



Les superpolynômes de Jack et le modèle Calogero-Moser-Sutherland $\mathcal{N} = 2$

Thèse

Ludovic Alarie-Vézina

Doctorat en Physique
Philosophiæ doctor (Ph.D.)

Québec, Canada

© Ludovic Alarie-Vézina, 2017

Les superpolynômes de Jack et le modèle Calogero-Moser-Sutherland $\mathcal{N} = 2$

Thèse

Ludovic Alarie-Vézina

Sous la direction de:

Pierre Mathieu, directeur de recherche
Luc Lapointe, codirecteur de recherche

Résumé

Dans cet ouvrage, on présente une généralisation des polynômes symétriques de Jack, les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$, et on discute de ses connections avec le modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique (tCMS) supersymétrique $\mathcal{N} = 2$. On fait d'abord une brève introduction à la théorie des polynômes symétriques pour ensuite définir le polynôme symétrique de Jack. On le définit de trois façons : combinatoirement, en tant que fonction propre du modèle tCMS et comme le résultat de la symétrisation du polynôme de Jack non symétrique. On introduit ensuite la théorie des superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 1$. Le superpolynôme de Jack est alors défini selon les trois mêmes approches adaptées au superspace. On procède ensuite à la construction des superpolynômes $\mathcal{N} = 2$ et à la construction du modèle tCMS avec deux supersymétries, à la suite de quoi les quantités conservées du modèle sont présentées. Ultimement, on pose une première définition des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. On montre alors que ceux-ci sont les fonctions propres du modèle tCMS $\mathcal{N} = 2$ et de ses quantités conservées. On obtient auxiliairement une définition combinatoire de ces superpolynômes qui est conjecturée équivalente à la première.

Abstract

We present a generalization of the symmetric Jack polynomial, the $\mathcal{N} = 2$ symmetric Jack superpolynomial, and discuss its links with the $\mathcal{N} = 2$ supersymmetric extension of the trigonometric Calogero-Moser-Sutherland (tCMS) model. We first briefly review the theory of symmetric polynomials that leads us to three different definitions of the symmetric Jack polynomials: a combinatorial definition, the Jack polynomial as the eigenfunction of the tCMS model and as the result of the symmetrization of the non-symmetric Jack polynomial. We then do a brief introduction to the theory of symmetric superpolynomials. We also define the symmetric Jack superpolynomials using the superextension of the three aforementioned characterizations. After this introduction, we get to the main matter by defining the symmetric $\mathcal{N} = 2$ superpolynomials. This ultimately results in a definition of the $\mathcal{N} = 2$ Jack superpolynomial. We construct a $\mathcal{N} = 2$ superextension of the tCMS model and find its conserved quantities. The $\mathcal{N} = 2$ Jack superpolynomials are found to be the eigenfunctions of this model. As an auxiliary result, we obtain a conjecture regarding a combinatorial definition of these superpolynomials.

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	v
Remerciements	ix
Avant-propos	xi
Introduction	1
1 Polynômes symétriques	4
1.1 L'espace des polynômes symétriques	4
1.2 Les partitions d'entiers	5
1.3 Les bases classiques et le produit scalaire	6
1.4 Les polynômes symétriques de Jack, définition combinatoire	8
1.5 Le modèle Calogero-Moser-Sutherland	9
1.6 Les polynômes de Jack non symétriques	11
2 Superpolynômes symétriques	13
2.1 L'espace des superpolynômes $\mathcal{N} = 1$	13
2.2 Les superpartitions	14
2.3 Les bases classiques et le produit scalaire	16
2.4 Les superpolynômes de Jack, définition combinatoire	18
2.5 Le modèle tCMS supersymétrique	19
2.6 La symétrisation des Jacks non symétriques	20
3 $\mathcal{N} = 2$, les fondements	22
3.1 Les superpolynômes $\mathcal{N} = 2$	22
3.2 Les superpartitions	23
3.3 Les diagrammes	25
3.4 L'espace des superpolynômes $\mathcal{N} = 2$ et les bases classiques	26
4 Sur la piste des superpolynômes de Jack	36
4.1 L'approche combinatoire	36
4.2 Une généralisation du modèle tCMS	40
4.3 L'approche par symétrisation	42

5 Superpolynômes de Jack, prise deux	44
5.1 Les superpartitions	44
5.2 L'espace des superpolynômes	45
5.3 L'approche par symétrisation	48
5.4 L'ordre de dominance et la définition combinatoire	52
5.5 Un retour sur le modèle stCMS $\mathcal{N} = 2$	55
Conclusion	61
A Quelques preuves et résultats	64
A.1 Divers lemmes techniques	64
A.2 Les quantités conservées de s^2tCMS	70
A.3 Les fonctions propres du modèle	74
B Quelques exemples de sJacks	76
Bibliographie	77

À Rachel

No more fiction for us : we
calculate ; but that we may
calculate, we had to make fiction
first.

Friedrich Nietzsche

Remerciements

L'automne déjà! — Mais pourquoi regretter un éternel soleil, si nous sommes engagés à la découverte de la clarté divine, — loin des gens qui meurent sur les saisons.

— Arthur Rimbaud

Pierre Mathieu

Capitaine visionnaire d'une redoutable traversée,
Ce chercheur de beautés m'a laissé explorer,
Des contrées tout aussi dangereuses qu'exotiques.
Celui qui a cru au milieu des sceptiques.

Luc Lapointe

De longues heures à chercher la méthode adéquate,
Apprendre à jongler avec des cercles et des boîtes.

Rachel Collard

Quand ma barque immobile, au port de la misère,
Elle dissipe la brume, véritable brise solaire.

Olivier Blondeau-Fournier

Comme la tour aux échecs, il calcule patiemment,
Au moment fatidique, s'exécute brillamment.

Jean-Gabriel Young

Camarade et collègue jusqu'au petit matin,
Mettre au point la science, notre avenir incertain.

Johanne Alarie

La valeur du travail, la détermination,
Une femme forte et tenace, source d'inspiration.

Jean-Pierre Vézina

La patience dans l'azur des étoiles filantes,
Un rêveur cartographe des idées verdoyantes.

Jean-Paul et Monique

Prendre le temps d'aimer et donner sans compter,

Pas le choix des cadeaux, accepter, continuer.

Deux anges sur terre qui rayonneront toujours,

De leur havre de paix, le carrefour de l'amour.

Avant-propos

Ce document tente d'expliquer clairement et simplement comment les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$ ont été construits. On y trouvera une introduction à la théorie des polynômes symétriques. Cette théorie sera généralisée pas-à-pas jusqu'à la définition du superpolynôme de Jack $\mathcal{N} = 2$. On y discute aussi les difficultés qui sont rattachées à cette généralisation. Ceci a pour objectif de guider une personne qui chercherait à poursuivre ces travaux.

Pour favoriser la lecture, on évite le ton très formel du type proposition-preuve. On prend plutôt une approche pédagogique en introduisant les concepts dont on a besoin au moment où l'on en a besoin. On prend aussi une approche minimale où les éléments qui ne contribuent pas à l'étude du problème sont écartés. Les preuves techniques qui nuiraient à la lecture sont reléguées en annexe et seules celles qui contribuent vraiment à la compréhension du problème sont incorporées dans le corps du texte.

Introduction

There are two kinds of clocks. There is the clock that is always wrong, and that knows it is wrong, and glories in it; and there is the clock that is always right — except when you rely upon it, and then it is more wrong than you would think a clock could be in a civilized country.

— Jerome Klapka Jerome

L'objet de ce travail est de présenter une nouvelle généralisation des superpolynômes symétriques de Jack. D'abord, les polynômes symétriques sont des polynômes en plusieurs variables $\{x_1, x_2, \dots\}$ qui restent inchangés sous l'échange de n'importe quelle paire de variables. Par exemple, le polynôme suivant est symétrique :

$$x_1x_2^3 + x_2x_1^3 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_3x_1^3 + x_3x_2^3. \quad (1)$$

Les superpolynômes symétriques sont différents du fait qu'à l'ensemble de variables commutantes x_i on ajoute des variables de Grassmann θ_j qui anticommulent, c'est-à-dire

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i. \quad (2)$$

Dans ce cas, un superpolynôme est dit symétrique s'il est invariant sous l'échange des *paires* de variables $(x_i, \theta_i) \leftrightarrow (x_j, \theta_j)$. Par exemple, le superpolynôme suivant est symétrique :

$$\theta_1\theta_2(x_1^2 - x_2^2). \quad (3)$$

Notons que l'échange de θ_1 et θ_2 produira un signe qui sera compensé par la configuration anti-symétrique du terme en x_1 et x_2 .

Cette thèse raconte l'histoire de la généralisation de la théorie des superpolynômes dans le but de définir ce qu'on appelle maintenant les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. Cette histoire commence avec Henri Jack qui découvre en 1970 une classe de polynômes symétriques [1] en essayant de résoudre une intégrale, polynômes auxquels on donnera son nom. Il constate rapidement que ces polynômes sont dans une certaine limite équivalents aux polynômes de Schur. Ces derniers sont particulièrement intéressants car ils permettent de calculer le caractère des représentations du groupe symétrique. Ceci retient l'attention de Macdonald [2] et Stanley [3] qui étudient extensivement les polynômes de Jack.

On constate alors [4] que les polynômes de Jack sont les fonctions propres du modèle Calogero-Moser-Sutherland trigonométrique (tCMS). Il s’agit d’un modèle quantique à plusieurs corps sur lequel nous reviendrons. L’étude des polynômes de Jack devient un sujet de recherche en physique et on en obtient différentes formulations [5, 6, 7]. En particulier, une définition intégrale mène à la découverte d’une remarquable correspondance entre certains polynômes de Jack et les vecteurs singuliers de l’algèbre de Virasoro [8, 9].

Parallèlement à ces travaux, Shastry et Sutherland introduisent en 1992 une version supersymétrique du modèle CMS trigonométrique (stCMS) [10] en se basant sur la méthode de Freedman et Mende [11]. Desrosiers *et al* se penchent sur ce modèle en faisant l’hypothèse que si les polynômes de Jack sont les fonctions propres du modèle tCMS, alors les fonctions propres du modèle supersymétrique permettraient de définir les superpolynômes de Jack. C’est ainsi que débute tout un programme d’étude des superpolynômes symétriques. Un premier candidat aux superpolynômes de Jack est obtenu [12, 13], mais ces fonctions ne s’avèrent pas orthogonales par rapport un produit scalaire «physique». La forme finale des superpolynômes de Jack est obtenue en 2003 [14]. On les définit alors comme les fonctions propres du modèle stCMS et de ses quantités conservées. Cette nouvelle construction conduit alors à des polynômes orthogonaux par rapport au produit scalaire physique. Ce succès entraîne l’étude systématique des bases classiques dans le superspace [15] et la découverte d’une définition combinatoire des superpolynômes de Jack [16].

Puisque la théorie semble se généraliser si naturellement dans le superspace, il va de soi de s’intéresser à une correspondance potentielle entre les superpolynômes de Jack et les vecteurs singuliers du super algèbre de Virasoro. Il s’avère que cette affinité a été conservée car des expressions explicites pour les vecteurs singuliers sont alors conjecturées [17, 18]. Il a été récemment prouvé qu’une expression encore plus compacte de ces résultats peut être obtenue [19].

Les polynômes de Macdonald sont des polynômes qui généralisent les polynômes de Jack, c’est pourquoi Blondeau-Fournier *et al* entament leur généralisation au superspace. C’est ainsi qu’en 2012, ils introduisent les superpolynômes de Macdonald [20, 21]. La théorie des superpolynômes atteint finalement son point culminant avec la découverte du modèle Ruijsenaars-Schneider trigonométrique supersymétrique (une version relativiste du modèle stCMS) dont les fonctions propres sont les superpolynômes de Macdonald [22]. Le programme amorcé au début des années 2000 est un véritable succès.

C’est ici que s’amorce la prochaine étape de généralisation des superpolynômes. Une approche naturelle est de considérer un superspace plus général, c’est-à-dire qu’en plus des variables θ_i , on ajoute un nouvel ensemble de coordonnées anticommutantes $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$. Ces variables anticommutent aussi avec les variables θ_j :

$$\phi_i \phi_j = -\phi_j \phi_i, \quad \phi_i \theta_j = -\theta_j \phi_i. \quad (4)$$

Les polynômes de cet espace sont appelés superpolynômes $\mathcal{N} = 2$. La notion de symétrie se manifeste maintenant par l'invariance sous l'échange du trio de variables $(x_i, \theta_i, \phi_i) \leftrightarrow (x_j, \theta_j, \phi_j)$. Par exemple, le superpolynôme $\mathcal{N} = 2$ suivant est symétrique :

$$\phi_1\theta_1\phi_2x_1 + \phi_2\theta_2\phi_1x_2. \quad (5)$$

Le but du projet présenté ici est de créer un analogue des polynômes de Jack qui respecte cette symétrie.

La présentation de la construction des superpolynômes de Jack cherchera à faire comprendre les différentes étapes nécessaires dans le but d'obtenir une généralisation cohérente. Le premier chapitre portera sur les polynômes symétriques. On y introduira dans les trois premières sections les éléments rudimentaires de la théorie. On présentera ensuite trois façons différentes de définir ces polynômes : selon des propriétés combinatoires, comme la fonction propre du modèle tCMS et comme le résultat de la symétrisation des polynômes de Jack non symétriques. Ces trois façons de définir ce polynôme seront aussi les trois différentes voies par lesquelles on pourra tenter une généralisation.

Afin de bien comprendre les étapes de la généralisation, on introduira, au deuxième chapitre, la théorie des superpolynômes symétriques. On reprendra la structure du premier chapitre afin de mettre en valeur les sauts conceptuels nécessaires à la généralisation. Ainsi, dans les trois dernières sections, nous pourrions introduire le superpolynôme symétrique de Jack via trois méthodes en analogie directe avec celles du premier chapitre.

On tombera alors dans le vif du sujet au troisième chapitre. On y introduira les superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 2$ et les objets combinatoires qui leurs sont associés : les superpartitions $\mathcal{N} = 2$. Nous serons alors en mesure de présenter la généralisation des bases classiques.

Le quatrième chapitre s'attaquera au problème de la définition des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$ en tentant de généraliser les approches présentées auparavant. On se verra confronté à plusieurs difficultés et contradictions. On identifiera alors le coeur du problème.

On corrigera le tir au cinquième chapitre en faisant quelques ajustements à notre approche vis-à-vis le superspace $\mathcal{N} = 2$. Ceci nous permettra enfin de définir un superpolynôme de Jack. On verra ensuite que ce polynôme solutionne le modèle tCMS supersymétrique $\mathcal{N} = 2$.

Chapitre 1

Polynômes symétriques

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture.

— Bertrand Russell

Dans ce chapitre, on fait un survol rapide et minimal des concepts associés à la théorie des polynômes symétriques. On définit d'abord ce qu'on entend par polynôme symétrique pour ensuite introduire les partitions d'entiers. Ces partitions permettront de définir différentes bases de l'espace des polynômes symétriques. On verra qu'il est possible de définir un produit scalaire dans cet espace et c'est celui-ci qui nous permettra d'obtenir une première définition des polynômes symétriques de Jack (Jacks). On verra ensuite que ces polynômes peuvent être définis de façon équivalente en utilisant le modèle CMS. Finalement, on introduira les polynômes de Jack non symétriques qui permettent d'obtenir leur version symétrique via une procédure simple de symétrisation. Ce chapitre se base largement sur [2] pour tout ce qui a trait à la théorie des polynômes symétriques.

1.1 L'espace des polynômes symétriques

Un polynôme symétrique est un polynôme à plusieurs variables qui est invariant sous l'échange de ses variables. Prenons par exemple $f(z)$ un polynôme dans les variables (z_1, \dots, z_N) . Ce polynôme est dit symétrique si et seulement si $f(\dots, z_k, \dots, z_l, \dots) = f(\dots, z_l, \dots, z_k, \dots)$ pour toutes paires k, l .

Cette opération d'échange est générée par l'opérateur K_{ij} :

$$K_{ij} : z_i \longleftrightarrow z_j. \tag{1.1}$$

Ainsi, un polynôme $f(z)$ en N variables est symétrique si

$$K_{ij}f(z) = f(z) \quad \forall \quad i, j \in \{1, \dots, N\}. \tag{1.2}$$

On référera à l'espace des polynômes symétriques en N variables, avec des coefficients dans \mathbb{C} , par \mathcal{P}^N :

$$f \in \mathcal{P}^N \iff K_{ij}f = f \quad \forall \quad i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.3)$$

Lorsque le nombre de variables n'est pas précisé, on considérera formellement qu'elles sont en nombre infini. Dans ce cas on réfère typiquement à ces polynômes formels en tant que fonctions symétriques.

1.2 Les partitions d'entiers

On exprime généralement les fonctions symétriques sur une base et, afin d'indexer ces bases, on introduit la notion de partition d'entier.

Une partition est une collection d'entiers qui décrit une façon particulière de décomposer un entier sous l'addition sans égard à l'ordre dans lequel on additionne les nombres. Par exemple, $4 + 3$ est une partition de 7, on la notera $\lambda = (4, 3)$.

De manière plus formelle, une partition de l'entier n est une séquence faiblement décroissante d'entiers dont la somme est n . Prenons, par exemple, une partition de n de longueur N :

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (1.4)$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0, \quad (1.5)$$

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N. \quad (1.6)$$

On réfère typiquement au nombre n comme au degré de la partition λ et on écrit $\lambda \vdash n$ qui se lit : « λ est une partition de n ».

On utilisera aussi la notation qui dénote la répétition d'une partie par l'exposant, par exemple :

$$4 + 2 + 2 + 1 \longleftrightarrow (4, 2, 2, 1) = (4, 2^2, 1). \quad (1.7)$$

Le nombre d'occurrences d'un entier k dans une partition est dénotée par $n_\lambda(k)$, dans la partition précédente, par exemple, nous avons

$$n_\lambda(1) = 1, \quad n_\lambda(2) = 2, \quad n_\lambda(3) = 0, \quad n_\lambda(4) = 1. \quad (1.8)$$

La longueur d'une partition est dénotée par $\ell(\lambda)$ et représente le nombre d'éléments qu'elle contient. Par exemple :

$$\lambda = (3, 2, 1, 1), \quad \ell(\lambda) = 4. \quad (1.9)$$

Pour des raisons pratiques, on représente parfois les partitions d'entiers par des diagrammes de Young. On représente, de haut en bas, chaque partie de la partition par une rangée de boîtes égales en nombre à la valeur de la partie. Par exemple, on aura

$$\lambda = (4, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} . \quad (1.10)$$

On définit maintenant un ordre de dominance entre les partitions qui nous servira dans la définition du polynôme de Jack. Soit deux partitions λ et μ ,

$$\lambda > \mu \iff \lambda \neq \mu \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \sum_{i=1}^k \mu_i \quad \forall k. \quad (1.11)$$

Notons qu'il s'agit d'un ordre partiel : lors de la comparaison de deux partitions, s'il existe un k pour lequel l'inégalité est violée, on dira des deux partitions qu'elles sont *non comparables*.

Voici quelques exemples illustrant l'ordre de dominance :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} > \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} > \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} > \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} > \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} . \quad (1.12)$$

Voici un exemple illustrant le fait que certaines partitions sont non comparables :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \text{ non comparable à } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array} . \quad (1.13)$$

1.3 Les bases classiques et le produit scalaire

1.3.1 La base monomiale

La base monomiale est simplement décrite en termes de ces partitions : le degré de la partition décrit le degré du polynôme dans les variables z_j et la partition elle-même décrit la répartition des puissances. Soit σ une permutation du n -uplet $(1, \dots, N)$, on définit l'action de l'opérateur

$$K_\sigma : K_\sigma z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \dots z_N^{\lambda_N} = z_{(\sigma)_1}^{\lambda_1} z_{(\sigma)_2}^{\lambda_2} \dots z_{(\sigma)_N}^{\lambda_N} \quad (1.14)$$

où $(\sigma)_k$ représente le k -ième élément de la permutation. On définit ainsi le monôme associé à la partition λ :

$$m_\lambda = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\sigma \in S_N} K_\sigma z^\lambda = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\sigma \in S_N} K_\sigma z_1^{\lambda_1} z_2^{\lambda_2} \dots z_N^{\lambda_N} \quad (1.15)$$

avec

$$f_\lambda = n_\lambda(1)! n_\lambda(2)! \dots \quad (1.16)$$

Cette normalisation est telle que le monôme z^λ a pour coefficient 1. On peut éviter ce facteur de normalisation en sommant seulement les permutations distinctes du monôme.

En guise d'exemple, on donne le monôme associé à la partition $(2, 1, 1)$:

$$m_{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}} = z_1^2 z_2 z_3 + z_2^2 z_1 z_3 + z_3^2 z_2 z_1 + \dots \quad (1.17)$$

où les points de suspension représentent les permutations comprenant les variables z_4, z_5, \dots

1.3.2 Les bases multiplicatives

Les bases multiplicatives sont les bases dont la structure est la suivante :

$$v_\lambda(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} v_{\lambda_i}. \quad (1.18)$$

Parmi les bases multiplicatives, on retrouve les sommes de puissances p_λ , les fonctions symétriques élémentaires e_λ et les fonctions complètement symétriques (aussi appelée base homogène) h_λ . Elles sont définies comme suit :

$$p_n = m_{(n)}, \quad e_n = m_{(1^n)}, \quad h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda. \quad (1.19)$$

Ces fonctions symétriques admettent les fonctions génératrices suivantes (avec les conventions $p_0 = 0, h_0 = e_0 = 1$),

$$P(z; t) = \prod_i \frac{tz_i}{1 - tz_i} = \sum_{n \geq 0} t^n p_n, \quad (1.20)$$

$$H(z; t) = \prod_i \frac{1}{1 - tz_i} = \sum_{n \geq 0} t^n h_n, \quad (1.21)$$

$$E(z; t) = \prod_i (1 + tz_i) = \sum_{n \geq 0} t^n e_n. \quad (1.22)$$

Voyons un exemple simple pour chacune de ces fonctions. Soit la partition $\lambda = (3, 2)$, les fonctions symétriques associées à cette partition sont

$$p_{(3,2)} = (m_{(3)}) (m_{(2)}) = (z_1^3 + z_2^3 + \dots) (z_1^2 + z_2^2 + \dots),$$

$$h_{(3,2)} = (m_{(3)} + m_{(2,1)} + m_{(1,1,1)}) (m_{(2)} + m_{(1,1)}),$$

$$= (z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1 + \dots + z_1 z_2 z_3 + \dots) (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots),$$

$$e_{(3,2)} = (m_{(1,1,1)}) (m_{(1,1)}) = (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots) (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots).$$

1.3.3 Le produit scalaire

La base des sommes de puissances permet de définir un produit scalaire dans l'espace des polynômes symétriques. Soit λ et μ deux partitions d'entier, on définit alors le produit scalaire

suivant :

$$\langle p_\lambda | p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda, \mu} \quad (1.23)$$

avec

$$z_\lambda = \prod_{k \geq 1} k^{n_\lambda(k)} n_\lambda(k)!. \quad (1.24)$$

On rappelle que $n_\lambda(k)$ est le nombre d'occurrences de la partie k dans la partition λ .

On introduit la fonction bi-symétrique¹ suivante :

$$K(x, y) = \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \quad (1.25)$$

$$= \sum_{\lambda} m_\lambda(x) h_\lambda(y). \quad (1.26)$$

Cette fonction est appelée «noyau reproducteur» puisqu'elle possède la propriété suivante : si $g(x)$ est une fonction symétrique arbitraire, alors

$$\langle K(x, y) | g(x) \rangle = g(y), \quad (1.27)$$

où il est entendu que le produit scalaire porte sur les fonctions des variables x . Cette propriété fait en sorte que le noyau reproducteur est intimement lié à la notion de produit scalaire. De plus, dans la mesure où on a la fonction génératrice des fonctions symétriques homogènes, on peut facilement obtenir le noyau :

$$\prod_j H(x; y_j) = K(x, y). \quad (1.28)$$

Il s'agit là d'un aspect qu'on tentera d'exploiter dans le superespace.

1.4 Les polynômes symétriques de Jack, définition combinatoire

Pour obtenir la définition dite combinatoire des polynômes symétriques de Jack, on doit d'abord définir une déformation à un paramètre du produit scalaire des p_λ ,

$$\langle p_\lambda | p_\omega \rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\lambda)} z_\lambda \delta_{\lambda, \omega}. \quad (1.29)$$

Cette définition est cohérente avec la déformation du noyau reproducteur suivante :

$$K(x, y; \alpha) = \prod_{i, j} \frac{1}{(1 - x_i y_j)^{1/\alpha}} = \sum_{\lambda} \alpha^{-\ell(\lambda)} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y). \quad (1.30)$$

1. C'est-à-dire que la fonction est symétrique sous l'ensemble de variables x_i et sur l'ensemble de variables y_j .

En utilisant ce nouveau produit scalaire, on obtient la définition suivante : les polynômes symétriques de Jack P_λ^α sont les uniques fonctions symétriques orthogonales qui se développent triangulairement sur la base des monômes. «Triangulairement» signifie que seuls les monômes ayant une partition égale ou inférieure à la partition λ selon l'ordre de dominance apparaîtront. Pour rendre plus claire cette définition, on écrit

$$P_\lambda^\alpha = m_\lambda + \sum_{\omega < \lambda} c_{\lambda,\omega} m_\omega, \quad (1.31)$$

$$\langle P_\lambda^\alpha | P_\omega^\alpha \rangle_\alpha \propto \delta_{\lambda,\omega}, \quad (1.32)$$

où $c_{\lambda,\omega}$ sont des constantes. On a par exemple :

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square} + a_1 m_{\square\square} + a_2 m_{\square\square},$$

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square} + b_1 m_{\square\square},$$

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square}.$$

On constate qu'on a trois inconnus. Ceux-ci peuvent être fixés puisque nous avons un système à trois équations :

$$\langle P_{\square\square}^\alpha | P_{\square\square}^\alpha \rangle_\alpha = 0, \quad \langle P_{\square\square}^\alpha | P_{\square\square}^\alpha \rangle_\alpha = 0, \quad \langle P_{\square\square}^\alpha | P_{\square\square}^\alpha \rangle_\alpha = 0.$$

On obtient ainsi :

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square} + \frac{3}{(1+2\alpha)} m_{\square\square} + \frac{6}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} m_{\square\square},$$

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square} + \frac{6}{(2+\alpha)} m_{\square\square},$$

$$P_{\square\square}^\alpha = m_{\square\square}.$$

1.5 Le modèle Calogero-Moser-Sutherland

Le modèle CMS est un modèle quantique intégrable de N particules interagissant deux-à-deux via un potentiel à longue portée. Il a été grandement étudié [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29] et constitue toujours un domaine de recherche actif. Ce modèle possède plusieurs spécialisations et nous nous concentrerons sur une en particulier : le modèle CMS trigonométrique (tCMS). Ce modèle est défini par l'hamiltonien suivant :

$$H_{trig} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \beta(\beta-1) \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{\sin^2(\pi(x_i - x_j)/L)}. \quad (1.33)$$

En faisant le changement de variable $z_k = e^{2\pi i x_k / L}$ on obtient :

$$H_z = \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_i \frac{1}{2} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} \right)^2 - \beta(\beta-1) \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{z_i z_j}{(z_i - z_j)^2}. \quad (1.34)$$

En écrivant $z_{i,j} := z_i - z_j$, l'état d'énergie minimale de cet hamiltonien est donné par [26]

$$\psi_0(z) = \prod_{i < j} \left(\frac{z_{i,j}^2}{z_i z_j} \right)^{\frac{\beta}{2}}. \quad (1.35)$$

Les états d'énergie supérieure $\psi(z)$ sont de la forme $\psi_0(z)\phi(z)$. Cette propriété permet d'obtenir une forme canonique de l'hamiltonien. On retire la contribution d'énergie minimale de l'hamiltonien, on conjugue l'hamiltonien avec $\psi_0(z)$ puis on normalise le résultat :

$$\mathcal{H} = 2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \psi_0^{-1}(z) (H_z - E_0) \psi_0(z) \quad (1.36)$$

$$= \sum_i (z_i \partial_i)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j} (z_i \partial_i - z_j \partial_j). \quad (1.37)$$

Il s'avère que toutes les quantités conservées du modèle peuvent s'exprimer simplement en termes des opérateurs de Dunkl. Ceux-ci sont définis comme suit [30, 31] :

$$\mathcal{D}_i = z_i \partial_i + \beta \sum_{j < i} \frac{z_i}{z_i - z_j} (1 - K_{ij}) + \beta \sum_{j > i} \frac{z_j}{z_i - z_j} (1 - K_{ij}) - \beta(i - 1), \quad (1.38)$$

où K_{ij} est l'opérateur d'échange (1.1). Ces opérateurs commutent les uns avec les autres et satisfont les relations de l'algèbre de Hecke dégénérée

$$K_{i,i+1} \mathcal{D}_{i+1} - \mathcal{D}_i K_{i,i+1} = -\beta. \quad (1.39)$$

En utilisant cette relation, on a

$$K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n = \mathcal{D}_{i+1}^n K_{i,i+1} - \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1}) \quad (1.40)$$

où $h_n(x_1, x_2)$ est la n -ième fonction symétrique homogène dans les variables x_1 et x_2 . Dans ce cas spécial, sa définition se réduit à

$$h_n(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^n x_1^k x_2^{n-k}. \quad (1.41)$$

Les quantités conservées du modèle sont données par la projection sur \mathcal{P}^N des opérateurs suivants :

$$\mathcal{H}_n = \sum_i \mathcal{D}_i^n. \quad (1.42)$$

En particulier, l'hamiltonien tCMS sous la forme canonique \mathcal{H} est équivalent à une combinaison linéaire de \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_1 . Ceci a pour conséquence directe que les opérateurs de la tour (1.42) sont toutes des quantités conservées puisque les opérateurs de Dunkl commutent tous entre eux. Il est à noter que les \mathcal{H}_n sont centraux à l'algèbre (1.39) [6]. Ainsi, ils commutent avec les opérateurs d'échange K_{ij} .

Les polynômes symétriques de Jack $P_\lambda^{1/\beta}$ sont les fonctions qui diagonalisent simultanément tous les \mathcal{H}_n .

$$\mathcal{H}_n P_\lambda^{1/\beta} = \epsilon_{\lambda,n} P_\lambda^{1/\beta}. \quad (1.43)$$

Chaque partition d'entier λ désigne un état d'énergie différent et permet de couvrir l'espace des fonctions propres de l'hamiltonien. Les valeurs propres $\epsilon_{\lambda,n}$ ont une expression explicite qu'on donnera à la prochaine section.

1.6 Les polynômes de Jack non symétriques

Pour définir les polynômes de Jacks non symétriques [6] (nsJacks), on doit introduire la notion de composition. Une composition est une collection d'entiers ordonnés pouvant contenir des 0. Plus précisément soit η , une composition de N parties, alors

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N), \quad \eta_i \geq 0 \forall i. \quad (1.44)$$

On note $|\eta|$ le degré d'une composition :

$$|\eta| = \sum_i \eta_i. \quad (1.45)$$

Soit η , une composition arbitraire, on note η^+ la partition obtenue après avoir ordonné en ordre décroissant les parties à l'intérieur de la composition. C'est-à-dire que pour une composition $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots)$ on a

$$\eta^+ = (\dots, \eta_i^+, \eta_{i+1}^+, \dots), \quad \eta_i^+ \geq \eta_{i+1}^+ \forall i, \quad \eta_j^+ \in \eta \forall j. \quad (1.46)$$

On définit l'ordre standard sur les n -uplet [32] comme suit : soit deux compositions μ et η , on a que

$$\mu > \eta \text{ si } \mu^+ > \eta^+ \text{ ou } \mu^+ = \eta^+ \text{ et } \mu_1 + \dots + \mu_k > \eta_1 + \dots + \eta_k \forall k. \quad (1.47)$$

On référera à cet ordre simplement comme l'ordre de dominance sur les compositions.

Les polynômes de Jack non symétriques E_ν s'écrivent triangulairement sur les monômes z^μ :

$$E_\eta = z^\eta + \sum_{\nu < \eta} a_{\eta,\nu} z^\nu, \quad (1.48)$$

$$\text{avec } z^\nu = z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \dots z_N^{\nu_N}. \quad (1.49)$$

Ils diagonalisent simultanément tous les \mathcal{D}_i :

$$\mathcal{D}_i E_\eta = \hat{\eta}_i E_\eta \text{ pour } 1 \leq i \leq N, \quad (1.50)$$

où la valeur propre $\widehat{\eta}_i$ est donnée par

$$\widehat{\eta}_i = \eta_i - \beta (\#\{j = 1, \dots, i-1 | \eta_j \geq \eta_i\} + \#\{j = i+1, \dots, N | \eta_j > \eta_i\}). \quad (1.51)$$

On peut obtenir les polynômes de Jack symétriques par symétrisation des nsJacks :

$$P_\lambda^{1/\beta}(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\omega \in S_N} K_\omega E_{\lambda^R}(z_1, \dots, z_N), \quad (1.52)$$

où λ^R désigne la composition obtenue en renversant l'ordre des parties à l'intérieur de la partition λ et où f_λ est le facteur de normalisation défini en (1.16).

On voit facilement que les Jacks obtenus ici sont effectivement les polynômes qui diagonalisent les \mathcal{H}_n donnés en (1.42) :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n P_\lambda^{1/\beta} &= \left[\sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^n \right] \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\omega \in S_N} K_\omega E_{\lambda^R} \\ &= \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\omega \in S_N} K_\omega \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^n E_{\lambda^R} \\ &= \sum_{i=1}^N \left[(\widehat{\lambda^R})_i \right]^n \frac{1}{f_\lambda} \sum_{\omega \in S_N} K_\omega E_{\lambda^R} \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left[(\widehat{\lambda^R})_i \right]^n \right] P_\lambda^{1/\beta}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

À la deuxième ligne, on utilise le fait que \mathcal{H}_n commute avec K_ω et à la troisième ligne on utilise (1.51). On obtient ainsi une expression explicite des valeurs propres de (1.43)

$$\epsilon_{\lambda, n} = \sum_{i=1}^N \left[(\widehat{\lambda^R})_i \right]^n. \quad (1.54)$$

Ceci établit explicitement le lien entre le modèle tCMS et les polynômes symétriques de Jack.

Chapitre 2

Superpolynômes symétriques

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test : there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

— Godfrey Harold Hardy

Nous faisons maintenant un premier pas dans le superespace. Selon la même structure qu'au chapitre précédent, on généralisera les concepts et résultats qui y sont expliqués. En faisant cette première généralisation, on verra les pas conceptuels nécessaires pour passer du cas classique au cas $\mathcal{N} = 1$. Ceci a pour objectif de faire pressentir la procédure à suivre pour obtenir une théorie des superpolynômes $\mathcal{N} = 2$. On débutera en expliquant ce qu'on entend par symétrie dans le superespace. Ensuite, on présentera une généralisation du concept de partition, ce qui permettra d'introduire les bases de l'espace des superpolynômes symétriques. On montrera qu'il est encore possible de définir un produit scalaire dans cet espace. Finalement, on reprendra les trois méthodes permettant de définir les polynômes de Jack, mais cette fois-ci, du point de vue du superespace. Ces trois approches de généralisation paveront le chemin vers notre objectif final : la construction des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$.

Les trois premières sections se basent sur [15], article auquel on renvoie le lecteur pour une introduction plus approfondie à la théorie des superpolynômes symétriques.

2.1 L'espace des superpolynômes $\mathcal{N} = 1$

Les superpolynômes sont caractérisés par le fait qu'à l'ensemble de variables habituelles (z_1, z_2, \dots) on ajoute un ensemble de variables anticommutantes, qu'on dira aussi *fermioniques* $(\theta_1, \theta_2, \dots)$:

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i. \tag{2.1}$$

La notion de symétrie dans le cas des polynômes dans les variables (z, θ) se voit modifiée. On dit d'un superpolynôme $g(z, \theta)$ qu'il est symétrique s'il est invariant sous l'échange simultané

des deux types de variables $(z_i, \theta_i) \leftrightarrow (z_j, \theta_j)$.

On introduit les opérateurs d'échange suivants :

$$\kappa_{ij} : \theta_i \longleftrightarrow \theta_j, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{K}_{ij} = K_{ij}\kappa_{ij} : (z_i, \theta_i) \longleftrightarrow (z_j, \theta_j). \quad (2.3)$$

Un superpolynôme $f(z, \theta)$ en N (paires de) variables est donc symétrique s'il est invariant sous l'action de \mathcal{K}_{ij} :

$$\mathcal{K}_{ij}f(z, \theta) = f(z, \theta) \quad \forall \quad i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.4)$$

L'espace des superpolynômes symétriques en $2N$ variables (z_i, θ_i) , avec des coefficients dans \mathbb{C} , sera dénoté par $\tilde{\Pi}^N$:

$$f \in \tilde{\Pi}^N \iff \mathcal{K}_{ij}f = f \quad \forall \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (2.5)$$

Par exemple, le superpolynôme suivant est symétrique :

$$g(z, \theta) = \theta_1\theta_2(z_1^2z_2 - z_2^2z_1). \quad (2.6)$$

On remarque que l'échange $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$ introduira un signe qui sera compensé par le signe introduit par l'échange $z_1 \leftrightarrow z_2$.

Cet espace possède deux graduations qui définissent ses secteurs. Le premier est le degré dit bosonique, qui est simplement le degré du polynôme dans les variables z_i . Le second est le degré dit fermionique du polynôme dans les variables θ_j . Un superpolynôme ayant un degré bosonique n et un degré fermionique m appartient au secteur dénoté par $(n|m)$. On désigne par $\tilde{\Pi}_{(n|m)}^N$ le sous-espace des superpolynômes à $2N$ variables du secteur $(n|m)$. Par exemple, le polynôme $g(z, \theta)$ défini à l'équation précédente fait partie du secteur bosonique $n = 3$ et du secteur fermionique $m = 2$. Ainsi on a $g(z, \theta) \in \tilde{\Pi}_{(3|2)}^2$.

2.2 Les superpartitions

On appelle superpartition [12, 16] une paire de partitions composée d'une partition standard et d'une partition strictement décroissante pouvant admettre, au plus, un zéro. Formellement, on a

$$\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s) = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_\ell), \quad (2.7)$$

$$\Lambda_1 > \dots > \Lambda_m \geq 0 \text{ et } \Lambda_{m+1} \geq \dots \geq \Lambda_\ell(\Lambda) > 0. \quad (2.8)$$

On appelle Λ^a la partition fermionique ou antisymétrique et Λ^s la partition bosonique ou symétrique. Le nombre $m = \ell(\Lambda^a)$ est appelé degré fermionique, $\ell(\Lambda)$ désigne la longueur de

Avec ces définitions, on peut définir l'ordre de dominance sur les superpartitions :

$$\Lambda \geq \Omega \iff \Lambda^* \geq \Omega^* \text{ et } \Lambda^\circ \geq \Omega^\circ, \quad (2.14)$$

où \geq à droite de la double flèche désigne l'ordre de dominance sur les partitions.

2.3 Les bases classiques et le produit scalaire

2.3.1 La base monomiale

Soit une superpartition Λ , la superfonction symétrique monomiale à $2N$ variables associée à cette partition est donnée par :

$$m_\Lambda(z, \theta) = \sum'_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \theta_1 \cdots \theta_{m_\Lambda} z_1^{\Lambda_1} \cdots z_N^{\Lambda_N}, \quad (2.15)$$

où le prime sur la somme indique qu'on ne prend que les permutations distinctes et où on définit que $\Lambda_{\ell(\Lambda)+1} = \Lambda_{\ell(\Lambda)+2} = \cdots = 0$.

Par exemple, la fonction symétrique monomiale suivante est associée à la superpartition $(\bar{2}, \bar{1})$ avec $N = 2$:

$$m_{\begin{array}{|c|} \hline \square \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}} = \theta_1 \theta_2 (z_1^2 z_2 - z_2^2 z_1). \quad (2.16)$$

Remarquer ici que l'échange de θ_1 et θ_2 introduit un signe, mais que celui-ci est compensé par la configuration antisymétrique de z_1 et z_2 .

2.3.2 Les bases multiplicatives

La généralisation des bases multiplicatives dans le superspace passe par l'ajout d'un élément de base fermionique. Par exemple dans le cas des sommes de puissances, les éléments de base p_n obtiennent des partenaires fermioniques \tilde{p}_k qui sont anticommutants. La structure de ces nouvelles bases est la suivante :

$$f_\Lambda = \tilde{f}_{\Lambda_1} \cdots \tilde{f}_{\Lambda_m} f_{\Lambda_{m+1}} \cdots f_{\Lambda_{\ell(\Lambda)}}. \quad (2.17)$$

Selon cette définition, on pose la généralisation des bases multiplicatives :

$$\tilde{p}_n = m_{(n)}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{e}_n = m_{(0; 1^n)}, \quad (2.19)$$

$$\tilde{h}_n = \sum_{\Lambda \vdash (n|1)} (\Lambda_1 + 1) m_\Lambda, \quad (2.20)$$

Un calcul simple montre que K est effectivement un noyau reproducteur, c'est-à-dire que pour toute superfonction symétrique on a

$$\langle K^\top(x, \theta, y, \tau) | f(x, \theta) \rangle = f(y, \tau), \quad (2.31)$$

où \top n'agit que sur les variables θ .

Une fois de plus, on remarque que le noyau reproducteur peut être obtenu directement en utilisant la fonction génératrice des fonctions symétriques homogènes :

$$\prod_j H(z, \theta; y_j, \tau_j) = K(x, \theta, y, \tau). \quad (2.32)$$

Ceci signifie que dans le cas $\mathcal{N} = 2$, si nous avons une fonction génératrice analogue à celle-ci, on s'attend à pouvoir obtenir le noyau. De plus, si on développe le noyau sur une base analogue aux sommes de puissances, on s'attend à pouvoir y lire le produit scalaire directement.

2.4 Les superpolynômes de Jack, définition combinatoire

Idéalement, on s'attend à ce que les superpolynômes de Jack conservent la définition combinatoire. Nous avons déjà décrit un ordre de dominance sur les superpartitions et une base monomiale. Tout ce qui nous manque est un produit scalaire à un paramètre libre sur la base des sommes de puissances. En faisant une analogie avec le cas sans paramètre, on s'attend à ce que le noyau ait la forme suivante :

$$K(x, \theta, y, \tau; \alpha) = \prod_{i,j} \frac{1}{(1 - x_i y_j - \theta_i \tau_j)^{1/\alpha}} \quad (2.33)$$

En développant cette fonction en série de puissance on trouve :

$$K(x, \theta, y, \tau; \alpha) = \sum_{\Lambda \in \text{SPar}} \alpha^{-\ell(\Lambda)} z_\Lambda^{-1} p_\Lambda^\top(x, \theta) p_\Lambda(y, \tau). \quad (2.34)$$

On y lit directement le produit scalaire suivant :

$$\langle p_\Lambda^\top | p_\Omega \rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\Lambda)} z_\Lambda \delta_{\Lambda, \Omega}. \quad (2.35)$$

Les superpolynômes symétriques de Jack sont les uniques superpolynômes symétriques à un paramètre triangulaires sur la base des supermonômes qui soient orthogonaux par rapport au produit scalaire (2.35) [16] :

$$P_\Lambda^\alpha = m_\Lambda + \sum_{\Omega < \Lambda} c_{\Lambda\Omega} m_\Omega, \quad (2.36)$$

$$\langle P_\Lambda^\alpha | P_\Omega^\alpha \rangle_\alpha \propto \delta_{\Lambda\Omega}. \quad (2.37)$$

où $\Phi_j(x)$ doit être fixé. L'algèbre (2.41) force la relation suivante :

$$\Phi_j(x) = \partial_{x_j} W(x), \quad (2.43)$$

où $W(x)$ est une fonction arbitraire appelée pré-potentiel. On obtient ainsi l'hamiltonien suivant :

$$H_{\text{sCMS}} = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + (\partial_{x_i} W)^2 + \partial_{x_i}^2 W) - \sum_{i,j} \theta_i \theta_j^\dagger \partial_{x_i} \partial_{x_j} W. \quad (2.44)$$

Il s'agit ici d'un super modèle CMS général et celui qui nous intéresse est la version trigonométrique. Puisque les solutions de ce modèle peuvent avoir une charge fermionique nulle, la projection de l'hamiltonien sur l'espace des superfonctions symétriques de degré fermionique 0 devrait reproduire l'hamiltonien tCMS. Cette observation permet de fixer le prépotentiel $W(x)$. On obtient :

$$\partial_{x_j} W(x) = \sum_{k \neq j} \frac{\pi \beta}{L} \cot \frac{\pi(x_i - x_k)}{L}. \quad (2.45)$$

On substitue cette expression et, comme dans le cas $\mathcal{N} = 0$, on passe à la forme canonique de l'hamiltonien : on effectue le changement de variable $z_j = e^{2\pi i x_j / L}$ et on conjugue l'hamiltonien avec l'état d'énergie minimum (1.35). Après normalisation on obtient :

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(1)} = \sum_i (z_i \partial_i)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_i - z_j} (z_i \partial_i - z_j \partial_j) - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{(z_i - z_j)^2} (1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger), \quad (2.46)$$

où $\theta_{ij} = (\theta_i - \theta_j)$. On remarque que l'action de $1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger$ est équivalente à celle de κ_{ij} . Les quantités conservées de ce modèle s'écrivent comme [14] :

$$\mathcal{H}_n = \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^n, \quad (2.47)$$

$$\mathcal{I}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega (\theta_1 \theta_1^\dagger \mathcal{D}_1^n), \quad (2.48)$$

où l'action de ces opérateurs est restreinte à l'espace des superpolynômes symétriques en $2N$ variables $\tilde{\Pi}^N$. Le superpolynôme symétrique de Jack $P_\Lambda^{1/\beta}$ est l'unique polynôme diagonalisant simultanément ces deux tours d'opérateurs :

$$\mathcal{H}_n P_\Lambda^{1/\beta} = c_{\Lambda,n} P_\Lambda^{1/\beta}, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{I}_n P_\Lambda^{1/\beta} = d_{\Lambda,n} P_\Lambda^{1/\beta}. \quad (2.50)$$

2.6 La symétrisation des Jacks non symétriques

La dernière méthode présentée ici est celle de la symétrisation prescrite des polynômes de Jack non symétriques. Cette approche est particulièrement directe [14] :

$$P_\Lambda^{1/\beta} = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{f_{\Lambda^s}} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \theta_1 \cdots \theta_m E_{\Lambda^R}, \quad (2.51)$$

avec $\Lambda^R = ((\Lambda^a)^R, (\Lambda^s)^R)$. On rappelle que λ^R est la composition obtenue du renversement de l'ordre des parties de la partition λ .

Cette définition dévoile une grande simplicité dans la structure sous-jacente aux sJacks. Ce point de vue montre que pour obtenir les sJacks, il ne s'agit que de «charger» les variables $\{1, \dots, m\}$ avec les variables θ_i puis de symétriser. De plus, cette formulation permet de tisser facilement des liens avec le modèle stCMS. Par exemple, on a directement qu'il s'agit d'une fonction propre des opérateurs \mathcal{H}_n . En effet, ceux-ci commutent avec les opérateurs d'échange et les variables de Grassmann. Ceci fait en sorte que les \mathcal{D}_i se rendent jusqu'au E_{Λ^R} et on utilise simplement $\mathcal{D}_i E_{\Lambda^R} = (\widehat{\Lambda^R})_i E_{\Lambda^R}$. On obtient ainsi les valeurs propres. Un résultat semblable vaut pour cas des \mathcal{I}_n .

Ceci laisse supposer que s'il existe une version $\mathcal{N} = 2$ des sJacks, elle sera obtenue avec une procédure analogue. On verra que cette intuition est loin d'être erronée, mais qu'une certaine quantité de travail est nécessaire pour la transformer en résultat.

Chapitre 3

$\mathcal{N} = 2$, les fondements

It seems to be much easier to make two small jumps than the one big jump in any kind of mental thinking.

— Claude Shannon

On s'apprête maintenant à entrer dans un labyrinthe. En effet, on verra au chapitre suivant que les constructions qu'on entreprend ici nous conduisent toujours vers un mirage de superpolynôme de Jack, qui se dissipe dès qu'on s'en approche. Même si certaines corrections devront être apportées pour permettre la définition des sJacks, ce qu'on présente ici introduit un bon nombre de concepts nécessaires à l'élaboration des sJacks. De plus, ce petit détour permettra de cerner les points névralgiques de la théorie et de faire comprendre en quoi les superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 2$ sont singuliers.

On définira tout d'abord ce qu'on entend par un superpolynôme symétrique $\mathcal{N} = 2$. On introduira ensuite le concept de superpartition $\mathcal{N} = 2$. On verra enfin qu'on peut généraliser les bases des superpolynômes symétriques et le produit scalaire qui leur est associé. Les résultats de ce chapitre sont tirés de [35].

3.1 Les superpolynômes $\mathcal{N} = 2$

On rappelle qu'un superpolynôme $\mathcal{N} = 1$ est un polynôme invariant sous les échanges $(x_i, \theta_i) \leftrightarrow (x_j, \theta_j)$ et que ces polynômes sont caractérisés par un objet combinatoire appelé superpartition. Ces superpartitions sont formées d'une paire de partitions, dont une fait référence aux composantes bosoniques de la fonction et l'autre aux composantes fermioniques. La généralisation à $\mathcal{N} = 2$ se fait assez simplement : on introduit un nouvel ensemble de coordonnées fermioniques (ϕ_1, \dots, ϕ_N) dans le superspace. L'opération de symétrie est maintenant définie par $(x_i, \phi_i, \theta_i) \leftrightarrow (x_j, \phi_j, \theta_j)$. Par l'ajout d'un nouvel ensemble de coordonnées, on pourrait s'attendre à passer à un trio de partitions restreintes. Toutefois on constate rapidement qu'il est nécessaire d'en avoir un quatuor. En effet, avec les sommes de puissances suivantes :

$$p_n = (x_1^n + x_2^n + \dots), \quad p_n^\phi = (\phi_1 x_1^n + \phi_2 x_2^n + \dots), \quad p_n^\theta = (\theta_1 x_1^n + \theta_2 x_2^n + \dots), \quad (3.1)$$

il est impossible d'écrire des termes tels que

$$\phi_1 \theta_1 x_1^n + \phi_2 \theta_2 x_2^n + \dots \quad (3.2)$$

qui sont manifestement invariants sous l'échange du trio de variables. On verra que cette particularité amènera beaucoup de richesse et son lot de complications.

3.2 Les superpartitions

Une superpartition¹ $\mathcal{N} = 2$ est un ensemble d'entiers positifs ordonnés. Ces entiers peuvent être décorés par une ligne au-dessus de l'entier, une ligne en-dessous de l'entier ou à la fois au-dessus et en-dessous. On qualifie respectivement ces parties de *surlignée*, *soulignée* ou *bilignée*. On note aussi qu'il est possible qu'une partie ne porte aucune décoration. Ces éléments sont notés collectivement $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots)$ et apparaissent en ordre décroissant de leur valeur numérique. En cas d'égalité numérique, l'ambivalence est brisée par l'ordre suivant (noté \succ) : biligné, surligné, souligné, aucune décoration. On note la valeur numérique d'une partie Λ_i par $|\Lambda_i|$. Pour une superpartition Λ de longueur ℓ on a

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\ell), \quad |\Lambda_i| \geq |\Lambda_{i+1}| \quad \text{et} \quad \bar{a} \succ \bar{a} \succ \underline{a} \succ a \quad \text{pour } a = |\Lambda_i| = |\Lambda_{i+1}|. \quad (3.3)$$

Chaque sous-ensemble d'entiers d'un type donné (bilignés, surlignés, ...) répond à certaines conditions. Il est donc utile d'introduire la notation suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \text{ si } \Lambda_i = \overline{|\Lambda_i|}, & \quad \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \text{ si } \Lambda_i = \overline{|\Lambda_i|}, \\ \Lambda_i \in \Lambda^s \text{ si } \Lambda_i = |\Lambda_i|, & \quad \Lambda_i \in \underline{\Lambda} \text{ si } \Lambda_i = \underline{|\Lambda_i|}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On est maintenant en mesure de définir la superpartition $\mathcal{N} = 2$. Soit une superpartition Λ de longueur ℓ :

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\ell). \quad (3.5)$$

Les entrées de la superpartition Λ respectent l'ordre défini en (3.3) et les sous-ensembles $\bar{\Lambda}$, $\underline{\Lambda}$ et Λ^s vérifient les conditions suivantes :

- L'ensemble des parties bilignées $\bar{\Lambda}$ n'est pas restreint et on garde le compte des parties de valeur numérique 0 (dont la multiplicité peut être supérieure à 1) :

$$\forall \Lambda_i, \Lambda_j \in \bar{\Lambda} \text{ on a } |\Lambda_i| \geq |\Lambda_j| \geq 0. \quad (3.6)$$

1. Il a déjà été mentionné dans [15] que les superpartitions $\mathcal{N} = 1$ sont équivalentes à des diagrammes standard de MacMahon (voir par exemple [36], section 2.1.3) qui sont aussi équivalents aux *overpartitions* [37]. Dans le même ordre d'idées, les superpartitions $\mathcal{N} = 2$ sont en bijection avec les paires d'*overpartitions* introduites dans [38].

- L'ensemble des parties surlignées (soulignées) est composé de parties distinctes pouvant contenir au plus un 0 :

$$\forall \Lambda_i, \Lambda_j \in \bar{\Lambda} \text{ ou } \Lambda_i, \Lambda_j \in \underline{\Lambda} \text{ avec } i > j, \text{ on a } |\Lambda_i| > |\Lambda_j| \geq 0. \quad (3.7)$$

- L'ensemble des parties sans décoration n'est pas restreint et on ne prend pas en compte le nombre de 0 :

$$\forall \Lambda_i, \Lambda_j \in \Lambda^s \text{ avec } i > j, \text{ on a } |\Lambda_i| \geq |\Lambda_j| > 0. \quad (3.8)$$

Par exemple :

$$\Lambda = (\bar{3}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \underline{2}, \underline{2}, 1, \bar{0}, \bar{0}, \underline{0}) \quad (3.9)$$

est une superpartition $\mathcal{N} = 2$, tandis que

$$\Omega = (\bar{3}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \underline{2}, \underline{2}, 1, \bar{0}, \bar{0}, \underline{0}) \quad (3.10)$$

n'en est pas une, car il y apparaît deux répétitions de $\bar{2}$, ce qui va à l'encontre des restrictions indiquées ci-dessus.

En utilisant $\ell(\xi)$ pour dénoter la longueur de l'ensemble ξ , on définit maintenant les secteurs. Une superpartition Λ appartient au secteur $(n|\bar{n}, \underline{n})$ si

$$\ell(\bar{\Lambda}) + \ell(\underline{\Lambda}) = \bar{n}, \quad \ell(\underline{\Lambda}) + \ell(\bar{\Lambda}) = \underline{n}, \quad |\Lambda| = n, \quad (3.11)$$

où

$$|\Lambda| := \sum_{i=1}^{\ell(\Lambda)} |\Lambda_i|. \quad (3.12)$$

L'ensemble de toutes les superpartitions du secteur $(n|\bar{n}, \underline{n})$ est noté $\text{SPar}(n|\bar{n}, \underline{n})$ et l'ensemble de toutes les superpartitions $\mathcal{N} = 2$ est noté SPar .

Prenons, par exemple, une superpartition Λ ,

$$\Lambda = (\bar{4}, \bar{4}, \underline{3}, \underline{3}, \bar{2}, \bar{2}, \underline{2}, 1, \bar{0}, \bar{0}, \underline{0}). \quad (3.13)$$

On a

$$\begin{aligned} |\Lambda| &= 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 = 21, \\ \ell(\Lambda) &= 11, \ell(\bar{\Lambda}) = 4, \ell(\underline{\Lambda}) = 3, \ell(\Lambda) = 2, \bar{n} = 7, \underline{n} = 6, \\ \Lambda &\in \text{SPar}(21|7, 6). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les différentes conditions sur les superpartitions font en sorte qu'on obtient la fonction génératrice suivante, où $p(n, \bar{n}, \underline{n})$ est le nombre de superpartitions dans le secteur $(n|\bar{n}, \underline{n})$:

$$\begin{aligned} \sum_{n, \bar{n}, \underline{n}} p(n, \bar{n}, \underline{n}) q^n \xi^{\bar{n}} \gamma^{\underline{n}} &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 + \xi q^n)(1 + \gamma q^n)}{(1 - \xi \gamma q^n)(1 - q^{n+1})} \\ &= (1 + \gamma + \xi + 2\xi\gamma + \xi\gamma^2 + \xi^2\gamma + 2\xi^2\gamma^2 + \dots) q^0 \\ &\quad + (1 + 2\gamma + 2\xi + \gamma^2 + 5\xi\gamma + \xi^2 + 4\xi\gamma^2 + \dots) q^1 \\ &\quad + (2 + 4\gamma + 4\xi + 2\gamma^2 + 11\xi\gamma + 2\xi^2 + 10\xi\gamma^2 + \dots) q^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.15)$$

Par exemple, le coefficient de $\xi\gamma^2q^2$ est 10, ce qui signifie qu'il y a 10 superpartitions dans le secteur $(2|1, 2)$. La fonction génératrice montre clairement qu'il y a une quantité infinie de superpartitions de degré bosonique n , car $\bar{\Lambda}$ peut avoir une quantité illimitée de 0.

3.3 Les diagrammes

Tout comme dans le cas $\mathcal{N} = 1$, on introduit une généralisation des diagrammes de Young pour exprimer les superpartitions. Dans le cas $\mathcal{N} = 1$, on avait des rangées de boîtes, chacune d'elles représentant la valeur d'une partie, avec la possibilité de mettre un cercle à la fin de la rangée pour spécifier qu'il s'agit d'une partie fermionique. Dans notre cas, nous avons deux types de parties fermioniques et un nouveau type de partie bosonique. On introduit donc 3 types de cercles : le cercle à barre verticale pour les parties $\in \bar{\Lambda}$, le cercle à barre horizontale pour les parties $\in \underline{\Lambda}$ et le cercle à croix pour les parties $\in \bar{\Lambda}$. L'ordre dans lequel on écrit les rangées respecte celui utilisé pour les parties de la superpartition. On a par exemple :

$$\Lambda = (\bar{4}, \bar{4}, \underline{3}, \underline{3}, \bar{2}, \bar{2}, \underline{2}, 1, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \oplus \\ & & & & & & \ominus \\ & & & & & & \ominus \\ & & & & & & \\ & & & & & & \oplus \\ & & & & & & \ominus \\ & & & & & & \ominus \\ & & & & & & \\ & & & & & & \oplus \\ & & & & & & \oplus \\ & & & & & & \ominus \end{array} \quad (3.16)$$

Cet exemple illustre la plupart des particularités des superpartitions $\mathcal{N} = 2$. Le lecteur anxieux pourrait craindre que le diagramme ne s'effondre, puisqu'il semble tenir en équilibre sur trois cercles. Ce lecteur peut se réconforter en imaginant que les cercles sont en fait des vis tenant le diagramme bien en place.

Voici l'ensemble des 11 superpartitions du secteur $(2|1, 1)$ accompagnées de leur diagramme :

$$\begin{array}{ll}
(\bar{2}) \longleftrightarrow \square\square\oplus & (\bar{1}, \underline{1}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\oplus \\ \square\ominus \end{array} \\
(\bar{2}, \underline{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\square\oplus \\ \ominus \end{array} & (\bar{1}, 1, \underline{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\oplus \\ \square \\ \ominus \end{array} \\
(\underline{2}, \bar{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\square\ominus \\ \oplus \end{array} & (\underline{1}, 1, \bar{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\ominus \\ \square \\ \oplus \end{array} \\
(\underline{2}, \bar{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\square \\ \oplus \end{array} & (\underline{1}, 1, \bar{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \oplus \end{array} \\
(\underline{2}, \bar{0}, \underline{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\square \\ \oplus \\ \ominus \end{array} & (\underline{1}, 1, \bar{0}, \underline{0}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \oplus \\ \ominus \end{array} \\
(\bar{1}, \underline{1}) \longleftrightarrow \begin{array}{c} \square\oplus \\ \square \end{array} & \end{array} \tag{3.17}$$

3.4 L'espace des superpolynômes $\mathcal{N} = 2$ et les bases classiques

On répète ici, de façon plus précise, la nature des superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 2$. Tout comme dans le cas $\mathcal{N} = 1$, où on considèrerait les polynômes dans les variables (z, θ) , ici on considère les polynômes dans les variables (z, θ, ϕ) , où les ϕ_j sont des variables de Grassmann. On précise que ces nouvelles variables fermioniques anticommulent entre elles et avec les variables θ :

$$\theta_i\theta_j = -\theta_j\theta_i \tag{3.18}$$

$$\phi_i\phi_j = -\phi_j\phi_i \tag{3.19}$$

$$\phi_i\theta_j = -\theta_j\phi_i. \tag{3.20}$$

On voit que les polynômes admettront naturellement 3 degrés importants : le degré dans les variables z noté n , celui dans les variables ϕ noté \bar{n} et celui en θ noté \underline{n} . Ces trois graduations sont en correspondance directe avec les secteurs des superpartitions introduits précédemment.

Les superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 2$ sont les polynômes invariants sous l'échange simultané des indices du trio (z, θ, ϕ) . C'est-à-dire que si $f(z, \theta, \phi)$ est un superpolynôme symétrique, alors

$$f(z_i, z_j, \theta_i, \theta_j, \phi_i, \phi_j) = f(z_j, z_i, \theta_j, \theta_i, \phi_j, \phi_i), \tag{3.21}$$

où la dépendance sur les autres variables est implicite. Afin d'avoir un formalisme opérationnel, on définit les opérateurs d'échange suivants :

$$K_{kl} : z_k \longleftrightarrow z_l, \quad \bar{\kappa}_{kl} : \phi_k \longleftrightarrow \phi_l, \quad \underline{\kappa}_{kl} : \theta_k \longleftrightarrow \theta_l. \tag{3.22}$$

On définit aussi l'opérateur qui génère l'échange simultané du trio :

$$\mathcal{K}_{ij} := K_{ij} \bar{K}_{ij} \underline{K}_{ij}, \quad (3.23)$$

de sorte que

$$\mathcal{K}_{kl} f(z_k, z_l, \theta_k, \theta_l, \phi_k, \phi_l) = K_{kl} \bar{K}_{kl} \underline{K}_{kl} f(z_k, z_l, \theta_k, \theta_l, \phi_k, \phi_l) = f(z_l, z_k, \theta_l, \theta_k, \phi_l, \phi_k). \quad (3.24)$$

Ainsi, les superpolynômes symétriques $\mathcal{N} = 2$ sont les polynômes qui ont la propriété suivante :

$$\mathcal{K}_{ij} f(z, \theta, \phi) = f(z, \theta, \phi) \quad \forall \quad i, j = \{1, \dots, N\}. \quad (3.25)$$

Un superpolynôme $f(z, \theta, \phi)$ de degré \bar{n} dans les variables ϕ_i , de degré \underline{n} dans les variables θ_i et de degré n dans les variables z_i appartient au secteur $(n|\bar{n}, \underline{n})$.

Par exemple, la fonction suivante est un superpolynôme symétrique en 3 (trios de) variables du secteur $(2|2, 1)$:

$$f(z, \theta, \phi) = \phi_1 \phi_2 \theta_3 z_1^2 + \phi_1 \phi_3 \theta_2 z_1^2 + \phi_2 \phi_3 \theta_1 z_2^2 - \phi_1 \phi_2 \theta_3 z_2^2 - \phi_1 \phi_3 \theta_2 z_3^2 - \phi_2 \phi_3 \theta_1 z_3^2. \quad (3.26)$$

L'espace des polynômes symétriques à N trios de variables avec des coefficients dans \mathbb{C} est noté Π^N et se définit comme :

$$f \in \Pi^N \iff \mathcal{K}_{ij} f = f \quad \forall \quad i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (3.27)$$

3.4.1 Les monômes

Afin d'introduire la base monomiale de façon compacte et claire, on introduit d'abord un peu de notation. On définit

$$[\phi; \theta]_{\Lambda} = \phi_1^{\bar{\epsilon}_1} \theta_1^{\underline{\epsilon}_1} \cdots \phi_{\ell}^{\bar{\epsilon}_{\ell}} \theta_{\ell}^{\underline{\epsilon}_{\ell}}, \quad (3.28)$$

avec

$$\bar{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \text{ ou } \bar{\Lambda} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{\epsilon}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \text{ ou } \underline{\Lambda} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}. \quad (3.29)$$

Par exemple,

$$\Lambda = (\bar{2}, \underline{2}, \bar{1}, 1, 0) \implies [\phi; \theta]_{\Lambda} = \phi_1 \theta_2 \phi_3 \theta_3 \theta_5. \quad (3.30)$$

De façon analogue, pour Λ une superpartition de longueur ℓ , on définit

$$z^{\Lambda} = z_1^{|\Lambda_1|} z_2^{|\Lambda_2|} \cdots z_{\ell}^{|\Lambda_{\ell}|}. \quad (3.31)$$

Avec cette notation, on définit la fonction monomiale dans le superespace. Pour toute superpartition $\Lambda \in \text{SPar}$, on associe une fonction symétrique monomiale :

$$m_{\Lambda} = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_{\omega} [\phi; \theta]_{\Lambda} z^{\Lambda}, \quad (3.32)$$

où \mathcal{K}_ω permute les indices et le prime indique qu'on ne prend que les permutations distinctes. Voici quelques exemples simples de fonctions monomiales, le premier étant l'exemple $f(z, \theta, \phi)$ de l'équation (3.26) :

$$m_{(\bar{2}, \bar{0}, \bar{0})} = \phi_1 \phi_2 \theta_3 (z_1^2 - z_2^2) + \theta_1 \phi_2 \phi_3 (z_2^2 - z_3^2) + \phi_1 \theta_2 \phi_3 (z_3^2 - z_1^2), \quad (3.33)$$

$$m_{(\bar{3}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0})} = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \phi_4 \theta_4 \theta_5 \phi_6 \theta_7 z_1^3 z_2^2 z_3^2 z_4 z_5 + \text{permutations distinctes}, \quad (3.34)$$

$$m_{(\bar{2}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1})} = \phi_1 \theta_1 \phi_2 z_1^2 z_2 z_3 z_4 + \text{permutations distinctes}. \quad (3.35)$$

3.4.2 Les bases multiplicatives

On introduit maintenant les bases dites multiplicatives. Dans le cas $\mathcal{N} = 1$, on devait définir un équivalent fermionique pour chaque élément de base. Ici, on doit en introduire trois. On considère la généralisation des mêmes fonctions soient p_λ, h_λ et e_λ . Prenons une base multiplicative arbitraire indexée par une superpartition $\mathcal{N} = 2$, que l'on notera $f_\Lambda = f_\Lambda(x, \theta, \phi)$. On a

$$f_\Lambda = \tilde{f}_{\Lambda_1} \cdots \tilde{f}_{\Lambda_\ell}, \quad (3.36)$$

où

$$\tilde{f}_{\Lambda_i} = \begin{cases} \bar{f}_n & \text{si } \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \\ \bar{f}_n & \text{si } \Lambda_i \in \bar{\Lambda} \\ \underline{f}_n & \text{si } \Lambda_i \in \underline{\Lambda} \\ \underline{f}_n & \text{si } \Lambda_i \in \Lambda^s \end{cases} \quad \text{pour } n = |\Lambda_i|. \quad (3.37)$$

On remarquera que contrairement au cas $\mathcal{N} = 1$, où toutes les fonctions fermioniques étaient multipliées en premier lieu, suivies des fonctions bosoniques, ici, on ordonne le produit en suivant de haut en bas la structure du diagramme de la superpartition. Ceci permet d'éviter des changements de signe peu naturels sous le changement de base. En particulier, on veut systématiquement avoir $p_\Lambda = (+1)|a_\Lambda| m_\Lambda + \cdots$.

Pour obtenir les nouvelles bases, on utilise un formalisme de formes différentielles emprunté à [15]. On introduit la (\bar{k}, \underline{k}) -forme :

$$f(x) = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_{\bar{k}} \leq N \\ 1 \leq j_1, \dots, j_{\underline{k}} \leq N}} f_{i_1, \dots, i_{\bar{k}}, j_1, \dots, j_{\underline{k}}}(x) \bar{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{d}x^{i_{\bar{k}}} \wedge \underline{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \underline{d}x^{j_{\underline{k}}}, \quad (3.38)$$

où les sous-indices sur f indiquent des dérivées partielles en x , où le produit extérieur \wedge est anti-symétrique et où on considère que $\bar{d}x^i$ et $\underline{d}x^i$ sont différents. On voit ainsi que

$$\bar{d}x^i \wedge \bar{d}x^j = -\bar{d}x^j \wedge \bar{d}x^i, \quad \underline{d}x^i \wedge \underline{d}x^j = -\underline{d}x^j \wedge \underline{d}x^i, \quad (3.39)$$

mais aussi que

$$\bar{d}x^i \wedge \underline{d}x^j = -\underline{d}x^j \wedge \bar{d}x^i. \quad (3.40)$$

Il est donc clair que ces formes différentielles reproduisent les relations entre les variables de Grassmann et qu'il y a une correspondance entre les (\bar{k}, \underline{k}) -formes et le secteur fermionique (\bar{n}, \underline{n}) :

$$\bigwedge_{i=1}^{\bar{n}} \bar{d}x_i \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{\bar{n}} \phi_i, \quad \bigwedge_{i=1}^{\underline{n}} \underline{d}x_i \longleftrightarrow \prod_{i=1}^{\underline{n}} \theta_i. \quad (3.41)$$

Ceci nous permet de construire des superfonctions qui possèdent *de facto* la propriété de symétrie. En effet, avec $\partial_i \equiv \partial_{x_i}$ introduisons les deux opérations suivantes :

$$\bar{d}f(x) = \sum_i \bar{d}x_i \wedge \partial_i f(x) \longrightarrow \sum_i \phi_i \partial_i f(x), \quad (3.42)$$

$$\underline{d}f(x) = \sum_i \underline{d}x_i \wedge \partial_i f(x) \longrightarrow \sum_i \theta_i \partial_i f(x). \quad (3.43)$$

Si $f(x)$ est une fonction symétrique de degré n alors on a :

$$\bar{d}f(x)|_{\bar{d}x_i \rightarrow \phi_i} \in (n-1|1, 0), \quad (3.44)$$

$$\underline{d}f(x)|_{\underline{d}x_i \rightarrow \theta_i} \in (n-1|0, 1), \quad (3.45)$$

$$\bar{d}\underline{d}f(x)|_{\substack{\bar{d}x_i \rightarrow \phi_i \\ \underline{d}x_i \rightarrow \theta_i}} \in (n-2|1, 1). \quad (3.46)$$

Cette opération nous permet de construire les différentes bases multiplicatives. En effet, soit f_n , une base multiplicative classique arbitraire, alors

$$\bar{f}_n \propto \bar{d}f_{n+1}|_{\bar{d}x_i \rightarrow \phi_i} \quad (3.47)$$

$$\underline{f}_n \propto \underline{d}f_{n+1}|_{\underline{d}x_i \rightarrow \theta_i} \quad (3.48)$$

$$\bar{f}_n \propto \bar{d}\underline{d}f_{n+2}|_{\substack{\bar{d}x_i \rightarrow \phi_i \\ \underline{d}x_j \rightarrow \theta_j}} \quad (3.49)$$

Les éléments de base sont résumés dans le tableau 3.1. On illustre la procédure de construction dans le cas des sommes de puissances :

$$\bar{d}p_n = \bar{d}(x_1^n + x_2^n + \dots) \quad (3.50)$$

$$= n(\bar{d}x_1 x_1^{n-1} + \bar{d}x_2 x_2^{n-1} + \dots) \quad (3.51)$$

$$\rightarrow n(\phi_1 x_1^{n-1} + \phi_2 x_2^{n-1} + \dots) \quad (3.52)$$

$$= n\bar{p}_{n-1}. \quad (3.53)$$

Voici deux exemples simples de développement sur ces bases. Soit $f(x, \theta, \phi)$ le superpolynôme

fonctions génératrices suivantes (où $\bar{\tau}$ et $\underline{\tau}$ sont des paramètres anticommutants) :

$$\begin{aligned} P(t, \bar{\tau}, \underline{\tau}) &= \sum_i \frac{tz_i + \bar{\tau}\phi_i + \underline{\tau}\theta_i}{1 - (tz_i + \bar{\tau}\phi_i + \underline{\tau}\theta_i)} \\ &= \sum_{n \geq 0} t^n (p_n + (n+1)\bar{\tau}\bar{p}_n + (n+1)\underline{\tau}\underline{p}_n - (n+1)(n+2)\bar{\tau}\underline{\tau}\bar{\underline{p}}_n), \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$H(t, \bar{\tau}, \underline{\tau}) = \prod_i \frac{1}{1 - (tz_i + \bar{\tau}\phi_i + \underline{\tau}\theta_i)} = \sum_n t^n (h_n + \bar{\tau}\bar{h}_n + \underline{\tau}\underline{h}_n - \bar{\tau}\underline{\tau}\bar{\underline{h}}_n), \quad (3.57)$$

$$E(t, \bar{\tau}, \underline{\tau}) = \prod_i (1 + tz_i + \bar{\tau}\phi_i + \underline{\tau}\theta_i) = \sum_n t^n (e_n + \bar{\tau}\bar{e}_n + \underline{\tau}\underline{e}_n - \bar{\tau}\underline{\tau}\bar{\underline{e}}_n). \quad (3.58)$$

Ces fonctions génératrices peuvent être obtenues en utilisant la dérivée extérieure, on illustre la procédure en faisant l'exemple $E(t) \rightarrow E(t, \bar{\tau}, \underline{\tau})$. D'abord, la fonction génératrice originale des fonctions symétriques élémentaires est donnée par

$$E(t) = \prod (1 + tx_i) = \sum_n t^n e_n. \quad (3.59)$$

On définit les deux opérateurs suivants :

$$\bar{D} := \bar{d}t \wedge \bar{d}, \quad (3.60)$$

$$\underline{D} := \underline{d}t \wedge \underline{d}. \quad (3.61)$$

On définit aussi la notation suivante :

$$\llbracket F(x_i, t, \bar{d}x_i, \underline{d}x_i, \bar{d}t, \underline{d}t) \rrbracket := \left[F(x_i, t, \bar{d}x_i, \underline{d}x_i, \bar{d}t, \underline{d}t) \right]_{\substack{\bar{d}x_i \rightarrow \phi_i, \underline{d}x_i \rightarrow \theta_i, \\ \bar{d}t \rightarrow \bar{\tau}, \underline{d}t \rightarrow \underline{\tau}}}. \quad (3.62)$$

La fonction génératrice est obtenue en faisant l'opération suivante :

$$E(t, \bar{\tau}, \underline{\tau}) = \llbracket (1 + \bar{D})(1 + \underline{D})E(t) \rrbracket. \quad (3.63)$$

On calcule d'abord

$$\llbracket (1 + \bar{D})(1 + \underline{D})E(t) \rrbracket = \llbracket (1 + \bar{D})(1 + \underline{D}) \sum_n t^n e_n \rrbracket \quad (3.64)$$

$$= \llbracket \sum_n (t^n e_n + \bar{D}t^n e_n + \underline{D}t^n e_n + \bar{D}\underline{D}t^n e_n) \rrbracket. \quad (3.65)$$

Concentrons nous sur le deuxième terme à l'intérieur de la somme

$$\llbracket \bar{D}t^n e_n \rrbracket = \llbracket (\bar{d}t \wedge \bar{d})t^n e_n \rrbracket \quad (3.66)$$

$$= \llbracket t^{n-1}(\bar{d}t \wedge \bar{d}e_n) \rrbracket \quad (3.67)$$

$$= t^{n-1}(\bar{\tau}\bar{e}_{n-1}). \quad (3.68)$$

On peut faire un calcul similaire pour l'action des opérateurs sur les autres termes, on obtient ainsi

$$\llbracket (1 + \overline{D})(1 + \underline{D})E(t) \rrbracket = \sum_n t^n (e_n + \overline{\tau} \overline{e}_n + \underline{\tau} \underline{e}_n - \overline{\tau} \underline{\tau} \overline{e}_n), \quad (3.69)$$

où le signe négatif devant $\overline{\tau} \underline{\tau}$ vient de la réorganisation des termes.

On calcule maintenant l'action de l'opérateur sur la forme produit de la fonction génératrice. L'observation clef ici est que l'opérateur $(1 + \overline{D})$ agit comme une translation. En effet, prenons une fonction symétrique $G(x_i)$ arbitraire

$$\llbracket (1 + \overline{D})G(x_i) \rrbracket = (1 + \sum_j \frac{\overline{\tau} \phi_j}{t} \partial_j) G(x_i). \quad (3.70)$$

Puisque $\overline{\tau}^2 = 0$, on a

$$(1 + \sum_j \frac{\overline{\tau} \phi_j}{t} \partial_j) G(x_i) = \left(\exp \sum_j \frac{\overline{\tau} \phi_j}{t} \partial_j \right) G(x_i) \quad (3.71)$$

$$= G(x_i + \frac{\overline{\tau} \phi_i}{t}). \quad (3.72)$$

On peut répéter cette démarche pour $(1 + \underline{D})$ et ainsi obtenir

$$\llbracket (1 + \overline{D})(1 + \underline{D})G(x_i) \rrbracket = G(x_i + \frac{1}{t} \overline{\tau} \phi_i + \frac{1}{t} \underline{\tau} \theta_i). \quad (3.73)$$

On utilise cette identité pour $E(x_i; t) \equiv E(t)$:

$$\llbracket (1 + \overline{D})(1 + \underline{D})E(x_i; t) \rrbracket = E(x_i + \frac{1}{t} \overline{\tau} \phi_i + \frac{1}{t} \underline{\tau} \theta_i; t) \quad (3.74)$$

$$= \prod_i (1 + t x_i + \overline{\tau} \phi_i + \underline{\tau} \theta_i). \quad (3.75)$$

On retrouve ainsi (3.58).

3.4.3 Le produit scalaire et le noyau reproducteur

Maintenant qu'on a la fonction génératrice des homogènes, on peut utiliser l'astuce mentionnée dans les deux derniers chapitres pour calculer le noyau reproducteur :

$$K(x, y, \phi, \overline{\tau}, \theta, \underline{\tau}) = \prod_j H(t_j, \overline{\tau}_j, \underline{\tau}_j) \quad (3.76)$$

$$= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j - \phi_i \overline{\tau}_j - \theta_i \underline{\tau}_j}, \quad (3.77)$$

expression de laquelle on obtient

$$K(x, y, \phi, \theta, \overline{\tau}, \underline{\tau}) = \sum_{\Lambda \in \text{SPar}} (-1)^{\binom{\overline{n} + \underline{n}}{2}} z_{\Lambda}^{-1} \zeta_{\Lambda}^{-1} p_{\Lambda}(x, \phi, \theta) p_{\Lambda}(y, \overline{\tau}, \underline{\tau}) \quad (3.78)$$

avec

$$z_\Lambda = z_{\Lambda^s} = \prod_{k \geq 1} k^{n_{\Lambda^s}(k)} n_{\Lambda^s}(k)!, \quad (3.79)$$

$$\zeta_\Lambda = \zeta_{\bar{\Lambda}} = \prod_{k \geq 0} \frac{n_{\bar{\Lambda}}(k)!}{(k+1)^{n_{\bar{\Lambda}}(k)}}. \quad (3.80)$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} & \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j - \phi_i \bar{\tau}_j - \theta_i \underline{\tau}_j} \\ &= \exp \left(\sum_{i,j} \ln(1 - x_i y_j - \phi_i \bar{\tau}_j - \theta_i \underline{\tau}_j)^{-1} \right) \\ &= \exp \left\{ \sum_{i,j} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (x_i y_j + \phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j)^n \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i,j} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left((x_i y_j)^n + \sum_{k \geq 1} \binom{n}{k} (x_i y_j)^{n-k} (\phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j)^k \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i,j} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left((x_i y_j)^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} (x_i y_j)^{n-1} (\phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n!}{(n-2)!2!} (x_i y_j)^{n-2} (\phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j)^2 \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{p_n(x) p_n(y)}{n} + \sum_{n \geq 0} (\bar{p}_n(x, \phi) \bar{p}_n(y, \bar{\tau}) + \underline{p}_n(x, \theta) \underline{p}_n(y, \underline{\tau})) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n \geq 0} (n+1) \bar{\underline{p}}_n(x_i, \phi_i, \theta_i) \bar{\underline{p}}_n(y_j, \bar{\tau}_j, \underline{\tau}_j) \right\}. \quad (3.81) \end{aligned}$$

À la quatrième égalité, on utilise $(\phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j)^3 = 0$. Notons d'ailleurs que le terme $(\phi_i \bar{\tau}_j + \theta_i \underline{\tau}_j)^2$ n'apparaît que pour $n \geq 2$ dans l'avant-dernière expression. Ensuite, en utilisant le théorème 33 de [15], on peut écrire

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{p_n(x) p_n(y)}{n} + \sum_{n \geq 0} (\bar{p}_n(x, \phi) \bar{p}_n(y, \bar{\tau}) + \underline{p}_n(x, \theta) \underline{p}_n(y, \underline{\tau})) \right\} \\ &= \sum_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ \mu, \nu \in \text{ParD}}} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) (-1)^{\binom{\ell(\mu)}{2} + \binom{\ell(\nu)}{2}} \bar{p}_\mu(x, \phi) \bar{p}_\mu(y, \bar{\tau}) \underline{p}_\nu(x, \theta) \underline{p}_\nu(y, \underline{\tau}), \quad (3.82) \end{aligned}$$

où Par et ParD représentent respectivement l'ensemble des partitions standard et l'ensemble

des partitions avec parties distinctes. On se concentre maintenant sur le terme restant :

$$\begin{aligned}
& \prod_{n \geq 0} \exp \left\{ -(n+1) \underline{p}_n(x, \phi, \theta) \underline{p}_n(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}) \right\} \\
&= \prod_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left[-(n+1) \underline{p}_n(x, \phi, \theta) \underline{p}_n(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}) \right]^k \\
&= \prod_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (n+1)^k}{k!} \left[\underline{p}_n(x, \phi, \theta) \underline{p}_n(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}) \right]^k \\
&= \sum_{\rho \in \text{Par}_0} (-1)^{\ell(\rho)} \zeta_\rho^{-1} \underline{p}_\rho(x, \phi, \theta) \underline{p}_\rho(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}), \tag{3.83}
\end{aligned}$$

où Par_0 est l'ensemble des partitions standards pour lesquelles on garde le compte du nombre de zéros² et on rappelle que

$$\zeta_\lambda = \prod_{k \geq 0} \frac{n_\lambda(k)!}{(k+1)^{n_\lambda(k)}}. \tag{3.84}$$

Observons que

$$\underline{p}_\mu(y, \phi) \underline{p}_\nu(x, \theta) = (-1)^{\ell(\mu)\ell(\nu)} \underline{p}_\nu(x, \theta) \underline{p}_\mu(y, \phi). \tag{3.85}$$

En combinant ces résultats, on obtient :

$$K(x, y, \phi, \theta, \bar{\tau}, \underline{\tau}) = \sum_{\Lambda \in \text{SPar}} (-1)^{\binom{\ell(\bar{\Lambda}) + \ell(\underline{\Lambda})}{2} + \ell(\bar{\Lambda})} z_\Lambda^{-1} \zeta_\Lambda^{-1} p_\Lambda(x, \phi, \theta) p_\Lambda(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}). \tag{3.86}$$

En utilisant le fait que $\ell(\bar{\Lambda}) + \ell(\underline{\Lambda}) = \bar{n} + \underline{n} - 2\ell(\bar{\Lambda})$ on obtient une forme plus élégante du signe. En écrivant $\ell(\bar{\Lambda})$ comme $\bar{\ell}$ pour alléger, on a

$$\begin{aligned}
\frac{(\ell(\bar{\Lambda}) + \ell(\underline{\Lambda}))(\ell(\bar{\Lambda}) + \ell(\underline{\Lambda}) - 1)}{2} + \bar{\ell} &= \frac{(\bar{n} + \underline{n} - 2\bar{\ell})(\bar{n} + \underline{n} - 2\bar{\ell} - 1)}{2} + \bar{\ell} \\
&= \frac{(\bar{n} + \underline{n})(\bar{n} + \underline{n} - 1)}{2} - \bar{\ell}(2\bar{n} + 2\underline{n} - 1) + \bar{\ell} \pmod{2} \\
&= \binom{\bar{n} + \underline{n}}{2} \pmod{2}, \tag{3.87}
\end{aligned}$$

de telle sorte que

$$K(x, y, \phi, \theta, \bar{\tau}, \underline{\tau}) = \sum_{\Lambda \in \text{SPar}} (-1)^{\binom{\bar{n} + \underline{n}}{2}} z_\Lambda^{-1} \zeta_\Lambda^{-1} p_\Lambda(x, \phi, \theta) p_\Lambda(y, \bar{\tau}, \underline{\tau}), \tag{3.88}$$

ce qui complète la preuve. \square

On obtient ainsi le produit scalaire suivant :

$$\langle p_\Lambda^\top | p_\Omega \rangle = z_\Lambda \zeta_\Lambda \delta_{\Lambda, \Omega}, \tag{3.89}$$

2. Par exemple, on considère que (1), (1, 0) et (1, 0, 0) sont des partitions différentes et on considère que (0), (0, 0), ... sont aussi des partitions.

où la notation f_{Λ}^{\top} signifie qu'on inverse complètement l'ordre des variables à l'intérieur du superpolynôme. Pour $f(z, \theta, \phi)$ une fonction du secteur fermionique (\bar{n}, \underline{n}) , on a

$$f^{\perp}(z, \theta, \phi) = (-1)^{\binom{\bar{n}+\underline{n}}{2}} f(z, \theta, \phi). \quad (3.90)$$

En utilisant la stratégie des dérivées extérieures, la théorie des superpartitions et des superpolynômes est facilement généralisable à un nombre \mathcal{N} arbitraire. Ce travail est présenté dans la section 4 de [35]. On épargne toutefois ceci au lecteur car il s'agit de résultats auxiliaires qui ne contribuent pas à la quête des superpolynômes de Jack.

Chapitre 4

Sur la piste des superpolynômes de Jack

*Mon beau navire ô ma mémoire
Avons-nous assez navigué
Dans une onde mauvaise à boire
Avons-nous assez divagué
De la belle aube au triste soir*

— Guillaume Apollinaire

Nous avons vu trois façons différentes de définir les polynômes de Jack $\mathcal{N} = 0$, et ces trois façons avaient une généralisation simple dans le cas $\mathcal{N} = 1$. On reprendra ici ces approches pour tenter de mettre sur pied les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. D’abord, l’approche combinatoire offrira une résistance telle qu’elle remettra en doute l’existence d’une telle définition. On reviendra à la charge en étudiant la possibilité que les sJacks possèdent des propriétés de la théorie $\mathcal{N} = 1$. On étudiera ensuite une généralisation $\mathcal{N} = 2$ directe du modèle tCMS. Finalement, on s’attardera à la construction, qui devrait être la plus directe et la plus solide, celle qui passe par le symétrisation des nsJacks. On verra que c’est cette dernière approche qui nous donnera les indices nécessaires à la poursuite de notre quête.

4.1 L’approche combinatoire

On rappelle que la définition combinatoire repose sur deux éléments, soient l’orthogonalité et la triangularité sur la base monomiale. Il nous faut donc définir un produit scalaire déformé à un paramètre, ainsi qu’un ordre de dominance.

4.1.1 Une déformation du produit scalaire

Par analogie avec le cas $\mathcal{N} = 1$ (2.34), on pose le noyau suivant :

$$K(x, \theta, \phi, y, \tau, \psi; \alpha) = \prod_{ij} \frac{1}{(1 - x_i y_j - \theta_i \tau_j - \phi_i \psi_j)^{1/\alpha}}. \quad (4.1)$$

On peut ainsi extraire un produit scalaire en faisant le développement en série de puissances. On obtient alors

$$K(x, \theta, \phi, y, \tau, \psi; \alpha) = \sum_{\Lambda \in \text{SPar}} \alpha^{-\ell(\Lambda)} z_\Lambda^{-1} \zeta_\Lambda^{-1} p_\Lambda^\perp(y, \tau, \psi) p_\Lambda(x, \theta, \phi). \quad (4.2)$$

On y lit directement le produit scalaire suivant :

$$\langle p_\Lambda^\perp | p_\Omega \rangle'_\alpha = \alpha^{\ell(\Lambda)} z_\Lambda \zeta_\Lambda \delta_{\Lambda\Omega}. \quad (4.3)$$

On justifie ce produit scalaire et le noyau par deux points : premièrement, si on prend $\phi_i = 0$ ou $\theta_i = 0$ on récupère le noyau $\mathcal{N} = 1$, ce qui est essentiel. Deuxièmement, dans le cas classique, il existe une base multiplicative à un paramètre appelée g_λ^α . Elle admet la fonction génératrice suivante :

$$G(x, t; \alpha) = \prod_i (1 - x_i t)^{-1/\alpha} = \sum_n g_n^\alpha t^n. \quad (4.4)$$

On sait d'ailleurs que

$$K(x, y; \alpha) = \prod_j G(x, y_j; \alpha). \quad (4.5)$$

Ainsi, on suppose qu'une généralisation $\mathcal{N} = 2$ de cette base permettrait d'obtenir le noyau $\mathcal{N} = 2$. En utilisant la stratégie des formes différentielles discuté à la section 3.4.2, on obtient la fonction génératrice des g_λ^α $\mathcal{N} = 2$:

$$\tilde{G}(x, \theta, \phi, t, \bar{\tau}, \underline{\tau}; \alpha) = \prod_i \frac{1}{(1 - t x_i - \bar{\tau} \phi_i - \underline{\tau} \theta_i)^{1/\alpha}} \quad (4.6)$$

$$= \sum_n t^n (g_n^{(\alpha)} + \bar{\tau} \bar{g}_n^{(\alpha)} \underline{\tau} \underline{g}_n^{(\alpha)} - \bar{\tau} \underline{\tau} \bar{g}_n^{(\alpha)}). \quad (4.7)$$

Ainsi, on constate que le noyau (2.34) peut être effectivement obtenu de

$$K(x, \theta, \phi, y, \tau, \psi; \alpha) = \prod_j \tilde{G}(x, \theta, \phi, y_j, \tau_j, \psi_j; \alpha). \quad (4.8)$$

De plus, cette nouvelle base est duale à la base monomiale :

$$\langle m_\Lambda^\perp | g_\Omega^{(\alpha)} \rangle'_\alpha = \delta_{\Lambda\Omega}. \quad (4.9)$$

Il s'agit d'une propriété connue des $g_\lambda^{(\alpha)}$. Ceci fait en sorte que le noyau et le produit scalaire semblent des généralisations assez naturelles. Il s'agit maintenant de trouver un ordre de dominance. Cet aspect devient plus problématique.

4.1.2 Une première tentative

L'ordre de dominance que nous cherchons est restreint par le fait qu'il doit être compatible avec l'ordre de dominance $\mathcal{N} = 1$ lorsque nous sommes dans un secteur où $\bar{n} = 0$, et de même lorsque $\underline{n} = 0$. Toutefois, on rencontre rapidement un cul-de-sac avec cette approche. Supposons qu'on fixe un tel ordre de dominance $<_k$ et qu'ensuite on l'utilise pour générer des candidats au superpolynôme de Jack $J_\Lambda^{\alpha,k}$. On génère d'abord la forme des Jacks avec l'ordre de dominance :

$$J_\Lambda^{\alpha,k} = m_\Lambda + \sum_{\Omega <_k \Lambda} a_{\Lambda\Omega} m_\Omega, \quad (4.10)$$

puis on fixe les $a_{\Lambda\Omega}$ avec le système d'équation obtenu de

$$\langle J_\Lambda^{\alpha,k} | J_\Gamma^{\alpha,k} \rangle'_\alpha \propto \delta_{\Lambda,\Gamma}. \quad (4.11)$$

Il s'avère que *peu importe* l'ordre de dominance utilisé¹, on n'obtient généralement pas des coefficients $a_{\Lambda\Omega}$ intéressants. En effet, on s'attend à ce que le dénominateur des coefficients soit constitué d'un produit de termes de la forme $(c + d\alpha)$, où c et d sont des entiers positifs. Cette propriété est présente dans les cas $\mathcal{N} = 0$ et $\mathcal{N} = 1$ et elle suggère une interprétation combinatoire des coefficients. Toutefois, on obtient expérimentalement des dénominateurs polynomiaux en α qui ne factorisent pas en produit de termes linéaires.

Ceci semble indiquer un problème au cœur de notre approche. On tente d'y remédier avec l'espoir que certaines propriétés des polynômes de Jack classiques et des superpolynômes de Jack seront toujours valides à $\mathcal{N} = 2$.

4.1.3 Une deuxième tentative

On cherchera des indices dans une propriété des Jacks ordinaires et des sJacks, soit la relation de dualité. Dans la théorie des polynômes symétriques classiques, on définit l'involution suivante :

$$\hat{\omega}_\alpha : p_n \longrightarrow (-1)^{n-1} \alpha p_n, \quad (4.12)$$

dont l'action résultante sur une somme de puissances associée à la partition λ est

$$\hat{\omega}_\alpha(p_\lambda) = \omega_\lambda^\alpha p_\lambda, \quad \omega_\lambda^\alpha \equiv (-\alpha)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}. \quad (4.13)$$

Cette involution a une action toute particulière sur les polynômes de Jack. Tout d'abord, on définit la conjugaison de partition. Cette opération consiste à échanger le rôle des rangées et des colonnes sur le diagramme pour ainsi obtenir la partition conjuguée λ' . Par exemple,

$$\lambda = (2, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad \lambda' = (3, 2) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array}.$$

1. Par «peu importe», on entend qu'on prend les superpartitions d'un secteur et qu'on teste tous les ordres de dominance possibles.

L'involution $\hat{\omega}_\alpha$ appliquée sur les Jacks a pour effet de conjuguer la partition et d'inverser le paramètre :

$$\hat{\omega}_\alpha P_\lambda^\alpha \propto P_{\lambda'}^{1/\alpha}. \quad (4.14)$$

On peut définir l'analogue de cette opération dans le superespace :

$$\hat{\omega}_\alpha : (p_n, \tilde{p}_n) \longrightarrow (-1)^{n-1} \alpha (p_n, -\tilde{p}_n), \quad (4.15)$$

dont l'action résultante sur une somme de puissance de partition Λ est

$$\hat{\omega}_\alpha(p_\Lambda) = \omega_\Lambda^\alpha p_\Lambda, \quad \omega_\Lambda^\alpha \equiv (-\alpha)^{|\Lambda| - \ell(\Lambda^s)}. \quad (4.16)$$

Les sJacks admettent la propriété suivante [16] :

$$\hat{\omega}_\alpha P_\Lambda^\alpha \propto P_{\Lambda'}^{1/\alpha}. \quad (4.17)$$

Comme dans le cas des partitions standards, l'opération de conjugaison réfère à l'échange du rôle des rangées et des colonnes sur le diagramme. Par exemple :

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right)' = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} .$$

L'idée ici est d'exploiter cette propriété pour obtenir des sJacks $\mathcal{N} = 2$ et d'en inspecter la forme. Nous sommes ainsi en mesure de définir une nouvelle involution [35] :

$$\hat{\omega}_\alpha : (p_n, \bar{p}_n, \underline{p}_n, \bar{\underline{p}}_n) \longrightarrow (-1)^{n-1} \alpha (p_n, -\bar{p}_n, -\underline{p}_n, \bar{\underline{p}}_n). \quad (4.18)$$

On remarque qu'on peut obtenir ces relations directement en utilisant l'action de \bar{d} et \underline{d} sur la relation (4.12). L'action résultante sur une somme de puissances est

$$\hat{\omega}_\alpha(p_\Lambda) = \omega_\Lambda^\alpha p_\Lambda, \quad \omega_\Lambda^\alpha \equiv (-\alpha)^{|\Lambda| - \ell(\bar{\Lambda}) - \ell(\Lambda^s)}. \quad (4.19)$$

On suppose que la propriété tient toujours : soit J_Λ^α un sJacks $\mathcal{N} = 2$, alors

$$\hat{\omega}^\alpha(J_\Lambda^\alpha) \propto J_{\Lambda'}^{1/\alpha}. \quad (4.20)$$

Ensuite, bien qu'on ne connaisse pas l'ordre de dominance, on peut tenter de repérer la superpartition la plus basse dans l'ordre d'un secteur. Par exemple, dans l'ensemble de partition (3.17), il semble assez conservateur de supposer que la partition

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \ominus \\ \hline \ominus \\ \hline \end{array} \quad (4.21)$$

est la plus basse de son secteur. Ainsi, on peut supposer que

$$J_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}^\alpha = m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}. \quad (4.22)$$

On applique l'involution sur cette dernière équation et on trouve

$$\hat{\omega}^\alpha J_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}^\alpha \propto J_{\begin{array}{c} \square \\ \ominus \\ \ominus \end{array}}^{1/\alpha},$$

avec

$$\begin{aligned} J_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}^\alpha = & m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} + \frac{1}{(1+3\alpha)}(m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} - m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \ominus \end{array}}) + \frac{1+\alpha}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \end{array}} + \frac{2}{(1+3\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \end{array}} \\ & + \frac{2(1+\alpha)}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} + \frac{2}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} + \frac{1}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} \\ & + \frac{2}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)}(m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}} - m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}) + \frac{2}{(1+3\alpha)(1+2\alpha)(1+\alpha)}m_{\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \end{array}}. \end{aligned}$$

Ce résultat étonnant semble suggérer qu'il existe une forme de symétrie/antisymétrie entre les \oplus et \ominus , qui pourrait être exploitée dans la construction des sJacks. Énormément d'efforts ont été déployés dans une construction cohérente des sJacks selon cette stratégie. Bien que plusieurs tentatives semblaient prometteuses, aucune façon systématique n'a pu être mise au point pour générer les superpolynômes. Il semblerait que le cœur du problème réside dans l'ambivalence sur la conjugaison. Par exemple, le diagramme

$$\begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{array} \quad (4.23)$$

n'a aucune conjugaison évidente. Tenter de tirer davantage d'information à partir des propriétés des superpolynômes devient rapidement circulaire. Après un long moment à tourner en rond, on convient qu'il est nécessaire de choisir un nouvel angle d'attaque.

4.2 Une généralisation du modèle tCMS

Pour avoir un œil neuf sur le problème, on tente une méthode de généralisation simple afin d'obtenir le modèle tCMS supersymétrique $\mathcal{N} = 2$ (qu'on appellera s²tCMS pour faire court). Une stratégie naturelle est de généraliser l'hamiltonien avec le formalisme d'échange :

$$H^{\text{échange}} = \frac{1}{2} \sum_j p_j^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sum_{i < j} \frac{\beta(\beta - K_{ij})}{\sin^2(\pi x_{ij}/L)}. \quad (4.24)$$

Remarquons que si l'action de cet opérateur est limitée à l'espace des fonctions symétriques, K_{ij} agit comme l'identité et l'hamiltonien tCMS est récupéré. Si on limite l'action de l'opérateur sur l'espace des superfonctions symétriques $\mathcal{N} = 1$, on observe que l'action de K_{ij} est identique à κ_{ij} :

$$K_{ij}\theta_1\theta_2(z_1 - z_2) = \kappa_{ij}\theta_1\theta_2(z_1 - z_2) = -\theta_1\theta_2(z_1 - z_2). \quad (4.25)$$

En faisant la substitution $K_{ij} \rightarrow \kappa_{ij}$, et en passant à la forme canonique, on récupère le modèle $\mathcal{N} = 1$ (2.46). Le passage à $\mathcal{N} = 2$ se fait en constatant que dans l'espace des superpolynômes $\mathcal{N} = 2$, K_{ij} agit comme $\bar{\kappa}_{ij}\underline{\kappa}_{ij}$. En faisant cette substitution, et en passant à la forme canonique de l'hamiltonien, on trouve

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(2)} = \sum_i (z_i \partial_i)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_{ij}} (z_i \partial_i - z_j \partial_j) - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{z_{ij}^2} (1 - \bar{\kappa}_{ij} \underline{\kappa}_{ij}). \quad (4.26)$$

Ce nouveau modèle possède $3N$ variables, il nous faut donc 3 tours de quantités conservées. Puisque les Jacks et les sJacks $\mathcal{N} = 1$ doivent aussi être solution de ce modèle, on pose directement la projection sur Π^N des opérateurs suivants :

$$\mathcal{H}_n = \sum_i \mathcal{D}_i^n. \quad (4.27)$$

Deux autres tours doivent être trouvées. On a déjà certaines contraintes sur les tours supplémentaires. En s'inspirant du modèle $\mathcal{N} = 1$, on tente la projection des opérateurs suivants sur Π^N :

$$I_n^\theta = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \theta_1 \theta_1^\dagger \mathcal{D}_1 \quad (4.28)$$

$$I_n^\phi = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \phi_1 \phi_1^\dagger \mathcal{D}_1 \quad (4.29)$$

Ces opérateurs semblent adéquats, puisque que si l'un des deux ensembles de variables fermioniques est mis à 0, on retrouve le modèle $\mathcal{N} = 1$, ce qui est souhaitable. D'autre part, I_0^θ est relié au degré fermionique \underline{n} , et I_0^ϕ au degré \bar{n} , qui sont *a priori* des quantités conservées. Toutefois, on s'aperçoit que ces quantités ne sont pas en involution :

$$[I_n^\theta, I_m^\phi] \neq 0. \quad (4.30)$$

On essaie donc une autre quantité conservée :

$$I_n^+ = I_n^\theta + I_n^\phi. \quad (4.31)$$

On calcule que les opérateurs de cette tour sont effectivement en involution :

$$[I_n^+, I_m^+] = 0. \quad (4.32)$$

Il faudrait maintenant trouver un candidat pour la troisième tour. Comme une des nouvelles caractéristiques de $\mathcal{N} = 2$ est le boson $\phi_i \theta_i$, on tente la quantité suivante :

$$\tilde{J}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \phi_1 \theta_1 \theta_1^\dagger \phi_1^\dagger \mathcal{D}_1^n. \quad (4.33)$$

Bien que ces opérateurs commutent avec l'hamiltonien, on constate malheureusement qu'ils ne commutent pas avec I_m^+ . De plus, cet opérateur annihile les termes qui ne contiennent pas

de $\phi_i\theta_i$. Les tentatives de faire des petites modifications à ces opérateurs amènent des complications majeures dans les calculs. À moins de se développer une intuition sur la structure du problème et de deviner les quantités conservées, cette voie pour construire les sJacks semblent n'être qu'un autre cul-de-sac.

On pourrait s'attendre à ce que le modèle suggéré ici soit une généralisation trop naïve et qu'elle ne tienne pas compte de particularités propres au problème $\mathcal{N} = 2$, c'est pourquoi on tentera de construire le modèle sur des bases plus solides au chapitre 5. On a vu aux chapitres précédents que les liens entre les polynômes de Jack et le modèle tCMS sont mis en évidence par la formulation des Jacks par symétrisation des nsJacks. On entreprend alors cette construction.

4.3 L'approche par symétrisation

En s'inspirant de la méthode de symétrisation des nsJacks pour obtenir les sJacks $\mathcal{N} = 1$, la généralisation semble évidente et on s'attend à un polynôme de la forme

$$\mathcal{J}_\Lambda^{1/\beta} \propto \sum_{\omega \in \mathcal{S}_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_\Lambda E_\Lambda. \quad (4.34)$$

De plus, on s'attend à ce que ces polynômes soient fonctions propres des \mathcal{H}_n par construction. Finalement, on s'attend à ce que les coefficients aient des propriétés analogues aux Jacks standards, car ils partagent la même structure non symétrique.

On rencontre toutefois quelques problèmes d'ordre conceptuel. Premièrement, il est difficile de trouver un produit scalaire combinatoire qui rend ces polynômes orthogonaux. Deuxièmement, la contribution des variables fermioniques est complètement comprise dans $[\phi; \theta]_\Lambda$, ce qui signifie que les paires $\phi_i\theta_i$ ne seront pas dissociées lors de la symétrisation. Ainsi, en supposant que les sJacks sont toujours triangulaires sur la base monomiale, l'ordre de dominance qui résulte de la symétrisation indique par exemple que

$$\square\square\oplus \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \ominus \end{array} \quad (4.35)$$

sont des superpartitions non comparables.

Ceci semble être un problème. En effet, supposons la généralisation directe de la propriété suivante :

$$m_\Lambda = p_\Lambda + \sum_{\Omega > \Lambda} a_{\Lambda, \Omega} p_\Omega. \quad (4.36)$$

En faisant un exemple simple, on constate que l'ordre de dominance donné par le changement de base ci-haut nous donne $\square\square\oplus > \begin{array}{c} \square \\ \oplus \\ \ominus \end{array}$. Ainsi, les deux ordres de dominance ne sont pas comparables. Si on garde la foi en l'existence des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$, on peut supposer

l'une des deux options suivantes : soit l'obtention du sJacks à partir du Jack non symétrique est erronée, soit il faut repenser complètement les bases des superpolynômes symétriques. La seconde option semble moins alléchante car la généralisation des bases classiques semble assez naturelle de par les propriétés que ces bases respectent.

On constate que les multiples routes permettant d'obtenir sJack $\mathcal{N} = 2$ ont été jusqu'à maintenant parsemées d'embûches. Permettons-nous d'abandonner nos critères esthétiques pour un instant. Si on considère que ce sont les sJacks obtenus de la symétrisation qui sont corrects, quelles conclusions pouvons-nous en tirer ?

La structure de ces polynômes suggère que le degré des paires de variables $\phi_i\theta_i$ est conservé. De plus, le degré dans les variables ϕ_j «esseulées», c'est-à-dire qui ne sont pas multipliées par θ_j , est aussi conservé, idem pour les variables θ_k esseulées.

Du point de vue des superpartitions, ceci signifie que l'on doit rediviser l'ensemble des superpartitions en sous-secteurs, où les quantités $\ell(\bar{\underline{\Lambda}})$, $\ell(\bar{\Lambda})$ et $\ell(\underline{\Lambda})$ sont maintenant toutes conservées. Cette nouvelle division aura certainement un impact sur la structure des bases classiques, et peut-être que ceci permettra l'orthogonalité des sJacks. Finalement, afin de légitimer cette nouvelle approche, il faudrait s'assurer que des liens peuvent être tissés avec le modèle $s^2\text{tCMS}$. Tout ça semble très hypothétique, mais ne reculant devant rien, tentons cette construction.

Chapitre 5

Superpolynômes de Jack, prise deux

It seems that if one is working from the point of view of getting beauty in one's equations, and if one has really a sound insight, one is on a sure line of progress. If there is not complete agreement between the results of one's work and experiment, one should not allow oneself to be too discouraged, because the discrepancy may well be due to minor features that are not properly taken into account and that will get cleared up with further development of the theory.

— Paul Dirac

5.1 Les superpartitions

Comme mentionné au chapitre précédent, notre nouvel objectif est de construire un espace de superpolynômes séparé en secteurs plus stricts. Pour ce faire, on introduit la notation alternative suivante pour les superpartitions :

$$\Lambda = (\underline{\bar{\Lambda}}; \bar{\Lambda}; \underline{\Lambda}; \Lambda^s). \quad (5.1)$$

Avec cette notation, on laisse tomber le surlignage et le sous-lignage des parties à l'intérieur de la superpartition puisque les parties de même type sont maintenant regroupées.

On introduit maintenant le secteur fermionique M :

$$M = (\underline{\bar{m}}, \bar{m}, \underline{m}). \quad (5.2)$$

Une superpartition Λ fait partie du secteur fermionique $M = (\underline{\bar{m}}, \bar{m}, \underline{m})$ si

$$\ell(\underline{\bar{\Lambda}}) = \underline{\bar{m}}, \quad \ell(\bar{\Lambda}) = \bar{m}, \quad \ell(\underline{\Lambda}) = \underline{m}. \quad (5.3)$$

Pour des raisons pratiques, on introduit la somme partielle sur M avec la notation suivante :

$$M_1 = \underline{\bar{m}}, \quad M_2 = \underline{\bar{m}} + \bar{m}, \quad M_3 = \underline{\bar{m}} + \bar{m} + \underline{m}. \quad (5.4)$$

Ainsi, avec la nouvelle notation sur les superpartitions, il est entendu que pour une superpartition Λ de longueur N du secteur fermionique M on a

$$\begin{aligned}
\Lambda_i &\in \overline{\underline{\Lambda}} \text{ pour } 1 \leq i \leq M_1, \\
\Lambda_j &\in \overline{\Lambda} \text{ pour } M_1 < j \leq M_2, \\
\Lambda_k &\in \underline{\Lambda} \text{ pour } M_2 < k \leq M_3, \\
\Lambda_l &\in \Lambda^s \text{ pour } M_3 < l \leq N.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Avec cette nouvelle notation, les contraintes sur les superpartitions s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\Lambda_i &\geq \Lambda_{i+1} \geq 0 \quad \forall \quad 1 \leq i < M_1, \\
\Lambda_i &> \Lambda_{i+1} \geq 0 \quad \forall \quad M_1 < i < M_2, \\
\Lambda_i &> \Lambda_{i+1} \geq 0 \quad \forall \quad M_2 < i < M_3, \\
\Lambda_i &\geq \Lambda_{i+1} > 0 \quad \forall \quad M_3 < i < \ell(\Lambda).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

On dénote par $\text{SPar}(n|M)$ l'ensemble des superpartitions de degré n appartenant au secteur fermionique M .

Cette notation rend explicite la conservation de \overline{m} , \overline{m} et \underline{m} . On s'intéresse ensuite aux conséquences de cette conservation sur les bases des superpolynômes.

5.2 L'espace des superpolynômes

Maintenant que les superpartitions ont une nouvelle séparation en secteurs donnée par $\text{SPar}(n|M)$, on doit observer cette séparation dans les graduations de l'espace des superpolynômes. Pour $M = (\overline{m}, \overline{m}, \underline{m})$, on note simplement $\Pi_{(M)}^N$ l'ensemble des superpolynômes de degré n dans les variables z_i , de degré \overline{m} dans les paires de variables $\phi_j \theta_j$, de degré \overline{m} dans les variables ϕ_k esseulées et de degré \underline{m} dans les variables θ_l esseulées. Par exemple, la fonction $g(z, \theta, \phi)$ suivante fait partie du secteur fermionique $M = (1, 2, 1)$:

$$g(z, \theta, \phi) = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \phi_3 \theta_4 z_2 + \text{permutations.} \tag{5.7}$$

5.2.1 La base monomiale

On fait ici une petite modification à la base monomiale pour obtenir une relation plus naturelle avec les sJacks qu'on obtiendra bientôt par symétrisation.

On introduit le monôme fermionique M :

$$[\phi; \theta]_M = \prod_{i=1}^{M_1} \phi_i \theta_i \prod_{j=M_1+1}^{M_2} \phi_j \prod_{k=M_2+1}^{M_3} \theta_k. \tag{5.8}$$

Ainsi, étant donnée une superpartition $\Lambda = (\bar{\Lambda}; \bar{\Lambda}; \underline{\Lambda}; \Lambda^s)$ du secteur fermionique M , la fonction monomiale à $3N$ variables qui lui est associée s'écrit

$$m_\Lambda = \frac{1}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M z^\Lambda, \quad (5.9)$$

où

$$f_\Lambda = f_{\bar{\Lambda}} f_{\Lambda^s} \quad \text{avec} \quad f_\lambda = n_\lambda(0)! n_\lambda(1)! \dots \quad (5.10)$$

Cette modification a pour effet de changer l'ordre du produit des variables fermioniques. Dorénavant, seule cette définition de la base monomiale sera utilisée. Notons qu'on peut s'épargner le facteur de normalisation en ne sommant que les permutations distinctes :

$$m_\Lambda = \sum'_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M z^\Lambda, \quad (5.11)$$

où le prime indique cette restriction. Voici quelques exemples de fonctions monomiales :

$$m \begin{array}{c} \square \oplus \\ \circ \\ \ominus \end{array} = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_3 z_1 + \text{permutations distinctes}, \quad (5.12)$$

$$m \begin{array}{c} \square \oplus \\ \square \\ \square \ominus \\ \square \circ \\ \square \\ \circ \\ \ominus \end{array} = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4 \theta_5 z_1^3 z_3^1 z_5^2 z_6 + \text{permutations distinctes}. \quad (5.13)$$

5.2.2 Les opérateurs de secteur fermionique

Ajoutons d'ailleurs que notre nouvelle séparation de l'espace des superpolynômes admet trois opérateurs qui permettent d'obtenir les degrés fermioniques d'un superpolynôme. On introduit ces opérateurs et la preuve de leur action, car il s'agit d'un aperçu simple du genre de calcul qu'on aura à faire dans les sections à venir.

Proposition 1.

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger, \quad \bar{F} = \sum_{i=1}^N \phi_i \phi_i^\dagger - \bar{F}, \quad \underline{F} = \sum_{i=1}^N \theta_i \theta_i^\dagger - \bar{F}. \quad (5.14)$$

Pour une fonction $f \in \Pi_{(M)}^N$ on a

$$\bar{F}f = \bar{m}f, \quad \bar{F}f = \bar{m}f, \quad \underline{F}f = \underline{m}f. \quad (5.15)$$

Démonstration. On prouve ce résultat seulement pour \bar{F} , puisque les deux autres preuves sont similaires. La preuve est obtenue par calcul direct. En appliquant d'abord \bar{F} sur un monôme

arbitraire $m_\Lambda \in \Pi_{(M)}^N$, on a

$$\overline{F}m_\Lambda = \sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger \sum'_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M z^\Lambda. \quad (5.16)$$

Comme $(\sum_i \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger)$ est symétrique, \mathcal{K}_ω commute avec ce terme, on obtient donc

$$\overline{F}m_\Lambda = \sum'_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger [\phi; \theta]_M z^\Lambda. \quad (5.17)$$

Concentrons-nous sur la deuxième somme :

$$\sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger [\phi; \theta]_M = \sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger \phi_1 \theta_1 \cdots \phi_{\overline{m}} \theta_{\overline{m}} \phi_{M_1+1} \cdots \phi_{M_2} \theta_{M_2+1} \cdots \theta_{M_3}. \quad (5.18)$$

Il est clair que $\phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger \phi_j \theta_j = \delta_{ij} \phi_j \theta_j$. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^N \phi_i \theta_i (\phi_i \theta_i)^\dagger [\phi; \theta]_M = \sum_{i=1}^{\overline{m}} [\phi; \theta]_M = \overline{m} [\phi; \theta]_M. \quad (5.19)$$

On substitue cette dernière expression dans (5.17). Il en résulte

$$\overline{F}m_\Lambda = \overline{m} m_\Lambda. \quad (5.20)$$

Puisque toute fonction $f \in \Pi_{(M)}^N$ a une décomposition unique sur la base monomiale, on a

$$\overline{F}f = \overline{F} \sum_{\Lambda} c_\Lambda m_\Lambda = \sum_{\Lambda} c_\Lambda \overline{F}m_\Lambda = \sum_{\Lambda} c_\Lambda \overline{m} m_\Lambda = \overline{m} f. \quad (5.21)$$

□

5.2.3 Les quasi sommes de puissances

Retournons à notre problème principal. On a redéfini les secteurs fermioniques de sorte que les quantités \overline{m} , \overline{m} et \underline{m} soient conservées. On rencontre alors un autre problème d'ordre conceptuel : on s'attend à ce que le développement d'un élément de base de superpartition $\Lambda \in \text{SPar}(n|M)$ sur une autre base n'implique que des partitions $\Omega \in \text{SPar}(n|M)$. Plus précisément : soit deux bases homogènes complètes v_Λ et u_Ω avec $\Lambda \in \text{SPar}(n|M)$, on devrait avoir

$$v_\Lambda = \sum_{\Omega \in \text{SPar}(n|M)} a_{\Lambda, \Omega} u_\Omega \quad (5.22)$$

où $a_{\Lambda, \Omega}$ sont des coefficients.

On constate toutefois que la base des sommes de puissances p_Ω ne répond pas à ce critère, on le voit facilement par cet exemple minimal :

$$m_{\mathfrak{g}} = p_{\mathfrak{g}} - p_{\mathfrak{e}}. \quad (5.23)$$

Pour régler ce problème, on cherche une stratégie pour déformer la base des sommes de puissances de façon telle que le passage d'une base à l'autre ne fasse intervenir que des partitions d'un même secteur. Un certain nombre d'observations permettent d'obtenir une déformation acceptable.

D'abord, on sait que les superpartitions $\mathcal{N} = 1$ forment un sous-ensemble des superpartitions $\mathcal{N} = 2$. Ceci signifie que notre nouvelle base doit être équivalente aux sommes de puissances $\mathcal{N} = 1$ lorsque indexée par des superpartitions $\mathcal{N} = 1$. Sans cette condition, les sJacks $\mathcal{N} = 1$ ne formeront pas un sous-ensemble de ceux $\mathcal{N} = 2$.

Ensuite, on constate que le problème des sommes de puissances réside dans la multiplication de \bar{p}_i et \underline{p}_j , par exemple :

$$p_{\mathbb{G}} = (\phi_1 + \phi_2 + \cdots)(\theta_1 + \theta_2 + \cdots) \quad (5.24)$$

$$= \underbrace{\phi_1\theta_1 + \phi_2\theta_2 + \cdots}_{\text{}} + \phi_1\theta_2 + \phi_2\theta_1 + \cdots \quad (5.25)$$

On voit que la multiplication produit une expression inhomogène dans le couple de variable $\phi_i\theta_i$.

Finalement, on fait l'observation cruciale que, dans le cas $\mathcal{N} = 1$,

$$p_{(\Lambda^a;)} = m_{(\Lambda^a;)} \quad (5.26)$$

La factorisation du monôme est due au fait que $\theta_i^2 = 0$. Dans le cas $\mathcal{N} = 2$, une telle factorisation ne se produit pas car $\phi_i\theta_i \neq 0$. On s'inspire de ce fait pour poser la forme suivante pour notre nouvelle base dite des *quasi sommes de puissances* :

$$q_{\Lambda} = \bar{\underline{p}}_{\bar{\Lambda}} m_{(\bar{\Lambda}; \Delta;)} p_{\Lambda^s} \quad (5.27)$$

Bien que nous obtenons une base non multiplicative, cette base répond à tous nos critères. Il reste à voir si un produit scalaire combinatoire simple défini sur cette base permet l'orthogonalité des sJacks obtenus par la symétrisation.

5.3 L'approche par symétrisation

On entreprend maintenant la construction des sJacks par symétrisation. Cette construction sera légèrement différente de celle proposée au chapitre précédent. On posera une forme qui soit plus naturelle considérant la nouvelle notation sur les superpartitions.

On définit d'abord la composition Λ^R :

$$\Lambda^R = ((\bar{\Lambda})^R, (\bar{\Lambda})^R, (\underline{\Lambda})^R, (\Lambda^s)^R). \quad (5.28)$$

On rappelle que λ^R est la composition obtenue du renversement de l'ordre des parties de la partition.

Ensuite, pour éviter d'encombrer les équations, on utilisera la notation compacte suivante :

$$S_{]a,b]} := S_{\{a+1, \dots, b\}}, \quad (5.29)$$

où $S_{\{a+1, \dots, b\}}$ est le groupe de permutation des éléments $\{a+1, a+2, \dots, b\}$ et où a, b sont des entiers positifs tels que $a < b$. On introduit aussi

$$\sum_{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, \gamma} \equiv \sum_{\substack{\bar{\alpha} \in S_{M_1} \\ \bar{\alpha} \in S_{]M_1, M_2]} \\ \alpha \in S_{]M_2, M_3]} \\ \gamma \in S_{]M_3, N]}} . \quad (5.30)$$

Ceci nous permet d'introduire les Jacks à symétrie prescrite suivant :

$$\mathcal{E}_\Lambda = \frac{(-1)^{\binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}}}{f_\Lambda} \sum_{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha, \gamma} (-1)^{\ell(\bar{\alpha}) + \ell(\alpha)} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_{\gamma} E_{\Lambda R}. \quad (5.31)$$

On voit qu'on symétrise sur les premières M_1 variables, puis on antisymétrise sur les variables $\{M_1 + 1, \dots, M_2\}$, on antisymétrise sur $\{M_2 + 1, \dots, M_3\}$ et on symétrise sur les variables restantes.

On introduit maintenant $S_{(M)}$, qui est défini comme suit :

$$S_{(M)} := S_N / (S_{M_1} \times S_{]M_1, M_2]} \times S_{]M_2, M_3]} \times S_{]M_3, N]}). \quad (5.32)$$

On obtient ainsi une nouvelle version des sJacks par symétrisation :

$$P_\Lambda^{1/\beta} = \sum_{\omega \in S_{(M)}} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M \mathcal{E}_\Lambda. \quad (5.33)$$

De façon équivalente on a

$$P_\Lambda^{1/\beta} = \frac{(-1)^{\binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}}}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_{\Lambda R}. \quad (5.34)$$

L'équivalence des deux définitions est facilement prouvée par calcul direct. Tel que mentionné précédemment, on s'attend à ce que les sJacks ainsi obtenus soient orthogonaux selon un produit scalaire analytique.

Le produit scalaire analytique

On définit maintenant le produit scalaire analytique dans le secteur fermionique M . Soit $A(z, \theta, \phi)$ et $B(z, \theta, \phi)$ deux fonctions $\in \Pi_{(M)}^N$ et β un entier :

$$\langle A(z, \theta, \phi) | B(z, \theta, \phi) \rangle_\beta = \prod_{i=1}^N \left(\oint \frac{dz_i}{2\pi i z_i} \right) \prod_{i=1}^N \int d\phi_i d\theta_i \Delta^\beta(z) \Delta^\beta(z^{-1}) [A(z, \theta, \phi)]^\dagger B(z, \theta, \phi), \quad (5.35)$$

où l'opération \ddagger est définie telle que $z_i^\ddagger = z_i^{-1}$ et où l'action sur les variables de Grassmann est définie telle que

$$\prod_{i \in I} \phi_i \theta_i \prod_{j \in J} \phi_j \prod_{l \in L} \theta_l \left(\prod_{i \in I} \phi_i \theta_i \prod_{j \in J} \phi_j \prod_{l \in L} \theta_l \right)^\ddagger = \theta_N \phi_N \cdots \theta_1 \phi_1. \quad (5.36)$$

Par exemple, pour $N = 5$, on a

$$(\phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_3)^\ddagger = \theta_5 \phi_5 \theta_4 \phi_4 \phi_3 \theta_2. \quad (5.37)$$

Lemme 2. *Les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$ sont orthogonaux par rapport à ce produit scalaire :*

$$\langle P_\Lambda^{1/\beta} | P_\Omega^{1/\beta} \rangle_\beta \propto \delta_{\Lambda\Omega}. \quad (5.38)$$

Démonstration. Pour le prouver, on suit l'analyse de [39] qui nous garantit qu'avec le produit scalaire dans le secteur fermionique $M = (0, 0, 0)$, on a

$$\langle \mathcal{E}_\Lambda | \mathcal{E}_\Omega \rangle_\beta \propto \delta_{\Lambda\Omega}. \quad (5.39)$$

À partir de ce résultat, on montre par calcul direct que les sJacks sont orthogonaux par rapport au produit scalaire analytique. Par la simple définition du produit scalaire (5.35), on sait que deux superpolynômes n'appartenant pas au même secteur fermionique seront orthogonaux. Prenons donc deux superpartition Λ et Ω appartenant au secteur fermionique M . On a

$$\left\langle P_\Lambda^{1/\beta} | P_\Omega^{1/\beta} \right\rangle_\beta = \left\langle \sum_{\omega \in S(M)} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M \mathcal{E}_\Lambda \mid \sum_{\sigma \in S(M)} \mathcal{K}_\sigma[\phi; \theta]_M \mathcal{E}_\Omega \right\rangle_\beta \quad (5.40)$$

En utilisant l'adjoint de $\mathcal{K}_\sigma[\phi; \theta]_M$

$$\left\langle P_\Lambda^{1/\beta} | P_\Omega^{1/\beta} \right\rangle_\beta = \left\langle \sum_{\omega, \sigma \in S(M)} ([\phi; \theta]_M)^\dagger (\mathcal{K}_\sigma)^{-1} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M \mathcal{E}_\Lambda | \mathcal{E}_\Omega \right\rangle_\beta \quad (5.41)$$

On voit ici que $([\phi; \theta]_M)^\dagger (\mathcal{K}_\sigma)^{-1} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M$ sera nul, à moins que $([\phi; \theta]_M)^\dagger$ et $(\mathcal{K}_\sigma)^{-1} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M$ aient tous deux le même contenu fermionique. De par la structure de $S(M)$ ceci signifie nécessairement que $\omega = \sigma$. On obtient alors

$$\left\langle P_\Lambda^{1/\beta} | P_\Omega^{1/\beta} \right\rangle_\beta = \sum_{\omega \in S(M)} \langle \mathcal{E}_\Lambda | \mathcal{E}_\Omega \rangle_\beta \propto \delta_{\Lambda, \Omega}. \quad (5.42)$$

□

Ce résultat est sans grande surprise. Puisque nous obtenons nos polynômes par symétrisation des nsJacks, l'orthogonalité selon le produit scalaire analytique était garantie par construction. L'orthogonalité selon un produit scalaire combinatoire serait une propriété beaucoup plus surprenante.

Le produit scalaire combinatoire

On cherche maintenant à vérifier s'il est possible d'obtenir un produit scalaire combinatoire sur la base des q_Λ qui permette d'obtenir l'orthogonalité de ces superpolynômes.

Pour ce faire, il s'agit de générer tous les sJacks dans un secteur donné, de les développer sur la base des q_Λ et de prendre le produit scalaire entre chaque paire de sJacks en laissant $\langle q_\Omega | q_\Omega \rangle_\alpha$ comme un inconnu. On a ensuite un système d'équation qu'on résout facilement à l'ordinateur. On inspecte les solutions et on pose en conjecture la forme du produit scalaire. On constate qu'il existe effectivement un tel produit :

$$\langle q_\Lambda | q_\Omega \rangle_\alpha = \alpha^{\ell(\Lambda^s)} \xi_{\underline{\Lambda}} z_{\Lambda^s} \delta_{\Lambda\Omega}, \quad (5.43)$$

avec

$$\xi_{\underline{\Lambda}} = \prod_i n_{\underline{\Lambda}}(i)!. \quad (5.44)$$

On remarque d'abord que ce produit scalaire est compatible avec le produit scalaire $\mathcal{N} = 1$ donné en (2.35). En effet, ils ne diffèrent que par un facteur $\alpha^{\ell(\Lambda^s)}$, et celui-ci n'a aucune incidence sur l'orthogonalité : ce facteur étant constant à l'intérieur d'un même secteur fermionique, il modifie toutes les normes par un même facteur.

Le tableau 5.1 résume les vérifications qui ont été faites de l'orthogonalité des sJacks selon le produit scalaire précédent. Bien que les degrés des secteurs semblent bas, on doit considérer le fait que, même à ce niveau, les systèmes d'équations sont largement surdéterminés. Par exemple, dans le secteur $(2|1, 1, 1)$, il y a 11 superpartitions, donc 11 normes différentes (ou inconnues). Ces 11 superpartitions produisent 11 sJacks qui devraient tous être orthogonaux. On obtient ainsi un système de $\binom{11}{2} = 55$ équations. La conjecture d'orthogonalité de ces polynômes par rapport au produit scalaire (5.43) est donc assez forte. Notons aussi qu'en s'appuyant sur [16], l'orthogonalité est garantie pour toute paire de superpartitions $\mathcal{N} = 1$.

La raison pour laquelle on peut difficilement tester des secteurs plus élevés vient du fait qu'en augmentant le secteur, on augmente largement le nombre minimal de variables nécessaires à la construction des sJacks. En effet, puisque les sJacks sont triangulaires, le monôme ayant la superpartition la plus basse dans l'ordre de dominance d'un secteur apparaîtra toujours. Pour écrire un monôme symétrique dans les variables (z, θ, ϕ) , on doit avoir un nombre de (trios de) variables au moins équivalent à la longueur de la partition. Prenons par exemple une partition Λ de longueur ℓ :

$$m_\Lambda = \sum_{\omega \in S_N} \phi_1 \theta_1 \cdots \phi_{M_1} \theta_{M_1} \phi_{M_1+1} \cdots \phi_{M_2} \theta_{M_2+1} \cdots \theta_{M_3} z_1^{\Lambda_1} \cdots z_\ell^{\Lambda_\ell}, \quad (5.45)$$

il est clair que N doit être plus grand ou égal à ℓ pour le que le monôme soit symétrique. On calcule facilement ce nombre de variables minimal en s'intéressant à la longueur maximale d'un diagramme dans un secteur donné.

TABLE 5.1 – Tests effectués pour vérifier l’orthogonalité des polynômes (5.33) selon le produit scalaire (5.43).

Secteur $(n \overline{m}, \overline{m}, \underline{m})$	Nombre de superpartitions dans le secteur
(1 0, 1, 1)	3
(1 1, 0, 1)	3
(1 2, 1, 1)	4
(1 3, 1, 1)	4
(2 1, 1, 1)	11
(2 1, 0, 2)	3
(2 1, 2, 1)	4
(2 1, 1, 2)	4

On sait que les cercles \oplus peuvent tous être dans la première colonne en bas du diagramme, sans restriction. Ainsi, s’ils sont en nombre \overline{m} , ils font une contribution de \overline{m} à la longueur maximale. Ensuite, on sait qu’on ne peut pas trouver deux \oplus dans la même colonne. Ainsi, ils doivent être minimalement disposés le long d’un escalier de boîtes, par exemple, pour $\overline{m} = 4$:

$$(5.46)$$

On constate alors que s’ils sont en nombre \overline{m} , leur contribution à la longueur du diagramme le plus long est de \overline{m} et ils neutralisent $\overline{m}(\overline{m} - 1)/2$ boîtes. Le même raisonnement vaut pour les cercles \ominus . Finalement, les boîtes peuvent toutes s’aligner le long du diagramme, à l’exception faite de celles qui sont utilisées par les escaliers. On trouve donc

$$\ell_{\max} = \overline{m} + \overline{m} + \underline{m} + n - \frac{\overline{m}(\overline{m} - 1) + \underline{m}(\underline{m} - 1)}{2}. \quad (5.47)$$

Ceci fait en sorte que pour calculer symboliquement par symétrisation des sJacks, il est nécessaire de faire un programme qui aura à gérer $3\ell_{\max}$ variables. Par exemple, le secteur $(3|3, 2, 1)$ nécessite 24 variables pour écrire un seul sJack. Le programme manquera rapidement de mémoire. Pour être en mesure d’obtenir les superpolynômes dans des secteurs supérieurs, il faudra développer une autre stratégie.

5.4 L’ordre de dominance et la définition combinatoire

Une stratégie adéquate pour générer les sJacks de façon efficace à l’ordinateur est d’en obtenir une définition combinatoire. Comme on l’a déjà vu, les éléments nécessaires à cette définition sont l’ordre de dominance et le produit scalaire combinatoire. Comme nous avons maintenant le produit scalaire (5.43), ils nous restera à trouver un ordre de dominance.

Pour déterminer l'ordre de dominance, il suffit d'inspecter les sJacks obtenus par symétrisation puisqu'on s'attend à ce qu'ils soient triangulaires sur la base monomiale. En faisant cette analyse, on trouve facilement l'ordre qu'on présente ici.

On introduit la notation suivante :

$$\Lambda^+ = (\Lambda_1, \dots; \dots; \dots; \dots, \Lambda_N)^+ = (\Lambda_1^+, \Lambda_2^+, \dots, \Lambda_N^+) \quad \text{où } \Lambda_i^+ \geq \Lambda_{i+1}^+ \quad (5.48)$$

Cette opération est analogue à celle faite sur les compositions, elle consiste à réorganiser toutes les parties en ordre faiblement décroissant pour obtenir une partition standard.

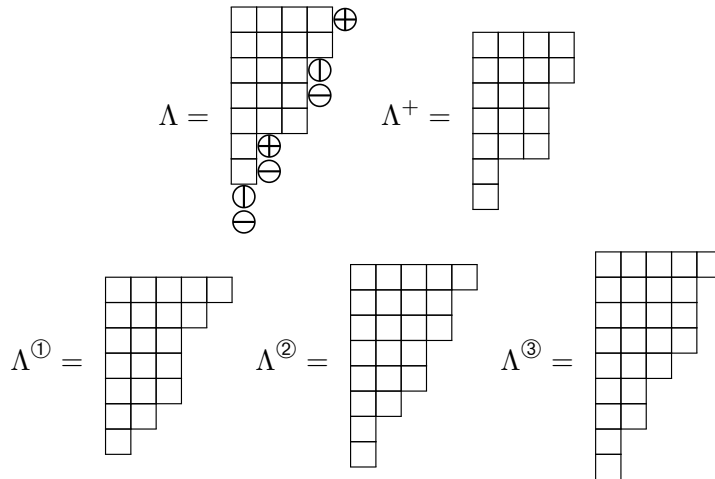
En notant $\eta + 1^m$ pour la composition $(\eta_1 + 1, \dots, \eta_m + 1, \eta_{m+1}, \dots, \eta_N)$, on définit :

$$\Lambda^{\textcircled{1}} = (\Lambda + 1^{M_1})^+, \quad (5.49)$$

$$\Lambda^{\textcircled{2}} = (\Lambda + 1^{M_2})^+, \quad (5.50)$$

$$\Lambda^{\textcircled{3}} = (\Lambda + 1^{M_3})^+ \quad (5.51)$$

Du point de vue du diagramme, Λ^+ est la partition obtenue une fois qu'on a supprimé tous les cercles, $\Lambda^{\textcircled{1}}$ est la partition obtenue en remplaçant tous les \oplus par des boîtes et en enlevant les autres cercles, $\Lambda^{\textcircled{2}}$ est la partition obtenue en remplaçant les \oplus et les \ominus par des boîtes et enlevant cercles restants, et finalement $\Lambda^{\textcircled{3}}$ est la partition obtenue lorsque qu'on transforme tous les cercles en boîtes. Par exemple :



Avec cette notation, l'ordre de dominance s'écrit comme suit :

$$\Lambda \geq \Omega \iff \Lambda^+ \geq \Omega^+, \Lambda^{\textcircled{1}} \geq \Omega^{\textcircled{1}}, \Lambda^{\textcircled{2}} \geq \Omega^{\textcircled{2}} \text{ et } \Lambda^{\textcircled{3}} \geq \Omega^{\textcircled{3}}. \quad (5.52)$$

Les comparaisons à droite de la double flèche désignent l'ordre de dominance habituelle sur

5.5 Un retour sur le modèle stCMS $\mathcal{N} = 2$

Les résultats précédents semblent indiquer que nous avons effectivement trouvé une généralisation des sJacks. L'équivalence apparente entre la définition par symétrisation et la définition combinatoire donne bon espoir que la construction n'est pas artificielle. Établir un lien avec le modèle s²tCMS pourrait toutefois nous en convaincre. Le modèle d'échange discuté auparavant semble parfaitement acceptable, mais on pourrait soupçonner qu'il soit aveugle à certaines subtilités apparaissant à $\mathcal{N} = 2$. C'est pourquoi on entreprend de construire le modèle en suivant [40].

On sait d'abord que le modèle sera défini en termes de deux supercharges qui satisfont l'algèbre suivante :

$$\{Q_a, Q_b^\dagger\} = 2\delta_{ab}H, \quad \{Q_a, Q_b\} = 0, \quad \{Q_a^\dagger, Q_b^\dagger\} = 0, \quad a, b = 1, 2 \quad (5.58)$$

où H est l'hamiltonien $\mathcal{N} = 2$. Ces charges s'écrivent en termes de deux prépotentiels $W^{[0]}$ et $W^{[1]}$ qui sont des fonctions qui ne dépendent que des variables x_k :

$$Q_1 = \sum_j \theta_j \left(p_j - iW_j^{[0]} - i \sum_{k,l=1}^N W_{jkl}^{[1]} \phi_k \phi_l^\dagger \right), \quad (5.59)$$

$$Q_2 = \sum_j \phi_j \left(p_j - iW_j^{[0]} - i \sum_{k,l=1}^N W_{jkl}^{[1]} \theta_k \theta_l^\dagger \right), \quad (5.60)$$

où les sous-indices sur les prépotentiels désignent des dérivées partielles :

$$W_j^{[0]} := \partial_j W^{[0]} \text{ et } W_{ijk}^{[1]} := \partial_i \partial_j \partial_k W^{[1]}. \quad (5.61)$$

Ceci fixe un hamiltonien de la forme :

$$H = \frac{1}{2} \sum_i \left(p_i^2 + (\partial_i W^{[0]})^2 - \partial_i^2 W^{[0]} \right) + \sum_{i,j} (\phi_i \phi_i^\dagger + \theta_i \theta_i^\dagger) \partial_i \partial_j W^{[0]} \\ + \sum_{ijnm} \phi_i \phi_j^\dagger \theta_n \theta_m^\dagger \partial_i \partial_j \partial_n \partial_m W^{[1]}. \quad (5.62)$$

Ici nous sommes encore dans un modèle CMS $\mathcal{N} = 2$ général. Pour spécialiser au cas trigonométrique, il s'agit de prendre $W_i^{[0]}$ égal au prépotentiel $\mathcal{N} = 1$ utilisé en (2.45). En prenant ce prépotentiel, on voit tout de suite que la prescription $\phi_j = 0$ nous redonne le modèle $\mathcal{N} = 1$. Ensuite, en supposant que le prépotentiel $W^{[1]}$ a la forme $W^{[1]} = \sum_{i<j} w(x_i - x_j)$, les conditions de supersymétrie (5.58) sont suffisantes pour fixer la relation suivante :

$$\sum_n \partial_n^2 W^{[1]} = -2W^{[0]}. \quad (5.63)$$

On obtient ainsi l'hamiltonien suivant :

$$H_{s^2\text{CMS}} = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \beta \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i<j} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{L} x_{ij}} \left(\beta - (1 - \phi_{ij} \phi_{ij}^\dagger)(1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger) \right). \quad (5.64)$$

Cet hamiltonien a le même état d'énergie minimale que le modèle tCMS $\mathcal{N} = 1$, c'est-à-dire

$$\psi_0(x) = \Delta^\beta(x) = \prod_{j < k} \left| \sin \left(\frac{\pi x_{jk}}{L} \right) \right|^\beta, \quad (5.65)$$

dont la valeur de l'énergie est

$$E_0 = \left(\frac{\pi\beta}{L} \right)^2 \frac{N(N^2 - 1)}{6}. \quad (5.66)$$

En faisant le changement de variable $z_j = e^{2\pi i x_j / L}$ on a

$$H = 2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left(\sum_i (z_i \partial_i)^2 - 2 \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{(z_{ij})^2} \beta \left(\beta - (1 - \phi_{ij} \phi_{ij}^\dagger)(1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger) \right) \right). \quad (5.67)$$

L'hamiltonien possède toujours la propriété selon laquelle tout état propre d'énergie supérieure sera de la forme $\psi(x, \theta, \phi) = \psi_0(x) \eta(x, \theta, \phi)$, où $\eta(x, \theta, \phi)$ sera un superpolynôme. Ainsi, comme dans le cas $\mathcal{N} = 1$, on peut mettre l'hamiltonien sous sa forme canonique en enlevant la contribution de l'état d'énergie minimale et en normalisant :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\pi} \right)^2 \Delta^{-\beta} (H - E_0) \Delta^\beta. \quad (5.68)$$

Ceci se réduit à la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \sum_i (z_i \partial_i)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{z_i + z_j}{z_{ij}} (z_i \partial_i - z_j \partial_j) - 2\beta \sum_{i < j} \frac{z_i z_j}{z_{ij}^2} (1 - (1 - \phi_{ij} \phi_{ij}^\dagger)(1 - \theta_{ij} \theta_{ij}^\dagger)). \quad (5.69)$$

On constate que l'hamiltonien correspond effectivement à celui obtenu avec le modèle d'échange. On sait que les sJacks obtenus par symétrisation seront des fonctions propres de ce modèle par construction. Il faut maintenant trouver les quantités conservées.

5.5.1 Les quantités conservées et l'intégrabilité

Nous voilà convaincus que nous avons entre les mains le bon modèle. Nous sommes aussi en possession d'un sJack qui semble être un excellent candidat de fonction propre. On peut maintenant chercher les quantités conservées du modèle.

L'observation cruciale qui a permis de deviner les quantités conservées est que dans le cas $\mathcal{N} = 1$, la tour d'opérateurs \mathcal{I}_n définie en (2.48) peut être substituée par la projection sur $\tilde{\Pi}_{(m)}^N$ de

$$\tilde{I}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \theta_1 \theta_1^\dagger \cdots \theta_m \theta_m^\dagger \mathcal{D}_1^n. \quad (5.70)$$

On constate alors que la portion fermionique de l'opérateur est un projecteur qui dépend du secteur. On tente de calquer ceci en introduisant le projecteur $\mathcal{N} = 2$ pour le secteur fermionique M :

$$\mathcal{P} := [\phi; \theta]_M ([\phi; \theta]_M)^\dagger. \quad (5.71)$$

C'est l'action de cet opérateur, sur une fonction appartenant à $\Pi_{(M)}^N$, qui nous donne l'indice le plus important. Le lemme 12 de l'annexe A.2 nous dit que pour $f(z)$, une fonction arbitraire des variables z , on a

$$\mathcal{P} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M f(z) = \sum_{\bar{\alpha}, \underline{\alpha}, \gamma} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma [\phi; \theta]_M f(z), \quad (5.72)$$

où la seconde somme utilise la notation (5.30). On voit que le projecteur fractionne le groupe symétrique en sous-groupes disjoints. On verra que ceci a pour effet d'isoler l'action des opérateurs de Dunkl sur un sous-ensemble des variables. C'est cette observation clef qui nous permet de poser les quantités conservées suivantes :

$$\bar{\mathcal{I}}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n, \quad (5.73)$$

$$\bar{\mathcal{I}}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_1+1}^n, \quad (5.74)$$

$$\underline{\mathcal{I}}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_2+1}^n, \quad (5.75)$$

où l'action des opérateurs est limitée à $\Pi_{(M)}^N$. Notons aussi qu'on conserve la tour suivante :

$$\mathcal{H}_n = \sum_i \mathcal{D}_i^n. \quad (5.76)$$

Tout d'abord, on constate qu'il s'agit bien de $4N$ quantités conservées :

$$[\bar{\mathcal{I}}_n, \mathcal{H}_m] = [\bar{\mathcal{I}}_n, \mathcal{H}_m] = [\underline{\mathcal{I}}_n, \mathcal{H}_m] = [\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m] = 0. \quad (5.77)$$

Il s'agit ici de la proposition 14 qui est prouvée à l'annexe A.2. Ensuite, on vérifie que les nouvelles quantités conservées sont en involution :

$$[\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m] = [\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m] = [\underline{\mathcal{I}}_n, \underline{\mathcal{I}}_m] = [\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m] = [\bar{\mathcal{I}}_n, \underline{\mathcal{I}}_m] = [\bar{\mathcal{I}}_n, \underline{\mathcal{I}}_m] = 0. \quad (5.78)$$

Ces résultats sont issus des propositions 11 et 13, qui sont aussi prouvées à l'annexe A.2.

Puisque nous sommes en présence d'un modèle à $3N$ variables ayant plus de $3N$ quantités conservées qui sont toutes en involution, on confirme que le modèle est intégrable.

5.5.2 Les fonctions propres du modèle

Maintenant que l'intégrabilité est établie, on montre maintenant que les polynômes $P_\Lambda^{1/\beta}$ diagonalisent effectivement les quatre tours de quantités conservées.

Tout d'abord, à l'instar du calcul dans le cas classique (1.53), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_n P_\Lambda^{1/\beta}(z, \phi, \theta) &= \left[\sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^n \right] \frac{(-1)^{\binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}}}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\
&= \frac{(-1)^{\binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}}}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M \sum_{i=1}^N \mathcal{D}_i^n E_{\Lambda^R} \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\left(\widehat{\Lambda^R} \right)_i \right]^n \frac{(-1)^{\binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}}}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\
&= \left[\sum_{i=1}^N \left[\left(\widehat{\Lambda^R} \right)_i \right]^n \right] P_\Lambda^{1/\beta}(z, \phi, \theta)
\end{aligned} \tag{5.79}$$

où, à la deuxième étape, on utilise le fait que les \mathcal{H}_n sont centraux dans l'algèbre de Hecke dégénérée et que les \mathcal{D}_i commutent avec les variables de Grassmann. De la deuxième à la troisième étape, on utilise (1.50).

Pour les trois autres tours de quantités conservées, on obtient

$$\bar{\mathcal{I}}_n P_\Lambda^{1/\beta} \propto P_\Lambda^{1/\beta}, \tag{5.80}$$

$$\bar{\mathcal{L}}_n P_\Lambda^{1/\beta} \propto P_\Lambda^{1/\beta}, \tag{5.81}$$

$$\mathcal{I}_n P_\Lambda^{1/\beta} \propto P_\Lambda^{1/\beta}. \tag{5.82}$$

La preuve de ces trois résultats peut être trouvée à la proposition 15 de l'annexe A.3. Toutefois, comme la preuve est très technique, on donne les grandes lignes de la démonstration du cas spécial suivant :

$$\bar{\mathcal{I}}_1 P_\Lambda^{1/\beta} = (N - M_3)! \underline{m}! \bar{m}! (M_1 - 1)! \left[\sum_{j=1}^{M_1} \left(\widehat{\Lambda^R} \right)_j + \frac{\bar{m}(\bar{m} - 1)}{2} \beta \right] P_\Lambda^{1/\beta}. \tag{5.83}$$

On procède par calcul direct, en utilisant la définition (5.34) et en introduisant $\epsilon = \binom{\bar{m}}{2} + \binom{m}{2}$ pour des raisons typographiques. On a

$$\bar{\mathcal{I}}_1 P_\Lambda^{1/\beta} = \frac{(-1)^\epsilon}{f_\Lambda} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1 \sum_{\sigma \in S_N} \mathcal{K}_\sigma[\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \tag{5.84}$$

$$= \frac{(-1)^\epsilon}{f_\Lambda} \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \underline{\alpha}, \gamma}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1 \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma[\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \tag{5.85}$$

$$= \frac{(-1)^\epsilon}{f_\Lambda} (N - M_3)! (\underline{m})! (\bar{m})! \sum_{\substack{\omega' \in S_N \\ \bar{\alpha} \in S_{\bar{m}}}} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1 \mathcal{K}_{\bar{\alpha}}[\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \tag{5.86}$$

À la deuxième étape, on applique le projecteur à droite fractionnant ainsi l'action de \mathcal{K}_σ . À la troisième étape, on utilise le fait que $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}_{\underline{\alpha}}\mathcal{K}_\gamma$ commute avec \mathcal{D}_1 pour redéfinir le produit $\mathcal{K}_\omega\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}\mathcal{K}_{\underline{\alpha}}\mathcal{K}_\gamma$ comme $\mathcal{K}_{\omega'}$. Les sommes sur $\bar{\alpha}$, $\underline{\alpha}$, γ donnent la dimension de leur groupe de permutation respectif en préfacteur. Le point important est que le projecteur a eu pour effet d'isoler $\mathcal{D}_1\mathcal{K}_{\bar{m}}$ à l'intérieur de la somme. Ceci nous permet d'utiliser l'identité suivante :

$$\sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \bar{\alpha} \in S_{\bar{m}}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1 \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} = (\bar{m} - 1)! \left(\sum_{j=1}^{\bar{m}} ((\widehat{\bar{\Lambda}})^R)_j + \binom{\bar{m}}{2} \beta \right) \sum_{\omega \in S_N} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R}. \quad (5.87)$$

Il s'agit d'un cas spécial du lemme 9 dont on peut trouver la preuve à l'annexe A.1. L'essentiel de la preuve repose sur une factorisation particulière du groupe symétrique pour faire passer \mathcal{D}_1 à travers \mathcal{K}_α en utilisant les relations (1.39).

Notons ici que l'identité montre que le passage de \mathcal{D}_1 à travers $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}$ ne produit que des termes faisant intervenir les indices $\{1, \dots, \bar{m}\}$. Ceci fait en sorte que la valeur propre n'implique que $\bar{\Lambda}$. Un scénario analogue se produit avec \mathcal{D}_{M_1+1} et $\bar{\alpha} \in S_{[M_1, M_2]}$ dans le cas de $\bar{\mathcal{I}}_n$ ainsi qu'avec \mathcal{D}_{M_2+1} et $\underline{\alpha} \in S_{[M_2, M_3]}$ dans le cas de $\underline{\mathcal{I}}_n$. C'est pour cette raison que l'introduction du projecteur permet une formulation simple des quantités conservées.

De retour au calcul, on substitue l'identité précédente dans (5.86) et on obtient

$$\bar{\mathcal{I}}_1 P_\Lambda^{1/\beta} = \frac{(-1)^\epsilon (N - M_3)! \underline{m}! \bar{m}!}{f_\Lambda} \left((\bar{m} - 1)! \left[\sum_{j=1}^{\bar{m}} ((\widehat{\bar{\Lambda}})^R)_j + \binom{\bar{m}}{2} \beta \right] \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \quad (5.88)$$

$$= (N - M_3)! \underline{m}! \bar{m}! (\bar{m} - 1)! \left[\sum_{j=1}^{\bar{m}} ((\widehat{\bar{\Lambda}})^R)_j + \binom{\bar{m}}{2} \beta \right] P_\Lambda^{1/\beta}. \quad (5.89)$$

5.5.3 Une caractérisation complète des fonctions propres selon un ensemble minimal d'opérateurs qui commutent

En posant la forme unitriangulaire sur la base monomiale des fonctions propres du modèle, on peut réduire radicalement le nombre d'opérateurs nécessaires pour fixer les sJacks. En effet, dans le cas $\mathcal{N} = 0$, la triangularité et la diagonalisation de l'hamiltonien tCMS sous sa forme canonique sont suffisants. Dans le cas $\mathcal{N} = 1$, la triangularité, la diagonalisation de l'hamiltonien stCMS et la diagonalisation de \mathcal{I}_1 suffisent. Dans le cas $\mathcal{N} = 2$, on a la conjecture qui suit :

Conjecture 4. *Le superpolynôme $P_\Lambda^{1/\beta}$ est complètement caractérisé d'une part par l'unitriangularité sur la base monomiale, et d'autre part par le fait qu'il diagonalise simultanément \mathcal{H}_2 , $\bar{\mathcal{I}}_1$, $\underline{\mathcal{I}}_1$ et \mathcal{I}_1 .*

On a déjà la valeur propre de \mathcal{H}_2 donnée en (5.82). En notant les trois autres opérateurs de la façon suivante : $\mathcal{L}^{(1)} = \overline{\mathcal{I}}_1$, $\mathcal{L}^{(2)} = \overline{\mathcal{I}}_1$ et $\mathcal{L}^{(3)} = \underline{\mathcal{I}}_1$, on a

$$\mathcal{L}^{(\ell)} P_\Lambda^{1/\beta} = \epsilon_\Lambda^{(\ell)} P_\Lambda^{1/\beta}, \quad (5.90)$$

avec

$$\epsilon_\Lambda^{(\ell)} = \frac{(N - M_3)! \underline{m}! \overline{m}! \overline{m}!}{\overline{m}\delta_{1\ell} + \overline{m}\delta_{2\ell} + \underline{m}\delta_{3\ell}} \left[\sum_{j=M_{\ell-1}+1}^{M_\ell} (\widehat{\Lambda^R})_j + (-1)^{\delta_{2\ell} + \delta_{3\ell}} \binom{\overline{m}\delta_{1\ell} + \overline{m}\delta_{2\ell} + \underline{m}\delta_{3\ell}}{2} \beta \right], \quad (5.91)$$

où $M_0 = 0$ et où M_ℓ , $\ell = 1, 2, 3$, est la somme partielle sur le secteur défini en (5.4). Il s'agit ici du théorème 16 qui est prouvé à l'annexe A.3.

Pour prouver la conjecture 4, il suffirait de montrer que les opérateurs agissent triangulairement sur la base monomiale et que leurs valeurs propres sont non dégénérées. Ceci est discuté en conclusion.

On a été en mesure de définir des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. On a ensuite construit le modèle s^2t CMS pour constater que le modèle d'échange était toujours valide. On a réussi à poser les quantités conservées et à montrer que le modèle est intégrable. Finalement on a vu que les sJacks définis plus tôt étaient effectivement les fonctions propres du modèle. D'autre part, on a aussi, en conjecture, une définition combinatoire des sJacks. Tout semble indiquer que nous avons obtenu le bon objet.

Conclusion

*C'est fini la mer, c'est fini,
Sur la plage, le sable bête,
Comme des moutons d'infini...
Quand la mer bergère m'appelle.*

— Léo Ferré

On a vu, aux deux premiers chapitres, que la théorie des polynômes symétriques avait un équivalent dans le superspace. En particulier, on a vu qu'on pouvait définir le polynôme de Jack : (1) de façon combinatoire, (2) par la symétrisation de polynômes non symétriques, et (3) comme fonctions propres des quantités conservées du modèle CMS. On a vu que ces trois approches ont leur équivalent dans le superspace et ceci a permis de scruter la transition du cas standard au cas supersymétrique. Au chapitre trois, on a introduit la généralisation des concepts de base de la théorie des polynômes symétriques. On a vu que les bases classiques avaient un équivalent dans le superspace $\mathcal{N} = 2$ et qu'on peut définir des superpartitions qui décrivent bien ces objets.

On a ensuite pu passer au problème principal, soit la définition des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. On a vu au quatrième chapitre que la transition à ce superspace apportait des complications inattendues. En étudiant ces complications, on a pu identifier les failles dans notre approche. En particulier, l'approche par symétrisation des polynômes de Jack non symétriques nous a laissé entendre que le degré d'un polynôme dans les paires de variables $\phi_i \theta_i$ devait être conservé à l'intérieur d'un même secteur.

Au dernier chapitre, on a étudié les conséquences de cette nouvelle restriction. On a alors introduit les quasi sommes de puissances. Cette nouvelle base a permis d'obtenir l'orthogonalité combinatoire des superpolynômes de Jack obtenus par symétrisation. On a ensuite vu qu'il était possible de définir un ordre de dominance, et celui-ci a permis d'obtenir une définition combinatoire des superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. La concordance apparente des deux définitions donnait bon espoir que ce nouvel objet était effectivement celui qu'on recherchait. On s'est ensuite intéressé au modèle trigonométrique CMS $\mathcal{N} = 2$. En supposant que les sJacks obtenus de la symétrisation sont les fonctions propres de ce modèle, on s'est inspiré de leur forme pour deviner les quantités conservées. On a vu que celles-ci sont toutes en involution, ce qui nous a permis de conclure que le modèle est intégrable. De plus, on s'est assuré que

les superpolynômes de Jack diagonalisent effectivement toutes les quantités conservées, ce qui fait en sorte qu'on a résolu le modèle.

En ce qui a trait à la complétude, on a prouvé que les fonctions propres du modèle sont exactement les superpolynômes de Jack obtenus par symétrisation. Il resterait maintenant à prouver que la définition combinatoire est équivalente. Un autre point important qu'il faudrait prouver est la conjecture 4. Une preuve apparaîtra dans [41], où l'on formule les quantités conservées du modèle en utilisant les opérateurs de Sekiguchi. En utilisant \mathcal{P}^M pour désigner le projecteur du secteur M , ces opérateurs sont :

$$S^{\textcircled{0}}(u, \alpha) = \prod_{i=1}^N (\alpha \mathcal{D}_i + u), \quad (5.92)$$

$$S^{\textcircled{k}}(u, \alpha) = \sum_M \frac{1}{|S_{(M)}|} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P}^M \prod_{i=1}^{M_k} (\alpha \mathcal{D}_i + \alpha + u) \prod_{M_k+1}^N (\alpha \mathcal{D}_i + u) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3. \quad (5.93)$$

Ces quatre opérateurs ont pour fonctions propres les superpolynômes de Jack $\mathcal{N} = 2$. En effet, avec

$$\epsilon_\lambda(u, \alpha) = \prod_{i=1}^N (\alpha \lambda_i + 1 - i + u), \quad (5.94)$$

on a

$$S^{\textcircled{k}}(u, \alpha) P_\Lambda^\alpha = \epsilon_{\Lambda^{\textcircled{k}}}(u, \alpha) P_\Lambda^\alpha \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3, \quad (5.95)$$

où il est entendu que $\Lambda^{\textcircled{0}} := \Lambda^+$. En procédant comme dans [42], on peut montrer que les opérateurs $S^{\textcircled{k}}(u; \alpha)$ ont une action triangulaire sur la base monomiale. Ensuite, en exprimant les quantités conservées $\bar{\mathcal{I}}_1$, $\bar{\mathcal{I}}_1$ et $\underline{\mathcal{I}}_1$ comme des combinaisons linéaires des opérateurs de Sekiguchi, on devrait pouvoir prouver la conjecture.

Dans le futur, il serait intéressant d'étudier les différentes façons de symétriser le Jack non symétrique. En effet, nous avons étudié la symétrie prescrite SAAS, où S signifie symétrisation et A antisymétrisation. C'est-à-dire que le polynôme de Jack à symétrie prescrite s'écrit comme

$$\mathcal{E}_\Lambda \propto S_{[1, M_1]} A_{]M_1, M_2]} A_{]M_2, M_3]} S_{]M_3, N]} E_{((\bar{\Delta})^R, (\bar{\Lambda})^R, (\underline{\Delta})^R, (\Lambda^s)^R)}, \quad (5.96)$$

où $A_{]a, b]}$ et $S_{]a, b]}$ (anti)symétrise sur les variables $\{a + 1, a + 2, \dots, b\}$. Toutefois, d'autres options sont possibles :

$$\mathcal{E}_\Lambda^{\text{AASS}} \propto A_{[1, M_1]} A_{]M_1, M_2]} S_{]M_2, M_3]} S_{]M_3, N]} E_{((\bar{\Lambda})^R, (\underline{\Delta})^R, (\bar{\Delta})^R, (\Lambda^s)^R)}, \quad (5.97)$$

$$\mathcal{E}_\Lambda^{\text{ASAS}} \propto A_{[1, M_1]} S_{]M_1, M_2]} A_{]M_2, M_3]} S_{]M_3, N]} E_{((\bar{\Lambda})^R, (\bar{\Delta})^R, (\underline{\Delta})^R, (\Lambda^s)^R)}, \quad (5.98)$$

et ainsi de suite. On doit noter qu'on change aussi l'ordre des ensembles de parties $(\bar{\Delta}, \bar{\Lambda}, \dots)$ dans la composition. La symétrisation dans le superespace de ces objets donnerait aussi des

fonctions propres du modèle et de ses quantités conservées. Chaque type de symétrisation produira un ordre de dominance différent. Il reste à voir s'il est toujours possible d'obtenir une orthogonalité combinatoire pour ces différents cas.

Il serait aussi intéressant de considérer la possibilité d'un analogue des opérateurs de Dunkl dans le superespace. Jusqu'à maintenant, seule la version rationnelle $\mathcal{N} = 1$ de cet opérateur est connue [43], tandis qu'ici on s'intéresse à l'opérateur de Dunkl trigonométrique. Un super-Dunkl trigonométrique permettrait peut-être de définir des superpolynômes de Jack non symétriques $\mathcal{N} = 1$, et il serait peut être possible de généraliser l'opérateur au cas $\mathcal{N} = 2$. On pourrait ainsi étudier une potentielle théorie des superpolynômes non symétriques orthogonaux. Une telle théorie fournirait une approche complémentaire à l'étude des superpolynômes symétriques et elle pourrait révéler des subtilités difficiles à voir dans le cas symétrique.

Finalement, une suite logique aux travaux présentés ici serait d'obtenir une version $\mathcal{N} = 2$ des superpolynômes de Macdonald. Plusieurs tentatives ont été faites, mais on se retrouve rapidement confronté à des difficultés semblables à celles mentionnées au quatrième chapitre. Il s'agit là d'un autre problème qui ne se laisse pas dompter facilement...

Annexe A

Quelques preuves et résultats

Les articles de fond ne remontent jamais à la surface.

— Boris Vian

A.1 Divers lemmes techniques

Lemme 5. *Soit α une permutation appartenant à l'un des trois groupes suivants : $S_{]0,M_1]}$, $S_{]M_1,M_2]}$ ou $S_{]M_2,M_3]}$. Avec la convention $h_0(x, y) := 1$, on a*

$$\mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda = (\mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_{i+1}^n + (-1)^{a_i} \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1})) \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda, \quad (\text{A.1})$$

avec

$$a_i = \begin{cases} 0 & \forall i \in \{1, \dots, M_1 - 1\} \cup \{M_3 + 1, \dots, N - 1\} \\ 1 & \forall i \in \{M_1 + 1, \dots, M_2 - 1\} \cup \{M_2 + 1, \dots, M_3 - 1\}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Démonstration. On développe d'abord l'opérateur $\mathcal{K}_{i,i+2}$ explicitement en utilisant la définition (3.23), ensuite on utilise la relation (1.40). En prenant l'argument de h_{n-1} comme étant implicite, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda &= \mathcal{D}_i^n K_{i,i+1} \bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda \\ &= (K_{i,i+1} \mathcal{D}_{i+1}^n + \beta h_{n-1}) \bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda \\ &= (\mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_{i+1}^n + \beta h_{n-1} \bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1}) \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où, à la dernière étape, on a simplement distribué le facteur $\bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1}$ et utilisé le fait qu'il commute avec les \mathcal{D}_i . On se concentre maintenant sur le terme en β . Puisque α est élément d'un des trois groupes $S_{]0,M_1]}$, $S_{]M_1,M_2]}$ ou $S_{]M_2,M_3]}$, l'action de \mathcal{K}_α sur $[\phi; \theta]_M$ doit laisser le terme inchangé à un signe près. On écrit

$$\mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M = (-1)^{b(\alpha)} [\phi; \theta]_M K_\alpha \quad (\text{A.4})$$

pour un certain $b(\alpha)$ tel que

$$\beta h_{n-1} \bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda = (-1)^{b(\alpha)} \beta h_{n-1} \bar{\kappa}_{i,i+1} \underline{\kappa}_{i,i+1} [\phi; \theta]_M K_\alpha z^\Lambda. \quad (\text{A.5})$$

Observons que

$$\bar{\kappa}_{i,i+1}\underline{\kappa}_{i,i+1}[\phi; \theta]_M = (-1)^{a_i}[\phi; \theta]_M \quad (\text{A.6})$$

avec a_i défini à l'équation (A.2). En effet, si $1 \leq i < M_1$ les opérateurs $\bar{\kappa}_{i,i+1}$ et $\underline{\kappa}_{i,i+1}$ produisent tous deux un signe alors que si $M_1 < i < M_2$ l'opérateur $\underline{\kappa}_{i,i+1}$ agit comme l'identité et $\bar{\kappa}_{i,i+1}$ produit un signe, et inversement pour $M_2 < i < M_3$. Finalement, les deux opérateurs agissent comme l'identité lorsque $M_3 < i < N$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (-1)^{b(\alpha)}\beta h_{n-1} \bar{\kappa}_{i,i+1}\underline{\kappa}_{i,i+1}[\phi; \theta]_M K_\alpha z^\Lambda &= (-1)^{b(\alpha)}\beta h_{n-1} (-1)^{a_i}[\phi; \theta]_M K_\alpha z^\Lambda \\ &= \beta h_{n-1} (-1)^{a_i} \mathcal{K}_\alpha[\phi; \theta]_M z^\Lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

On insère ces résultats dans l'équation (A.3), ce qui prouve le lemme. \square

On illustre l'identité (A.2) avec deux exemples du secteur $M = (2, 2, 0)$. On a

$$[\phi; \theta]_{(2,2,0)} = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4. \quad (\text{A.8})$$

On calcule alors facilement

$$\bar{\kappa}_{1,2} \underline{\kappa}_{1,2} \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4 = \phi_2 \theta_2 \phi_1 \theta_1 \phi_3 \phi_4 = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4 \quad (\text{A.9})$$

et

$$\bar{\kappa}_{3,4} \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4 = \phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_4 \phi_3 = -\phi_1 \theta_1 \phi_2 \theta_2 \phi_3 \phi_4. \quad (\text{A.10})$$

Lemme 6. *On a*

$$[\mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_{i,i+1}, \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_{i,i+1}] + [\mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n, \mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_i^m] = 0 \quad (\text{A.11})$$

et

$$[\mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_{i-1,i}, \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_{i-1,i}] + [\mathcal{K}_{i-1,i} \mathcal{D}_i^n, \mathcal{K}_{i-1,i} \mathcal{D}_i^m] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Démonstration. Notons d'abord que

$$[\mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_{i,i+1}, \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_{i,i+1}] + [\mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n, \mathcal{K}_{i,i+1} \mathcal{D}_i^m] = [\mathcal{D}_i^n K_{i,i+1}, \mathcal{D}_i^m K_{i,i+1}] + [K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n, K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^m] \quad (\text{A.13})$$

puisque d'une part $\bar{\kappa}_{i,i+1}$ et $\underline{\kappa}_{i,i+1}$ commutent tous deux avec \mathcal{D}_k et d'autre part $\bar{\kappa}_{i,i+1}^2 = \underline{\kappa}_{i,i+1}^2 = 1$. Sachant que $K_{i,i+1} \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i+1} K_{i,i+1} + \beta$, on a

$$\begin{aligned} K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n &= \mathcal{D}_{i+1}^n K_{i,i+1} + \beta(\mathcal{D}_i^{n-1} + \mathcal{D}_i^{n-2} \mathcal{D}_{i+1}^1 + \dots + \mathcal{D}_i^1 \mathcal{D}_{i+1}^{n-2} + \mathcal{D}_{i+1}^{n-1}) \\ &= \mathcal{D}_{i+1} K_{i,i+1} + \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1}), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

où on rappelle que $h_n(x_1, x_2)$ est la n -ième fonction symétrique homogène dans les variables x_1 et x_2 . En omettant l'argument de $h_n(\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_{i+1})$, on a

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{D}_i^n K_{i,i+1}, \mathcal{D}_i^m K_{i,i+1}] + [K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^n, K_{i,i+1} \mathcal{D}_i^m] \\
&= \mathcal{D}_i^n \mathcal{D}_{i+1}^m - \mathcal{D}_i^m \mathcal{D}_{i+1}^n + \mathcal{D}_{i+1}^n \mathcal{D}_i^m - \mathcal{D}_{i+1}^m \mathcal{D}_i^n \\
&\quad + \beta(\mathcal{D}_i^n h_{m-1} - \mathcal{D}_i^m h_{n-1} + h_{n-1} \mathcal{D}_{i+1}^m - h_{m-1} \mathcal{D}_{i+1}^n) \\
&\quad + \beta^2(h_{n-1} h_{m-1} - h_{m-1} h_{n-1}) \\
&= \beta((\mathcal{D}_i^n - \mathcal{D}_{i+1}^n) h_{m-1} - (\mathcal{D}_i^m - \mathcal{D}_{i+1}^m) h_{n-1}) \\
&= \beta((\mathcal{D}_i - \mathcal{D}_{i+1}) h_{n-1} h_{m-1} - (\mathcal{D}_i - \mathcal{D}_{i+1}) h_{m-1} h_{n-1}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

où sur l'avant-dernière ligne on a utilisé l'identité suivante :

$$(x^n - y^n) = (x - y)h_{n-1}(x, y). \quad (\text{A.15})$$

La preuve de la deuxième identité est identique, à l'exception faite qu'on utilise $K_{i-1,i} \mathcal{D}_{i-1}^n = \mathcal{D}_i K_{i-1,i} - \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_{i-1}, \mathcal{D}_i)$. \square

Lemme 7. Soit f une fonction arbitraire appartenant à $\Pi_{(M)}^N$. On a

$$(\mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_i^m - \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_i^n + \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_i^m - \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_i^n) f = 0 \quad (\text{A.16})$$

Démonstration. Puisque \mathcal{K}_σ agit comme l'identité sur $f \in \Pi_{(M)}^N$ et puisque \mathcal{D}_i et $\mathcal{K}_{j,j+1}$ commutent entre eux, à moins que $i = j, j + 1$, le résultat est trivialement vrai à moins que σ puisse être exprimé comme

$$\mathcal{K}_\sigma = \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha, \quad (\text{A.17})$$

où $\tilde{\mathcal{K}}$ est soit $\mathcal{K}_{i-1,i}$, soit $\mathcal{K}_{i,i+1}$ (dans le cas $i = 1$ seul le cas $\mathcal{K}_{1,2}$ est possible). En écrivant les permutations de cette façon on a

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha \mathcal{D}_i^m - \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha \mathcal{D}_i^n + \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha \mathcal{D}_i^n \mathcal{K}_\alpha^{-1} (\tilde{\mathcal{K}})^{-1} \mathcal{D}_i^m - \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{K}_\alpha \mathcal{D}_i^m \mathcal{K}_\alpha^{-1} (\tilde{\mathcal{K}})^{-1} \mathcal{D}_i^n \right) f \\
&= \left(\mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m - \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n + \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m - \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n \right) f,
\end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où on a utilisé le fait que $(\tilde{\mathcal{K}})^{-1} = \tilde{\mathcal{K}}$. Puisque $f = \tilde{\mathcal{K}} f$, on peut multiplier par la droite les deux premiers facteurs par $\tilde{\mathcal{K}}$:

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} - \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m - \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n \right) f \\
&= ([\mathcal{D}_i^n \tilde{\mathcal{K}}, \mathcal{D}_i^m \tilde{\mathcal{K}}] + [\tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^n, \tilde{\mathcal{K}} \mathcal{D}_i^m]) f.
\end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Le lemme 6 garantit que cette expression est nulle. \square

Lemme 8. Soit $M_i \leq k < m \leq M_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$ avec $M_0 := 0$. On a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k)} \in S_{[k,m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1}^n \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (m-k-1)! (\widehat{\eta}_{k+1})^n \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&+ (m-k-1) \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{[k+1,m]}}} \mathcal{K}_\omega \left[\mathcal{D}_{k+2}^n + (-1)^{a_{k+1}} \beta \sum_{i=0}^{n-1} (\widehat{\eta}_{k+1})^{n-1-i} \mathcal{D}_{k+2}^i \right] \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta
\end{aligned} \tag{A.20}$$

avec a_k donné par (A.2).

Démonstration. On commence par factoriser le groupe symétrique de la façon suivante¹ :

$$\sum_{\alpha^{(k)} \in S_{[k,m]}} \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}} = \sum_{\alpha^{(k+1)} \in S_{[k+1,m]}} \left(1 + \left[\sum_{k+2 \leq j \leq m} \mathcal{K}_{k+2,j} \right] \mathcal{K}_{k+1,k+2} \right) \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}} \tag{A.21}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k)} \in S_{[k,m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1}^n \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{[k+1,m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1}^n \left(1 + \left[\sum_{k+2 \leq j \leq m} \mathcal{K}_{k+2,j} \right] \mathcal{K}_{k+1,k+2} \right) \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Concentrons-nous sur le premier terme entre parenthèses dans (A.22), on voit que \mathcal{D}_{k+1}^n commute avec tout ce qui se trouve à sa droite sauf avec E_η sur lequel \mathcal{D}_{k+1}^n agit. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{[k+1,m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1}^n \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (\widehat{\eta}_{k+1})^n \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{[k+1,m]}}} (\mathcal{K}_\omega \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}})[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (m-k-1)! (\widehat{\eta}_{k+1})^n \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta.
\end{aligned} \tag{A.23}$$

1. Pour clarifier, cette relation se lit comme suit pour $k = 0$ et $m = 4$:

$$[1 + (1 + \mathcal{K}_{23} + \mathcal{K}_{24})\mathcal{K}_{12}] (1 + \mathcal{K}_{23} + \mathcal{K}_{24} + \mathcal{K}_{34} + \mathcal{K}_{23}\mathcal{K}_{34} + \mathcal{K}_{24}\mathcal{K}_{34}).$$

Concentrons-nous maintenant sur le deuxième terme entre parenthèses au côté droit de (A.22). On utilise d'abord le lemme 5 pour réexprimer $\mathcal{D}_{k+1}^n \mathcal{K}_{k+1, k+2}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{]k+1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \left(\sum_{k+2 \leq j \leq m} \mathcal{K}_{k+2, j} \right) \mathcal{D}_{k+1}^n \mathcal{K}_{k+1, k+2} \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{]k+1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \left(\sum_{k+2 \leq j \leq m} \mathcal{K}_{k+2, j} \right) \left(\mathcal{K}_{k+1, k+2} \mathcal{D}_{k+2}^n \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{a_{k+1}} \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_{k+1}, \mathcal{D}_{k+2}) \right) \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (m - k - 1) \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{]k+1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \left(\mathcal{K}_{k+1, k+2} \mathcal{D}_{k+2}^n \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{a_{k+1}} \beta h_{n-1}(\mathcal{D}_{k+1}, \mathcal{D}_{k+2}) \right) \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (m - k - 1) \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k+1)} \in S_{]k+1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \left(\mathcal{K}_{k+1, k+2} \mathcal{D}_{k+2}^n \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{a_{k+1}} \beta \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{\eta}_{k+1})^{n-1-i} \mathcal{D}_{k+2}^i \right) \mathcal{K}_{\alpha^{(k+1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta.
\end{aligned} \tag{A.24}$$

À la deuxième égalité, on redéfinit la permutation ω pour absorber le terme $(k+2, j)$, de telle sorte que la somme sur j produit le préfacteur $(m - k - 1)$. À la dernière égalité, on utilise la définition de la fonction symétrique homogène et on remplace les puissances de \mathcal{D}_{k+1} par leurs valeurs propres. On prouve le lemme en substituant (A.23) et (A.24) dans (A.22). \square

Le but du lemme précédent est de se débarrasser des opérateurs \mathcal{D}_{k+1} et d'exprimer le résultat en termes de ses valeurs propres et des puissances de \mathcal{D}_{k+2} . Ceci est suffisant pour démontrer que les superpolynômes de Jack construits par symétrisation sont effectivement des fonctions propres des quantités conservées. Dans le lemme qui suit, on traite le cas spécial $n = 1$, ce qui nous permettra de calculer les valeurs propres des opérateurs de type \mathcal{I}_n avec $n = 1$.

Lemme 9. *Soit $M_i \leq k < m \leq M_{i+1}$ pour $i = 0, 1, 2$ avec $M_0 := 0$, alors on a*

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k)} \in S_{]k, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1} \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (m - k - 1)! \left(\sum_{j=k+1}^m \hat{\eta}_j + (-1)^{a_{k+1}} \binom{m-k}{2} \beta \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta, \tag{A.25}
\end{aligned}$$

avec a_k donné par (A.2).

Démonstration. On prouve facilement ce lemme par récursion. On présuppose la validité du théorème pour k remplacé par $k - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k-1)} \in S_{[k-1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_k \mathcal{K}_{\alpha^{(k-1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\ &= (m-k)! \left(\sum_{j=k}^m \hat{\eta}_j + (-1)^{a_k} \binom{m-k+1}{2} \beta \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

On réexprime le côté gauche de l'équation en utilisant le lemme 8 avec $n = 1$ (après avoir sommé sur les éléments de $S_{[k, m]}$ pour obtenir le facteur du terme en β), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k-1)} \in S_{[k-1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_k \mathcal{K}_{\alpha^{(k-1)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\ &= (m-k) \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k)} \in S_{[k, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1} \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\ &+ (m-k)! [\hat{\eta}_k + (-1)^{a_k} (m-k)\beta] \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

En isolant le terme recherché, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(k)} \in S_{[k, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{k+1} \mathcal{K}_{\alpha^{(k)}}[\phi; \theta]_M E_\eta \\ &= \frac{(m-k)!}{(m-k)} \left(\sum_{j=k}^m \hat{\eta}_j - \hat{\eta}_k + (-1)^{a_k} \frac{(m-k)}{2} (m-k+1-2)\beta \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta \\ &= (m-k-1)! \left(\sum_{j=k+1}^m \hat{\eta}_j + (-1)^{a_k} \binom{m-k}{2} \beta \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega[\phi; \theta]_M E_\eta, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

ce qui est le résultat attendu. Il est clair qu'on peut procéder en reculant pas-à-pas. On suppose le résultat vrai pour k et on le vérifie pour $k - 1$. La raison pour laquelle il s'agit bien de la bonne approche récursive vient du fait qu'en faisant descendre la valeur de k , on augmente la dimension du groupe symétrique en question. Ceci fait en sorte que pour compléter la preuve, il faut vérifier le cas initial, en l'occurrence $k = m - 2$. On substitue cette valeur au côté

gauche du lemme et on utilise une fois de plus le lemme 8 avec $n = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(m-2)} \in S_{[m-2, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{m-1} \mathcal{K}_{\alpha^{(k-2)}} [\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(m-1)} \in S_{[m-1, m]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_m \mathcal{K}_{\alpha^{(m-1)}} [\phi; \theta]_M E_\eta + 1! (\hat{\eta}_{m-1} + (-1)^{a_{m-1}} \beta) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M E_\eta \\
&= (\hat{\eta}_m + \hat{\eta}_{m-1} + (-1)^{a_{m-1}} \beta) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M E_\eta.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

À la deuxième égalité, on voit que la seule permutation restante pour $\alpha^{(m-1)}$ est l'identité. Ceci complète la preuve du lemme. \square

A.2 Les quantités conservées de s²tCMS

Lemme 10. Soit $g(\phi, \theta)$, une fonction arbitraire de la forme

$$g(\phi, \theta) = g(\phi_1 \phi_1^\dagger, \dots, \phi_k \phi_k^\dagger, \theta_1 \theta_1^\dagger, \dots, \theta_k \theta_k^\dagger). \tag{A.30}$$

Alors, les opérateurs suivants

$$\mathcal{L}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega g(\phi, \theta) \mathcal{D}_k^n. \tag{A.31}$$

commutent mutuellement dans l'espace des superfonctions symétriques :

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] f = 0 \quad \forall f \in \Pi_{(M)}^N. \tag{A.32}$$

Démonstration. Pour toute permutation $\omega \in S_N$ on définit $g_{(\omega)}$ tel que

$$g_{(\omega)} = g(\phi_{(\omega)_1} \phi_{(\omega)_1}^\dagger, \dots, \phi_{(\omega)_k} \phi_{(\omega)_k}^\dagger, \theta_{(\omega)_1} \theta_{(\omega)_1}^\dagger, \dots, \theta_{(\omega)_k} \theta_{(\omega)_k}^\dagger). \tag{A.33}$$

On a alors

$$\mathcal{L}_n \mathcal{L}_m = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} \mathcal{K}_\omega g \mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma g \mathcal{D}_k^m = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} g_{(\omega)} g_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m. \tag{A.34}$$

La seconde égalité utilise la commutativité de \mathcal{D}_i avec g (on rappelle que \mathcal{D}_i n'implique que l'opérateur d'échange K_{ij} , qui n'agit pas sur les variables fermioniques θ_ℓ et ϕ_ℓ). Ainsi

$$[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m] f = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} g_{(\omega)} g_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega (\mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m - \mathcal{D}_k^m \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^n) f. \tag{A.35}$$

On redéfinit ensuite les permutations $(\omega, \sigma) \mapsto (\omega\sigma, \sigma^{-1})$ et on obtient

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m]f &= \sum_{\omega, \sigma \in S_N} g_{(\omega\sigma)} g_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega (\mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^m - \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^n) f \\ &= \sum_{\omega, \sigma \in S_N} g_{(\omega)} g_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega (\mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^m - \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^n) f, \end{aligned}$$

où, à la dernière étape, on fait commuter $g_{(\omega)}$ et $g_{(\omega\sigma)}$. En ajoutant (A.35) et (A.36) ensemble, on obtient

$$2[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m]f = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} g_{(\omega)} g_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega (\mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m - \mathcal{D}_k^m \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^n + \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^n \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^m - \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_k^m \mathcal{K}_\sigma^{-1} \mathcal{D}_k^n) f \quad (\text{A.36})$$

ce qui est nul de par le lemme 7 de l'annexe A.1. \square

Les lemmes précédents nous permettent maintenant de s'attaquer aux preuves de commutativité des tours de quantités conservées.

Proposition 11. *Soit f une superfonction symétrique $\in \Pi_{(M)}^N$, alors*

$$[\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\underline{\mathcal{I}}_n, \underline{\mathcal{I}}_m]f = 0 \quad (\text{A.37})$$

Démonstration. Les trois opérateurs ont la forme (A.31) (le projecteur \mathcal{P} est de la forme de la fonction g), ainsi la proposition est vraie de par le lemme 10. \square

Lemme 12. *Soit $f(z)$ une fonction arbitraire dans les variables z , alors*

$$\mathcal{P} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M f(z) = \sum_{\bar{\alpha}, \alpha, \gamma} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_{\gamma} [\phi; \theta]_M f(z) \quad (\text{A.38})$$

Démonstration. En partant de

$$\mathcal{P} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M f(z) = [\phi; \theta]_M [\phi; \theta]_M^\dagger \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M f(z) \quad (\text{A.39})$$

on voit ici que $[\phi; \theta]_M^\dagger$ annihilera tout ce qui se trouve à sa droite à moins que les conditions suivantes soient respectées :

$$\mathcal{K}_\omega \prod_{i=1}^{M_1} \phi_i \theta_i = \prod_{i=1}^{M_1} \phi_i \theta_i, \quad \mathcal{K}_\omega \prod_{i>M_1}^{M_2} \phi_i = \pm \prod_{i>M_1}^{M_2} \phi_i \quad \mathcal{K}_\omega \prod_{i>M_2}^{M_3} \theta_i = \pm \prod_{i>M_2}^{M_3} \theta_i \quad (\text{A.40})$$

c'est-à-dire, à moins que \mathcal{K}_ω puisse se factoriser de la manière suivante :

$$\mathcal{K}_\omega = \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_{\gamma}, \quad (\text{A.41})$$

où

$$\bar{\alpha} \in S_{M_1}, \quad \bar{\alpha} \in S_{]M_1, M_2]}, \quad \alpha \in S_{]M_2, M_3]}, \quad \gamma \in S_{]M_3, N]}. \quad (\text{A.42})$$

\square

Proposition 13. Soit f une superfonction symétrique $\in \Pi_{(M)}^N$, alors

$$[\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\underline{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\underline{\mathcal{I}}_n, \underline{\mathcal{I}}_m]f = 0 \quad (\text{A.43})$$

Démonstration. Seule la preuve pour le premier cas est donnée, les deux autres étant similaires.

On évalue d'abord le produit qui suit :

$$\bar{\mathcal{I}}_n \bar{\mathcal{I}}_m f = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_1+1}^m f. \quad (\text{A.44})$$

Rappelons que les opérateurs de Dunkl ne font pas intervenir de variables fermioniques et commutent ainsi avec les projecteurs. En utilisant la notation (A.33), on a

$$\mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_1+1}^m f = \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_{M_1+1}^m \mathcal{P}_{(\sigma)^{-1}} \mathcal{P} f. \quad (\text{A.45})$$

Premièrement, il est clair que $\mathcal{P} f \propto [\phi; \theta]_M$, ainsi l'action combinée de $\mathcal{P}_{(\sigma)^{-1}} \mathcal{P} f$ sera nulle, à moins que σ soit de la forme $\sigma = \bar{\alpha} \cdot \bar{\alpha} \cdot \underline{\alpha} \cdot \gamma$ (avec la notation (A.42)). C'est-à-dire que la projection est nulle à moins d'avoir la factorisation suivante

$$\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma. \quad (\text{A.46})$$

Deuxièmement, si on fait passer les deux projecteurs complètement à gauche on a

$$\mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_1+1}^m f = \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{P}_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_{M_1+1}^m f. \quad (\text{A.47})$$

On sait d'abord que l'effet d'une permutation sur le projecteur ne peut pas introduire de signe, car toutes les variables fermioniques apparaissent en paire avec leur différentielle :

$$\mathcal{K}_{ij} \phi_i \phi_i^\dagger \phi_j \phi_j^\dagger = \phi_j \phi_j^\dagger \phi_i \phi_i^\dagger \mathcal{K}_{ij} = \phi_i \phi_i^\dagger \phi_j \phi_j^\dagger \mathcal{K}_{ij}. \quad (\text{A.48})$$

On sait ensuite que le produit de deux projecteurs est nécessairement nul s'ils n'ont pas exactement le même contenu fermionique. Ceci implique que $\mathcal{P}_{(\omega\sigma)} = \mathcal{P}_{(\omega)}$. En combinant ces résultats, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{P}_{(\omega\sigma)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{D}_{M_1+1}^m f &= \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma \mathcal{D}_{M_1+1}^m f \\ &= \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{D}_{M_1+1}^m \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma f \\ &= \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{D}_{M_1+1}^m f \\ &= \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{D}_1^n \mathcal{D}_{M_1+1}^m f. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

où à la deuxième égalité on a utilisé le fait que $[\mathcal{P}_{(\omega)}]^2 = \mathcal{P}_{(\omega)}$ et le fait que f soit invariant sous l'action de $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_\gamma$, puisqu'il s'agit d'une fonction $\in \Pi_{(M)}^N$. À la dernière étape, la commutativité de \mathcal{D}_1^n et $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}}$ vient du fait que $\bar{\alpha} \in S_{[M_1, M_2]}$ et que $M_1 \geq 1$ par hypothèse (sans quoi l'opérateur $\bar{\mathcal{I}}_n$ est l'identité). On peut donc écrire

$$\bar{\mathcal{I}}_n \bar{\mathcal{I}}_m f = \sum_{\omega, \sigma \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_\sigma \mathcal{P} \mathcal{D}_{M_1+1}^m f = \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \bar{\alpha}, \underline{\alpha}, \gamma}} \mathcal{P}_{(\omega)} \mathcal{K}_\omega \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{D}_1^n \mathcal{D}_{M_1+1}^m f. \quad (\text{A.50})$$

Les sommes sur $\bar{\alpha}$, α , γ produisent un facteur $C = \bar{m}! m! (N - M_3)!$. On redéfinit ensuite $\omega' = \omega \cdot \bar{\alpha}$ et on obtient

$$\bar{\mathcal{I}}_n \bar{\mathcal{I}}_m f = C \sum_{\bar{\alpha}} \sum_{\omega' \in S_N} \mathcal{P}_{(\omega' \cdot \bar{\alpha}^{-1})} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1^n \mathcal{D}_{M_1+1}^m f = C \bar{m}! \sum_{\omega' \in S_N} \mathcal{P}_{(\omega')} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1^n \mathcal{D}_{M_1+1}^m f \quad (\text{A.51})$$

puisque $\mathcal{P}_{(\omega' \cdot \bar{\alpha}^{-1})} = \mathcal{P}_{(\omega')}$ (selon le même raisonnement qu'auparavant). On obtient donc

$$\bar{\mathcal{I}}_n \bar{\mathcal{I}}_m f = \bar{m}! \bar{m}! m! (N - M_3)! \sum_{\omega' \in S_N} \mathcal{P}_{(\omega')} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1^n \mathcal{D}_{M_1+1}^m f \quad (\text{A.52})$$

En évaluant maintenant le produit dans l'autre sens et en utilisant essentiellement les mêmes trucs (avec $\bar{\alpha}$ remplacé par $\underline{\alpha}$), on obtient

$$\bar{\mathcal{I}}_m \bar{\mathcal{I}}_n f = \bar{m}! \bar{m}! m! (N - M_3)! \sum_{\omega' \in S_N} \mathcal{P}_{(\omega')} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_{M_1+1}^m \mathcal{D}_1^n f. \quad (\text{A.53})$$

On voit finalement que le commutateur $[\bar{\mathcal{I}}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]$ est bien nul de par la commutativité des opérateurs de Dunkl. \square

Proposition 14. *Si f est une superfonction symétrique élément de $\Pi_{(M)}^N$ alors*

$$[\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m]f = [\mathcal{H}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\mathcal{H}_n, \bar{\mathcal{I}}_m]f = [\mathcal{H}_n, \underline{\mathcal{I}}_m]f = 0 \quad (\text{A.54})$$

Démonstration. Le premier commutateur $[\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m] = 0$ est trivial puisque les \mathcal{D}_i commutent entre eux. On note que

$$N! \mathcal{H}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{D}_i^n. \quad (\text{A.55})$$

Ainsi, à un facteur de normalisation près, les quatre tours de quantités conservées peuvent être écrites de la façon suivante :

$$\mathcal{L}_n^{(\ell)} = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P}^\ell \mathcal{D}_{M_{\ell-1}+1}^n, \quad (\text{A.56})$$

avec $\ell = 0, 1, 2, 3$ et $M_{-1} = M_0 = 0$ (dans le cas $\ell = 0$, le projecteur est l'identité). Avec cette notation, on prouve le lemme pour les trois tours \mathcal{I} en introduisant l'opérateur général \mathcal{L}_n défini au lemme 10.

$$\mathcal{L}_n = \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega g(\phi\phi^\dagger, \theta\theta^\dagger) \mathcal{D}_k^n. \quad (\text{A.57})$$

On sait que les \mathcal{H}_n sont centraux dans l'algèbre de Hecke dégénérée [6], ainsi, ils commutent avec toute permutation \mathcal{K}_ω . On a, d'autre part, que les opérateurs de Dunkl commutent les uns avec les autres et avec les variables de Grassmann. Ainsi,

$$[\mathcal{H}_n, \mathcal{L}_m] = 0, \quad (\text{A.58})$$

Puisque les tours $\bar{\mathcal{I}}_m$, $\bar{\mathcal{I}}_m$ et $\underline{\mathcal{I}}_m$ sont toutes de la forme \mathcal{L}_m , ceci prouve la proposition. \square

A.3 Les fonctions propres du modèle

Proposition 15. *Le superpolynôme $P_\Lambda^{1/\beta}(z, \phi, \theta)$ donné à l'équation (5.34) est la fonction propre commune des opérateurs \mathcal{H}_n , $\bar{\mathcal{I}}_n$, $\bar{\mathcal{I}}_n$ et $\underline{\mathcal{I}}_n$ pour $n \geq 0$.*

Démonstration. Le fait que \mathcal{H}_m soit diagonalisé par $P_\Lambda^{1/\beta}$ a déjà été prouvé par calcul direct à l'équation (5.79). La preuve que $P_\Lambda^{1/\beta}(z, \phi, \theta)$ est aussi la fonction propre des éléments des trois autres tours sera restreinte au cas $\bar{\mathcal{I}}_m$, puisque les deux autres preuves sont presque identiques. On sait que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}_n P_\Lambda^{1/\beta} &\propto \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{P} \mathcal{D}_1^n \sum_{\sigma \in S_N} \mathcal{K}_\sigma [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &\propto \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_1^n \sum_{\bar{\alpha}, \alpha, \gamma} \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_\gamma [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &\propto \sum_{\substack{\omega' \in S_N \\ \bar{\alpha} \in S_{M_1}}} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1^n \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R}. \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

À la deuxième étape, on utilise le lemme 12. À la troisième ligne, on utilise la commutativité entre $\mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_\gamma$ et \mathcal{D}_1 , puis on forme l'opérateur $K_{\omega'} = \mathcal{K}_\omega \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_\gamma$. On peut maintenant appliquer le lemme 8 avec $k = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}_n P_\Lambda^{1/\beta} &\propto \left[\left(\widehat{\Lambda^R} \right)_1 \right]^n (m-1)! \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &\quad + (m-1) \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \alpha^{(1)} \in S_{[1, M_1]}}} \left[\mathcal{D}_2^n + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \left[\left(\widehat{\Lambda^R} \right)_1 \right]^{n-1-i} \mathcal{D}_2^i \right] \mathcal{K}_{\alpha^{(1)}} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R}. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Dans la dernière expression, tous les termes qui ne sont pas proportionnels à $P_\Lambda^{1/\beta}$ contiennent l'opérateur $\mathcal{D}_2^l \mathcal{K}_{\alpha^{(1)}}$ avec $l \leq n$. On constate donc qu'on peut utiliser le lemme 8 répétitivement jusqu'à ce que tous les termes soient, soit proportionnels à $P_\Lambda^{1/\beta}$, soit des fonctions de l'opérateur $\mathcal{D}_{M_1}^l$. Ces derniers seront de la forme

$$\sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \bar{\alpha} \in S_{[M_1-1, M_1]}}} \mathcal{K}_\omega \mathcal{D}_{M_1}^l \mathcal{K}_{\bar{\alpha}} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \propto \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_\omega [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R}. \quad (\text{A.61})$$

En effet, sur le côté gauche, le groupe de permutation $S_{[M_1-1, M_1]}$ ne contient que l'identité. Ceci signifie que $\mathcal{D}_{M_1}^l$ peut agir librement sur E_{Λ^R} . Il en résulte un polynôme proportionnel à $P_\Lambda^{1/\beta}$. \square

Théorème 16. *Soit $\mathcal{L}^{(1)} := \bar{\mathcal{I}}_1$, $\mathcal{L}^{(2)} := \bar{\mathcal{I}}_1$ et $\mathcal{L}^{(3)} := \underline{\mathcal{I}}_1$. On a*

$$\mathcal{L}^{(\ell)} P_\Lambda^{1/\beta} = \epsilon_\Lambda^{(\ell)} P_\Lambda^{1/\beta}, \quad (\text{A.62})$$

avec

$$\epsilon_{\Lambda}^{(\ell)} = \frac{(N - M_3)! \underline{m}! \overline{m}!}{\overline{m}\delta_{1\ell} + \overline{m}\delta_{2\ell} + \underline{m}\delta_{3\ell}} \left[\sum_{j=M_{\ell-1}+1}^{M_{\ell}} (\widehat{\Lambda}^R)_j + (-1)^{\delta_{2\ell} + \delta_{3\ell}} \left(\frac{\overline{m}\delta_{1\ell} + \overline{m}\delta_{2\ell} + \underline{m}\delta_{3\ell}}{2} \right) \beta \right], \quad (\text{A.63})$$

où $M_0 = 0$ et M_{ℓ} pour $\ell = 1, 2, 3$, est défini en (5.4).

Démonstration. Les deux autres preuves étant similaires, on donne la preuve seulement pour le cas $\ell = 1$. En utilisant la même stratégie qu'en (A.59) on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}}_1 P_{\Lambda}^{1/\beta} &= \frac{1}{f_{\Lambda}} \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_{\omega} \mathcal{P} \mathcal{D}_1 \sum_{\sigma \in S_N} \mathcal{K}_{\sigma} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &= \frac{1}{f_{\Lambda}} \sum_{\substack{\omega \in S_N \\ \overline{\alpha}, \alpha, \underline{\alpha}, \gamma}} \mathcal{K}_{\omega} \mathcal{D}_1 \mathcal{K}_{\overline{\alpha}} \mathcal{K}_{\alpha} \mathcal{K}_{\underline{\alpha}} \mathcal{K}_{\gamma} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &= \frac{1}{f_{\Lambda}} (N - M_3)! (\underline{m})! (\overline{m})! \sum_{\substack{\omega' \in S_N \\ \overline{\alpha} \in S_{M_1}}} \mathcal{K}_{\omega'} \mathcal{D}_1 \mathcal{K}_{\overline{\alpha}} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R}. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

On utilise ensuite le lemme 9 avec $k = 0$ et on obtient

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}}_1 P_{\Lambda}^{1/\beta} &= \frac{(N - M_3)! \underline{m}! \overline{m}!}{f_{\Lambda}} \left((M_1 - 1)! \left[\sum_{j=1}^{M_1} (\widehat{\Lambda}^R)_j + \frac{\overline{m}(\overline{m} - 1)}{2} \beta \right] \right) \sum_{\omega \in S_N} \mathcal{K}_{\omega} [\phi; \theta]_M E_{\Lambda^R} \\ &= (N - M_3)! \underline{m}! \overline{m}! (M_1 - 1)! \left[\sum_{j=1}^{M_1} (\widehat{\Lambda}^R)_j + \frac{\overline{m}(\overline{m} - 1)}{2} \beta \right] P_{\Lambda}^{1/\beta}, \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

ce qui prouve le cas $\ell = 1$ du théorème. \square

Annexe B

Quelques exemples de sJacks

TABLE B.1 – Exemples de sJacks développés sur la base monomiale pour de petits degrés.

$(n M)$	$P_{\Lambda}^{1/\beta}$
$(1 1, 1, 1)$	$P_{(0;0;1;)}^{1/\beta} = m_{(0;0;1;)} - \frac{\beta}{1+3\beta} m_{(0;0;0;1)}$ $P_{(0;1;0;)}^{1/\beta} = m_{(0;1;0;)} - \frac{\beta}{2\beta+1} m_{(0;0;1;)} + \frac{\beta}{2\beta+1} m_{(0;0;0;1)}$ $P_{(1;0;0;)}^{1/\beta} = m_{(1;0;0;)} - \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0;0;1;)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0;1;0;)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0;0;0;1)}$
$(2 2, 2, 1)$	$P_{(0,0;0;1;1)}^{1/\beta} = m_{(0,0;0;1;1)} - 2 \frac{\beta}{1+5\beta} m_{(0,0;0;0;1,1)}$ $P_{(0,0;0;0;2)}^{1/\beta} = m_{(0,0;0;0;2)} + 2 \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0,0;0;0;1,1)} - \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0,0;0;1;1)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0,0;1;0;1)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(1,0;0;0;1)}$ $P_{(0,0;0;2;)}^{1/\beta} = m_{(0,0;0;2;)} - \frac{\beta}{2(2\beta+1)} m_{(0,0;0;0;2)} + \frac{(2+5\beta)\beta}{2(2\beta+1)(\beta+1)} m_{(0,0;0;1;1)} - \frac{\beta^2}{2(2\beta+1)(\beta+1)} m_{(0,0;1;0;1)} - \frac{\beta}{\beta+1} m_{(0,0;1;1;)} - \frac{\beta^2}{2(2\beta+1)(\beta+1)} m_{(1,0;0;0;1)} + \frac{\beta}{\beta+1} m_{(1,0;0;1;)} - \frac{\beta^2}{(2\beta+1)(\beta+1)} m_{(0,0;0;0;1,1)}$
$(3 2, 2, 0)$	$P_{(1,0;2,0;)}^{1/\beta} = m_{(1,0;2,0;)} + 4 \frac{\beta^2}{(2\beta+1)^2} m_{(0,0;1,0;1,1)} + 2 \frac{\beta}{2\beta+1} m_{(0,0;2,0;1)} + 2 \frac{\beta}{2\beta+1} m_{(0,0;2,1;)} + \frac{(1+4\beta)\beta}{(2\beta+1)^2} m_{(1,0;1,0;1)} + 2 \frac{\beta}{2\beta+1} m_{(1,1;1,0;)}$ $P_{(0,0;3,0;)}^{1/\beta} = m_{(0,0;3,0;)} + \frac{\beta}{\beta+2} m_{(0,0;1,0;2)} + 2 \frac{\beta^2}{(\beta+1)(\beta+2)} m_{(0,0;1,0;1,1)} + 2 \frac{\beta}{\beta+2} m_{(0,0;2,0;1)} + \frac{\beta}{\beta+2} m_{(0,0;2,1;)} + 2 \frac{\beta^2}{(\beta+1)(\beta+2)} m_{(1,0;1,0;1)} + 2 \frac{\beta}{\beta+2} m_{(1,0;2,0;)} + 2 \frac{\beta^2}{(\beta+1)(\beta+2)} m_{(1,1;1,0;)} + \frac{\beta}{\beta+2} m_{(2,0;1,0;)}$
$(5 1, 3, 2)$	$P_{(0;2,1,0;2,1;)}^{1/\beta} = m_{(0;2,1,0;2,1;)} - \frac{(2\beta+1)\beta}{(1+3\beta)(2+5\beta)} m_{(0;2,1,0;1,0;2)} + 2 \frac{\beta^2}{(1+3\beta)(2+5\beta)} m_{(0;2,1,0;1,0;1,1)} - \frac{\beta}{1+3\beta} m_{(0;2,1,0;2,0;1)} + \frac{\beta^2}{(1+3\beta)(2+5\beta)} m_{(1;2,1,0;1,0;1)}$

Bibliographie

- [1] H. Jack. *A class of symmetric polynomials with a parameter*. Proc. R. Soc. Edinburgh. Sect. A. Math. Phys. Sci. **69**, (1970) 1–18.
- [2] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press (1998).
- [3] R. P. Stanley. *Some combinatorial properties of Jack symmetric functions*. Adv. Math. (N. Y). **77**, (1989) 76–115.
- [4] P. Forrester. *Selberg correlation integrals and the quantum many-body system*. Nucl. Phys. B **388**, (1992) 671–699.
- [5] L. Lapointe et Luc Vinet. *A Rodrigues formula for the Jack polynomials and the Macdonald-Stanley conjecture*. Int. Math. Res. Not. **1995**, (1995) 419–424.
- [6] E. M. Opdam. *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*. Acta Math. **175**, (1995) 75–121.
- [7] F. Knop et S. Sahi. *A recursion and a combinatorial formula for Jack polynomials*. Invent. Math. **128**, (1997) 9–22.
- [8] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake et J. Shiraishi. *A Note on Calogero-Sutherland model, $W(n)$ singular vectors and generalized matrix models*. Soryushiron Kenkyu **91**, (1995) A69–A75.
- [9] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake et J. Shiraishi. *Excited states of the Calogero-Sutherland model and singular vectors of the WN algebra*. Nucl. Phys. B **449**, (1995) 347–374.
- [10] B. S. Shastry et B. Sutherland. *Super Lax pairs and infinite symmetries in the $1/r^2$ system*. Phys. Rev. Lett. **70**, (1993) 4029–4033.
- [11] D. Z. Freedman et P. F. Mende. *An exactly solvable N -particle system in supersymmetric quantum mechanics*. Nucl. Phys. B **344**, (1990) 317–343.
- [12] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Supersymmetric Calogero–Moser–Sutherland models and Jack superpolynomials*. Nucl. Phys. B **606**, (2001) 547–582.

- [13] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Supersymmetric Calogero-Moser-Sutherland models : superintegrability structure and eigenfunctions*. Superintegrability Class. quantum Syst. **137**, (2004) 109–124.
- [14] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Jack polynomials in superspace*. Commun. Math. Phys. **242**, (2003) 331–360.
- [15] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Classical symmetric functions in superspace*. J. Algebr. Comb. **24**, (2006) 209–238.
- [16] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Orthogonality of Jack polynomials in superspace*. Adv. Math. (N. Y). **212**, (2007) 361–388.
- [17] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Superconformal field theory and Jack superpolynomials*. J. High Energy Phys. **2012**, (2012) 37.
- [18] L. Alarie-Vezina, P. Desrosiers et P. Mathieu. *Ramond singular vectors and Jack superpolynomials*. J. Phys. A Math. Theor. **47**, (2013) 035202.
- [19] O. Blondeau-Fournier, P. Mathieu, D. Ridout et S. Wood. *The super-Virasoro singular vectors and Jack superpolynomials relationship revisited*. Nucl. Phys. B **913**, (2016) 34–63.
- [20] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Macdonald polynomials in superspace : conjectural definition and positivity conjectures*. Lett. Math. Phys. **101**, (2012) 27–47.
- [21] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Macdonald polynomials in superspace as eigenfunctions of commuting operators*. J. Comb. **3**, (2012) 495–561.
- [22] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers et P. Mathieu. *Supersymmetric Ruijsenaars-Schneider model*. Phys. Rev. Lett. **114**, (2015) 121602.
- [23] F. Calogero. *Solution of a three-body problem in one dimension*. J. Math. Phys. **10**, (1969) 2191.
- [24] F. Calogero. *Ground state of a one-dimensional N-body system*. J. Math. Phys. **10**, (1969) 2197.
- [25] F. Calogero. *Solution of the One-Dimensional N -body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials*. J. Math. Phys. **12**, (1971) 419–436.
- [26] B. Sutherland. *Quantum many-body problem in one dimension : ground state*. J. Math. Phys. **12**, (1971) 246.
- [27] B. Sutherland. *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension*. Phys. Rev. A **4**, (1971) 2019–2021.
- [28] B. Sutherland. *Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. II*. Phys. Rev. A **5**, (1972) 1372–1376.

- [29] J. Moser. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*. Adv. Math. (N. Y). **220**, (1975) 197–220.
- [30] I. Cherednik. *A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras*. Invent. Math. **106**, (1991) 411–431.
- [31] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane et V. Pasquier. *Yang-Baxter equation in long-range interacting systems*. J. Phys. A. Math. Gen. **26**, (1993) 5219.
- [32] T. H. Baker et P. J. Forrester. *Non-Symmetric Jack polynomials and integral kernels*. Duke Math. J. **95**, (1998) 1—50.
- [33] E. Witten. *Dynamical breaking of supersymmetry*. Nucl. Physics, Sect. B **188**, (1981) 513–554.
- [34] F. Cooper, A. Khare et U. Sukhatme. *Supersymmetry in quantum mechanics*. World Scientific (2001).
- [35] L. Alarie-Vézina, L. Lapointe et P. Mathieu. *$N \geq 2$ symmetric superpolynomials*. J. Math. Phys. **58**, (2017) 033503.
- [36] I. Pak. *Partition bijections, a survey*. Ramanujan J. **12**, (2006) 5–75.
- [37] S. Corteel et J. Lovejoy. *Overpartitions*. Trans. Am. Math. Soc. **356**, (2004) 1623–1636.
- [38] J. Lovejoy. *Overpartition pairs*. Ann. l’institut Fourier, vol. 56 (2006), 781–794.
- [39] T. H. Baker, C. F. Dunkl et P. J. Forrester. *Polynomial eigenfunctions of the Calogero—Sutherland—Moser models with exchange terms*. Calogero—Moser— Sutherl. Model., 2. Springer New York, New York, NY (2000), 37–51.
- [40] N. Wyllard. *(Super)conformal many-body quantum mechanics with extended supersymmetry*. J. Math. Phys. **41**, (2000) 2826.
- [41] L. Alarie-Vézina, L. Lapointe et P. Mathieu. *$\mathcal{N} = 2$ supersymmetric Calogero-Sutherland model and related Jack superpolynomials* Article en préparation.
- [42] P. Desrosiers, L. Lapointe et P. Mathieu. *Jack superpolynomials with negative fractional parameter : clustering properties and super-Virasoro ideals*. Commun. Math. Phys. **316**, (2012) 395–440.
- [43] L. Brink, T. Hansson, S. Konstein et M. Vasiliev. *The Calogero model — anyonic representation, fermionic extension and supersymmetry*. Nucl. Phys. B **401**, (1993) 591–612.