le segment  $[0, 1]$ . La figure 4.1 nous montre le graphe des bornes supérieures et inférieures pour  $\text{cap}_H([0, 1])$ . On sait que la capacité Newtonienne de  $[0, 1]$  est 0 et on peut donc affirmer que la méthode des diamètres est moins efficace lorsque  $\alpha$  s'approche de 1.

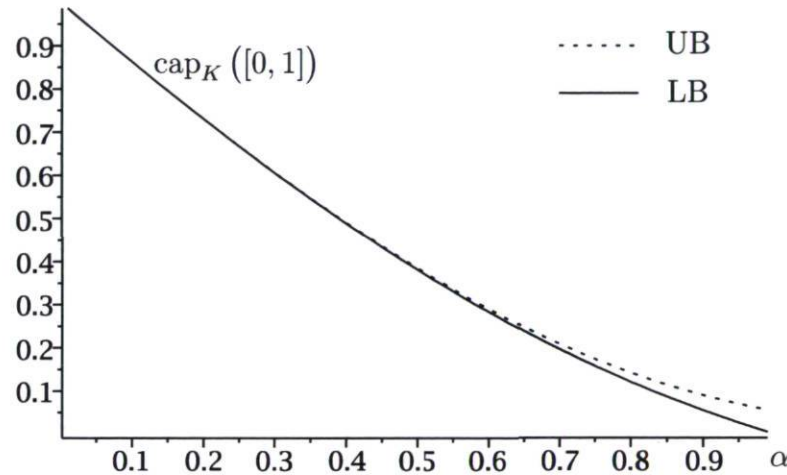


FIGURE 4.1 – Graphique de  $\text{cap}_K([0, 1])$  pour  $\alpha \in (0, 1)$

#### 4.2.4 Capacité pondérée

##### Poids de Freud

Le premier exemple sera celui de  $\Sigma := [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  avec  $w(x) := e^{-|x|}$ . Grâce à la proposition A.3 de [RRR1], on sait que  $\text{supp } \mu_w = \Sigma$  et

$$C_w([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = \frac{\pi}{4} e^{-3/2} \approx 0.175246017979155.$$

Les résultats de la simulation sont énoncés dans le tableau 4.6.

TABLE 4.6 –  $\Sigma = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  avec  $w(x) = e^{-|x|}$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.175244577186698	0.186213489058614	< 1s	< 1s
$2^9$	0.175245658007104	0.181317504685168	< 1s	< 1s
$2^{10}$	0.175245928016852	0.178595243312804	7.8s	6.7s
$2^{11}$	0.175245995492165	0.177084121526472	1m11s	49s
$2^{12}$	0.175246012358186	0.176249090593013	10m16s	9m35s
$2^{13}$	0.175246016575734	0.175790315240715	1h17m1s	1h2m42s
Extrapol	0.175246017984476	0.175261449577212		

Cet exemple illustre le fait que les méthodes de calcul s'adapte bien au cas pondéré. On obtient 3 décimales en un peu plus d'une heure de calcul et l'extrapolation nous en donne 4. Il se trouve malgré tout que cet ensemble est relativement simple et on mettra quand même en évidence quelques problèmes grâce aux exemples à venir.

### Poids de Jacobi

Soit  $\Sigma := [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$  avec  $w(x) := 1 - x^2$ . La proposition A.4 de [RRR1] nous permet d'affirmer que  $\text{supp } \mu_w = [-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}] \subsetneq \Sigma$  et

$$C_w([-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]) = \frac{244140625}{2579890176} \sqrt{5} \approx 0.211603981691849.$$

Les résultats pour cette simulation sont présentés dans le tableau 4.7.

TABLE 4.7 –  $\Sigma = [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$  avec  $w(x) = 1 - x^2$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.211603959412184	0.223124264048633	1.1s	1.1s
$2^9$	0.211603972375853	0.217927873197383	3.1s	2.9s
$2^{10}$	0.211603981152753	0.215059472437215	1m7s	58s
$2^{11}$	0.211603981623288	0.213482361122137	6m4s	5m33s
$2^{12}$	0.211603981682902	0.212619734954566	1h40m33s	1h15m19s
$2^{13}$	0.211603981689368	0.212150533131065	17h46m31s	6h52m10s
Extrapol	0.211603981690172	0.211608640094940		

On doit s'attendre à ce que les résultats ne changent pas si on remplace  $\Sigma = [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$  par  $\Sigma = [-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ . En effet,  $\mu_w$  ne change pas, donc la capacité ne doit pas changer non plus. Les résultats sont récapitulés dans le tableau 4.8.

TABLE 4.8 –  $\Sigma = [-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$  avec  $w(x) = 1 - x^2$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.211603957116081	0.222442031570899	< 1s	1.2s
$2^9$	0.211603978224932	0.217550904146845	1.2s	< 1s
$2^{10}$	0.211603981210123	0.214851816558745	15s	5.9s
$2^{11}$	0.211603981624972	0.213368531491454	1m59s	44s
$2^{12}$	0.211603981681843	0.212557681909393	16m20s	5m19s
$2^{13}$	0.211603981692660	0.212116893408353	2h8m11s	41m31s
Extrapol	0.211603981691712	0.211607978202852		

On se rend compte en comparant les tableaux 4.7 et 4.8 que les valeurs sont essentiellement les mêmes, comme on pouvait s'y attendre, même si le second tableau semble indiquer une valeur à peine plus proche de celle attendue. Cependant on remarque une réelle différence dans les temps de calcul pour les deux bornes lors du premier exemple, à savoir celui de  $\Sigma = [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$  où les temps de calcul sont environ dix fois supérieurs à ceux pour l'exemple de  $\Sigma = [-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ . Cela laisse penser que le temps de calcul est plus important lorsque  $\text{supp } \mu_w \subsetneq \Sigma$ . On va voir que c'est encore le cas sur l'exemple du poids de Laguerre.

### Poids de Laguerre

On considère à présent l'exemple de  $\Sigma := [0, 1]$  pondéré par  $w(x) := e^{-x}$ . En vertu de la proposition A.2 de [RRR1], on sait que  $\text{supp } \mu_w = \Sigma$  et

$$C_w([0, 1]) = \frac{1}{4}e^{-7/8} \approx 0.104215504919627.$$

Les résultats des simulations sont présentés dans le tableau 4.9.

Cet exemple ressemble beaucoup au cas du poids de Freud sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  aussi bien en termes de précision que de rapidité de calcul. Cela n'est pas tellement surprenant puisque  $\text{supp } \mu_w = \Sigma$ . Regardons à présent ce qui se passe avec le même poids pour  $\text{supp } \mu_w = [0, 2] \subsetneq \Sigma = [0, 3]$ .

Selon la proposition A.2 de [RRR1], on sait que  $\text{supp } \mu_w = [0, 2] \subsetneq \Sigma$  et

$$C_w([0, 3]) = \frac{1}{2}e^{-3/2} \approx 0.111565080074215.$$

Les calculs apparaissent dans le tableau 4.10.



TABLE 4.9 –  $\Sigma = [0, 1]$  avec  $w(x) = e^{-x}$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.104098463875280	0.110948663699465	< 1s	< 1s
$2^9$	0.104156971658346	0.108115667608033	< 1s	< 1s
$2^{10}$	0.104186235109877	0.106460813993345	6.7s	6.6s
$2^{11}$	0.104200869220688	0.105499481142957	1m	59s
$2^{12}$	0.104208186871743	0.104944811775130	10m8s	8m14s
$2^{13}$	0.104211845846129	0.104627073899878	1h28m5s	1h14m5s
Extrapol	0.104215504920057	0.104220383062641		

TABLE 4.10 –  $\Sigma = [0, 3]$  avec  $w(x) = e^{-x}$ 

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^8$	0.111264326286595	0.125967686467425	1.2s	2.2s
$2^9$	0.111414682002088	0.119889438874609	5.7s	9.4s
$2^{10}$	0.111489875695429	0.116369613086130	53s	1m18s
$2^{11}$	0.111527476542314	0.114326874688369	8m34s	13m5s
$2^{12}$	0.111546277971731	0.113144082041945	1h44m24s	20m28s
$2^{13}$	0.111555678938731	0.112462470893899	23h40m38s	21h18m16s
Extrapol	0.111565080072163	0.111422828404287		

La précision est à peu près la même que pour les autres simulations mais on remarque encore une fois que le temps de calcul des bornes aussi bien supérieure qu'inférieure est plus important que pour les exemples où  $\text{supp } \mu_w \subsetneq \Sigma$ .

Cette différence marquée en termes de temps de calcul nous pousse donc à développer des méthodes pour évaluer le support ou, du moins, une borne sur celui-ci. L'idée est donc d'utiliser les algorithmes "adaptatifs" présentés au début de la section précédente pour éviter d'avoir à perturber les simulations par des calculs superflus et ainsi gagner en termes de rapidité de calcul.

#### 4.2.5 Le cas de la dimension 2

Nous avons vu que les algorithmes fonctionnaient très bien lorsqu'il était question de compacts relativement simples, notamment lorsque ceux-ci n'étaient que de dimension 1. Nous proposons ici deux exemples lorsque le compact est plus complexe et plus parti-

culièrement lorsque celui-ci est de dimension 2. Ceci devrait rendre les calculs beaucoup plus difficiles pour la méthode des énergies puisque les intégrales doubles deviennent des intégrales quadruples! Sur chaque exemple les deux premières intégrations ont été effectuées symboliquement et les deux suivantes ont été réalisées à l'aide de Matlab. En ce qui concerne la méthode des diamètres, elle ne devrait pas être affectée par le changement de dimension lors de la création des matrices puisque les calculs impliqués restent très simples. Il est quand même important de noter que cette simplicité est due aux exemples choisis et à la géométrie simple des compacts étudiés.

### Le carré

Le premier exemple que nous proposons d'étudier reste relativement simple dans sa géométrie puisqu'il s'agit du carré  $[0, 1/4]^2$ . La capacité de ce dernier est donnée par  $C(\Sigma) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{16\pi^{3/2}} \approx 0.147542574877011$  (c.f. [Ran, p.135]). L'approche que nous avons est très naïve puisque nous allons complètement partitionner le carré et appliquer les méthodes décrites. Pourtant, nous savons que le support de  $\mu_\Sigma$  est  $\partial\Sigma$ , mais le but de la simulation est surtout de voir le changement de comportement lorsqu'il y'a un changement de dimension. Les résultats de la simulation sont présentés dans le tableau 4.11.

TABLE 4.11 –  $\Sigma = [0, 1/4]^2$  avec  $w = 1$  et  $\kappa(x, y) = \log 1/|x - y|$

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^4$	0.129376578246781	0.215288392722933	< 1s	< 1s
$2^6$	0.137750689159229	0.186677903032968	< 1s	< 1s
$2^8$	0.142374698471463	0.170016914506371	4.7s	1.3s
$2^{10}$	0.144855219593225	0.160357783585019	2m	1m58s
$2^{12}$	0.146158648396845	0.154790199337054	3h24m10s	2h58m58s
Extrapol	0.147527275474647	0.147740480497181		

La convergence est remarquablement plus lente dans le cas de la dimension 2, avec seulement deux bonnes décimales pour la capacité à l'ordre  $2^{12}$  et après plus de trois heures de calcul pour la méthode des énergies et seulement quatre après extrapolation. La méthode des diamètres ne fournit quant à elle qu'une seule bonne décimale dans des temps un peu plus courts mais somme toute similaires et fournit trois bonnes décimales après extrapolation. Il est intéressant de noter que si la différence des méthodes était remarquable en termes de précision sur les exemples précédents, elle l'est donc un peu moins sur cet exemple, du moins après extrapolation.

Nous allons voir si le même comportement est remarqué sur un exemple un peu plus



compliqué, à savoir le même carré, mais pondéré par  $w(x + iy) := \exp(-\max\{x, y\})$ . Une fois de plus, nous allons partitionner le carré au complet, même s'il est tout à fait raisonnable de penser que le support de  $\mu_w$  est un sous ensemble de  $\partial\Sigma \cup \{x = y\}$ . De plus, nous avons choisi de réaliser numériquement les intégrales du poids  $w$ . La valeur de la capacité ne nous est pas connue. Les résultats sont indiqués au tableau 4.12.

TABLE 4.12 –  $\Sigma = [0, 1/4]^2$  avec  $w = \exp(-\max\{x, y\})$  et  $\kappa(x, y) = \log 1/|x - y|$

$n$	$\exp(-Q(B))$	$\exp(-Q(A))$	temps $Q(B)$	temps $Q(A)$
$2^4$	0.0922117663264346	0.166944423992478	1.2s	< 1s
$2^6$	0.0973516215074968	0.137557996645590	8.1s	< 1s
$2^8$	0.1001741894364560	0.122090205265653	1m54s	2.2s
$2^{10}$	0.1016993723912330	0.113688253824079	31m3s	2m24s
$2^{12}$	0.1025072999471440	0.109058664613999	10h56m9s	3h42m52s
Extrapol	0.1032791822726549	0.103270841417017		

La précision semble meilleure que pour le cas précédent puisque les valeurs des bornes supérieure et inférieure coïncident à deux décimales à l'itération  $n = 2^{12}$  et à cinq décimales après extrapolation. Il faut cependant remarquer que l'ordre entre les valeurs inférieure et supérieure extrapolées n'est pas respecté. Les temps de calcul sont plus longs que dans le cas non pondéré mais cela est sans aucun doute dû au fait que les intégrations du poids ont été réalisées numériquement. La méthode des diamètres ne semble pas véritablement avoir un comportement différent sur cet exemple que sur ceux qui précèdent.

## 4.2.6 Algorithmes modifiés

### Laguerre

Nous allons étudier une deuxième fois le cas du poids de Laguerre sur  $\Sigma = [0, 3]$  en utilisant un algorithme adaptatif. Rappelons que  $\text{supp } \mu_w = [0, 2] \subsetneq \Sigma$  et que  $C_w([0, 3]) = \frac{1}{2}e^{-3/2} \approx 0.111565080074215$ . La motivation pour utiliser un algorithme adaptatif sur cet exemple est que l'ensemble que l'on cherche à mesurer ne coïncide pas avec le support de sa mesure d'équilibre. Il peut sembler que la méthode se justifie seulement *a posteriori* ou parce que le résultat théorique est connu avant d'effectuer les simulations mais la figure 4.2 permet de visualiser les «potentiels discrets» décrits dans la section précédente. Cela permet de justifier également le fait que la méthode adaptative ne s'applique pas pour la méthode des diamètres mais uniquement pour



la méthodes des énergies. En effet, les ensembles non chargés que l'on obtient avec l'algorithme des diamètres semblent souvent être chargés par la mesure d'équilibre.

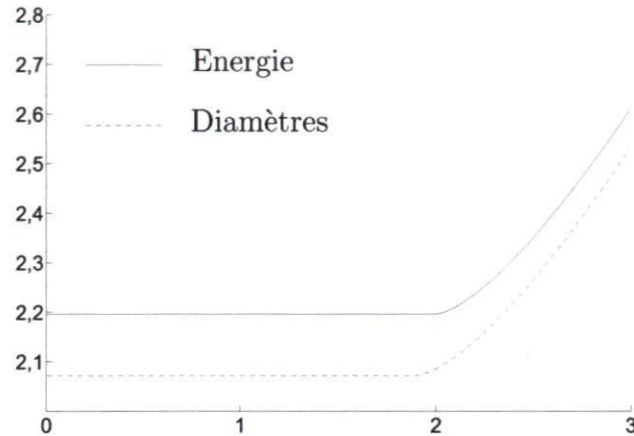


FIGURE 4.2 – Graphique représentatifs des «potentiels discrets» sur  $[0, 3]$

Si la figure 4.2 permet d'établir que les potentiels discrets représentent une bonne approximation du potentiel d'équilibre, la figure 4.3 montre une approximation en énergie de la mesure d'équilibre. La figure a été réalisée en affichant la charge de chacun des ensembles de la partition à  $2^6$  éléments. On voit notamment une cassure dans la charge aux alentours de 2, les ensembles de  $[2, 3]$  n'étant pas chargés. Ceci permet une fois de plus de penser que l'algorithme des énergies fournit le support d'équilibre.

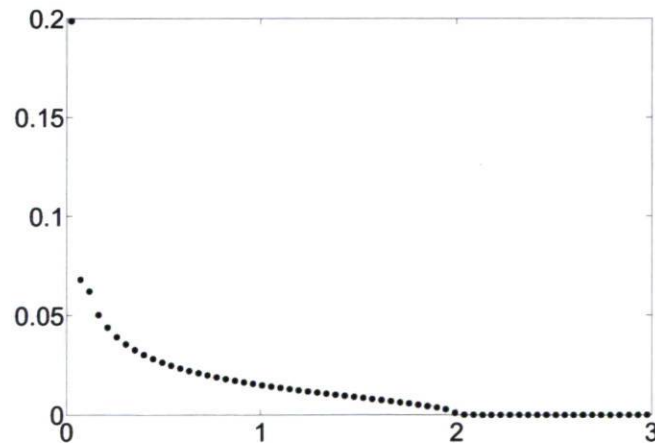


FIGURE 4.3 – Charge de  $\mu_{2^6}$  sur  $[0, 3]$

Pour réaliser les calculs à l'aide de l'algorithme adaptatif, on commence avec une simulation standard pour le cas  $n = 2^8$  afin d'obtenir  $\mu_{2^8}$  puis on décide par la suite de ne

pas considérer à l'étape  $2^{n+1}$  les intervalles non chargés par  $\mu_{2^n}$ . On obtient ainsi un algorithme qui «s'adapte» au compact dont il doit calculer la capacité en fonction des itérations précédentes.

TABLE 4.13 –  $\Sigma = [0, 3]$  avec  $w(x) = e^{-x}$ , version adaptative

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^8$	0.111264326286595	1.24s
$2^9$	0.111414682002082	< 1s
$2^{10}$	0.111489875695429	1.3s
$2^{11}$	0.111527476542303	16s
$2^{12}$	0.111546277971719	2m9s
$2^{13}$	0.111555678938748	16m7s
$2^{14}$	0.111560379485379	2h6m10s
$2^{15}$	0.111562729774443	17h1m52s
Extrapol	0.111565080073967	

Les résultats sont éloquentes, le temps de calcul est pratiquement diminué d'un facteur cent. On remarque que la valeur extrapolée et la vraie valeur de la capacité coïncident sur onze décimales ce qui est semblable à l'algorithme standard. Cependant rien ne permet a priori de justifier que la méthode soit rigoureuse ni que les valeurs calculées soient effectivement des bornes inférieures ou même convergent vers la valeur souhaitée. Pourtant sur cet exemple, la méthode semble justifiée *a posteriori* puisque ces simulations paraissent en parfait accord avec celles du cas standard.

## Le carré

Les deuxième et troisième exemples d'algorithme adaptatif seront testés sur le carré  $[0, 1/4]^2$  pour  $w \equiv 1$  et  $w(x, y) = \exp(-\max\{x, y\})$ . Les résultats de ces simulations seront respectivement présentés dans les tableaux 4.14 et 4.15.

On voit sur le tableau 4.14 que les résultats sont exactement les mêmes que dans le cas classique mais que les temps sont très largement diminués. En effet, le temps de calcul à l'ordre  $2^{12}$  est pratiquement diminué d'un facteur 60! L'extrapolation permet ainsi d'avoir une décimale exacte supplémentaire, même si la simulation à l'ordre  $2^{14}$  n'en donne toujours que deux. Sur un tel exemple il est très clair que la méthode adaptative est à privilégier, mais il faut rappeler qu'*a priori* rien ne permettait de la justifier.

TABLE 4.14 –  $\Sigma = [0, 1/4]^2$  avec  $w = 1$ , version adaptative

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^4$	0.129376578246781	< 1s
$2^6$	0.137750689159228	< 1s
$2^8$	0.142374712188854	2.2s
$2^{10}$	0.144855241848626	12s
$2^{12}$	0.146158648396849	3m8s
$2^{14}$	0.146834768829044	2h49m20s
Extrapol	0.147545178082796	

TABLE 4.15 –  $\Sigma = [0, 1/4]^2$  avec  $w(x, y) = e^{-\max\{x,y\}}$ , version adaptative

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^4$	0.092211766326435	1.2s
$2^6$	0.097320635573298	17s
$2^8$	0.100045075169865	1m31s
$2^{10}$	0.101483885419605	6m57s
$2^{12}$	0.102235416566816	29m36s
$2^{14}$	0.102624799485563	2h2m53s
Extrapol	0.103035010508344	

Le tableau 4.15 montre une fois de plus des résultats très proches de ceux obtenus à l'aide de la méthode originale, et ce, dans des temps inférieurs. La précision est sensiblement la même et la faible différence avec la première méthode peut facilement s'expliquer par le fait que les intégrations ont été réalisées numériquement. La méthode adaptative semble donc, une fois de plus, faire ses preuves sur cet exemple.

## Jacobi

Regardons à présent ce qui se passe avec l'exemple du poids de Jacobi sur  $\Sigma = [-4/5, 4/5]$ , c'est à dire pour  $w(x) = 1 - x^2$ .

La courbe en pointillés sur la figure 4.4 représente le potentiel discret des énergies pour  $n = 2^6$ . Les autres courbes représentent les potentiels discrets des diamètres pour  $n = 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$  respectivement. On voit que la méthode des énergies semble une fois de plus fournir une bonne approximation du potentiel d'équilibre et de la répartition



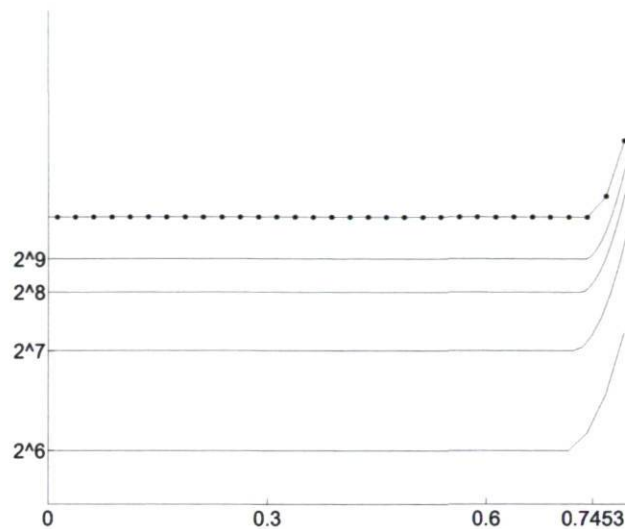


FIGURE 4.4 – Graphiques représentatifs des «potentiels discrets» sur  $[0, 4/5]$

de la charge de  $\mu_w$ . On voit notamment que la fonction est constante sur un ensemble proche de celui attendu. De plus, les courbes représentatives des potentiels discrets pour  $n \geq 2^6$  semblent se confondre. La méthode des diamètres se comporte sensiblement de la même façon mais semble converger beaucoup plus lentement. Le support des potentiels à chaque ordre est inclus dans  $\text{supp } \mu_w$ .

TABLE 4.16 –  $\Sigma = [-4/5, 4/5]$  avec  $w(x) = 1 - x^2$ , version adaptative

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^8$	0.211603959412184	< 1s
$2^9$	0.211603968728864	< 1s
$2^{10}$	0.211603969877630	5.1s
$2^{11}$	0.211603970582129	38s
$2^{12}$	0.211603971114697	5m38s
$2^{13}$	0.211603971443397	41m52s
$2^{14}$	0.211603971634213	5h21h33s
$2^{15}$	0.211603971703757	41h48m
Extrapol	0.211603976926353	

La version adaptative de notre algorithme semble ici moins efficace que précédemment, les calculs sont effectivement toujours aussi rapides mais la précision semble étrangement moins bonne que dans le cas original. L'extrapolation ne donne également que 7 décimales

correctes, ce qui n'est pas mieux que l'algorithme à l'ordre  $2^8$ . Il s'avère en fait que les ensembles discriminés à l'étape  $2^8$  pour faire fonctionner l'algorithme adaptatif ne sont pas bons. Une étude plus minutieuse permet de remarquer que les seuls ensembles conservés sont inclus dans  $[-0.74375, 0.74375]$  tandis que l'on sait que  $\text{supp } \mu_w = [-0.74535599\dots, 0.74535599\dots]$ . L'initialisation à  $n = 2^8$  n'est donc pas bonne et une initialisation à  $2^9$  donne lieu au même problème. On se rend en fait compte que les supports de  $\mu_n$  ne contiennent pas  $\text{supp } \mu_w$  et qu'ils sont même inclus dans  $\text{supp } \mu_w$  à la différence de l'exemple précédent. Ainsi la méthode adaptative ne peut s'appliquer ici. L'exemple précédent laissait peut-être penser que  $\text{supp } \mu_{n+1} \subset \text{supp } \mu_n$  mais le tableau 4.17 de l'exemple du poids de Jacobi prouve le contraire. Il ne semble donc y avoir aucune «monotonie» dans le comportement des ensembles de mesure nulle. Ceci montre la grande faiblesse de la première version adaptative de l'algorithme.

TABLE 4.17 –  $\Sigma = [-4/5, 4/5]$  avec  $w(x) = 1 - x^2$ , estimation du support

$n$	Support de $\mu_n$
$2^8$	$[-0.74375, 0.74375]$
$2^9$	$[-0.746875, 0.746875]$
$2^{10}$	$[-0.7453125, 0.7453125]$
$2^{11}$	$[-0.7453125, 0.7453125]$
$2^{12}$	$[-0.7453125, 0.7453125]$
$2^{13}$	$[-0.7453125, 0.7453125]$

Puisqu'il apparaît que la méthode adaptative ne soit pas satisfaisante sans avoir une idée préalable du comportement des ensembles de mesure nulle, nous allons la laisser de côté et nous consacrer à l'étude de la seconde version adaptative.

### Version du minorant

Pour faire fonctionner cet algorithme on a besoin d'avoir une suite de fonctions qui est majorée par le potentiel d'équilibre. Puisque trouver un minorant pour le potentiel  $P_{\nu_w}$  semble un véritable problème en soi, nous allons utiliser la conjecture 4.1.4 afin de voir ce qui se passe. De plus, la méthode du minorant ne permet pas réellement d'estimer  $\text{supp } \mu_w$  mais seulement  $\{z \in \mathbb{C}, P_{\mu_w}(z) + Q(z) = F_w\}$  qui contient  $\text{supp } \mu_w$  d'après le théorème de Mhaskar–Saff. Dans le cas logarithmique non pondéré, on sait que  $P_\mu$  est constant sur  $\Sigma$  tout entier et le même phénomène semble se produire dans le cas pondéré. Nous ne présenterons donc notre algorithme que dans le cas du poids de Laguerre. Rappelons que  $C_w([0, 3]) = \frac{1}{2}e^{-3/2} \approx 0.111565080074215$ . Les résultats sont compilés dans le tableau 4.18.

TABLE 4.18 –  $\Sigma = [0, 3]$  avec  $w(x) = e^{-x}$ , version du minorant

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^8$	0.111264326286595	1.24s
$2^9$	0.111414682002082	1.3s
$2^{10}$	0.111489875695429	7.3s
$2^{11}$	0.111527476542314	17s
$2^{12}$	0.111546277971708	3m
$2^{13}$	0.111555678938698	59m55s
$2^{14}$	0.111560379485391	8h56m51s
Extrapol	0.111565080074422	

TABLE 4.19 –  $\Sigma = [-4/5, 4/5]$  avec  $w(x) = 1 - x^2$ , version du minorant

$n$	$Q(B)$	Temps
$2^8$	0.211603959412184	< 1s
$2^9$	0.211603972375854	1.1s
$2^{10}$	0.211603981152851	9s
$2^{11}$	0.211603981622645	2m33s
$2^{12}$	0.211603981683677	3h29m5s
$2^{13}$	0.211603981695089	2h27m33s

On voit sur l'exemple du poids de Jacobi, récapitulé dans le tableau 4.19, que le temps de calcul de l'algorithme adaptatif est raisonnable mais qu'il ne permet pas nécessairement de gagner du temps par rapport à la version originale. Par exemple, à l'ordre  $2^{13}$  le temps de calcul semble légèrement supérieur et l'est très largement à l'ordre  $2^{12}$ . De plus, la valeur fournie à l'ordre  $2^{13}$  est supérieure à la valeur théorique que l'on cherche à calculer, qui est  $C_w(\Sigma) = 0.211603981691849$ . Ceci est très probablement dû à une instabilité numérique.

La méthode adaptative basée sur le minorant semble donc être un très bon compromis entre les méthodes originale et adaptative. Cette méthode semble plus rigoureuse et le serait parfaitement s'il était possible d'exhiber un minorant explicite pour le potentiel d'équilibre. La précision est excellente dans le cas du poids de Laguerre puisque les douze premières décimales de l'extrapolation sont justes. Le cas du poids de Jacobi semble poser problème, ce qui ne permet pas de tirer de conclusion sur cet exemple.

La voie naturelle à explorer est donc celle de la recherche d'une suite de fonctions  $h_n$  vérifiant  $h_n \uparrow P_{\mu_w}$  puisque cette suite pourrait permettre de borner le support et également d'améliorer la vitesse de convergence des algorithmes.



# Conclusion

Le but de cette thèse était de trouver des algorithmes de calcul de la capacité définie par un noyau et de la capacité pondérée. La thèse répond complètement à plusieurs questions autour du calcul de la capacité. On a réussi à trouver des bornes supérieures et des bornes inférieures à la capacité d'un compact dans le cas le plus général des capacités à noyau. Si les bornes inférieures pour la capacité découlent immédiatement de sa définition, les bornes supérieures sont déjà plus subtiles. Dans le cas de ces dernières, on montre le formidable résultat de la convergence vers la valeur souhaitée, et ce sans aucune hypothèse sur le compact ou sur l'espace métrique. Les bornes inférieures se comportent un peu moins bien du point de vue théorique puisqu'on impose des conditions sur les mesures que l'on choisit pour réaliser les calculs mais il semble cependant, à la vue des exemples, qu'il n'y ait pas de problème de convergence lorsque l'on fait un choix «raisonnable» de mesures. Il apparaît très clairement que la méthode des énergies converge plus rapidement que la méthode des diamètres et ce, sur tous les exemples considérés. Cela n'est pas véritablement surprenant compte tenu de la définition des méthodes. Il apparaît également que les temps de calcul nécessaires à la minimisation de la forme quadratique dépendent fortement de la localisation du support de la mesure d'équilibre. En effet, on a remarqué sur chacun des exemples que le temps de calcul était considérablement augmenté lorsque le support était un sous ensemble strict de l'ensemble étudié mais la précision des calculs n'est pour autant pas significativement améliorée lorsque l'on restreint l'algorithme au support d'équilibre comme le montrent les exemples des poids de Freud et de Jacobi.

Si aucune preuve rigoureuse n'a pu être apportée, il est très clair, et ce dans tous les exemples, que l'algorithme des énergies permet d'approximer le support de la mesure d'équilibre. On peut même trouver une façon rigoureuse d'estimer une borne supérieure sur le support en utilisant le Théorème 4.1.1 conjointement au théorème de Frostman ou au théorème de Mhaskar–Saff dans le cas pondéré. On a cependant remarqué que la méthode des énergies ne pouvait à elle seule ni fournir une borne supérieure ni une borne inférieure pour le support d'équilibre, notamment en étudiant les cas du poids de

Jacobi sur  $[-4/5, 4/5]$  et de Laguerre sur  $[0, 3]$ . Une possible approche à ce problème est l'idée énoncée au début du dernier chapitre en étudiant une version discrète et matricielle du théorème de Frostman. Là encore, aucune démonstration n'est donnée, mais il apparaît que les potentiels discrets, s'ils se comportent comme les potentiels d'équilibre, convergent également vers ces derniers. De plus, il n'est pas déraisonnable de penser que la matrice des diamètres en fournisse même une borne inférieure.

Cette thèse répond donc complètement aux questions posées en introduction et semble même donner «gratuitement» des informations supplémentaires sur les comportements à l'équilibre. Cependant comme déjà mentionné, ces informations ne peuvent pas être totalement fiables tant qu'aucune preuve rigoureuse de convergence n'est donnée. Il serait également très intéressant de voir si les idées présentées peuvent se généraliser ou s'adapter à des capacités différentes et notamment au calcul de la capacité analytique  $\gamma$  d'un ensemble compact du plan complexe. Une telle approche pourrait-elle aboutir à infirmer l'hypothèse de sous-additivité de la fonction  $\gamma$  ?

# Bibliographie

- [Car] L. Carleson, *Selected problems on exceptional sets*, The Wadsworth mathematics series, Wadsworth international group, Belmont, California, 1983.
- [GRS] P.R. Graves-Morris, D.E. Roberts, A. Salam, *The epsilon algorithm and related topics*, J. Comput. Appl. Math., vol. 122, 51–80, 2000.
- [MarGar] J. Garnett, D. Marshall, *Harmonic measure*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [Lan] N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Springer-Verlag, New York, 1972, Translated form the Russian by A. P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 180.
- [Neh] Z. Nehari, *Conformal mapping*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London, 1952.
- [RRR1] Q. Rajon, T. Ransford, J. Rostand, *Computation of capacity via quadratic programming*, J. Math. Pures. Appl, à paraître.
- [RRR2] Q. Rajon, T. Ransford, J. Rostand, *Computation of weighted capacity*, J. Approx. vol. 162, 1187–1203 .
- [Ran] T. Ransford, *Potential theory in the complex plane*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [RanRos] T. Ransford, J. Rostand, *Computation of capacity*, Math. Comp. 76 (2007), no. 259, 1499–1520.
- [SafTot] E.B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 316, Springer-Verlag, Berlin, 1997.